АРТИЛЛЕРИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ РККА им. ДЗЕРЖИНСКОГО

М. К. КУРЕНСКИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Книга вторая

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Уравнения с частными производными 1-го и 2-го порядков при одной неизвестной функции. Уравнения с частными производными 1-го и 2-го порядков при двух и больше неизвестных функциях. Понятие об интегральных уравнениях. Уравнения математической физики. Примеры и задачи №№ 205—300.

ИЗДАНИЕ
Артиллерийской академии РККА им. Дзержинского
ЛЕНИНГРАД
1934

ЭЙЛЕР — Санкт-Петербург — 1734

— таковы автор, место и время появления первой статьи, относящейся к интегрированию дифференциальных уравнений с частными производными, т. е. к области, изучению которой посвящены главы VII — XII, составляющие вторую книгу курса „Дифференциальные уравнения“.

На протяжении исполняющегося в 1934 году двухсотлетия теория уравнений с частными производными получила достаточное развитие и разработку. В настоящее время некоторые из ее отделов обладают самостоятельной, вполне законченной классической теорией. Такими отделами являются, например: интегрирование линейных и нелинейных уравнений с частными производными первого порядка при одной неизвестной функции; интегрирование линейных уравнений с частными производными второго и высших порядков при одной неизвестной функции и при постоянных коэффициентах, с начальными и граничными условиями, т. е. уравнений, относящихся к области математической физики.

На русском языке было опубликовано несколько литографированных и печатных курсов, специальных монографий и диссертаций, охватывающих только что упомянутые отделы теории интегрирования уравнений с частными производными и касающихся содержания глав VII, VIII и XII этой книги. Существуют также специальные диссертации об уравнениях с частными производными второго порядка при одной неизвестной функции, относящиеся к материалу главы IX.

Вторая книга „Дифференциальных уравнений“ представляет собой попытку объединения в одно целое наиболее существенных результатов исследований различных ученых в области интегрирования уравнений с частными производными первого и высших порядков при одной неизвестной функции. В главе X она содержит также и некоторые из моих результатов, относящихся к интегрированию уравнений с частными производными первого и второго порядков при двух и больше неизвестных функциях нескольких независимых переменных.

Мои выводы, изложенные иногда по необходимости в сжатой форме, а иногда — в виде окончательных формул, содержат, как частный случай, при $n=1$, те формулы, которые получаются по изучаемым в главах VII, VIII методам Шарпи—Лагранжа и Якоби интегрирования уравнений первого порядка при одной неизвестной функции и формулы данного в главе IX метода Дарбу — Форзайса интегрирования уравнений второго порядка при одной функции. Никаких других способов для разыскания хотя бы частных интегралов подобных уравнений,—если они не линейны, имеют больше двух независимых переменных и, для линейных уравнений, не подчинены ряду ограничительных условий для коэффициентов, — не существует, и в то же время с рассматриваемыми в главе X уравнениями приходится часто иметь дело при решении многих задач чистой и прикладной математики.

Этой второй книгой „Дифференциальных уравнений“ можно было бы закончить как общий курс дифференциальных уравнений, так и общий курс математики для высшей технической школы и университета. Разнообразные специальные вопросы могут быть изложены в дальнейших книгах „Дифференциальных уравнений“. В частности, материал, нужный для аспирантов-математиков, вызывает потребность в книге третьей — *„Аналитическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений“*, и в книге четвертой — *„Специальные вопросы теории интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными“*.

ГЛАВА VII.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ 1-го ПОРЯДКА.

Эта глава представляет собой первую и основную главу, в которой изучается теория интегрирования уравнений с частными производными. Ей надо уделить достаточное внимание и основательно проработать, не опуская ни одного абзаца и параграфа, кроме разве § 61, где идет речь о приложении теории интегрирования одного линейного уравнения с частными производными к решению ряда геометрических задач: в этом параграфе, в крайнем случае, можно ограничиться рассмотрением дифференциального уравнения цилиндрических поверхностей и уравнения поверхностей тел вращения.

Изучивши основательно первый и второй параграфы этой главы, где даны основные понятия об уравнениях и о системах уравнений с частными производными 1-го порядка и где изложена более подробная, чем в главе I, теория интегралов уравнений и систем уравнений — общих, полных, особенных и полуособенных, и где даны указания о том, как от полного интеграла перейти к общему, — следует приступить к изучению в §§ 60, 62 и 63 способов интегрирования уравнений и систем уравнений только тогда, когда как следует усвоены будут такие основные понятия, как, например, понятие о полноте системы, об инволюционности ее и т. д. Ни в коем случае нельзя пропускать примеров, помещенных в тексте, и, переходя к усвоению дальнейшего материала, обязательно надо решить самостоятельно соответствующий пример из тех, которые находятся в конце главы. Для интегрирования систем уравнений даны 2 способа: способ Майера и способ Якоби. Для решения задач на практике, — большие преимущества на стороне первого из них.

Некоторые мои выводы читатель найдет в конце § 59. Они относятся к теории перехода от полного к общему интегралу для нелинейных уравнений.

Литература:

В. Г. Имшенецкий — Об интегрировании уравнений с частными производными 1-го порядка. Казань, 1865 (фр. перевод в Archiv f. Math. u. Physik, 1869).

Г. В. Пфейффер — Интегрирование уравнений с частными производными, ч. I, Киев, 1914 (литогр.) — Обобщение способа Jacobi интегрирования полных систем линейных однородных уравнений; обобщение соответствующих исследований Clebsch'a (Известия Академии наук СССР, 1931; Доклады Академии наук СССР, 1930) (также статьи в Записках фіз.-мат. Від. Укр. Акад. Наук, 1921—1933).

М. А. Тихомандрицкий — Курс диффер. и интегр. исчислений, т. II: инт. диф. уравнений, Харьков, 1903, гл. XXI.

Euler — De infinitis curvis ejusdem gradis... (Com. Ac. Sc. Petrop., t. 7, 1734—1735; 1740, p. 174, 184).

D'Alambert — Sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration (Histoire de l'Académie de Berlin, 1747, t. 3, p. 14—49).

Euler — Institutiones Calculi Integralis, t. 3, 4 éd., 1914, pp. 35—87.

Lagrange — Sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre (Oeuvres complètes, t. 3, 547, t. 4, 5).

Monge — Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles (Histoire de l'Acad. des Sc., 1784, p. 527).

N. N. Saltykow — Méthodes classiques d'intégration des équations aux derivées partielles du premier ordre (Mémorial des Sc. Math., fs. 50, Paris, 1931).

E. Goursat — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du 1-er ordre, Paris, 1921, Ch. II—III.

P. Mansion — Théorie des équations aux dérivées partielles du 1-er ordre. Paris, 1891.

A. R. Forsyth — Theory of differentiel equations, vol. V, Cambridge, 1906; Ch. III, V, VII.

М. Куренський — Про інтегрування диф. рівнянь з частк. похідними при багатьох залежних змінних, Київ, 1927, розд. VI.

§ 58. Типы уравнений с частными производными. Системы вполне интегрируемые. Переходя к интегрированию дифференциальных уравнений с частными производными, начнем с уравнений 1-го порядка *при одной неизвестной функции z от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$.*

Теория интегрирования таких уравнений достаточно хорошо разработана и может считаться теорией вполне законченной в своих основах. Большим недостатком в теории интегрирования уравнений с частными производными 1-го порядка является то обстоятельство, что *интегрирование как одного только уравнения 1-го порядка, так и системы таких уравнений сводится к интегрированию системы совокупных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка*, а интегрирование таких уравнений мы можем довести до конца только в некоторых специальных, простых случаях.

С интегрированием уравнений 2-го и высших порядков при одной неизвестной функции дело обстоит гораздо хуже: теперь рассматривают и пишут больше об уравнениях 2-го порядка при одной неизвестной функции z и при 2 ее аргументах x, y, разрабатывая более основательно теорию таких уравнений; теория уравнений 2-го порядка и выше при 3 независимых переменных и больше значительно сложнее.

Что касается уравнений 1-го и высших порядков при двух и больше неизвестных функциях $z_1, z_2, \ldots$, — то их начали изучать только в недавнее время.

Теории уравнений с частными производными в этом году исполняется 200 лет: родилась она в 1734 г., в Петербурге, в виде статьи знаменитого Эйлера „De infinitis curvis ejusdem gradis...“ [Com. Ac. Sc. Petrop., t. 7 (1734—1735), 1740, p. 174, 184]. Идея Эйлера состояла в том, чтобы свести интегрирование уравнений с частными производными к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Это положение осталось неизменным на протяжении двух сот лет, — в настоящее время всякий прогресс в области интегрирования уравнений с частными производными тесно связан с применением упомянутой идеи Эйлера. Через 13 лет Даламбер, в знаменитой работе о колебании струны, устанавливает два принципа для процесса интегрирования уравнений с частными производными: 1) величина второй производной функции двух независимых переменных не зависит от порядка дифференцирования относительно аргументов, — теорема Эйлера; 2) для интегрирования уравнения с частными производными надо образовать полный дифференциал, чтобы посредством двух зависимостей

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

найти интеграл последнего уравнения. Спустя еще 20 лет, в 1768—1770 годах появляются знаменитые Эйлеровы Institutiones Calculi Integralis, третий том которых посвящен был уравнениям с частными производными. Здесь Эйлером применяются только что указанные принципы и интегрируется целый ряд уравнений. Все время Эйлер придерживается двух положений: 1) свести задачу интегрирования уравнения с частными производными к задаче интегрирования уравнений обыкновенных; 2) свести к квадратуре 1-е уравнение в полных дифференциалах с помощью заданного 2-го из вышенаписанных уравнений. Наконец, он пишет условие для полного дифференциала, если в выражении

$$dz = pdx + qdy$$

p и q будут функциями от x, y и z, — это классическое условие вида:

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p.$$

Впоследствии Лагранж установил теорему обратную Эйлеровой: предпоследнее выражение становится уравнением в полных дифференциалах, как только переменная q, функция от x, y, z, удовлетворяет последнему уравнению, — условию Эйлера. Заметим, в заключение этого исторического очерка, что все интегралы, найденные Эйлером, связаны с *произвольной* функцией; приписывая ей частные значения, Эйлер получает интегралы, называемые им частными интегралами.

При интегрировании уравнений с частными производными 1-го порядка *могут встретиться такие случаи:* 1) заданное для интегрирования уравнение есть линейное и однородное относительно производных; коэффициенты его—функции только от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$; 2) уравнение линейное неоднородное, с коэффициентами—функциями зависимого переменного z и независимых $x_1, x_2, \ldots x_n$; 3) система m линейных уравнений; 4) одно уравнение, нелинейное относительно производных; 5) система m нелинейных уравнений. В дальнейшем мы рассмотрим отдельно каждую из этих 5 категорий.

Можно доказать такую *основную общую теорему о существовании интегралов уравнений 1-го порядка*, пригодную для всех наших 5 отдельных случаев.

Пусть задана будет система m независимых уравнений 1-го порядка с n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n$ при одной неизвестной функции z. Пусть, далее, эта система решена относительно производных $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_m}$ и записана в таком *нормальном виде:*

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial x_1} = f_1\left(x_1, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \\ &\frac{\partial z}{\partial x_2} = f_2(\ldots);\ \ldots \frac{\partial z}{\partial x_m} = f_m(\ldots). \end{aligned}\right.$$

Если: 1) заданные функции $f_1, \ldots f_m$ удовлетворяют особым дифференциальным зависимостям, которые называются условиями совместимости дифференциальных уравнений и будут изложены подробно в следующих параграфах, причем число этих условий будет

$$C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2},$$

т. е. для одного уравнения, когда $m=1$, будет $m-1=0$ и никаких условий совместимости не требуется; если, далее, 2) функции $f_1, \ldots f_m$ представляют собой функции однозначные, конечные и такие, что их можно, по теореме Тейлора, разложить в бесконечные ряды степеней разностей вида

$$x_1 - a_1, \ldots x_m - a_m, \ldots x_n - a_n; \; z - b; \; \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}} - c_1, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n} - c_{n-m},$$

или, как говорят, если наши функции $f_1, \ldots f_m$ будут *голоморфны в области точки* $(a_1, \ldots a_n, b, c_1, \ldots c_{n-m})$ многомерного пространства; если, наконец, 3) выбрать какую-угодно функцию

$$\varphi(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n),$$

лишь бы она была голоморфной около точки $(a_{m+1}, \ldots a_n)$ и для

$$x_{m+1} = a_{m+1}, \ldots x_n = a_n$$

принимала бы вместе со своими первыми производными заранее заданные численные значения b и c по формулам

$$\varphi(a_{m+1}, \ldots, a_n) = b; \; \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+1}}\right|_{x_{m+1}=a_{m+1} \ldots x_n = a_n} = c_1; \ldots \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right|_{x_{m+1}=a_{m+1} \ldots x_n = a_n} = c_{n-m},$$

тогда *наша система дифференциальных уравнений 1-го порядка допускает один и только один интеграл*

$$z = F(x_1, \ldots x_n)$$

такой, который будет голоморфным около точки $(a_1, \ldots a_m, a_{m+1} \ldots a_n)$ и обращается в заранее заданную функцию $\varphi(x_{m+1}, \ldots x_n)$, как только в выражение $F(x_1, \ldots x_n)$ подставим численное значение первых m x-ов:

$$x_1 = a_1, \ldots x_m = a_m.$$

Интеграл, удовлетворяющий указанным условиям, называется *интегралом Коши*.

Условия совместимости системы m дифференциальных уравнений, упомянутые в пункте 1), могут удовлетворяться либо на основании самих уравнений заданной системы, либо могут представлять собою тождества. В первом случае систему заданных уравнений будем называть *системой вполне интегрируемой*, а во-втором — *инволюционной*.

Надо иметь в виду следующее обстоятельство, которым иногда приходится пользоваться при интегрировании уравнения или системы уравнений 1-го порядка.

Всякое дифференциальное уравнение, а равным образом и *всякая система уравнений могут быть преобразованы в такие, которые не содержат явно неизвестной функции*. Однако в этом новом уравнении или в системе уравнений *количество независимых переменных увеличивается на единицу*. Разъясним это для одного уравнения

$$f\left(x_1, \ldots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (1)$$

Проинтегрировать это уравнение—это значит найти такую функцию $F(x_1, \ldots x_n, z)$, чтобы уравнение

$$F(x_1, \ldots x_n, z) = 0$$

определяло функцию z, удовлетворяющую заданное дифференциальное уравнение.

Дифференцируя предыдущее уравнение, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

и подстановка выражений для производных

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

в заданное дифференциальное уравнение приводит к новому уравнению с $(n+1)$-й независимой переменной $x_1, \ldots x_n, z$ и с одной новой неизвестной функцией F вида:

$$f\left(x_1, \ldots x_n, z, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \ldots -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right) = 0,$$

или иначе

$$f_1\left(x_1, \ldots x_n, z, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0. \quad (2)$$

Очевидно, что всякая функция $F(x_1, \ldots x_n, z)$, удовлетворяющая этому уравнению, будет удовлетворять также и уравнению (1). Однако интегрированием уравнения (2) нельзя получить всех интегралов уравнения (1): мы сможем, как это не трудно доказать,— получить все неособенные интегралы уравнения (1) из интегралов уравнения (2) и не получим интегралов особенных. Если уравнению (2) удовлетворяет некоторая функция $F(x_1, \ldots x_n, z)$, то ему будет удовлетворять также и функция $F+C$. Поэтому всякий интеграл z уравнения (1), не зависящего от параметра C, будет содержаться в интеграле, содержащем произвольный параметр C и определяемом конечным уравнением

$$F(x_1, \ldots x_n, z) + C = 0.$$

Для той же самой цели употребляется еще так называемая *вторая подстановка Якоби,* вида

$$y = zt,$$

где t есть новая независимая переменная, y — новая функция и z — старая функция от $x_1, \dots x_n$, не зависящая от нового аргумента t. Значение этой 2-й подстановки Бертран нарушил, между прочим, настолько, что В. Г. Имшенецкий считал ее совсем бесполезной; однако дальнейшие работы выдающихся специалистов в области теории уравнений с частными производными, Софуса Ли и Майера, дали ей в науке все права гражданства.

§ 59. Об интегралах уравнений с частными производными 1-го порядка. В главе I мы назвали *общим интегралом одного уравнения 1-го порядка* с n независимыми переменными $x_1, \dots x_n$ такой интеграл, который содержит одну произвольную функцию φ от $(n-1)$-го независимых аргументов $u_1, \dots u_{n-1}$, являющихся определенными функциями независимых переменных $x_1, \dots x_n$ и зависимой z. *Для системы m уравнений* 1-го порядка общий интеграл должен содержать в своем выражении одну произвольную функцию φ от $n-m$ аргументов $u_1, \dots u_{n-m}$.

Полный интеграл для одного уравнения должен иметь n существенных произвольных постоянных $C_1, \dots C_n$, а для системы m уравнений — всего $n-m+1$ постоянных $C_1, \dots C_{n-m+1}$.

Интегралы с меньшим количеством аргументов $u_1, u_2, \dots$ в произвольной функции φ и с меньшим числом постоянных $C_1, C_2, \dots$ будут лишь *частными интегралами.* Простейшими из частных интегралов дифференциальных уравнений, которыми пользуются обычно для построения полных и общих интегралов, являются те, которые имеют в своих выражениях лишь по одной произвольной постоянной C. Независимых интегралов этого рода будет n для одного уравнения и $n-m+1$ для системы m уравнений. Эти независимые интегралы должны быть разрешимыми относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots$; тогда в уравнениях

$$C_1 = u_1(x_1, \dots x_n, z);\ C_2 = u_2(x_1, \dots x_n, z); \dots$$

первые части $u_1, u_2, \dots$ и будут теми функциями u, о которых мы говорили в начале этого параграфа. Для интегрирования уравнений с частными производными 1-го порядка и надо как раз найти n таких независимых функций $u_1, u_2, \dots$, в случае одного дифференциального уравнения, и $n-m+1$ независимых функций $u_1, \dots u_{n-m+1}$ для того случая, когда задана для интегрирования система m уравнений.

Легко видеть, что *исключение n произвольных постоянных $C_1, \dots C_n$* из конечного уравнения, содержащего эти n постоянных, и из n уравнений, полученных дифференцированием этого конечного уравнения соответственно по $x_1, \dots x_n$, дает одно уравнение с частными производными 1-го порядка, а исключение $k = n-m+1$ произвольных постоянных $C_1, \dots C_{n-m+1}$, при $m < n$, т. е. $n < k < 1$, из конечного уравнения с только что указанным количеством постоянных C и из n уравнений, полученных дифференцированием конечного уравнения по x_1, потом по x_2 и т. д.,—приведет к системе m дифференциальных уравнений 1-го порядка.

При $m = n$, $k = 1$, когда имеем для исключения одну произвольную постоянную C_1, получим, очевидно, систему $(n-1)$-го дифференциального уравнения 1-го порядка.

Гораздо сложнее обстоит дело в том случае, когда *для исключения имеем число произвольных постоянных k, большее или равное числу независимых переменных,* т. е. когда $k \geqslant n$. Для исключения всех постоянных $C_1, \dots C_k$ из конечного уравнения, нельзя ограничиться только производными 1-го порядка, — конечное уравнение надо будет дифференцировать по $x_1, \dots x_n$ два и большее число раз. В результате исключения получим дифференциальные уравнения 2-го и высших порядков, при этом, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, число уравнений с частными производными порядка 2-го и выше возрастает значительно быстрее порядка дифференциальных уравнений с частными производными. Произведем надлежащий расчет.

Число частных производных s-го порядка от одной функции z n независимых переменных $x_1, \dots x_n$ будет

$$\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+s-1)}{s!}.$$

Поэтому число N всех частных производных от 1-го и до s-го порядка включительно будет:

$$N = n + \frac{n(n+1)}{2!} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+s-1)}{s!}.$$

Число уравнений, полученных в результате дифференцирования конечного уравнения, вместе с этим конечным уравнением, содержащим k произвольных постоянных $C_1, \dots C_k$, будет $N+1$. Если $N=k$, получим после исключения одно дифференциальное уравнение s-го порядка; если $N \neq k$, то надо взять такое число s, чтобы было $N > k$, — тогда будем иметь систему $N-k+1$ уравнений с частными производными s-го порядка.

Хотя нам и надо находить общий интеграл уравнения или системы уравнений, который только и дает совершенно полный ответ на задачу интегрирования, однако мы будем в дальнейшем искать и писать вообще только полный интеграл уравнения или системы уравнений 1-го порядка, так как, пользуясь интегралами $u_1, u_2, \dots$, о которых мы только что говорили и к разысканию которых переходим в следующих параграфах, мы сможем построить вообще только полный интеграл с соответствующим числом произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots$ Исключение представляют *линейные однородные или неоднородные уравнения и системы таких уравнений;* для них можно, найдя соответственное число интегралов $u_1, u_2, \dots$, *сразу написать и общий интеграл, и полный интеграл.* Что же касается *нелинейных уравнений и систем уравнений,* то для них будем строить *интегралы полные.* Существует, правда, *способ вариации произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots$* для перехода от полного интеграла к общему интегралу, годный как для линейных, так и для нелинейных уравнений, однако вариация произвольных постоянных сложна для выполнения и может привести к общему интегралу, требующему определения неизвестных функций $C_1, C_2, \dots C_{n-1}$, больше тогда, когда, например, для одного нелинейного уравнения полный интеграл имеет такую форму:

$$z=F(x_1,\dots x_n,\ C_1,\dots C_{n-1})+C_n,$$

или такую:

$$z=f_1(x_1,\dots x_n,\ C_1,\dots C_{n-1})+C_nf_2(x_1,\dots x_n).$$

Сущность способа вариации произвольных постоянных для одного дифференциального уравнения

$$f\left(x_1,\dots x_n,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x_1},\dots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0 \tag{3}$$

состоит в следующем. Положим, что мы нашли полный интеграл этого уравнения

$$F(x_1,\dots x_n,\ z;\ \ C_1,\dots C_n)=0, \tag{4}$$

где $C_1,\dots C_n$ обозначают произвольные постоянные. Если бы мы продифференцировали последнее уравнение по x_1, по $x_2,\dots$ по x_n, то исключение n постоянных $C_1,\dots C_n$ из уравнения (4) и из n уравнений, полученных дифференцированием:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}=0,\dots \frac{\partial F}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_n}=0 \tag{5}$$

должно привести к уравнению (3). Будем теперь считать, что величины $C_1,\dots C_n$ также являются функциями всех переменных $x_1,\dots x_n$, z. Тогда дифференцирование уравнения (4) даст вместо (5) такие n уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial C_k}\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_1}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{\partial F}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial C_k}\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_n}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0.\end{gathered} \tag{6}$$

Очевидно, что уравнения (6) совпадут с уравнениями (5) и в результате исключения величин $C_1,\dots C_n$ с помощью уравнения (4) приведут к заданному дифференциальному уравнению (3) в том случае, когда n величин $C_1,\dots C_n$ будут определяться системой таких n уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial C_k}\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_1}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)=0;\dots \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial C_k}\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_n}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0. \tag{7}$$

Этой системе уравнений можно удовлетворить такими тремя способами.

1) Полагая

$$\frac{\partial C_k}{\partial x_1}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}=0;\quad \dots \frac{\partial C_k}{\partial x_n}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}=0,$$

или иначе.

$$\frac{dC_k}{dx_1}=0;\quad \dots \frac{dC_k}{dx_n}=0,$$

т.-е.

$$C_1=\text{const},\ C_2=\text{const},\dots C_n=\text{const},$$

что соответствует *полному интегралу (4)*.

2) Полагая

$$\frac{\partial F}{\partial C_1}=0,\ \frac{\partial F}{\partial C_2}=0,\dots \frac{\partial F}{\partial C_n}=0,$$

что дает n уравнений, получаемых из уравнения (4), для определения неизвестных n функций

$$C_1=f_1(x_1,\dots x_n,\ z);\ \dots\ C_n=f_n(x_1,\dots x_n,\ z);$$

если внесем найденные таким путем выражения для $C_1,\dots C_n$ в уравнение (4), то мы можем получить интеграл, не содержащий произвольных элементов $C_1,\ C_2,\dots C_n$, т. е. интеграл вида

$$\omega(x_1,\dots x_n,z)=0,$$

который будет *особенным интегралом* заданного дифференциального уравнения, представляющим обертку всех полных интегралов—сверхповерхностей $(n+1)$-мерного пространства, получаемых при малых изменениях параметров $C_1,\dots C_n$.

3) Нашей системе n уравнений (7), линейных относительно n величин $\frac{\partial F}{\partial C_1},\dots\frac{\partial F}{\partial C_n}$, входящих во все уравнения системы (7), можно удовлетворить, наконец, полагая, что эти n линейных уравнений зависимы между собою, т.-е. что определитель из коэффициентов при упомянутых n величинах равен нулю. Этот определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial C_1}{\partial x_1}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}, & \dots & \frac{\partial C_n}{\partial x_1}+\frac{\partial C_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial C_1}{\partial x_n}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}, & \dots & \frac{\partial C_n}{\partial x_n}+\frac{\partial C_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\end{vmatrix}=0$$

или

$$\begin{vmatrix}\frac{dC_1}{dx_1}, & \dots & \frac{dC_1}{dx_n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{dC_n}{dx_1}, & \dots & \frac{dC_n}{dx_n}\end{vmatrix}=0,$$

т. е.

$$D\left(\frac{C_1,\ C_2,\dots C_n}{x_1,\ x_2,\dots x_n}\right)=0,$$

что указывает на существование одной или нескольких зависимостей какого-угодно вида между функциями $C_1(x_1,\dots x_n,\ z),\dots C_n(x_1,\dots x_n\ z)$. Пусть между функциями $C_1,\dots C_n$ существует одна зависимость. Напишем ее в виде

$$C_n=\varphi(C_1,\dots C_{n-1}),$$

где φ есть символ произвольной функции от независимых между собою аргументов $C_1,\dots C_{n-1}$, так что функциональный определитель $(n-1)$-го порядка не равен нулю. Дифференцирование по $x_1,\dots x_n$ дает:

$$\begin{gathered}\frac{\partial C_n}{\partial x_1}+\frac{\partial C_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial C_i}\left(\frac{\partial C_i}{\partial x_1}+\frac{\partial C_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{\partial C_n}{\partial x_n}+\frac{\partial C_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial C_i}\left(\frac{\partial C_i}{\partial x_n}+\frac{\partial C_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right).\end{gathered}$$

Подставляя во все n уравнений (7) вместо множителей в последних членах $\frac{\partial C_n}{\partial x_1}+\frac{\partial C_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial C_n}{\partial x_n}+\frac{\partial C_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}$, их выражения из последних равенств, получим такие n уравнений:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial F}{\partial C_k}+\frac{\partial F}{\partial C_n}\cdot\frac{\partial C_n}{\partial C_k}\right)\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_1}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial F}{\partial C_k}+\frac{\partial F}{\partial C_n}\cdot\frac{\partial C_n}{\partial C_k}\right)\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_n}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0.\end{gathered}\tag{8}$$

Из них одно есть следствие остальных $(n-1)$-го. Взявши $(n-1)$ уравнений из всех n, будем иметь систему $(n-1)$-го независимых линейных однородных уравнений, для которых определитель из коэффициентов, представляющий собою функциональный определитель $(n-1)$-го порядка из $C_1,\dots C_{n-1}$ не равен нулю. Следовательно, по известному свойству алгебраических линейных однородных уравнений, должны равняться нулю все первые множители в левых частях уравнений (8), и, следовательно, система (8) равносильна такой системе $(n-1)$-го уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial C_1}+\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial C_1}=0;\ \dots\ \frac{\partial F}{\partial C_{n-1}}+\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{n-1}}=0.$$

Интеграл, определяемый совокупностью n уравнений

$$\begin{gathered}F(x_1,\dots x_n,\ z,\ C_1,\dots C_{n-1},\varphi)=0,\\ \frac{\partial F}{\partial C_1}+\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial C_1}=0;\ \dots\ \frac{\partial F}{\partial C_{n-1}}+\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{n-1}}=0,\end{gathered}\tag{9}$$

где φ обозначает произвольную функцию от функций $C_1,\dots C_{n-1}$, будет *общим интегралом. Задача определения вида функций* $C_1,\dots C_{n-1}$ от аргументов $x_1,\dots x_n$, z посредством предшествующих уравнений довольно трудна для полного решения.

Если бы мы положили, что между функциями $C_1,\dots C_n$ существует не одна, а m зависимостей, тогда совершенно аналогичным путем пришли бы к интегралу, определяемому системой $(n-m+1)$-го уравнений

$$F(x_1,\dots x_n,\ z,\ C_1,\dots C_{n-m},\ \varphi_1,\dots\varphi_m)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial C_1}+\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial\varphi_h}\cdot\frac{\partial\varphi_h}{\partial C_1}=0;\ \dots\ \frac{\partial F}{\partial C_{n-m}}+\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial\varphi_h}\cdot\frac{\partial\varphi_h}{\partial C_{n-m}}=0,$$

где $\varphi_1,\dots\varphi_m$ обозначают произвольные фукции от $n-m$ функций $C_1,\dots C_{n-m}$. Такой интеграл с m произвольными функциями от $n-m$ аргументов каждая будет менее общим, чем интеграл (9) с одной только произвольной функцией φ, но от $(n-1)$-го аргумента, и, по Мансьону, называется *полуособенным интегралом.*

Решение вопроса о переходе от полного интеграла к общему закончить,—как это обычно делается во всех полных руководствах по

дифференциальным уравнениям с частными производными, — указанием на то, что общий интеграл определится системой (9), это значит не дать полного ответа на задачу, так как остается нерешенной наиболее существенная ее часть, — как именно найти функции $C_1,\dots C_{n-1}$.

Для решения этого вопроса, обозначая для удобства записи $y_1,\dots y_n$, y_{n+1} вместо $x_1,\dots x_n$, z, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial C_1}\frac{\partial C_1}{\partial y_i}+\dots+\frac{\partial\varphi}{\partial C_{n-1}}\frac{\partial C_{n-1}}{\partial y_i}\quad(i=1,\dots n,\ n+1),$$

и имея в виду последние $n-1$ уравнений (9), воспользуемся тождествами

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_i\partial y_j}\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_j\partial y_i}$$

$$(i,\ j=1,\dots n+1;\ i\neq j)$$

в количестве $\frac{n(n+1)}{2}$. Мы получим систему $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений линейных и однородных относительно частных производных 1-го порядка от $(n-1)$-й неизвестных функций $C_1,\dots C_{n-1}$ независимых переменных $y_1,\dots y_n$, y_{n+1}. Такая система будет вообще содержать и произвольную функцию φ. Ее можно интегрировать и определять искомые функции $C_1,\dots C_{n-1}$ для тех видов функции

$$F(x_1,\dots x_n,\ z,\ C_1,\dots C_{n-1},\ \varphi),$$

т. е. иначе — для такой формы полного интеграла

$$F(x_1,\dots x_n,\ z,\ C_1,\dots C_n)=0,$$

когда произвольная функция φ не будет содержаться во всех коэффициентах всех $\frac{n(n+1)}{2}$ линейных уравнений. Для определения функций $C_1,\dots C_{n-1}$ достаточно будет найти $n-1$ независимых частных интегралов системы, отличных от постоянных.

Допустим, например, что полный интеграл имеет вид

$$z=\Phi(x_1,\dots x_n,\ C_1,\dots C_{n-1},\ C_n),$$

и что мы ищем общий интеграл вида

$$z=\Phi(x_1,\dots x_n,\ C_1,\dots C_{n-1},\ \varphi),$$

считая величины $C_1,\dots C_{n-1}$ функциями только от $x_1,\dots x_n$, а φ — произвольной функцией от искомых функций $C_1,\dots C_{n-1}$. Тогда в последних $n-1$ уравнениях (9) останется заменить только букву F буквой Φ, и для определения неизвестных функций $C_1,\dots C_{n-1}$ после соответственных вычислений будем иметь систему таких $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial C_k\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial C_k}\right)\frac{\partial C_k}{\partial x_j}+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi\,\partial x_j}\frac{\partial\Phi}{\partial C_k}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial C_k\partial x_j}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial C_k}{\partial x_i}\right]=0\tag{10}$$

$$(i,\ j=1,\dots n;\ i\neq j).$$

Эту систему можно интегрировать тогда, когда коэффициенты при $\frac{\partial C_k}{\partial x_j}$, $\frac{\partial C_k}{\partial x_i}$ не содержат произвольной функции φ. Один подобный случай будем иметь тогда, когда система (10) сводится к такой:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial C_k\partial x_i}\frac{\partial C_k}{\partial x_j}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial C_k\partial x_j}\frac{\partial C_k}{\partial x_i}\right]=0, \tag{11}$$

что соответствует полному интегралу z с *добавочной постоянной* C_n вида

$$z=\Phi(x_1,\dots x_n,\ C_1,\dots C_{n-1})+C_n,$$

которым *всегда* обладает дифференциальное уравнение, не содержащее явно неизвестной функции z:

$$f\left(x_1\ \dots\ x_n;\frac{\partial z}{\partial x_1},\ \dots\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0.$$

Другой случай получим тогда, когда дифференциальное уравнение обладает полным интегралом формы

$$z=\Phi_1(x_1,\dots x_n,\ C_1,\dots C_{n-1})+C_n\Phi_2(x_1,\dots x_n),$$

для которого система (10) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial C_k\partial x_i}\Phi_2-\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_1}{\partial C_k}\right)\frac{\partial C_k}{\partial x_j}+\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_j}\frac{\partial\Phi_1}{\partial C_k}-\Phi_2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial C_k\partial x_j}\right)\frac{\partial C_k}{\partial x_i}\right]=0. \tag{12}$$

Кроме случая $n=2$, когда системы (11) и (12) переходят соответственно в уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial C_1\partial x_1}\frac{\partial C_1}{\partial x_2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial C_1\partial x_2}\frac{\partial C_1}{\partial x_1}=0;$$

$$\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial C_1\partial x_1}\Phi_2-\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial C_1}\right)\frac{\partial C_1}{\partial x_2}+\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial C_1}-\Phi_2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial C_1\partial x_2}\right)\frac{\partial C_1}{\partial x_1}=0,$$

системы (11) и (12) требуют специальных исследований о совместимости, так как число уравнений систем превышает число неизвестных функций $C_1,\dots C_{n-1}$.

По поводу формы полного интеграла уравнения 1-го порядка, не содержащего явно неизвестной функции z, следует отметить, кстати, следующее обстоятельство. Обычно считают, что полный интеграл такого уравнения имеет *только одну форму*, а именно ту, которая содержит одну из произвольных постоянных, C_n, в качестве *добавочной постоянной*. Однако это *не соответствует действительности*. Это обстоятельство отмечено акад. Г. В. Пфейффером, который дает такой пример:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=4xy$$

$$z=\frac{C_1x^2}{2}+\frac{2y^2}{C_1}+C_2$$

$$z=2\sqrt{(x_2+C')(y^2+C'')}.$$

Примеры.

1)

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial z}{\partial x_3}-2z=0.$$

Полный интеграл будет:

$$z=C_1x_1x_2+C_2x_1x_3+C_3x_2x_3.$$

Уравнение линейно относительно производных и потому для него обязательно найдется общий интеграл, содержащий одну произвольную функцию φ от 2 аргументов $C_1(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $C_2(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Теория, изложенная в конце этого параграфа, дает:

$$x_2^2\frac{\partial C_1}{\partial x_2}=x_3^2\frac{\partial C_2}{\partial x_3}$$

$$x_1\frac{\partial C_1}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial C_1}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial C_1}{\partial x_3}=0$$

$$x_1\frac{\partial C_2}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial C_2}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial C_2}{\partial x_3}=0.$$

Можно написать полное решение этой системы:

$$C_1=a_1\frac{x_1}{x_2}+a_2\frac{x_1}{x_3}+a_3$$

$$C_2=a_4\frac{x_1}{x_2}+a_1\frac{x_1}{x_3}+a_5.$$

Чтобы написать общий интеграл заданного уравнения, достаточно взять частное решение системы, положивши, например, $a_1=1$; $a_2=a_3=a_4=a_5=0$. Получим:

$$z=2x_1^2+x_2x_3\varphi\left(\frac{x_1}{x_2},\ \frac{x_1}{x_3}\right).$$

2)

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial z}{\partial x_3}-z=0.$$

Это нелинейное уравнение имеет полный интеграл

$$z=C_1C_2+C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3,$$

соответствующий системе вида (12):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial C_1}{\partial x_2}=\frac{\partial C_2}{\partial x_1}\\&(C_2+x_1)\frac{\partial C_i}{\partial x_1}+(C_1+x_2)\frac{\partial C_i}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial C_i}{\partial x_3}=0\ (i=1,2);\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

однако мы не получим общего интеграла вида

$$z=\Phi_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ C_1,\ C_2)+\Phi_2(x_1,\ x_2,\ x_3)\varphi(C_1,\ C_2),$$

где функция φ была бы произвольной функцией *двух* независимых функций C_1, C_2 так как подстановка такого интеграла в уравнение приводит к равенству нулю одного из множителей

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial C_1}\frac{\partial C_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial C_2}\frac{\partial C_2}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial C_1}\frac{\partial C_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi}{\partial C_2}\frac{\partial C_2}{\partial x_2}\right).$$

Приравнивая нулю поочередно один из этих множителей и присоединяя получаемое уравнение к системе (13), можем получить только такие наиболее полные из всех возможных выражений для C_1 и C_2:

$$\text{I: } C_2=\mathrm{const}=a_1,\ C_1=a_2+\frac{a_3x_3}{a_1+x_1};$$

$$\text{II: } C_1=\mathrm{const}=a_2;\ C_2=a_1+\frac{a_3x_3}{x_2+a_1},$$

что дает интегралы, хотя и не общие, но более общего вида, чем полный интеграл:

$$z=a_1a_2+a_1x_2+a_2x_1+a_3x_3+x_3\,\varphi\left(\frac{x_3}{x_1+a_1}\right)$$

$$z=a_1a_2+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+x_3\,\varphi\left(\frac{x_3}{x_2+a_1}\right),$$

где a_1, a_2, a_3 — произвольные постоянные и φ — произвольная функция.

§ 60. Интегрирование линейных однородных и неоднородных уравнений. Покажем, что исключение произвольной функции

$$\varphi(u_1,\ldots u_{n-1})$$

из уравнения

$$F[x_1,\ldots x_n,\ z,\ \varphi(u_1,\ldots u_{n-1})]=0,$$

которое можно записать в виде

$$u_n=\varphi(u_1,\ldots u_{n-1}), \tag{14}$$

решая относительно произвольной функции φ и считая $u_1,\ldots u_{n-1}$, u_n — известными функциями от $x_1,\ldots x_n$, z, или еще иначе — в виде

$$\Phi(u_1,\ldots u_{n-1},\ u_n)=0, \tag{15}$$

где Φ есть символ произвольной функции, — приводит к линейному уравнению с частными производными 1-го порядка.

В самом деле, дифференцирование последнего уравнения по x_1, по $x_2,\ldots$ по x_n, при обычных в теории уравнений с частными производными обозначениях

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=p_1,\ \ldots\ \frac{\partial z}{\partial x_n}=p_n,$$

дает такую систему n уравнений:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial z}p_1\right)+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}+\frac{\partial u_n}{\partial z}p_1\right)=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n}+\frac{\partial u_1}{\partial z}p_n\right)+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n}+\frac{\partial u_n}{\partial x_n}p_n\right)=0.$$

Эта система n линейных однородных уравнений не содержит произвольной функции $\Phi(u_1,\ldots u_n)$, но содержит другие n произвольных элементов — производные от этой функции $\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},\ldots\frac{\partial\Phi}{\partial u_n}$. Результат исключения этих n неизвестных из n однородных уравнений представится в форме равенства нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial z}p_1, & \frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial z}p_1, & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1}+\frac{\partial u_n}{\partial z}p_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n}+\frac{\partial u_1}{\partial z}p_n, & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}+\frac{\partial u_2}{\partial z}p_n, & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n}+\frac{\partial u_n}{\partial z}p_n \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} 1, & 0 & \ldots & 0 \\ -p_1, & \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial z}p_1 & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1}+\frac{\partial u_n}{\partial z}p_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_n, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}+\frac{\partial u_1}{\partial z}p_n & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n}+\frac{\partial u_n}{\partial z}p_n \end{vmatrix}=0.$$

Умноживши элементы 1-й колонки последнего определителя на $\frac{\partial u_1}{\partial z}$ и прибавляя произведения к соответственным элементам 2-й колонки, умножая далее на $\frac{\partial u_2}{\partial z}$ и прибавляя к элементам 3-й колонки и т. д., умножая, наконец, элементы 1-й колонки на $\frac{\partial u_n}{\partial z}$ и присоединяя произведения к элементам последней колонки, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial u_1}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ -p_1 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_n & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}=0,$$

или, раскрывая по элементам 1-й колонки,

$$Y_1p_1+Y_2p_2+\ldots+Y_np_n=Z,$$

т. е.

$$Y_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+Y_2\frac{\partial z}{\partial z_2}+\ldots+Y_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=Z, \tag{16}$$

где $Y_1,\ldots Y_n$, Z обозначают известные функции от $x_1,\ldots x_n$, z, полученные из различных функциональных определителей известных функций $u_1,\ldots u_n$ от аргументов $x_1,\ldots x_n$, z.

Последнее уравнение представляет собою *линейное неоднородное уравнение*, которое переходит в линейное однородное уравнение, если

$$Z=0,$$

т. е. если

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}=0,$$

иначе говоря, если $u_1,\ldots u_n$ становятся зависимыми между собою функциями $v_1,\ldots v_n$ от переменных $x_1,\ldots x_n$. Не трудно проверить, что *линейное однородное уравнение* вида

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0, \tag{17}$$

где X_1, $X_2,\ldots X_n$ обозначают функции только от независимых переменных $x_1,\ldots x_n$, получим в результате исключения произвольной функции ψ из уравнения

$$z=\psi(v_1,\ldots v_{n-1}), \tag{18}$$

где $v_1,\ldots v_{n-1}$ обозначают независимые между собою известные функции независимых переменных $x_1,\ldots x_n$. Достаточно продифференцировать последнее уравнение (18) по $x_1,\ldots x_n$ и исключить $n-1$ произвольных функций $\frac{\partial\psi}{\partial v_1},\dots\frac{\partial\psi}{\partial v_{n-1}}$ из n линейных неоднородных уравнений

$$p_1=\frac{\partial\psi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\dots+\frac{\partial\psi}{\partial v_{n-1}}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_n=\frac{\partial\psi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_n}+\dots+\frac{\partial\psi}{\partial v_{n-1}}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_n}.$$

Таким образом, нахождение общего интеграла (18) линейного однородного уравнения (17) сводится к определению $(n-1)$-й независимых функций $v_1(x_1,\dots x_n),\dots v_{n-1}(x_1,\dots x_n)$, а нахождение общего интеграла линейного неоднородного уравнения (16), который записывается в форме (14) или (15), сводится к определению n независимых функций $u_1(x_1,\dots x_n, z),\dots u_n(x_1,\dots x_n, z)$. Общий интеграл неоднородного уравнения (16), записанный, например, в форме (14), представляет собою установление такой зависимости между несвязанными между собою функциями $u_1,\dots u_n$, когда одна из них, например, u_n-я считается произвольной функцией всех остальных.

Способ интегрирования линейного однородного уравнения (17) с коэффициентами $X_1,\dots X_n$, функциями от независимых переменных $x_1,\dots x_n$, т. е. способ построения $(n-1)$-й независимых функций $v_1,\dots v_{n-1}$, был отчасти изложен в одном из параграфов главы IV и сводится к следующему.

Пишем систему $(n-1)$-го совокупных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\dots=\frac{dx_n}{X_n}.$$

Она должна обладать системой $(n-1)$-го независимых интегралов

$$v_1(x_1,\dots x_n)=C_1;\dots v_{n-1}(x_1,\dots x_n)=C_{n-1}.$$

Сразу видно, что каждая из функций $v_1,\dots v_{n-1}$ будет удовлетворять заданному уравнению с частными производными (17), т. е. может быть поставлена вместо буквы z в уравнении (17); так что $z=v_1,\dots z=v_{n-1}$ представляют систему $(n-1)$-го независимых частных интегралов уравнения с частными производными (17).

Действительно, дифференцирование любого из интегралов

$$v_1=C_1,\dots v_m=C_m,\dots v_{n-1}=C_{n-1},$$

например, m-го дает:

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial v_m}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial v_m}{\partial x_n}dx_n=0.$$

Подставляя вместо $dx_1, dx_2,\dots dx_n$ пропорциональные величины $X_1, X_2,\dots X_n$, получаем уравнение вида (17):

$$X_1\frac{\partial v_m}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial v_m}{\partial x_2}+\dots+X_n\frac{\partial v_m}{\partial x_n}=0.$$

Полный интеграл запишется так:

$$z=C_1v_1+C_2v_2+\dots+C_{n-1}v_{n-1}+C_n,$$

а общий интеграл будет вида (18):

$$z=\psi(v_1,\dots v_{n-1}),$$

где ψ обозначает символ произвольной функции. Легко убедиться посредством непосредственной подстановки этих выражений для z в уравнение (18), что они представляют собой интегралы этого уравнения. Например, подстановка последнего выражения для функции z дает:

$$X_1\left(\frac{\partial\psi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\dots+\frac{\partial\psi}{\partial v_{n-1}}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_1}\right)+\dots+X_n\left(\frac{\partial\psi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_n}+\dots+\frac{\partial\psi}{\partial v_{n-1}}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_n}\right)=$$

$$=\frac{\partial\psi}{\partial v_1}\left(X_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\dots+X_n\frac{\partial v_1}{\partial x_n}\right)+\dots+\frac{\partial\psi}{\partial v_{n-1}}\left(X_1\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_1}+\dots+X_n\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_n}\right)\equiv 0,$$

так как $v_1,\dots v_{n-1}$ представляют собой частные интегралы уравнения (17).

Пример.

$$(x_1+1)\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+(x_3-1)\frac{\partial z}{\partial x_3}=0.$$

Имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{x_1+1}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_3}{x_3-1}.$$

Из уравнения $\frac{dx_1}{x_1+1}=\frac{dx_2}{x_2}$ имеем $\lg(x_1+1)=\lg x_2+C$; $\lg\frac{x_1+1}{x_2}=C$, что дает $v_1=C_1$ в виде

$$\frac{x_1+1}{x_2}=C_1.$$

Из уравнения $\frac{dx_3}{x_3-1}=\frac{dx_2}{x_2}$ получим 2-й интеграл $v_2=C_2$ вида

$$\frac{x_3-1}{x_2}=C_2.$$

Полный и общий интеграл дают формулы:

$$z=C'\frac{x_1+1}{x_2}+C''\frac{x_3-1}{x_2}+C'''$$

$$z=\psi\left(\frac{x_1+1}{x_2},\ \frac{x_3-1}{x_3}\right).$$

Интегрирование неоднородного линейного уравнения

$$Y_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+Y_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\dots+Y_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=Z, \tag{19}$$

с коэффициентами $Y_1,\dots Y_n$, Z — функциями от независимых и зависимого переменного $x_1,\dots x_n$, z, можно *свести к интегрированию линейного однородного уравнения* при помощи преобразования § 58, позволяющего переходить от заданного уравнения к такому новому, которое не содержит явно неизвестной функции z, а именно

$$\zeta(x_1, \ldots x_n, z) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}}{\frac{\partial \zeta}{\partial z}}; \ \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x_n}}{\frac{\partial \zeta}{\partial z}},$$

что дает однородное уравнение с $(n+1)$-й независимой переменной $x_1, \ldots x_n, z$,

$$Y_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \ldots + Y_n \frac{\partial \zeta}{\partial x_n} + Z \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \qquad (20)$$

с коэффициентами $Y_1, \ldots Y_n, Z$, не содержащими неизвестной функции ζ. Имеем для интегрирования систему n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{Y_1} = \frac{dx_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dx_n}{Y_n} = \frac{dz}{Z}, \qquad (21)$$

которая должна дать n независимых интегралов

$$u_1(x_1, \ldots x_n, z) = C_1; \ldots u_n(x_1, \ldots x_n, z) = C_n;$$

они позволят написать полный интеграл заданного уравнения в виде

$$u_1(x_1, \ldots x_n, z) = C_1 u_2(x_1, \ldots x_n, z) + \ldots + C_{n-1} u_n(x_1, \ldots x_n, z) + C_n,$$

и общий интеграл в виде

$$\Phi(u_1, \ldots u_{n-1}, u_n) = 0,$$

или

$$u_n = \varphi(u_1, \ldots u_{n-1}),$$

где Φ и φ обозначают произвольные функции. Проверка того, что это действительно будут полный и общий интегралы, производится так же, как и раньше.

Практически перехода от уравнения (19) к уравнению (20) не делают, а по виду уравнения (19) сразу пишут систему обыкновенных дифференциальных уравнений (21).

Примеры.

1)
$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = mz.$$

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{mz}$$

или

$$\frac{dx_i}{x_i} = \frac{dx_n}{x_n} \ (i = 1, \ldots n-1); \ \frac{dz}{z} = m\frac{dx_n}{x_n}.$$

Имеем систему n интегралов последних n обыкновенных уравнений:

$$\frac{x_i}{x_n} = C_i \ (i = 1, \ldots n-1); \ \frac{z}{x_n^m} = C_n,$$

что приводит к общему интегралу

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{z}{x_n^m}\right) = 0,$$

или

$$z = x_n^m \varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

Правая часть последнего уравнения представляет собой однородную функцию m-го измерения, а дифференциальное уравнение 1) выражает известное свойство однородных функций, известное под именем теоремы Эйлера об этих функциях.

2)
$$(x_2 + x_3 + z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + (x_3 + x_1 + z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + (x_1 + x_2 + z)\frac{\partial z}{\partial x_3} + x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Составляя для этого примера Лагранжа систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, вычитая из последнего отношения системы обыкновенных уравнений каждое из предыдущих, складывая затем все отношения и обозначая $x_1 + x_2 + x_3 + z = v$, получим:

$$\frac{dx_1}{x_2 + x_3 + z} = \frac{dx_2}{x_3 + x_1 + z} = \frac{dx_3}{x_1 + x_2 + z} = \frac{dz}{x_1 + x_2 + x_3} =$$

$$= \frac{dz - dx_1}{x_1 - z} = \frac{dz - dx_2}{x_2 - z} = \frac{dz - dx_3}{x_3 - z} = \frac{dx_1 + dx_2 + dx_3 + dz}{3(x_1 + x_2 + x_3 + z)} = \frac{dv}{3v}.$$

Таким образом система 3 первоначальных обыкновенных уравнений может быть заменена системой таких 3 обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv}{3v} + \frac{dz - dx_1}{z - x_1} = 0; \ \frac{dv}{3v} + \frac{dz - dx_2}{z - x_2} = 0; \ \frac{dv}{3v} + \frac{dz - dx_3}{z - x_3} = 0.$$

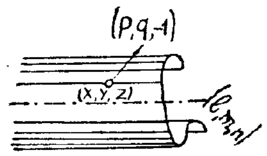
В каждом из них имеем разделение переменных и, получивши легко систему 3 интегралов $u_1 = C_1, u_2 = C_2, u_3 = C_3$, напишем общий интеграл:

$$v(z - x_1)^3 = C_1; \ v(z - x_2)^3 = C_2; \ v(z - x_3)^3 = C_3$$

$$\Phi\,[v(z - x_1)^3, v(z - x_2)^3, v(z - x_3)^3] = 0.$$

§ 61. Поверхности цилиндрические, конические и тел вращения. Уравнения *цилиндрической поверхности*, дифференциальное и в конечном виде, получим таким образом.

Цилиндрическая поверхность образовывается параллельным перенесением прямой по какой-нибудь направляющей кривой. Направление всех прямых, образующих цилиндрическую поверхность, одинаково. Пусть оно определяется постоянными числами l, m, n. Цилиндрическая поверхность определяется особого вида уравнением, которое связывает координаты x, y, z различных точек M пространства. Если мы примем во внимание такое уравнение, то на z можно смотреть как на функцию двух независимых переменных x, y. Косинусы углов нормали с осями координат, во всякой точке $M(x, y, z)$ на поверхности, пропорциональны числам



$$\frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y}, \ -1.$$

Нормаль должна быть перпендикулярной к образующей. Условие перпендикулярности дает

$$l\frac{\partial z}{\partial x}+m\frac{\partial z}{\partial y}-n=0.$$

Разделивши все уравнение на n и обозначивши отношения постоянных так:

$$\frac{l}{n}=a,\ \frac{m}{n}=b,$$

получаем следующее *дифференциальное уравнение всякой цилиндрической поверхности* с направлением образующих l, m, n:

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

Вводя весьма часто встречающиеся в теории дифференциальных уравнений обозначения

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\ \frac{\partial z}{\partial y}=q,$$

его можно записать в таком виде:

$$ap+bq=1.$$

Система совокупных обыкновенных уравнений для определения общего интеграла будет:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{1},$$

и дает:

$$u_1\equiv x-az=C_1;\ u_2\equiv y-bz=C_2.$$

Общий интеграл напишется:

$$\Phi(x-az,\ y-bz)=0,$$

или

$$y-bz=\varphi(x-az),$$

где Φ и φ обозначают произвольные функции.

Если бы заданы были и уравнения кривой, которая направляет образующую цилиндра,

$$F_1(x,y,z)=0,\quad F_2(x,y,z)=0,$$

тогда, присоединяя еще два уравнения

$$u_1=x-az,\ u_2=y-bz,$$

из 4 уравнений исключим 3 величины x, y, z и в результате получим одно уравнение

$$\Omega(u_1,u_2)=0,$$

или

$$u_2=\omega(u_1),$$

что дает окончательно такое конечное уравнение цилиндрической поверхности с заданной образующей и с заданной направляющей:

$$y-bz=\omega(x-az).$$

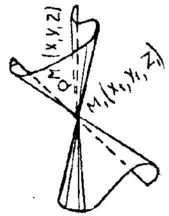
Здесь ω не будет уже произвольной функцией своего аргумента, так как эта функция вполне определяется системой уравнений $F_1=0$, $F_2=0$ заданной направляющей кривой линии.

Дифференциальное уравнение конических поверхностей выводится на основании того свойства, что для всякой точки $M(x,y,z)$ на конической поверхности касательная плоскость

$$\zeta-z=(\xi-x)\frac{\partial z}{\partial x}+(\eta-y)\frac{\partial z}{\partial y}$$

проходит через вершину $M_1(x_1,y_1,z_1)$ конуса, что дает нам уравнение

$$\zeta-z_1=(\xi-x_1)\frac{\partial z}{\partial x}+(\eta-y_1)\frac{\partial z}{\partial y}.$$



Заменяя греческие буквы ξ, η, ζ латинскими x, y, z, так как упомянутая плоскость проходит и через точки $M(x,y,z)$ на поверхности, имеем дифференциальное уравнение всех возможных конических поверхностей:

$$(x-x_1)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_1)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_1.$$

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений дает:

$$\frac{dx}{x-x_1}=\frac{dy}{y-y_1}=\frac{dz}{z-z_1}$$

$$u_1\equiv\frac{x-x_1}{z-z_1}=C_1,\ u_2\equiv\frac{y-y_1}{z-z_1}=C_2.$$

Общий интеграл будет

$$\Phi\left(\frac{x-x_1}{z-z_1},\ \frac{y-y_1}{z-z_1}\right)=0,$$

или

$$\frac{y-y_1}{z-z_1}=\varphi\left(\frac{x-x_1}{z-z_1}\right).$$

Если заданы будут и уравнения кривой, направляющей образующую прямую:

$$F_1(x,y,z)=0,\ F_2(x,y,z)=0,$$

тогда эти уравнения определят вид функции φ, и конечное уравнение конической поверхности будет:

$$\frac{y-y_1}{z-z_1}=\omega\left(\frac{x-x_1}{z-z_1}\right).$$

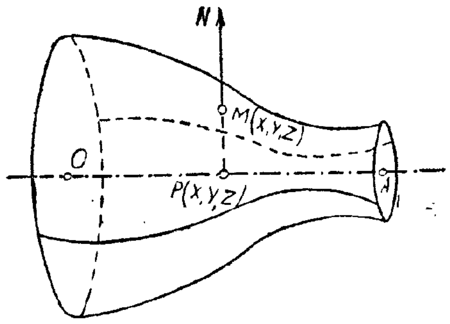
Дифференциальное уравнение поверхностей тел вращения кривых линий около заданной прямой OA:

$$\frac{X-a}{l}=\frac{Y-b}{m}=\frac{Z-c}{n},$$

называемой осью вращения, где a, b, c — координаты заданной точки A, выведется из того условия, что нормаль MN для точки $M(x,y,z)$ на поверхности, определяемая уравнениями вида

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-1},$$

встречает ось вращения OA в некоторой точке P. Координаты X, Y, Z этой точки пересечения должны удовлетворять уравнениям обеих прямых. Исключая эти 3 координаты X, Y, Z точки пересечения P из 4 уравнений наших двух прямых, мы найдем дифференциальное уравнение поверхности тела вращения.



Исключение 3 величин X, Y, Z произведем таким образом.

Обозначивши равные отношения уравнений 1-й прямой через t, имеем:

$$X = a + lt,\ Y = b + mt,$$
$$Z = c + nt.$$

Уравнения 2-й прямой перепишем таким образом:

$$X - x + (Z - z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$Y - y + (Z - z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Подставивши сюда выражения для X, Y, Z, имеем:

$$\left(l + n\frac{\partial z}{\partial x}\right)t = x - a + \frac{\partial z}{\partial x}(z - c)$$

$$\left(m + n\frac{\partial z}{\partial y}\right)t = y - b + \frac{\partial z}{\partial y}(z - c).$$

Разделивши одно уравнение на другое, исключим ненужное нам t и будем иметь окончательно дифференциальное уравнение поверхностей:

$$[m(z-c) - n(y-b)]\frac{\partial z}{\partial x} + [n(x-a) - l(z-c)]\frac{\partial z}{\partial y} = l(y-b) - m(x-a).$$

Чтобы проинтегрировать его, пишем основную систему обыкновенных уравнений в виде равных отношений и составляем две производные пропорции:

$$\frac{dx}{m(z-c) - n(y-b)} = \frac{dy}{n(x-a) - l(z-c)} = \frac{dz}{l(y-b) - m(x-a)} =$$
$$= \frac{(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz}{0} = \frac{l\,dx + m\,dy + n\,dz}{0}.$$

Нам надо 2 независимых интеграла $u_1 = C_1$, $u_2 = C_2$. Предпоследнее отношение дает

$$(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz = 0,$$

т. е.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = C_1,$$

а последнее отношение той же системы дает

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0,$$

т. е.

$$lx + my + nz = C_2.$$

Общий интеграл напишется в виде

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \varphi(lx + my + nz),$$

где φ — произвольная функция. Она будет определенной функцией $\omega(u_2)$ тогда, когда заданы будут уравнения кривой

$$F_1(x, y, z) = 0,\quad F_2(x, y, z) = 0,$$

вращающейся около заданной оси OA.

§ 62. Интегрирование систем линейных однородных уравнений по способу Майера. Если задана будет для интегрирования система m линейных неоднородных уравнений, тогда, пользуясь подстановками Якоби, можно преобразовать ее в систему m линейных и однородных уравнений такого вида, что коэффициенты уравнений не будут иметь явно зависимой переменной, но число независимых увеличится на единицу, — эти независимые переменные будут: $x_1, \ldots x_n, z$. Найдя интегралы

$$u_1(x_1, \ldots x_n, z) = C_1;\quad u_2(x_1, \ldots x_n, z) = C_2;\quad \ldots u_{n+1-m}(x_1, \ldots x_n, z) = C_{n+1-m}$$

для системы преобразованных уравнений, легко найдем общий интеграл заданной системы

$$u_{n+1-m} = \varphi(u_1, u_2, \ldots u_{n-m}).$$

Принимая во внимание это обстоятельство, в дальнейшем остановимся более подробно на *системе m линейных однородных уравнений с n независимыми переменными $x_1, \ldots x_n$ и с такими коэффициентами $X_{11}, X_{12}, \ldots$, которые не содержат в себе неизвестной функции z.*

Система запишется так:

$$X_1(z) \equiv X_{11}\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_{21}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_{n1}\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$
$$X_2(z) \equiv X_{12}\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_{22}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_{n2}\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_m(z) \equiv X_{1m}\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_{2m}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_{nm}\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0.$$

Уравнения системы предполагаются независимыми между собою и

$$m < n.$$

Символ $X_i(\ )$ обозначает

$$X_{1i}\frac{\partial}{\partial x_1} + X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + X_{ni}\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Если
$$z = u(x_1, \dots x_n)$$
есть интеграл нашей системы, тогда должно быть
$$X_i(u) = 0, X_k(u) = 0 \, (i, k = 1, \dots m; \; i \neq k).$$

Вследствие этого
$$X_i(X_k(u)) = X_i(0) = 0; \; X_k(X_i(u)) = X_k(0) = 0,$$
так как
$$X_{1i} \frac{\partial 0}{\partial x_1} + \dots X_{ni} \frac{\partial 0}{\partial x_n} = 0.$$

Вычитание предшествующих двух равенств друга от друга дает:
$$X_i(X_k(u)) - X_k(X_i(u)) = 0.$$

Левую часть предшествующего уравнения, для сокращения записи обозначают обычно символом (X_i, X_k), так что
$$(X_i, X_k) = X_i(X_k(u)) - X_k(X_i(u)).$$

Выписывая подробное выражение для символа
$$(X_i(z), \; X_k(z)),$$
легко удостоверимся, что это выражение не имеет производных 2-го порядка от функции z и не имеет свободного от производных члена, а будет вида такого же, как и функции $X_1(z), X_2(z), \dots,$ т. е. вида
$$X_{ik1} \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_{ik2} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_{ikn} \frac{\partial z}{\partial x_n}. \tag{22}$$

Вследствие того, что совместный интеграл
$$z = u(x_1, \dots x_n)$$
двух уравнений
$$X_i(z) = 0 \text{ и } X_k(z) = 0$$
является интегралом и уравнения
$$(X_i, X_k) = 0,$$
представляющего *условие совместимости 2-х уравнений*
$$X_i(z) = 0, X_k(z) = 0$$
и имеющего также вид линейного однородного уравнения 1-го порядка
$$X_{ik1} \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_{ik2} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_{ikn} \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{23}$$
составляем все выражения (X_i, X_k), для каждой пары заданной системы m уравнений. Число их будет
$$C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Если какая-либо пара уравнений
$$X_g = 0, X_h = 0$$
дает
$$(X_g, X_h) = 0,$$
причем равенство нулю будет либо тождественное, либо на основании системы заданных m уравнений
$$X_1 = 0, \dots X_m = 0,$$
тогда такая пара уравнений будет системой двух уравнений, совместимых друг с другом, и не присоединит к заданной системе какого-либо нового уравнения. Если же какая-нибудь иная пара
$$X_i = 0, X_k = 0$$
приводит к выражению (X_i, X_k), имеющему вид (22) и не равному нулю ни тождественно, ни на основании уравнений системы, то приравниваем его нулю и, получивши новое уравнение (23), присоединяем его к нашей системе заданных m уравнений.

Таким образом мы увеличим число уравнений заданной системы, положим, на m_1 единиц. Для новой системы $m + m_1$ уравнений снова перебираем все пары
$$(X_j(z), X_l(z)),$$
$$(j, l = 1, \dots m + m_1, \; j \neq l),$$
для чего придется проверить лишь
$$C_{m_1}{}^2 + mm_1,$$
или
$$\frac{m_1(m_1 - 1)}{2} + mm_1$$
комбинаций пар, и опять присоединяем новые уравнения к системе $m + m_1$ уравнений, и т. д., пока не дойдем до такой системы q уравнений, что все
$$(X_g(z), X_h(z)),$$
$$(g, h = 1, \dots q, \; g \neq h)$$
будут нулями.

Такая система m заданных уравнений, для которой окажется $q = n$, имеет интеграл $z = \text{const}$.

Если же $q > n$, тогда интегрировать новую систему и заданную систему m уравнений невозможно: она не будет совместимой и вполне интегрируемой.

Если $q < n$, тогда такую систему q уравнений мы и будем интегрировать вместо заданной старой системы m уравнений.

Интеграл этой новой системы q уравнений будет удовлетворять и старой системе m уравнений и его принято называть *интегралом заданной системы*, хотя с этим названием и не вполне можно было бы согласиться, так как, например, общий интеграл системы q однородных уравнений представляет собою произвольную функцию от $n - q$ аргументов, тогда как для заданной системы m уравнений должно было бы быть в произвольной функции больше аргументов, а именно $n-m$, так как вообще $m<q$.

В последнем из рассмотренных нами случаев, а именно — когда $q<n$, система q уравнений называется *полной системой* или еще — *системой замкнутой*. Соответствующая ей система m заданных уравнений будет *вполне интегрируемой системой*. Обнаружить полную интегрируемость заданной системы m уравнений без составления и изучения всех пар так называемых *скобок Пуассона* (X_i, X_j) для всех пар уравнений $X_i=0, X_j=0$ можно только тогда, когда удается убедиться, что все уравнения данной системы обладают одним или больше одинаково пригодным для всех уравнений системы интегралом, отличным от тривиального интеграла $z=const$.

Довольно легко доказать, что *всякая полная система, после замены независимых переменных $x_1,\dots x_n$ новыми переменными $y_1,\dots y_n$, снова остается полной системой*, что всякое *алгебраическое преобразование полной системы также приводит к полной системе* и, наконец, что *интегрирование одного из уравнений системы с n независимыми переменными приводит затем к интегрированию полной системы* $(q-1)$-го *уравнений с* $(n-1)$-м *независимым переменным*.

Такая полная система, для которой все уравнения, относительно

$$(X_g,\ X_h)=0$$

удовлетворяются *тождественно*, называется *инволюционной системой* или еще *Якобиевой системой*.

Нетрудно убедиться, что если полная система q уравнений решена относительно q каких-либо производных, например относительно

$$\frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial z}{\partial x_q},$$

тогда она превращается в Якобиеву инволюционную систему, потому что соответствующее выражение $(Y_g,\ Y_h)$ для каждой пары уравнений $Y_g=0,\ Y_h=0$, соответствующих непреобразованным уравнениям $X_g=0,\ X_h=0$, может обратиться в нуль только тождественно, а не на основании уравнений системы $Y_1=0,\dots Y_q=0$, потому что в это выражение $(Y_g,\ Y_h)$ не может войти ни одна из всех производных $\frac{\partial z}{\partial x_1},\dots\frac{\partial z}{\partial x_q}$, содержащихся по одной в каждом из уравнений

$$Y_1=0,\dots Y_q=0.$$

Решивши *полную систему q* уравнений относительно производных $\frac{\partial z}{\partial x_1},\dots\frac{\partial z}{\partial x_q}$, т. е. *заменивши ее такой Якобиевой системой q уравнений нормального вида:*

$$\left.\begin{aligned}
Y_1(z)&\equiv\frac{\partial z}{\partial x_1}+Y_{11}\frac{\partial z}{\partial x_{q+1}}+Y_{21}\frac{\partial z}{\partial x_{q+2}}+\dots+Y_{n-q,1}\frac{\partial z}{\partial x_n}=0\\
Y_2(z)&\equiv\frac{\partial z}{\partial x_2}+Y_{12}\frac{\partial z}{\partial x_{q+1}}+Y_{22}\frac{\partial z}{\partial x_{q+2}}+\dots+Y_{n-q,2}\frac{\partial z}{\partial x_n}=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
Y_q(z)&\equiv\frac{\partial z}{\partial x_q}+Y_{1q}\frac{\partial z}{\partial x_{q+1}}+Y_{2q}\frac{\partial z}{\partial x_{q+2}}+\dots+Y_{n-q,q}\frac{\partial z}{\partial x_n}=0
\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

для которой, в силу тождеств

$$(Y_g,\ Y_h)\equiv 0,$$

т. е.

$$Y_g(Y_h(z))-Y_h(Y_g(z))\equiv 0,$$

коэффициенты $Y_{11},\ Y_{21},\dots Y_{n-q,\,q}$ должны подчиняться тождествам вида

$$Y_g(Y_{lh})-Y_h(Y_{lg})\equiv 0$$

$$(l=1,\ 2,\dots n-q)$$

в количестве

$$\frac{1}{2}q(q-1)(n-q),$$

можно приступать к ее интегрированию.

Для этого существуют разные способы: способ Майера, способ Якоби, Клебша, акад. Г. В. Пфейффера и т. д.

Займемся рассмотрением одного из наиболее простых из них, — *способа интегрирования Майера.*

Введем вместо переменных $x_1,\dots x_q$ переменные $y_1,\dots y_q$, пользуясь таким *преобразованием Майера:*

$$x_1=a_1+(y_1-a_1);\ x_2=a_2+(y_1-a_1)y_2;\dots x_q=a_q+(y_1-a_1)y_q\tag{25}$$

и взявши, для простоты изложения, $a_1=a_2=\dots=a_q=0$, т. е. считая

$$x_1=y_1;\ x_2=y_1y_2;\dots x_q=y_1y_q.\tag{26}$$

Вследствие замены вида (25) или (26), уравнение $Y_1(z)=0$ системы (24) переходит в уравнение $\frac{\partial z}{\partial y_1}=0$, а система (24) в систему вида:

$$Y_1'(z)=\frac{\partial z}{\partial y_1}=0$$

$$Y_2'(z)=\frac{\partial z}{\partial y_2}+Y_{12}'\frac{\partial z}{\partial x_{q+1}}+Y_{22}'\frac{\partial z}{\partial x_{q+2}}+\dots+Y_{n-q,2}'\frac{\partial z}{\partial x_n}=0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Y_q'(z)=\frac{\partial z}{\partial y_q}+Y_{1q}'\frac{\partial z}{\partial x_{q+1}}+Y_{2q}'\frac{\partial z}{\partial x_{q+2}}+\dots+Y_{n-q,q}'\frac{\partial z}{\partial x_n}=0.$$

Нам не придется, однако, интегрировать систему $(q-1)$-го уравнения

$$Y_2'(z)=0,\dots\ Y_q'(z)=0$$

с $(n-1)$ независимым переменным

$$y_2,\dots\ y_q,\ x_{q+1},\dots x_n,$$

а придется ограничиться, после замены (25) или (26), интегрированием *одного только* линейного однородного уравнения с частными производными 1-го порядка при $(n-q+1)$-ой независимой переменной. Это уравнение получается так.

Интеграл нашей Якобиевой системы

$$z=F(x_1,\ x_2,\dots x_q,\ x_{q+1},\ x_{q+2},\dots x_n),$$

если бы он был найден, преобразуется в интеграл новых переменных

$$z = \Phi(y_1,\ y_2, \ldots y_q,\ x_{q+1},\ x_{q+2}, \ldots x_n).$$

Выражение

$$z = F(x_1, \ldots x_q,\ x_{q+1}, \ldots x_n)$$

и выражения x-ов через y-ки говорят нам о том, что когда мы будем дифференцировать z по y_1, то не надо забывать, что y_1 входит в выражение для z через x_1, через $x_2, \ldots$ через x_q, и мы имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\cdot y_2 + \frac{\partial z}{\partial x_3}\cdot y_3 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_q}\cdot y_q.$$

Подставляя сюда вместо $\frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_q}$ их выражения из нашей Якобиевой системы, будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} + \left(Y_{11}\frac{\partial z}{\partial x_{q+1}} + \ldots + Y_{n-q,1}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right) + y_2\left(Y_{12}\frac{\partial z}{\partial x_{q+1}} + \ldots + Y_{n-q,2}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right) +$$
$$+ \ldots + y_q\left(Y_{1q}\frac{\partial z}{\partial x_{q+1}} + \ldots + Y_{n-q,q}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0.$$

В коэффициенты $Y_{11},\ Y_{12}, \ldots Y_{n-q,q}$ этого уравнения подставим вместо $x_1, \ldots x_q$ их выражения через $y_1, \ldots y_q$, — получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} + Z_1\frac{\partial z}{\partial x_{q+1}} + Z_2\frac{\partial z}{\partial x_{q+2}} + \ldots + Z_{n-q}\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \qquad (27)$$

которое обладает $n-q$ независимыми частными интегралами, причем переменные $y_2,\ y_3, \ldots y_q$ рассматриваются как параметры. Всякий интеграл Якобиевой системы (24), посредством преобразования (26), преобразовывается в функцию переменных $y_1,\ y_2, \ldots y_q,\ x_{q+1}, \ldots x_n$, которая *удовлетворяет также линейному однородному уравнению (27).* Это уравнение обладает одним и только одним голоморфным интегралом, который обращается в любую заранее заданную функцию $\varphi(x_{q+1}, \ldots x_n)$ для $y_1 = 0$ и, следовательно, чтобы определить интеграл Якобиевой системы (24), какой обращается в заранее заданную функцию $\varphi(x_{q+1}, \ldots x_n)$ для $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2, \ldots x_q = a_q$, при преобразовании (25), достаточно определить интеграл линейного уравнения (27), где $y_2, \ldots y_q$ рассматриваются как параметры, затем заменить в этом интеграле $y_1,\ y_2, \ldots y_q$ соответственно через $x_1,\ \frac{x_2 - a_2}{x_1 - a_1}, \ldots \frac{x_q - a_q}{x_1 - a_1}$ для (25) и через $x_1,\ \frac{x_2}{x_1}, \ldots \frac{x_q}{x_1}$ для подстановки (26).

Таким образом, нам *придется интегрировать одно только линейное однородное уравнение (27),* или иначе — *систему $n-q$ совокупных обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy_1}{1} = \frac{dx_{q+1}}{Z_1} = \frac{dx_{q+2}}{Z_2} = \ldots = \frac{dx_n}{Z_{n-q}}.$$

Она может дать нам $n-q$ независимых интегралов

$$v_1(y_1, y_2, \ldots y_q, x_{q+1}, \ldots x_n) = C_1, \ldots v_{n-q}(y_1, y_2, \ldots y_q, x_{q+1}, \ldots x_n) = C_{n-q}.$$

Вставивши сюда выражения $y_1, \ldots y_q$ через $x_1, \ldots x_q$, т. е. полагая

$$y_1 = x_1,\ y_2 = \frac{x_2}{x_1}, \ldots y_q = \frac{x_q}{x_1},$$

будем иметь $n-q$ интегралов заданной системы (24):

$$u_1(x_1, x_2, \ldots x_q, x_{q+1}, \ldots x_n) = C_1, \ldots u_{n-q}(x_1, x_2, \ldots x_q, x_{q+1}, \ldots x_n) = C_{n-q}$$

и общий интеграл системы

$$z = \varphi(u_1, \ldots u_{n-q}),$$

где φ обозначает произвольную функцию.

Пример. (В. Г. Имшенецкий).

$$X_1(z) \equiv \frac{\partial z}{\partial x_1} + (x_2 + x_4 - 3x_1)\frac{\partial z}{\partial x_2} + (x_3 + x_1x_2 + x_1x_4)\frac{\partial z}{\partial x_4} = 0$$

$$X_2(z) \equiv \frac{\partial z}{\partial x_2} + (x_3x_4 - x_2)\frac{\partial z}{\partial x_3} + (x_1x_3x_4 + x_2 - x_1x_2)\frac{\partial z}{\partial x_4} = 0.$$

Условие совместимости

$$X_1(X_2(z)) - X_2(X_1(z)) = 0$$

дает новое уравнение

$$X_3(z) \equiv \frac{\partial z}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial z}{\partial x_4} = 0.$$

Приходим к системе Якоби

$$Y_1(z) \equiv \frac{\partial z}{\partial x_1} + (x_3 + 3x_1^2)\frac{\partial z}{\partial x_4} = 0$$

$$Y_2(z) \equiv \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_4} = 0$$

$$Y_3(z) \equiv \frac{\partial z}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial z}{\partial x_4} = 0.$$

Замена переменных

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_1y_2,\ x_3 = y_1y_3$$

и уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + y_3\frac{\partial z}{\partial x_3}$$

дают:

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} + (2y_1y_3 + 3y_1^2 + y_1y_2^2)\frac{\partial z}{\partial y_4} = 0;$$

$$\frac{dy_1}{1} = \frac{dx_4}{2y_1y_3 + 3y_1^2 + y_1y_2^2}$$

$$v_1 \equiv x_4 - y_1^2y_3 - y_1^3 - \frac{y_1^2y_2^2}{2} = C_1$$

$$u_1 \equiv x_4 - x_1x_3 - x_1^3 - \frac{1}{2}x_2^2 = C_1$$

$$z = \varphi\left(x_4 - x_1x_3 - x_1^3 - \frac{1}{2}x_2^2\right).$$

§ 63. Способ Якоби интегрирования системы линейных однородных уравнений, система в полных дифференциалах и система линейных неоднородных уравнений. В силу условий совместимости

$$X_1(X_2(z)) - X_2(X_1(z)) = 0$$

системы 2 уравнений

$$X_1(z) = 0,\ X_2(z) = 0,$$

и аналогично для полной системы q уравнений

$$X_1(z) = 0, \dots X_q(z) = 0,$$

или Якобиевой нормальной системы q уравнений

$$Y_1(z) = 0, \dots Y_q(z) = 0,$$

— если $\varphi_1(x_1, \dots x_n)$ является частным интегралом 1-го уравнения $X_1(z) = 0$, так что $X_1(\varphi_1) \equiv 0$, функция $\varphi_2 = X_2(\varphi_1)$ также должна быть интегралом этого же уравнения $X_1(z) = 0$:

$$X_1(X_2(\varphi_1)) - X_2(X_1(\varphi_1)) = 0$$

$$X_1(\varphi_2) - X_2(0) = 0$$

$$X_1(\varphi_2) = 0.$$

Поэтому и все функции $\varphi_2, \dots \varphi_i, \dots$, основанные на формуле

$$\varphi_i = X_2(\varphi_{i-1})$$

и полученные на основании одного лишь интеграла φ_1 1-го уравнения $X_1(z) = 0$, будут интегралами этого же 1-го уравнения $X_1(z) = 0$. Мы можем, конечно, получить таким путем не больше $(n-1)$-го интеграла 1-го уравнения, которые были бы независимы между собою: после некоторой i-й операции, получивши уже интегралы $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_i$, мы будем иметь зависимые от предыдущих функции $\varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \dots$, т. е.

$$\varphi_{i+1} = X_2(\varphi_i) = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_i) \quad (i \leqslant n-1).$$

Основная идея в *способе Якоби интегрирования системы линейных однородных уравнений* заключается в том, чтобы найти такую функцию интегралов $\psi(\varphi_1, \dots \varphi_i)$, которая удовлетворяла бы и 2-му уравнению системы $X_2(z) = 0$, далее — 3-му уравнению и т. д.

Имеем:

$$X_2(\psi) = 0,$$

или

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_1} X_2(\varphi_1) + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_2} X_2(\varphi_2) + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_i} X_2(\varphi_i) = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_1}\varphi_2 + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_2}\varphi_3 + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_{i-1}}\varphi_i + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_i}\Phi(\varphi_1, \dots \varphi_i) = 0,$$

и мы приходим к интегрированию системы совокупных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, интегрирование которой равносильно, как мы знаем из главы IV, интегрированию одного

обыкновенного уравнения i-го порядка; система и уравнение i-го порядка соответственно будут:

$$\frac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{d\varphi_2}{\varphi_3} = \dots = \frac{d\varphi_{i-1}}{\varphi_i} = \frac{d\varphi_i}{\Phi(\varphi_1, \dots \varphi_i)} = dt;$$

$$\frac{d^i\varphi_1}{dt^i} = \Phi\left(\varphi_1, \frac{d\varphi_1}{dt}, \dots \frac{d^{i-1}\varphi_1}{dt^{i-1}}\right).$$

Если мы найдем один только интеграл $\psi_1(x_1, \dots x_n) = C_1$ этой системы, то функция ψ_1 будет интегралом двух первых уравнений $X_1(z) = 0$, $X_2(z) = 0$ полной системы q уравнений, и, следовательно, будут интегралами этих 2 уравнений также функции $\psi_2, \psi_3, \dots \psi_k, \dots$, полученные с помощью 3-го уравнения системы $X_3(z) = 0$, т. е.

$$\psi_2 = X_3(\psi_1),\ \psi_3 = X_3(\psi_2), \dots \psi_k = X_3(\psi_{k-1}), \dots$$

Из них независимых между собою интегралов может быть не больше $n-2$, так что $(k+1)$-й будет функцией остальных:

$$\psi_{k+1} = \Psi(\psi_1, \dots \psi_k)$$

$$(k \leqslant n-2).$$

Далее ищем такую функцию интегралов $\omega(\psi_1, \dots \psi_k)$, чтобы она являлась интегралом и 3-го уравнения системы, $X_3(z) = 0$, для чего надо будет интегрировать систему обыкновенных уравнений 1-го порядка

$$\frac{d\psi_1}{\psi_2} = \frac{d\psi_2}{\psi_3} = \dots = \frac{d\psi_k}{\Psi(\psi_1, \dots \psi_k)},$$

или соответственное уравнение k-го порядка, чтобы найти таким образом частный интеграл $\omega_1(\psi_1, \dots \psi_k)$ системы 3 уравнений

$$X_1(z) = 0,\ X_2(z) = 0,\ X_3(z) = 0$$

и с помощью 4-го уравнения $X_4(z) = 0$ найти еще независимые частные интегралы $\omega_2, \omega_3, \dots \omega_l$ первых 3 уравнений системы и т. д., пока не дойдем до последнего q-го уравнения замкнутой системы

$$X_1(z) = 0, \dots X_q(z) = 0.$$

Таким образом нам надо будет найти для полного интегрирования системы один интеграл обыкновенного уравнения порядка не выше $(n-1)$-го, потом один интеграл уравнения порядка не выше $(n-2)$-го, далее — не выше $(n-3)$-го и, наконец, не выше $(n-q)$-го. Всех интегралов общих для всех уравнений системы нельзя будет найти тогда когда последнее уравнение не будет порядка $(n-q)$-го. Метод не применим, если левая часть одного из уравнений, скажем $X_i(z)$, дает функцию от φ_j, или от ψ_h, или от ω_g и т. д.

Однако для Якобиевой системы нормального вида

$$Y_1(z) = 0, \dots Y_q(z) = 0$$

эти исключительные случаи, когда метод не применим, приводят лишь только к упрощениям в процессе получения интеграла системы уравнений.

Обобщения в теории интегрирования Майера и Якоби сделаны были в последнее время акад. Г. В. Пфейффером.

Пример. Для интегрирования по методу Якоби системы предшествующего параграфа

$$Y_1(z) \equiv \frac{\partial z}{\partial x_1} + (3x_1^2 + x_3)\frac{\partial z}{\partial x_4} = 0$$

$$Y_2(z) \equiv \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_4} = 0$$

$$Y_3(z) \equiv \frac{\partial z}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial z}{\partial x_4} = 0,$$

находим интеграл φ_1 1-го уравнения:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_4}{3x_1^2 + x_3};\ x_1^3 + x_1x_3 - x_4 = C_1;\ \varphi_1 = x_1^3 + x_1x_3 - x_4.$$

Подставляя φ_1 во 2-е уравнение, имеем только один интеграл, отличный от const:

$$Y_2(\varphi_1) = -x_2;\ \varphi_2 = -x_2;\ Y_2(\varphi_2) = -1 = \text{const}.$$

Ищем функцию $\psi(\varphi_1, \varphi_2)$, удовлетворяющую 2-му уравнению системы, из уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}\varphi_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_2}(-1) = 0$$

$$\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2^2 = C_2;\ \psi_1 = \varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2^2,$$

т. е. окончательно

$$\psi_1 = (x_1^3 + x_1x_3 - x_4) + \frac{1}{2}(-x_2)^2;\quad \psi_1 = x_1^3 + x_1x_3 - x_4 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Имеем $Y_3(\psi_1) \equiv 0$, т. е. общий интеграл заданной системы будет:

$$z = \varphi\left(x_1^3 + x_1x_3 - x_4 + \frac{1}{2}x_2^2\right),$$

или

$$z = \varphi\left(x_4 - x_1x_3 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_1^3\right).$$

С Якобиевой системой линейных однородных уравнений (24) тесно связана *система совокупных уравнений в полных дифференциалах*

$$dx_{q+1} = Y_{11}dx_1 + \ldots + Y_{1q}dx_q$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dx_n = Y_{n-q,1}dx_1 + \ldots + Y_{n-q,q}dx_q, \tag{28}$$

равносильная системе уравнений

$$\frac{\partial x_{q+1}}{\partial x_1} = Y_{11};\ldots\frac{\partial x_{q+1}}{\partial x_q} = Y_{1q};\ldots\frac{\partial x_n}{\partial x_1} = Y_{n-q,1};\ldots\frac{\partial x_n}{\partial x_q} = Y_{n-q,q}.$$

Нетрудно проверить, что в силу тождеств

$$\frac{\partial^2 x_{q+1}}{\partial x_k \partial x_l} \equiv \frac{\partial^2 x_{q+1}}{\partial x_l \partial x_k};\ldots\frac{\partial^2 x_n}{\partial x_k \partial x_l} \equiv \frac{\partial^2 x_n}{\partial x_l \partial x_k}$$

$$(k, l = 1, \ldots q;\ k \neq l),$$

коэффициенты $Y_{11},\ldots Y_{n-q,q}$ должны удовлетворять тем же условиям, что и для Якобиевой нормальной системы (24). Составляя полный дифференциал функции $z(x_1,\ldots x_n)$, можно убедиться в том, что если эта функция есть интеграл системы Якоби (24), то $dz = 0$, и, следовательно,

$$z(x_1,\ldots x_n) = C \tag{29}$$

будет интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (28), и наоборот: если (29) есть интеграл системы (28), то его левая часть будет интегралом Якобиевой системы (24), потому что

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{q}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n-q} Y_{ji}\frac{\partial z}{\partial x_{q+j}}\right)dx_i = \sum_{i=1}^{q} Y_i(z)\,dx_i = 0,$$

что дает, вследствие произвольности $dx_1,\ldots dx_q$, уравнения системы (24):

$$Y_1(z) = 0,\ldots Y_q(z) = 0.$$

Чтобы *проинтегрировать полную систему неоднородных уравнений*

$$X_1(z) \equiv X_{11}\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_{21}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_{n1}\frac{\partial z}{\partial x_n} = Z_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_q(z) \equiv X_{1q}\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_{2q}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_{nq}\frac{\partial z}{\partial x_n} = Z_q,$$

с коэффициентами $X_{11},\ldots X_{nq}$, $Z_1,\ldots Z_q$ — функциями от $x_1,\ldots x_n$ кроме способа, указанного в начале § 62, можно поступить еще так.

Отбросивши $Z_1,\ldots Z_q$, интегрируем систему q однородных уравнений. Найдя функции $u_1,\ldots u_{n-q}$, стоящие в выражении произвольной функции φ общего интеграла однородной системы, сделаем такую замену переменных, чтобы были новые независимые переменные:

$$\xi_1,\ldots \xi_q,\ u_1,\ldots u_{n-q}$$

вместо

$$x_1,\ldots x_q,\ x_{q+1},\ldots x_n.$$

Тогда заданная система неоднородных уравнений, после преобразования, будет иметь в левых частях только производные $\frac{\partial z}{\partial \xi_1},\ldots\frac{\partial z}{\partial \xi_q}$ и может быть переписана:

$$\Xi_1(z) \equiv \frac{\partial z}{\partial \xi_1} = \zeta_1,\ldots \Xi_q(z) \equiv \frac{\partial z}{\partial \xi_q} = \zeta_q,$$

так что будет

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial \xi_h} = \frac{\partial \zeta_h}{\partial \xi_g}$$

$$(g, h = 1,\ldots q,\ g \neq h),$$

и интеграл преобразованной системы неоднородных уравнений определится посредством интегралов $u_1,\ldots u_{n-q}$ однородной системы и квадратурой:

$$z = \int(\zeta_1 d\xi_1 + \ldots + \zeta_q d\xi_q) + \varphi(u_1,\ldots u_{n-q}),$$

где φ — произвольная функция. Затем остается только вернуться к переменным $x_1, \dots x_q$.

Если бы мы нашли частный интеграл $z_1(x_1, \dots x_n)$ линейной неоднородной системы, то, как легко показать, присоединяя к нему общий интеграл $\varphi(u_1, \dots u_{n-q})$ однородной системы, полученной вычеркиванием свободных членов $Z_1, \dots Z_q$, будем иметь общий интеграл системы неоднородных уравнений:

$$z = z_1(x_1, \dots x_n) + \varphi(u_1, \dots u_{n-q}).$$

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ.

205. Уравнение коноида $xp + yq = 0$. $\left[\text{Отв.: } z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right]$.

206. $yzp + xzq = xy$. $[\text{О.: } \varphi(z^2 - x^2,\ x^2 - y^2) = 0]$.

207. $xzp + yzq = xy$. $\left[\text{О.: } z^2 = xy + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right]$.

208. $(y^2 + z^2 - x^2)\,p - 2xyq + 2xz = 0$. $\left[\text{О.: } x^2 + y^2 + z^2 = y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)\right]$.

209. $(y - bz)\frac{\partial z}{\partial x} - (x - az)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$. $[\text{О.: } x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)]$.

210. $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial z}{\partial x_3} - 2z = 0$. $\left[\text{О.: } z = C_1x_1x_2 + C_2x_1x_3 + C_3x_2x_3;\right.$

$$\left. z = 2x_1^2 + x_2x_3\,\varphi\left(\frac{x_1}{x_2},\ \frac{x_1}{x_3}\right)\right].$$

211. $x\frac{\partial z}{\partial x} + (y - \sqrt{a^2 - z^2})\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. $[\text{О.: } x - y + \sqrt{a^2 - z^2} = \varphi(z)]$.

212. $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial z}{\partial x_3} = x_1^2 + 2z$ $\left[\text{О.: } z = x_1^2\lg x_1 + x_1^2\varphi\left(\frac{x_2}{x_1},\ \frac{x_3}{x_1}\right)\right]$.

213.

$$(x_2 + x_1)\frac{\partial z}{\partial x_1} + (x_2 - x_1)\frac{\partial z}{\partial x_2} = z.$$

$$\left[\text{О.: } z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\varphi\left(\lg\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right)\right].$$

214.

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial z}{\partial x_3} = 0.$$

Найти такую функцию $z(x_1, x_2, x_3)$, чтобы для $x_1 = a_1$ она обращалась в заранее заданную функцию $f(x_2, x_3)$.

[О.: Ищем такой интеграл v_1, который обращается в x_2 для $x_1 = a_1$, полагая

$$v_1 = x_2 + (x_1 - a_1)\varphi_1 + (x_1 - a_1)^2\varphi_2 + \dots;$$

имеем

$$\varphi_1 = -\frac{x_2}{a_1},\ \varphi_2 = \frac{x_2}{a_1^2}, \dots,\ v_1 = x_2\left[1 - \frac{x_1 - a_1}{a_1} + \frac{(x_1 - a_1)^2}{a_1^2} - \dots\right] = \frac{a_1x_2}{x_1}.$$

Так же найдем

$$v_2 = \frac{a_1x_3}{x_1},$$

тогда:

$$z = f(v_1, v_2);\ z = f\left(\frac{a_1x_2}{x_1},\ \frac{a_1x_3}{x_1}\right)\Bigg].$$

215.

$$\left(z - \frac{x_1x_2^2}{x_3}\right)\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial z}{\partial x_3} = z.$$

$$\left[\text{О.: } u_1 = \left(1 - \frac{x_1x_2^2}{zx_3}\right)e^{\frac{x_2^2}{x_3}};\ u_2 = \frac{x_2}{z};\ u_3 = \frac{x_3}{z}\right].$$

216. $xp + 2yq = 2\left(z - \frac{x^2}{y}\right)^2$. $\left[\text{О.: } u_1 = \frac{x^2}{y};\ u_2 = ye^{\frac{1}{z} - \frac{x^2}{y}}\right]$.

217. $xp + yq = z$.

Найти такой интеграл, чтобы для $x = a$ было $z = \frac{y^2}{4c}$.

$\left[\text{О.: } \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}\right.$; чтобы для $x = a$ было $y = b$ и $z = \frac{b^2}{4c}$, надо:

$$u_1 = \frac{az}{x} = \frac{b^2}{4c},\quad u_2 = \frac{ay}{x} = b;$$

$u_1 = \varphi(u_2)$ для $x = a$ дает $z = \varphi(y)$, т. е. $\left.\varphi(u_2) = \frac{u_2^2}{4c} = u_1;\ z = \frac{ay^2}{4cx}\right]$.

218. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $xp + yq = z$ и проходящую через кривую

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ lx + my + nz = 1.$$

$$\left[\text{О.: } u_1 = \frac{z}{x},\ v_1 = \frac{z}{y};\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = (lx + my + nz)^2\right].$$

219. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $xyp - y^2q = x$ и проходящую через кривую

$$x = a,\ yz = \frac{a^2 + 2}{2a}.$$

$$[\text{О.: } 2xyz - x^2 = 2].$$

220. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$(x^2 + y^2)\,p + 2xyq = xz$$

и проходящую через кривую

$$x = a,\ y^2 + z^2 = a^2.$$

$$[\text{О.: } z^2 = x^2 - y^2].$$

221. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$2xzp + 2yzq = z^2 - x^2 - y^2$$

и проходящую через гиперболу

$$x = 1,\ z^2 - y^2 = 1.$$

$$\left[\text{О.: } x^2 + y^2 + z^2 = 2\left(x + \frac{y^2}{x}\right)\right].$$

222. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$(y^2 - x^2 + 2xz)\,p + 2y(z - x)\,q = 0$$

и проходящую через эллипс

$$x = 0,\ y^2 + 4z^2 = 4.$$

$$[\text{О.: } (x - z)^2 + (y \pm \sqrt{1 - z^2})^2 = 1].$$

223. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$2yzp - xzq + xy = 0$$

и проходящую через окружность

$$z = 0,\ x^2 + y^2 = y.$$

$$[\text{О.: } (x^2 + y^2 + z^2)^2 = y^2 - z^2].$$

224. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$(x^3 + 3xy^2)\,p + 2y^3q = 2y^2z$$

и проходящую через окружность

$$z = 0,\ x^2 + y^2 = r^2.$$

$$[\text{О.: } r^2x^2z = (x^2 + y^2)(r^2z^2 - y^2)].$$

225. Проверить, что при обозначениях $p_i = \dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ будет полной такая система:

$$p_1 + 2x_1 p_2 + 2x_2 p_3 + p_5 + x_4 p_6 = 0$$
$$x_1 p_1 + 2x_2 p_2 + 2x_3 p_3 + x_5 p_5 + x_6 p_6 = 0$$
$$(3x_1^2 - 2x_2)\, p_1 + (3x_1 x_2 - x_3)\, p_2 + 3x_1 x_3 p_3 + (x_4 x_5 - x_6)\, p_4 + x_5^2 p_5 + x_5 x_6 p_6 = 0.$$

226.
$$X_1 \equiv x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0$$
$$X_2 \equiv x_3 p_1 - x_1 p_3 = 0$$
$$X_3 \equiv x_4 p_2 - x_2 p_4 = 0.$$

Проверить, что система полная и свести ее к Якобиевой системе.

227. Решить систему в зад. 226, пользуясь подстановкой Майера

$$x_1 = y_1,\ x_2 = a_2 + y_1 y_2,\ x_3 = a_3 + y_1 y_3$$
$$\left[\text{О.: } \frac{\partial z}{\partial y_1} - z\frac{\partial z}{\partial x_4} = 0;\right.$$
$$z = \frac{y_1 + y_3(a_3 + y_1 y_3)}{x_4} \cdot \frac{(a_2 + y_1 y_2)^2 + x_4^2}{y_1^2 + (a_3 + y_1 y_3)^2} + y_2\,\frac{a_2 + y_1 y_2}{x_4};$$
$$\left. u_1 = [y_1^2 + (a_3 + y_1 y_3)^2]\,[(a_2 + y_1 y_2)^2 + x_4^2];\ z = \varphi\,[(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_4^2)]\right].$$

228.
$$x_1 p_1 + x_2 p_2 - x_3 p_3 + z = 0$$
$$x_2 p_1 - x_1 p_2 + z p_3 + x_3 = 0$$
$$[\text{О.: } x_1 x_3 + x_2 z = \varphi\,(x_2 x_3 - x_1 z)].$$

229. $\begin{cases} x_1 p_1 - x_2 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0 \\ x_3 p_1 + x_4 p_2 - x_1 p_3 - x_2 p_4 = 0. \end{cases}$ $\left[\text{О.: } z = \varphi\left[(x_1^2 + x_3^2)(x_4^2 + x_2^2),\ \dfrac{x_1 x_2 + x_3 x_4}{x_2 x_3 - x_1 x_4}\right]\right].$

230. $\begin{cases} (x_4^2 - x_3^2)\, p_1 - (x_1 x_3 - x_2 x_4)\, p_3 + (x_2 x_3 - x_1 x_4)\, p_4 = 0. \\ (x_4^2 - x_3^2)\, p_2 + (x_2 x_3 - x_1 x_4)\, p_3 + (x_1 x_3 - x_2 x_4)\, p_4 = 0. \end{cases}$

$$[\text{О.: } z = C_1 + (C_2 + C_3)\lg[(x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2] + (C_2 - C_3)\lg[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2];$$
$$z = \varphi\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2;\ x_1 x_2 + x_3 x_4)].$$

231. $p_1 + [x_3 - a(x_1 - b)]\, p_5 = x_1;\ p_2 + p_3 + (x_1 - b)\, p_5 = x_2;\ p_4 - a p_5 = 0.$

$$\left[\text{О.: } z = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + C_1(x_3 - x_2) + C_2\left[x_4 + \frac{1}{2}(x_1 - b)^2\right] + C_3\,[x_5 - x_3(x_1 - b)] + C_4\right].$$

232.
$$(x_4 - x_3)\, dx_3 = (1 - x_3 x_2)\, dx_1 + (1 - x_3 x_1)\, dx_2;$$
$$(x_4 - x_3)\, dx_4 = (x_4 x_2 - 1)\, dx_1 + (x_4 x_1 - 1)\, dx_2.$$
$$[\text{О.: } x_4 + x_3 - x_1 x_2 = C_1;\ x_1 + x_2 - x_3 x_4 = C_2;$$
$$x_3 = f_1(x_1, x_2, C_1, C_2);\ x_4 = f_2(x_1, x_2, C_1, C_2)].$$

233.
$$\frac{p_3 x_1 + p_4 x_3}{p_1 x_2 + p_2 x_1} = \frac{p_3 - p_4}{p_1 - p_2} = \frac{x^3 + x_4}{x_1 + x_2}$$
$$[\text{О.: } z = \varphi\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ x_2^2 - x_1^2 - x_3^2 + x_4^2)].$$

234. $\begin{cases} x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = 0 \\ p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \end{cases}$ $\left[\text{О.: } z = \varphi\left(\dfrac{x_1 + x_3}{x_1 - x_2},\ \dfrac{x_1 + x_4}{x_1 - x_2}\right)\right].$

ГЛАВА VIII.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ 1-го ПОРЯДКА.

В этой главе содержится продолжение и конец теории интегрирования дифференциальных уравнений и систем уравнений с частными производными 1-го порядка одной неизвестной функции z. Здесь излагается более трудная часть классической теории интегрирования уравнений 1-го порядка: рассмотрены нелинейные уравнения и системы уравнений; способы интегрирования нелинейных уравнений — Лагранжа и Шарпи, способ Коши, первый способ Якоби; далее идет изучение скобок Пуассона и Якоби-Вейлера и их свойств; 2-й способ Якоби интегрирования уравнений и систем нелинейных уравнений; основные сведения из теории задачи Пфаффа и, наконец, общие сведения о касательных преобразованиях и об интегралах Софуса Ли.

Материал первостепенной важности содержится в первых 4 параграфах: 64—67. В последнем параграфе я изложил настолько подробно, насколько позволили мне размеры этой книги, теорию касательных преобразований на плоскости и в трехмерном пространстве, а также сущность интегралов Ли и их свойств и коснулся этих вопросов для многомерного пространства только в общих чертах.

Что касается исследований Ли, то, хотя, например, по Н. Н. Салтыкову „все исследования этого знаменитого геометра полны новых идей и методов, которые, благодаря своей общности, казалось, должны произвести переворот во всей области математического анализа", однако некоторые из математиков, в том числе и сам проф. Н. Н. Салтыков, относятся с большим скептицизмом к результатам теории Ли и практической ее применимости, в то время как другие, например, немецкий ученый Энгель, отдали многие годы своей жизни исключительно на изучение работ Ли, их издание и комментарии к ним. Для характеристики этого противоречия во взглядах на исследования Ли и для уяснения сущности дела, приведу здесь мнение о нем и о его работах таких двух выдающихся ученых, как Нэтер и Пуанкаре. По словам Нэтера „Das concrete Bild einer Gesammt-Mannigfaltigkeit in ihrer Gestalt, d. h. in ihren endlichen Formenbeziehungen, deren Wechsel bei variabeln Parametern, die Realitätsfragen überhaupt, haben Lie nie interessirt. In jenem Gebiet aber, das in den geometrischen Elementen und Operationen nur eine Versinnlichung, eine Zusammenfassung von ganz abstracten Begriffsbildungen, oft von den complicirtesten, sieht, war Lie Meister", а по мнению Пуанкаре „Lie était un intuitif; on aurait pu hésiter en lisant ses ouvrages; on n'hésitait plus après avoir causé avec lui; on voyait tout de suite qu'il pensait en images".

Вот почему, в моем кратком изложении некоторых из исследований Ли, я останавливаюсь главным образом на геометрических образах плоскостного и трехмерного пространств, даю в соответствующем § 68 больше примеров, чем в других параграфах, подбирая такие из них, которые приводят к образам вполне реальным и которые дают читателю известное уже из первых глав преобразование Лежандра, в практической полезности которого он мог раньше убедиться; преобразование такого гениального математика, как Эйлер, занимавшегося, как известно, кроме чистой математики, и балистикой, и мореходным делом и т. д.; наконец, преобразования, позволяющие переходить от сферы к точке, от поверхности эллипсоида к поверхности волны. В § 70 я соединил в одно целое длинный ряд доказанных Ли теорем о бесконечно-малых преобразованиях, пытаясь дать читателю картину для общего представления о теории Ли групп преобразований.

Литература:

В. Г. Имшенецкий. — Об интегрир. ур. с частн. производными 1-го порядка, Казань, 1865.

Г. В. Пфейффер — Интегрирование уравнений с частн. производными, ч. I, Киев, 1914 (литогр.).

—Обобщение способа Jacobi-Mayer'a интегрирования нелинейных уравнений и полных систем нелинейных уравнений. (Известия Ак. наук СССР, 1932).

М. А. Тихомандрицкий — Курс диффер. и интегр. исчислений, т. II: интегр. диф. ур., Харьков, 1903, гл. XII.

В. П. Ермаков — Нелинейные диффер. ур. с частными производными 1-го порядка, Киев, 1884; Интегр. диф. ур. механики, Киев, 1877.

Д. А. Граве — Об интегрировании частных диффер. ур. 1-го порядка (диссертация), Спб., 1889.

Н. Н. Салтыков — Об интегрировании уравнений с частн. произв. 1-го порядка одной неизвестной функции (Записки Харьк. университета, 1899); Исследования по теории уравнений с частными произв. 1-го пор. одной неизв. функции, Харьков, 1905.

А. Н. Коркин — О совокупных уравнениях с частн. производными 1-го порядка и некоторых вопросах механики, Спб., 1867.

Ц. К. Руссьян — Система уравнений Pfaff'a (диссертация), Одесса, 1899; Метод интегрирования дифференциального уравнения Pfaff'a, Харьков, 1928.

E. Goursat — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du 1-er ordre Paris, 1921, Ch. IV — X.

—Leçons sur le Problème de Pfaff, Paris, 1922.

P. Mansion — Théorie des équations aux dérivées partielles du 1-er ordre, Paris, 1891.

N. N. Saltykow — Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Mémorial des Sc. Math., fs. 50, Paris, 1931).

A. R. Forsyth — Theory of differential equations, vol. V, Cambridge, 1906; Ch. IV, VI, VIII — X; vol. I, 1890.

C. G. J. Jacobi — Vorlesungen über Dynamik, Berlin, 1866; Gesam. Werke, Bd. IV.

Ed. Bour — Sur l'intégration des équations dif. part. du 1-er et du 2-e ordre (Journ. de l'Ec. Polyt. Ch. 39), 1862.

A. Mayer (Статьи в Math. Annalen, Bd. III, VI, VIII, IX; о линейных уравн. Bd. V).

Hamilton (статьи в Philosoph. Transactions, 1834, pp. 247—308; 1835, pp. 95—144).

E. Cartan — Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff (Annales de l'Ec. Normale, 1899), Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différ. totales (Ibidem, t. 18, 1901); Les systèmes de Pfaff et les équations aux dérivées partielles du second ordre (Ibidem, t. 27, 1910).

S. Lie — Théorie der Transformationsgruppen, Leipzig, 1890, 1930. Geometrie der Berührungstransformationen, Bd. I, 1896; Gesammelte Abhandlungen; Bd. III, IV—Abhandlungen z. Theorie d. Differentialgleichungen, 1922—1929; Bd. V, VI—Abhandlungen über d. Theorie d. Transformationsgruppen, 1924—1927.

§ 64. Способ Лагранжа и Шарпи интегрирования нелинейного уравнения 1-го порядка. Характеристики. Начнем с первого по времени способа интегрирования нелинейного уравнения 1-го порядка — со *способа Лагранжа и Шарпи.* Остановимся подробно на случае уравнения с 2 независимыми переменными x, y, от которых зависит неизвестная функция z, т. е. на уравнении вида

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

где p и q обозначают соответственно $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Связанная с этим способом интегрирования система совокупных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка остается без изменения и во всех других, рассматриваемых в дальнейшем, способах интегрирования нелинейных уравнений с частными производными 1-го порядка.

Излагаемый в дальнейшем способ интегрирования принадлежит Шарпи, хотя некоторые виднейшие ученые, как например Софус Ли, Якоби, полагают, что заслуги Шарпи слишком незначительны по сравнению с Лагранжем. Дело объясняется тем, что мемуар Шарпи, представленный в 1784 году в Парижскую Академию наук не был опубликован и утерялся. Только в 1928 году была найдена копия работы Шарпи. Мемуар Шарпи был передан Лагранжу в 1793 году. Исходя из идей Лагранжа, формулированных в его мемуаре 1772 г. и из теории линейных уравнений, Шарпи первый устанавливает обыкновенные дифференциальные уравнения характеристик для нелинейных уравнений 1-го порядка, что приписывается обычно Лагранжу и решает в общем виде задачу интегрирования нелинейных уравнений, раньше, чем его учитель, и 11 случаев уравнений, проинтегрированных Лагранжем, что и составляет все содержание старых методов Лагранжа, являются лишь примерами для общего метода Шарпи. Шарпи не доказал только обратных теорем, необходимых для строгости его метода и доказанных впоследствии Якоби: 1) всякий интеграл характеристик определяет решение соответствующего линейного уравнения с частными производными; 2) всякий интеграл характеристик удовлетворяет условию Эйлера

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p.$$

Впоследствии, в Théorie des fonctions analytiques в 1797 году, в главе XVI, Лагранж составляет дифференциальные уравнения характеристик более сложным способом, чем Шарпи, а на стр. 178 повторяет результаты Шарпи, не дополняя их и не упоминая имени их автора. Более подробные сведения об этом можно найти в цитированной монографии Н. Н. Салтыкова.

Для сокращения записи введем такие обозначения, которыми и будем пользоваться все время в дальнейшем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \frac{\partial F}{\partial p} = P, \frac{\partial F}{\partial q} = Q.$$

Если бы мы нашли интеграл уравнения (1),

$$f(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \tag{2}$$

то результат исключения постоянных C_1, C_2 из уравнения (2) и из уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0; \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} q = 0$$

должен был бы дать заданное дифференциальное уравнение (1).

Для нахождения интеграла (2) будем искать такое новое уравнение

$$\Phi\ (x, y, z, p, q) = 0, \tag{3}$$

чтобы функции $p\ (x, y, z)$, $q\ (x, y, z)$, найденные из 2 уравнений (1) и (3) и подставленные в выражение

$$dz = pdx + qdy\ ,$$

обращали бы правую часть его в полный дифференциал. Для этого должно быть

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p. \tag{4}$$

Считая p и q функциями 3 *независимых* переменных x, y, z, посредством дифференцирования уравнений (1) и (3) найдем:

$$\left.\begin{array}{l} X + P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} Y + P\frac{\partial p}{\partial y} + Q\frac{\partial q}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} Z + P\frac{\partial p}{\partial z} + Q\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \end{array}\right\}$$

Полагая, что каждая из этих систем уравнений совместима, т. е. что

$$D\left(\frac{F, \Phi}{p, q}\right) \neq 0,$$

или короче

$$D \neq 0,$$

получим из них нужные нам для подстановки в (4) выражения для

$$\frac{\partial q}{\partial x},\ \frac{\partial p}{\partial y},\ \frac{\partial p}{\partial z},\ \frac{\partial q}{\partial z}:$$

$$D\frac{\partial q}{\partial x} = X\frac{\partial \Phi}{\partial p} - P\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$D\frac{\partial p}{\partial y} = Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} - Y\frac{\partial \Phi}{\partial q}$$

$$D\frac{\partial p}{\partial z} = Q\frac{\partial \Phi}{\partial z} - Z\frac{\partial \Phi}{\partial q}$$

$$D\frac{\partial q}{\partial z} = Z\frac{\partial \Phi}{\partial p} - P\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Подстановка найденных выражений в условие (4), по сокращении на $D \neq 0$, дает нам такое линейное уравнение с частными производными 1-го порядка для определения неизвестной вспомогательной функции Φ, которая дала бы нужное нам уравнение (3):

$$P\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + (Pp + Qq)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - (X + pZ)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - (Y + qZ)\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0 \tag{5}$$

Интегрирование его равносильно интегрированию такой системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{dp}{-(X + pZ)} = \frac{dq}{-(Y + qZ)} \tag{6}$$

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что для нас нет надобности производить полное интегрирование уравнения (5) или находить все интегралы системы (6), — надо найти лишь частный интеграл уравнения (5) или один интеграл системы (6), содержащий одну произвольную постоянную C_1 и хотя одну из переменных p, q:

$$\Phi\ (x, y, z, p, q) = C_1.$$

Тогда z определится на основании зависимости

$$dz = p\ (x, y, z, C_1)\ dx + q\ (x, y, z, C_1)\ dy$$

с помощью одной только квадратуры, которая введет произвольную постоянную C_2 и даст полный интеграл (2).

Уравнение (5) или система (6) вообще могут иметь не больше 3 независимых интегралов, так как,—что легко проверить,—четвертым независимым интегралом является заданное уравнение (1).

Очевидно, что если задано для интегрирования уравнение, не содержащее явно неизвестной функции z,

$$F\ (x, y, p, q) = 0,$$

то и новое уравнение следует искать вида

$$\Phi\ (x, y, p, q) = C_1;$$

тогда условие интегрируемости для

$$dz = p\ (x, y)\ dx + q\ (x, y)\ dy$$

будет

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

и приведет к упрощениям уравнения (5) и системы (6).

Лагранжу принадлежит замечание о том, что если найдено будет для заданного уравнения

$$q = f\ (x, y, z, p)$$

такое выражение для функции p, которое зависит от одной постоянной C_1 и которое обращает выражение

$$pdx + f\ (x, y, z, p)\ dy$$

в полный дифференциал dz, тогда полный интеграл найдем с помощью квадратур. Основываясь на нем, можно легко проинтегрировать ряд уравнений специальных типов.

I. Например, для уравнения

$$F\ (y, p, q) = 0,\ \text{или}\ q = f_1\,(p, y),$$

полагая $p = C_1$, имеем:

$$dz = C_1 dx + f_1(C_1, y)\, dy; \quad z = C_1 x + \int f_1(C_1, y)\, dy + C_2.$$

II. Для уравнения

$$F(x, p, q) = 0 \text{ или } p = f_2(x, q),$$

полагая аналогично $q = C_1$, найдем

$$z = C_1 y + \int f_2(x, C_1)\, dx + C_2.$$

III. Далее будем иметь:

$$F(z, p, q) = 0; \quad p = C_1 q; \quad q = f_3(z, C_1)$$

$$dz = f_3(z, C_1)\,(C_1 dx + dy); \quad C_1 x + y + C_2 = \int \frac{dz}{f_3(z, C_1)}.$$

IV. Также еще легко проинтегрируется уравнение

$$f_1(x, p) = f_2(y, q),$$

если положить

$$f_1(x, p) = f_2(y, q) = C_1;$$

$$p = \varphi_1(x, C_1); \quad q = \varphi_2(y, C_1);$$

тогда:

$$z = C_2 + \int \varphi_1(x, C_1)\, dx + \int \varphi_2(x, C_1)\, dy.$$

V. Уравнение с частными производными

$$z = px + qy + f(p, q),$$

аналогичное уравнение Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, можно легко проинтегрировать, полагая $p = C_1$, $q = C_2$. Тогда

$$z = C_1 x + C_2 y + \varphi(C_1, C_2).$$

Пользуясь полным интегралом, легко получить особенный интеграл с помощью уравнений

$$x + \frac{\partial \varphi(C_1, C_2)}{\partial C_1} = 0; \quad y + \frac{\partial \varphi(C_1, C_2)}{\partial C_2} = 0.$$

Заданное уравнение можно проинтегрировать с помощью дифференцирования, стараясь удовлетворить таким двум уравнениям:

$$\left(x + \frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial x} + \left(y + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\left(x + \frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial y} + \left(y + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Будем иметь полный, общий и особенный интеграл, полагая соответственно:

$$1) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial y} = 0;$$

$$2) \quad D\left(\frac{p, q}{x, y}\right) = 0;$$

$$3) \quad x + \frac{\partial f}{\partial p} = 0; \quad y + \frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

VI. Весьма просто проинтегрируется также и уравнение

$$F(p, q) = 0,$$

так как, полагая

$$p = C_1 \text{ и } q = k = \text{const},$$

причем k определяется из

$$F(C_1, k) = 0, \quad k = f(C_1),$$

имеем:

$$dz = C_1 dx + f(C_1)\, dy; \quad z = C_1 x + f(C_1)\, y + C_2.$$

Примеры.

1)
$$pq - z = 0.$$

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}.$$

Из отношений 1-го и 5-го, 2-го и 4-го имеем:

$$dx = dq; \quad dy = dp, \text{ т. е. } p = y + C_1, \; q = x + C_2$$

$$dz = (y + C_1)\, dx + (x + C_2)\, dy, \quad z = pq; \quad z = (y + C_1)(x + C_2).$$

2)
$$p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 2xy = 0$$

$$\frac{dx}{p - x} = \frac{dy}{q - y} = \frac{dz}{p(p - x) + q(q - y)} = \frac{dp}{p - y} = \frac{dq}{q - x}$$

$$p + q = x + y + C_1$$

$$2dz = (2x + C_1)\, dx + (2y + C_2)\, dy + (dx - dy)\sqrt{2(x - y)^2 - C_1^2}$$

$$2z = x^2 + y^2 + C_1 x + C_1 y + (x - y)\sqrt{2(x - y)^2 - C_1^2} -$$

$$- \frac{C_1^2}{2\sqrt{2}} \lg\left[(x - y)\sqrt{2} + \sqrt{2(x - y)^2 - C_1^2}\right] + C_2.$$

3)
$$q = yp + p^2$$

$$z = C_1 x + \int (C_1 y + C_1^2)\, dy; \quad z = C_1 x + \frac{1}{2} C_1 y^2 + C_1^2 y + C_2.$$

Всякая система 5 значений (x, y, z, p, q) определяет в пространстве точку $M(x, y, z)$ и проходящую через нее плоскость

$$(X - x)\,p + (Y - y)\,q - (Z - z) = 0 \tag{7}$$

Определим на интегральной поверхности кривую линию, содержащую один из ∞^4 элементов (x, y, z, p, q), связанных дифференциальным уравнением

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

т. е. одной зависимостью между этими пятью величинами. Пусть этот элемент будет $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, а интегральная поверхность, на которой лежит кривая, пусть будет $\omega(x, y, z) = 0$. Дифференцирование уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

дает:

$$X + Zp + P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = 0; \quad Y + Zq + P\frac{\partial p}{\partial y} + Q\frac{\partial q}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

Условие
$$dz = pdx + qdy,$$
в котором p и q обозначают частные производные от z по x и y, так что
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},$$
и в которое переходит уравнение плоскости (7) для двух бесконечно-близких точек поверхности
$$M(x, y, z) \text{ и } M_1(x + dx, y + dy, z + dz),$$
называется условием *соединенности элементов* (x, y, z, p, q); это условие удовлетворяется для выбранного нами элемента, так как соответствующая точка лежит на поверхности. Положим, что x и y изменяются вдоль нашей кривой так, что
$$dx = Pdt, \ dy = Qdt.$$
Условие соединенности элементов в таком случае перепишется:
$$\frac{dz}{dt} = Pp + Qq,$$
а уравнения (8) переходят в такие:
$$X + Zp + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0; \ Y + Zq + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0,$$
или иначе:
$$X + Zp + \frac{dp}{dt} = 0; Y + Zp + \frac{dq}{dt},$$
что дает систему совокупных уравнений вида (6):
$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{dp}{-(X + pZ)} = \frac{dq}{-(Y + qZ)} = dt. \qquad (9)$$
Один из четырех независимых интегралов известен; это будет
$$F(x, y, z, p, q) = C,$$
где надо взять $C = 0$, чтобы согласовать этот интеграл с заданным дифференциальным уравнением. Поэтому интегрирование системы (9) сможет дать еще 3 интеграла с тремя произвольными постоянными C_1, C_2, C_3 и совокупность всех ∞^4 элементов (x, y, z, p, q), связанных уравнением $F(x, y, z, p, q) = 0$, распределится на ∞^3 *многообразий* M, точки M которых образовывают кривые линии. Вполне определенные начальные значения $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ приводят к определенной кривой, независимо от вида выбранной интегральной поверхности. Следовательно, если начальный элемент $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ лежит на интегральной поверхности, тогда и *кривые линии проходят на этой поверхности* и называются *характеристиками*. Интегральные кривые, определяемые системой (9), образовывают *конгруэнцию* кривых. Интегральная поверхность состоит из бесчисленного множества характеристик; через каждую точку интегральной поверхности обязательно проходит характеристика.

Всякая поверхность, состоящая из бесчисленного множества характеристик, есть интегральная поверхность.

Для линейного уравнения
$$P(x, y, z)\, p + Q(x, y, z)\, q = R(x, y, z).$$
Характеристики определяются системой
$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$
и будут:
$$u_1(x, y, z) = C_1, \ u_2(x, y, z) = C_2.$$

Характеристики для линейного уравнения в каждой точке имеют касательную прямую, определяемую уравнением
$$\frac{X - x}{P} = \frac{Y - y}{Q} = \frac{Z - z}{R};$$
через нее проходят все плоскости, касательные к интегральным поверхностям, проходящим через заданную точку пространства, лежащую на нашей касательной прямой.

§ 65. Способ Коши интегрирования нелинейного уравнения. Первый способ Якоби. *Способ интегрирования Коши* нелинейного уравнения
$$F(x, y, z, p, q) = 0$$
состоит в следующем. Надо найти такой интеграл этого уравнения
$$z = f(x, y),$$
что
$$\text{для } x = x_0 \text{ будет } z = \varphi(y),$$
где $\varphi(y)$ — какая угодно заранее заданная функция переменного y.

Геометрическая картина представляет собой поверхность, проходящую через заранее заданную плоскую кривую $z = \varphi(y)$, проведенную на плоскости $x = x_0$.

Для разыскания такого интеграла $z = f(x, y)$, введем кроме независимой переменной x новую независимую переменную u по формуле
$$y = \omega(x, u),$$
где ω остается пока неопределенной, находящейся в нашем распоряжении функцией. Тогда известное равенство
$$dz = pdx + qdy$$
переходит в такое:
$$dz = pdx + q\left(\frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial u}du\right),$$
или иначе
$$dz = \left(p + q\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx + q\frac{\partial y}{\partial u}du,$$
а так как независимых переменных у нас только две, x и u, то z есть функция от них и, следовательно, мы должны иметь еще
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial u}du.$$

Два последние равенства, имеющие в левых частях одно и то же dz, можно согласовать только приравниванием коэффициентов при dx и du:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = q\frac{\partial y}{\partial u}. \qquad (10)$$

Так как y и z стали функциями двух новых независимых переменных x и u, то и p и q будут функции тех же независимых переменных x и u. Дифференцирование заданного уравнения $F = 0$, в которое подставлено $\omega(x, u)$ вместо y, по этим переменным x, u дает:

$$X + Y\frac{\partial y}{\partial x} + Z\frac{\partial z}{\partial x} + P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$Y\frac{\partial y}{\partial u} + Z\frac{\partial z}{\partial u} + P\frac{\partial p}{\partial u} + Q\frac{\partial q}{\partial u} = 0. \qquad (11)$$

Используем теперь произвольность функции $\omega(x, u)$, выбравши ее так, чтобы не выражать посредством четырех уравнений (10) и (11) 4 неизвестных функций y, z, p, q не только через производные по x, но и по u. Для этого, дифференцируя 2 уравнения (10) соответственно по u и по x, имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial u} = \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial x} + q\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial x} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial x}.$$

Так как левые части равны, то, сравнивая правые, имеем вместо 2-го уравнения (10) такое новое:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Подстановка этого выражения для производной $\frac{\partial p}{\partial u}$ и выражения для производной $\frac{\partial z}{\partial u}$ из второго уравнения (10) во второе уравнение (11) дает:

$$Y\frac{\partial y}{\partial u} + Zq\frac{\partial y}{\partial u} + P\left(\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial x}\right) + Q\frac{\partial q}{\partial u} = 0$$

или

$$\left(Y + Zq + P\frac{\partial q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial u} = \left(P\frac{\partial y}{\partial x} - Q\right)\frac{\partial q}{\partial u}.$$

Нетрудно убедиться в том, что произвольность функции $\omega(x, u)$ можно всегда использовать для равенства нулю выражения, стоящего в скобках в правой части предшествующего уравнения, т. е., пользуясь произвольностью ω, можно положить

$$P\frac{\partial y}{\partial x} - Q = 0, \qquad (12)$$

а так как y есть функция от u и x, то левая часть того же уравнения дает:

$$P\frac{\partial q}{\partial x} = -(Y + Zq). \qquad (13)$$

Умножая первое уравнение (10) на P и пользуясь уравнением (12), перепишем это первое уравнение (10) таким образом:

$$P\frac{\partial z}{\partial x} = Pp + Qq. \qquad (14)$$

Умножая, далее, первое уравнение (11) на P и подставляя выражения для $P\frac{\partial y}{\partial x}$, $P\frac{\partial q}{\partial x}$, $P\frac{\partial z}{\partial x}$ из уравнений (12), (13), (14), получим вместо него:

$$PX + QY + Z(Pp + Qq) + P^2\frac{\partial p}{\partial x} - Q(Y + Zq) = 0,$$

или после приведения подобных членов и сокращения на P:

$$P\frac{\partial p}{\partial x} = -(X + Zp). \qquad (15)$$

Уравнения (12), (13), (14), (15) не имеют производных по u, к чему мы и стремились, преобразовывая 4 уравнения (10), (11). Переменная u не входит в производные уравнений (12)—(15). Рассматривая ее как параметр и решая уравнения относительно $\frac{dx}{P}$, получаем такую систему обыкновенных дифференциальных уравнений — уравнений характеристик вида (9) § 64:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{dp}{-(X + Zp)} = \frac{dq}{-(Y + Zq)}. \qquad (16)$$

Параметр u может войти через произвольные постоянные интегрирования этой системы уравнений, т. е. через x_0, y_0, z_0, p_0, q_0.

Одним из интегралов предшествующей системы будет

$$F(x, y, z, p, q) = \text{const},$$

или

$$F(x, y, z, p, q) = F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0).$$

Так как системе должно соответствовать заданное дифференциальное уравнение

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

то мы имеем:

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0.$$

Интегрирование системы (16) должно дать 4 функции:

$$y = \alpha(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$$
$$z = \beta(x, x_0, \ldots\ldots q_0)$$
$$p = \gamma(x, x_0, \ldots\ldots q_0)$$
$$q = \delta(x, x_0, \ldots\ldots q_0).$$

Помимо этого должно еще удовлетворяться второе из уравнений (10):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = q\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{17}$$

Чтобы удовлетворить ему, обозначим через Δ результат подстановки в это уравнение найденных выражений

$$y = \alpha(x, x_0, \dots q_0); \dots q = \delta(x, x_0, \dots q_0),$$

т. е.

$$\Delta = \frac{\partial z}{\partial u} - q\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Дифференцирование этого выражения по x и дифференцирование 1-го уравнения (10) по u дают:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial x} - q\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial u} = \frac{\partial p}{\partial u} + q\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial x},$$

т. е.

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{P}\left[P\frac{\partial p}{\partial u} + Q\frac{\partial q}{\partial u}(Y + Zq)\frac{\partial y}{\partial u}\right] = -\frac{Z}{P}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - q\frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

или окончательно

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = -\frac{Z}{P}\Delta.$$

Так как в этом уравнении содержится производная только по x, то, считая u параметром и интегрируя, получаем:

$$\frac{d\Delta}{\Delta} = -\frac{Z}{P}dx; \quad \lg\Delta = -\int\limits_{x_0}^{x}\frac{Z}{P}dx + \lg\Delta_0;$$

где

$$\Delta = \Delta_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{Z}{P}dx}$$

$$\Delta_0 = \frac{\partial z_0}{\partial u} - q_0\frac{\partial y_0}{\partial u}.$$

Отсюда приходим к заключению, что равенство (17) будет удовлетворено, т. е. $\Delta = 0$, если $\Delta_0 = 0$, или иначе:

$$\frac{\partial z_0}{\partial u} - q_0\frac{\partial y_0}{\partial u} = 0. \tag{18}$$

Полагая, по Коши,

$$y_0 = u; \quad z_0 = \varphi(u),$$

имеем из уравнения (18)

$$q_0 = \varphi'(u),$$

а из уравнения

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

получаем значение

$$p_0 = E(x_0, u, \varphi(u), \varphi'(u))$$

и тогда исключение параметра u из двух уравнений

$$y = \alpha[x, x_0, u, \varphi(u), \varepsilon(x_0, u), \varphi'(u)]$$

$$z = \beta[x, x_0, u, \varphi(u), \varepsilon(x_0, u), \varphi'(u)]$$

дает такой интеграл заданного уравнения,

$$z = f(x, y),$$

который действительно для $x = x_0$ дает $y = y_0 = u$ и $z_0 = \varphi(u)$, т. е. $z_0 = \varphi(y_0)$, где φ есть какая угодно, заранее заданная функция.

Здесь мы придерживались способа изложения Коши. В изложении Дарбу способа интегрирования Коши, вместо системы обыкновенных уравнений (16) берут систему (9), и в соответствии с этим,—вместо решений системы (16)

$$y = \alpha(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \dots q = \delta(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$$

ищут решения системы (9) в виде

$$x = a(t, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),\ y = b(t, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \dots q = e(t, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$$

и, вводя 2 независимые переменные t и u для

$$dz = pdx + qdy$$

получают

$$\frac{\partial z}{\partial t}dt + \frac{\partial z}{\partial u}du = p\left(\frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial x}{\partial u}du\right) + q\left(\frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial u}du\right),$$

что дает уравнения, аналогичные уравнениям (10):

$$\frac{\partial z}{\partial t} = p\frac{\partial x}{\partial t} + q\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}$$

и т. д.

Пример.

$$pq - xy = 0.$$

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{y} = \frac{dq}{x}.$$

Уравнения

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dq}{q} = \frac{dy}{y}$$

дают 2 интеграла:

$$\frac{p}{x} = \frac{p_0}{x_0}; \quad \frac{q}{y} = \frac{q_0}{y_0}.$$

Далее:

$$dz = 2pdx = \frac{2p_0}{x_0}xdx; \quad dz = 2qdy = 2\frac{q_0}{y_0}ydy$$

дают еще

$$z - z_0 = \frac{p_0}{x_0}(x^2 - x_0^2);$$

$$z - z_0 = \frac{q_0}{y_0}(y^2 - y_0^2).$$

Имеем:

$$p_0 q_0 - x_0 y_0 = 0; \quad \frac{\partial z_0}{\partial u} - q_0 \frac{\partial y_0}{\partial u} = 0.$$

Для последнего уравнения:

$$x_0 = \text{const}, \ y_0 = u, \ z_0 = \varphi(u), \ q_0 = \varphi'(u).$$

Тогда:

$$p_0 = \frac{x_0 u}{\varphi'(u)}; \ z - \varphi(u) = \frac{\varphi'(u)}{u}(y^2 - u^2) = \frac{u}{\varphi'(u)}(x^2 - x_0^2).$$

Исключая u из последних двух уравнений, будем иметь общий интеграл. Полный интеграл напишется так:

$$(z - C_1)^2 = (x^2 - x_0^2)(y^2 - C_2^2).$$

Сущность *1-го способа Якоби интегрирования нелинейного уравнения, способа, называемого еще способом Якоби-Гамильтона,* изложим вкратце для уравнения с n независимыми переменными $x_1, \dots x_n$.

Пользуясь соответствующей подстановкой, заменим заданное уравнение таким, в которое не входила бы явно зависимая переменная z. Для этого придется, как известно из § 58, увеличить число независимых переменных $x_1, \dots x_n$ на единицу, так как и z будет рассматриваться после подстановки, как независимая переменная. Для этой же цели можно было бы использовать, например, 2-ю подстановку Якоби, вида $y = zt$.

Обозначим все независимые переменные преобразованного уравнения через $y_1, \dots y_n, \ y_{n+1}$ и решим уравнение относительно какой-либо производной, например — относительно $\frac{\partial F}{\partial y_{n+1}}$. Уравнение напишется:

$$\frac{\partial F}{\partial y_{n+1}} + f\left(y_1, \dots y_n, \ y_{n+1}, \ \frac{\partial F}{\partial y_1}, \ \frac{\partial F}{\partial y_2}, \dots \frac{\partial F}{\partial y_n}\right) = 0.$$

Для сокращения записи введем такие обозначения для производных от неизвестной функции F:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = p_1, \ \frac{\partial F}{\partial y_2} = p_2, \dots \frac{\partial F}{\partial y_n} = p_n.$$

Будем интегрировать систему совокупных обыкновенных уравнений:

$$\frac{dy_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}} = \frac{dy_2}{\frac{\partial f}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dy_n}{\frac{\partial f}{\partial p_n}} = \frac{dy_{n+1}}{1} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial f}{\partial y_1}} = \frac{dp_2}{-\frac{\partial x}{\partial y_2}} = \dots = \frac{dp_n}{-\frac{\partial f}{\partial y_n}}. \qquad (19)$$

Отсюда мы должны будем найти $2n$ интегралов; запишем их так:

$$y_i = \varphi_i(y_{n+1}, \ C_1, \dots C_n; \ K_1, \dots K_n)$$

$$p_i = \psi_i(y_{n+1}, \ C_1, \dots C_n; \ K_1, \dots K_n),$$

где $i = 1, \dots n$. Постоянные C и K обозначим при интегрировании так, чтобы первые n уравнений можно было бы решить относительно $K_1, \dots K_n$ и, подставивши их в последние n уравнений, можно было бы выразить p_i через $y_1, \dots y_n, \ y_{n+1}, \ C_1, \dots C_n$. Постоянные C и K должны обозначать такие начальные значения переменных y и p:

для $y_{n+1} = C$ будет:

$$y_1 = K_1, \dots y_n = K_n; \ p_1 = C_1, \dots p_n = C_n.$$

Можно доказать, что если в формулу

$$F = C_1 K_1 + \dots + C_n K_n +$$

$$+ \int \left[p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial f}{\partial p_n} - f(y_1, \dots y_n, y_{n+1}, p_1, \dots p_n)\right] dy_{n+1} + C_{n+1}$$

вместо $K_1, \dots K_n$ подставить их выражения через $y_1, \dots y_n, \ y_{n+1}, \ C_1, \dots C_n$, а вместо $p_1, \dots p_n$ — их выражения через $y_1, \dots y_n, \ y_{n+1}, \ C_1, \dots C_n$, тогда будем иметь как раз полный интеграл нашего преобразованного дифференциального уравнения в виде такой зависимости:

$$F = \Phi(y_1, \dots y_n, \ y_{n+1}, \ C_1, \dots C_n) + C_{n+1},$$

причем будет:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = p_i, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C_i} = K_i.$$

Систему совокупных уравнений (19) записывают большею частью таким образом:

$$\frac{dy_i}{dy_{n+1}} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dy_{n+1}} = -\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$(i = 1, 2, \dots n).$$

В таком виде она называется *канонической системой* Гамильтона. Мы с ней уже встречались в главе V, при рассмотрении общей задачи вариационного исчисления. С нею часто имеют дело в механике. Способ интегрирования Якоби-Гамильтона редко когда применяется и поэтому можно ограничиться этим кратким изложением схемы интегрирования.

§ 66. Скобки Пуассона и Якоби-Вейлера. Раньше чем перейти к наиболее употребительному способу интегрирования как отдельных нелинейных уравнений, так и систем нелинейных уравнений, с любым числом независимых переменных $x_1, \dots x_n$, — к способу, называемому обычно *вторым способом Якоби,* — следует ознакомиться с особыми символами, свойства которых играют большую роль в этом способе интегрирования уравнений и систем уравнений.

Для системы m линейных однородных уравнений 1-го порядка

$$X_1(z) \equiv X_{11} \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_{21} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_{n1} \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$X_m(z) \equiv X_{1m} \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_{2m} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_{nm} \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

вводя обозначение

$$X_i(\ ) = X_{1i}\frac{\partial}{\partial x_1} + X_{2i}\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + X_{ni}\frac{\partial}{\partial x_n},$$
$$(i = 1, \ldots m)$$

замечаем, что символ $X_i(\ )$ обладает свойствами, соответствующими свойствам производной; так, например,

$$X_i(u + v - w) = X_i(u) + X_i(v) - X_i(w)$$
$$X_i(uv) = uX_i(v) + vX_i(u)$$
$$X_i[F(u, v, w)] = \frac{\partial F}{\partial u}X_i(u) + \frac{\partial F}{\partial v}X_i(v) + \frac{\partial F}{\partial w}X_i(w).$$

В § 62 нам приходилось строить выражения

$$(X_i, X_k) = X_i(X_k(z)) - X_k(X_i(z)) \qquad (20)$$

для каждой пары $X_i = 0$, $X_k = 0$ системы m линейных уравнений; эти выражения будут линейны относительно производных $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}$ и, приравнивая их нулю, мы получали новые уравнения

$$X_{m+1}(z) = 0, \ldots X_q(z) = 0,$$

которые вместе с m уравнениями заданной системы устанавливают систему q уравнений

$$X_1(z) = 0, \ldots X_q(z) = 0,$$

где $q < n$, которая называется полной системой и которая может быть проинтегрирована в том случае, когда выражения

$$(X_g, X_h),$$

где

$$(g, h = 1, \ldots q;\ g \neq h),$$

названные нами скобками Пуассона, обращаются в нуль либо тождественно, либо на основании всех уравнений

$$X_1 = 0, \ldots X_q = 0.$$

Выражение вида (X_g, X_h) может обратиться в нуль на основании уравнений $X_1 = 0, \ldots X_q = 0$ тогда, когда оно будет выражаться линейно через левые части этих уравнений $X_1(z), \ldots X_q(z)$, т. е. когда существуют такие фукции $\lambda_1, \ldots \lambda_q$ от $x_1, \ldots x_n$, что, при неравенстве нулю всех $\lambda_1, \ldots \lambda_q$, можно будет написать

$$(X_g, X_h) = \lambda_1 X_1(z) + \ldots \lambda_q X_q(z);$$

в таком случае

$$(X_g, X_h) = 0,$$

так как

$$X_1(z) = 0, \ldots X_q(z) = 0.$$

Выражение (20) представляет собой частный случай такого:

$$(F, \Phi) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right),$$

где F и Φ обозначают две функции

$$F(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n); \quad \Phi(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n),$$

не содержащие зависимого переменного z, а только независимые $x_1, \ldots x_n$ и производные 1-го порядка $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}$, обозначаемые везде в дальнейшем через $p_1, \ldots p_n$. Символ (F, Φ) называется *скобками Пуассона* (les parenthèses) для двух заданных функций F и Φ; его можно записывать в одном из таких видов:

$$(F, \Phi) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi}{\partial p_1}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} - \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial \Phi}{\partial p_n}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial p_i} & \frac{\partial F}{\partial x_i}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} & \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} D\left(\frac{F, \Phi}{p_i, x_i}\right).$$

Легко проверить такие *свойства скобок Пуассона:*

I. $(F, C) = 0, \quad (C = \text{const})$

II. $(F, F) = 0$

III. $(F, \Phi) = -(\Phi, F)$.

IV. Если f и φ обозначают функции от $F_1, F_2, \ldots F_m$, которые в свою очередь будут функциями от $x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n$, т. е.

$$f = F(F_1, F_2, \ldots F_m)$$
$$\varphi = \Phi(F_1, F_2, \ldots F_m),$$

то

$$(f, \varphi) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial p_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial F_m}\frac{\partial F_m}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial F_m}\frac{\partial F_m}{\partial x_i}\right) -\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial F}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial F_m}\frac{\partial F_m}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial p_i} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial F_m}\frac{\partial F_m}{\partial p_i}\right)\right\} =$$
$$= (F_1, F_2)\, D\left(\frac{F, \Phi}{F_1, F_2}\right) + (F_1, F_3)\, D\left(\frac{F, \Phi}{F_1, F_3}\right) + \ldots + (F_{m-1}, F_m)\, D\left(\frac{F, \Phi}{F_{m-1}, F_m}\right);$$

число членов в выражении для (f, φ) равно числу сочетаний из m букв, но две различные буквы в каждом.

V. Главнейшее свойство скобок Пуассона состоит в том, что для всяких трех функций F, Φ, Ψ переменных $x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n$ будет:

$$((F, \Phi), \Psi) + ((\Phi, \Psi), F) + ((\Psi, F), \Phi) \equiv 0. \qquad (21)$$

Это тождество называется *тождеством Якоби*. Доказать его можно таким образом. В выражение, например, первого члена будут входить произведения производных 1-го порядка. Этот первый член напишется:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial p_i}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}-\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right)\right]\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}-\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right)\right]\frac{\partial \Psi}{\partial p_i}\right\}. \tag{22}$$

В каждый член этого выражения входят производные второго порядка. Можно, однако, убедиться в том, что левая часть (21)-го не содержит производных второго порядка ни от одной из функций F, Φ, Ψ. Покажем, например, что она не содержит производной 2-го порядка от F. Действительно, все члены с производными 2-го порядка от F получаются из выражения

$$((F,\ \Phi),\ \Psi) + ((\Psi,\ F),\ \Phi),$$

которое, на основании свойства $(f,\ \varphi) = -(\varphi,\ f)$, можно переписать так:

$$(\Psi, (\Phi,\ F)) - (\Phi, (\Psi,\ F));$$

так как $(\Phi,\ F)$ и $(\Psi,\ F)$ линейны относительно производных 1-го порядка от F, то, обозначая

$$(\Phi,\ F) = X(F);\ (\Psi,\ F) = Y(F),$$

предшествующее выражение можно переписать еще и в таком виде:

$$Y(X(F)) - X(Y(F)),$$

а в это выражение могут входить производные только 1-го порядка от F. Значит производных 2-го порядка не может находиться в правой части (21)-го, а чтобы это согласовать с видом раскрытой ее формы (22), остается положить выражение (21)-е тождественным нулем.

Из тождества Якоби вытекает сразу такая чрезвычайно важная *теорема Пуассона: если Φ_1 и Φ_2 представляют собой два частные интеграла линейного уравнения с частными производными 1-го порядка с неизвестной функцией $\Phi(x_1, \ldots x_n,\ p_1, \ldots p_n)$:*

$$(F,\ \Phi) = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}-\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right) = 0,$$

которое, при наших обычных обозначениях $\frac{\partial F}{\partial x_i} = X_i, \frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i$, записывается так:

$$P_1\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \ldots + P_n\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} - X_1\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} - \ldots - X_n\frac{\partial \Phi}{\partial p_n} = 0, \tag{22'}$$

тогда и выражение

$$(\Phi_1,\ \Phi_2)$$

также будет интегралом этого линейного уравнения, потому что

$$(F,\ \Phi_1) = 0;\ \ (F,\ \Phi_2) = 0,$$

и предшествующее тождество Якоби для функций F, Φ_1, Φ_2 дает:

$$((F,\ \Phi_1),\ \Phi_2) + ((\Phi_1,\ \Phi_2),\ F) + ((\Phi_2,\ F),\ \Phi_1) = 0$$

$$(0,\ \Phi_2) + ((\Phi_1,\ \Phi_2),\ F) + (0,\ \Phi_1) = 0,$$

$$((\Phi_1,\ \Phi_2),\ F) = 0,$$

т. е.

$$(F,\ (\Phi_1,\ \Phi_2)) = 0.$$

Если F есть известная функция переменных $x_1, \ldots x_n,\ p_1, \ldots p_n$, а Φ есть неизвестная, искомая функция тех же переменных $x_1, \ldots x_n$ $p_1, \ldots p_n$, то интегрирование линейного однородного уравнения $(F,\ \Phi) = 0$, т. е. уравнения (22'), сводится, как мы знаем из главы VII, к интегрированию системы совокупных уравнений 1-го порядка

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dp_1}{-X_1} = \ldots = \frac{dp_n}{-X_n},$$

представляющей частный случай системы, рассмотренной в конце § 65 и системы § 64 и первой половины § 65 для двух только независимых переменных x, y.

Небольшое изменение теоремы Пуассона, если поставить F_i вместо Φ_1, F_k—вместо Φ_2 и f—вместо F, приводит к такой *основной теореме для интегрирования систем нелинейных уравнений: если два уравнения*

$$F_i(x_1, \ldots x_n,\ p_1, \ldots p_n) = 0;\quad F_k(x_1, \ldots x_n,\ p_1, \ldots p_n) = 0,$$

системы $F_1 = 0, \ldots F_m = 0$, не содержащие явно неизвестной функции z, имеют одинаковый для них обоих интеграл $z = f(x_1, \ldots x_n)$, тогда этот интеграл будет удовлетворять также и 3-му уравнению 1-го порядка, вида

$$(F_i,\ F_k) = 0.$$

VI. *Чтобы система n нелинейных уравнений 1-го порядка*

$$F(x_1, \ldots\ x_n,\ p_1, \ldots\ p_n) = 0;$$

$$\Phi_1(x_1, \ldots\ x_n,\ p_1, \ldots\ p_n) = 0; \ldots\ \Phi_{n-1}\ (x_1, \ldots\ x_n,\ p_1, \ldots\ p_n) = 0,$$

которая не содержит явно неизвестной функции $z(x_1, \ldots x_n)$, была бы системой совместимой, обладающей интегралом z, для которого

$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n, \tag{23}$$

необходимо и достаточно, чтобы для всех пар уравнений системы было

$$(F,\ \Phi_j) = 0$$

$$(\Phi_j,\ \Phi_k) = 0$$

$$(j,\ k = 1, \ldots\ n-1;\ j \neq k);$$

эти условия, в количестве $\frac{n(n-1)}{2}$, *равносильны такому же количеству условий для полного дифференциала (23), т. е. условий вида*

$$\frac{\partial p_g}{\partial x_h} = \frac{\partial p_h}{\partial x_g}$$
$$(g, h = 1, \dots n; \ g \neq h).$$

Справедливость подобного утверждения покажем дальше, для системы более общего вида $(n+1)$-го уравнения, содержащей $(n+1)$ неизвестных функций: зависимую переменную z и n производных $p_1, \dots p_n$ — функций от $x_1, \dots x_n$.

Скобками Якоби-Вейлера (les crochets) двух функций

$$F(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n) \text{ и } \Phi(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n),$$

содержащих и зависимую переменную z, называется выражение, обозначаемое символом $[F, \Phi]$, такого вида:

$$[F, \Phi] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p_i \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial z} p_i \right) \right] =$$
$$= \frac{\partial F}{\partial p_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p_1 \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} \right) +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial p_n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p_n \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial z} p_n \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{d\Phi}{dx_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{dF}{dx_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} & \frac{dF}{dx_i} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} & \frac{d\Phi}{dx_i} \end{vmatrix} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} D\left[\frac{F, \Phi}{p_i, x_i}\right],$$

где прямые скобки в конце формул указывают на то, что для функционального определителя 2 функций F, Φ надо брать не частные, а полные производные по $x_1, \dots x_n$.

Линейное однородное уравнение 1-го порядка с $(2n+1)$-й независимыми переменными $x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n$, вида

$$[F, \Phi] = 0,$$

где F — известная функция $F(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n)$, а Φ — искомая функция $\Phi(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n)$, при обычных обозначениях

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = X_i, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i,$$

записывается в раскрытом виде так:

$$P_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p_1 \right) - (X_1 + Zp_1) \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ P_n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p_n \right) - (X_n + Zp_n) \frac{\partial \Phi}{\partial p_n} = 0,$$

или

$$P_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \dots + P_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + (P_1 p_1 + \dots + P_n p_n) \frac{\partial \Phi}{\partial z} -$$
$$- (X_1 + Zp_1) \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} - \dots - (X_n + Zp_n) \frac{\partial \Phi}{\partial p_n} = 0.$$

Интегрирование его сводится к интегрированию системы совокупных уравнений 1-го порядка вида

$$\frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{P_1 p_1 + \dots + P_n p_n} = \frac{dp_1}{-(X_1 + Zp_1)} = \dots = \frac{dp_n}{-(X_n + Zp_n)},$$

которая представляет собою систему уравнений §§ 64 и 65, в способе интегрирования Лагранжа-Шарпи и в способе Коши, когда $n = 2$, т. е. когда независимых переменных только две: x и y.

Прямые скобки Якоби-Вейлера $[F, \Phi]$ имеют такие же свойства, как и круглые скобки Пуассона (F, Φ), с той только разницей, что для 3 функций F, Φ, Ψ тождество Якоби V переходит, как это можно легко доказать, в такую зависимость между этими функциями;

V'. $$[[F, \Phi], \Psi] + [[\Phi, \Psi], F] + [[\Psi, F], \Phi] =$$
$$= [\Psi, \Phi] \frac{\partial F}{\partial z} + [F, \Psi] \frac{\partial \Phi}{\partial z} + [\Phi, F] \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Кроме того, для 2 функций F и Φ будет иметь место такая связь между прямыми и круглыми скобками:

$$[F, \Phi] = (F, \Phi) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \right) p_i,$$

т. е.

$$[F, \Phi] = (F, \Phi) + \sum_{i=1}^{n} D\left(\frac{F, \Phi}{p_i, z} \right) p_i.$$

Однако, как и раньше, в случае системы нелинейных уравнений 1-го порядка, не содержащей функции z, существует такая *основная теорема для интегрирования нелинейных уравнений:* если два уравнения

$$F_i(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n) = 0; \ F_k(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n) = 0$$

системы

$$F_1 = 0, \dots F_m = 0,$$

содержащей неизвестную функцию z, имеют общий для них обоих интеграл $z = f(x_1, \dots x_n)$, тогда этот интеграл будет интегралом также и 3-го уравнения 1-го порядка, вида

$$[F_i, F_k] = 0.$$

VI'. Докажем, в заключение этого параграфа, свойство VI', из которого в частном случае имеем изложенное выше свойство VI:

Чтобы система $(n+1)$-го *нелинейных уравнений 1-го порядка.*

$$F(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n) = 0 \qquad (24)$$

$$\Phi_1(x_1,\dots x_n, z, p_1,\dots p_n)=0;\dots\ \Phi_n(x_1,\dots x_n, z, p_1,\dots p_n)=0, \quad (24)$$

содержащих неизвестную функцию $z(x_1,\dots x_n)$, *была бы системой вполне интегрируемой, с интегралом* z, *для которого*

$$dz = p_1\,dx_1+\dots+p_n\,dx_n, \quad (25)$$

необходимо и достаточно, чтобы для всех пар уравнений системы было

$$[F,\Phi_k]=0$$
$$[\Phi_k,\Phi_l]=0 \quad (26)$$
$$(k,l=1,\dots n;\ k\neq l);$$

эти условия, в количестве

$$\frac{(n+1)n}{2},$$

равносильны такому же количеству условий вида

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=p_i;\ \frac{\partial p_i}{\partial x_k}=\frac{\partial p_k}{\partial x_i} \quad (27)$$
$$(i,k=1,\dots n;\ i\neq k);$$

в таком случае (25) *будет представлять собою полный дифференциал функции* z.

Уравнения системы (24) должны быть независимы между собою относительно $z, p_1,\dots p_n$, т. е.

$$D\left(\frac{F,\Phi_1,\dots\Phi_n}{z,p_1,\dots p_n}\right)\neq 0, \quad (28)$$

и, следовательно, система (24) должна быть разрешимой относительно z и $p_1,\dots p_n$, которые должны представляться функциями от $x_1,\dots x_n$. Чтобы $p_1,\dots p_n$ были частными производными от z по $x_1,\dots x_n$, надо иметь n первых зависимостей (27), а для того, чтобы $p_1,\dots p_n$ вообще были производными от одной и той же функции $z(x_1,\dots x_n)$, необходимо иметь $\frac{n(n-1)}{2}$ последних условий (27). Последние $\frac{n(n-1)}{2}$ условий (27) необходимы для выполнения первых n условий, но недостаточны, так как та функция z, которая будет иметь производные $p_1,\dots p_n$, подчиняющиеся последним $\frac{n(n-1)}{2}$ условиям (27), и которая может быть получена поэтому квадратурой из (25)-го, может отличаться от функции z', определяемой непосредственно из системы (24) одновременно с производными $p_1,\dots p_n$. Всего имеем, таким образом, $\frac{n(n-1)}{2}$ необходимых и достаточных условий (27), налагающих ограничения и на наши $n+1$ уравнений (24) в том случае, чтобы полученные из них выражения для z, с одной стороны, и выражения для $p_1,\dots p_n$ — с другой, подчинялись бы основному требованию: $p_1,\dots p_n$ — это не что иное, как частные производные от z по $x_1,\dots x_n$.

Эти ограничения на наши исходные $n+1$ уравнений (24) получим так. Обозначим, для удобства записи,

$$F=\Psi_1,\ \Phi_1=\Psi_2,\dots\Phi_n=\Psi_{n+1}$$

и продифференцируем какие-либо 2 уравнения $\Psi_g=0, \Psi_h=0$ системы (24) по x_i, где

$$i=1,\dots n;\ g,h=1,\dots n+1;\ g\neq h,$$

будем иметь

$$\frac{\partial\Psi_g}{\partial x_i}+\frac{\partial\Psi_g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Psi_g}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_i}=0,$$

или

$$\frac{\partial\Psi_g}{\partial x_i}+\frac{\partial\Psi_g}{\partial z}p_i+\frac{\partial\Psi_g}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}-p_i\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Psi_g}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_i}=0.$$

Также:

$$\frac{\partial\Psi_h}{\partial x_i}+\frac{\partial\Psi_h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Psi_h}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_i}=0,$$

или

$$\frac{\partial\Psi_h}{\partial x_i}+\frac{\partial\Psi_h}{\partial z}p_i+\frac{\partial\Psi_h}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}-p_i\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Psi_h}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_i}=0.$$

Умножая 1-е уравнение на $\frac{\partial\Psi_g}{\partial p_i}$, второе — на $\frac{\partial\Psi_g}{\partial p_i}$, вычитая из 1-го результата 2-й и взявши сумму всех таких равенств от $i=1$ до $i=n$, принимая во внимание, что коэффициент при $\frac{\partial p_k}{\partial x_i}$ меняет знак при перестановке значков i,k, получим:

$$\left.\begin{aligned}&[\Psi_g,\Psi_h]+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Psi_g}{\partial z}\frac{\partial\Psi_h}{\partial p_i}-\frac{\partial\Psi_h}{\partial z}\frac{\partial\Psi_g}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}-p_i\right)+\\&+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Psi_g}{\partial p_k}\frac{\partial\Psi_h}{\partial p_i}-\frac{\partial\Psi_h}{\partial p_k}\frac{\partial\Psi_g}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i}-\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right)=0.\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Если удовлетворяются все условия (27), то эти равенства переходят в такие:

$$[\Psi_g,\Psi_h]=0 \quad (30)$$
$$(g,h=1,\dots n+1;\ g\neq k),$$

что и дает нам $\frac{(n+1)n}{2}$ условий (26), если вернемся к прежним обозначениям F и $\Phi_1,\dots\Phi_n$ вместо $\Psi_1,\Psi_2,\dots\Psi_{n+1}$.

Наоборот, если удовлетворяются все $\frac{(n+1)n}{2}$ условий (26), или иначе — условий (30), то обязательно должны выполняться и все $\frac{(n+1)n}{2}$ условий (27).

В самом деле, при соблюдении всех условий (30), уравнения (29) будут представлять собою систему $\frac{(n+1)n}{2}$ линейных и однородных уравнений. Определитель D_1 из коэффициентов $D\left(\frac{\Psi_g,\Psi_h}{p_k,p_i}\right)$ этих однородных уравнений при $\frac{(n+1)n}{2}$ переменных

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}-p_i,\ \frac{\partial p_k}{\partial x_i}-\frac{\partial p_i}{\partial x_k},$$

если его раскрыть по теореме Лапласа и обозначить через D_2 определитель из элементов, представляющих дополнительные миноры элементам к $D\left(\frac{\Psi_g, \Psi_h}{p_k, p_i}\right)$, которые в свою очередь являются минорами 2-го порядка определителя $D\left(\frac{F, \Phi_1, \ldots \Phi_n}{z, p_1, \ldots p_n}\right)$, — определитель D_1 связан будет с определителем D_2 и с последним определителем D, как в этом убедимся, произведя все выкладки, такой зависимостью:

$$D_1 D_2 = D^{\frac{(n+1)\,n}{2}}.$$

Вследствие неравенства (28), приходим, по последней формуле, и к неравенству $D_1 \neq 0$, в силу которого должны равняться нулю все величины

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} - p_i\,, \quad \frac{\partial p_k}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_k}\,,$$

т. е. должны соблюдаться все условия (27).

Можно убедиться, что *если бы мы имели* вместо $(n+1)$-го уравнения (24) *только n уравнений*

$$F(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0$$

$$\Phi_1(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0, \ldots \Phi_{n-1}(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0,$$

независимых относительно $p_1, \ldots p_n$, так что

$$D\left(\frac{F, \Phi_1 \ldots \Phi_{n-1}}{p_1, p_2, \ldots p_n}\right) \neq 0,$$

то, определивши функции $p_1, \ldots p_n$ через $x_1, \ldots x_n, z$, нашли бы неизвестную функцию z посредством одной квадратуры из зависимости вида (25):

$$dz = p_1(x_1, \ldots x_n, z)\, dx_1 + \ldots + p_n(x_1, \ldots x_n, z) dx_n.$$

При этом вместо $\frac{(n+1)\,n}{2}$ условий (26) будем иметь только $\frac{n(n-1)}{2}$ условий того же вида, а $\frac{(n+1)\,n}{2}$ условий (27) заменятся $\frac{n(n-1)}{2}$ условиями вида

$$\frac{dp_i}{dx_k} = \frac{dp_k}{dx_i}$$

$$(i, k = 1, \ldots n;\ i \neq k),$$

где обозначено

$$\frac{d}{dx_k} = \frac{d}{dx_k} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_k}\,; \quad \frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i}\,.$$

§ 67. Интегрирование систем нелинейных уравнений, содержащих и не содержащих явно неизвестную функцию z. Процесс интегрирования одного нелинейного уравнения 1-го порядка посредством так называемого *2-го способа Якоби* остается без изменения

и для системы m уравнений. Поэтому можно заняться сразу способом интегрирования систем уравнений.

Начнем с *системы m уравнений, не содержащих явно неизвестной функции z.*

Для частного случая такой системы, а именно — для двух линейных однородных уравнений

$$F_i = X_i(z) \equiv X_{1i}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + X_{ni}\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

$$F_k = X_k(z) \equiv X_{1k}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + X_{nk}\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

будет

$$(F_i, F_k) = X_i(X_k(z)) - X_k(X_i(z)),$$

и мы замечаем аналогию между системою m линейных однородных уравнений

$$X_1(z) = 0, \ldots X_m(z) = 0$$

и системою m нелинейных уравнений

$$F_1(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0, \ldots F_m(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0;$$

раньше мы рассматривали символы $X_i X_k - X_k X_i$, а теперь будем рассматривать символы (F_i, F_k), где

$$i, k = 1, \ldots m;\ i \neq k,$$

причем

$$X_i X_k - X_k X_i = (X_i, X_k).$$

Если для всех пар уравнений $F_i = 0$, $F_k = 0$, пар в количестве

$$C^2_m = \frac{m(m-1)}{2},$$

будет

$$(F_i, F_k) = 0$$

либо тождественно, либо на основании уравнений заданной системы $F_1 = 0, \ldots F_m = 0$, тогда мы имеем аналогию полной системы линейных уравнений: система нелинейных уравнений $F_1 = 0, \ldots F_m = 0$ будет вполне интегрируемой, замкнутой системой.

Если же

$$(F_i, F_k) = F_j(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) \neq 0,$$

тогда выражения (F_i, F_k) приравниваем нулю и присоединяем к нашей системе m нелинейных уравнений все новые уравнения

$$F_j(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0$$

и, если в результате присоединений получим такую новую систему q уравнений

$$F_1 = 0, \ldots F_m = 0,\ F_{m+1} = 0, \ldots F_q = 0,$$

причем

$$q \leqslant n,$$

для которой будет

$$(F_g, F_h) = 0$$
$$(g,\ h = 1, \ldots q;\ g \neq h),$$

тогда такая система q уравнений $F_1 = 0, \ldots F_q = 0$ будет *замкнутой системой,* а заданная система m уравнений $F_1 = 0, \ldots F_m = 0$ — *системой вполне интегрируемой.* Скобки Пуассона для каждой пары замкнутой системы обращаются в нуль либо тождественно, либо на основании всех q уравнений $F_1 = 0, \ldots F_q = 0$.

Если $q > n$, то заданная система m уравнений не совместима.

Если $q \leqslant n$, то заданная система обладает интегралом $z(x_1, \ldots x_n)$, который для $q = n$ найдется квадратурой на основании зависимости

$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n,$$

когда уравнения $F_1 = 0, \ldots F_n = 0$ будут решены относительно $p_1, \ldots p_n$.

Если $q < n$, то в способе интегрирования заданной системы m уравнений $F_1 = 0, \ldots F_m = 0$ ищут такие новые уравнения вида

$$\Phi_1(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = \mathrm{const}, \quad \Phi_2(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = \mathrm{const},$$

чтобы они были совместимы с системой q уравнений $F_1 = 0, \ldots F_q = 0$ и чтобы вместе с ними составляли совместимую систему n уравнений

$$F_1 = 0, \ldots F_q = 0, \Phi_1 = C_1, \ldots \Phi_{n-q} = C_{n-q},$$

из которой можно было бы найти производные

$$p_1(x_1, \ldots x_n), \ldots p_n(x_1, \ldots x_n)$$

и определить искомую функцию

$$z = f(x_1, \ldots x_n, C_1, \ldots C_{n-q}) + C_{n-q+1}$$

посредством квадратуры, на основании зависимости

$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n;$$

эта квадратура введет последнюю, добавочную произвольную постоянную C_{n-q+1}.

Если мы решим систему q уравнений $F_1 = 0, \ldots F_q = 0$, например, относительно q первых по порядку производных $p_1, \ldots p_q$, то мы будем иметь *систему в инволюции:*

$$\left.\begin{array}{l} p_1 + \varphi_1(x_1, \ldots x_n,\ p_{q+1}, \ldots p_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_q + \varphi_q(x_1, \ldots x_n, p_{q+1}, \ldots p_n) = 0, \end{array}\right| \qquad (31)$$

для которой все условия совместимости

$$(p_g + \varphi_g,\ p_h + \varphi_h) = 0$$
$$(g,\ h = 1, \ldots q;\ g \neq h)$$

будут удовлетворяться тождественно, так как скобки Пуассона

$$(p_g + \varphi_g,\ p_h + \varphi_h)$$

не могут дать выражений, содержащих хоть одну из производных $p_1, \ldots p_q$, которые входят в уравнения инволюционной системы (31).

Таким образом в *процессе интегрирования заданной системы m нелинейных уравнений*

$$F_1(x_1, \ldots x_n,\ p_1, \ldots p_n) = 0, \ldots F_m(x_1, \ldots x_n,\ p_1, \ldots p_n) = 0$$

нам могут встретиться такие случаи.

Во-первых, составив и проверив все скобки Пуассона $(F_i,\ F_k)$, мы можем получить систему q уравнений

$$F_1(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0, \ldots F_m = 0,\ F_{m+1} = 0, \ldots F_q = 0,$$

для которой $q > n$, — тогда заданная система $F_1 = 0, \ldots F_m = 0$ неинтегрируема.

Во-вторых, может оказаться, что $q = n$ и тогда, решивши уравнения $F_1 = 0, \ldots F_n = 0$ относительно $p_1, \ldots p_n$, найдем неизвестную функцию $z(x_1, \ldots x_n)$ посредством одной квадратуры из зависимости

$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n;$$

полный интеграл будет иметь *только одну произвольную постоянную* C_1:

$$z = f(x_1, \ldots x_n) + C_1,$$

однако его называют полным интегралом заданной системы m уравнений $F_1 = 0, \ldots F_m = 0$, хотя, казалось бы, полный интеграл такой системы должен был бы содержать $n - m$ произвольных постоянных $C_1, \ldots C_{n-m}$; такое обстоятельство будет иметь место тогда, когда заданная система m уравнений окажется системой замкнутой, т. е. когда $q = m$.

В третьих, наконец, может получиться $q < n$. Тогда, либо оставляя без изменения уравнения системы

$$F_1(x_1, \ldots x_n,\ p_1, \ldots p_n) = 0, \ldots F_q(x_1, \ldots x_n,\ p_1, \ldots p_n) = 0, \qquad (32)$$

либо, что часто значительно удобнее, решая уравнения относительно производных, например, $p_1, \ldots p_n$ и переходя таким образом к системе инволюционной (31), будем искать такое новое уравнение

$$\Phi(x_1, \ldots x_n,\ p_1, \ldots p_n) = \mathrm{const}, \qquad (33)$$

чтобы оно было совместимо с полученной системой q уравнений. Для этого, если, скажем, имеющиеся q уравнений не превращены в инволюционную систему (31), новое уравнение $\Phi = \mathrm{const}$ должно удовлетворять таким условиям совместимости с системой (32):

$$(F_1, \Phi) = 0, \ldots (F_q, \Phi) = 0; \qquad (34)$$

постоянная величина в правой части уравнения (33) на скобки Пуассона (F_i, Φ) влияния не оказывает. Это дает нам систему q линейных и однородных уравнений (34) с одной неизвестной функцией Φ, которые в раскрытой форме будут иметь вид уравнения (22): если производные от известной функции F_i по ее аргументам $x_1, \dots x_n, p_1, \dots p_n$ обозначить так:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1} = X_{1i}, \dots \frac{\partial F_i}{\partial x_n} = X_{ni};$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_1} = P_{1i}, \dots \frac{\partial F_i}{\partial p_n} = P_{ni},$$

то наша система линейных уравнений (34) запишется:

$$\begin{array}{c} P_{11}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \dots + P_{n1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} - X_{11}\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} - \dots - X_{n1}\frac{\partial \Phi}{\partial p_n} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_{1q}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \dots + P_{nq}\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} - X_{1q}\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} - \dots - X_{nq}\frac{\partial \Phi}{\partial p_n} = 0. \end{array} \qquad (35)$$

Без особого труда можно проверить, что эта система линейных уравнений обязательно будет *полной системой:* интегрировать ее можно. Интегрирование сводится к интегрированию системы совокупных обыкновенных дифференциальных уравнений вида, отмеченного в § 66.

Из всех интегралов системы совокупных обыкновенных уравнений можно использовать только такие $n-q$ интегралов

$$\Phi_1(x_1, \dots x_n, p_1, \dots p_n) = C_1, \dots \Phi_{n-q}(x_1, \dots x_n, p_1, \dots p_n) = C_{n-q},$$

которые представляли бы уравнения 1-го порядка, совместимые между собою; каждое из них будет совместимо и с уравнениями

$$F_1 = 0, \dots F_q = 0$$

в силу условий (34). Можно было бы также, найдя один или больше соответствующих интегралов системы (35) и, присоединивши уравнения

$$\Phi_1 = C_1, \Phi_2 = C_2, \dots$$

к системе

$$F_1 = 0, \dots F_q = 0,$$

искать новые уравнения

$$\Psi_1 = C'_1, \quad \Psi_2 = C'_2, \dots$$

из новой системы линейных однородных уравнений

$$(F_1, \Psi) = 0, \dots (F_q, \Psi) = 0, (\Phi_1, \Psi) = 0, (\Phi_2, \Psi) = 0, \dots,$$

пока не получим в конце концов замкнутую систему n уравнений

$$F_1 = 0, \dots F_q = 0, \Phi_1 = C_1, \dots \Phi_{n-q} = C_{n-q},$$

чтобы, решивши их относительно $p_1, \dots p_n$, найти функцию z квадратурой, с помощью зависимости

$$dz = p_1\,dx_1 + \dots + p_n\,dx_n,$$

что приведет к добавочной произвольной постоянной C_{n-q+1} и к полному интегралу заданной системы m уравнений $F_1 = 0, \dots F_m = 0$, вида:

$$z = f(x_1, \dots x_n, C_1, \dots C_{n-q}) + C_{n-q+1}.$$

Майер показал, что условие разрешимости n уравнений

$$F_1 = 0, \dots \Phi_{n-q} = C_{n-q}$$

относительно всех n производных $p_1, \dots p_n$ не является необходимым, т. е. определитель n порядка

$$D\left(\frac{F_1 \dots F_q, \dots \Phi_{n-q}}{p_1, \dots\dots\dots\dots p_n}\right)$$

может быть и равным и неравным нулю.

Пример.

$$\begin{cases} F_1 \equiv p_1 p_2 - x_3 x_4 = 0 \\ F_2 \equiv p_3 p_4 - x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$(F_1, F_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - p_3 x_3 - p_4 x_4 \equiv F_3.$$

Имеем:

$$F_1 \equiv p_1 p_2 - x_3 x_4 = 0;\ F_2 \equiv p_3 p_4 - x_1 x_2 = 0;\ F_3 \equiv x_1 p_1 + x_2 p_2 - x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0.$$

$$(F_1, F_2) = F_3 = 0;\ (F_1, F_3) = -2F_1 = 0;\ (F_2, F_3) = 2F_2 = 0.$$

Система $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ — замкнутая. Пишем инволюционную систему:

$$p_1 - \frac{x_2 x_3}{p_4} = 0,\ p_2 - \frac{x_4 p_4}{x_2} = 0,\ p_3 - \frac{x_1 x_2}{p_4} = 0.$$

Система линейных уравнений

$$\left(p_1 - \frac{x_2 x_3}{p_4}, \Phi\right) = 0;\ \left(p_2 - \frac{x_4 p_4}{x_2}, \Phi\right) = 0;\ \left(p_3 - \frac{x_1 x_2}{p_4}, \Phi\right) = 0$$

в раскрытом виде будет:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{x_2 x_3}{p_4^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{x_4}{x_2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_4} + \frac{p_4}{x_2}\frac{\partial \Phi}{\partial p_4} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \frac{x_1 x_2}{p_4^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = 0.$$

Замена переменных Майера

$$x_1 = y_1,\ x_2 = 1 + y_1 y_2,\ x_3 = y_1 y_3$$

дает

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + \left(\frac{x_2 x_4}{p_4^2} - \frac{x_4}{x_2} y_2 + \frac{x_1 x_2}{p_4^2} y_3\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x_4} + \frac{p_4}{x_2} y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial p_4} = 0.$$

Берем только одно уравнение из системы совокупных уравнений:

$$\frac{dy_1}{1} = \frac{dp_4}{\frac{p_4 y_2}{x_2}}, \text{ или } \frac{dy_1}{1} = \frac{\partial p_4}{\frac{p_4 y_2}{1 + y_1 y_2}}, \text{ или } \frac{dy_1}{1 + y_1 y_2} = \frac{dp_4}{y_2 p_4}.$$

Оно дает интеграл:

$$\frac{p_4}{1 + y_1 y_2} = C_1,$$

или

$$p_4 = C_1 x_2,$$

что приводит к системе

$$p_1 = \frac{x_3}{C_1},\ p_2 = C_1 x_4,\ p_3 = \frac{x_1}{C_1},\ p_4 = C_1 x_2,$$

и из зависимости

$$dz = p_1\, dx_1 + \dots + p_4\, dx_1$$

получим полный интеграл заданной системы

$$z = \frac{x_1 x_3}{C_1} + C_1 x_2 x_4 + C_2.$$

Для интегрирования, например, инволюционной *системы q нелинейных уравнений, содержащих неизвестную функцию z,*

$$F_1(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n) = 0, \dots F_q(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n) = 0$$

будем искать еще $n+1-q$ таких функций

$$\Phi_1(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n),\ \Phi_{n+1-q}(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n),$$

чтобы система $(n+1)$-го уравнений

$$F_1 = 0, \dots F_q = 0,\ \Phi_1 = C_1, \dots \Phi_{n+1-q} = C_{n+1-q}$$

была бы инволюционной. Для этого надо будет написать систему q линейных однородных уравнений

$$[F_1, \Phi] = 0, \dots [F_q, \Phi] = 0,$$

которая в раскрытой форме будет иметь вид

$$P_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \dots + P_{n1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_n} +$$
$$+ (P_{11}p_1 + \dots + P_{n1}p_n)\frac{\partial\Phi}{\partial z} - (X_{11} + Z_1 p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} - \dots - (X_{n1} + Z_1 p_n)\frac{\partial\Phi}{\partial p_n} = 0$$

. . . .

$$P_{1q}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \dots + P_{nq}\frac{\partial\Phi}{\partial x_n} +$$
$$+ (P_{1q}p_1 + \dots + P_{nq}p_n)\frac{\partial\Phi}{\partial z} - (X_{1q} + Z_q p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} - \dots - (X_{nq} + Z_q p_n)\frac{\partial\Phi}{\partial p_n} = 0$$

и всегда будет полной, и надо искать интегралы $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \dots$ вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, устанавливающие совместимые между собою новые нелинейные уравнения 1-го порядка, т. е. такие, что

$$[\Phi_1, \Phi_2] = 0;\ [\Phi_1, \Phi_3] = 0;\ [\Phi_2, \Phi_3] = 0, \dots$$

Найдя один интеграл $\Phi_1 = C_1$, всегда совместимый с уравнениями системы $F_1 = 0, \dots F_q = 0$, и присоединивши его к этой системе, мы могли бы искать далее частные интегралы $(q+1)$-го линейного уравнения

$$[F_1, \Psi] = 0, \dots [F_q, \Psi] = 0,\ [\Phi_1, \Psi] = 0$$

и т. д.

Если нам *задано будет для интегрирования одно уравнение*

$$F(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n) = 0$$

и если мы найдем *n различных частных интегралов* $\Phi_1, \dots \Phi_n$ *линейного однородного уравнения* $[F, \Phi] = 0$, т. е. уравнения

$$P_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \dots + P_n\frac{\partial\Phi}{\partial x_n} +$$
$$+ (P_1 p_1 + \dots P_n p_n)\frac{\partial\Phi}{\partial z} - (X_1 + Zp_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} - \dots - (X_n + Zp_n)\frac{\partial\Phi}{\partial p_n} = 0,$$

таких, что

$$[\Phi_i, \Phi_k] = 0$$
$$(i, k = 1, \dots n,\ i \neq k),$$

тогда, пользуясь уравнениями

$$\Phi_1 = C_1, \dots \Phi_n = C_n,$$

мы сразу будем иметь полный интеграл заданного уравнения,

$$z = f(x_1, \dots x_n, C_1, \dots C_n)$$

с помощью одних только алгебраических преобразований — в этом состоит *теорема Лиувиля.*

Для интегрироваиия одного уравнения или системы q уравнений, *можно* было бы также заботиться лишь о нахождении *всего $(n-1)$-го новых уравнений* $\Phi_1 = C_1, \dots \Phi_{n-1} = C_{n-1}$, — тогда для разыскания полного интеграла пришлось бы брать еще квадратуру, пользуясь зависимостью

$$dz = p_1(x_1, \dots x_n, z)\, dx_1 + \dots + p_n(x_1, \dots x_n, z)\, dx_n.$$

В разработке теории интегрирования нелинейных уравнений 1-го
порядка одной неизвестной функции и систем таких уравнений,
деятельное участие принимали, кроме Лагранжа, Шарпи, Коши и
Якоби, еще Пфафф, который привел интегрирование уравнений к осо-
бой задаче, носящей его имя и занимающей в настоящее время
целый особый отдел в теории дифференциальных уравнений; Клебш;
Софус Ли, который создал особую теорию интегрирования уравне-
ний с частными производными 1-го порядка и обобщил понятие
об интеграле уравнений; Майер, который усовершенствовал теорию
Якоби и ввел различные упрощения в процессе интегрирования.
Академику В. Г. Имшенецкому принадлежит классическое изложение
теории интегрирования уравнений с частными производными не только
1-го, но и 2-го порядка, ряд разъяснений в теории и установление
некоторых простых случаев интегрируемости, а в особенности — так
называемого случая разделения переменных Имшенецкого; академику
Д. А. Граве принадлежит разработка 2-го способа Якоби интегриро-
вания уравнений, не содержащих явно z, для таких уравнений, в ко-
торые входит и неизвестная функция z. Второй способ Якоби, кроме
В. Г. Имшенецкого, разрабатывал также проф. В. П. Ермаков. Пер-
вый способ интегрирования Якоби, а также и вообще теорию урав-
нений с частными производными 1-го порядка и, в последнее время, —
2-го порядка, разрабатывал еще проф. Н. Н. Салтыков, много уде-
лявший внимания также исследованиям в области теории интегралов
Софуса Ли, хотя и относившийся к ней довольно критически. Акад.
А. Н. Коркин дал свой метод интегрирования систем уравнений

с частными производными, основываясь, во-первых, на способе Коши, и во вторых — на обобщении идеи Якоби интегрирования системы линейных уравнений на систему нелинейных уравнений и применял свой способ к решению различных вопросов механики; способ хотя и сложен, но дает возможность судить о форме интегралов систем уравнений, что весьма важно для решения различных задач прикладного характера. Акад. Г. В. Пфейффер работает в области теории интегрирования линейных и нелинейных уравнений и систем уравнений с частными производными 1-го порядка одной неизвестной функции и уравнений линейных относительно производных и якобианов при нескольких неизвестных функциях, а также в области теории интегралов Софуса Ли; ему принадлежит специальный способ интегрирования линейных и нелинейных уравнений и систем уравнений 1-го порядка одной неизвестной функции и обобщение 2-го способа Якоби (называемого иногда способом Якоби-Бура, в случае одного уравнения, и способом Якоби-Майера, в случае системы уравнений) как для линейных уравнений и систем уравнений, о чем упоминалось в главе VII, так для нелинейных уравнений и систем уравнений.

Отметим в заключение этого параграфа такую важную в теории уравнений 1-го порядка *теорему Ли: интегрирование системы в инволюции q уравнений с n независимыми переменными, не содержащих явно неизвестной функции z, сводится к интегрированию одного только уравнения 1-го порядка с $n-q+1$ независимыми переменными.* В инволюционной системе (31) вводится замена переменных Майера и получается для интегрирования одно уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} + H(y_1, \ldots y_q, x_{q+1}, \ldots x_n, \; p_{q+1}, \ldots p_n) = 0,$$

где H — это результат замены переменных в функции вида

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 y_2 + \ldots + \varphi_q y_q.$$

Пример.

$$xzp + yzq - xy = 0.$$

Для интегрирования этого линейного уравнения применим теорию, изложенную в этом параграфе для нелинейных уравнений. Уравнение $[F, \Phi]=0$ приводит к системе

$$\frac{dx}{-xz} = \frac{dy}{-yz} = \frac{dz}{-pxz-qyz} = \frac{dp}{pz-y+p(px+qy)} = \frac{dq}{qz-x+q(qx+py)}.$$

Интеграл ее

$$\frac{2pz-y}{2qz-x} = C_1$$

дает тождество

$$\left[pxz+qyz-xy, \frac{2pz-y}{2qz-x}\right] \equiv 0.$$

Полный интеграл заданного уравнения найдем из $dz = pdx + qdy$, т. е. из

$$(C_1x+y)\,[2zdz - ydx - xdy] = 0.$$

Если бы мы отбросили 1-й множитель и проинтегрировали уравнение в полных дифференциалах

$$2zdz - ydx - xdy = 0,$$

то получили бы только частный интеграл

$$z = \sqrt{xy + C_2}.$$

Чтобы найти полный интеграл, надо интегрировать уравнение

$$2z(C_1x+y)\,dz - y(C_1x+y)\,dy - x(C_1x+y)\,dy = 0.$$

Условие Эйлера

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

удовлетоpяется, и мы получим только одну зависимость между x, y, z, C_1, C_2, которая и приводит нас к полному интегралу заданного уравнения.

§ 68. Задача Пфаффа. Классический мемуар Пфаффа о задаче, носящей имя этого ученого, был представлен в Берлинскую академию наук в 1815 году. В нем речь идет о том, что для уравнения в полных дифференциалах с $2n$ или $2n-1$ переменными можно построить интеграл посредством системы конечных уравнений в числе не больше чем n. Примером Пфаффова уравнения в полных дифференциалах может служить уравнение в полных дифференциалах при 3 переменных x, y, z,

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0,$$

которое, как мы знаем, обладает интегралом в виде одной зависимости между переменными x, y, z, если удовлетворяется условие Эйлера, и в виде 2 зависимостей в противоположном случае.

Метод Пфаффа для построения системы интеграла связан с постепенным понижением числа дифференциальных элементов заданного уравнения, причем это понижение числа их каждый раз на одну единицу связано с решением системы обыкновенных совместных дифференциальных уравнений.

Теория задачи Пфаффа имеет применения для решения дифференциальных уравнений с частными производными не только 1-го, но и 2-го порядка одной неизвестной функции z, равно как и для интегрирования уравнений с частными производными при нескольких неизвестных функциях $z_1, z_2, \ldots$ В частности, как уже упомянуто было вскользь в предшествующем параграфе, существует способ интегрирования нелинейных уравнений с частными производными 1-го порядка, основанный на применении теории задачи Пфаффа, при этом приходится *выражения Пфаффа*, называемые часто *Пфаффианами*, вида

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_p\,dx_p,$$

где $X_1, \ldots X_p$ — функции переменных $x_1, \ldots x_p$, сводить к так называемой *нормальной форме.* О задаче Пфаффа существует громадная литература. Этой задачей занимался ряд выдающихся математиков: Натани, Гаусс, Клебш, Якоби, Грассман, Гамбургер, Фробениус, Ли, Е. Вебер, Гурса, Картан и другие. Проф. Ц. К. Руссьян дал метод интегрирования Пфаффова уравнения

$$\Omega \equiv X_1\,dx_1 + \ldots + X_p\,dx_p = 0, \tag{36}$$

основывающийся на рассмотрении так называемой простейшей формы Пфаффиана Ω, в виде

$$\Omega \equiv U_1\,du_1 + \ldots + U_n\,du_n, \tag{37}$$

и отличающийся от методов Гурса и Картана тем, что он более прямой и более простой, чем эти методы. Метод Картана основывается на теории особых символических дифференциальных выражений и состоит в приведении Пфаффиана Ω к виду, заключающему, вообще говоря, наименьшее количество дифференциалов du_i; u не зависит от четности класса Ω. Метод Гурса связан с рассмотрением канонической формы для Ω и требует, помимо интегрирований, также последовательных преобразований выражения Ω. Метод Ц. К. Руссьяна не требует последовательных преобразований, и уравнения, посредством которых определяются переменные $U_1, \dots U_n$ и $u_1, \dots u_n$ в простейшей форме (37), выводятся непосредственно по коэффициентам заданного уравнения (36),—в методах Гурса и Картана дело обстоит сложнее.

В последнее время теория задачи Пфаффа применена была Ц. К. Руссьяном в его способе интегрирования нелинейного уравнения с частными производными 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \theta\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right);$$

этот способ представляет собой обобщение метода Лагранжа интегрирования уравнения с частными производными 1-го порядка; в нем интегрирование сводится к интегрированию системы уравнений в полных дифференциалах.

Способ Пфаффа, разработанный и дополненный впоследствии Гауссом и Якоби, *позволяет свести уравнение (36), во всех случаях, к такому новому, которое содержит не больше* $\frac{p}{2}$ *дифференциальных элементов, если p число четное, или не больше* $\frac{1}{2}(p+1)$, *если p число нечетное.*

Уравнение

$$\Omega \equiv X_1 dx_1 + \dots + X_{2n} dx_{2n} = 0$$

преобразовывается в уравнение

$$\Omega_1 \equiv U_1 du_1 + \dots + U_{2n-1} du_{2n-1} = 0,$$

где $U_1, \dots U_{2n-1}$ — функции только от $u_1, \dots u_{2n-1}$, посредством подстановок

$$u_1 = I_1, \dots u_{2n-1} = I_{2n-1},$$

причем $I_1, \dots I_{2n-1}$ — это функции только от $x_1, \dots x_{2n-1}, x_{2n}$, определяемые уравнениями:

$$I_1 = a_1, \dots I_{2n-1} = a_{2n-1},$$

которые представляют собой 2_{n-1} независимых интегралов особой *вспомогательной системы Пфаффа* обыкновенных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{W_1} = \frac{dx_2}{-W_2} = \frac{dx_3}{W_3} = \dots = \frac{dx_{2n-1}}{W_{2n-1}} = \frac{dx_{2n}}{-W_{2n}}, \tag{38}$$

связанной с коэффициентами заданного уравнения $\Omega = 0$. Зависимости между Ω и Ω_1, U_i, X_j и т. д. имеют такой вид:

$$\Omega = \Omega_1 e^{-\int \frac{P}{W_{2n}} dx_{2n}};$$

P — это корень квадратный из особого определителя Δ и представляет собой Пфаффиан, построенный из коэффициентов $X_1, \dots X_{2}$ так, что

$$P^2 = \Delta;$$

$$\Delta - \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \dots a_{12n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \dots a_{22n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{2n,1}, & a_{2n,2} & a_{2n,3} \dots 0 \end{vmatrix}$$

$$a_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$$

$$a_{ij} = -a_{ji}; \ a_{ii} = 0$$

$$(i, j = 1, \dots 2n; \ i \neq j);$$

$$\begin{aligned} * \ a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + \dots + a_{1\,2n} y_{2n} &= X_1 \\ a_{21} y_1 + \ * \ a_{23} y_3 + \dots + a_{2\,2n} y_{2n} &= X_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{2n1} y_1 + a_{2n2} y_2 + a_{2n3} y_3 + \dots \ * \ &= X_{2n} \end{aligned} \tag{39}$$

$$W_k = (-1)^{k-1} P \cdot y_k.$$

Подобным же образом можно делать приведение на одну единицу, полагая

$$I_1 = f_1, \dots I_{2n-1} = f_{2n-1},$$

где

$$f_1 = f_1(u_1, \dots u_{2n-1}), \dots f_{2n-1} = f_{2n-1}(u_1, \dots u_{2n-1}).$$

Эта теорема справедлива и тогда, когда $\Delta = 0$, но по крайней мере две из величин W не равны нулю.

Увеличивая X_r на λ_r, получим:

$$a_{rs}' = a_{rs} + \frac{\partial \lambda_r}{\partial x_s}; \ \Delta'; (-1)^{k-1} P' \cdot y_k' = W_k'.$$

Пример (Монж).

$$\Omega = x_2 dx_1 + x_3 dx_2 + x_1 dx_3 + x_4 dx_4 = 0.$$

$$\Delta = 0.$$

Вспомогательная система:

$$\frac{dx_1}{x_4} = \frac{dx_2}{x_4} = \frac{dx_3}{x_4} = \frac{dx_4}{x_1 + x_2 + x_3}$$

дает интегралы:

$$u_1 = x_1 - x_2; \ u_2 = x_1 - x_3; \ u_3 = 3x_4^2 - (x_1 + x_2 + x_3)^2$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{3}(2u_2 - u_1) du_1 - \frac{1}{3}(u_1 + u_3) du_2 + \frac{1}{6} du_3.$$

Для интегрирования нелинейного уравнения с частными производными 1-го порядка

$$F(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n) = a, \tag{40}$$

к нему присоединяют зависимость

$$-dz + p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n = 0,$$

которую, в связи с уравнением (40), можно рассматривать с двух точек зрения. Во-первых, *с точки зрения Пфаффа,* решая уравнение, например, относительно p_n, т. е. полагая

$$p_n = \theta(x_1, \ldots x_n,\ z;\ p_1, \ldots p_{n-1},\ a)$$

и изучая Пфаффово уравнение

$$-dz + p_1 dx_1 + \ldots + p_{n-1}\, dx_{n-1} + \theta dx_n = 0,$$

как уравнение с $2n$ переменными $x_1, \ldots x_n,\ z,\ p_1, \ldots p_{n-1}$, так что

$$p_1 dx_1 + \ldots + p_{n-1}\, dx_{n-1} + \theta dx_n + 0\, dp_1 + \ldots + 0\, dp_{n-1} + (-1)\, dz = 0,$$

$$x_{2n} = z; x_{n+k} = p_k,$$

$$X_{2n} = -1; X_{n+k} = 0; X_n = \theta,\ \ X_k = p_k,$$

$$(k = 1, \ldots n-1);$$

и уравнения (39) напишутся:

$$X_k = -y_n \frac{\partial\theta}{\partial x_k} + y_{n+1}$$

$$X_{n+k} = -y_k - y_n \frac{\partial\theta}{\partial p_k}$$

$$X_n = \sum_{k=1}^{n-1} y_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n-1} y_{n+k} \frac{\partial\theta}{\partial p_k} + y_{2n} \frac{\partial\theta}{\partial z}$$

$$X_{2n} = -y_n \frac{\partial\theta}{\partial z},$$

а система (38) будет:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n} = \frac{dp_1}{-(X_1 + Zp_1)} = \ldots = \frac{dp_n}{-(X_n + Zp_n)} \quad (41)$$

Найдя $2n-1$ интегралов, независимых между собою и отличных от заданного уравнения $F = a$, вида

$$u_1(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = C_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{2n-1}(x_1, \ldots x_n, z,\ p_1, \ldots p_n) = C_{2n-1},$$

решивши $2n$ уравнений

$$F(\xi_1, \ldots \xi_n, 0, \pi_1, \ldots \pi_n) = a;$$

$$u_1(\xi_1, \ldots \xi_n, 0, \pi_1, \ldots \pi_n) = C_1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{2n-1}(\xi_1, \ldots \xi_n, 0, \pi_1, \ldots \pi_n) = C_{2n-1},$$

относительно $\xi_1, \ldots \xi_n$:

$$\xi_1 = \varphi_1(a, C_1, \ldots C_{2n-1}); \ldots \xi_n = \varphi_n(a, C_1, \ldots C_{2n-1}),$$

и исключивши $p_1, \ldots p_n$ из $(n+1)$-го уравнений

$$F(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = a; \varphi_1(a, u_1, \ldots u_{2n-1}) = C_1, \ldots \varphi_n(\ldots) = C_n,$$

получим полный интеграл заданного уравнения $F = a$, т. е. будем иметь уравнение, связывающее переменные $x_1, \ldots x_n$, z и n произвольных постоянных $C_1, \ldots C_n$.

Во-вторых, можно рассматривать зависимость

$$-dz + p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n = 0$$

с точки зрения Натани, считая левую часть ее Пфаффианом $(2n+1)$-го переменных $x_1, \ldots x_n$, z, $p_1, \ldots p_n$, причем известен один из интегралов, а именно заданное уравнение

$$F(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = a.$$

Если найдем $2n-1$ независимых интегралов вспомогательной системы Пфаффа (41), отличных от $F = a$:

$$u_1(x_1, \ldots x_n,\ z,\ p_1, \ldots p_n) = C_1, \ldots u_{2n-1}(\ldots) = C_{2n-1},$$

тогда исключение $p_1, \ldots p_n$, $\pi_1, \ldots \pi_n$ из $(2n+1)$-го уравнений

$$\begin{cases} F(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = a \\ F(\alpha_1, \ldots \alpha_n, 0, \pi_1, \ldots \pi_n) = a \\ u_1(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = u_1(\alpha_1, \ldots \alpha_n, 0, \pi_1, \ldots \pi_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{2n-1}(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = u_{2n-1}(\alpha_1, \ldots \alpha_n, 0, \pi_1, \ldots \pi_n) \end{cases}$$

даст полный интеграл уравнения $F = 0$, т. е. зависимость между переменными $x_1, \ldots x_n, z$ и n произвольными постоянными $\alpha_1, \ldots \alpha_n$.

Если *система n Пфаффовых уравнений* с $m+n$ переменными

$$\Omega_1 \equiv -dx_{m+1} + A_{11} dx_1 + \ldots + A_{1m} dx_m = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Omega_n \equiv -dx_{m+n} + A_{n1} dx_1 + \ldots + A_{nm} dx_m = 0$$

обладает точным интегралом $f = c$, то дифференциальное уравнение $df = 0$ должно быть линейной комбинацией n уравнений

$$\Omega_1 = 0, \ldots \Omega_n = 0$$

и будет удовлетворяться в силу этих уравнений, т. е. каждый интеграл f должен удовлетворять все линейные уравнения 1-го порядка;

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + A_{11} \frac{\partial f}{\partial x_{m1+}} + \ldots + A_{n1} \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_m} + A_{1m} \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \ldots + A_{nm} \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} = 0.$$

Следовательно, система

$$\Omega_1 = 0, \ldots \Omega_n = 0$$

обладает точными интегралами только тогда, когда связанная с нею система линейных уравнений 1-го порядка может дать полную систему $m+p$ уравнений, после присоединения соответствующих ее полноте

p новых уравнений. Число точных интегралов для $\Omega_1 = 0, \ldots \Omega_n = 0$ будет $n - p$.

Пример (Форзайс).

$$p_1^2 + p_2^2 + 2z + x_1^2 + x_2^2 = a.$$

Для интегрирования уравнения по Натани, пишем систему

$$\frac{dx_1}{-p_1} = \frac{dx_2}{-p_2} = \frac{dp_1}{x_1 + p_1} = \frac{dp_2}{x_2 + p_2} = \frac{dz}{-p_1^2 - p_2^2}.$$

Интегралы ее, отличные от заданного уравнения, будут:

$$p_2 - \varepsilon x_2 = C_1 (p_1 - \varepsilon x_1).$$
$$(\varepsilon p_1 - x_1)^{\varepsilon} = C_2 (p_1 - \varepsilon x_1)$$
$$(\varepsilon p_2 - x_2)^{\varepsilon} = C_3 (p_1 - \varepsilon x_1),$$

где ε — корень кубичный из единицы. Полный интеграл будем иметь в результате исключения p_1, p_2, π_1, π_2 из 5 уравнений:

$$p_1^2 + p_2^2 + 2z + x_1^2 + x_2^2 = a$$
$$\pi_1^2 + \pi_2^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = a$$
$$\frac{p_2 - \varepsilon x_2}{p_1 - \varepsilon x_1} = \frac{\pi_2 - \varepsilon \alpha_2}{\pi_1 - \varepsilon \alpha_1}$$
$$\frac{(\varepsilon p_1 - x_1)^{\varepsilon}}{p_1 - \varepsilon x_1} = \frac{(\varepsilon \pi_1 - \alpha_1)^{\varepsilon}}{\pi_1 - \varepsilon \alpha_1}$$
$$\frac{(\varepsilon p_2 - x_2)^{\varepsilon}}{p_1 - \varepsilon x_1} = \frac{(\varepsilon \pi_2 - \alpha_2)^{\varepsilon}}{\pi_1 - \varepsilon \alpha_1},$$

где α_1 и α_2 — произвольные постоянные полного интеграла.

§ 69. Касательные преобразования и интегралы Софуса Ли.

Посредством 2 уравнений вида

$$x_1 = X(x, y); \quad y_1 = Y(x, y)$$

мы можем известной точке (x, y) плоскости сопоставить точку (x_1, y_1) или, иначе, — преобразовать точку (x, y) в точку (x_1, y_1). Если уравнения могут быть решены относительно x и y, т. е. если

$$D\left(\frac{X, Y}{x, y}\right) \neq 0,$$

то

$$x = X_1(x_1, y_1); \quad y = Y_1(x_1, y_1)$$

преобразовывают обратно точку (x_1, y_1) в точку (x, y). Такое преобразование, посредством которого одной точке плоскости противопоставляется другая точка этой же плоскости, называется *точечным преобразованием* плоскости. Примером точечного преобразования может служить *проективное преобразование*, определяемое формулами

$$x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}$$

$$y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{ax + by + c}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} \neq 0$$

$$x = \frac{a_1' x_1 + b_1' y_1 + c_1'}{a' x + b y + c'}$$

$$y = \frac{a_2' x + b'_2 y + c'_2}{a' x + b' y + c'}.$$

Аналогично, *точечное преобразование пространства 3 измерений* будет определяться 3 уравнениями:

$$x_1 = X(x, y, z); \quad y_1 = Y(x, y, z); \quad z = Z(x, y, z)$$

$$D\left(\frac{X, Y, Z}{x, y, z}\right) \neq 0.$$

Рассматривая поверхность

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

как совокупность бесчисленного множества точек, посредством точечного преобразования переведем каждую точку (x, y, z) поверхности в другую (x_1, y_1, z_1), а совокупность всех точек,

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

переведем в новую совокупность — в поверхность

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

уравнение которой получим исключением 3 переменных x, y, z из 4 уравнений

$$x = X; \quad y = Y; \quad z = Z; \quad \varphi = 0.$$

Переходя к обобщениям точечных преобразований плоскости и пространства, рассмотрим на плоскости точку (x, y) и свяжем с ней направление, определяемое уравнением

$$Y - y = p(X - x),$$

где

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

Совокупность (x, y, p) определяет на плоскости так называемый *плоскостный элемент*, имеющий 3 координаты: x, y, p.

Каждой из трех координат x, y и p можно давать любые значения, т. е. на плоскости содержится ∞^3 элементов. Дифференциальное уравнение

$$p = f(x, y),$$

где f — функция однозначная, определяет ∞^2 элементов; эта совокупность ∞^2 элементов называется *системой элементов плоскости*. Если эти элементы расположены так, что точка одного находится на прямой другого, бесконечно-близкого к нему, то говорят, что *элементы находятся в соединении; условием соединенности* элементов является:

$$dy = p\,dx.$$

Совокупность элементов, находящихся в соединении, называется их *многообразием* M. Таким образом, уравнение кривой

$$y = f(x),$$

для всех точек которой будет иметь место условие соединенности

$$dy - pdx = 0,$$

определяет многообразие элементов, сплошь заполняющих кривую; каждый элемент состоит из точки на кривой и из бесконечно малого отрезка касательной к кривой в этой точке.

Другим типом многообразия является точка

$$x = a, \ y = b;$$

это многообразие состоит из точки и из отрезков всех прямых, через нее проходящих. Обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$F(x, y, p) = 0$$

определяет, как мы говорили, ∞^2 элементов; из них совокупность тех ∞^1 элементов, которые подчинены и 2-му условию, — условию соединенности

$$dy - pdx = 0$$

и зависят от произвольного выбора одного только параметра, называется, по учению Софуса Ли, *интегралом* данного дифференциального уравнения; это будет многообразие M_1.

Интегральное многообразие M_1 можно представить себе как ∞_1 соединенных элементов, заполняющих кривую, и можно обозначить его через M_1^1, где указатель вверху „1" соответствует произвольности x-са в уравнении кривой $y = f(x)$. Интегральное многообразие M_1 можно себе представить еще как ∞^1 соединенных элементов, скученных в одной точке, $x = a$, $y = b$, и можно обозначить его через M_1^0. Следовательно, *интеграл Ли* представляет собой либо кривую, либо точку, в то время как интеграл обычный, изучавшийся нами раньше и называемый *интегралом Лагранжа*, представляет собой только плоскую кривую

$$y = f(x).$$

В трехмерном пространстве *поверхностный элемент* определится пятью координатами: x, y, z, p, q; один элемент (x, y, z, p, q) можно представить себе в виде точки (x, y, z) и связанной с ней плоскости

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

где коэффициенты p и q определяют направление плоскости в пространстве. Всех поверхностных элементов будет ∞^5. Условие их соединенности

$$dz - pdx - qdy = 0$$

обозначает, что точка одного лежит в плоскости бесконечно-близкого другого.

Геометрическими местами многообразий поверхностных элементов могут быть: поверхность

$$f(x, y, z) = 0,$$

кривая

$$z = \varphi(x), \ y = \psi(x)$$

и точка

$$x = a, \ y = b, \ z = c.$$

Дифференциальное уравнение с частными производными 1-го порядка

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

определяет ∞^3 поверхностных элементов, подчиняющихся, кроме этого уравнения, еще и условию их соединенности. Многообразие ∞^2 из этих ∞^3 соединенных элементов, удовлетворяющих уравнению

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

и обращающих в тождество соотношение

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

называется *интегралом Ли уравнения* $F(x, y, z, p, q) = 0$ и обозначается через M_2; третья зависимость, определяющая интеграл M_2—это связь между координатами x, y, z геометрического места соединенных элементов. Поэтому интегралом Ли могут быть в данном случае: поверхность M_2^2, кривая M_2^1 и точка M_2^0, где значки „2", „1", „0" вверху обозначают порядок геометрического места.

В частности M_2^1 обозначает бесчисленное множество малых кусочков плоскостей, расположенных на кривой

$$z = \varphi(x), \ y = \psi(x).$$

Интеграл Лагранжа представляет геометрически только поверхность.

Посредством формул преобразования

$$x_1 = X(x, y); \ y_1 = Y(x, y); \ p_1 = P(x, y, p) \tag{42}$$

переходим от одной системы элементов к другой, заставляя элементы первой совокупности подчиняться условию соединенности

$$dy - pdx = 0$$

и, преобразовывая x и y по формулам

$$x_1 = X(x, y), \ y_1 = Y(x, y),$$

можем и p преобразовать в такое p_1, что будет удовлетворяться и условие соединенности

$$dy_1 - p_1 dx_1 = 0$$

элементов (x_1, y_1, p_1), в которые переходят соединенные элементы (x, y, p). Такое *преобразование линейных элементов* называется *обобщенным точечным преобразованием*; оно определяется тремя уравнениями (42) *и условием*, чтобы существовало

$$dy_1 - p_1 dx_1 = 0$$

всегда, как только есть равенство

$$dy - pdx = 0.$$

Это добавочное условие заменяется зависимостью

$$dy_1 - p_1 dx_1 = \rho (dy - pdx),$$
$$\rho = f(x, y, p) \neq 0.$$

Эти новые преобразования переводят точки геометрического места системы соединенных элементов также в точки геометрического места, при этом кривая $y = f(x)$ может перейти не только в кривую $y_1 = f_1(x_1)$, но и в точку $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$ со всеми связанными с ней отрезками прямых для соединенных элементов.

К этому типу преобразований линейных элементов относятся также преобразования, определяемые такими тремя формулами и тождеством:

$$x_1 = X(x, y, p); \; y_1 = Y(x, y, p); \; p_1 = P(x, y, p) \tag{43}$$

$$dy_1 - p_1 dx_1 \equiv \rho (dy - pdx) \tag{44}$$
$$\rho(x, y, p) \neq 0.$$

Присоединяя к группе преобразований (43)—(44) еще группу преобразований (42) с тем же условием (44), получим общую *группу касательных преобразований* одних соединенных элементов (x, y, p) в другие соединенные (x_1, y_1, p_1).

Формулы (43) без условия (44) определяют точечное преобразование трехмерной среды xyp в трехмерную среду $x_1 y_1 p_1$.

Применение касательного преобразования к обыкновенному дифференциальному уравнению 1-го порядка

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

где

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

переводит его в уравнение

$$F_1\left(x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx_1}\right) = 0,$$

а интеграл Ли M_1 первого уравнения в интеграл Ли W_1 второго уравнения. Каждое из многообразий M_1 и W_1 может представлять либо точку M_1^0, W_1^0, либо кривую M_1^1, W_1^1.

Условие (44) приводит к дифференциальной зависимости между функциями

$$X(x, y, p), \; Y(x, y, p),$$

вида

$$X_p'(Y_x' + pY_y') = Y_p'(X_x' + pX_y'),$$

так как

$$(Y_x' - PX_x')\,dx + (Y_y' - PX_y')\,dy + (Y_p' - PX_p')\,dp = \rho (dy - pdx)$$

дает:

$$\left.\begin{aligned} &Y_x' - PX_x' + \rho p = 0 \\ &Y_x' - PY_y' - \rho = 0 \\ &Y_p' - PX_p' = 0 \end{aligned}\right\}$$

т. е.

$$\begin{vmatrix} Y_x' & X_x' & p \\ Y_y' & X_y' & -1 \\ Y_p' & X_p' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Если между переменными x, y, x_1, y_1 существует 2 зависимости

$$x_1 = X(x, y); \; y_1 = Y(x, y),$$

то это будет *касательное преобразование 1-го класса*; оно представляет собою обобщенное точечное преобразование. Если же существует 1 зависимость

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0,$$

то мы имеем *касательное преобразование 0-го класса*, когда сравнение равенств:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} dy_1 = 0$$

и

$$dy_1 - p_1 dx_1 - \rho(x, y, p)(dy - pdx) = 0$$

дает

$$\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x}}{\rho p} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}{-\rho} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}}{-p_1} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}}{1},$$

т. е. X, Y, P и ρ найдутся из уравнений

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0;$$

$$\rho = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}{\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}} \neq 0.$$

Пример:

$$\Omega = y + y_1 - xx_1$$

$$y + y_1 - xx_1 = 0; \; -x_1 + p = 0; \; -x + p_1 = 0; \; \rho = -1 \neq 0$$
$$x_1 = -p, \; y_1 = -xp - y, \; p_1 = x.$$

Аналогично, для пространства 3 измерений записывается *обобщенное точечное преобразование* по формулам:

$$x_1 = X(x, y, z); \; y_1 = Y(x, y, z); \; z_1 = Z(x, y, z)$$
$$p_1 = P(x, y, z, p, q); \; q_1 = Q(x, y, z, p, q).$$
$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 \equiv \rho(x, y, z, p, q)\,(dz - pdx - qdy) \tag{45}$$

и *касательное преобразование*, для которого 5 первых уравнений должны быть заменены такими:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q); \; y_1 = Y(x, y, z, p, q); \; z_1 = Z(x, y, z, p, q)$$
$$p_1 = P(x, y, z, p, q); \; q_1 = Q(x, y, z, p, q). \tag{46}$$

Исключение отсюда величин p, q, p_1, q_1, может дать 1, 2 и 3 зависимости между коэффициентами x, y, z, x_1, y_1, z_1, что соответствует *0-му, 1-му и 2-му классам касательных преобразований для трехмерного пространства.*

Касательное преобразование 0-го класса, определяется одной зависимостью
$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Сравнение равенства $d\Omega = 0$ с равенством (45) даст 5 уравнений, которые с 6-м уравнением $\Omega = 0$ определят функции X, Y, Z, P, Q, ρ; эти 6 уравнений будут:
$$\Omega = 0$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial z}p + \frac{\partial\Omega}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial\Omega}{\partial z}q + \frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}p_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} = 0;\ \frac{\partial\Omega}{\partial z_1}q_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} = 0$$
$$\rho = -\frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial z_1}} \neq 0.$$

Примеры:

1) $$\Omega = x_1x + y_1y - z_1 - z.$$

Имеем систему 5 уравнений
$$x_1x + y_1y - z_1 - z = 0;\ p = x_1;\ q = y_1;\ p_1 = x,\ q_1 = 0;\ \rho = -1,$$
что дает *преобразование Лежандра*:
$$x_1 = p,\ y_1 = q,\ z_1 = px + qy - z,\ p_1 = x,\ q_1 = y.$$

Это преобразование точку
$$x = a,\ y = b,\ z = c$$
превращает в плоскость
$$z_1 + ax_1 + by_1 + c = 0,$$
а плоскость
$$z + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
переводит в точку.

2) $$\Omega = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 - r_1^2.$$

Имеем преобразование, носящее название *расширения*:
$$x_1 = x \pm \frac{r_1p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};\ y_1 = y \pm \frac{r_1q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};\ z_1 = z \pm \frac{r_1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$
$$p_1 = p;\ q_1 = q.$$

От одной поверхности переходим к другой, параллельной. Точка
$$x = a,\ y = b,\ z = c$$
переходит в сферу
$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 = r_1^2,$$
а сфера
$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2$$
того же радиуса r_1 — в точку
$$x_1 = a_1,\ y_1 = b_1,\ z_1 = c_1.$$

Касательное преобразование 1-го класса определяется двумя зависимостями:
$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0;\ \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Сопоставляя дифференциалы $d\Omega_1 = 0$ и $d\Omega_2 = 0$ с основным тождеством (45), получим:
$$\lambda_1\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial z_1}dz_1 + \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial\Omega_1}{\partial y}dy\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_1}dz_1 + \ldots + \frac{\partial\Omega_2}{\partial y}dy\right) =$$
$$= dz_1 - p_1dx_1 - q_1dy_1 - \rho(dz - pdx - qdy).$$

Сравнивая коэффициенты при дифференциалах, будем иметь:
$$1 = \lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_1};\ -p_1 = \lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1};\ -q_1 = \lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial y_1}$$
$$-\rho = \lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial z};\ \rho p = \lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial x};\ \rho q = \lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial y}.$$

Исключая $\rho, \lambda_1, \lambda_2$, получим 3 уравнения, которые вместе с уравнениями
$$\Omega_1 = 0,\ \Omega_2 = 0$$
определят 5 функций X, Y, Z, P, Q. Функции X, Y, Z найдем из зависимостей
$$\Omega_1 = 0;\ \Omega_2 = 0.$$
$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Omega_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\Omega_1}{\partial z}p, & \dfrac{\partial\Omega_2}{\partial x} + \dfrac{\partial\Omega_2}{\partial z}p \\ \dfrac{\partial\Omega_1}{\partial y} + \dfrac{\partial\Omega_1}{\partial z}q, & \dfrac{\partial\Omega_2}{\partial y} + \dfrac{\partial\Omega_2}{\partial z}q \end{vmatrix} = 0.$$

Примеры:

1) $$\Omega_1 = z + z_1 + xx_1;\ \Omega_2 = y - y_1.$$

$\Delta = 0$ дает
$$x_1 + p = 0.$$

Имеем:
$$x_1 = -p;\ y_1 = y;\ z_1 = px - z;\ p_1 = -x,\ q_1 = -q.$$

Это *преобразование Эйлера*, кот рым позже пользовался Ампер.

Точка
$$x = a,\ y = b,\ z = c$$
переходит в прямую
$$z_1 + ax_1 + c = 0,\ y_1 - b = 0.$$

2) $$\Omega_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x^2 - y^2 - z^2;\ \Omega_2 = x_1x + y_1y + z_1z.$$

Вследствие симметричности функций Ω_1 и Ω_2, преобразование, определяемое уравнениями $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ обладает свойством взаимности. Точка
$$x = a,\ y = b,\ z = c$$
превращается в окружность
$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2 + b^2 + c^2;\ ax_1 + by_1 + cz_1 = 0,$$
а точка
$$x_1 = a_1,\ y_1 = b_1,\ z_1 = c_1$$
в окружность
$$x^2 + y^2 + z^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2;\ a_1x + b_1y + c_1z = 0.$$

Уравнение $\Delta = 0$ представляет плоскость, проходящую через прямую и нормаль к поверхности в конце этой прямой. Преобразование называется *апсидальным.* Оно позволяет переходить от поверхности эллипсоида к поверхности волны.

Касательное преобразование 2-го класса, определяемое тремя зависимостями

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \; \Omega_2 = 0, \; \Omega_3 = 0,$$

даст обобщенное точечное преобразование (45).

Аналогично определяются *касательные преобразования для пространства $(n+1)$-го измерения, точки которого имеют координаты $x_1, \dots x_n, z$, и интегралы Ли для дифференциальных уравнений и систем уравнений с частными производными 1-го порядка одной функции z независимых переменных $x_1, \dots x_n$.*

Условие соединенности поверхностных элементов имеет вид:

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0. \tag{47}$$

Для системы q уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &F_q(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n) = 0. \end{aligned} \tag{48}$$

Интегралом Софуса Ли называется такое многообразие M_n, значения координат каждого из элементов которого $(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n)$ удовлетворяют этим уравнениям; значения переменных, получаемые из уравнений многообразия M_n, должны тождественно удовлетворять уравнениям (48). Интегральное многообразие M_n и значок при нем n определяются так.

Уравнение (47) требует существования по крайней мере одной зависимости между координатами $x_1, \dots x_n, z$. Пусть их будет k:

$$\begin{aligned} z &= \psi(x_k, x_{k+1}, \dots x_n) \\ x_1 &= \psi_1(x_k, x_{k+1}, \dots x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_{k-1} &= \psi_{k-1}(x_k, x_{k+1}, \dots x_n) \end{aligned} \tag{49}$$

Вставляя значения дифференциалов $dz, dx_1, \dots dx_{k-1}$ в условие (47) и приравнивая нулю коэффициенты при остальных независимых дифференциалах $dx_k, dx_{k+1}, \dots dx_n$, получим еще $n+1-k$ уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - p_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x_k} - \dots - p_{k-1}\frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial x_k} - p_k = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x_n} - p_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} - \dots - p_{k-1}\frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial x_n} - p_n = 0 \end{aligned} \tag{50}$$

Уравнения (49) называются *геометрическим местом собрания поверхностных элементов*, или иначе — *точечным многообразием $(n+1-k)$-го порядка*, а уравнения (50) — *плоскостями*, касательными в точках многообразия. Всего имеем $n+1$ уравнений (49) — (50), определяющих $\infty^{2n+1-(n+1)}$, т. е. ∞^n соединенных поверхностных элементов, называемых еще касательными элементами и устанавливающих многообразие M_n. Многообразия M_n подразделяют еще на *классы, считая порядком класса число независимых уравнений (49) без единицы*, т. е. число $k-1$.

Следовательно, уравнения (49) определяют интеграл Ли (k—1)-го класса системы дифференциальных уравнений (48); он обозначается символом $M_n^{n-(k-1)}$, т. е. M_n^{n-k+1}. Частный случай интеграла Ли представляет собой *интеграл Лагранжа*, определяемый одной зависимостью между переменными $x_1, \dots x_n, z$; это будет интеграл Ли, но *нулевого класса* и обозначается символом M_n^n.

Если нам задана только система q уравнений (48), то, чтобы найти интеграл Ли M_n, или иначе — зависимости (49), а, следовательно, и (50), надо найти еще $n+1-q$ таких уравнений вида (48), которые вместе с (48) допускали бы равенство (47), т. е. удовлетворяли бы условию соединенности элементов $(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n)$.

В интегралах Ли всех классов, кроме нулевого, *переменные $x_1, \dots x_n$ перестают быть независимыми между собою.*

Касательные преобразования пространства $(n+1)$-го измерения преобразовывают $2n+1$ переменных величин

$$(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n)$$

в другие $2n+1$ переменных

$$(x_1', \dots x_n', z', p_1' \dots p_n')$$

по формулам

$$\begin{aligned} x_1' &= X_1(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n), \dots x_n' = X_n(\dots); \; z' = Z(\dots); \\ p_1' &= P_1(\dots); \dots p_n' = P_n(\dots), \end{aligned} \tag{51}$$

если между обеими системами переменных существует тождество

$$dz' - p_1' dx_1' - \dots - p_n' dx_n' \equiv$$
$$\equiv \rho(x_1, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n)\,(dz - p_1 dx_1 - \dots p_n dx_n),$$

или иначе:

$$dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_n dX_n = \rho\,(dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n), \quad \rho \neq 0. \tag{52}$$

Многообразие M преобразовывается во многообразие W, которое может носить другой характер; например, геометрическому месту — „поверхность“, может сопоставиться геометрическое место „кривая“. Два многообразия M и $\overline{M}$, касающиеся, переходят в многообразия W и $\overline{W}$ также касающиеся.

К нулевому классу относится касательное преобразование, определяемое одной зависимостью вида

$$\Omega(x_1, \dots x_n, z, x_1', \dots x_n') = 0,$$

к первому классу относятся те, которые получим посредством двух зависимостей

$$\Omega_1 = 0, \; \Omega_2 = 0,$$

и т. д.

Пример.

$$\Omega_1 = x'_{\mu+1} - x_{\mu+1}\,; \ldots \Omega_{n-\mu} = x'_n - x_n\,;$$

$$\Omega_{n-\mu+1} = z' - z + x_1' x_1 + x_2' x_2 + \ldots + x'_\mu x_\mu\,.$$

Уравнения

$$\Omega_1 = 0, \ldots \Omega_{n-\mu} = 0,\ \Omega_{n-\mu+1} = 0$$

дают касательное преобразование

$$\begin{cases} x_1' = p_1, \ldots x_\mu' = p_\mu\,;\ x'_{\mu+1} = x_{\mu+1}, \ldots x_n' = x_n \\ z' = z - p_1 x_1 - \ldots - p_\mu x_\mu \\ p_1' = -x_1, \ldots p_\mu' = -x_\mu\,;\ p'_{\mu+1} = p_{\mu+1} \ldots p_n' = p_n, \end{cases}$$

частными случаями которого являются Лежандрово преобразование и преобразование Эйлера — Ампера.

Если из $2n+1$ уравнений (51) только

$$z' = Z(x_1, \ldots x_n,\ z,\ p_1, \ldots p_n)$$

содержит в правой части z, то преобразование называется *преобразованием* в x, p. Если же это уравнение имеет вдобавок вид

$$z' = z + \text{const}$$

и функции X_i будут однородными нулевого измерения относительно $p_1, \ldots p_n$, а функции P_i — однородными 1-го измерения, тогда касательное преобразование называется *однородным*; для него вместо (52) будем иметь

$$p_1' dx_1' + \ldots + p_n' dx_n' = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n\,.$$

Можно доказать, что если мы найдем такие функции X_i, Z, P_i, что их дифференциалы тождественно удовлетворяют (52), где $\rho \neq 0$, то, во-первых, они все будут независимы между собою, и, во-вторых, — они будут удовлетворять уравнениям:

$$[X_i,\ X_k] \equiv 0;\ [Z,\ X_i] \equiv 0;\ [X_i,\ P_k] \equiv 0;\ [P_i,\ P_k] \equiv 0.$$

$$[X_i,\ P_i] \equiv -\rho;\ [Z,\ P_i] \equiv -\rho P_i\,.$$

Наоборот, — если даны такие $n+1$ независимых функций Z, X_i, что

$$[Z, X_i] \equiv 0,\ [X_i,\ X_k] \equiv 0,$$

то можно будет найти одним способом единственные n функций $P_1, \ldots P_n$, которые вместе с заданными определяют касательное преобразование. Касательные преобразования отличаются еще тем свойством, что символ $[F, \Phi]$ для двух функций,

$$F(x_1, \ldots x_n,\ z_1,\ p_1, \ldots p_n) \text{ и } \Phi(\ldots),$$

остается инвариантом относительно всякого касательного преобразования: скобки $[F, \Phi]_{xzp}$ заменяются скобками $[F', \Phi']_{x'z'p'}$, а равенство

$$[F, \Phi]_{xzp} = 0$$

заменяется равенством

$$[F',\ \Phi']_{x'z'p'} = 0.$$

Дифференциальное уравнение

$$F(x_1, \ldots x_n,\ z,\ p_1, \ldots p_n) = 0,$$

вследствие касательного преобразования, переходит в новое уравнение

$$F_1(x_1', \ldots x_n', z', p_1', \ldots p_n') = 0,$$

а интеграл Ли, M_n, для первого уравнения переходит в интеграл Ли W_n для второго, и наоборот.

Инволюционная система q уравнений также преобразовывается в инволюционную систему q уравнений и интеграл одной переходит в интеграл другой. При этом, как для одного дифференциального уравнения, так и для системы, интеграл Ли, т. е. многообразие M_n, одного класса перейдет, вообще, в интеграл Ли W_n другого класса. При таком переходе существенную роль играет класс касательного преобразования. Общепринятый интеграл, интеграл Лагранжа, как интеграл Ли нулевого класса, при касательном преобразовании, вообще перестает быть интегралом обычным и переходит в интеграл Ли.

§ 70. Бесконечно-малые преобразования и группы преобразований Ли. Совокупность преобразований

$$x' = f(x, a_1, \ldots a_r),$$

где $a_1, \ldots a_r$ обозначают параметры, составляет *группу преобразований*, если последовательность двух преобразований совокупности равносильна одному только преобразованию этой совокупности, что вытекает, таким образом, из уравнений

$$x' = f(x, a_1, \ldots a_r);\ x'' = f(x' b_1, \ldots b_r);\ x'' = f(x, \varphi_1, \ldots \varphi_r),$$

где φ — функции от a и b. Группа преобразований с r параметрами, $x' = f(x, a_1, \ldots a_r)$, называется *$r$-членной группой*, если f не удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с частными производными формы

$$\Phi_1(a_1, \ldots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_1} + \ldots + \Phi_r(a_1, \ldots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_r} = 0,$$

т. е. когда невозможно понизить число r введением новых параметров.

Две группы:

$$x' = f(x,\ a_1, \ldots a_r);\ \ x' = F(x,\ a_1, \ldots a_r),$$

называются *подобными*, когда последняя группа может принять форму

$$x' = \Phi f[\varphi(x),\ a_1, \ldots a_r],$$

где φ и Φ — обратные функции, и если первая группа может сохранить, таким образом, форму

$$x' = \varphi F[\Phi(x), a_1, \ldots a_r].$$

Для одночленной группы, если f — функция независимого переменного x и параметра a, которая удовлетворяет условию формы

$$f[f(x, b),\ a] = f[x, \varphi(a, b)],$$

то φ может зависеть не только от b, но должна зависеть также и от a; соответственным подбором a можно при этом сделать φ любой функцией от b.

Всякая одночленная группа содержит тождественное преобразование

$$f(x, a_0) = x.$$

Если одночленная группа содержит некоторое преобразование, то она включает также и обратное преобразование. Всякая одночленная группа

$$x' = f(x, a)$$

содержит бесконечно-малое преобразование:

$$x' = x + \omega\left[\frac{df(f, a)}{da}\right],$$

или

$$\delta x = X(x)\,\delta t.$$

Если бесконечно-малое преобразование группы

$$x' = f(x, a)$$

имеет форму

$$\delta x = X(x)\,\delta t,$$

то производная от f по a равна $X(f)$, умноженному на некоторую функцию от a, т. е.

$$\frac{df}{da} = A(a)\,X(f).$$

Если бесконечно-малое преобразование $\delta x = X(x)\,\delta t$ принадлежит одночленной группе, то уравнение этой группы будет

$$\int^{x'}\frac{df}{X(f)} = \int^{x}\frac{df}{X(f)} + \alpha,\quad (\alpha = \text{fonct}\ (a)).$$

Уравнение

$$\varphi(x') = \varphi(x) + \alpha$$

всегда определяет одночленную группу, и все одночленные группы обладают этой формой. Всякое бесконечно-малое преобразование $\delta x = X(x)\,\delta t$ принадлежит одночленной группе

$$\int^{x'}\frac{dx}{X(x)} = \int^{x}\frac{dx}{X(x)} + \alpha.$$

Все одночленные группы преобразований просто расширенного многообразия подобны. Вообще они могли бы принять форму

$$x' = x + \alpha.$$

Для двучленной группы, если

$$x' = f(x, a_1, a_2)$$

будет уравнение этой группы, так что имеет место функциональная зависимость формы

$$f[f(x, b_1, b_2),\ a_1,\ a_2] = f(x, \varphi_1, \varphi_2),$$

где φ зависят только от a и b, то всегда можно так подобрать a_1 и a_2, что φ_1 и φ_2 будут равны произвольно заданным функциям от b_1 и b_2. Всякая двучленная группа содержит тождественное преобразование

$$f(x,\ a_1^0,\ a_2^0) = x.$$

Если двучленная группа содержит некоторое преобразование, то она включает также и ему обратное. Всякая двучленная группа содержит ∞^1 бесконечно-малых преобразований. Если бесконечно-малое преобразование $\delta x = X(x)\,\delta t$ принадлежит двучленной группе

$$x' = f(x, a_1,\ a_2),$$

то $X(f)$ равно сумме производных от f по a_1 и a_2, умноженных на некоторые функции от a:

$$X(f) = M_1(a_1,\ a_2)\,\frac{\partial f}{\partial a_1} + M_2(a_1,\ a_2)\,\frac{\partial f}{\partial a_2}.$$

Если

$$\delta x = X_1(x)\,\delta t_1,\quad \delta x = X_2(x)\,\delta t_2$$

— два независимые друг от друга бесконечно-малые преобразования группы $x' = f(x, a_1, a_2)$, то производные от f по a_1 и a_2 выражаются как суммы величин $X_1(f)$ и $X_2(f)$, умноженных на определенные функции от a:

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = A_1X_1(f) + A_2X_2(f)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_2} = B_1X_1(f) + B_2X_2(f).$$

Если

$$\delta x = X_1(x)\,\delta t_1 \ \text{ и } \ \delta x = X_2(x)\,\delta t_2$$

— два независимые бесконечно-малые преобразования двучленной группы, то

$$X_1X_2' - X_2X_1' = m_1X_1 + m_2X_2$$

$$m_1 = \left(\frac{\partial A_1}{\partial a_2} - \frac{\partial B_1}{\partial a_1}\right) : (A_1B_2 - A_2B_1);$$

$$m_2 = \left(\frac{\partial A_2}{\partial a_2} - \frac{\partial B_2}{\partial a_1}\right) : (A_1B_2 - A_2B_1),$$

где m_1 и m_2 — постоянные, из которых по крайней мере одна не равна нулю.

Среди ∞^1 бесконечно-малых преобразований двучленной группы существует по крайней мере два таких

$$\delta x = X_1\delta t_1,\ \delta x = X_2\delta t_2,$$

что

$$X_1X_2' - X_2X_1' = X_1.$$

Если два бесконечно-малые преобразования

$$\delta x = X_1(x)\,\delta t_1,\ \delta x = X_2(x)\,\delta t_2$$

принадлежат двучленной группе и между X_1 и X_2 имеет место зависимость формы

$$X_1X_2' - X_2X_1' = X_1,$$

то уравнение группы будет

$$\int^{x'}\frac{dx}{X_1(x)} = a_1 + a_2\int^{x}\frac{dx}{X_1(x)}.$$

Уравнение

$$\varphi(x') = a_1 + a_2\varphi(x)$$

всегда определяет двучленную группу, и все двучленные группы могут быть приведены к этой форме. Бесконечно-малые преобразования группы

$$\varphi(x') = a_1 + a_2\varphi(x)$$

будут определены уравнением

$$\delta x = \frac{\delta t_1}{\varphi'(x)} + \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}\delta t_2.$$

Все двучленные группы многообразия один раз расширенного — подобны; вообще они могут принять общую форму

$$x' = a_1 + a_2 x.$$

Простая бесконечность бесконечно-малых преобразований группы определится через $\delta x = \omega_1 + \omega_2 x$, где ω_1 и ω_2 — произвольные бесконечно-малые величины.

Для трехчленной группы, определяемой уравнением

$$x' = f(x, a_1, a_2, a_3),$$

так что

$$f[f(x, b_1, b_2, b_3), a_1, a_2, a_3] = f(x, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

где φ зависят только от a и b, всегда можно так подобрать a, что φ будут равны произвольным функциям от b. Для тождественного преобразования и для обратного будем иметь заключения, аналогичные предыдущим. Всякая трехчленная группа содержит ∞^2 бесконечно-малых преобразований. Заключение о сумме производных от f по a и о выражениях производных от f по a аналогичны предшествующим.

Если

$$\delta x = X_1\delta t_1,\ \delta x = X_2\delta t_2,\ \delta x = X_3\delta t_3,$$

представляют собой 3 независимые бесконечно-малые преобразования трехчленной группы, то всякое

$$[X_iX_k] = X_iX_k' - X_kX_i'$$

выражается как сумма X_1, X_2, X_3, умноженных на постоянные:

$$[X_1X_2] = \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \alpha_3X_3$$
$$[X_2X_3] = \beta_1X_1 + \ldots + \beta_3X_3$$
$$[X_3X_1] = \gamma_1X_1 + \ldots + \gamma_3X_3,$$

при этом

$$[[X_1X_2]X_3] + [[X_2X_3]X_1] + [[X_3X_1]X_2] \equiv 0.$$

Среди бесконечно-малых преобразований трехчленной группы всегда можно выбрать такие 3 независимые

$$\delta x = X_1\delta t_1,\ \delta x = X_2\delta t_2\ \ \delta x = X_3\delta t_3,$$

что

$$[X_1X_2] = X_1;\ [X_2X_3] = X_3;\ [X_3X_1] = -2X_2.$$

Введением соответственных переменных всякую трехчленную группу можно привести к форме

$$x' = \frac{a_1 + a_2x}{a_3 + x}.$$

Всякая группа преобразований просто расширенного многообразия подобна линейной группе и поэтому содержит не больше трех параметров.

Уравнения:

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots x_n,\ a_1, \ldots a_r) = f_i(a)$$
$$(i = 1, \ldots n)$$

определяют группу преобразований, когда для каждого i имеет место уравнение формы

$$f_i[f_1(a), \ldots f_n(a),\ b_1, \ldots b_r] = f_i(x_1, \ldots x_n,\ C_1, \ldots C_r);$$

при этом предполагается, что $C_1, \ldots C_r$ — определенные функции от a и b, независящие от числа i. Группа преобразований называется r-членной, если она содержит ∞^r различных преобразований. Две r-членные группы преобразований

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots x_n,\ a_1, \ldots a_r),\ y_i' = \varphi_i(y_1, \ldots y_n,\ a_1, \ldots a_r)$$

называются подобными, если одна группа может перейти в другую введением новых переменных.

Бесконечно-малое преобразование имеет вид:

$$x_i' = x_i + X_i(x_1, \ldots x_n)\,\delta t,$$

или

$$\delta x_i = X_i(x_1, \ldots x_n)\,\delta t;$$

если же вместо $x_1, \ldots x_n$ ввести новые переменные $y_1, \ldots y_n$, то оно примет форму

$$\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}X_1 + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}X_n\right)\delta t.$$

То же изменение переменных в выражении

$$A(F) = X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

приводит к выражению

$$A'(F) = \frac{\partial F}{\partial y_1}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} X_1 + \ldots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} X_n\right) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\left(\frac{\partial y_n}{\partial x_1} X_1 + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} X_n\right),$$

поэтому выражение $A(F)$ употребляется как символ бесконечно-малого преобразования.

Если

$$A(F) = X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

$$B(F) = Y_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + Y_n \frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

и $A'(F)$, $B'(F)$ — выражения $A(F)$, $B(F)$ при замене $x_1, \ldots x_n$ новыми переменными $y_1, \ldots y_n$, то:

$$A(B(F)) - B(A(F)) = A'(B'(F)) - B'(A'(F)).$$

Если два бесконечно-малые переобразования $A(F)$ и $B(F)$ принадлежат одной группе, то то же самое будет иметь место и для бесконечно-многих бесконечно-малых преобразований, представляемых символом

$$\lambda A(F) + \mu B(F),$$

где

$$\lambda, \mu = \text{const}.$$

Если уравнения

$$x_i = f_i(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_r)$$

определяют r-членную группу преобразований и, таким образом, последовательность двух преобразований

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots x_n, b_1, \ldots b_r);\; x_i'' = f_i(x_1', \ldots x_n', a_1, \ldots a_r)$$

равносильна преобразованию

$$x_i'' = f_i(x_1, \ldots x_n, \varphi_1, \ldots \varphi_r),$$

где φ зависят только от a и b, то всегда можно так подобрать a, что φ будут равны произвольно заданным функциям от b. Тождественное и обратное преобразования определяются аналогично прежнему. Если уравнения группы

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_r)$$

решены относительно x_i, тогда получим

$$x_i = f_i(x_1', \ldots x_n', \alpha_1, \ldots \alpha_r),$$

где α — функции от a. Всякая r-членная группа содержит ∞^{r-1} бесконечно-малых преобразований.

Если группа

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_r)$$

содержит бесконечно-малое преобразование

$$\delta x_i = X_i(x_1, \ldots x_n)\,\delta t,$$

то имеют место уравнения

$$X_i(f_1, \ldots f_n) = \Psi_1(a_1, \ldots a_r)\frac{\partial f_i}{\partial a_1} + \ldots + \Psi_r(a_1, \ldots a_r)\frac{\partial f_i}{\partial a_r},$$

где функции Ψ_k не зависят от числа i.

Если $A_1(F), \ldots A_r(F)$ обозначают r независимых бесконечно-малых преобразований r-членной группы, то всякое выражение

$$A_i(A_k(F)) - A_k(A_i(F))$$

представляется как сумма $A_i(F)$, умноженных на постоянные:

$$A_1(A_2(F)) - A_2(A_1(F)) = C_1 A_1(F) + \ldots + C_2 A_2(F).$$

Если бесконечно-малое преобразование $\delta x_i = X_i(x_1, \ldots x_n)\delta t$ принадлежит одночленной группе и если $u_1, \ldots u_n$ — система интегралов системы

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt,$$

то n уравнений

$$u_1(x_1', \ldots x_n', t) = u_1(x_1, \ldots x_n, 0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n(x_1', \ldots x_n', t) = u_n(x_1, \ldots x_n, 0)$$

образуют форму нашей группы. Всякое преобразование r-членной группы принадлежит одночленной группе, и так как одночленные группы определяются бесконечно-малыми преобразованиями r-членной группы, то всякая r-членная группа вполне определяется своими бесконечно-малыми преобразованиями.

r независимых бесконечно-малых преобразований r-членной группы $A_1(F), \ldots A_r(F)$ всегда удовлетворяют уравнениям с постоянными коэффициентами

$$A_i(A_k(F)) - A_k(A_i(F)) = C_{ik1} A_1(F) + \ldots + C_{ikr} A_r(F),$$

и наоборот.

Всякое бесконечно-малое касательное преобразование выражается уравнениями формы

$$\delta x_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta t,\; \delta p_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}\delta t,$$

где H — произвольная функция от x и p, однородная и 1-го измерения относительно p.

Через одну функцию AF бесконечно-малое касательное преобразование определяется символом

$$AF = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial p_1}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial F}{\partial x_n} - \frac{\partial H}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}\right) \equiv (H, F).$$

Бесконечно-малые касательные преобразования $(H_1, F), \ldots (H_r, F)$ независимы, если не имеет места уравнение

$$C_1 H_1 + \ldots + C_r H_r = 0$$

с постоянными коэффициентами. Называя (H, F) „преобразованием H", можно доказать, что для образования r независимыми касательными бесконечно-малыми преобразованиями $H_1, \ldots H_r$ r-членной группы необходимо и достаточно, чтобы всякое (H_i, H_k) выражалось в виде суммы вида:

$$(H_i, H_k) = C_{ik1} H_1 + \ldots + C_{ikr} H_r + \text{const},$$

где

$$C_{ik1}, \ldots C_{ikr} = \text{const}.$$

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

235. $px = qy + q^2 + 2z.$ $\left[\text{Отв}: z = C_1 x^3 y + \frac{C_1^2 x^2}{4} + C_2 x^2\right]$

236. $pqy = xy.$ $[\text{О.}: (z - z_0)^2 = (x^2 - x_0^2)(y^2 - y_0^2)]$

237. $p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 2xy = 0.$ $[\text{О.}: 2z - C_2 = x^2 + C_1 x + y^2 + C_1 y +$

$$+ \frac{x - y}{2\sqrt{2}} \sqrt{2(x-y)^2 - C_1^2} - \frac{C_1^2}{2\sqrt{2}} \lg \left[\sqrt{2}(x-y) + \sqrt{2(x-y)^2 - C_1^2}\right]$$

238. $3px + qy + q^3 x^2 = 0.$ $\left[\text{О.}: p = -\frac{1}{3}[C_1^3 + C_1 y x^{-4/3}];\right.$

$$\left. q = C_1 x^{-1/3};\ z = C_1 x^{-1/3} y - \frac{1}{3} C_1^3 x + C_2\right]$$

239. $z^2[p^2 + q^2] = z^2 + 1.$ $[\text{О.}: C_1 x + C_2 y + \sqrt{(C_1^2 + C_2^2)(1 + z^2)} = 1]$

240. $qx - 2py = pqz.$ $[\text{О.}: z = \sqrt{C_1 + x^2} + \sqrt{C_2 - 2x_2^2}]$

241. $\frac{p_1^2}{x_1} + p_2 x_2 \left(\frac{p_1}{x_1} + p_3\right) + x_2^2 x_3 p_2^2 - x_4 p_4^2 = 0.$

$$\left[\text{О.}: z_n = -\frac{C_2}{2} x_1 + \frac{1}{12 C_3}(C_2^2 + 4C_3 x_1)^{3/2} + \right.$$

$$\left. + C_2 \lg x_2 + \frac{C_1 - C_3}{C_2} x_3 - \frac{C_2 x_3^2}{2} + 2\sqrt{C_1 x_4} + C_4.\right]$$

242. $\begin{cases} px + p^2 y + p^3 = z \\ q(x + q)^2 = (z - yq)^2. \end{cases}$ $[\text{О.}: z = ax + a^2 y + a^3;$

интеграл удовлетворяет также системе:

$$z = px + qy + pq;\ z = px + p^2 y + p^3.]$$

243. $(x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + p_3(p_1 - p_2) = 1.$ Проинтегрировать по 2-му способу Якоби.

$$[\text{О.}: (F, \Phi) \equiv x_3 p_2 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} - (x_2 x_3 + p_3)\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + p_1 x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} - (x_1 x_3 - p_3)\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} +$$

$$+ (x_2 p_1 + x_1 p_2)\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} - (p_1 - p_2)\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0;\ \Phi_1 \equiv (p_1 - p_2) - \frac{1}{2} x_3^2 = C_1;$$

$$(\Phi_1, \Phi) \equiv -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = 0;\ \ \Phi_2 \equiv \frac{1}{2} p_1^2 - \frac{1}{2} p_2^2 = C_2;\ (\Phi_1, \Phi_2) \equiv 0;$$

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3,$$

где p_1, p_2, p_3 найдем из

$$F = 0,\ \Phi_1 = C_1,\ \Phi_2 = C_2;$$

получим:

$$z = \frac{C_2}{2} \lg(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)\left(C_2 + \frac{1}{2} x_3^2\right) +$$

$$+ \sqrt{2/C_2} \operatorname{arctg} \frac{x_3}{\sqrt{2C_2}} - \frac{C_1}{2} \lg(2C_2 + x_3^2) + C_3.]$$

244. $\begin{cases} p_1 + \frac{(x_2 p_3 - x_4 p_4) x_4 p_2}{x_1 p_3} + \frac{(x_3 x_4 - x_2) p_2}{x_1} = 0 \\ p_2 - x_1 p_3 = 0. \end{cases}$

$$\left[\text{О.}: (F_1, F_2) = 0;\ \Phi_1 \equiv \frac{p_3}{x_4} = C_1;\ (F_1, F_2) = 0; (F_1, \Phi_1) = 0; (F_2, \Phi_1) = 0;\right.$$

$$\Psi_1 \equiv x_4^2 [p_4 - C_1(x_1 x_2 + x_3)] = C_2;$$

$$p_1 = C_1 x_2 x_4 + C_2;\ p_2 = C_1 x_1 x_4;\ p_3 = C_1 x_4;\ p_4 = C_1(x_1 x_2 + x_3) + \frac{C_2}{x_4^2};$$

$$\left. z = C_1 x_4 (x_1 x_2 + x_3) + C_2 \frac{(x_1 x_4 - 1)}{x_4} + C_3.\right]$$

245. $\begin{cases} p_1 p_3^2 - z^6 = 0 \\ 2p_2 x_2 - p_4 x_4 = 0. \end{cases}$ $\left[\text{О.}: \frac{C_1}{z} + C_2 x_2 x_4^2 + C_3 x_3 + \frac{C_1^3 x_1}{C_3^2} = 1.\right]$

ГЛАВА IX

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ 2-го ПОРЯДКА ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ.

Для интегрирования уравнений с частными производными 2-го порядка одной неизвестной функции двух независимых переменных так же, как и для интегрирования уравнений и систем уравнений 1-го порядка, существует классическая теория, изложить основы которой и сделана попытка в этой главе. В сжатой форме здесь изложены основные методы решения линейных и нелинейных уравнений 2-го порядка и представлены способы для решения линейных уравнений 2-го и высших порядков с постоянными коэффициентами. Следует основательно проработать вводный § 71, об интегралах и о способах интегрирования уравнений, уделить особенное внимание 2-й половине § 72, где речь идет об интегрировании линейных уравнений с постоянными коэффициентами, так как с этими уравнениями особенно часто приходится иметь дело при решении различных вопросов математической физики, усвоить как следует §§ 73 и 74, относящиеся к решению уравнений линейных и уравнений Монжа — Ампера, а также к способам интегрирования: Монжа — с одной стороны и Ампера — с другой. Нельзя оставить в стороне ни одного примера из тех, которые помещены в тексте. Желательно было бы провести до конца хотя $^1/_4$ задач из тех, которые помещены в конце главы. § 75 посвящен приложениям теории к рассмотрению чрезвычайно важных задач дифференциальной геометрии.

Детальному изучению уравнений, рассматриваемых во 2-й половине § 72, посвящена будет специальная глава, именно XII, где речь идет об уравнениях математической физики.

Наиболее трудны для усвоения будут последние 2 параграфа: 76 и 77. Из них последний состоит исключительно из результатов некоторых моих исследований. Надо приучиться к обозначениям этого параграфа и постепенно привыкнуть к разложению функционального определителя по известной теореме Лапласа, так как в противном случае будет трудна и даже непонятна вся следующая глава.

Литература:

В. Г. Имшенецкий.—Исследование методов интегрирования частных дифференциальных уравнений 2-го порядка при одной зависимой и двух независимых переменных (перевод Mansion'а на нем. яз. в Grünert's Archiv, Bd. 54, Berlin, 1892).

Н. Я. Сонин.—Об интегрировании уравнений с частными производными 2-го порядка (докторская диссертация; „Матем. сборник", т. VIII, 1874; перевод в Math. Annalen, Bd. 49, 1897).

Ц. К. Руссьян.—Метод интегрирования дифф. ур. с частн. производными 2-го порядка по 2 независимым переменным (Сообщ. Харьк. матем. о-ва, т. II, 1928; т. IV, 1930).

М. Куренський.—Основи теорії інтегрування рівнянь з частинними похідними 1-го та 2-го порядків при декільках невідомих функціях, I (Труди Прир.-Техн. В. Укр. Акад. Наук, Київ, 1931, разд. V).

— Про інтегрування диф. рівнянь... (Труди Фіз.-Мат. Від. Укр. Акад. Наук, т. V, 1927, розд. V, X).

— (Статьи в Atti (Rendiconti) d. Accad. dei Lincei, Roma, vol. X, 1929; vol. XIV, 1931).

Monge.—Mémoire... (Histoire de l'Acad. des Sc., Paris, 1784).

Ampère.—Mémoire... (Journal de l'Ec. Polytechnique, t. XI, 1820).

Boole.—(Статьи в Crelle's Journ., Bd. 61, 1863; Bulletin de l'Ac. de St. Petersb., t. IV, 1862).

— Treatise on dif. equations, suppl. vol., 1865.

De Morgan.—(Статья в Cambridge. Phil. Trans,, vol. IX, part. IV).

Bour.—(Статья в Journal de l'Ec. Polytechnique, t. XXII).

L. Natani.—Die höhere Analysis, Berlin, 1866.

G. Darboux.—Sur les équations aux dérivées partielles (Annales de l'Ec. Norm., 1870);

— Leçons sur la théorie générale des surfaces, Part. IV. 1896, Notes X, III (Cosserat); Part I, Lv. III, ch. I.

A. R. Forsyth.—Theory of differential equations, vol. VI, Cambridge, 1906, ch. XII—XIV, XVI—XVIII.

Hamburger.—(Статья в Crelle's Journal, Bd. 93, 1882; 2-ая половина статьи).

E. Goursat—Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées part. du second ordre, Paris, t. I, 1896; t. II, 1926.

S. Lie.—Gesamm. Abhandlungen, Bd. 3, Leipzig, 1922; Anmerkungen von. Fr. Engel, ss. 619—622.

N. Saltykow.—Sur l'intégrale complète des équations aux dérivées partielles du second ordre (Comptes rendus de l'Ac. des Sc., t. 195, 1932).

— Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre (Bulletin de l'Acad. de Belgique, 5 série., t. XVIII, 1932).

C. Orloff.—Intégration par différentiation d'un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre (Bulletin de l'Ac. de Belgique, 5 série, t. XIX, 1933).

§ 71. Об интегрировании и об интегралах уравнений с частными производными 2-го и высших порядков одной неизвестной функции.

В I томе собрания сочинений академика П. Л. Чебышева прикладное значение математических наук и связь теории с практикой в области математики характеризуются следующими словами: „Науки математические с самой глубокой древности обращали на себя особенное внимание; в настоящее время они получили еще более интереса по влиянию своему на искусства и промышленность. Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает,—сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных. Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы существенно новые для науки и, таким образом, вызывает на изыскание совершенно новых метод. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае наука находит себе верного руководителя в практике".

Эти слова наилучшим образом подтверждаются в теории интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными 2-го и высших порядков одной неизвестной функции, не говоря уже об уравнениях при многих неизвестных функциях. Здесь теория далеко отстает от требований практики. Задачи математической физики, дифференциальной геометрии, гидродинамики, гидравлики, аэродинамики и т. д. давно требуют от нас умения интегрировать такие дифференциальные уравнения, для которых мы не умеем находить не только полных и общих, но даже частных интегралов. Давно решен вопрос о существовании интегралов таких уравнений и систем уравнений с частными производными 1-го, 2-го и высших порядков одной, двух и больше неизвестных функций, для каких нет в математической литературе ни малейшего намека на то, как находить хотя бы частные интегралы. В эту именно сторону, принимая во внимание требования практики, и надлежит математикам, занимающимся дифференциальными уравнениями, обращать главное внимание; работа в области таких вопросов как, например, доказательство существования интегралов системы k уравнений l-го порядка с m неизвестными функциями n независимых переменных, после классических в области доказательства существования интеграла работ Коши, Ковалевской, Дарбу и ряда других ученых, а в особенности, в последнее время,—Рикье, не имеет в настоящее время особого интереса и практической ценности.

Как увидим далее, в этом параграфе, существуют расхождения не только в способах интегрирования хотя бы одного уравнения с частными производными 2-го порядка одной неизвестной функции, вида

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{1}$$

или

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial z^2},$$

но даже в определении самого интеграла уравнения порядка 2-го и выше; существуют расхождения и в формулировке положений о числе произвольных элементов общего интеграла и о форме вхождения их в интеграл. Существуют различные способы интегрирования линейного уравнения 2-го порядка; около 100 лет уже известен способ решения линейных уравнений с частными производными любого порядка с постоянными коэффициентами, известны способы решения линейных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами и уравнений немного более общего типа, чем линейные, так называемых уравнений Монжа—Ампера; существует классическая теория интегрирования линейных и нелинейных уравнений, обладающих одним или двумя *промежуточными интегралами*, т. е. уравнениями 1-го порядка вида

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, C\right) = 0$$

$$(C = \text{const});$$

имеется громадная литература в области интегрирования нелинейного уравнения (1) и способы интегрирования этого уравнения—способ Дарбу, Н. Н. Салтыкова, Ц. К. Руссьяна,—в связи с исследованиями Дарбу и с задачей Пфаффа,—но такой четкой теории

для нахождения полного интеграла уравнения (1), какую мы имеем, например, для нелинейного уравнения с частными производными 1-го порядка, в математической литературе мы не найдем.

Процесс интегрирования нелинейного уравнения (1) основывается на идее способа Дарбу—найти 2-е нелинейное уравнение 2-го порядка, совместимое с уравнением (1), т. е. иначе сказать — мы приходим к идее 2-го способа Якоби интегрирования нелинейных уравнений и систем уравнений 1-го порядка. Поэтому способ интегрирования Дарбу уравнения (1) можно было бы назвать способом Якоби — Дарбу. Однако есть существенная разница в результате применения одной и той же идеи к уравнению 1-го порядка и к уравнению 2-го порядка. В то время, как для уравнения 1-го порядка результат присоединения нового уравнения, находящегося в инволюции с уравнением заданным, приводит к интегрированию одного вспомогательного линейного уравнения с частными производными 1-го порядка одной неизвестной вспомогательной функции Ф, — для уравнения 2-го порядка присоединение нового уравнения, *находящегося в инволюции с заданным*, приводит к интегрированию системы 2 линейных уравнений 1-го порядка одной неизвестной вспомогательной функции Ф, которые могут быть и не совместимы между собою; тогда метод интегрирования Дарбу будет для заданного уравнения (1) не применим. К уравнениям, не поддающимся интегрированию по методу Дарбу, можно однако применять метод Н. Н. Салтыкова для разыскания полного интеграла, идея которого заключается в присоединении нового уравнения, образующего вместе с заданным *вполне интегрируемую* систему двух уравнений 2-го порядка; по отношению к ней система двух инволюционных уравнений Дарбу будет лишь частным случаем. В результате получаем одно только вспомогательное уравнение, но зато *2-го порядка*, и можем найти интеграл, хотя метод интегрирования Дарбу вовсе не применим, но зато *интеграл не общий, а лишь полный*. В разработке этого метода принимал участие сербский ученый К. Орлов.

В виду важности вопроса интегрирования нелинейного уравнения (1), мы уделим ему в дальнейшем достаточное внимание, останавливаясь на подробном рассмотрении метода интегрирования Дарбу, отступая однако от изложения его самим Дарбу и современными французскими учеными; в этом изложении центр внимания остается на геометрической стороне вопроса и на теории характеристик, развиваемой со времени Коши. Такой путь в методе интегрирования уравнения (1) имеет слабые перспективы для обобщений на область уравнений с частными производными 1-го и 2-го порядков при двух и больше неизвестных функциях, хотя бы уже в силу туманности образов в пространстве 4 измерений, с которым пришлось бы иметь дело в первую очередь, если бы мы склонились в сторону метода характеристик, имея в виду преимущества наглядности геометрического пути и реальности геометрических образов. Вот почему в дальнейшем мы будем обращать большее внимание на способ Дарбу в изложении Форзайса, в VI томе его трактата о дифференциальных уравнениях: читатель сможет установить параллельность и общность способа Дарбу со способом Якоби для уравнений 1-го порядка; в дальнейшем изложении теория характеристик и система обыкновенных уравнений, связанная со способом интегрирования Дарбу и имеющая такую форму, что задача интегрирования ее не всегда возможна, предпочитается системе двух линейных уравнений с частными производными 1-го порядка одной вспомогательной функции Φ, позволяющая, как увидим далее, строить различные комбинации систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в соответствии с условиями каждой отдельной задачи интегрирования уравнения 2-го порядка.

Переходим к рассмотрению интеграла уравнений с частными производными 2-го порядка и выше. В этом параграфе и в главе I было уже упомянуто о несогласовании и о противоречии в различных его определениях. Обратимся к деталям.

По определению Ампера, общим интегралом уравнения 2-го порядка (1) будет такой интеграл, что, в результате его дифференцирования сколько угодно раз и исключения произвольных элементов из всех таких уравнений, мы придем к дифференциальным уравнениям любого порядка, не содержащим произвольных элементов и выражающимся либо посредством заданного дифференциального уравнения, либо посредством тех уравнений, которые из него получаются дифференцированием.

По определению Дарбу, общий интеграл будет тогда, когда произвольные элементы можно определить так, чтобы он стал *интегралом Коши*, или иначе, — чтобы функция z и ее производные 1-го порядка удовлетворяли бы заранее заданным начальным условиям: функция z должна раскладываться в степенный ряд разностей $x-a$, $y-b$, сходящийся в области изменения x-са и y-ка.

$$|x-a|\leqslant\rho;\ |y-b|\leqslant\rho,$$

и для $x=a$ функция z обращается в заранее заданную функцию $\varphi(y)$, а производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ — в заранее заданную функцию $\psi(y)$, причем $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ будут произвольно заданными, но раскладывающимися в ряды Тейлора функциями; ряды должны быть сходящимися внутри области b. При этом, если положим

$$\varphi(b)=c,\ \psi(b)=\alpha;\ \varphi'(b)=\beta,\ \psi'(b)=\gamma;\ \varphi''(b)=\delta,$$

то уравнение

$$F(a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ m,\ \gamma,\ \delta)=0$$

должно иметь, по крайней мере, один простой корень m; при соблюдении этого условия каждый простой корень m определяет интеграл z, — этот интеграл будет единственный. Теорема Коши, определяющая единственный интеграл z, будет не применима в том случае, когда

$$F=0;\ \frac{\partial F}{\partial r}=0;\ \frac{\partial F}{\partial s}=0;\ \frac{\partial F}{\partial t}=0.$$

Функция z, удовлетворяющая всем этим уравнениям, называется *особенным интегралом* уравнения 2-го порядка.

Бывают интегралы, общие в смысле Ампера, однако такие, которые не удовлетворяют условиям Дарбу и Коши. Ограничения Коши, чтобы интеграл был регулярной функцией в некоторой области, не существенны для интегралов в смысле Ампера.

Интеграл конечный, не содержащий ни одной производной, называется интегралом *первоначальным*. Если же интеграл уравнения

2-го порядка содержит хоть одну производную 1-го порядка, то он называется *промежуточным интегралом*. Промёжуточный интеграл не всегда можно получить из уравнения порядка выше 1-го, — говорят, что уравнение порядка 2-го и выше не всегда обладает промежуточными интегралами. *Частный интеграл* — это специальный случай общего в смысле Ампера; он удовлетворяет не только данному дифференциальному уравнению, но и другим дифференциальным уравнениям, которых нельзя получить из заданного, хотя сам частный интеграл получается из общего интеграла. Со времени Лагранжа рассматривают еще и *полные интегралы* или *полные первоначальные*, содержащие произвольные постоянные, а не произвольные функции; такие интегралы являются частными интегралами тех, которые являются общими в смысле Ампера. *Особенный интеграл*, как мы уже отмечали, — это функция z, удовлетворяющая сразу четырем уравнениям:

$$F=0,\ \frac{\partial F}{\partial r}=0,\ \frac{\partial F}{\partial s}=0,\ \frac{\partial F}{\partial t}=0.$$

Бывают еще *специальные интегралы*, не укладывающиеся в рамках определений предшествующих типов интегралов. *Общие промежуточные интегралы* уравнения 2-го порядка содержат одну произвольную функцию одного аргумента, а *полные промежуточные интегралы* содержат две произвольные постоянные C_1, C_2.

Если найден будет полный интеграл, содержащий вообще 5 произвольных постоянных $C_1, \ldots C_5$, то это не значит, что известен будет и полный промежуточный интеграл: посредством двух уравнений, полученных дифференцированием по x и y, и еще 3-го уравнения, — полного интеграла, вообще можно исключить не больше двух постоянных; останется 3 постоянных, а в полном промежуточном их должно быть только 2. Выходит, что промежуточные интегралы мы сможем получить только для некоторых специальных видов дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Можно встретиться с противоречивыми мнениями *относительно числа произвольных функций и относительно числа аргументов в них для общего интеграла уравнений 2-го порядка и выше.*

Так, теория, изложенная в VI томе трактата Форзайса о дифференциальных уравнениях, приводит к таким заключениям. Число независимых произвольных функций в общем интеграле дифференциального уравнения любого порядка, когда такой интеграл будет конечной формы, равно порядку уравнения. Точно также обычно, хотя и не всегда, число аргументов в каждой такой произвольной функции на единицу ниже числа независимых переменных. Для уравнения 2-го порядка при двух независимых переменных получаются в общем интеграле две произвольные функции от одного аргумента каждая; доказательство не обнаруживает, будут ли аргументы различны или же одинаковы. Для некоторых уравнений с частными производными (особых уравнений с интегралами, имеющими так называемые частные квадратуры) эти выводы не применимы. Существуют, например, некоторые линейные уравнения 2-го порядка, обладающие интегралами с одной только произвольной функцией.

В превосходной вообще книге по математическому анализу Натани, изданной в Берлине в 1866 году, в отделе о дифференциальных уравнениях с частными производными, можно прочесть следующее.

„Частное дифференциальное уравнение p-го порядка с n независимыми переменными имеет полный интеграл с

$$C^1{}_n+C^2{}_{n+1}+\ldots+C^p{}_{n+p-1}$$

произвольными постоянными. Интеграл частного дифференциального уравнения p-го порядка с n независимыми переменными содержит p произвольных функций с $(n-1)$-й переменной каждая. Это положение не годится для дифференциальных уравнений, содержащих высшую производную не по одной только переменной: в таком случае делается преобразование уравнения заменой независимых переменных и сравнение с общим интегралом нового уравнения.

Например, уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f\left(x,\ y,\ z,\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

рассматриваемое непосредственно, дает интеграл, содержащий одну произвольную функцию с одной переменной независимой и еще бесконечно много произвольных постоянных, а заменой переменных $y=xy_1$ сводится к уравнению, имеющему интеграл с двумя произвольными функциями. Далее, уравнение

$$F\left(x,\ y,\ z,\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=0,$$

решая его относительно $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, сводим к новому, обладающему двумя произвольными функциями в интеграле, а решая относительно $\frac{\partial z}{\partial y}$, переписываем в форме уравнения с одной произвольной функцией в интеграле". „Подобным толкованиям подчиняются дифференциальные уравнения произвольно высокого порядка".

В то же время, по диссертации В. Г. Имшенецкого, количество произвольных функций равно порядку дифференциального уравнения, а полный интеграл уравнения m-го порядка с двумя независимыми переменными должен содержать

$$\frac{1}{2}(m+1)\ (m+2)-1$$

произвольных постоянных.

§ 72. Интегрирование линейных уравнений с частными производными любого порядка, при всяком числе независимых переменных, с постоянными коэффициентами. Интегрирование уравнений, указанных в заголовке этого параграфа, известно давно: *способ нахождения интеграла Коши указан* давно самим *Коши* и может быть найден в любом, даже кратком, но серьезном курсе математического анализа, например, в курсе акад. Д. А. Граве „Краткий курс математического анализа", 1924 (стр. 1—368). Остановимся вкратце на этом способе, имея в виду более детальное его рассмотрение в главе XII, при изучении уравнений математической физики.

Способ интегрирования основан на применении *формулы Фурье* для многих переменных, которая для одной переменной x, двух

переменных x, y и n переменных x, $y,\ldots z$ имеет соответственно такой вид:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,e^{i\alpha(\lambda-x)}d\alpha d\lambda$$

$$f(x,\ y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda,\ \mu)\,e^{i[\alpha(\lambda-x)+\beta(\mu-y)]}\,d\alpha d\lambda d\beta d\mu$$

$$f(x,\ y,\ldots z)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{(2n)} f(\lambda,\ \mu,\ldots\nu)\,e^{i[\alpha(\lambda-x)+\beta(\mu-y)+\ldots+\gamma(\nu-z)]}\,d\alpha d\lambda d\beta d\mu\ldots d\gamma d\nu.$$

Для интегрирования *однородного линейного уравнения p-го* порядка с $(n+1)$-й независимой переменной $x,\ y,\ldots z,\ t$, вида

$$\sum_{i,k,\ldots l,m} A\ \frac{\partial^p u}{\partial x^i\partial y^k\ldots\partial z^l dt^m}=0,$$

выделим особо $(n+1)$-ю переменную t, обозначающую обычно время в уравнениях математической физики, где наиболее часто встречаются рассматриваемые типы уравнений и применяется этот способ их интегрирования.

Обозначая через v_j линейную функцию из частных производных с постоянными коэффициентами $a,\ b,\ldots$, взятых по всем переменным, кроме t, вида

$$v_j=a\,\frac{\partial^{\alpha_0}u}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\ldots\partial z^{\alpha_n}}+b\,\frac{\partial^{\beta_0}u}{\partial x^{\beta_1}\partial y^{\beta_2}\ldots\partial z^{\beta_n}}+\ldots,$$

— заданное уравнение можно переписать так:

$$\frac{\partial^m v}{\partial t^m}+\frac{\partial^{m-1}v_1}{\partial t^{m-1}}+\frac{\partial^{m-2}v_2}{\partial t^{m-2}}+\ldots+\frac{\partial v_{m-1}}{\partial t}+v_m=0. \qquad (2)$$

Посредством формулы Фурье можно найти такой интеграл заданного уравнения, чтобы для $t=0$ искомая функция u и ее производные

$$\frac{\partial u}{\partial t},\ \ldots\ \frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}$$

обращались в заранее заданные функции

$$f_0(x,\ y,\ldots z),\ f_1(x,\ y,\ldots z),\ldots f_{m-1}(x,\ y,\ldots z)$$

от остальных переменных $x,\ y,\ldots z$.

Обозначим

$$w=e^{i[\alpha(\xi-x)+\beta(\eta-y)+\ldots+\gamma(\zeta-z)]}d\alpha d\xi d\beta d\eta\ldots d\gamma d\zeta$$

и, считая $T, T_1, \ldots T_{m-1}$ функциями от переменной t и от параметров $\alpha, \beta, \ldots \gamma$, будем искать интеграл уравнения в такой форме:

$$u = \frac{1}{(2\pi)^n}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} T\cdot f_0(\xi,\ \eta, \ldots \zeta)\cdot w + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} T_1\cdot f_1(\xi,\ \eta, \ldots \zeta)\cdot w + \right.$$
$$\left. + \ldots + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} T_{m-1} f_{m-1}(\xi, \eta, \ldots \zeta)\cdot w\right].$$

Имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[A\frac{d^m T}{dt^m} + A_1\frac{d^{m-1}T}{dt^{m-1}} + \ldots + A_{m-1}\frac{dT}{dt} + A_m T\right] f\cdot w +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[A\frac{d^m T_{m-1}}{dt^m} + A_1\frac{d^{m-1}T_{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + A_{m-1}\frac{dT_{m-1}}{dt} + A_m T_{m-1}\right] f_{m-1}\cdot w = 0,$$

где

$$A_j = i^{\alpha_0} a\alpha^{\alpha_1}\beta^{\alpha_2}\ldots\gamma^{\alpha_n} + i^{\beta_0} b\alpha^{\beta_1}\beta^{\beta_2}\ldots\gamma^{\beta_n} + \ldots,$$

причем

$$i = \sqrt{-1},\ \alpha_0,\ \alpha_1, \ldots \alpha_n;\ \beta_0,\ \beta_1, \ldots \beta_n \ldots$$

обозначают целые числа такие, что

$$\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$
$$\beta_0 = \beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Таким образом $T, T_1, \ldots T_{m-1}$ будут обозначать частные интегралы обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$A\frac{d^m\tau}{dt^m} + A_1\frac{d^{m-1}\tau}{dt^{m-1}} + \ldots + A_{m-1}\frac{d\tau}{dt} + A_m\tau = 0,$$

общий интеграл которого напишется так:

$$\tau = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \ldots C_m e^{s_m t},$$

где $s_1, \ldots s_m$ — корни соответствующего характеристического уравнения.

Постоянные $C_1, \ldots C_m$ определяют обычно из условий, чтобы для $t = 0$ было:

$$\tau = 0, \frac{d\tau}{dt} = 0; \ldots \frac{d^{j-1}\tau}{dt^{j-1}} = 0,\ \frac{d^j\tau}{dt^j} = 1,\ \frac{d^{j+1}\tau}{dt^{j+1}} = 0, \ldots \frac{d^{m-1}\tau}{dt^{m-1}} = 0,$$

т. е. из уравнений

$$C_1 + \ldots + C_m = 0$$
$$C_1 s_1 + \ldots + C_m s_m = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_1 s_1^{j-1} + \ldots + C_m s_m^{j-1} = 0$$
$$C_1 s_1^{j} + \ldots + C_m s_m^{j} = 1$$
$$C_1 s_1^{j+1} + \ldots + C_m s_m^{j+1} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_1 s_1^{m-1} + \ldots + C_m s_m^{m-1} = 0.$$

Определивши таким путем $C_1, \ldots C_m$, получим

$$T_j = \tau(s_1, \ldots s_m,\ t).$$

Для *линейного неоднородного уравнения*

$$\frac{\partial^m V}{\partial t^m} + \frac{\partial^{m-1} V_1}{\partial t^{m-1}} + \ldots + \frac{\partial V_{m-1}}{\partial t} + V_m = F(x,\ y, \ldots z,\ t)$$

общее решение V найдется тогда, когда мы будем иметь общее решение v однородного уравнения (2) и частное решение V_1 неоднородного уравнения, причем

$$V = v + V_1.$$

Частный интеграл V_1, по способу Коши, находится по формуле:

$$V_1 = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{M}F(\tau, \xi, \eta, \ldots \zeta)e^{i[\alpha(\xi - x) + \ldots + \gamma(\zeta - z) + \delta(\tau - t)]}d\alpha d\xi\ldots d\gamma d\zeta d\delta d\tau,$$

где M — множитель, получающийся под знаком $(2n + 2)$-кратного интеграла в результате подстановки V_1 в левую часть неоднородного уравнения.

Для нахождения общего интеграла[1] *линейного уравнения с переменными коэффициентами, при двух независимых переменных x, y,* вида

$$A_0\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots + A_n\frac{\partial^n z}{\partial y^n} + B_0\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} +$$
$$+ \ldots + C\frac{\partial z}{\partial x} + D\frac{\partial z}{\partial y} + Ez = F(x,\ y),$$

как легко проверить, справедливы будут правила, аналогичные правилам интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений: *интегрирование неоднородного уравнения сводится к интегрированию однородного уравнения и к нахождению одного частного интеграла уравнения неоднородного; если $z_1(x, y), \ldots z_m(x, y)$ будут частные интегралы однородного уравнения, то и $C_1 z_1 + \ldots + C_m z_m$,* где $C_1, \ldots C_m$ — *произвольные постоянные, также будет интегралом.*

Интеграл с произвольными функциями однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, вида

$$a_0\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + a_1\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots + a_n\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0,$$

ищут в форме

$$z = \varphi(y + mx),$$

где φ — произвольная функция и m — произвольная постоянная. Подстановка z в дифференциальное уравнение, при обозначении

$$u = y + mx,$$

дает:

$$\frac{d^n\varphi}{du^n}\cdot(A_0m^n + A_1m^{n-1} + \ldots + A_{n-1}m + A_n) = 0,$$

что приводит к *характеристическому уравнению* для определения m:

$$A_0m^n + A_1m^{n-1} + \ldots + A_{n-1}m + A_n = 0.$$

Для всякого корня m_i имеем частный интеграл $z_i = \varphi_i(y + m_ix)$, а для другого корня m_k — частный интеграл $z_k = \varphi_k(y + m_kx)$ и также интеграл

$$z_{ik} = \varphi_i(y + m_ix) + \varphi_k(y + m_kx).$$

Для уравнения 2-го порядка, если оба корня характеристического уравнения будут различны и действительны, то общий интеграл будет:

$$z = \varphi(y + m_1x) + \psi(y + m_2x),$$

где φ, ψ — произвольные функции. *Если действительные корни равны*, $m_1 = m_2$, то общий интеграл напишется:

$$z = \varphi(y + m_1x) + x\psi(y + m_1x).$$

Если получим комплексные корни,

$$m_1 = \alpha + i\beta,\ m_2 = \alpha - i\beta,$$

тогда, полагая

$$y + \alpha x = u;\ \beta x = v;\ z = \varphi(u + iv) + \psi(u - iv),$$

можно записать общий интеграл посредством произвольных функций действительных переменных, так как обозначения

$$\Phi = \varphi + \psi;\ i\Psi = \varphi - \psi;$$

дают:

$$\varphi = \frac{1}{2}[\Phi + i\Psi];\ \psi = \frac{1}{2}[\Phi - i\Psi]$$

$$z = \varphi(u + iv) + \psi(u - iv) =$$

$$= \frac{1}{2}[\Phi(u + iv) + \Phi(u - iv)] + \frac{i}{2}[\Psi(u + iv) - \Psi(u - iv)],$$

что приведет в правой части к функциям действительных переменных u, v.

Примеры:

1) $$r - a^2t = 0$$

$$m^2 - a^2 = 0;\ m_1 = a,\ m_2 = -a;\ z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax).$$

2) $$r - 6s + 5t = 0;$$

$$m^2 - 6m + 5 = 0;\ m_1 = 1,\ m_2 = 5;\ z = \varphi(y + x) + \psi(y + 5x).$$

3) $$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - 6\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y} + 12\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2} - 8\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3} = 0;$$

$$m^4 - 6m^3 + 12m^2 - 8m = 0;\ m(m-2)^3 = 0;\ m_1 = 0;\ m_2 = m_3 = m_4 = 2;$$

$$z = \varphi(y) + \psi(y + 2x) + x\chi(y + 2x) + x^2\omega(y + 2x).$$

4) $$r + a^2t = 0;$$

$$m^2 + a^2 = 0;\ m_1 = ia,\ m_2 = -ia;\ \alpha = 0;\ \beta = a$$

$$z = \varphi(y + iax) + \psi(y - iax);$$

$$z = \frac{1}{2}[\Phi(y + iax) + \Phi(y - iax)] + \frac{i}{2}[\Psi(y + iax) - \Psi(y - iax)];$$

вместо Φ можно взять какую угодно функцию, например $\sin(y + iax)$, тогда $\Phi(y - iax)$ будет $\sin(y + iax)$; вместо Ψ можно взять, например, $\cos(y + iax)$, тогда:

$$z = \frac{1}{2}[\sin(y + iax) + \sin(y - iax)] + \frac{i}{2}[\cos(y + iax) - \cos(y - iax)] =$$

$$= \sin y(\cos iax - i\sin iax) = e^{ax}\sin y.$$

§ 73. Линейные уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами. При обозначениях § 71 для частных производных 1-го и 2-го порядков, *линейное уравнение 2-го порядка* записывают так:

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = U,$$

где $R, S, \ldots U$ — функции независимых переменных x и y. Найдя частный интеграл $\zeta(x, y)$ этого *неоднородного* линейного уравнения, посредством подстановки

$$z = z_1 + \zeta,$$

как нетрудно убедиться, сведем его к *однородному* уравнению вида

$$Rr_1 + Ss_1 + Tt_1 + Pp_1 + Qq_1 + Zz_1 = 0,$$

где

$$p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x},\ q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y},\ r_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2},\ s_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y},\ t_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}.$$

Возьмем далее вместо переменных x, y новые независимые переменные u, v. Тогда, как это нетрудно доказать, если *квадратное уравнение*

$$R\lambda^2 + S\lambda + T = 0$$

имеет разные корни, наше однородное уравнение можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + a\frac{\partial z}{\partial u} + b\frac{\partial z}{\partial v} + cz = 0, \qquad (3)$$

где a, b, c — функции независимых переменных u, v и где опущен значек 1 при z_1.

Если *корни* λ_1, λ_2 *нашего квадратного уравнения будут равны*, тогда уравнение сводится к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial v} + cz = 0, \qquad (4)$$

где положено $u=x$, или к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a\frac{\partial z}{\partial u}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0,$$

если положим $v=y$.

Если уравнение (3) обладает общим интегралом конечного вида с 2-мя произвольными функциями, то одна из них будет произвольной функцией $U(u)$, только от одного аргумента u, а другая, $V(v)$, только от одного аргумента v. Уравнение типа (4), при $b=0$, может обладать общим интегралом конечного вида с одной произвольной функцией $V(v)$ от одного только v.

Если *корни уравнения*

$$R\lambda^2+S\lambda+T=0$$

будут комплексные, т. е. если

$$S^2-4RT<0,$$

тогда преобразованное уравнение, при обозначении независимых переменных u и v снова через x и y, принимает вид:

$$r+t+lp+mq+nz=0;$$

это—линейное уравнение так называемого *эллиптического вида*. Если корни различны и действительны, то при старых обозначениях для независимых переменных, x и y, приходим к *гиперболическому виду*

$$s+ap+bq+cz=0, \tag{5}$$

а если корни — действительные и равные, то имеем случай *параболического вида*

$$r+ap+bq+cz=0.$$

От эллиптического к гиперболическому легко перейти посредством преобразования

$$x+iy=\xi,\ x-iy=\eta.$$

Гиперболическое уравнение (5) *не меняет своей формы после так называемых Лапласовых преобразований* вида

$$z=z_1\lambda(x,\ y);$$

это преобразование приводит уравнение (5) к такой форме:

$$s_1+a_1p_1+b_1q_1+c_1z_1=0,$$

где

$$a_1=a+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y};\quad b_1=b+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial y}{\partial x};\quad c_1=c+\frac{a}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{b}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y},$$

так что будет:

$$c_1-a_1b_1=\frac{\partial^2(lg\lambda)}{\partial x\partial y}+c-ab$$

и еще:

$$\frac{\partial a_1}{\partial x}+a_1b_1-c_1=\frac{\partial a}{\partial x}+ab-c\equiv h$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial y}+a_1b_1-c_1=\frac{\partial b}{\partial y}+ab-c\equiv k.$$

Произведя преобразование

$$x=\varphi(x_1),\ y=\psi(y_1),$$

получим:

$$\frac{h_1}{h}=\varphi'(x_1)\psi'(y_1)=\frac{k_1}{k},$$

а после преобразования

$$x=\psi(y_1),\ y=\varphi(x_1)$$

найдем

$$\frac{h_1}{k}=\frac{k_1}{k}.$$

Величины h и k называются *инвариантами Лапласовых преобразований.*

Если $h=0$, то, обозначая через $X(x)$ и $Y(y)$ произвольные функции x-са и y-ка, получим:

$$ze^{\int ady}=X+\int Ye^{\int(ady-bx)}dy.$$

Если $k=0$, то

$$ze^{\int bdx}=Y_1+\int X_1e^{\int(bdx-ady)}dx.$$

Если $h=k$, то дифференциальное уравнение сводится к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\lambda(x,\ y)\cdot z;$$

интеграл этого уравнения связан с результатами исследований Мутарда и других ученых.

Эти исследования относятся также к уравнениям более общего вида

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=C(x,\ y,\ z). \tag{6}$$

В частности, уравнение этого типа, формы

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^z,$$

называется *уравнением Лиувиля* и обладает таким общим интегралом:

$$e^z=\frac{2X(x)\,Y(y)}{[X(x)+Y(y)]^2},$$

где X и Y — произвольные функции.

Второй частный случай уравнения (6) представляет важное для практических приложений уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\sin z, \tag{7}$$

которое играет большую роль, например, *в задаче П. Л. Чебышева об одевании шаровой или другой поверхности нитяными тканями*; эта задача может иметь применение прежде всего в аэронавтике. Ни общий, ни полный интегралы этого уравнения не известны. Вследствие же большого практического значения уравнения (7), важно иметь хотя бы частные его интегралы.

Для уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin z$$

акад. Д. А. Граве несколько лет тому назад нашел частный интеграл вида

$$z = \pi - 4 \operatorname{arctg} e^{\frac{1}{\sqrt{C_1 C_2}}(C_1 x + C_2 y + C_3)}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а для уравнения более общего вида, чем (7):

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = a \sin (b\zeta + c),$$

которое подстановкой $b\zeta + c = z$ сводится к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ab \sin z,$$

проф. Н. М. Михальский нашел 2 года тому назад частный интеграл посредством эллиптического интеграла

$$\mathrm{I} = \int \frac{dv}{\sqrt{(v+1)(v-1)(v-C_3)}};$$

этот частный интеграл выражается в эллиптических функциях и будет:

$$z = -\frac{C}{b} + \frac{1}{b} \arccos \left\{ \frac{1+k^2}{2k} - \frac{1-k^2}{2k} \cdot \frac{1 - k\, Sn \left[-\left(\frac{ab}{kC_1C_2}\right)^{\frac{1}{2}} (C_1 x + C_2 y + C_4), k \right]}{1 + k\, Sn \left[-\left(\frac{ab}{kC_1C_2}\right)^{\frac{1}{2}} (C_1 x + C_2 y + C_4), k \right]} \right\},$$

если положить:

$$C_3 > 1;\ k = C_3 - \sqrt{C_3^2 - 1}\ (0 < k < 1);$$

$$z = -\frac{C}{b} + \frac{1}{b} \arccos \left\{ 1 + 2\frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1 - k\, Sn \left[\frac{-2}{k+1}\left(\frac{ab}{C_1C_2}\right)^{\frac{1}{2}} (C_1 x + C_2 y + C_4), k \right]}{1 + k\, Sn \left[\frac{-2}{k+1}\left(\frac{ab}{C_1C_2}\right)^{\frac{1}{2}} (C_1 x + C_2 y + C_4), k \right]} \right\},$$

если положить:

$$-1 < C_3 < +1;\ k = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 - C_3}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 - C_3}}\ (0 < k < 1);$$

$$z = -\frac{C}{b} + \frac{1}{b} \arccos \left\{ 1 - 2\frac{1+k}{1-k} \cdot \frac{1 - k\, Sn \left[-\frac{2}{1-k}\left(\frac{ab}{C_1C_2}\right)^{\frac{1}{2}} (C_1 x + C_2 y + C_4), k \right]}{1 + k\, Sn \left[-\frac{2}{1-k}\left(\frac{ab}{C_1C_2}\right)^{\frac{1}{2}} (C_1 x + C_2 y + C_4), k \right]} \right\},$$

если положить

$$-\infty < C_3 < -1;\ k = \frac{\sqrt{1 - C_3} - \sqrt{2}}{\sqrt{1 - C_3} + \sqrt{2}}\ (0 < k < 1);$$

Можно написать частный интеграл в элементарных функциях:

$$z = -\frac{C}{b} + \frac{4}{b} \operatorname{arc\,tg} e^{\left(\frac{ab}{C_1 C_2}\right)^{1/2} (C_1 x + C_2 y + C_4)},\ \text{для } C_3 = +1$$

$$z = -\frac{C}{b} + \frac{1}{b} \left[\pi + 4 \operatorname{arc\,tg} e^{\left(\frac{ab}{C_1 C_2}\right)^{1/2} (C_1 x + C_2 y + C_4)} \right],\ \text{для } C_3 = -1.$$

Последний вид соответствует частному интегралу Д. А. Граве.

Отметим в заключение, что преобразования Лапласа, относящиеся к уравнению (5), которое, помимо названия гиперболического уравнения, носит еще название *уравнения Лапласа*, применяются несколько раз, чтобы, в конце концов, если это возможно, притти к уравнению, интегрирующемуся в конечном виде.

Примеры.

1)

$$s = xy$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = xy;\quad p = \frac{xy^2}{2} + X'(x)$$

$$z = \frac{x^2 y^2}{4} + X(x) + Y(y).$$

2)

$$r = xy$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = xy;\quad p = \frac{x^2 y}{2} + Y_1(y)$$

$$z = \frac{x^3 y}{6} + xY_1(y) + Y_2(y)$$

3)

$$s = a\frac{x}{y} + b$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = a\frac{x}{y} + b;\ p = ax \lg y + by + X'(x)$$

$$z = \frac{ax^2}{2} \lg y + bxy + X(x) + Y(y).$$

4)

$$p + r + s = a$$

$$z + p + q = ax + Y(y),\ \text{или: } p + q = ax + Y(y) - z.$$

Приходим к интегрированию линейного уравнения 1-го порядка;

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{ax + Y(y) - z};\ dx = dy;\ \frac{dz}{dy} = ax + Y(y) - z$$

$$u_1 \equiv x - y = C_1;\ \frac{dz}{dy} = aC_1 + ay + Y(y) - z;\ \frac{dz}{dy} + z = Y(y) + ay + aC_1;$$

интегрирование последнего линейного обыкновенного уравнения дает:

$$u_2 \equiv z \cdot e^y - \{aC_1 e^y + \int e^y [ay + Y(y)]\, dy\} = C_2;\ C_2 = \varphi(C_1) = \varphi(x - y);$$

$$e^y (z - ax + ay) - \int e^y [ay + Y(y)]\, dy = \varphi(x - y).$$

Так как $Y(y)$ — произвольная функция от y, то

$$e^y ay - \int e^y [ay + Y(y)]\, dy$$

тоже есть произвольная функция от y, $\omega(y)$, и:

$$e^y(z - ax) + \omega(y) = \varphi(x - y),$$

или:

$$z = ax + \psi(y) + e^{-y}\varphi(x - y).$$

§ 74. Уравнения Монжа-Ампера и способы интегрирования Монжа и Ампера. Уравнения вида

$$Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V, \tag{8}$$

где R, S, T, U, V — *функции от* x, y, z, p, q, называются *уравнениями Монжа-Ампера*. Основными способами интегрирования этих уравнений являются способ Монжа и способ Ампера.

Способ интегрирования Монжа состоит в том, что для уравнений этого типа ищут промежуточный интеграл, который должен содержать производные 1-го порядка p и q и одну произвольную функцию, и каковым уравнение вообще может не обладать. Вид этого интеграла будет:

$$v = \varphi(u),$$

где u и v — это определенные функции от x, y, z, p, q, а φ — произвольная функция. Способ интегрирования Монжа, для возможности применения которого предполагается, что заданное уравнение действительно обладает промежуточным интегралом, полностью заключается в способе интегрирования Ампера; для возможности применения этого последнего нет необходимости в условии, чтобы заданное уравнение обязательно имело промежуточный интеграл.

Для уравнений рассматриваемого типа можно применять еще способ Буля (де-Моргана-Бура), однако системы соответствующих уравнений в полных дифференциалах, — и в способе Буля, и в способе Монжа, — равносильны друг другу. Этот способ Буля также предполагает существование промежуточных интегралов для заданного уравнения 2-го порядка и содержится в способе интегрирования Дарбу, пригодном также для нелинейных уравнений 2-го порядка

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

и свободном от ограничительного условия о существовании промежуточных интегралов.

Если $U = 0$, то из уравнения

$$Rr + Ss + Tt = V, \tag{9}$$

по способу Монжа, принимая во внимание зависимости

$$dp = rdx + sdy$$

$$dq = sdx + tdy, \tag{10}$$

исключим r и t. Получим

$$R(dp - sdy)dy + Ss\,dx\,dy + T(dq - s\,dx)dx = V dx\,dy,$$

или

$$R\,dp\,dy + Tdxdq - Vdxdy = s(Rdy^2 - S\,dx\,dy + Tdx^2).$$

Зависимость между x, y, z, p, q, обращающая в нуль левую часть и множитель в скобках правой части уравнения, будет, очевидно, удовлетворять и уравнению (9). Три уравнения

$$R\,dp\,dy + Tdx\,dq - Vdx\,dy = 0$$

$$Rdy^2 - S\,dx\,dy + Tdx^2 = 0$$

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{11}$$

могут дать одну или две зависимости между x, y, z, p, q, называемые промежуточными интегралами, которые, после интегрирования, дадут общий интеграл заданного уравнения.

Если уравнение

$$R\lambda^2 - S\lambda + T = 0$$

имеет 2 *различные корня* λ_1, λ_2, то 2-е уравнение системы распадается на два:

$$dy - \lambda_1\,dx = 0;\ dy - \lambda_2 dx = 0.$$

Принимая во внимание 1-й корень λ_1, т. е. пользуясь уравнением

$$dy - \lambda_1\,dx = 0,$$

с помощью 1-го уравнения (11), получим интегралы

$$u_1 = C_1,\ v_1 = C_2;\ u_1 = \varphi(v_1),$$

где φ — произвольная функция и $u_1 = \varphi(v_1)$ — промежуточный интеграл. Другой корень λ_2, т. е. уравнение

$$dy - \lambda_2 dx = 0,$$

даст

$$u_2 = C_1;\ v_2 = C'';\ u_2 = \psi(v_2).$$

Решивши уравнения

$$u_1 = \varphi(v_1);\ u_2 = \psi(v_2)$$

относительно p и q, получим квадратурой z на основании 3-го уравнения (11):

$$dz = pdx + qdy.$$

Если *оба корня равны*, $\lambda_1 = \lambda_2$, т. е. при условии

$$S^2 - 4RT = 0,$$

надо интегрировать уравнение с частными производными 1-го порядка:

$$u(x, y, z, p, q) = \varphi[v(x, y, z, p, q)].$$

Примеры.

1)

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = 0$$

$$x^2 dy^2 - 2xy\,dxdy + y^2 dx^2 = 0$$

$$x^2 dpdy + y^2 dqdx = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{y}{x};\ \frac{y}{x} = C_1;\ x^2 C_1 dx\,(dp + C_1 dq) = 0;\ p + C_1 q = C_2.$$

Подставляя

$$C_1 = \frac{y}{x} \text{ и полагая } C_2 = \varphi(C_1), \text{ имеем:}$$

$$p + \frac{y}{x}\, q = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

или

$$px + qy = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Интегрирование последнего уравнения сводится к интегрированию системы

$$\frac{dx}{x} \geq \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}\,;$$

$$\frac{y}{x} = C_1\,;\ dz = \varphi(C_1)dx;\ z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + C_2$$

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

2)
$$r - t + \frac{4p}{x+y} = 0$$

$$\lambda_1 = +1\,;\ \lambda_2 = -1\,;\ dy = dx;\ y = x + C_1\,;\ dp - dq + \frac{4p\,dx}{2x + C_1} = 0$$

$$(x+y)(p-q) + 2z = \varphi(y - x),$$

и т. д.

Не ограничивая общности уравнения (8), можно положить $U = 1$, и тогда остается рассмотреть уравнение

$$rt - s^2 + Rr + Ss + Tt = V. \qquad (12)$$

Исключая отсюда, как и для (9)-го, переменные r и t с помощью (10), получим:

$$dp\,dq + R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy = s(R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 + dp\,dx + dq\,dy),$$

что дает вместо (11):

$$\begin{gathered} dp\,dq + R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy = 0 \\ dp\,dx + dq\,dy + R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0, \end{gathered}$$

или:

$$\left.\begin{gathered} (dp + T\,dx)(dq + R\,dy) = (RT + V)\,dx\,dy \\ (dp + T\,dx)dx + (dq + R\,dy)dy = S\,dx\,dy \\ dz = p\,dx + q\,dy \end{gathered}\right\} \qquad (13)$$

Если уравнение

$$\mu^2 + S\mu + (RT + V) = 0$$

имеет *разные корни* μ_1, μ_2, то мы получим две системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} dp + T\,dx + \mu_1 dy &= 0 \\ dq + \mu_2 dx + R\,dy &= 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \end{aligned}\right\};\qquad \left.\begin{aligned} dp + T\,dx + \mu_2 dy &= 0 \\ dq + \mu_1 dx + R\,dy &= 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \end{aligned}\right\}$$

для определения промежуточных интегралов

$$u_1 = \varphi(v_1)\,; \qquad u_2 = \psi(v_2),$$

а если *корни равны*, $\mu_1 = \mu_2$, т. е. при условии

$$S^2 - 4RT = 4V,$$

будем имет одну систему

$$\left.\begin{aligned} dp - T\,dx - \tfrac{1}{2}S\,dy &= 0 \\ dq - \tfrac{1}{2}S\,dx + R\,dy &= 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \end{aligned}\right\}$$

для определения одного промежуточного интеграла

$$u = \varphi(v),$$

который сведет определение функции $z(x, y)$ к интегрированию уравнения 1-го порядка

$$u(x, y, z, p, q) = \varphi[v(x, y, z, p, q)]\,.$$

Способ интегрирования Ампера можно применять и для уравнений порядка выше 2-го, со всяким числом переменных. Рассмотрим этот способ для уравнения (8):

$$U(rt - s^2) + Rr + Ss + Tt = V.$$

Принцип интегрирования других уравнений — тот же самый.

Введем новые переменные x и α вместо x и y, причем α может быть и функцией двух переменных x, y и функцией одной из них. Считая x и α новыми независимыми, обозначим операцию дифференцирования по x-су через $\frac{\delta}{\delta x}$, а по α — через $\frac{\delta}{\delta \alpha}$. Тогда для всякой функции $u(x, y)$ будет:

$$du = \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta \alpha}d\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\delta y}{\delta x}dx + \frac{\delta y}{\delta \alpha}d\alpha\right)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta x}\,;\ \frac{\delta u}{\delta \alpha} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta x}\,.$$

Следовательно:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = p + q\frac{\delta y}{\delta x}\,;\ \frac{\delta z}{\delta \alpha} = q\frac{\delta y}{\delta \alpha}\,;\ \frac{\delta p}{\delta x} = r + s\frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\frac{\delta p}{\delta \alpha} = s\frac{\delta y}{\delta \alpha}\,;\ \frac{\delta q}{\delta x} = s + t\frac{\delta y}{\delta x}\,;\ \frac{\delta q}{\delta \alpha} = t\frac{\delta y}{\delta \alpha}\,.$$

Это дает:

$$t = \frac{\frac{\delta q}{\delta \alpha}}{\frac{\delta y}{\delta \alpha}}\,;\ s = \frac{\delta q}{\delta x} - t\frac{\delta y}{\delta x}\,;\ r = \frac{\delta p}{\delta x} - \frac{\delta q}{\delta x}\frac{\delta y}{\delta x} + t\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2.$$

Обозначивши:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y', \ \frac{\partial z}{\partial x} = z', \ \frac{\partial p}{\partial x} = p', \frac{\partial q}{\partial x} = q',$$

подставим выражения для r, s в наше уравнение; будем иметь квадратное уравнение относительно t. Это уравнение должно удовлетворяться при всяком α; α — произвольно и его мы можем выбрать таким образом, чтобы оно было аргументом произвольной функции интеграла. Подобные рассуждения приводят к заключению, чтобы приравнять нулю коэффициенты при t и t^2 в нашем преобразованном уравнении. Это даст нам систему

$$\left.\begin{aligned} p' + q'y' + Ry'^2 - Sy' + T = 0 \\ R(p' - qy') + Sq' - q'^2 - UV = 0 \end{aligned}\right| \tag{14}$$

Помноживши 1-е уравнение на R и вычитая 2-е, имеем:

$$q'^2 + 2Rq'y' + R^2y'^2 - Sq' - RSy' + RT + UV = 0,$$

или

$$(q' + Ry')^2 - (q' + Ry')S + RT + UV = 0.$$

Обозначивши

$$\mu = -(q' + Ry'),$$

приходим к квадратному уравнению

$$\mu^2 + S\mu + (RT + UV) = 0.$$

Если корни этого уравнения будут различны, μ_1 и μ_2, тогда

$$\mu_1 + \mu_2 = -S.$$

Кроме того, мы имели

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x},$$

или

$$z' - qy' - p = 0.$$

Принимая во внимание эти формулы, систему (14), с присоединением к ней 3-го оставшегося уравнения, заменим такой системой:

$$\left.\begin{aligned} Up' + \mu_1 y' + T = 0 \\ Uq' + Ry' + \mu_2 = 0 \\ z' - qy' - p = 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

а если заменим сначала x и y через новые независимые α, β, из которых одна определяет аргумент одной произвольной функции интеграла, а другая — аргумент другой произвольной функции, тогда получим и 2-ю систему, подобную системе (15) и соответствующую аргументу β:

$$\left.\begin{aligned} U\overline{p'} + \mu_2\overline{y'} + T = 0 \\ U\overline{q'} + R\overline{y'} + \mu_1 = 0 \\ z' - q\overline{y'} - p = 0 \end{aligned}\right| \tag{16}$$

где

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x}, \ z' = \frac{\partial z}{\partial x}, \dots,$$

если

$$\beta = \text{const};$$

$$\overline{y'} = \frac{\partial y}{\partial x}, \ \overline{z'} = \frac{\partial z}{\partial x}, \dots,$$

если

$$\alpha = \text{const}.$$

Если корни квадратного уравнения окажутся равными,

$$\mu_1 = \mu_2; \ S^2 - 4(RT + UV) = 0,$$

тогда вместо уравнений (14) получим одну только систему

$$\left.\begin{aligned} Up' + \mu_1 y' + T = 0 \\ Uq' + Ry' + \mu_1 = 0 \\ z' - qy' - p = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Если мы найдем один интеграл системы (15), то, обозначая произвольный его элемент через α, будем иметь $u = \alpha$. Если найдем и другой интеграл, то, обозначая произвольный его элемент через $\varphi(\alpha)$, будем иметь

$$v = \varphi(\alpha),$$

где φ — произвольная функция. Исключивши α из двух таких интегралов, будем иметь промежуточный интеграл заданного уравнения,

$$v = \varphi(u),$$

связывающий переменные x, y; z, p, q. Также получим промежуточный интеграл 2-й, пользуясь системой (16) и обозначая произвольный элемент интеграла этой системы через β.

Если бы мы вместо x, y сделали бы независимыми переменными α, β, тогда:

$$\frac{\partial p}{\partial \beta} = p'\frac{\partial x}{\partial \beta}; \ \frac{\partial q}{\partial \beta} = q'\frac{\partial x}{\partial \beta}; \ \frac{\partial y}{\partial \beta} = y'\frac{\partial x}{\partial \beta}; \ \frac{\partial z}{\partial \beta} = z'\frac{\partial x}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \overline{p'}\frac{\partial x}{\partial \alpha}; \ \frac{\partial q}{\partial \alpha} = \overline{q'}\frac{\partial x}{\partial \alpha}; \ \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \overline{y'}\frac{\partial x}{\partial \alpha}; \ \frac{\partial z}{\partial \alpha} = \overline{z'}\frac{\partial x}{\partial \alpha},$$

и системы (15), (16) перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned} U\frac{\partial p}{\partial \beta} + \mu_1\frac{\partial y}{\partial \beta} + T\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0 \\ U\frac{\partial q}{\partial \beta} + R\frac{\partial y}{\partial \beta} + \mu_2\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \beta} - q\frac{\partial y}{\partial \beta} + p\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} U\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \mu_2\frac{\partial y}{\partial \alpha} + T\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0 \\ U\frac{\partial q}{\partial \alpha} + R\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \mu_1\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} - q\frac{\partial y}{\partial \alpha} - p\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Для системы (17) произвольные элементы интегралов обозначим через α, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$, где φ и ψ — произвольные функции. Исключивши p и q, будем иметь интеграл

$$z = f[x, y, \alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha)],$$

и интеграл заданного уравнения 2-го порядка получим в результате исключения α из уравнений

$$z = f; \ \frac{df}{d\alpha} = 0.$$

Системы

$$\left.\begin{aligned} Udp+\mu_1 dy+Tdx=0\\ Udq+Rdy+\mu_2 dx=0\\ dz-qdy-pdx=0\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} Udp+\mu_2 dy+Tdx=0\\ Udq+Rdy+\mu_1 dx=0\\ dz-qdy-pdx=0\end{aligned}\right\}$$

соответствующие системам (15), (16), определяющим интеграл заданного дифференциального уравнения, называются *системами характеристик* 1-го порядка.

Можно доказать, что интегралы $u=\alpha$ и $v=\varphi(\alpha)$ будут частными интегралами системы двух уравнений с частными производными 1-го порядка:

$$\left.\begin{aligned} U\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)-T\frac{\partial f}{\partial p}-\mu_1\frac{\partial f}{\partial q}=0\\ U\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\mu_2\frac{\partial f}{\partial p}-R\frac{\partial f}{\partial q}=0\end{aligned}\right\}$$

§ 75. Поверхности линейчатые, развертывающиеся и минимальные. *Линейчатые поверхности* образовываются движением прямой линии по известному закону. Дифференциальное уравнение поверхностей получается так.

Из уравнений прямой, меняющей свое положение в пространстве,

$$x=uz+\varphi(u)$$
$$y=\psi(u)z+\chi(u),$$

надо исключить 4 величины:

$$u,\ \varphi(u),\ \psi(u),\ \chi(u).$$

Для исключения этих величин надо иметь еще 3 уравнения.

В результате дифференцирования и исключения, при помощи, например, известного способа Сильвестера, не только величин u, $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$, но и производных

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z},\ \varphi'(u),\ \psi'(u),\ \chi'(u),$$

получим уравнение 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & 3\frac{\partial s}{\partial x} & 3\frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} & 0\\ 0 & \frac{\partial r}{\partial x} & 3\frac{\partial s}{\partial x} & 3\frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y}\\ r & s & t & 0 & 0\\ 0 & r & s & t & 0\\ 0 & 0 & r & s & t\end{vmatrix}=0.$$

Если прямая, при своем движении, встречает свое предшествующее положение, тогда такая линейчатая поверхность называется *развертывающейся*. Она образовывается, следовательно, из плоскостей, заключенных в угле между двумя последовательными положениями

образующей прямой, т. е. представляет обвертку плоскости, при движении которой изменяется один параметр u. Из уравнения этой плоскости

$$ux+\varphi(u)y+\psi(u)z-1=0$$

надо исключить u и две произвольные функции $\varphi(u)$, $\psi(u)$. Для получения обвертки плоскости надо иметь еще уравнение, получаемое в результате дифференцирования по параметру u, т. е. уравнение

$$x+\varphi'(u)\cdot y+\psi'(u)\cdot z=0.$$

Совокупность последних двух уравнений представляет линию пересечения поверхностей, называемую *характеристикой*. Это будет, очевидно, прямая линия, лежащая на двух смежных плоскостях и являющаяся образующей нашей развертывающейся линейчатой поверхности. Исключая

$$u,\ \varphi(u),\ \psi(u),\ \varphi'(u),\ \psi'(u)$$

из предшествующих уравнений и из результата их дифференцирования, получим *дифференциальное уравнение* развертывающихся линейчатых поверхностей:

$$\begin{vmatrix} r & s\\ s & t\end{vmatrix}=0,$$

или иначе

$$rt-s^2=0.$$

Имея в виду уравнение, определяющее радиусы кривизны главных сечений всякой поверхности, получаем для одного из радиусов кривизны бесконечно-большое значение, т. е. одно из главных сечений нашей поверхности идет вдоль прямолинейной образующей, которая представляет собой одну из линий кривизны. Выходит, что *Гауссова кривизна развертывающейся линейчатой поверхности равна нулю. Развертывающиеся линейчатые поверхности, не растягивая и не сжимая, можно наложить на плоскость.*

Уравнение

$$\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}=a^2$$

определяет все поверхности, для которых *кривизна в каждой точке есть величина постоянная, равная положительному числу* a^2.

Такие поверхности, без разрывов и складок, можно наложить на поверхность шара радиуса a. Их надо иметь в виду в аэронавтике.

Поверхности, имеющие постоянную отрицательную кривизну — a^2, называются *псевдосферическими* и определяются уравнением 2-го порядка

$$\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}=-a^2.$$

Линейчатые поверхности вообще распределяются на развертывающиеся, например, цилиндр, конус, и на *поверхности не развертывающиеся или косые.* Точки, в которых пересекаются бесконечно-близкие пары прямых, — образующих линейчатой поверхности, лежат на особой кривой линии, которая называется *ребром возврата.* Ребро возврата может обратиться и в точку, например, для конуса. Существуют поверхности, обладающие и несколькими ребрами возврата.

Для интегрирования уравнения развертывающейся линейчатой поверхности имеем такое квадратное уравнение и систему характеристик:

$$\mu^2 = 0;\ \mu_1 = \mu_2 = 0$$
$$dp = 0;\ dq = 0;$$
$$dz - pdx - qdy = 0$$
$$p = \text{const} = a;\ q = \text{const} = b;$$
$$z = ax + by + c,$$

это частный интеграл, представляющий уравнение плоскости.

Промежуточный интеграл для уравнения

$$rt - s^2 = 0$$

напишется:

$$\varphi(p,\ q,\ z - px - qy) = 0.$$

Он допускает особенный интеграл, а именно — обвертку подвижной плоскости

$$\varphi(a,\ b,\ z - ax - by) = 0,$$

т. е. плоскости

$$z - ax - by = \psi(a,\ b),$$

где параметры a и b изменяются независимо друг от друга.

Дифференциальное уравнение поверхностей minima получено было впервые Лагранжем, который, изучая принципы вариационного исчисления и обобщая результаты Эйлера относительно простых интегралов на двойные интегралы, пришел, между прочим, к рассмотрению extremum'а интеграла вида

$$\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$$

и к определению минимальных поверхностей, ограниченных заданным контуром. Так получено было дифференциальное уравнение минимальных поверхностей, изучавшихся впоследствии целым рядом таких выдающихся математиков, как Монж, Менье, Лежандр, Лякруа, Каталан, Бельтрами, Дини, Бонэ, Вейерштрасс, Шварц.

Уравнение минимальных поверхностей имеет вид:

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = 0.$$

Корни квадратного уравнения, вспомогательные уравнения для интегралов и т. д. будут:

$$\mu_1 = pq + i\sqrt{1 + p^2 + q^2};\ \mu_2 = pq - i\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

$$(18')\quad \left.\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial \alpha} - p\,\frac{\partial x}{\partial \alpha} - q\,\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0 \\ &\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \alpha\,\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0 \end{aligned}\right| \qquad (18'')\quad \left.\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial \beta} - p\,\frac{\partial x}{\partial \beta} - q\,\frac{\partial y}{\partial \beta} = 0 \\ &\frac{\partial y}{\partial \beta} + \beta\,\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0 \end{aligned}\right|$$

$$pq - i\sqrt{1 + p^2 + q^2} - \beta(1 + q^2) = 0;\quad pq + i\sqrt{1 + p^2 + q^2} - \alpha(1 + p^2) = 0$$

$$\alpha = \frac{pq + i\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{1 + p^2} = \text{const};\quad \beta = \frac{pq - i\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{1 + q^2} = \text{const}.$$

Функции $x,\ y,\ z$ от $\alpha,\ \beta$ определяются четырьмя уравнениями из (18') и (18''). Имеем

$$p = i\,\frac{\beta\sqrt{\alpha^2 + 1} - \alpha\sqrt{\beta^2 + 1}}{\beta - \alpha};\quad q = i\,\frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} - \sqrt{\beta^2 + 1}}{\beta - \alpha}.$$

Из

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \alpha\,\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0;\quad \frac{\partial y}{\partial \beta} + \beta\,\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0$$

получим

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta} = 0,$$

что дает

$$x = \varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha).$$

Далее:

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\alpha\varphi''(\alpha);\quad \frac{\partial y}{\partial \beta} = -\beta\psi'(\beta)$$

$$y = \varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha) + \psi(\beta) - \beta\psi'(\beta)$$

Из

$$dz = pdx + qdy$$

получим:

$$dz = i\sqrt{\alpha^2 + 1}\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha + i\sqrt{\beta^2 + 1}\,\psi''(\beta)\,d\beta;$$

$$z = i\int\sqrt{1 + \alpha^2}\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha + i\int\sqrt{1 + \beta^2}\,\varphi''(\beta)\,d\beta.$$

Чтобы освободиться от знака интеграла, достаточно положить, по Лежандру:

$$\varphi(\alpha) = (1 + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}}\,\Phi'(\alpha)$$

$$\psi(\alpha) = (1 + \beta^2)^{-\frac{3}{2}}\,\Psi'(\beta).$$

§ 76. Способ Дарбу интегрирования нелинейных уравнений 2-го порядка и способ Н. Н. Салтыкова. Идея *способа интегрирования Дарбу для нелинейных и линейных уравнений 2-го порядка* состоит в следующем.

Пусть будет задано для интегрирования уравнение

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) = 0. \tag{19}$$

Присоединим к нему такое 2-е уравнение

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) = \text{const}, \tag{20}$$

чтобы эти два уравнения были в инволюции. Условия для этого найдутся так.

Продифференцировавши уравнения (19) и (20) по x и y, будем иметь 4 уравнения, линейные относительно четырех производных 3-го порядка

$$\frac{\partial r}{\partial x},\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x},\ \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x},\ \frac{\partial t}{\partial y}.$$

Эти уравнения будут:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dF}{dx} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \\ &\frac{dF}{dy} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \\ &\frac{d\Phi}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \\ &\frac{d\Phi}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial s}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial p}r+\frac{\partial F}{\partial q}s$$
$$\frac{dF}{dy}=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q+\frac{\partial F}{\partial p}s+\frac{\partial F}{\partial q}t$$

. . . .

Уравнения (21) не будут независимы между собою, т. е. производные 3-го порядка, если бы мы их определяли из четырех уравнений, должны быть неопределенными. По Дарбу должны существовать по крайней мере 2 зависимости между коэффициентами уравнений. Эти зависимости сводятся к равенству нулю двух определителей 4-го порядка, построенных из матрицы, элементами которой являются коэффициенты при производных и свободные члены линейных уравнений (21):

$$\left\|\begin{matrix}\frac{dF}{dx} & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} & 0\\ \frac{dF}{dy} & 0 & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t}\\ \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s} & \frac{\partial\Phi}{\partial t} & 0\\ \frac{d\Phi}{dy} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s} & \frac{\partial\Phi}{\partial t}\end{matrix}\right\| \qquad (22)$$

Чтобы все определители 4-го порядка этой матрицы из четырех горизонталей и пяти колонок равнялись нулю, достаточно, как известно из теории определителей, чтобы был не равен нулю хоть один определитель 3-го порядка Δ и равнялись бы нулю 2 определителя 4-го порядка, полученные присоединением к элементам Δ оставшейся горизонтали и каждой из оставшихся двух колонн.

В изложении Форзайсом способа Дарбу в VI томе его теории дифференциальных уравнений не отмечено это обстоятельство об определителе 3-го порядка Δ, а приведено равенство нулю таких двух определителей 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix}\frac{dF}{dx} & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t}\\ \frac{dF}{dy} & 0 & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s}\\ \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s} & \frac{\partial\Phi}{\partial t}\\ \frac{d\Phi}{dy} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s}\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} & 0\\ 0 & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s} & \frac{\partial\Phi}{\partial t} & 0\\ 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s} & \frac{\partial\Phi}{\partial t}\end{vmatrix}=0. \qquad (23)$$

Два уравнения (23) представляют собой 2 уравнения с частными производными 1-го порядка одной неизвестной вспомогательной функции Φ от восьми переменных x, y, z, p, q, r, s, t. Сама функция Φ явно не входит в эти уравнения (23). Поэтому условие совместимости двух уравнений 1-го порядка (23) сводится к равенству нулю круглых скобок Пуассона, составленных для левых частей этих нелинейных уравнений.

Система (23) обладает интегралом

$$\Phi = F = 0,$$

но, в результате приравнивания нулю скобок Пуассона и присоединения новых уравнений к системе (23), мы можем не получить совместимой системы 1-го порядка, содержащей меньшее, хотя на 2 единицы, число q уравнений, чем независимых переменных, — тогда метод интегрирования Дарбу к уравнению 2-го порядка $F=0$ неприменим.

Если же вспомогательная система будет совместимой и если мы найдем частные интегралы

$$\Phi_1 = C_1,\ \ \Phi_2 = C_2,$$

птличные от постоянных, содержащие переменные r, s, t и совмеотимые друг с другом и с уравнением $F=0$, тогда, определивши сроизводные 2-го порядка r, s, t из трех уравнений

$$F=0,\ \Phi_1=C_1,\ \Phi_2=C_2,$$

получим неизвестную функцию $z\ (x, y)$ с помощью квадратур из зависимостей

$$dp = rdx + sdy$$
$$dq = sdx + tdy$$
$$dz = pdx + qdy.$$

Интегрирование системы двух нелинейных уравнений 1-го порядка (23) сводится к интегрированию системы двух линейных уравнений 1-го порядка с той же неизвестной функцией Φ тех же независимых переменных $x, y, \ldots t$, по Форзайсу, таким образом.

Второе уравнение (23) можно переписать так:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\lambda_1\frac{\partial\Phi}{\partial s}+\lambda_1^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\lambda_2\frac{\partial\Phi}{\partial s}+\lambda_2^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=0,$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial r}\lambda^2-\frac{\partial F}{\partial s}\lambda+\frac{\partial F}{\partial t}=0. \qquad (24)$$

Считая, „что можно положить", $\frac{\partial F}{\partial r}\neq 0$, имеем:

либо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\lambda_1^2-\frac{\partial\Phi}{\partial s}\lambda_1+\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0,$$

либо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\lambda_2^2-\frac{\partial\Phi}{\partial s}\lambda_2+\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0 \qquad (25)$$

Свяжем с первым уравнением (23) одно из этих уравнений, например, первое. Ввиду того, что

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\lambda_1\lambda_2\frac{\partial F}{\partial r};\ \ \frac{\partial F}{\partial s}=(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial F}{\partial r},$$

отбрасывая множитель

$$D\left(\frac{F,\ \Phi}{s,\ r}\right),$$

который не должен равняться нулю, так как в связи с уравнениями

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}\lambda^2-\frac{\partial \Phi}{\partial s}\lambda+\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial r}\lambda^2-\frac{\partial F}{\partial s}\lambda+\frac{\partial F}{\partial t}=0,$$

обращение его в нуль указывало бы на то, что F и Φ не были бы функционально независимы одно от другого, как функции от r, s, t", — уравнение первое из (23) приводится к виду

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}+\lambda_2\frac{d\Phi}{dy}\right)\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{dF}{dx}-\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\frac{dF}{dy}=0.$$

Аналогично получим линейное уравнение, связанное со вторым уравнением (25).

Таким образом, если корни λ_1, λ_2 уравнения (24) различны, мы имеем 2 системы *двух линейных уравнений 1-го порядка одной неизвестной функции* Φ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\lambda_1^2-\dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\lambda_1+\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}=0 \\ \dfrac{d\Phi}{dx}+\lambda_2\dfrac{d\Phi}{dy}-\dfrac{\frac{dF}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial t}}\dfrac{\partial F}{\partial r}-\lambda_2\dfrac{\frac{dF}{dy}}{\frac{\partial F}{\partial t}}\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\lambda_2^2-\dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\lambda_2+\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}=0 \\ \dfrac{d\Phi}{dx}+\lambda_1\dfrac{d\Phi}{dy}-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial r}}\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}-\lambda_1\dfrac{\frac{dF}{dy}}{\frac{\partial F}{\partial t}}\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}=0 \end{cases} \qquad (26)$$

Любая из этих систем, если окажется совместимой, может привести к частному интегралу

$$\Phi_1(x, y, z, p, q, r, s, t)=C_1,$$

совместимому с заданным уравнением $F=0$. Если корни равны, $\lambda_1=\lambda_2$, то мы имеем только одну систему для определения вспомогательной функции Φ. Если ни одна из систем (26) не совместима, то метод интегрирования Дарбу не применим.

Для получения функции $z(x, y)$, нам надо иметь 2 интеграла $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2$, совместимые между собою, т. е. такие, чтобы для них удовлетворялись условия вида (23); каждое из уравнений $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2$ в отдельности совместимо с уравнением $F=0$, так как $\Phi_1=C_1$ и $\Phi_2=C_2$ являются решениями уравнений (23). Можно одновременно рассматривать совместимость трех уравнений $F=0$, $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2$, — совместимость представится системой двух условий: если нам задана будет система двух совместимых уравнений

$$F_1(x, y, z, p, q, r, s, t)=0;\ F_2(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$$

и надо найти третье совместимое с ними уравнение 2-го порядка

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t)=0,$$

то условия совместимости выводятся аналогично и приводят к системе таких двух линейных уравнений 1-го порядка с неизвестной функцией Φ:

$$D\left[\frac{F_1,\ F_2,\ \Phi}{r,\ x,\ t}\right]=D\left[\frac{F_1,\ F_2,\ \Phi}{y,\ s,\ t}\right];\quad D\left[\frac{F_1,\ F_2,\ \Phi}{r,\ s,\ x}\right]=D\left[\frac{F_1,\ F_2,\ \Phi}{r,\ y,\ t}\right],$$

где прямые скобки в обозначениях функциональных определителей обозначают, что по переменным x и y взяты полные производные.

В раскрытом виде эти 2 линейные уравнения запишутся так:

$$(tr)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}p+\frac{\partial \Phi}{\partial p}r+\frac{\partial \Phi}{\partial q}s\right)+(ts)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}q+\frac{\partial \Phi}{\partial p}s+\frac{\partial \Phi}{\partial q}t\right)+$$

$$+[xt]\frac{\partial \Phi}{\partial r}+[yt]\frac{\partial \Phi}{\partial s}+([rx]+[sy])\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0$$

$$(sr)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}p+\frac{\partial \Phi}{\partial p}r+\frac{\partial \Phi}{\partial q}s\right)+(tr)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}q+\frac{\partial \Phi}{\partial p}s+\frac{\partial \Phi}{\partial q}t\right)+$$

$$+([xs]+[yt])\frac{\partial \Phi}{\partial r}+[rx]\frac{\partial \Phi}{\partial s}+[ry]\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0,$$

где коэффициенты, обозначенные круглыми скобками, представляют якобиевы определители двух известных функций F_1, F_2 по соответственной паре из переменных r, s, t, а в коэффициенты с прямыми скобками входят полные производные от F_1, F_2 по x-су и по y-ку.

Пример (уравнение Эйлера).

$$r-t-\frac{np}{x}=0.$$

Квадратное уравнение $\lambda^2-1=0$ имеет 2 различные корня: $\lambda_1=1$; $\lambda_2=-1$. Так как

$$\frac{dF}{dx}=-n\frac{r}{x}+n\frac{p}{x^2};\quad \frac{dF}{dy}=-n\frac{s}{x},$$

то система линейных уравнений для 1-го корня будет:

$$F_1\equiv\frac{\partial \Phi}{\partial r}-\frac{\partial \Phi}{\partial s}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0;$$

$$F_2\equiv\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\frac{\partial \Phi}{\partial y}+(p-q)\frac{\partial \Phi}{\partial z}+(r-s)\frac{\partial \Phi}{\partial p}+$$

$$+(s-t)\frac{\partial \Phi}{\partial q}+n\left(\frac{r}{x}-\frac{p}{x^2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial r}+\frac{ns}{x}\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0.$$

Равенство нулю скобок Пуассона $(F_1, F_2)=0$ дает 3-е линейное уравнение

$$F_3\equiv\frac{n}{x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}-\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)+2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)=0.$$

Далее, скобки (F_1, F_3) дают 4-е линейное уравнение

$$F_4\equiv4\frac{x}{n}\frac{\partial \Phi}{\partial z}+2\frac{\partial \Phi}{\partial q}+\frac{n-2}{2x}\frac{\partial \Phi}{\partial s}=0.$$

После получим 5-е линейное уравнение

$$F_5\equiv\frac{\partial \Phi}{\partial q}+\frac{n-2}{2x}\frac{\partial \Phi}{\partial s}=0$$

из $(F_3, F_4)=0$, и т. д. Из условий

$$(F_3, F_4) = 0, \ (F_3, F_5) = 0,$$

которые дадут соответственно

$$(n-2)(n+4)\frac{1}{x^3}\frac{\partial\Phi}{\partial s} = 0; \quad (n-2)(n+4)\frac{1}{x^2}\frac{\partial\Phi}{\partial s} = 0,$$

получим, что метод интегрирования Дарбу будет применим, если $(n-2)(n+4) = 0$.

Для $n = 2$, например, т. е. для уравнения $r - t - \frac{2p}{x} = 0$, получим полную систему пяти линейных уравнений

$$F_1 = 0, \ F_2 = 0, \ F_3 = 0, \ F_4 = 0, \ F_5 = 0$$

вида

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0; \ \frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0$$

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\partial\Phi}{\partial s} + x\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0$$

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial s} - x\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{p}{x}\frac{\partial\Phi}{\partial p} + \left(\frac{r+s}{x} - \frac{p}{x^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial s} = 0.$$

Три независимые интеграла полной системы будут:

$$F \equiv r - t - \frac{2p}{x} = 0; \qquad \Phi_1 \equiv x + y = C_1; \qquad \Phi_2 \equiv \frac{r+2s+t}{x} = C_2;$$

т. е.

$$\frac{r+2s+t}{x} = -4\varphi'''(x+y) \ (\varphi \text{ — произвольная функция}).$$

Для $\lambda_2 = -1$ получим:

$$\frac{r-2s+t}{x} = 4\psi'''(y-x) \ (\psi \text{ — произвольная функция}).$$

Тогда:

$$r = \frac{p}{x} - x\varphi''' + x\psi'''; \quad s = -x\varphi''' - x\psi'''; \ t = -\frac{p}{x} - x\varphi''' + x\psi''',$$

причем

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}; \ \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}.$$

Из

$$dp = rdx + sdy; \ dq = sdx + tdy$$

имеем

$$\frac{p}{x} = -\varphi'' - \psi''; \ q = -x(\varphi'' - \psi'') + \varphi' + \psi'.$$

Из

$$dz = pdx + qdy$$

получим общий интеграл с двумя произвольными функциями φ и ψ:

$$z = \varphi(x+y) + \psi(y-x) - x[\varphi'(x+y) - \psi'(y-x)].$$

Способ интегрирования Н. Н. Салтыкова, опубликованный в конце 1932 г., позволяет находить *полный, но не общий интеграл* и может применяться тогда, когда способ интегрирования Дарбу вообще не применим. Этот способ интегрирования *уравнения 2-го порядка*

$$r + H(x, y, z, p, q, s) = 0, \tag{27}$$

для которого ищется совместимое с ним 2-е уравнение

$$t + \Phi(x, y, z, p, q, s) = 0, \tag{28}$$

устанавливающее *вполне интегрируемую систему* двух уравнений, частным случаем какой является *инволюционная система* двух уравнений в способе Дарбу, основывается на таких двух теоремах.

1) Если величины r, s, t удовлетворяют равенствам

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}; \ \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}, \tag{29}$$

тогда функции z, p, q, r, s, t удовлетворяют уравнениям

$$(\mathrm{I}) \ \frac{\partial r}{\partial x} + H_s'\frac{\partial r}{\partial y} + D_1 H = 0; \quad (\mathrm{II}) \ \frac{\partial s}{\partial x} + H_s'\frac{\partial s}{\partial y} + D_2 H = 0$$

$$(\mathrm{III}) \ \frac{\partial s}{\partial y} + \Phi_s'\frac{\partial s}{\partial y} + D_1\Phi = 0; \quad (\mathrm{IV}) \ \frac{\partial t}{\partial y} + \Phi_s'\frac{\partial t}{\partial x} + D_2\Phi = 0,$$

где H_s' и Φ_s' обозначают частные производные 1-го порядка по s от вторых членов системы уравнений (27), (28), а D_1 и D_2 — это полные производные, взятые соответственно по x и по y непосредственно и через z, p, q.

2) Если функции z, p, q, r, s, t удовлетворяют уравнениям (27), (28), (I), (IV), тогда отсюда непосредственно вытекают условия (29).

Таким образом система двух уравнений (27), (28) вполне интегрируема, если двое уравнений (II) и (III) устанавливают с помощью системы (27), (28) якобиеву систему относительно s. Следовательно *полная интегрируемость системы уравнений (27), (28) определяется одним только уравнением*

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{D_2H - H_s'D_1\Phi}{H_s'\Phi_s' - 1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{D_1\Phi - \Phi_s'D_2H}{H_s'\Phi_s' - 1}\right). \tag{30}$$

Это уравнение *2-го порядка* называется *резольвентою* заданного уравнения $r + H = 0$ и определяет второе уравнение $t + \Phi = 0$; из уравнения (30) надо определить какой-нибудь один частный интеграл, зависящий от одной произвольной постоянной. Полный интеграл найдется интегрированием системы уравнений в полных дифференциалах, представленных зависимостями

$$dz = pdx + qdy; \ dp = rdx + sdy; \ dq = sdx + tdy$$

и уравнением, равносильным Якобиевой системе двух уравнений (II), (III).

Если уравнения (27), (28) находятся в инволюции, тогда соответствующая система при таком допущении обозначает, что уравнения (II) и (III) совпадают, величины производных 3-го порядка $\frac{\partial s}{\partial x}$ и $\frac{\partial s}{\partial y}$ становятся неопределенными и в таком случае можно применять метод интегрирования Дарбу. Инволюция представляет собой таким образом особый случай полной интегрируемости. Способ интегрирования позволяет распространить непосредственно на уравнения 2-го порядка известный в теории уравнений с частными производными способ интегрирования посредством так называемого разделения переменных.

Примеры. 1) Для уравнения Эйлера:

$$r - t = \frac{n}{x} p,$$

которое при произвольном постоянном n проинтегрировать по методу Дарбу невозможно. Н. Н. Салтыковым представлен полный интеграл в таких двух видах:

для $n \neq 1$; $z = C_1\left(x^2 - \frac{n-1}{3} y^2\right) y + C_2\left(\frac{1}{n-1} x^2 - y^2\right) + C_3 x^{n+1} + C_4 y + C_5$;

для $n = 1$; $z = C_1 x^2 y + C_2 [x^2 (\lg x - 1) + y^2] + C_3 y + C_4 x^2 + C_5$.

2) Неинтегрирующееся по способу Дарбу уравнение

$$s + nz = 0,$$

с постоянным коэффициентом n, допускает вполне интегрируемое с ним 2-е уравнение

$$r + t + C_1 z = 0,$$

и полный интеграл будет:

$$z = C_2 e^{\alpha x - \beta y} + C_3 e^{\beta x - \alpha y} + C_4 e^{\alpha y - \beta x} + C_5 e^{\beta y - \alpha x},$$

где

$$\alpha = \sqrt{-\frac{1}{2} C_1 + R},\ \beta = \sqrt{-\frac{1}{2} C_1 - R},\ R = \sqrt{\frac{1}{4} C_1^2 - n^2}.$$

3) Пример на распространение для уравнений 2-го порядка метода разделения переменных:

$$r = f(s, t).$$

Полный интеграл:

$$z = \frac{1}{2} f(C_1, C_2) x^2 + C_1 xy + \frac{1}{2} C_2 y^2 + C_3 x + C_4 y + C_5.$$

Способ Н. Н. Салтыкова применяется также и для интегрирования *систем уравнений 2-го порядка.* Исследования по этому вопросу можно найти в цитированной в начале главы статье Н. Н. Салтыкова в журнале Бельгийской Академии Наук за 1932 г. В одном из следующих нумеров этого журнала за тот же год находится и работа юго-славского математика К. Орлова, относящаяся к *интегрированию системы двух уравнений с частными производными 2-го порядка посредством дифференцирования.*

Способ интегрирования уравнения с частными производными 2-го порядка посредством его дифференцирования не только давно известен в математике, но стал уже классическим, благодаря тому применению, которое сделал для него Лежандр, для интегрирования уравнения минимальных поверхностей, и Лиувиль—для интегрирования так называемого уравнения Лиувиля. Применение К. Орлова к системе двух уравнений состоит в следующем.

Продифференцировавши систему заданных двух уравнений

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0;\ \varphi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

по x и y, получим систему 4 уравнений

$$D_x f = 0,\ D_y f = 0,\ D_x\varphi = 0,\ D_y\varphi = 0,$$

линейных относительно 4 производных 3-го порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \alpha,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \beta,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \gamma,\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \delta.$$

Дальнейшее дифференцирование дает еще 6 уравнений:

$$D_{xx} f = 0,\ D_{xy} f = 0,\ D_{yy} f = 0,\ D_{xx}\varphi = 0,\ D_{xy}\varphi = 0,\ D_{yy}\varphi = 0,$$

линейных относительно 5 производных 4-го порядка

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = a,\ \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = b,\ \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = c,\ \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = d,\ \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = e,$$

т. е. число производных 4-го порядка на единицу меньше числа последних 6 уравнений.

Н. Н. Салтыков показал, что заданная система 2 уравнений будет вполне интегрируемой системой, если предшествующие 6 уравнений сводятся к 5 независимым уравнениям, на основании заданных 2 уравнений и следующих 4, полученных дифференцированием из заданных, и изучал подробно все случаи, какие могут при этом представиться.

Таким образом мы имеем всего 11 уравнений. Исключивши из них 10 производных

$$q, s, t, \beta, \gamma, \delta, b, c, d, e,$$

получим *одно обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка*, с неизвестной функцией z, независимой переменной x и еще с величиной y, играющей роль постоянного параметра, т. е. будем иметь уравнение вида

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\right) = 0,$$

общий интеграл которого

$$z = f(x, y, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$$

будет содержать 4 произвольные функции от величины y. Подстановка этого выражения для z в заданные 2 уравнения дает условия для определения таких функций $Y_1, Y_2, \ldots$, чтобы $z = F$ было интегралом данной системы. *Для специальных случаев систем порядок обыкновенного дифференциального уравнения может быть понижен.*

Пример.

$$xr - ys = p;\ yr + xs = q.$$

Этот пример был рассмотрен мной в моей диссертации в 1927 г. Пишем по § 83 условия инволюционности системы. Одно из них удовлетворяется тождественно, а другое—дает новое уравнение

$$-yr + 2xs + yt = 0.$$

Интеграл заданной системы двух уравнений, удовлетворяющий и этому последнему уравнению, будет:

$$z = C_1 (x^2 + y^2) + C_2 \frac{x}{y} + C_3.$$

Этот пример рассмотрен был и в работе Н. Н. Салтыкова, и в работе К. Орлова. Н. Н. Салтыков получает два вспомогательные уравнения с параметрической производной t:

$$y \frac{\partial t}{\partial x} + 2s = 0;\ x \frac{\partial t}{\partial x} + r - t = 0.$$

Исключая производную $\frac{\partial t}{\partial x}$, будем иметь условие полной интегрируемости, представляющее собой и написанное выше условие инволюционности. По К. Орлову, дифференцируя по x, получаем

$$x\alpha - y\beta = 0;\ y\alpha + x\beta = 0,$$

откуда имеем $\frac{\partial r}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial r}{\partial y} = 0$, т. е. получаем обыкновенное уравнение только 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2C_1,$$

где $C_1=\text{const}$, откуда имеем

$$z = C_1 x^2 + xY_1(y) + Y_2(y).$$

Подстановка в данные уравнения даст выражения для Y_1, Y_2, именно:

$$Y_1 = \frac{C_2}{y},\ Y_2 = C_1 y^2 + C_3,$$

и приводит к написанному выше полному интегралу

$$z = C_1(x^2 + y^2) + C_2\frac{x}{y} + C_3.$$

Произвольных постоянных в полном интеграле только 3, т. к. должно удовлетворяться еще условие интегрируемости, т. е. написанное раньше третье уравнение с частными производными 2-го порядка.

§ 77. Изменения и дополнения к способу интегрирования Дарбу. Обозначим для сокращения письма

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X;\ \frac{\partial F}{\partial y} = Y; \ldots \frac{\partial F}{\partial s} = S; \frac{\partial F}{\partial t} = T$$

$$\frac{dF}{dx} = \Xi \equiv X + Zp + Pr + Qs$$

$$\frac{dF}{dy} = \mathrm{H} \equiv Y + Zq + Ps + Qt.$$

Тогда матрица (22) перепишется так:

$$\left\| \begin{matrix} \Xi & R & S & T & 0 \\ \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s} & \frac{\partial\Phi}{\partial t} & 0 \\ \mathrm{H} & 0 & R & S & T \\ \frac{d\Phi}{dy} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s} & \frac{\partial\Phi}{\partial t} \end{matrix} \right\|. \tag{31}$$

Надо выбрать неравный нулю один из 40 определителей 3-го порядка

$$\Delta_{ij}^k$$
$$(k = 1, \ldots 4;\ i,\ j = 1, \ldots 5;\ i \neq j),$$

где k, i, j указывают на то, что в матрице (31) надо вычеркнуть k-ую горизонталь, i-ую и j-ую колонки. После приравниваются нулю определители 4-го порядка, полученные присоединением к Δ_{ij}^k соответствующей горизонтали и одной из двух оставшихся колонок. При обозначениях

$$D\left(\frac{F,\ \Phi}{r,\ s}\right) = \begin{vmatrix} R & S \\ \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s} \end{vmatrix} = (rs);\quad D\left[\frac{F,\Phi}{xr}\right] = \begin{vmatrix} \Xi & R \\ \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial\Phi}{\partial r} \end{vmatrix} = [xr] \tag{32}$$

. . . .

перебравши все Δ_{ij}^k и приравнивая нулю все пары соответствующих определителей 4-го порядка, пару условий совместимости получим для какого-нибудь одного из $\Delta_{ij}^k \neq 0$, если возьмем 2 равенства из таких отношений:

$$\frac{(rt)}{(rs)} = \frac{[rx] + [sy]}{[ry]} = \frac{[yt]}{[rx]} = \frac{[tx]}{[ty] + [sx]} = \frac{(ts)}{(tr)}. \tag{33}$$

Всех возможных комбинаций двух равенств будет 10. Каждое равенство двух отношений представляет равенство нулю соответствующего определителя 4-го порядка матрицы (31), в чем легко убедиться, раскрывая определители 4-го порядка по теореме Лапласа через определители 2-го порядка и пользуясь для них обозначениями (32).

Условия Форзайса (23) представляют собой один из десяти этих комбинаций двух равенств и будут иметь вид

$$[yr](rt) + [ys](sr) + [rx](rs) = 0$$

$$(rs)(st) + (rt)(tr) = 0,$$

или иначе, вследствие

$$(rt) = -(tr);\ [rx] = -[xr], \ldots,$$

будем иметь:

$$\frac{(rt)}{(rs)} = \frac{[rx]+[sy]}{[ry]};\quad \frac{(rt)}{(rs)} = \frac{(ts)}{(tr)}. \tag{34}$$

Эти условия Форзайса представляют собой равенство 1-го и 2-го, 1-го и 5-го отношений (33). Очевидно, в более краткой форме мы получим 2 условия инволюционности уравнений $F=0$, $\Phi=\text{const}$, если не равен будет нулю определитель Δ_{ij}^k соответствующий равенствам 1-го и 3-го, 1-го и 5-го отношений (33). Система (34) имеет место при неравенстве

$$\Delta_{15}^1 \neq 0, \text{ т. е.}\quad 1)\ \frac{\partial\Phi}{\partial r} \neq 0,\quad 2)\ D\left(\frac{F,\ \Phi}{r,\ s}\right) \neq 0, \tag{35'}$$

или при неравенстве

$$\Delta_{25}^2 \neq 0, \text{ т. е.}\quad 1)\ \frac{\partial F}{\partial r} \neq 0,\quad 2)\ D\left(\frac{F,\ \Phi}{r,\ s}\right) \neq 0, \tag{35''}$$

иначе сказать — искомое уравнение $\Phi=\text{const}$, или заданное уравнение $F=0$ должно содержать производную 2-го порядка r, а оба уравнения, $F=0$, $\Phi=\text{const}$, должны быть независимы относительно r, s, чего, вопреки положению Форзайса в § 76, всегда допускать нельзя.

Обозначим 2 равные отношения из пяти отношений (33) через λ; это будет неизвестная функция переменных $x, y, \ldots t$, входящих в отношения. Тогда, например, 2 нелинейные уравнения (34), представляющие собой систему двух нелинейных уравнений 1-го порядка Дарбу-Форзайса, записанных в § 76 посредством (23), перепишутся так:

$$\frac{(rt)}{(rs)} = \frac{[rx]+[sy]}{[ry]} = \frac{(ts)}{(tr)} = \lambda,$$

или в раскрытом виде:

$$
\begin{gathered}
R\frac{d\Phi}{dx}+(S-\lambda R)\frac{d\Phi}{dy}-(\Xi-\lambda H)\frac{\partial\Phi}{\partial r}-H\frac{\partial\Phi}{\partial s}=0\\
-\lambda T\frac{\partial\Phi}{\partial r}+T\frac{\partial\Phi}{\partial s}+(\lambda R-S)\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0\\
(\lambda S-T)\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\lambda R\frac{\partial\Phi}{\partial s}+R\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0,
\end{gathered}
\tag{36}
$$

и будут представлять собой систему трех линейных уравнений 1-го порядка одной неизвестной функции Φ, если будет определено λ, как функция от $x, y; \ldots t$. Последние 2 уравнения равносильны друг другу, если будут пропорциональны коэффициенты при производных $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial s}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, т. е. если

$$\frac{\lambda S-T}{-\lambda T}=\frac{-\lambda R}{T}=\frac{R}{\lambda R-S},$$

что дает

$$
\begin{gathered}
R(R\lambda^2-S\lambda+T)=0\\
S(R\lambda^2-S\lambda+T)=0\\
T(R\lambda^2-S\lambda+T)=0.
\end{gathered}
$$

Так как для заданного уравнения 2-го порядка $F=0$, по крайней мере одна из величин R, S, T не должна быть равна нулю, то мы имеем

$$R\lambda^2-S\lambda+T=0. \tag{37}$$

Если определим λ в виде одного из корней λ_1, λ_2 этого квадратного уравнения, представляющего уравнение (24) § 76, то система (36) будет равносильна двум *линейным уравнениям*, и мы приходим, вместо интегрирования двух нелинейных уравнений (34), к *определению вспомогательной функции Φ в виде частного интеграла одной из двух систем двух линейных уравнений*

$$
\begin{gathered}
R\left(\frac{\partial\Phi}{dx}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}p+\frac{\partial\Phi}{\partial p}r+\frac{\partial\Phi}{\partial q}s\right)+(S-\lambda_i R)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}p+\frac{\partial\Phi}{\partial p}s+\frac{\partial\Phi}{\partial q}t\right)-\\
-(\Xi-\lambda_i H)\frac{\partial\Phi}{\partial r}-H\frac{\partial\Phi}{\partial s}=0\\
-\lambda_i T\frac{\partial\Phi}{\partial r}+T\frac{\partial\Phi}{\partial s}+(\lambda_i R-S)\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0\\
(i=1,2).
\end{gathered}
$$

Эти системы двух линейных уравнений, записываемых короче в виде

$$
\left.
\begin{aligned}
(\lambda_i H-\Xi)\frac{\partial\Phi}{\partial r}-H\frac{\partial\Phi}{\partial s}+R\frac{d\Phi}{dx}+(S-\lambda_i R)\frac{d\Phi}{dy}=0\\
-\lambda_i T\frac{\partial\Phi}{\partial r}+T\frac{\partial\Phi}{\partial s}+(\lambda_i R-S)\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0,
\end{aligned}
\right\}
\tag{38}
$$

заменяют системы двух линейных уравнений (26) Дарбу-Форзайса, которые содержат не один из корней λ_i квадратного уравнения (37), а оба корня λ_i, λ_j, имеют нелинейные коэффициенты в одном из

уравнений и которые, при обозначениях этого параграфа, записываются так:

$$
\left.
\begin{aligned}
-T\Xi\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\lambda_i RH\frac{\partial\Phi}{\partial t}+RT\frac{d\Phi}{dx}+\lambda_i RT\frac{d\Phi}{dy}=0\\
\lambda_j^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\lambda_j\frac{\partial\Phi}{\partial s}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0.
\end{aligned}
\right\}
\tag{39}
$$

В системе (39) надо было бы положить $i=j$, чтобы она стала равносильна системе (38). Для одного корня λ_1 будем иметь одну видоизмененную систему (39), а для другого корня λ_2 — другую. Если уравнение (37) имеет двухкратный корень $\lambda_1=\lambda_2$, имеем одну систему (38) и одну систему (39), равносильные друг другу.

Система (39) имеет место при ограничении (35′) или (35″), которые привели нас также к системе (38). Вместо определителей (35′) или (35″), т. е. Δ_{15}^1 и Δ_{25}^2 можно взять любую другую пару определителей Δ_{ij}^k. Все вторые определители Δ_{ij}^k вида (35″) приводят к таким 20 неравенствам, при одном из которых имеет место одна из 10 систем двух линейных уравнений вида (38) и при одном из которых можно применять для уравнения 2-го порядка $F=0$ метод интегрирования Дарбу:

$$
\begin{gathered}
\Delta_{25}^2;\quad R\neq 0;\quad (rs)\neq 0\\
\Delta_{14}^4;\quad T\neq 0;\quad (rs)\neq 0\\
\Delta_{14}^2;\quad R\neq 0;\quad (rt)\neq 0\\
\Delta_{13}^4;\quad T\neq 0;\quad (rt)\neq 0\\
\Delta_{13}^2;\quad R\neq 0;\quad (st)\neq 0\\
\Delta_{12}^4;\quad T\neq 0;\quad (st)\neq 0\\
\Delta_{23}^4;\quad T\neq 0;\quad [xt]\neq 0\\
\Delta_{24}^4;\quad T\neq 0;\quad [xs]\neq 0\\
\Delta_{34}^2;\quad R\neq 0;\quad [yt]\neq 0\\
\Delta_{34}^4;\quad T\neq 0;\quad [xr]\neq 0\\
\Delta_{34}^2;\quad R\neq 0;\quad [ys]\neq 0\\
\Delta_{45}^2;\quad R\neq 0;\quad [yr]\neq 0\\
\Delta_{12}^2;\quad T^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}-ST\frac{\partial\Phi}{\partial s}+(S^2-RT)\frac{\partial\Phi}{\partial t}\neq 0\\
\Delta_{15}^4;\quad (S^2-RT)\frac{\partial\Phi}{\partial r}-RS\frac{\partial\Phi}{\partial s}+R^2\frac{\partial\Phi}{\partial t}\neq 0\\
\Delta_{23}^2;\quad T^2\frac{d\Phi}{dy}-\Xi T\frac{\partial\Phi}{\partial s}+(\Xi S-HT)\frac{\partial\Phi}{\partial t}\neq 0\\
\Delta_{24}^2;\quad ST\frac{d\Phi}{dy}-\Xi T\frac{\partial\Phi}{\partial r}+(\Xi R-HS)\frac{\partial\Phi}{\partial t}\neq 0\\
\Delta_{35}^4;\quad RS\frac{d\Phi}{dx}-(\Xi S-HT)\frac{\partial\Phi}{\partial r}-HR\frac{\partial\Phi}{\partial t}\neq 0\\
\Delta_{45}^4;\quad R^2\frac{d\Phi}{dx}-(\Xi R-HS)\frac{\partial\Phi}{\partial r}-HR\frac{\partial\Phi}{\partial s}\neq 0.\\
\Delta_{25}^2;\quad (S^2-RT)\frac{d\Phi}{dy}-(\Xi S-HT)\frac{\partial\Phi}{\partial r}+(\Xi R-HS)\frac{\partial\Phi}{\partial s}\neq 0\\
\Delta_{25}^4;\quad (S^2-RT)\frac{d\Phi}{dx}-(\Xi S-HT)\frac{\partial\Phi}{\partial s}+(\Xi R-HS)\frac{\partial\Phi}{\partial t}\neq 0
\end{gathered}
\tag{40}
$$

Остальные 20 определителей Δ_{ij}^k приводят к неравенствам, в которых буква F заменяется буквой Φ и наоборот.

Все 10 комбинаций системы двух линейных уравнений вида (38), получающиеся из двух равенств 5 отношений (33), приводят только к пяти линейным уравнениям. Три из них содержат производные по x и по y, кроме производных по двум из переменных r, s, t, и будут:

$$
\begin{aligned}
&R\frac{d\Phi}{dx}+(S-\lambda_i R)\frac{d\Phi}{dy}+(\lambda_i H-\Xi)\frac{\partial\Phi}{\partial r}-H\frac{\partial\Phi}{\partial s}=0\\
&\lambda R\frac{d\Phi}{dx}+T\frac{d\Phi}{dy}-\lambda_i\Xi\frac{\partial\Phi}{\partial r}-H\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0\\
&(\lambda_i S-T)\frac{d\Phi}{dx}+\lambda_i T\frac{d\Phi}{dy}-\lambda_i\Xi\frac{\partial\Phi}{\partial s}+(\Xi-\lambda_i H)\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0,
\end{aligned}
\tag{41}
$$

а два — содержат только производные по переменным r, s, t и будут:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_i T\frac{\partial\Phi}{\partial r}-T\frac{\partial\Phi}{\partial s}+(S-\lambda_i R)\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0\\
&(T-\lambda_i S)\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\lambda_i R\frac{\partial\Phi}{\partial s}-R\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Легко проверить, что так как λ_i есть один из корней λ_1, λ_2 квадратного уравнения (37), то первые 3 уравнения равносильны друг другу, и последние 2 уравнения эквивалентны одно другому.

Поэтому, *для интегрирования уравнения 2-го порядка $F=0$ можно применять метод интегрирования Дарбу и строить для него системы двух вспомогательных линейных уравнений с неизвестной функцией Φ, так как всегда можно считать, что по крайней мере один из 40 определителей Δ_{ij}^k вида (40) не равен нулю*, т. е. что выполняется пара или одно из неравенств среди указанных (40) и им аналогичных. *Чтобы построить для уравнения $F=0$ другое, находящееся с ним в инволюции уравнение $\Phi=const$, можно искать частный интеграл, независимый от интеграла $F=0$, системы двух линейных однородных уравнений 1-го порядка. Уравнениями этой системы являются: любое из трех уравнений (41) и любое из двух уравнений (42), а λ_i обозначает любой из корней λ_1, λ_2 квадратного уравнения*

$$R\lambda^2-S\lambda+T=0.$$

Метод интегрирования Дарбу будет не применим, если ни одна из систем двух линейных уравнений 1-го порядка не будет системой совместимой.

Мы сказали, что уравнение $\Phi_1=\text{const}$, находящееся в инволюции с заданным уравнением $F=0$, *можно искать* в виде частного интеграла *системы двух линейных уравнений* 1-го порядка при одном из корней λ_i *квадратного уравнения* (37), т. е. того алгебраического уравнения, которым фактически пользуются в теории Дарбу-Форзайса. Однако такое правило *нельзя считать обязательным:* алгебраическое уравнение (37), *облегчая процесс интегрирования 2 нелинейных уравнений, любых из уравнений (33), вводит излишнее ограничение на функцию Φ, а вместе с этим — и на совместимость двух из уравнений (33), сужая этим самым возможность применения процесса интегрирования данного уравнения $F=0$.*

Если найдем 2 частных интеграла $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2$ двух нелинейных уравнений (33), или одной системы линейных уравнений для одного корня λ_i или по одному интегралу для каждой из систем, соответ-

ствующих корню λ_1 и корню λ_2, причем уравнения $\Phi_1=C_1$, и $\Phi_2=C_2$ будут в инволюции между собою, т. е. удовлетворяют двум из уравнений вида (33), или если 3 уравнения $F=0$, $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2$ удовлетворяют двум условиям, указанным в § 83, то неизвестная функция $z(x, y)$ найдется из системы трех уравнений в полных дифференциалах

$$dp=rdx+sdy;\quad dq=sdx+tdy$$
$$dz=pdx+qdy.$$

Если найдем 3 совместимые между собою интеграла $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2$, $\Phi_3=C_3$, то определение неизвестной функции $z(x, y)$ сводится к интегрированию уравнения с частными производными 1-го порядка

$$f(x, y, z, p, q, C_1, C_2, C_3)=0,$$

какое получим в результате исключения трех производных r, s, t из 4 уравнений

$$F=0;\quad \Phi_1=C_1;\quad \Phi_2=C_2;\quad \Phi_3=C_3.$$

Если уравнение содержит только 2 производных 2-го порядка, r и t, т. е. если оно будет вида

$$F(x, y, z, p, q, r, t)=0,$$

то, рассматривая матрицу (31) и все определители 3-го порядка Δ_{ij}^k, приходим к заключению, что уравнение

$$\Phi_1(x, y, z, p, q, r, t)=\text{const},$$

находящееся в инволюции с уравнением $F=0$, определяется обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка

$$\frac{dt}{dr}+\frac{R}{T}=0.$$

Второе уравнение $\Phi_2=C_2$, совместимое с уравнениями $F=0$, $\Phi_1=C_1$, можно искать в форме частного интеграла, *не содержащего s*, одной из таких четырех систем двух линейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)}\quad R\frac{\partial\Phi}{\partial t}=T\frac{\partial\Phi}{\partial r};\quad T\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+p\frac{\partial\Phi}{\partial z}+r\frac{\partial\Phi}{\partial p}+s\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)=\Xi\frac{\partial\Phi}{\partial t}\\
&\text{(II)}\quad R\frac{\partial\Phi}{\partial t}=T\frac{\partial\Phi}{\partial r};\quad T\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+q\frac{\partial\Phi}{\partial z}+s\frac{\partial\Phi}{\partial p}+t\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)=H\frac{\partial\Phi}{\partial t}\\
&\text{(III)}\quad R\frac{\partial\Phi}{\partial t}=T\frac{\partial\Phi}{\partial r};\quad R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+p\frac{\partial\Phi}{\partial z}+r\frac{\partial\Phi}{\partial p}+s\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)=\Xi\frac{\partial\Phi}{\partial r}\\
&\text{(IV)}\quad R\frac{\partial\Phi}{\partial t}=T\frac{\partial\Phi}{\partial r};\quad R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+q\frac{\partial\Phi}{\partial z}+s\frac{\partial\Phi}{\partial p}+t\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)=H\frac{\partial\Phi}{\partial r}.
\end{aligned}
$$

Если бы все системы (I) — (IV) оказались несовместимыми, тогда 3-е уравнение пришлось бы искать в виде

$$\Psi(x, y, z, p, q, r, s, t)=\text{const},$$

где Ψ *содержит* s, из той системы двух линейных уравнений 1-го порядка одной неизвестной функции Ψ, которая указана была в § 83, где пришлось бы заменить $F_1=F$, $F_2=\Phi_1$, $\Phi=\Psi$.

Для уравнения

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ s,\ t)=0,$$

не содержащего r, *рассмотревши все* Δ_{ij}^k, найдем, что обыкновенное уравнение для определения

$$\Phi_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ s,\ t)=\text{const},$$

будет

$$\frac{dt}{ds}+\frac{S}{T}=0,$$

а уравнение $\Phi_2=C_2$ можно искать либо из системы двух линейных уравнений

$$S\frac{\partial\Phi}{\partial t}=T\frac{\partial\Phi}{\partial s};$$

$$S\frac{\partial\Phi}{\partial x}+T\frac{\partial\Phi}{\partial y}+(Sp+Tq)\frac{\partial\Phi}{\partial z}+(Sr+Ts)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(Ss+Tt)\frac{\partial\Phi}{\partial q}=\Xi\frac{\partial\Phi}{\partial s}+H\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

либо так же, как и 1-е уравнение $\Phi_1=C_1$, только из системы совокупных обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{S}=\frac{dy}{T}=\frac{dz}{Sp+Tq}=\frac{dp}{Sr+Ts}=\frac{dp}{Ss+Tt}=\frac{ds}{-\Xi}=\frac{dt}{-H}.$$

Для уравнения

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s)=0,$$

не содержащего t, одно обыкновенное дифференциальное уравнение, система линейных уравнений с частными производными и система обыкновенных уравнений соответственно будут:

$$\frac{dr}{ds}+\frac{S}{R}=0;$$

$$R\frac{\partial\Phi}{\partial s}=S\frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

$$R\frac{\partial\Phi}{\partial x}+S\frac{\partial\Phi}{\partial y}+(Rp+Sq)\frac{\partial\Phi}{\partial z}+(Rr+Ss)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(Rs+St)\frac{\partial\Phi}{\partial q}=\Xi\frac{\partial\Phi}{\partial r}+H\frac{\partial\Phi}{\partial s};$$

$$\frac{dx}{R}=\frac{dy}{S}=\frac{dz}{Rp+Sq}=\frac{dp}{Rr+Ss}=\frac{dq}{Rs+St}=\frac{dr}{-\Xi}=\frac{ds}{-H}.$$

Для уравнения

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r)=0,$$

имеющего только одну производную 2-го порядка r, надо будет искать интеграл $\Phi_1=C_1$, не содержащий t и содержащий s, из системы обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{R}=\frac{dz}{Rp}=\frac{dp}{Rr}=\frac{dq}{Rs}=\frac{dr}{-\Xi}=\frac{ds}{-H},$$

для уравнения

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ t)=0$$

— интеграл $\Phi_1=C_1$, имеющий s и не имеющий r, из системы

$$\frac{dy}{T}=\frac{dz}{Tq}=\frac{dp}{Ts}=\frac{dq}{Tt}=\frac{ds}{-\Xi}=\frac{dt}{-H},$$

а *для уравнения*

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ s)=0$$

— интеграл $\Phi_1=C_1$, имеющий t и не имеющий r, из системы

$$\frac{dx}{S}=\frac{dz}{Sp}=\frac{dp}{Sr}=\frac{dq}{Ss}=\frac{ds}{-\Xi}=\frac{dt}{-H},$$

или имеющий r и не имеющий t из системы

$$\frac{dy}{S}=\frac{dz}{Sq}=\frac{dp}{Ss}=\frac{dq}{St}=\frac{dr}{-\Xi}=\frac{ds}{-H}.$$

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ.

246. $r=t$.

[O.: $p+q=\varphi(x+y)$; $p-q=\psi(x-y)$;
$z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$;
$z=C_1+C_2x+C_3y+C_4xy+C_5(x^2+y^2)$].

247. $t=xy$.

[O.: $z=\dfrac{xy^3}{6}+y\,\varphi(x)+\psi(x)$].

248. $r=x+y$.

[O.: $z=\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x^2y+x\,\varphi(y)+\psi(y)$].

249. $xr=p+xy$.

[O.: $p=xy\lg x+x\varphi(y)$; $z=\dfrac{1}{2}x^2y\lg x+x^2\varphi(y)+\psi(y)$].

250. $ps=qr$.

[O.: $z=C_1x+C_1y\,\varphi(y)$; $\varphi(z)=x+\psi(y)$].

251. $q^2r-2pqs+p^2t=0$.

[O.: Промежуточные интегралы: $q+p\,\varphi(z)=0$; $x+\dfrac{q}{p}y+\psi(z)=0$;
общий интеграл: $x-y\,\varphi(z)+\psi(z)=0$].

252. $(1+q^2)s=pqt$.

[O.: $p=\sqrt{1+q^2}\,\varphi'(x)$; $y+qz=\psi(q)$; $z=\sqrt{1+C_1^2}\,\varphi(x)+C_1y+C_2$].

253. $(x-y)s+p-q=0$.

$$\left[\text{O.: } p+\frac{z}{x-y}=2\frac{\varphi(x)+\psi(y)}{x-y}+2\psi'(y)+(x-y)\psi'(y);\ z=(x-y)(\psi'-\varphi')+2\varphi+2\phi\right].$$

254. $2pqyz+(p^2y+qx)s+xpt=p^2q(rt-s^2)+xy$.

$$\left[\text{O.: } p^2q-\frac{1}{2}x^2=\varphi\left(pq-\frac{1}{2}y^2\right)\right].$$

255. $r=q$. Решить посредством формулы Фурье.

$$\left[\text{O.: } z=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+2u\sqrt{y})\,e^{-u^2}du\right].$$

256. Проверить, что уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$$

удовлетворяет интеграл

$$u=\varphi(ix+y\cos\alpha+z\sin\alpha)+\psi(x\cos\beta+iy+z\sin\beta)+\gamma(x\cos\gamma+y\sin\gamma+iz).$$

257. Проверить, что уравнение

$$x(r+t)+p=0$$

обладает интегралом

$$z=\int_0^\pi \varphi(x\cos\alpha+iy)\,d\alpha+\int_0^\pi \psi(x\cos\beta-iy)\,d\beta.$$

258. Проверить, что преобразования Шварца

$$u=a_1x+b_1y,\ v=a_2x+b_2y,\ z=\zeta e^{a_3x+b_3y}$$

сводят линейное уравнение с постоянными коэффициентами к одной из таких форм:

$$r+q=0;\quad s+z=0;\quad s+p+q=0.$$

259. Показать, что если $\varphi(x, y)$ есть интеграл уравнения

$$s+\frac{a}{y-x}p+\frac{b}{x-y}q=0,$$

то интегралом того же уравнения будет также

$$z=(C_1x+C_2)^{-b}(C_1y+C_2)^{-a}\varphi\left(\frac{C_3x+C_4}{C_1x+C_2},\ \frac{C_3y+C_4}{C_1y+C_2}\right).$$

260. Проверить, что системы в способе Ампера интегрирования уравнения

$$(q+yt)(r+1)=(ys-p-x)s$$

допускают интегрируемые комбинации:

$$\frac{p+x}{y}=C_1,\quad qy=C_2\ \text{и}\ p+x=C_3,\ qy-x(p+x)=C_4.$$

261. Проверить, что для системы

$$y^2r-x^2t+xp-yq=0$$
$$(xp-yq)r-2(xq-yp)s+(xp-yq)t+(y^2-x^2)(rt-s^2)+q^2-p^2=0$$

удовлетворяются условия инволюционности, и найти общий интеграл.

[О.: $z=\varphi(x^2+y^2)+Cxy$].

262. Проинтегрировать по К. Орлову систему Н. Н. Салтыкова

$$r+xs=0;\quad t+ys=0.$$

[О.: Получим обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$\frac{d^4z}{dx^4}=0,$$

которое дает

$$z=Y_1x^3+Y_2x^2+Y_3x+Y_4,$$

и приводит к полному интегралу заданной системы

$$z=C_1(x^3-6xy+y^3)+C_2x+C_3y+C_4.$$

Для системы порядок уравнения можно снизить: дифференцирование заданных уравнений приводит к зависимостям

$$\alpha+s=0,\ \beta=0,\ \gamma=0,$$

что дает $s=C'$ и обыкновенное дифференциальное уравнение напишется $\frac{d^3z}{dx^3}=C'$, что приводит к написанному полному интегралу].

263. Показать, что $s=f(z)$ не интегрируется по методу Дарбу § 76, если

$$f(z)f''(z)-f'^2(z)\neq 0.$$

264. Проверить, что система $r+sX(x)=0,\ t+sY(y)=0$ совместима и обладает интегралом

$$z=C_1+C_2x+C_3y+C_4xy-C_4\left[X(0)\frac{x^2}{2!}+X'(0)\frac{x^3}{3!}+X''(0)\frac{x^4}{4!}+\ldots+Y(0)\frac{y^2}{2}+\right.$$
$$\left.+Y'(0)\frac{y^3}{3!}+Y''(0)\frac{y^4}{4!}+\ldots\right].$$

265. Найти полный интеграл системы

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}.$$

[О.: $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$].

ГЛАВА X.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ 1-го И 2-го ПОРЯДКОВ ПРИ ДВУХ И БОЛЬШЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЯХ.

Эта глава является наиболее трудной для усвоения из всего курса интегрирования дифференциальных уравнений. Здесь представлены обобщения результатов и основных методов интегрирования, изложенных в предшествующих трех главах, на уравнения с частными производными 1-го и 2-го порядков при нескольких неизвестных функциях. Сначала идут общие понятия об интегрировании и об интегралах уравнений с частными производными при нескольких неизвестных функциях и даются сведения исторического характера относительно рассматриваемого отдела теории дифференциальных уравнений; потом рассматривается интегрирование уравнений линейных относительно производных 1-го порядка и линейных относительно производных и якобианов от неизвестных функций; далее изучается обобщение скобок Пуассона и Якоби-Вейлера и рассматривается интегрирование систем нелинейных уравнений 1-го порядка при двух и больше неизвестных функциях; §§ 84 и 85 посвящаются вопросам обобщения условий инволюционности Дарбу для нелинейных уравнений 2-го порядка при нескольких неизвестных функциях и обобщения метода интегрирования Дарбу для нелинейного уравнения 2-го порядка одной функции на системы нелинейных уравнений 2-го порядка при двух и больше неизвестных функциях. Последние 5 параграфов относятся к приложениям теории для решения весьма важных и в то же время — весьма трудных задач дифференциальной геометрии; на этих задачах читатель вполне может уяснить себе сущность и эффективность методов, изложенных в этой главе. И в тексте, и в конце главы дано вполне достаточно примеров для уяснения сущности дела. Главная трудность, которую читателю надо будет преодолеть для усвоения этой главы,— это привыкнуть к разложениям определителей иногда довольно высокого порядка по теореме Лапласа и к символическим обозначениям для функциональных определителей Якоби; на это последнее обстоятельство было обращено внимание в предшествующей главе.

Вследствие трудности вопроса интегрирования уравнений с частными производными 1-го и 2-го порядков при нескольких неизвестных функциях, отдел этот не был достаточно разработан, математики занимались им мало, и научная литература в этой области, сравнительно с другими отделами теории дифференциальных уравнений, крайне бедна. Достаточно сказать, что до последнего времени не существовало способов не только для того, чтобы находить полные, или общие, но даже частные интегралы хотя бы линейных уравнений 1-го порядка с произвольными переменными коэффициентами, не говоря уже о нелинейных уравнениях 1-го порядка и тем более — линейных и нелинейных уравнениях 2-го порядка. Выдающемуся специалисту в области интегрирования уравнений с частными производными 1-го порядка — Якоби — принадлежит только лишь одна небольшая работа, касающаяся специальных простых линейных уравнений 1-го порядка при нескольких неизвестных функциях. Попытки много работавшего в этой области Лойда Танера, знаменитого Ли и нашего академика В. Г. Имшенецкого, направленные к разработке теории интегрирования изучаемых здесь уравнений 1-го порядка, как об этом подробнее сказано в § 78, не увенчались успехом; попыток обоснования теории интегрирования уравнений 2-го порядка при двух и больше функциях, как будто, совсем не производилось.

Был один только непродолжительный период оживления в области разыскания способов интегрирования уравнений с частными производными 1-го порядка в 80-х и 90-х годах прошлого столетия, когда появилась, между прочим, и относящаяся к этой области диссертация русского математика П. С. Назимова,— это период выдающихся работ Гамбургера, нескольких работ Е. Вебера и некоторых других ученых. После тридцатилетнего почти перерыва, работы в этом отделе математики возобновились, но только в нашем Союзе: с 1925 г. начали печататься работы акад. Г. В. Пфейффера, по специальному вопросу — об уравнениях 1-го порядка линейных в якобианах, проф. Н. М. Михальского, о разыскании частных интегралов уравнений любого порядка, и мои, об интегрировании линейных и нелинейных уравнений 1-го и 2-го порядков.

Эти работы относятся к уравнениям с частными производными при нескольких зависимых и независимых переменных. Работа П. С. Назимова и некоторые из работ Гамбургера и Е. Вебера касаются нелинейных уравнений с частными производными первого порядка при двух только независимых переменных. Такого рода уравнения изучались около 10 лет тому назад, в „Математическом сборнике", проф. В. И. Романовским.

Все параграфы этой главы, кроме большей части вступительного § 78, первой половины § 79, первых двух страниц § 80 и вступительных частей §§ 86, 89 и 90, представляют результаты некоторых из моих исследований и составляют объединение в одно целое извлечений из различных моих статей, напечатаных во Всеукраинской Академии Наук, в изданиях Парижской Академии Наук, Лондонского Математического о-ва, „Наукового т-ва ім. Шевченка", во Львове, в журналах Римской и Бельгийской Академий Наук, в двух итальянских математических журналах и в журнале Украинского Н.-иссл. института математических наук и Харьковского Матем. о-ва. В этой же главе содержатся и результаты, появляющиеся в печати впервые.

Литература:

П. С. Назимов — Об интегрировании некоторых классов уравнений с частными производными нескольких функций..., Москва, 1881.

В. Г. Имшенецкий — (Статья в „Матем. Сборнике", том 7, 1874).

Г. В. Пфейффер — Уваги про окремі випадки лінійних в Jacobi'анах рівнянь з частинними похідними 1-го порядку багатых функцій... (Записки Ф.-М. Від. Укр. Акад. Наук, т. I, 1925).

— (Статьи в „Записках Ф.-М. Від. Укр. Акад. Наук", 1927-28; Comptes rendus de l'Ac. des Sc., Paris, 1927).

Н. Михальский — Метод неозначених сучинників при розшукуванні частинних інтегралів деяких диф. рівнянь з частинними похідними (Журнал Матем. Циклу ВУАН, 1931).

— Метод неозначених функцій и сучинників при розшукуванні частинних інтегралів... (статья в Журн. Матем. Циклу ВУАН, 1932).

М. Куренський — Про інтегрування диференційних рівнянь з частковими похідними при багатьох залежних змінних (Труды Ф.-М. Від. Укр. Акад. Наук, 1927).

— Основи теорії інтегрування рівнянь з частинними похідними 1-го та 2-го порядків при декількох невідомих функціях, I (Труды Прир.-Техн. Від. Укр. Ак. Наук, 1931).

M. Kourensky. (Статьи в „Записках Ф.-М. Відділу Укр. Ак. Наук", 1926; Sitzungsberichte der M.-N.-Ar. Section Sevc. Ges. der. Wissenschaft, Lemberg, 1929, 1933; Comptes rendus de l'Ac. des Sc., Paris, t. 191, 1930; Rendiconti del Cir. M. di Palermo, t. 55, 1931; t. 56, 1932; Proceedings of the London Math. Soc., vol. 31, 1930; Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. X, 1929; vol. XIV, 1931; vol. XV, 1932; vol. XVI, fs. 9, 10, 11, 12, 1932; vol. XVII, fs. 1, 1933; Annali di Matem. p. ed appl., t. VIII, 1930-31; Bulletin de l'Acad. de Belgique, №№ 5, 7, 1933; нюль, август, 1934). Записки Харк. Мат. Т-ва та Укр Н.-Д. Інституту Математики и Механики", т. VI, 1933.

В. И. Романовский — (Статья в „Матем. Сборнике", 1924).

Jacobi — Ges. Werke, Bd. IV, ss. 3-15.

Zajackrowski — (Grünerts Archiv, 56, 2, 1874).

Hamburger — (статьи в Crelle Journal, Bd. 81, 1875; Bd. 93, 1882, Bd. 100, 1886; Bd. 110, 1892).

Lloyd Tanner — (статьи в Proceedings of the London Math. Soc., Vol. IX, 1878; Vol. X. 1879; Vol. XI, 1880).

S. Lie — Gesam. Abhandlungen, Bd. III, Leipzig, 1922; ss. 394, 728; Theorie der Transformations-gruppen. 1-er Abschnitt, Leipzig, 1888; s. 5, 36, 171.

A. R. Forsyth — Theory of dif. equations, Vol. V, Cambridge, 1906; Ch. XI.

C. Bourlet — (Annales de l'Ec. Normale, (3), t. 8, 1891, Suppl.)

E. von Weber — (Math. Annalen, Bd. 49, 1897; Crelle Journal, Bd. 118, 1897; Ber. Ges., Leipzig 49, 1897; 50, 1898; 52, 1900; Sitz. Akad. München, 30, 1900; Math. Annalen, Bd. 55, 1902).

L. Königsberger — (Math. Annalen, Bd. 41, 1892, Bd. 42, 1893; Crelle Journ., Bd. 109, 1892; 112, 1893).

Bäcklund — (Math. Annalen, Bd. 17, 1880; Bd. XIX, 1881; Annali di Matem., t. 23, 1914; Lunds Univers. Arsskr., Bd. 14, 1918; Bd. 16, 1920).

E. Goursat — Le problème de Bäcklund (Mémorial des Sc. Math., Paris, 1925).

G. Darboux — Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, t. I, Paris, 1898, 2 éd., Paris, 1910.

§ 78. Об интегрировании и об интегралах уравнений с частными производными 1-го и 2-го порядков при двух и больше неизвестных функциях двух и больше независимых переменных. Для дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка при одной неизвестной функции нескольких независимых переменных, мы имеем, благодаря работам, главным образом — Эйлера, Шарпи, Лагранжа, Коши, Пуассона, Гамильтона, Якоби, Майера, Ли, — почти законченную классическую теорию интегрирования. Для уравнений 2-го и высших порядков при одной неизвестной функции, преимущественно при двух независимых переменных, начиная со времен Монжа, Ампера и Лапласа, мы имеем много ценных работ различных выдающихся ученых и среди них — такую, как работа Дарбу; эти произведения позволяют нам приступить к задаче интегрирования таких уравнений и, во многих случаях, свести ее к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Между тем для уравнений с частными производными 1-го и 2-го порядков, при двух и больше неизвестных функциях от двух и больше независимых переменных, мы имеем еще очень ограниченную научную литературу, которая до последнего времени не позволяла нам приступить к определению общего или полного интеграла для той или иной конкретной задачи интегрирования уравнения 1-го и в особенности 2-го порядка хотя бы при двух только неизвестных функциях, не давала способов находить даже частные интегралы уравнений 1-го порядка. Исключение составляют специальные виды уравнений 1-го порядка, линейных относительно производных и относительно якобианов от неизвестных функций $z_1, \dots z_n$ независимых переменных $x_1, \dots x_m$. Для этих уравнений, если коэффициенты их обладают рядом алгебраических условий, в большом количестве

$$C_{m+n}^m - mn - 1,$$

и еще дифференциальных условий, определяющих совместимость особых вспомогательных систем линейных уравнений с частными производными 1-го порядка одной неизвестной функции, — тогда можно искать общие интегралы таких уравнений, называемые интегралами Гамбургера, по методу интегрирования указанных уравнений, принадлежащему Гамбургеру. Основные работы Гамбургера, относящиеся к интегрированию уравнений с частными производными 1-го порядка, линейных в якобианах, появились в 80-х годах прошлого столетия, а главнейшая из них—в 90-х годах: в 1886 г., в 100-м томе журнала Креля. К этой же области относятся некоторые из работ, приблизительно того же времени, Заякровского, Натани, Лойда Таннера и диссертация проф. П. С. Назимова. Способ интегрирования системы двух линейных уравнений 1-го порядка при двух зависимых и двух независимых переменных разрабатывал после Гамбургера другой немецкий математик, Кэнигсбергер, хотя систему уравнений этого типа можно проинтегрировать и по способу Гамбургера, не имея вообще ограничений для коэффициентов уравнений; однако результаты Кэнигсбергера, касающиеся формы общего интеграла рассматриваемых им систем линейных уравнений не верны,—в итоге исключения произвольных функций его интеграла можно получить только одно уравнение, а не систему уравнений, заданных для интегрирования. В области интегрирования нелинейных уравнений 1-го порядка, кроме работ Гамбургера, Таннера, Назимова и еще работ, относящихся к исследованиям вопросов об интегрируемости и о форме интегралов — Бурле, Е. Вебера, Драха, Бюдона, Кэнигсбергера, — можно отметить работу акад. В. Г. Имшенецкого, относящуюся к интегрированию системы нелинейных уравнений 1-го порядка при двух зависимых и двух независимых переменных („Математический Сборник", 1874), и работу Ли, посвященную уравнениям подобного же типа (Gesam. Abh., Bd. III, 1922). До времени научной деятельности Гамбургера, при котором начала развиваться теория интегрирования уравнений 1-го порядка при двух и нескольких неизвестных функциях, можно отметить только лишь одну работу Якоби, за 1827 г., в которой речь идет об интегрировании специальной системы линейных уравнений:

$$U_1 \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial z_1}{\partial x_2} + \dots + U_m \frac{\partial z_1}{\partial x_m} = V_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$U_1 \frac{\partial z_n}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial z_n}{\partial x_2} + \dots + U_m \frac{\partial z_n}{\partial x_m} = V_n,$$

где $U_1, \dots U_m; \dots V_1, \dots V_n$ — функции от $x_1, \dots x_m, z_1, \dots z_n$. Интегрирование этой системы, называемой *Якобиевой системой*, сводится, по Якоби, к нахождению $m+n-1$ частных интегралов

$$u_1 = C_1, \dots u_{m+n-1} = C_{m+n-1}$$

одного линейного уравнения 1-го порядка одной неизвестной функции u:

$$V_1 \frac{\partial u}{\partial z_1} + \dots + V_n \frac{\partial u}{\partial z_n} - U_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + U_m \frac{\partial u}{\partial x_m} = 0;$$

общий интеграл будет:

$$\varphi_1 (u_1, \dots u_{m-1}, u_m) = 0$$
$$\varphi_2 (u_1, \dots u_{m-1}, u_{m+1}) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi_n (u_1, \dots u_{m-1}, u_{m+n-1}) = 0,$$

где $\varphi_1, \dots \varphi_n$ — произвольные функции аргументов $u_1, \dots u_{m+n-1}$, являющихся известными функциями независимых и зависимых переменных x, z, причем,—что имеет существенное значение, упускаемое из вида, например, Кэнигсбергером,—функции $\varphi_1, \dots \varphi_n$ должны содержать m аргументов u, но таких, что хотя один из них в одной функции φ_i не входит в выражение для другой функции φ_k, либо,—как это записывается Якоби и Гамбургером,—каждая из произвольных функций $\varphi_1, \dots \varphi_n$ содержит все $m+n-1$ аргументов $u_1, \dots u_{m+n-1}$.

Наконец, после длительного перерыва со времени указанных работ Гамбургера и других ученых, в последние годы опубликовано несколько работ наших математиков: акад. Г. В. Пфейффера, об обобщении алгебраических условий Гамбургера и об интегрировании линейных в якобианах уравнений типа Гамбургера (1925—1928 гг.); Н. М. Михальского, о разыскании частных интегралов уравнений различных порядков (1932 — 1933); В. И. Романовского (1924), касающиеся уравнений 1-го порядка при двух только независимых переменных, и моих, о линейных в якобианах и о нелинейных уравнениях 1-го и 2-го порядков, об интегралах этих уравнений и об обобщении способов интегрирования Гамбургера, Якоби и Дарбу на линейные и нелинейные уравнения 1-го и 2-го порядков при нескольких неизвестных функциях (1926—1933).

Что касается вопроса о доказательстве существования интегралов для систем уравнений 1-го и высших порядков при многих неизвестных функциях, о свойствах интегралов и об условиях для систем уравнений, при которых существуют интегралы голоморфные в заданной области изменения переменных, то из многих работ этого рода следует особо отметить наиболее исчерпывающие работы последнего времени — Рикье (1913) и Жанэ (1927), а из более старых, кроме Коши, Дарбу и Софии Ковалевской, также работы Кэнига (1884), Бурле (1891) и Е. Вебера (1897). В работе Е. Вебера речь идет также об обобщении на уравнения со многими функциями основных понятий об интегральных многообразиях и об интегралах Ли.

Вполне естественной является мысль об обобщении условий интегрируемости для системы нелинейных и линейных уравнений 1-го порядка,—условий, сводящихся к равенству нулю скобок Пуассона и Якоби-Вейлера для каждой пары уравнений, — на уравнения с частными производными 1-го порядка при двух и нескольких неизвестных функциях—с одной стороны, и условий инволюционности Дарбу, изложенных в § 76 для уравнений 2-го порядка при одной неизвестной функции двух независимых переменных — на системы двух нелинейных уравнений 2-го порядка при двух и больше неизвестных функциях от двух и больше независимых переменных—с другой стороны. С этим связано и обобщение способа интегрирования Jacobi, — для систем линейных и нелинейных уравнений 1-го порядка при двух и больше функциях, и способа Дарбу,—для систем линейных и нелинейных уравнений 2-го порядка при двух и больше зависимых переменных. Однако, вследствие трудности, эта мысль не была осуществлена до последнего времени. Вопрос об обобщении скобок Пуассона и Якоби-Вейлера впервые, повидимому, изучал Ли, сообщивший в письме к Майеру в 1877 году следующее.

„В теории уравнений

$$F\left(x_1, \ldots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

самой важной является теорема: если два уравнения $F = 0$, $\Phi = 0$ имеют общие решения, то эти последние удовлетворяют одновременно и уравнению $[F, \Phi] = 0$. Мне удалось найти в высшей мере замечательное обобщение этой теоремы. Пусть $z_1, \ldots z_r$ будут неизвестные функции от $x_1, \ldots x_n$, связанные посредством $(r+1)$-го уравнения

$$F_i\left(x_1, \ldots x_n, z_1, \ldots z_r, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \frac{\partial z_1}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial z_r}{\partial x_n}\right) = 0 \;\; (i = 1, \ldots r+1). \qquad (1)$$

Тогда существуют функции $z_1, \ldots z_r$, которые удовлетворяют этим $(r+1)$-му уравнению и при этом получится всегда одно уравнение

$$[F_1, F_2, \ldots F_{r+1}] = 0,$$

линейное относительно производных одной из функций F_k и такое, что ему удовлетворяют величины $z_1, \ldots z_r$. Это новое уравнение содержит, как и заданные уравнения, *только первые* производные $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}$. Если последнее уравнение обращается в тождество, то отсюда нельзя, к сожалению, заключить, что уравнения (1) обладают наибольшим числом общих решений. Если тем не менее моя теорема важна,—то это состоит в том, что всякую систему уравнений с частными производными *любого* порядка можно свести к форме (1)“. Эти результаты однако не были опубликованы и, по сведениям Энгеля, Ли никогда больше не возвращался к обобщению скобок Пуассона, „именно, вследствие того, что он удостоверился в неверности своего утверждения для $n > 1$“; несправедливость утверждения Энгель доказывает в примечаниях к III тому собрания сочинений Софуса Ли (S. Lie — Gesam. Abh., Bd. III, 1922, ss. 714, 728).

Дальнейшая попытка принадлежит англичанину Таннеру, который несколько лет занимался изучением уравнений 1-го и высших порядков при нескольких неизвестных функциях и, наконец, в 1880 г., по поводу обобщения скобок Пуассона и способов интегрирования Якоби и Дарбу пришел к заключению, что уже для уравнений 1-го

порядка „решение таких уравнений зависит от решения вспомогательной системы, подобной той, которая ищется при интегрировании уравнений с одной зависимой переменной, но которая содержит производные 2-го и высших порядков“, а вследствие этого — „процесс интегрирования, который, во всяком случае, является общим, может служить, возможно, для того, чтобы дать решение в частных случаях“ (Proc. of the London M. Soc., 1880, pp. 72, 82). Подобные выводы привели Форзайса к тому заключению в V томе его трактата, о дифференциальных уравнениях, что обобщение скобок Пуассона и Якоби-Вейлера на уравнения 1-го порядка со многими неизвестными функциями возможно только в случае двух независимых переменных (A. R. Forsyth—Theory..., 1906, pp. 474—478).

В 1897 г. Е. Вебер, на основании исследований Бурле, представил условия совместимости инволюционной системы всякого числа нелинейных уравнений 1-го порядка, решенных относительно ряда определенных производных. Эти условия весьма сложны и для проверки и для практического вычисления. В этой же работе находится идея построения условий инволюционности системы $\mu n + \nu$ уравнений 1-го порядка при m зависимых, $z_1, \ldots z_m$, и n независимых переменных $x_1, \ldots x_n$, нерешенной относительно производных. Эту идею можно встретить и в работе Дарбу за 1870 г. о нелинейных уравнениях 2-го порядка. Для специального частного случая систем уравнений, называющихся *обобщенными якобиевыми системами*, формы

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{q} U_{ij} \frac{\partial z_k}{\partial x_j} = V_i^k \, (i = q+1, \ldots m; \; k = 1, \ldots n),$$

где U_{ij}, V_i^k — функции от $x_1, \ldots x_m, z_1, \ldots z_n$, условия совместимости дал Н. Н. Салтыков в 1905 г., а недавно их получил акад. Г. В. Пфейффер из условий совместимости Кэнига (1884 г.).

Условия совместимости Е. Вебера в смысле инволюции для уравнений 1-го порядка, нерешенных относительно производных, если задано

$$\mu n + \nu \;\; (1 \leqslant \mu \leqslant m - 1; \; 0 \leqslant \nu \leqslant n - 1)$$

уравнений, сводятся к равенству нулю *всех* определителей порядка σ, составленных из матрицы коэффициентов при производных 2-го порядка и из свободных членов линейных относительно производных 2-го порядка уравнений, полученных дифференцированием заданных $\mu n + \nu$ уравнений по $x_1, \ldots x_m$. Эта матрица состоит из ρ горизонталей и τ колонок, причем

$$\sigma = (m - \mu)\nu + \frac{\mu n (2m - \mu + 1)}{2} + 1,$$

$$\rho = m(\mu n + \nu); \;\; \tau = \frac{m(m+1)n}{2} + 1.$$

Оказывается, что если мы видоизменим немного порядок горизонталей и колонок матрицы Е. Вебера и примем во внимание известную из высшей алгебры теорему о том, что для равенства нулю всех определителей порядка σ матрицы из большего числа горизонталей и колонок, чем число σ, надо иметь хотя один неравный нулю определитель Δ порядка $\sigma - 1$ и приравнять нулю только определители порядка σ, получаемые от присоединения к Δ по одной из оставшихся горизонталей и колонок,—то в результате и получим

$$(\rho - \sigma + 1)\ (\tau - \sigma + 1)$$

условий инволюционности системы $\mu n + \nu$ уравнений 1-го порядка, представляющих как раз обобщение условий в виде равенства нулю скобок Пуассона и Якоби-Вейлера для системы уравнений 1-го порядка при одной неизвестной функции z. Выходит, что найденная интуитивно и упомянутая в этом параграфе теорема Ли в основном верна и неверны утверждения всех дальнейших исследователей от Таннера, с 1880 г., Форзайса, 1906 г., и до последнего времени. Условия совместимости, обобщение скобок Пуассона и, в связи с этим, — обобщение способа интегрирования Jacobi, для уравнений 1-го порядка при многих функциях, и способа интегрирования Дарбу, для уравнений 2-го порядка при двух и больше функциях, изложено впервые вкратце в моей докторской диссертации 1927 г. и развито в ряде статей с 1929 по 1933 г. и в I части моей работы „Основы теории интегрирования уравнений с частными производными 1-го и 2-го порядков при нескольких неизвестных функциях" (на укр. яз.), 1931 г. Обнаруживается, что из написанных мною условий совместимости в смысле инволюции систем $(n+1)$-го уравнения при n неизвестных функциях $z_1, \ldots z_n$ получается условие совместимости в виде равенства нулю скобок Пуассона и Якоби — Вейлера для двух уравнений

$$F_1(x_1, \ldots x_m, z, p_1, \ldots p_m) = 0;\ F_2(\ldots) = 0$$

при $n = 1$; получается обобщение формы круглых и прямых скобок Пуассона для системы q уравнений

$$F_1(x_1, \ldots x_m, z, p_1, \ldots p_m) = 0, \ldots F_q = 0,$$

если составлять эти „скобки" не для каждой пары $F_g = 0$, $F_h = 0$, а сразу для трех и больше уравнений 1-го порядка при одной функции, причем число таких независимых условий нового вида равно числу скобок Пуассона для каждой пары, и одни условия равносильны другим; заменяя нелинейные уравнения 2-го порядка при одной функции z,

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0;\ \Phi(x, \ldots t) = 0,$$

системой уравнений 1-го порядка трех неизвестных функций,

$$z_1 = z,\ z_2 = \frac{\partial z}{\partial x},\ z_3 = \frac{\partial z}{\partial y},$$

и составляя условия ее инволюционности, получим условия инволюционности Дарбу для двух уравнений 2-го порядка одной функции z, изложенные в §§ 76 и 77. Условия инволюционности системы 1-го порядка при n неизвестных функциях обобщаются и для систем уравнений 2-го порядка с n неизвестными функциями m независимых переменных, о чем подробнее будет сказано в дальнейшем; из этих последних условий, для $n = 1$, как частный случай, получаются только что указанные условия совместимости Дарбу. Все это приводит, с одной стороны — к способу интегрирования системы линейных и

нелинейных уравнений 1-го порядка при n неизвестных функциях, из которого, как частный случай, когда $n = 1$, получается основной в теории интегрирования уравнений 1-го порядка при одной неизвестной функции так называемый второй способ Якоби, изучавшийся в большей части главы VII, а с другой стороны—к способу интегрирования системы линейных и нелинейных уравнений 2-го порядка при двух и больше неизвестных функциях, из которого, как частный случай, при $n = 1$ и $m = 2$, получается способ интегрирования Дарбу, излагавшийся в последних параграфах главы VIII.

Изложенная выше теорема Ли оправдывается и в том, что вспомогательные уравнения в этом способе интегрирования будут 1-го порядка с одной неизвестной функцией, и в том, что можно получить для интегрирования уравнения линейные относительно производных 1-го порядка одной неизвестной вспомогательной функции Φ, так как, хотя условия инволюционности $(n+1)$-го уравнения имеют вид нелинейных уравнений 1-го порядка с одной функцией Φ, но их интегрирование можно свести к интегрированию линейных уравнений 1-го порядка с той же неизвестной функцией Φ и от такого же числа независимых переменных, как и в нелинейных уравнениях 1-го порядка с одной функцией Φ. Более того—основные положения Ли, высказанные им для уравнений 1-го порядка, остаются верными и для уравнений 2-го порядка. Несправедливо только то утверждение Ли, что для $(n+1)$-го уравнения условие инволюционности будет только одно: от присоединения к системе n уравнений 1-го порядка

$$F_1 = 0, \ldots F_n = 0$$

нового $(n+1)$-го уравнения

$$\Phi = \text{const}$$

получим $\tau_1 - \sigma_1 + 1$ условий, где $\sigma_1 = \rho_1$ и τ_1 — это числа, определяемые по предшествующим формулам для ρ, σ, τ, если положить в них

$$\mu = 1,\ \nu = 1 \text{ и } \mu n + \nu = n + 1.$$

Способ интегрирования не применим тогда, когда система вспомогательных уравнений 1-го порядка с одной неизвестной вспомогательной функцией Φ от $m(n+1) + n$ независимых переменных

$$x_1, \ldots x_m, z_1, \ldots z_n, p_1^1 = \frac{\partial z_1}{\partial x_1},\ p_2^1 = \frac{\partial z_1}{\partial x_2}, \ldots p_m^n = \frac{\partial z_n}{\partial x_m},$$

всегда обладающая интегралами — заданными уравнениями

$$F_1 = 0, \ldots F_n = 0,$$

окажется не имеющей больше чем n независимых интегралов

$$F_1 = 0, \ldots F_n = 0,$$

так же, как не применим способ интегрирования Дарбу для уравнения 2-го порядка $F = 0$, когда вспомогательная система двух уравнений 1-го порядка с одной неизвестной вспомогательной функцией Φ, всегда обладающая интегралом $F = 0$, окажется не имеющей больше одного интеграла — заданного уравнения 2-го порядка $F = 0$ или же ему равносильного.

Уже отмечалось то обстоятельство, что, кроме способа интегрирования Гамбургера для специальных линейных в якобианах уравнений, коэффициенты которых связаны рядом алгебраических и дифференциальных зависимостей, не существовало до последнего времени указаний на то, как находить даже частные интегралы линейных уравнений при $n > 1$ и $m > 2$, переменные коэффициенты которых не связаны зависимостями, и тем более — нелинейных уравнений 1-го порядка, и в особенности — уравнений 2-го порядка, линейных и нелинейных.

В то же время дифференциальная геометрия, гидродинамика и математическая физика давно уже ожидают способов, как находить в первую очередь — хотя бы частные интегралы линейных и нелинейных уравнений 1-го и 2-го порядков, не больше даже чем при трех зависимых и четырех независимых переменных. В дальнейшем, кроме указанных обобщений способа интегрирования Якоби для нелинейных уравнений 1-го порядка при двух и больше функциях двух и больше независимых переменных и обобщения способа интегрирования Дарбу на нелинейные уравнения 2-го порядка при двух неизвестных функциях z, z' двух независимых переменных x, y, — речь идет и об обобщении процесса интегрирования Гамбургера для линейных в якобианах и линейных относительно производных 1-го порядка уравнений, коэффициенты которых не связаны алгебраическими условиями Гамбургера или же связаны условиями отличными от тех, какие непосредственно указываются Гамбургером в его изложении способа интегрирования линейных в якобианах уравнений.

Полный интеграл системы $\mu n + \nu$ линейных и нелинейных уравнений 1-го порядка при n функциях m независимых переменных определяется n зависимостями вида

$$z_k = \Phi_k [x_1, \ldots x_m, C_1, \ldots C_{n(m-\mu+1)-\nu}], \quad (k = 1, \ldots n),$$

имеющими $n(m - \mu + 1) - \nu$ произвольных постоянных $C_1, C_2 \ldots$ Форма функций $\Phi_1, \ldots \Phi_n$ неизвестна даже для уравнений, линейных относительно производных, если переменные коэффициенты их не связаны специальными алгебраическими зависимостями Гамбургера, так как, например, в частности — зависимости вида

$$v_1'(x,z) = C_1 u_1^1(x,z) + \ldots + C_{n(m-\mu+1)-\nu} u^1_{n(m-\mu+1)-\nu}(x,z)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_1^n = C_1 u_1^n + C_2 u_2^n + \ldots$$

могут быть интегралами и для нелинейных уравнений 1-го порядка. Специальный вид предшествующей формы интегралов

$$u_1^1(x,z) = C_1^1 + C_2^1 u_2^1 + \ldots + C_m^1 u_m^1; \quad u_1^2(xz) = C_1^2 + C_2^2 u_2^2 + \ldots + C_m^2 u_m^2; \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

представляет интегральные зависимости полного интеграла для линейных в якобианах уравнений 1-го порядка вида

$$M + M_1^1 \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + M_2^1 \frac{\partial z_1}{\partial x_2} + \ldots M_m^n \frac{\partial z_n}{\partial x_m} +$$

$$M_{12}^{12} D\left(\frac{z_1\ z_2}{x_1, x_2}\right) + M_{13}^{12} D\left(\frac{z_1, z_2}{x_1, x_3}\right) + \ldots = 0,$$

коэффициенты которых связаны приведенными в следующем параграфе алгебраическими условиями Гамбургера или же условиями, представляющими обобщение гамбургеровых.

Общий интеграл системы $\mu n + \nu$ линейных и нелинейных уравнений 1-го порядка, решенных относительно производных, по известной в теории уравнений 1-го порядка теореме Бурле — Е. Вебера, должен иметь ν произвольных функций от $m - \mu - 1$ аргументов каждая и $n - \nu$ произвольных функций от $m - \mu$ аргументов каждая, причем, скажем, первые ν функций $z_1 \ldots z_\nu$ для

$$x_1 = x_1^0, \ldots x_{\mu+1} = x_{\mu+1}^0$$

переходят в заранее заданные функции

$$f_1(x_{\mu+2}, \ldots x_m), \ldots f_\nu(x_{\mu+2}, \ldots x_m),$$

а остальные $n - \nu$ функций $z_{\nu+1}, \ldots z_n$ для

$$x_1 = x_1^0, \ldots x_\mu = x_\mu^0,$$

переходят в заданные функции

$$f_{\nu+1}(x_{\mu+1}, \ldots x_m), \ldots f_n(x_{\mu+1}, \ldots x_m).$$

Форма общего интеграла неизвестна ни для нелинейных, ни для линейных уравнений. Исключение представляют упоминавшаяся в начале этого параграфа Якобиева система линейных уравнений 1-го порядка и система Гамбургеровых линейных относительно производных и якобианов уравнений, с его алгебраическими зависимостями для коэффициентов; эти уравнения обладают интегралом Гамбургера, вида

$$\varphi_1[u_1^1(x,z), \ldots u_m^1(x,z)] = 0; \quad \varphi_2[u_1^2(x,z), \ldots u_m^2(x,z)] = 0, \ldots$$

где φ_1, $\varphi_2, \ldots$ произвольные функции входящих в них аргументов $u_1^1, \ldots u_m^1$; $u_1^2, \ldots u_m^2; \ldots$

К вопросам о переходе от полного интеграла заданной системы $\mu n + \nu$ уравнений 1-го порядка к ее общему интегралу, посредством вариации произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots$, относятся исследования Л. Кэнигсбергера и мои, в главе VII моей диссертации „Про інтегрування ... " (1927). В этой же главе показано, что теория Кэнигсбергера неверна в нескольких пунктах и выводы из нее ошибочны. Во II главе находится также изучение вопроса о преобразовании заданной системы уравнений 1-го порядка в такую новую, которая не содержит явно зависимых переменных, что изучалось до этого и Кэнигсбергером для системы n уравнений 1-го порядка при n функциях $z_1, \ldots z_n$, и обобщение для той же цели 2-й подстановки Якоби из теории уравнений 1-го порядка при одной неизвестной функции z: рассматривается преобразование вида

$$y_k = z_k t_k \ (k = 1, \ldots r; r \leqslant n),$$

где $t_1, \ldots t_2$ обозначают новые независимые переменные, а $y_1, \ldots y_r$ — новые зависимые—функции от $x_1, \ldots x_m, t_1, \ldots t_r$, причем функции z_k не зависят от переменных t.

Еще более сложны для изучения вопросы, касающиеся полных и общих интегралов уравнений порядков 2-го и выше. О формах и свойствах интегралов этих уравнений известно очень мало.

Пример.

$$\left\{\begin{aligned} & x_1(1-x_1x_2)p_1^1+x_2^1p_2^1-x_1x_2p_1^2+(x_1x_2-1)z_1=0 \\ & -x_1x_2p_2^1+x_1p_1^2+x_2(1-x_1x_2)p_2^2+(x_1x_2-1)z_2=0. \end{aligned}\right.$$

Преобразование $y_1=z_1t_1$; $y_2=z_2t_2$ приводит к системе, не имеющей явно функций:

$$\left\{\begin{aligned} & x_1t_2(1-x_1x_2)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+t_2x_2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}-x_1x_2t_1\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+t_1t_2(x_1x_2-1)\frac{\partial y_1}{\partial t_1}=0 \\ & -x_1x_2t_2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+x_1t_1\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+x_2t_1(1-x_1x_2)\frac{\partial y_2}{\partial x_2}+t_1t_2(x_1x_2-1)\frac{\partial y_2}{\partial t_2}=0. \end{aligned}\right.$$

Полный интеграл этой последней системы

$$\begin{aligned} y_1 &= t_1(C_1x_1+C_2x_2+C_3x_1x_2)+C_5 \\ y_2 &= t_2(C_3x_1+C_2x_1x_2+C_4x_2)+C_6 \end{aligned}$$

приводит к полному интегралу заданной системы:

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1x_1+C_2x_2+C_3x_1x_2 \\ z_2 &= C_3x_1+C_2x_1x_2+C_4x_2. \end{aligned}$$

§ 79. Способ интегрирования Гамбургера для линейных в якобианах уравнений и обобщение некоторых результатов Гамбургера.

Продифференцировавши уравнение

$$\varphi\,[u_1(x_1,\ldots x_m;\ z_1,\ldots z_n);\ldots u_m(x_1,\ldots x_m;\ z_1,\ldots z_n)]=0, \tag{2}$$

где φ — символ произвольной функции, а $u_1,\ldots u_m$ — заданные функции, по $x_1,\ldots x_m$ получим m линейных и однородных относительно производных $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\ldots\frac{\partial\varphi}{\partial u_m}$ уравнений. Исключивши из этих m однородных уравнений m только что указанных произвольных элементов, будем иметь дифференциальное уравнение 1-го порядка с n неизвестными функциями $z_1,\ldots z_n$, в виде равенства нулю определителя m-го порядка из коэффициентов при производных $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\ldots\frac{\partial\varphi}{\partial u_m}$. Это дифференциальное уравнение, если развернем определитель, будет иметь вид:

$$M+M_1^1\frac{\partial z_1}{\partial x_1}+M_2^1\frac{\partial z_1}{\partial x_2}+\ldots+M_m^n\frac{\partial z_n}{\partial x_m}+$$

$$+M_{12}^{12}D\left(\frac{z_1,z_2}{x_1,x_2}\right)+M_{13}^{12}D\left(\frac{z_1,z_2}{x_1,x_3}\right)+\ldots+M_{1\ldots m}^{1\ldots m}D\left(\frac{z_1,\ldots z_m}{x_1,\ldots x_m}\right)+\ldots=0; \tag{3}$$

если $n\geqslant m$, то в последних якобианах переменные $x_1,\ldots x_m$ содержатся все от первого до последнего, а из переменных $z_1,\ldots z_n$ содержится только часть или все, если $n=m$; в другие якобианы m-го порядка входят иные m из переменных $z_1,\ldots z_n$. Если $n\leqslant m$, то последние члены дифференциального уравнения содержат якобианы не выше, чем n-го порядка, причем в эти члены входят все зависимые $z_1,\ldots z_n$.

Подобные дифференциальные уравнения называются *линейными в якобианах уравнениями 1-го порядка.* Частным случаем таких уравнений являются *уравнения, линейные относительно m n производных* 1-го порядка

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial z_1}{\partial x_2},\ldots\frac{\partial z_n}{\partial x_m};$$

получаются они из предшествующих, если коэффициенты при якобианах 2-го порядка и выше равны нулю, т. е. если:

$$M_{12}^{12}=0;\ M_{13}^{12}=0;\ldots M_{1\ldots m}^{1\ldots m}=0.$$

Из теории определителей известно, что между всеми коэффициентами линейного в якобианах уравнения (3) будет существовать целый ряд алгебраических равенств, в количестве

$$C_{m+n}^{m}-mn-1,$$

если $n\geqslant m$. В полных курсах теории определителей[1] можно найти и вид этих равенств: *в случае, если свободный член уравнения (3) не равен нулю,* $M\neq 0$, то равенства можно записать таким образом:

$$\left.\begin{aligned} & M_{i_1i_2}^{k_1k_2}M=\begin{vmatrix} M_{i_1}^{k_1} & M_{i_2}^{k_1} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ M_{i_1}^{k_2} & M_{i_2}^{k_2}\end{vmatrix};\quad M_{i_1i_2i_3}^{k_1k_2k_3}M^2=\begin{vmatrix} M_{i_1}^{k_1} & M_{i_2}^{k_1} & M_{i_3}^{k_1} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ M_{i_1}^{k_3} & M_{i_2}^{k_3} & M_{i_3}^{k_3}\end{vmatrix}; \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & M_{1\ldots m}^{k_1\ldots k_m}M^{m-1}=\begin{vmatrix} M_1^{k_1} & \ldots & M_m^{k_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ M_1^{k_m} & \ldots & M_m^{k_m}\end{vmatrix} \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

где $i_1,i_2,\ldots$ — это числа $1,\ldots m$, а $k_1,k_2\ldots$ — это числа $1,\ldots n$.

Эти условия для коэффициентов называются *алгебраическими условиями Гамбургера.* Если все алгебраические условия удовлетворяются и если система n линейных вспомогательных уравнений 1-го порядка с одной неизвестной функцией u, вида

$$\left.\begin{aligned} & M\frac{\partial u}{\partial z_1}=M_1^1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+M_m^1\frac{\partial u}{\partial x_m} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & M\frac{\partial u}{\partial z_n}=M_1^n\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+M_m^n\frac{\partial u}{\partial x_m}\end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

будет системой интегрируемой, тогда, найдя m частных интегралов $u_1,\ldots u_m$ этой системы, будем иметь, по Гамбургеру, *общий интеграл уравнения* (3) *в виде зависимости* (2), где φ — произвольная функция. Чтобы система m однородных линейных уравнений с частными производными 1-го порядка одной функции u была бы системой интегрируемой, надо, чтобы ее коэффициенты $M,\ M_1^1,\ldots M_m^n$ удовлетворяли дифференциальным условиям, известным из главы VI; их можно было бы назвать *дифференциальными условиями Гамбургера* для первых $mn+1$-го коэффициентов уравнения (3).

Общий интеграл (2) уравнения (3) называется *интегралом Гамбургера для одного уравнения.*

В том частном случае, когда мы имеем *уравнение линейное относительно производных* и неоднородное, $M\neq 0$, алгебраические условия Гамбургера сводятся к равенству нулю только определителей

---

[1] Например, — в небольшом, сжатом и сравнительно недавнем курсе E. Pascal — Die Determinanten, перевод с итальянского, Лейпциг, 1900, стр. 115—124.

2-го порядка в (4) и становятся *условиями пропорциональности коэффициентов при производных*, т. е. будут:

$$\frac{M^{k_1}_{i_1}}{M^{k}_{i_1}} = \frac{M^{k_1}_{i}}{M^{k}_{i}}, \text{ или иначе: } \frac{M^{k_1}_{i_1}}{M^{k_1}_{i}} = \frac{M^{k}_{i_1}}{M^{k}_{i}}. \tag{6}$$

Число их равно $(m-1)(n-1)$. Система (5) и вид общего интеграла (2) остаются без изменения.

Процесс Гамбургера *интегрирования системы n линейных уравнений*

$$\underset{r}{M} + \underset{r}{M^1_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \underset{r}{M^1_2}\frac{\partial z_1}{\partial x_2} + \ldots + \underset{r}{M^n_m}\frac{\partial z_n}{\partial x_m} = 0, \quad (r = 1, \ldots n), \tag{7}$$

которая вообще, при n неизвестных функциях $z_1, \ldots z_n$, будет системой совместимой, состоит в следующем. Помноживши уравнения (7) на линейные множители $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ — неизвестные функции от $x_1, \ldots x_m$, $z_1, \ldots z_n$, и сложивши произведения, получим:

$$(\lambda M) + (\lambda M^1_1)\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + (\lambda M^1_2)\frac{\partial z_1}{\partial x_2} + \ldots + (\lambda M^n_m)\frac{\partial z_n}{\partial x_m} = 0, \tag{8}$$

где обозначено

$$(\lambda M) = \lambda_1 \underset{1}{M} + \ldots + \lambda_n \underset{n}{M}; (\lambda M^1_1) = \lambda_1 \underset{1}{M^1_1} + \ldots + \lambda_n \underset{n}{M^1_1}; \ldots$$

Пользуясь условиями пропорциональности (6) для одного уравнения (8) и обозначая

$$\frac{(\lambda M_2{}^1)}{(\lambda M_1{}^1)} = \frac{(\lambda M_2{}^2)}{(\lambda M_1{}^2)} = \ldots = \frac{(\lambda M_2{}^n)}{(\lambda M_1{}^n)} = \mu,$$

будем иметь для μ такое *характеристическое уравнение Гамбургера* n-й степени

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{M^1_2} - \mu \underset{1}{M^1_1}, \ldots \underset{n}{M^1_2} - \mu \underset{n}{M^1_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \underset{1}{M^n_2} - \mu \underset{1}{M^n_1}, \ldots \underset{n}{M^n_2} - \mu \underset{n}{M^n_1} \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Каждому корню μ_k этого уравнения соответствует система значений $\lambda^k_1, \ldots \lambda^k_n$, которые получим из уравнений

$$\lambda_1(\underset{1}{M^1_2} - \mu \underset{1}{M^1_1}) + \ldots + \lambda_n(\underset{n}{M^1_2} - \mu \underset{n}{M^1_1}) = 0,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\lambda_1(\underset{1}{M^n_2} - \mu \underset{1}{M^n_1}) + \ldots \lambda_n(\underset{n}{M^n_2} - \mu \underset{n}{M^n_1}) = 0,$$

и будем иметь одно уравнение вида (8); для него находится общий интеграл Гамбургера (2), если удовлетворены будут остальные

$$(m-2)\ (n-1)$$

алгебраических условий Гамбургера (6). Для n корней уравнения (9) будем иметь n уравнений вида (8), что приведет к *общему интегралу Гамбургера для системы n линейных уравнений* (7):

$$\varphi_1(u^1_1, \ldots u^1_m) = 0, \ldots \varphi_n(u^n_1, \ldots u^n_m) = 0, \tag{10}$$

где $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ — произвольные функции, а $u^k_1, \ldots u^k_m$ — система частных интегралов вспомогательной системы линейных уравнений вида (5) для корня μ_k.

Для кратного корня μ, изменится система (5) и соответственно — вид общего интеграла (10).

Частные случаи системы линейных уравнений (7) представляют якобиева и обобщенная якобиева системы, упоминавшиеся в § 78.

Алгебраических условий Гамбургера для коэффициентов совсем не будет, если

$$(m-2)\ (n-1) = 0,$$

т. е. для одного линейного уравнения с одной неизвестной функцией z, когда $n = 1$, и *для системы n линейных уравнений при n неизвестных функциях двух только независимых переменных* x_1, x_2, когда $m = 2$.

Алгебраические условия Гамбургера, в случае $M \neq 0$, были обобщены акад. Г. В. Пфейффером. Система $m - q$ линейных в якобианах уравнений сводится к виду

$$\left.\begin{aligned} M + M^1_1\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \ldots + M^n_{q+1}\frac{\partial z_n}{\partial x_{q+1}} + (H_{q+1}) = 0; \\ \underset{h}{N} + \underset{h}{N^1_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \ldots + \underset{h}{N^n_{q+1}}\frac{\partial z_n}{\partial x_h} + (H_h) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$
$$(M \neq 0,\ M^1_{q+1} \neq 0; h = q+2, \ldots m),$$

где (H_{q+1}), $(H_{q+2}), \ldots (H_n)$ обозначают все члены с якобианами.

Коэфициенты $\underset{h}{N^n_{q+1}}$ должны быть пропорциональны коэфициентам M^n_{q+1} и могут считаться равными:

$$\underset{h}{N^1_{q+1}} = M^1_{q+1}, \ldots \underset{h}{N^n_{q+1}} = M^n_{q+1} \tag{12}$$

и еще должно быть:

$$\underset{h}{N} = M\omega_h;\ \underset{h}{N^1_1} = M^1_1\omega_h - M^1_{q+1}\omega_{h1}, \ldots \underset{h}{M^n_q} = M^n_q\omega_h - M^n_{q+1}\omega_{hq}, \tag{13}$$

где ω_h; $\omega_{h1}, \ldots \omega_{hq}$ — функции переменных $x_1, \ldots x_m, z_1, \ldots z_n$. Ограничения (12)—(13) представляют алгебраические условия Г. В. Пфейффера и будут единственными, при которых система (11) обладает интегралом Гамбургера

$$\varphi(u_1, \ldots u_q, u_{q+1}) = 0\ \ (q + 1 < m),$$

где $u_1, \ldots u_q$, u_{q+1} представляют частные интегралы такой системы линейных уравнений 1-го порядка, если эта система будет полной:

$$M\frac{\partial u}{\partial z_1} = M^1_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + M^1_q\frac{\partial u}{\partial x_q} + M^1_{q+1}\frac{\partial u}{\partial x_{q+1}};$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$M\frac{\partial u}{\partial z_n} = M^n_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + M^n_q\frac{\partial u}{\partial x_q} + M^n_{q+1}\frac{\partial u}{\partial x_{q+1}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_{q+2}} = \omega_{q+2\,1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + \omega_{q+2\,q}\frac{\partial u}{\partial x_q} + \omega_{q+2}\frac{\partial u}{\partial x_{q+1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} = \omega_{m1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + \omega_{mq}\frac{\partial u}{\partial x_q} + \omega_m\frac{\partial u}{\partial x_{q+1}}.$$

Алгебраические условия для коэффициентов и система вспомогательных линейных уравнений (5) обобщены мною на тот случай, когда не равен нулю не один только свободный член M уравнения (3), (в случае однородного уравнения, когда $M = 0$, условия (4) и система (5) отпадают — метод интегрирования Гамбургера не применим), а когда неравен нулю *один любой из mn коэффициентов* M_i^k при производных $\frac{\partial z_k}{\partial x_i}$, а свободный член M может и равняться нулю и не равняться нулю, т. е.

$$M_i^k \neq 0; \quad M = 0 \text{ или } M \neq 0.$$

Условия (4) заменяются условиями вида

$$M_{i_1}^{k_1} M_l^k + M_{ii_1}^{k_1 k} M - M_{i_1}^k M_i^{k_1} = 0;\; M_{ii_1}^{k_1 k_2} M_i^k + M_{ii_1}^{k_2 k} M_i^{k_1} + M_{ii_1}^{kk_1} M_i^{k_2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M_{i_1 i_2}^{k_1 k_2} M_l^k - M_{ii_1 i_2}^{k_1 k_2 k} M - M_{i_1 i_2}^{kk_2} M_i^{k_1} + M_{i_1 i_2}^{kk_1} M_i^{k_2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

а система (5) заменяется такой:

$$\left.\begin{aligned}
M_i^k\frac{\partial u}{\partial z_1} &= M_{i1}^{k1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + M_{ii-1}^{k1}\frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} + M_i^1\frac{\partial u}{\partial z_k} + \\
&\quad + M_{ii+1}^{k1}\frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \ldots M_{im}^{k1}\frac{\partial u}{\partial x_m} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
M_i^k\frac{\partial u}{\partial z_{k-1}} &= M_{i1}^{kk-1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + M_{ii-1}^{kk-1}\frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} + M_i^{k-1}\frac{\partial u}{\partial z_k} + \\
&\quad + M_{ii+1}^{kk-1}\frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \ldots + M_{im}^{kk-1}\frac{\partial u}{\partial x_m} \\
-M_i^k\frac{\partial u}{\partial x_i} &= M_1^k\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + M_{i-1}^k\frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} - M\frac{\partial u}{\partial z_k} + \\
&\quad + M_{i+1}^k\frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \ldots + M_m^k\frac{\partial u}{\partial x_m} \\
M_i^k\frac{\partial u}{\partial z_{k+1}} &= M_{i1}^{kk+1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + M_{ii-1}^{kk+1}\frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + M_i^{k+1}\frac{\partial u}{\partial z_k} + \\
&\quad + M_{ii+1}^{kk+1}\frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \ldots + M_{im}^{kk+1}\frac{\partial u}{\partial x_m} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
M_i^k\frac{\partial u}{\partial z_n} &= M_{i1}^{kn}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + M_{ii-1}^{kn}\frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} + M_i^n\frac{\partial u}{\partial z_k} + \\
&\quad + M_{ii+1}^{kn}\frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \ldots + M_{im}^{kn}\frac{\partial u}{\partial x_m}.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Для линейного однородного уравнения условия пропорциональности (6) сохраняются, а система (14) перепишется так:

$$\left.\begin{aligned}
M_i^k\frac{\partial u}{\partial z_1} &= M_1^1\frac{\partial u}{\partial z_k}, \ldots M_i^k\frac{\partial u}{\partial z_{k-1}} = M_i^{k-1}\frac{\partial u}{\partial z_k} \\
M_i^k\frac{\partial u}{\partial z_{k+1}} &= M_i^{k+1}\frac{\partial u}{\partial z_k}; \ldots M_i^k\frac{\partial u}{\partial z_n} = M_i^n\frac{\partial u}{\partial z_k} \\
-M_i^k\frac{\partial u}{\partial x_i} &= M_1^k\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + M_{i-1}^k\frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} - M\frac{\partial u}{\partial z_k} + \\
&\quad + M_{i+1}^k\frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \ldots + M_m^k\frac{\partial u}{\partial x_m}.
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Общий интеграл строится таким же путем, как и раньше, посредством частных интегралов системы (14) или (15).

Формы общего и полного интеграла. как уже отмечалось в § 78, не известны, если имеем уравнения 1-го порядка, отличные от рассмотренных, т. е. от тех, для которых соблюдаются алгебраические условия Гамбургера и их различные обобщения, равно как и дифференциальные условия для коэффициентов вспомогательных линейных уравнений 1-го порядка с одной функцией u.

Можно *обобщить процесс интегрирования Гамбургера* для построения *частных и полных интегралов*

$$u_1(x_1, \ldots x_m, z_1, z_2, \ldots) = 0; \; u_2(\ldots) = 0; \ldots$$

для систем таких линейных в якобианах уравнений, для которых *алгебраические условия Гамбургера и их различные обобщения не соблюдаются*. Ограничимся здесь случаем двух неизвестных функций z_1, z_2 и рассмотрим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
a_1^1 p_1^1 + \ldots + a_n^1 p_n^1 + a_1^2 p_1^2 + \ldots + a_n^2 p_n^2 + b_{12}(p_1^1 p_2^2 - p_2^1 p_1^2) + \\
+ b_{13}(p_1^1 p_3^2 - p_3^1 p_1^2) + \ldots + c = 0 \\
\alpha_1^1 p_1^1 + \ldots + \alpha_n^1 p_n^1 + \alpha_1^2 p_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 p_n^2 + \beta_{12}(p_1^1 p_2^2 - p_2^1 p_1^2) + \\
+ \beta_{13}(p_1^1 p_3^2 - p_3^1 p_1^2) + \ldots + \gamma = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Помножим 2-е уравнение на неопределенный пока множитель $\lambda(x_1, \ldots x_m, z_1, z_2)$, сложим результат с первым уравнением и воспользуемся обозначениями

$$a_i^k + \lambda\alpha_i^k = A_i^k; \; b_{ij} + \lambda\beta_{ij} = B_{ij}; \; c + \lambda\gamma = C.$$

Получим

$$\left.\begin{aligned}
A_1^1 p_1^1 + \ldots + A_n^1 p_n^1 + A_1^2 p_1^2 + \ldots + A_n^2 p_n^2 + B_{12}(p_1^1 p_2^2 - p_2^1 p_1^2) + \\
+ B_{13}(p_1^1 p_3^2 - p_3^1 p_1^2) + \ldots + C = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Чтобы найти интеграл заданной системы в виде зависимостей

$$u_1(x_1, \ldots x_m, z_1, z_2) = 0; \quad u_2(x_1, \ldots x_m, z_1, z_2) = 0,$$

продиффенцируем эти последние 2 уравнения по $x_1, \ldots x_m$, определим из полученных $2m$ уравнений производные $p_1^1, p_2^1, \ldots p_m^2$, подставим их выражения в (17) и приравняем нулю коэффициенты при производных одной из функций u_1, u_2 по всем переменным $x_1, \ldots x_m, z_1, z_2$. Получим систему $m+2$ линейных однородных уравнений 1-го порядка одной неизвестной функции u такого вида:

$$
\begin{gathered}
A_1^1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2^1 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + A_{m-1}^1 \frac{\partial u}{\partial x_{m-1}} + A_m^1 \frac{\partial u}{\partial x_m} - C \frac{\partial u}{\partial z_1} = 0 \\
A_1^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + A_{m-1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_{m-1}} + A_m^2 \frac{\partial u}{\partial x_m} - C \frac{\partial u}{\partial z_2} = 0 \\
-B_{1m} \frac{\partial u}{\partial x_1} - B_{2m} \frac{\partial u}{\partial x_2} - \ldots - B_{m-1,m} \frac{\partial u}{\partial x_{m-1}} + A_m^2 \frac{\partial u}{\partial z_1} - A_m^1 \frac{\partial u}{\partial z_2} = 0 \qquad (18) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
B_{12} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + B_{1m-1} \frac{\partial u}{\partial x_{m-1}} + B_{1m} \frac{\partial u}{\partial x_m} + A_1^2 \frac{\partial u}{\partial z_1} - A_1^1 \frac{\partial u}{\partial z_2} = 0.
\end{gathered}
$$

Чтобы иметь решение, отличное от $u = \text{const}$, надо иметь

$$
\begin{vmatrix}
0, & B_{12}, & \ldots & B_{1,m-1}, & B_{1m}, & A_1^2, & A_1^1 \\
-B_{12}, & 0, & \ldots & B_{2,m-1}, & B_{2m}, & A_2^2, & A_2^1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-B_{1m}, & -B_{2m}, & \ldots & -B_{m-1,m}, & 0, & A_m^2, & A_m^1 \\
-A_1^2, & -A_2^2, & \ldots & -A_{m-1}^2, & -, & A_m^2, & 0 - C \\
A_1^1, & -A_2^1, & \ldots & -A_{m-1}^1, & -, & A_m^1, & C - 0
\end{vmatrix} = 0,
$$

что дает уравнение для определения λ. Каждому корню λ_k соответствует интеграл $u_k(x_1, \ldots x_m, z_1, z_2) = C_k$ системы (18). Интегралы $u_1 = C_1$, $u_2 = C_2, \ldots$, соответствующие корням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, можно использовать для построения более общего интеграла системы (18)

$$U(x_1, \ldots x_m, z_1, z_2, C_1, C_2 \ldots) = 0. \qquad (18')$$

Найдя отсюда, например, $z_1 = V_1(x_1, \ldots x_m, z_2, C_1, C_2, \ldots)$ и подставивши в одно из уравнений заданной системы (16), другое уравнение которой заменено уравнением (17), мы получим уравнение 1-го порядка с одной неизвестной функцией z_2. Полный интеграл его дает вторую зависимость для определения неизвестной функции z_2:

$$U_2(x_1, \ldots x_m, z_2, C_1, C_2, \ldots; K_1, \ldots K_m) = 0,$$

а тогда (18') перепишется так:

$$U_1(x_1, \ldots x_m, z_1, C_1, C_2, \ldots; K_1, \ldots K_m) = 0.$$

Если m число четное, $m = 2p$, тогда определитель порядка $2p+2$ представляет полный квадрат, главные миноры порядка $2p+1$ равны нулю, как косые симметрические определители нечетного порядка, а все другие миноры порядка $2p+1$ также будут нулями, т. е. *ранг системы* (18) уменьшается на 2 единицы и, если система интегрируема, она может дать два частные интеграла u_{k1}, u_{k2} для каждого корня λ_k. *Если m число нечетное*, $m = 2p-1$, преобразованиями, упомянутыми в конце § 78, увеличим число независимых переменных на единицу и перейдем к предшествующему случаю.

Если для уравнения (17) соблюдаются алгебраические условия Гамбургера, то их будет $\frac{1}{2} m(m-1)$, они будут, при $C \neq 0$, иметь вид

$$CB_{ij} = A_i^1 A_j^2 - A_j^1 A_i^2 \ (i, j = 1, \ldots m; \ i \neq j),$$

и система (18) переходит в Гамбургерову вспомогательную систему (5), *а процесс интегрирования превращается в способ интегрирования Гамбургера*, когда можно будет строить и общий интеграл системы (16) в виде

$$\varphi_1(u_1^1, \ldots u_m^1) = 0; \quad \varphi_2(u_1^2, \ldots u_m^2) = 0.$$

Пример.

$$
\begin{gathered}
(2z_1 + z_2)\,[2x_3 p_1^1 - (x_2 - 1) p_2^1 + x_3 p_3^1 + x_3 p_4^1] + (z_1 + 1)\,[2x_3 p_1^2 - (x_2 - 1) p_2^2 + x_3 (p_3^2 + p_4^2)] + \\
+ 2x_3 p_1^3 + (1 - x_2) p_2^3 + x_3 (p_3^3 + p_4^3) - z_1 D\left(\frac{z_2 z_3}{x_2 x_3}\right) + 2x_3 z_1 D\left(\frac{z_2 z_3}{x_3 x_1}\right) + 2x_2 z_1 D\left(\frac{z_2 z_3}{x_1 x_2}\right) - \\
- x_3 D\left(\frac{z_2 z_3}{x_3 x_4}\right) + (z_1 - x_2 + 1) D\left(\frac{z_2 z_3}{x_4 x_2}\right) + 2x_3 (z_1 + 1) D\left(\frac{z_2 z_3}{x_4 x_1}\right) + (2z_1 + z_2) D\left(\frac{z_3 z_1}{x_2 x_3}\right) - \\
- 2x_3 (z_1 + z_2) D\left(\frac{z_3 z_1}{x_3 x_1}\right) - 2 (x_2 z_1 + x_2 z_2 + z_1) D\left(\frac{z_3 z_1}{x_1 x_2}\right) - (2z_1 + z_2) D\left(\frac{z_3 z_1}{x_4 x_2}\right) - \\
- 2x_3 (z_1 + z_2) D_{41}^{31} - (2z_1 + z_2) D_{23}^{12} + 2x_3 (z_1 + z_2 - z_1^2) D_{31}^{12} + 2\,[x_2 (z_1 + z_2 - z_1^2) + z_1^2 + z_1] \cdot \\
\cdot D_{12}^{12} + x_3 (2z_1 + z_2) D_{34}^{12} + x_2 (2z_1 + z_2) D_{42}^{12} - 2x_3 x_1 (z_1 + 1) D_{41}^{12} + (2z_1 + z_2) D_{234}^{123} + \\
+ 2x_3 (z_1 + z_2) D_{341}^{123} - 2\,[z_1^2 + z_1 + x_2 (z_1 + z_2)]\, D_{412}^{123} - 2z_1^2 D_{123}^{123} = 0,
\end{gathered}
$$

где $D_{41}^{31}, D_{23}^{12}, \ldots D_{123}^{123}$ обозначают якобианы 2-го и 3-го порядков, аналогичные тем, какие указаны в уравнении полностью. Имеем $M = 0$, и приходится проверять все обобщенные условия на стр. 156. Они выполняются, и система (14) напишется при $M_i^k = M_4^3 = x_3 \neq 0$ таким образом:

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_3 \frac{\partial u}{\partial z_1} &= -2x_3 (z_1 + z_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} - (2z_1 + z_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 (2z_1 + z_2) \frac{\partial u}{\partial z_3} \\
x_3 \frac{\partial u}{\partial z_2} &= -2x_3 (z_1 + 1) \frac{\partial u}{\partial x_1} + (x_2 - z_1 - 1) \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} + x_3 (z_1 + 1) \frac{\partial u}{\partial z_3} \\
-x_3 \frac{\partial u}{\partial x_4} &= 2x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + (1 - x_3) \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}
\end{aligned}
\right.
$$

Эта система линейных однородных уравнений — полная. Частные ее интегралы

$$
\begin{gathered}
u_1 \equiv x_1 - 2x_2 x_3 + z_1^2 = C_1; \ u_2 \equiv x_2 x_3 - x_1 + x_3 + z_1 z_2 = C_2; \\
u_3 \equiv x_2 x_3 - x_4 + z_3 = C_3; \ u_4 \equiv x_4 - x_3 + z_2 = C_4
\end{gathered}
$$

приводят к общему интегралу заданного уравнения:

$$\varphi(x_1 - 2x_2 x_3 + z_1^2; \ x_2 x_3 - x_1 + x_3 + z_1 z_2; \ x_2 x_3 - x_4 + z_3; \ x_4 - x_3 + z_2) = 0.$$

§ 80. Обобщение скобок Пуассона и Якоби-Вейлера и распространение способа интегрирования Якоби на системы нелинейных уравнений 1-го порядка при нескольких неизвестных функциях нескольких независимых переменных. Положим, что система $\mu n + \nu$ уравнений 1-го порядка

$$F_g(x_1, \ldots x_m, z_1, \ldots z_n, p_1^1, p_2^1, \ldots p_m^n) = 0 \qquad (19)$$

$$\left(p_i^k = \frac{\partial z_k}{\partial x_i}\right)$$

$(g=1,\dots \mu n+\nu;\ 1\leqslant\mu\leqslant m-1;\ 0\leqslant\nu\leqslant n-1;\ i=1,\dots m;\ k=1,\dots n)$ решена, например, относительно таких $\mu n+\nu$ производных:

$$p_1^1,\dots p_\mu^1,\ p_{\mu+1}^1,\dots p_1^\nu,\dots p_\mu^\nu,\ p_{\mu+1}^\nu;\ p_1^{\nu+1},\dots p_\mu^{\nu+1},\dots p_1^n,\dots p_\mu^n. \tag{20}$$

Тогда эти производные будут функциями от $x_1,\dots x_m,\ z_1,\dots z_n$ и от остальных производных в количестве $n(m-\mu)-\nu$. Продифференцировавши каждое из уравнений (19) по $x_1,\dots x_m$, будем иметь систему $m(\mu n+\nu)$ уравнений, линейных относительно производных 2-го порядка p_{ij}^k. Для системы новых уравнений мы могли бы написать таблицу таких производных 2-го порядка $p_{i'j'}^{k'}$, которые будут функциями от $x,\ z$, от производных 1-го порядка, не вошедших в список (20) и от остальных производных 2-го порядка $p_{i''j''}^{k''}$. Эти последние, так называемые *параметрические производные*, будут произвольными величинами не связанными между собою. Они определяются с одной стороны — теми двумя низшими значками i'', j'', из которых ни один не встречается среди низших указателей в перечне (20); от каждой из функций $z_1,\dots z_\nu$ можно взять $\frac{1}{2}(m-\mu-1)(m-\mu)$ таких производных и, следовательно, общее число их будет

$$\frac{1}{2}(m-\mu)(m-\mu-1)\nu.$$

С другой стороны — они определяются всякими $n-\nu$ из верхних значков $\nu+1,\dots n$ и двумя низшими, пробегающими систему $m-\mu$ числовых значений $\mu+1,\dots m$; их будет $\frac{1}{2}(m-\mu)(m-\mu+1)(n-\nu)$. А всего имеем $(m-\mu)\left[\frac{1}{2}n(m-\mu+1)-\nu\right]$ параметрических производных $p_{i''j''}^{k''}$. Следовательно, из всех $\frac{1}{2}m(m+1)n$ производных p_{ij}^k определяются линейными уравнениями 2-го порядка только N производных, где

$$N=\frac{1}{2}m(m+1)n-(m-\mu)\left[\frac{1}{2}n(m-\mu+1)-\nu\right],$$

а вследствие этого $m(\mu n+\nu)-N$ из наших линейных уравнений должны быть следствиями остальных, т. е. должны равняться нулю все определители порядка σ, составленные из матрицы коэффициентов линейных уравнений, состоящей из ρ горизонталей и τ колонок, где

$$\sigma=(m-\mu)\nu+\frac{1}{2}\mu n(2m-\mu+1)+1$$
$$\rho=m(\mu n+\nu);\quad \tau=\frac{1}{2}m(m+1)n+1. \tag{21}$$

Числа $\sigma,\ \rho,\ \tau$, указаны Е. Вебером в 1897 году. Дальнейших исследований Е. Вебер не произвел, отклонился в сторону и пришел к весьма сложным условиям инволюционности для системы, решенной относительно производных (20).

Принимая во внимание упомянутую в § 78 теорему из высшей алгебры о равенстве нулю всех определителей порядка σ, если не равен будет нулю один из определителей матрицы Δ порядка $\sigma-1$ и будут равны нулю $(\rho-\sigma+1)(\tau-\sigma+1)$

определителей порядка σ, получаемых от присоединения к Δ по одной из оставшихся колонок и горизонталей; меняя далее порядок горизонталей и колонок матрицы из коэффициентов упомянутых линейных уравнений 2-го порядка и обозначая

$$X_{gh}=\frac{\partial F_g}{\partial x_h}+\frac{\partial F_g}{\partial z_1}p_h^1+\dots+\frac{\partial F_g}{\partial z_n}p_h^n;\quad P_{gi}^k=\frac{\partial F_g}{\partial p_i^k} \tag{22}$$

$$q=\mu n+\nu$$

$$\left\|\begin{matrix} P_{1i}^1\dots P_{1i}^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_{qi}^1\dots P_{qi}^n \end{matrix}\right\| = (i);\quad \underbrace{\left\|\begin{matrix} 0\dots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\dots 0 \end{matrix}\right\|}_{\leftarrow q\rightarrow} \updownarrow n = 0,$$

получим *условия совместимости в смысле инволюции системы* $q\equiv\mu n+\nu$ *нелинейных уравнений 1-го порядка (19) в виде равенства нулю* $(\rho-\sigma+1)(\tau-\sigma+1)$ *определителей порядка* σ *матрицы*:

$$\left\|\begin{array}{c|c|c|c|c}
\begin{matrix}X_{11}\\ \vdots \\ X_{q1}\end{matrix} & (1)(2)(3)\dots(m) & 0\ 0\dots 0 & 0\dots 0 & \dots 0 \\ \hline
\begin{matrix}X_{12}\\ \vdots \\ X_{q2}\end{matrix} & 0\ (1)\ 0\dots 0 & (2)(3)\dots(m) & 0\dots 0 & \dots 0 \\ \hline
\begin{matrix}X_{13}\\ \vdots \\ X_{q3}\end{matrix} & 0\ 0\ (1)\dots 0 & 0\ (2)\dots 0 & (3)\dots(m) & \dots 0 \\ \hline
\dots & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \hline
\begin{matrix}X_{1m}\\ \vdots \\ X_{qm}\end{matrix} & 0\ 0\ 0\dots(1) & 0\ 0\dots(2) & 0\dots(3) & \dots(m)
\end{array}\right\| \tag{23}$$

Мы получим 2 категории условий инволюционности системы (19): первая содержит элементы 1-й колонки матрицы, т. е., по формулам (22), производные от заданных функций $F_1,\dots F_q$ по переменным $x_1,\dots x_m,\ z_1,\dots z_n$ и по $p_1^1,\ p_2^1,\dots p_m^n$, а вторая, не имеющая элементов 1-й колонки,—только производные по $p_1^1,\ p_2^1,\dots p_m^n$. Условий первой категории будет только одно, если взять определитель Δ из элементов любых $(\sigma-1)$-ой колонок, кроме 1-й и если $\sigma=\rho$, т. е. если

$$\mu n+2=\mu(\mu n+2\nu),$$

иначе сказать — для $n=1$ и $\mu=2$, что соответствует системе двух уравнений при одной неизвестной функции z, и для $\mu=1,\ \nu=1$, что соответствует системе $(n+1)$-го уравнения $F_1=0,\dots F_{n+1}=0$ при n неизвестных функциях $z_1,\dots z_n$. Условий совместимости совсем не будет, т. е. *система инволюционна, если она содержит производные* $p_1^1,\ p_2^1,\dots p_m^n$ *от различных функций* $z_1,\dots z_n$ *и кроме того* $\mu=1$, $\nu=0$, *т. е. если задано* n *уравнений 1-го порядка* $F_1=0,\dots F_n=0$ *с* n *неизвестными функциями* $z_1,\dots z_n$, так как тогда $\sigma>\rho$.

В том частном случае, когда задана *система двух уравнений с одной неизвестной функцией* z,

$$F_1(x_1,\dots x_m,\ z,\ p_1,\dots p_m)=0;\ F_2(x_1,\dots x_m,\ z,\ p_1,\dots p_m)=0,$$

неравенство $\Delta\neq 0$ дает, например,

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_1}\neq 0;\quad D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1,\ p_2}\right)\neq 0,$$

все условия 2-й категории дают тождественные нули, а условие 1-й категории обращается в равенство нулю скобок Пуассона или Якоби-Вейлера:

$$(F_1, F_2) = 0; \ [F_1, F_2] = 0.$$

Если имеем *систему q уравнений с одной неизвестной функцией z*,

$$F_1(x_1, \dots x_m, z, p_1, \dots p_m) = 0; \ \dots F_q(x_1, \dots x_m, z, p_1, \dots p_m) = 0,$$

условия совместимости можно изучать отдельно для каждой пары уравнений $F_g = 0$, $F_h = 0$, тогда получим $\frac{1}{2} q(q-1)$ известных условий

$$(F_h, F_g) = 0, \text{ или } [F_h, F_g] = 0, \ (h, g = 1, \dots q; \ h \neq g),$$

или можно сразу рассматривать совокупности трех, четырех,... q уравнений, тогда придем к условиям в таком же количестве, равносильным равенству нулю круглых или прямых скобок Пуассона и записываемым, например, для трех уравнений $F_h = 0$, $F_g = 0$, $F_k = 0$ в виде зависимостей между определителями 2-го и 3-го порядков.

Например, для трех уравнений

$$F_1(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3) = 0$$
$$F_2(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3) = 0$$
$$F_3(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3) = 0$$

получим:

$$D\left[\frac{F_1F_2F_3}{x_3p_2p_3}\right] D\left(\frac{F_1F_2}{p_1p_2}\right) D\left(\frac{F_1F_2}{p_1p_3}\right) + D\left[\frac{F_1F_2F_3}{x_3p_1p_3}\right] D\left(\frac{F_1F_2}{p_1p_2}\right) D\left(\frac{F_1F_2}{p_2p_3}\right) +$$
$$+ D\left(\frac{F_1F_2F_3}{p_1p_2p_3}\right)\left\{D\left[\frac{F_1F_2}{x_1p_1}\right] D\left(\frac{F_1F_2}{p_1p_2}\right) + D\left[\frac{F_1F_2}{x_2p_2}\right] D\left(\frac{F_1F_2}{p_1p_2}\right)\right\} = 0$$

$$D\left[\frac{F_1F_2F_3}{x_1p_1p_2}\right] D\left(\frac{F_1F_2}{p_2p_3}\right) D\left(\frac{F_1F_3}{p_1p_3}\right) + D\left[\frac{F_1F_2F_3}{x_1p_1p_3}\right] D\left(\frac{F_1F_2}{p_1p_2}\right) D\left(\frac{F_1F_3}{p_2p_3}\right) +$$
$$+ D\left(\frac{F_1F_2F_3}{p_1p_2p_3}\right)\left\{D\left[\frac{F_1F_2}{x_2p_3}\right] D\left(\frac{F_1F_3}{p_2p_3}\right) + D\left[\frac{F_1F_3}{x_3p_3}\right] D\left(\frac{F_1F_2}{p_2p_3}\right)\right\} = 0$$

$$D\left[\frac{F_1F_2F_3}{x_2p_1p_2}\right] D\left(\frac{F_1F_2}{p_1p_3}\right) D\left(\frac{F_1F_3}{p_2p_3}\right) + D\left[\frac{F_1F_2F_3}{x_2p_3p_2}\right] D\left(\frac{F_1F_2}{p_1p_3}\right) D\left(\frac{F_1F_2}{p_1p_2}\right) +$$
$$+ D\left(\frac{F_1F_2F_3}{p_1p_2p_3}\right)\left\{D\left[\frac{F_1F_3}{x_3p_3}\right] D\left(\frac{F_1F_2}{p_3p_1}\right) + D\left[\frac{F_1F_2}{x_1p_1}\right] D\left(\frac{F_1F_3}{p_3p_1}\right)\right\} = 0.$$

Легко проверить, что, например, 1-е условие, вследствие $\Delta \neq 0$ и $D\left(\frac{F_1F_2F_3}{p_1p_2p_3}\right) \neq 0$, можно переписать в таком виде: $[F_1, F_2] = 0$, а остальные 2 будут, очевидно, равносильны условиям $[F_1, F_3] = 0$, $[F_2, F_3] = 0$.

Наконец, *для системы двух уравнений при многих неизвестных функциях $z_1, \dots z_n$, содержащей производные 1-го порядка от одной только функции z_k*:

$$F_1(x_1, \dots x_m, z_1, \dots z_n, p_1^k, \dots p_m^k) = 0$$
$$F_2(x_1, \dots x_m, z_1, \dots z_n, p_1^k, \dots p_m^k) = 0$$

мы приходим к дальнейшему обобщению круглых и прямых скобок Пуассона, когда условия совместимости имеют вид $(F_1, F_2) = 0$,

$[F_1, F_2] = 0$, — *к фигурным скобкам Пуассона*, так как условие инволюционности последней системы двух уравнений будет

$$\{F_1, F_2\} = 0,$$

где

$$\{F_1, F_2\} =$$
$$\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial F_1}{\partial p_i^k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \frac{\partial F_2}{\partial z_1} p_i^1 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial z_n} p_i^n\right) - \frac{\partial F_2}{\partial p_i^k}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} p_i^1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial z_n} p_i^n\right)\right].$$

Условия инволюционности, в виде равенства нулю обобщенных скобок Пуассона и Якоби-Вейлера, приводят *к обобщению способа интегрирования Якоби для линейных и нелинейных уравнений 1-го порядка при n неизвестных функциях m независимых переменных*. Если задана для интегрирования, например, система n нелинейных уравнений

$$F_1(x_1, \dots x_m, z_1, \dots z_n, p_1^1, p_2^1, \dots p_m^n) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F_n(x_1, \dots x_m, z_1, \dots z_n, p_1^1, p_2^1, \dots p_m^n) = 0,$$

то, присоединяя к ней $(n+1)$-е уравнение вида

$$\Phi(x_1, \dots x_m, z_1, \dots z_n, p_1^1, p_2^1, \dots p_m^n) = \mathrm{const},$$

из условий совместимости $(n+1)$-го уравнения, $F_1 = 0, \dots F_n = 0$, $\Phi = \mathrm{const}$, *получим систему уравнений 1-го порядка одной неизвестной функции Φ*, интегрирование которой сводится к интегрированию системы такого же числа линейных уравнений 1-го порядка с той же неизвестной функцией Φ независимых переменных $x_1, \dots x_m, z_1, \dots z_n$, $p_1^1, \dots p_m^n$, обладающей интегралами $F_1 = 0, \dots F_n = 0$. Если эта система допускает еще $n(m-1)$ частных интегралов

$$\Phi_1 = C_1, \dots \Phi_{n(m-1)} = C_{n(m-1)},$$

совместимых друг с другом и с заданными уравнениями $F_1 = 0, \dots F_n = 0$, то неизвестные функции $z_1, \dots z_n$ надо искать с помощью квадратур из зависимостей

$$dz_1 = p_1^1 dx_1 + \dots + p_m^1 dx_m; \dots dz_n = p_1^n dx_1 + \dots + p_m^n dx_m,$$

куда вместо $p_1^1, \dots p_m^n$ подставлены их выражения, найденные из mn уравнений $F_1 = 0, \dots F_n = 0$, $\Phi_1 = C_1, \dots \Phi_{n(m-1)} = C_{n(m-1)}$, а если найдено будет mn подобных интегралов $\Phi_1 = C_1, \dots \Phi_{mn} = C_{mn}$, то неизвестные функции $z_1, \dots z_n$ будем иметь в результате исключения mn производных $p_1^1, \dots p_m^n$ из $n(m+1)$ уравнений $F_1 = 0, \dots F_n = 0$, $\Phi_1 = C_1, \dots \Phi_{mn} = C_{mn}$. В силу соблюдения условий инволюционности для всех этих уравнений, найденные из них выражения для производных $p_1^1, \dots p_m^n$ должны удовлетворять таким равенствам:

$$\frac{dp_i^k}{dx_j} = \frac{dp_j^k}{dx_i}.$$

Способ интегрирования не применим в случае, аналогичном тому, когда не применим способ интегрирования Дарбу для уравнения 2-го порядка

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

т. е. когда вспомогательная система уравнений 1-го порядка с одной неизвестной функцией Φ не даст нужного числа частных интегралов, отличных от интегралов $F_1 = 0, \ldots F_n = 0$, которыми она всегда обладает.

Все эти положения не будем доказывать для любых чисел m и n, и приступим к изучению их для тех численных значений m и n, которые встречаются в практике задач дифференциальной геометрии, гидродинамики, теории упругости, математической физики, т. е. для $m = 2$, 3, 4 и $n = 2$, 3, когда и математический аппарат как раз не так сложен, каков он был бы для любых m и n. Перейдем к рассмотрению главнейших из этих случаев.

§ 81. Интегрирование систем нелинейных уравнений 1-го порядка при двух зависимых и двух независимых переменных. Для $m = 2$, $n = 2$, когда *задана для интегрирования система двух нелинейных уравнений при двух неизвестных функциях z, z' двух независимых переменных x, y,*

$$F_1(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0; \; F_2(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0, \tag{24}$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}; \; p' = \frac{\partial z'}{\partial x}, \; q' = \frac{\partial z'}{\partial y},$$

присоединяя 3-е уравнение с неизвестной функцией Φ:

$$\Phi(x, y, z, z' p, q, p', q') = \mathrm{const}, \tag{25}$$

получим 2 условия инволюционности трех уравнений $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\Phi = \mathrm{const}$, так как

$$m = 2; \; n = 2; \; q = \mu n + \nu = 3; \; \mu = 1, \; \nu = 1,$$
$$\sigma = 6, \; \rho = 6, \; \tau = 7,$$
$$(\rho - \sigma + 1)(\tau - \sigma + 1) = 2$$

и матрица имеет вид:

$$\left\| \begin{array}{c|cccccc|c} \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial\Phi}{\partial p} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'} & \frac{\partial\Phi}{\partial q} & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial q'} \\ \cline{2-7} X_1 & P_1 & P'_1 & Q_1 & 0 & 0 & Q'_1 \\ X_2 & P_2 & P'_2 & Q_2 & 0 & 0 & Q'_2 \\ Y_1 & 0 & 0 & P_1 & Q_1 & Q'_1 & P'_1 \\ Y_2 & 0 & 0 & P_2 & Q_2 & Q'_2 & P'_2 \\ \frac{d\Phi}{dy} & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p} & \frac{\partial\Phi}{\partial q} & \frac{\partial\Phi}{\partial q'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'} \end{array} \right\|$$

Выбравши определителем 5-го порядка Δ определитель Δ^1_{17}, указанный в матрице, получим такие ограничения для функций F_1, F_2, Φ:

$$1) \; D\left(\frac{F_1, F_2}{p, p'}\right) \neq 0; \; 2) \; D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p, q, q'}\right) \neq 0.$$

Условия инволюционности системы трех уравнений (24) и (25) дают такие 2 нелинейные уравнения 1-го порядка одной неизвестной функции Φ, получающиеся из равенства нулю двух соответствующих определителей 6-го порядка:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{(q'p')\frac{\partial\Phi}{\partial q} + (p'q)\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + (qq')\frac{\partial\Phi}{\partial p'}\right\}\left\{(pq')\frac{\partial\Phi}{\partial p} + (qp)\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (pp')\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right\} = \\ = \left\{(p'q')\frac{\partial\Phi}{\partial p} + (q'p)\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (pp')\frac{\partial\Phi}{\partial q'}\right\}\left\{(q'p)\frac{\partial\Phi}{\partial q} + (pq)\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + (qq')\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right\}; \\ \left\{[p'x]\frac{\partial\Phi}{\partial p} + [xp]\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (pp')\frac{d\Phi}{dx}\right\}\left\{(q'p)\frac{\partial\Phi}{\partial q} + (pq)\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + (qq')\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right\} = \\ = \left\{[q'y]\frac{\partial\Phi}{\partial q} + [yq]\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + (qq')\frac{d\Phi}{dy}\right\}\left\{(p'q)\frac{\partial\Phi}{\partial p} + (qp)\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (pp')\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right\}, \end{array}\right\} \tag{26}$$

где круглыми скобками обозначены якобианы 2-го порядка функций заданных F_1, F_2 по указанным в скобках переменным, а прямыми скобками обозначены якобианы, в которых содержатся полные производные по x и по y вида

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}p + \frac{\partial F}{\partial z'}p'$$

$$\frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}q + \frac{\partial F}{\partial z'}q'.$$

Разыскание частных интегралов $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$ системы нелинейных уравнений (26) можно свести к разысканию частных интегралов системы двух линейных уравнений таким образом.

Переписывая систему (26) в виде равенства трех отношений и обозначая эти отношения через $\lambda(x, y, z, z', p, q, p', q')$, имеем:

$$\frac{[q'y]\frac{\partial\Phi}{\partial q} + [yq]\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + (qq')\frac{d\Phi}{dy}}{[p'x]\frac{\partial\Phi}{\partial p} + [xp]\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (pp')\frac{d\Phi}{dx}} = \frac{(q'p)\frac{\partial\Phi}{\partial q} + (pq)\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + (qq')\frac{\partial\Phi}{\partial p}}{(p'q)\frac{\partial\Phi}{\partial p} + (qp)\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (pp')\frac{\partial\Phi}{\partial q}} =$$

$$= \frac{(q'p')\frac{\partial\Phi}{\partial q} + (p'q)\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + (qq')\frac{\partial\Phi}{\partial p'}}{(p'q')\frac{\partial\Phi}{\partial p} + (q'p)\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (pp')\frac{\partial\Phi}{\partial q'}} = \lambda,$$

или

$$[q'y]\frac{\partial\Phi}{\partial q} - \lambda[p'x]\frac{\partial\Phi}{\partial p} + [yq]\frac{\partial\Phi}{\partial q'} - \lambda[xp]\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (qq')\frac{d\Phi}{dy} - \lambda(pp')\frac{d\Phi}{dx} = 0$$

$$\{(qq') - \lambda(p'q)\}\frac{\partial\Phi}{\partial p} + \{(q'p) - \lambda(pp')\}\frac{\partial\Phi}{\partial q} - \lambda(qp)\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (pq)\frac{\partial\Phi}{\partial q'} = 0$$

$$-\lambda(p'q')\frac{\partial\Phi}{\partial p} + (q'p')\frac{\partial\Phi}{\partial q} + \{(qq') - \lambda(q'p)\}\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + \{(p'q) - \lambda(pp')\}\frac{\partial\Phi}{\partial q'} = 0.$$

Последние два уравнения будут равносильны друг другу, если коэффициенты при производных будут пропорциональны, что дает:

$$\frac{\lambda(p'q) + (q'q)}{\lambda(p'q')} = \frac{\lambda(pp') + (pq')}{(p'q')} = \frac{\lambda(qp)}{\lambda(q'p) + (q'q)} = \frac{(qp)}{\lambda(pp') + (qp')},$$

или

$$(p'q')\{(pp')\lambda^2 + [(qp') + (pq')]\lambda + (qq')\} = 0$$
$$(q'p)\{(pp')\lambda^2 + [(qp') + (pq')]\lambda + (qq')\} = 0$$
$$(qp)\{(pp')\lambda^2 + [(qp') + (pq')]\lambda + (qq')\} = 0,$$

так как

$$(pp')(q'q) + (pq)(p'q') + (qp')(pq') \equiv 0.$$

Следовательно, разыскание уравнений $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$ сводится к нахождению частных интегралов одной из таких систем двух линейных уравнений 1-го порядка одной неизвестной вспомогательной функции Φ:

$$\left.\begin{aligned} &[\lambda_i(p'q) + (q'q)]\frac{\partial\Phi}{\partial p} + [\lambda_i(pp') + (pq')]\frac{\partial\Phi}{\partial q} + \lambda_i(qp)\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (qp)\frac{\partial\Phi}{\partial q'} = 0 \\ &\lambda_i[p'x]\frac{\partial\Phi}{\partial p} + [yq']\frac{\partial\Phi}{\partial q} + \lambda_i[xp]\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + [qy]\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + \\ &+ \lambda_i(pp')\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}p + \frac{\partial\Phi}{\partial z'}p'\right) + (q'q)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}q + \frac{\partial\Phi}{\partial z'}q'\right) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

где λ_i — один из корней λ_1, λ_2 квадратного уравнения

$$(pp')\lambda^2 + [(qp') + (pq')]\lambda + (qq') = 0. \qquad (28)$$

Когда одна из систем (27) для одного из корней λ_1, λ_2 этого квадратного уравнения дает 2 интеграла $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$, совместимые с каждым из заданных уравнений $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, или когда из каждой из систем мы найдем по одному из подобных интегралов, тогда определение неизвестных функций z, z' сводится к решению четырех уравнений $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$ относительно p, q, p', q' и к решению Пфаффовых уравнений

$$dz = pdx + qdy; \quad dz' = p'dx + q'dy,$$

или, что удобнее, к исключению трех величин p', q', z' и к интегрированию уравнения 1-го порядка с одной неизвестной функцией z:

$$F(x, y, z, p, q, C_1, C_2) = 0.$$

Если найдем 3 совместимых с уравнениями $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ частных интеграла $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$, $\Phi_3 = C_3$, тогда исключение 4 величин p, q, p', q' приведем к зависимости между x, y, z, z', т. е. к уравнению

$$f(x, y, z, z', C_1, C_2, C_3) = 0,$$

к определению одной из функций z' через другую z и через x, y, C_1, C_2, C_3, к подстановке ее значения в одно из заданных уравнений и, наконец, к определению функции z посредством интегрирования уравнения

$$\Phi(x, y, z, p, q, C_1, C_2, C_3) = 0.$$

Если бы нашли 4 интеграла $\Phi_1 = C_1, \ldots \Phi_4 = C_4$, тогда исключение 4 переменных из шести уравнений, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\Phi_1 = C_1, \ldots \Phi_4 = C_4$, приведет к полному интегралу

$$f_1(x, y, z, z', C_1, C_2, C_3, C_4) = 0; \quad f_2(x, y, z, z', C_1, C_2, C_3, C_4) = 0.$$

Легко проверить, что система (27) всегда обладает двумя интегралами $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ для каждого из корней λ_1, λ_2.

Способ интегрирования не применим для такой системы двух нелинейных уравнений, для которой система (27) не приводит к пол-

ной системе уравнений с одной неизвестной функцией Φ, какая давала бы интегралы $\Phi_1 = C_1, \ldots$, отличные от интегралов $F_1 = 0$, $F_2 = 0$.

Ясное дело, что сведение системы двух нелинейных уравнений (26) к системе двух линейных уравнений (27), связанных еще с алгебраическим уравнением (28), приводит к ограничению для интегралов $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$, подобно тому, как это имеет место для нелинейного уравнения 2-го порядка, при интегрировании его по способу Дарбу, о чем шла речь в главе IX.

Если заданная система $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ содержит меньше четырех производных p, q, p', q', тогда определение новых совместимых с заданными уравнений $\Phi_1 = C_1, \ldots$ сводится к разысканию частных интегралов одного только линейного уравнения с частными производными 1-го порядка одной неизвестной функции Φ, или иначе — к разысканию интегралов системы совокупных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

В этом легко убедиться, составивши матрицу и выписавши условия инволюционности.

Например, для системы

$$F_1(x, y, z, z', p, p', q') = 0; \quad F_2(x, y, z, z', p, p', q') = 0 \qquad (29)$$

совместимые уравнения $\Phi_1 = C_1, \ldots$ будут частными интегралами, которые не содержат переменной q, линейного уравнения

$$([xp'] + [yq'])\frac{\partial\Phi}{\partial p} + [px]\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + [py]\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + (p'p)\frac{d\Phi}{dx} + (q'p)\frac{d\Phi}{dy} = 0,$$

или иначе — системы обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{(p'p)} = \frac{dy}{(q'p)} = \frac{dz}{p(p'p) + q(q'p)} = \frac{dz'}{p'(p'p) + q'(q'p)} = \frac{dp}{[xp'] + [yq']} = \frac{dp'}{[px]} = \frac{dq'}{[py]}.$$

Для системы, не содержащей двух производных

$$F_1(x, y, z, z', p, q') = 0; \quad F_2(x, y, z, z', p, q') = 0, \qquad (30)$$

мы приходим к разысканию частных интегралов, которые содержат q и не содержат p', уравнения

$$[xq']\frac{\partial\Phi}{\partial p} + [yq']\frac{\partial\Phi}{\partial q} + [px]\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + (q'p)\frac{d\Phi}{dx} = 0$$

или интегралов, которые имеют p' и не содержат q, линейного уравнения

$$[xp]\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + [yp]\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + [q'y]\frac{\partial\Phi}{\partial p} + (pq')\frac{d\Phi}{dy} = 0.$$

Если система содержит 2 производные одной только функции, например

$$F_1(x, y, z, z', p, q) = 0; \quad F_2(x, y, z, z', p, q) = 0, \qquad (30')$$

тогда для этих двух уравнений должно соблюдаться условие инволюционности

$$\{F_1, F_2\} = 0;$$

исключение функции z' из уравнений $F_1=0$, $F_2=0$ приводит к интегрированию уравнения 1-го порядка с одной неизвестной функцией z:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0.$$

Если заданная система содержит одну только из четырех производных, тогда исключение ее приводит к зависимости между x, y, z, z'

$$f(x,\ y,\ z,\ z')=0$$

к определению z' через x, y, z и к разысканию неизвестной функции z посредством интегрирования одного только уравнения 1-го порядка с одной неизвестной функцией z; это уравнение получается из двух заданных.

Кроме системы (29), возможны еще 3 случая, когда уравнения $F_1=0$, $F_2=0$ не содержат: (I) p; (III) p'; (IV) q'. Соответствующие линейные уравнения будут:

$$\text{(I)}\quad ([xp']+[yq'])\frac{\partial\Phi}{\partial q}+[qx]\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[qy]\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+(p'q)\frac{d\Phi}{dx}+(q'q)\frac{d\Phi}{dy}=0$$

$$\text{(III)}\quad [q'x]\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[q'y]\frac{\partial\Phi}{\partial q}+([xp]+[yq])\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+(pq')\frac{d\Phi}{dx}+(qq')\frac{d\Phi}{dy}=0$$

$$\text{(IV)}\quad [p'x]\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[p'y]\frac{\partial\Phi}{\partial q}+([xp]+[yq])\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(pp')\frac{d\Phi}{dx}+(qp')\frac{d\Phi}{dy}=0.$$

Кроме системы (30) и системы, аналогичной (30′), т. е. системы с производными p', q', возможны еще 3 случая, когда уравнения $F_1=0$, $F_2=0$ содержат только такие пары производных: (I)′ p, p'; (III)′ q, p'; (IV)′ q, q'. Соответствующие линейные уравнения будут:

$$\text{(I)}'\qquad [p'x]\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[p'y]\frac{\partial\Phi}{\partial q}+[xp]\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[yp]\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+(pp')\frac{d\Phi}{dx}=0$$

$$\text{(III)}' \text{ с } q' \text{ без } p\text{:}\quad [xp']\frac{\partial\Phi}{\partial q}+[qx]\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[qy]\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+(p'q)\frac{d\Phi}{dx}=0$$

$$\text{или с } p \text{ без } q'\text{:}\quad [xp']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[yp']\frac{\partial\Phi}{\partial q}+[qy]\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(p'q)\frac{d\Phi}{dy}=0$$

$$\text{(IV)}'\qquad [xq']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[yq']\frac{\partial\Phi}{\partial q}+[qx]\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[qy]\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+(qq')\frac{d\Phi}{dy}=0.$$

Наконец, если система $F_1=0$, $F_2=0$ содержит функции z, z' и производные от этих функций, но посредством выбранной надлежащим образом подстановки вида

$$\zeta=\Psi(x,\ y,\ z,\ z')$$

может быть сведена к системе формы

$$f_1(x,\ y,\ \zeta,\ \pi,\ \varkappa)=0;\quad f_2(x,\ y,\ \zeta,\ \pi,\ \varkappa)=0,$$

где $\pi=\frac{\partial\zeta}{\partial x}$, $\varkappa=\frac{\partial\zeta}{\partial y}$, тогда предложенная для интегрирования система $F_1=0$, $F_2=0$ может привести нас к интегралу в виде одной только зависимости между переменными z, z', x, y и ее следовало бы назвать поэтому *неопределенной системой* двух уравнений 1-го порядка $F_1=0$, $F_2=0$ при двух неизвестных функциях z, z'. Уравнения новой системы

$f_1=0$, $f_2=0$, а следовательно, и уравнения заданной системы $F_1=0$, $F_2=0$, должны удовлетворять дополнительному условию, а именно — условию совместимости уравнений $F_1=0, F_2=0$, которое можно получить из условия совместимости уравнений $f_1=0$, $f_2=0$ в виде $(f_1, f_2)=0$, или $[f_1, f_2]=0$.

Примеры.

1)
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z'}{\partial x}=z;\ \frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z'}{\partial x}=z'.$$

Определить z и z' как функции от x и y. Способ Гамбургера не применим для этих линейных уравнений, так как характеристическое уравнение дает тождественный нуль:

$$(x+\lambda)\cdot 0-(1+x\lambda)\cdot 0=0.$$

Линейное уравнение (I)′, вследствие того, что $[p'x]=0$, $[xp]=0$, напишется:

$$(q'-xq)\frac{\partial\Phi}{\partial q}+(q-xq')\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+(1-x^2)\frac{d\Phi}{dx}=0,$$

что дает систему:

$$\frac{dx}{1-x^2}=\frac{dz}{p(1-x^2)}=\frac{dz'}{p'(1-x^2)}=\frac{dq}{q'-xq}=\frac{dq'}{q-xq'};$$

$$\frac{dq-xdq'}{q'-2xq+x^2q'}=\frac{dx}{1-x^2};$$

т. е.

$$\frac{(1-x^2)\,d(q-xq')-(q-xq')\,d(1-x^2)}{(1-x^2)^2}=0,$$

что дает

$$\frac{q-xq'}{1-x^2}=C_1$$

и также найдем

$$\frac{q'-xq}{1-x^2}=C_2,$$

т. е.

$$q=xC_2+C_1;\quad q'=xC_1+C_2.$$

Имеем

$$q=xC_2+C_1=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial p'}{\partial y}+x\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q'}{\partial x}+x\frac{\partial p}{\partial y}=C_1+x\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=C_2;\quad p=C_2y+C_3$$

$$z=C_1y+C_2xy+C_3x+C_4;\quad z'=C_4x+C_1xy+C_2y+C_3.$$

2)
$$yq+xp'-z=0;\quad xp+yq'-z'=0.$$

Интегралы системы вида (26) будут:

$$\Phi_1\equiv p+p'=2C_1;\quad \Phi_2\equiv q+q'=2C_2;$$

$$\Phi_3\equiv\frac{y(q-q')+2x(p'-p)}{y}=2C_3;\ \Phi_4\equiv\frac{p-p'}{y^2}=2C_4.$$

$$z=C_1x+C_2y+C_3y+C_4xy^2;\quad z'=C_1x+C_2y-C_3y-C_4xy^2.$$

К интегралам легко притти также заменою переменных:

$$z+z'=\zeta;\ z-z'=\zeta'.$$

Это дает отдельные 2 уравнения с одной неизвестной функцией:

$$\zeta=x\frac{\partial\zeta}{\partial x}+y\frac{\partial\zeta}{\partial y};\ -\zeta'=x\frac{\partial\zeta'}{\partial x}+y\frac{\partial\zeta'}{\partial y}.$$

§ 82. Интегрирование систем нелинейных уравнений 1-го порядка при трех зависимых и двух независимых переменных. При-

соединяя к системе трех уравнений 1-го порядка при трех неизвестных функциях z, z', z'' двух независимых переменных x, y:

$$F_1(x, y, z, z', z'', p, q, p', q', p'', q'') = 0; \; F_2(...) = 0; \; F_3(...) = 0 \qquad (31)$$

4-е уравнение

$$\Phi(x, y, z, z', z'', p, q, p', q', p'', q'') = \text{const}, \qquad (32)$$

получим условия инволюционности четырех уравнений из матрицы

$$\begin{Vmatrix} \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial\Phi}{\partial p} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p''} & \frac{\partial\Phi}{\partial q} & \frac{\partial\Phi}{\partial q'} & \frac{\partial\Phi}{\partial q''} & 0 & 0 & 0 \\ X_1 & P_1 & P_1' & P_1'' & Q_1 & Q_1' & Q_1'' & 0 & 0 & 0 \\ X_2 & P_2 & P_2' & P_2'' & Q_2 & Q_2' & Q_2'' & 0 & 0 & 0 \\ X_3 & P_3 & P_3' & P_3'' & Q_3 & Q_3' & Q_3'' & 0 & 0 & 0 \\ Y_1 & 0 & 0 & 0 & P_1 & P_1' & P_1'' & Q_1 & Q_1' & Q_1'' \\ Y_2 & 0 & 0 & 0 & P_2 & P_2' & P_2'' & Q_2 & Q_2' & Q_2'' \\ Y_3 & 0 & 0 & 0 & P_3 & P_3' & P_3'' & Q_3 & Q_3' & Q_3'' \\ \frac{d\Phi}{dy} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p''} & \frac{\partial\Phi}{\partial q} & \frac{\partial\Phi}{\partial q'} & \frac{\partial\Phi}{\partial q''} \end{Vmatrix},$$

где обозначено

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} p + \frac{\partial\Phi}{\partial z'} p' + \frac{\partial\Phi}{\partial z''} p''; \quad \frac{d\Phi}{dy} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} q + \frac{\partial\Phi}{\partial z'} q' + \frac{\partial\Phi}{\partial z''} q''$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; p' = \frac{\partial z'}{\partial x}, \; p'' = \frac{\partial z''}{\partial x}; \; q = \frac{\partial z}{\partial y}; \; q' = \frac{\partial z'}{\partial y}, \; q'' = \frac{\partial z''}{\partial y}.$$

Чтобы все определители 8-го порядка матрицы были нулями, необходимо и достаточно, чтобы обращались в нуль только 3 определителя, если не равен нулю один из определителей 7-го порядка. Возьмем, например, определитель 7-го порядка Δ, указанный в матрице. Мы будем иметь неравенства

$$1) \; D\left(\frac{F_1, F_2, F_3}{p, p', p''}\right) \neq 0; \quad 2) \; D\left(\frac{F_1, F_2, F_3, \Phi}{p, p', p'', q}\right) \neq 0.$$

Для них условия инволюционности уравнений (31), (32) напишутся:

$$\left.\begin{aligned} (p'p''qq')(pp'p''q) + (pp''q'q)(pp'p''q') + (pp'qq')(pp'p''q'') = 0 \\ (p'p''qq'')(pp'p''q) + (pp''q''q)(pp'p''q') + (pp'qq'')(pp'p''q'') = 0 \end{aligned}\right. \qquad (33)$$

$$(pp'p''q)[xpp'p''] + (pp'p''q)[yp'p''q] + (pp'p''q')[ypqp''] + (pp'p''q'')[ypp'q] = 0,$$

где круглые скобки (...) обозначают якобианы функций F_1, F_2, F_3, Φ относительно указанных в них переменных, а прямые скобки [...] — это якобианы, в которые входят полные производные по x и y. Написанные выше неравенства могут быть заменены другими неравенствами, — в итоге получим условия, равносильные условиям (33).

Введем функции λ и μ по формулам:

$$\frac{(pp'p''q')}{(pp'p''q)} = \lambda(x, y, z, z', z'', p, \ldots q''); \quad \frac{(pp'p''q'')}{(pp'p''q)} = \mu(x, y, z, z', z'', p, \ldots q'').$$

Тогда, принимая во внимание равенства (33), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &(pp'p''q') = (pp'p''q)\lambda; \\ &(pp'p''q'') = (pp'p''q)\mu \\ &(p'p''qq') + (pqp''q')\lambda + (pp'qq')\mu = 0 \\ &(p'p''qq'') + (pqp''q'')\lambda + (pp'qq'')\mu = 0 \\ &[xpp'p''] + [yp'p''q] = [ypp''q]\lambda + [ypqp']\mu \end{aligned}\right\}. \qquad (34)$$

Для сокращения и удобства записи, введем следующие обозначения для якобианов заданных функций F_1, F_2, F_3 относительно соответствующих переменных:

$$\left.\begin{aligned} &P = (pp'p''); \; P_1 = (qp'p''); \; P_2 = (q'p'p''); \; P_3 = (q''p'p''); \; P_4 = (pqp'') \\ &P_5 = (pq'p''); \; P_6 = (pq''p''); \; P_7 = (pp'q); \; P_8 = (pp'q'); \; P_9 = (pp'q'') \\ &Q = (qq'q''); \; Q_1 = (pq'q''); \; Q_2 = (p'q'q''); \; Q_3 = (p''q'q''); \; Q_4 = (qpq'') \\ &Q_5 = (qp'q''); \; Q_6 = (qp''q''); \; Q_7 = (qq'p); \; Q_8 = (qq'p'); \; Q_9 = (qq'p'') \end{aligned}\right\}. \qquad (35)$$

Эти якобианы 3-го порядка представляют собой определители матрицы из трех горизонталей и 6 колонок. Между всеми определителями матрицы существует ряд тождественных соотношений. Число независимых есть

$$10 = C_{3+3}^3 - 3 \cdot 3 - 1.$$

В дальнейшем будем пользоваться такими тождествами, справедливость которых легко проверить:

$$\left.\begin{aligned} PQ_1 = \begin{vmatrix} P_5P_6 \\ P_8P_9 \end{vmatrix}; \quad PQ_2 = \begin{vmatrix} P_3P_9 \\ P_2P_8 \end{vmatrix}; \quad PQ_3 = \begin{vmatrix} P_2P_5 \\ P_3P_6 \end{vmatrix} \\ PQ_4 = \begin{vmatrix} P_6P_9 \\ P_4P_7 \end{vmatrix}; \quad PQ_5 = \begin{vmatrix} P_1P_3 \\ P_7P_9 \end{vmatrix}; \quad PQ_6 = \begin{vmatrix} P_3P_1 \\ P_6P_4 \end{vmatrix} \\ PQ_7 = \begin{vmatrix} P_4P_5 \\ P_7P_8 \end{vmatrix}; \quad PQ_8 = \begin{vmatrix} P_2P_1 \\ P_8P_7 \end{vmatrix}; \quad PQ_9 = \begin{vmatrix} P_1P_2 \\ P_4P_5 \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

и также

$$QP_1 = \begin{vmatrix} Q_5Q_6 \\ Q_8Q_9 \end{vmatrix}; \quad QP_2 = \begin{vmatrix} Q_3Q_9 \\ Q_2Q_8 \end{vmatrix}; \quad QP_3 = \begin{vmatrix} Q_2Q_5 \\ Q_3Q_6 \end{vmatrix} \qquad (37)$$

. . . .

Первое и третье уравнения (34), если раскроем якобианы по элементам 4-й горизонтали и воспользуемся обозначениями (35), перепишутся:

$$(P_2 - \lambda P_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p} + (P_5 - \lambda P_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (P_8 - \lambda P_7)\frac{\partial\Phi}{\partial p''} + \lambda P - P\frac{\partial\Phi}{\partial q'} = 0,$$

$$(\mu Q_8 - \lambda Q_9)\frac{\partial\Phi}{\partial p} + (Q_9 - \mu Q_7)\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (\lambda Q_7 - Q_8)\frac{\partial\Phi}{\partial p''} +$$

$$+ (P_2 + \lambda P_5 + \mu P_8)\frac{\partial\Phi}{\partial q} - (P_1 + \lambda P_4 + \mu P_7)\frac{\partial\Phi}{\partial q'} = 0.$$

Эти два линейные однородные уравнения равносильны друг другу, если коэффициенты их пропорциональны. Это условие, если примем во внимание тождества (36), дает такое одно алгебраическое уравнение для определения неизвестных функций λ и μ:

$$P_4\lambda^2 + P_7\lambda\mu + (P_1 - P_5)\lambda = P_8\mu + P_2. \qquad (38)$$

Второе и четвертое уравнения (34) переписываются так:

$$(P_3-\mu P_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(P_6-\mu P_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(P_9-\mu P_7)\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+\mu P\frac{\partial\Phi}{\partial q}-P\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=0$$

$$(\mu Q_5-\lambda Q_6)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(Q_6-\mu Q_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(\lambda Q_4-Q_5)\frac{\partial\Phi}{\partial p''}-$$

$$-(P_3+\lambda P_6+\mu P_9)\frac{\partial\Phi}{\partial q}+(P_1+\lambda P_4+\mu P_7)\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=0$$

и, на основании тех же соображений, будут равносильны друг другу, если функции λ и μ связаны будут таким вторым алгебраическим уравнением:

$$P_7\mu^2+P_4\mu\lambda+(P_1-P_9)\mu=P_6\lambda+P_3 \tag{39}$$

Из уравнений (38), (39), принимая во внимание тождества (36), (37), мы получаем неизвестную функцию λ в виде одного из корней такого характеристического кубического уравнения:

$$\begin{vmatrix}P_4P_7\\Q_4Q_7\end{vmatrix}\lambda^3+\left(\begin{vmatrix}P_1P_7\\Q_1Q_7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}P_7P_5\\Q_7Q_5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}P_8P_4\\Q_8Q_4\end{vmatrix}\right)\lambda^2+$$
$$+\left(\begin{vmatrix}P_5P_8\\Q_5Q_8\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}P_7P_2\\Q_7Q_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}P_8P_1\\Q_8Q_1\end{vmatrix}\right)\lambda+\begin{vmatrix}P_2P_8\\Q_2Q_8\end{vmatrix}=0, \tag{40}$$

а функция μ определяется посредством λ по формуле

$$\mu=\frac{P_4\lambda^2+(P_1-P_5)\lambda-P_2}{P_8-P_7\lambda}.$$

Таким образом нахождение функции Φ сводится к определению частного интеграла одной из таких систем трех независимых линейных уравнений 1-го порядка одной неизвестной функции Φ:

$$\left.\begin{aligned}
P\frac{\partial\Phi}{\partial q'}&=(P_2-\lambda_iP_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(P_5-\lambda_iP_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(P_8-\lambda_iP_7)\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+\lambda_iP\frac{\partial\Phi}{\partial q}\\
P\frac{\partial\Phi}{\partial q''}&=(P_3-\mu_iP_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(P_6-\mu_iP_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(P_9-\mu_iP_7)\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+\mu_iP\frac{\partial\Phi}{\partial q}\\
&P\frac{d\Phi}{dx}+(P_1+\lambda_iP_4+\mu_iP_7)\frac{d\Phi}{dy}=\\
=([xp'p'']+\lambda_i[yqp'']&+\mu_i[yp'q])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+([xp''p]+[yp''q]+\mu_i[yqp])\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+\\
+([xpp']+\lambda_i[ypq]&+[yqp'])\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+([yp'p'']+\lambda_i[yp''p]+\mu_i[ypp'])\frac{\partial\Phi}{\partial q}
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

где λ_i — это один из корней кубического уравнения (40) и μ_i определяется через корень λ_i по предшествующей формуле.

Каждая система трех линейных уравнений 1-го порядка одной только неизвестной функции Φ совместима, так как она обладает тремя интегралами $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ для каждого из корней λ_i и функции μ_i, но может случиться, что все системы трех уравнений не приводят к полным системам, которые обладали бы частными интегралами $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2\ldots$, отличными от $F_1=0, F_2=0$, $F_3=0$, тогда метод интегрирования будет неприменимым в том же смысле,

как не всегда бывает применим метод интегрирования Дарбу для нелинейного уравнения 2-го порядка с одной неизвестной функцией двух независимых переменных.

Нахождение неизвестных функций z, z', z'' с помощью уравнений $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$, $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2,\ldots$ производится аналогично тому, как мы находим неизвестные функции z, z' в § 81. При этом, если мы найдем 2 интеграла $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2$, совместимые с заданными уравнениями и между собою, тогда исключение, например, функции z'' и производных p'', q'' из пяти уравнений

$$F_1=0,\ F_2=0,\ F_3=0;\quad \Phi_1=C_1,\ \Phi_2=C_2$$

сводит интегрирование заданной системы $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ к интегрированию системы двух уравнений 1-го порядка с двумя неизвестными функциями z, z',

$$f_1(x,y,z,z',p,q,p',q')=0;\quad f_2(x,y,z,z',p,q,p',q')=0,$$

которая была всесторонне изучена в § 81.

Если два неравенства, указанные в начале этого параграфа, мы заменим какими-нибудь двумя другими, то получим системы вспомогательных линейных уравнений, равносильных рассмотренным.

Результаты значительно упрощаются, если уравнения системы $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ содержат меньше шести производных $p,q,\ldots q''$.

Если уравнения заданной системы не содержат одной из шести производных $p,\ldots q''$, то во всех шести возможных случаях вспомогательная система с одной неизвестной функцией Φ состоит только из двух линейных уравнений 1-го порядка, связанных с корнями не кубического, а квадратного уравнения. Эти системы линейных уравнений и соответствующие им алгебраические уравнения для всех случаев, когда нет в уравнениях $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ одной из таких производных:

$$\text{(I) } q'';\quad \text{(II) } p'';\quad \text{(III) } q';\quad \text{(IV) } p';\quad \text{(V) } q;\quad \text{(VI) } p$$

напишутся соответственно:

$$\text{(I)}\left\{\begin{aligned}
&P\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=(P_2-\lambda_iP_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(P_5-\lambda_iP_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(P_8-\lambda_iP_7)\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+\lambda_iP\frac{\partial\Phi}{\partial q}\\
&P\frac{d\Phi}{dx}+(P_1+\lambda_iP_4)\frac{d\Phi}{dy}=([xp'p'']+\lambda_i[yqp''])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+([xp''q]+[yp''q])\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+\\
&\qquad+([xpp']+[yqp'']+\lambda_i[ypq])\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+([yp'p'']+\lambda_i[ypp''])\frac{\partial\Phi}{\partial q}
\end{aligned}\right.$$

$$P_4\lambda^2+(P_1-P_5)\lambda-P_2=0.$$

(II) — буквы P, p заменятся буквами Q, q и наоборот в системе (I).

$$\text{(III)}\left\{\begin{aligned}
&P\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=(P_3-\lambda_iP_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(P_6-\lambda_iP_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(P_9-\lambda_iP_7)\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+\lambda_iP\frac{\partial\Phi}{\partial q}\\
&P\frac{d\Phi}{dx}+(P_1+\lambda_iP_7)\frac{d\Phi}{dy}=([xp'p'']+\lambda_i[yp'q])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+([xp''p]+[yp''q]+\\
&\qquad+\lambda_i[yqp])\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+([xpp']+[yqp'])\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+([yp'p'']+\lambda_i[ypp'])\frac{\partial\Phi}{\partial q}
\end{aligned}\right.$$

$$P_7\lambda^2+(P_1-P_9)\lambda-P_3=0.$$

(IV) — буквы P, p заменятся буквами Q, q и наоборот в системе (III).

$$
\text{(V)}\begin{cases}
P\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=(P_3-\lambda_i P_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(P_6-\lambda_i P_5)\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(P_9-\lambda_i P_8)\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+\lambda_i P\frac{\partial\Phi}{\partial q'}\\
P\frac{d\Phi}{dx}+(P_5+\lambda_i P_8)\frac{d\Phi}{dy}=([xp'p'']+[yq'p'']+\lambda_i[yp'q'])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+\\
+([xp''p]+[yq'p])\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+([xpp']+[ypq'])\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+([yp''p]+\lambda_i[ypp'])\frac{\partial\Phi}{\partial q'}
\end{cases}
$$

$$P_8\lambda^2+(P_5-P_9)\lambda-P_6=0.$$

(VI) буквы P, p заменятся буквами Q, q и наоборот в системе (V).

Еще большие упрощения получим в тех 15 случаях систем, когда уравнения не содержат двух производных из всех шести $p, \ldots q''$. В тех трех случаях из 15, когда уравнения не содержат производных от одной из трех функций, например p'', q'', исключение этой функции z'' из трех уравнений $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ приводит к системе двух уравнений 1-го порядка с двумя неизвестными функциями и задача интегрирования решается по правилам § 81. В остальных 12 случаях, когда заданные 3 уравнения не содержат таких пар производных:

(I) q', q''; (II) p', q''; (III) q, q''; (IV) p, q''; (V) p'', q'; (VI) p', p'',

(VII) p'', q; (VIII) p, p''; (IX) q, q'; (X) p, q'; (XI) p', q; (XII) p, p',

нахождение новых уравнений $\Phi_1=C_1, \ldots$ сводится к разысканию частных интегралов одного из двух линейных уравнений 1-го порядка, или иначе — к разысканию интегралов одной из соответствующих систем обыкновенных уравнений 1-го порядка. Например, для случая (I) приходим к определению частных интегралов $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2, \ldots$, не содержащих переменных q', q'', одного из таких двух линейных уравнений 1-го порядка одной неизвестной функции Φ:

$$P\frac{\partial\Phi}{\partial q}=P_1\frac{\partial\Phi}{\partial p}+P_4\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+P_7\frac{\partial\Phi}{\partial p''},$$

или еще

$$P\frac{d\Phi}{dx}+P_1\frac{d\Phi}{dy}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+([xpp'']+[yqp''])\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+$$

$$+[yp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial q}+([xp'p]+[yp'q])\frac{\partial\Phi}{\partial p''}=0,$$

из которых, например, 1-е приводит к системе обыкновенных уравнений:

$$\frac{dp}{P_1}=\frac{dp'}{P_4}=\frac{dp''}{P_7}=\frac{dq}{-P}.$$

В остальных 11 случаях, каждое, скажем, из первых линейных уравнений будет:

(II) $Q_9\frac{\partial\Phi}{\partial p}+P_4\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=Q_7\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+P_5\frac{\partial\Phi}{\partial q}$; (III) $P\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=P_2\frac{\partial\Phi}{\partial p}+P_5\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+P_8\frac{\partial\Phi}{\partial p''}$

(IV) $P_1\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+Q_8\frac{\partial\Phi}{\partial p''}=P_2\frac{\partial\Phi}{\partial q}+Q_9\frac{\partial\Phi}{\partial p'}$; (V) $P_7\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+Q_5\frac{\partial\Phi}{\partial p}=P_9\frac{\partial\Phi}{\partial q}+Q_4\frac{\partial\Phi}{\partial p'}$

(VI) $Q\frac{\partial\Phi}{\partial p}=Q_1\frac{\partial\Phi}{\partial q}+Q_4\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+Q_7\frac{\partial\Phi}{\partial q''}$; (VII) $Q_2\frac{\partial\Phi}{\partial p}+P_9\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=Q_1\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+P_8\frac{\partial\Phi}{\partial q''}$

(VIII) $Q\frac{\partial\Phi}{\partial p'}=Q_2\frac{\partial\Phi}{\partial q}+Q_5\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+Q_8\frac{\partial\Phi}{\partial q''}$; (IX) $P\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=P_3\frac{\partial\Phi}{\partial p}+P_6\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+P_9\frac{\partial\Phi}{\partial p''}$

(X) $Q_6\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+P_1\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=Q_5\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+P_3\frac{\partial\Phi}{\partial q}$; (XI) $Q_3\frac{\partial\Phi}{\partial p}+P_5\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=Q_1\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+P_6\frac{\partial\Phi}{\partial q'}$

(XII) $Q\frac{\partial\Phi}{\partial p''}=Q_3\frac{\partial\Phi}{\partial q}+Q_6\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+Q_9\frac{\partial\Phi}{\partial q''}$.

Из 20 случаев систем трех уравнений, не содержащих трех производных из $p, \ldots q''$, в 12 случаях исключение одной из функций z_1, z_2, z_3 приведет к системе двух уравнений 1-го порядка при двух неизвестных функциях двух аргументов, причем эти уравнения, как мы только что сказали, будут иметь лишь 3 производные из четырех, а в остальных 8 случаях надо будет искать частные интегралы $\Phi_1=C_1, \ldots$, содержащие одну переменную из 3 величин $p, \ldots q''$, и не содержащие двух других, из одного линейного уравнения; или интегралы, содержащие другую переменную, но без двух остальных из другого линейного уравнения; или, наконец, третью, но без остальных из 3-го линейного уравнения. Из этих 8 случаев, когда система $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ содержит соответственно такие производные:

(I) p, p', p''; (II) p', q, p''; (III) p, q', p''; (IV) q, q', p'';

(V) p, p', q''; (VI) p', q, q''; (VII) q', p, q''; (VIII) q, q', q'',

например, в I случае, надо искать частные интегралы $\Phi_1=C_1, \ldots$, содержащие q и не имеющие q', q'', или интегралы с q', но без q, q'', или, наконец, с q'', но без q, q', соответственно из таких линейных уравнений:

$$\text{(I}'\text{)}\ P\frac{d\Phi}{dx}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[xpp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[xp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[yp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0$$

$$\text{(I}''\text{)}\ P\frac{d\Phi}{dx}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[xpp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[xp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[ypp'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=0$$

$$\text{(I}'''\text{)}\ P\frac{d\Phi}{dx}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[xpp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[xp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[yp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=0.$$

В остальных случаях, например, первые из этих уравнений будут:

$$\text{(II}'\text{)}\ P_1\frac{d\Phi}{dx}+[yqp'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+[xqp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[xp'q]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0$$

$$\text{(III}'\text{)}\ P_5\frac{d\Phi}{dx}+[yq'p]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+[xq'p]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[xp''q']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[xpp'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=0$$

$$\text{(IV}'\text{)}\ P_9\frac{d\Phi}{dx}+[yq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+[xq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[xp''q']\frac{\partial\Phi}{\partial q}+[xqp'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=0$$

$$\text{(V}'\text{)}\ P_9\frac{d\Phi}{dy}+[xp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[yq''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[ypq'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[yp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=0$$

$$\text{(VI}'\text{)}\ Q_5\frac{\partial\Phi}{dy}+[xq''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[yqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[yq''p']\frac{\partial\Phi}{\partial q}+[yp'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=0$$

$$\text{(VII}'\text{)}\ Q_1\frac{d\Phi}{dy}+[xpq'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[yq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[ypq'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+[yq'p]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=0$$

$$\text{(VIII}'\text{)}\ Q\frac{d\Phi}{dy}+[xq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[yq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial q}+[yqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+[yq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=0.$$

Если данная система содержит две или одну из производных $p, \ldots q''$, то исключение их из уравнений $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ приведет к одной или к двум зависимостям между x, y, z, z', z'', и мы можем свести задачу определения z, z', z'' к интегрированию уравнений с меньшим числом неизвестных функций.

§ 83. Интегрирование систем нелинейных уравнений 1-го порядка при двух зависимых и трех независимых переменных. Для системы уравнений при двух неизвестных функциях z, z' трех независимых переменных x_1, x_2, x_3, вида

$$F_1\,(x_1,\, x_2,\, x_3,\, z,\, z',\, p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_1',\, p_2',\, p_3') = 0;\; F_2\,(\ldots) = 0,$$

определение 3-го уравнения

$$\Phi\,(x_1,\, x_2,\, x_3,\, z,\, z',\, p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_1',\, p_2',\, p_3') = \mathrm{const},$$

находящегося в инволюции с первыми двумя, сводится к рассмотрению соответствующей матрицы, которую запишем так:

$$\left\| \begin{matrix}
\frac{d\Phi}{dx_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
X_{11} & P_{11} & P'_{11} & P_{12} & P'_{12} & P_{13} & P'_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
X_{21} & P_{21} & P'_{21} & P_{22} & P'_{22} & P_{23} & P'_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
X_{12} & 0 & 0 & P_{11} & P'_{11} & 0 & 0 & P_{12} & P_{13} & P'_{12} & P'_{13} & 0 & 0 \\
X_{22} & 0 & 0 & P_{21} & P'_{21} & 0 & 0 & P_{22} & P_{23} & P'_{22} & P'_{23} & 0 & 0 \\
\frac{d\Phi}{dx_2} & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1} & \frac{\partial p}{\partial p_1'} & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3'} & 0 & 0 \\
X_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{11} & P'_{11} & 0 & P_{12} & 0 & P'_{12} & P_{13} & P'_{13} \\
X_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{21} & P'_{21} & 0 & P_{22} & 0 & P'_{22} & P_{23} & P'_{23} \\
\frac{d\Phi}{dx_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1'} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3'}
\end{matrix} \right\|$$

Имеем: $\sigma = \rho = 9$; $\tau = 13$. Надо рассматривать равенства нулю 5 определителей этой матрицы. Для определителя Δ 8-го порядка, отмеченного в матрице, имеем такие неравенства:

$$1)\; D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1, p_1'}\right) \neq 0; \quad 2)\; D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_1, p_1', p_2}\right) + 0.$$

Приравнивая нулю 5 соответствующих определителей 9-го порядка и обозначая якобианы от трех функций F_1, F_2, Φ по соответствующим переменным такими буквами:

$$A = (p_1 p_1' p_2);$$

$$B = (p_1 p_1' p_2');\;\; C = (p_1 p_2 p_2');\;\; D = (p_1' p_2 p_2');\;\; E = (p_? p_1' p_3');\;\; F = (p_3 p_1 p_1')$$

$$G = (p_2 p_1' p_3);\; H = (p_3' p_1' p_2);\; I = (p_1 p_2 p_3);\; J = (p_1 p_3' p_2);\; K = [p_1 p_1' x_1]$$

$$L = [p_2 p_1' x_2];\; M = [p_1 p_2 x_2];\; N = [p_2 p_1' x_3];\; P = [p_1 p_2 x_3];\; Q = [p_1 p_1' x_3],$$

и имея в виду, что 2-е из наших неравенств дает $A \neq 0$, получим такую систему пяти нелинейных уравнений 1-го порядка с одной

неизвестной функцией Φ для определения уравнений $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$:

$$AD = BC$$
$$IAE = BFI$$
$$A(EG + FH) + (BI + AJ)E = 0$$
$$A(DF + HA) + B(IB + AJ + AG) = CEA$$
$$A(AK + AL + BM + FN + EP) = (AG + BI)\,Q.$$

Второму уравнению этой системы можно удовлетворить, полагая:

1) либо $AE = BF$; 2) либо $I = 0$; 3) либо $I = 0$, $AE = BF$.

Ограничимся здесь подробным рассмотрением 1-го из этих случаев и рассмотрим для этого случая сведение интегрирования системы нелинейных уравнений к интегрированию системы линейных уравнений; в остальных двух случаях получим в результате большее число линейных уравнений, чем в первом.

В этом 1-м случае система принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} AD = BC;\; AE = BF;\; A^2H + B^2I + AB(G + J) = 0 \\ A(AK + AL + BM + FN + EP) = Q(AG + BI) \end{aligned}\right\}. \tag{42}$$

так как, на основании уравнения $AD = BC$, получим $CE = DF$, и поэтому 3-е уравнение предшествующей системы является следствием 4-го.

Первые 2 уравнения (42) можно переписать так:

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C} = \frac{E}{F} = \lambda,$$

или

$$B = \lambda A;\; D = \lambda C;\; E = \lambda F. \tag{43}$$

Определим неизвестную функцию λ так, чтобы последние уравнения равносильны были двум линейным уравнениям, заменяющим 2 нелинейные уравнения системы (42). Пользуясь обычными обозначениями для якобианов 2-го порядка от двух заданных функций F_1, F_2, систему (43) в раскрытом виде перепишем так:

$$[(p_2' p_1') + (p_1' p_2)\lambda]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} + (p_1 p_1')\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + [(p_1 p_2') + (p_2 p_1)\lambda]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'} + (p_1' p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'} = 0$$

$$(p_2 p_2')\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} + [(p_1' p_2') + (p_2' p_1)\lambda]\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p_2' p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'} + [(p_2 p_1') + (p_1 p_2)\lambda]\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'} = 0$$

$$[(p_3' p_1') + (p_1' p_3)\lambda]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} + (p_1 p_1')\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + [(p_1 p_3') + (p_3 p_1)\lambda]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'} + (p_1' p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3'} = 0.$$

Первые два уравнения совпадают, если коэффициенты пропорциональны, т. е. если

$$(p_1' p_2')\,\{(p_1 p_2)\lambda^2 - [(p_1 p_2') + (p_1' p_2)]\lambda + (p_1' p_2')\} = 0$$
$$(p_2 p_2')\,\{(p_1 p_2)\lambda^2 - [(p_1 p_2') + (p_1' p_2)]\lambda + (p_1' p_2')\} = 0$$
$$(p_1 p_1')\,\{(p_1 p_2)\lambda^2 - [(p_1 p_2') + (p_1' p_2)]\lambda + (p_1' p_2')\} = 0,$$

вследствие того, что

$$(p_1 p_2)(p_2' p_1') + (p_1 p_1')(p_2 p_2') + (p_1 p_2')(p_1' p_2) \equiv 0.$$

Таким образом мы приходим к заключению, что систему первых двух нелинейных уравнений (42), определяющих уравнение $\Phi_1 = C_1$, можно заменить одной из таких систем двух линейных уравнений 1-го порядка:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_i\,(p_2 p_2')\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+[\lambda_i(p_2' p_1)+(p_1' p_2')]\frac{\partial\Phi}{\partial p_2}=(p_2 p_2')\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'}+[(p_1' p_2)+\lambda_i(p_2 p_1)]\frac{\partial\Phi}{\partial p_3'}\\
&\lambda_i(p_1 p_1')\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}+[\lambda_i(p_1' p_3)+(p_3' p_1')]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}=(p_1 p_1')\frac{\partial\Phi}{\partial p_3'}+[(p_3' p_1)+\lambda_i(p_1 p_3)]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'}
\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

где λ_i — это один из корней квадратного уравнения

$$(p_1 p_2)\lambda^2-[(p_1 p_2')+(p_1' p_2)]\lambda+(p_1' p_2')=0. \tag{45}$$

Третье нелинейное уравнение системы (42), если поделить его на $A \neq 0$ и принять во внимание уравнения (43), заменится таким уравнением:

$$J\lambda^2+(G+J)\lambda+H=0,$$

которое в раскрытом виде, пользуясь обозначением λ_i для корней квадратного уравнения, можно переписать так:

$$\begin{aligned}
&\lambda_i[\lambda_i(p_2 p_3)+(p_3' p_2)]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+\{(p_3 p_1)\lambda_i^2-[(p_3 p_1')+(p_3' p_1)]\lambda_i+\\
&\quad+(p_3' p_1')\}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2}+\lambda_i[\lambda_i(p_1 p_2)+(p_2 p_1')]\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}=\\
&\quad=[\lambda_i(p_2 p_3)+(p_3' p_2)]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'}+[\lambda_i(p_1 p_2)+(p_2 p_1')]\frac{\partial\Phi}{\partial p_3'}.
\end{aligned}\tag{46}$$

Рассматривая последнее нелинейное уравнение (42), замечаем, что, на основании зависимостей

$$E=\lambda F, \quad B=\lambda A,$$

после деления на $A^2 \neq 0$, оно приводится к виду

$$K+L+\lambda M+\mu(N+\lambda P)+\nu Q=0, \tag{47}$$

где неизвестные пока функции μ и ν связаны уравнениями

$$F=\mu A$$

$$G+\lambda I+\nu A=0,$$

или в раскрытом виде:

$$\left.\begin{aligned}
&[(p_1' p_3)+(p_2 p_1')\mu]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+[(p_3 p_1)+(p_1 p_2)\mu]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'}+\\
&\qquad+(p_1' p_1)\mu\frac{\partial\Phi}{\partial p_2}+(p_1 p_1')\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}=0\\
&[(p_3 p_2)\lambda+(p_2 p_1')\nu]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+[(p_2 p_3)+(p_1 p_2)\nu]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'}+\\
&+[(p_3 p_1')+(p_1 p_3)\lambda+(p_1' p_1)\nu]\frac{\partial\Phi}{\partial p_2}+[(p_1' p_2)+(p_2 p_1)\lambda]\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{48}$$

Эти два линейные уравнения равносильны друг другу, если

$$\frac{(p_1' p_3)+\mu(p_2 p_1')}{\lambda(p_3 p_2)+\nu(p_2 p_1')}=\frac{\mu(p_1 p_2)+(p_3 p_1)}{\nu(p_1 p_2)+(p_2 p_3)}=$$

$$=\frac{\mu(p_1' p_1)}{(p_3 p_1')+\lambda(p_1 p_3)+\nu(p_1' p_1)}=\frac{(p_1 p_1')}{(p_1' p_2)+\lambda(p_2 p_1)},$$

т. е., на основании тождества

$$(p_1 p_1')(p_3 p_2)+(p_1 p_3)(p_2 p_1')+(p_1 p_2)(p_1' p_3)\equiv 0,$$

если неизвестные функции μ и ν связаны будут с функцией λ посредством такого алгебраического линейного уравнения:

$$[\lambda(p_2 p_1)+(p_1' p_2)]\mu+(p_1' p_1)\nu+[\lambda(p_1 p_3)+(p_3 p_1')]=0. \tag{49}$$

Итак, из двух линейных уравнений (48) достаточно рассмотреть только одно, например, 1-е. Исключая с помощью этого 1-го уравнения производную $\frac{\partial\Phi}{\partial p_2}$ из уравнения (46) и сравнивая полученное таким образом уравнение, заменяющее (46)-е, со вторым уравнением (44), заметим, что оно будет равносильно этому уравнению (44), в силу тождеств

$$(p_2 p_3)(p_1 p_1')+(p_3 p_1)(p_2 p_1')+(p_2 p_1)(p_1' p_3)\equiv 0,$$
$$(p_3' p_2)(p_1 p_1')+(p_2 p_1')(p_1 p_3')+(p_2 p_1)(p_3' p_1')\equiv 0,$$

если λ будет общим корнем квадратного уравнения (45) и такого 2-го:

$$(p_1 p_3)\lambda^2-[(p_1 p_3')+(p_1' p_3)]\lambda+(p_1' p_3')=0,$$

т. е. в этом случае система 4 нелинейных уравнений (42) заменится системой 4 линейных уравнений: двух уравнений (44), первого уравнения (48) и уравнения 47, которое в раскрытом виде будет:

$$\begin{aligned}
&(p_1 p_1')\frac{d\Phi}{dx_1}+[(p_2 p_1')+\lambda_i(p_1 p_2)]\frac{d\Phi}{dx_2}+\mu_i[(p_2 p_1')+\lambda_i(p_1 p_2)]\frac{d\Phi}{dx_3}+\\
&\quad+([p_1' x_1]+\lambda_i[p_2 x_2]+\lambda_i\mu_i[p_2 x_3])\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+([x_1 p_1]+[x_2 p_2]+\\
&+\mu_i[p_1' x_3])\frac{\partial\Phi}{\partial_1 p'}+(\lambda_i\mu_i[x_3 p_1]+\lambda_i[x_2 p_1]+\mu_i[p_1' x_3]+[p_1' x_2])\frac{\partial\Phi}{\partial p_2}=0,
\end{aligned}\tag{50}$$

где μ_i определяется через корень λ_i посредством формулы (49), в которой функция ν — произвольна; эту произвольность можно использовать для выполнения условий совместимости системы всех 4 линейных уравнений 1-го порядка и можно взять для ν любое значение, например,—для упрощения системы. Если λ_i является корнем одного только квадратного уравнения (45), то мы имеем систему пяти линейных уравнений 1-го порядка для определения $\Phi_1 = C_1, \Phi_2 = C_2, \ldots$: два уравнения (44), уравнение (46), первое уравнение (48) и уравнение (50).

Пример.

$$F_1 = p_1 - p_2' = 0; \quad F_2 \equiv p_1' - p_3 = 0.$$

Этот пример, без ответа на него, прислан был французским академиком Э. Картаном

Взявши определитель Δ, неравенство которого нулю приводит к неравенству

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'}\right)\neq 0,$$

получим:

$$\frac{d\Phi}{dx_1}=0;\ \frac{\partial\Phi}{\partial p_2}=0;\ \frac{\partial\Phi}{\partial p_3'}=0;\ \frac{\partial\Phi}{\partial p_1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'}\right)=0;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'}\ \frac{\partial\Phi}{\partial p_3}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'}\right)=0.$$

Последние два уравнения переписываются:

$$\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_3}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_3}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_1'}}=-\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_2'}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_1}}=\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_3}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_1'}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_3}},$$

или

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}-\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'}=0;\ \frac{\partial\Phi}{\partial p_1'}+2\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}=0.$$

Принимая во внимание, что

$$x_1=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial p_2}=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial p_3'}=0,$$

имеем интегралы

$$p_1+p_2'=\varphi(x_2, x_3);\ 2p_1'-p_3=\psi(x_2, x_3) \text{ и еще } p_1-p_2'=0;\ p_1'-p_3=0.$$

Поэтому

$$p_1=p_2'=\frac{1}{2}\varphi(x_2, x_3)\equiv\omega(x_2, x_3);\ p_3=p_1'=\psi(x_2, x_3).$$

Так как

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_3}=\frac{\partial p_3}{\partial x_1},$$

то

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_3}=0,\ \omega\equiv\omega(x_2)+C_1;$$

так как

$$\frac{\partial p_2'}{\partial x_1}=\frac{\partial p_1'}{\partial x_2},$$

то

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}=0;\ \psi\equiv\psi(x_3)+C_2.$$

Имеем:

$$p_1=\omega(x_2)+C_1;\ p_3=\psi(x_3)+C_2;\ z=x_1\omega(x_2)+x_1 C_1(x_3);\ \frac{dC_1}{dx_3}=\frac{\psi(x_3)}{x_1}$$

$$p_2'=\omega(x_2)+K_1;\ p_1'=\psi(x_3)+K_2;\ z'=x_1\psi(x_3)+x_1\cdot K_2(x_2);\ \frac{dK_2}{dx_2}=\frac{\omega(x_2)}{\lambda_1}$$

$$z=x_1\Omega'(x_2)+\Psi(x_3);\ z'=x_1\Psi'(x_3)+\Omega(x_2),$$

где $\Psi(x_3)$ и $\Omega(x_2)$, а также $\Psi'(x_3)$, $\Omega'(x_2)$ — произвольные функции. Интеграл общий, так как исключение четырех произвольных функций приводит только к одной системе уравнений, — к системе, заданной для интегрирования: $F_1=0$, $F_2=0$.

§ 84. Обобщение условий инволюционности Дарбу и распространение способа интегрирования Дарбу на системы нелинейных уравнений 2-го порядка при нескольких неизвестных функциях. Условия совместимости системы уравнений 2-го порядка при многих функциях

$$F_q(x_1,\dots x_m;\ z_1,\dots z_n;\ p_1',\ p_2',\dots p_m^n;\ p_{11}',\ p_{12}',\dots p^n{}_{mm})=0,\quad (q=1,\dots Mn+\nu) \tag{51}$$

где

$$1\leqslant M\leqslant\frac{1}{2}m(m+1)-1;\ 0\leqslant\nu\leqslant n-1$$

$$p_i^k=\frac{\partial z_k}{\partial x_i},\ p_{ij}^k=\frac{\partial^2 z_k}{\partial x_i\partial x_j}\ (i,\ j=1,\dots m;\ k=1,\dots n),$$

вводя новые функции z по формулам

$$p_i^k=z_{n+(k-1)m+i},$$

получим по правилам § 80, так как система (51) заменяется системой уравнений 1-го порядка.

Если $M=\frac{1}{2}m(m+1)$, то систему (51) надо решить относительно производных p_{ij}^k, и задача о совместимости сводится к рассмотрению тождеств вида:

$$\frac{dp_{ij}^k}{dx_h}\equiv\frac{dp_{ih}^k}{dx_j}(i,\ j,\ h=1,\dots m;\ j\neq h;\ k=1,\dots n).$$

Если $M>\frac{1}{2}m(m+1)$, то исключение производных 2-го порядка приведет к рассмотрению условий интегрируемости системы уравнений 1-го порядка.

При $M<\frac{1}{2}m(m+1)$, то условия совместимости системы, в смысле ее инволюционности, можно получить и посредством обобщения соображений, изложенных в § 80 для системы уравнений 1-го порядка.

Обозначим число независимых параметрических производных 3-го порядка через N. Продифференцировавши каждое из уравнений $F_q=0$ по $x_1,\dots x_m$, будем иметь систему $m(Mn+\nu)$ уравнений, линейных относительно производных 3-го порядка. Поэтому со всех P производных 3-го порядка только $P-N$ будут определяться нашими $m(Mn+\nu)$ линейными уравнениями, где

$$P=\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)\ n.$$

Иначе сказать,

$$m(Mn+\nu)-P+N$$

из этих уравнений будут следствиями остальных, т. е. условия совместимости заданной системы сводятся к равенству нулю всех определителей порядка $P-N+1$, составленных из матрицы коэффициентов линейных уравнений 3-го порядка. Матрица будет иметь $m(Mn+\nu)$ горизонталей и $P+1$ колонку. Число необходимых и достаточных условий инволюционности системы (51) будет

$$[m(Mn+\nu)-P+N]\ (N+1).$$

Чтобы вычислить количество N параметрических производных 3-го порядка, примем во внимание то обстоятельство, что система

$Mn+\nu$ заданных уравнений позволяет считать $Mn+\nu$ из производных 2-го порядка $p^{k'}_{i'j'}$ функциями от $x_1,\dots x_m$, $z_1,\dots z_n$, $p_1^1,\dots p_m^n$ и от остальных производных 2-го порядка $p^{k''}_{i''j''}$. Написавши число M в виде

$$M=m+(m-1)+(m-2)+\dots+[m-(g-1)]+h$$
$$(g=0,1,\dots m-1;\ h=1,\dots m),$$

причем, если $g=0$, то $M=h=1,2,\dots$, а если $g=1$, то $M=m+h=m+1$, $m+2,\dots$, вообразим, что зависимые производные 2-го порядка выписаны, например, в такой таблице:

$$\begin{gathered}
p^1_{11},\dots p^1_{1m},p^1_{22}\dots p^1_{2m},\dots p^1_{gg}p^1_{g,g+1}\dots p^1_{gm};\\
p^1_{g+1,g+1}p^1_{g+1,g+2}\dots p^1_{g+1,g+h};p^1_{g+1,g+h+1}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
p^\nu_{11},\dots p^\nu_{1m},p^\nu_{22}\dots p^\nu_{2m},\dots p^\nu_{gg}p^\nu_{g,g+1}\dots p^\nu_{gm};\\
p^\nu_{g+1,g+1}p^\nu_{g+1,\ +2}\dots p^\nu_{g+1,g+h};p^\nu_{g+1,g+h+1}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
p^n_{11},\dots p^n_{1m},p^n_{22}\dots p^n_{2m},\dots p^n_{gg}p^n_{g,g+1}\dots p^n_{gm};\\
p^n_{g+1,g+1}p^n_{g+1,g+2}\dots p^n_{g+1,g+h}.
\end{gathered}$$

Рассмотрим сначала все зависимые производные 2-го порядка $p_{i_1'i_2'}$ какой-нибудь одной функции z, заключающиеся в строке

$$p_{11}\dots p_{1m},p_{22}\dots p_{2m},\dots p_{ii}p_{i,i+1}\dots p_{im};p_{i+1,i+1},p_{i+1,i+2},\dots p_{i+1,i+l}.$$

Параметрическими производными 3-го порядка $p_{i_1''i_2''i_3''}$ будут те производные, в которых все 3 индекса превышают число i Все эти производные можно разбить на 2 группы: одна определяется первым индексом $i+1$ и двумя индексами, большими чем $i+l$, а количество всех таких производных будет

$$\frac{1}{2}(m-i-l)\ (m-i-l+1);$$

другая определяется тремя индексами, из которых каждый превышает число $i+1$, а число всех производных будет

$$\frac{1}{6}(m-i-1)(m-i)(m-i+1).$$

Всех параметрических производных 3-го порядка одной функции будет

$$\frac{1}{2}(m-i-l)\ (m-i-l+1)+\frac{1}{6}(m-i-1)\ (m-i)\ (m-i+1).$$

По нашей таблице мы можем вычислить общее количество всех параметрических производных 3-го порядка, считая для функций $z_1,\dots z_\nu$ числа i и l равными g и $h+1$, а для остальных $n-\nu$ функций $z_{\nu+1},\dots z_n$ равными g и h. Будем иметь

$$N=\frac{1}{2}[(m-g-h-1)(m-g-h)+\frac{1}{3}(m-g-1)(m-g)(m-g+1)]\nu+$$
$$+\frac{1}{2}[(m-g-h)(m-g-h+1)+\frac{1}{3}(m-g-1)(m-g)(m-g+1)](n-\nu).$$

Таким образом, *чтобы выписать все условия инволюционности системы (51), надо сначала взять один какой-нибудь неравный нулю определитель порядка $S-1$, выбранный из соответствующей матрицы в R горизонталей и T колонок, а потом присоединять к нему по одной горизонтали и по одной колонке и приравнять нулю составленные таким образом $(R-S+1)\ (T-S+1)$ определителей порядка S, где числа R, S, T определяются по формулам:*

$$S=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}m(m+1)(m+2)-\frac{1}{3}(m-g-1)(m-g)(m-g+1)-$$
$$-(m-g-h)(m-g-h+1\Big]n+(m-g-h)\nu+1$$
$$R=m(Mn+\nu);\ T=\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)n+1$$
$$M=m+(m-1)+(m-2)+\dots+[m-(g-1)]+h.$$

Задача интегрированая системы уравнений с частными производными 2-го порядка при n неизвестных функциях будет определенной задачей тогда, когда для интегрирования задано не меньше уравнений, чем входящих в эти уравнения неизвестных функций. Если задано будет больше чем n уравнений при n неизвестных функциях, то условия инволюционности системы напишутся по только что изложенным правилам.

Для интегрирования системы n линейных или нелинейных уравнений 2-го порядка

$$F_k(x_1,\dots x_m,z_1,\dots z_n,p^1_1,p^1_2,\dots p^n_m;p^1_{11},p^1_{12},\dots p^n_{mm})=0,$$
$$(k=1,\dots n) \tag{52}$$

присоединим к этой системе $(n+1)$-е уравнение вида

$$\Phi(x_1,\dots x_m,z_1,\dots z_n,p^1_1,p^1_2,\dots p^n_m;p^1_{11},p^1_{12},\dots p^n_{mm})=\text{const}$$

и составим условия инволюционности системы $(n+1)$-го уравнений. Имеем такие значения для основных чисел M, ν, g, h:

$$M=1;\ \nu=1;\ g=0;\ h=1.$$

Формулы для R, S, T дают:

$$R=m(n+1);\ S=m(n+1);\ T=\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)n+1.$$

Мы будем иметь систему $(T-S+1)$-го уравнений 1-го порядка с одной неизвестной вспомогательной функцией Φ от независимых переменных $x_1,\dots x_m,z_1,\dots z_n,p^1_1,\dots p^n_m,p^1_{11},\dots p^n_{mm}$.

Каждый из частных интегралов Φ_1 этой системы дает уравнение $\Phi_1=C_1$, совместимое в смысле инволюции с заданной системой (52). Из всех интегралов $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2,\dots$ надо присоединять к системе (52) такие, чтобы удовлетворялись условия совместимости либо для всей совокупности уравнений

$$F_1=0,\dots F_n=0,\ \ \Phi_1=C_1,\ \Phi_2=C_2,\dots,$$

либо для каждой из совокупностей $(n+1)$-го уравнения, принимая во внимание, что каждая из совокупностей вида $F_1=0\dots F_n=0;$

$\Phi_i = C_i$ будет совместимой на основании того, что $\Phi_i = C_i$ являются интегралами, полученными из условий совместимости; надо рассматривать лишь те группы $(n+1)$-го уравнений, которые содержат не меньше двух уравнений $\Phi_i = C_i$, $\Phi_k = C_k$. Если найдем p таких интегралов

$$\Phi_1 = C_1, \ldots \Phi_p = C_p,$$

где

$$p = \frac{1}{2}[m(m+1) - 2]\,n,$$

то из $\frac{1}{2}m(m+1)n$ уравнений

$$F_1 = 0, \ldots F_n = 0;\ \Phi_1 = C_1, \ldots \Phi_p = C_p$$

можем найти производные 2-го порядка p_{ij}^k, и определить неизвестные функции $z_1, \ldots z_n$ посредством зависимостей

$$dp_i^k = p_{i1}^k\,dx_1 + \ldots + p_{im}^k\,dx_m$$

$$dz_k = p_1^k\,dx_1 + \ldots + p_m^k\,dx_m.$$

Если задано будет больше, чем n уравнений $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots$, тогда прежде всего проверяются условия их совместимости посредством приравнивания нулю соответствующих определителей порядка S. Если один или больше из этих определителей не равен нулю, то, приравнявши нулю такие определители, присоединяем полученные уравнения к заданной системе и рассматриваем условия инволюционности расширенной таким образом системы. Если уравнений выйдет больше $\frac{1}{2}m(m+1)$, — тогда будем считать, что заданная система уравнений не совместима в смысле инволюции. Способ интегрирования не применим, если система вспомогательных уравнений 1-го порядка одной неизвестной функции Φ не обладает частными интегралами $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$, отличными от заданных уравнений $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots$, которые являются, как в этом легко убедиться, частными интегралами этой вспомогательной системы с одной неизвестной функцией Φ.

В том частном случае, когда $n = 1$, получим условия инволюционности и способ интегрирования нелинейных и линейных уравнений и систем уравнений 2-го порядка с одной неизвестной функцией z.

В том случае, когда $n = 1$, $m = 2$, имеем для уравнений $F = 0$, $\Phi = \text{const}$:

$$M = 2,\ \nu = 0;\ g = 0;\ h = 2;\ R = 4;\ S = 4;\ T = 5;\ T - S + 1 = 2$$

и получаем условия инволюционности Дарбу, изложенные в § 76 главы IX, и имеем способ интегрирования уравнения 2-го порядка при одной неизвестной функции z двух независимых переменных x, y, изложенный в §§ 76 и 77. В этом случае система вспомогательных нелинейных уравнений с одной неизвестной функцией Φ была заменена двумя способами в § 76 и 77 системой линейных уравнений 1-го порядка, частные интегралы которой $\Phi_1 = C_1, \ldots$ и приводят к новым уравнениям, находящимся в инволюции с заданным для интегрирования уравнением $F = 0$.

§ 85. Обобщение измененного способа интегрирования Дарбу нелинейного уравнения 2-го порядка при одной неизвестной функции двух аргументов на системы нелинейных уравнений 2-го порядка при двух неизвестных функциях двух независимых переменных. Применим изложенные в предшествующем параграфе результаты к тому частному случаю, когда

$$m = 2,\ n = 2,$$

т. е. к интегрированию системы двух нелинейных уравнений 2-го порядка при двух неизвестных функциях z, z' независимых переменных x, y:

$$\left.\begin{aligned} F_1\,(x, y, z, z', p, q, p', q';\ r, s, t, r', s', t') = 0 \\ F_2\,(x, y, z, z', p, q, p', q';\ r, s, t, r', s', t') = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{53}$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y};\ p' = \frac{\partial z'}{\partial x},\ q' = \frac{\partial z'}{\partial y};\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

$$r' = \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y},\ t' = \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}.$$

Способ интегрирования системы (53) представляет обобщение изложенного в §§ 76 и 77 способа интегрирования Дарбу для нелинейного уравнения 2-го порядка

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Присоединяя к системе (53) новое уравнение

$$\Phi(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, t, r', s', t') = \text{const} \tag{54}$$

и обозначая

$$\Xi_i \equiv \frac{dF_i}{dx} = X_i + Z_i p + Z_i' p' + P_i r + Q_i s + P_i' r' + Q_i' s'$$

$$\mathrm{H}_i \equiv \frac{dF_i}{dy} = Y_i + Z_i q + Z_i' q' + P_i s + Q_i t + P_i' s' + Q_i' t'$$

$$X_i = \frac{\partial F_i}{\partial x},\ Y_i = \frac{\partial F_i}{\partial y}, \ldots T_i = \frac{\partial F_i}{\partial t},\ T_i' = \frac{\partial F_i}{\partial t'},$$

$$(i = 1, 2)$$

получим 4 условия инволюционности уравнений $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\Phi = \text{const}$, приравнивая нулю 4 определителя 6-го порядка такой матрицы:

$$\left\|\begin{array}{c|ccccc|ccc} \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s} & \frac{\partial\Phi}{\partial t} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial r'} & \frac{\partial\Phi}{\partial s'} & \frac{\partial\Phi}{\partial t'} & 0 \\ \Xi_1 & R_1 & S_1 & T_1 & 0 & R_1' & S_1' & T_1' & 0 \\ \Xi_2 & R_2 & S_2 & T_2 & 0 & R_2' & S_2' & T_2' & 0 \\ \mathrm{H}_1 & 0 & R_1 & S_1 & T_1 & 0 & R_1' & S_1' & T_1' \\ \mathrm{H}_2 & 0 & R_2 & S_2 & T_2 & 0 & R_2' & S_2' & T_2' \\ \frac{d\Phi}{dy} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s} & \frac{\partial\Phi}{\partial t} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial r'} & \frac{\partial\Phi}{\partial s'} & \frac{\partial\Phi}{\partial t'} \end{array}\right\|$$

Считая неравным нулю отмеченный в матрице определитель 5-го порядка, получим ограничения для уравнений (53), (54) вида:

$$1)\ D\left(\frac{F_1, F_2}{r, r'}\right) \neq 0;\quad 2)\ D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{r, s, t}\right) \neq 0.$$

Условия инволюционности дают такую систему 4 нелинейных уравнений 1-го порядка одной неизвестной функции Φ:

$$(stt')\,(rsr') = (rtt')\,(rtr')$$

$$(str')\,(rsr') + (rr't)\,(rtr') + (rr's')\,(rst) = 0$$

$$(sts')\,(rsr') + (rs't)\,(rtr') + (rr't')\,(rst) = 0$$

$$[sty]\,(rsr') + [try]\,(rtr') + [rr'x]\,(rst) = 0,$$

где круглые и прямые скобки указывают на якобиевы определители 3-го порядка от F_1, F_2, Φ по соответственным переменным, причем прямые скобки обозначают, что по x и y взяты полные производные.

Введем неизвестные пока функции $\lambda(x, y, z, z' p, \ldots t')$ и $\mu(x, \ldots t')$ по формулам

$$\frac{(rsr')}{(rtr')} = \frac{(rtt')}{(stt')} = \lambda; \quad \frac{(rst)}{(rtr')} = \mu.$$

Тогда, раскрывая якобианы 3-го порядка по элементам 3-й горизонтали и обозначая одной буквой каждый из якобианов 2-го порядка от заданных функций F_1, F_2 по каждой паре из переменных $x, y, \ldots t'$:

$$\begin{aligned}
&\rho = (st); \quad \sigma = (tr); \quad \tau = (rs)\\
&\rho' = (s't'); \quad \sigma' = (t'r'); \quad \tau' = (r's')\\
&\rho_1 = (rr'), \quad \rho_2 = (rs'), \quad \rho_3 = (rt');\\
&\sigma_1 = (sr'), \quad \sigma_2 = (ss'), \quad \sigma_3 = (st')\\
&\tau_1 = (tr'), \quad \tau_2 = (ts'), \quad \tau_3 = (tt')
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\xi_1 = [rx], \ \xi_2 = [sx], \ \xi_3 = [tx]; \ \eta_1 = [ry], \ \eta_2 = [sy], \ \eta_3 = [ty]$$
$$\xi_1' = [r'x], \ \xi_2' = [s'x], \ \xi_1' = [t'x]; \ \eta_1' = [r'y], \ \eta_2' = [s'y], \ \eta_3' = [t'y],$$

условия инволюционности уравнений (53), (54) перепишем в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}
&(\rho - \mu\tau_1)\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \sigma\frac{\partial\Phi}{\partial s} + (\tau + \mu\rho_1)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mu\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial r'} = 0\\
&(\sigma_1 - \lambda\tau_1)\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \rho_1\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \lambda_1\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\tau + \lambda\sigma)\frac{\partial\Phi}{\partial r'} = 0\\
&\tau_3\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \lambda\tau_3\frac{\partial\Phi}{\partial s} + (\lambda\sigma_3 - \rho_3)\frac{\partial\Phi}{\partial t} - (\sigma + \lambda\rho)\frac{\partial\Phi}{\partial t'} = 0\\
&(\tau_1 - \mu\tau')\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \lambda\tau_1\frac{\partial\Phi}{\partial s} + (\lambda\sigma_1 - \rho_1)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\mu\rho_2 - \lambda\rho - \sigma)\frac{\partial\Phi}{\partial r'} - \mu\rho_1\frac{\partial\Phi}{\partial s'} = 0\\
&(\tau_2 - \mu\sigma')\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \lambda\tau_2\frac{\partial\Phi}{\partial s} + (\lambda\sigma_2 - \rho_2)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mu\rho_3\frac{\partial\Phi}{\partial r'} - \mu\rho_1\frac{\partial\Phi}{\partial t'} - (\sigma + \lambda\rho)\frac{\partial\Phi}{\partial s'} = 0\\
&(\eta_3 - \eta\xi_1')\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \lambda\eta_3\frac{\partial\Phi}{\partial s} + (\lambda\eta_2 - \eta_1)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mu\xi_1\frac{\partial\Phi}{\partial r'} - \mu\rho_1\frac{d\Phi}{dx} - (\sigma + \lambda\rho)\frac{d\Phi}{dy} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Между первыми 15 определителями 2-го порядка (55), являющимися определителями матрицы

$$\left\| \begin{matrix} R_1 & S_1 & T_1 & R_1' & S_1' & T_1' \\ R_2 & S_2 & T_2 & R_2' & S_2' & T_2' \end{matrix} \right\|,$$

существует ряд тождеств. Эти тождества, как легко проверить, будут:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\rho_1 + \sigma\sigma_1 + \tau\tau_1 = 0; \quad \rho\rho_2 + \sigma\sigma_2 + \tau\tau_2 = 0; \quad \rho\rho_3 + \sigma\sigma_3 + \tau\tau_3 = 0\\
&\rho'\rho_1 + \sigma'\rho_2 + \tau'\rho_3 = 0; \quad \rho'\sigma_1 + \sigma'\sigma_2 + \tau'\sigma_3 = 0; \quad \rho'\tau_1 + \sigma'\tau_2 + \tau'\tau_3 = 0\\
&\rho\rho' = \begin{vmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{vmatrix}; \quad \sigma\rho' = \begin{vmatrix} \tau_2 & \tau_3 \\ \rho_2 & \rho_3 \end{vmatrix}; \quad \tau\rho' = \begin{vmatrix} \rho_2 & \rho_3 \\ \sigma_2 & \sigma_3 \end{vmatrix}\\
&\rho\sigma' = \begin{vmatrix} \sigma_3 & \sigma_1 \\ \tau_3 & \tau_1 \end{vmatrix}; \quad \sigma\sigma' = \begin{vmatrix} \tau_3 & \tau_1 \\ \rho_3 & \rho_1 \end{vmatrix}; \quad \tau\sigma' = \begin{vmatrix} \rho_3 & \rho_1 \\ \sigma_3 & \sigma_1 \end{vmatrix}\\
&\rho\tau' = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix}; \quad \sigma\tau' = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}; \quad \tau\tau' = \begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{vmatrix}\\
&\begin{vmatrix} \rho_1 & \sigma_1 & \tau_1 \\ \rho_2 & \sigma_2 & \tau_2 \\ \rho_3 & \sigma_3 & \tau_3 \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{57}$$

В силу 1-го и 3-го из этих тождеств, первые два уравнения системы (56) будут равносильны друг другу, т. е. коэффициенты при производных будут пропорциональны, если неизвестные функции λ и μ связаны будут такой линейной зависимостью:

$$\sigma\lambda + \rho_1\mu + \tau = 0. \tag{58}$$

Исключение производной $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ из 2-го и 4-го уравнений и исключение производных $\frac{\partial\Phi}{\partial r'}, \frac{\partial\Phi}{\partial t'}$ из уравнений 2-го, 3-го и 5-го приводит к двум уравнениям, линейным относительно производных

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \ \frac{\partial\Phi}{\partial s}, \ \frac{\partial\Phi}{\partial t}, \ \frac{\partial\Phi}{\partial s'}.$$

Эти 2 уравнения, в силу тождеств (57) и зависимости (58), напишутся так:

$$\begin{aligned}
&[\rho(\rho_1 - \lambda\sigma_1 + \lambda^2\tau_1) + (\tau + \lambda\sigma)(\lambda\tau_2 - \sigma_2)]\frac{\partial\Phi}{\partial r} + [\sigma(\rho_1 - \lambda\sigma_1 + \lambda^2\tau_1) + \rho_2(\tau + \lambda\sigma)]\frac{\partial\Phi}{\partial s} +\\
&\qquad + [\tau(\rho_1 - \lambda\sigma_1 + \lambda^2\tau_1) - (\tau + \lambda\sigma)\cdot\lambda\rho_2]\frac{\partial\Phi}{\partial t} - (\tau + \lambda\sigma)^2\frac{\partial\Phi}{\partial s'} = 0\\
&[\rho(\rho_3 - \lambda\sigma_3 + \lambda^2\tau_3) - \tau_2(\sigma + \lambda\rho)]\frac{\partial\Phi}{\partial r} + [\sigma(\rho_3 - \lambda\sigma_3 + \lambda^2\tau_3) + \lambda\tau_2(\sigma + \lambda\rho)]\frac{\partial\Phi}{\partial s} +\\
&\qquad + [\tau(\rho_3 - \lambda\sigma_3 + \lambda^2\tau_3) + (\sigma + \lambda\rho)(\rho_2 - \lambda\sigma_2)]\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\sigma + \lambda\rho)^2\frac{\partial\Phi}{\partial s'} = 0.
\end{aligned}$$

Уравнения равносильны друг другу, если

$$\frac{\rho(\tau_1\lambda^2 - \sigma_1\lambda + \rho_1) + (\lambda\tau_2 - \sigma_2)(\tau + \lambda\sigma)}{\rho(\tau_3\lambda^2 - \sigma_3\lambda + \rho_3) - \tau_2(\sigma + \lambda\rho)} = \frac{\sigma(\tau_1\lambda^2 - \sigma_1\lambda + \rho_1) + \rho_2(\tau + \lambda\sigma)}{\sigma(\tau_3\lambda^2 - \sigma_3\lambda + \rho_3) + \lambda\tau_2(\sigma + \lambda\rho)} =$$
$$= \frac{\tau(\tau_1\lambda^2 - \sigma_1\lambda + \rho_1) - \lambda\rho_2(\tau + \lambda\sigma)}{\tau(\tau_3\lambda^2 - \sigma_3\lambda + \rho_3) + (\rho_2 - \lambda\sigma_2)(\sigma + \lambda\rho)} = -\frac{(\tau + \lambda\sigma)^2}{(\sigma + \lambda\rho)^2},$$

т. е. если, на основании тождеств (57), неизвестную функцию λ определим с помощью такого алгебраического уравнения 4-й степени:

$$\begin{aligned}
&[\rho(\rho\tau_1 + \sigma\tau_2) + \sigma^2\tau_3]\lambda^4 +\\
&+ [\rho^2(\rho_2 - \sigma_1) + 2(\rho\sigma\tau_1 + \tau\rho\tau_2 + \tau\sigma\tau_3) + \sigma^2(\tau_2 - \sigma_3)]\lambda^3 +\\
&+ \{\sigma^2[(\tau_1 + \rho_3) - 2\sigma_2] + 3(\tau^2\tau_3 + \rho^2\rho_1) + \rho\tau[2(\tau_1 + \rho_3) - \sigma_2]\}\lambda^2 +\\
&+ [\sigma^2(\rho_2 - \sigma_1) + 2(\rho\sigma\rho_1 + \tau\rho\rho_2 + \tau\sigma\rho_3) + \tau^2(\tau_2 - \sigma_3)]\lambda +\\
&+ [\tau(\tau\rho_3 + \sigma\rho_2) + \sigma^2\rho_1] = 0.
\end{aligned} \tag{59}$$

Неизвестная функция μ определится через функцию λ по формуле:

$$\mu = -\frac{\tau + \lambda\sigma}{\rho_1}. \tag{60}$$

Таким образом, если мы определим функцию λ с помощью алгебраического уравнения (59), а функцию μ — через λ по формуле (60), то вместо линейных уравнений (56) мы будем иметь систему только четырех линейных независимых между собою уравнений 1-го порядка, и *определение уравнений $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$ сводится к разысканию частных интегралов одной из таких систем четырех линейных уравнений с частными производными 1-го порядка одной неизвестной функции Φ:*

$$\left.\begin{aligned}
&(\tau + \lambda_i\sigma)\frac{\partial\Phi}{\partial r'} = (\lambda_i\tau_1 - \sigma_1)\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \rho_1\frac{\partial\Phi}{\partial s} - \lambda_i\rho_1\frac{\partial\Phi}{\partial t}\\
&(\sigma + \lambda_i\rho)\frac{\partial\Phi}{\partial t'} = \tau_3\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \lambda_i\tau_3\frac{\partial\Phi}{\partial s} + (\lambda_i\sigma_3 - \rho_3)\frac{\partial\Phi}{\partial t}\\
&(\tau + \lambda_i\sigma)^2\frac{\partial\Phi}{\partial s'} = [\rho(\tau_1\lambda_i^2 - \sigma_1\lambda_i + \rho_1) + (\lambda\tau_2 - \sigma_2)(\tau + \lambda_i\sigma)]\frac{\partial\Phi}{\partial r} +\\
&\qquad + [\sigma(\tau_1\lambda_i^2 - \sigma_1\lambda_i + \rho_1) + \rho_2(\tau + \lambda_i\sigma)]\frac{\partial\Phi}{\partial s} +\\
&\qquad + [\tau(\tau_1\lambda_i^2 - \sigma_1\lambda_i + \rho_1) - \lambda_i\rho_2(\tau + \lambda_i\sigma)]\frac{\partial\Phi}{\partial t}\\
&\qquad (\tau + \lambda_i\sigma)\left[\xi_1\frac{\partial\Phi}{\partial r'} - \xi_1'\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \rho_1\frac{d\Phi}{dx}\right] =\\
&= \rho_1\left[\eta_3\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \lambda_i\eta_3\frac{\partial\Phi}{\partial s} + (\lambda_i\eta_2 - \eta_1)\frac{\partial\Phi}{\partial t} - (\sigma + \lambda_i\rho)\frac{d\Phi}{dy}\right],
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

где λ_i — один из корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ уравнения 4-й степени (59).

Если найдем 4 частные интеграла $\Phi_1 = C_1, \ldots \Phi_4 = C_4$, совместимые с уравнениями $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, то определение 6 производных $r, s, \ldots t'$ из последних шести уравнений сведет задачу определения неизвестных функций z, z' к интегрированию уравнений

$$dp = r\,dx + s\,dy;\quad dq = s\,dx + t\,dy;\quad dp' = r'dx + s'dy;\quad dq' = s'dx + t'dy$$
$$dz = p\,dx + q\,dy;\quad dz' = p'dx + q'dy.$$

Если найдем 6 подобных интегралов $\Phi_1 = C_1, \ldots \Phi_6 = C_6$, то исключение 6 производных $r, s \ldots t'$ из 8 уравнений

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ \Phi_1 = C_1, \ldots \Phi_6 = C_6$$

сведет задачу разыскания функций z, z' к интегрированию системы уравнений 1-го порядка

$$f_1(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0;\quad f_2(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0.$$

Комбинация неравенств

$$(r, r') \neq 0;\ (r, s, t) \neq 0$$

представляет одну из числа 756 возможных комбинаций, т. е. из числа, представляющего количество определителей 5-го порядка матрицы из 6 горизонталей и 9 колонок. Система (61), при наличии уравнения (59), сохраняет свое значение для любой из этих комби-

наций так же, как и система (38) § 77 с квадратным уравнением (37) того же параграфа сохраняется для любого из сорока неравных нулю определителей 3-го порядка Δ_{ij}^k, рассмотренных в § 77 при интегрировании нелинейного уравнения 2-го порядка одной функции вида

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Можно убедиться, что для $n = 1$ матрица этого параграфа переходит в матрицу (31) § 77, система (61) и уравнение (59) этого параграфа — в систему (38) и в квадратное уравнение (37) § 77; для совпадения формул надо будет, как это показано на примере в конце этого параграфа, заменить λ на $\Lambda = \frac{1}{\lambda}$.

Вспомогательная система линейных уравнений 1-го порядка (61), для определения уравнений $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$, и связанное с ней *алгебраическое уравнение* (59) *для функции λ значительно упрощаются, если заданная система уравнений $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ имеет меньше шести производных 2-го порядка $r, s, \ldots t'$.*

Если уравнения $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ не содержат производной r, то можно будет искать частные интегралы $\Phi_1 = C_1, \ldots$, не содержащие r, из такой системы трех линейных уравнений, связанных с корнями λ_i соответственного кубического уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&(\rho' + \lambda_i\sigma')\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\lambda_i\tau_3\frac{\partial\Phi}{\partial r'} + \tau_3\frac{\partial\Phi}{\partial s'} + (\lambda_i\tau_1 - \tau_2)\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\\
&(\sigma' + \lambda_i\tau')\frac{\partial\Phi}{\partial s} = (\lambda_i\sigma_2 - \sigma_3)\frac{\partial\Phi}{\partial r'} - \lambda_i\sigma_1\frac{\partial\Phi}{\partial s'} + \sigma_1\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\\
&(\rho' + \lambda_i\sigma')\left[\eta_3\frac{\partial\Phi}{\partial t'} - \eta_3'\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \tau_3\frac{d\Phi}{dy}\right] =\\
&= \tau_3\left[(\xi_3' - \lambda_i\xi_2')\frac{\partial\Phi}{\partial r'} + \lambda_i\xi_1'\frac{\partial\Phi}{\partial s'} - \xi_1'\frac{\partial\Phi}{\partial t'} - (\sigma' + \lambda_i\tau')\frac{d\Phi}{dx}\right]
\end{aligned}\right\}$$

$$(\tau_1\tau' + \sigma_1\sigma')\lambda^3 + [\sigma_1\rho' - \tau_2\tau' + (\tau_1 - \sigma_2)\sigma']\lambda^2 +$$
$$+ [\tau_3\tau' - \sigma_2\rho' + (\sigma_3 - \tau_2)\sigma']\lambda + (\tau_3\sigma' + \sigma_3\rho') = 0$$

Если система не содержит t, то вспомогательная система и алгебраическое уравнение напишутся так:

$$\begin{aligned}
&(\rho' + \lambda_i\sigma')\frac{\partial\Phi}{\partial s} = -\lambda_i\sigma_3\frac{\partial\Phi}{\partial r'} + \sigma_3\frac{\partial\Phi}{\partial s'} + (\lambda_i\sigma_1 - \sigma_2)\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\\
&(\sigma' + \lambda_i\tau')\frac{\partial\Phi}{\partial r} = (\lambda_i\rho_2 - \rho_3)\frac{\partial\Phi}{\partial r'} - \lambda_i\rho_1\frac{\partial\Phi}{\partial s'} + \rho_1\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\\
&(\rho' + \lambda_i\sigma')\left[\eta_2\frac{\partial\Phi}{\partial t'} - \eta_3'\frac{\partial\Phi}{\partial s} - \sigma_3\frac{d\Phi}{dy}\right] =\\
&= \sigma_3\left[(\xi_3' - \lambda_i\xi_2')\frac{\partial\Phi}{\partial r'} + \lambda_i\xi_1'\frac{\partial\Phi}{\partial s'} - \xi_1'\frac{\partial\Phi}{\partial t'} - (\sigma' + \lambda_i\tau')\frac{d\Phi}{dx}\right];
\end{aligned}$$

$$(\sigma_1\tau' + \rho_1\sigma')\lambda^3 + [\rho_1\rho' - \sigma_2\tau' + (\sigma_1 - \rho_2)\sigma']\lambda^2 +$$
$$+ [\sigma_3\tau' - \rho_2\rho' + (\rho_3 - \sigma_2)\sigma']\lambda + (\rho_3\rho' + \sigma_3\sigma') = 0.$$

Если система не содержит s, то будем иметь 4 линейные уравнения и алгебраическое уравнение 4-й степени такого вида:

$$(\sigma' + \lambda_i\tau')\frac{\partial\Phi}{\partial r} = (\lambda_i\rho_2 - \rho_3)\frac{\partial\Phi}{\partial r'} - \lambda_i\rho_1\frac{\partial\Phi}{\partial s'} + \rho_1\frac{\partial\Phi}{\partial t'}$$
$$(\rho' + \lambda_i\sigma')\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\lambda_i\tau_3\frac{\partial\Phi}{\partial r'} + \tau_3\frac{\partial\Phi}{\partial s'} + (\lambda_i\tau_1 - \tau_2)\frac{\partial\Phi}{\partial t'}$$

$$(\rho' + \lambda_i \sigma')^2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} = [(\rho' + \lambda_i \sigma')(\tau_3 - \lambda_i \tau_2) - (\sigma' + \lambda_i \tau')\lambda_i \tau_3] \frac{\partial \Phi}{\partial r'} +$$
$$+ [(\rho' + \lambda_i \sigma')\lambda_i \tau_1 + (\sigma' + \lambda_i \tau')\tau_3] \frac{\partial \Phi}{\partial s'} +$$
$$+ [-(\rho' + \lambda_i \sigma')\tau_1 + (\sigma' + \lambda_i \tau')(\lambda_i \tau_1 - \tau_2)] \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$
$$(\rho' + \lambda_i \sigma')\left[\eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} - \eta_3' \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \tau_3 \frac{d\Phi}{dy}\right] =$$
$$= \tau_3 \left[(\xi_3' - \lambda_i \xi_2') \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial t'} - (\sigma' + \lambda_i \tau') \frac{d\Phi}{dx}\right];$$
$$(\rho_1 \sigma'^2 + \tau_1 \tau'^2)\lambda^4 + [\sigma'(2\rho_1 \rho' - \rho_2 \sigma') + \tau'(2\tau_1 \sigma' - \tau_2 \tau')]\lambda^3 +$$
$$+ [(\rho_1 \rho'^2 - 2\rho_1 \rho' \sigma' + \rho_3 \sigma'^2) + (\tau_1 \sigma'^2 - 2\tau_2 \sigma' \tau' + \tau_3 \tau'^2)]\lambda^2 +$$
$$+ [\rho'(2\rho_3 \sigma' - \rho_2 \rho') + \sigma'(2\tau_3 \tau' - \tau_2 \sigma')]\lambda + [\rho_3 \rho'^2 + \tau_3 \sigma'^2] = 0.$$

Аналогично напишутся формулы для системы уравнений $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, не содержащих соответственно r', t', s', при этом переменные r, s, t, заменятся в формулах на r', s', t', якобианы $\rho, \sigma, \tau, \xi_1, \ldots \eta_3$ — на $\rho', \sigma', \tau', \xi_1', \ldots \eta_3'$ и наоборот, а для $\rho_1, \ldots \tau_3$ мы будем иметь изменения согласно таблице:

вместо	будет	вместо	будет	вместо	будет
ρ_1	$-\rho_1$	σ_1	$-\rho_2$	τ_1	$-\rho_3$
ρ_2	$-\sigma_1$	σ_2	$-\sigma_2$	τ_2	$-\sigma_3$
ρ_3	$-\tau_1$	σ_3	$-\tau_2$	τ_3	$-\tau_3$

Если система не содержит двух производных r, t, получим 2 линейные уравнения:

$$(\rho' - \lambda_i \sigma') \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \lambda_i \sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - (\sigma_2 + \lambda_i \sigma_1) \frac{\partial \Phi}{\partial t'};$$
$$\lambda_i \sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} - \sigma_3 \frac{d\Phi}{dy} + \lambda_i \xi_1' - \eta_3') \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \lambda_i \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$
$$\sigma_1 \lambda^2 + \sigma_2 \lambda + \sigma_3 = 0;$$

второе из линейных уравнений можно было бы написать еще в 4 других видах.

Для системы, не имеющей s и t, будем иметь

$$(\sigma' + \lambda_i \tau') \frac{\partial \Phi}{\partial r} = (\lambda_i \rho_2 - \rho_3) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'};$$
$$\lambda_i \rho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \rho_3 \frac{d\Phi}{dy} + (\lambda_i \xi_1' + \eta_3') \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \lambda_i \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$
$$\rho_1 \lambda^2 - \rho_2 \lambda + \rho_3 = 0.$$

Для системы без r и s получим:

$$(\sigma_1 + \lambda_i \rho') \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\tau_1 - \lambda_i \tau_2) \frac{\partial \Phi}{\partial t'};$$
$$\tau_1 \frac{d\Phi}{dx} + \lambda_i \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + (\xi_1' + \lambda_i \eta_3') \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \xi_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$
$$\tau_3 \lambda^2 - \tau_2 \lambda + \tau_1 = 0.$$

Аналогично напишутся уравнения для тех трех случаев, когда система не содержит соответственно r', t', или s', t', или r', s'. Надо искать интегралы $\Phi_1 = C_1, \ldots$ не содержащие также 2 производных. Из оставшихся 9 комбинаций отсутствующей в системе пары производных 2-го порядка будем иметь: 4 случая — двух линейных уравнений, связанных с корнями квадратного уравнения, 4 случая трех линейных уравнений и кубического и 1 случай — четырех линейных уравнений и биквадратного. Эти комбинации двух производных 2-го порядка и соответствующие им вспомогательные системы 1-го порядка и алгебраические уравнения будут:

(I) r, r'; (II) t, t'; (III) r, t'; (IV) t, r';
(V) s, r'; (VI) r, s'; (VII) s, t'; (VIII) t, s';
(IX) s, s'.

(I)
$$-\lambda_i \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\rho' + \lambda_i \sigma_3) \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\tau_2 - \lambda_i \rho) \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0$$
$$\sigma_2 \frac{d\Phi}{dx} + (\tau_2 - \lambda_i \rho) \frac{d\Phi}{dy} - (\xi_2 + \eta_3) \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = (\eta_3 - \xi_2') \frac{\partial \Phi}{\partial s} - (\eta_2 + \eta_2') \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$
$$\rho \lambda^2 + (\sigma_3 - \tau_2)\lambda + \rho' = 0.$$

(II)
$$\lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\tau' - \lambda_i \sigma_1) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - (\rho_2 + \lambda_i \tau) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = 0$$
$$\sigma_2 \frac{d\Phi}{dy} + (\rho_2 + \lambda_i \tau) \frac{d\Phi}{dx} - (\eta_2 + \xi_1) \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = (\lambda_i \xi_1 - \eta_2') \frac{\partial \Phi}{\partial s} - (\xi_2' + \lambda_i \xi_2) \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$
$$\tau \lambda^2 + (\rho_2 - \sigma_1)\lambda + \tau' = 0.$$

(IIIa)
$$(\tau_1 - \lambda_i \tau_2) \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\lambda_i \sigma_2 - \sigma_1) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_i \rho \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = 0$$
$$\sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} + \lambda_i \tau_2 \frac{d\Phi}{dy} + \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_i \eta_2' \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \lambda_i \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'}$$
$$\tau \lambda^2 - (\tau_1 + \sigma_2)\lambda + \sigma = 0;$$

(IIIб)
$$(\tau_1 + \lambda_i' \tau') \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\rho_1 - \lambda_i' \sigma_1) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i' \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = 0$$
$$\lambda_i' \sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} + (\rho + \lambda_i' \tau_1) \frac{d\Phi}{dy} - (\xi_2 + \lambda_i' \eta_3) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} =$$
$$= -(\eta_3 + \lambda_i' \xi_1') \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\eta_2 - \lambda_i' \eta_1') \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$
$$\tau' \lambda'^2 + (\tau_1 - \sigma_2)\lambda' + \rho = 0.$$

(IVв)
$$(\sigma_2 - \lambda_i' \rho') \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\tau + \lambda_i' \rho_3) \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - \lambda_i' \rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0$$
$$\rho_2 \frac{d\Phi}{dx} + (\rho_3 + \lambda_i' \rho') \frac{d\Phi}{dy} + (\xi_2' + \eta_3') \frac{\partial \Phi}{\partial r} =$$
$$= (\xi_1 - \lambda_i' \eta_3') \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\eta_1 + \lambda_i' \eta') \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$
$$\rho' \lambda'^2 + (\rho_3 - \sigma_2)\lambda' + \tau + 0.$$

(V)
$$\lambda_i \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = \lambda_i \tau_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \lambda_i \rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t};$$
$$\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \lambda_i \rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \rho_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$
$$\lambda_i \rho_2 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + \lambda_i \xi_2' \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta_3' \frac{\partial \Phi}{\partial t_1} - \lambda_i \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0$$
$$\rho_2 \lambda^2 (\rho_2 \lambda - \tau_2) + \tau_3 (\rho_3 \lambda - \tau_3) = 0.$$

(VI)
$$\lambda_i \sigma' \frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\lambda_i \sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \lambda_i \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'};$$
$$\sigma' \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \tau_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$
$$\lambda_i \sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} - \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} - \lambda_i \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} + \lambda_i \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \eta_3' \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0$$
$$\sigma_1 \lambda^2 (\sigma_1 \lambda + \sigma_3) + \tau_3 (\tau_1 \lambda + \tau_3) = 0.$$

(VII)
$$\lambda_i \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = \lambda_i \tau_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \tau_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t};$$
$$\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = \tau_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$
$$\lambda_i \rho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_2 \frac{d\Phi}{dy} - \lambda_i \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \lambda_i \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta_2' \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$
$$\rho_1 \lambda^2 (\rho_1 \lambda - \tau_1) - \tau_2 (\rho_2 \lambda - \tau_2) = 0.$$

(VIII)
$$\lambda_i \sigma' \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\lambda_i \rho_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'};$$
$$\sigma' \frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$
$$-\lambda_i \rho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \sigma_3 \frac{d\Phi}{dy} - \lambda_i \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta_3' \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \lambda_i \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0$$
$$\rho_1 \lambda^2 (\rho_1 \lambda + \rho_3) + \sigma_3 (\sigma_1 \lambda + \sigma_3) = 0.$$

(IX). Условия инволюционности будут:

$$\frac{\tau_3 \dfrac{\partial \Phi}{\partial s}}{(rtr')} = \frac{(tr't')}{\rho_1 \dfrac{\partial \Phi}{\partial s'}} = \frac{[t'ty]}{[rr'x]} = \frac{(trt')}{\rho_1 \dfrac{\partial \Phi}{\partial s}} = \frac{\tau_3 \dfrac{\partial \Phi}{\partial s'}}{(r't'r')},$$

что приводит к 4 линейным уравнениям, связанным с одним из корней биквадратного уравнения:

$$\lambda_i \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = \lambda_i \tau_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$
$$\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \lambda_i \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \rho_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$
$$\rho_1 \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = (\rho_1 \tau_1 \lambda_i^2 + \tau_3^2) \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$
$$\lambda_i \left(\rho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'}\right) + \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + \eta_3' \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0$$
$$\rho_1 (\rho_1^2 \lambda^2 + \tau_3 \rho_3) \lambda^2 + \tau_3 (\rho_1 \tau_1 \lambda^2 + \tau_3^2) = 0$$

Из 20 случаев, когда *система содержит 3 производные 2-го порядка*, достаточно остановиться на 10, когда в систему входят производные:

(I) r, s, t; (II) r, s, r'; (III) s, t, t'; (IV) r, s, s'; (V) s, t, s'
(VI) r, s, t'; (VII) s, t, r'; (VIII) r, t, r'; (IX) r, t, t'; (X) r, t, s',

так как для остальных 10 случаев в формулах произойдет замена r, s, t на r', s', t' и наоборот.

Для случая (I), переписывая уравнения $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\Phi = \text{const}$ в виде

$$r = f_1(x, y, z, z', p, q, p', q', \varphi)$$
$$s = \varphi(x, y, z, z', p, q, p', q')$$
$$t = f_2(x, y, z, z', p, q, p', q', \varphi),$$

будем иметь систему двух линейных уравнений 1-го порядка с неизвестной функцией φ по формулам:

$$dp = f_1\, dx + \varphi\, dy; \quad dq = \varphi\, dx + f_2\, dy$$
$$\frac{df_1}{dy} = \frac{d\varphi}{dx}; \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{df_2}{dx}.$$

Для остальных 9 случаев приходим к разысканию частных интегралов $\Phi_1 = C_1, \ldots$, не содержащих соответствующих переменных, из одного линейного уравнения, или, что то же — интегралов системы обыкновенных уравнений 1-го порядка:

(II) без t, t', s';
$$(\xi_1 + \eta_1) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = \rho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \sigma_1 \frac{d\Phi}{dy} + \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta_1' \frac{\partial \Phi}{\partial s};$$
$$\frac{dx}{\rho_1} = \frac{dy}{\sigma_1} = \frac{dz}{\rho_1 p + \sigma_1 q} = \frac{dz'}{\rho_1 p' + \sigma_1 p'} = \frac{dp}{\rho_1 r + \sigma_1 s} = \frac{dq}{\rho_1 s + \sigma_1 t} =$$
$$= \frac{dr}{\xi_1'} = \frac{ds}{\eta_1'} = \frac{dr'}{-\xi_1 - \eta_2} = \frac{dp'}{\rho_1 r' + \sigma_1 s'} = \frac{dq'}{\rho_1 s' + \sigma_1 t'}.$$

(III)
$$(\xi_3 + \eta_3) \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \sigma_3 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + \xi_3' \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta_3' \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

(IV) без t, r', t';
$$(\xi_1 + \eta_2) \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = \rho_2 \frac{d\Phi}{dx} + \sigma_2 \frac{d\Phi}{dy} + \xi_3' \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta_2' \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

(V)
$$(\xi_2 + \eta_3) \frac{d\Phi}{ds'} = \sigma_2 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_2 \frac{d\Phi}{dy} + \xi_2' \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta_2' \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

(VI) без t, r', s';
$$(\xi_1 + \eta_2) \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \rho_3 \frac{d\Phi}{dx} + \sigma_3 \frac{d\Phi}{dy} + \xi_3' \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta_3' \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

(VII)
$$(\xi_2 + \eta_3) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = \sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_1 \frac{d\Phi}{dy} + \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta_1' \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

или интегралов $\Phi_1 = C_1, \ldots$, без некоторых переменных из $r, s, \ldots t'$, системы двух линейных уравнений 1-го порядка:

(VIII) без s', t;
$$-\tau_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \pm \sqrt{-\rho_1 \tau_1} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = 0$$
$$\tau_1 \left(\rho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \xi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'}\right) \pm \sqrt{-\rho_1 \tau_1} \left(\tau_1 \frac{d\Phi}{dy} + \eta_1' \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'}\right) = 0$$

(IX)
$$-\tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \pm \sqrt{-\rho_3 \tau_3} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \rho_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0$$
$$\tau_3 \left(\rho_3 \frac{d\Phi}{dx} + \xi_3' \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}\right) \pm \sqrt{-\rho_3 \tau_3} \left(\tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + \eta_3' \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}\right) = 0$$

(X) без r', t';
$$-\tau_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \pm \sqrt{-\rho_2 \tau_2} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = 0$$
$$\tau_2 \left(\rho_2 \frac{d\Phi}{dx} + \xi_2' \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'}\right) \pm \sqrt{-\rho_2 \tau_2} \left(\tau_2 \frac{d\Phi}{dy} + \eta_2' \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'}\right) =$$

Если система содержит две производные из всех шести, то в эту систему входит одна из 15 пар производных. Для 3 пар, когда система имеет r, t, или r, s, или t, s, систему двух вспомогательных линейных уравнений с одной функцией φ получим аналогично тому, как это мы имеем для случая I системы с тремя производными r, s, t. Также легко напишем линейные уравнения и для комбинаций r', t'; r', s'; t', s'. В первом же из остальных 9 случаев, когда система $F_1=0$, $F_2=0$ содержит r, r', будем искать частные интегралы $\Phi_1=C_1,\ldots$, имеющие s или s' и не имеющие t и t' из одного линейного уравнения

$$\rho_1\frac{d\Phi}{dx}+\xi_1'\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\eta_1'\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\xi_1\frac{\partial\Phi}{\partial r'}+\eta_1\frac{\partial\Phi}{\partial s'},$$

которому соответствует система обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{\rho_1}=\frac{dz}{\rho_1 p}=\frac{dz'}{\rho_1 p'}=\frac{dp}{\rho_1 r}=\frac{dq}{\rho_1 s}=\frac{dt}{\xi_1'}=\frac{ds}{\eta_1'}=\frac{dr}{-\xi_1}=\frac{ds'}{-\eta_1}=\frac{dp'}{\rho_1 r'}=\frac{dq'}{\rho_1 s'}.$$

Для (II) комбинации производных, t, t', линейное уравнение будет:

$$\tau_3\frac{d\Phi}{dy}+\xi_3'\frac{\partial\Phi}{\partial s}+\eta_3'\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\xi_3\frac{\partial\Phi}{\partial s'}+\eta_3\frac{\partial\Phi}{\partial t'}.$$

Для (III) случая, когда имеем r, s', можно искать частные интегралы $\Phi_1=C_1,\ldots$ имеющие r' и не имеющие s, t, t' из уравнения

$$\rho_2\frac{d\Phi}{dy}+\eta_2'\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\xi_1\frac{\partial\Phi}{\partial r'}+\eta_1\frac{\partial\Phi}{\partial s'},$$

или имеющие t' и не содержащие t и r' или имеют s и не имеют t и r' из уравнения:

$$\rho_2\frac{d\Phi}{dx}+\xi_2'\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\eta_2'\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\xi_1\frac{\partial\Phi}{\partial s'}+\eta_1\frac{\partial\Phi}{\partial t'}.$$

В остальных случаях получим:

(IV) s, r'; Φ имеющее r, и не имеющее t, s', t':

$$\sigma_1\frac{d\Phi}{dy}+\xi_1'\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\eta_1'\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\eta_2\frac{\partial\Phi}{\partial r'}$$

имеющее t, не имеющее r, t; имеющее s', не имеющее r, t':

$$\sigma_1\frac{d\Phi}{dx}+\xi_1'\frac{\partial\Phi}{\partial s}+\eta_1'\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\xi_2\frac{\partial\Phi}{\partial r'}+\eta_2\frac{\partial\Phi}{\partial s'}$$

(V) r, t'; Φ имеющее s, не имеющее t, r', s':

$$\rho_3\frac{d\Phi}{dx}+\xi_3'\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\eta_3'\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\xi_1\frac{\partial\Phi}{\partial t'}$$

имеющее s' и не имеющее s, t, r':

$$\rho_3\frac{d\Phi}{dy}+\eta_3'\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\xi_1\frac{\partial\Phi}{\partial s'}+\eta_1\frac{\partial\Phi}{\partial t'}$$

(VI) t, r'; Φ имеющее s, не имеющее r', s', t':

$$\tau_1\frac{d\Phi}{dy}+\xi_1'\frac{\partial\Phi}{\partial s}+\eta_1'\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\eta_2\frac{\partial\Phi}{\partial r'}$$

имеющее s' и не имеющее r, s, t':

$$\tau_1\frac{d\Phi}{dx}+\xi_1'\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\xi_3\frac{\partial\Phi}{\partial r'}+\eta_3\frac{\partial\Phi}{\partial s'}$$

(VII) s, t'; Φ имеющее t, не имеющее r, r', s':

$$\sigma_3\frac{d\Phi}{dx}+\xi_3'\frac{\partial\Phi}{\partial s}+\eta_3'\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\xi_2\frac{\partial\Phi}{\partial t'}$$

с r без t, r'; с s' без t', r':

$$\sigma_3\frac{d\Phi}{dy}+\xi_3'\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\eta_3'\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\xi_2\frac{\partial\Phi}{\partial s'}+\eta_2\frac{\partial\Phi}{\partial t'}$$

(VIII) t, s'; Φ имеющее t', не имеющее r, s, r':

$$\tau_2\frac{d\Phi}{dx}+\xi_2'\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\xi_3\frac{\partial\Phi}{\partial s'}+\eta_3\frac{\partial\Phi}{\partial t'}$$

с s без r, t'; с r' без r, t':

$$\tau_2\frac{d\Phi}{dy}+\xi_2'\frac{\partial\Phi}{\partial s}+\eta_2'\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\xi_3\frac{\partial\Phi}{\partial r'}+\eta_3\frac{\partial\Phi}{\partial s'}$$

(IX) s, s'; Φ имеющее r или r', не имеющее t, t':

$$\sigma_2\frac{d\Phi}{dy}+\xi_2'\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\eta_2'\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\xi_2\frac{\partial\Phi}{\partial r'}+\eta_2\frac{\partial\Phi}{\partial s'}$$

имеющее t или t', не имеющее r, r':

$$\sigma_2\frac{d\Phi}{dx}+\xi_2'\frac{\partial\Phi}{\partial s}+\eta_2'\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\xi_2\frac{\partial\Phi}{\partial s'}+\eta_2\frac{\partial\Phi}{\partial t'}.$$

Наконец, если *система заданных уравнений $F_1=0$, $F_2=0$ содержит только одну производную 2-го порядка* из всех шести, получим одно линейное вспомогательное уравнение с неизвестной функцией φ, если, например, для системы

$$F_1(x, y, z, z', p, q, p', q', r)=0,\quad F_2(\ldots)=0$$

перепишем ее в виде:

$$f_1(x,y,z,z',p,q,p',q')=0;\quad r=f_2(x,y,z,z',p,q,p'q')$$

и, присоединяя

$$s=\varphi(x, y, z, z', p, q, p', q'),$$

воспользуемся формулами:

$$dp=f_2\,dx+\varphi\,dy;\quad \frac{d\varphi}{dx}=\frac{df_2}{dy}.$$

Пример.

$$F_1\equiv F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0;$$

$$F_2\equiv r'+s'+t'+f(x, y, z, p, q, r, s, t)=0.$$

Эту систему можно интегрировать по способу Дарбу, согласно правилам §§ 76 и 77 главы IX, рассматривая сначала одно уравнение $F_1=0$, определяя неизвестную функцию z и, подставивши ее значение во 2-е уравнение $F_2=0$, переходя к интегрированию 2-го линейного уравнения 2-го порядка с неизвестной функцией z', по правилам § 72 той же главы, так как уравнение будет с постоянными коэффициентами при производных от функции z' и со свободным членом вида $f_1(x, y)$.

Рассматривая же сразу оба уравнения $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, по теории этого параграфа получим:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = R;\ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = S;\ \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = T,$$

где

$$R = \frac{\partial F}{\partial r},\ S = \frac{\partial F}{\partial s},\ T = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Три первые тождества (57) дают:

$$\rho R + \sigma S + \tau T = 0.$$

Подстановка $л = \frac{1}{\lambda}$ приводит уравнение (59) к виду:

$$(Rл^2 - Sл + T)\ [л^2(\tau^2 + \sigma\tau + \sigma^2) + л(2\rho\sigma + \rho\tau + 2\tau\sigma + \sigma^2) + \rho^2 + \rho\sigma + \sigma^2] = 0,$$

и мы получаем для $л$ корни квадратного уравнения (37) главы IX:

$$Rл^2 - Sл + T = 0$$

Пусть $л_i$ будут корни этого уравнения. Тогда 3 первые уравнения (61) переписываются:

$$\left.\begin{aligned} &(T - л_i S)\frac{\partial\Phi}{\partial r} + л_i R\frac{\partial\Phi}{\partial s} - R\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0\\ &л_i T\frac{\partial\Phi}{\partial r} - T\frac{\partial\Phi}{\partial s} + (S - л_i R)\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0\\ &(\tau + л_i\sigma)\left[(T - л_i S)\frac{\partial\Phi}{\partial r} + л_i R\frac{\partial\Phi}{\partial s} - R\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

Последнее уравнение равносильно первому; оба первые представляют уравнение (42) главы IX и равносильны друг другу, как это показано в гл. IX.

Четвертое уравнение системы (61), после небольших алгебраических преобразований, переписывается:

$$\left[T\frac{\partial f}{\partial r} + л_i(R - S)\frac{\partial f}{\partial s} - R\frac{\partial f}{\partial t}\right]\left[л_i R\frac{d\Phi}{dx} + T\frac{d\Phi}{dy} - л_i\Xi\frac{\partial\Phi}{\partial r} - H\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] +$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial r}\right)л_i TS\frac{d\Phi}{dy} - \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)л_i HS\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \quad (63)$$
$$+\left(T\frac{df}{dy} - H\frac{\partial f}{\partial r}\right)л_i R\left(л_i\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\partial\Phi}{\partial s}\right) + \left(T\frac{df}{dy} - H\frac{\partial f}{\partial t}\right)R\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0.$$

Интегралы $\Psi_1 = C_1$, $\Psi_2 = C_2$ линейных уравнений (63), (62) зависят от вида функции f 2-го из заданных уравнений $F_2 = 0$. Легко видеть, что для видов $f(x)$ и $f(y)$ функции f уравнения $F_2 = 0$ интегралы не зависят от f и переходят в интегралы $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$ для интегрирования уравнения $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ по способу Дарбу, а уравнение (63) переходит во 2-е уравнение (41) главы IX.

§ 86. Об исследованиях Бэклунда. Переходя к приложениям теории, изложенной в этой главе, остановимся сначала на некоторых результатах исследований Бэклунда в области дифференциальных уравнений с частными производными.

Изучение касательных преобразований и теории интегралов Ли — с одной стороны, и преобразования поверхностей с постоянной полной кривизной в связи с соответствующими работами Ли, Вейнгартена, Бьянки — с другой стороны, — привело Бэклунда к такого рода задаче, которую называют *задачей Бэклунда.*

Надо найти два многообразия M_2 и M_2' касательных элементов в пространстве трех измерений, таким образом соответствующих друг другу, чтобы координаты двух надлежащих элементов, (x, y, z, p, q) и (x', y', z', p', q'), удовлетворяли четырем заранее заданным уравнениям вида:

$$F_1(x, y, z, p, q;\ x', y', z', p', q') = 0;\ F_2(\ldots) = 0,\ F_3 = 0,\ F_4 = 0, \quad (64)$$

где z обозначает функцию переменных x, y, а z' — функцию переменных x', y', а p, q и p', q' — это соответствующие производные первого порядка. Многообразия M_2 и M_2' касательных элементов предполагают для поверхностей наличие зависимостей, обозначающих условия соединенности элементов:

$$dz = pdx + qdy;\ dz' = p'dx' + q'dy'.$$

Многообразия M_2 и M_2' могут составляться точками поверхностей S и S' с касательными плоскостями в точках на этих поверхностях. Тогда определение таких поверхностей S и S', что точка одной соответствует точке другой таким образом, чтобы соответствующие касательные элементы этих поверхностей удовлетворяли уравнениям (64), представляет собой *задачу Бэклунда в узком смысле.* Имея же в виду многообразия M_2 и M_2', образованные точками на кривых линиях со связанными с ними касательными плоскостями, проходящими через касательные к кривым, и еще многообразия из определенных точек и различных плоскостей через эти точки, многообразия M_1 и M_1', — приходим *к обобщенной задаче Бэклунда.* Если многообразия M_2 и M_2' подвергнуть касательным преобразованиям T и T', то эти многообразия и уравнения (64) заменятся двумя многообразиями такого же рода и соответствующими четырьмя новыми дифференциальными уравнениями; в таком случае одна задача Бэклунда сводится к другой посредством касательных преобразований: различных двух задач Бэклунда мы здесь не имеем.

Остановимся на задаче Бэклунда, связанной с преобразованием одной поверхности в другую. Может случиться, что исключение из уравнений (64) неизвестной функции z' приводит к одному только дифференциальному уравнению 2-го порядка с одной неизвестной z, а исключение функции z — тоже к одному уравнению 2-го порядка с одной неизвестной функцией z'. Тогда 4 уравнения 1-го порядка (64) устанавливают соответствие между интегралами этих двух различных уравнений 2-го порядка, отличное от касательного преобразования и называемое *преобразованием Бэклунда.* Свойства таких новых преобразований выводятся из общей теории задачи Бэклунда. К изучению преобразований Бэклунда относится докторская диссертация и ряд работ Клерена, а также Бэклунда. Клереном даны обобщения некоторых результатов Бэклунда, приводящие к особым преобразованиям Клерена.

Предметом весьма многих исследований был тот частный случай задачи Бэклунда, когда первые 2 уравнения (64) будут

$$x' = x;\ y' = y,$$

а остальные сводятся к системе двух уравнений 1-го порядка двух неизвестных функций z, z' двух независимых переменных x, y:

$$f(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0;\ \varphi(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0. \quad (65)$$

Частный случай таких уравнений, вида

$$z' = \varphi(x, y, z, p, q);\ z = \psi(x, y, z', p', q'),$$

приводит, в результате исключений функции z' — с одной стороны и функции z — с другой, к двум уравнениям 2-го порядка, между интегралами которых существует однозначное соответствие. Это дает такое преобразование Бэклунда, частным случаем которого является знаменитое преобразование Лапласа в теории уравнений с частными производными 2-го порядка.

Второй частный случай,

$$p' = \alpha(x, y)p\,;\ q' = \beta(x, y)q\,,$$

приводит к такому преобразованию Бэклунда, в силу которого всякому интегралу одного уравнения 2-го порядка соответствует бесконечность интегралов другого уравнения, зависящих от одной произвольной постоянной; частным случаем этого преобразования Бэклунда является преобразование Мутарда в теории уравнений 2-го порядка: для него имеет место зависимость между функциями α и β:

$$\alpha + \beta = 0\,.$$

Задача Бэклунда сводится к определению поверхностей

$$z = \omega_1(x, y),\ z' = \omega_2(x', y'),$$

определяемых уравнениями (64) в случае пространства трех измерений, и к определению поверхностей пространства четырех, пяти и больше измерений; эти поверхности устанавливаются уравнениями с частными производными 1-го порядка при двух функциях трех независимых переменных, при трех функциях двух независимых переменных, и т. д. Основные работы Бэклунда относятся главным образом к изучению систем 2, 3 и 4 уравнений 1-го порядка при двух функциях z, z' независимых переменных x, y; 2, 3 и 4 уравнений при двух функциях z и z' соответственао от аргументов x, y и x', y'; систем уравнений при двух функциях z, z' трех независимых переменных x_1, x_2, x_3 и при трех функциях z, z', z'' двух аргументов x, y. Многочисленные работы других ученых, занимавшихся задачей и преобразованиями Бэклунда, относятся главным образом к уравнениям с двумя неизвестными функциями от 2 аргументов каждая.

Метод исследования Бэклунда систем уравнений 1-го порядка при двух и больше функциях сводится к исключению неизвестных функций и к изучению соответствующих уравнений и систем уравнений 2-го и 3-го порядка с одной неизвестной функцией z, и основан на таком положении, высказанном в самом начале его первой работы в этой области, при изучении системы двух уравнений 1-го порядка (65).

„Вопрос о том, каким образом найти функции z, z' от x, y, которые удовлетворяют этим уравнениям, равносилен вопросу, как задать одну функцию z' от x, y, посредством которой, если ее подставить в уравнения и одновременно — для p', q' также подставить ее производные по x, y, — то заданные уравнения превращались бы в два такие уравнения с частными производными 1-го порядка относительно z:

$$A(x, y, z, p, q) = 0\,;\ B(x, y, z, p, q) = 0\,,$$

которые обладают общим для них обоих решением

$$z = F(x, y).$$

И этот вопрос решается следующим образом. Устанавливают уравнения

$$[f\varphi]_{zxp} = 0 \tag{66}$$

$$[f[f\varphi]]_{zxp} = 0\,,\ [\varphi[f\varphi]]_{zxp} = 0\,, \tag{67}$$

из которых последние, посредством исключения z, p, q благодаря (65) и (66) переходят в два уравнения с частными производными 3-го порядка для z'. Если эти два уравнения допускают одно общее решение z', — и я покажу, что это постоянно имеет место, — то это решение и является искомого рода функцией z'; так как, благодаря подстановке ее в уравнения (65), (66), эти последние, на основании тождеств (67), получают, как общее решение, выражение для z через x и y, находимое из них посредством исключения". Символ в (66) и аналогично — в (67) обозначает следующее:

$$\begin{aligned}[f\varphi]_{zxp} = &\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p + \frac{\partial f}{\partial z'}p' + \frac{\partial f}{\partial p'}r' + \frac{\partial f}{\partial q'}s'\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p} - \\ &-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}p + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}p' + \frac{\partial\varphi}{\partial p'}r' + \frac{\partial\varphi}{\partial q'}s'\right)\frac{\partial f}{\partial p} + \\ &+\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q + \frac{\partial f}{\partial z'}q' + \frac{\partial f}{\partial p'}s' + \frac{\partial f}{\partial q'}t'\right)\frac{\partial\varphi}{\partial q} - \\ &-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}q + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}q' + \frac{\partial\varphi}{\partial p'}s' + \frac{\partial\varphi}{\partial q'}t'\right)\frac{\partial f}{\partial q} = \\ = &\left(\frac{df}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial p} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right) + \left(\frac{df}{dy}\frac{\partial\varphi}{\partial q} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}\right).\end{aligned}$$

По этому поводу следует сказать, что система (65), согласно исследованиям Гамбургера, Е. Вебера и тем, которые представлены в этой главе, вообще говоря, совместима и обладает решением

$$z = f_1(x, y),\ z' = f_2(x, y).$$

К условиям совместимости мы приходим не для системы (65), а для системы трех уравнений вида:

$$f(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0\,;\ \varphi(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0\,;\ z' = \psi(x, y)\,,$$

где ψ — заданная функция от x, y, причем условия основываются на равенстве

$$[F, \Phi] = 0\,,$$

где обозначено

$$f\left(x, y, z, \psi, p, q, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = F(x, y, z, p, q)\,;$$

$$\varphi\left(x, y, z, \psi, p, q, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = \Phi(x, y, z, p, q)\,.$$

Кроме того не рассматривается вопрос о том, не будут ли уравнения и системы уравнений 2-го и 3-го порядков, которые получаются в результате дифференцирований и к изучению интегралов которых приходим по Бэклунду, разыскивая решение, например, системы уравнений 1-го порядка (2), — представлять собою дифференциальные уравнения более общего вида, чем исходные уравнения (2).

Другой метод исследования решений уравнений задачи Бэклунда можно найти, например, в монографии Гурса о задаче Бэклунда; в этой монографии речь идет только об уравнениях (64) и (65). Состоит он в изучении системы таких двух уравнений Пфаффа 6 переменных, — уравнений, связанных с задачей интегрирования уравнений Бэклунда (64):

$$\omega_1 \equiv a_1 dx_1 + \ldots + a_6 dx_6 = 0\,; \; \omega_2 \equiv b_1 dx_1 + \ldots b_6 dx_6 = 0\,.$$

Эти уравнения получим, если 10 функций $x, y, z, \ldots q'$ двух независимых переменных, удовлетворяющих уравнениям (64) и условиям соединенности элементов, выразим посредством 6 параметров $x_1, \ldots x_6$ таким образом, чтобы системе значений $x, y, \ldots q'$ соответствовала одна только система значений $x_1, \ldots x_6$, и, наоборот, по крайней мере в достаточно ограниченных областях. Если система (64) решается, например, относительно x', y', p', q', то параметрами можно взять x, y, z, p, q, z'. При этом, заменяя задачу Бэклунда, даже в ее обобщенном виде, разысканием интегралов W_2 связанной с задачей Бэклунда системой Пфаффа, еще более обобщаем задачу, так как образование системы Пфаффа требует только, чтобы, скажем, уравнения (64) были различны и совместимы, тогда как задача Бэклунда даже обобщенная, может не иметь смысла для некоторых систем уравнений (64), и наоборот, — система двух Пфаффовых уравнений шести переменных может быть связана с бесчисленным количеством задач Бэклунда.

Известно, что всякая система двух уравнений Пфаффа рассматриваемого класса шести переменных может быть сведена двумя и только двумя способами к такой *приведенной форме*:

$$\Omega_1 \equiv dz - pdx - qdy = 0\,; \; \Omega_2 \equiv Xdx + Ydy + Pdp + Qdq = 0\,.$$

Система двух Пфаффовых уравнений шести переменных сводится к одной из 5 *канонических форм*, система 5 переменных — к одной из двух канонических форм, а система 4 переменных — к одной из двух канонических форм. Все эти 9 канонических форм и рассматриваются у Гурса: с ними связывается разыскание интегралов системы уравнений 1-го порядка задачи Бэклунда.

Третий метод решения уравнений задачи Бэклунда, — это метод решения уравнений 1-го порядка при двух и больше неизвестных функциях двух и больше аргументов в них, изложенный детально в §§ 80 — 83 этой главы. Такой путь для решения задачи Бэклунда будет наиболее простым и естественным: уравнения задачи Бэклунда являются частными интегралами связанных с ними *линейных уравнений с частными производными 1-го порядка одной неизвестной функции* Ф; изучением интегралов этих линейных уравнений 1-го порядка заменяется изучение интегралов уравнений 2-го и 3-го порядков одной неизвестной функции, которые рассматриваются в исследованиях Бэклунда и других ученых.

Помимо этого изложенная в § 80 теория совместимости уравнений 1-го порядка, в смысле инволюции этих уравнений, позволяет

судить о разрешимости такой отдельной задачи Бэклунда, для которой мы имеем уже заданным определенное число определенной формы уравнений 1-го порядка при многих функциях. На это обстоятельство здесь обращается внимание ввиду того, что — в современных математических работах, относящихся, например, к различным вопросам из теории относительности Эйнштейна, дифференциальные уравнения 1-го и высших порядков со многими неизвестными функциями, — для которых ученые зачастую не знают даже простейших частных решений, — могут быть и несовместимыми, противоречащими друг другу; вопрос о совместимости таких уравнений во многих случаях совсем не рассматривается. На это обстоятельство обращено внимание в одной из последних работ Картана, в записках Французского математического о-ва за 1931 год, где автор, много работавший в области изучения уравнений Пфаффа, имеет целью изучить инволюционность разного рода систем уравнений 1-го порядка, систем, взятых преимущественно из гидродинамики и из теории относительности. Однако можно согласиться далеко не со всеми выводами его теории инволюционности систем. Например, система двух линейных уравнений при двух функциях двух аргументов на стр. 98 его мемуара инволюционна, согласно вышеизложенному в этой главе, и данное французским академиком условие совместимости излишне; система 4 уравнений гидродинамики на стр. 108 также инволюционна, при этом, определив из первых 3 уравнений функции X, Y, Z, можно найти из последнего уравнения 4-ю неизвестную функцию ρ, рассматривая переменную t, как параметр.

В заключение этого параграфа остановимся на рассмотрении вопроса о совместимости 4 уравнений задачи Бэклунда (64). Два уравнения этой системы, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, можно рассматривать как уравнения совместимой системы, содержащей 2 неизвестные функции: z от x, y и z' от x', y'. Такая система представляет собой тот частный случай системы двух уравнений с двумя неизвестными функциями z, z' 4 независимых переменных x, y, x', y', когда

$$\frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{\partial z}{\partial y'} = \frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x'}\right)} = \frac{\partial F_k}{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial y'}\right)} = \frac{\partial F_k}{\partial\left(\dfrac{\partial z'}{\partial x}\right)} = \frac{\partial F_k}{\partial\left(\dfrac{\partial z'}{\partial y}\right)} = 0\,.$$

Поэтому, полагая, например, что

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p, p'}\right) \neq 0\,; \; D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p, p', q'}\right) \neq 0\,,$$

и построивши соответствующую матрицу, — два другие уравнения $F_3 = 0$, $F_4 = 0$ в системе (64) задачи Бэклунда, находящиеся в инволюции с уравнениями $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, будем иметь в виде частных интегралов $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$ такой системы линейных уравнений 1-го порядка одной неизвестной функции Ф, обладающей интегралами $F_1 = 0$, $F_2 = 0$:

$$(p'q)\frac{\partial \Phi}{\partial p} + (pp')\frac{\partial \Phi}{\partial q} + (qp)\frac{\partial \Phi}{\partial p'} = 0$$

$$(q'q)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(pq')\frac{\partial\Phi}{\partial q}+(qp)\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=0$$

$$([p'x']+[q'y'])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[x'p]\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[y'p]\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+(pp')\frac{d\Phi}{dx'}+(pq')\frac{d\Phi}{dy'}=0.$$

Для совместимости 4 уравнений

$$F_1=0,\ \ F_2=0,\ \ \Phi_1=C_1,\ \ \Phi_2=C_2$$

надо, чтобы была инволюционной каждая из таких двух совокупностей 3 уравнений:

$$F_1=0,\ \Phi_1=C_1,\ \Phi_2=C_2\ \text{ и }\ F_2=0,\ \Phi_1=C_1,\ \Phi_2=C_2.$$

Полагая, что

$$D\left(\frac{F_1,F_2}{q,\ q'}\right)\neq 0;\qquad D\left(\frac{F_1,F_2,\Phi}{p,\ q,\ q'}\right)\neq 0,$$

систему, определяющую уравнения $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2$, можно было бы записать еще таким образом:

$$(q'p)\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(pp')\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+(p'q')\frac{\partial\Phi}{\partial p}=0$$

$$(q'q)\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(qp')\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+(p'q')\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0$$

$$([px]+[qy])\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+[xq']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[yq']\frac{\partial\Phi}{\partial q}+(q'p)\frac{d\Phi}{dx}+(q'q)\frac{d\Phi}{dy}=0.$$

§ 87. О решении задачи Вейнгартена. Основные работы Бэклунда, относящиеся к исследованиям, о которых шла речь в предшествующем параграфе, были напечатаны больше 50 лет тому назад. Одна из последних больших работ Бэклунда, в записках Лундского университета за 1918 год, посвящена одной теореме Вейнгартена о развертывающихся друг на друге поверхностях. Речь идет здесь о представлении элемента поверхности

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

в форме

$$ds^2=d\alpha^2+2\,d\omega\,d\beta,$$

где E, F, G — заданные функции параметров — криволинейных координат u, v. Задачу о разыскании функций $\alpha(u,v)$, $\beta(u,v)$, $\omega(u,v)$, назовем *задачей Вейнгартена*. В некоторых исследованиях, как например в упоминавшейся в § 80 монографии Гурса о задаче Бэклунда, функция $\omega(u,v)$ считается заданной, а в некоторых, как и в большом мемуаре Бэклунда, неизвестной, искомой. В обоих случаях задача не была решена. В работе Бэклунда с изучением вопроса связываются сложные уравнения с частными производными 2-го порядка одной неизвестной функции, а в работе Гурса рассматривается связанная с задачей Вейнгартена система 4 уравнений с частными производными 1-го порядка при двух неизвестных функциях; вопрос о совместимости системы не изучается.

Остановимся сначала на первой точке зрения, полагая ω известной функцией, — изучение вопроса с этой точки зрения дает ответ и на вопрос, поставленный с другой точки зрения.

При этом мы получим для определения каждой из 3 неизвестных функций α, β, ω уравнения значительно более простые, чем уравнения для этих функций в упомянутом мемуаре Бэклунда.

По Бэклунду функция β представляет собой решение уравнения

$$\Delta_{22}\varphi+K\Delta_1\varphi=0,$$

функция ω — это решение, содержащее 2 произвольные постоянные C_1, C_2, системы уравнений

$$\nabla(\omega,\beta)=1-\sqrt{\Delta_1\omega}\cdot\sqrt{\Delta_1\beta};\quad \frac{\Delta_2\omega}{\sqrt{\Delta_1\omega}}+\frac{\Delta_2\beta}{\sqrt{\Delta_1\beta}}=0,$$

а функция α определяется квадратурами из уравнений

$$\nabla(\alpha,\omega)=\sqrt{\Delta_1\omega}\cdot\sqrt{1-2\nabla(\omega,\beta)};\ \nabla(\alpha,\beta)=-\sqrt{\Delta_1\beta}\cdot\sqrt{1-2\nabla(\omega,\beta)},$$

где символы $\Delta_1\theta$, $\nabla(\zeta,\theta)$, $\Delta_2\theta$, $\Delta_{22}\theta$ обозначают *дифференциальные параметры — инварианты*, определяемые по формулам

$$\Delta_1\theta=\frac{E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}+G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2}{EG-F^2}$$

$$\nabla(\zeta,\theta)=\frac{E\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}-F\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}+\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)+G\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}}{EG-F^2}$$

$$\Delta_2\theta=-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\theta}{\partial u}-F\frac{\partial\theta}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\theta}{\partial v}-F\frac{\partial\theta}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right]=$$
$$=\frac{E\theta_{22}-2F\theta_{12}+G\theta_{11}}{EG-F^2}$$

$$\Delta_{22}\theta=\frac{\theta_{11}\theta_{22}-\theta_{12}^2}{EG-F^2},$$

причем величина K в первом уравнении обозначает *Гауссову-кривизну* для заданной поверхности и является величиной известной, а выражения θ_{11}, θ_{12}, θ_{22} определяются по формулам

$$\theta_{11}=\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial u}-\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

$$\theta_{12}=\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

$$\theta_{22}=\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}-\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial u}-\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial u},$$

где $\begin{Bmatrix}ij\\k\end{Bmatrix}$ обозначают обычно употребляемые в дифференциальной геометрии *символы Кристоффеля*, или иначе — *скобки Кристоффеля второго ряда*.

Символы Кристоффеля зависят от коэффициентов E, F, G и выражаются через них таким образом.

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=\frac{G\frac{\partial E}{\partial u}+F\frac{\partial E}{\partial v}-2F\frac{\partial F}{\partial u}}{2(EG-F^2)},\ \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=\frac{E\frac{\partial G}{\partial v}+F\frac{\partial G}{\partial u}-2F\frac{\partial F}{\partial v}}{2(EG-F^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v}-F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)};\quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u}-F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\frac{-F\dfrac{\partial E}{\partial u}+2E\dfrac{\partial F}{\partial u}-E\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)};\quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=\frac{-F\dfrac{\partial G}{\partial v}+2G\dfrac{\partial F}{\partial v}-G\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}.$$

Переход от криволинейных координат u, v к декартовым x, y, z совершается по формулам

$$x=\omega+\frac{1}{2}\beta;\quad y=-i\left(\omega-\frac{1}{2}\beta\right);\quad z=\alpha,$$

так как

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=dx^2+dy^2+dz^2=$$
$$=dz^2+d(x+iy)\,d(x-iy)\equiv d\alpha^2+2d\omega d\beta.$$

Так как

$$d\alpha=\frac{\partial\alpha}{\partial u}du+\frac{\partial\alpha}{\partial v}dv;\quad d\beta=\frac{\partial\beta}{\partial u}du+\frac{\partial\beta}{\partial v}dv;\quad d\omega=\frac{\partial\omega}{\partial u}du+\frac{\partial\omega}{\partial v}dv,$$

то, обозначая

$$\omega_1=\frac{\partial\omega}{\partial u},\quad \omega_2=\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

$$\omega_{11}=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2},\quad \omega_{12}=\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v},\quad \omega_{22}=\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2},$$

по формуле

$$E(u, v)\,du^2+2F(u, v)\,dudv+G(u, v)\,dv^2=d\alpha^2+2d\omega d\beta,$$

имеем:

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+2\omega_1\frac{\partial\beta}{\partial u}=E;\ \left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2+2\omega_2\frac{\partial\beta}{\partial v}=G;\ \frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}+\omega_2\frac{\partial\beta}{\partial v}+\omega_1\frac{\partial\beta}{\partial v}=F \qquad (68)$$

Положим, для удобства записи

$$\alpha=z,\ \beta=z',\ u=x,\ v=y,$$

и применим результаты теории § 81 к нашей системе трех уравнений (68), которые в новых обозначениях перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned} p^2+2\omega_1p'-E(x, y)&=0\\ q^2+2\omega_2q'-G(x, y)&=0\\ pq+\omega_2p'+\omega_1q'-F(x, y)&=0\end{aligned}\right\}. \qquad (69)$$

Первое условие инволюционности (26) § 81 дает

$$\left\{\begin{vmatrix}0 & 2\omega_1\\ 2\omega_2 & 0\end{vmatrix}p+\begin{vmatrix}2\omega_1 & 0\\ 0 & 2q\end{vmatrix}\omega_1\right\}\cdot\left\{\begin{vmatrix}2\omega_1 & 0\\ 0 & 2q\end{vmatrix}q+\begin{vmatrix}0 & 2p\\ 2q & 0\end{vmatrix}\omega_2\right\}=$$
$$=\left\{\begin{vmatrix}2\omega_1 & 0\\ 0 & 2\omega_2\end{vmatrix}q+\begin{vmatrix}0 & 2p\\ 2\omega_2 & 0\end{vmatrix}\omega_2\right\}\cdot\left\{\begin{vmatrix}0 & 2p\\ 2\omega_2 & 0\end{vmatrix}p+\begin{vmatrix}2p & 0\\ 0 & 2q\end{vmatrix}\omega_1\right\}$$

т. е.

$$(\omega_1q-\omega_2p)^3=0,\ \text{или}\ \omega_2p=\omega_1q,$$

и в раскрытом виде:

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}=\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial\alpha}{\partial u}.$$

Второе условие инволюционности (26) § 81 имеет вид

$$\left\{\begin{vmatrix}2\omega_1, & 2\omega_{11}p'-\dfrac{\partial E}{\partial u}\\ 0, & 2\omega_{12}q'-\dfrac{\partial G}{\partial u}\end{vmatrix}q+\begin{vmatrix}2\omega_{11}p'-\dfrac{\partial E}{\partial u}, & 2p\\ 2\omega_{12}q'-\dfrac{\partial G}{\partial u}, & 0\end{vmatrix}\omega_2\right\}\left\{\begin{vmatrix}0 & 2p\\ 2\omega_2 & 0\end{vmatrix}p+\begin{vmatrix}2p & 0\\ 0 & 2q\end{vmatrix}\omega_1\right\}=$$
$$=\left\{\begin{vmatrix}0, & 2\omega_{12}p'-\dfrac{\partial E}{\partial v}\\ 2\omega_2, & 2\omega_{22}q'-\dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}p+\begin{vmatrix}2\omega_{12}p'-\dfrac{\partial E}{\partial v}, & 0\\ 2\omega_{22}q'-\dfrac{\partial G}{\partial v}, & 2q\end{vmatrix}\omega_1\right\}\left\{\begin{vmatrix}2\omega_1 & 0\\ 0 & 2q\end{vmatrix}q+\begin{vmatrix}0 & 2p\\ 2q & 0\end{vmatrix}\omega_2\right\}$$

т. е.

$$(\omega_1q-\omega_2p)^2\left[2\omega_{12}(pq'-qp')+\frac{\partial E}{\partial v}q-\frac{\partial G}{\partial u}p\right]=0.$$

Это условие удовлетворяется посредством первого условия и пока нет надобности в ограничении

$$2\omega_{12}(pq'-qp')+\frac{\partial E}{\partial v}q-\frac{\partial G}{\partial u}p=0. \qquad (69')$$

Таким образом условия инволюционности системы (69) приводят к определению функций α и β посредством 4 уравнений:

$$p^2+2\omega_1p'=E;\ q^2+2\omega_2q'=G;\ pq+\omega_2p'+\omega_1q'=F;\ \omega_2p=\omega_1q. \qquad (70)$$

Из последнего уравнения мы имеем $q=\frac{\omega_2}{\omega_1}p$, два первые дают

$$p'=\frac{E-p^2}{2\omega_1};\quad q'=\frac{G-q^2}{2\omega_2}=\frac{\omega_1^2G-\omega_2^2p^2}{2\omega_2\omega_1^2},$$

а подстановка в третье уравнение (70) приводит к зависимости, которой можно заменить любое из уравнений (70):

$$E\omega_2^2-2F\omega_1\omega_2+G\omega_1^2=0,$$

т. е. функция ω не представляет собой какой-нибудь любой функции параметров u, v, но определяется посредством уравнения заданной поверхности (т. е. посредством выражений для E, F, G, находящихся по уравнению данной поверхности) по формуле

$$E\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2+G\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2=2F\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}, \qquad (71)$$

или короче:

$$\Delta_1\omega=0.$$

Функцию ω определим посредством E, F, G с помощью этого уравнения 1-го порядка, заменяющего одно из 4 уравнений (70), и с помощью уравнения 2-го порядка, получаемого из условий инволюционности оставшихся 3 уравнений (70) с 2 неизвестными функциями α и β. Заменим уравнением (71), например, третье из уравнений (70) и будем изучать условия инволюционности трех уравнений с двумя неизвестными функциями α и β:

$$p^2+2\omega_1p'=E;\ q^2+2\omega_2q'=G;\ \omega_2p-\omega_1q=0 \qquad (72)$$

Первое условие (26) § 81 приводит к зависимости

$$\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1q-\omega_2p)=0$$

или

$$\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v},$$

удовлетворяющейся посредством 3-го уравнения системы (72). Второе же условие приводит к уравнению (69′), полученному из условий инволюционности системы (69). Это второе условие, с помощью первых 2 уравнений (72), можно переписать еще в такой форме:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}\left[G\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2-E\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2\right]=\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right),$$

или, вследствие (71), — в такой:

$$2\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}\left(G\frac{\partial\omega}{\partial u}-F\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=\frac{\partial\omega}{\partial v}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) \qquad (73)$$

Таким образом, *функция* ω *может быть найдена в виде решения уравнения 1-го порядка (71) и этого линейного уравнения 2-го порядка (73).*

Когда функция ω таким образом определена, тогда 3-е уравнение системы (72) дает неизвестную *функцию* α: интеграл $\Omega(u, v)=\text{const}$ *обыкновенного дифференциального уравнения*

$$\frac{dv}{du}+\frac{\omega_1}{\omega_2}=0$$

приводит к общему интегралу для неизвестной функции α:

$$\alpha=\Phi[\Omega(u, v)],$$

где Φ обозначает произвольную функцию.

Найдя таким образом ω и α и подставляя их выражения в первые два уравнения (72), т. е. в уравнения

$$p'=\frac{E-p^2}{2\omega_1};\quad q'=\frac{G-q^2}{2\omega_2},$$

будем иметь с помощью квадратур функцию $\beta(u, v)$ на основании зависимости

$$d\beta=\left(\frac{E-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2}{2\frac{\partial\omega}{\partial u}}\right)du+\left(\frac{G-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2}{2\frac{\partial\omega}{\partial v}}\right)dv.$$

Правая часть последнего равенства представляет собой полный дифференциал, так как условие

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2}{2\frac{\partial\omega}{\partial u}}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2}{2\frac{\partial\omega}{\partial v}}\right)$$

равносильно, как легко проверить, уравнению (73) для функции ω.

Если бы мы заменили второе из уравнений (70) равносильным ему уравнением (71), то рассмотрение условий инволюционности оставшихся 3 уравнений (70) с двумя неизвестными функциями α, β

привело бы нас, вместо (73), к такому линейному уравнению 2-го порядка для определения функции ω:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\left[G\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2-E\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2\right]+\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}\left(\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u}-2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)=0,$$

или, вследствие (71):

$$2\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\left(E\frac{\partial\omega}{\partial v}-F\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)=\frac{\partial\omega}{\partial u}\left(\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u}-2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}\right). \qquad (73')$$

Найдя ω из (71), (73′), для α и β имеем соответственно:

$$\alpha=\Phi[\Omega(u, v)]$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial u}=\frac{\omega_1\left[E-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2\right]}{2\omega_1^2};\quad \frac{\partial\beta}{\partial v}=\frac{2\omega_1\left[F-\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right]-\omega_2\left[E-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2\right]}{2\omega_1^2}.$$

Заметим попутно, что для определения функции ω осталось неизменным уравнение 1-го порядка (71). Его легко получить и из того условия, чтобы 4 уравнения (70) алгебраически не противоречили друг другу: достаточно исключить производные $\frac{\partial\alpha}{\partial u}$ и $\frac{\partial\alpha}{\partial v}$ из 1-го, 2-го и 4-го уравнений (70), а затем — из 2-го, 3-го и 4-го, и результаты исключений сравнить между собою; отсюда же будем иметь возможность заменять уравнением (71) любое из уравнений (70).

Заменяя, далее, первое уравнение (70) уравнением (71), из условий инволюционности оставшихся 3 уравнений с двумя функциями α, β будем иметь для функции ω, вместо (73), (73′), такое линейное уравнение 2-го порядка:

$$2\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\left(G\frac{\partial\omega}{\partial u}-F\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=\frac{\partial\omega}{\partial v}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u}-2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right). \qquad (73'')$$

Найдя ω из (71), (73″), для α и β имеем соответственно:

$$\alpha=\Phi[\Omega(u, v)]$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial v}=\frac{\omega_2\left[G-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2\right]}{2\omega_2^2};\quad \frac{\partial\beta}{\partial u}=\frac{2\omega_2\left[F-\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right]-\omega_1\left[G-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2\right]}{2\omega_2^2}.$$

Заменяя, наконец, четвертое уравнение (70) уравнением (71), нового вида уравнения 2-го порядка для функции ω, помимо уравнений (73), (73′), (73″), мы не получим: первое условие инволюционности оставшихся 3 уравнений даст уравнение (71), а второе условие удовлетворяется независимо от того, удовлетворено ли будет для ω уравнение (73).

Функции α *и* β *можно будет найти еще таким образом.*

Третье уравнение системы наших первых трех уравнений (70):

$$p^2+2\omega_1p'=E;\quad q^2+2\omega_2q'=G;\quad pq+\omega_2p'+\omega_1q'=F,$$

с помощью уравнения $\omega_2p=\omega_1q$, или иначе — уравнения (71), можно переписать так:

$$-\omega_2\frac{\partial\beta}{\partial u}+\omega_1\frac{\partial\beta}{\partial v}=\frac{G\omega_1-F\omega_2}{\omega_2},$$

или так:

$$-\omega_2\frac{\partial\beta}{\partial u}+\omega_1\frac{\partial\beta}{\partial v}=\frac{G\omega_1^2-E\omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}.$$

Определивши функцию β посредством одного из этих линейных неоднородных уравнений с частными производными 1-го порядка, т. е. посредством одной из систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{-\omega_2}=\frac{dv}{\omega_1}=\frac{\omega_2 d\beta}{G\omega_1-F\omega_2},$$

$$\frac{du}{-\omega_2}=\frac{dv}{\omega_1}=\frac{2\omega_1\omega_2 d\beta}{G\omega_1^2-E\omega_2^2},$$

квадратурами найдем функцию α из первых двух уравнений (70), которые дают:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}\sqrt{E-2\omega_1\frac{\partial\beta}{\partial u}};\ \frac{\partial\alpha}{\partial v}=\sqrt{G-2\omega_2\frac{\partial\beta}{\partial v}}.$$

Легко проверить, что условие для полного дифференциала функции α, т. е. тождество

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)\equiv\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right),$$

приводит с помощью уравнения $\omega_2 p=\omega_1 q$, или иначе—уравнения (71), к уравнению 2-го порядка (73), которому, следовательно, должна удовлетворять функция ω, совместно с уравнением (71).

§ 88. Об одной задаче, связанной с задачей Вейнгартена. В качестве приложения изложенной в § 82 теории интегрирования системы нелинейных уравнений 1-го порядка при трех неизвестных функциях z, z', z'' двух независимых переменных x, y, рассмотрим следующую задачу, связанную с уравнениями задачи Вейнгартена, когда неизвестны 3 функции α, β, ω двух переменных u, v и когда уравнения задачи, в силу условия

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2=d\alpha^2+2d\omega d\beta,$$

имеют такой вид:

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}=E(u,v)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}+\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}+\frac{\partial\beta}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u}=F(u,v)$$

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial\beta}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}=G(u,v),$$

или, при обозначениях

$$\alpha=z,\ \beta=z',\ \omega=z'';\ u=x,\ v=y,$$

такой:

$$\left.\begin{aligned} p^2+2p'p''&=E(x,y)\\ pq+p'q''+p''q'&=F(x,y)\\ q^2+2q'q''&=(Gx,y)\end{aligned}\right\}\qquad(74)$$

Какого вида могут быть уравнения с частными производными 1-го порядка при трех неизвестных функциях z, z', z'' двух независимых переменных x, y, чтобы они находились в инволюции с системой трех уравнений (74)?

Пользуясь, при разыскании уравнений

$$\Phi(x, y, z, z', z'', p, q, p', q', p'', q'')=0,$$

находящихся в инволюции с тремя уравнениями (74), обозначениями § 82, имеем:

$$P=0;\ Q=0$$

$$\frac{P_1}{q}=\frac{P_2}{q''}=\frac{P_3}{q'}=4\begin{vmatrix}p''p'\\ q''q'\end{vmatrix}=\frac{Q_1}{p}=\frac{Q_2}{p''}=\frac{Q_3}{p'}$$

$$\frac{P_4}{q}=\frac{P_5}{q''}=\frac{P_6}{q'}=4\begin{vmatrix}p'p\\ q'q\end{vmatrix}=\frac{Q_4}{p}=\frac{Q_5}{p''}=\frac{Q_6}{p'}$$

$$\frac{P_7}{q}=\frac{P_8}{q''}=\frac{P_9}{q'}=4\begin{vmatrix}pp''\\ qq''\end{vmatrix}=\frac{Q_7}{p}=\frac{Q_8}{p''}=\frac{Q_9}{p'}.$$

Все коэффициенты кубического уравнения (40) равны нулю и λ — неопределенная функция переменных $x, y, z, z', \ldots q''$. Первое и второе уравнения системы (41), для произвольной функции μ от только что упомянутых переменных равносильны одному такому уравнению 1-го порядка:

$$(q''-\lambda q)\left\{\begin{vmatrix}p'p''\\ q'q''\end{vmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial p}+\begin{vmatrix}pp'\\ qq'\end{vmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+\begin{vmatrix}p''p\\ q''q\end{vmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial p''}\right\}=0.\qquad(75)$$

Это уравнение обладает только двумя независимыми интегралами; эти интегралы — два первые уравнения (74):

$$p^2+2p'p''=E;\ pq+p'q''+p''q'=F.$$

Третье уравнение (74)

$$q^2+2q'q''=G$$

также удовлетворяет предшествующему уравнению (75). Последнее уравнение вспомогательной системы (41) имеет форму:

$$\left.\begin{aligned}&4q\left\{\begin{vmatrix}p''p'\\ q''q'\end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix}p'p\\ q'p\end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix}pp''\\ qq''\end{vmatrix}\right\}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}q+\frac{\partial\Phi}{\partial z'}q'+\frac{\partial\Phi}{\partial z''}q''\right)=\\ &=([xp'p'']+\lambda[yqp'']+\mu[yp'q])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+([xp''p]+[yp''q]+\mu[yqp])\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+\\ &+([xpp']+\lambda[ypq]+[yqp'])\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+([yp'p'']+\lambda[yp''p]+\mu[ypp'])\frac{\partial\Phi}{\partial q},\end{aligned}\right\}\quad(76)$$

где

$$[yqp'']=2\left(qq'\frac{\partial E}{\partial y}-2qp'\frac{\partial F}{\partial y}+pp'\frac{\partial G}{\partial y}\right)=-[yp''q]$$

. . . .

$$[yqp]=2\left(qq\frac{\partial E}{\partial y}-2pq\frac{\partial F}{\partial y}+pp\frac{\partial G}{\partial y}\right)=-[ypq]$$

$$[xp'p'']=2\begin{vmatrix}p'p''\\ q'q''\end{vmatrix}\frac{\partial G}{\partial x};\ 2\begin{vmatrix}p'p''\\ q'q''\end{vmatrix}\frac{\partial G}{\partial y}=[yp'p'']$$

. . . .

$$[xpp']=2\begin{vmatrix}p''p\\ q''q\end{vmatrix}\frac{\partial G}{\partial x};\ 2\begin{vmatrix}p''p\\ q''q\end{vmatrix}\frac{\partial G}{\partial y}=[ypp'].$$

Три интеграла (74) уравнения (76) те же, что и интегралы уравнения (75). Уравнения $\Phi=0$, совместимые с уравнениями (74), надо искать среди остальных частных интегралов уравнения (76), отличных от (74). Так как функция λ произвольна, ее можно было бы выбирать так, чтобы система двух уравнений (75), (76) была полной. Положим $\lambda=q''/q$, тогда условие инволюционности (75) удовлетворится, и остается искать интегралы одного только уравнения (76), а не системы двух уравнений (75), (76). Легко обнаружить, что между λ и μ существует зависимость:

$$\lambda(p'q-pq')+\mu(pq''-qp'')=p'q''-q'p'', \tag{77}$$

которую получаем по общему правилу, приравнивая нулю все определители 5-го порядка матрицы

$$\left\|\begin{matrix} 1 & \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda & \mu \\ p & p'' & p' & 0 & 0 & 0 \\ q & q'' & q' & p & p'' & p' \\ 0 & 0 & 0 & q & q'' & q' \end{matrix}\right\|$$

и если возьмем $\lambda q=q''$, то надо положить $\mu q=q'$.

В таком случае уравнение (76) переписывается:

$$\left.\begin{aligned} &(q[xp'p'']+q''[yqp'']+q'[yp'q])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(q[xp''p]+\\ &+q[yp''q]+q'[yqp])\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(q[xpp']+q[yqp']+q''[ypq])\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+\\ &+(q[yp'p'']+q''[yp''p]+q'[ypp'])\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0, \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

и, следовательно, обладает только тремя независимыми интегралами; это дает нам только уравнения (74). Выходит, что надо положить $\lambda\neq q''/q$ и искать частные интегралы уравнения (76), удовлетворяющие и 2-му уравнению: линейному уравнению

$$\begin{vmatrix} p' p'' \\ q' q'' \end{vmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial p}+\begin{vmatrix} pp' \\ qq' \end{vmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+\begin{vmatrix} p''p \\ q''q \end{vmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial p''}=0, \tag{79}$$

имея в виду, что μ выражается через произвольную функцию λ посредством линейной зависимости (77). Эта же зависимость сводит уравнение (76) к форме (78) и, следовательно, получить уравнения $\Phi=0$, отличные от уравнений (74), нельзя.

Эти же результаты и зависимость (77) можно получить непосредственно из уравнений (34), § 82: если раскрыть определители 4-го порядка по элементам $\frac{\partial\Phi}{\partial p}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial p'}$, ..., то увидим, что первые 4 уравнения (34) будут равносильны одному только при условии

$$\begin{vmatrix} pp'' \\ qq'' \end{vmatrix}\mu+\begin{vmatrix} p'p \\ q'q \end{vmatrix}\lambda+\begin{vmatrix} p''p' \\ q''q' \end{vmatrix}=0,$$

представляющем зависимость (77), и если взять $\lambda=q''/q$, то будет $\mu=q'/q$, — это с одной стороны, а с другой — выйдет, что ни при $\lambda=q''/q$, ни при $\lambda\neq q''/q$ система (34) не может привести к уравнениям $\Phi=0$, отличным от трех уравнений (74).

Такой же результат мы получим и в том случае, когда будем рассматривать и уравнения (33) § 82, так как, если обозначить левую часть уравнения (79) буквой A, а левую часть уравнения (78) буквой B, то уравнения (33) сразу дают:

$$\begin{vmatrix} pp'' \\ qq'' \end{vmatrix}A^2=0;\ \begin{vmatrix} p'p \\ q'q \end{vmatrix}A^2=0;\ AB=0.$$

Наконец, если бы мы считали не равным нулю какой-либо иной определитель 7-го порядка Δ в соответствующей матрице, мы не могли бы получить уравнений с неизвестной функцией Φ, не равносильных системе нелинейных уравнений (33), а следовательно, не нашли бы и уравнений $\Phi=0$, отличных от уравнений (74). Построивши матрицу и выбравши, например, определитель

$$\Delta=\frac{\partial G}{\partial y}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial p} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p''} \\ 2p & 2p'' & 2p' \\ q & q'' & q' \end{vmatrix}^2\neq 0, \text{ т. е. } A\neq 0.$$

получим

$$\begin{vmatrix} G_x' & 2q & 2q'' & 2q' & 0 \\ E_y' & 2p & 2p'' & 2p' & 0 \\ F_y' & q & q'' & q' & p \\ G_y' & 0 & 0 & 0 & 2q \\ -\frac{d\Phi}{dy} & \frac{\partial\Phi}{\partial p} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p''} & \frac{\partial\Phi}{\partial q} \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} G_x' & 2q & 2q'' & 2q' & 0 \\ E_y' & 2p & 2p'' & 2p' & 0 \\ F_y' & q & q'' & q' & p'' \\ G_y' & 0 & 0 & 0 & 2q'' \\ -\frac{d\Phi}{dy} & \frac{\partial\Phi}{\partial p} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p''} & \frac{\partial\Phi}{\partial q'} \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} G_x' & 2q & 2q'' & 2q' & 0 \\ E_y' & 2p & 2p'' & 2p' & 0 \\ F_y' & q & q'' & q' & p' \\ G_y' & 0 & 0 & 0 & 2q' \\ -\frac{d\Phi}{dy} & \frac{\partial\Phi}{\partial p} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p''} & \frac{\partial\Phi}{\partial q''} \end{vmatrix}=0,$$

и так как коэффициенты при производных $\frac{d\Phi}{dy}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial q}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial q'}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial q''}$ равны нулю, то мы приходим к противоречию

$$A=0.$$

Выходит, что *уравнений 1-го порядка* $\Phi=0$, *отличных от уравнений (74) и совместимых с этими уравнениями (74) в смысле инволюции § 80, найти невозможно: их не существует.* Метод интегрирования уравнений (74), представляющий непосредственное обобщение 2-го способа Якоби, к уравнениям (74) не применим, так как нельзя найти ни одного нового уравнения $\Phi=0$, или $\Phi=C$, зависящего не больше чем от одной постоянной C, которое находилось бы в инволюции с этими тремя уравнениями (74).

§ 89. Задача об ортогональных поверхностях. Аналогично тому, как это было изложено в § 88 для трех уравнений задачи Вейнгартена, решается вопрос о розыскании новых уравнений

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, z, z', z''; p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3', p_1'', p_2'', p_3'')=0,$$

находящихся в инволюции с тремя уравнениями 1-го порядка при 3 неизвестных функциях z, z', z'' трех аргументов x_1, x_2, x_3 знаменитой *задачи о трех взаимно ортогональных поверхностях.*

Дифференциальные уравнения, определяющие такие поверхности, будут:

$$\left.\begin{aligned} p_1'p_1''+p_2'p''+p_3'p_3''=0\\ p_1''p_1+p_2''p_2+p_3''p_3=0\\ p_1p_1'+p_2p_2'+p_3p_3'=0\end{aligned}\right\}. \qquad (80)$$

Простейшим примером этого рода поверхностей будут 3 взаимно-перпендикулярные плоскости, пересекающиеся по трем взаимно перпендикулярным прямым, являющимся координатными осями в *прямолинейной прямоугольной системе координат Декарта.*

Считая переменные x_1, x_2, x_3 функциями трех независимых переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3, мы придем к *системе ортогональных криволинейных координат Ляме*, так что для точки (x_1, x_2, x_3) пространства трех измерений будет

$$x_1=f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3);\ x_2=f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3);\ x_3=f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \qquad (81)$$

Обозначая $\pi_i^k \doteq \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i}$, где $i, k=1,\ 2,\ 3$, систему дифференциальных уравнений (80) можно будет заменить системой уравнений 1-го порядка

$$\left.\begin{aligned} \pi_2^1\pi_3^1+\pi_2^2p_3^2+\pi_2^3\pi_3^3=0\\ \pi_3^1\pi_1^1+\pi_3^2\pi_1^2+\pi_3^3\pi_1^3=0\\ \pi_1^1\pi_2^1+\pi_1^2\pi_2^2+\pi_1^3\pi_2^3=0\end{aligned}\right\}. \qquad (82)$$

Чтобы система криволинейных координат, определяемая по формулам (81), была ортогональной, необходимо и достаточно, как это можно показать, чтобы выражение

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2$$

сводилось к форме

$$ds^2=\Xi_1^2d\xi_1^2+\Xi_2^2d\xi_2^2+\Xi_3^2d\xi_3^2.$$

Задача об определении всех функций

$$z=\varphi_1(x_1, x_2, x_3),\ z'=\varphi_2(x_1, x_2, x_3),\ z''=\varphi_3(x_1, x_2, x_3),$$

удовлетворяющих системе (80) и дающих 3 семейства взаимно-ортогональных поверхностей

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3)=a;\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3)=b;\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3)=c,$$

или всех функций (81), удовлетворяющих системе (82), до сих пор не решена.

Методов для решения задачи интегрирования 3 нелинейных уравнений 1-го порядка (80) при трех неизвестных функциях трех независимых переменных можно указать такие три.

Первый метод — это тот, который применяли все выдающиеся математики, занимавшиеся задачей об ортогональных поверхностях, привлекшей внимание таких первоклассных ученых, как Ляме, Серре, О. Бонэ, Кэли, Дарбу, М. Леви, Л. Леви, Гурса, Бертран и т. д. Он состоит в исключении посредством дифференцирования двух из трех неизвестных функций z, z', z'' и в изучении получающихся таким образом уравнений. Исключением занимался первоначально Серре, который пришел к необходимости интегрирования системы 2 уравнений с частными производными 6-го порядка одной неизвестной функции. Приблизительно 70 лет тому назад Бонэ, введя Эйлеровы углы θ, φ, ψ в качестве трех неизвестных функций трех параметров ρ_1, ρ_2, ρ_3 трех семейств ортогональных поверхностей, заменил уравнения (80) такой системой уравнений 1-го порядка:

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}+\cos\psi\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}=0\\ \cos\psi\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}-\sin\psi\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2}=0\\ \cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_3}+\frac{\partial\psi}{\partial\rho_3}=0,\end{aligned}\right\} \qquad (83)$$

и показал, что если взять в качестве независимых переменных φ, ρ_1, ρ_2, то функция ψ будет удовлетворять уравнению с частными производными 3-го порядка, интегрирование которого влечет за собой и интегрирование системы (80).

Четыре года спустя появилась докторская диссертация Дарбу „Об ортогональных поверхностях“, в которой доказано было, во-первых, что интегрирование системы (80) также сводится к интегрированию уравнения 3-го порядка одной неизвестной функции, а во-вторых, указан был способ для получения этого уравнения с частными производными 3-го порядка, одинаково справедливый для каждого из семейств ортогональной системы. Прошло еще 6 лет, и вывод этого уравнения 3-го порядка в первый раз был произведен и закончен английским математиком Кэли. В обозначениях Дарбу оно имеет такой вид через определитель 6-го порядка:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{23} & A_{31} & A_{12}\\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{23} & u_{31} & u_{12}\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2\\ 0 & 2u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1\\ 0 & 0 & 2u_3 & u_2 & u_1 & 0\end{vmatrix}=0,$$

где

$$A_{ik} = u_1 u_{ik1} + u_2 u_{ik2} + u_3 u_{ik3} - (u_{i1} u_{k1} + u_{i2} u_{k2} + u_{i3} u_{k3})$$

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i};\quad u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j};\quad u_{ijk} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3).$$

Мало, конечно, шансов на то, чтобы скоро удалось проинтегрировать это уравнение, линейное относительно производных 3-го порядка неизвестной функции u, 3-й степени относительно производных 2-го порядка и 4-й степени относительно производных 1-го порядка. Остается искать частные интегралы и исследовать свойства уравнения и тех функций, которые ему удовлетворяют, как это делается в большой книге Дарбу „Лекции об ортогональных системах и криволинейных координатах", где по поводу задачи об ортогональных поверхностях и о связанном с ним уравнении 3-го порядка можно прочесть следующее: „Эта задача, требующая интегрирования уравнения с частными производными 3-го порядка при трех независимых переменных, является таким образом на много более трудной, чем большинство других вопросов дифференциальной геометрии, решение которых сводится вообще к интегрированию одного уравнения 2-го порядка с двумя независимыми переменными".

Второй метод для нахождения общего интеграла системы (80) состоит в вариации произвольных постоянных полного интеграла системы (80), который содержит 9 произвольных постоянных и, обозначая 3 плоскости, может быть представлен, например, в таком в виде: [1]

$$z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + C'$$

$$z' = C_3 C_4 x_1 + C_3 C_5 x_2 - (C_1 C_4 + C_2 C_5) x_3 + C''$$

$$z'' = C_6 \{ [C_1 C_2 C_4 + C_5 (C_2^2 + C_3^2)] x_1 - [C_1 C_2 C_5 + C_4 (C_1^2 + C_3^2)] x_2 + {} + C_3 (C_2 C_4 - C_1 C_5) x_3 \} + C'''.$$

Считая, допустим, C_1, C_2, C_3 произвольными функциями $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ от пар функций $C', C_4, C_5, C'', C_6, C'''$, обозначаемых буквами $u_1, u_2, \ldots u_6$, мы могли бы искать общий интеграл в виде

$$z = x_1 \varphi_1 (u_1, u_2) + x_2 \varphi_2 (u_3, u_4) + x_3 \varphi_3 (u_5, u_6) + u_1$$

$$z' = (x_1 u_2 + x_2 u_3) \varphi_3 (u_5, u_6) - x_3 u_2 \varphi_1 (u_1, u_2) - x_3 u_3 \varphi_2 (u_3, u_4) + u_4$$

$$z'' = u_5 \{ (x_1 u_2 - x_2 u_3) \varphi_1 (u_1, u_2) \varphi_2 (u_3, u_4) + x_1 u_3 [\varphi_2^2 (u_3, u_4) + {} + \varphi_3^2 (u_5, u_6)] - x_2 u_2 [\varphi_1^2 (u_1, u_2) + \varphi_3^2 (u_5, u_6) + x_3 u_2 \varphi_2 (u_3, u_4) \varphi_3 (u_5, u_6) - {} - x_3 u_3 \varphi_1 (u_1, u_2) \varphi_3 (u_5, u_6) \} + u_6.$$

Пользуясь правилами VI и VII главы указанной в выноске к этой странице книги, можно будет написать и систему вспомогательных дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка, определяющей неизвестные функции $u_1, \ldots u_6$, для которой достаточно найти *простейшие частные интегралы* $u_1, \ldots u_6$, отличные от постоянных величин.

[1] *M. Kourensky*—Riduzione del problema delle Superfici ortogonali all'integrazione di un sistema di equazioni di prim'ordine in una funzione incognita (Rendiconti d. C. M. di Palermo, t. 50, 1926). Также диссертация „Про інтегрування..." Київ, 1927, гл. XI.

Третий метод состоит в применении непосредственно к системе (80), или (82) и к системе (83) изложенного в § 80 способа интегрирования системы 3 уравнений с частными производными 1-го порядка при трех неизвестных функциях трех независимых переменных и в изучении вопроса с тех точек зрения, под которыми рассматривалась в §§ 87, 88 задача Вейнгартена.

Покажем прежде всего, что не существует какого-либо 4-го уравнения вида

$$\Phi (x_1, x_2, x_3; z, z', z''; p_1, p_2, p_3; p_1', p_2', p_3'; p_1'', p_2'', p_3'') = \text{const}, \qquad (84)$$

которое находилось бы в инволюции с тремя уравнениями системы (82) и, следовательно, упомянутый метод интегрирования непосредственно к системе (82) не применим. Выписавши для 4 уравнений (82) и (84) надлежащую матрицу из 12 горизонталей и 19 колонок, выбравши один из неравных нулю определителей 11-го порядка Δ и приравнивая нулю относящиеся к Δ определители 12-го порядка, получим 7 линейных независимых уравнений с частными производными 1-го порядка одной неизвестной функции Φ от 15 независимых переменных $x_1, x_2, \ldots p_3''$. Одно из этих уравнений требует, чтобы функция Φ не зависела от z, z', z'' и от одной из переменных x_1, x_2, x_3, в зависимости от того, какой выбран будет из неравных нулю определителей Δ. Эту систему 7 уравнений можно написать, например, в таком виде, что одно из уравнений будет $\frac{d\Phi}{dx_1} = 0$, или $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0$, а остальные 6 линейных уравнений запишутся так:

$$2 p_3 p_3' p_3'' \frac{\partial \Phi}{\partial p_2''} - p_3'' (p_2 p_3' + p_3 p_2') \frac{\partial \Phi}{\partial p_3''} - p_3' \begin{vmatrix} p_3 & p_2 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial p_3''} + p_3 \begin{vmatrix} p_3 & p_2 \\ p_3' & p_2' \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = 0$$

$$2 p_3 p_3' p_3'' \frac{\partial \Phi}{\partial p_2'} - p_3'' \begin{vmatrix} p_3 & p_2 \\ p_3'' & p_2'' \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial p_3''} - p_3' (p_3 p_2'' + p_2 p_3'') \frac{\partial \Phi}{\partial p_3'} + p_3 \begin{vmatrix} p_3 & p_2 \\ p_3'' & p_2'' \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = 0$$

$$2 p_3 p_3' p_3'' \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} - p_3'' \begin{vmatrix} p_3' & p_2' \\ p_3'' & p_2'' \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial p_3''} + p_3' \begin{vmatrix} p_3' & p_2' \\ p_3'' & p_2'' \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial p_3'} - p_3 (p_3' p_2'' + p_3'' p_2') \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = 0$$

$$2 p_3 p_3' p_3'' \frac{\partial \Phi}{\partial p_1''} - p_3'' \left| (p_1 p_3' + p_3 p_1') \frac{\partial \Phi}{\partial p_3''} - p_3' \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ p_3' & p_1' \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial p_3'} + p_3 \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ p_3' & p_1' \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = 0 \right.$$

$$2 p_3 p_3' p_3'' \frac{\partial \Phi}{\partial p_1'} - p_3'' \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ p_3'' & p_1'' \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial p_3''} - p_3' (p_3 p_1'' + p_1 p_3'') \frac{\partial \Phi}{\partial p_3'} + p_3 \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ p_3'' & p_1'' \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = 0$$

$$2 p_3 p_3' p_3'' \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} - p_3'' \begin{vmatrix} p_3' & p_1' \\ p_3'' & p_1'' \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial p_3''} + p_3' \begin{vmatrix} p_3' & p_1' \\ p_3'' & p_1'' \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial p_3'} - p_3 (p_3' p_1'' + p_1' p_3'') \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = 0.$$

Эти уравнения представляют собой полную систему линейных однородных уравнений 1-го порядка с неизвестной функцией Φ, обладающую только тремя независимыми интегралами. Легко проверить, что этими интегралами будут 3 уравнения системы (80).

Всякая система уравнений 1-го порядка с неизвестной функцией Φ при всяком другом Δ допускает в качестве интегралов только 3 уравнения системы (80). Взяв, например,

$$\Delta = p_3' \left\{ \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_2' & p_3' \end{vmatrix} K + \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ p_3' & p_1' \end{vmatrix} L \right\} \neq 0,$$

где обозначено

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2''} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3''} \\
\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1'} & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1''} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2''} & 0 \\
p_2'' & 0 & p_1'' & 0 & 0 & p_1' & p_2' & 0 \\
0 & 0 & p_2'' & 0 & p_1'' & p_2' & 0 & p_3' \\
0 & 0 & 0 & p_1'' & 0 & p_2 & 0 & p_3 \\
0 & p_2'' & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & 0 \\
0 & 0 & p_2 & p_1' & p_1 & 0 & 0 & 0 \\
p_2 & p_2' & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix} = ;
\begin{vmatrix}
0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2''} & 0 & 0 \\
\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1'} & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1''} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2''} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3''} \\
p_2'' & 0 & p_1'' & 0 & 0 & p_1' & p_2' & p_3' \\
0 & 0 & p_1'' & 0 & p_1'' & p_2' & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_1'' & 0 & p_2 & 0 & 0 \\
0 & p_1'' & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\
0 & 0 & p_2 & p_1' & p_1 & 0 & 0 & 0 \\
p_2 & p_2' & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_3''} 0 0 p_3' \, p_3 0 0 0\right) \equiv K; \qquad = \left(0 \, \frac{\partial\Phi}{\partial p_3''} \, p_3' 0 0 p_3 0 0\right) = L;
$$

$$
\left(0 \, \frac{\partial\Phi}{\partial p_3'} \, p_3'' \, 0 0 0 0 p_3\right) = P; \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_3'} 0 0 p_3'' 0 p_3 0\right) = Q; \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} 0 0 0 p_3'' 0 p_3' 0\right) = R,
$$

. . . .

получим условия инволюционности в виде

$$
\frac{d\Phi}{dx_3} = 0
$$

$$
\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_2' & p_3' \end{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial p_1''} + \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ p_3' & p_1' \end{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial p_2''} + \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_1' & p_2' \end{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial p_3''} = 0
$$

$$
\left\{ p_3' \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial p_2''} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3''} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2'} \\ p_2 & p_3 & 0 \\ p_2' & p_3' & p_2'' \end{vmatrix} + p_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial p_3''} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2''} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3} \\ p_3 & p_2 & p_3'' \\ p_3' & p_2' & 0 \end{vmatrix} \right\} K +
$$

$$
+ \left\{ p_3' \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial p_3''} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1''} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2'} \\ p_3 & p_1 & 0 \\ p_3' & p_1' & p_2'' \end{vmatrix} + p_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial p_1''} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3''} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3} \\ p_1 & p_3 & p_3'' \\ p_1' & p_3' & 0 \end{vmatrix} \right\} L +
$$

$$
+ p_3' \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial p_1''} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3''} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2''} \\ p_1 & p_3 & p_2 \\ p_1' & p_3' & p_2' \end{vmatrix} P = 0
$$

. . . .

что дает систему семи уравнений 1-го порядка для определения функции Φ; единственными интегралами этой системы будут 3 интеграла,—уравнения (80).

Таким образом, для решения системы уравнений (80) остается в нашем распоряжении путь, по которому мы шли в § 87 для реше-

ния уравнений (74) задачи Вейнгартена. Именно, считая одну из функций z, z', z'' известной,—например

$$
z'' = \omega(x_1, x_2, x_3),
$$

будем применять теорию § 83 к *определению функции* ω, *рассматривая условия инволюционности системы трех уравнений с частными производными 1-го порядка при двух неизвестных функциях* z, z' *трех независимых переменных* x_1, x_2, x_3 *вида*

$$
F_1 \equiv \frac{\partial\omega}{\partial x_1} p_1' + \frac{\partial\omega}{\partial x_2} p_2' + \frac{\partial\omega}{\partial x_3} p_3' = 0
$$

$$
F_2 \equiv \frac{\partial\omega}{\partial x_1} p_1 + \frac{\partial\omega}{\partial x_2} p_2 + \frac{\partial\omega}{\partial x_3} p_3 = 0
$$

$$
\Phi \equiv p_1 p_1' + p_2 p_2' + p_3 p_3' = 0. \tag{85}
$$

Два из этих уравнений будут линейны относительно производных неизвестных функций z, z'. Обозначая для краткости

$$
\omega_1 = \frac{\partial\omega}{\partial x_1}, \quad \omega_2 = \frac{\partial\omega}{\partial x_2}, \quad \omega_3 = \frac{\partial\omega}{\partial x_3},
$$

и составляя определители A, B, $C, \ldots$, увидим, что:

$$
\frac{A}{-\omega_1} = \frac{C}{\omega_2} = \frac{J}{-\omega_3} = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ p_1' & p_2' \end{vmatrix}; \quad \frac{B}{-\omega_1} = \frac{D}{\omega_2} = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}
$$

$$
\frac{E}{-\omega_1} = \frac{H}{\omega_2} = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_3 \\ p_1 & p_3 \end{vmatrix}; \quad \frac{F}{-\omega_1} = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_3 \\ p_1' & p_3' \end{vmatrix}; \quad \frac{G}{-\omega_1} = \begin{vmatrix} \omega_2 & \omega_3 \\ p_2' & p_3' \end{vmatrix}; \quad I = 0
$$

$$
K = \omega_1 p_1 (p_2' \omega_{11} + p_1' \omega_{12} + p_3' \omega_{13}) + \omega_1 p_1' (p_1 \omega_{11} + p_2 \omega_{12} + p_3 \omega_{13})
$$

$$
L = \omega_2 p_1 (p_1' \omega_{12} + p_2' \omega_{22} + p_3' \omega_{23}) + \omega_1 p_2' (p_1 \omega_{12} + p_2 \omega_{22} + p_3 \omega_{23})
$$

$$
N = \omega_2 p_1 (p_1' \omega_{13} + p_2' \omega_{23} + p_3' \omega_{33}) + \omega_1 p_2' (p_1 \omega_{13} + p_2 \omega_{23} + p_3 \omega_{33})
$$

$$
Q = \omega_1 p_1 (p_1' \omega_{13} + p_2' \omega_{23} + p_3' \omega_{33}) + \omega_1 p_1' (p_1 \omega_{13} + p_2 \omega_{23} + p_3 \omega_{33})
$$

$$
M = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ p_1' & p_2' \end{vmatrix} (p_1' \omega_{12} + p_2' \omega_{22} + p_3' \omega_{23})
$$

$$
P = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ p_1' & p_2' \end{vmatrix} (p_1' \omega_{13} + p_2' \omega_{23} + p_3' \omega_{33})
$$

$$
\omega_{ik} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x_i \partial x_k} \; (i, k = 1, 2, 3).
$$

Так как $I = 0$, то условия инволюционности системы $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\Phi = 0$ запишутся:

$$
AD = BC
$$

$$
EG + FH + JE = 0
$$

$$
DF + HA + BJ + BG = CE
$$

$$
AK + AL + BM + FN + EP = GQ.
$$

Первые 3 из этих условий удовлетворяются тождественно, а последнее, на основании

$$
D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1, p_1'}\right) = -\omega_1^2 \neq 0; \quad D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_1, p_1', p_2}\right) = -\omega_1 \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ p_1' & p_2' \end{vmatrix} \neq 0,
$$

дает:

$$p_1p_1'\omega_{11}+p_2p_2'\omega_{22}+p_3p_3'\omega_{33}+$$
$$+(p_1p_2'+p_2p_1')\,\omega_{12}+(p_1p_3'+p_3p_1')\,\omega_{13}+(p_2p_3'+p_3p_2')\,\omega_{23}=0.$$

Следовательно, одновременно должны удовлетворяться 4 уравнения с 2 неизвестными функциями z, z', а именно: 3 уравнения (85) и это последнее уравнение. Обозначим для краткости

$$\frac{p_1'}{p_3'}=P_1'\,;\quad \frac{p_2'}{p_3'}=P_2'\,.$$

Тогда 2 уравнения (85) дают

$$\begin{vmatrix}\omega_1\,\omega_2\\ p_1\,p_2\end{vmatrix}P_1'=\begin{vmatrix}\omega_2\,\omega_3\\ p_2\,p_3\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}\omega_1\,\omega_2\\ p_1\,p_2\end{vmatrix}P_2'=\begin{vmatrix}\omega_3\,\omega_1\\ p_3\,p_1\end{vmatrix}$$

и, следовательно, остальные 2 уравнения переписываются так:

$$\left.\begin{aligned} f\equiv\omega_1p_1+\omega_2p_2+\omega_3p_3=0\\ f_1\equiv\begin{vmatrix}f_1'\,f_2'\,f_3'\\ \omega_1\omega_2\omega_3\\ p_1p_2p_3\end{vmatrix}=0\end{aligned}\right\},\tag{86}$$

где обозначено

$$f_1'=p_1\omega_{11}+p_2\omega_{12}+p_3\omega_{13};\ f_2'=p_1\omega_{12}+p_2\omega_{22}+p_3\omega_{23};\ f_3'=p_1\omega_{13}+p_2\omega_{23}+p_3\omega_{33}.$$

Таким образом систему 4 уравнений мы можем заменить алгебраически равносильной системой, состоящей из 2 уравнений (86) и из 2 уравнений

$$\left.\begin{aligned}\omega_1p_1'+\omega_2p_2'+\omega_3p_3'=0\\ p_1p_1'+p_2p_2'+p_3p_3'=0\end{aligned}\right\}.$$

Система последняя содержит 2 уравнения 1-го порядка при 2-х неизвестных функциях z, z' и поэтому является вообще системой совместимой, а система (86) состоит из 2 уравнений 1-го порядка $f=0$, $f_1=0$ с одной только неизвестной функцией z, и поэтому для нее должны обращаться в нуль скобки Пуассона

$$(f, f_1)=0,\tag{87}$$

что приводит к ограничению для функции ω, предполагавшейся известной: именно — это уравнение приводит нас без труда к уравнению 3-го порядка, определяющему одну из неизвестных функций семейств 3 ортогональных поверхностей, к уравнению, которое Дарбу, например, получает на основании достаточно сложных геометрических соображений и изучения особых выражений. При этом окончательное уравнение 3-го порядка представится в форме определителя не выше 4-го порядка.

В самом деле, уравнение (87) переписывается так:

$$\begin{vmatrix}f_1'f_2'f_3'\\ 0_10_20_3\\ p_1p_2p_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}F_1F_2F_3\\ \omega_1\omega_2\omega_3\\ p_1p_2p_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\Psi_1\Psi_2\Psi_3\\ \omega_1\omega_2\omega_3\\ p_1p_2p_3\end{vmatrix}$$

где

$$0_1=\omega_1\omega_{11}+\omega_2\omega_{12}+\omega_3\omega_{13};\ 0_2=\omega_1\omega_{12}+\omega_2\omega_{22}+\omega_3\omega_{23};\ 0_3=\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}+\omega_3\omega_{33}$$

$$F_1=\omega_1f_{11}''+\omega_2f_{12}''+\omega_3f_{13}'';\ F_2=\omega_1f_{12}''+\omega_2f_{22}''+\omega_3f_{23}'';\ F_3=\omega_1f_{13}''+\omega_2f_{23}''+\omega_3f_{33}''$$

$$\Psi_1=f_1'\omega_{11}+f_2'\omega_{12}+f_3'\omega_{13};\ \Psi_2=f_1'\omega_{12}+f_2'\omega_{22}+f_3'\omega_{23};\ \Psi_3=f_1'\omega_{13}+f_2'\omega_{23}+f_3'\omega_{33}$$

$$f_{ik}''=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k},$$

или окончательно:

$$f_2\equiv\begin{vmatrix}B_1B_2B_3\\ \omega_1\omega_2\omega_3\\ p_1p_2p_3\end{vmatrix}=0,\tag{88}$$

где

$$B_1=F_1-\Psi_1-0_1=p_1(\omega_1\omega_{111}+\omega_2\omega_{112}+\omega_3\omega_{113}-\omega_{11}^2-\omega_{12}^2-\omega_{13}^2-\omega_{22}\omega_{33}+\omega_{23}^2)+$$
$$+p_2(\omega_1\omega_{112}+\omega_2\omega_{122}+\omega_3\omega_{123}-\omega_{12}(\omega_{11}+\omega_{22}-\omega_{33})-2\omega_{13}\cdot\omega_{23}]+$$
$$+p_3(\omega_1\omega_{113}+\omega_2\omega_{123}+\omega_3\omega_{133}-\omega_{13}(\omega_{11}-\omega_{22}+\omega_{33})-2\omega_{12}\cdot\omega_{23}]$$
$$B_2=F_2-\Psi_2-0_2=\ldots;\quad B_3=F_3-\Psi_3-0_3=\ldots$$
$$\omega_{ikl}=\frac{\partial^3\omega}{\partial x_i\partial x_k\partial x_l}(i, k, l=1, 2, 3).$$

Исключая из 3 уравнений (86), (88) 2 отношения $P_1=\frac{p_1}{p_3}$, $P_2=\frac{p_2}{p_3}$, получим одно уравнение 3-го порядка, определяющее функцию $z''=\omega(x_1, x_2, x_3)$. Уравнение $f=0$ дает линейное выражение P_2 через P_1 и результат его подстановки в уравнения $f_1=0$, $f_2=0$ приводит к зависимостям вида

$$a_0P_1^2+a_1P_1+a_2=0$$
$$b_0P_1^2+b_1P_1+b_2=0.$$

Результат этих двух уравнений приводит к уравнению 3-го порядка для ω, в форме определителя 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix}a_0, a_1, a_2, 0\\ 0\ , a_0, a_1, a_2\\ b_0\,, b_1, b_2, 0\\ 0\ , b_0, b_1, b_2\end{vmatrix}=0.$$

Аналогично обстоит дело и с системой 3 уравнений 1-го порядка с тремя функциями φ, ψ, θ 3 аргументов ρ_1, ρ_2, ρ_3, полученной знаменитым геометром Бонэ, достаточно не изученной и упоминаемой, между прочим, на всем протяжении цитированной большой книги Дарбу лишь в примечании к одной из ее 338 страниц 1-го издания и значительно большего числа страниц 2-го издания.

Для этой системы (83) вопрос о 4-м уравнении

$$\Phi\left(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \varphi, \psi, \theta, \frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}, \ldots \frac{\partial\theta}{\partial\rho_3}\right)=\mathrm{const},$$

находящемся в инволюции с тремя упомянутыми уравнениями, решается не сложнее, чем для системы (83).

Во-первых, 3 уравнения системы Бонэ (83) являются, как нетрудно проверить, тремя интегралами такой системы 3 линейных однородных уравнений 1-го порядка одной неизвестной функции Φ, получаемых из условий инволюционности:

$$F_1 \equiv \cos\psi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi'_{\rho_1}} - \sin\psi \sin\theta \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta'_{\rho_1}} = 0$$

$$F_2 \equiv \cos\theta \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \psi'_{\rho_3}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi'_{\rho_3}} = 0$$

$$F_3 \equiv \left[\cos^2\psi\left(\cos\psi\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} - \sin\psi\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\frac{\partial\psi}{\partial\rho_1} - \cos\psi\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2}\frac{\partial\psi}{\partial\rho_1}\right) + \right.$$
$$\left. + \cos\psi\sin\psi\left(\sin\psi\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2} + \cos\psi\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\psi}{\partial\rho_2} - \sin\psi\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}\frac{\partial\psi}{\partial\rho_2}\right)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi'_{\rho_2}} +$$
$$+ \left[\cos^2\psi\sin\theta\left(\sin\psi\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2} + \cos\psi\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\psi}{\partial\rho_2} - \sin\psi\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}\frac{\partial\psi}{\partial\rho_2}\right) - \right.$$
$$\left. - \sin\psi\cos\psi\sin\theta\left(\cos\psi\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} - \sin\psi\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\frac{\partial\psi}{\partial\rho_1} - \cos\psi\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2}\frac{\partial\psi}{\partial\rho_1}\right)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial\theta'_{\rho_2}} +$$
$$+ \sin\theta\left(\sin\psi\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + \cos\psi\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\psi}{\partial\rho_1} - \sin\psi\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}\frac{\partial\psi}{\partial\rho_1}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\theta'_{\rho_1}} -$$
$$- \sin^2\theta\cos\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_3}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi'_{\rho_3}} - \sin\theta\cos\psi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\right) = 0.$$

Во-вторых, для этих уравнений имеем:

$$(F_1, F_2) \equiv 0;\ (F_2, F_3) \equiv 0;\ (F_1, F_3) = F_4$$
$$(F_1, F_4) \equiv 0;\ (F_2, F_4) \equiv 0;\ (F_3, F_4) = F_5.$$

Следовательно, система $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, интегралы которой должны удовлетворять также уравнениям $F_4 = 0$, $F_5 = 0$, больше трех интегралов, представляющих уравнения (83), не имеет: уравнение $F_3 = 0$ имеет не больше 7 интегралов, а система $F_1 = 0, \ldots F_5 = 0$ — не больше трех.

Остается считать одну из функций φ, ψ, θ, скажем θ, известной функцией $\omega(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ и рассматривать совместимость системы 3 уравнений с двумя неизвестными функциями φ, ψ от трех независимых переменных ρ_1, ρ_2, ρ_3.

§ 90. Интегрирование уравнений, определяющих сопряженные функции Бельтрами. В качестве приложения тех обобщений, которые даны были в § 79 относительно метода интегрирования Гамбургера для уравнений 1-го порядка, линейных относительно производных или относительно производных и якобианов, рассмотрим задачу об определении так называемых *сопряженных функций Бельтрами* на заданной поверхности, т. е. функций $\varphi + i\psi$, где $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ являются сопряженными решениями уравнения с частными производными 2-го порядка

$$\Delta_2\varphi = 0,$$

где $\Delta_2\varphi$ обозначает *дифференциальный параметр 2-го порядка*:

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)\right.,$$

а E, F, G — заданные функции двух параметров u, v для данной поверхности. Сопряженные функции определяют еще в виде решений

системы 2 уравнений 1-го порядка с двумя неизвестными функциями φ, ψ двух независимых переменных u, v:

$$\nabla(\varphi, \psi) = 0; \quad \Delta_1\varphi = \Delta_1\psi, \tag{89}$$

где выражения $\nabla(\varphi, \psi)$, $\Delta_1\varphi$ и $\Delta_1\psi$ обозначают так называемые *дифференциальные параметры 1-го порядка* и будут иметь вид:

$$\nabla(\varphi, \psi) = \frac{1}{EG - F^2}\left[E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - 2F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right]$$
$$\Delta_1\varphi = \frac{1}{EG - F^2}\left[E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right];$$
$$\Delta_1\psi = \frac{1}{EG - F^2}\left[E\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2\right].$$

Первое уравнение (89) есть необходимое и достаточное условие того, чтобы две системы линий $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ были бы ортогональны между собою, а система двух уравнений (89) определяет такие функции $\varphi(u, v)$; $\psi(u, v)$, чтобы основная для поверхности квадратичная форма

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

приводилась бы к виду

$$ds^2 = \lambda(d\varphi^2 + d\psi^2), \quad \lambda = \frac{1}{\Delta_1\varphi} = \frac{1}{\Delta_1\psi},$$

так как преобразование первой формы к виду

$$ds^2 = E_1\,d\varphi^2 + 2F_1\,d\varphi\,d\psi + G_1\,d\psi^2$$

приводит к зависимостям

$$E_1 = \frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi - \nabla^2(\varphi, \psi)}; \quad F_1 = \frac{\nabla(\varphi, \psi)}{\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi - \nabla^2(\varphi, \psi)}; \quad G = \frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi - \nabla^2(\varphi, \psi)},$$

и уравнения (89) равносильны системе уравнений, соответствующих преобразованию формы

$$ds^2 = E_1\,d\varphi^2 + 2F_1\,d\varphi d\psi + G_1\,d\psi^2$$

к форме

$$ds^2 = \lambda(d\varphi^2 + d\psi^2),$$

т. е. к уравнениям

$$E_1 = G_1; \quad F_1 = 0.$$

Система двух уравнений (89) приводится к системе таких *двух уравнений Бельтрами:*

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial u} &= \frac{F\frac{\partial\varphi}{\partial u} - E\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{H}\\ \frac{\partial\psi}{\partial v} &= \frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{H}\end{aligned}\right\}, \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u} &= \frac{E\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\frac{\partial\psi}{\partial u}}{H}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} &= \frac{F\frac{\partial\psi}{\partial v} - G\frac{\partial\psi}{\partial u}}{H}\end{aligned}\right\}, \tag{90}$$

где обозначено

$$H = \sqrt{EG - F^2}.$$

Наоборот: если функции φ и ψ удовлетворяют одной из систем (90), то они удовлетворяют и системе двух уравнений (89). В дальнейшем будем интегрировать систему (90), переписавши ее в такой форме:

$$\left.\begin{aligned} H\frac{\partial\varphi}{\partial u} + F\frac{\partial\psi}{\partial u} - E\frac{\partial\psi}{\partial v} &= 0 \\ H\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\frac{\partial\psi}{\partial u} - F\frac{\partial\psi}{\partial v} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

По поводу этой системы и ее решений $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ сделаем несколько предварительных замечаний.

В I томе прекрасного курса „Lezioni di geometria differenziale" (3 изд., 4 тома; Bologna, 1923) недавно умершего, наилучшего из современных геометров Луиджи Бьянки, можно прочесть о том, что уравнение $\Delta_2\varphi=0$ представляет собой условие интегрируемости системы Бельтрами (90), и наоборот — если φ есть какое-либо решение уравнения $\Delta_2\varphi=0$, тогда уравнения (90) совместимы и определяют ψ посредством только квадратуры, которая приводит к добавочной постоянной. По этому поводу следует сказать, что система (91) всегда совместима, как это вытекает из теории, изложенной в начале этой главы, а уравнение $\Delta_2\varphi=0$ представляет лишь результат исключения одной из функций, именно ψ, из системы (91); — оно не имеет отношения к интегрируемости системы Бельтрами (91) и представляет только лишь геометрический интерес. Об утверждении, что если известно будет решение уравнения $\Delta_2\varphi=0$, то, пользуясь системой (90) или (91), можно найти функцию ψ квадратурами, надо сказать, что интегрирование системы (91) не представляет больших затруднений, если воспользоваться теорией § 79 или § 81, и что это интегрирование можно выполнить легче, чем найти частный интеграл уравнения 2-го порядка $\Delta_2\varphi=0$, а с другой стороны—интегрирование системы (91), например, по способу § 79, при моих обобщениях вспомогательных уравнений Гамбургера, сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений; общие интегралы вспомогательных уравнений с частными производными 1-го порядка приводят к общему интегралу системы (91), который дает сразу общие выражения и для φ, и для ψ.

Решение задачи о сопряженных функциях Бельтрами приводит к решению также ряда других важных задач дифференциальной геометрии. Применение теории функций Бельтрами можно встретить еще в некоторых вопросах гидродинамики.

Ортогональные системы (φ,ψ), которые сводят ds^2 к форме $\lambda(d\varphi^2+d\psi^2)$, называются *изотермическими.* Приведение формы ds^2 к изотермическому виду дает возможность найти в конечном виде *уравнения линии нулевой длины* $u+iv=\text{const}$, $u-iv=\text{const}$. Наоборот: проинтегрировав уравнение $E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2=0$, будем знать изотермические системы. В связи с *теорией ортогональных траекторий* находится такая теорема: *необходимое и достаточное условие для того, чтобы линии $\varphi=\text{const}$ одновременно со своими ортогональными траекториями образовывали бы изотермическую систему,* состоит в том, чтобы отношение двух дифференциальных параметров, $\Delta_2\varphi$ и $\Delta_1\varphi$, было бы функцией только от φ. Заключение о том, что, если мы знаем одно семейство изотермических линий $\varphi=\text{const}$, то ортогональные поверхности мы найдем

квадратурами, представляет собой так называемую *теорему Ли.* Уравнения (90) остаются неизменными, если *переходить от поверхности S к другой поверхности S', конформного изображения поверхности S,* что вытекает из пропорций $E':F':G'=E:F:G$, характеризующих конформные изображения. Также точно, — всякая пара сопряженных решений уравнения $\Delta_2\varphi=0$ на 1-й поверхности изменится конформным преобразованием на S' в пару решений аналогичных: комплексная переменная одной поверхности будет комплексной переменной и для другой поверхности, если эти поверхности находятся в конформном преобразовании. Также: для ортогональной изотермической системы (u,v) на S, когда

$$ds^2=\lambda(du^2+dv^2),$$

будем иметь для S':

$$ds'^2=\lambda(du'^2+dv'^2).$$

Чтобы *построить все конформные изображения поверхности S на другой поверхности S',* надо искать комплексную переменную $u+iv$ первой и комплексную переменную $u'+iv'$ второй и положить $u'+iv'=F(u\pm iv)$, где F обозначает произвольную функцию.

Давно известно решение системы (91) для того частного случая, подробно рассмотренного еще Бельтрами, когда она представляет собой *систему уравнений начальных изотермических линий* (u,v), т. е. когда $E=G$; $F=0$. В этом случае система (91) будет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

и интегралы напишутся так:

$$\varphi+i\psi=\Phi(u+iv);\quad \varphi-i\psi=\Psi(u-iv),$$

или

$$\varphi=\frac{\Phi(u+iv)+\Psi(u-iv)}{2};\quad \psi=\frac{\Phi(u+iv)-\Psi(u-iv)}{2i},$$

где Φ и Ψ — произвольные функции, что дает такие известные результаты: $\varphi+i\psi$ есть функция комплексного переменного $u+iv$; вследствие того, что можно также ψ заменить на $-\psi$, получаем такое правило, — обозначив на поверхности изотермическую систему (φ,ψ), найдем все другие (φ',ψ'), положив $\varphi'+i\psi'=F(\varphi\pm i\psi)$, где F обозначает символ произвольной функции комплексного переменного.

Чтобы *проинтегрировать систему* (91) *в общем виде,* например, по способу § 79, — имея в виду, что в обоих уравнениях системы (91) свободный член M равен нулю, способ и система Гамбургера вспомогательных уравнений 1-го порядка одной функции u не применимы к системе (91), — умножаем 2-е уравнение этой системы на λ и результат сложим с первым уравнением; получим уравнение

$$H\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\lambda H\frac{\partial\varphi}{\partial v}+(F+\lambda G)\frac{\partial\psi}{\partial u}-(E+\lambda F)\frac{\partial\psi}{\partial v}=0, \qquad (92)$$

для интегрирования которого надо пользоваться системой (15) § 79 с одной вспомогательной функцией $u=f$, где надо положить

$$M_1^1=H;\quad M_2^1=\lambda H;\quad M_1^2=F+\lambda G;\quad M_2^2=-(E+\lambda F).$$

Алгебраическое условие для коэффициентов уравнения (92) приводит к характеристическому уравнению

$$G\lambda^2 + 2F\lambda + E = 0,$$

корни которого

$$\lambda_1 = -\frac{F - iH}{G}; \quad \lambda_2 = -\frac{F + iH}{G}$$

приводят к таким двум системам вспомогательных уравнений с одной неизвестной функцией f независимых переменных u, v, φ, ψ:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} G\dfrac{\partial f}{\partial u} - (F - iH)\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ i\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial f}{\partial \psi} = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{II}) \begin{cases} G\dfrac{\partial f}{\partial u} - (F + iH)\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ i\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial f}{\partial \psi} = 0. \end{cases}$$

Каждая из систем (I), (II) — вполне интегрируема. Интегрирование системы (I) сводится к интегрированию системы обыкновенных уравнений

$$\frac{du}{G} = \frac{dv}{-(F - iH)}; \quad \frac{d\varphi}{-i} = \frac{d\psi}{1}.$$

Интегрирование приводит к первому уравнению общего интеграла системы (92), вида

$$\varphi + i\psi = \Phi[\omega_1(u, v)],$$

где Φ — это произвольная функция аргумента ω_1, который находится из интеграла $\omega_1(u, v) = C_1$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{du} + \frac{F - iH}{G} = 0.$$

Интегрирование системы (II) сводится к интегрированию аналогичной системы обыкновенных уравнений, и мы имеем 2-е уравнение общего интеграла

$$\varphi - i\psi = \Psi[\omega_2(u, v)],$$

где Ψ — это произвольная функция аргумента ω_2, определяемого интегралом $\omega_2(u, v) = C_2$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{du} + \frac{F + iH}{G} = 0.$$

Таким образом, общие формы неизвестных функций φ и ψ будут:

$$\varphi = \frac{\Phi(\omega_1) + \Psi(\omega_2)}{2}; \quad \psi = \frac{\Phi(\omega_1) - \Psi(\omega_2)}{2i}.$$

Для упомянутого выше частного случая, когда $E = G$; $F = 0$, системы (I), (II) принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} + i\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ i\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial f}{\partial \psi} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} - i\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ i\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial f}{\partial \psi} = 0 \end{cases}$$

и интегралы принимают указанную раньше форму.

Если бы мы воспользовались правилами § 81 для интегрирования нелинейных уравнений, то в формулах этого параграфа надо было бы положить:

$$x_1 = u,\ x_2 = v,\ z_1 = \varphi,\ z' = \psi;\ p = \frac{\partial \varphi}{\partial u},\ q = \frac{\partial \varphi}{\partial v},\ p' = \frac{\partial \varphi}{\partial u},\ q' = \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

$$(pp') = GH;\ (pq) = H^2;\ (qq')EH;\ (qp') = -FH = (pq');\ (p'q') = H^2$$

$$[p'x] = -G\frac{\partial H}{\partial u}\varphi'_u + F\frac{\partial H}{\partial u}\varphi'_v + \left(F\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial F}{\partial u}\right)\psi'_u + \left(G\frac{\partial E}{\partial u} - F\frac{\partial F}{\partial u}\right)\psi'_v$$

$$[q'y] = -E\frac{\partial H}{\partial v}\varphi'_v + \frac{\partial H}{\partial v}\varphi'_u + \left(F\frac{\partial F}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial v}\right)\psi'_u + \left(E\frac{\partial F}{\partial v} - F\frac{\partial E}{\partial v}\right)\psi'_v$$

$$[px] = H\left(\frac{\partial H}{\partial u}\varphi'_v + \frac{\partial G}{\partial u}\psi'_u - \frac{\partial F}{\partial u}\psi'_v\right);\ [qy] = -H\left(\frac{\partial H}{\partial v}\varphi'_u + \frac{\partial F}{\partial v}\psi'_v - \frac{\partial E}{\partial v}\psi'_v\right).$$

Квадратное уравнение (28) того же § 81 будет $H(G\lambda^2 - 2F\lambda + E) = 0$, что дает либо

$$G\lambda^2 - 2F\lambda + E = 0,$$

с двумя различными корнями

$$\lambda_1 = \frac{F + iH}{G},\ \lambda_2 = \frac{F - iH}{G},$$

для $H \neq 0$, когда получаем две вспомогательные системы линейных уравнений 1-го порядка одной неизвестной функции Φ, вида (27) § 81, либо еще

$$H = 0, \text{ т. е. } EG = F^2,$$

когда система (91) этого параграфа сводится к одному линейному уравнению 1-го порядка с одной неизвестной функцией

$$G\frac{\partial \psi}{\partial u} - F\frac{\partial \psi}{\partial v} = 0, \text{ или } G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0,$$

что дает

$$\varphi = \Phi[\omega(u, v)]; \quad \psi = \Psi[\omega(u, v)],$$

где Φ и Ψ — произвольные функции аргумента ω, который получим из интеграла $\omega(u, v) = C$ обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$\frac{dv}{du} + \frac{F}{G} = 0.$$

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ.

266. $$\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z'}{\partial x} = z;\ x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z'}{\partial y} = z'.$$

[Отв.: $m = 2$, $n = 2$, $\mu = 1$, $\nu = 0$, общий интеграл: $z + z' = y\varphi_1\left(\frac{x}{y}\right)$; $z - z' = y\varphi_2(xy)$]

267. $$\begin{cases} (x^2y^2 - 1)\,p' + 2x(1 - xy)\,p - (1 - xy)^2\,q' + (1 + xy)(z - yz') = 0 \\ (x^2y^2 - 1)\,q + 2y(1 - xy)\,q' + (1 - xy)^2\,p + (1 + xy)(z' - xz) = 0 \end{cases}$$

$$[\text{О.: } \frac{yq' + p}{1 + xy} = c_1;\ \frac{xp - q'}{1 + xy} = c_2;$$

$$\frac{(1+xy)\,p' + (1 - 2xy + y^2)\,q' - (y + 3x)\,p}{1 + xy} = c_3;\ \frac{(1+xy)\,q + (2xy - x^2 - 1)\,p + (x - 3y)\,q'}{1 + xy} = c].$$

Полный интеграл: $z = c_1(x + y) + c_2y(x - y) + c_4y + c_3$; $z' = c_2(x - y) + c_1x(x + y) + c_3x + c_4$;
Общий интеграл: $z = \varphi_1(x + y) + y\varphi_2(x - y)$; $z' = \varphi_2(x - y) + x\varphi_1(x + y)$.

268. Проверить, что

$$z + z' = x^2\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right); \; z + z'' = x\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right); \; z' + z'' = \varphi_3(xy)$$

представляет общий интеграл системы

$$p = \frac{1}{2x}(3z + 2z' + z'') - \frac{y}{x}(q + q' + q'');$$

$$p' = \frac{1}{2x}(z + 2z' - z'') + \frac{y}{x}q''; \; p'' = \frac{1}{2x}(z'' - z - 2z') + \frac{y}{x}q'.$$

269. $$yp = xq'; \; xq = yp'.$$

$$\left[\text{О.: } \begin{cases} z = c_1x^2 + c_2y^2 + c_3 \\ z' = c_2x^2 + c_1y^2 + c_4; \end{cases} \begin{cases} z = \varphi(x^2 - y^2) + \psi(x^2 + y^2) \\ z' = \psi(x^2 + y^2) - \varphi(x^2 - y^2) \end{cases}\right].$$

270. Показать, что преобразование

$$v_1(x_1, \ldots x_m, z_1) = 0; \; z_2 + v_2(x_1, \ldots x_m, z_1) = 0; \ldots z_2 + z_3 + \ldots + z_n + v_n(x_1, \ldots + x_m, z_1) = 0$$

переводит линейное в якобианах уравнение тоже в линейное в якобианах, но с большим на единицу числом независимых переменных.

271. Проверить, что преобразование

$$v_1(x_1, \ldots x_4, z_1) = 0; \; z_2 + v_2(x_1, \ldots x_4, z_1) = 0$$

переводит уравнения

$$A_1^{'}p_1^{'} + A_2^{'}p_2^{'} + A_3^{'}p_3^{'} + A_4^{'}p_4^{'} + A_1^2p_1^2 + A_2^2p_2^2 + A_3^2p_3^2 + A_4^2p_4^2 +$$
$$+ B_{12}D + \left(\frac{z_1 z_2}{x_1 x_2}\right) + \ldots + B_{34}D\left(\frac{z_1, z_2}{x_3 x_4}\right) + C = 0$$

в уравнение

$$-A_1^{'}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \ldots - A_4^{'}\frac{\partial v_1}{\partial x_4} + C\frac{\partial v_1}{\partial z_1} + B_{12}D\left(\frac{v_1, v_2}{x_1, x_2}\right) + \ldots + B_{34}(x_3x_4) +$$
$$+ A_1^2(x_1z_1) + A_2^2(x_2z_1) + A_3^2(x_3z_1) + A_4^2(x_4z_1) = 0,$$

где скобки вида (x_3x_4), (x_1z_1) обозначают якобианы.

272. Для системы В. Г. Имшенецкого

$$F_1 \equiv p_1p_3 - x_2x_4 = 0, \; F_2 \equiv p_2p_4 - x_1x_3 = 0,$$

обладающей интегралом

$$z = \frac{x_1x_2}{C_1} + C_1x_3x_4 + C_2,$$

проверить условия инволюционности по правилам § 80 и показать, что получим условие

$$x_1p_1 - x_2p_2 + x_3p_3 - x_4p_4 = 0,$$

которое получается по правилам главы VII из $(F_1, F_2) = 0$.

$$[\text{О.: } \sigma = \rho = 8; \; \tau = 11; \; \Delta^{6}_{123456,\,10} \neq 0 \text{ дает } p_2 \cdot p_3 \neq 0].$$

273. Проверить, что условия инволюционности системы трех линейных уравнений

$$a_1^{'}p_1^{'} + a_2^{'}p_2^{'} + a_1^2p_1^2 + a_2^2p_2^2 + c = 0; \; \alpha_1^{'}p_1^{'} + \ldots + \gamma = 0; \; a_1^{'}p_1^{'} + \ldots в = 0$$

будут представлены двумя равенствами из таких пропорций:

$$\frac{(A_1A_2^{'}A_1^2) + (A_2A_2^{'}A_2^2)}{(A_1^2A_1A_2^2)} = \frac{(A_1A_1^2A_1^1) + (A_2A_2^2A_1^{'})}{(A_1^2A_2A_2^2)} =$$

$$= \frac{(A_1^{'}A_2^{'}A_2^2)}{(A_2^{'}A_2^2A_1^2)} =$$

$$= \frac{(A_1^{'}A_1A_2^{'})}{(A_1A_2^2A_2^{'}) + (A_2A_2^2A_2^{'})} = \frac{(A_1^{'}A_2A_2^{'})}{(A_1A_1^{'}A_1^2) + (A_2A_2^{'}A_1^2)};$$

$$\frac{(A_2^{'}A_2^2A_1^2)}{(A_1^{'}A_1^2A_2^2)} = \frac{(A_2^{'}A_2A_2^2)}{(A_1^{'}A_1A_1^2)} = \frac{(A_1^{'}A_2^{'}A_2^2)}{(A_2^{'}A_1^{'}A_1^2)},$$

где скобками обозначены определители 3-го порядка из коэффициентов, причем A_1, A_2 обозначают колонку из совокупности 3 частных производных по x_1 и соответственно 3 частных производных по x_2 от левых частей трех уравнений, а большие буквы A с двумя значками, снизу и сверху, указывают на одну соответствующую колонку из трех элементов, являющихся коэффициентами при p_1^1 и т. д.

274. Проверить по способу главы VIII, что условием инволюционности системы уравнений 2-го порядка $xr - ys - p = 0$, $yr + xs - q = 0$ будет: $-yr + 2xs + yt = 0$; 2-е условие — тождественный нуль. Заменить систему, заданную системой уравнений 1-го порядка, полагая $z_1 = z$, $z' = p$, $z'' = q$, и проверить условие инволюционности по способам §§ 80 и 84 этой главы, полагая $n = 1$, $m = 2$.

275. Найти общий интеграл, данный Кэнигсбергером:

$$z = \varphi_1(x_1 + x_2 + x_3, \; x_1 - x_2^2 - x_3) + \varphi_2(x_1 - x_2 + x_3, \; x_1 + x_2 - x_3^2);$$

$$z' = \varphi_1(x_1 + x_2 + x_3, \; x_1 - x_2^2 - x_3) - \varphi_2(x_1 - x_2 + x_3, \; x_1 + x_2 - x_3^2),$$

для его примера системы двух уравнений:

$$1) \; (1 - 2x_2)p_1 + (1 - 2x_2)p_1^{'} - 2p_2 - 2p_2^{'} + (1 + 2x_2)p_3 + (1 + 2x_2)p_3^{'} = 0;$$

$$2) \; (1 - 2x_3)p_1 - (1 - 2x_3)p_1^{'} - (1 + 2x_3)p_2 + (1 + 2x_3)p_2^{'} - 2p_3 + 2p_3^{'} = 0,$$

полагая

$$z + z' = \zeta; \; z - z' = \zeta'.$$

276. Проверить правильность частного интеграла Н. М. Михальского

$$z = C\varphi(x + y), \; z' = \varphi(x + y)$$

для его примера системы двух уравнений:

$$1) \; z'q - zq' + xD\left(\frac{z, z'}{x, y}\right) = 0; \quad 2) \; zp' - z'q + yD\left(\frac{z, z'}{x, y}\right) = 0$$

и показать справедливость утверждения Н. М. Михальского о том, что интеграл системы

$$z = c_1\sin c_2(x + y) + c_1\cos c_3(x + y) + c_1c_4, \; z' = \sin c_2(x + y) + \cos c_3(x + y) + c_4$$

является частным, хотя и содержит 4 произвольные постоянные.

277. Пользуясь только лишь теорией первых параграфов главы VII, найти полный и общий интегралы совместимой системы трех уравнений примера Форзайса, данного в задаче № 268.

278. Показать, что интеграл Кэнигсбергера, который можно записать в виде

$$xy + z + 2z' = \varphi(x^2 + y^2 + z^2 + z'^2); \quad xy + z + 2z' = \psi(x^2 + y^2 + z^2 + z'^2)$$

и который назван им общим интегралом, для примера Кэнигсбергера

$$(p + zq + z'q')(z' - 2z) + 2y(z' - z) - 2x = 0; \; (p' + 2zq + 2z'q')(z' - 2z) + y(2z' - 5z) + x = 0,$$

не будет общим интегралом и проверить справедливость такого частного интеграла Форзайса для этого примера:

$$x^2 + y^2 + z^2 + z'^2 = c, \quad z + 2z' + xy = \varphi(y).$$

279. Пользуясь теорией § 84, доказать, что будет инволюционна такая система двух уравнений 2-го порядка одной функции трех независимых переменных:

1) $p_1 - p_2 + p_3 - x_1 p_{11} + x_1 p_{12} - (x_1 + x_3) p_{13} + x_3 p_{23} - x_3 p_{33} = 0$; 2) $p_{12} - p_{22} + p_{23} = 0$; проверить, что $z = c_1 x_1^2 + c_2 x_3^2 + \varphi(x_1 + x_2, x_2 + x_3)$ будет общим интегралом системы. [О. Для матрицы из 6 горизонталей и 11 колонок найдем, например, такой определитель 5-го порядка: $\Delta = 2x_3 (x_1^2 + x_1 x_3 + x_3^2) \neq 0$; все 6 определителей 6-го порядка, полученные от присоединения к Δ оставшейся горизонтали и каждой из оставшихся колонок будут равны нулю].

280. Проверить, что будет инволюционна система 4 уравнений 1-го порядка с двумя функциями:

$$1)\ x_1 p_1 + x_2 p_2 - z = 0;$$

$$2)\ (x_1 - x_2) p_1 - x_1 x_3 p_1' + x_2 x_3 p_2' + (x_2 - x_1) p_3' = 0;$$

$$3)\ (x_2 + x_1^2 x_3) p_1 + x_1 x_2 x_3 p_2 - x_1 x_3^2 p_3 - x_2 x_3 p_2' - (x_2 + x_1^2 x_3) p_3' = 0;$$

$$4)\ (1 + x_1^2 x_3) p_1 + x_1 x_3 p_2 - x_3 (1 + x_1 x_2 x_3) p_2' + (x_1 x_3^2 - x_1^2 x_3 - 1) p_3' - x_1 x_3^2 z' = 0,$$

и что интеграл ее

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_1 x_3 + c_4 x_2 x_3; \quad z' = c_1 x_3 + c_2 x_1 x_2 + c_3 (x_1 + x_2) + c_4$$

будет полным интегралом.

ГЛАВА XI.

ПОНЯТИЕ ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ.

Главой X заканчивается теория интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными. Остальные 2 главы касаются специальных задач из области интегрирования дифференциальных уравнений, и, главным образом, различных задач, относящихся к вопросам математической физики. При решении уравнений математической физики, понятие о которых было дано еще в I главе, часто пользуются теорией интегральных уравнений, краткому изложению которой и посвящена эта XI глава. В последние годы теория интегральных уравнений получила довольно важные применения в различных отраслях математики. Методы решения некоторых задач из области, например, математической физики, электротехники и т. д., с помощью теории интегральных уравнений, иногда быстро приводят к цели, так как соответствующие вычисления бывают не сложны, хотя весьма часто и громоздки.

Так как на русском языке, если не считать недавно вышедшего в небольшом числе экземпляров перевода мало доступной для первого чтения книги Куранта-Гильберта, почти нет литературы, по которой можно было бы ознакомиться с основами теории интегральных уравнений и с ее приложениями, я попытался здесь кратко, насколько мне позволял объем всей этой книги, коснуться основных понятий теории интегральных уравнений, основных способов для решения этих уравнений и главнейших приложений их теории. После краткого знакомства с простейшими интегральными уравнениями и с методами их решения, я останавливаюсь подробнее на теории Фредгольма решения линейных интегральных уравнений 2-го рода, касаюсь вкратце теории Гильберта-Шмидта для уравнений с симметричным ядром, привожу главнейшие теоремы этой теории и останавливаюсь дальше на наиболее важных приложениях и теории Фредгольма, и теории Гильберта-Шмидта; именно, в последнем параграфе этой главы излагается сущность главных задач теории потенциала, задачи Дирикле и задачи Нейманна, и сущность способов их решения с помощью теории Фредгольма; далее—теория Гильберта-Шмидта применяется к замене наиболее общей граничной задачи, связанной с обыкновенным линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка, — к замене задачей решения интегрального уравнения; в конце параграфа дан пример такой граничной задачи, составленной по поводу одного вопроса вариационного исчисления, — вопроса на изопериметры. Вследствие краткости я не мог, естественно, останавливаться на доказательстве всех главнейших теорем, вследствие чего у читателя могут возникнуть некоторые трудности, для преодоления которых пришлось бы обратиться к специальным статьям или монографиям, указанным дальше. С этой точки зрения более легкими для усвоения будут первые 2 параграфа. Следует усвоить понятия о фундаментальных функциях и характеристических числах, рассматриваемых на протяжении трех последних параграфов. Эти понятия являются основными, а их теория имеет большое значение как при решении разнообразных задач математической физики, так и в теории функций.

Литература:

Fredholm — *Sur* une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet (Ofr. K. Vetensk. Ak. Förh., Stockholm, 1900).

— Sur une classe d'équations fonctionnelles (Acta mathematica, t. 27, 1903).

— Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité (Archiv für Math., 1905).

Vito Volterra — Leçons sur les fonctions de lignes, Paris, 1913, Gauthier—Villars.

— Leçons sur les équations intégrales et les éq. intégro-différentielles, Paris, 1913.

Hilbert — Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Göttingen Nachrichten, Heft I—VI, 1904—1908).

D. Hilbert — Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig, 1912.

Schmidt — Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener (Math Annalen, Bd. 63).

T. Lalesco — Introduction à la théorie des équations intégrales, préface E. Picard, Paris, 1912.

H. Poincaré — (Acta mathématica, t. III, 1910).

E. Picard — (C. R., 1909; Rendiconti C. M. di Palermo, t. 22, 1906; t. 29, 1910; Annales de l'Ecole normale, 1906, 1907, 1908, 1909, 1910).

H. Bateman — (Proc. London Math. Soc., série 2, t. IV; Transaction Cambr. Ph. S. t. 20; Math. Ann., t. 63).

Stekloff Théorie générale des fonctions fondamentales (Annales de Toulouse, (2), 6, 1901; Annales de l'Ec. Normale, 1902).

В. А Стеклов — Основные задачи математической физики, ч, I, Петербург, 1922, ч. II, 1923.

R. d'Adhémar L'équation de Fredholm et les problème de Dirichlet et de Neumann, Paris, 1909.

Heywood et Fréchet — L'équation de Fredholm et ses applications à la physique Mathématique, Paris, 1912.

W. V. Lovitt Linear intégral equations, New-York, 1924.

Kneser — Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der Math. Physik. Braunschweig, 1911.

R. Courant und D. Hilbert — Methoden der Mathematischen Physik, Bd. I, Berlin, 1924 (Springer), Kap. III.

M. Böcher — Introduction to the Study of integral equations, Cambridge, 1909.

S. Goursat — Cours d'analyse Mathématique, t. III, Paris, 1927, Ch. XXX—XXXIII.

§ 91. Простейшие интегральные уравнения. Отдел математики, в котором изучается теория так называемых *интегральных уравнений* и *уравнений интегро-дифференциальных*, можно назвать математикой XX века: главнейшие работы, связанные с изучением этих уравнений, появились совсем недавно и появляются в большом числе еще в настоящее время,— разработка этой теории усиленно продолжается. Основными в этой области являются исследования, с одной стороны,— шведского математика Фредгольма, а с другой стороны — итальянского математика Вольтерра. Теория интегральных уравнений находится в тесной связи с теорией дифференциальных уравнений и встречает наибольшие применения для решения различных задач математической физики, а точнее—для приближенного интегрирова-

ния дифференциальных уравнений математической физики, когда так называемые *граничные задачи математической физики* трактуются с помощью преобразования их в интегральные уравнения. Для этих интегральных уравнений найдены решения в виде быстро сходящихся разложений в ряды, что дает возможность с надлежащей точностью установить существование интеграла для соответствующей задачи математической физики, хотя различные доказательства существования интеграла и даны были раньше, задолго еще до появления работ Фредгольма.

Однако, как это совершенно правильно указано в одной из упомянутых в начале главы XII работ акад. Н. М. Крылова, много работавшего в области граничных задач математической физики, „для практика-физика, для инженера, доказательства существования имеют весьма относительное значение, так как „существование" надлежащего решения для них может рассматриваться, как непосредственно вытекающее следствие экспериментальных фактов. Что же касается эффективного применения разложений Фредгольма для приближенного решения, то, хотя эти разложения сходятся очень быстро и законы образования коэффициентов этих разложений просты и элегантны, тем не менее они, по крайней мере в их современном виде, для этого почти совсем не пригодны, вследствие необходимости вычислить много определителей и многократных квадратур. Таким образом методы Фредгольма, наилучшие для точного доказательства возможности задачи, весьма неудовлетворительны с практической стороны. В связи с этим начали разрабатывать различные новые методы, более пригодные для эффективных вычислений, а именно — методы вариационного алгоритма Ритца и другие". Критику практического применения решений Фредгольма можно найти, например, в предисловии Пуанкаре к полному собранию сочинений Ритца.

В противовес этому можно отметить, например, такое увлекательное произведение об интегральных уравнениях, как одна из основных монографий Вольтерра, Leçons sur les fonctions des lignes, где читатель найдет и теорию интегральных уравнений в прекрасном, восторженном изложении одного из наилучших творцов этой теории, и указания на применимость теории интегральных уравнений в различных областях прикладного знания, — в математической физике, в электротехнике и т. д.

Высказанную в начале этого параграфа мысль о новизне теории интегральных уравнений и, в особенности, фразу о том, что отдел математики, охватывающий теорию интегральных уравнений, представляет собой математику XX века, если иметь в виду здесь так называемую чистую математику, нельзя понимать буквально, считая, что сами уравнения и способы их решения появились в XX только веке. Существовали и сами эти уравнения и способы их численного решения гораздо раньше, представляя собой один из отделов теории определенных интегралов. Первые интегральные уравнения были введены Лапласом, а первое решенное интегральное уравнение — это уравнение Фурье:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xs)\, \varphi(s)\, ds.$$

Простейшими типами **интегральных уравнений являются такие,** как, **например,** интегральные уравнения Абелевого типа, интегральные уравнения типа Пуассона.

Интегральные уравнения Абеля (выдающегося **норвежского** математика, умершего в возрасте 27 лет и жившего в первой половине XIX столетия) вида

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)\,ds}{(x-s)^p} = f(x), \tag{1}$$

где

$$0 < p < 1; \quad f(0) = 0$$

и $\varphi(x)$ — неизвестная, а $f(x)$ — заданная функции от x,— было решено еще самим Абелем:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \sin p\pi \int_0^x \frac{f'(s)\,ds}{(x-s)^{1-p}}.$$

Обобщение интегрального уравнения (1), вида

$$\int_0^x \varphi(s)\,K(x-s)\,ds = f(x), \tag{2}$$

называется *интегральным уравнением абелевого типа.* В этом уравнении, кроме $f(x)$, известной заданной функцией считается также функция $K(x)$, называемая *ядром* интегрального уравнения, причем $K(x)$ обращается в бесконечность, когда $x = 0$, т. е. функция $x^p K(x)$ конечна и не равна нулю для $x = 0$, а для p будет:

$$0 < p < 1.$$

Представивши функцию $K(x)$ в виде

$$K(x) = x^{-p}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n),$$

решение интегрального уравнения (2) можно представить в форме

$$\varphi(x) = \frac{\sin p\pi}{\pi} \int_0^x f'(s)\,L(x-s)\,ds,$$

где

$$L(x) = \frac{x^{p-1}}{a_0} + \frac{\alpha^{n-p}}{F'(\alpha)}\gamma_p(\alpha x) + \frac{\beta^{n-p}}{F'(\beta)}\gamma_p(\beta x) + \ldots + \frac{\nu^{n-p}}{F'(\nu)}\gamma_p(\nu x),$$

причем $\alpha, \beta, \ldots \nu$ являются корнями алгебраического уравнения n-й степени $F(x) = 0$, левая часть которого будет

$$F(x) = a_0 x^n + (1-p)\,a_1 x^{n-1} + (1-p)(2-p)\,a_2 x^{n-2} + \\ + \ldots + (1-p)(2-p)\ldots(n-p)\,a_n,$$

а функция $\gamma_p(x)$ представляет собой частный случай известной *функции гамма,*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\,dx,$$

и будет вида

$$\gamma_p(x) = e^x \int_0^x e^{-s} s^{p-1}\,ds.$$

В том частном случае, когда $n = 0$, получаем решение интегрального уравнения Абеля (1).

Если функция $K(x)$ конечна при $x = 0$, то посредством дифференцирования уравнения (2) придем к интегральному уравнению нового типа,

$$\varphi(x) + \int_0^x \varphi(s)\,K(x-s)\,ds = f(x), \tag{3}$$

которое называется *интегральным уравнением типа Пуассона.*

Существует несколько методов для интегрирования этого уравнения (3). Если функция $K(x)$ будет задана численно и если мы, пользуясь таблицей численных значений функции, представим ее посредством интерполирования в виде суммы k показательных функций:

$$K(x) = Pe^{px} + Qe^{qx} + \ldots + Te^{tx} \tag{4}$$

где $p, q, \ldots t$ и $P, Q, \ldots T$ — постоянные, посредством которых мы для функции $K(x)$ будем получать наилучшие, соответствующие действительным, численные значения, — тогда решение уравнения (3) будет:

$$\varphi(x) = f(x) - \int_0^x f(s)\,L(x-s)\,ds,$$

где

$$L(x) = -\frac{(\alpha-p)(\alpha-q)\ldots(\alpha-t)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\tau)}e^{\alpha x} - \\ - \frac{(\beta-p)(\beta-q)\ldots(\beta-t)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\ldots(\beta-\tau)}e^{\beta x} - \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ - \frac{(\tau-p)(\tau-q)\ldots(\tau-r)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)\ldots(\tau-\sigma)}e^{\tau x}$$

и $\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau$ обозначают корни алгебраического уравнения $F(x) = 0$, вида

$$\frac{P}{x-p} + \frac{Q}{x-q} + \ldots + \frac{T}{x-t} + 1 = 0.$$

Функция $L(x)$ называется *резольвентой интегрального уравнения* (3) и представляет собой сумму также k показательных функций; обозначая для краткости коэффициенты буквами $A, B, \ldots E$, резольвенту короче можно записать так:

$$L(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + \ldots + Ee^{\tau x}. \tag{5}$$

Доказательство того, что рассматриваемому интегральному уравнению действительно будет удовлетворять функция **вида**

$$\varphi(x) = f(x) - \int_0^x f(s)\,L(x-s)\,ds, \tag{6}$$

основывается на теоремах Вольтерра о существовании решений интегральных уравнений.

Заменив в уравнении (6) $f(x)$ на $K(x)$, получим уравнение

$$\varphi(x) = K(x) - \int_0^x K(s)\, L\,(x-s)\, ds,$$

дающее выражение функции $\varphi(x)$ для только что указанного значения $f(x)$. Если мы в интеграле заменим s на $x-s$, получим

$$\varphi(x) = K(x) - \int_0^x L\,(x)\, K(x-s)\, ds.$$

Сравнивая это уравнение с результатом замены в интегральном уравнении (3) функции $f(x)$ на функцию $K(x)$, будем иметь:

$$\varphi(x) = L(x),$$

т. е. функции

$$\varphi(x) = L(x) \text{ и } f(x) = K(x)$$

удовлетворяют интегральному уравнению (3), — иначе сказать:

$$L(x) + \int_0^x L(s)\, K(x-s)\, ds = K(x). \tag{7}$$

Подставляя сюда вместо $K(x)$ и $L(x)$ их выражения из (4) и (5), находим:

$$\begin{aligned} &Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + \ldots + Ee^{\tau x} + \\ &+ \int (Ae^{\alpha s} + Be^{\beta s} + \ldots + Ee^{\tau s})(Pe^{px-ps} + Qe^{qx-qs} + \ldots + Te^{tx-ts})\, ds = \\ &= Pe^{px} + Qe^{qx} + \ldots + Te^{tx}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при $e^{\alpha x}$, при $e^{\beta x}$ и т. д. в обеих частях уравнения, имеем

$$\begin{gathered} \frac{P}{\alpha-p} + \frac{Q}{\alpha-q} + \ldots + \frac{T}{\alpha-t} + 1 = 0, \\ \frac{P}{\beta-p} + \frac{Q}{\beta-q} + \ldots + \frac{T}{\beta-t} + 1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

т. е. $\alpha, \beta, \ldots \tau$ являются корнями алгебраического уравнения

$$\frac{P}{x-p} + \frac{Q}{x-q} + \ldots + \frac{T}{x-t} + 1 = 0. \tag{8}$$

Сравнивая далее коэффициенты при e^{px}, при e^{qx} и т. д. в обеих частях того же уравнения, найдем

$$\left.\begin{gathered} \frac{A}{\alpha-p} + \frac{B}{\beta-p} + \ldots + \frac{E}{\tau-p} + 1 = 0 \\ \frac{A}{\alpha-q} + \frac{B}{\beta-q} + \ldots + \frac{E}{\tau-q} + 1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{A}{\alpha-t} + \frac{B}{\beta-t} + \ldots + \frac{E}{\tau-t} + 1 = 0 \end{gathered}\right\} \tag{9}$$

Определивши корни $\alpha, \beta, \ldots \tau$ уравнения (8) и зная $p, q, \ldots t$, из уравнений (9), найдем постоянные $A, B, \ldots E$ и тогда будем иметь выражение (5) для функции $L(x)$, удовлетворяющее уравнению (7).

Линейные относительно $A, B, \ldots E$ уравнения (9) дают):

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha-p} & \frac{1}{\beta-p} & \cdots & \frac{1}{\tau-p} \\ \frac{1}{\alpha-q} & \frac{1}{\beta-q} & \cdots & \frac{1}{\tau-q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\alpha-t} & \frac{1}{\beta-t} & \cdots & \frac{1}{\tau-t} \end{vmatrix} A = - \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\beta-p} & \cdots & \frac{1}{\tau-p} \\ 1 & \frac{1}{\beta-q} & \cdots & \frac{1}{\tau-q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{1}{\beta-t} & \cdots & \frac{1}{\tau-t} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha-p} & \frac{1}{\beta-p} & \cdots & \frac{1}{\tau-p} \\ \frac{1}{\alpha-q} & \frac{1}{\beta-q} & \cdots & \frac{1}{\tau-q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\alpha-t} & \frac{1}{\beta-t} & \cdots & \frac{1}{\tau-t} \end{vmatrix} B = - \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha-p} & 1 & \cdots & \frac{1}{\tau-p} \\ \frac{1}{\alpha-q} & 1 & \cdots & \frac{1}{\tau-q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\alpha-t} & 1 & \cdots & \frac{1}{\tau-t} \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha-p} & \frac{1}{\beta-p} & \cdots & \frac{1}{\tau-p} \\ \frac{1}{\alpha-q} & \frac{1}{\beta-q} & \cdots & \frac{1}{\tau-q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\alpha-t} & \frac{1}{\beta-t} & \cdots & \frac{1}{\tau-t} \end{vmatrix} E = - \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha-p} & \frac{1}{\beta-p} & \cdots & 1 \\ \frac{1}{\alpha-q} & \frac{1}{\beta-q} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\alpha-t} & \frac{1}{\beta-t} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Стоящие здесь определители называются *альтернантами* и вычислялись еще Коши, около 100 лет тому назад. Их можно разложить на множители, что приведет нас к таким окончательным формулам для постоянных $A, B, \ldots E$ функции $L(x)$:

$$\begin{gathered} A = -\frac{(\alpha-p)(\alpha-q)\ldots(\alpha-t)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\tau)} \\ B = -\frac{(\beta-p)(\beta-q)\ldots(\beta-t)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\ldots(\beta-\tau)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E = -\frac{(\tau-p)(\tau-q)\ldots(\tau-t)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)\ldots(\tau-\sigma)}. \end{gathered}$$

§ 92. Интегральные уравнения Вольтерра 1-го и 2-го рода. Для интегральных уравнений Фредгольма и Гильберта типа

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x), \tag{10}$$

где λ — постоянная и $f(x)$, $K(x, s)$ — заданные функции, численное решение разрабатывалось Бэтманом, профессором в Калифорнии, который много лет занимался решением дифференциальных уравнений математической физики, относящихся главным образом к электромагнитной теории света. Результаты исследований Бэтмана можно найти в записках Лондонского королевского общества за 1921 год. Около 10 лет перед этим Бэтман нашел, между прочим, интегральное уравнение, определяющее форму сейсмических лучей внутри земли; впоследствии это уравнение было численно решено другим ученым, воспользовавшимся различными данными наблюдений над землетрясениями, — этот факт ярко подтверждает приведенные в начале главы IX слова акад. П. Л. Чебышева о необходимости в науке связи между теорией и практикой; от этой связи выигрывает и та и другая.

Уравнение (10) представляет собой специальный частный случай уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\varphi(s)\,ds + f(x), \tag{11}$$

которое называется *линейным неоднородным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода.*

Ядро этого уравнения, т. е. функция $K(x, s)$ должна быть непрерывной функцией внутри и на сторонах треугольника, ограниченного прямыми

$$y = a,\ x = b,\ y = \lambda,$$

где

$$a < b.$$

Другая заданная функция $f(x)$ может быть и разрывной в интервале (a, b), однако количество точек разрыва должно быть числом конечным; $\int_a^b |f(s)|\,ds$ также должно быть числом конечным.

Чтобы удовлетворить интегральному уравнению (11), будем искать такую функцию $\varphi(x)$, которая раскладывалась бы в ряд степеней параметра λ, т. е. функцию вида

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots$$

Таким путем мы приходим к следующему *способу последовательных приближений*: 1-е приближение дает $\varphi_0(x)$, 2-е приближение дает величину $\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x)$, 3-е даст

$$\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x),$$

и т. д.

Чтобы найти функции

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x), \ldots,$$

подставим выражение для $\varphi(x)$ в наше интегральное уравнение и приравняем в обеих его частях коэффициенты при одинаковых степенях λ. Получим:

$$\varphi_0(x) = f(x);\ \varphi_1(x) = K[\varphi_0(x)];\ \varphi_2(x) = K[\varphi_1(x)];$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x) = K[\varphi_{n-1}(x)];$$

$$\cdots\cdots$$

где обозначено

$$K[\varphi(x)] = \int_a^x K(x, s)\varphi(s)\,ds,$$

так что будет:

$$\varphi_1(x) = \int_a^x K(x, s) f(s)\,ds;\ \varphi_2(x) = \int_a^x K(x, s)\varphi_1(s)\,ds;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Оказывается, что *ряд для $\varphi(x)$ сходится в интервале от a до b для каких-угодно чисел λ* и что найденный таким путем *степенной относительно λ ряд представляет собой единственное возможное решение интегрального уравнения (11).*

Можно доказать, что, вводя функции

$$K(x, y);\ K^{(2)}(x, y) = \int_y^x K(x, s) K(s, y)\,ds$$

$$K^{(3)}(x, y) = \int_y^x K(x, s) K^{(2)}(s, y)\,ds, \ldots K^{(n)}(x, y) = \int_y^x K(x, s) K^{(n-1)}(s, x)\,ds$$

и обозначая

$$\Gamma(x, y, \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \lambda^2 K^{(3)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, y) + \ldots,$$

мы можем написать решение интегрального уравнения в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \Gamma(x, s, \lambda) f(s)\,ds.$$

Функция $\Gamma(x, y, \lambda)$, которая зависит, как видим, от вида ядра $K(x, y)$ интегрального уравнения (в интегральном уравнении под знаком интеграла стоит буква s вместо y в последних двух выражениях), называется *ядром — резольвентою*, или просто *резольвентою интегрального уравнения.*

Выходит, что для решения интегрального уравнения, надо написать выражение его резольвенты.

Пример. Можно показать, что для ядра 2-го порядка относительно y, вида

$$K(x, y) = a_0(x) + \frac{(x - y)}{1!} a_1(x) + \frac{(x - y)^2}{2!} a_2(x),$$

резольвентою интегрального уравнения будет

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^3 g(x, y, \lambda)}{\partial x^3},$$

где $g(x, y, \lambda)$ обозначает интеграл такого обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения 3-го порядка:

$$\frac{d^3 g}{dx^3} - \lambda \left[a_0(x) \frac{d^2 g}{dx^2} + a_1(x) \frac{dg}{dx} + a_2(x) \cdot g \right] = 0,$$

причем, если $x = y$, то $g(x, y, \lambda)$ и $\frac{dg}{dx}$ обращаются в нуль, а $\frac{d^2 g}{dx^2}$ обращается в единицу.

Таким образом, решение рассматриваемого интегрального уравнения сводится к интегрированию линейного однородного уравнения 3-го порядка.

Интегральное уравнение 2-го рода для двух независимых переменных x и y имеет такой вид:

$$\varphi(x, y) = \lambda \left[\int_0^x \int_0^y K(x, y;\ \xi, \eta)\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + \right.$$

$$+\int_0^x K_1(x,y;\xi)\varphi(\xi,y)\,d\xi+\int_0^y K_2(x,y;\eta)\varphi(x,\eta)\,d\eta\,]+f(x,y),$$

где K, K_1 K_2 и f — это заранее заданные функции, непрерывные в такой области изменения переменных x, y:

$$0\leqslant x\leqslant a;\ 0\leqslant\xi\leqslant x;$$
$$0\leqslant y\leqslant b;\ 0\leqslant\eta\leqslant y,$$

а $\varphi(x, y)$ есть неизвестная функция двух независимых переменных x, y.

Аналогично тому, как записывается резольвента $\Gamma(x, y, \lambda)$ для ядра $K(x,y)$ интегрального уравнения одной независимой переменной x, так же пишутся резольвенты

$$\Gamma(x,y;\xi,\eta,\lambda);\ \Gamma_1(x,y;\xi,\lambda);\ \Gamma_2(x,y;\eta,\lambda)$$

и для ядер

$$K(x,y;\xi,\eta);\ K_1(x,y;\xi);\ K_2(x,y;\eta)$$

интегрального уравнения двух независимых переменных x, y.

Посредством этих резольвент $\Gamma, \Gamma_1\ \Gamma_2$ можно будет потом представить и неизвестную функцию $\varphi(x, y)$.

Пример. Для определения функции $z(x,y)$, которая удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с частными производными 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\lambda\left[a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x,y)z\right]+f(x,y) \tag{12}$$

и обращается в нуль для $x=0$, $y=0$, если обозначить

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}=\varphi(x,y),$$

мы приходим к нахождению функции $\varphi(x,y)$ в виде решения интегрального уравнения с двумя переменными x, y, вида

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,y)=\lambda\{&\int_0^x\int_0^y c(x,y)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\eta\int_0^x b(x,y)\varphi(\xi,y)\,d\xi+\\&+\int_0^y a(x,y)\varphi(x,\eta)\,d\eta\,]\,f(x,y)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

и еще к определению функции $\zeta(x,y)$ посредством интегрирования дифференциального уравнения с частными производными 2-го порядка

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}=\varphi(x,y), \tag{14}$$

т. е., если бы мы нашли решение интегрального уравнения (13), то это дало бы нам возможность заменить, в конце концов, уравнение (12) с переменными коэффициентами при производных уравнением также 2-го порядка (14), но с постоянными коэффициентами и, следовательно, таким уравнением, которое интегрируется по методу § 79. Решение интегрального уравнения (13) представляет собой, однако, задачу далеко не легкую.

Уравнение вида

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)\,ds=f(x), \tag{15}$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция, а $K(x, y)$ и $f(x)$ — заданные функции, называется *интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода.*

Пусть $f(0)=0$; $K(x,y)$ и ее производные — непрерывны. Если $K(x,y)$ есть непрерывная функция, имеющая непрерывную производную $\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}$, тогда для (15) надо, чтобы и $f(x)$ была бы непрерывной функцией и имела бы непрерывную производную $f'(x)$.

Взяв производную от обеих частей интегрального уравнения (15), мы получим такое интегральное уравнение 2-го рода:

$$K(x,x)\varphi(x)+\int_a^x\frac{\partial K(x,s)}{\partial x}\varphi(s)\,ds=f'(x).$$

Если $K(x,x)\neq 0$ в интервале от a до b, тогда это последнее интегральное уравнение будет иметь в этом интервале одно непрерывное решение $\varphi(x)$ и, таким образом, приведет нас к решению рассмотренного интегрального уравнения 1-го рода.

§ 93. Способ Фредгольма для решения интегральных уравнений 2-го рода и некоторые положения теории Гильберта — Шмидта. Приступим к изучению *основы способа Фредгольма для решения линейных интегральных уравнений 2-го рода при каких угодно значениях параметра* λ.

Возьмем интегральное уравнение при одной независимой переменной x, с определенными границами интеграла a и b:

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds+f(x).$$

Разобьем интервал от a до b на большое число n равных частей и обозначим

$$\frac{b-a}{n}=h$$

$$s_0=a;\ s_1=a+h;\ s_2=a+2h;\dots\ s_n=a+nh=b$$
$$\varphi_0=\varphi(s_0);\ \varphi_1=\varphi(s_1);\ \varphi_2=\varphi(s_2);\dots\ \varphi_n=\varphi(s_n).$$

Тогда определенный интеграл

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds$$

приближенно можно будет заменить суммой

$$[K(x,s_1)\varphi_1+K(x,s_2)\varphi_2+\dots+K(x,s_n)\varphi_n]\,h,$$

и интегральное уравнение перепишется так:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda[K(x,s_1)\varphi_1+K(x,s_2)\varphi_2+\dots+K(x,s_n)\varphi_n]\,h.$$

Это уравнение позволит нам найти неизвестные числа $\varphi_1,\varphi_2,\dots\varphi_n$, так как, если мы возьмем

$$x=s_1,\ x=s_2,\dots x=s_n,$$

то мы получим n алгебраических линейных уравнений с n неизвестными $\varphi_1,\varphi_2,\dots\varphi_n$ такого вида:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1-\lambda h[K(s_1,s_1)\varphi_1+K(s_1,s_2)\varphi_2+\dots+K(s_1,s_n)\varphi_n]&=f(s_1)\\ \varphi_2-\lambda h[K(s_2,s_1)\varphi_1+K(s_2,s_2)\varphi_2+\dots+K(s_2,s_n)\varphi_n]&=f(s_2)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\ \varphi_n-\lambda h[K(s_n,s_1)\varphi_1+K(s_n,s_2)\varphi_2+\dots+K(s_n,s_n)\varphi_n]&=f(s_n)\end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему уравнений, мы будем иметь $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ в виде дробей с одинаковым знаменателем $D_n(\lambda)$ для всех φ в форме определителя n-го порядка

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda K(s_1, s_1)h, & -\lambda K(s_1, s_2)h, \dots & -\lambda K(s_1, s_n)h \\ -\lambda K(s_2, s_1)h, & 1-\lambda K(s_2, s_2)h, \dots & -\lambda K(s_2, s_n)h \\ \dots & \dots & \dots \\ -\lambda K(s_n, s_1)h, & -\lambda K(s_n, s_2)h, \dots & 1-\lambda K(s_n, s_n)h \end{vmatrix}$$

Этот определитель представляет собою целую функцию n-й степени относительно λ. В числителях выражений для $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ будут стоять определители n-го порядка, которые получим после того, как в определителе $D_n(\lambda)$ заменим соответственные колонки колонкой из свободных членов линейных уравнений, т. е. колонкой из элементов $f(s_1), f(s_2), \dots f(s_n)$.

Однако нам не надо будет находить ни числителей для $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$, ни этих последних величин вообще.

Далее мы будем искать предел переменного $D_n(\lambda)$, когда $n \to \infty$. Оказывается, что если ввести обозначение

$$K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_n \\ y_1 y_2 \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1), K(x_1, y_2), \dots K(x_1, y_n) \\ K(x_2, y_1), K(x_2, y_2), \dots K(x_2, y_n) \\ \dots \\ K(x_n, y_1), K(x_n, y_2), \dots K(x_n, y_n) \end{vmatrix},$$

тогда будет

$$D(\lambda) = \lim_{n\to\infty} D_n(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1!}\int_a^b K(s_1, s_1)\,ds_1 + \frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix} s_1 s_2 \\ s_1 s_2 \end{pmatrix} ds_1\,ds_2 - \dots$$

$$\dots + (-1)^m \frac{\lambda^m}{m!}\int_a^b\int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_m \\ s_1 s_2 \dots s_m \end{pmatrix} ds_1\,ds_2 \dots ds_m + \dots$$

Можно доказать, что степенной относительно λ ряд в правой части сходится для всяких чисел λ.

Если ввести еще функцию $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)$, которая определяется формулой:

$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) = K(x, y) - \frac{\lambda}{1!}\int_a^b K\begin{pmatrix} x s_1 \\ y s_1 \end{pmatrix} ds_1 + \frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix} x s_1 s_2 \\ y s_1 s_2 \end{pmatrix} ds_1 ds_2 - \dots$$

$$\dots + (-1)^m \frac{\lambda^m}{m!}\int_a^b\int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} x s_1 s_2 \dots s_m \\ y s_1 s_2 \dots s_m \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_m + \dots,$$

тогда резольвента $\Gamma(x, y, \lambda)$ интегрального уравнения с границами a и b будет определена такой формулой:

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)}{D(\lambda)}.$$

Таким образом, *если можно будет решить систему n линейных относительно $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ уравнений, иначе сказать, — если*

$$D_n(\lambda) \neq 0,$$

или еще иначе, — если λ не является корнем уравнения

$$D(\lambda) = 0,$$

тогда будет существовать одно и только одно решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения 2-го рода; оно найдется по формуле

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \frac{D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle|\lambda\right)}{D(\lambda)} f(s)\,ds,$$

так как

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \Gamma(x, s, \lambda) f(s)\,ds.$$

Это положение представляет собой *1-ю основную теорему Фредгольма.* Функции $K(x, s)$ и $f(x)$ — непрерывные ряды $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)$ и $D(\lambda)$ — абсолютно и равномерно сходящиеся.

Аналогично напишется формула решения и для интегрального уравнения

$$\psi(x) = \lambda\int_a^b K(s, x)\psi(s)\,ds + F(x),$$

в ядре которого произошла замена s на x и наоборот, — решение будет дано формулой

$$\psi(x) = F(x) + \lambda\int_a^b \frac{D\left(\begin{matrix} s \\ x \end{matrix}\middle|\lambda\right)}{D(\lambda)} F(s)\,ds.$$

Можно доказать что

$$D(\lambda) = e^{\left(-A_1\lambda + A_2\frac{\lambda^2}{2} + \dots + A_m\frac{\lambda^m}{m} + \dots\right)},$$

где числа $A_1, A_2, \dots A_m, \dots$ называются *последовательными показателями* ядра $K(x, y)$ и определяются по формулам вида

$$A_m = \int_a^b K^{(m)}(s, s)\,ds =$$

$$= \int_a^b\int_a^b \dots \int_a^b K(s_1 s_2) K(s_2 s_3) \dots K(s_m s_1)\,ds_1 ds_2 \dots ds_m.$$

Коэффициенты при λ^m в выражении для $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)$ также вычисляются через

$$A_1, A_2, \dots A_m$$

и через

$$K(x, y), K^{(2)}(x, y), \dots K^{(m+1)}(x, y).$$

Если $\lambda = c$ будет корнем уравнения

$$D(\lambda) = 0,$$

то вообще

$$\varphi(x)=c\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds+f(x)$$

не имеет непрерывного решения. Вследствие того, что $D(0)=1$, будет $c\neq 0$. Если c есть корень уравнения $D(\lambda)=0$ конечной *кратности* r, где $r\geqslant 1$, то

$$D(c)=D'(c)=\ldots=D^{(r-1)}(c)=0;\ D^{(r)}(c)\neq 0.$$

Если бы кратность r не была конечной, то мы имели бы тождество

$$D(\lambda)\equiv 0.$$

Рассмотренные нами выражения $D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\lambda\Big)$ и $D(\lambda)$ представляют собой, как упоминалось в теореме Фредгольма, абсолютно и равномерно сходящиеся ряды относительно λ, при этом $D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ сходится равномерно относительно x и y в области изменения переменных

$$a\leqslant x\leqslant b;\ a\leqslant y\leqslant b.$$

Сходимость доказывается на основании *теоремы Гадамара* о том, что если элементы b_{ik} определителя

$$B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\ldots b_{1n}\\ b_{21} & b_{22}\ldots b_{2n}\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ b_{n1} & b_{n2}\ldots b_{nn}\end{vmatrix}$$

являются действительными числами, удовлетворяющими неравенствам $|b_{ik}|\leqslant M$, тогда для абсолютного значения определителя B будет:

$$|B|\leqslant M^n\sqrt{n^n}.$$

Доказательство же этой теоремы основывается на том, что если все элементы a_{ik} определителя

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n}\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn}\end{vmatrix}$$

числа действительные, удовлетворяющие условиям

$$a_{r1}^2+a_{r2}^2+\ldots+a_{rn}^2=1$$
$$(r=1,\ldots n),$$

то

$$|A|\leqslant 1.$$

Обозначим

$$B_n\begin{pmatrix}x_1\ldots x_p\\ y_1\ldots y_p\end{pmatrix}=\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}x_1\ldots x_p\eta_1\ldots\eta_n\\ y_1\ldots y_p\eta_1\ldots\eta_n\end{pmatrix}d\eta_1\ldots d\eta_n,$$

так что

$$B_0\begin{pmatrix}x_1\ldots x_p\\ y_1\ldots y_p\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}x_1\ldots x_p\\ y_1\ldots y_p\end{pmatrix},$$

тогда минор p-го порядка, $D_p\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$, определителя $D(\lambda)$ определится посредством бесконечного ряда

$$D_p\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)=D\left(\begin{matrix}x_1\ldots x_p\\ y_1\ldots y_p\end{matrix}\middle|\lambda\right)=$$

$$=\lambda^p B_0\begin{pmatrix}x_1\ldots x_p\\ y_1\ldots y_p\end{pmatrix}-\frac{\lambda^{p+1}}{1!}B_1\begin{pmatrix}x_1\ldots x_p\\ y_1\ldots y_p\end{pmatrix}+\frac{\lambda^{p+2}}{2!}B_2\begin{pmatrix}x_1\ldots x_p\\ y_1\ldots y_p\end{pmatrix}-\ldots$$

Этот минор $D_p\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ сводится к $D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ для $p=1$. С помощью такой же теоремы Гадамара можно доказать, что бесконечный ряд для минора $D_p\left(\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ абсолютно и равномерно сходится относительно λ и равномерно сходится относительно $\xi_1\ldots\xi_p$; $\eta_1,\ldots\eta_p$ для области изменения

$$a\leqslant\xi_\alpha\leqslant b;\ a\leqslant\eta_\beta\leqslant b$$
$$(\alpha,\ \beta=1,\ldots p).$$

Определитель Фредгольма $D(\lambda)$ *и первый минор Фредгольма* $D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ связаны между собою такими двумя *основными зависимостями Фредгольма:*

$$D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)-\lambda K(x,y)D(\lambda)=\lambda\int_a^b K(\eta,y)D(x,\eta;\lambda)\,d\eta$$

$$D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)-\lambda K(x,y)D(\lambda)=\lambda\int_a^b K(x,\eta)D(\eta,y;\lambda)\,d\eta,$$

а для $D(\lambda)$ и его производной $D'(\lambda)$ будет существовать такая *зависимость Фредгольма:*

$$\int_a^b D\left(\begin{matrix}x\\x\end{matrix}\middle|\lambda\right)dx=-\lambda D'(\lambda).$$

Эти формулы обобщаются и для миноров. В частности, для последнего уравнения будем иметь такое обобщенное:

$$\int_a^b\ldots\int_a^b D\left(\begin{matrix}x_1\ldots x_p\\ x_1\ldots x_p\end{matrix}\middle|\lambda\right)dx_1\ldots dx_p=(-1)^p\lambda^p\frac{d^pD(\lambda)}{d\lambda^p}.$$

Если мы здесь положим $\lambda=c$ и $p=r$, где r — кратность корня, то правая часть не равна нулю, следовательно, не обращается в нуль и левая часть. Отсюда, так как

$$c\neq 0,\ D\left(\begin{matrix}x_1\ldots x_r\\ x_1\ldots x_r\end{matrix}\middle|c\right)\neq 0$$

и, следовательно,

$$D\left(\begin{matrix}x_1\ldots x_r\\ y_1\ldots y_r\end{matrix}\middle|c\right)\neq 0,$$

в ряде величин

$$D(c)=0;\ D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}c\Big);\ D\begin{pmatrix}x_1, x_2\\y_1, y_2\end{pmatrix}c\Big);\ D\begin{pmatrix}x_1, x_2, x_3\\y_1, y_2, y_3\end{pmatrix}c\Big);\ldots$$

найдется такое число

$$q \leqslant r,$$

что

$$D(c)=0;\ D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle| c\right)\equiv 0;\ldots D\left(\begin{matrix}x_1\ldots x_{q-1}\\y_1\ldots y_{q-1}\end{matrix}\middle| c\right)\equiv 0;\ D\left(\begin{matrix}x_1,\ldots x_q\\y_1,\ldots y_q\end{matrix}\middle| c\right)\neq 0.$$

Это число q называется *индексом для с. Индекс q корня c уравнения $D(\lambda)=0$ не может превосходить кратность корня r.*

Если $\lambda=c$ представляет корень уравнения $D(\lambda)=0$ с индексом q, то однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x)=c\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds,$$

которое не имеет решений, отличных от нулевого $\varphi(x)=0$ при $D(c)\neq 0$, имеет q линейно независимых не нулевых решений, посредством которых можно выразить всякое другое решение в линейной и однородной форме. Это положение представляет *вторую теорему Фредгольма.* Одновременно с интегральным однородным уравнением

$$\varphi(x)=c\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds, \qquad (16)$$

рассмотрим однородное интегральное уравнение

$$\psi(x)=c\int_a^b K(s, x)\psi(s)\,ds, \qquad (17)$$

т. е. уравнение *союзное* с уравнением (16). Между решениями уравнений (16) и (17) существуют важные зависимости. Обозначая через $\overline{K}(x, s)$ результат перестановки x и s в ядре $K(x, s)$ первоначального уравнения, будем иметь:

$$\overline{K}(x, s)=K(s, x).$$

Легко написать определитель Фредгольма для союзного уравнения:

$$\overline{D}(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\overline{A}_n;\ \overline{A}_n=\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix}\overline{K}(s_1, s_1)\ldots\overline{K}(s_1, s_n)\\ \cdots\cdots\cdots\\ \overline{K}(s_n, s_1)\ldots\overline{K}(s_n, s_n)\end{vmatrix}ds_1\ldots ds_n.$$

Можно доказать, что если c есть характеристическая постоянная для ядра $K(x, s)$ с показателем q, тогда c будет характеристической постоянной и для ядра $K(s, x)$ такого же показателя, так что $\overline{q}=q$.

В теории интегральных уравнений доказывается такая важная теорема о зависимости между решениями уравнений (16), (17): *если c и c_1 будут два различные характеристические постоянные ядра $K(x, s)$, $\varphi_0(x)$ — фундаментальная функция ядра $K(x, s)$ для c и $\overline{\varphi}_1(x)$ — фундаментальная функция ядра $\overline{K}(x, s)$ для c_1, т. е. если*

$$\varphi_0(x)=c\int_a^b K(x, s)\varphi_0(s)\,ds;$$

$$\overline{\varphi}_1(x)=c_1\int_a^b\overline{K}(x, s)\overline{\varphi}_1(s)\,ds=c_1\int_a^b K(s, x)\overline{\varphi}_1(s)\,ds,$$

то

$$\int_a^b\varphi_0(x)\overline{\varphi}_1(x)=0.$$

Две непрерывные функции $y(x)$ и $z(x)$, для которых будет

$$\int_a^b y(x)z(x)\,dx=0,$$

называются *взаимно ортогональными.* Таким образом выходит, что функции $\varphi_0(x)$ и $\overline{\varphi}_1(x)$ будут ортогональны одна относительно другой.

Чтобы существовало непрерывное решение для интегрального уравнения

$$\varphi(x)=c\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds+f(x), \qquad (18)$$

если $\lambda=c$ представляет собой корень уравнения $D(\lambda)=0$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла q условиям

$$\int_a^b\psi_i(x)f(x)\,dx=0$$

$$(i=1, \ldots, q),$$

где q — индекс корня c, а $\psi_1,\ldots\psi_q$ представляет собой q различных независимых между собой решений однородного интегрального уравнения

$$\psi(x)=c\int_a^b K(s, x)\psi(s)\,ds,$$

союзного с уравнением

$$\varphi(x)=c\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds,$$

при этом — решение зависит линейно от q произвольных постоянных. Таково содержание *третьей основной теоремы Фредгольма.*

Функции $\Phi_1, \Phi_2, \ldots\Phi_q$, обозначающие q различных независимых решений однородного уравнения

$$\varphi(x)=c\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds.$$

называются *фундаментальными функциями для* ядра $K(x, s)$ и относятся к корню c, который называется *характеристической постоянной,* или иначе, — *характеристическим числом.* Для уравнения *союзного,* с ядром $K(s, x)$:

$$\psi(x)=c\int_a^b K(s, x)\psi(s)\,ds,$$

также будет q характеристических функций $\Psi_1, \ldots \Psi_q$.

Решения $\Phi_1, \ldots \Phi_q$ 1-го однородного уравнения получаются так. Возьмем систему $2q$ численных значений $\xi_1, \ldots \xi_q, \eta_1, \ldots \eta_q$, таких, чтобы не равен был нулю минор Фредгольма

$$D\begin{pmatrix}\xi_1 \ldots \xi_q\\ \eta_1 \ldots \eta_q\end{pmatrix}c\Big) = K\begin{pmatrix}\xi_1 \ldots \xi_q\\ \eta_1 \ldots \eta_q\end{pmatrix} - \frac{c}{1!}\int_a^b K\begin{pmatrix}\xi_1 \ldots \xi_q s_1\\ \eta_1 \ldots \eta_q s_1\end{pmatrix}ds_1 +$$

$$+\frac{c^2}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}\xi_1 \ldots \xi_q\, s_1 s_2\\ \eta_1 \ldots \eta_q\, s_1 s_2\end{pmatrix}ds_1 ds_2 -$$

$$-\ldots+(-1)^m\frac{c^m}{m!}\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}\xi_1 \ldots \xi_q\, s_1 \ldots s_m\\ \eta_1 \ldots \eta_q\, s_1 \ldots s_m\end{pmatrix}ds_1 \ldots ds_m + \ldots$$

и будем в нем заменять последовательно ξ_1 на $x, \ldots \xi_q$ на x и затем результат разделим на этот минор. Получим:

$$\Phi_i(x)=\frac{D\left(\begin{matrix}\xi_1 \ldots \xi_{i-1}\, x\, \xi_{i+1} \ldots \xi_q\\ \eta_1 \quad \eta_{i-1}\, \eta_i \eta_{i+1} \ldots \eta_q\end{matrix}\middle|\lambda\right)}{D\left(\begin{matrix}\xi_1 \ldots \xi_q\\ \eta_1 \ldots \eta_q\end{matrix}\middle|c\right)}$$

$$(i=1, \ldots q).$$

Решения $\Psi_1, \ldots \Psi_q$ второго однородного уравнения найдем заменой η_1 на $x, \ldots \eta_q$ на x:

$$\Psi_i(x)=\frac{D\left(\begin{matrix}\xi_1 \ldots \xi_{i-1}\, \xi_i\, \xi_{i+1} \ldots \xi_q\\ \eta_1 \ldots \eta_{i-1}\, x\, \eta_{i+1} \ldots \eta_q\end{matrix}\middle|c\right)}{D\left(\begin{matrix}\xi_1 \ldots \xi_q\\ \eta_1 \ldots \eta_q\end{matrix}\middle|c\right)}.$$

Можно показать, что

$$D\left(\begin{matrix}x_1 \ldots x_q\\ y_1 \ldots y_q\end{matrix}\middle|\lambda\right)=K(x_1, y_1)\,D\left(\begin{matrix}x_2 \ldots x_q\\ y_2 \ldots y_q\end{matrix}\middle|\lambda\right)-K(x_1, y_2)\,D\left(\begin{matrix}x_2 x_3 \ldots x_q\\ y_1 y_3 \ldots y_q\end{matrix}\middle|\lambda\right)+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{q-1}K(x_1, y_q)\,D\left(\begin{matrix}x_2 \ldots x_q\\ y_1 \ldots y_{q-1}\end{matrix}\middle|\lambda\right)+\lambda\int_a^b K(x_1, t)\,D\left(\begin{matrix}t\, x_2 \ldots x_q\\ y_1 y_2 \ldots y_q\end{matrix}\middle|\lambda\right)dt,$$

и тогда

$$D\left(\begin{matrix}\xi_1 \ldots \xi_q\\ \eta_1 \ldots \eta_q\end{matrix}\middle|c\right)=c\int_a^b K(\xi_i, s)\,D\left(\begin{matrix}s\, \xi_2 \ldots \xi_q\\ \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_q\end{matrix}\middle|c\right)ds;$$

это даст нам такое заключение:

$$c\int_a^b K(\xi_i, s)\,\Phi_k(s)\,ds\begin{cases}=1, & \text{для } i=k\\ =0, & \text{„ } i\neq k.\end{cases}$$

Если условия для существования решения интегрального уравнения (18) будут выполнены, то будет q-раз бесчисленное множество решений этого уравнения, определяемых по формуле:

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b H(x, s)f(s)\,ds+C_1\Phi_1(x)+\ldots+C_q\Phi_q(x),$$

где $C_1, \ldots C_q$ — *произвольные постоянные,* $\Phi_1, \ldots \Phi_q$ — *все фундаментальные решения уравнения*

$$\varphi(x)=c\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

и где $H(x, y)$ *обозначает такую функцию:*

$$H(x, y)=\frac{D\left(\begin{matrix}x\, \xi_1 \ldots \xi_q\\ y\, \eta_1 \ldots \eta_q\end{matrix}\middle|c\right)}{D\left(\begin{matrix}\xi_1 \ldots \xi_q\\ \eta_1 \ldots \eta_q\end{matrix}\middle|c\right)}.$$

В том *частном случае,* когда ядро имеет форму

$$K(x, y)=a_1(x)\,b_1(y)+\ldots+a_n(x)\,b_n(y),$$

интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds+f(x)$$

напишется так:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\left[a_1(x)\int_a^b b_1(s)\,\varphi(s)\,ds+\ldots+a_n(x)\int_a^b b_n(s)\,\varphi(s)\,ds.\right.$$

Полагая

$$\int_a^b b_i(s)\,\varphi(s)\,ds=K_i,$$

решение $\varphi(x)$ ищут в форме:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\left[a_1(x)K_1+\ldots+a_n(x)K_n\right].$$

Подставляя это последнее выражение для φ в предпоследние n уравнений и обозначая

$$\int_a^b a_k(s)\,b_i(s)\,ds=C_{ki},$$

получим систему n линейных неоднородных уравнений с n неизвестными $K_1, \ldots K_n$, вида:

$$K_i-\lambda\left[C_{1i}K_1+\ldots+C_{ni}K_n\right]=\int_a^b b_i(s)\,f(s)\,ds,$$

для которой легко написать определитель $D(\lambda)$. Если $D(\lambda)=0$, то надо будет положить

$$K_i=\alpha_1 m_{1i}+\ldots+\alpha_q m_{qi}$$
$$(i=1,\ldots n),$$

где $\alpha_1,\ldots\alpha_q$ — произвольные постоянные.

В рассмотренной вкратце *теории Фредгольма* решения линейных интегральных уравнений предполагалось, что *ядро $K(x,s)$ подчиняется таким трем ограничениям: функция $K(x,s)$* есть 1) *действительная*, 2) *непрерывная и* 3) *не равная нулю в области*

$$a\leqslant x\leqslant b;\quad a\leqslant s\leqslant b.$$

В теории Гильберта-Шмидта рассматривается еще *4-е ограничение: ядро линейного интегрального уравнения должно быть симметрично:*

$$4)\ K(x,s)=K(s,x).$$

Пределы интеграла, так же, как и в излагавшейся теории Фредгольма,— это постоянные числа a и b.

В этой теории Гильберта-Шмидта основной является такая *теорема Гильберта: всякое симметричное ядро имеет по крайней мере одну характеристическую постоянную,—действительную или мнимую.*

Второй основной теоремой является такая: для всех достаточно малых значений параметра λ сходится равномерно как относительно x так и относительно s в их области изменения ряд:

$$\frac{D\left(\begin{matrix}x\\ s\end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right)}{D(\lambda)}=\lambda K(x,s)+\lambda^2K^{(2)}(x,s)+\lambda^3K^{(3)}(x,s)+\ldots$$

Дальнейшие теоремы этой теории сводятся к следующему.

Если $K(x,s)$ симметрично и $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ будут фундаментальные функции ядра $K(x,s)$ соответственно для характеристических чисел c_1 и c_2, причем $c_1\neq c_2$, тогда $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ ортогональны в интервале (a,b):

$$\int\limits_a^b\varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx=0.$$

Если ядро $K(x,s)$ удовлетворяет всем четырем указанным выше условиям, то все характеристические постоянные — числа действительные. Индекс q характеристической постоянной всегда равен кратности r корня c уравнения $D(\lambda)=0$.

Называя *нормализированной* такую функцию ψ, которая обладает свойством

$$\int\limits_a^b\psi^2(x)\,dx=1,$$

будем иметь для всякого действительного симметричного ядра полную нормализированную ортогональную систему фундаментальных функций $\psi_i(x)$, обладающих следующими свойствами:

1) $\psi_i(x)$ — фундаментальная функция относительно числа λ_i, так что

$$\psi_i(x)=\lambda_i\int\limits_a^b K(x,s)\,\psi_i(s)\,ds,$$

2)
$$\int\limits_a^b\psi_i^2(x)\,dx=1,$$

3)
$$\int\limits_a^b\psi_i(x)\,\psi_k(x)\,dx=0\quad(i\neq k),$$

4) $\psi_i(x)$ есть функция вещественная,

5) для всякой фундаментальной функции $\varphi(x)$ будем иметь линейное выражение через функции $\psi(x)$:

$$\varphi(x)=C_{i1}\,\psi_{i1}(x)+\ldots+C_{im}\,\psi_{im}(x).$$

Если любую непрерывную функцию $f(x)$ представить в форме

$$f(x)=c_1\,\psi_1(x)+c_2\,\psi_2(x)+c_3\,\psi_3(x)+\ldots$$

и если этот ряд, в случае, когда он бесконечен, равномерно сходится в интервале (a,b), тогда коэффициенты c_i определяются по формуле

$$c_i=\int\limits_a^b f(x)\,\psi_i(x)\,dx;$$

функции $\psi_i(x)$ представляют здесь полную нормализированную ортогональную систему фундаментальных функций с соответствующими характеристическими постояннными λ_i для заданного симметричного ядра $K(x,s)$.

По этой *теореме Гильберта* определение коэффициентов c_i так же просто, как в теории рядов Фурье.

Пусть будет

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ldots\varphi_n(x),\ldots\tag{18'}$$

полный ряд ортогональных функций и пусть будет

$$f_1,\ f_2,\ldots f_n,\ldots$$

совокупность таких постоянных, что является сходящимся ряд

$$f_1^2+f_2^2+\ldots+f_n^2+\ldots\tag{18''}$$

тогда существует одна и только одна функция $f(x)$, которая допускает постоянные f_n, как коэффициенты Фурье относительно ряда (18'), причем условие сходимости (18'') является условием необходимым и достаточным.

Последовательность (18') есть *замкнутая*, т. е. для всех φ_i будет

$$f_1^2+f_2^2+\ldots+f_n^2+\ldots=\int\limits_a^b f^2(x)\,dx;\quad f_i=\int\limits_a^b f\varphi_i\,dx.$$

Понятие *полного* ряда ортогональных функций $\varphi_1, \ldots \varphi_n, \ldots$ обозначает, что не существует линейно независимой от $\varphi_1, \ldots \varphi_n, \ldots$ функции $\psi(x)$, для которой было бы

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\psi(x)\,dx = 0$$

при всяком i. Единственная функция $f(x)$, о которой идет речь в теореме, есть предел последовательности

$$f_n(x) = f_1\varphi_1(x) + f_2\varphi_2(x) + \ldots + f_n\varphi_n(x),$$

где $n = 1, 2, \ldots \infty$.

Эта теорема была одновременно доказана Е. Фишером и Ф. Рицем.

Примеры.

1) Для ядра

$$K(x, s) = xs$$

найдем одно характеристическое число $\lambda = 3$, так как $D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3}$.

Для ядра $F(x, s) = x + s$ будем иметь 2 характеристических числа, так как

$$D(\lambda) = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}.$$

Для ядра

$$K(x, s) = x^2 s + xs^2$$

получим

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{240}\lambda^2.$$

2)
$$\varphi(x) = x + \lambda\int_0^1 (x + s)\,\varphi(s)\,ds;$$

считая λ отличным от корней λ_1, λ_2 квадратного уравнения $1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12} = 0$, получаемого из $D(\lambda) = 0$, будем иметь

$$\varphi(x) = x - \frac{\frac{1}{2}\lambda x - 2 - \sqrt{3}}{\lambda + 6 + 4\sqrt{3}} - \frac{\frac{1}{2}\lambda x + 2 - \sqrt{3}}{\lambda + 6 - 4\sqrt{3}},$$

или

$$\varphi(x) = \frac{(6\lambda - 12)\,x - 4\lambda}{\lambda^2 + 12\lambda - 12}.$$

3)
$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 (x + s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Для этого линейного однородного уравнения с симметричным ядром получим решения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, соответствующие характеристическим числам $\lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3}$ и $\lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}$; эти решения будут:

$$\varphi_1(x) = c_1(1 + \sqrt{3}\,x), \quad \varphi_2(x) = c_2(1 - \sqrt{3}\,x).$$

§ 94. О некоторых приложениях теории Фредгольма и теории Гильберта-Шмидта. Задача Дирикле, задача Неймана и основная граничная задача. Рассмотрим для примера задачу о *свободных колебаниях упругой струны* длиной 1. Дифференциальное уравнение движения было выведено в главе I:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (c = \text{const});$$

граничные и начальные условия:

$$y(o, t) = 0; \quad y(1, t) = 0$$

$$y(x, o) = g(x); \quad \frac{\partial y(x, o)}{\partial t} = 0,$$

где $y = g(x)$ представляет уравнение начального положения струны.

Если мы будем искать решение формы

$$y = u(x)\,\varphi(t),$$

то приходим к интегрированию двух обыкновенных уравнений

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0; \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \lambda c^2\varphi = 0$$

с начальными условиями для u и φ, получаемыми из предыдущих; так как $\varphi(t) \neq 0$, то уравнение для u и начальные условия будут:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0; \quad u(0) = 0; \quad u(1) = 0. \tag{19}$$

Если $\lambda = n^2\pi^2$, где n — целое число, тогда наша *граничная задача*, сформулированная тремя предшествующими уравнениями, имеет бесчисленное множество решений $u = B\sin n\pi x$, а если $\lambda \neq n^2\pi^2$, тогда существует только одно тривиальное решение $u \equiv 0$.

Можно показать, что всякое решение граничной задачи (19) удовлетворяет в то же время и линейному интегральному уравнению. Это интегральное уравнение будет однородно, вида

$$u(x) = \lambda\int_0^1 K(x, \xi)\,u(\xi)\,d\xi,$$

где $K(x, \xi)$ называется *функцией Грина*, построенной для граничной задачи (19); эта функция будет одна и только одна и определяется формулой:

$$K(x, \xi) = \begin{cases} (1 - \xi)\,x & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ \xi(1 - x) & \text{для } \xi \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

функция эта симметрична, так что

$$K(x, \xi) = K(\xi, x).$$

Составляется эта функция Грина по условиям: 1) функция $u(x)$ непрерывна в интервале $(0, 1)$, 2) функция $u(x)$ непрерывна в интервале $(0, \xi)$ вместе со своими производными до порядка 2-го включительно и $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ в этом интервале; 3) такие же положения должны выполняться и в интервале $(\xi, 1)$; и, наконец, 4) — должно быть $u(0) = 0$; $u(1) = 0$. Следовательно, решение задачи о виде этой функции сводится к тому, что

$$u = \alpha_0 x + \beta_0 \text{ в интервале } (0, \xi);$$

$$u = \alpha_1 x + \beta_1 \text{ в интервале } (\xi, 1),$$

а вследствие 4-го условия получаем

$$\beta_0 = 0; \quad \alpha_1 + \beta_1 = 0,$$

что дает

$$u = \begin{cases} \gamma(1-\xi)x & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ \gamma\xi(1-x) & \text{для } \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Рассматривая далее разрыв непрерывности для производной при $x=\xi$, можно получить $\gamma=1$.

Переходя теперь к приложениям теории к решению двух основных задач *теории потенциала*, а именно — *задачи Дирикле* и *задачи Неймана*, будем иметь в виду функции, непрерывные со своими производными до 2-го порядка включительно и удовлетворяющие *уравнению потенциала*

$$\Delta u = 0, \text{ т. е. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

такие функции называются *гармоническими функциями*.

Кроме того будем рассматривать *непрерывные кривые* C — т. е. кривые, в уравнениях которых

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

функции φ и ψ являются непрерывными в интервале (t_0, t_1). Будем говорить, что кривая C если *класса* c', если функции φ и ψ имеют непрерывные первые производные φ' и ψ', не обращающиеся одновременно в нуль в интервале (t_0, t_1), — такая кривая имеет определенную положительную касательную в каждой точке, не имеет особенных точек; всякая дуга ее имеет определенную конечную длину. Кривая *класса* c'' имеет аналогичные условия и для производных второго порядка, φ'', ψ'', и обладает в каждой точке определенной кривизной, непрерывно меняющейся от точки к точке; для такой кривой можно взять в качестве параметра дугу s, и тогда уравнения кривой запишутся:

$$x = \alpha(s), \quad y = \beta(s); \quad 0 \leqslant s \leqslant l,$$

где l — длина дуги на всем изучаемом участке кривой.

Если кривая C будет: 1) замкнутой, 2) не имеет кратных точек, 3) имеет класс c'', и 4) если всякая прямая, параллельная оси x-ов, или y-ов пересекает кривую не больше, чем определенное конечное количество m раз, — тогда она разделяет плоскость на две части: внутреннюю I, включающую и контур C, внешнюю E также с контуром C. Для такой кривой имеет место следующая *теорема Грина: если две функции независимых переменных x, y, обозначенные через $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, будут класса c' в части I, тогда*

$$\int\limits_{(C)} [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy] = \iint\limits_{I} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,ay,$$

где криволинейный интеграл взят в положительном направлении вдоль контура C. С этой теоремой мы встречались уже в главе V, при выводе достаточных условий extremum'а определенного интеграла.

Задача Дирикле состоит в следующем.

Задана обладающая указанными четырьмя свойствами замкнутая кривая C:

$$x = \xi(s), \; y = \eta(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant l$$
$$\xi(0) = \xi(l), \; \eta(0) = \eta(l).$$

Задана также непрерывная на C функция $F(s)$, так что $0 \leqslant s \leqslant l$, с условием

$$F(0) = F(l).$$

Надо найти такую функцию $\varphi(x, y)$, чтобы она была гармонической в части плоскости I и чтобы для точки $M_0(x_0, y_0)$ контура C было

$$\varphi_i(x_0, y_0) = F(s_0),$$

где $\varphi_i(x_0, y_0)$ есть предел равномерной сходимости при изменении функции $\varphi(x, y)$, когда точка $M(x, y)$ приближается извнутри к точке $M_0(x_0, y_0)$, для параметра s_0, на контуре C.

Решение задачи сводится к определению функции $\psi(s)$, посредством которой находится искомая гармоническая функция $\varphi(x, y)$ по формуле

$$\varphi(x, y) = \int\limits_0^l \psi(s) \frac{\partial}{\partial \nu} \lg \frac{1}{r}\, ds,$$

где r обозначает расстояние от точки $M(x, y)$ внутри контура до точки $\mathbf{M}(\xi, \eta)$ на контуре,

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

а производная $\frac{\partial(\ldots)}{\partial \nu}$ есть *производная по нормали*, направленной из точки $\mathbf{M}(\xi, \eta)$ внутрь контура, так что

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \lg \frac{1}{r} = \frac{[y-\eta(s)]\,\xi'(s) - [x-\xi(s)]\,\eta'(s)}{r^2},$$

и, наконец, функция $\psi(s)$ определяется интегральным уравнением

$$\psi(s_0) = f(s_0) - \int\limits_0^l K(s_0, s)\,\psi(s)\,ds, \tag{20}$$

для которого $\lambda = -1$ и кроме того

$$f(s_0) = \frac{F(s_0)}{\pi}; \quad K(s_0, s) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{[\eta(s_0)-\eta(s)]\,\xi'(s) - [\xi(s_0)-\xi(s)]\,\eta'(s)}{[\xi(s_0)-\xi(s)]^2 + [\eta(s_0)-\eta(s)]^2}.$$

Существует одно и только одно непрерывное решение $\psi(s_0)$, удовлетворяющее интегральному уравнению (20); это решение $\psi(s_0)$ приводит нас к решению задачи Дирикле определения гармонической функции $\varphi(x, y)$ и получается по рассмотренной в предшествующем параграфе формуле Фредгольма:

$$\psi(s_0) = f(s_0) + \int\limits_0^l \frac{D\left(\begin{matrix} s \\ s_0 \end{matrix}\middle| -1\right)}{D(-1)} f(s)\,ds.$$

Число $\lambda = -1$ здесь не является характеристической постоянной для ядра $K(s_0, s)$. Можно доказать, что характеристической постоянной для $K(s_0, s)$ будет $\lambda = +1$ с индексом 1.

Второй граничной задачей теории потенциала является такая *задача Неймана*.

Как и раньше, в задаче Дирикле, заданы: 1) обладающая указанными раньше четырьмя свойствами замкнутая кривая C,

$$x = \xi(s),\ y = \eta(s);\quad 0 \leqslant s < l$$
$$\xi(0) = \xi(l);\quad \eta(0) = \eta(l),$$

и 2) непрерывная на контуре C функция $F(s)$, $0 \leqslant s < l$, с условием

$$F(0) = F(l).$$

Надо найти такую функцию $\varphi(x, y)$, чтобы $\Delta u = 0$ в области I и чтобы $\frac{\partial\varphi_i}{\partial n_i} = F(s_0)$, где левая часть обозначает производную по нормали, направленной от точки P_0 на контуре к точке P_i внутри контура; такая производная существует и для внутренней точки P_i, и для внешней точки P_e, находящейся на продолжении прямой P_0P_i за контур C.

Для решения задачи можно притти к решению интегрального уравнения разными путями.

Для функции $F(s)$ такой, что

$$\int_0^l F(s)\, ds = 0, \tag{21}$$

задача Неймана имеет ∞ решений, зависящих от произвольной постоянной C по формуле

$$\varphi(x, y) = \omega(x, y) + C,$$

где

$$\omega(x, y) = \int_0^l \psi(s) \lg\frac{1}{r}\, ds,$$

и $\psi(s)$ определяется интегральным уравнением

$$\psi(s_0) = f(s_0) + \lambda \int_0^l \overline{K}(s_0, s)\, \psi(s)\, ds,$$

причем функция $f(s_0)$, λ и ядро $\overline{K}(s_0, s)$ определяются по формулам:

$$f(s_0) = -\frac{F(s_0)}{\pi};\quad \lambda = 1$$

$$\overline{K}(s_0, s) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{[\eta(s) - \eta(s_0)]\, \xi'(s_0) - [\xi(s) - \xi(s_0)]\, \eta'(s_0)}{[\xi(s) - \xi(s_0)]^2 + [\eta(s) - \eta(s_0)]^2}.$$

Задача вовсе не имеет решения, если не удовлетворяется для функции $F(s)$ дополнительное условие (21).

Для ядра $\overline{K}(s_0, s)$ число $\lambda = +1$ является характеристической постоянной; это ядро получается из ядра $K(s_0, s)$ задачи Дирикле заменой s на s_0 и наоборот, — ядра будут союзными одно относительно другого и будут обладать одними и теми же характеристическими постоянными такого самого индекса, именно: $q = 1$. Это дает одно условие для возможности существования решения, а именно условие

$$\int_0^l f(s)\, \chi(s)\, ds = 0,$$

где $\chi(s)$ есть решение связанного с первым однородного интегрального уравнения

$$\chi(s_0) = \int_0^l K(s_0, s)\, \chi(s)\, ds;$$

предшествующее условие сводится к условию

$$\int_0^l f(s)\, ds = 0,\ \text{ или } \int_0^l F(s)\, ds = 0,$$

так как можно убедиться, что $\chi(s) \equiv 1$.

Одним из главнейших *приложений теории Гильберта-Шмидта* является применение ее к решению граничных задач на дифференциальные уравнения. Не останавливаясь здесь на примерах задач, связанных с дифференциальными уравнениями с частными производными, коснемся вкратце общего типа граничной задачи, связанной с общего вида обыкновенным однородным линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка с параметром λ, входящим линейно в коэффициент при неизвестной функции u:

$$P(x)\frac{d^2u}{dx^2} + Q(x)\frac{du}{dx} + [R(x) + \lambda S(x)]\, u = 0.$$

Преобразуем это уравнение общего вида, умножая его на

$$\frac{1}{P(x)} e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx}$$

и полагая

$$p(x) = e^{\int \frac{Q}{P} dx}.$$

Имеем:

$$p\left(u'' + \frac{Q}{P}u' + \frac{R + \lambda S}{P}u\right) = 0,$$

или

$$p(x)\, u'' + p'(x)\, u' + [q(x) + \lambda g(x)]\, u = 0,$$

т. е.

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + (q + \lambda g)\, u = 0.$$

Вводя обычный в теории линейных дифференциальных уравнений *оператор*

$$L(u) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu,$$

будем иметь окончательно дифференциальное уравнение 2-го порядка и наиболее общего вида граничные условия в интервале (a, b):

$$L(u) + \lambda g(u) = 0 \tag{22}$$
$$Au(a) + Bu'(a) = 0;\ Cu(b) + Du'(b) = 0,$$

где A, B, C, D — заданные постоянные, из которых одновременно не равны нулю A и B, а также C и D.

Надо определить все решения, т. е. интегральные кривые C класса c'', удовлетворяющие дифференциальному уравнению и двум граничным условиям.

Для коэффициентов заданного уравнения предполагается, что:

$$p \text{ имеет класс } c' \text{ и } p \neq 0 \text{ в интервале } (a, b), \quad q \text{ и } g \text{ будут класса } c \text{ в том же интервале.} \tag{23}$$

Уравнение имеет 2 линейно независимые решения класса c''; если одно из них u_1, а другое u_2, то всякое другое решение u определяется по формуле

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 .$$

Значения постоянной λ, для которых получаются решения, удовлетворяющие всем трем уравнениям (22) и отличные от очевидного решения $u \equiv 0$, называются *характеристическими постоянными*, а сами ненулевые решения класса c'' для этих характеристических постоянных называются *фундаментальными функциями граничной задачи.*

Кроме условий (23) при решении граничной задачи полагают еще, что

$$\lambda = 0 \text{ не является характеристической постоянной,} \tag{24}$$

или иначе,—что система трех уравнений

$$L(u) = 0;\ Au(a) + Bu'(a) = 0;\ Cu(b) + Du'(b) = 0$$

не имеет решений класса c'', отличных от $u \equiv 0$.

Можно доказать, что условия (23) влекут за собой такую *формулу Грина*:

$$uL(v) - vL(u) = \frac{d}{dx} p(uv' - vu'),$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — две функции класса c''; с подобной формулой мы встречались еще в главе II.

По условиям (23) и (24), полагая $a < s < b$, можно определить такую одну и только одну относящуюся к граничной задаче *функцию Грина* $K(x, s)$, которая, как функция x, будет:

1) непрерывной в интервале (a, b);

2) класса c'' в каждом из подинтервалов (a, s) и (s, b), причем в этих же подинтервалах $L(K) = 0$;

3) $AK(a) + BK'(a) = 0$; $CK(b) + DK'(b) = 0$;

4) $K'(x, s-0) - K'(x, s+0) = \frac{1}{p(s)}$,

где обозначено

$$K'(x, s) = \frac{\partial}{\partial x} K(x, s);$$

5) функция Грина симметрична: $K(x, s) = K(s, x)$.

Эта функция $K(x, s)$ определяется формулами:

$$K(x, s) = \begin{cases} v(s)\, u(x) \equiv K_0(x, s), & a \leqslant x \leqslant s \\ u(s)\, v(x) \equiv K_1(x, s), & s \leqslant x \leqslant b \end{cases}.$$

Рассматривая неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$L(u) + f = 0,$$

где f — непрерывная в интервале (a, b) функция, будем иметь, по *основной теореме Гильберта*, следующее: *если F будет класса c'' и если она удовлетворяет уравнениям*

$$L(F) + f = 0;\ AF(a) + BF'(a) = 0;\ CF(b) + DF'(b) = 0, \tag{25}$$

то

$$F(x) = \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds, \tag{26}$$

и наоборот, — *функция, определяемая формулой* (26), *есть класса c'' и удовлетворяет уравнениям* (25). Это обратное утверждение представляет *вторую основную теорему Гильберта.*

Третья теорема состоит в соединении этих двух положений: если $f(x)$ есть непрерывная функция, то определение функции $F(x)$ по формуле (26) влечет за собою то, что она будет класса c'' и удовлетворяет уравнениям (25).

Полагая

$$f(x) = \lambda g(x)\, u(x);\ F(x) = u(x),$$

получим отсюда такую теорему: *если $u(x)$ есть непрерывная функция, тогда*

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\, g(s)\, u(s)\, ds \tag{27}$$

влечет за собою то, что $u(x)$ будет класса c'' и будет удовлетворять уравнениям (22), *и наоборот.*

Надо заметить, что *ядро* однородного интегрального уравнения 2-го рода (27) вообще *не симметрично*; оно есть

$$K(x, s)\, g(s).$$

Последняя теорема приводит к равносильности граничной задачи и интегрального уравнения, при этом, если c представляет собой численное значение — характеристическую постоянную λ граничной задачи, то это же c будет характеристической постоянной и для интегрального уравнения и наоборот, а если $u(x)$ будет соответствующей для c фундаментальной функцией граничной задачи, то $u(x)$ будет также фундаментальной функцией, связанной с c и для интегрального уравнения, и наоборот.

Можно доказать также, что *для неоднородной граничной задачи*, состоящей в определении функции $u(x)$ класса c'', которая удовлетворяет уравнениям

$$L[u(x)] + \lambda g(x)\, u(x) + r(x) = 0$$
$$Au(a) + Bu'(a) = 0;\ Cu(b) + Du'(b) = 0,$$

где $r(x)$ — заданная, непрерывная в интервале (a, b) функция, — решение такой задачи *равносильно решению неоднородного интегрального уравнения*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, g(s)\, u(s)\, ds,$$

где $u(x)$ — непрерывна и где положено

$$f(x) = \int_a^b K(x, s)\, r(s)\, ds.$$

Пример. Задачу вариационного исчисления: среди всех кривых, удовлетворяющих условиям

$$y = u(x) \text{ есть класса } c''; \ u(a) = 0; \ u(b) = 0; \ \int_a^b u^2(x)\,dx = 1,$$

найти такую, которая *минимизирует* интеграл

$$\int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - q(x)u^2\right]dx,$$

где $p(x)$ — класса c'' и $p > 0$ в интервале (a, b), а $q(x)$ непрерывна в этом интервале, эту задачу Гильберт называет задачей Дирикле. Это изопериметрическая задача, для которой, при рассмотрении minimum'a интеграла вида

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

с условием вида

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') = l \qquad (l = \text{const}),$$

надо положить

$$F = pu'^2 - qu^2; \ G = u^2,$$

а при изучении minimum'a функции $H = F + \lambda G$ с постоянной λ надо рассматривать

$$H(x, u, u') = pu'^2 - (q + \lambda)u^2,$$

так что уравнение Эйлера — Лагранжа для функции H будет:

$$\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial u'}\right) = 0; \ -2(q + \lambda)u - \frac{d}{dx}(2pu') = 0.$$

Переписывая последнее уравнение в виде $L(u) + \lambda u = 0$ и принимая во внимание условия для $u(x)$, имеем граничную задачу, для которой

$$g(x) = 1; \ [puu']_a^b = 0.$$

Задача имеет решения только тогда, когда λ будет характеристической постоянной. Характеристических постоянных будет ∞, все они вещественны и индекс для каждой $q = 1$. Ряду $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ будет соответствовать полный ряд нормализованных ортогональных фундаментальных функций класса c'': $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x), \dots$ Искомой кривой будет кривая, определяемая по формуле

$$u = \pm\psi_1(x),$$

где $\psi_1(x)$ представляет фундаментальную функцию, соответствующую наименьшей характеристической постоянной λ_1.

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ.

281. Найти резольвенту для ядра

$$K(x, y) = b_0(y) + b_1(y)(y - x) + b_2(y)(y - x)^2.$$

$$[\text{О.: } \Gamma(x, y, \lambda) = -\frac{1}{\lambda}\,\frac{d^3h(x, y, \lambda)}{dy^3},$$

где $h(x, y, \lambda)$ есть интеграл уравнения

$$\frac{d^3h}{dy^3} + \lambda\left[b_0(y)\frac{d^2h}{dy^2} + b_1(y)\frac{dh}{dy} + b_2(y)h\right] = 0$$

и для $y = x$ будет

$$h = 0, \ \frac{dh}{dy} = 0, \ \frac{d^2h}{dy^2} = 1].$$

282. Свести к определению решения интегральных уравнений задачу об определении интеграла Коши для линейного неоднородного уравнения

$$\frac{d^nz}{dx^n} - \left[a_0(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\,z\right] = f(x),$$

чтобы для $x = x_0$ было $z = z' = \dots = z^{(n-1)} = 0$.

[О.: Полагая $\varphi(x) = \dfrac{d^nz}{dx^n}$, будем иметь

$$z = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x - s)^{n-1}\varphi(s)\,ds; \ \frac{d^pz}{dx^p} = \frac{1}{(n-p-1)!}\int_{x_0}^{x} (x - s)^{n-p-1}\varphi(s)\,ds,$$

где $p = 1, \dots n - 1$. Таким образом ядро интегрального уравнения будет:

$$K(x, y) = a_0(x) + a_1(x)(x - y) + \dots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x - y)^{n-1}].$$

283. Задачу решения интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода свести к задаче решения интегрального уравнения 2-го рода.

[О.: Уравнение $\int_0^x K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x)$, после интегрирования по частям и обозначения $\varphi(x)$ через $\dfrac{du}{dx}$ при условии $u(0) = 0$, перепишется так:

$$K(x, x)\,u(x) - \int_0^x K'_s(x, s)\,u(s)\,ds = f(x); \ K(0,0) \neq 0].$$

284. Проверить, что

$$D'(\lambda) = -\int_a^b D\left({s \atop s}\Big|\lambda\right)ds.$$

285. Решить уравнение $\varphi(x) = \cos x - x - 2 + \int_0^x (s - x)\varphi(s)\,ds$.

[О.: $\varphi(x) = \sin x + x\sin x$].

286. Решить уравнение $3\varphi(x) = \frac{5}{2}x - \frac{1}{3} + \int_0^1 (s + x)\varphi(s)\,ds$. [О: $\varphi(x) = x$].

287. Решить $\varphi(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xs\varphi(s)\,ds$. [О.: $\varphi(x) = x$].

288. Определение функции $y(x)$, которая удовлетворяла бы дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$$

и для $x = 0$ давала бы $y = 0$; $y' = 1$; $y'' = 2$, свести к решению интегрального уравнения.

[О.: $\varphi(x) = \cos x - x - 2 + \int_0^x (s - x)\,u(s)\,ds$].

289. Найти характеристические функции уравнения

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{1}{4\pi}(x - y)^2 - \frac{1}{2}(x - y)\right]\varphi(s)\,ds.$$

[О.: $\varphi_1(x) = \cos mx$, $\varphi_2(x) = \sin mx$, где $\lambda = m^2$, и m любое целое число].

ГЛАВА XII

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

Последняя глава касается интегрирования линейных уравнений с частными производными 2-го порядка и, преимущественно, с постоянными коэффициентами, — уравнений встречающихся чаще всего в различных вопросах математической физики. Рассматривается интегрирование таких уравнений при граничных и начальных условиях, а также без всяких условий. В этой главе читатель будет иметь классические результаты исследований Лапласа, Фурье, Пуассона, Коши, к которым надо отнестись с тем серьезным вниманием, какого заслуживают эти исследования, стараясь преодолеть трудности с многократными интегралами, вплоть до шестикратных и даже, в одном месте, — восьмикратных. Более легкий путь найти интегралы, найденные Лапласом и Пуассоном и удовлетворяющие поставленным условиям, — о чем идет речь в §§ 98 и 99, читателю вряд ли удастся встретить. В этой главе собрано также много задач и примеров, как рассмотренных и изложенных в лекциях Римана 1854/55 г. и 1860/61 г., так и тех, которые рассматриваются в книге акад. А. Н. Крылова о дифференциальных уравнениях математической физики. Особенное внимание надо обратить на §§ 97, 98, 99. Некоторые мои результаты содержатся в § 100; в части, касающейся телеграфных уравнений, они здесь появляются впервые.

Литература

А. Н. Крылов — О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах, изд. 2-е, 1932.

В. А. Стеклов — Основные задачи математической физики. Ч. I, Петербург, 1922; ч. II, 1923.

Н. М. Крылов — Методи наближеного і символічного розв'язання диференціяльных рівнань математичної фізики й техніки, ДВОУ, Харків—Київ, 1931.

Н. М. Крылов — Основні проблеми математичної фізики й техніки, ВРНГ—УРСР, Техвидав, 1932.

Н. М. Крылов — Огляд работи катедри математичної фізики з часів її заснування (1922), Київ, 1932.

Р. Курант и Д. Гильберт — Методы математической физики, том I, 1933 (перевод с немецкого).

B. Riemann — Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf Physik. Fragen. Vorlesungen für den Druck bearb. u. herausg. von Karl Hattendorf, 2-te Aufl., Braunschweig, 1876.

A. G. Webster — Partielle Differentialgleichungen der Mathem. Physik (Deutsche Bearb. G. Szegö, Teubner, 1930). В начале 1931 г. издан перевод на русский язык.

Ph. Frank und R. V. Mises — Die Differential — und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Braunschweig, I Th., 1930; II Th., 1927.

E. T. Whittaker and G. N. Watson — A Cours of Modern Analysis, Cambridge, 1927, Ch. XVIII, XIX. В начале 1934 г. издан перевод на русский язык.

M. Kourensky — On the integration of the equations of the electromagnetic theory of light (Proceedings of the London Math. Soc., vol. 27, 1927).

H. Weber — Die partiellen Differentialgleichungen der Mathem. Physik, nach Riemann's Vorlesungen, Bd. I, Braunschweig, 1910; Bd. II, Braunschweig, 1912.

H. Bateman — Differential Equations of Math. Physik, 1932.

§ 95. Основные уравнения математической физики и краткие сведения об основных методах их решения. Основных уравнений математической физики весьма немного. Все эти уравнения представляют собой линейные дифференциальные уравнения с частными производными 2-го порядка одной неизвестной функции, коэффициенты которых считают обычно постоянными величинами. Исключение представляет так называемое *телеграфное уравнение*, также линейное 2-го порядка с одной неизвестной функцией, но с переменными, вообще говоря, коэффициентами, хотя в элементарных курсах дифференциальных уравнений, касаясь его, рассматривают обычно этот простой частный случай, не упоминая зачастую даже о том, что в различных случаях практики может встретиться именно этот общий случай переменных коэффициентов, для которого, кстати сказать, мы не имеем на сегодняшний день хотя бы отчасти удовлетворительных решений, что, разумеется, не является причиной для его исключения вовсе из рассмотрения.

По поводу телеграфного уравнения надо еще заметить следующее. Задача, которая приводит к телеграфному уравнению, состоит в том, чтобы изучить распространение тока по кабелю, что приводит к интегрированию *системы линейных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями V и I двух независимых переменных x и t*, вида

$$\left.\begin{aligned} L\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}+RI=0\\ \frac{\partial I}{\partial x}+C\frac{\partial V}{\partial t}+GV=0\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где V обозначает потенциал, а I — силу тока в момент t для точки кабеля с абсциссой x, L — самоиндукцию, зависящую вообще, как и другие коэффициенты уравнений, от времени t и от положения точки на кабеле, т. е. от x, R — сопротивление в омах, C — емкость, G — проводимость изоляции на единицу длины кабеля.

Исключив после дифференцирования уравнений одну из неизвестных функций, например, I, получим для определения потенциала V в телеграфном кабеле длиной l линейное уравнение 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-(CR+LG)\frac{\partial V}{\partial t}-RGV=0, \tag{2}$$

которое и называется телеграфным уравнением. К этому уравнению присоединяется ряд *граничных условий*:

$$\left.\begin{array}{llll}\text{для} & x=0 & \text{будет} & V=E\\ \text{„} & x=l & \text{„} & V=0\end{array}\right\}\quad t \text{ произвольно} \tag{3}$$

и два *начальные условия*:

$$\left.\begin{array}{llll}\text{для} & t=0 & \text{будет} & V=0\\ \text{„} & t=0 & \text{„} & \dfrac{\partial V}{\partial t}=0\end{array}\right\}\ 0<x<l. \tag{4}$$

В книге акад. А. Н. Крылова „О некоторых уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах", Ленинград, 1932, обращено внимание на такие два обстоятельства.

После того, как найден потенциал V с помощью уравнения 2-го порядка (2) при условиях (3) и (4), надо найти еще силу тока I, с помощью, например, первого из уравнений (1), а в таком случае мы придем к формуле, пользование которой вызывает затруднение и справедливость которой вызывает сомнение. Кроме того, дифференцирование уравнений (1) и переход к уравнению (2) предполагает, что мы налагаем некоторые ограничения на функции V и I, а именно — считаем, что при всяком t существуют производные 2-го порядка от $x = 0$ до $x = l$, т. е. что в этом интервале производные 1-го порядка от тех же функций непрерывны, а этих дополнительных условий нет в первоначальной задаче интегрирования системы (1). Так же точно появляются дополнительные условия и относительно граничных и начальных условий. К этому можно было бы еще добавить, что каждое из уравнений (1), после дифференцирования, необходимого для перехода к уравнению (2), становится более общим уравнением, чем то, которое первоначально было задано.

В монографии акад. Н. М. Крылова — „Методы наближеного і символічного розв'язання диференціяльних рівнань математичної фізики й техніки", ДВОУ, 1931, исследуется именно система уравнений (1), а не уравнение (2) и идет речь не только о частном случае постоянных величин C, L, G, R, но и переменных. В указанной монографии акад. Н. М. Крылова, также как и в ряде других монографий и статей акад. Н. М. Крылова и его ученика Н. Н. Боголюбова, издающихся в большом числе на Украине и заграницей („Основні проблеми математичної фізики й техники", 1932; „О колебаниях синхронных машин", „Об устойчивости параллельной работы n синхронных машин", 1932 и т. д.), рассматривается ряд уравнений и задач математической физики и изучается приближенное их решение. Помимо этого трактуются вопросы теории интерполяции и механических квадратур, вариационного исчисления, теории почти-периодических функций, исследуются задачи так называемой ***нелинейной механики.*** Главным центром работ в области приближенного решения является исследование уже существующих и разработка новых способов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений математической физики, чтобы установить возможно меньше особых выражений для ошибки m-го приближения. При этом основное внимание сосредоточено около так называемых граничных задач математической физики; примеры подобных задач даны были в конце предшествующей главы. По поводу задач нелинейной механики, работы в области которой представляют один из главнейших пунктов исследований акад. Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, следует отметить, что первые примеры для изучения нелинейных колебаний дали еще в начале XVIII столетия наиболее сложные задачи небесной механики и, в частности, задача о трех телах, которой посвящен был специальный параграф в книге I этого курса. Однако только в конце прошлого столетия работы Пуанкаре и нашего выдающегося математика, акад. А. М. Ляпунова, установили первые математически точные методы для исследований *периодических решений произвольных дифференциальных уравнений.* Эти два ученые и являются первыми основоположниками учения о свойствах нелинейных колебаний.

В последнее время акад. Л. И. Мандельштам и проф. Папалекси применяли методы Пуанкаре и А. М. Ляпунова, пригодные для исследований чисто периодических явлений в радиотехнике. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов работали в последнее время в области почти-периодических явлений, где до сих пор не было почти никаких общих математически обоснованных методов.

Основные уравнения математической физики, как было уже упомянуто, представляют собой линейные уравнения с частными производными 2-го порядка одной функции, большею частью с постоянными коэффициентами, — следовательно общий интеграл каждого из таких уравнений, содержащий произвольные функции, можно искать по правилам главы IX для интегрирования подобных уравнений. Главное затруднение, с которым приходится иметь дело при решении уравнений математической физики, состоит в том, чтобы искомая функция, удовлетворяющая уравнению математической физики, также удовлетворяла бы ряду начальных и граничных условий, связанных с соответственным уравнением 2-го порядка: функции интеграла уравнения не будут произвольными функциями, так как должны подчиняться ряду ограничительных условий и должны обладать специальными свойствами. Существуют специальные способы для интегрирования уравнений математической физики, в задачах которой надо иметь в виду упоминавшиеся уже не раз начальные и граничные условия. Прекрасное изложение этих способов можно найти в лекциях Римана о дифференциальных уравнениях с частными производными и об их приложениях к вопросам физики, к теории теплопроводности, теории упругости и гидродинамики, в лекциях, вышедших двумя изданиями до появления большого издания со значительными дополнениями Г. Вебера, и затем в очень интересных лекциях акад. А. Н. Крылова, вышедших недавно вторым изданием, где можно найти изложение лекций по этим вопросам акад. А. Н. Коркина, способ акад. А. Н. Крылова интегрирования линейных уравнений с частными производными, с постоянными коэффициентами и с последним членом, а также ряд приложений к разнообразным техническим вопросам, и в частности — к рассмотрению вынужденных колебаний струн, стержней и балок, к теории индикатора, колебаний вала, продольных колебаний ствола орудия при выстреле, вибрации корабля при работе на нем машины, вследствие неуравновешенных сил инерции движущихся частей машины.

Упоминавшиеся здесь ***методы для решения уравнений математической физики*** можно распределить в такие группы.

Первый метод Пуассона для линейных уравнений с частными производными и постоянными коэффициентами,—при условиях для среды ограниченной. Первоисточником этого метода, если не считать работ Лагранжа, Даламбера и Даниила Бернулли, относящихся к интегрированию уравнения движения струны, когда не принимается во внимание граничных условий,—является мемуар Фурье за 1812 год, где рассматриваются условия на границах движущихся тел и, в частности,—условия для границ в теории тепла. Этот вопрос был разработан Пуассоном, написавшим в скором времени после опубликования работы Фурье 3 своих знаменитых мемуара, из которых 2 последние были напечатаны в 19-й тетради журнала Политехнической школы в Париже.

Вскоре после этого были опубликованы: „Аналитическая теория теплоты" Фурье, а впоследствии — „Математическая теория теплоты"

Пуассона, где и находится *метод Фурье* или иначе — *второй метод Пуассона* интегрирования уравнений с частными производными, для среды, ограниченной соответствующими условиями. В дальнейших параграфах изложена сущность этих методов и их применение к решению различных задач, относящихся к колебаниям стержней, к колебаниям струны, к распространению тепла в твердых телах.

Третий метод, основанный на результатах исследований Коши и на его теории так называемых *интегральных вычетов*, представляет возможность искать разложение функций, удовлетворяющих уравнениям математической физики, в ряды, подобные рядам Фурье, и дает условия для сходимости этих рядов, а также приводит к способу для нахождения коэффициентов. В упомянутой книге акад. А. Н Крылова дан прием, позволяющий усиливать быстроту сходимости подобных рядов и применимый во многих случаях для решения различных практических задач, причем при решении таких задач приходится пользоваться лишь тремя-пятью членами; кроме того возможно бывает находить производные от функций, не производя почленного дифференцирования, вообще недопустимого в этих разложениях. О способе Коши мы имели уже случай упоминать в главе III по поводу расчета изгиба балок, лежащих на упругом основании.

Далее, наконец, для решения различных задач математической физики применяется *метод интегральных уравнений*, теория которых была изложена в предшествующей главе с применением ее к решению таких важнейших задач математической физики, как задача Дирикле, задача Нейманна, и граничная задача общего вида, относящаяся к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям 2-го порядка. Результаты исследований Фредгольма, Вольтерра, Гильберта, Шмидта и других ученых применяются для решения граничных задач, связанных не только с обыкновенными дифференциальными уравнениями, но и с уравнениями с частными производными.

Не имея возможности остановиться здесь на этом подробнее, в качестве одного из примеров отметим *задачу о распространении тепла в брусе*, скажем, цилиндрической формы. Дифференциальное уравнение с частными производными, вида

$$c\sigma\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\sigma\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)-hl\theta,$$

с граничными условиями

$$\left[h\theta-k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]_{x=a}=0;\ \left[h\theta+k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]_{x=b}=0,$$

приводит к граничной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d}{du}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu+\lambda gu=0;\ \frac{d\varphi}{dt}+\lambda=0,$$

с граничными условиями формы

$$u'(a)-H_0u(a)=0;\ u'(b)+H_1u(b)=0,$$

а решение этой граничной задачи в свою очередь сведется к построению функции Грина $K(x, s)$ и к решению интегрального уравнения

$$u(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\,g(s)\,u(s)\,ds,$$

причем эта задача, для ядра вообще несимметричного, сводится к задаче с симметричным ядром посредством подстановки вида:

$$u(x)\sqrt{g(x)}=v(x);\quad K(x,s)\sqrt{g(x)\,g(s)}=L(x,s).$$

При исследованиях в области задач математической физики приходится широко пользоваться аппаратом *теории функций*, в особенности таких, как функции Бесселя, полиномы Лежандра, полиномы П. Л. Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля, ортогональные, фундаментальные функции, связанные с характеристическими числами, и т. д.

В области полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, мы имеем, в особенности в последнее время, ряд выдающихся работ акад. С. Н. Бернштейна и его многочисленных учеников.

Для разработки теории уравнений математической физики, функций, применяющихся в этой теории, аналитических методов для решения труднейших задач математической физики,—задач Дирикле, Нейманна и т. д., для разложения произвольных функций в ряды по фундаментальным функциям и для решения различных теоретических задач, связанных с теорией уравнений математической физики, важны исследования акад. В. А. Стеклова, капитальный труд которого „Основные задачи математической физики“, ч. I и ч. II (1922 — 1923) был издан за 2—3 года до смерти его автора. Уравнения математической физики рассматриваются в книге В. А. Стеклова в общем виде, когда коэффициенты линейных уравнений считаются переменными величинами, зависящими от координат x, y, z точек пространства и независящими от времени t.

Неизвестные, определяемые дифференциальными уравнениями функции, как при переменных, так и при постоянных коэффициентах, зависят в некоторых вопросах математической физики от трех, двух или одной из координат x, y, z и еще от времени t, а в других задачах, когда дифференциальные уравнения характеризуют установившиеся процессы или относятся к задачам о равновесии, искомые функции от четвертой переменной, т. е. от времени t, не зависят.

Все уравнения математической физики заключаются, как частные случаи, в таком линейном уравнении 2-го порядка:

$$a\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+b\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+d\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+e\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+$$
$$+f\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}+g\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}+h\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+$$
$$+i\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial u}{\partial y}+k\frac{\partial u}{\partial z}+lu=0,$$

где $a, b, \ldots l$ — функции от x, y, z, не содержащие t.

Если $a=0$, то мы будем иметь уравнения, соответствующие различным задачам из теории тепла. Если $a\neq 0$, $b=0$, получаем уравнения, относящиеся главным образом к теории звука, света, электричества, магнетизма, теории упругости, гидродинамики, аэродинамики. Если $a=0$, $b=0$, то уравнения этого типа охватывают область явлений, относящихся к установившимся процессам и задачам о равновесии. В этом последнем случае к дифференциальным уравнениям присоединяются только граничные условия, которым должны удовлетворять искомые функции, определяемые дифференциальными уравнениями, а в первых двух случаях, кроме граничных условий, приходится иметь в виду еще и начальные условия для $t=0$.

Главным требованием, которое предъявляется к решениям уравнений математической физики, является требование, чтобы это решение было единственным и вполне определенным для уравнения данной конкретной задачи и для начальных и граничных условий, соответствующих этой задаче.

Переходя к рассмотрению основных уравнений математической физики, кроме упоминавшегося уже телеграфного уравнения, остановимся в первую очередь на *уравнении, обнимающем явления световые, электрические и магнитные*, — явления одинакового характера и называемые поэтому *явлениями электро-магнитной теории света* и записанные на математическом языке впервые Максвеллом. Обозначая через c — *скорость света*, *через* ε — *диэлектрическую постоянную* для заданной среды, через λ — *коэффициент электропроводности*, через μ — *коэффициент электрической проницаемости*, —закон распространения электрических волн в данной среде, по теории Герца и Максвелла, характеризуют вектором U электрических сил, который определяется таким дифференциальным уравнением:

$$c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+4\pi\lambda\mu\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{5}$$

Последний член уравнения $4\pi\lambda\mu\frac{\partial U}{\partial t}$ служит для характеристики *абсорбции*—потери электрических сил с течением времени. Для определенности задачи надо, чтобы заданы были *начальные условия*, т. е. распределение электрических сил в начальный момент времени: значение U для всех точек $M(x, y, z)$ пространства и величина абсорбции, т. е. $\frac{\partial U}{\partial t}$, для $t=0$. Среда, в которой происходит явление,— беспредельна, и поэтому *граничными условиями* являются условия для функции U в бесконечно-далеких точках трехмерного пространства.

Если $\lambda=0$ и если мы обозначим

$$\frac{c^2}{\varepsilon\mu}=a^2,$$

тогда получим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{6}$$

которое называется *волновым уравнением*. Это уравнение определяет потенциал скоростей U во всякий момент t и во всякой точке $M(x, y, z)$ при движении однородной массы сжимаемой жидкости или газа, заключенной внутри движущегося в пространстве сосуда, причем сама жидкость имеет движение с потенциалом скоростей,

т. е. проекции скорости в каждой ее точке на координатные оси OX, OY, OZ представляют собой частные производные 1-го порядка от неизвестной функции U.

Постоянная a^2 зависит от физических свойств сжимаемой жидкости. Надо, чтобы искомая функция $U(x, y, z, t)$ и ее производная $\frac{\partial U}{\partial t}$ обращались в заранее заданные функции от x, y, z для начального момента $t=t_0$, например, для $t=0$. Кроме этих *двух начальных условий* будем иметь еще *одно граничное* условие на поверхности, окружающей жидкость,—уравнение, определяемое величиной нормальной составляющей заданной скорости движущейся стенки сосуда.

Если

$$\lambda=0,\ \varepsilon=1,\ \mu=1,$$

тогда

$$a=c,$$

т. е. постоянная a для сжимаемой жидкости представляет собой скорость света c, и от сжимаемой жидкости мы переходим к *свободному эфиру*,—уравнения (5) и (6) переходят тогда в уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{7}$$

уравнение волновых колебаний, распространяющихся со скоростью с независимо от длины волны,—это основное уравнение электромагнитной теории света, удовлетворяющееся каждым компонентом электрического или магнитного вектора. Оно имеет применение и в теории упругих колебаний, так как удовлетворяется каждым компонентом смещения, и в теории звука, так как удовлетворяется скоростью потенциала в совершенном газе.

Частный случай уравнения (6) — (7), когда не входит одна из пространственных координат, скажем, координата z, представляет собой уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{8}$$

которому удовлетворяют смещения в теории *поперечных колебаний мембраны*; его можно назвать *уравнением волнового движения в плоскости*.

Еще более частный случай — уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{9}$$

определяет *поперечные колебания струны или тонкого стержня*, где U обозначает величину за время t смещения на расстоянии x от начала струны. Решение этого уравнения будет определено единственным образом, если U и $\frac{\partial U}{\partial t}$ будут даны для всех значений x в интервале $0\leqslant x\leqslant l$, при $t=0$, если через l обозначить длину струны. Граничные условия определяются в зависимости от физических обстоятельств, сопровождающих явление колебаний: могут быть заделаны оба конца струны, может быть укреплен один конец, и т. д.

Частный случай уравнения (5) представляет собой *уравнение проводимости тепла:*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{1}{k}\,\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{10}$$

Этому уравнению удовлетворяет величина температуры в различных точках однородного изотронного тела, причем постоянная k пропорциональна проводимости тепла в теле.

Частный случай уравнения (5) представляет также *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0, \tag{11}$$

записываемое коротко в виде

$$\Delta U=0,$$

с помощью общеупотребительного символа

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

являющегося, между прочим, *инвариантом* от преобразования декартовых координат x, y, z.

Последнее уравнение впервые изучалось около 150 лет тому назад в одном мемуаре о кольцах Сатурна, написанном знаменитым Лапласом, по шеститомной небесной механике которого учились все лучшие астрономы — и теоретики, и практики.

Главнейшие явления, которые характеризует уравнение Лапласа,— это потенциал тяготения в областях, не занятых притягивающей материей; температура в теории теплового равновесия в твердых телах; магнитный потенциал в свободном эфире—в области магнетостатики; электростатический потенциал в однородном диэлектрике— в области электростатики; электрический потенциал в теории установившегося потока электрических токов в твердых проводниках; наконец, в гидродинамике — потенциал скорости в точках однородной жидкости, движущейся без вращения. В следующем параграфе приведем примеры тех разнообразных функций, посредством которых можно удовлетворять уравнению Лапласа, в зависимости от физических условий рассматриваемой задачи и различных ограничений, накладываемых на функцию U, которая должна удовлетворять уравнению (11).

Частный случай уравнения (11) представляет собой *уравнение*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, \tag{12}$$

встречающееся в задаче теплового равновесия в проводящем тепло цилиндре. Замена переменной t в уравнении (9) по формуле $t=\frac{i}{a}\,y$ сводит это уравнение (9) к виду (12), а замена $x=ay$ сводит (9) к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

общий интеграл которого будет

$$U=\varphi(t+y)+\psi(t-y),$$

где φ и ψ — произвольные функции, а полный интеграл напишется:

$$U=C_1+C_2(t+y)+C_3(t+y)^2+C_4(t-y)+C_5(t-y)^2,$$

или

$$U=K_1+K_2t+K_3y+K_4ty+K_5(t^2+y^2).$$

Уравнение (12) является, как известно, *основным уравнением в теории функций комплексного переменного:* действительная часть $u(x,y)$ и коэффициент $v(x,y)$ при мнимой единице функции

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

комплексного переменного

$$z=x+iy$$

должны удовлетворять *уравнениям Коши-Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

а каждая из функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ будет удовлетворять уравнению (12), общий интеграл которого записывается так:

$$U=\varphi(x+iy)+\psi(x-iy),$$

где φ и ψ — произвольные функции.

§ 96. Решение уравнения Лапласа посредством тригонометрических, Лежандровых и Бесселевых функций. Приведем в этом параграфе несколько выражений для решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0 \tag{13}$$

с помощью определенного интеграла и различных, имеющих применения в технике, функций. Этими решениями можно пользоваться для выполнения разнообразных граничных условий.

Будем искать решение $U(x,y,z)$ нашего уравнения в виде степенного ряда трех переменных для точек пространства $M(x,y,z)$, достаточно близких от начальной точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Полагая

$$x=x_0+X,\ y=y_0+Y,\ z=z_0+Z, \tag{14}$$

напишем ряд

$$U=a_0+a_1X+a_2Y+a_3Z+b_1X^2+b_2Y^2+b_3Z^2+C_1YZ+C_2ZX+C_3XY+\ldots,$$

абсолютно сходящийся, если для достаточно малого положительного a будет

$$|X|^2+|Y|^2+|Z|^2\leqslant a.$$

Ряд сходится при этом условии равномерно внутри указанной области и его можно почленно дифференцировать по X, Y, Z в точках внутри области.

Если разложение вида (14) действительно существует, то функция U будет *аналитической функцией* около (x_0,y_0,z_0). Подстановка выражения вида (14) в уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}=0 \tag{15}$$

и приравнивание нулю коэффициентов при различных степенях X, Y, Z приводит к бесконечному ряду линейных зависимостей между коэффициентами, вида

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0.$$

Если ограничимся членами n-й степени, то будем иметь всего $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ коэффициентов, между которыми будет $\frac{1}{2}n(n-1)$ зависимостей, т. е. всего будем иметь $2n+1$ независимых коэффициентов. Члены степени n разложения U будут линейными комбинациями $(2n+1)$-го линейно независимых частных решений уравнения Лапласа, причем каждое из решений будет степени n относительно X, Y, Z.

Разыскивая эти решения, замечаем, что выражение

$$(Z + iX\cos u + iY\sin u)^n$$

удовлетворяет уравнению Лапласа. Раскладывая его по синусам и косинусам кратных дуг u, получим частное решение вида

$$\alpha_0(X, Y, Z) + \beta_1(X, Y, Z)\sin u + \ldots + \alpha_n(X, Y, Z)\cos nu + \beta_n(X, Y, Z)\sin nu,$$

где функции $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_n, \beta_n$ не зависят от u; можно показать, что эти функции будут также линейно независимы и между собою. Всего имеем $2n+1$ независимых функций, удовлетворяющих уравнению (15).

По формулам Фурье имеем:

$$\alpha_0(X, Y, Z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(Z + iX\cos u + iY\sin u)^n\,du$$

$$\alpha_1(X, Y, Z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(Z + iX\cos u + iY\sin u)^n\cos u\,du;$$

. . . .

$$\alpha_n(X, Y, Z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(Z + iX\cos u + iY\sin u)^n\cos nu\,du$$

$$\beta_1(X, Y, Z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(Z + iX\cos u + iY\sin u)^n\sin u\,du$$

. . . .

$$\beta_n(X, Y, Z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(Z + iX\cos u + iY\sin u)^n\sin nu\,du.$$

Всякую линейную комбинацию $(2n+1)$ решений, пользуясь формулами Эйлера и обозначая через $R_n(u)$ рациональную функцию от e^{iu} с высшим показателем степени inu, можно написать в такой форме:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}(Z + iX\cos u + iY\sin u)^n R_n(u)\,du.$$

Следовательно, мы будем иметь решение в виде равномерно сходящегося, при достаточно малых $|X|^2 + |Y|^2 + |Z|^2$, ряда:

$$U = \int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(Z + iX\cos u + iY\sin u)^n R_n(u)\,du,$$

что можно записать в виде

$$U = \int_{-\pi}^{+\pi}F(Z + iX\cos u + iY\sin u, u)\,du.$$

Полагая $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ или относя члены $(z_0 + ix_0\cos u + iy_0\sin u)$ ко 2-й переменной, получим окончательно *решение уравнения* (13) *в виде*

$$U = \int_{-\pi}^{+\pi}f(z + ix\cos u + iy\sin u, u)\,du, \qquad (16)$$

где функция f такова, что допустимо дифференцирование под знаком интеграла по параметрам x, y, z; решение представляет аналитическую функцию внутри некоторой сферы.

Очевидно, что решение уравнения Лапласа можно представить также еще в одной из таких форм:

$$U = \int_{-\pi}^{+\pi}f(x\cos u + y\sin u + iz, u)\,du; \quad U = \int_{-\pi}^{+\pi}f(y\cos u + z\sin u + ix, u)\,du.$$

Решение (16) можно найти в книге Уиттекера и Ватсона, „Курс современного анализа", Москва—Ленинград, 1934 (перевод с английского, Cambridge, 1927. Также и для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \qquad (17)$$

данное в этой же книге решение вида

$$U = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x\sin u\cos v + y\sin u\sin v + z\cos u + ct, u, v)\,du\,dv \qquad (18)$$

выдающиеся английские математики представили в качестве общего решения.

Пример. Проверить утверждение Уиттекера и Ватсона, соответствующее исследованиям Донкина и Гобсона, утверждение о том, что „наиболее общее решение уравнения Лапласа, нулевой степени относительно x, y, z, выражается в форме":

$$U = \varphi\left(\frac{x + iy}{r + z}\right) + \psi\left(\frac{x - iy}{r + z}\right),$$

где φ и ψ — произвольные функции и $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В результате исключения четырех произвольных функций из девяти независимых между собою уравнений, получающихся дифференцированием по x, y, z, должны иметь вообще не одно лишь уравнение (13). В частности одно из полученных в результате исключения уравнений будет 1-го порядка относительно производных неизвестной функции U.

Полагая

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

можно написать для U разложение в ряд из выражений формы

$$\int_{-\pi}^{+\pi}(z + ix\cos u + iy\sin u)^n\cos mu\,du; \quad \int_{-\pi}^{+\pi}(z + ix\cos u + iy\sin u)^n\sin mu\,du \qquad (19)$$

$$0 \leqslant m \leqslant n.$$

Вводя *сферические координаты*

$$x = r\sin\varphi\cos\psi;\quad y = r\sin\varphi\sin\psi;\quad z = r\cos\varphi,$$

получим после несложных вычислений

$$\int_{-\pi}^{+\pi}(z + ix\cos u + iy\sin u)^n \cos mu\,du =$$

$$= r^n\int_{-\pi}^{+\pi}[\cos\varphi + i\sin\varphi\cos(u-\psi)]^n\cos mu\,du =$$

$$= r^n\int_{-\pi-\psi}^{+\pi-\psi}[\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\theta]^n\cos m(\psi+\theta)\,d\theta =$$

$$= r^n\cos m\psi\int_{-\pi}^{+\pi}(\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\theta)^n\cos m\theta\,d\theta,$$

ввиду того, что интегрируемое выражение является периодической функцией от θ и $(\cos\varphi+i\sin\varphi\cos\theta)^n\sin m\theta$ есть нечетная функция от θ.

Подобные вычисления приводят нас к представлению выражений (19) посредством *полиномов Лежандра:*

$$\int_{-\pi}^{+\pi}(z+ix\cos u+iy\sin u)^n\cos mu\,du = \frac{2\pi i^m n!}{(n+m)!}\, r^n P_n^m(\cos\varphi)\cos m\psi$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}(z+ix\cos u+iy\sin u)^n\sin mu\,du = \frac{2\pi i^m n!}{(n+m)!}\, r^n P_n^m(\cos\varphi)\sin m\psi,$$

и, так как

$$r^n P_n^m(\cos\varphi)\cos m\psi;\quad r^nP_n^m(\cos\varphi)\sin m\psi,$$

являющиеся многочленами относительно x, y, z, будут частными интегралами уравнения (13), то мы *получаем для решения уравнения Лапласа такое аналитическое вблизи начала координат выражение в Лежандровых функциях:*

$$U=\sum_{n=0}^{\infty} r^n\Big[A_nP_n(\cos\varphi)+\sum_{m=1}^{n}(A_n^m\cos m\psi+B_n^m\sin m\psi)P_n^m(\cos\varphi)\Big]. \qquad (20)$$

Выражение в прямых скобках, для n целого положительного, называется *поверхностной гармоникой* степени n. Результат умножения ее на r^n называется *сферической гармоникой* степени n.

Сферическая гармоника степени n удовлетворяет, очевидно, уравнению Лапласа и представляет собой однородный полином степени n относительно декартовых координат x, y, z; преобразование прямоугольных координат, при повороте осей около начала, переводит сферическую гармонику степени n опять в сферическую гармонику степени n относительно новых координат. Подробности о сферических гармониках можно найти, например, в Натуральной Философии Томсона и Тэта (том I, 1879).

Ряд (20) сходится для заданных значений r равных, например, a, при всех таких значениях φ и ψ, что

$$0\leqslant\varphi\leqslant\pi;\ -\pi\leqslant\psi\leqslant\pi;$$

он сходится абсолютно и равномерно, если $r<a$.

Постоянные, входящие в разложение (20), определяют из *граничных условий*, которым должна удовлетворять функция U. Чаще всего надо бывает определять такую функцию U, чтобы она была заданной функцией $f(\varphi, \psi)$ на поверхности заданной сферы радиуса a и чтобы функция U была аналитической функцией внутри этой сферы. В таком случае коэффициенты A_n, A_n^m, B_n^m приходится определять посредством уравнения:

$$f(\varphi,\psi)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\Big[A_nP_n(\cos\varphi)+\sum_{m=1}^{n}(A_n^m\cos m\psi+B_n^m\sin m\psi)P_n^m(\cos\varphi)\Big].$$

Полагая, что ряд сходится равномерно в указанной области изменения переменных φ и ψ, умножая на

$$P_n^m(\cos\varphi)\cos m\psi;\quad P_n^m(\cos\varphi)\sin m\psi,$$

интегрируя почленно и пользуясь свойствами функций Лежандра, мы могли бы получить такие формулы для вычисления коэффициентов:

$$2\pi a^n\cdot\frac{2}{2n+1}A_n=\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi',\psi')P_n(\cos\varphi')\sin\varphi'\,d\varphi'\,d\psi'$$

$$\pi a^n\cdot\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,A_n^m=\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi',\psi')P_n^m(\cos\varphi')\cos m\psi'\sin\varphi'd\varphi'd\psi'$$

$$\pi a^n\cdot\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,B_n^m=\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi',\psi')P_n^m(\cos\varphi')\sin m\psi'\sin\varphi'd\varphi'd\psi',$$

и тогда для точек внутри сферы, при $r<a$, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}U=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi',\psi')\,[P_n(\cos\varphi)P_n(\cos\varphi')+\\+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\varphi)P_n^m(\sin\varphi')\cos m(\psi-\psi')]\sin\varphi'd\varphi'd\psi'.\end{aligned}\right\}\qquad (21)$$

Этот ряд есть почленно интегрируемый и сходящийся равномерно для $r<a$.

Можно доказать такое *свойство полиномов Лежандра* при достаточно малых абсолютных значениях $|h|$ и $|z|$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,h^nP_n(z)=\frac{1-h^2}{(1-2hz+h^2)^{3/2}}.$$

На основании этой формулы, после небольших преобразований, решение (20) можно привести к такому виду, не содержащему явно Лежандровых функций:

$$U=\frac{a(a^2-r^2)}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(\varphi',\psi')\sin\varphi'd\varphi'd\psi'}{\{r^2-2ar\,[\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi'\cos(\psi-\psi')]+a^2\}^{3/2}}.$$

Эту же формулу можно получить также на основании *теории функций Грина*, которую можно найти, например, в упомянутой только что натуральной философии Томсона и Тэта.

В заключение параграфа представим решение уравнения Лапласа еще посредством функций, называемых *Бесселевыми коэффициентами* и представляющих собой частный случай имеющих большое применение в технике *Бесселевых функций 1-го рода.*

Бесселевым коэффициентом порядка n, где n — любое *целое положительное число или нуль*, называется функция

$$I_n(z) = \frac{z^n}{2^n n!}\left[1 - \frac{z^2}{2^2 \cdot 1!(n+1)} + \frac{z^4}{2^4 \cdot 2!(n+1)(n+2)} - \dots\right],$$

ряд для которой будет сходящимся для всех значений z. Если n *целое отрицательное число*,

$$n = -m,$$

$$(m > 0)$$

тогда

$$I_n(z) = (-1)^m I_m(z).$$

Можно доказать, что если $A_1, A_2, A_3, \dots$ обозначают коэффициенты разложения

$$\frac{2\beta(1+\varphi^2)}{(1-2\alpha\varphi-\varphi^2)+4\beta^2\varphi^2} = A_1 + A_2\varphi + A_3\varphi^2 + \dots,$$

то

$$e^{\alpha z}\sin\beta z = A_1 I_1(z) + A_2 I_2(z) + A_3 I_3(z) + \dots.$$

Отметим еще такое интересное свойство функций $I_n(z)$ для целого n:

$$I_n(y+z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} I_m(y) I_{n-m}(z).$$

Можно показать также, что

$$I_0(x^2+y^2) = I_0(x) I_0(y) - 2I_2(x) I_2(y) + 2I_4(x) I_4(y) - \dots,$$

и что

$$e^{iz\cos\varphi} = I_0(z) + 2i\cos\varphi\, I_1(z) + 2i^2\cos 2\varphi\, I_2(z) + \dots \tag{22}$$

Эту последнюю формулу мы и используем для представления решения уравнения Лапласа посредством коэффициентов Бесселя.

На основании изложенного в начале этого параграфа, мы замечаем, что частным решением изучаемого уравнения будет:

$$U_1 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{k(z+ix\cos u+iy\sin u)}\cos mu\,du,$$

где k — любое, а m — целое число. Переходя от декартовых к *цилиндрическим координатам* ρ, φ, z, на основании формул

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

последнее выражение для U перепишем так:

$$U_1 = e^{kz}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik\rho\cos(u-\varphi)}\cos mu\,du = e^{kz}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik\rho\cos v}\cos m(v+\varphi)\,dv =$$

$$= 2e^{kz}\int_0^{\pi} e^{ik\rho\cos v}\cos mv\cos m\varphi\,dv = 2e^{kz}\cos m\varphi\int_0^{\pi} e^{ik\rho\cos v}\cos mv\,dv.$$

Пользуясь теперь формулой (22), получаем, что решением уравнения Лапласа будет функция U_{I} такого вида:

$$U_{\text{I}} = 2\pi i^m e^{kz}\cos m\varphi \cdot I_m(k\rho).$$

Исходя из формулы

$$U_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{k(z+ix\cos u+iy\sin u)}\sin mu\,du,$$

можно убедиться также, что решение уравнения представляет и функция

$$U_{\text{II}} = 2\pi i^m e^{kz}\sin m\varphi \cdot I_m(k\rho).$$

Примеры. 1) (Лямэ). Пользуясь результатами Лямэ, можно показать, что если λ, μ, ν — *ортогональные* координаты, для которых линейный элемент будет выражен формулой

$$(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 = (H_1\delta\lambda)^2 + (H_2\delta\mu)^2 + (H_3\delta\nu)^2,$$

то уравнение Лапласа в этих координатах запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial\nu}\right) = 0.$$

Если λ, μ, ν — *софокусные координаты*, определяемые в виде корней уравнения относительно ε вида

$$\frac{x^2}{a^2+\varepsilon} + \frac{y^2}{b^2+\varepsilon} + \frac{z^2}{c^2+\varepsilon} = 1,$$

то, при обозначении

$$\Delta_\lambda = \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

уравнение Лапласа запишется:

$$\Delta_\lambda(\mu-\nu)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\Delta_\lambda\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right) + \Delta_\mu(\nu-\lambda)\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\Delta_\mu\frac{\partial U}{\partial\mu}\right) + \Delta_\nu(\lambda-\mu)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\Delta_\nu\frac{\partial U}{\partial\nu}\right) = 0.$$

2) (Бэтман). Если $U = f(x, y, z)$ является решением уравнения Лапласа, то решением того же уравнения будет также

$$U = \frac{1}{\sqrt{x-iy}} f\left(\frac{r^2-a^2}{2(x-iy)}, \frac{r^2+a^2}{2i(x-iy)}, \frac{az}{x-iy}\right);$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

3) (Форзайс). Уравнению Лапласа удовлетворяет функция

$$U = \varphi(ix + y\cos\alpha + z\sin\alpha) + \psi(x\cos\beta + iy + z\sin\beta) + \chi(x\cos\gamma + y\sin\gamma + iz),$$

где φ, ψ, χ — произвольные функции, а α, β, γ — произвольные постоянные.

4) (Н. М. Михальский). Уравнению Лапласа удовлетворяет функция

$$U = \Pi_1(Mx + C_2y + C_3z) + \Pi_2(Mx + C_2y - C_3z) + \Pi_3(Mx - C_2y + C_3z) +$$
$$+ \Pi_4(-Mx + C_2y + C_3z) + \Pi_5(C_1x + Ny + C_3z) + \Pi_6(C_1x + Ny - C_3z) +$$
$$\Pi_7(C_1x - Ny + C_3z) + \Pi_8(-C_1x + Ny + C_3z) + \Pi_9(C_1x + C_2y + Pz) +$$
$$+ \Pi_{10}(C_1x + C_2y - Pz) + \Pi_{11}(C_1x - C_2y + Pz) + \Pi_{12}(-C_1x + C_2y + Pz),$$

где

$$M = i\sqrt{C_2^2 + C_3^2}, \quad N = i\sqrt{C_1^2 + C_3^2}, \quad P = i\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

и C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а $\Pi_1, \Pi_2, \dots \Pi_{12}$ — произвольные функции.

§ 97. Задача о колебании струны, ее история и способы решения Пуассона и Фурье. Задача о колебании струны имела большое значение не только для развития методов решения дифференциальных уравнений математической физики, но и для развития теории функций. Остановимся немного на истории задачи о решении уравнений колебательного движения струны, чтобы отметить попутно ту большую роль, которую сыграл в этом важном вопросе Эйлер, о чем не упоминается в исторических сведениях об этой задаче в интересной книге акад. А. Н. Крылова об уравнениях математической физики. Историю рассматриваемого вопроса можно найти, например, в диссертации Римана „О возможности выражения функций при помощи тригонометрических рядов“, 1854 г.

Дело было так.

В 1747 г. Даламбер представил решение задачи об интегрировании уравнения колебательного движения струны

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{23}$$

в виде

$$y = f(x+at) + \varphi(x-at),$$

где f и φ — произвольные функции. Так как для закрепленных концов струны длиною l, когда $x=0$ и когда $x=l$, отклонение y от горизонтального положения струны будет равно нулю, то мы имеем:

$$f(at) = -\varphi(-at);\ f(l+at) = -\varphi(l-at),$$

т. е.

$$f(z) = -\varphi(-z) = -\varphi[l-(l+z)] = f(2l+z),$$

и, следовательно,

$$y = f(at+x) - f(at-x),$$

причем функция f должна быть периодической, так как

$$f(z) = f(z+2l).$$

В 1749 г. обработкой решения занялся Эйлер, который полагал, что *в начальный момент*, $t=0$, нам задано уравнение положения струны, $y=g(x)$, и задана скорость движения $\frac{\partial y}{\partial t} = h(x)$. Надо найти функцию $f(x)$ на участке $0<x<l$. Об этой функции мы знаем, что она обладает свойством

$$f(z) = f(2l+z)$$

и в интервале между $-l$ и $+l$ будет только некоторой функцией $f(z)$.

В 1753 г. произвел исследование вопроса Даниил Бернулли и нашел, что уравнению движения удовлетворяет функция

$$y = \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}.$$

Решение Даламбера, по Бернулли, не показывает обстоятельств движения; надо рассматривать ряды, расположенные по синусам и косинусам кратных дуг,—тогда обнаружатся обстоятельства движения, уловлено будет бесчисленное множество звуков струны, каждому

из которых соответствует свой член ряда. В силу этих обстоятельств общее решение задачи, по Бернулли, будет такое:

$$y = \sum_n a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi a}{l}(t-\beta_n).$$

В том же 1753 году на это решение отозвался Эйлер: во-первых, функция $f(z)$ между $-l$ и $+l$ произвольна, а во-вторых, решение Даниила Бернулли будет общее решение, *если ряд*

$$a_1\sin\frac{\pi x}{l} + a_2\sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots + \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos\frac{\pi x}{l} + b_2\cos\frac{2\pi x}{l} + \ldots$$

представляет совершенно произвольную кривую между 0 и l.

Впоследствии к решению Эйлера присоединился Лагранж, изучавший в то время колебания невесомой нити с грузами.

В 1807 г. ответ на задачу Эйлера дал Фурье: произвольную функцию $f(x)$ можно представить в виде ряда

$$f(x) = \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \ldots + a_1\sin x + a_2\sin 2x + \ldots,$$

причем коэффициенты a_n, b_n определяются по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx;\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

В 1811—12 гг. появились исследования Фурье, в которых идет речь об условиях на границах движущихся тел и о тех условиях для этих границ, какие дает теория тепла.

Через 3 года после этого Пуассон закончил один из своих мемуаров о распространении тепла в твердых телах и впоследствии напечатал 2 работы об этом в 12-й тетради „Journal de l'école Polytechnique“ за 1823 г. В 1822 г. печатается „Théorie analytique de la Chaleur“ Фурье, имевшая первостепенное значение; в 1835 г. появляется „Théorie mathématique de la chaleur“ Пуассона, где метод Фурье получает дальнейшую разработку.

В 19-й тетради „Journal de l'école Polytechnique“ дана была *теорема Коши*: чтобы удовлетворить уравнению

$$\sum a\frac{\partial^{\lambda+\mu+\ldots+\tau}u}{\partial x^\lambda\partial y^\mu\ldots\partial t^\tau} = 0, \tag{24}$$

и начальным условиям: для $t=0$ должно быть

$$u = f_1(x,y,z,\ldots);\ \frac{\partial u}{\partial t} = f_2(x,y,z,\ldots);\ldots\frac{\partial^{p-1}u}{\partial t^{p-1}} = f_p(x,y,z,\ldots),$$

то надо поступать так:

1) в каждом члене предложенного дифференциального уравнения заменить число λ дифференцирований по x множителем $(\alpha\sqrt{-1})^\lambda$, число μ дифференцирований по y множителем $(\beta\sqrt{-1})^\mu, \ldots$ и т. д., но этого не делать относительно главной переменной t, и число дифференцирований по t заменить множителем $\frac{d^\tau T}{dt^\tau}$. Таким образом составится обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с перемен-

ною независимою t и неизвестною функцией T, порядка p, где p есть наивысшее число дифференцирований по t. Это уравнение будет

$$\sum a(\alpha\sqrt{-1})^{\lambda}(\beta\sqrt{-1})^{\mu}\ldots\frac{d^{\tau}T}{dt^{\tau}}=0;$$

2) найти его общий интеграл по известным правилам;

3) взять p частных решений этого уравнения

$$T_1, T_2, \ldots T_p,$$

таких, что производная порядка $(k-1)$ каждого решения T_k при $t=0$ есть 1, производные же остальных порядков от нулевого до $(p-1)$-го суть нули;

4) подставить эти величины $T_1, T_2, \ldots T_p$ в формулу

$$u=\frac{1}{(2\pi)^n}\iint\ldots\int\int_{-\infty}^{+\infty}T_1e^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}}\ldots f_1(\xi,\eta,\zeta\ldots)\,d\alpha d\beta\ldots d\xi d\eta\ldots+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^n}\iint\ldots\int\int_{-\infty}^{+\infty}T_pe^{\alpha(x-\xi)\sqrt{-1}}e^{\beta(y-\eta)\sqrt{-1}}\ldots f_p(\xi,\eta,\zeta,\ldots)\,d\alpha d\beta\ldots d\xi d\eta,$$

— тогда получится величина u, удовлетворяющая как предложенному уравнению, так и начальным условиям.

Если корни $\omega_1, \ldots \omega_p$ уравнения

$$\sum a\alpha^{\lambda}\beta^{\mu}\ldots\omega^{\tau}=0 \qquad (25)$$

не равны между собою, то общая величина T определится по формуле

$$T=C_1e^{\omega_1 t}+\ldots+C_pe^{\omega_p t},$$

а величины постоянных для решения T_k — системою уравнений

$$\begin{gathered}C_1+C_2+\ldots+C_k=0\\ \omega_1C_1+\omega_2C_2+\ldots+\omega_pC_p=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \omega_1^{k-1}C_1+\omega_2^{k-1}C_2+\ldots+\omega_p^{k-1}C_p=1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \omega_1^{p-1}C_1+\omega_2^{p-1}C_2+\ldots+\omega_p^{p-1}C_p=0.\end{gathered}$$

Вспомним здесь, кстати, такие *правила для решения линейного однородного уравнения* (24): 1) всякое решение линейного уравнения без последнего члена можно умножить на произвольные постоянные,— произведение будет также решением; 2) сумма нескольких решений уравнения без последнего члена будет также решением; 3) подобно тому, как для решения обыкновенного однородного дифференциального уравнения любого порядка употребляется подстановка $y=e^{\alpha x}$, так и для уравнения (24) употребляется *подстановка Эйлера.*[1]

$$u=e^{\alpha x+\beta y+\ldots+\omega t},$$

[1] Вспомогательные обыкновенные уравнения, аналогично обыкновенному уравнению Коши в его способе интегрирования линейных уравнений с частными производными

что, по сокращении на множитель $e^{\alpha x+\ldots+\omega t}$, приводит к алгебраическому уравнению (25). *Для решения линейного неоднородного уравнения,* с правой частью $f(x, y, z, \ldots t)$ и неизвестной функцией v, найдя частное его решение v_1, сведем решение задачи к интегрированию однородного уравнения (24) с неизвестной функцией u, посредством подставки

$$v=u+v_1.$$

В 1826 г. Коши принялся за доказательство теоремы о представлении периодической функции $f(z)$ в виде ряда, рассматривая комплексную переменную $z=x+iy$. По Коши выходило, что для всякого y функция $f(x+iy)$ должна быть конечной. В 1829 г. Дирикле исправил исследования Коши. По Дирикле рассматривается функция $\varphi(x+iy)$, конечная для всех $y>0$, причем для $y=0$ функция $\varphi(x+iy)$ должна равняться данной периодической функции $f(x)$.

Дирикле в своих исследованиях рассматривал 2 класса рядов: 1) ряды сходящиеся, если все члены сделать положительными, и сумма ряда не зависит от порядка членов; 2) ряды расходящиеся, если все члены сделать положительными, и сумма зависит от порядка членов. *Теоремы, полученные Дирикле,* коротко можно формулировать так:

$$0<c\leqslant\frac{\pi}{2};\ \int_0^c\varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}\varphi(0)$$

$$0<b<c\leqslant\frac{\pi}{2};\ \int_0^c\varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

если $\varphi(\beta)$ от b к c или постоянно возрастает, или постоянно убывает.

Если f не переходит ∞ раз от возрастания к убыванию или наоборот, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}d\alpha$$

разлагается на конечное число членов, из которых один стремится к $\frac{1}{2}f(x+0)$, другой — к $\frac{1}{2}f(x-0)$, а остальные — к нулю при $n\to\infty$. В результате исследований Дирикле выходит, что всякая функция с периодом 2π может быть представлена в виде тригонометрического ряда, если она: 1) интегрируема, 2) не имеет ∞ числа *maxima* и *minima*, и 3) в точках разрыва принимает значение, равное полусумме значений, полученных с обеих сторон от точек разрыва.

К этим датам истории задачи о колебательном движении струны, а вместе с тем — и истории развития теории интегрирования уравнений математической физики и развития теории функций, остается присоединить последние даты — 1854 и 1860—62 г., когда Риман читал свои знаменитые лекции об уравнениях с частными производными и их приложениях для решения различных вопросов физики.

высшего порядка одной функции при постоянных коэффициентах, а также применение подстановки Эйлера, читатель может найти в указанных во вступлении к главе X двух работах проф. Н. М. Михальского, где речь идет о разыскании частных решений уравнений с частными производными любого порядка, нелинейных, при нескольких неизвестных функциях.

Около 60 лет тому назад вышло второе издание этих лекций, всего в 328 страниц, а последнее двухтомное издание Мизеса — в 1779 страниц (1927—1930 гг.), „как седьмое издание Риман-Веберовых частных дифференциальных уравнений математической физики", в котором приняло участие 18 профессоров и академиков, далеко не напоминает первоначального оригинала: достаточно уже того, что к нему приложены 4 страницы опечаток, указанных преимущественно двумя профессорами из Вены к первым 670 страницам 1-го тома.

Решение задачи о колебании струны по первому способу Пуассона состоит в следующем.

Написавши общий интеграл Даламбера для уравнения (23),

$$y = f(x + at) + \varphi(x - at),$$

будем определять функции f и φ таким образом, чтобы удовлетворить начальным условиям,

$$y = f_1(x) \text{ и } \frac{\partial y}{\partial t} = f_2(x) \text{ для } t = 0,$$

и граничным условиям

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \text{ для } x = 0 \\ y = 0 \text{ для } x = l \end{array}\right\} \text{ при всяком } t,$$

причем $f_1(x)$ и $f_2(x)$ считаются функциями, заданными в промежутке от $x = -\infty$ до $x = +\infty$.

По способу Коши, указанному в этом параграфе и в главе IX, ищем функцию вида

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T_1 e^{\alpha(x-\xi)i} f_1(\xi)\, d\xi d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T_2 e^{\alpha(x-\xi)i} f_2(\xi)\, d\xi d\alpha,$$

где T_1 и T_2 являются частными интегралами обыкновенного уравнения

$$\frac{d^2T}{dt^2} + a^2\alpha^2 T = 0.$$

Так как общий интеграл этого уравнения будет

$$T = C_1 \cos a\alpha t + C_2 \sin a\alpha t,$$

то фундаментальные решения Коши T_1 и T_2, определяемые для $t = 0$ из условий

$$T_1(0) = 1; \quad \frac{dT_1(0)}{dt} = 0$$

$$T_2(0) = 0; \quad \frac{dT_2(0)}{dt} = 1,$$

будут:

$$T_1 = \cos a\alpha t; \quad T_2 = \frac{1}{a\alpha}\sin a\alpha t,$$

т. е.

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos a\alpha t \cdot e^{i\alpha(x-\xi)} f_1(\xi)\, d\xi d\alpha + \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\alpha t}{\alpha} e^{i\alpha(x-\xi)} f_2(\xi)\, d\xi d\alpha.$$

Так как функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ заданы только внутри промежутка от $\xi = 0$ до $\xi = l$, то, для нахождения этих функций вне указанного промежутка, полагаем

$$\xi - x = z,$$

тогда $d\xi = dz$, а пределы определенных интегралов остаются без изменения:

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos a\alpha t \cdot e^{-i\alpha z} f_1(x + z)\, dz d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\alpha t}{\alpha} e^{-i\alpha z} f_2(x + z)\, dz d\alpha,$$

или:

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} \cos a\alpha t \cdot \cos \alpha z\, [f_1(x + z) + f_1(x - z)]\, dz d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin a\alpha t}{\alpha} \cdot \cos \alpha z\, [f_2(x + z) + f_2(x - z)]\, dz d\alpha,$$

так как подинтегральная функция относительно α с членами $\sin \alpha z$ будет нечетная и для пределов α от $-\infty$ до $+\infty$ интегралы с такими членами будут нули.

Чтобы выполнялось граничное условие $y = 0$ для $x = 0$, надо, чтобы обращались в нуль члены в прямых скобках под знаками интегралов, а это дает равенства:

$$f_1(z) + f_1(-z) = 0; \qquad f_2(z) + f_2(-z) = 0.$$

Второе граничное условие, $y = 0$ для $x = l$, дает:

$$f_1(l + z) + f_1(l - z) = 0; \quad f_2(l + z) + f_2(l - z) = 0.$$

Эти две пары условий для функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, заданных от 0 до l, определяют их величины и для всех положительных и отрицательных значений аргумента, от $-\infty$ до $+\infty$.

Для вычисления интегралов:

$$\int_{\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha\xi} f_1(\xi)\, d\xi; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha\xi} f_2(\xi)\, d\xi,$$

будем искать предел разности интегралов, полученных заменой величины h в интегралах

$$\varphi_1(h) = \int_0^{\infty} e^{-hz} f_1(z)\, dz; \qquad \psi_1(h) = \int_0^{-\infty} e^{hz} f_1(z)\, dz,$$

а потом—в интегралах

$$\varphi_2(h) = \int_0^{\infty} e^{-hz} f_2(z)\, dz; \qquad \psi_2(h) = \int_0^{-\infty} e^{-hz} f_2(z)\, dz$$

соответственно на такие величины:

$$\varphi_1(h);\quad h = i\alpha + \varepsilon;\quad \psi_1(h);\quad h = -i\alpha + \varepsilon,$$

где ε — бесконечно-малая. Для предела, например, 1-й из указанных разностей имеем:

$$\lim\left[\varphi_1(i\alpha+\varepsilon) - \psi_1(-i\alpha+\varepsilon)\right] = \int_0^{\infty} e^{-i\alpha z} f_1(z)\,dz - \int_0^{-\infty} e^{-i\alpha z} f_1(z)\,dz =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z} f_1(z)\,dz.$$

Умножая уравнение

$$f_1(z) + f_1(-z) = 0$$

на $e^{-hz}\,dz$ и интегрируя от 0 до ∞, получим $\varphi_1(h) - \psi_1(h) = 0$:

$$\varphi_1(h) = \int_0^{\infty} e^{-hz} f_1(z)\,dz = -\int_0^{\infty} e^{-hz} f_1(-z)\,dz =$$
$$= \int_0^{-\infty} e^{hz} f_1(z)\,dz = \psi_1(h).$$

Умножая уравнение

$$f_1(l+z) + f_1(l-z) = 0$$

на $e^{-hz}\,dz$ и интегрируя от 0 до ∞, делая затем замену $l + z = y_1$, и замену $l - z = y_2$, получим окончательно

$$e^{hl}\varphi_1(h) - e^{-hl}\psi_1(h) = e^{hl}\int_0^{l} e^{-hz} f_1(z)\,dz - e^{-hl}\int_0^{l} e^{hz} f_1(z)\,dz$$
$$\varphi_1(h) - \psi_1(h) = 0,$$

т. е.

$$\varphi_1(h) = \psi_1(h) = \frac{e^{hl}\int_0^{l} e^{-hz} f_1(z)\,dz - e^{-hl}\int_0^{l} e^{hz} f(z)\,dz}{e^{hl} - e^{-hl}}.$$

Рассматривая теперь $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z} f_1(z)\,dz$ как предел разности

$$\varphi_1(\varepsilon + i\alpha) - \psi_1(\varepsilon - i\alpha),$$

найдем, что он равен нулю для всех величин α, кроме тех, для которых

$$e^{i\alpha l} - e^{-i\alpha l} = 0, \text{ т. е. } 2i\sin\alpha l = 0,$$

что дает

$$\alpha l = k\pi,$$

где k — число целое — положительное, отрицательное или нуль. Делая замену $\alpha = \frac{k\pi}{l} + \alpha'$, где α' — бесконечно малое, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha\xi} f_1(\xi)\,d\xi = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \lim\left[\frac{e^{k\pi i}\int_0^{l} e^{-\frac{k\pi}{l}zi} f_1(z)\,dz - e^{-k\pi i}\int_0^{l} e^{\frac{k\pi}{l}zi} f_1(z)\,dz}{l\,e^{k\pi i} + l\,e^{-k\pi i}}\right]\cdot\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + \alpha'^2}.$$

Умножая далее на $e^{\alpha x i}\cos a\alpha t\,d\alpha$ и интегрируя по α от $-\infty$ до $+\infty$, считая, что $\alpha = \frac{k\pi}{l} + \alpha'$, получим после некоторых вычислений:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos a\alpha t\cdot e^{i\alpha(x-\xi)} f_1(\xi)\,d\xi\,d\alpha =$$
$$= -\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \cos a\frac{k\pi}{l}t\left(\cos\frac{k\pi}{l}x + i\sin\frac{k\pi}{l}x\right)\frac{i}{l}\cdot\int_0^{l} f_1(z)\sin\frac{k\pi z}{l}\,dz,$$

так как

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_2}\frac{2\varepsilon\,d\alpha'}{\varepsilon+\alpha'^2} = 2\pi;\quad e^{i\frac{k\pi}{l}x} = \cos\frac{k\pi x}{l} + i\sin\frac{k\pi x}{l};\quad e^{ik\pi} = (-1)^k.$$

Собирая члены бесконечного ряда с $+k$ и с $-k$, будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos a\alpha t\cdot e^{i\alpha(x-\xi)} f_1(\xi)\,d\xi\,d\alpha =$$
$$= \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} \cos\frac{ak\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\int_0^{l} f_1(z)\sin\frac{k\pi z}{l}\,dz.$$

Суммирование в правой части начато от $k = 1$, так как для $k = 0$ коэффициент перед интегралом будет равен нулю.

Подобным же путем можно найти

$$\frac{1}{2a\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\alpha t}{\alpha} e^{i\alpha(x-\xi)} f_2(\xi)\,d\xi\,d\alpha =$$
$$= \frac{2}{a\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\int_0^{l} f_2(z)\sin\frac{k\pi z}{l}\,dz,$$

и окончательно будет:

$$y = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\int_0^{l} f_1(z)\sin\frac{k\pi z}{l}\,dz +$$
$$+ \frac{2}{a\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\int_0^{l} f_2(z)\sin\frac{k\pi z}{l}\,dz.$$

Это решение удовлетворяет дифференциальному уравнению (23), а также всем начальным и граничным условиям. В решении мы имеем *представление произвольно-заданной в пределах от $x = 0$ до $x = l$ функции $f_1(x)$ посредством ряда Фурье:*

$$f_1(x) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\int_0^{l} f_1(z)\sin\frac{k\pi z}{l}\,dz.$$

Для решения этой же задачи о колебательном движении струны *по методу Фурье*, или иначе — *по второму способу Пуассона* (более простому, чем первый способ Пуассона) будем искать решение в виде суммы частных решений, из которых каждое удовлетворяет граничным условиям и имеет вид произведения функции только от x, $X(x)$, и функции только от t, $T(t)$, т. е. в виде

$$y = TX + T_1X_1 + T_2X_2 + \ldots$$

Так как каждый член суммы должен удовлетворять уравнению (23), то, например, для первого члена суммы имеем:

$$\frac{\partial^2(TX)}{\partial t^2} = XT''; \frac{\partial^2(TX)}{\partial x^2} = TX'',$$

где значками указаны производные 2-го порядка. Эти уравнения вместе с (23) дают:

$$XT'' = a^2TX'', \text{ или } \frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = \text{const}.$$

Обозначая постоянную через $-b^2$, имеем:

$$T'' + a^2b^2T = 0; \qquad X'' + b^2X = 0$$
$$T = A\cos abt + B\sin abt; \qquad X = C\cos bt + D\sin bt.$$

Требование удовлетворить граничным условиям дает

$$TX(0) = 0; \; TX(l) = 0,$$

или

$$X(0) = 0, \; X(l) = 0,$$

что приводит нас к заключению:

$$C = 0; \qquad D\sin bl = 0,$$

иначе сказать:

$$\sin bl = 0, \text{ т. е. } b = \frac{k\pi}{l},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ до ∞, причем можно ограничиться только положительными числами для корней b уравнения $\sin bl = 0$, так как решения для отрицательных корней будут линейно зависимы от остальных. Имеем:

$$X_k = D_k \sin\frac{k\pi x}{l}; \; T_k = A_k\cos\frac{ak\pi t}{l} \; B_k \sin\frac{ak\pi t}{l},$$

и поэтому

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} A_kD_k \cos\frac{ak\pi t}{t}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} B_kD_k \sin\frac{ak\pi t}{l}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где суммирование начато с $k = 1$, так как для $k = 0$ два члена будут нулями, и где A_kD_k, B_kD_k — ничем пока не ограниченные постоянные. Обозначая $A_kD_k = C_k$ и $B_kD_k = K_k$, имеем:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\cos\frac{ak\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} K_k\sin\frac{ak\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (26)$$

Постоянные C_k и K_k вычислим с помощью начальных условий. Полагая $t = 0$, имеем

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

т. е. коэффициенты определятся по известному способу нахождения коэффициентов при разложении функции в тригонометрические ряды: умножив обе части на $\sin\frac{k\pi x}{l}dx$, интегрируя от 0 до l и принимая во внимание, что

$$\int_0^l \sin\frac{mkx}{l}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx = 0, \text{ для } m \neq kx,$$

$$\int_0^l \sin\frac{mkx}{l}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \int_0^l \sin^2\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_0^l\left(1 - \cos\frac{2k\pi x}{l}\right)dx = \frac{l}{2}, \text{ для } m = k,$$

найдем

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi.$$

Дифференцируя (26) по t и полагая затем $t = 0$, получим:

$$f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{ak\pi}{l}K_k\sin\frac{k\pi x}{l},$$

и, следовательно, аналогичным путем приходим к формуле для K_k:

$$K_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^l f_2(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi.$$

Таким образом получаем то же самое решение, которое мы имеем и по первому способу:

$$y = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{ak\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\int_0^l f_1(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi +$$
$$+ \frac{2}{a\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{ak\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\int_0^l f_2(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi.$$

Хотя этот метод и более прост, чем первый, но зато теоретическое доказательство окончательной формулы в первом случае более строгое, чем во втором: для почленного дифференцирования, которое мы здесь допускали, надо быть уверенным, что бесконечный ряд есть равномерно сходящийся, и определение коэффициентов C_k и K_k возможно лишь при этом допущении. Что же касается применения способа на практике (когда, между прочим, приходится брать только несколько первых членов ряда), то удобнее пользоваться этим вторым способом, не пропуская ни одного корня *характеристического уравнения*, которое у нас было $\sin bl = 0$: справедливость окончательной формулы в общем случае доказывается более строго теоретически.

Число колебаний струны в 1 сек. определяет высоту звука, или иначе—его тон. Если от струны отделить ее n-ую часть и закрепить, то новая струна длиной $\frac{l}{n}$ будет в секунду совершать число колебаний в n раз большее, чем струна длиной l. Разделивши струну пополам, будем иметь новую струну длиной $\frac{1}{2}l$, которая будет иметь октаву тона струны длиной l. Для струны длиной $\frac{1}{4}l$ будем иметь двойную октаву, для струны в $\frac{1}{8}l$ получим тройную октаву, для $\frac{4}{5}l$ — терцию, для $\frac{2}{3}l$ — квинту первоначального тона. Квинта с ее терцией, квинтой и октавой составляет мажорный аккорд. Каждому члену ряда

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots$$

соответствует свой звук, определенного тона с определенным числом колебаний в секунду.

Пример (А. Н. Крылов). Начальное отклонение струны от горизонтального положения составляет вместе с этим последним равнобедренный треугольник с высотою β и с основанием l. Тогда имеем:

$$1)\ f_1(x) = \frac{2\beta}{l}\cdot x \text{ в интервале } \left(0, \frac{l}{2}\right);$$

$$2)\ f_1(x) = 2\beta - \frac{2\beta}{l}x \text{ в интервале } \left(\frac{l}{2}, l\right).$$

Вычисляя соответствующие итенгралы с границами $0, \frac{l}{2}$ и $\frac{l}{2}, l$, найдем коэффициенты

$$A_k = \frac{8\beta}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}, \text{ т. е. } A_{2i} = 0;\quad A_{2i+1} = (-1)^i\frac{8\beta}{(2i+1)^2\pi^2},$$

и тогда:

$$y(x, t) = \frac{8\beta}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi at}{l}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi at}{l}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi at}{l}\sin\frac{5\pi x}{l} - \dots\right].$$

Тон первого члена—основной, 2-го—октава квинты, 3-го—двойная октава терции, и т. д.

Граничные и начальные условия уравнения (23) могут иметь и другой вид в зависимости от физических свойств явления, характеризуемого уравнением (23),—изложенные способы решения остаются без существенных изменений.

Например, уравнение (23) с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \text{ для } x = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= f(t) \text{ для } x = l \end{aligned}\right\} \text{ при всяком } t$$

встречается в теории колебания упругого цилиндрического стержня, один конец которого закреплен, а другой, с некоторой массой, оттягивается и предоставляется самому себе,—колебания такого рода встречаются в теории пружин.[1]

[1] В статье известного французского балистика Шарбонье, в Mémorial de l'Artillérie française t. III, 1924, даны 2 его способа решения этой задачи. Один вовсе не приводит к цели, так как формулу вида

$$f(y) = e^{-ky}\int e^{ky}\,[A + f'(y-2l) - kf(y-2l)]dy + ce^{-ky}$$

§ 98. Интеграл Пуассона для волнового уравнения, функции Матьюо, колебания мембран.

Для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

Пуассоном дан был больше чем 110 лет тому назад интеграл $U(x, y, z, t)$, обращающийся при $t = 0$ в заранее заданную функцию $f_1(x, y, z)$ и обращающий производную $\frac{\partial U}{\partial t}$, для $t = 0$, в заранее заданную функцию $f_2(x, y, z)$.

По изложенной в предшествующем параграфе теореме Коши, будем интегрировать обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2T}{dt^2} = a^2[(\alpha i)^2 + (\beta i)^2 + (\gamma i)^2]\,T,$$

или

$$\frac{d^2T}{dt^2} + a^2r^2T = 0 \qquad (r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Имеем:

$$T = A\cos art + B\sin art.$$

Фундаментальные частные решения T_1, T_2 найдем из условий

$$T_1(0) = 1;\ \frac{dT_1(0)}{dt} = 0; \qquad T_2(0) = 0;\ \frac{dT_2(0)}{dt} = 1,$$

которые дают для

$$T_1 = A_1\cos art + B_1\sin art; \qquad T_2 = A_2\cos art + B_2\sin art$$

такие значения:

$$A_1 = 1,\ B_1 = 0;\ A_2 = 0;\ B_2 = \frac{1}{ar}$$

$$T_1 = \cos art; \quad T_2 = \frac{1}{ar}\sin art,$$

и по теореме Коши имеем:

$$U = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos art\cdot e^{i\alpha(x-\xi)}\cdot e^{i\beta(y-\eta)}\cdot e^{i\gamma(z-\zeta)} f_1(\xi,\eta,\zeta)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^3}\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{\sin art}{ar}\,e^{i\alpha(x-\xi)}\cdot e^{i\beta(y-\eta)}\cdot e^{i\gamma(z-\zeta)} f_2(\xi,\eta,\zeta)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \quad (27)$$

нельзя считать решением обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$\frac{df(y)}{dy} + kf(y) = A + \frac{df(y-2l)}{d(y-2l)} - kf(y-2l),$$

а второй способ приводит к ряду со сложными коэффициентами, вида

$$y(x,t) = f(t)x + \frac{1}{a^2}f''(t)\left[\frac{x^3}{3!} - \frac{l^2x}{2!}\right] + \frac{1}{a^4}f^{\mathrm{IV}}(t)\left[\frac{x^5}{5!} - \frac{l^2x^3}{2!\,3!} + \frac{5l^4x}{4!}\right] + \dots,$$

сходимость которого, при произвольно-заданной функции $f(t)$, не изучена. Для решения задачи следовало бы принять во внимание результаты исследований Пуассона, Фурье, Коши или лекции Римана.

Шестикратные интегралы можно заменить двойными, пользуясь такой *формулой Пуассона* для перехода от двойного интеграла к однократному:

$$\int_0^{\pi} du \int_0^{2\pi} (\alpha \sin u \cos v + \beta \sin u \sin v + \gamma \cos u) \sin u\, dv = 2\pi \int_{-1}^{+1} f(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot z)\, dz. \quad (28)$$

Эта формула получается так.

Обозначая $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ и пользуясь известными формулами перехода от сферических координат r, φ, ψ к декартовым α, β, γ:

$$\alpha = r \sin\varphi \cos\psi, \quad \beta = r \sin\varphi \sin\psi, \quad \gamma = r\cos\varphi,$$

легко найдем, что

$$\alpha \sin u \cos v + \beta \sin u \sin v + \gamma \cos u =$$
$$= r[\cos u \cos\varphi + \sin u \sin\varphi \cos(v-\psi)] = r\cos\omega,$$

так как по формуле сферической тригонометрии имеем для расстояния AB на сфере между точками A и B с координатами ψ, φ и u, v:

$$\cos AB = \cos u \cos\varphi + \sin u \sin\varphi \cos(v-\psi) = \cos\omega.$$

Таким образом можно будет получить

$$\int_0^{\pi} du \int_0^{2\pi} f(\alpha \sin u \cos v + \beta \sin u \sin v + \gamma \cos u) \sin u\, dv = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\omega) \sin u\, du\, dv =$$
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\omega)\, ds = \int_0^{\pi} d\omega \int_0^{2\pi} f(r\cos\omega) \sin\omega\, d\theta =$$
$$= 2\pi \int_0^{\pi} f(r\cos\omega)\sin\omega\, d\omega,$$

а вводя новую переменную $z = \cos\omega$, будем иметь формулу (28).

Для перехода от шестикратных интегралов к двойным, перейдем сначала к восьмикратным интегралам, заменив под знаками шестикратных интегралов $\cos art$ и $\frac{\sin art}{ar}$ через двойные интегралы по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \cos art &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t e^{iat\Omega} \sin u\, du\, dv \\ \frac{\sin art}{ar} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} du \int_0^{2\pi} t e^{iat\Omega} \sin u\, dv \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Из них первая получается дифференцированием из второй, а вторая выходит из формулы (28), если обозначить

$$\alpha \sin u \cos v + \beta \sin u \sin v + \gamma \cos u = \Omega$$

и если для $f(\Omega)$ написать $e^{iat\Omega}$, так как тогда будет:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{iat\Omega} \sin u\, du\, dv = 2\pi \int_{-1}^{+1} e^{iatrz}\, dz =$$
$$= \frac{2\pi}{iatr}(e^{iatr} - e^{-iatr}) = \frac{4\pi}{t}\,\frac{\sin atr}{ar}.$$

Подставляя в формулу (27) $\cos art$ и $\frac{\sin art}{ar}$ по формулам (29) и пользуясь формулой Фурье для функции трех переменных ξ, η, ζ, имеющих вид

$$\xi = x + at \sin u \cos v, \quad \eta = y + at \sin u \sin v, \quad \zeta = z + at\cos u,$$

получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} U = &\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x+at\sin u\cos v, y+at\sin u\sin v, z+at\cos u) t \sin u\, du\, dv + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x+at\sin u\cos v, y+at\sin u\sin v, z+at\cos u) t\sin u\, du\, dv, \end{aligned}\right. \quad (30)$$

где интегрирование от 0 до π надо выполнять для u и от 0 до 2π — для v. Этот *интеграл Пуассона содержит*, как видим, *две произвольные функции, от трех аргументов каждая.* Волновая функция $U(x, y, z, t)$, определяемая последним уравнением, характеризует *колебания неограниченной упругой среды.*

Если функции f_1 и f_2 не зависят от

$$x + at \sin u \cos v,$$

тогда, заменяя y на x и z на y, из интеграла Пуассона (30) мы получаем *интеграл уравнения*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (31)$$

содержащий 2 произвольные функции от двух аргументов каждая, вида

$$\left.\begin{aligned} U = &\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x+at\sin u\sin v,\; y+at\cos u)\, t\sin u\, du\, dv + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x+at\sin u\sin v,\; y+at\cos u)\, t\sin u\, du\, dv. \end{aligned}\right. \quad (32)$$

Заменяя в уравнении (31) z на t по формуле

$$z = iat,$$

получим *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (33)$$

для которого из Пуассонового интеграла получим *интеграл, содержащий 2 произвольные функции от двух аргументов каждая:*

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(x + iz \sin u \sin v,\ y + iz \cos u)\, z \sin u\, du\, dv +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x + iz \sin u \sin v,\ y + iz \cos u)\, z \sin u\, du\, dv.$$

Для уравнения (33), определяющего потенциал U каких угодно масс, действующих на точку, лежащую вне масс, можно написать еще такой частный интеграл, отличный от приведенных в § 96:

$$U = \iiint \frac{f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}},$$

где ξ, η, ζ обозначают координаты точки M притягивающей массы, $f(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность массы в точке M, а x, y, z — координаты точки, притягиваемой массой.

Считая далее, что функции f_1 и f_2 в интеграле (32) не содержат

$$x + at \sin u \sin v$$

и меняя y на x, а U на y, получим *интеграл уравнения*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad (34)$$

определяющий *колебательное движение неограниченной струны*:

$$y = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(x + at \cos u)\, t \sin u\, du\, dv + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x + at \cos u)\, t \sin du\, dv;$$

выполнивши интегрирование по v, мы можем заменить его интегралом вида

$$y = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f_2(x + at \cos u)\, t \sin u du + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi} f_1(x + at \cos u)\, t \sin u du,$$

а полагая затем:

$$x + at \cos u = \xi; \quad \int f_1(\xi)\, d\xi = \varphi_1(\xi); \quad \int f_2(\xi)\, d\xi = \varphi_2(\xi)$$

и далее

$$\frac{1}{2a} \varphi_2(x + at) + \frac{1}{2} f_1(x + at) = f(x + at)$$

$$-\frac{1}{2a} f_2(x - at) + \frac{1}{2} f_1(x - at) = \varphi(x - at),$$

будем иметь для уравнения (34) общий интеграл Даламбера:

$$y = f(x + at) + \varphi(x - at),$$

где f и φ — символы произвольных функций.

Уравнение (31) определяет *волновое движение в неограниченном двухмерном пространстве.* В технике это уравнение и его интеграл (32) имеют применения при изучении *колебаний мембран* разнообразной

формы, определяемой граничными условиями: мембран круглых, прямоугольных, квадратных и т. д. Подробную теорию колебательного движения мембран можно найти, например, в главе IX Теории звука Релея. В дальнейшем мы остановимся на этом подробнее.

Уравнение (31) изучается также в теории электромагнитных волн, а именно: если электрический вектор лобовой волны будет параллелен оси $0Z$ и если E будет обозначать электрическую силу, а H_x, H_y — компоненты магнитной силы, тогда основные уравнения Максвелла будут

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial y}; \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x}$$

и приводят к уравнению (31), если a надо заменить через скорость света c.

Положим, что мембрана, плоскость равновесия которой есть XOY вибрирует с частотой p; тогда, обозначая

$$U = u(x, y) \cos(pt + \varepsilon),$$

будем вместо (31) иметь такое уравнение, определяющее колебания

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{p^2}{a^2} u = 0. \qquad (35)$$

Колебания эллиптических мембран изучались 65 лет тому назад Матью. В связи с этим появились в науке так называемые *функции Матью.*

Положим, что фокусы эллиптической мембраны будут:

$$F_1(h, 0, 0); \quad F_2(-h, 0, 0).$$

Введем вещественные *софокусные координаты Лямэ* ξ, η, из которых первая ξ называется *термометрическим параметром Лямэ* и которые определяются через x и y с помощью комплексного уравнения

$$x + iy = h \operatorname{Ch}(\xi + i\eta),$$

так что

$$x = h \operatorname{Ch} \xi \cos \eta; \quad y = h \operatorname{Sh} \xi \sin \eta,$$

где $\operatorname{Ch} \xi$ и $\operatorname{Sh} \xi$ обозначают гиперболический косинус и гиперболический синус. Кривые, на которых ξ или η будут постоянны, представляют софокусные эллипсы или гиперболы. Для

$$\xi \geqslant 0 \text{ и } -\pi < \eta \leqslant \pi,$$

каждой точке $M(x, y, 0)$ на плоскости XOY будет соответствовать одна и только одна пара значений (ξ, η). Уравнение (35) преобразовывается в такое уравнение Лямэ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{h^2 p^2}{a^2} (\operatorname{Ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)\, u = 0.$$

Если мы будем искать решение этого уравнения в той форме как этого требует 2-й способ Пуассона, т. е. в форме

$$u = F(\xi) \cdot G(\eta),$$

то мы получим для этих функций $F(\xi)$ и $G(\eta)$ уравнение

$$\left[\frac{1}{F(\xi)}\cdot\frac{d^2F(\xi)}{d\xi^2}+\frac{h^2p^2}{a^2}\operatorname{Ch}^2\xi\right]+\left[\frac{1}{G(\eta)}\cdot\frac{d^2G(\eta)}{d\eta^2}-\frac{h^2p^2}{a^2}\cos^2\eta\right]=0,$$

т. е., в виду того, что ξ и η — независимые переменные, каждый член в скобках должен сводиться к постоянному числу $\pm A$, и мы получаем для определения функций $F(\xi)$ и $G(\eta)$ такие обыкновенные линейные дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2F(\xi)}{d\xi^2}+\left(\frac{h^2p^2}{a^2}\operatorname{Ch}^2\xi-A\right)F(\xi)=0;\quad \frac{d^2G(\eta)}{d\eta^2}-\left(\frac{h^2p^2}{a^2}\cos^2\eta-A\right)G(\eta)=0.$$

Небольшое изменение каждой из независимых переменных приводит к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка формы

$$\frac{d^2u}{dz^2}+(b+16c\cos 2z)\,u=0, \tag{36}$$

которое называется *уравнением Матью* и в котором постоянные b и c обозначают:

$$b=A-\frac{h^2p^2}{2a^2},\quad c=\frac{h^2p^2}{32a^2}.$$

Постоянная b должна выражаться через c: $u(x, y)$ должна быть однозначной функцией положения, не изменяющейся при возрастании η на 2π, — условие $G(\eta+2\pi)=G(\eta)$ является достаточным для определения рядов значений b через c, аналогично тому, как в теории решения уравнений

$$\frac{d^2u}{dz^2}+au=0$$

условие, чтобы это уравнение обладало периодическим решением с периодом 2π, заключается в том и только в том, чтобы a было квадратом целого числа. Если таким путем определить постоянную b, то c, а следовательно и p, определится из условия, чтобы на контуре мембраны было $F(\xi)=0$. Это даст периоды свободных колебаний мембраны.

Решение $G(z)$ уравнения (36), с условием, что оно является *периодическим решением*, представляет собой целую функцию от z. При этом возможны такие 3 случая: функция $G(z)$ есть четная относительно z, нечетная и, наконец, ни та, ни другая. В последнем случае функции

$$\frac{1}{2}[G(z)+G(-z)];\quad \frac{1}{2}[G(z)-G(-z)]$$

будут соответственно *четным и нечетным периодическими решениями уравнения Матью* и представляют *фундаментальную систему частных решений*. Те периодические решения уравнения Матью, которые будут либо четными, либо нечетными функциями, называются *функциями Матью*.

Можно доказать, что если $G(\eta)$ есть четная функция Матью, тогда она удовлетворяет линейному однородному интегральному уравнению

$$G(\eta)=\lambda\int_{-\pi}^{+\pi}e^{k\cos\eta\cos s}\,G(s)\,ds,$$

где

$$k=\sqrt{32c}.$$

Можно показать также, что функция вида

$$F(\xi)\,G(\eta)\,e^{imz}$$

представляет собой частное решение уравнения Лапласа.

Уравнение более общее чем уравнение Матью (36), вида

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\theta_0+2\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\cos 2nz\right)u=0,$$

изучалось Гилем, при определении движения лунного перигелия, и Адамсом, при изучении движения лунного узла. В астрономических приложениях постоянные $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ являются заданными, поэтому на них не накладываются ограничения, при которых решение дифференциального уравнения было бы функцией периодической. Так, например, решение уравнения Гиля, данное в его теории луны, не является периодическим.

Упругая ограниченная мембрана, краткой теорией Римана для изучения колебательных движений которой при различных ее граничных контурах заканчивается этот параграф, — представляет собой цилиндр малой высоты, образующая которого параллельна оси OZ, а сечение, перпендикулярное высоте и проходящее через ее середину, совпадает с плоскостью XOY. Плотность мембраны — постоянна и равна ρ. При этом множитель c^2 в уравнении движения

$$\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\right) \tag{37}$$

обратно пропорционален плотности мембраны, так что

$$c^2=\frac{k}{\rho}.$$

Граничное условие состоит в том, что на контуре мембраны,

$$U=0,$$

а *начальные условия* имеют вид:

$$U=f_1(x, y),\quad \frac{\partial U}{\partial t}=f_2(x, y),\ \text{для } t=0,$$

где f_1 и f_2 — заданные функции.

Для прямоугольной мембраны будет

$$0<x<a;\quad 0<y<b,$$

и ограничительные условия принимают вид:

$$U=0,\ \text{для } x=0 \text{ и } x=a$$
$$\text{„}\quad y=0\ \text{„}\ y=b,$$
$$U=f_1(x, y),\quad \frac{\partial U}{\partial t}=f_2(x, y),\ \text{для } t=0.$$

Подстановка Эйлера $U=e^{\alpha x+\beta y+\gamma t}$ дает решение

$$U=(pe^{\alpha x}+qe^{-\alpha x})(p_1e^{\beta y}+qe^{-\beta y})(e^{\gamma t}\pm e^{-\gamma t}),$$

где

$$\gamma^2=c^2(\alpha^2+\beta^2).$$

Условия $U=0$ для $x=0$ и $U=0$ для $x=a$ дают соответственно:

$$q=-p;\quad e^{2a\alpha}=1,\quad \text{т. е. } \alpha=\frac{k\pi i}{a},$$

где k — произвольное целое число. Из условий $U=0$ для $y=0$ и $U=0$ для $y=b$, получим

$$q=-p_1,\quad \beta=\frac{l\pi i}{a},$$

где l — также произвольное целое число. Выходит, что

$$\gamma=c\pi i\sqrt{\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{n^2}}$$

$$U_1=\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}\cos c\pi t\sqrt{\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{n^2}};\quad U_2=\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}\sin c\pi t\sqrt{\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}}$$

и общее решение, удовлетворяющее граничным условиям, напишется:

$$U=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}\left(A_{kl}\cos c\pi t\sqrt{\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{n^2}}+B_{kl}\sin c\pi t\sqrt{\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}}\right).$$

Начальные условия, сводящиеся к требованию, чтобы функция U и ее производная по t для $t=0$ обращались в заранее заданные функции $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, определяют коэффициенты A_{mn} и B_{mn}, если мы представим функции $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ в виде рядов по формулам Фурье, через двойные интегралы:

$$A_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f_1(\xi,\eta)\sin\frac{k\pi\xi}{a}\sin\frac{l\pi\eta}{b}\,d\xi d\eta$$

$$B_{mn}=\frac{4}{abc\pi\sqrt{\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}}}\int_0^a\int_0^b f_2(\xi,\eta)\sin\frac{k\pi\xi}{a}\sin\frac{l\pi\eta}{b}\,d\xi d\eta.$$

Величина

$$T=\frac{2}{c\sqrt{\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}}},$$

когда ряд имеет только одно задание k и l, называется *продолжительностью колебаний.*

Для заданных числовых значений k и l можно найти такие линии, в которых на мембране всегда будет $U=0$; такие линии называются *узловыми линиями, — это линии молчания мембраны.*

Пример. Если $k=1$ или $l=1$, или обе величины $=1$, то $U=0$ для

$$x=\frac{a}{k},\ \frac{2a}{k},\ \ldots\ \frac{(l-1)a}{k}$$

$$y=\frac{b}{l},\ \frac{2b}{l},\ \ldots\ \frac{(l-1)b}{l},$$

т. е. узловые линии проходят параллельно ребрам мембраны.

Для квадратной мембраны будет:

$$a=b.$$

$$T=\frac{2a}{c\sqrt{k^2+l^2}}=\frac{2a}{c\sqrt{m}};\quad m=k^2+l^2.$$

Та же самая продолжительность колебания будет для членов ряда, в которых

$$k^2+l^2=k_1^2+l_1^2=k_2^2+l_2^2=\ldots$$

Таким образом мы приходим к важной *задаче теории чисел: заданное число m представить в виде суммы двух квадратов.*

Если

$$m=k^2+l^2,$$

то

$$m=(k+il)(k-il),$$

причем каждый из двух комплексных множителей в свою очередь распадается на множители:

$$k+il=(\alpha+i\beta)^{\lambda}(\alpha_1+i\beta_1)^{\lambda_1}\ldots p^q\cdot p_1^{q_1}\ldots$$
$$k-il=(\alpha-i\beta)^{\lambda}(\alpha_1-i\beta_1)^{\lambda_1}\ldots p^q\cdot p_1^{q_1}\ldots,$$

где p, $p_1,\ldots$ обозначают простые числа формы $4n+3$.

Примеры (Риман). 1) $m=65$, т. е. $m=5\cdot 13$;

$$5=2^2+1^2=(1+2i)(1-2i);\quad 13=3^2+2^2=(3+2i)(3-2i)$$
$$k+il=(1+2i)(3+2i)=-1+8i,\quad \text{т. е. } k^2+l^2=1^2+8^2;\quad k=1,\quad l=8$$
$$k_1+il_1=(1+2i)(3-2i)=\quad 7+4i;\quad \text{т. е. } k_1^2+l_1^2=7^2+4^2;\quad k_1=7,\ l_1=4.$$

2) Найти узловые линии при $m=5$.

Имеем: $k=1$, $l=2$; $k_1=2$, $l_1=1$. Функция $U(x, y, t)$ для $m=5$ дает:

$$U=(A_{12}\cos\alpha t+B_{12}\sin\alpha t)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}+(A_{21}\cos\alpha t+B_{21}\sin\alpha t)\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a},$$

где

$$\alpha=\frac{c\pi\sqrt{5}}{a}.$$

Так как для узловых линий должно быть $U=0$ независимо от t, то функция U должна иметь форму

$$U=\varphi(t)\left(g\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}+h\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\right).$$

Преобразовывая выражение в скобках и приравнивая нулю, имеем:

$$2\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\left(g\cos\frac{\pi y}{a}+h\cos\frac{\pi x}{a}\right)c_0.$$

Первые множители дают уравнения граней мембраны, а последний представляет уравнение единственной узловой линии. В частности, для $h=0$, $g=0$, $g=-h$, $g=h$ получим 4 формы этой линии: параллельную оси x-ов через середину мембраны, параллельную оси y-ов, через середину мембраны, по диагонали от нижнего левого угла к верхнему, по диагонали от нижнего правого угла кверху.

3) $m=8$; $m=2^2+2^2$.

Уравнение узловых линий

$$\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}=0, \text{ или } \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{a}=0$$

дает, кроме ребер, две линии, уравнения которых будут:

$$x={}^1/_2 a, \quad y={}^1/_2 a.$$

Для круглой мембраны, введя полярные координаты

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi,$$

дифференциальное уравнение движения преобразуем в такое:

$$r^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial(lgr)^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right).$$

Граничные и предельные условия будут:

$$U=0 \text{ для } r=a; \quad U=f_1(r,\varphi) \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial t}=f_2(r,\varphi) \text{ для } t=0.$$

По второму способу Пуассона будем искать решение в виде

$$U=R(r).\ \Phi(\varphi).\ T(t),$$

что даст 3 обыкновенные линейные дифференциальные уравнения, определяющие соответственно $R(r)$, $\Phi(\varphi)$, $T(t)$:

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\alpha^2T=0; \quad \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+k^2\Phi=0; \quad \frac{d^2R}{d(\lg r)^2}+\left(\frac{r^2}{c^2}\alpha^2-k^2\right)R=0.$$

Фундаментальные решения для первых двух уравнений будут

$$T_1=\cos\alpha t, \quad T_2=\sin\alpha t \quad \text{и} \quad \Phi_1=\cos k\varphi, \quad \Phi_2=\sin k\varphi,$$

что приводит к частным интегралам

$$U_1=R\cos\alpha t\cos k\varphi, \quad U_2=R\cos\alpha t\sin k\varphi,$$
$$U_3=R\sin\alpha t\cos k\varphi, \quad U_4=R\sin\alpha t\sin k\varphi.$$

Чтобы функция U имела то же значение и для $\varphi=0$, и для $\varphi=2\pi$, надо чтобы k было *число целое*. Обозначая $\frac{\alpha}{c}r=s$, третье дифференциальное уравнение перепишем в виде

$$\frac{d^2R}{d(\lg s)^2}-(k^2-s^2)R=0.$$

Будем искать решение этого уравнения с переменным коэффициентом в виде степенного ряда

$$R=f_k(s)=a_0+a_1s+\ldots+a_ns^n+\ldots$$

Подстановка в дифференциальное уравнение и приравнивание нулю коэффициентов при различных степенях s, дает такую рекуррентную формулу:

$$a_n(n-k)(n+k)+a_{n-2}=0 \qquad (n=k+2,\ k+3,\ldots),$$

т. е.

$$R=f_k(s)=c_0s^k+C_1s^{k+2}+C_2s^{k+4}+\ldots+C_ms^{k+2m}+\ldots,$$

причем

$$2m\cdot 2(k+m)C_m+C_{m-1}=0.$$

Умножая последнее уравнение, определяющее C_m, на

$$(-4)^{m-1}(k+m-1)!\ (m-1)!,$$

подставляя $m=1, 2, 3,\ldots$ и складывая, получим

$$(-4)^m m!(k+m)!\ C_m=k!C_0.$$

Определяя произвольную постоянную C_0 по формуле $C_0=\frac{1}{k!}$, будем иметь такой частный интеграл:

$$R=f_k(s)=f_k\left(\frac{r\alpha}{c}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^{k+2m}}{(-4)^m m!\,(k+m)!}.$$

Граничное условие $U=0$, для $r=a$, приводит к условию, чтобы $s=\frac{a\alpha}{c}$ были корнем трансцендентного уравнения

$$f_k(s)=0,$$

или иначе

$$f_k\left(\frac{a\alpha}{c}\right)=0.$$

Можно доказать, что это уравнение имеет бесчисленное множество действительных корней и ни одного комплексного. Обозначая положительные корни через s_{k_1}, s_{k_2}, $s_{k_3},\ldots$, имеем $\alpha=\frac{c}{a}s_{kn}$ и:

$$U=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_k\left(\frac{r}{a}s_{kn}\right)\Big[A_{kn}\cos\left(\frac{c}{a}s_{kn}t\right)\cos k\varphi+B_{kn}\cos\left(\frac{c}{a}s_{kn}t\right)\sin k\varphi+$$
$$+C_{kn}\sin\left(\frac{c}{a}s_{kn}t\right)\cos k\varphi+D_{kn}\sin\left(\frac{c}{a}s_{kn}t\right)\sin k\varphi\Big].$$

Для определения коэффициентов A_{kn}, B_{kn}, C_{kn}, D_{kn} обращаемся к начальным условиям и, раскладывая заданные функции $f_1(r,\varphi)$, $f_2(r,\varphi)$ в ряды Фурье:

$$f_1(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi); \quad f_2(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}(C_k\cos k\varphi+D_k\sin k\varphi),$$

так что A_k, B_k, C_k, D_k будут известны, имеем уравнения для вычисления A_{kn}, B_{kn}, C_{kn}, D_{kn}:

$$A_k=\sum_{n=1}^{\infty}A_{kn}f_k\left(\frac{r}{a}s_{kn}\right); \quad B_k=\sum_{n=1}^{\infty}B_{kn}f_k\left(\frac{r}{a}s_{kn}\right);$$

$$C_k=\sum_{n=1}^{\infty}C_{kn}\frac{c}{a}s_{kn}f_k\left(\frac{r}{a}s_{kn}\right); \quad D_k=\sum_{n=1}^{\infty}D_{kn}\frac{c}{a}s_{kn}f_k\left(\frac{r}{a}s_{kn}\right).$$

Путь для решения таких уравнений был указан еще Лагранжем. Он дает искомые коэффициенты по формулам:

$$A_{km}\int_0^a r\left[f_k\left(\frac{r}{a}s_{km}\right)\right]^2 dr=\int_0^a A_k r\cdot f_k\left(\frac{r}{a}s_{km}\right)dr$$

$$B_{km}\int_0^a r\left[f_k\left(\frac{r}{a}s_{km}\right)\right]^2 dr=\int_0^a B_k r f_k\left(\frac{r}{a}s_{km}\right)dr$$

$$C_{km}\int_0^a r\left[f_k\left(\frac{r}{a}s_{km}\right)\right]^2 dr=\frac{a}{cs_{km}}\int_0^a C_k r\cdot f_k\left(\frac{r}{a}s_{km}\right)dr$$

$$D_{km}\int_0^a r\left[f_k\left(\frac{r}{a}s_{km}\right)\right]^2 dr=\frac{a}{cs_{km}}\int_0^a D_k r\cdot f_k\left(\frac{r}{a}s_{km}\right)dr.$$

Если окажутся нулями все коэффициенты, кроме определенного k и определенного n, тогда функция U будет периодической. Продолжительность колебания T будет:

$$T=\frac{2\pi a}{cs_{kn}}.$$

В таком случае можно искать узловые линии. С одной стороны— это будут концентрические круги

$$r=\frac{s_{k_1}}{s_{kn}}a,\quad r=\frac{s_{k_2}}{s_{kn}}a,\dots r=\frac{s_{kn-1}}{s_{kn}}a,\quad r=a,$$

а с другой стороны — они определятся из условия вида

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D},$$

что дает условие: при всяком t должно быть

$$U=\varphi(t)\cdot f_k\left(\frac{r}{a}s_{kn}\right)\cdot(g\cos k\varphi+h\sin k\varphi)=0.$$

Обозначая

$$\operatorname{tg} k\psi=-\frac{g}{h},$$

получим еще уравнения радиальных узловых линий:

$$\varphi=\psi,\quad \varphi=\psi+\frac{\pi}{k},\quad \varphi=\psi+\frac{2\pi}{k},\dots \varphi=\psi+\frac{(2k-1)\pi}{k}.$$

В том *частном случае*, когда круглая мембрана совершает только *радиальные колебания*, зависящие лишь от времени t и расстояния r от центра мембраны,

$$U=U(t,\ r),$$

дифференциальное уравнение движения (37), при независимых переменных t и $r=\sqrt{x^2+y^2}$, перепишется:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right).$$

Граничное условие будет:

$$U=0,\quad \text{для } r=a.$$

Начальные условия, например, для покоящейся в момент $t=0$ мембраны будут:

$$U=f(r)\ \text{для}\ t=0,\quad \frac{\partial U}{\partial t}=0\ \text{для}\ t=0.$$

Применяя второй способ Пуассона, для разыскания решения вида

$$U=T(t).\quad R(r),$$

будем иметь такие 2 линейные дифференциальные уравнения, определяющие $T(t)$ и $R(r)$:

$$\frac{d^2T}{dt^2}+c^2\alpha^2T=0;\quad \frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dR}{dr}+\alpha^2R=0.$$

Первое из них дает $T_1=\cos c\alpha t$, $T_2=\sin c\alpha t$ и

$$T=A\cos c\alpha t+B\sin c\alpha t.$$

Второе дифференциальное уравнение подстановкой $\alpha r=s$ сводится к виду

$$\frac{d^2R}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial R}{\partial s}+R=0,$$

т. е. представляет уравнение Бесселя, определяющее функции Бесселя 1-го и 2-го рода нулевого порядка, $I_0(s)$ и $Y_0(s)$. Поэтому

$$R(r)=CI_0(\alpha r)+DY_0(\alpha r).$$

Так как $Y_0(\alpha r)$ для $r=0$ будет ∞, то надо положить $D=0$ и, обозначая $AC=C_1$, $BC=C_2$, имеем:

$$U=I_0(\alpha r)\left[C_1\cos c\alpha t+C_2\sin c\alpha t\right].$$

Граничное условие и второе начальное условие дают:

$$I_0(\alpha a)\left[C_1\cos c\alpha t+C_2\sin c\alpha t\right]=0$$
$$I_0(\alpha r)\left[-C_1c\alpha\sin a\alpha t+C_2c\alpha\cos a\alpha t\right]=0\ \text{для}\ t=0$$
$$I_0(\alpha r)\,C_2c\alpha=0,$$

т. е. $a\alpha$ должны быть корнями Бесселевой функции $I_0(x)$:

$$I_0(x)=0\ \text{и}\ C_2=0.$$

Обозначая корни бесселевой функции $I_0'(x)$ через $\beta_1, \beta_2,\dots\beta_n,\dots$, получим

$$\alpha_1=\frac{\beta_1}{a},\quad \alpha_2=\frac{\beta_2}{a},\dots\alpha_n=\frac{\beta_n}{a};\dots$$

$$U=\sum_{k=1}^{\infty}C_{1k}I_0\left(\frac{\beta_k r}{a}\right)\cos c\alpha_k t.$$

Определим коэффициенты C_{1k}. Начальное условие для $t=0$ дает

$$f(r)=\sum_{k=1}^{\infty}C_{1k}I_0\left(\frac{\beta_k}{a}r\right).$$

Умножая обе части на $rI_0\left(\frac{\beta_i}{a}r\right)$ и интегрируя по r от 0 до a, получим:

$$\int_0^a rf(r)\,I_0\left(\frac{\beta_i}{a}r\right)dr = \sum_{k=1}^{\infty} C_{1k}\int_0^a rI_0\left(\frac{\beta_k}{a}r\right)I_0\left(\frac{\beta_i}{a}r\right)dr.$$

Так как, по свойствам функций Бесселя, будет

$$\int_0^a rI_0\left(\frac{\beta_k}{a}r\right)I_0\left(\frac{\beta_i}{a}r\right)dr \begin{cases} = 0, \text{ для } i \neq k \\ = \frac{a^2}{2}I_1^2(\beta_k), \text{ для } i = k, \end{cases}$$

то мы имеем:

$$C_{1k} = \frac{2}{a_1^2 I_1^2(\beta_k)}\int_0^a rf(r)\,I_0\left(\frac{\beta_k}{a}r\right)dr.$$

§ 99. Интеграл Лапласа для уравнения распространения тепла в неограниченной среде, распространение тепла в ограниченной среде, решение телеграфного уравнения при постоянных коэффициентах. *Распространение тепла в неограниченной среде, если теплопроводность и теплоемкость среды постоянны,* определяется уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right), \tag{38}$$

где a^2 связано с теплопроводностью и с теплоемкостью, а U обозначает температуру в момент t для точки $M(x, y, z)$ неограниченной среды. Примером такого распространения могло бы быть расхождение в эфире вселенной тепла, излучаемого солнцем, если бы солнце было неподвижно и если мы пренебрежем малостью незначительных по сравнению с солнцем планет с их спутниками.[1]

Для интегрирования уравнения (38), воспользовавшись подстановкой Эйлера

$$U = Ae^{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t},$$

будем иметь

$$A\delta e^{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t} = Aa^2 e^{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

т. е.

$$\delta = a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$
$$U = Ae^{\alpha x + \beta y + \gamma z + a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)t}.$$

Так как эта функция U есть возрастающая, а в соответствии с физическими фактами она может быть только убывающей, то надо положить

$$\alpha = i\lambda, \quad \beta = i\mu, \quad \gamma = i\nu \quad (i = \sqrt{-1}),$$

и, определивши A по формуле

$$A = \frac{1}{(2\pi)^3}e^{-i\lambda\xi}\cdot e^{-i\mu\eta}\cdot e^{-i\nu\zeta}f(\xi, \eta, \zeta)\,d\lambda d\mu d\nu d\xi d\eta d\zeta,$$

[1] Величины звезд различают по их яркости на несколько групп. Простым глазом можно видеть звезды до 7-й величины. Одну из звезд представляет собой Солнце, — это звезда 2-й величины, быстро летящая в направлении к созвездию Геркулеса и увлекающая за собой планеты со спутниками, т. е. нашу вселенную, так что из них, например, Земля летит в мировом пространстве по особой винтовой линии.

находим, согласно правилам Коши:

$$U = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int e^{-a^2\rho^2 t}\cdot e^{i\lambda(x-\xi)}\cdot e^{i\mu(y-\eta)}\cdot e^{i\nu(z-\zeta)}f(\xi, \eta, \zeta)\,d\lambda d\mu d\nu d\xi d\eta d\zeta,$$
$$\rho^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

или:

$$U = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-\xi)}\,e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu(y-\eta)}\,e^{-a^2\mu^2 t}d\mu\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu(z-\zeta)}\,e^{-a^2\nu^2 t}d\nu\right]f(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2\lambda^2}\cos nx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m}e^{-\frac{4m^2}{n^2}}; \quad \int_{\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2}dx = \sqrt{\pi} \tag{39}$$

и еще

$$e^{i\lambda(x-\xi)} = \cos\lambda(x-\xi) + i\sin\lambda(x-\xi),$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda(x-\xi)}d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda + i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\sin\lambda(x-\xi)\,d\lambda =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}};$$

интеграл, содержащий $\sin\lambda(x-\xi)$, равен нулю, так как подинтегральная функция нечетная.

Выходит, что

$$U = \frac{1}{2^3(\sqrt{\pi})^3 a^3(\sqrt{t})^3}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}e^{-\frac{(\eta-y)^2}{4a^2 t}}e^{-\frac{(\zeta-z)^2}{4a^2 t}}f(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi d\eta d\zeta.$$

Положим

$$\xi - x = 2a\sqrt{t}\cdot u; \quad \eta - y = 2a\sqrt{t}\cdot v; \quad \zeta - z = 2a\sqrt{t}\cdot w,$$

тогда будем иметь такой *интеграл Лапласа для уравнения* (38):

$$U = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^3}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2+v^2+w^2)}f(x + 2a\sqrt{t}u,\ y + 2a\sqrt{t}v,\ z + 2a\sqrt{t}w)\,du\,dv\,dw. \tag{40}$$

Для $t = 0$ мы получаем значение функции $U(x, y, z, 0)$, равное

$$\frac{1}{(\sqrt{\pi})^3}f(x, y, z)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}dv\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2}dw =$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^3}f(x, y, z)\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi} = f(x, y, z) = U(x, y, z, 0),$$

т. е. для $t = 0$ функция U обращается в произвольно заданную функцию $f(x, y, z)$.

Если U не содержит z, т. е. для *уравнения распространения тепла в двухмерном пространстве,* например — в неограниченном плоском изолированном от лучеиспускания листе:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right), \tag{41}$$

пользуясь формулой (40), получаем *интеграл*

$$U=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u^2+v^2)}f(x+2a\sqrt{t}\,u,\ y+2a\sqrt{t}\,v)\,du\,dv. \tag{42}$$

Распространение тепла определяется уравнением (41) *и для трехмерной среды*, если температура в направлении оси OZ везде одинакова. Примером может служить распространение тепла в среде, которой окружен везде одинаково нагретый тонкий стержень.

Если U не содержит и z и y, т. е. *для дифференциального уравнения распространения тепла в одномерной среде*, например — в неограниченно-длинном изолированном тонком стержне, или *в двухмерной и трехмерной средах, когда температура меняется только в одном направлении*, например—в среде, плоскости которой, перпендикулярные к оси OX, имеют равную температуру, т. е. для уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{43}$$

из формулы (42) получаем такой *интеграл*:

$$U=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}f(x+2a\sqrt{t}\,u)\,du. \tag{44}$$

Пользуясь интегралами (40), (42), (44), можно решать задачи *о распространении тепла в ограниченных трехмерных, двухмерных и одномерных средах*, применяя для этого 1-й метод Пуассона. Для практических расчетов проще однако пользоваться вторым способом Пуассона, или иначе — способом Фурье.

Рассмотрим *несколько специальных задач о распространении тепла* в ограниченных средах, применяя для решения каждой из них *различные пути* при нахождении окончательного интеграла.

I. Определим *распространение температуры в одном направлении*, вдоль оси x-ов, считая температуру одинаковой по оси y-ов и z-ов, когда

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

при условиях

$$U=0 \quad \text{для } x=0$$

$$U=f(x) \quad \text{для } t=0.$$

Из частных решений

$$U_1=T_1\cdot X_1=e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha x;\ U_2=T_2\cdot X_2=e^{-a^2\alpha^2 t}\cdot\cos\alpha x,$$

принимая во внимание граничное условие $U=0$ для $x=0$, выбираем первое, и, помноживши его на постоянную $\varphi(\alpha)\,d\alpha$, проинтегрировав от b до c, найдем:

$$U=\int_b^c e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha x\cdot\varphi(\alpha)\,d\alpha.$$

Для $t=0$ имеем:

$$\int_b^c\varphi(\alpha)\sin\alpha x\,dx=f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\sin\alpha\xi\,d\xi\int_0^\infty\sin\alpha x\,d\alpha,$$

т. е.

$$b=0,\ c=\infty;\ \varphi(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\sin\alpha\xi\,d\xi,$$

следовательно:

$$U=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}f(\xi)\,\sin\alpha x\sin\alpha\xi\,d\xi\,d\alpha,$$

или, заменяя по формуле тригонометрии произведение синусов разностью косинусов:

$$U=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\,d\xi\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\left[\cos\alpha(x-\xi)-\cos\alpha(x+\xi)\right]d\alpha.$$

Принимая во внимание первый из интегралов (39), находим:

$$U=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\xi)\cdot\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi.$$

II. *Найти интеграл уравнения*

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

при условиях

$$U=b=\text{const},\ \text{для } t=0;\quad U=b,\ \text{для } x=0.$$

Решение будет:

$$U=b.$$

III. Если имеем *начальное и граничное условие* вида

$$U=-b \ \text{для } t=0;\ U=0 \ \text{для } x=0,$$

то, полагая в задаче I $f(x)=-b$, найдем

$$U=-\frac{c}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi.$$

Вводя замену переменных в первом и во втором из этих интегралов соответственно по формулам

$$\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}=-\eta;\ \frac{x+\xi}{2a\sqrt{t}}=\eta,$$

будем иметь

$$U=-\frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}d\eta=-\frac{2c}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\eta^2}d\eta.$$

Полученный здесь интеграл вида

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}\,dx$$

встречается очень часто в различных применениях при решении задач математической физики, астрономии, теории вероятностей, математической статистики, и для него вычислены специальные таблицы. Например, в работе Jas. Burgess—On the definite integral

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$$

with extended tables of values (Transactions of the R. Soc. of Edinburgh, vol. 39, part II, № 9, 1898), для значений t от 0 до 1 даны значения с 9 знаками после запятой через каждые 0,001 значения t, а от $t=1{,}000$ до $t=3{,}000$ — с 15 знаками через каждые 0,001 значения t до 1,500 и через каждые 0,002 для t, от 1,500 до 3,000. Величина рассматриваемой функции $F(t)$ равна 0 для $t=0$, близка к единице для $t=3$, возрастает для $t>3$, но не превосходит единицы:

$$F(3)=0{,}999\,977\,909\,503\,001;\quad F(4)=0{,}999\,999\,984\,582\,742;$$

$$F(5)=0{,}999\,999\,999\,998\,463;\quad F(\infty)=1.$$

IV. *Для начальных и граничных условий* вида

$$U=0 \text{ для } t=0;\quad U=c \text{ для } x=0$$

получим решение, пользуясь результатами задачи II и III:

$$U=c\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\eta^2}\,d\eta\right).$$

Так как

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta=1,$$

то еще

$$U=\frac{2c}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta.$$

V. *Для интегрирования уравнения*

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

при условиях

$$U=\varphi(t) \text{ для } x=0;\quad U=0 \text{ для } t=0,$$

разобьем интервал для t, начиная от 0, на n равных частей, обозначим

$$\frac{t}{n}=\tau,$$

и положим, что

$$U=\varphi(0) \text{ для } 0<t\leqslant\tau;\quad U=\varphi(\tau) \text{ для } \tau<t\leqslant 2\tau;\ \ldots$$

$$U=\varphi[(n-1)\tau] \text{ для } (n-1)\tau<t\leqslant n\tau.$$

Будем рассматривать сумму

$$U=U_1+U_2+\ldots+U_n,$$

считая, что $U_k\,(k=1,\ldots n)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и условию $U=0$ для $t=0$; что же касается условия для $x=0$, то $U_k=0$, если $t<(k-1)\tau$ или $t>k\tau$ и $U_k=\varphi[(k-1)\tau]$ для $(k-1)\tau<t<k\tau$.

Далее — определим функцию $\psi(x,t)$, для $x\geqslant 0$, считая, что

$$\psi(x,t)=0, \text{ для } t\leqslant 0;\quad \psi(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta, \text{ для } t>0.$$

В таком случае $\psi[x,t-(k-1)\tau]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, для $t=0$ будет $\psi=0$, так как вторая переменная функции отрицательна, а для граничного значения $x=0$ будет $\psi=0$, когда

$$t\leqslant(k-1)\tau_n\,\psi=1 \text{ для } t>(k-1)\tau.$$

Функция же $\psi(x,t-k\tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию, а для граничного условия, при $x=0$, будет $\psi=0$, когда $t\leqslant k\tau$ и $\psi=1$, когда $t>k\tau$. Отсюда имеем U_k:

$$U_k=\varphi[(k-1)\tau]\cdot\{\psi[x,t-(k-1)\tau]-\psi[x,t-k\tau]\}.$$

Следовательно:

$$U=\sum_{k=1}^n\varphi[(k-1)\tau]\cdot\frac{\psi[x-(k-1)\tau]-\psi[x,t-k\tau]}{\tau}\cdot\tau.$$

Для $\lim n=\infty$ получим $k\tau=\vartheta$ — переменное от 0 до t и $\tau=d\vartheta$. Поэтому:

$$U=\int_0^t\varphi(\vartheta)\cdot\frac{\partial\psi(x,t-\vartheta)}{\partial t}\,d\vartheta.$$

Так как внутри интервала интегрирования величина $t-\vartheta$ положительна, то

$$\psi(x,t-\vartheta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t\vartheta}}}^\infty e^{-\eta^2 d\eta};\quad \frac{\partial\psi(x,t-\vartheta)}{\partial t}=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\cdot e^{\frac{-x^2}{4a^2(t-\vartheta)}}\cdot(t-\vartheta)^{-3/2}.$$

Окончательно имеем:

$$U=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\varphi(\vartheta)\,e^{\frac{-x^2}{4a^2(t-\vartheta)}}(t-\vartheta)^{-3/2}\,d\vartheta.$$

Эта задача исследована Риманом, в лекциях которого можно найти и другое ее решение, приводящее, конечно, к тому же самому результату.

VI. *Для решения дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

с начальным и граничным условиями вида

$$1)\ U = f(x) \text{ для } t = 0;\ 2)\ U = \varphi(t) \text{ для } x = 0,$$

будем иметь окончательный результат, соединяя ответы к задачам I и V:

$$U = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty f(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] d\xi + x \int_0^t \varphi(\vartheta) e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\vartheta)}} (t-\vartheta)^{-3/2} d\vartheta \right\}.$$

Рассмотренные задачи имеют применения *для вычисления температуры земли,* принимая во внимание, что температура на поверхности земли есть периодическая функция времени:

$$\varphi(t \pm k\, 2g) = \varphi(t).$$

Раскладывая периодическую функцию $\varphi(t)$ по формуле Фурье:

$$\varphi(t) = \sum_m \left(a_m \cos m \frac{\pi t}{g} + b_m \sin m \frac{\pi t}{g} \right)$$

и полагая для упрощений

$$a_m = c_m \cos \beta_m;\ b_m = c_m \sin \beta_m;\ \frac{\pi}{g} = \alpha,$$

будем иметь

$$\varphi(t) = \sum_m c_m \cos(m\alpha t - \beta_m).$$

Если начальная температура на поверхности земли будет 0, то, ограничиваясь записью отдельного m-го члена в функции $\varphi(t)$, будем иметь дифференциальное уравнение и граничные условия:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2};\ U = 0 \text{ для } t = 0;\ U = c_m \cos(m\alpha t - \beta_m) \text{ для } x = 0.$$

Тогда:

$$U_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} c_m \left[\cos(m\alpha t - \beta_m) \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty e^{-\eta^2} \cos \frac{m\alpha x^2}{4a^2\eta^2} d\eta + \sin(m\alpha t - \beta_m) \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty e^{-\eta^2} \sin \frac{m\alpha x^2}{4a^2\eta^2} d\eta \right].$$

Если в начальный момент будет

$$t = 0;\ U = f(x),$$

тогда присоединится к окончательному ответу еще член

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] d\xi = \frac{M}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] d\xi =$$

$$= M \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\eta^2} d\eta,$$

где M обозначает среднее значение функции $f(\xi)$.

VII. Для изучения *температуры шара, зависящей от времени и расстояния от центра,* считая начало координат в центре шара, для дифференциального уравнения распространения тепла

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right),$$

решение которого имеет форму

$$U = F(r, t),$$

где обозначено

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

будем иметь такие преобразования:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x};\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2},$$

$$r \frac{\partial r}{\partial x} = x;\quad r \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 = 1;\quad \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 = 1$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r},$$

и уравнение переходит в такое:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right).$$

Так как

$$\frac{\partial (rU)}{\partial t} = r \frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left[r \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial r} \right] = a^2 \left[\frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2} \right],$$

то имеем окончательно такое дифференциальное уравнение с начальным и граничным условиями:

$$\frac{\partial (rU)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2},$$

$$U = f(r) \text{ для } t = 0;\quad U = \varphi(t) \text{ для } r = c = \text{const}.$$

Полагая $rU = V$, получим

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$

$$V = rf(r) \text{ для } t = 0;\quad V = c\varphi(t) \text{ для } r = c.$$

Задача аналогична рассмотренной раньше. Границ для r надо рассматривать две, 0 и c, изучая решение

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

с граничными условиями для V_1, V_2, V_3 вида:

$$\begin{array}{llll} \text{для } t=0, & V_1 = rf(r), & V_2 = 0, & V_3 = 0 \\ \text{для } r=0, & V_1 = 0, & V_2 = c\psi(t), & V_3 = 0 \\ \text{для } r=c, & V_1 = 0, & V_2 = 0, & V_3 = c\varphi(t). \end{array}$$

Найдя V_2, положим $c-r$ вместо r и $c\varphi(t)$ вместо $c\psi(t)$, — будем иметь V_3.

VIII. Положим, что *однородный изолированный стержень длиною* λ *в начальный момент* $t=0$ *имеет температуру* $f(x)$; *в одном конце, при* $x=0$, *будет температура* $U=0$, *а в другом конце его, при* $x=\lambda$, *имеет место лучеиспускание в окружающую среду.* Уравнения распределения тепла будут:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$U = f(x) \text{ для } t=0; \quad U=0 \text{ для } x=0; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\beta U \text{ для } x=\lambda.$$

По способу Пуассона, для определения $X(x)$ и $T(t)$ по формуле

$$U = X(x)\cdot T(t),$$

найдем

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0; \quad \frac{dT}{dt} + a^2\alpha^2 T = 0$$

$$X = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x; \quad T = Ce^{-a^2\alpha^2 t}$$

$$U = e^{-a^2\alpha^2 t}(K\cos\alpha x + L\sin\alpha x) \quad (K = AC; \quad L = BC).$$

Первое граничное условие дает $K=0$, а второе условие дает

$$\alpha\cos\alpha\lambda = -\beta\sin\alpha\lambda, \text{ или: } \operatorname{tg}\alpha\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Вследствие того, что для постоянных L можно брать как положительные, так и отрицательные значения, можно ограничиться положительными корнями последнего трансцендентного уравнения; они дадут значения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Таким образом будет:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} L_n e^{-a^2\alpha_n^2 t}\sin\alpha_n x,$$

где коэффициенты L_n найдутся после разложения в ряд функции $f(x)$ по Фурье:

$$L_n = \frac{2(\beta^2+\alpha_n^2)}{\beta^2\lambda+\beta+\lambda\alpha_n^2}\int_0^{\lambda} f(\xi)\sin\alpha_n\xi\,d\xi.$$

IX. Для решения задачи о *распространении тепла в пруте*, в упоминавшейся книге акад. А. Н. Крылова можно найти подробное решение двумя способами: по первому способу Пуассона и по второму, при достаточно общих граничных условиях. Уравнение распространения тепла имеет вид

$$bu + \frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

где a и b — постоянные. Начальное условие и 2 граничных будут:

$$U = f(x) \text{ для } t=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \beta_1 U = 0 \text{ для } x=+l; \quad \frac{\partial U}{\partial x} - \beta_2 U = 0 \text{ для } x=-l,$$

где β_1 и β_2 — постоянные величины. Эта задача была решена впервые Пуассоном.

Следуя первому способу Пуассона, составляем обыкновенное дифференциальное уравнение и его общий интеграл:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (a^2\alpha^2 + b)T = 0; \quad T = C_1 e^{-(a\alpha^2+b)t}.$$

Определяя постоянную C_1 так, чтобы для $t=0$ было $T=1$, т. е. полагая $C_1=1$, имеем:

$$U = \frac{1}{\pi}e^{-bt}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(x-\xi)f(\xi)\,d\xi\,d\alpha.$$

Полагая $\xi - x = z$ и составляя $\frac{\partial U}{\partial x}+\beta_1 U$, $\frac{\partial U}{\partial x}-\beta_2 U$ для удовлетворения граничных условий, будем иметь:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \beta_1 U =$$

$$= -\frac{e^{-bt}}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha z\left[\frac{\partial f(x+z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x-z)}{\partial x} + \beta_1 f(x+z) + \beta_1 f(x-z)\right]dz\,d\alpha$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \beta_2 U =$$

$$= -\frac{e^{-bt}}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha z\left[\frac{\partial f(x+z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x-z)}{\partial x} - \beta_2 f(x+z) - \beta_2 f(x-z)\right]dz\,d\alpha.$$

Положив в первом уравнении $x=+l$, а во втором $x=-l$ и заменивши дифференцирование по z вместо x, найдем:

$$\frac{\partial f(l+z)}{\partial z} - \frac{\partial f(l-z)}{\partial z} + \beta_1 f(l+z) + \beta_1 f(l-z) = 0$$

$$\frac{\partial f(l+z)}{\partial z} - \frac{\partial f(l-z)}{\partial z} - \beta_2 f(-l+z) - \beta_2 f(-l-z) = 0.$$

Помножим первое уравнение на $e^{-hz}dz$ и проинтегрируем от $z=0$ до $z=\infty$, найдем

$$(h+\beta_1)e^{hl}\int_0^{\infty} e^{-hz}f(z)\,dz + (h-\beta_1)e^{-hl}\int_0^{-\infty} e^{hz}f(z)\,dz =$$

$$= (h+\beta_1)e^{hl}\int_0^{l} e^{-hz}f(z)\,dz + (h-\beta_1)e^{-hl}\int_0^{l} e^{hz}f(z)\,dz.$$

Второе уравнение даст аналогичную зависимость, — ее получим заменой l на $-l$ и β_1 на $-\beta_2$:

$$(h-\beta_2)e^{-hl}\int_0^{\infty} e^{-hz}f(z)\,dz+(h+\beta_2)e^{hl}\int_0^{-\infty} e^{hz}f(z)\,dz=$$

$$=(h-\beta_2)e^{-hl}\int_0^{-l} e^{-hz}f(z)\,dz+(h+\beta_2)e^{hl}\int_0^{-l} e^{hz}f(z)\,dz.$$

Решая уравнения относительно

$$p(h)=\int_0^{\infty} e^{-hz}f(z)\,dz \quad \text{и} \quad q(h)=\int_0^{-\infty} e^{hz}f(z)\,dz,$$

найдем формулы вида

$$p(h)=\frac{\lambda(h)}{\mu(h)},\quad q(h)=\frac{\lambda(-h)}{\mu(-h)},$$

и тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha z}f(z)\,dz=\lim_{\varepsilon\to 0}[p(\varepsilon+i\alpha)-q(\varepsilon-i\alpha)]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\lambda(\alpha i+\varepsilon)}{\mu(\alpha i+\varepsilon)}-\frac{\lambda(\alpha i-\varepsilon)}{\mu(\alpha i-\varepsilon)}\right].$$

Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha z}f(z)\,dz$ равен нулю кроме тех значений α, которые являются корнями

$$\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\dots\ \omega_k,\dots\ \omega_{-1},\ \omega_{-2},\dots\ \omega_{-k}$$

уравнения $\mu(\alpha i)=0$, т. е., в раскрытом виде, — уравнения

$$(\beta_1+\beta_2)\alpha\cos 2\alpha l+(\beta_1\beta_2-\alpha^2)\sin 2\alpha l=0.$$

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z}f(z)\,dz=\frac{\lambda(i\omega_k)}{\mu'(i\omega_k)}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+\alpha'^2}\right).$$

Имея в виду, что при малых γ_k, δ_k будет

$$\lim\int_{-\gamma_k}^{\delta_k}\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+\alpha'^2}\,d\alpha'=2,$$

найдем

$$U=\frac{1}{2\pi}e^{-bt}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}e^{i\alpha(x-\xi)}f(\xi)\,d\xi d\alpha=e^{-bt}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{-a^2\omega_k^2 t}\cdot\frac{\lambda(i\omega_k)}{\mu'(i\omega_k)}\cdot e^{\omega_k xi};$$

$$U=e^{-bt}\sum_{k=0}^{k=\infty} e^{-a^2\omega_k^2 t}\left(\frac{P_k}{R_k}\cos\omega_k x+\frac{Q_k}{R_k}\sin\omega_k x\right),$$

где для $t=0$ будет:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{P_k}{R_k}\cos\omega_k x+\frac{Q_k}{R_k}\sin\omega_k x\right),$$

а ω_k обозначает положительный корень характеристического уравнения, причем

$$P_k=[(\beta_1\beta_2-\omega_k^2)\cos 2l\omega_k-(\beta_1+\beta_2)\omega_k\sin 2l\omega_k-\beta_1\beta_2-\omega_k^2]\cdot$$
$$\cdot\int_{-l}^{+l} f(y)\cos\omega_k y\,dy+(\beta_1-\beta_2)\omega_k\int_{-l}^{+l} f(y)\sin\omega_k y\,dy;$$

$$Q_k=[(\beta_1\beta_2-\omega_k^2)\cos 2l\omega_k-(\beta_1+\beta_2)\omega_k\sin 2l\omega_k+\beta_1\beta_2+\omega_k^2]\cdot$$
$$\cdot\int_{-l}^{+l} f(y)\sin\omega_k y\,dy+(\beta_1-\beta_2)\omega_k\int_{-l}^{+l} f(y)\cos\omega_k y\,dy$$

$$R_k=[(\beta_1+\beta_2)+2l(\beta_1\beta_2-\omega_k^2)]\cos 2l\omega_k-[2+2l(\beta_1+\beta_2)]\omega_k\sin 2l\omega_k.$$

В частном случае, если $\beta_2=\infty$, то 2-е граничное условие перепишется так:

$$U=0 \text{ для } x=-l,$$

характеристическое уравнение для корней ω_k будет

$$\beta_1\sin 2l\omega+\omega\cos 2l\omega=0,$$

и тогда:

$$U=2e^{-bt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_1^2+\omega_k^2}{\beta_1+2l(\beta_1^2+\omega_k^2)}e^{-a^2\omega_k^2 t}\sin\omega_k x\int_0^{2l} f(y)\sin\omega_k y\,dy;$$

$$f(x)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_1^2+\omega_k^2}{\beta_1+2l(\beta_1^2+\omega_k^2)}\sin\omega_k x\int_0^{2} f(y)\sin\omega_k y\,dy.$$

Если возьмем *еще более частный случай:* $\beta_2=\infty$, $b=0$, тогда, обозначая $\beta_1=\beta$ и беря интервал изменения x от 0 вместо $-l$ и до $\lambda=2l$, приходим к задаче VIII.

Решая задачу IX при граничных условиях, скажем, вида

$$U=0 \text{ для } x=0;\quad \frac{\partial U}{\partial x}+\beta_1 U=0 \text{ для } x=2l$$

и начальном — вида

$$U=f(x) \text{ для } t=0,$$

интеграл уравнения $bU+\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, формы $U=\Sigma T(t)X(x)$, дает:

$$\left(\frac{dT}{dt}+bT\right)X=a^2T\frac{d^2X}{dx^2},$$

т. е.

$$\frac{dT}{dt}+(a^2k^2+b)T=0;\quad T=Ae^{-bt}\cdot e^{-a^2k^2t}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k^2X=0;\quad X=C\cos kx+D\sin kx;\quad C=0,$$

и для определения k имеем уравнение:

$$k\cos 2kl+\beta_1\sin 2kl=0.$$

Обозначая корни его $\ldots -\omega_k, \ldots -\omega_1, 0, \omega_1, \ldots \omega_k \ldots$, найдем:

$$X_k = D_k \sin \omega_k x; \quad T_k = A_k e^{-bt} e^{-a^2\omega_k^2 t}.$$

Полагая $D_k = 1$ и обозначая $A_k - A_{-k} = B$, будем иметь

$$U = e^{-bt} \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-a^2\omega_k^2 t} \sin \omega_k x;$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \omega_k x.$$

Обозначая

$$X_k = \sin \omega_k x,$$

найдем:

$$f(x) = B_1 X_1 + B_2 X_2 + \ldots;$$

$$X_k(0) = 0$$

$$X_k'(2l) + \beta_1 X_k(2l) = 0$$

$$X_k'' - \omega_k^2 X_k = 0$$

$$\int_0^{2l} X_i X_k dx = 0 \qquad (i \neq k)$$

$$\int_0^{2l} X_i X_k dx = l - \frac{1}{4}\frac{\sin 4\omega_k l}{\omega_k} = \frac{\beta_1 + 2l(\omega_k^2 + \beta_1^2)}{2(\omega_k^2 + \beta_1^2)}$$

$$(i = k)$$

$$B_k = \frac{2(\omega_k^2 + \beta_1^2)}{\beta_1 + 2l(\omega_k^2 + \beta_1^2)} \cdot \int_0^{2l} f(\xi) \sin \omega_k \xi d\xi$$

$$U = 2e^{-bt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k^2 + \beta_1^2}{\beta_1 + 2l(\omega_k^2 + \beta_1^2)} \cdot e^{-a^2\omega_k^2 t} \sin \omega_k x \cdot \int_0^{2l} f(\xi) \sin \omega_k \xi d\xi.$$

X. *К решению телеграфного уравнения* относятся исследования Кирхгофа, В. И. Коваленкова, Ваши, проф. К. А. Поссе и т. д. Пользуясь обозначениями

$$LC = a^2, \; CR + LG = 2h, \; RG = b^2,$$

где C, G, L, R *обозначают названные в § 95 постоянные величины*, уравнение для определения потенциала V в электрическом кабеле можем написать в таком виде:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial V}{\partial t} - b^2 V = 0. \qquad (45)$$

Полагая, по Ваши и Поссе,

$$V = v + F(x),$$

определяя функцию $F(x)$ таким образом, чтобы она удовлетворяла уравнению (45) и граничным условиям

$$F = E \text{ для } x = 0; \; F = 0 \text{ для } x = l, \qquad (46)$$

задачу определения потенциала V сведем к определению функции $v(x, t)$ посредством дифференциального уравнения и условий:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2h \dfrac{\partial v}{\partial t} - b^2 v = 0 \\ 1)\; v = 0 \text{ для } x = 0; \quad 2)\; v = 0 \text{ для } x = l \\ 3)\; v = -F(x) \text{ для } t = 0; \quad 4)\; \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0 \text{ для } t = 0. \end{array}\right\} \qquad (47)$$

Для функции $F(x)$ имеем по формуле (45):

$$\frac{d^2F}{dx^2} - b^2 F = 0.$$

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание условия (46), получим

$$F(x) = E \cdot \frac{e^{b(l-x)} - e^{-b(l-x)}}{e^{bl} - e^{-bl}}, \text{ т. е. } F(x) = E \frac{\operatorname{Sh} b(l-x)}{\operatorname{Sh} bl}.$$

Остается определить функцию $v(x)$. По способу Фурье имеем:

$$v = \sum X(x) T(t)$$

$$X''T - (a^2 T'' + 2hT' + b^2 T) X = 0$$

$$X'' + m^2 X = 0; \quad a^2 T'' + 2T' + (b^2 + m^2) T = 0$$

$$X = A \cos mx + B \sin mx; \; T = Ce^{\alpha t} + Be^{\beta t},$$

где α и β — корни уравнения

$$a^2\lambda^2 + 2h\lambda + (b^2 + m^2) = 0:$$

$$\alpha = \frac{-h + \sqrt{h^2 - a^2(b^2 + m^2)}}{a^2}; \; \beta = \frac{-h - \sqrt{h^2 - a^2(b^2 + m^2)}}{a^2}.$$

Легко найдем из граничных условий 1), 2):

$$A = 0; \; \sin ml = 0; \; m = \frac{k\pi}{l} \; (k = 1, 2, \ldots),$$

и тогда:

$$X_k = B_k \sin \frac{k\pi x}{l}; \; T_k = C_k e^{\alpha_k t} + D_k e^{\beta_k t},$$

где

$$\alpha_k = -\frac{h}{a^2} + \frac{1}{a^2 l}\sqrt{h^2 l^2 - a^2(b^2 l^2 + k^2\pi^2)} = -g + \lambda_k$$

$$\beta_k = -\frac{h}{a^2} - \frac{1}{a^2 l}\sqrt{h^2 l^2 - a^2(b^2 l^2 + k^2\pi^2)} = -g - \lambda_k$$

$$g = \frac{h}{a^2}.$$

Таким образом:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty}(K_k e^{\alpha_k t} + L_k e^{\beta_k t}) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Из начальных условий 3), 4) имеем:

$$-F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(K_k+L_k)\sin\frac{k\pi x}{l};\quad 0=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k K_k+\beta_k L_k)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Следовательно, по формуле Фурье для $F(x)$ будет:

$$K_k+L_k=-\frac{2}{l}\int_0^l F(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi;$$

кроме того:

$$\alpha_k K_k+\beta_k L_k=0.$$

Пользуясь выражением для $F(x)$ через показательные функции и через E, получаем:

$$K_k+L_k=-\frac{2}{l}\int_0^l F(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi=-\frac{2}{l}\int_0^l E\cdot\frac{e^{b(l-\xi)}-e^{-b(l-\xi)}}{e^{bl}-e^{-bl}}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi=\frac{2k\pi E}{b^2l^2+k^2\pi^2}.$$

Так как

$$v=E\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\pi}{b^2l^2+k^2\pi^2}\cdot\frac{\beta_k e^{\alpha_k t}-\alpha_k e^{\beta_k t}}{\alpha_k-\beta_k}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}$$

и

$$\alpha_k=-g+\lambda_k;\quad \beta_k=-g-\lambda_k$$

$$V=v+F(x),$$

то окончательно:

$$V=E\,\frac{\operatorname{Sh}b(l-x)}{\operatorname{Sh}bl}-2Ee^{-gt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{b^2l^2+k^2\pi^2}\left[\operatorname{Ch}\lambda_k t+\frac{g}{\lambda_k}\operatorname{Sh}\lambda_k t\right]\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{48}$$

Стационарное состояние телеграфного кабеля, когда $t\to\infty$ и $v\to 0$, будет:

$$V=E\,\frac{\operatorname{Sh}b(l-x)}{\operatorname{Sh}bl}.$$

Пользуясь уравнением

$$\frac{\partial V}{\partial x}+L\frac{\partial I}{\partial t}+RI=0,$$

о котором речь была в § 95, проф. К. А. Поссе находит силу тока I.

$$I=\frac{GE}{b}\cdot\frac{\operatorname{Ch}b(l-x)}{\operatorname{Sh}bl}-\frac{RL}{E}\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$-2GEle^{-gt}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\operatorname{Ch}\lambda_k t+\frac{g}{\lambda_k}\operatorname{Sh}\lambda_k t\right]\frac{\cos\frac{k\pi x}{l}}{b^2l^2+k^2\pi^2}-\frac{2E}{Ll}e^{-gt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\operatorname{Sh}\lambda_k t\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

При этом приходится пользоваться формулой

$$I=-\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\frac{\partial V(x,\tau)}{\partial x}\,d\tau,$$

в которой функция $\frac{\partial V}{\partial x}$ имеет вид расходящегося ряда, а, следовательно, интегрировать почленно такой ряд вообще нельзя. Это же обстоятельство будет иметь место, если исходить из второго уравнения системы:

$$\frac{\partial I}{\partial x}+C\frac{\partial V}{\partial t}+GV=0,$$

так как тогда $\frac{\partial V}{\partial t}$ будет иметь расходящийся ряд. Это обстоятельство отмечено акад. А. Н. Крыловым, который, для определения силы тока I и потенциала V интегрирует сразу систему двух уравнений § 95, как это и надо было сделать для нахождения V и I. Окончательные формулы вышли те же, но их обоснование строже, чем у других авторов.

Здесь мы имеем в виду *только упражнение* на решение уравнения (47) при 4 граничных и начальных условиях, а не определение и потенциала V, и силы тока I: эту задачу надо решать так, как это сделано в книге А. Н. Крылова, а не так, как делается у Ваши и Поссе.

Так как

$$\lambda_k=\sqrt{g^2-\frac{b^2}{a^2}-\frac{k^2\pi^2}{l^2}}\quad\text{и}\quad g^2-\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{LG-CR}{2CL}\right)^2,$$

то *при всякой величине* $g^2-\frac{b^2}{a^2}$, как это отмечено А. Н. Крыловым, всегда найдется такое целое число k, начиная с которого λ_k будут мнимые величины, и в формуле (48) *члены с гиперболическими функциями заменятся членами с тригонометрическими функциями:*

$$\textit{вместо}\ \operatorname{Ch}\lambda_k t+\frac{g}{\lambda_k}\operatorname{Sh}\lambda_k t\ \textit{будет}\ \cos\lambda_k t+\frac{g}{\lambda_k}\sin\lambda_k t.$$

Формулы значительно упрощаются, если

$$LG=RC.$$

Тогда:

$$\frac{R}{L}=\frac{G}{C}=g;\quad \lambda_k=i\,\frac{k\pi}{al}$$

$$\operatorname{Ch}\lambda_k t=\cos\frac{k\pi}{al}t,\quad \frac{\operatorname{Sh}\lambda_k t}{\lambda_k}=\frac{al}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{al}t.$$

§ 100. Об интегрировании уравнений Максвелла для эфира и об интегрировании системы телеграфных уравнений с переменными коэффициентами. Практика предъявляет нам требования решать нелинейные и линейные уравнения не только при одной неизвестной функции с постоянными коэффициентами, а и системы нелинейных и линейных уравнений как с постоянными, так и с переменными коэффициентами при нескольких неизвестных функциях, причем эти системы уравнений могут характеризовать разнообразные явления как в неограниченных средах, так и в ограниченных, т. е. могут быть не связаны с начальными и граничными условиями и могут подчиняться ряду как начальных, так и граничных условий.

Примером может служить *движение жидкостей*, определяемое системой четырех уравнений 1-го порядка с четырьмя неизвестными функциями u, v, w, ρ:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0,$$

где p, X, Y, Z — заданные функции, причем для сжимаемых жидкостей $p=\mathrm{fonct}(\rho)$, а для несжимаемых ρ, обозначающая плотность жидкости, постоянна, $\rho=\mathrm{const}$, и тогда 4-е уравнение переходит в такое:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Следующим примером может служить рассматривавшаяся в §§ 95 и 99 система уравнений, определяющая *потенциал V и силу тока I в телеграфном кабеле.* Дальнейший простой пример — *распространение звука в бесконечной трубе:* задача сводится к нахождению неизвестных функций $s(x, t)$ и $u(x, t)$, определяемых системой линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a^2\frac{\partial s}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{49}$$

и такими начальными условиями.

$$s=f_1(x) \text{ для } t=0;\; u=f_2(x) \text{ для } t=0. \tag{50}$$

Исключение из системы (49) неизвестной функции u привело бы нас к определению неизвестной функции s из уравнения 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 s}{\partial x^2},$$

которое определяет колебания неограниченной струны и обладает общим интегралом, рассмотренным раньше:

$$s=f(x+at)+\varphi(x-at).$$

Пользуясь этим интегралом, для простого вида системы (49) с начальными только условиями (50) можно легко определить неизвестные функции s и u; эти функции будут:

$$s=\frac{1}{2}f_1(x+at)-\frac{1}{2a}f_2(x+at)+\frac{1}{2}f_1(x-at)+\frac{1}{2a}f_2(x-at)$$
$$u=-\frac{a}{2}f_1(x+at)+\frac{1}{2}f_2(x+at)+\frac{a}{2}f_1(x-at)+\frac{1}{2}f_2(x-at).$$

Не всегда однако так просто решается вспомогательное уравнение высшего порядка с одной неизвестной функцией, а в особенности — для систем линейных уравнений с переменными коэффициентами. Кроме того, — не всегда будет простым и даже — вполне законным и строго обоснованным путь получения решения системы уравнений с несколькими неизвестными функциями на основании решения уравнения высшего порядка с одной неизвестной функцией. Для примера достаточно обратиться к системе телеграфных уравнений

с постоянными коэффициентами и к тому, что было отмечено по поводу этой системы и вспомогательного уравнения 2-го порядка для одной функции V в начале § 95 и в конце § 99.

Поэтому существенно необходимой является разработка способов интегрирования, изучавшихся в главе X систем уравнений при нескольких неизвестных функциях, и, в частности, — систем линейных относительно производных и линейных относительно производных и якобианов при постоянных коэффициентах, как с дополнительными начальными и граничными условиями, так и без них.

В качестве приложения способов, рассматривавшихся в главе X, остановимся на интегрировании уравнений Максвелла для эфира и на интегрировании системы телеграфных уравнений при переменных коэффициентах, т. е. на том случае системы телеграфных уравнений, исследований в области которого с более или менее конкретными результатами в литературе почти не существует.

В электромагнитной теории света уравнения Максвелла записываются так:

$$\operatorname{rot} H=\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t};\quad \operatorname{rot} E=-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{51}$$
$$\operatorname{div} E=0;\quad \operatorname{div} H=0,$$

где H обозначает вектор магнитной силы, а E — электрической силы. Символ вида $\operatorname{div} q$ обозначает *дивергенцию вектора q*, составляющие которого на осях суть u, v, w, так что:

$$\operatorname{div} q=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

а символ $\operatorname{rot} q$ обозначает *ротор вектора q*, — вдвое больший вектора s,

$$s=\frac{1}{2}\operatorname{rot} q,$$

который имеет составляющими на осях p, q, r, где

$$p=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad q=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad r=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Согласно исследованиям Зильберштейна и Бэтмана, уравнения (51) можно записать в форме:

$$\operatorname{rot} M=\mp\frac{i}{c}\frac{\partial M}{\partial t};\quad \operatorname{div} M=0, \tag{52}$$

где M обозначает комплексный вектор, определяемый по формуле

$$M=H\pm iE,$$

$i=\sqrt{-1}$ и c — скорость света в 1 сек. Посредством подстановки Бэтмана

$$M_x=f(\alpha,\beta)D\left(\frac{\alpha,\beta}{y,z}\right);\quad M_y=f(\alpha,\beta)D\left(\frac{\alpha,\beta}{z,x}\right);\quad M_z=f(\alpha,\beta)D\left(\frac{\alpha,\beta}{x,y}\right),$$

где $f(\alpha,\beta)$ — произвольная функция от неизвестных функций α, β, зависящих от 4 аргументов каждая, от x, y, z, t, уравнения (52) преобразовываются к такой форме:

$$cD\left(\frac{\alpha,\beta}{y,z}\right)=iD\left(\frac{\alpha,\beta}{x,t}\right);\quad cD\left(\frac{\alpha,\beta}{z,x}\right)=iD\left(\frac{\alpha,\beta}{y,t}\right);\quad cD\left(\frac{\alpha,\beta}{x,y}\right)=iD\left(\frac{\alpha,\beta}{z,t}\right) \tag{53}$$

Заметим, что, при обычных в главе X обозначениях для якобианов

$$D\left(\frac{\alpha, \beta}{y, t}\right) = (yt); \quad D\left(\frac{\alpha, \beta}{z, t}\right) = (zt); \ldots,$$

систему (53) можно было бы записать также еще, например, в одной из таких двух форм:

$$(yt)^2+(zt)^2=c^2(yz)^2; \quad (zt)^2+(xt)^2=c^2(zx)^2; \quad (xt)^2+(zx)^2=c^2(xy)^2 \quad (53')$$

$$\left.\begin{array}{c}(yz)^2+(zx)^2+(xy)^2=0; \quad (xt)^2+(yt)^2+(xt)^2=0 \\ \text{одно из уравнений } (53').\end{array}\right\} \quad (53'')$$

По поводу системы Бэтмана (53), а равным образом — и каждой из систем (53′) и (53″), следует сказать прежде всего, что, так как число уравнений системы превышает на единицу число неизвестных функций α, β, то для инволюционности этой системы должны удовлетворяться изложенные в главе X условия, сводящиеся к равенству нулю указанных в той же главе определителей. Исследований о совместимости уравнений подобных (53), так же, как и многих систем в задачах гидродинамики, математической физики и в особенности — теории относительности, как об этом упоминалось раньше, произведено почти не было.

Далее, по теореме Бурле-Вебера и согласно некоторым другим исследованиям, общий интеграл системы (53) должен содержать 2 произвольные функции: одна из них будет иметь 3 аргумента — функций от x, y, z, t, а другая — 2 подобных аргумента.

Существуют частные решения уравнений (1), данные Герцом, Фиц Жеральдом, Уиттекером. Существует также интеграл системы (53), данный Бэтманом:

$$\left.\begin{array}{l} z - ct = \varphi(\alpha, \beta) + (x + iy)\,\theta(\alpha, \beta) \\ \theta(\alpha, \beta)(z + ct) = \psi(\alpha, \beta) - (x - iy) \end{array}\right\}, \quad (54)$$

где φ, θ, ψ — произвольные функции от α и β. Этот интеграл назван был Бэтманом общим интегралом системы (53). Однако он представляет собой только частный интеграл: в этом можно убедиться исключением произвольных элементов. В результате исключения произвольных элементов мы можем получить не только одну единственную систему трех уравнений (53), но также систему трех и четырех уравнений, не равносильных уравнениям системы (53). Легко видеть, что интеграл

$$\left.\begin{array}{l} z - ct = \varphi(\alpha, \beta) + k(x + iy) \\ k(z + ct) = \psi(\alpha, \beta) - (x - iy) \end{array}\right\}, \quad (55)$$

где k — произвольная постоянная, приводит к точно таким же системам уравнений, как интеграл предшествующий. Интеграл (54) не является более общим, чем интеграл (55), а кроме того уравнения (54) нельзя решать для определения неизвестных функций α, β, так как эти функции α, β связаны тремя произвольными функциями ψ, φ, θ, входящими в два только уравнения.

Применим к системе (53) способ решения линейных в якобианах уравнений, изложенный в § 86 главы X. Способ интегрирования

Гамбургера и вспомогательная система Гамбургера с одной неизвестной функцией u не применимы, так как уравнения (53) не имеют свободного члена M.

Обращаясь к уравнению (9) § 86, или

$$\frac{M_{2,1}^2 + \lambda M_{2,2}^2}{M_{1,1}^1 + \lambda M_{1,2}^1} = \frac{M_{1,1}^2 + \lambda M_{1,2}^2}{M_{1,1}^1 + \lambda M_{1,1}^1},$$

получаем корни $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$ для первых уравнений системы (53). Для этих корней мы получаем 2 системы вспомогательных уравнений с одной неизвестной функцией:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + i\dfrac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \\ c\dfrac{\partial u_1}{\partial z} + \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = 0 \end{array}\right| \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{l} i\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \\ c\dfrac{\partial u_2}{\partial z} - \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = 0 \end{array}\right|.$$

Обе системы совместимы, так как коэффициенты в них постоянные. Интегрирование систем дает частные интегралы

$$\alpha_1 \equiv C_1, \ \alpha_2 \equiv z - ct = C_2, \ \alpha_3 \equiv x + iy = C_3$$

$$\beta_1 \equiv C_4, \ \beta_2 \equiv z + ct = C_5, \ \beta_3 \equiv x - iy = C_6,$$

и мы можем написать такой частный интеграл первых двух уравнений системы (53):

$$\alpha = \varphi(z - ct, x + iy); \ \beta = \psi(z + ct, x - iy),$$

где φ и ψ — произвольные функции. Так как общий интеграл систем (53) должен содержать 2 произвольные функции, из которых одна имеет 2 аргумента, а другая 3 аргумента, и так как надо удовлетворить кроме того и третьему уравнению (53), введем новый аргумент v в одну из произвольных функций φ или ψ. Тогда функция v будет определяться посредством подстановки выражений для α и β в систему (53). Уравнения

$$\alpha = \varphi(z - ct, \ x + iy); \ \beta = \psi(z + ct, \ x - iy, \ v)$$

приводят к зависимостям, ограничивающим однако произвольность функций φ и ψ:

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(x+iy)}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial(z-ct)}} = c^2\,\frac{\dfrac{\partial v}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}}{-c\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial t}} = \frac{c\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial t}}{\dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial v}{\partial x}} = -\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial(z+ct)}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial(x-iy)}}.$$

Равенство средних двух отношений приводит к *уравнению Гамильтона* для определения неизвестной функции v:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2. \quad (56)$$

Оно называется также *основным уравнением геометрической оптики*. Согласно исследованиям Бэтмана, находящимся например, в его книге H. Bateman — The mathematical analysis of electrical and optical wavemotion, Cambridge, 1915, — только что написанное уравнение удовлетворяется произвольной функцией от α и β.

Можно искать еще интеграл, содержащий по 3 аргумента в каждой из двух произвольных функциях. В таком случае, по крайней мере, в одной из этих произвольных функций, аргументы-функции должны быть связаны между собою. Этого типа решение системы (53) представляет собой интеграл

$$\alpha = \varphi(\xi, \eta, \zeta); \ \beta = \psi(\xi, \eta, \zeta), \tag{57}$$

где φ и ψ — произвольные функции от аргументов:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= k_1 y + k_2 z \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2}\, t \\ \eta &= \pm i \frac{k_1 k_3}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} x - k_3 z \pm c \frac{k_2 k_3}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} t \\ \zeta &= \mp i \frac{k_2 k_4}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} x - k_4 y \pm c \frac{k_1 k_4}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} t, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

связанных зависимостью

$$k_3 k_4 \xi + k_2 k_4 \eta + k_1 k_3 \zeta = 0, \tag{59}$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 обозначают произвольные постоянные. *Интеграл (57) есть более общий, чем интеграл (55) и интеграл Бэтмана (54).*

Полный интеграл системы (53) должен содержать 7 произвольных постоянных. Можно получить этот интеграл в таком виде:

$$\alpha = K_1 + C_1 x + C_2 y + C_3 z + ic \frac{(C_1 C' + C_2 C'') C_3 - (C_1^2 + C_2^2) C'''}{C_1 C'' - C_2 C'} t \tag{60}$$

$$\beta = K' + C' x + C'' y + C''' z + ic \frac{(C' C_1 + C'' C_2) C''' - (C'^2 + C''^2) C_3}{C' C_2 - C'' C_1} t. \tag{61}$$

Между 8 постоянными $K_1, K', C_1, C', \ldots$ должна существовать одна зависимость. Она будет такова:

$$\begin{aligned} & C_1^2 (C''^2 + C'''^2) + C_2^2 (C'^2 + C'''^2) + C_3^2 (C'^2 + C''^2) = \\ & = C_1 C' (C_2 C'' + C_3 C''') + C_2 C'' (C_1 C' + C_3 C''') + C_3 C''' (C_1 C' + C_2 C''). \end{aligned} \tag{62}$$

С основными уравнениями электромагнитной теории света (51), с уравнениями (53), (53'), (53''), с уравнением геометрической оптики (56) и с волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{63}$$

тесно связана *группа конформных преобразований пространства четырех измерений.* Так, с решением уравнения (56) связан переход от компонентов (E_x, E_y, E_z) и (M_x, M_y, M_z) электрической и магнитной силы электромагнитного поля в системе координат x, y, z, t к компонентам $(E_{x'}, E_{y'}, E_{z'})$ и $(M_{x'}, M_{y'}, M_{z'})$ в новый координатной системе x', y', z', t'.

Общий интеграл уравнения (56) должен содержать одну произвольную функцию трех аргументов. Его полный интеграл будет:

$$v = K + C_1 x + C_2 y + C_3 z + c\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}\, t. \tag{64}$$

Легко видеть, что функции α и β, определяемые по формулам (60), (61) с условием (62) будут также интегралами уравнения (56). Подобным же образом, — выражения для α и β по формулам (57), (58), (59) являются интегралами уравнения (56). Для геометрической интерпретации интегралов, произвольные постоянные можно связать с косинусами углов прямой с осями координат. Например, полный интеграл (64) можно написать в форме:

$$\begin{gathered} v = k + K(x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) + K^2 ct \\ (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1), \end{gathered} \tag{65}$$

где k и K — произвольные постоянные. Интеграл вида (57) для уравнения (56) можно переписать так:

$$\begin{aligned} v = \varphi\, [& k(y \cos\alpha + z \sin\alpha \pm ct),\ K \cos\beta\,(xi \cos\alpha \pm z + ct \sin\alpha), \\ & \mp K \sin\beta\,(xi \sin\alpha \mp y - ct \cos\alpha)]. \end{aligned} \tag{66}$$

Известно, что произвольная функция $\Omega(v)$ от интеграла v уравнения Гамильтона (56) удовлетворяет волновому уравнению (63): будет всегда

$$U = \Omega(v). \tag{67}$$

Можно поэтому устанавливать зависимости между функциями, рассмотренными в этом параграфе и в §§ 96, 98, 99.

По Бэтману, выражения для компонентов (M_x, M_y, M_z) вектора M, написанные в начале параграфа, являются также интегралами волнового уравнения (63). Поэтому функции α и β, записанные формулами (57)—(62) и удовлетворяющие системе (53), уравнению (56) и уравнению волновому (63), также как и функции (64) — (67), можно считать *волновыми функциями.*

Подстановка постоянной w вместо c во все предшествующие уравнения, где w *представляет скорость распространения электромагнитных волн в однородном и изотропном диэлектрике,* по формуле

$$w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

приводит к интегралам для движения электромагнитных волн в этом диэлектрике.

Теория конформных преобразований пространства четырех измерений (и в частности—преобразования теории относительности) дают другие ряды интегралов уравнений (51), (53), (56), (63): в написанных в этом параграфе интегралах буквы x, y, z, t заменяются функциями от этих переменных x, y, z, t. Примеры подобных преобразований можно найти в исследованиях Бэтмана.

Замена букв x, y, z, t, скажем, функциями

$$\frac{x}{s^2}, \quad \frac{y}{s^2}, \quad \frac{z}{s^2}, \quad \frac{t}{s^2},$$

где
$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2,$$
что соответствует *инверсии*, и умножение выражений для α, β, V, Ω на $\frac{1}{s^2}$, приводит к новым интегралам волнового уравнения (63).

Замена x, y, z, t функциями
$$\frac{x}{z-ct},\quad \frac{y}{z-ct},\quad \frac{s^2-1}{2(z-ct)},\quad \frac{s^2+1}{2c(z-ct)},$$
что дает преобразование, равносильное *преобразованию Кремона*, и умножение выражений для α, β, V, Ω на $\frac{1}{z-ct}$ дает новые интегралы того же уравнения. Если же перед функциями для α, β, V этих новых интегралов волнового уравнения отбросим множители $\frac{1}{s^2}$ и $\frac{1}{z-ct}$, — тогда будем иметь интегралы уравнения геометрической оптики.

Возвратимся в заключение к *системе телеграфных уравнений с переменными коэффициентами*.

Для интегрирования этой системы можно применить способ § 86 главы X, так как уравнения линейны, и, принимая во внимание, что система не содержит свободного члена, надо от вспомогательной системы Гамбургера перейти к системе (15) того же параграфа. Характеристическое уравнение, получаемое из алгебраического условия для коэффициентов линейных уравнений системы, запишется:
$$L\lambda^2 = C. \tag{68}$$
Для его корней
$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{C}{L}},\quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{C}{L}}$$
напишем 2 системы вспомогательных линейных уравнений 1-го порядка одной неизвестной функции u. Если эти системы двух линейных уравнений будут полные, то мы приходим к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, интегралы которых
$$u_1 = c_1,\quad u_2 = c_2;\quad v_1 = c',\quad v_2 = c''$$
позволят приступить к построению общего интеграла системы телеграфных уравнений. Если системы двух линейных уравнений будут неполные или несовместимые,—получим те условия для переменных коэффициентов C, G, L, R, при каких можно применить способ интегрирования § 86.

Обращаясь к способу § 88 главы X и обозначая для удобства
$$t = x,\ x = y,\ V = z,\ I = z';\ L,\ C,\ R,\ G = \text{fonct}\,(x, y),$$
перепишем систему телеграфных уравнений так:
$$\left.\begin{aligned} Cp + q' + Gz &= 0 \\ q + Lp' + Rz' &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{69}$$
Будем иметь то же самое квадратное уравнение (68):
$$L\lambda^2 = C,$$

корням которого λ_1 и λ_2 будут соответствовать 2 системы линейных уравнений 1-го порядка с одной неизвестной вспомогательной функцией Φ. Одна из этих систем будет:
$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{L}\,\frac{\partial\Phi}{\partial p} + L\sqrt{C}\,\frac{\partial\Phi}{\partial q} - \sqrt{C}\,\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + C\sqrt{L}\,\frac{\partial\Phi}{\partial q'} &= 0 \\ - L(pC'_x + zG'_x + pG)\,\frac{\partial\Phi}{\partial p} - \sqrt{LC}(p'L'_y + z'R'_y + q'R)\,\frac{\partial\Phi}{\partial q} &+ \\ + C(p'L'_x + z'R'_x + p'R)\,\frac{\partial\Phi}{\partial p'} - \sqrt{LC}\,(pC'_y + zG'_y + qG)\,\frac{\partial\Phi}{\partial q'} &- \\ - LC\frac{d\Phi}{dx} + \sqrt{LC}\frac{d\Phi}{dy} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$
Другая система отличается только знаками перед радикалами.

Кроме двух интегралов (69) надо найти еще 2 частные интеграла этой системы $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$, чтобы квадратурами определить z и z', т. е. V и I, если система (70) обладает больше чем двумя независимыми интегралами (69). В противном случае, если не существует хотя бы одного интеграла $\Phi_1 = C_1$, отличного от интегралов (69), ни для системы (70), ни для системы, соответствующей другому корню уравнения (68), — применять способ интегрирования, разыскивая интегралы $\Phi_1 = C_1, \ldots$ можно будет при условиях для коэффициентов C, L, G, R заданной системы (69).

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

290. Проверить, что $\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \lg(x\cos t + y\sin t + iz)\,g(t)\,dt$, если $\int\limits_{-\pi}^{+\pi} g(t)\,dt = 0$, является решением уравнения Лапласа.

291. Вычислить $\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f_n(a, \varphi, \psi)P_n[\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\psi - \psi')]\,a^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi$, где $f_n(r, \varphi, \psi)$ — однородный полином степени n относительно x, y, z · [0: надо взять направление (φ', ψ') за новую ось; интеграл равен $\frac{4\pi a^2}{2n+1} f_n(a, \varphi', \psi')$].

292. Проверить, что если $U = f(x, y, z)$ есть решение уравнения Лапласа, то и
$$U = \frac{1}{\sqrt{x+iy}}\, f\left[\frac{r^2 - a^2}{2(x - iy)},\ \frac{r^2 + a^2}{2i(x - iy)},\ \frac{az}{x - iy}\right]$$
тоже будет решением.

293. Проверить, что если $U = f(x, y, z, t)$ будет решением для
$$\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$
то и
$$U = t^{-3/2} f\left(\frac{x}{t},\ \frac{y}{t},\ \frac{z}{t}, -\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}}$$
тоже будет решением.

294. Проверить интеграл волнового уравнения
$$U = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x\cos\varphi + y\sin\varphi + iz,\ y + iz\sin\varphi + ct\cos\varphi,\ \varphi)\,d\varphi.$$

295. Решить уравнение $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ при одном условии: $U = f(x)$ для $t = 0$.

$$\left[\text{О.: } U = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t} f(\xi)\cos\alpha(x-\xi)\,d\xi\right.$$

или, так как

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(x-\xi)\,d\alpha = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}},$$

то

$$U = \frac{1}{2a}\,\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,d\xi.$$

296. Решить уравнение $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ при условиях:

$$U = 0 \text{ для } t = 0,\quad U = 0 \text{ для } x = 0,\quad U = \gamma \text{ для } x = c.$$

$$\left[\text{О.: } U = \gamma\left[\frac{x}{c} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{c}x\right]\right].$$

297. Найти интеграл уравнения движения неограниченной пластинки

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + b^2\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4}\right) = 0,$$

содержащий 2 произвольные функции: $f_1(\xi, \eta)$ и $f_2(\xi, \eta)$.

$$\left[\text{О.: } U = \frac{1}{\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(u^2+v^2)\,f_1(x + 2\sqrt{bt}\;u,\ y + 2\sqrt{bt}\;v)\,du\,dv + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_0^t dt\int\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(u^2+v^2)\,f_2(x + 2\sqrt{bt}\;u,\ y + 2\sqrt{bt}\;v)\,du\,dv\right].$$

298. Проверить, что уравнению $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ при условиях:

1) $u = f_1(x)$ для $t = 0$, 2) $\frac{\partial U}{\partial t} = f_2(x)$ для $t = 0$; 3) $U = 0$ для $x = 0$; 4) $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ для $x = l$ удовлетворяет такое решение Пуассона:

$$U = \frac{2}{l}\sum_{i=1}^{\infty}\cos\frac{2i-1}{2l}\,\pi a t\,\sin\frac{2i-1}{2l}\,\pi x\int_0^l f_1(z)\sin\frac{2i-1}{2l}\,\pi z\,dz +$$

$$+ \frac{4}{a\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i-1}\sin\frac{2i-1}{2l}\,\pi a t\,\sin\frac{2i-1}{2l}\,\pi x\int_0^l f_2(z)\sin\frac{2i-1}{2l}\,\pi z\,dz.$$

299. Проверить, что интеграл уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$

при условиях:

$$U = 0 \text{ для } x = 0,\ U = 0 \text{ для } x = l,\ U = \varphi(x) \text{ для } t = 0 \text{ и } \frac{\partial U}{\partial t} = \psi(x) \text{ для } t = 0$$

будет:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\frac{an\pi t}{l}\,\sin\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\frac{an\pi t}{l}\,\sin\frac{n\pi x}{l};$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi;\quad B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi.$$

300. Проверить, что частный интеграл уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f\,(x, t),$$

при условиях:

1) $v = 0$ для $x = 0$, 2) $v = 0$ для $x = l$, 3) $v = 0$ для $t = 0$, 4) $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ для $t = 0$, будет:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} F_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$F_n = \frac{2}{an\pi}\int_0 d\tau\int_0 f(\xi, \tau)\,\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\,\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi.$$

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

Римские цифры I и II указывают на первую или вторую книгу, арабские — обозначают номер страницы соответствующей книги.

Оглавление книги первой:

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Оглавление книги второй:

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ.

Ответственный редактор *Краз Г. Я.* Технический редактор *В. Е. Мельникова.*
Поступило в произв. 16/I 1934 г. Подписано к печати 20/IX 1934 г. Авт. л. 29½.
Печатных листов 21. Печ. знаков в 1 бум. листе 56320. Бумага печ. 72 × 105.
Ленгорлит № 25360. Арт. ак. № 55. Заказ № 366. Тираж 1.600 экз.
ЛОЦТ Наркомобороны СССР имени Клима Ворошилова (Ленинград, ул. Герцена, 1).

Prof. Dr. M. KOURENSKY

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Livre 2

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Leningrad