Оглавление

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

ЛЕКЦИИ ПО КОНСТРУКТИВНОМУ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Б. А. КУШНЕР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

517.2
К 96
УДК 517

$К\,\frac{0223-1845}{042\,(02)\text{-}73}\,62\text{-}73$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 5

Конструктивные функции

Глава 6

Дифференцирование конструктивных функций

Глава 7

Интегрирование конструктивных функций по Риману

Глава 8

Сингулярные покрытия и некоторые их применения

Глава 9

Конструктивные метрические пространства

Посвящается
Андрею Андреевичу Маркову
к его семидесятилетию

ОТ АВТОРА

В основу настоящей книги положен специальный курс, читавшийся автором на механико-математическом факультете Московского университета. Излагаемый материал не предполагает почти никаких предварительных знаний и вполне доступен читателю, владеющему стандартным курсом математического анализа. Более подробная характеристика книги приведена в п. 9 введения.

Автор глубоко благодарен своим учителям А. А. Маркову и Н. М. Нагорному, без многолетнего плодотворного общения с которыми эта книга не могла бы быть написана.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить за большое внимание к книге председателя Научного Совета по комплексной проблеме «Кибернетика» академика А. И. Берга и сотрудников Совета Б. В. Бирюкова и Е. С. Геллера. Автор весьма признателен также С. И. Адяну за внимание и ценные советы.

Автор приносит извинения своим многочисленным коллегам, имена которых он не имеет возможности здесь привести и чья дружеская поддержка неоценимо помогала в работе. Всем им автор глубоко благодарен.

ВВЕДЕНИЕ*)

1. Как известно, к началу 20-го века, благодаря работам Коши, Больцано, Вейерштрасса, Кантора, Дедекинда и Мерэ, математический анализ получил свое обоснование на базе канторовской теории множеств. Две черты наиболее характерны, по нашему мнению, для теоретико-множественного стиля мышления: 1) допущение такой далеко идущей абстракции, как абстракция актуальной бесконечности, позволяющей рассматривать «завершенные» бесконечные совокупности одновременно существующих объектов; 2) свободное применение при рассуждениях о бесконечных совокупностях обычных правил традиционной логики — в частности, допускается неограниченное применение закона исключенного третьего.

Теоретико-множественные методы позволили перейти от расплывчатых «динамических» концепций старого анализа бесконечно малых к строгой «статической» системе понятий современной теории пределов. Становящийся, развивающийся натуральный ряд заменился представлением о совокупности всех натуральных чисел, связываемый с бесконечно малой процесс свелся к понятию функции, в свою очередь трактуемому посредством актуально заданных, «завершенных»

---

*) Настоящее введение не следует рассматривать как своего рода «кредо конструктивистов». Ряд высказываемых мнений и оценок отражает личную точку зрения автора, ответственность за которую полностью ложится на него одного. Сжатый обзор основных методологических установок конструктивного направления в математике и обсуждение его положения относительно других математических течений можно найти в работах Маркова [6], Шанина [6; введение и приложение]; [8], в докладе Цейтина, Заславского и Шанина на Московском международном конгрессе математиков [1]—[2] и, наконец, в автореферате Цейтина [9].

множеств пар предметов, удовлетворяющих некоторым очевидным ограничениям (в функциональном множестве не должно быть двух разных пар с одинаковой первой компонентой). Реальная или кажущаяся естественность и обозримость вводимых таким образом понятий, удобство обращения с ними, доставляемое использованием привычных логических средств, в значительной мере стимулировали развитие математического анализа и создавали ощущение предельной строгости его построений, усиливаемое практическими успехами опирающихся на анализ прикладных ветвей математики.

Вместе с тем уже в процессе своего построения теория множеств была потрясена обнаруженными на ее окраинах парадоксами (см., например, Клини [4], Карри [1], Френкель и Бар-Хиллел [1]). Хотя эти парадоксы и не относились непосредственно к анализу (некоторое исключение, благодаря своему сходству с канторовской теоремой о несчетности континуума, составляет, пожалуй, парадокс Ришара (см. Френкель и Бар-Хиллел [1; стр. 20—21]; интересное обсуждение парадокса Ришара можно найти в книге Бореля [1; стр. 162])), все же ситуации, характерные для появления парадоксов, обнаруживались уже в такой начальной области анализа, как теория действительных чисел. Это и чрезвычайно большая свобода образования понятий (например, континуум по Дедекинду есть множество всех множеств рациональных чисел, подчиненных некоторым достаточно слабым ограничениям), и использование непредикативных определений, когда некоторые объекты определяются в терминах множеств, которым они сами должны принадлежать (именно такой характер носит, например, определение точных границ числовых множеств).

С другой стороны, независимо от проблемы парадоксов, не прекращалась восходящая к Гауссу и Кронекеру критика изначальной принципиальной приемлемости основных теоретико-множественных установок. С особенно острой и последовательной критикой выступил Брауэр. Критика эта (к которой затем присоединился и занимавший вначале особую позицию Г. Вейль) сопровождалась развитием оригинальной программы построения математики, известной ныне под названием «интуиционизм» (или «неоинтуиционизм»). Брауэр и его последователи энергично возражали как против веры в экзистенциальный характер бесконечных множеств, так и против убеждения в том, что традиционная логика отвечает существу математики. Согласно воззрениям интуиционизма предметом исследования математики являются умственные построения, рассматриваемые как таковые «безотносительно к таким вопросам о природе конструируемых объектов, как вопрос, существуют ли эти объекты независимо от нашего знания о них» (Гейтинг [3; стр. 9—10]).

Математические утверждения суть информации о выполненных построениях. Обращение с умственными построениями требует особой логики, не принимающей, в частности, в сколько-нибудь полном объеме закона исключенного третьего (ср. Колмогоров [2], Гейтинг [3; стр. 9—11]).

Интуиционизм вернул математической бесконечности ее подвижный, развивающийся характер — завершенное, целиком предъявленное для рассмотрения множество натуральных чисел должно было уступить место потенциально бесконечному натуральному ряду, бесконечному в своем развитии, в возможности построения все новых и новых натуральных чисел; континуум из плохо отвечающего геометрической интуиции конгломерата отдельных точек превратился в своего рода «среду становления», обеспечивающую возможность неограниченного развития путем актов выбора свободно становящейся последовательности измельчающихся рациональных интервалов. Однако, хотя интуитивная ясность и является, согласно позиции интуиционистов, главным и единственным критерием математической истинности, именно этому критерию, по мнению многих математиков, часто не удовлетворяли как философские посылки, так и конкретные математические теории интуиционизма (например, Бишоп [2], [3] характеризует брауэровскую теорию континуума как революционную и «полумистическую») *).

---

*) Для подробного ознакомления с философией и математической практикой интуиционизма можно обратиться к цитированной книге Гейтинга [3], а также к монографии Френкеля и Бар-Хиллела [1].

Развернувшаяся вокруг парадоксов и интуиционистской критики полемика выявила серьезные расхождения крупнейших математических мыслителей во взглядах на самые основные и первоначальные понятия математики и создала ту продолжающуюся до сих пор ситуацию, которую можно охарактеризовать как кризис оснований математики (относящиеся сюда вопросы подробно изложены в книге Френкеля и Бар-Хиллела [1], где имеется также обширная библиография). По-видимому, не будет преувеличением сказать, что сегодня не так уж ясно, являются ли успехи приложений следствием правильного выбора исходных установок теоретической математики или, наоборот, сами эти успехи являются источником разделяемой подавляющим большинством математиков веры в правильность упомянутых установок. В свете сказанного представляются естественными поиски новых путей построения анализа, обеспечивающего потребности естественных наук и вместе с тем опирающегося на более ясные, чем теоретико-множественные, исходные концепции.

Другой стороной интуиционистской критики было привлечение внимания к вопросу конструктивности в математике. Достигаемая в теории множеств громадная общность приводила к слабой «осязаемости» многих объектов анализа. Причем такие объекты возникали не только в результате рискованных конструкций с использованием аксиомы выбора, но обнаруживались в самых начальных, непосредственно примыкающих к вычислительной практике областях анализа. Ряд эффектных «теорем существования» оказался при ближайшем рассмотрении лишенным вычислительного смысла. В качестве классического примера обратимся к теореме о точных границах ограниченных числовых множеств. Нетрудно построить алгорифмическую последовательность из нулей и единиц $\{n_k\}$ так, что в этой последовательности встречается ненулевой член тогда и только тогда, когда нарушается великая теорема Ферма (для этого достаточно перечислять друг за другом все четверки натуральных чисел (x, y, z, n) $(n > 2,\ x, y, z > 0)$, проверяя равенство $x^n + y^n = z^n$; n_k полагается равным нулю, если результат этой проверки для k-й четверки отрицательный, и единице в противоположном случае).

Согласно теореме Больцано — Вейерштрасса существует точная верхняя грань b множества значений последовательности $\{n_k\}$. Ясно, что, умея вычислять b хотя бы с точностью до $^1/_3$, мы смогли бы узнать, равно b нулю или единице. Таким образом, мы выяснили бы, верна теорема Ферма или нет. Подобные примеры, число которых легко увеличивать, делают весьма сомнительной возможность эффективного метода, позволяющего вычислять точные границы ограниченных множеств, даже если рассматривать лишь множества значений эффективно вычислимых последовательностей из нулей и единиц *).

В качестве второго примера возьмем теорему о корне знакопеременной непрерывной функции. Здесь может показаться, что обычно приводимый в доказательствах этой теоремы метод последовательного деления сегмента (см., например, Фихтенгольц [1; гл. 2, § 5]) позволяет эффективно находить сколь угодно точные приближения к корню. В действительности дело обстоит не так просто: уже на первом шаге процесса вычисления корня нужно узнать, обращается ли функция в нуль в середине сегмента. Нетрудно, однако, понять, что задача распознавания равенства действительного числа нулю может быть необозримо трудной. В самом деле, обозначим через a действительное число, целая часть которого равна 0, а k-й двоичный разряд равен n_k (где $\{n_k\}$ — рассмотренная выше последовательность нулей и единиц). Ясно, что $a = 0$ в том и только в том случае,

*) Рассмотренный пример удобен для пояснения интуиционистского отказа от закона исключенного третьего. Поскольку при сегодняшнем состоянии науки теорема Ферма не доказана и не опровергнута, нельзя утверждать (математические утверждения суть утверждения о выполненных построениях!), что последовательность $\{n_k\}$ имеет точную верхнюю грань. Лежащий в основе традиционного доказательства довод, что либо при всех k $n_k = 0$, либо при некотором k $n_k \neq 0$, должен быть отвергнут как метафизический, апеллирующий к истинности в каком-то абсолютном смысле и, следовательно, выходящий за пределы математики. Конечно, теорема Ферма со временем может быть доказана или опровергнута, однако в этом случае можно обратиться к другой нерешенной задаче. Уверенность в нашей способности решить в конечном итоге любую проблему, может быть, и является интересной темой для философских дискуссий, но она, во всяком случае, не должна быть источником математических теорий.

когда верна теорема Ферма. Обнаруживаемые этим рассуждением затруднения в нахождении корней знакопеременных функций связаны, как будет показано в § 4 гл. 5, не с особенностями метода последовательного деления сегмента*), а имеют принципиальный характер.

В обоих рассматриваемых случаях в доказательствах соответствующих классических теорем нетрудно обнаружить применение следующего варианта закона исключенного третьего: или все элементы множества $\mathscr{A}$ обладают данным свойством $\mathscr{C}$, или существует некоторый элемент $\mathscr{A}$, не обладающий этим свойством. Бишоп [2] образно называет этот принцип «принципом всеведения» и считает его главным виновником неконструктивности в классической математике.

Приведенные примеры вызывают естественное желание уточнить ряд понятий, связанных с вычислимостью. Например, какие действительные числа и функции считать вычислимыми? Каковы их свойства? Что понимать под «общим эффективным методом» вычисления точных границ ограниченных множеств (или вычисления корней знакопеременных функций), какие и как представленные исходные данные должен использовать такой метод и нельзя ли как-то уточнить интуитивно ощущаемую его невозможность? Забегая вперед, отметим, что при надлежащем уточнении соответствующих понятий в рассматриваемых примерах получаются следующие ситуации. В случае теоремы о точных границах можно привести пример (Шпекер [1]) ограниченной, возрастающей алгорифмической последовательности рациональных чисел, не имеющей вычислимой верхней границы (таким образом, не только невозможен общий метод вычисления границ, но и встречаются отдельные, притом достаточно простые множества, не имеющие точных вычислимых границ). В случае теоремы Коши невозможен алгорифм, находящий корни любой знакопеременной непрерывной вычислимой функции (в качестве исходных данных такой алгорифм дол-

*) Этот метод с небольшими изменениями может быть положен в основу алгорифма вычисления корней для знакопеременных непрерывных вычислимых функций, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.

жен был бы использовать вычисляющий алгорифм исходной функции; отметим, что искомый алгорифм невозможен уже для класса кусочно линейных функций вида $f(x)+c$, где c — вычислимое действительное число, а f—функция, график которой представлен на рис. 1). Вместе с тем невозможна вычислимая функция, принимающая значения разных знаков на концах данного сегмента и не обращающаяся в нуль ни в какой вычислимой точке этого сегмента (a priori нельзя исключить существование вычислимых знакопеременных функций, все корни которых «невычислимы»). Эти результаты принадлежат Цейтину [2], [6].

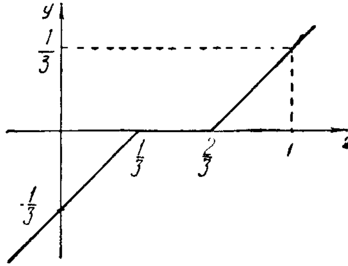


Рис. 1.

Кратко суммируя изложенное, можно выделить следующие два круга вопросов.

(1) Построение системы анализа, основанной на более ясных, чем теоретико-множественные, предпосылках и в большей степени, чем традиционный анализ, учитывающей реальные конструктивные и вычислительные возможности.

(2) Введение и изучение вычислимых объектов анализа. Исследование принципиальных границ вычислительных возможностей в анализе, изучение «эффективности» в анализе, в частности, исследование вопроса о том, по каким исходным данным можно находить те или объекты анализа.

В связи с этими проблемами возникли различные течения в основаниях математики и математическом анализе, объединяемые собирательным названием «конструктивный анализ» (в близком смысле употребляются также термины «рекурсивный анализ» и «вычислимый анализ») *). При этом, если исследования проблем (1)

*) Мы не останавливаемся здесь на берущем свое начало в монографиях Уайтхеда и Рассела [1]—[3] и Вейля [1]

связаны с разработкой тех или иных концепций в основаниях математики, то исследования проблем (2) могут проводиться и обычными теоретико-множественными средствами.

2. Переходя к краткому историческому обзору, отметим сразу громадные заслуги интуиционизма в формировании основных концепций конструктивного анализа. Большое значение сыграла также и уже упоминавшаяся книга Вейля [1], содержащая, в частности, один из первых подходов к понятию конструктивного действительного числа.

Весьма существенным этапом в развитии конструктивного анализа явилась выработка в 30-х годах нашего столетия благодаря работам Эрбрана, Гёделя, Тьюринга, Поста, Черча и Клини точного понятия алгорифма (фактически было предложено несколько внешне различных концепций, оказавшихся, однако, равнообъемными). Основываясь на точных понятиях алгорифма (соответственно машинах Тьюринга и рекурсивных функциях), Тьюринг [1]—[2], а также Банах и Мазур [1]*) независимо предложили в 1936—1937 гг. определения вычислимого (конструктивного) действительного числа. В своей первой работе Тьюринг определял вычислимое действительное число, как число, допускающее вычислимое десятичное разложение**). В последовавшем затем исправлении (Тьюринг [2]) это определение было изменено; выяснилось, что естественное на первый взгляд связывание вычислимости чисел с вычислимостью их систематических представлений в фиксированной системе счисления имело ряд принципиальных недостатков. Укажем лишь

«предикативном анализе». В предикативном анализе рассматриваемые объекты вводятся посредством индивидуальных определений в рамках некоторых фиксированных средств, при этом особое внимание уделяется исключению непредикативного образования понятий (подробнее см. Феферман [1]).

*) В [1] приводится лишь название доклада, прочитанного 23 января 1937 г. на заседании Польского математического общества. Некоторые сведения о его содержании можно найти в обзоре Мостовского [1].

**) Согласно Мостовскому [1] Банах и Мазур рассматривали действительные числа с примитивно рекурсивными десятичными разложениями.

на два из них: 1) не для любых двух систем счисления возможен алгорифм, позволяющий от вычислимых разложений в первой системе переходить к вычислимым разложениям во второй (см. теорему Мостовского — Успенского, § 3 гл. 4); 2) при любой фиксированной системе счисления невозможен алгорифм сложения действительных чисел, вычислимых относительно этой системы счисления. Отвлекаясь от технических деталей, можно сказать, что в своем исправленном определении Тьюринг связывает вычислимость действительного числа x с существованием вычислимой последовательности рациональных чисел $\mathfrak{A}$ (т. е. алгорифма, переводящего всякое натуральное число в рациональное число) *) такой, что при любом n

$$|\mathfrak{A}(n)-x|\leqslant 2^{-n}. \tag{3}$$

Хотя при последовательно конструктивной трактовке это определение и не может быть принято из-за фигурирующего в нем традиционного понятия действительного числа, содержащаяся в нем идея легко позволяет определить конструктивные действительные числа изначально, не апеллируя к другим концепциям действительных чисел. Для этого достаточно заменить условие (3) на условие

$$\text{при} \quad m\geqslant n \quad |\mathfrak{A}(n)-\mathfrak{A}(m)|\leqslant 2^{-n} \tag{4}$$

и понимать под конструктивными (вычислимыми) действительными числами вычислимые последовательности рациональных чисел, удовлетворяющие условию (4).

Изложенную концепцию конструктивного (вычислимого) действительного числа (ей отвечают и конструктивные числа, рассматриваемые в этой книге), по-видимому, можно считать окончательной. Интересно заметить, что Тьюринг отмечает влияние на свое определение некоторых идей Брауэра.

*) Конечно, мы имеем здесь в виду алгорифм в точном смысле слова (например, машину Тьюринга). Отметим, что вычислимость последовательностей рациональных чисел очевидным образом сводится к вычислимости арифметических функций (т. е. функций натурального аргумента с натуральными значениями).

Исследования, начатые Тьюрингом, Банахом и Мазуром, были продолжены в послевоенные годы. В 1949 г. появляется работа Шпекера [1], в которой, наряду с глубоким исследованием примитивно рекурсивно вычислимых объектов анализа (действительных чисел и функций), содержится знаменитый пример неубывающей ограниченной алгорифмической последовательности рациональных чисел, не являющейся вычислимо сходящейся. (Этот результат уже упоминался нами выше в связи с вопросом о точных верхних границах.) Говоря несколько точнее, для последовательности Шпекера $\mathfrak{S}$ невозможна общерекурсивная функция h такая, что для любых i, j, n, удовлетворяющих неравенству $i, j \geqslant h(n)$, выполняется

$$|\mathfrak{S}(i) - \mathfrak{S}(j)| < 2^{-n}.$$

Таким образом, скорость сходимости этой последовательности (имеется в виду сходимость, утверждаемая известной классической теоремой) не поддается эффективной оценке.

Дальнейшему изучению различных представлений вычислимых действительных чисел были посвящены работы Петер [1] (1950 г.) (результаты Петер изложены также в ее известной монографии [2]), Майхилла [1] (1953 г.), Мешковского [1] (1956 г.) и Райса [1] (1954 г.). В работе Райса приводится, в частности, чрезвычайно прозрачное построение рассмотренного выше примера Шпекера.

В 1949—1950 учебном году в курсе лекций в Институте математики Польской академии наук Мазур последовательно изложил результаты по вычислимому анализу, полученные им до войны совместно с Банахом, а также свои послевоенные результаты. Записки этих лекций были впоследствии (1963 г.) изданы при участии Расевой и Гжегорчика в виде монографии (Мазур [1]). Монография Мазура содержит, в частности, компактное и глубокое изложение теории вычислимых действительных чисел и функций. Наряду с общей концепцией вычислимого действительного числа, аналогичной тьюринговой и параллельной канторовскому определению в традиционном анализе, в этой монографии исследуются и другие возможности определения вычислимого действительного числа (систематические дроби, дедекиндовы сечения). Изучается также примитивно рекурсивная вычислимость.

Интуитивная вычислимость в области натуральных чисел отождествляется Мазуром с общей рекурсивностью. Весьма своеобразным является подход к определению вычислимых объектов более сложных типов. Остановимся, например, на определении вычислимых натуральнозначных функционалов над арифметическими функциями. Функционал (в традиционном смысле — Мазур свободно использует концепции теоретико-множественной математики) называется вычислимым, если он переводит всякую вычислимую последовательность вычислимых арифметических функций (такая последовательность задается двухместной общерекурсивной функцией) в вычислимую последовательность натуральных чисел. Точнее говоря, при вычислимом функционале Φ для любой двухместной общерекурсивной функции f существует (доказательство этого существования может проводиться с использованием любых математических средств) общерекурсивная функция g такая, что

$$g(n) = \Phi(f(n, m)).$$

(Здесь $f(n, m)$ рассматривается как функция m при каждом фиксированном n.) В таком же порядке идей определяется и вычислимость действительной функции: функция φ вычислима, если она переводит всякую вычислимую последовательность вычислимых действительных чисел снова в вычислимую последовательность вычислимых действительных чисел. При этом вычислимые последовательности вычислимых действительных чисел трактуются при помощи двухместных вычислимых (по совокупности обоих аргументов!) аппроксимирующих рациональных функций. (Это, по существу, равносильно нашему определению последовательностей КДЧ (§ 1 гл. 3).) Одним из замечательных результатов, представленных в монографии Мазура, является теорема непрерывности вычислимых (в вышеуказанном смысле) функционалов и действительных функций. Эта теорема близка к теореме Маркова о невозможности конструктивных разрывов у вычислимых действительных функций (при несколько другой концепции вычислимой функции; см. Марков [3], [5]). Исследования Мазура послужили отправной точкой для ряда работ (Гжегорчик [2]—[5], Мостовский [2], Леман [1], Лахлан [1], Фридберг [2], Клауа [1]—[4], Ильзе [1]), объем, глубина и своеобразие которых позволяют говорить о польской школе вычислимого анализа.

В работе Мостовского [2] (1957 г.) исследованы различные способы определения вычислимых последовательностей вычислимых действительных чисел; среди полученных здесь результатов имеется теорема, полностью решающая вопрос о возможности эффективного перехода от вычислимых разложений в одной системе счисления к таким же разложениям в другой. Такой переход от системы с основанием m к системе с основанием n оказывается возможным в том и только в том случае, когда все простые делители n являются простыми делителями m (см. § 3 гл. 4; эта теорема независимо найдена также Успенским [2]—[3]). Некоторые вопросы, оставшиеся открытыми в этой работе, были решены Леманом [1] и Лахланом [1].

В фундаментальной работе Гжегорчика [2] (1955 г.) был предложен новый оригинальный подход к определению вычислимой действительной функции. Исходной точкой являлись всюду определенные вычислимые натуральнозначные функционалы над натуральными числами и арифметическими функциями. Вычислимые по Гжегорчику функционалы имеют генетический характер: каждый такой функционал получается из очень простых начальных функционалов посредством конечного числа применений некоторых правил (аналогичных соответствующим правилам в теории частично рекурсивных функций)*). Исходя из натуральнозначных функционалов, легко естественным образом ввести вычислимые функционалы с целыми значениями над целочисленными функциями.

В определении Гжегорчика вычислимость всюду определенной действительной функции φ связывается с существованием вычислимого по Гжегорчику функ-

*) Как заметил Клини [3], функционалы Гжегорчика идентичны всюду определенным общерекурсивным функционалам (см. Клини [4]).

ционала, переводящего каждую целочисленную функцию, аппроксимирующую произвольный действительный x, в функцию, аппроксимирующую $\varphi(x)$ (функция f (не обязательно вычислимая!) аппроксимирует x, если при всех n

$$\left| x - \frac{f(n)}{n+1} \right| < \frac{1}{n+1} \Big).$$

Из определения функционалов Гжегорчика вытекает их непрерывность (в бэровской метрике): при фиксированных натуральных аргументах значение вычислимого функционала на данных функциях $f_1, \ldots, f_n$ определяется некоторым начальным отрезком значений этих функций. Используя это обстоятельство и всюду определенность вычислимых функционалов, Гжегорчик доказал с помощью теоремы Бореля о покрытиях, что вычислимые в его смысле действительные функции вычислимо равномерно непрерывны на каждом сегменте. Идеи Гжегорчика развивались затем немецким математиком Клауа; полученные Клауа результаты суммированы в его монографии [4].

Начиная с 1955 г. преимущественно в докладах Французской Академии наук был опубликован ряд работ Лакомба, Крайзела, Шёнфилда и Фридберга (см. также труды симпозиума Constructivity in Mathematics (Амстердам, 1957)). Среди принципиальных результатов, полученных этими авторами, упомянем следующие*). Крайзелом, Лакомбом и Шёнфилдом [1]—[2] была доказана вычислимая непрерывность эффективных функционалов над бэровским пространством общерекурсивных функций, Лакомбом [2] установлено существование вычислимых действительных функций, не являющихся равномерно непрерывными, Лакомбом [2], [4] построен пример вычислимой, вычислимо равномерно непрерывной функции, не достигающей своего максимума ни в какой вычислимой точке

*) Аналогичный круг результатов был в то же время получен в Советском Союзе И. Д. Заславским и Г. С. Цейтиным (Заславский [1]—[2], [4] — вычислимые функции с необычными свойствами, Цейтин [3]—[5] — теоремы непрерывности, Заславский, Цейтин [1]—[2] — сингулярные покрытия). О советской школе конструктивного анализа речь пойдет ниже.

(источником такого рода конструкций может служить построенный Клини [2] пример бесконечного дерева с конечным ветвлением, все общерекурсивные пути которого конечны), Крайзелом и Лакомбом [1] доказано существование сингулярных интервальных покрытий (см. § 1 гл. 8).

Характерной чертой представленных работ является то обстоятельство, что их авторы интересуются в основном кругом проблем (2) (п. 1) и не связывают себя никакими специфическими концепциями в основаниях математики. В определениях и доказательствах свободно используются понятия, методы и результаты теоретико-множественной математики. Преимуществом такой позиции является большая гибкость, позволяющая, в частности, получать весьма интересные результаты, характеризующие отношения между вычислимыми и невычислимыми объектами, а также возможность излагать вычислимый анализ на базе привычного языка и хорошо разработанной символики традиционной математики. Вместе с тем критика, которой подвержен теоретико-множественный стиль мышления, переносится и на эти результаты, что делает данный путь малоприемлемым для исследователей, интересующихся кругом проблем (1) (т. е. изначальным «замкнутым в себе» построением конструктивного анализа). Следует отметить, что во многих случаях теоретико-множественные методы могут быть элиминированы, что позволяет использовать значительную часть достижений традиционных систем вычислимого анализа и при последовательно конструктивном подходе. Однако дело не всегда обстоит так просто: например, определение вычислимой по Гжегорчику действительной функции настолько пронизано теоретико-множественными концепциями (арифметическая функция, действительное число), что даже формулировка содержательных аналогов этого определения, не говоря уже о теореме равномерной непрерывности, в рамках нетрадиционной системы анализа (скажем, развиваемой в данной книге) представляется нетривиальной.

Параллельно с рассмотренными работами предпринимались также попытки построения нетрадиционных систем вычислимого анализа. Здесь следует прежде всего сказать о рекурсивном анализе Гудстейна*) (первая относящаяся сюда статья Гудстейна, сданная в печать в 1941 г., увидела свет в 1945 г.; исследования Гудстейна собраны в двух его монографиях [1] и [2], объединенных в русском переводе в одну книгу). Характерной чертой подхода Гудстейна является стремление строить рекурсивный анализ на возможно более простой логической базе — именно, на базе примитивно рекурсивной арифметики или, точнее, на основе разработанной им оригинальной аксиоматической теории некоторых классов арифметических функций (исчисление равенств Гудстейна; за подробной общей характеристикой как исчисления равенств, так и подхода Гудстейна вообще мы отсылаем читателя к статье Шанина [8]). Объектом рассмотрения являются рекурсивные (чаще всего примитивно рекурсивные) функции над полем рациональных чисел с рациональными значениями, а также рекурсивные последовательности таких функций, задаваемые двухместными рекурсивными функциями. При построении анализа последовательно используются аппроксимативные методы, причем объекты, обычно возникающие в анализе из аппроксимаций в результате предельных переходов, как правило, не вводятся. Например, у Гудстейна фактически отсутствует понятие рекурсивной действительной функции, хотя читатель, владеющий какой-нибудь концепцией действительной функции, без труда обнаружит приводящие к таким функциям последовательности рациональных приближений. Достоинством этой методики является логическая простота используемых понятий, вместе с тем она не лишена, по мнению автора, и некоторых недостатков — по мере накопления никак не обозначенных предельных переходов растет громоздкость (но не сложность!) определений и формулировок теорем. В целом анализ приобретает очень необычный вид, что существенно затрудняет математику, интересующемуся кругом проблем (2) (п. 1), соотнесение получаемых результатов к привычным ему математическим структурам.

*) Мы не касаемся сейчас занимающего совершенно особое место интуиционистского анализа (см. Гейтинг [3]); его плодотворное влияние практически на всех исследователей в данной области уже отмечалось.

Следует отметить, что в работах Гудстейна, по-видимому, впервые были систематически изучены с точки зрения точной теории алгорифмов теоремы о среднем значении и был предложен плодотворный подход к установлению рекурсивных аналогов этих теорем, при котором вместо объекта, придающего функции требуемое значение, отыскивался рекурсивный объект, придающий требуемое значение с некоторой наперед фиксированной точностью. Такого рода ε-варианты теорем существования иногда называют теоремами гудстейновского типа.

В 1966—1967 гг. с оригинальной и чрезвычайно далеко продвинутой системой конструктивного анализа выступил известный американский математик Бишоп (см. монографию [2] (1967 г.), а также резюме [1], [3] доклада Бишопа на Московском международном конгрессе математиков). Конструктивный анализ Бишопа занимает промежуточное положение между интуиционистским анализом и системами, использующими точные понятия алгорифма. Солидаризируясь с интуиционистской критикой теоретико-множественной математики, Бишоп вместе с тем стремится избежать того, что он называет «озабоченностью философскими проблемами конструктивизма за счет конкретной математической активности». Им отвергаются как интуиционистские теоремы типа брауэровской теоремы о веере, влекущей равномерную непрерывность интуиционистских действительных функций, так и претензии точных концепций алгорифмов на полное выражение сущности вычислимого (тезисы Чёрча, Тьюринга, принцип нормализации). И то и другое содержит сверхматематические, а потому неприемлемые предположения. Бишоп развертывает свой конструктивный анализ, доводя изложение до глубоких результатов, относящихся к теории функций комплексной переменной и функциональному анализу, на основе интуитивной концепции конструктивности, предполагающей, в частности, первоначальную интуицию натуральных чисел и их арифметики и тот взгляд, что любое математическое утверждение должно в конечном счете выражать некоторый факт вычислительного характера о натуральных числах (те или иные вычисления над натуральными числами дают тот или иной результат). Монография Бишопа [2], написанная с большим педагогическим мастерством, позволяет говорить о несомненном и значительном успехе этой программы. Указанное обстоятельство, однако, ни в коей мере не умаляет важности исследований, использующих строгие понятия алгорифма. К преимуществам таких исследований относится и бо́льшая точность в постановке задач, и возможность доказательства неразрешимости многих естественных алгорифмических проблем *), и, наконец, возможность изучения специфических свойств вычислимых в точном смысле объектов. Интерес получаемых здесь результатов очевиден, поскольку даже те немногочисленные математики, которые, подобно Бишопу, отвергают абсолютистские притязания точных концепций алгорифма, по-видимому, признают их очень большую общность.

Представляется весьма правдоподобным, что большинство результатов Бишопа может быть истолковано и в рамках систем анализа, опирающихся на точное понятие алгорифма.

Излагаемая в данной книге система конструктивного анализа принадлежит к так называемому конструктивному направлению в математике, главные положения которого были выдвинуты в 1948—1949 гг. А. А. Марковым. Формирование основных понятий этой системы относится к 50-м годам; в это же время были получены и наиболее принципиальные, определившие современное лицо теории, результаты. Здесь следует прежде всего указать на основополагающий вклад самого А. А. Маркова, а также его учеников Н. А. Шанина, И. Д. Заславского и Г. С. Цейтина. Краткая характеристика конструктивного направления и строящегося в его рамках конструктивного анализа приводится в следующих пунктах. Ниже прилагательное «конструктивный» будет (за исключением особо оговоренных случаев) употребляться для указания принадлежности того или иного метода, результата и т. п. к конструктивному направлению в математике. В частности, термин

*) Здесь имеет место определенная аналогия с прогрессом, достигнутым путем использования точных концепций алгорифма в изучении известных алгорифмических проблем логики, теории чисел, алгебры и топологии.

«конструктивный анализ» закрепляется за излагаемой нами системой.

Заканчивая наш краткий обзор, отметим, что с рассмотренных позиций исследовались (в особенности в последние годы) и достаточно далекие области математики. В этой связи, помимо монографии Бишопа и посвященных теории меры глав монографии Мартин-Лёфа [1]*), можно упомянуть предложенный Шаниным [2], [6] подход к построению конструктивной теории меры и интеграла Лебега, посвященный этой же тематике цикл исследований чехословацкого математика Демута [1]—[16], работы Косовского [1]—[4] и Лоренца [1] по конструктивной теории вероятностей, работы Манукян [1], Лифшица [4]—[5] по конструктивным функциям комплексной переменной, работы Оревкова [1], [2], [4], Заславского и Манукян [1] по комбинаторной топологии, работы Фан Динь Зиеу [1]—[9] по конструктивным линейным топологическим пространствам и обобщенным функциям (перечисленные работы принадлежат конструктивному направлению), а также исследования Лакомба [6] и Ногиной [1]—[3], относящиеся к рекурсивной общей топологии.

Наконец, в последнее время, благодаря работам А. Н. Колмогорова и его учеников (Мартин-Лёф, Левин и др.; см. обзорную статью Звонкина и Левина [1]), выяснилась возможность плодотворного применения теории рекурсивных функций для обоснования теории информации и теории вероятностей.

3. Конструктивное направление в математике может быть охарактеризовано следующими основными чертами (ср. Марков [6], Цейтин, Заславский, Шанин [1]—[2]).

I. В качестве объектов изучения выступают конструктивные объекты, при обращении с которыми допускается абстракция потенциальной осуществимости, но полностью исключается абстракция актуальной бесконечности.

---

*) Эта чрезвычайно интересная монография Мартин-Лёфа, содержащая также сжатый очерк элементарных вопросов вычислимого анализа, не была доступна автору в процессе работы над данной книгой.

II. Интуитивные понятия «эффективности», «вычислимости» и т. п. связываются с точным понятием алгорифма.

III. Используется особое, учитывающее специфику конструктивных объектов, понимание математических суждений.

Конструктивное направление возникло приблизительно на той же критической базе, что и интуиционизм; вместе с тем положительные программы этих двух течений имеют принципиальные различия. Конструктивизм весьма далек как от философских посылок интуиционизма, так и от конкретных интуиционистских теорий, в особенности, от занимающих в интуиционистской математике одно из центральных мест теорий, оперирующих со свободно становящимися последовательностями. Распространенное убеждение в близости (или даже в тождестве) интуиционистской и конструктивной математической практики следует признать глубоко ошибочным.

В целом конструктивная математика использует гораздо более «скромную» систему абстракций, нежели традиционная. Это обстоятельство, однако, само по себе не свидетельствует об ограниченности возможностей приложений конструктивных теорий. Внешний мир не подсказывает нам с необходимостью ни субстанций более общих, чем конструктивные объекты, ни идеи актуальной бесконечности (на последнее указывал еще Гильберт [1]). Фактически уже сегодня развиваемый в рамках конструктивного направления конструктивный анализ может служить теоретической базой для обычных приложений дифференциального и интегрального исчислений. Развитие событий в этом направлении сдерживается как традициями образования, так и сравнительной громоздкостью конструктивных теорий. Является ли эта громоздкость неизбежной «платой за конструктивность» или возникает из-за недостаточной разработанности языка, покажет будущее *).

*) Интересные исследования в направлении упрощения изложения конструктивного анализа выполнены Цейтиным [7], [10]; предлагаемый им подход, однако, далеко уводит от привычных языков традиционной математики.

Остановимся несколько подробнее на положениях I—III.

4. Понятие конструктивного объекта представляется первоначальным. Определяющей чертой конструктивных объектов является то обстоятельство, что они конструируются по определенным правилам из некоторых элементарных объектов, неразложимых в процессе этих построений. В качестве примеров можно указать на возведение зданий из кирпичей и блоков, формирование железнодорожных составов, сборку часов на конвейере и т. п.

Исключительную роль в жизни человечества играют конструктивные объекты специального типа — знаковые комплексы. Базой, на которой они возникают, являются конечные списки (алфавиты) элементарных, рассматриваемых как неразложимые знаков (букв). Знаковыми комплексами являются рукописные и печатные тексты, формулы химических соединений, партитуры музыкальных произведений и т. д.

Конструктивная математика в качестве главного типа изучаемых конструктивных объектов имеет дело с частным случаем знаковых комплексов — словами в том или ином алфавите. Понятие слова в данном алфавите также является, по существу, первоначальным и сводится к представлению о получаемых последовательным выписыванием прямолинейных цепочках букв этого алфавита *). Например, цепочки «абракадабра», «слово», «аввса» являются словами в русском алфавите. При обращении со словами конструктивная математика, как и всякая абстрактная наука, исходит из некоторых идеализирующих действительность предположений (см. Марков [2]).

В частности, мы предполагаем, что любая буква используемого алфавита может быть воспроизведена в любом числе экземпляров. Следовательно, можно осуще-

---

*) Точнее было бы говорить о буквах, одинаковых с конкретными знаками, участвующими в непосредственном задании алфавита. Наша носящая первоначальный и несколько условный характер способность опознавать используемые конкретные буквы как одинаковые или различные дает возможность говорить о разных конкретных экземплярах знаков, одинаковых с данной конкретной буквой, как об одной букве.

ствлять процессы написания сколь угодно длинных слов. В этом допущении проявляется специфическая абстракция, которую А. А. Марков называет абстракцией потенциальной осуществимости и которая «состоит в отвлечении от реальных границ наших конструктивных возможностей, обусловленных ограниченностью нашей жизни в пространстве и времени» (Марков [2; стр. 15]). Относительно используемых алфавитов предполагается также, что они обеспечивают однозначность чтения слов: каждое слово в данном алфавите единственным образом составлено из его букв. Эта однозначность позволяет естественным образом говорить об одинаковости слов. Два слова в данном алфавите одинаковы (графически равны), если они составлены из одних и тех же букв, расположенных в одинаковом порядке. Процесс опознавания графического равенства сводится к одновременному последовательному «чтению» обоих испытуемых слов и сравнению одновременно появляющихся в поле зрения букв. При неблагоприятном исходе этого процесса испытуемые слова считаются (графически) различными.

Слова представляют собой весьма общий, во всяком случае вполне достаточный для всех наших рассмотрений тип конструктивных объектов. Фактически во всех мыслимых случаях использование знаковых комплексов, при построении которых происходит уклонение от прямолинейного расположения знаков, объясняется не принципиальными причинами, а лишь соображениями привычности и практического удобства. Сами эти комплексы могут быть по простым правилам однозначно преобразованы в слова. (Например, текст романа «Война и мир» мог бы быть записан (с использованием буквы «$*$» для обозначения пробела) в виде одного слова на достаточно длинной ленте. Однако вряд ли было бы удобно пользоваться таким «изданием».)

В качестве примеров кодирования непрямолинейных знаковых комплексов словами можно указать на определения изображения и записи нормального алгорифма (см. п. 8 § 1 гл. 1). При такого рода кодировании обычным является использование вспомогательных «разделительных» букв, не входящих в алфавиты исходных знаковых комплексов. Например, произвольная матрица вида

$$\begin{pmatrix} P_1, & P_2 \\ P_3, & P_4 \\ P_5, & P_6 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где P_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ — слова в некотором алфавите A, может быть закодирована следующим образом. Выберем две различные буквы, отличные от всех букв алфавита A, и рассмотрим слово вида

$$P_1\alpha P_2\alpha\beta P_3\alpha P_4\alpha\beta P_5\alpha P_6\alpha\beta, \tag{6}$$

где через α и β обозначены выбранные нами буквы. Ясно, что по слову (6) однозначно восстанавливается матрица (5).

Употребление разделительных букв позволяет также рассматривать системы слов в данном алфавите, что является необходимым при реализации алгорифмов, использующих несколько исходных данных. Пусть A — некоторый алфавит и через α обозначена какая-то не входящая в него буква. Произвольное слово вида

$$P_1\alpha P_2\alpha \ldots \alpha P_n$$

(при $n = 1$ α отсутствует), где P_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — слова в A, называется α-системой (α-кортежем, α-вектором) порядка n в алфавите A.

В терминах слов легко вводятся первоначальные понятия анализа. Например, натуральные числа можно трактовать (что мы и будем делать в дальнейшем) как слова вида 0, 0|, 0||, ... в двухбуквенном алфавите {0|}; дополнение этого алфавита буквами «—» и «/» позволяет аналогично определить рациональные числа.

5. Одно из центральных мест в математике занимают алгорифмы. Под «алгорифмом» принято понимать «точное предписание, определяющее вычислительный процесс, ведущий от варьируемых исходных данных к искомому результату» (Марков [2; стр. 3]). Это интуитивное понятие можно охарактеризовать следующими тремя чертами (Марков [2; стр. 3]):

«а) точность предписания, не оставляющая место произволу и его общепонятность — определенность алгорифма;

б) возможность исходить из варьируемых в известных пределах исходных данных — массовость алгорифма;

в) направленность алгорифма на получение некоторого искомого результата, в конце концов и получаемого при надлежащих исходных данных, — результативность алгорифма».

Интуитивная концепция алгорифма, вполне достаточная для опознания в качестве алгорифмов тех или иных конкретных предписаний, однако, слишком расплывчата, чтобы строго доказывать теоремы, характеризующие класс алгорифмов в целом. Руководствуясь интуицией, нельзя, например, доказать невозможность алгорифма, вычисляющего ту или иную арифметическую функцию, хотя в ряде случаев такая невозможность ощущается совершенно ясно.

Стремление сделать понятие алгорифма достаточно отчетливым и доступным изучению математическими средствами привело к разработке точных концепций алгорифма. В настоящее время известен ряд таких концепций (рекурсивные функции, машины Тьюринга, нормальные алгорифмы Маркова и т. д.), причем все эти концепции равнообъемны. Алгорифмы в смысле того или иного точного определения являются и алгорифмами в интуитивном смысле. С другой стороны, выявленная большим числом исследований чрезвычайная общность и плодотворность точных определений алгорифма сделали практически общепринятой точку зрения, согласно которой эти определения исчерпывающим образом отражают интуитивные представления, связанные с алгорифмами. (Выражением этой точки зрения соответственно для рекурсивных функций, машин Тьюринга и нормальных алгорифмов являются тезис Чёрча, тезис Тьюринга (см. Клини [4]) и принцип нормализации (Марков [2], см. также § 1 гл. 1).)

Мы будем использовать в качестве точного понятия алгорифма понятие нормального алгорифма, предложенное А. А. Марковым [1]—[2] и специально приспособленное для оперирования со словами. Следует отметить, что получаемые результаты, по существу, не зависят от принятия или непринятия принципа нормализации. Все построения в конечном счете могут быть выполнены в рамках теории нормальных алгорифмов, и от позиции в отношении указанного принципа зависит лишь признание большей или меньшей общности излагаемых теорий (трактуют ли эти теории о свойствах «эффективного» вообще или относятся лишь к частным, хотя и, очевидно, обширным случаям). Ниже, если из контекста не следует противное, термин «алгорифм» используется как синоним термина «нормальный алгорифм».

6. Конструктивная логика формируется на основе предпосылок I—II (п. 3) и учитывает как специфику конструктивных объектов, так и принципиальные возможности алгорифмов*). Основные различия с традиционной логикой возникают здесь в связи с трактовкой экзистенциальных предложений и дизъюнкции. Представление о конструктивных объектах как результатах некоторых конструктивных процессов приводит к точке зрения на утверждения существования, согласно которой существование конструктивного объекта с данным свойством может считаться установленным только в том случае, когда указан способ потенциально осуществимого построения объекта с требуемым свойством. Традиционная логика разрешает в таких случаях доказывать существование искомого объекта косвенными средствами, например, приведением к противоречию допущения о его несуществовании. Таким образом, традиционная логика пренебрегает различиями суждений вида $\exists x \mathscr{B}(x)$ и $\neg\neg\exists x \mathscr{B}(x)$, тогда как конструктивная логика считает эти различия существенными; второе суждение с конструктивной точки зрения, вообще говоря, слабее первого. (Мы используем обычные обозначения логических связок и кванторов: $\vee$ — дизъюнкция, $\&$ — конъюнкция, $\supset$ — импликация, $\equiv$ — эквивалентность, $\neg$ — отрицание, $\forall$ — квантор общности, $\exists$ — квантор существования.) Чтобы подчеркнуть эту новую трактовку существования, мы часто будем употреблять при формулировании экзистенциальных предположений

*) Мнение, что изучение различных объектов может требовать различных логик, высказывалось математиками, придерживающимися самых разных ориентаций в философии математики (см. Гейтинг [3], где приводится точка зрения Брауэра, Колмогоров [2], Марков [9]).

словосочетания типа «осуществим», «можно построить» и т. п.

Из намеченной только что трактовки существования естественным образом вытекает и следующее понимание дизъюнкции. Дизъюнкция $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ считается доказанной, если мы в состоянии указать ее верный член. Отметим, что с традиционной точки зрения для доказательства дизъюнкции достаточно лишь опровергнуть утверждение о неверности обоих ее членов, т. е. установить, что $\urcorner(\urcorner\mathscr{A} \,\&\, \urcorner\mathscr{B})$. Насколько последнее суждение может быть слабее исходной (конструктивно понимаемой) дизъюнкции, показывает рассмотренное в п. 1 действительное число a, для которого указание верного члена дизъюнкции

$$a = 0 \vee a \neq 0$$

равносильно решению проблемы Ферма. Ясно, что при конструктивной интерпретации дизъюнкции закон исключенного третьего не может быть принят.

Специфическим является также и толкование параметрических утверждений существования. Суждение вида

$$\forall x \exists y \mathscr{B}(x, y) \tag{7}$$

(«для любого x существует (можно построить!) y такой, что $\mathscr{B}(x, y)$»), где переменные x и y могут пробегать некоторый первоначальный класс конструктивных объектов (скажем, слова в фиксированном алфавите), считается доказанным лишь в том случае, когда указано построение алгорифма (в точном смысле слова) $\mathfrak{A}$, применимого к любому x и такого, что всегда выполняется

$$\mathscr{B}(x, \mathfrak{A}(x)).$$

Утверждение о возможности построения этого алгорифма можно считать «расшифровкой» суждения (7).

Рассмотренная трактовка суждений вида (7) ставит вопрос о средствах, при помощи которых можно убеждаться в том, что данный алгорифм применим к некоторому слову. Мы будем придерживаться здесь принципа, выдвинутого Марковым [4], [6], позволяющего использовать в таких ситуациях доказательства «от противного». Согласно этому принципу, если опровергнуто утверждение о неприменимости алгорифма к некоторому исходному данному x, то этот алгорифм применим к x. Если выражать применимость алгорифма $\mathfrak{A}$ к x записью

$$!\mathfrak{A}(x),$$

то принцип Маркова запишется так:

$$\neg\neg !\mathfrak{A}(x) \supset !\mathfrak{A}(x).$$

Интуитивное основание, оправдывающее в рамках абстракции потенциальной осуществимости этот принцип, состоит в том, что при выполнении $\neg\neg !\mathfrak{A}(x)$ процесс применения алгорифма $\mathfrak{A}$ к x не может продолжаться неограниченно долго и, следовательно, есть возможность получить результат применения $\mathfrak{A}$ к x, выполняя шаг за шагом этот алгорифм и ожидая окончания его работы.

Принцип Маркова позволяет также оправдать и следующий способ рассуждения, в силу чего обсуждаемый принцип иногда называют принципом конструктивного подбора. Пусть $\mathscr{A}$ — некоторое разрешимое свойство натуральных чисел, т. е. имеется алгорифм, позволяющий для каждого натурального числа узнать, обладает оно свойством $\mathscr{A}$ или нет. Тогда, если опровергнуто утверждение $\forall n \neg \mathscr{A}(n)$, то можно найти k, при котором верно $\mathscr{A}(k)$.

Стремление распространить намеченные принципы на понимание суждений более сложной структуры приводит к задаче построения конструктивной логики. Эта чрезвычайно сложная проблема до сих пор полностью не решена (да и, по-видимому, само существо дела исключает возможность окончательного решения). Вместе с тем здесь имеются весьма существенные достижения, обеспечивающие логическую базу для практических запросов конструктивных математических теорий*).

В этой связи следует указать на основополагающие работы Гейтинга [1]—[2], Колмогорова [2], Клини [1], посвященные формализации и интерпретации фрагментов интуиционистской логи-

*) Материал, набранный мелким шрифтом, может быть пропущен при первом чтении.

ки, и на относящиеся непосредственно к конструктивной логике исследования Маркова [8]—[9] и Шанина [4].

В работе Шанина [4] разработаны формализованные логико-математические языки, вполне достаточные для большинства приложений; понимание формул этих языков сводится к пониманию так называемых нормальных формул, т. е. формул, не содержащих квантора существования и дизъюнкции. Это сведе́ние осуществляется с помощью стройной системы правил (алгорифм расшифровки), отражающей конструктивное понимание различных комбинаций логических связок и кванторов и позволяющей преобразовать любую формулу рассматриваемого языка либо к нормальной формуле, либо к формуле вида

$$\exists x_1 \ldots x_n \mathscr{B},$$

где $\mathscr{B}$ — нормальная формула. Нормальные формулы в первом приближеиии можно толковать средствами традиционной логики, толкование же формул второго вида объяснялось выше.

В последние годы Марковым [8]—[9] разработан подход к построению конструктивной логики «снизу», предлагающий охват все более и более сложных по структуре суждений посредством расширяющейся иерархии логико-математических языков. По-видимому, на некоторой ступени этой иерархии в рассмотрение войдут все нормальные формулы, что в сочетании с упоминавшимся выше алгорифмом расшифровки даст некоторую семантику для практически всех возможных суждений.

Мы не имеем возможности входить здесь в сложные технические детали этих теорий и ограничимся лишь несколькими примерами, которые вместе с изложенными в начале пункта общими принципами и материалом п. 7 дадут читателю достаточную для чтения этой книги ориентировку.

В приведенных ниже примерах допустимыми значениями переменных считаются произвольные слова в некотором фиксированном алфавите A. Формулы $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$ предполагаются нормальными.

Рассмотрим суждения вида

$$\forall x (\mathscr{B}_1(x) \vee \mathscr{B}_2(x)), \tag{8}$$

$$\forall x (\mathscr{B}_1(x) \supset (\mathscr{B}_2(x) \vee \mathscr{B}_3(x))), \tag{9}$$

$$\forall x (\mathscr{B}_1(x) \supset \exists y \mathscr{B}_2(x, y)), \tag{10}$$

$$\forall x (\exists y \mathscr{B}_1(x, y) \supset \exists z \mathscr{B}_2(x, z)). \tag{11}$$

Эти суждения понимаются следующим образом (в (11) через α обозначена некоторая буква, отличная от всех букв алфавита A).

(8) Можно построить (нормальный) алгорифм $\mathfrak{A}$, перерабатывающий всякое слово x (в алфавите A) в $0|$ или в $0||$ так, что при $\mathfrak{A}(x) \risingdotseq 0|$ верно $\mathscr{B}_1(x)$, а при $\mathfrak{A}(x) \risingdotseq 0||$ верно $\mathscr{B}_2(x)$.

(9) Можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$, перерабатывающий всякое слово x, для которого выполняется $\mathscr{B}_1(x)$, в $0|$ или в $0||$ и такой, что при $\mathfrak{A}(x) \risingdotseq 0|$ верно $\mathscr{B}_2(x)$, а при $\mathfrak{A}(x) \risingdotseq 0||$ верно $\mathscr{B}_3(x)$.

(10) Можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$ так, что для любого слова x, удовлетворяющего условию $\mathscr{B}_1$, $\mathfrak{A}$ применим к x и имеет место

$$\mathscr{B}_2(x, \mathfrak{A}(x)).$$

(11) Можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$ так, что для любых слов x и y, при которых выполняется $\mathscr{B}_1(x, y)$, $\mathfrak{A}$ применим к слову xay и имеет место

$$\mathscr{B}_2(x, \mathfrak{A}(xay)).$$

В связи с интерпретацией суждений вида (8) интересно вернуться к закону исключенного третьего. Обоснование суждения

$$\forall x(\mathscr{B}_1(x) \vee (\neg \mathscr{B}_1(x)))$$

связывается с построением алгорифма, указывающего для каждого слова x верный член внутренней дизъюнкции. Можно построить конкретную формулу $\mathscr{B}_1$, для которой такой алгорифм невозможен. Для этой формулы, следовательно, будет выполняться

$$\neg \forall x(\mathscr{B}_1(x) \vee (\neg \mathscr{B}_1(x))). \qquad (12)$$

Формулирование суждений такого вида перед неподготовленной аудиторией не раз было источником возникавших вокруг конструктивной математики недоразумений; в самом деле, из (12) по правилам традиционной логики немедленно получается «верное» суждение

$$\exists x(\mathscr{B}_1(x) \mathbin{\&} (\neg \mathscr{B}_1(x))).$$

В действительности же выражаемая суждением (12) невозможность некоторого алгорифма не имеет ничего парадоксального.

7. Говоря о месте понятия множества в конструктивной математике, следует подчеркнуть его подчиненную, техническую роль; по существу, речь идет лишь об удобном варианте терминологии. Термины «множество» и «свойство» считаются синонимами; задание множества конструктивных объектов какого-то типа (ниже рассматриваются множества слов в некотором алфавите) состоит в формулировании свойства объектов этого типа, а принадлежность конструктивного объекта множеству просто означает, что этот объект обладает соответствующим свойством. Ясно, что такая трактовка (ср. Вейль [1], Гейтинг [3; стр. 49]) вовсе не связывает с множествами идею о совокупностях одновременно существующих предметов.

Строгое использование множеств предполагает фиксацию формализованного логико-математического языка (см., например, Шанин [4]), средствами которого формулируются свойства (под свойствами понимаются однопараметрические формулы данного языка). При этом сами множества оказываются конструктивными объектами (словами в некотором алфавите) и, в частности, могут выступать в качестве исходных данных алгорифмов. Таким образом, в конструктивной математике, по существу, нет единого понятия множества — объем этого понятия зависит от выбираемого языка и может меняться от случая к случаю.

Мы будем обращаться с множествами нестрого, формулируя задающие их свойства на обычном естественном языке. При этом подразумевается, что формальный язык, в рамках которого оправдываются наши действия, может быть построен. (Действительное построение и последовательное использование точных языков ввело бы в изложение большое число формально-логических деталей, что несомненно нежелательно при первом знакомстве с предметом. С построением основных разделов конструктивного анализа на базе логико-математических языков можно ознакомиться в работе Шанина [6].)

Мы будем использовать обычные теоретико-множественные обозначения. Принадлежность элемента множеству выражается при помощи знака «$\in$». Включение множеств трактуется с помощью импликации: $\mathscr{M}_1 \subseteq \mathscr{M}_2$, если $\forall x (\mathscr{M}_1(x) \supset \mathscr{M}_2(x))$. Строгое включение $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$ означает, что $\mathscr{M}_1 \subseteq \mathscr{M}_2$, и можно указать элемент $\mathscr{M}_2$, не принадлежащий $\mathscr{M}_1$.

Равенство множеств понимается как эквивалентность соответствующих свойств. В тех случаях, когда это не ведет к недоразумениям, мы не различаем равные множества, говоря о представленных синтаксически разными свойствами равных множествах как об одном.

Определение операций над множествами обычным образом сводится к использованию логических связок (конъюнкция для пересечения, дизъюнкция для объединения и отрицание для дополнения (речь идет о дополнении до множества всех слов в данном алфавите)). Следует лишь иметь в виду, что конструктивная трактовка суждений приводит в некоторых случаях к новым свойствам операций: двойное дополнение множества не обязательно равно ему самому, и, например, конструктивный континуум (множество всех конструктивных действительных чисел) не есть объединение множеств $x < 0$, $x = 0$ и $x > 0$. Для пересечения, объединения и дополнения множеств используются обычные обозначения: $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2$, $\mathscr{M}_1 \cup \mathscr{M}_2$, $\overline{\mathscr{M}}$. Отметим, что свойствам традиционной операции объединения ближе соответствует «слабое объединение»

$$\overline{\overline{\overline{\mathscr{M}}_1 \cap \overline{\mathscr{M}}_2}}.$$

Использование α-систем (п. 4), где α — буква, не принадлежащая исходному алфавиту, позволяет легко ввести декартово произведение множеств. Через $(\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2 \times \ldots \times \mathscr{M}_k)_\alpha$ обозначается множество α-систем $x_1 \alpha x_2 \alpha \ldots \alpha x_k$, где $x_i \in \mathscr{M}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Там, где это не может повлечь недоразумений, это обозначение заменяется более коротким $\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2 \times \ldots \times \mathscr{M}_k$ или $\mathscr{M}^k$, если все $\mathscr{M}_i$ равны $\mathscr{M}$.

Нормальные алгорифмы непосредственно задаются не как слова. Вместе с тем каждый такой алгорифм (в наперед фиксированном алфавите) имеет некоторый код, называемый записью этого алгорифма (см. п. 8 § 1 гл. 1). Запись алгорифма (для алгорифма $\mathfrak{A}$ она обозначается $\{\mathfrak{A}\}$) есть слово в двухбуквенном алфавите $\{0|\}$, позволяющее однозначно восстановить этот алгорифм. Говоря о множествах алгорифмов, мы будем иметь в виду словарные множества, — именно, множества соответствующих записей.

В связи с понятием «множество» вернемся к примерам конструктивной интерпретации суждений (п. 6). Сделанные в п. 6 разъяснения относились к случаю переменных, пробегающих все слова в данном алфавите. (Такие переменные мы называем базисными.) На практике же часто оказывается удобным использование переменных («подчиненные» переменные), допустимыми значениями которых являются слова, принадлежащие тем или иным множествам. Ясно, что интерпретация суждения с подчиненной переменной должна, вообще говоря, зависеть от множества допустимых значений этой переменной.

Итак, пусть $\mathscr{M}$ — некоторое множество (т. е. однопараметрическое условие), x — переменная, имеющая $\mathscr{M}$ множеством своих допустимых значений. По правилам конструктивной расшифровки $\mathscr{M}$ приводится либо к нормальной формуле, либо к формуле вида

$$\exists z \mathscr{B}(y, z)$$

(где $\mathscr{B}$ — нормальная формула, а z и y — базисные переменные). В первом случае множество $\mathscr{M}$ и переменная x называются нормальными. Для нормальных переменных (а также в тех случаях, когда множество $\mathscr{M}$ равно нормальному) мы сохраняем старую интерпретацию. Во втором случае дело обстоит сложнее — установление принадлежности слова Y множеству $\mathscr{M}$ связано с решением конструктивной задачи, — именно, с построением соответствующего слова Z. Грубо говоря, идея интерпретации заключается здесь в использовании в качестве исходных данных тех или иных связанных с $\mathscr{M}$ алгорифмов, не элементов этого множества, а слов вида $Y\alpha Z$, где Y и Z таковы, что выполняется

$$\mathscr{B}(Y, Z).$$

Таким образом, элемент $\mathscr{M}$ «восполняется» решением соответствующей конструктивной задачи, а сама подчиненная переменная x заменяется нормальной переменной по парам. Например, в случае параметрического утверждения существования

$$\forall x \exists w \mathscr{A}(x, w)$$

вместо алгорифма, переводящего всякое слово, принадлежащее $\mathscr{M}$, в соответствующее W, речь идет об алгорифме, переводящем в это W описанные только что пары $Y\alpha Z$ (т. е. это суждение трактуется как суждение вида (11)).

Основные используемые нами множества (а следовательно, и соответствующие им переменные) нормальные. Таковы множества натуральных, целых, рациональных и конструктивных действительных чисел, множество всех нормальных алгорифмов в данном алфавите, перечислимые множества, множество конструктивных действительных функций. Так же, как с нормальными множествами, мы будем обращаться с множеством всех алгорифмических операторов, действующих из одного конструктивного метрического пространства в другое. Суждения с подчиненными переменными, отвечающими этим множествам, трактуются в духе п. 6.

Приведем в заключение пример, разъясняющий трактовку суждений с переменными по алгорифмам. Суждение вида «для всякого слова X существует алгорифм, обладающий данным свойством» понимается как утверждение об осуществимости алгорифма, перерабатывающего всякое слово X в запись искомого алгорифма. В п. 11 § 1 гл. 1 будет описана простая конструкция, позволяющая сводить такое построение к более естественной задаче построения «двухместного» алгорифма, индуцирующего искомый алгорифм при фиксации любого значения первого аргумента.

8. Особенности конструктивного анализа определяются как особенностями конструктивного направления, так и специфическими свойствами вычислимых объектов. Чтобы иметь достаточный запас примеров, приведем (опуская технические детали) определения центральных понятий этой книги — конструктивных действительных чисел и конструктивных действительных функций.

Конструктивной последовательностью натуральных (рациональных) чисел (кратко КПНЧ и КПРЧ) назовем алгорифм *), перерабатывающий всякое натуральное

---

*) Напоминаем, что под «алгорифмами» подразумеваются нормальные алгорифмы. Заметим также, что вообще под конструктивными (это прилагательное будет часто опускаться)

число в натуральное (соответственно рациональное) число.

КПРЧ α называется фундаментальной, если

$$\forall n \exists m \forall ij (i,\ j \geqslant m \supset |\alpha(i) - \alpha(j)| < 2^{-n}).$$

В соответствии с пп. 6—7, последнее условие означает, что осуществима КПНЧ β такая, что при любом n и $i, j \geqslant \beta(n)$

$$|\alpha(i) - \alpha(j)| < 2^{-n}.$$

Этот алгорифм β называется регулятором фундаментальности КПРЧ α.

Конструктивные действительные числа (КДЧ) определяются как слова вида $\{\alpha\} \diamondsuit \{\beta\}$, где α — КПРЧ, β — ее регулятор фундаментальности. Таким образом, КДЧ представляют собой пары записей алгорифмов, из которых первый алгорифм определяет последовательность рациональных чисел, а второй эффективно оценивает скорость ее сходимости. Это определение эквивалентно второму определению вычислимого действительного числа, данному Тьюрингом (см. п. 2). Для конструктивных действительных чисел естественным образом определяются отношения равенства и порядка и арифметические операции, причем последние задаются алгорифмами. Конструктивной действительной функцией (КФ) называется алгорифм, перерабатывающий всякое КДЧ в КДЧ так, что равные КДЧ переводятся в равные КДЧ (мы ограничиваемся случаем всюду определенных конструктивных функций одной переменной).

В терминах конструктивных действительных чисел и функций без труда вводятся употребительные числа и функции анализа (e, π, всякого рода иррациональности, элементарные и специальные функции и т. д.). Вообще фактически весь материал стандартных курсов анализа, относящийся к конкретным вычислениям (теория рядов, формульный аппарат дифференциального и интегрального исчисления и т. д.), без принципиальных изменений может быть «пересказан» конструктивно с заменой тра-

---

последовательностями слов из данного множества мы понимаем алгорифмы, перерабатывающие всякое натуральное число (в смысле п. 4) в элементы этого множества.

диционных действительных чисел на КДЧ, а действительных функций на конструктивные функции. В этом отношении важную роль играет теорема о полноте конструктивного континуума, утверждающая, что для каждой фундаментальной конструктивной последовательности КДЧ осуществимо КДЧ, к которому сходится эта последовательность. (Упоминаемые здесь понятия трактуются совершенно аналогично случаю рациональных чисел. Конструктивная последовательность КДЧ α сходится к КДЧ x, если можно построить КПНЧ β так, что при любом n и $i \geqslant \beta(n)$

$$|x - \alpha(i)| < 2^{-n}.)$$

Следует также заметить, что хотя с традиционной точки зрения конструктивный континуум счетен, невозможен его эффективный пересчет; более того, по всякой конструктивной последовательности КДЧ можно указать КДЧ, отличное от всех ее членов.

Вместе с тем конструктивные действительные числа и функции обладают некоторыми свойствами, не имеющими аналогов в традиционном анализе. Приведем два примера. З а с л а в с к и й [1], [2], [4] показал, что для конструктивного континуума неверна теорема Бореля *): осуществима конструктивная последовательность рациональных интервалов, покрывающая конструктивный единичный сегмент, из которой нельзя выбрать конечного покрытия. Из этого результата выводится существование «необычных» конструктивных функций, например неограниченной непрерывной КФ. Далее, Ц е й т и н ы м [3] — [5] доказана непрерывность конструктивных функций: для каждой КФ f можно построить алгорифм ω так, что при любых КДЧ x_1, x_2 и натуральном n $\omega(x_1, n)$ — натуральное число и если

$$|x_1 - x_2| < 2^{-\omega(x_1, n)},$$

то

$$|f(x_1) - f(x_2)| < 2^{-n}.$$

*) Для конструктивного континуума не сохраняются также теоремы о точных гранях ограниченных множеств и сходимости монотонных ограниченных последовательностей (ср. п. 1).

Своеобразной чертой конструктивного анализа является акцентирование внимания на вопросах эффективности, изучение вводимых объектов (а рассматриваются лишь конструктивные объекты) как исходных данных алгорифмов. Эта специфическая точка зрения приводит иногда к необычным для традиционного анализа ситуациям, в частности, к «расщеплению понятий». Приведем несколько примеров.

А) КПРЧ α назовем псевдофундаментальной, если

$$\forall n \neg\neg \exists m \forall ij \left(i,\ j \geqslant m \supset |\alpha(i) - \alpha(j)| < 2^{-n}\right).$$

Как введенное выше понятие фундаментальной КПРЧ, так и это понятие укладываются в классическую концепцию фундаментальности. Конструктивно же эти два понятия различны: можно построить псевдофундаментальную КПРЧ, для которой невозможен регулятор фундаментальности (поскольку, как легко видеть, всякая монотонная ограниченная КПРЧ псевдофундаментальна, то искомый пример дается уже упоминавшимся результатом Шпекера).

Б) Назовем F-числом запись любой фундаментальной КПРЧ. С традиционной точки зрения F-числа и КДЧ дают одну и ту же концепцию вычислимого действительного числа. Ясно, однако, что КДЧ как конструктивный объект гораздо «информативнее», чем F-число: наряду с последовательностью рациональных приближений из КДЧ извлекается и эффективная оценка скорости сходимости этой последовательности. Как показал Г. С. Цейтин, алгорифм, находящий для каждой фундаментальной КПРЧ ее регулятор фундаментальности, невозможен; поэтому отсутствующая в F-числах информация не может быть эффективно восстановлена. Из сказанного вытекает неравноценность F-чисел и КДЧ как исходных данных для алгорифмов, что делает естественным их конструктивное различение.

В) Будем говорить, что КДЧ x является пределом конструктивной последовательности КДЧ (сокращенно КПДЧ) α, если α сходится к x (см. стр. 41). Согласно уже упоминавшейся теореме о полноте конструктивного континуума для каждой фундаментальной КПДЧ α существует КДЧ, являющееся ее пределом. В традиционной математике эта теорема является достаточным основанием для введения оператора, переводящего всякую фундаментальную КПДЧ в ее предел. Вместе с тем анализ доказательства теоремы о полноте показывает, что при построении предела КПДЧ используется и ее регулятор фундаментальности — конструктивная расшифровка данной теоремы (ср. п. 7), учитывающая это обстоятельство, состоит в осуществимости алгорифма γ, переводящего всякое слово вида $\{\alpha\}*\{\beta\}$, где α — КПДЧ, β — регулятор фундаментальности α, в КДЧ, являющееся пределом α. Упомянутый же выше оператор предельного перехода оказывается невычислимым; осуществляющий его алгорифм невозможен из-за недостаточности исходных данных. Описанного типа переходы от предикатов («x есть предел КПДЧ α») к операторам (оператор предельного перехода) являются часто своеобразными источниками неэффективности в традиционном анализе. Изучение подобных ситуаций с алгорифмической точки зрения приводит к появлению специфических наборов исходных данных, обеспечивающих алгорифмическое выполнение тех или иных операций (такой характер носят сами КДЧ, рассмотренные только что слова вида $\{\alpha\}*\{\beta\}$, шифры равномерно непрерывных функций (§ 2 гл. 5), интегральные шифры (§ 1 гл. 7) и т. д.).

Конструктивные теории дают ясную картину вычислительных связей в анализе; доказываемые здесь теоремы невозможности алгорифмов (подобные результаты совершенно отсутствуют в традиционных курсах анализа) выявляют потенциальные вычислительные тупики, представляемые некорректно поставленными алгорифмическими задачами, а сопоставление этих теорем с положительными результатами о существовании алгорифмов, находящих искомые объекты по более полным данным, позволяет достичь отчетливой ориентировки в вопросе о том, какие исходные данные необходимы для эффективного построения тех или иных объектов анализа. Можно надеяться, что интенсивно развивающаяся в настоящее время теория сложности алгорифмов и вычислений (см., например, Т р а х т е н б р о т [3]) позволит в будущем уточнять положительные результаты конструктивного анализа, давая количественные оценки «качества» соответствующих алгорифмов.

Суммируя изложенное (см. также два примера в конце п. 1), можно констатировать, что при сравнении конструктивного и традиционного анализа имеется широкий спектр возможностей — от почти полного совпадения целых разделов до фактического отсутствия аналогий. При этом различия относятся, главным образом, к общим свойствам основных понятий; при использовании же этих понятий в конкретных вычислительных ситуациях они ведут себя примерно одинаково.

9. Излагаемая система конструктивного анализа позволяет достичь существенных результатов как в круге вопросов (1), так и в круге вопросов (2) (п. 1). Мы старались учесть интересы соответствующих категорий читателей, расценивая при этом категорию читателей, интересующихся вопросами (2), как более многочисленную. В этой связи мы отказались от «пересказа» ряда разделов анализа (таких, как теория рядов, элементарные и специальные функции и т. д.), где конструктивное изложение сравнительно слабо отличается от традиционного, а также от использования сколько-нибудь развитой системы конструктивной логики. Читатель, не интересующийся философско-методологической стороной дела, может, пренебрегая возможными «граничными эффектами», практически считать, что излагаемая теория вложена в традиционный анализ. При такой точке зрения конструктивные действительные числа и функции становятся частными случаями соответствующих классических понятий; в некоторых их необычных свойствах также не оказывается при ближайшем рассмотрении ничего парадоксального. Теоремы, доказанные для классического континуума и определенных на нем функций, разумеется, не обязаны сохраняться для более «редкого» конструктивного континуума и соответствующих ему функций. Ясно, что нарушение некоторых общих теорем (типа теоремы Бореля о покрытиях) никоим образом не может дискредитировать идею изучения вычислимых объектов; подобное изучение практически неизбежно приводит к понятиям конструктивного анализа, предлагающего здесь систематический и последовательный подход. Читатель, придерживающийся описанной только что позиции, должен, однако, привыкнуть к проводимой в этой книге более сильной, чем обычно, трактовке некоторых предложений (см. пп. 6—7); в начальных разделах эти предложения будут, как правило, сопровождаться необходимыми пояснениями.

Принцип Маркова (п. 6) является, пожалуй, наименее непосредственным из всех основных установок конструктивной математики. Поэтому представляет несомненный интерес выяснение того, в какой мере может быть развит конструктивный анализ без использования этого принципа. В первоначальном варианте книги все применения принципа Маркова были прослежены; при этом оказалось, что основные разделы анализа сравнительно мало от него зависят. Фактически при отказе от принципа Маркова теряется всего один (правда, чрезвычайно сильный) результат, — именно, теорема непрерывности. Вместе с тем применение принципа Маркова, не выводя за рамки потенциальной осуществимости, позволяет сильно упростить многие формулировки и доказательства. Учитывая это обстоятельство, а также желая избежать параллелизмов в изложении, автор исключил данную линию из книги. Принцип Маркова будет применяться свободно и часто без специальных оговорок.

Поскольку предлагаемая книга должна служить первому знакомству с предметом, мы отобрали наиболее элементарный, устоявшийся материал конструктивного анализа (ряд интересных работ, посвященных более далеким разделам математики, уже упоминался в конце п. 2). Этими же соображениями определялась и выбранная нами степень подробности изложения. Мы почти никогда строго не строим нормальных алгорифмов. Такие построения, чаще всего без труда выполняемые с помощью теорем сочетания (гл. 1), сильно загромоздили бы изложение и отвлекали бы внимание читателя от более существенных вопросов. Характер рассматриваемых алгорифмов поясняется либо с помощью указания их свойств, либо просто описанием того, что нужно делать с исходными данными, чтобы получить искомый результат (в такой ситуации иногда даже не вводятся обозначения для излагаемого алгорифма). Внимательный читатель, во всяком случае, всегда сможет без труда сопоставить нашим описаниям алгорифмы в интуитивном смысле слова.

Для чтения этой книги не требуется никаких особых знаний в математической логике и теории алгорифмов. Предполагается лишь, что читатель имеет самые элементарные навыки в обращении с логическими связками и кванторами и умеет с их помощью выражать стандартные языковые формы (см., например, Успенский [3; § 3]). Необходимые сведения из теории нормальных алгорифмов и перечислимых множеств в сжатой форме приведены в первой главе. Для понимания излагаемых результатов формально не требуется и знакомства с обычным математическим анализом; вместе с тем владение каким-нибудь из соответствующих стандартных курсов значительно улучшило бы общую ориентировку читателя.

Нумерация определений, теорем и т. д. сохраняется в пределах каждого параграфа; при ссылках внутри данного раздела указание на этот раздел опускается. Некоторые фрагменты текста, на которые предполагается ссылаться в дальнейшем, выделяются посредством заключенных в круглые скобки цифр. Нумерация формул и фрагментов текста сквозная в пределах каждого параграфа.

НОРМАЛЬНЫЕ АЛГОРИФМЫ И ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ МНОЖЕСТВА

В этой главе, носящей вспомогательный характер, в конспективной форме излагаются некоторые сведения из теории нормальных алгорифмов и алгорифмически перечислимых множеств. Для более глубокого изучения этого круга вопросов можно обратиться к монографиям Маркова [2], Мальцева [1], Успенского [3] и Роджерса [1]. Изложение §§ 1—2 в значительной степени опирается на монографию Маркова [2].

§ 1. Нормальные алгорифмы

1. Как уже отмечалось во введении, в большинстве случаев в качестве изучаемых конструктивных объектов фигурируют слова в том или ином алфавите. Напомним некоторые относящиеся сюда понятия (подробнее — см. Марков [2; гл. 1]).

Под алфавитами мы подразумеваем конечные списки элементарных знаков (букв) *). Два алфавита считаются равными, если всякая буква первого алфавита принадлежит второму и наоборот. Алфавит $Б$ называется расширением алфавита A, если всякая буква A принадлежит $Б$. Естественным образом определяется объединение $A \cup Б$ произвольных алфавитов A и $Б$. $A \cup Б$ состоит из тех и только тех букв, которые принадлежат A или $Б$. Точно так же, аналогично одноименным теоретико-множественным операциям, можно определить пересечение и разность алфавитов.

При задании конкретного алфавита мы будем писать друг за другом в произвольном порядке его буквы,

*) Не исключаются и пустые алфавиты, т. е. алфавиты, вовсе не имеющие букв. Однако в дальнейшем всюду, где специально не оговорено противное, мы предполагаем рассматриваемые алфавиты непустыми.

начиная и оканчивая запись соответственно левой и правой фигурной скобкой. Например, алфавит, состоящий из букв «a» и «b», задается записью $\{ab\}$ или $\{ba\}$.

Под *словами* в данном алфавите понимаются конечные цепочки букв этого алфавита. При этом предполагается, что используемые алфавиты удовлетворяют требованию однозначности «чтения слов», т. е. любое слово в данном алфавите должно единственным способом распадаться на буквы. Таким образом, слова в алфавите A — это цепочки вида

$$\eta_1\eta_2 \ldots \eta_n, \tag{1}$$

где все η_i суть буквы (не обязательно различные) алфавита A, причем представление (1) для каждого слова единственно. Оказывается также удобным причислить к словам в произвольном алфавите и пустое слово, т. е. слово, не содержащее ни одной буквы. В дальнейшем пустое слово обозначается через Λ.

Число n в представлении (1) называется *длиной* слова $\eta_1\eta_2 \ldots \eta_n$. Длина пустого слова полагается равной нулю.

Если два слова P и Q *) составлены из одних и тех же букв, расположенных в одинаковом порядке (т. е. имеют одинаковые представления (1)), то мы говорим, что P и Q *графически равны* и пишем

$$P \doteqdot Q.$$

Напротив, если представления (1) слов P и Q различны, то эти слова считаются *графически неравными*. Для выражения графического неравенства слов P и Q будет использоваться запись

$$P \not\doteqdot Q.$$

При фиксации того или иного алфавита A естественным образом возникает свойство «быть словом в алфавите A», т. е. множество всех слов в алфавите A (напомним, что пустое слово принадлежит этому множеству). Мы будем обозначать множество всех слов в данном алфавите так же, как и сам алфавит. В соответствии

*) Мы будем использовать большие латинские буквы P, Q, R, S (возможно, с индексами) в качестве переменных для слов.

с этим запись $P \in A$ (где P — слово, A — алфавит) означает, что P является словом в алфавите A.

Применительно к словам общее интуитивное понятие алгорифма переходит в понятие алгорифма в данном алфавите. Именно, под *алгорифмом в данном алфавите* A мы понимаем точное предписание, определяющее дискретный детерминированный процесс преобразования слов в этом алфавите, допускающий в качестве исходных данных произвольные слова в A и дающий в качестве результатов (разумеется, в тех случаях, когда соответствующий процесс оканчивается) также слова в A. Упомянутое предписание должно обладать характерными чертами алгорифма, указанными в п. 5 введения. Вводимое ниже понятие «нормального алгорифма» (Марков [2]) направлено на уточнение описанной только что расплывчатой интуитивной концепции «алгорифма в данном алфавите».

Условимся о некоторых обозначениях.

Если $\mathfrak{A}$ — алгорифм в алфавите A, P — слово в этом алфавите и процесс применения алгорифма $\mathfrak{A}$ к слову P заканчивается, то мы пишем $!\mathfrak{A}(P)$. Результат работы в этом случае обозначается через $\mathfrak{A}(P)$. Таким образом, запись

$$\mathfrak{A}(P) \mathrel{\dot{=}} Q$$

(или

$$Q \mathrel{\dot{=}} \mathfrak{A}(P))$$

выражает то обстоятельство, что Q является результатом работы алгорифма $\mathfrak{A}$ над словом P. В этой ситуации мы будем также говорить, что $\mathfrak{A}$ перерабатывает слово P в слово Q.

Мы будем использовать также знак *условного равенства* «$\simeq$»: два выражения, соединенные этим знаком, означают одно и то же слово, если хотя бы одно из них имеет смысл. Таким образом, запись

$$\mathfrak{A}(P) \simeq \mathfrak{B}(Q)$$

выражает то обстоятельство, что $!\mathfrak{A}(P)$ равносильно $!\mathfrak{B}(Q)$ и в случае выполнения хотя бы одного из этих условий алгорифмы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ дают одинаковый результат на словах P и Q.

Алгорифм $\mathfrak{A}$ будем называть алгорифмом *над алфавитом* A, если он является алгорифмом в некотором расширении алфавита A.

Пусть $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — алгорифмы над алфавитом A. Будем говорить, что эти алгорифмы *эквивалентны относительно алфавита* A, если выполнены условия

1) всякий раз, когда $\mathfrak{A}_1$ перерабатывает какое-нибудь слово P в алфавите A в некоторое слово Q в том же алфавите, алгорифм $\mathfrak{A}_2$ также перерабатывает P в Q;

2) то же с переменой ролей $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

Алгорифмы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ называются *вполне эквивалентными относительно алфавита* A, если

1) всякий раз, когда $\mathfrak{A}_1$ применим к какому-нибудь слову P в A, $\mathfrak{A}_2$ также применим к этому слову и дает тот же самый результат, что и $\mathfrak{A}_1$;

2) то же с переменой ролей $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

С помощью знака условного равенства свойство полной эквивалентности алгорифмов $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ относительно алфавита A, очевидно, выражается так:

$$\mathfrak{A}_1(P) \simeq \mathfrak{A}_2(P)$$

для любого слова P в алфавите A.

Пусть $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ — множества слов в некотором алфавите A. Алгорифм $\mathfrak{A}$ будем называть *алгорифмом типа* $(\mathscr{M}_1 \overset{\cdot}{\rightarrow} \mathscr{M}_2)$, если $\mathfrak{A}$ перерабатывает всякое слово из $\mathscr{M}_1$, к которому он применим, в слово из $\mathscr{M}_2$. Если, сверх того, $\mathfrak{A}$ применим к любому слову из $\mathscr{M}_1$, то мы будем говорить, что $\mathfrak{A}$ является *алгорифмом типа* $(\mathscr{M}_1 \rightarrow \mathscr{M}_2)$. Отметим, что в соответствии с принятым нами соглашением обозначать множество всех слов в данном алфавите так же, как и сам алфавит, утверждение «алгорифм $\mathfrak{A}$ является алгорифмом типа $(A \overset{\cdot}{\rightarrow} A)$» означает, что $\mathfrak{A}$ перерабатывает всякое слово в алфавите A, к которому он применим, в слово в алфавите A.

Очевидно, что для алгорифмов типа $(A \overset{\cdot}{\rightarrow} A)$ эквивалентность относительно алфавита A равносильна полной эквивалентности относительно A.

Ясно, что в тех случаях, когда нас интересует работа данного алгорифма не на всех словах его алфавита *),

*) Как увидит читатель, в большинстве случаев именно так и обстоит дело.

а лишь на словах более узкого алфавита A, можно данный алгорифм заменить любым алгорифмом, вполне эквивалентным ему относительно A. Если, сверх того, мы интересуемся лишь теми результатами работы исходного алгорифма, которые являются словами в A, то при упомянутой замене можно удовлетвориться алгорифмами, эквивалентными данному относительно A.

2. Будем говорить, что слово P *входит в слово* Q, если существуют слова R_1 и R_2 такие, что *)

$$Q \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} R_1 P R_2. \tag{2}$$

Например, слово «*ба*» входит в слово «*баобаб*». Из этого примера видно, что при фиксированных P и Q слова R_1, R_2 в представлении (2) определяются, вообще говоря, неоднозначно. Чтобы различать возникающие здесь возможности, поступим следующим образом (ср. Марков [2]).

Пусть мы рассматриваем слова в некотором алфавите A. Обозначим через α какую-нибудь букву, не принадлежащую A, и рассмотрим слова вида

$$R_1 \alpha P \alpha R_2, \tag{3}$$

которые будем называть *вхождениями* в алфавите A. При этом слова R_1 и P называются соответственно левым крылом и основой вхождения (3). Вхождения (3), для которых имеет место

$$Q \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} R_1 P R_2,$$

мы называем вхождениями в слово Q, или, более подробно, вхождениями слова P в слово Q.

Совершенно очевидно, что слово P тогда и только тогда входит в слово Q, когда существует по крайней мере одно вхождение P в Q.

Возвращаясь к приведенному выше примеру, напишем все вхождения слова «*ба*» в слово «*баобаб*». Этих вхождений два, именно:

$$\alpha ба \alpha обаб \tag{4}$$

и

$$ба о \alpha ба \alpha б.$$

*) Если P и Q — слова, то PQ означает слово, получающееся приписыванием к P справа слова Q.

В качестве другого примера рассмотрим вхождения пустого слова в слово «*ба*». Таких вхождений имеется три: $\alpha\alpha$*ба*, *б*$\alpha\alpha$ и *ба*$\alpha\alpha$. Вообще, число вхождений пустого слова в слово длины n равно $n+1$.

Вхождение (3) слова P в слово Q будем называть первым вхождением P в Q, если длина левого крыла любого вхождения P в Q не меньше длины R_1. Например, вхождение (4) является первым вхождением слова «*ба*» в слово «*баобаб*».

Пусть $R_1\alpha P\alpha R_2$ — вхождение и S — слово. Слово R_1SR_2 будем называть результатом подстановки слова S вместо вхождения $R_1\alpha P\alpha R_2$. Например, слово «*баркас*» есть результат подстановки слова «*бар*» вместо вхождения «α*кар*α*кас*» (которое является первым вхождением слова «*кар*» в слово «*каркас*»), а слово «*переход*» есть результат подстановки слова «*пере*» вместо первого вхождения пустого слова в слово «*ход*».

3. В основе определения ***нормального алгорифма*** лежит та идея, что любой алгорифмический процесс над словами может быть сведен к выполнению локальных преобразований слов, т. е. к замене вхождений одних слов в другие некоторыми третьими словами. При этом в описании алгорифма должен быть указан список разрешенных преобразований такого типа, т. е. должно быть указано, какие слова и на какие можно заменять. Кроме того, поскольку одни слова могут входить в другие несколькими различными способами, нужно уточнить, вместо каких именно вхождений следует выполнять подстановки из упомянутого только что списка. Наконец, для однозначной определенности процесса применения алгорифма надлежит как-то фиксировать очередность, в которой выполняются разрешенные подстановки. Определение нормального алгорифма, к которому мы переходим, предлагает некоторый естественный вариант такого рода уточнений.

Условимся, что буквы «$\rightarrow$» и «$\cdot$» не принадлежат рассматриваемым алфавитам. Пусть P и Q — слова в некотором алфавите A. Слова $P\rightarrow Q$ и $P\rightarrow\cdot Q$ мы называем соответственно ***простой*** и ***заключительной формулой подстановки*** в алфавите A (при этом P и Q называются левой и правой частью соответствующей формулы подстановки). Нормальный алгорифм в алфавите A задается посредством (упорядоченного) списка формул подстановок (как простых, так и заключительных) в этом алфавите. В качестве исходных данных допускаются произвольные слова в алфавите A. Работа нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ над произвольным словом P (в алфавите A) описывается следующим образом.

1) Если ни одна из левых частей формул подстановок не входит в P, то процесс применения $\mathfrak{A}$ к P заканчивается и его результатом считается само слово P. В этом случае говорят, что слово P не поддается алгорифму $\mathfrak{A}$.

2) Если хотя бы одна из левых частей формул подстановок входит в P, то отыскиваем самую первую (в порядке следования в списке) из таких формул и выполняем подстановку правой части этой формулы вместо первого вхождения ее левой части в P. Если использованная формула была заключительной, то процесс применения $\mathfrak{A}$ заканчивается и получившееся слово считается его результатом. В случае простой формулы подстановки с получившимся словом поступаем так же, как и с P (ср. рис. 2).

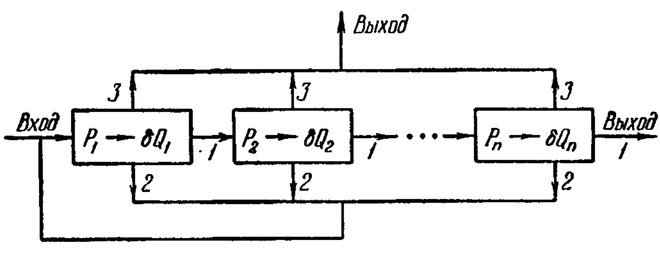
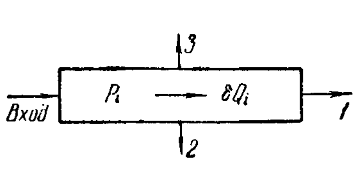


Рис. 2. Блок-схема нормального алгорифма.

На рис. 2 δ означает либо «·» (заключительная формула подстановки), либо пустое слово (простая формула подстановки). Блок



работает следующим образом: если P_i не входит в поступившее на вход слово P, то P передается в $(i+1)$-й блок (или на выход алгорифма, если $i = n$); если P_i входит в P, то выполняется подстановка Q_i вместо первого вхождения P_i в P и получившееся слово передается на выход *2* в случае простой формулы подстановки ($\delta \doteqdot \Lambda$) и на выход *3* в случае заключительной формулы ($\delta \doteqdot \cdot$).

Таким образом, для полного задания нормального алгорифма необходимо указать алфавит, в котором действует этот алгорифм, и выписать список формул подстановок в этом алфавите. В дальнейшем (следуя Маркову [2]) мы будем при задании нормальных алгорифмов выписывать формулы подстановок друг под другом (порядок следования формул, учитываемый в разделе 2) определения нормального алгорифма, — сверху вниз), объединяя их слева фигурной скобкой (см. п. 4). Получаемые таким образом фигуры называются *схемами* нормальных алгорифмов.

Согласно приведенному нами определению применение нормального алгорифма к данному слову состоит в процессе последовательного преобразования исходного слова путем выполнения соответствующих операций подстановок вместо первых вхождений. В случае обрыва этого процесса мы получаем некоторое слово, которое считаем результатом работы данного нормального алгорифма; если же процесс преобразования исходного слова не заканчивается, то нормальный алгорифм неприменим к этому слову. Ясно, что возможны два типа обрыва процесса применения нормального алгорифма:

1) на некотором этапе получилось слово, не поддающееся данному алгорифму (естественный обрыв);

2) на некотором этапе применена заключительная формула подстановки (заключительный обрыв).

Легко, однако, видеть, что можно ограничиться нормальными алгорифмами, у которых процесс применения заканчивается лишь заключительным обрывом. В самом деле, если мы присоединим к схеме нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ снизу формулу «$\rightarrow\cdot$» (с пустой левой и правой частью), то, с одной стороны, получившемуся алгорифму будут поддаваться все слова, а с другой стороны, он будет вполне эквивалентен $\mathfrak{A}$ относительно их общего алфавита. Указанный только что алгорифм мы называем замыканием $\mathfrak{A}$ и обозначаем посредством $\mathfrak{A}^{\cdot}$ *).

4. Прежде чем привести примеры нормальных алгорифмов, условимся о некоторых обозначениях. Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм, P — слово в его алфавите и P поддается $\mathfrak{A}$, т. е. в схеме $\mathfrak{A}$ есть формулы подстановок с левыми частями, входящими в P. Тогда процесс применения $\mathfrak{A}$ к P начнется с использования одной из этих формул (именно, самой верхней), в результате чего получится некоторое слово Q. Если использованная формула подстановки была простой, то мы говорим, что $\mathfrak{A}$ просто переводит P в Q за один шаг, и пишем $\mathfrak{A}$: $P \vdash Q$. В случае заключительной формулы подстановки мы говорим, что $\mathfrak{A}$ заключительно переводит P в Q за один шаг, и пишем $\mathfrak{A}$: $P \vdash \cdot Q$.

Вместо записи

$$\mathfrak{A}:\ P_0 \vdash P_1,\ \mathfrak{A}:\ P_1 \vdash P_2,\ \ldots,\ \mathfrak{A}:\ P_{n-1} \vdash P_n$$

мы будем использовать более короткие записи:

$$\mathfrak{A}:\ P_0 \vdash P_1 \vdash P_2 \vdash \ldots P_{n-1} \vdash P_n$$

или

$$\mathfrak{A}:\ P_0 \models_n P_n,$$

или даже

$$\mathfrak{A}:\ P_0 \models P_n.$$

Аналогично вместо записи

$$\mathfrak{A}:\ P_0 \vdash P_1,\ \mathfrak{A}:\ P_1 \vdash P_2,\ \ldots,\ \mathfrak{A}:\ P_{n-1} \vdash \cdot P_n$$

будут применяться записи

$$\mathfrak{A}:\ P_0 \vdash P_1 \vdash \ldots P_{n-1} \vdash \cdot P_n,$$

$$\mathfrak{A}:\ P_0 \models_n \cdot P_n,$$

$$\mathfrak{A}:\ P_0 \models \cdot P_n.$$

Во всех приводимых ниже примерах мы считаем фиксированным некоторый алфавит $A = \{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n\}$. Упоминания об этом алфавите часто опускаются.

*) В качестве полезного упражнения предлагаем читателю доказать, что рассмотрение лишь алгорифмов с естественным обрывом сужает класс нормальных алгорифмов.

1) *Тождественный алгорифм.* Пусть нормальный алгорифм $\mathfrak{N}_1$ в алфавите A задается схемой

$$\{ \to \cdot$$

Ясно, что для любого слова P (в алфавите A)

$$\mathfrak{N}_1\colon P \vdash \cdot P.$$

Таким образом, $\mathfrak{N}_1$ применим к любому слову и всегда

$$\mathfrak{N}_1(P) \mathrel{\overset{\centerdot}{=}} P.$$

2) *Пустой алгорифм.* Определим нормальный алгорифм $\mathfrak{N}_2$ в алфавите A схемой

$$\{ \to$$

Очевидно, $\mathfrak{N}_2$ неприменим ни к какому слову, поскольку при любых P и $n > 0$

$$\mathfrak{N}_2\colon P \models_n P.$$

3) *Аннулирующий алгорифм.* Рассмотрим нормальный алгорифм $\mathfrak{N}_3$ в алфавите A со схемой

$$\begin{cases} \alpha_1 \to \\ \alpha_2 \to \\ \dots\dots \\ \alpha_n \to \end{cases}$$

Пусть $P \mathrel{\overset{\centerdot}{=}} \zeta_1 \ldots \zeta_k$ — произвольное непустое слово в алфавите A. Поскольку $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — все буквы алфавита A, то найдется наименьшее i такое, что α_i входит в P. Пусть j — наименьшее натуральное число такое, что $\alpha_i = \zeta_j$. Тогда, очевидно, на первом шаге $\mathfrak{N}_3$ «выбрасывает» ζ_j из P, т. е.

$$\mathfrak{N}_3\colon P \vdash \zeta_1 \ldots \zeta_{j-1}\zeta_{j+1} \ldots \zeta_k.$$

После k таких шагов мы получаем пустое слово, т. е.

$$\mathfrak{N}_3\colon P \models_k \Lambda.$$

Кроме того, пустое слово не поддается $\mathfrak{N}_3$. Таким образом, $\mathfrak{N}_3$ перерабатывает любое слово в пустое слово.

При рассмотрении схемы $\mathfrak{N}_3$ бросается в глаза однородная группа формул, связанных с перечислением всех букв алфавита. Ясно также, что изменение порядка, в котором перечисляются эти формулы, никак не отразилось бы на результатах работы интересующего нас алгорифма. Сказанное оправдывает применение в подобных ситуациях сокращенных записей типа

$$\{\eta \to \qquad (\eta \in A).$$

Здесь первая строка означает группу формул, получаемую при «пробегании» переменной η всего алфавита A, причем порядок, в котором выписываются эти формулы, в данной записи не указывается. Таким образом, схема нормального алгорифма может быть восстановлена по сокращенной записи лишь с точностью до порядка расположения некоторых формул. Поэтому сокращенные записи применяются только в тех ситуациях (как, например, в случае аннулирующего алгорифма), где такая неоднозначность не существенна.

4) *Алгорифм, применимый лишь к пустому слову.* Рассмотрим нормальный алгорифм $\mathfrak{N}_4$ в алфавите A, определяемый схемой (в сокращенной записи)

$$\{\eta \to \eta \qquad (\eta \in A).$$

Ясно, что для любого непустого слова P и любого $n > 0$

$$\mathfrak{N}_4\colon\ P \models_n P,$$

и поэтому $\mathfrak{N}_4$ неприменим к P.

С другой стороны, пустое слово не поддается $\mathfrak{N}_4$ и, следовательно,

$$\mathfrak{N}_4(\Lambda) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \Lambda.$$

5) *Алгорифм, применимый лишь к непустым словам.* Пусть $\mathfrak{N}_5$ — нормальный алгорифм в алфавите A со схемой

$$\begin{cases} \eta \to \cdot\,\eta & (\eta \in A) \\ \ \to & \end{cases}$$

Для любого непустого слова P, очевидно,

$$\mathfrak{N}_5\colon\ P \vdash \cdot\, P$$

и потому $!\mathfrak{N}_5(P)$. Ясно также, что при любом n

$$\mathfrak{N}_5\colon\ \Lambda \models_n \Lambda$$

и поэтому $\mathfrak{N}_5$ неприменим к пустому слову.

6) *Отсекающие алгорифмы.* Пусть α — некоторая буква, не принадлежащая алфавиту A. Как уже отмечалось, пары слов в алфавите A можно задавать посредством слов вида

$$P\alpha Q,$$

где $P,\ Q \in A$. В связи с этим иногда оказываются нужными алгорифмы, выделяющие при таком задании пар первую и вторую компоненты. Эту задачу решают нормальные алгорифмы $\mathfrak{N}_6^1$, $\mathfrak{N}_6^2$ в алфавите $A \cup \{\alpha\}$, задаваемые схемами

$$\begin{cases} \alpha\eta \to \alpha & (\eta \in A) \\ \alpha \to \cdot & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta\alpha \to \alpha & (\eta \in A) \\ \alpha \to \cdot & \end{cases}$$

Действительно,

$$\mathfrak{N}_6^1\colon\ P\alpha Q \models P\alpha \vdash \cdot P,$$

$$\mathfrak{N}_6^2\colon\ P\alpha Q \models \alpha Q \vdash \cdot Q.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{N}_6^1(P\alpha Q) \risingdotseq P,$$

$$\mathfrak{N}_6^2(P\alpha Q) \risingdotseq Q.$$

Отметим, что поскольку слова в $A \cup \{\alpha\}$, в которые не входит α, не поддаются алгорифмам $\mathfrak{N}_6^1$, $\mathfrak{N}_6^2$, то $\mathfrak{N}_6^1$, $\mathfrak{N}_6^2$ применимы и к таким словам. Таким образом, $\mathfrak{N}_6^1$, $\mathfrak{N}_6^2$ применимы к любым словам в алфавите $A \cup \{\alpha\}$.

7) *Алгорифм левого присоединения слова.* Пусть P — произвольное слово в алфавите A. Рассмотрим нормальный алгорифм $\mathfrak{N}_7^P$ в A со схемой

$$\{\to \cdot P.$$

Ясно, что для любого Q

$$\mathfrak{N}_7^P(Q) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} PQ.$$

Алгорифм $\mathfrak{N}_1$ (примера 1) можно рассматривать как алгорифм левого присоединения пустого слова.

8) *Алгорифм правого присоединения слова.* Построение этого алгорифма несколько сложнее. Пусть α — некоторая буква, отличная от всех букв алфавита A. Рассмотрим нормальный алгорифм $\mathfrak{N}_8^P$ в алфавите $A \cup \{\alpha\}$ со схемой

$$\begin{cases} \alpha\eta \to \eta\alpha & (\eta \in A) & (5)\\ \alpha \to \cdot P & & (6)\\ \quad \to \alpha & & (7)\end{cases}$$

Пусть Q — произвольное слово в алфавите A. Сначала к Q слева приписывается α (формула (7)):

$$\mathfrak{N}_8^P\colon\ Q \vdash \alpha Q.$$

Затем α «бежит» вправо по слову Q (группа формул (5)), т. е.

$$\mathfrak{N}_8^P\colon\ \alpha Q \models Q\alpha,$$

и, наконец, α заменяется на P (формула (6)):

$$\mathfrak{N}_8^P\colon\ Q\alpha \vdash \cdot QP.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{N}_8^P(Q) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} QP,$$

т. е. $\mathfrak{N}_8^P$ присоединяет к любому слову справа слово P.

9) *Обращающий алгорифм.* Пусть

$$P \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_k \tag{8}$$

— произвольное (непустое) слово в алфавите A. Обращением P назовем слово Q, записанное теми же буквами, но в обратном порядке, т. е.

$$Q \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \gamma_k\gamma_{k-1} \ldots \gamma_1.$$

Обращением пустого слова будем считать пустое слово.

Обозначим через α, β две различные буквы, не входящие в алфавит A, и рассмотрим нормальный алгорифм $\mathfrak{N}_9$ в алфавите $A \cup \{\alpha\beta\}$ со следующей схемой *):

$$\begin{array}{ll} (9) & \\ (10) & \\ (11) & \\ (12) & \\ (13) & \\ (14) & \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha\alpha \to \beta & \\ \beta\alpha \to \beta & \\ \beta\zeta \to \zeta\beta & (\zeta \in A) \\ \beta \to \cdot & \\ \alpha\zeta\eta \to \eta\alpha\zeta & (\zeta,\ \eta \in A) \\ \to \alpha & \end{array} \right.$$

и покажем, что $\mathfrak{N}_9$ перерабатывает любое слово в алфавите A в его обращение.

Для пустого слова имеем (сначала применяется два раза формула (14), затем формулы (9) и (12))

$$\mathfrak{N}_9\colon\ \Lambda \vdash \alpha \vdash \alpha\alpha \vdash \beta \vdash \cdot\, \Lambda.$$

Аналогично, для однобуквенного слова $P \rightleftharpoons \gamma_1$

$$\mathfrak{N}_9\colon\ \gamma_1 \vdash \alpha\gamma_1 \vdash \alpha\alpha\gamma_1 \vdash \beta\gamma_1 \vdash \gamma_1\beta \vdash \cdot\, \gamma_1.$$

Пусть теперь P — слово вида (8) с $k \geqslant 2$. Так же, как и раньше, поскольку α и β не входят в P, сначала применяется формула (14):

$$\mathfrak{N}_9\colon\ P \vdash \alpha P.$$

Далее, очевидно, применяются формулы группы (13), (формулы (10)—(12) не могут применяться из-за отсутствия буквы β в слове αP, а формула (9) из-за того, что в αP не входит $\alpha\alpha$) и α «проносит» первую букву слова P в конец:

$$\mathfrak{N}_9\colon\ \alpha P \models \gamma_2\gamma_3 \ldots \gamma_k\alpha\gamma_1.$$

Затем снова применяется формула (14):

$$\mathfrak{N}_9\colon\ \gamma_2\gamma_3 \ldots \gamma_k\alpha\gamma_1 \vdash \alpha\gamma_2\gamma_3 \ldots \gamma_k\alpha\gamma_1$$

и α «проносит» в конец букву γ_2:

$$\mathfrak{N}_9\colon\ \alpha\gamma_2\gamma_3 \ldots \gamma_k\alpha\gamma_1 \models \gamma_3 \ldots \gamma_k\alpha\gamma_2\alpha\gamma_1.$$

---

*) Здесь используется несколько более сложная, чем раньше, сокращенная запись. Именно, $\alpha\zeta\eta \to \eta\alpha\zeta$ означает группу формул, получаемую всевозможными подстановками вместо ζ и η любых букв алфавита A.

После ряда таких циклов получаем наконец обращение P, «разбавленное» буквами α:

$$\mathfrak{N}_9\colon\ P \models \alpha\gamma_k\alpha\gamma_{k-1} \ldots \alpha\gamma_1.$$

Обозначим $\gamma_k\alpha\gamma_{k-1} \ldots \alpha\gamma_1$ через $\bar{P}_\alpha$. Очевидно,

$$\mathfrak{N}_9\colon\ \alpha\bar{P}_\alpha \vdash \alpha\alpha\bar{P}_\alpha \vdash \beta\bar{P}_\alpha.$$

Затем β «бежит» вправо, уничтожая α (группа формул (11) и формула (10)):

$$\mathfrak{N}_9\colon\ \beta\bar{P}_\alpha \models \gamma_k\gamma_{k-1} \ldots \gamma_1\beta \vdash \cdot\, \gamma_k\gamma_{k-1} \ldots \gamma_1.$$

Следовательно, $\mathfrak{N}_9$ переработал P в его обращение, что и требовалось.

В качестве упражнения предлагаем читателю построить удваивающий нормальный алгорифм, т. е. такой нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$, что при любом P

$$\mathfrak{A}(P) \doteq PP.$$

Приведем в заключение два примера, связанных с натуральными числами, — именно, нормальные алгорифмы, складывающие и умножающие натуральные числа. Под натуральными числами мы подразумеваем слова в алфавите $\{0|\}$ вида 0, $0|$, $0||$ ... Пары натуральных чисел задаются как слова вида *)

$$m,\ n \tag{15}$$

где m и n — натуральные числа.

10) *Алгорифм сложения натуральных чисел.* Построение этого алгорифма совершенно очевидно: достаточно выбросить из слова (15) букву «,» и букву «0», которой начинается m. Схема соответствующего нормального алгорифма $\mathfrak{N}_{10}$ (в алфавите $\{0|\}$) имеет одну формулу

$$\{,\ 0 \to \cdot$$

11) *Алгорифм умножения натуральных чисел.* Рассмотрим нормальный алгорифм $\mathfrak{N}_{11}$ в алфавите $\{0|,\ ab\}$

*) Обращаем внимание читателя на то, что следует различать употребление запятой как пунктуационного знака русского языка и как буквы используемых нами алфавитов.

со схемой

$$\left\{\begin{array}{ll} (16) & a\,|\to|\,ba \\ (17) & a\to \\ (18) & b\,|\to|\,b \\ (19) & |,\ 0\to,\ 0a \\ (20) & 00\to 0 \\ (21) & ,\ 0\to 0, \\ (22) & ,\ |\to, \\ (23) & ,\ b\to|, \\ (24) & ,\to\cdot \end{array}\right.$$

и покажем, что

$$\mathfrak{N}_{11}(m,\ n)\doteqdot m\cdot n.$$

Условимся для краткости при произвольном натуральном k обозначать через $\bar{k}$ слово, получающееся из k выбрасыванием буквы «0», а через k_b, k'_b слова, получающиеся из $\bar{k}$ заменой всех букв «|» соответственно на букву «b» и слово «$|b$». Например, если $k\doteqdot 0|||$, то $\bar{k}\doteqdot |||$, $k_b\doteqdot bbb$, $k'_b\doteqdot |b|b|b$.

Рассмотрим сначала случаи обращения в нуль какого-нибудь из сомножителей.

а) $m=0$. Формулы (16)—(19) применяться не могут. Используется формула (21), затем (20):

$$\mathfrak{N}_{11}\colon\ 0,\ n\vdash 00,\ \bar{n}\vdash 0,\ \bar{n}.$$

Далее, очевидно ((22), (24)),

$$\mathfrak{N}_{11}\colon\ 0,\ \bar{n}\models 0,\ \vdash\cdot 0.$$

Итак,

$$\mathfrak{N}_{11}(0,\ n)\doteqdot 0.$$

б) $n\doteqdot 0$. Поскольку случай $m\doteqdot 0$ уже разобран, можно считать, что $m>0$. Тогда m заканчивается буквой «|» и ((19), (17))

$$\mathfrak{N}_{11}\colon\ m,\ 0\vdash m-1,\ 0a\vdash m-1,\ 0\models 0,\ 0.$$

Наконец ((21) — (20), (24)),

$$\mathfrak{N}_{11}\colon\ 0,\ 0\vdash 00,\ \vdash 0,\ \vdash\cdot 0.$$

Итак, и в этом случае

$$\mathfrak{N}_{11}(m,\ 0) \doteq m \cdot 0 \doteq 0.$$

в) $m > 0$, $n > 0$. Очевидно ((19)),

$$\mathfrak{N}_{11}\colon\ m,\ n \vdash m-1,\ 0a\bar{n}.$$

Далее ((16)—(17)) «a» «проходит» через $\bar{n}$, оставляя у каждой буквы «|» букву «b»:

$$\mathfrak{N}_{11}\colon\ m-1{,}0a\bar{n} \models m-1{,}0n'_b a \vdash m-1{,}0n'_b.$$

Затем буквы «b» «проходят» вправо ((18)):

$$\mathfrak{N}_{11}\colon\ m-1{,}0n'_b \models m-1{,}nn_b.$$

После m таких циклов получим

$$\mathfrak{N}_{11}\colon\ m,\ n \models 0{,}n\underbrace{n_b n_b \ldots n_b}_{m \text{ раз}}.$$

Обозначим последнее слово через Q. Чтобы получить искомый результат, достаточно выбросить из Q слово «, n» и заменить всюду букву «b» на «|». Именно это и происходит. По формулам (20)—(24)

$$\mathfrak{N}_{11}\colon\ Q \vdash 00{,}\bar{n}\underbrace{n_b \ldots n_b}_{m \text{ раз}} \vdash 0{,}\bar{n}\underbrace{n_b \ldots n_b}_{m \text{ раз}} \models$$

$$\models 0{,}\underbrace{n_b \ldots n_b}_{m \text{ раз}} \models 0\underbrace{\bar{n} \ldots \bar{n}}_{m \text{ раз}}, \ \vdash \cdot\, 0\underbrace{\bar{n} \ldots \bar{n}}_{m \text{ раз}}\cdot$$

Последнее натуральное число, очевидно, и есть $m \cdot n$. Итак, всегда

$$\mathfrak{N}_{11}(m,\ n) \doteq m \cdot n,$$

что и требовалось.

5. Регламентация использования вспомогательных букв. Теорема о переводе. Теорема приведения. Читатель, наверно, обратил внимание на то, что в последних примерах предыдущего пункта для построения нормальных алгорифмов, определенным образом работающих на словах в данном алфавите, приходилось использовать вспомогательные буквы, т. е. строить эти алгорифмы в более широком алфавите, чем исходный. Можно показать, что это обстоятельство не является случайным — например, невозможен нормальный алгорифм в алфавите A, содержащем не менее двух букв, обращающий все слова в A (ср. Нагорный [2]). В связи со сказанным возникает вопрос: как сильно нужно расширять исходный алфавит, чтобы получать всевозможные преобразования слов в этом алфавите, вообще доступные нормальным алгорифмам. Этот вопрос решается теоремой А. А. Маркова о переводе (Марков [2]), показывающей, что всегда можно обойтись (если нас интересуют преобразования слов в данном алфавите) всего двумя вспомогательными буквами, т. е. двухбуквенным расширением исходного алфавита *).

Пусть A — некоторый алфавит (возможно, пустой), буквы α, β, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ не входят в A, α отлична от β и все γ_i, γ_j $(i \neq j)$ различны. (Однако буквы α, β могут, вообще говоря, совпадать с некоторыми из γ_i.) Рассмотрим алфавиты

(25) $$A_1 = A \cup \{\alpha\beta\},$$

(26) $$A_2 = A \cup \{\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n\}.$$

Сопоставим каждой букве γ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ слово вида

(27) $$\alpha\underbrace{\beta \ldots \beta}_{i \text{ раз}}\alpha$$

и назовем это слово переводом буквы γ_i. Переводом произвольной буквы алфавита A назовем саму эту букву. Перевод буквы η (алфавита A_2) будем обозначать посредством $[\eta^\tau$. Пусть теперь

$$P \mathrel{\overline{\overline{\;\cdot\;}}} \eta_1 \ldots \eta_k$$

— произвольное (непустое) слово в алфавите A_2. Под переводом P мы будем понимать слово

$$[\eta_1^\tau \ldots [\eta_k^\tau,$$

очевидно, являющееся словом в алфавите A_1. Перевод P будет обозначаться через $[P^\tau$. Переводом пустого слова считается пустое слово (т. е. $[\Lambda^\tau \mathrel{\overline{\overline{\;\cdot\;}}} \Lambda$).

*) Как показал Нагорный [1]—[2], всегда достаточно даже одной вспомогательной буквы, т. е. однобуквенного расширения исходного алфавита.

Отметим, что для любого слова P в алфавите A

$$[P^{\tau} \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} P, \tag{28}$$

и обратно, если для $Q \in A_2$ выполняется $[Q^{\tau} \in A$, то $Q \in A$.

Описанный только что способ кодирования слов в алфавите A_2 словами в алфавите A_1 обладает, как можно показать (Марков [2; гл. 1, § 6]), свойством однозначности: $[P^{\tau} \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} [Q^{\tau}$ для произвольных слов P и Q в A_2 тогда и только тогда, когда $P \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} Q$. В приводимой ниже теореме о переводе по существу и используется это обстоятельство, позволяющее заменить каждую вспомогательную букву некоторым словом вида (27).

Про изложенный способ перевода мы будем говорить, что он есть перевод из алфавита A_2 в A_1, использующий кодирующие буквы α и β и сохраняющий алфавит A.

Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в алфавите (26). Заменим в схеме $\mathfrak{A}$ левую и правую часть каждой формулы подстановки на ее перевод. В результате получится некоторый нормальный алгорифм в алфавите A_1 ((25)), который мы назовем переводом $\mathfrak{A}$. Оказывается, перевод $\mathfrak{A}$ работает над переводами слов в алфавите A_2 точно так же, как $\mathfrak{A}$ работает над самими этими словами, точнее говоря, имеет место

Теорема 1 (теорема о переводе: Марков [2; гл. 3, § 7]). *Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в алфавите A_2 ((26)) и $\overline{\mathfrak{A}}$ — перевод этого алгорифма. Тогда для любого слова P в алфавите A_2*

$$\overline{\mathfrak{A}}([P^{\tau}) \simeq [\mathfrak{A}(P)^{\tau}.$$

В частности, когда P — слово в A и $\mathfrak{A}$ перерабатывает P в слово в A, то ((28))

$$\overline{\mathfrak{A}}(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \mathfrak{A}(P).$$

Таким образом, имеет место

Теорема 2 (теорема приведения: Марков [2; гл. 3, § 7]). *Пусть α и β — две различные буквы, не принадлежащие алфавиту A. Тогда всякий нормальный алгорифм* *над A эквивалентен относительно A* (см. п. 1) *некоторому нормальному алгорифму в алфавите $A \cup \{\alpha\beta\}$.*

Отметим следующий важный частный случай теоремы приведения.

Теорема 3. *При условиях теоремы 2 всякий нормальный алгорифм над A типа $(A \dashrightarrow A)$ вполне эквивалентен относительно A* (см. п. 1) *некоторому нормальному алгорифму в алфавите $A \cup \{\alpha\beta\}$.*

Для доказательства теорем 2—3 достаточно определить перевод из алфавита рассматриваемого нормального алгорифма (являющегося расширением алфавита A) в $A \cup \{\alpha\beta\}$, использующий кодирующие буквы α и β и сохраняющий алфавит A. В качестве искомого алгорифма в алфавите $A \cup \{\alpha\beta\}$ можно, ввиду теоремы 1, взять перевод исходного нормального алгорифма. Из теоремы о переводе, очевидно, также вытекает

Следствие 1. *При условиях теоремы 2 для всякого нормального алгорифма над алфавитом A может быть построен нормальный алгорифм в $A \cup \{\alpha\beta\}$, применимый к тем и только тем словам в A, к которым применим исходный алгорифм.*

Теоремы 2—3 показывают, что любое алгорифмическое преобразование слов в алфавите A, которое может быть выполнено нормальным алгорифмом над A, может быть выполнено также и нормальным алгорифмом в двухбуквенном расширении A. Таким образом, если нас интересуют нормальные алгорифмы, определенным образом перерабатывающие слова в алфавите A снова в слова в A, то достаточно рассматривать нормальные алгорифмы в каком-нибудь фиксированном (стандартном) двухбуквенном расширении алфавита A. Для этого расширения мы будем обычно использовать обозначение A^a.

6. Распространение нормального алгорифма на более широкий алфавит. Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в алфавите A_1 и алфавит A_2 является расширением A_1. Тогда можно рассмотреть нормальный алгорифм $\mathfrak{A}'$ в алфавите A_2 с той же самой схемой, что и $\mathfrak{A}$. Очевидно, для любого слова P в A_1

$$\mathfrak{A}(P) \simeq \mathfrak{A}'(P), \tag{29}$$

т. е. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ вполне эквивалентны относительно A_1. Нормальный алгорифм $\mathfrak{A}'$ будем называть *естественным распространением* $\mathfrak{A}$ на алфавит A_2.

В некоторых случаях оказывается удобным, чтобы алгорифм $\mathfrak{A}'$, удовлетворяющий (29) (всякий такой алгорифм называется распространением $\mathfrak{A}$ на A_2), был неприменим к тем словам в A_2, которые не являются словами в A_1. Этой цели легко достичь, приписав к схеме $\mathfrak{A}$ сверху группу формул вида $\eta \to \eta$, где $\eta \in A_2 \setminus A_1$. Получившийся нормальный алгорифм, называемый *формальным распространением* $\mathfrak{A}$ на алфавит A_2, очевидно, вполне эквивалентен $\mathfrak{A}$ относительно A_1 и не применим к тем словам в A_2, которые не являются словами в A_1.

Использование возможности распространения нормального алгорифма на более широкий алфавит, а также указанной в предыдущем пункте возможности «приведения» нормального алгорифма с сохранением эквивалентности к алгорифму в стандартном двухбуквенном расширении исходного алфавита, позволяет во многих случаях опускать без особого ущерба точности упоминание об алфавитах, в которых строятся конкретные нормальные алгорифмы, выполняющие те или иные преобразования слов в данном алфавите. Мы часто так и будем поступать, опуская упоминания об операциях перевода в стандартное расширение алфавита и о замене данного алгорифма его естественным распространением на тот или иной более широкий, чем первоначально связываемый с этим алгорифмом алфавит.

7. Теоремы сочетания нормальных алгорифмов. При практическом построении алгорифмов часто применяются приемы, состоящие во включении в искомый алгорифм в тех или иных сочетаниях уже известных ранее алгорифмов.

В этом пункте приводится ряд теорем, позволяющих строить некоторые новые нормальные алгорифмы, используя уже построенные алгорифмы. Эти теоремы показывают, что практически важные способы комбинирования алгорифмов воспроизводимы в теории нормальных алгорифмов, т. е., будучи примененными к нормальным алгорифмам, они дают снова нормальные алгорифмы. Использование теорем сочетания нормальных алгорифмов позволяет, кроме того, в большинстве случаев существенно упрощать задачи построения тех или иных конкретных нормальных алгорифмов.

Доказательства приводимых ниже теорем сочетания (за исключением теорем 11—12) можно найти в монографии Маркова [2]. Отметим, что эти доказательства сводятся к построению схемы искомого нормального алгорифма, исходя из схем подлежащих сочетанию нормальных алгорифмов. Таким образом, в тех случаях, когда построение нормального алгорифма выполняется с помощью теорем сочетания, мы всегда имеем принципиальную возможность явно выписать схему этого алгорифма.

1) *Композиция нормальных алгорифмов.* Одним из наиболее часто встречающихся способов комбинирования двух алгорифмов является их композиция, т. е. выполнение одного алгорифма непосредственно вслед за другим (рис. 3). Имеет место следующая теорема композиции нормальных алгорифмов.

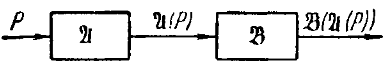


Рис. 3. Композиция нормальных алгорифмов.

Теорема 4. *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, может быть построен такой нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над объединением A их алфавитов, что*

$$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P))$$

(*при произвольном слове P в алфавите A*) *).

Чтобы дать читателю некоторое представление о том, как доказываются теоремы сочетания, мы наметим доказательство теоремы 4 в случае, когда $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ являются алгорифмами в одном и том же алфавите A (для перехода к общему случаю достаточно воспользоваться формальными распространениями (см. п. 6) $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ на объединение их алфавитов).

Итак, пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — нормальные алгорифмы в алфавите A. Сопоставим каждой букве η этого алфавита некоторую новую букву $\bar{\eta}$, не принадлежащую A, таким образом, чтобы разным буквам A отвечали разные бук-

*) Если $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в алфавите A_1 и P не является словом в этом алфавите, то выражение $\mathfrak{A}(P)$ считается лишенным смысла.

вы. Букву $\bar{\eta}$ назовем двойником η. Двойники букв алфавита A, очевидно, образуют новый алфавит, который мы обозначим через $\bar{A}$. Обозначим далее через α и β две различные буквы, отличные как от всех букв A, так и от всех букв $\bar{A}$. Перейдем от алгорифма $\mathfrak{A}$ к его замыканию $\mathfrak{A}^{\bullet}$ (см. п. 3 — напомним, что схема $\mathfrak{A}^{\bullet}$ получается из схемы $\mathfrak{A}$ присоединением снизу формулы $\rightarrow\cdot$) и заменим в схеме $\mathfrak{A}^{\bullet}$ каждую точку буквой α. Получившуюся систему формул обозначим через $\mathfrak{A}^{\alpha}$. Построим также систему формул $\overline{\mathfrak{B}}_{\alpha}^{\beta}$, получаемую из схемы $\mathfrak{B}^{\bullet}$ посредством замены всех букв алфавита A их двойниками, замены всех точек буквами β и после этого замены всех формул вида $\rightarrow P$ (т. е. формул с пустой левой частью) на формулы $\alpha \rightarrow \alpha P$.

Рассмотрим теперь нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ в алфавите $Б = A \cup \bar{A} \cup \{\alpha\beta\}$ со схемой (в сокращенной записи)

$$
\begin{array}{ll}
(30) & \zeta\alpha \rightarrow \alpha\zeta \quad (\zeta \in A) \\
(31) & \alpha\zeta \rightarrow \alpha\bar{\zeta} \quad (\zeta \in A) \\
(32) & \bar{\zeta}\eta \rightarrow \bar{\zeta}\bar{\eta} \quad (\zeta,\ \eta \in A) \\
(33) & \bar{\zeta}\beta \rightarrow \beta\bar{\zeta} \quad (\zeta \in A) \\
(34) & \beta\bar{\zeta} \rightarrow \beta\zeta \quad (\zeta \in A) \\
(35) & \zeta\bar{\eta} \rightarrow \zeta\eta \quad (\zeta,\ \eta \in A) \\
(36) & \alpha\beta \rightarrow \cdot \\
(37) & \overline{\mathfrak{B}}_{\alpha}^{\beta} \\
(38) & \mathfrak{A}^{\alpha}
\end{array}
$$

Пусть P — произвольное слово в алфавите A. Работа алгорифма $\mathfrak{C}$ над P протекает в несколько этапов.

а) Формулы групп (30)—(37) не могут применяться (заметим, что именно с этой целью — отличать формулы алгорифма $\mathfrak{B}$ (им соответствуют формулы группы (37)) от формул $\mathfrak{A}$ — и вводились двойники). Далее, поскольку группа формул (38) содержит формулу с пустой левой частью (такова последняя формула этой группы), то применяется одна из формул группы (38). Алгорифм $\mathfrak{C}$ воспроизводит работу алгорифма $\mathfrak{A}^{\bullet}$ (а следовательно, и $\mathfrak{A}$). При этом, если

$$\mathfrak{A}\colon P \models_n Q,$$

то

$$\mathfrak{C}:\ P \models_n Q,$$

и, таким образом, из неприменимости $\mathfrak{A}$ к P вытекает неприменимость $\mathfrak{C}$ к P. Пусть теперь $\mathfrak{A}$ применим к P и

(39) $$\mathfrak{A}(P) \doteq Q.$$

В этом случае $\mathfrak{A}^{\bullet}$ заключительно переводит P в Q. Из построения группы формул (38) тогда ясно, что $\mathfrak{C}$ переведет P в некоторое Q', отличающееся от Q лишь присутствием одного экземпляра буквы α (присутствие этой буквы и сигнализирует окончание работы $\mathfrak{A}$). То есть при некоторых Q_1, Q_2 таких, что

$$Q \doteq Q_1 Q_2,$$

выполняется

$$\mathfrak{C}:\ P \models Q_1 \alpha Q_2.$$

б) Применяются формулы группы (30), в результате чего α «бежит» влево (при пустом Q_1 этот этап отпадает):

$$\mathfrak{C}:\ Q_1 \alpha Q_2 \models \alpha Q_1 Q_2.$$

Итак,

(40) $$\mathfrak{C}:\ P \models \alpha Q.$$

в) Теперь нужно применять к Q, являющемуся ((39)) результатом работы $\mathfrak{A}$ над словом P, алгорифм $\mathfrak{B}$. Предварительно, однако, поскольку группа формул (37), представляющая алгорифм $\mathfrak{B}$, записана в двойниках, нужно перевести в двойники и обрабатываемое слово. Эта задача и решается группами формул (31)—(32), при помощи которых

(41) $$\mathfrak{C}:\ \alpha Q \models \alpha \overline{Q}$$

(здесь через $\overline{Q}$ обозначен двойник слова Q, т. е. слово, получающееся из Q заменой всех его букв двойниками).

Описанный этап, очевидно, отпадает в случае пустого Q.

г) В слово $\alpha\overline{Q}$ не входят левые части формул групп (30)—(36). Поэтому применяются формулы группы (37), работа которых воспроизводит (в двойниках) работу алгорифма $\mathfrak{B}$ над Q. Нетрудно убедиться (используя, в частности, то обстоятельство, что при построении $\mathfrak{B}_\alpha^\beta$

в формулы с пустой левой частью вставлялось α), что если

$$\mathfrak{B}:\ Q \models_n S,$$

то

$$\mathfrak{C}:\ \alpha\overline{Q} \models_n \alpha\overline{S}.$$

Отсюда, ввиду (40)—(41), получаем, что если $\mathfrak{B}$ неприменим к Q, то $\mathfrak{C}$ не применим к P.

Пусть теперь $\mathfrak{B}$ применим к Q и

$$\mathfrak{B}(Q) \mathrel{\dot{=}} R. \tag{42}$$

Тогда $\mathfrak{B}^{\cdot}$ заключительно переводит Q в R и так же, как на этапе а), найдутся R_1, R_2 такие, что

$$R \mathrel{\dot{=}} R_1R_2 \tag{43}$$

и

$$\mathfrak{C}:\ \alpha\overline{Q} \models \alpha\overline{R}_1\beta\overline{R}_2.$$

д) Применяются формулы (33); буква «β» «бежит» влево (этап отпадает при пустом R_1):

$$\mathfrak{C}:\ \alpha\overline{R}_1\beta\overline{R}_2 \models \alpha\beta\overline{R}.$$

Итак ((40)—(41), (42)),

$$\mathfrak{C}:\ P \models \alpha\beta\overline{R}.$$

е) По формулам (34)—(35) происходит «очищение» слова $\overline{R}$ от двойников (этот этап отпадает при пустом R):

$$\mathfrak{C}:\ \alpha\beta\overline{R} \models \alpha\beta R.$$

ж) По формуле (36)

$$\mathfrak{C}:\ \alpha\beta R \vdash \cdot\, R.$$

Итак, ввиду (39), (42),

$$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{A}(P)), \tag{44}$$

что и требуется.

Заметим, что вполне строгое доказательство равенства (44) достаточно громоздко (Марков [2; гл. 3, § 3]).

Доказательство теоремы композиции позволяет по схемам алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ построить схему их композиции, т. е. схему некоторого алгорифма $\mathfrak{C}$, удовлетворяющего (44) (мы отвлекаемся сейчас от неоднозначности описанной выше схемы $\mathfrak{C}$, связанной с выбором букв-двойников, букв α, β и порядком формул в группах (30)—(35), (37)—(38)). Этот алгорифм мы будем иногда обозначать посредством $(\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A})$.

Чтобы проиллюстрировать применение теоремы композиции, вернемся к отсекающим алгорифмам (пример 6) п. 4). Пусть, как и в п. 4, A—некоторый алфавит, α — буква, не принадлежащая этому алфавиту. Мы несколько изменим схемы отсекающих алгорифмов, добавив в схему первого из них формулу $\alpha\alpha \to \alpha$. Именно, обозначим через B^1, B^2 нормальные алгорифмы в $A \cup \{\alpha\}$ со схемами

$$\begin{cases} \alpha\eta \to \alpha & (\eta \in A \cup \{\alpha\}) \\ \alpha \to \cdot & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta\alpha \to \alpha & (\eta \in A) \\ \alpha \to \cdot & \end{cases}$$

Пусть P — слово вида

$$P \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} P_1\alpha P_2\alpha \ldots \alpha P_k, \tag{45}$$

где все P_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ — слова в A.

Легко видеть, что

$$B^1(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} P_1,$$

$$B^2(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} P_2\alpha \ldots \alpha P_k.$$

Обозначим через B_n^2 $(n \geqslant 1)$ нормальные алгорифмы

$$B_1^2 = B^2,$$

$$B_2^2 = (B^2 \circ B^2),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$B_{n+1}^2 = (B^2 \circ B_n^2)$$

и рассмотрим нормальные алгорифмы B_n:

$$B_1 = B^1,$$

$$B_{n+1} = (B^1 \circ B_n^2).$$

Ясно, что для любого слова вида (45) с $k \geqslant n$

$$B_n(P) \mathrel{\dot{=}} P_n.$$

Таким образом, B_n «выбирает» n-ю компоненту α-кортежа длины, не меньшей n.

2) *Теорема объединения.* Очень часто встречаются ситуации, когда интересующий нас результат слагается из нескольких частей, получаемых при помощи различных алгорифмов. В случае словарных алгорифмов можно сформулировать следующее предписание: применить к данному слову P алгорифмы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, затем к результату работы $\mathfrak{A}$ приписать справа результат, полученный посредством $\mathfrak{B}$. Алгорифм, возникающий согласно этому предписанию из $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, естественно назвать *объединением* $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Имеет место следующая теорема объединения нормальных алгорифмов.

Теорема 5 (Марков [2; гл. 3, § 4]). *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ над алфавитом A, может быть построен нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над A такой, что при любом слове P в A*

$$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{A}(P)\,\mathfrak{B}(P). \tag{46}$$

Почти очевиден следующий вариант теоремы объединения.

Теорема 6. *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ над алфавитом A и буква α, можно построить нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над $A \cup \{\alpha\}$ такой, что*

$$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{A}(P)\,\alpha\mathfrak{B}(P)$$

при любом слове P в алфавите A.

Для доказательства теоремы 6 достаточно два раза применить теорему 5, используя при этом нормальный алгорифм $\mathfrak{D}_\alpha$, перерабатывающий всякое слово P в алфавите A в букву α *).

Теоремы 5—6 очевидным образом распространяются на случай объединения нескольких нормальных алгорифмов. Их особенно удобно использовать (в сочетании

*) $\mathfrak{D}_\alpha$ легко построить как композицию аннулирующего алгорифма (пример 3) п. 4) и алгорифма $\mathfrak{N}_7^\alpha$ (пример 7) п. 4). Мы также предлагаем читателю в качестве простого упражнения построить алгорифм $\mathfrak{D}_\alpha$ непосредственно.

с теоремой композиции) тогда, когда результаты работы нескольких алгорифмов, объединенные (как правило, с использованием разделительной буквы) в систему, сами должны рассматриваться как исходные данные некоторого нового алгорифма.

Ясно, что алгорифм $\mathfrak{C}$, построенный согласно теореме 5, применим к тем и только тем словам в P, к которым применимы оба алгорифма $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, т. е. имеет место

Следствие 2. *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ над алфавитом A, можно построить нормальный алгорифм над A, применимый к тем и только тем словам в A, к которым применимы оба алгорифма $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.*

В качестве примера применения теорем композиции и объединения построим алгорифм $\mathfrak{D}$, распознающий графическое равенство слов в алфавите A. Пусть α — буква, не принадлежащая A. Мы хотим, чтобы для любых слов P и Q в A выполнялось

$$!\mathfrak{D}(P\alpha Q)$$

и

$$\mathfrak{D}(P\alpha Q) \mathrel{\overset{\cdot}{=}} \Lambda \equiv P \mathrel{\overset{\cdot}{=}} Q. \tag{47}$$

Рассмотрим нормальный алгорифм $\mathfrak{D}_1$ со схемой

$$\begin{cases} \eta\alpha\eta \to \alpha & (\eta \in A) \\ \alpha \to \cdot & \end{cases}$$

Для каждого слова P обозначим через $\overline{P}$ его обращение (см. пример 9) п. 4). Легко видеть, что для любого слова $P\alpha Q$

$$!\mathfrak{D}_1(P\alpha Q)$$

и

$$\mathfrak{D}_1(P\alpha Q) \mathrel{\overset{\cdot}{=}} \Lambda \equiv Q \mathrel{\overset{\cdot}{=}} \overline{P}. \tag{48}$$

По теореме композиции построим алгорифм $\mathfrak{D}_2$ так, что

$$\mathfrak{D}_2(P\alpha Q) \simeq \mathfrak{R}_9(B_2(P\alpha Q)),$$

где $\mathfrak{R}_9$ — обращающий алгорифм (пример 9) п. 4), а B_2 — построенный выше «высекающий» алгорифм.

Очевидно,

$$\mathfrak{D}_2(PaQ) \doteq \bar{Q}. \tag{49}$$

Построим далее алгорифм $\mathfrak{D}_3$ по теореме объединения так, что

$$\mathfrak{D}_3(PaQ) \simeq B_1(PaQ)\,a\mathfrak{D}_2(PaQ),$$

где B_1 — построенный выше «высекающий» алгорифм. Ввиду (49)

$$\mathfrak{D}_3(PaQ) \simeq Pa\bar{Q}. \tag{50}$$

Наконец, по теореме композиции строим алгорифм $\mathfrak{D}$ так, что

$$\mathfrak{D}(PaQ) \simeq \mathfrak{D}_1(\mathfrak{D}_3(PaQ)).$$

Ввиду (48) для $\mathfrak{D}$ выполняется (47), что и требовалось.

3) Теорема разветвления. Иногда приходится рассматривать предписания следующего типа (рис. 4): для данного исходного слова P проверить, удовлетворяет ли оно данному условию $\mathscr{A}$; если P удовлетворяет $\mathscr{A}$, то применить к P алгорифм $\mathfrak{A}$, в противном

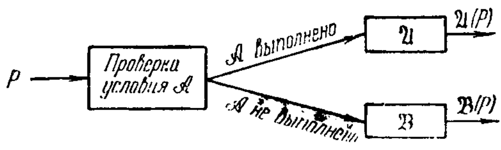


Рис. 4. Разветвление нормальных алгорифмов.

случае применить к P алгорифм $\mathfrak{B}$. Ясно, что такое предписание определяет алгорифм в том случае, когда условие $\mathscr{A}$ разрешимо, т. е. когда мы располагаем алгорифмом, применимым к любому слову P и аннулирующим P тогда и только тогда, когда P удовлетворяет условию $\mathscr{A}$ *). Возможность оформления сформулированного предписания в виде нормального алгорифма (при условии, что $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и алгорифм, «разрешающий»

*) Мы говорим, что алгорифм аннулирует слово P, если он перерабатывает P в пустое слово.

условие $\mathscr{A}$, заданы как нормальные алгорифмы) вытекает из следующей теоремы (Марков [2; гл. 3, § 5]).

Теорема 7. *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, может быть построен нормальный алгорифм $\mathfrak{D}$ над объединением A их алфавитов такой, что при любом слове P в A*

1) *если $\mathfrak{C}$ не применим к P, то и $\mathfrak{D}$ не применим к P;*

2) *если $\mathfrak{C}$ применим к P, то*

$$\mathfrak{D}(P) \stackrel{\bullet}{\simeq} \mathfrak{A}(P)$$

в том случае, когда

$$\mathfrak{C}(P) \mathrel{\dot{=}} \Lambda,$$

и

$$\mathfrak{D}(P) \simeq \mathfrak{B}(P)$$

в том случае, когда

$$\mathfrak{C}(P) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda.$$

Теорема разветвления легко распространяется на случай, когда выбор работающего алгорифма зависит от последовательной проверки нескольких условий.

Теорема 8 (ср. Марков [2; гл. 3, § 5]). *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n+1}$, $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$ $(n > 0)$, можно построить такой нормальный алгорифм $\mathfrak{D}$ над объединением A их алфавитов, что для любого слова P в A* *)

$$\mathfrak{D}(P) \simeq$$
$$\simeq \begin{cases} \mathfrak{A}_1(P), & \text{если } \mathfrak{C}_1(P) \mathrel{\dot{=}} \Lambda, \\ \mathfrak{A}_2(P), & \text{если } \mathfrak{C}_1(P) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda,\ \mathfrak{C}_2(P) \mathrel{\dot{=}} \Lambda, \\ \mathfrak{A}_3(P), & \text{если } \mathfrak{C}_1(P) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda,\ \mathfrak{C}_2(P) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda,\ \mathfrak{C}_3(P) \mathrel{\dot{=}} \Lambda, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \mathfrak{A}_n(P), & \text{если } \mathfrak{C}_1(P) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda, \ldots, \mathfrak{C}_{n-1}(P) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda,\ \mathfrak{C}_n(P) \mathrel{\dot{=}} \Lambda, \\ \mathfrak{A}_{n+1}(P), & \text{если } \mathfrak{C}_1(P) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda,\ \mathfrak{C}_2(P) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda, \ldots, \mathfrak{C}_n(P) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda. \end{cases}$$

---

*) Следует иметь в виду, что если два выражения связаны знаком графического неравенства $\dot{\neq}$, то они осмыслены и представляют собой различные слова. Словесное предписание, соответствующее алгорифму $\mathfrak{D}$, таково: применяем к P алгорифм $\mathfrak{C}_1$; если процесс применения $\mathfrak{C}_1$ закончился, то смотрим, пуст или нет результат; в случае, когда $\mathfrak{C}_1(P) \mathrel{\dot{=}} \Lambda$, применяем к P алгорифм $\mathfrak{A}_1$, в случае, когда $\mathfrak{C}_1(P) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda$, применяем к P алгорифм $\mathfrak{C}_2$ и т. д.

Следствие 3. *Пусть $\mathscr{A}$ — разрешимое свойство слов в алфавите А, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ — нормальные алгорифмы над А. Можно построить нормальный алгорифм $\mathfrak{D}$ над А так, что для любого слова Р в А*

$$\mathfrak{D}(P) \simeq \begin{cases} \mathfrak{A}(P), & \textit{если слово } P \textit{ обладает свойством } \mathscr{A}, \\ \mathfrak{B}(P), & \textit{если слово } P \textit{ не обладает свойством } \mathscr{A}. \end{cases}$$

Следствие 4. *Пусть $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ — разрешимые свойства слов в алфавите А, $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ — нормальные алгорифмы над А. Можно построить нормальный алгорифм $\mathfrak{D}$ над А так, что при любом слове Р в А выполняется*

$$\mathfrak{D}(P) \simeq \begin{cases} \mathfrak{A}_0(P), & \textit{если } P \textit{ не обладает ни одним из свойств } \mathscr{A}_i \ (1 \leqslant i \leqslant n), \\ \mathfrak{A}_1(P), & \textit{если } P \textit{ обладает свойством } \mathscr{A}_1, \\ \mathfrak{A}_2(P), & \textit{если } P \textit{ не обладает свойством } \mathscr{A}_1 \textit{ и обладает свойством } \mathscr{A}_2, \\ \dots\dots\dots & \\ \mathfrak{A}_n(P), & \textit{если } P \textit{ не обладает свойствами } \mathscr{A}_i \ (1 \leqslant i \leqslant n-1) \textit{ и обладает свойством } \mathscr{A}_n. \end{cases}$$

4) Теорема повторения. Оператор наименьшего числа. Задание нормальных алгорифмов рекурсией. Во многих случаях возникает необходимость в итерации некоторого процесса до тех пор, пока получающийся результат не удовлетворит определенному условию. Например, таким повторяемым процессом может быть прибавление единицы к натуральному числу, а проверяемым условием — свойство натурального числа быть бо́льшим, скажем, пяти. В случае, когда рассматриваемый процесс есть словарный алгорифм $\mathfrak{A}$, а условие является алгорифмически проверяемым, можно сформулировать следующее алгорифмическое предписание (рис. 5): применить к исходному слову P алгорифм $\mathfrak{A}$, проверить, обладает ли результат $\mathfrak{A}(P)$ (если, конечно, $\mathfrak{A}$ применим к P) нужным свойством; при положительном исходе этой проверки оборвать переработку слова P и считать $\mathfrak{A}(P)$ результатом, при отрицательном исходе перейти к слову $\mathfrak{A}(P)$ и поступить с ним так же, как и с P, и т. д.

Теорема 9 (Марков [2; гл. 3, § 6]). *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, может быть построен нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над объединением A*

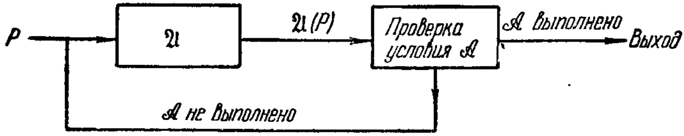


Рис. 5. Повторение нормального алгорифма.

их алфавитов такой, что $\mathfrak{C}$ перерабатывает произвольное слово $P \in A$ в слово Q тогда и только тогда, когда существует ряд слов $P_0, \ldots, P_n$ $(n > 0)$ со следующими свойствами:

(51) $$P_0 \doteq P,$$

(52) $$P_i \doteq \mathfrak{A}(P_{i-1}) \qquad (0 < i \leqslant n),$$

(53) $$P_n \doteq Q,$$

(54) $$\mathfrak{B}(P_i) \not\doteq \Lambda \qquad (0 < i < n),$$

(55) $$\mathfrak{B}(P_n) \doteq \Lambda.$$

Иногда, прежде чем применять к данному слову алгорифм $\mathfrak{A}$, оказывается целесообразным проверить,

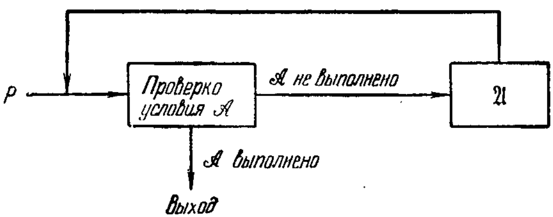


Рис. 6. Видоизмененное повторение нормального алгорифма.

не обладает ли нужным свойством само исходное слово (так, в частности, обстоит дело с приведенным выше примером последовательного прибавления единицы). В подобных случаях полезен следующий вариант теоремы повторения (рис. 6)

Теорема 10 (Марков [2; гл. 3, § 6]). *Каковы бы ни были нормальные алгорифмы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, можно построить нормальный алгорифм $\mathfrak{C}$ над объединением A их алфавитов такой, что $\mathfrak{C}$ перерабатывает произвольное слово $P \in A$ в слово Q тогда и только тогда, когда существует ряд слов $P_0, \ldots, P_n$ $(n \geqslant 0)$, удовлетворяющий условиям* (51)—(53), (55) *и условию*

$$\mathfrak{B}(P_i) \not\simeq \Lambda \qquad (0 \leqslant i < n).$$

Про алгорифм $\mathfrak{C}$, построенный согласно теореме 9 (теореме 10), будем говорить, что он является *повторением* (*видоизмененным повторением*) алгорифма $\mathfrak{A}$, управляемым алгорифмом $\mathfrak{B}$.

Теорема повторения позволяет задавать нормальные алгорифмы при помощи таких хорошо известных из теории рекурсивных функций средств, как μ-оператор и примитивная рекурсия.

Пусть $\mathscr{A}$ — некоторое свойство натуральных чисел *). Обозначим через

$$\mu n \mathscr{A}(n) \tag{56}$$

наименьшее натуральное число, обладающее свойством $\mathscr{A}$. В случае, когда свойство $\mathscr{A}$ не выполняется ни для какого натурального числа, выражение (56) считается лишенным смысла.

С двухместным алгорифмически проверяемым отношением $\mathscr{A}$ можно связать следующее алгорифмическое предписание: для данного исходного слова P последовательно проверять $\mathscr{A}(P, 0)$, $\mathscr{A}(P, 1)$ и т. д. до обнаружения числа k, при котором первый раз выполнится $\mathscr{A}(P, k)$; это число считать результатом. Возможность оформления такого предписания в виде нормального алгорифма (при условии, что мы имеем нормальный алгорифм, проверяющий отношение $\mathscr{A}$) вытекает из следующей теоремы (в теоремах 11—12 A — произвольный алфавит, α — некоторая не принадлежащая алфавиту $A \cup \{0|\}$ буква).

Теорема 11 (ср. Цейтин [5; стр. 304]). *По всякому нормальному алгорифму $\mathfrak{A}$ над алфавитом $A \cup \{\alpha\}$*

---

*) Напомним, что под натуральными числами мы понимаем слова в алфавите $\{0|\}$ вида 0, 0|, 0|| и т. д.

можно построить нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ *над алфавитом* $A \cup \{0|\}$ *так, что для любого слова* P *в алфавите* A *выполняется: если при каждом натуральном* i

$$!\mathfrak{A}(Pai), \tag{57}$$

то

$$\mathfrak{B}(P) \simeq \mu n(\mathfrak{A}(Pan) \doteq \Lambda). \tag{58}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{B}_1$ такой нормальный алгорифм, что для любого слова Q в алфавите $A \cup \{\alpha 0|\}$

$$\mathfrak{B}_1(Q) \doteq Q|$$

(см. пример 8) п. 4). По теореме 10 построим алгорифм $\mathfrak{B}_2$, являющийся видоизмененным повторением алгорифма $\mathfrak{B}_1$, управляемым алгорифмом $\mathfrak{A}$. Тогда для любого $P \in A$, удовлетворяющего условию (57), будет выполняться

$$\mathfrak{B}_2(P\alpha 0) \simeq P\alpha\mu n(\mathfrak{A}(Pan) \doteq \Lambda).$$

Легко построить алгорифм $\mathfrak{B}_3$ так, что

$$\mathfrak{B}_3(P) \simeq \mathfrak{B}_2(P\alpha 0).$$

Искомый алгорифм $\mathfrak{B}$ строим теперь как композицию алгорифмов $\mathfrak{B}_3$ и «высекающего» алгорифма B_2 (стр. 72). Очевидно, при выполнении (57)

$$\mathfrak{B}(P) \simeq B_2(\mathfrak{B}_3(P)) \simeq B_2(P\alpha\mu n(\mathfrak{A}(Pan) \doteq \Lambda)).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{B}(P) \simeq \mu n(\mathfrak{A}(Pan) \doteq \Lambda),$$

т. е. выполняется (58), что и требуется.

Теорема 12 (определение нормального алгорифма при помощи примитивной рекурсии). *Пусть* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ — *нормальные алгорифмы соответственно над алфавитами* A *и* $A_1 = A \cup \{0|\alpha\}$. *Можно построить нормальный алгорифм* $\mathfrak{C}$ *над* A_1 *так, что при любом слове* P *в алфавите* A *и любом натуральном числе* m

$$\mathfrak{C}(P\alpha 0) \simeq \mathfrak{A}(P),$$

$$\mathfrak{C}(P\alpha m+1) \simeq \mathfrak{B}(P\alpha m\alpha\mathfrak{C}(P\alpha m)).$$

Наметим доказательство этой теоремы. Обозначим через $\mathfrak{D}_1$ такой нормальный алгорифм над A_1, что при любых натуральных m и n

$$!\mathfrak{D}_1(m\alpha n)$$

и

$$\mathfrak{D}_1(m\alpha n) \overline{\overline{\cdot}} \Lambda \equiv m \overline{\overline{\cdot}} n.$$

(Такой алгорифм, распознающий графическое равенство, был построен выше (стр. 74).) Применяя теоремы композиции и объединения к алгорифму $\mathfrak{D}_1$ и «высекающим» алгорифмам B_2, B_4 (см. стр. 72), легко построить нормальный алгорифм $\mathfrak{D}_2$ (над A_1) так, что при любых словах P и Q в A и любых натуральных m, n

$$!\mathfrak{D}_2(P\alpha m\alpha Q\alpha n)$$

и

$$\mathfrak{D}_2(P\alpha m\alpha Q\alpha n) \overline{\overline{\cdot}} \Lambda \equiv m \overline{\overline{\cdot}} n. \tag{59}$$

Аналогично, нетрудно построить алгорифм $\mathfrak{D}_3$ так, что

$$\mathfrak{D}_3(P\alpha m\alpha Q\alpha n) \simeq P\alpha m\alpha\mathfrak{B}(P\alpha n\alpha Q)\,\alpha n\,|. \tag{60}$$

Построим теперь нормальный алгорифм $\mathfrak{D}_4$ как видоизмененное повторение $\mathfrak{D}_3$ с управляющим алгорифмом $\mathfrak{D}_2$ (теорема 10) и рассмотрим композицию $\mathfrak{D}_6$ этого алгорифма с алгорифмом $\mathfrak{D}_5$ таким, что

$$\mathfrak{D}_5(P\alpha m) \simeq P\alpha m\alpha\mathfrak{A}(P)\,\alpha 0$$

(несложное построение $\mathfrak{D}_5$ с помощью теоремы объединения предоставляется читателю).

Таким образом,

$$\mathfrak{D}_6(P\alpha m) \simeq \mathfrak{D}_4(\mathfrak{D}_5(P\alpha m)) \simeq \mathfrak{D}_4(P\alpha m\alpha\mathfrak{A}(P)\,\alpha 0). \tag{61}$$

Ввиду (59) — (61)

$$\mathfrak{D}_6(P\alpha 0) \simeq \mathfrak{D}_4(P\alpha 0\alpha\mathfrak{A}(P)\,\alpha 0) \simeq P\alpha 0\alpha\mathfrak{A}(P)\,\alpha 0. \tag{62}$$

При $m > 0$ применимость $\mathfrak{D}_6$ к слову $P\alpha m$ равносильна существованию цепочки слов P_0, P_1, …, P_m такой, что

$$P_0 \overline{\overline{\cdot}} \mathfrak{A}(P), \tag{63}$$

$$P_{i+1} \overline{\overline{\cdot}} \mathfrak{B}(P\alpha i\alpha P_i) \qquad (0 \leqslant i < m), \tag{64}$$

причем в случае существования этой цепочки

$$\mathfrak{D}_6(Pam) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} PamaP_m am.$$

Алгорифм $\mathfrak{D}_6$ уже очень близок к искомому. В самом деле, по теореме композиции построим алгорифм $\mathfrak{C}$ так, что

$$\mathfrak{C}(Pam) \simeq B_3(\mathfrak{D}_6(Pam)),$$

где B_3 — такой алгорифм, что для любых слов S_1, S_2, S_3, S_4 в $A \cup \{0|\}$

$$B_3(S_1 \alpha S_2 \alpha S_3 \alpha S_4) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} S_3.$$

Ясно тогда, что применимость алгорифма $\mathfrak{C}$ к слову Pam равносильна существованию указанной выше цепочки $P_0, \ldots, P_m$, причем в случае существования такой цепочки

$$\mathfrak{C}(Pam) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} P_m. \tag{65}$$

Из (62) — (65) получаем

$$\mathfrak{C}(P\alpha 0) \simeq \mathfrak{A}(P),$$
$$\mathfrak{C}(Pam+1) \simeq \mathfrak{B}(Pam\alpha\mathfrak{C}(Pam)),$$

что и требуется.

Предлагаем читателю в качестве упражнения построить с помощью теоремы повторения нормальный алгорифм, умножающий натуральные числа.

8. Изображение и запись нормального алгорифма. Теорема об универсальном алгорифме. В ряде случаев возникает необходимость привлекать одни нормальные алгорифмы в качестве исходных данных других алгорифмов. В таких случаях оказывается необходимой кодировка схем нормальных алгорифмов словами некоторых специальных типов. Мы приведем здесь, следуя монографии Маркова [2], два простых способа такой кодировки. Каждый из них обеспечивает возможность однозначного восстановления схемы нормального алгорифма по его коду.

Пусть фиксирован некоторый алфавит A, и пусть α, β, γ — три различные буквы, отличные от стрелки и от точки и не принадлежащие A. Обозначим через $Б$ алфавит $A \cup \{\alpha\beta\gamma\}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольный нормальный алгорифм в алфавите A. *Изображением* $\mathfrak{A}^{И}$ алгорифма $\mathfrak{A}$ назовем слово в алфавите $Б$, получаемое следующим образом: выписываются в порядке очередности формулы подстановок $\mathfrak{A}$, причем справа от каждой формулы ставится буква γ, а все стрелки и точки заменяются соответственно на буквы α и β. Например, изображением тождественного алгорифма

$$\{\rightarrow\cdot$$

является слово $\alpha\beta\gamma$, а изображением алгорифма со схемой

$$\begin{cases} P_1 \rightarrow P_2 \\ P_3 \rightarrow \cdot\, P_4 \end{cases}$$

(где P_1, P_2, P_3, P_4 — какие-то слова) является слово

$$P_1\alpha P_2\gamma P_3\alpha\beta P_4\gamma.$$

Одним из важнейших фактов теории нормальных алгорифмов (равно как и других общих концепций алгорифма) является существование универсального нормального алгорифма, т. е. алгорифма, выполняющего в некотором смысле работу любого нормального алгорифма в данном алфавите. В качестве исходных данных этот алгорифм, естественно, использует, кроме подлежащего обработке слова, и код выполняемого алгорифма.

Имеет место следующая теорема, утверждающая существование универсального алгорифма при кодировании нормальных алгорифмов их изображениями (в этой теореме δ — некоторая буква, не принадлежащая алфавиту $Б$).

Теорема 13 (Марков [2; гл. 4, § 2]). *Может быть построен такой нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$ над алфавитом $Б$, что*

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{A}^{И}\delta P) \simeq \mathfrak{A}(P)$$

для любого нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ в алфавите A и любого слова P в A.

Кодирование нормальных алгорифмов посредством их изображений иногда оказывается неудобным (ср. § 2) из-за большого количества используемых в нем букв. В таких случаях прибегают к более сложным способам кодирования, обходящимся меньшим числом букв. Следуя Маркову [2; гл. 4, § 3], мы будем применять способ кодирования, использующий всего две буквы. Именно, каждому нормальному алгорифму $\mathfrak{A}$ в алфавите A будет сопоставляться некоторое слово в двухбуквенном алфавите $\{0|\}$ *), называемое *записью* $\mathfrak{A}$ и обозначаемое посредством $\{\mathfrak{A}\}$. Это сопоставление осуществляется следующим образом. Определяется операция перевода (п. 5) из алфавита $Б$ изображений нормальных алгорифмов в алфавит $\{0|\}$, использующая кодирующие буквы 0 и | (сохраняемый алфавит в данном случае пуст), и записью данного нормального алгорифма объявляется перевод его изображения **).

По записи каждого нормального алгорифма в алфавите A может быть однозначно восстановлена его схема.

Приведем два примера записей алгорифмов. В качестве алфавита A возьмем в этих примерах двухбуквенный алфавит $\{ab\}$, а в качестве букв α, β, γ соответственно буквы c, d и e.

Запись тождественного алгорифма $\mathfrak{N}_1$ в алфавите $\{ab\}$ (его схема $\{\rightarrow\cdot\}$)такова: $\{\mathfrak{A}_1\} \stackrel{\cdot}{=} 0|||00||||00|||||0$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в алфавите $\{ab\}$ со схемой

$$\begin{cases} a \rightarrow \\ b \rightarrow \end{cases}$$

($\mathfrak{A}$ аннулирует любое слово в этом алфавите).

Очевидно,

$$\mathfrak{A}^{И} \stackrel{\cdot}{=} acebce$$

*) Марков использует алфавит $\{ab\}$.

**) Более подробно: выписываются в каком-нибудь порядке буквы $\eta_1, \ldots, \eta_{n+3}$ алфавита $Б$ (положим $\eta_{n+1} \stackrel{\cdot}{=} \alpha$, $\eta_{n+2} \stackrel{\cdot}{=} \beta$, $\eta_{n+3} \stackrel{\cdot}{=} \gamma$). Переводом буквы η_i $(1 \leqslant i \leqslant n+3)$ считается слово

$$0\underbrace{||\ldots|}_{i \text{ раз}}0.$$

Наконец, перевод слова в алфавите $Б$ получается одновременной заменой всех его букв их переводами.

Таким образом, при определении записей алгорифмов в алфавите A надлежит как-то фиксировать порядок букв в этом алфавите. В дальнейшем мы опускаем детали этого рода.

и, следовательно,

$$\xi\mathfrak{A}\zeta \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \underbrace{0|0}_{\substack{\text{перевод}\\ a}}\ \underbrace{0|||0}_{\substack{\text{перевод}\\ c}}\underbrace{0|||||0}_{\substack{\text{перевод}\\ e}}\ \underbrace{0||0}_{\substack{\text{перевод}\\ b}}\ \underbrace{0|||0}_{\substack{\text{перевод}\\ c}}\underbrace{0|||||0}_{\substack{\text{перевод}\\ e}}.$$

Теорема 13 легко распространяется на новый способ кодирования.

Теорема 14 (теорема об универсальном алгорифме; Марков [2; гл. 4, § 4]). *Можно построить нормальный алгорифм* $\mathfrak{B}$ *над алфавитом* $A \cup \{0|\delta\}$ (δ — *буква, не принадлежащая алфавиту* $A \cup \{0|\}$) *так, что при любом нормальном алгорифме* $\mathfrak{A}$ *в алфавите* A *и любом слове* P *в этом алфавите выполняется*

$$\mathfrak{B}(\xi\mathfrak{A}\zeta\,\delta P) \simeq \mathfrak{A}(P).$$

Алгорифм, удовлетворяющий теореме 14, мы будем называть *универсальным алгорифмом* для алфавита A, использующим разделительную букву δ.

9. Принцип нормализации. Из ознакомления с предыдущими пунктами у читателя, по-видимому, возникло ощущение большой общности понятия нормального алгорифма. Такое впечатление усиливается по мере дальнейшего знакомства с теорией нормальных алгорифмов и подтверждается практикой построения конкретных нормальных алгорифмов. Выражением этих обстоятельств является следующий, высказанный Марковым [2; стр. 91] принцип нормализации алгорифмов: всякий алгорифм (в интуитивном смысле) в алфавите A вполне эквивалентен относительно A некоторому нормальному алгорифму над A.

Принцип нормализации утверждает, таким образом, что концепция нормального алгорифма над алфавитом A в полной мере выражает наши интуитивные представления об алгорифмах, перерабатывающих слова в A. Ясно, что принцип нормализации не может быть строго доказан (из-за фигурирующего в нем расплывчатого общего понятия алгорифма) и носит характер естественнонаучной гипотезы. Мы отсылаем читателя за более подробным обсуждением этого принципа к монографии Маркова [2] *).

---

*) Ввиду эквивалентности уточнений понятия алгорифма, достигаемых с помощью нормальных алгорифмов, а также частично

Отметим, что со строго математической точки зрения наши построения не зависят от принципа нормализации, этот принцип не используется ни в определениях, ни в формулировках и доказательствах теорем (ср. введение, стр. 31). От принятия или непринятия принципа нормализации зависит лишь признание большей или меньшей общности излагаемой теории (относятся ли ее результаты только к нормальным алгорифмам или выражают свойства алгорифмов и вычислимости вообще).

В дальнейшем будут рассматриваться, как правило, лишь нормальные алгорифмы, в связи с чем прилагательное «нормальный» будет часто опускаться.

10. Моделирование работы нормального алгорифма по шагам. Из определения нормального алгорифма (п. 3) следует, что процесс применения нормального алгорифма к произвольному слову распадается на отдельные шаги, состоящие в выполнении соответствующих формул подстановок. Уточним сказанное.

Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в некотором алфавите A (который считается фиксированным на протяжении этого и следующего пункта). Пусть, далее, P — слово в A и n — натуральное число. При развертывании процесса применения $\mathfrak{A}$ к P могут представиться три возможности (мы используем обозначения п. 4):

1) найдется слово Q такое, что

$$\mathfrak{A}\colon\ P \models_{n+1} Q;$$

2) найдется Q такое, что

$$\mathfrak{A}\colon\ P \models_{n} Q$$

и Q не поддается алгорифму $\mathfrak{A}$ (мы пишем $\mathfrak{A}\colon\ P \models_0 P$, если P не поддается $\mathfrak{A}$);

рекурсивных функций и машин Тьюринга, принцип нормализации вполне аналогичен тезису Черча и тезису Тьюринга (утверждающим совпадение последних двух концепций вычислимости и алгорифмов с соответствующими интуитивными концепциями). Читатель может, таким образом, воспринимать в качестве аргументации в пользу принципа нормализации аргументацию в пользу этих тезисов (см., например, монографии Клини [4], Мальцева [1] и Успенского [3]).

3) найдется Q такое, что

$$\mathfrak{A}\colon P \models_n \cdot Q$$

(ясно, что в этом случае $n > 0$).

В случае 1) будем говорить, что $\mathfrak{A}$ *не заканчивает работу над P за n шагов*, в случае 2) будем говорить, что $\mathfrak{A}$ *заканчивает работу над P в точности за $n+1$ шагов*, а в случае 3) — *в точности за n шагов* *). Скажем, что $\mathfrak{A}$ заканчивает работу над P *не более чем за n шагов*, если при некотором $k \leqslant n$ $\mathfrak{A}$ заканчивает работу над P в точности за k шагов.

Имея нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$, слово P и натуральное число n, можно задаться вопросом: заканчивает ли $\mathfrak{A}$ свою работу над P не более чем за n шагов? Интуитивное предписание для ответа на такой вопрос совершенно очевидно: нужно выполнять шаг за шагом алгорифм $\mathfrak{A}$ и ждать, закончится ли его работа до n-го шага (т. е. дойдем ли мы до n-го применения формул подстановок).

Можно построить и нормальный алгорифм, решающий эту задачу.

Теорема 15 **). *Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в алфавите A и α — буква, не принадлежащая A. Можно построить нормальный алгорифм $[\mathfrak{A}]_\alpha$ над алфавитом $A \cup \{0|\} \cup \{\alpha\}$ так, что для любого слова P в алфавите A и любого натурального n*

1) $![\mathfrak{A}]_\alpha(P\alpha n)$;

2) $[\mathfrak{A}]_\alpha(P\alpha n) \doteq \Lambda$ *тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ заканчивает работу над P не более чем за n шагов.*

---

*) Таким образом, число шагов, за которое $\mathfrak{A}$ заканчивает работу над P, определено нами как число применений формул подстановок в случае заключительного обрыва и как число применений формул подстановок плюс единица в случае естественного обрыва. Эта небольшая непоследовательность в определении, ничего не меняя по существу, позволяет заметно упростить доказательство теоремы 15. Читатель легко заметит, что число шагов работы алгорифма $\mathfrak{A}$ над словом P равно числу применений формул подстановок (при работе над этим же словом) замыкания $\mathfrak{A}^{\bullet}$ алгорифма $\mathfrak{A}$.

**) Доказательства этой теоремы и теоремы 16 (п. 11) почти буквально заимствованы нами из работы Цейтина [5]. В качестве полезного упражнения предлагаем читателю непосредственно, не используя теорем сочетания, написать схему $[\mathfrak{A}]_\alpha$, исходя из схемы алгорифма $\mathfrak{A}$.

Нам понадобится следующая лемма (β — буква, отличная от всех букв алфавита $A \cup \{\alpha\}$).

Лемма 1. *Для любого алгорифма $\mathfrak{B}$ в алфавите $A \cup \{\beta\}$ можно построить алгорифм $\mathfrak{C}$ так, что при любом слове P в $A \cup \{\beta\}$ и любом натуральном n*

$$\mathfrak{C}(P\alpha 0) \simeq P,$$

$$\mathfrak{C}(P\alpha n + 1) \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{C}(P\alpha n)).$$

Эта лемма без труда доказывается с помощью теоремы 12 (п. 7). Ясно, что при $n > 0$

$$\mathfrak{C}(P\alpha n) \simeq \underbrace{\mathfrak{B}(\mathfrak{B}(\ldots \mathfrak{B}}_{n \text{ раз}}(P)) \ldots).$$

Докажем теперь теорему 15. Построим алгорифм $\mathfrak{A}_1$ в алфавите $A \cup \{\beta\}$, схема которого получается из схемы $\mathfrak{A}$ следующим образом. Сначала перейдем от $\mathfrak{A}$ к его замыканию $\mathfrak{A}^{\bullet}$ (см. п. 3), затем в схеме $\mathfrak{A}^{\bullet}$ заменим все точки буквой β и, наконец, все знаки $\rightarrow$ заменим на $\rightarrow\cdot$. Ясно, что $\mathfrak{A}_1$ применим к любому слову в $A \cup \{\beta\}$, причем всякое слово, содержащее букву β, перерабатывается этим алгорифмом снова в слово, содержащее β. Кроме того, при любых словах P, Q в алфавите A, если $\mathfrak{A}$: $P \vdash Q$, то $\mathfrak{A}_1(P)$ Q, и если $\mathfrak{A}$: $P \vdash \cdot Q$, то $\mathfrak{A}_1$ перерабатывает P в некоторое слово, содержащее букву β.

Обозначим через $\mathfrak{A}_2$ алгорифм, построенный по $\mathfrak{A}_1$ согласно лемме 1. Очевидно, $\mathfrak{A}_2$ применим к любому слову $P\alpha n$ (где $P \in A$), причем буква β входит в $\mathfrak{A}_2(P\alpha n)$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{A}$ заканчивает работу над P не более чем за n шагов. Пусть, далее, $\mathfrak{A}_3$ — алгорифм, применимый ко всем словам в алфавите $A \cup \{\beta\}$ и перерабатывающий в пустое слово те и только те из этих слов, в которые входит буква β (читатель без труда выпишет схему такого алгорифма).

Искомый алгорифм $[\mathfrak{A}]_\alpha$ строим с помощью теоремы композиции так, чтобы

$$[\mathfrak{A}]_\alpha(P\alpha n) \simeq \mathfrak{A}_3(\mathfrak{A}_2(P\alpha n)).$$

Из теоремы 15 без труда получаем

Следствие 5. *Для любого алгорифма* $\mathfrak{A}$ *в алфавите* A *и любого слова* P *в этом алфавите*

$$!\mathfrak{A}(P) \equiv \exists n\,([\mathfrak{A}]_\alpha (P\alpha n) \mathrel{\dot{=}} \Lambda).$$

Следствие 6. *Если при некотором* n

$$[\mathfrak{A}]_\alpha (P\alpha n) \mathrel{\dot{=}} \Lambda,$$

то и при всяком $m \geqslant n$

$$[\mathfrak{A}]_\alpha (P\alpha m) \mathrel{\dot{=}} \Lambda$$

Обозначение типа $[\mathfrak{A}]_\alpha$ сохраняется на протяжении всей книги, причем нижний индекс α, указывающий на используемую разделительную букву, будет, как правило, опускаться (поскольку из контекста почти всегда ясно, каким он должен был бы быть). Описанная конструкция, как увидит читатель, играет значительную роль при сведении алгорифмических проблем анализа к некоторым внутренним алгорифмическим проблемам теории алгорифмов (которые будут рассмотрены в следующем параграфе).

11. Фиксирование одного из аргументов нормального алгорифма. Часто нас интересует работа нормального алгорифма на словах, представляющих собой объединение нескольких исходных данных. Например, рассмотренный в предыдущем пункте алгорифм $[\mathfrak{A}]$ работал на словах вида $P\alpha n$, т. е., по существу, использовал два аргумента P и n, объединенных, как обычно, в одно слово с помощью разделительной буквы. Ясно, что при каждом фиксированном P можно рассмотреть алгорифм $\mathfrak{B}^P$ такой, что

$$\mathfrak{B}^P(n) \simeq [\mathfrak{A}](P\alpha n).$$

Возникает вопрос об оформлении получаемых таким образом алгорифмов в виде нормальных. Мы приведем соответствующую конструкцию, следуя Цейтину [5].

Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в некотором расширении $Б$ алфавита A, $\mathfrak{N}^P$ — алгорифм левого присоединения слова P, т. е. алгорифм в алфавите $Б$ со схемой

$$\{\to\cdot P$$

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{A}}_P$ композицию $(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{N}^P)$ этих двух алгорифмов. Очевидно, для любых слов P и Q в алфавите $Б$

$$\tilde{\mathfrak{A}}_P(Q) \simeq \mathfrak{A}(PQ),$$

что и требовалось.

Алгорифм $\tilde{\mathfrak{A}}_P$ является алгорифмом в некотором расширении $Б_1$ алфавита $Б$ ($Б_1$, очевидно, не зависит от P). Вместе с тем при изучении алгорифмических преобразований слов в исходном алфавите A обычно бывает удобно ограничиться рассмотрением нормальных алгорифмов в фиксированном двухбуквенном расширении A^a алфавита A (см. п. 5). С целью приведения $\tilde{\mathfrak{A}}_P$ к алфавиту A^a определяется операция перевода (см. п. 5) из $Б_1$ в A^a, сохраняющая алфавит A. Перевод алгорифма $\tilde{\mathfrak{A}}_P$ мы будем обозначать через $\hat{\mathfrak{A}}_P^A$, причем верхний индекс A, как правило, будем опускать. Итак, $\hat{\mathfrak{A}}_P$ есть нормальный алгорифм в алфавите A^a, эквивалентный $\tilde{\mathfrak{A}}_P$ относительно A. В частности, если $\mathfrak{A}$ — алгорифм типа $(A \dot{\rightarrow} A)$, то при любых словах P и Q в A выполняется

$$\hat{\mathfrak{A}}_P(Q) \simeq \mathfrak{A}(PQ).$$

Пусть для алфавита A^a определена запись алгорифмов в этом алфавите (п. 8).

Нам будет полезна следующая теорема (Цейтин [5]).

Теорема 16. *Пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в алфавите $Б$, включающем A. Тогда можно построить такой алгорифм $\mathfrak{B}$, что*

$$\mathfrak{B}(P) \doteq \{\hat{\mathfrak{A}}_P^A\}$$

для любого слова P в алфавите $Б$.

Доказательство. Поскольку алгорифм $\tilde{\mathfrak{A}}_P$ определен как композиция $(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{N}^P)$, то схема $\tilde{\mathfrak{A}}_P$ имеет вид (см. п. 7, теорема композиции)

$$\begin{cases} C \\ \mathfrak{N}_a^P \end{cases}$$

где C — некоторая система формул, не зависящая от слова P, а $\mathfrak{N}_\alpha^P$ — система двух формул:

$$\begin{cases} \to \alpha P \\ \to \alpha \end{cases}$$

Обозначим через τ нормальный алгорифм, осуществляющий перевод из алфавита $Б_1$ алгорифма $\widetilde{\mathfrak{A}}_P$ (этот алфавит, являющийся расширением $Б$, не зависит от P) в алфавит A^a. Алгорифм τ перерабатывает всякое слово в алфавите $Б_1$ в его перевод. Схема алгорифма $\widehat{\mathfrak{A}}_P$, являющегося переводом $\widetilde{\mathfrak{A}}_P$, имеет, очевидно, вид

$$\begin{cases} D \\ \to \tau(\alpha P) \\ \to \tau(\alpha) \end{cases}$$

где D — некоторая система формул, не зависящая от P. Изображение алгорифма $\widehat{\mathfrak{A}}_P$ запишется (с использованием вспомогательных букв β, γ, δ) как слово

$$\overline{D}\beta\tau(\alpha P)\delta\beta\tau(\alpha)\delta,$$

где $\overline{D}$ — опять-таки некоторое слово, не зависящее от P. Используя теорему объединения, легко построить алгорифм $\mathfrak{B}^1$, перерабатывающий всякое слово P в алфавите $Б$ в изображение алгорифма $\widehat{\mathfrak{A}}_P$. Пусть теперь $\mathfrak{B}^2$ — нормальный алгорифм, перерабатывающий изображения алгорифмов в A^a в их записи (это, очевидно, также некоторый алгорифм перевода). Искомый алгорифм $\mathfrak{B}$ строится как композиция $(\mathfrak{B}^2 \circ \mathfrak{B}^1)$ алгорифмов $\mathfrak{B}^1$ и $\mathfrak{B}^2$.

Теорема 16 будет обычно использоваться нами в следующих ситуациях. Пусть для каждого слова P в алфавите A нужно указать запись алгорифма в A^a, определенным образом работающего на словах в алфавите A. Строим алгорифм над алфавитом A, работающий на словах вида $P\alpha Q$, где P, Q — слова в A, α — буква, не принадлежащая A, таким образом, что при каждом фиксированном P алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}^{A}_{P\alpha}$ обладает требуемыми свойствами. Для получения алгорифма, перерабатывающего всякое P в искомую запись, остается воспользоваться теоремой 16.

§ 2. Некоторые неразрешимые алгорифмические проблемы теории алгорифмов

В этом параграфе рассматриваются некоторые алгорифмические проблемы теории алгорифмов. Эти проблемы являются эталонными в том смысле, что из их неразрешимости выводится неразрешимость всех других неразрешимых алгорифмических проблем, встречающихся в этой книге.

1. Проблема распознавания самоприменимости. Везде в этом пункте мы считаем фиксированным алфавит A, содержащий буквы 0 и | *).

Алгорифм $\mathfrak{A}$ в алфавите A назовем *самоприменимым* (*несамоприменимым*), если он применим (неприменим) к своей записи.

Примерами самоприменимого и несамоприменимого алгорифмов могут служить всюду определенный и нигде не определенный алгорифмы в алфавите A (см. п. 4, § 1).

Доказательство следующей теоремы весьма сходно с рассуждениями в парадоксе парикмахера и парадоксе Рассела (см., например, Клини [4]).

Теорема 1. *Невозможен алгорифм**) в алфавите A, применимый к записи алгорифма в A тогда и только тогда, когда этот алгорифм несамоприменим.*

Действительно, предположим, что такой алгорифм $\mathfrak{B}$ построен. Поскольку $\mathfrak{B}$ есть алгорифм в алфавите A, можно поставить вопрос о его самоприменимости.

Предположим, что $\mathfrak{B}$ самоприменим, т. е.

$$!\mathfrak{B}(\xi\mathfrak{B}\zeta). \tag{1}$$

---

*) Существенным является не то, что A содержит именно буквы 0 и |, а то, что A содержит не менее двух различных букв.

**) Здесь и ниже мы пользуемся нашим соглашением (§ 1) об опускании прилагательного «нормальный». Таким образом, под «алгорифмами» нужно всюду подразумевать нормальные алгорифмы.

Тогда по определению $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}$ применим лишь к записям несамоприменимых алгорифмов) должно выполняться

$$\urcorner\, !\mathfrak{B}(\xi\mathfrak{B}\zeta),$$

что противоречит (1). Следовательно, (1) неверно и имеет место

$$(2) \qquad \urcorner\, !\mathfrak{B}(\xi\mathfrak{B}\zeta).$$

Таким образом, $\mathfrak{B}$ — несамоприменимый алгорифм и поэтому

$$(3) \qquad !\mathfrak{B}(\xi\mathfrak{B}\zeta).$$

Итак, одновременно имеет место (2) и (3), что невозможно. Теорема доказана.

Обозначим через A^a двухбуквенное расширение $A \cup \{\alpha\beta\}$ алфавита A.

Теорема 2. *Невозможен алгорифм над алфавитом* $\{0|\}$, *применимый к записи алгорифма в алфавите* A^a *тогда и только тогда, когда этот алгорифм несамоприменим.*

Доказательство. Предположим, что такой алгорифм $\mathfrak{B}$ построен. По следствию теоремы о переводе (следствие 1 п. 5 § 1) можно построить алгорифм $\mathfrak{B}'$ в алфавите $\{0|\alpha\beta\}$ так, что для любого P в $\{0|\}$

$$!\mathfrak{B}(P) \equiv\, !\mathfrak{B}'(P).$$

Обозначим через $\mathfrak{B}''$ естественное распространение $\mathfrak{B}'$ на алфавит A^a ($\mathfrak{B}''$ — алгорифм в A^a с той же схемой, что и $\mathfrak{B}'$).

При любом P в $\{0|\}$

$$!\mathfrak{B}'(P) \equiv\, !\mathfrak{B}''(P).$$

Следовательно,

$$!\mathfrak{B}''(P) \equiv\, !\mathfrak{B}(P).$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{B}''$ есть алгорифм в алфавите A^a, применимый к записям тех и только тех алгорифмов в A^a, которые несамоприменимы. Это, однако, невозможно в силу предыдущей теоремы.

Из теоремы 2 вытекает неразрешимость проблемы распознавания самоприменимости для алгорифмов в алфавите A^a (в этом алфавите могут быть заданы алгорифмы, выполняющие любые алгорифмические преобразования слов в алфавите A).

Теорема 3. *Невозможен алгорифм над алфавитом* $\{0|\}$, *применимый к записи любого алгорифма в алфавите* A^a *и аннулирующий запись алгорифма в* A^a *тогда и только тогда, когда этот алгорифм самоприменим.*

2. Проблема распознавания применимости. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгорифм над алфавитом A. Под *проблемой распознавания применимости* алгорифма $\mathfrak{A}$ относительно алфавита A мы понимаем следующую задачу: построить алгорифм $\mathfrak{B}$ над A, применимый к любому слову P в алфавите A и такой, что

$$\mathfrak{B}(P) \doteqdot \Lambda \equiv !\mathfrak{A}(P).$$

В случае, когда искомый алгорифм $\mathfrak{B}$ можно построить, мы говорим, что для алгорифма $\mathfrak{A}$ *разрешима проблема распознавания применимости* относительно A. В противном случае будем говорить, что для $\mathfrak{A}$ *проблема распознавания применимости* относительно алфавита A *неразрешима.*

Ясно, что, располагая алгорифмом $\mathfrak{B}$, мы могли бы избежать подачи на вход алгорифма $\mathfrak{A}$ тех слов, для которых работа алгорифма $\mathfrak{A}$ никогда не заканчивается. Из этого замечания ясен практический интерес, представляемый проблемой распознавания применимости. Похожая задача при ограничении числа шагов алгорифма $\mathfrak{A}$ рассматривалась в п. 10 § 1 и оказалась разрешимой для любого алгорифма.

В этом пункте будет приведен пример алгорифма с неразрешимой проблемой распознавания применимости.

Обозначим через A_1 алфавит $\{0|\alpha\beta\}$.

Теорема 4. *Можно построить алгорифм* $\mathfrak{H}$ *в алфавите* A_1 *таким образом, что невозможен нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *над* $\{0|\}$, *удовлетворяющий условию*

$$!\mathfrak{A}(P) \equiv \neg !\mathfrak{H}(P)$$

для любого слова P *в алфавите* $\{0|\}$.

Доказательство. Пусть δ — буква, не входящая в алфавит A_1. По теореме об универсальном алгорифме (п. 8 § 1) построим алгорифм $\mathfrak{H}_1$ так, что для любого алгорифма $\mathfrak{C}$ в алфавите A_1 и любого слова Q в том же алфавите

$$\mathfrak{H}_1(\xi\mathfrak{C}\zeta\,\delta Q) \simeq \mathfrak{C}(Q). \tag{4}$$

Построим далее алгорифм $\mathfrak{H}_2$ над алфавитом A_1 так, что при любом Q

$$\mathfrak{H}_2(Q) \simeq \mathfrak{H}_1(Q\,\delta Q). \tag{5}$$

По следствию 1 п. 5 § 1 (следствие теоремы о переводе) можно построить алгорифм $\mathfrak{H}$ в алфавите A_1 с той же областью применимости относительно $\{0|\}$, что и $\mathfrak{H}_2$, т. е. для любого слова P в $\{0|\}$

$$!\mathfrak{H}(P) \equiv\, !\mathfrak{H}_2(P). \tag{6}$$

Покажем, что $\mathfrak{H}$ обладает требуемыми свойствами. Предположим, что построен алгорифм $\mathfrak{A}$ над алфавитом $\{0|\}$ так, что для любого слова P в этом алфавите

$$!\mathfrak{A}(P) \equiv \neg\, !\mathfrak{H}(P).$$

Тогда ((6))

$$!\mathfrak{A}(P) \equiv \neg\, !\mathfrak{H}_2(P). \tag{7}$$

Пусть теперь $\mathfrak{C}$ — произвольный алгорифм в алфавите A_1. Ввиду (4)—(5)

$$\mathfrak{H}_2(\xi\mathfrak{C}\zeta) \simeq \mathfrak{C}(\xi\mathfrak{C}\zeta).$$

Следовательно ((7)),

$$!\mathfrak{A}(\xi\mathfrak{C}\zeta) \equiv \neg\, !\mathfrak{C}(\xi\mathfrak{C}\zeta),$$

т. е. $\mathfrak{A}$ применим к записям тех и только тех алгорифмов в алфавите A_1, которые несамоприменимы. Это противоречит, однако, теореме 2.

Из теоремы 4 легко получаем искомый пример алгорифма с неразрешимой проблемой распознавания применимости.

Теорема 5. *Можно построить алгорифм в алфавите* $\{0|\alpha\beta\}$ *с неразрешимой проблемой распознавания применимости относительно алфавита* $\{0|\}$.

Очевидно, всем требованиям теоремы 5 удовлетворяет алгорифм $\mathfrak{H}$ из теоремы 4.

3. Непополнимый алгорифм. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгорифм над алфавитом A. Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ *полн* над A, если $\mathfrak{A}$ применим к любому слову в этом алфавите.

Алгорифм $\mathfrak{B}$ над алфавитом A будем называть *пополнением* $\mathfrak{A}$ относительно A, если $\mathfrak{B}$ полн над A и для любого слова P в этом алфавите, к которому применим $\mathfrak{A}$, выполняется

$$\mathfrak{B}(P) \mathrel{\dot{=}} \mathfrak{A}(P).$$

Алгорифм $\mathfrak{A}$ будем называть *пополнимым* над A, если можно построить алгорифм, являющийся пополнением $\mathfrak{A}$ относительно A.

Как и в предыдущем пункте, обозначим через A_1 алфавит $\{0|\alpha\beta\}$.

Теорема 6 (о существовании непополнимого алгорифма, принимающего два значения). *Можно построить алгорифм $\mathfrak{F}$ в алфавите A_1 такой, что*

1) *для любого слова P в алфавите $\{0|\}$, к которому применим $\mathfrak{F}$,*

$$\mathfrak{F}(P) \mathrel{\dot{=}} 0$$

или

$$\mathfrak{F}(P) \mathrel{\dot{=}} 0|;$$

2) $\mathfrak{F}$ *непополним относительно* $\{0|\}$.

Доказательство. Пусть δ — буква, не принадлежащая алфавиту A_1. По теореме об универсальном алгорифме построим алгорифм $\mathfrak{F}_1$ так, что для любого алгорифма $\mathfrak{C}$ в A_1 и любого слова Q в этом алфавите

$$\mathfrak{F}_1(\{\mathfrak{C}\}\delta Q) \simeq \mathfrak{C}(Q). \tag{8}$$

Построим далее алгорифм $\mathfrak{F}_2$ так, что

$$\mathfrak{F}_2(Q) \simeq \mathfrak{F}_1(Q\delta Q). \tag{9}$$

(До сих пор мы в точности следовали доказательству теоремы 4.)

Используя теоремы сочетания, легко построить алгорифм $\mathfrak{F}_3$ над алфавитом $\{0|\}$ так, что для любого слова P в этом алфавите

$$!\mathfrak{F}_3(P) \equiv !\mathfrak{F}_2(P)$$

и в том случае, когда $!\mathfrak{F}_2(P)$,

$$\mathfrak{F}_3(P) \mathrel{\dot{=}} \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mathfrak{F}_2(P) \mathrel{\dot{\neq}} 0, \\ 0|, & \text{если} \quad \mathfrak{F}_2(P) \mathrel{\dot{=}} 0. \end{cases}$$

Очевидно, $\mathfrak{F}_3$ перерабатывает всякое слово в алфавите $\{0|\}$, к которому он применим, в 0 или в $0|$. Покажем, что $\mathfrak{F}_3$ непополним относительно $\{0|\}$. Предположим, что алгорифм $\mathfrak{B}$ над $\{0|\}$ является пополнением $\mathfrak{F}_3$. Определим операцию перевода из алфавита алгорифма $\mathfrak{B}$ в алфавит A_1, сохраняющую алфавит $\{0|\}$ и использующую кодирующие буквы α и β. Пусть $\mathfrak{B}'$ — перевод алгорифма $\mathfrak{B}$. Легко проверить, что $\mathfrak{B}'$ также является пополнением $\mathfrak{F}_3$ относительно $\{0|\}$. Так как $\mathfrak{B}'$ полн над $\{0|\}$, то

$$!\mathfrak{B}'(\{\mathfrak{B}'\}).$$

Следовательно ($\mathfrak{B}'$ — алгорифм в алфавите A_1!),

$$!\mathfrak{F}_1(\{\mathfrak{B}'\}\delta\{\mathfrak{B}'\}),$$

откуда вытекает ((9))

$$!\mathfrak{F}_2(\{\mathfrak{B}'\}).$$

Следовательно,

$$!\mathfrak{F}_3(\{\mathfrak{B}'\}).$$

Поскольку $\mathfrak{B}'$ — пополнение $\mathfrak{F}_3$, должно выполняться

$$\mathfrak{B}'(\{\mathfrak{B}'\}) \doteq \mathfrak{F}_3(\{\mathfrak{B}'\}).$$

Но ((8) — (9))

$$\mathfrak{B}'(\{\mathfrak{B}'\}) \mathrel{\overline{\cdot}\!\!=} \mathfrak{F}_2(\{\mathfrak{B}'\}).$$

Таким образом, выполняется

$$\mathfrak{F}_3(\{\mathfrak{B}'\}) \mathrel{\overline{\cdot}\!\!=} \mathfrak{F}_2(\{\mathfrak{B}'\}),$$

что невозможно по построению $\mathfrak{F}_3$.

Алгорифм $\mathfrak{F}_3$ удовлетворяет всем условиям теоремы, за исключением того, что он не является, вообще говоря, алгорифмом в алфавите A_1. Легко добиться выполнения и этого условия. Пусть A_2 — алфавит алгорифма $\mathfrak{F}_3$. Определим операцию перевода из A_2 в A_1, сохраняющую алфавит $\{0|\}$ и использующую кодирующие буквы α, β. Для перевода $\mathfrak{F}$ алгорифма $\mathfrak{F}_3$ при любом слове P в алфавите $\{0|\}$, как легко видеть, выполняется

$$\mathfrak{F}(P) \simeq \mathfrak{F}_3(P).$$

Таким образом, $\mathfrak{F}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Заметим, что для $\mathfrak{F}$ неразрешима проблема распознавания применимости относительно алфавита $\{0|\}$. Отметим также, что из доказательства теоремы 6 легко извлекается следующее, более сильное чем непополнимость, свойство $\mathfrak{F}$. Для любого алгорифма $\mathfrak{B}$ можно указать слово Q в алфавите $\{0|\}$ так, что

$$!\mathfrak{B}(Q) \equiv !\mathfrak{F}(Q),$$

и если $!\mathfrak{B}(Q)$, то

$$\mathfrak{B}(Q) \neq \mathfrak{F}(Q).$$

В частности, для каждого полного над $\{0|\}$ алгорифма $\mathfrak{B}$ можно указать слово Q так, что $!\mathfrak{F}(Q)$ и

$$\mathfrak{B}(Q) \neq \mathfrak{F}(Q).$$

§ 3. Разрешимые и перечислимые множества

В этом параграфе мы изложим, следуя в основном гл. 2 работы Цейтина [5], некоторые элементарные факты теории алгорифмически перечислимых множеств. Понятие алгорифмически перечислимого множества вполне аналогично понятию рекурсивно перечислимого множества, являющемуся одним из центральных понятий математической логики. К настоящему времени разработана обширная и глубокая теория рекурсивно перечислимых множеств, для знакомства с которой можно обратиться к монографиям Успенского [3], Мальцева [1] и Роджерса [1].

Сделаем некоторые технические замечания. Под натуральными числами мы, как и раньше, подразумеваем слова в алфавите $\{0|\}$ вида 0, 0|, 0||, ... Начиная с п. 2, мы считаем фиксированным некоторый (непустой) алфавит A. Через A_1 обозначается алфавит $A \cup \{0|\}$, а через A_1^a — какое-нибудь фиксированное двухбуквенное расширение A_1. Множество натуральных чисел мы обозначаем через $\mathscr{H}$.

1. Некоторые вспомогательные алгорифмы. Нам потребуется эффективное взаимно однозначное соответствие между натуральными числами и кортежами натуральных чисел произвольно фиксированной длины n.

Точнее говоря, речь идет о построении алгорифмов $I_n^1, I_n^2, \ldots, I_n^n, K_n$ $(n \geqslant 2)$ таких, что при любых натуральных числах $k, k_1, \ldots, k_n$

$$!I_n^i(k) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

$$!K_n(k_1, \ldots, k_n),$$

$I_n^i(k)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $K_n(k_1, \ldots, k_n)$ — натуральные числа и

$$I_n^i(K_n(k_1, \ldots, k_n)) \mathrel{\dot{=}} k_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

$$K_n\left(I_n^1(k), \ldots, I_n^n(k)\right) \mathrel{\dot{=}} k.$$

Легко видеть, что достаточно располагать алгорифмами K_2, I_2^1, I_2^2. Алгорифмы с бо́льшими номерами строятся последовательно так, чтобы выполнялось

$$K_{n+1}(k_1, \ldots, k_{n+1}) \simeq K_n(K_2(k_1, k_2), k_3, \ldots, k_{n+1}),$$

$$I_{n+1}^1(k) \simeq I_2^1\left(I_n^1(k)\right),$$

$$I_{n+1}^2(k) \simeq I_2^2\left(I_n^1(k)\right),$$

$$I_{n+1}^i(k) \simeq I_n^{i-1}(k) \qquad (2 < i \leqslant n+1).$$

Для построения алгорифмов K_2, I_2^1, I_2^2 можно, например, воспользоваться тем, что любое натуральное число n допускает единственное представление в виде

$$n = 2^{n_2} \cdot (2 \cdot n_1 + 1) - 1.$$

Соответственно алгорифмы I_2^1, I_2^2, K_2 надлежит строить так, чтобы

$$n = 2^{I_2^2(n)} \cdot \left(2 \cdot I_2^1(n) + 1\right) - 1$$

и

$$K_2(n_1, n_2) = 2^{n_2} \cdot (2 \cdot n_1 + 1) - 1.$$

Оказывается, что эти три алгорифма могут быть заданы весьма простыми схемами, причем все алгорифмы K_n задаются одной схемой. Приведем эти схемы (Цейтин [5; стр. 305—306]).

Алгорифм K (он годится в качестве K_n при любом $n \geqslant 2$) определяется как алгорифм в алфавите $\{0|, \alpha\beta\}$

со схемой

$$\begin{cases} |\alpha \to \alpha\| \\ \alpha \to \\ \beta| \to \alpha\beta \\ |\beta \to \\ ,0 \to \alpha|\beta \end{cases}$$

Алгорифмы I_2^1 и I_2^2 задаются соответственно схемами

$$\begin{cases} \alpha\| \to |\alpha \\ \alpha| \to \\ \alpha \to \cdot \\ 0 \to 0\alpha \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \alpha\alpha\beta \to |\alpha\alpha \\ \alpha\alpha \to \cdot \\ \alpha\| \to |\alpha \\ \alpha| \to \beta \\ |\alpha \to \alpha \\ 0 \to 0\alpha \end{cases}$$

Обозначения алгорифмов K, I_n^j $(1 \leqslant j \leqslant n,\ n \geqslant 2)$ сохраняются на протяжении всей книги.

2. Основные определения. Пусть $\mathscr{M}$ — некоторое множество слов в алфавите A.

Будем говорить, что $\mathscr{M}$ *алгорифмически разрешимо* (или, короче, *разрешимо*), если можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$ над алфавитом A, применимый к любому слову в этом алфавите и такой, что при любом слове P в A

$$\mathfrak{A}(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \Lambda \equiv P \in \mathscr{M}.$$

Алгорифм $\mathfrak{A}$ будем называть **разрешающим алгорифмом** множества $\mathscr{M}$.

Множество $\mathscr{M}$ назовем *алгорифмически перечислимым* (или, короче, *перечислимым*), если можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$ над алфавитом A_1 такой, что для любого натурального числа n и любого слова P в A выполняется

1) если $!\mathfrak{A}(n)$, то $\mathfrak{A}(n) \in \mathscr{M}$;

2) если $P \in \mathscr{M}$, то осуществимо i, при котором $!\mathfrak{A}(i)$ и

$$\mathfrak{A}(i) \doteqdot P.$$

Про алгорифм $\mathfrak{A}$ мы говорим, что он перечисляет множество $\mathscr{M}$. Множество $\mathscr{M}$ является, очевидно, множеством значений этого алгорифма на натуральных числах. Обратно, с каждым алгорифмом $\mathfrak{C}$ типа $(\mathscr{H} \dot{\rightarrow} A)$ можно связать множество слов в алфавите A, перечисляемое этим алгорифмом. Это множество мы будем обозначать посредством $\{\mathfrak{C}\}$.

Нетрудно привести примеры разрешимых и перечислимых множеств. Например, пустое множество разрешимо и перечислимо. Множество всех слов в данном алфавите, очевидно, разрешимое, является также и перечислимым — мы еще вернемся к этому вопросу. Разрешимым и перечислимым является множество натуральных чисел (рассматриваемое как множество слов в алфавите $\{0|\}$). Число подобного рода примеров можно без труда увеличивать. Ниже будет показано, что всякое разрешимое множество перечислимо и что обратное утверждение неверно. Будет также приведен пример множества, не являющегося перечислимым.

Сделаем некоторые замечания, связанные с алфавитами. Пусть алфавит $Б$ является расширением алфавита A. Тогда множество $\mathscr{M}$ можно рассмотреть и как множество слов в алфавите $Б$. Легко видеть, что $\mathscr{M}$, рассматриваемое как множество слов в алфавите $Б$, является разрешимым (перечислимым) множеством слов в этом алфавите тогда и только тогда, когда $\mathscr{M}$ обладает одноименным свойством применительно к алфавиту A. Таким образом, свойство разрешимости (перечислимости), по существу, не зависит от используемого алфавита. Заметим также, что теорема о переводе (п. 5 § 1) позволяет заменить алгорифм $\mathfrak{A}$, перечисляющий множество слов $\mathscr{M}$ в алфавите A, алгорифмом в алфавите $A^{a}_{|}$, перечисляющим то же самое множество. Таким образом, любое перечислимое множество слов в алфавите A перечислимо алгорифмом в алфавите $A^{a}_{|}$; рассмотрением алгорифмов в этом алфавите и можно ограничиться при изучении перечислимых множеств в алфавите A. Аналогичное замечание можно было бы сделать и о разрешимых множествах.

Доказательство разрешимости (перечислимости) множества связано, очевидно, с решением конструктивной задачи — построением разрешающего (перечисляющего) алгорифма. Естественно, что этот алгорифм является весьма существенной характеристикой соответствующего множества; в тех случаях, когда речь идет о каких-то построениях над разрешимыми (перечислимыми) множествами, в качестве исходных данных таких построений используются соответствующие разрешающие (перечисляющие) алгорифмы.

Как следует из определения, перечислимое множество может перечисляться своим перечисляющим алгорифмом довольно беспорядочно. Этот алгорифм может, например, пропускать некоторые натуральные числа, будучи на них не определен, может принимать некоторые свои значения много раз и т. д. В следующем пункте будут приведены теоремы, показывающие возможность устранения таких неприятных эффектов. Эти теоремы, в частности, позволяют рассматривать бесконечные перечислимые множества как естественные эффективные аналоги счетных (в традиционном смысле) множеств.

3. Некоторые стандартные способы перечисления перечислимых множеств. Алгорифм $\mathfrak{A}$ назовем *арифметически полным*, если он применим к любому натуральному числу.

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{M}$ — перечислимое множество, P — некоторое слово. Можно построить арифметически полный алгорифм, перечисляющий такое множество $\mathscr{M}'$, что $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}' \subseteq \mathscr{M} \cup \{P\}$.*

Доказательство. Пусть алгорифм $\mathfrak{A}$ перечисляет множество $\mathscr{M}$. Рассмотрим алгорифм $[\mathfrak{A}]$ (см. п. 10 § 1) и построим, пользуясь теоремами сочетания, алгорифм $\mathfrak{A}'$ так, что

$$\mathfrak{A}'(n) \simeq \begin{cases} P, & \text{если} \quad [\mathfrak{A}](I_2^1(n),\ I_2^2(n)) \not= \Lambda, \\ \mathfrak{A}(I_2^1(n)), & \text{если} \quad [\mathfrak{A}](I_2^1(n),\ I_2^2(n)) = \Lambda. \end{cases}$$

Алгорифм $\mathfrak{A}'$ искомый. Действительно, из определения алгорифмов $[\mathfrak{A}]$ и I_2^1, I_2^2 следует, что $\mathfrak{A}'$ арифметически полон. Далее, если $Q \in \mathscr{M}$, то при некотором i

$$\mathfrak{A}(i) \doteq Q.$$

Пусть алгорифм $\mathfrak{A}$ делает над i точно k шагов. Тогда

$$[\mathfrak{A}](i, k) \doteq \Lambda.$$

По определению I_2^1, I_2^2 найдется j (в качестве j нужно взять $K(i, k)$) такое, что

$$I_2^1(j) \doteq i,$$

$$I_2^2(j) \doteq k.$$

При этом j

$$\mathfrak{A}'(j) \doteq \mathfrak{A}(i) \doteq Q.$$

Таким образом,

$$\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}'.$$

Включение $\mathscr{M}' \subseteq \mathscr{M} \cup \{P\}$ совершенно очевидно. Лемма доказана.

Читатель, по-видимому, заметил, что в приведенном доказательстве используется, по существу, диагональный метод Коши, т. е. метод, посредством которого в теории множеств доказывается счетность счетного объединения счетных множеств (см., например, Александров [1]). В самом деле, алгорифм $[\mathfrak{A}]$ «выписывает» бесконечную матрицу; (i, j)-элемент этой матрицы есть пустое или непустое слово в зависимости от того, кончает алгорифм $\mathfrak{A}$ к j-му шагу свою работу над i или нет. С помощью алгорифмов I_2^1, I_2^2 мы «пробегаем» все элементы матрицы, сопоставляя непустым словам P, а пустым — значения алгорифма $\mathfrak{A}$ на номере соответствующей строки.

Теорема 1. *Если перечислимое множество $\mathscr{M}$ имеет хотя бы один элемент, то оно может быть перечислено арифметически полным алгорифмом.*

Действительно, пусть слово P принадлежит $\mathscr{M}$. Применяя к $\mathscr{M}$ и P только что доказанную лемму, получаем искомый арифметически полный алгорифм, перечисляющий $\mathscr{M}$ (множество $\mathscr{M}'$ из леммы 1, очевидно, совпадает в данном случае с $\mathscr{M}$).

Следующим нашим шагом будет усовершенствование перечисляющих алгорифмов в смысле исключения повторений их значений и сведения их областей применимости к начальным отрезкам натурального ряда (возможно, пустым или совпадающим со всем натуральным рядом).

Пусть алгорифм $\mathfrak{A}$ перечисляет множество $\mathscr{M}$. Скажем, что $\mathfrak{A}$ перечисляет $\mathscr{M}$ *без повторений*, если равенство $\mathfrak{A}(i) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \mathfrak{A}(j)$ возможно лишь при $i \mathrel{\underset{\cdot}{=}} j$.

Алгорифм $\mathfrak{A}$ назовем *стройным*, если при любом n из применимости $\mathfrak{A}$ к $n+1$ вытекает применимость $\mathfrak{A}$ к n.

Таким образом, если стройный алгорифм применим к некоторому числу, то он применим и ко всем меньшим числам.

Теорема 2. *Всякое перечислимое множество перечислимо без повторений стройным алгорифмом.*

Доказательство. Пусть алгорифм $\mathfrak{A}$ перечисляет множество $\mathscr{M}$. Нетрудно описать искомый алгорифм на интуитивном уровне. Возьмем какую-нибудь букву α, не принадлежащую алфавиту A ($\mathscr{M}$ является множеством слов в алфавите A), и построим, исходя из $\mathfrak{A}$, по лемме 1 арифметически полный алгорифм $\mathfrak{A}_1$, перечисляющий множество $\mathscr{M}'$ такое, что

$$\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}' \subseteq \mathscr{M} \cup \{\alpha\}. \tag{1}$$

Искомый алгорифм $\mathfrak{B}$ состоит в следующем. Сначала ищем, последовательно вычисляя $\mathfrak{A}_1(0)$, $\mathfrak{A}_1(1)$ и т. д. (здесь используется арифметическая полнота $\mathfrak{A}_1$), наименьшее i, при котором $\mathfrak{A}_1(i) \mathrel{\underset{\cdot}{\neq}} \alpha$. Если такое i найдено, то $\mathfrak{A}_1(i)$ есть результат работы $\mathfrak{B}$ над нулем. Вычислив $\mathfrak{B}(0)$, переходим к вычислению $\mathfrak{B}(1)$, отыскивая наименьшее $j > i$ (где i — число, найденное при вычислении $\mathfrak{B}(0)$) такое, что $\mathfrak{A}_1(j) \mathrel{\underset{\cdot}{\neq}} \alpha$ и $\mathfrak{A}_1(j) \mathrel{\underset{\cdot}{\neq}} \mathfrak{B}(0)$. Если такое j найдено, то $\mathfrak{A}_1(j)$ есть значение $\mathfrak{B}$ на единице. Вычислив $\mathfrak{B}(1)$, аналогично переходим к вычислению $\mathfrak{B}(2)$ и т. д.

Наметим оформление изложенного алгорифма как нормального. Пусть $\mathfrak{A}_1$ — как и раньше, арифметически полный алгорифм, перечисляющий множество $\mathscr{M}'$, обладающее свойством (1). Введем для сокращения обозначений следующее свойство $\mathscr{C}$ натуральных чисел: $\mathscr{C}(i)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_1(i) \mathrel{\underset{\cdot}{\neq}} \alpha$ и $i)_1\mathfrak{A} \mathrel{\underset{\cdot}{\neq}} \mathfrak{A}_1(j)$ при всех j, меньших i. Нашей ближайшей целью является построение такого алгорифма $\mathfrak{C}$, что

$$\mathfrak{C}(0) \simeq \mu i (\mathscr{C}(i)),$$

$$\mathfrak{C}(n+1) \simeq \mu i \ (i > \mathfrak{C}(n) \,\&\, \mathscr{C}(i)).$$

Ясно, что искомый алгорифм $\mathfrak{B}$ легко строится, исходя из $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{A}_1$, по теореме композиции

$$\mathfrak{B}(n) \simeq \mathfrak{A}_1(\mathfrak{C}(n)).$$

Пусть δ — буква, не принадлежащая алфавиту A_1 и отличная от α. Построим алгорифм $\mathfrak{A}_2$ так, чтобы при любых словах P и Q в алфавите $A \cup \{\alpha\}$ выполнялось

$$!\mathfrak{A}_2(P\delta Q) \tag{2}$$

и

$$\mathfrak{A}_2(P\delta Q) \doteqdot \Lambda \equiv P \not\doteqdot Q. \tag{3}$$

Алгорифм $\mathfrak{A}_2$ легко построить, используя, например, алгорифм, распознающий графическое равенство слов (§ 1, п. 7).

Построим алгорифм $\mathfrak{A}_3$ так, чтобы

$$\mathfrak{A}_3(P\delta n\delta Q) \simeq Q\mathfrak{A}_2(P\delta\mathfrak{A}_1(n)). \tag{4}$$

По схеме примитивной рекурсии определим алгорифм $\mathfrak{A}_4$ (теорема 12 § 1, п. 7)

$$\mathfrak{A}_4(P\delta 0) \simeq \mathfrak{A}_2(P\delta\alpha),$$

$$\mathfrak{A}_4(P\delta n+1) \simeq \mathfrak{A}_3(P\delta n\delta\mathfrak{A}_4(P\delta n)).$$

На основании (4) последнее равенство можно переписать так:

$$\mathfrak{A}_4(P\delta n+1) \simeq \mathfrak{A}_4(P\delta n)\mathfrak{A}_2(P\delta\mathfrak{A}_1(n)).$$

Ввиду (2) — (3) легко видеть, что

(5) $\mathfrak{A}_4$ применим к любому слову $P\delta n$ (P — слово в $A \cup \{\alpha\}$) и аннулирует это слово тогда и только тогда, когда P отлично от α и от всех слов $\mathfrak{A}_1(j)$ $(0 \leqslant j < n)$.

Построим алгорифм $\mathfrak{A}_5$ так, что

$$\mathfrak{A}_5(n) \simeq \mathfrak{A}_4(\mathfrak{A}_1(n)\delta n).$$

Ввиду (5) этот алгорифм применим к любому n и

$$\mathfrak{A}_5(n) \doteqdot \Lambda \equiv \mathscr{C}(n). \tag{6}$$

Строим алгорифм $\mathfrak{A}_6$ так, что

$$\mathfrak{A}_6(n, i) \simeq \mathfrak{A}_5(n+1+i). \tag{7}$$

По теореме 11 (§ 1, п. 7) строим алгорифм $\mathfrak{A}_7$ так, что

$$\mathfrak{A}_7(n) \simeq \mu i\,(\mathfrak{A}_6(n, i) \doteqdot \Lambda).$$

Ввиду (6)—(7) это равенство можно переписать в виде

$$\mathfrak{A}_7(n) \simeq \mu i\,(i > n \,\&\, \mathscr{C}(i)). \tag{8}$$

Искомый алгорифм легко строится теперь с помощью примитивной рекурсии (теорема 12 § 1, п. 7)

$$\mathfrak{C}(0) \simeq \mu i\,(\mathfrak{A}_5(i) \doteqdot \Lambda),$$
$$\mathfrak{C}(n+1) \simeq \mathfrak{A}_7(\mathfrak{C}(n)).$$

Используя (6) и (8), нетрудно убедиться, что $\mathfrak{C}$ обладает требуемыми свойствами. Теорема доказана.

Применение теоремы 2 и принципа Маркова позволяет усилить теорему 1. Докажем сначала, что имеет место

Теорема 3. *Для всякого непустого перечислимого множества можно указать его элемент.*

Чтобы пояснить эту не совсем обычную с традиционной точки зрения формулировку, заметим, что непустое множество — это множество, для которого опровергнуто утверждение, что оно пусто. Ясно, что из такого опровержения не извлекается, вообще говоря, элемент рассматриваемого множества.

Итак, пусть $\mathscr{M}$ — непустое перечислимое множество и алгорифм $\mathfrak{A}$ перечисляет $\mathscr{M}$. Исходя из $\mathfrak{A}$, построим по теореме 2 стройный алгорифм $\mathfrak{A}'$, перечисляющий $\mathscr{M}$. Предположим, что

$$\neg\, !\mathfrak{A}'(0).$$

Тогда, ввиду стройности $\mathfrak{A}'$, при любом i

$$\neg\, !\mathfrak{A}'(i).$$

Отсюда следует пустота $\mathscr{M}$, что неверно. Следовательно, выполняется

$$\neg\neg\, !\mathfrak{A}'(0),$$

откуда по принципу Маркова получаем

$$!\mathfrak{A}'(0).$$

Поскольку $\mathfrak{A}'$ перечисляет $\mathscr{M}$, то $\mathfrak{A}'(0) \in \mathscr{M}$, чем и заканчивается доказательство.

Теорема 4. *Всякое непустое перечислимое множество перечислимо арифметически полным алгорифмом.*

Эта теорема следует из теорем 1 и 3. Поясним коротко различие между теоремами 1 и 4. И в том и в другом случае речь идет о построении алгорифма, определенным образом связанного с исходным множеством. Однако в первом случае в качестве исходных данных этого построения используется перечисляющий алгорифм и элемент исходного множества, тогда как во втором используется лишь перечисляющий алгорифм.

Множество $\mathscr{M}$ назовем *бесконечным*, если осуществим арифметически полный алгорифм, перечисляющий без повторений некоторое подмножество $\mathscr{M}$.

Из теоремы 2 вытекает

Теорема 5. *Всякое бесконечное перечислимое множество перечислимо без повторений арифметически полным алгорифмом.*

Множество $\mathscr{M}$ назовем *финитным*, если можно указать такой список $P_0, \ldots, P_n$ его элементов, что всякий элемент $\mathscr{M}$ совпадает с одним из членов этого списка *).

Множество $\mathscr{M}$ назовем *нефинитным*, если неверно, что оно финитно.

Ясно, что бесконечное множество нефинитно. Обратное утверждение, неверное, вообще говоря, для произвольных множеств (таковы иммунные множества; см., например, Мальцев [1]), для перечислимых множеств легко следует из теоремы 2 (и принципа Маркова).

Теорема 6. *Всякое нефинитное перечислимое множество перечислимо без повторений арифметически полным алгорифмом* (*и, следовательно, бесконечно*).

В заключение этого пункта приведем для удобства ссылок параметрические варианты теорем 1 и 4.

Скажем, что алгорифм $\mathfrak{A}$ является *двухместным перечисляющим алгорифмом* (относительно алфавита A), если он перерабатывает всякое слово вида $P\alpha n$ (P — слово в A, n — натуральное число), к которому он применим, в слово в A. Таким образом, при каждом P

---

*) Очевидно, всякое финитное множество разрешимо и перечислимо.

алгорифм $\widetilde{\mathfrak{A}}_{P\alpha}$ перечисляет некоторое множество $\{\widetilde{\mathfrak{A}}_{P\alpha}\}$ слов в A.

Теорема 7. *По всякому двухместному перечисляющему алгорифму $\mathfrak{A}$ можно построить алгорифм $\mathfrak{A}'$ так, что при любом слове P в A алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}'_{P\alpha}$ является стройным алгорифмом, перечисляющим без повторений множество $\{\widetilde{\mathfrak{A}}_{P\alpha}\}$.*

Теорема 8. *При тех же условиях, что в теореме 7, и дополнительном условии непустоты всех множеств $\{\widetilde{\mathfrak{A}}_{P\alpha}\}$ можно построить алгорифм $\mathfrak{A}'$ так, что при каждом P алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}'_{P\alpha}$ арифметически полн и перечисляет множество $\{\widetilde{\mathfrak{A}}_{P\alpha}\}$.*

Использованные здесь обозначения введены в п. 2 данного параграфа и в п. 11 § 1; через $\mathfrak{A}'_{P\alpha}$ обозначается перевод $\widetilde{\mathfrak{A}}'_{P\alpha}$ в алфавит A_{I}^{α}.

4. Перечислимые множества как области определения алгорифмов. Перечислимость разрешимых множеств. Пусть $\mathscr{M}$ — множество слов в алфавите A, $\mathfrak{A}$ — алгорифм над A. Назовем $\mathscr{M}$ *областью применимости* (*областью определения*) $\mathfrak{A}$ относительно A, если для любого слова P в этом алфавите

$$P \in \mathscr{M} \equiv !\mathfrak{A}(P).$$

Теорема 9. *Всякое перечислимое множество слов в алфавите A является областью применимости относительно A некоторого алгорифма.*

Доказательство. Пусть α — буква, не принадлежащая алфавиту A. По лемме 1 построим арифметически полный алгорифм $\mathfrak{A}'$, перечисляющий некоторое множество $\mathscr{M}'$ такое, что

$$\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}' \subseteq \mathscr{M} \cup \{\alpha\}.$$

Нетрудно построить алгорифм (ср. п. 7 § 1) $\mathfrak{B}$ так, что $\mathfrak{B}$ применим к любому слову вида $P\delta n$ ($P \in A$, n — натуральное число, δ — буква, отличная от α и от всех букв алфавита A_{I}), причем

$$\mathfrak{B}(P\delta n) \doteqdot \Lambda \equiv P \doteqdot \mathfrak{A}'(n).$$

Построим теперь алгорифм $\mathfrak{C}$ (по теореме 11 § 1) так, что

$$\mathfrak{C}(P) \simeq \mu i(\mathfrak{B}(P\delta i) \doteqdot \Lambda).$$

Ясно, что

$$\mathfrak{C}(P) \simeq \mu i\,(P \doteq \mathfrak{A}'(i)).$$

Следовательно, для любого слова P в алфавите A

$$!\,\mathfrak{C}(P) \equiv P \in \mathscr{M}.$$

Таким образом, $\mathscr{M}$ является областью применимости $\mathfrak{C}$ относительно A, чем и заканчивается доказательство.

При доказательстве обратного утверждения нам потребуется следующая очевидная

Лемма 2. *Множество всех слов в алфавите A перечислимо.*

Чтобы доказать эту лемму, нужно оформить в виде нормального алгорифма какой-нибудь из способов пересчета слов в данном алфавите. Например, можно упорядочить буквы в этом алфавите и затем нумеровать слова в порядке возрастания их длин, располагая слова одинаковой длины в лексикографическом порядке. За подробностями мы отсылаем читателя к работе Детловса [1].

Теорема 10. *Область применимости любого алгорифма относительно алфавита A является перечислимым множеством слов в этом алфавите.*

Доказательство. Пусть множество $\mathscr{M}$ является областью применимости алгорифма $\mathfrak{C}$ относительно алфавита A. Обозначим через $\mathfrak{D}_1$ арифметически полный алгорифм, перечисляющий множество всех слов в алфавите A. Пусть далее A_2 — алфавит алгорифма $\mathfrak{C}$ и алгорифм $\mathfrak{D}_2$ аннулирует всякое слово в этом алфавите (см. пример 3 п. 4 § 1). По теоремам композиции и объединения построим алгорифм $\mathfrak{A}$ так, что

$$\mathfrak{A}(n) \simeq \mathfrak{D}_1(n)\,\mathfrak{D}_2(\mathfrak{C}(\mathfrak{D}_1(n))).$$

Ясно, что

$$!\mathfrak{A}(n) \equiv\ !\mathfrak{C}(\mathfrak{D}_1(n)),$$

причем, если $!\,\mathfrak{C}(\mathfrak{D}_1(n))$, то

$$\mathfrak{A}(n) \doteq \mathfrak{D}_1(n).$$

Легко видеть, что $\mathfrak{A}$ перечисляет $\mathscr{M}$. В самом деле, если $!\mathfrak{A}(n)$, то $!\mathfrak{C}(\mathfrak{D}_1(n))$ и, следовательно,

$$\mathfrak{D}_1(n) \in \mathscr{M}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{A}(n) \in \mathscr{M}.$$

Обратно, если $P \in \mathscr{M}$, то при некотором n

$$P \doteq \mathfrak{D}_1(n)$$

и, следовательно,

$$!\mathfrak{C}(\mathfrak{D}_1(n)).$$

Тогда

$$\mathfrak{A}(n) \doteq \mathfrak{D}_1(n) \doteq P.$$

Таким образом, *множество слов в данном алфавите перечислимо тогда и только тогда, когда оно является областью применимости некоторого алгорифма относительно этого алфавита.*

Теорема 11. *Всякое разрешимое множество перечислимо.*

Действительно, пусть алгорифм $\mathfrak{A}$ разрешает множество $\mathscr{M}$. Построим алгорифм $\mathfrak{A}_1$ в алфавите A, применимый лишь к пустому слову (пример 4 п. 4 § 1). Построим, наконец, алгорифм $\mathfrak{A}_2$ так, что

$$\mathfrak{A}_2(P) \simeq \mathfrak{A}_1(\mathfrak{A}(P)).$$

Ясно, что для любого слова P в алфавите A

$$P \in \mathscr{M} \equiv !\mathfrak{A}_2(P).$$

Отсюда на основании теоремы 10 получаем, что $\mathscr{M}$ перечислимо.

Пусть теперь $\mathfrak{H}$ — алгорифм, построенный согласно теореме 4 § 2. Обозначим через $\overline{\mathscr{K}}$ множество тех слов в алфавите $\{0|\}$, к которым неприменим этот алгорифм. Из теоремы 4 вытекает, что $\overline{\mathscr{K}}$ не является областью применимости относительно $\{0|\}$ никакого алгорифма. Следовательно, $\overline{\mathscr{K}}$ неперечислимо. Обозначим через $\mathscr{K}$ множество тех слов в $\{0|\}$, к которым $\mathfrak{H}$ применим. Очевидно, $\mathscr{K}$ перечислимо. Вместе с тем по теореме 5 § 2 это множество не является разрешимым. Таким образом, имеет место

Теорема 12. 1) *Существует перечислимое множество слов в алфавите $\{0|\}$, дополнение которого до множества всех слов в этом алфавите неперечислимо* *).

2) *Существует перечислимое множество слов в алфавите $\{0|\}$, не являющееся разрешимым.*

Необходимое и достаточное условие разрешимости перечислимого множества дается следующей теоремой Поста (доказательство которой предоставляется читателю): множество $\mathscr{M}$ (слов в алфавите A) разрешимо тогда и только тогда, когда оно само и его дополнение (до множества всех слов в A) перечислимы.

5. Пересечение и объединение перечислимых множеств.

Теорема 13. *Пересечение конечного числа перечислимых множеств перечислимо.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n$ — перечислимые множества. По теореме 9 построим алгорифмы $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ так, что каждое множество $\mathscr{M}_i$ является областью определения алгорифма $\mathfrak{A}_i$ относительно алфавита A (если исходные множества были в разных алфавитах, то можно рассмотреть их все в объединении этих алфавитов). По теореме объединения строим алгорифм $\mathfrak{A}$ так, что

$$\mathfrak{A}(P) \simeq \mathfrak{A}_1(P)\,\mathfrak{A}_2(P) \ldots \mathfrak{A}_n(P).$$

Ясно, что

$$!\mathfrak{A}(P) \equiv\ !\mathfrak{A}_1(P)\ \&\ !\mathfrak{A}_2(P)\ \&\ \ldots\ \&\ !\mathfrak{A}_n(P),$$

т. е.

$$!\mathfrak{A}(P) \equiv P \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{M}_i.$$

Отсюда, ввиду теоремы 10, следует перечислимость множества $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathscr{M}_i$.

Нетрудно также показать, что пересечение конечного числа разрешимых множеств является разрешимым множеством.

*) Дополнением множества $\mathscr{M}$ слов в алфавите A до множества всех слов в этом алфавите мы называем множество $\overline{\mathscr{M}}$ слов в A, определяемое условием

$$P \in \overline{\mathscr{M}} \equiv \neg(P \in \mathscr{M}).$$

Будем говорить, что алгорифм $\mathfrak{A}$ над алфавитом A_1 является *последовательностью перечислимых множеств* в алфавите A, если при каждом n алгорифм $\widetilde{\mathfrak{A}}_{n\alpha}$ перечисляет некоторое множество слов в алфавите A. (Здесь α — произвольная буква, не принадлежащая A.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — последовательность перечислимых множеств в алфавите A, $\mathscr{M}$ — множество слов в этом алфавите. Будем говорить, что $\mathscr{M}$ является *пересечением* (*объединением*) последовательности $\mathfrak{A}$, если для любого слова P в A выполняется

$$P \in \mathscr{M} \equiv \forall n \, (P \in \{\widetilde{\mathfrak{A}}_{n\alpha}\})$$

(соответственно

$$P \in \mathscr{M} \equiv \exists n \, (P \in \{\widetilde{\mathfrak{A}}_{n\alpha}\})).$$

В связи с теоремой 13 возникает вопрос о том, нельзя ли распространить эту теорему на последовательности перечислимых множеств. Ответ на этот вопрос отрицательный. Более того, можно привести пример (рекомендуем читателю сделать это) последовательности разрешимых множеств, пересечение которой неперечислимо. Вместе с тем имеет место

Теорема 14. *Объединение последовательности перечислимых множеств перечислимо.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — последовательность перечислимых множеств, $\mathscr{M}$ — объединение этой последовательности. Построим алгорифм $\mathfrak{B}$ так, что

$$\mathfrak{B}(n) \simeq \mathfrak{A}\left(I_2^1(n)\, \alpha I_2^2(n)\right),$$

и покажем, что $\mathfrak{B}$ перечисляет $\mathscr{M}$.

Пусть $P \in \mathscr{M}$. Тогда при некоторых m и i

$$P \doteqdot \mathfrak{A}(m\alpha i).$$

Найдем j так, что

$$I_2^1(j) \doteqdot m,$$

$$I_2^2(j) \doteqdot i.$$

При этом j

$$P \doteqdot \mathfrak{B}(j).$$

Обратно, если $!\mathfrak{B}(n)$, то, очевидно,

$$\mathfrak{B}(n) \in \left\{\widetilde{\mathfrak{A}}_{I_2^1(n)\,\alpha}\right\}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{B}(n) \in \mathcal{M}.$$

Теорема доказана. Нетрудно убедиться, что для разрешимых множеств аналогичное утверждение неверно — объединение последовательности разрешимых множеств может не быть разрешимым множеством.

Изложение следующих семи глав будет посвящено конструктивным действительным числам и функциям над ними. Условимся о некоторых употребляемых в этих главах обозначениях.

Через $Ч_1$ и $Ч$ соответственно обозначаются алфавиты

$$\{0\,|\,-\,/\,\Diamond\,\Delta\,\nabla\}$$

и

$$Ч_1 \cup \{*\,,\}.$$

(Буквы «$*$» и «,» используются для образования систем слов в алфавите $Ч_1$.)

Алфавит $Ч$ будет являться «универсальным» в том смысле, что изучаемые в данных главах конструктивные объекты — либо слова в этом алфавите, либо кодируются посредством таких слов.

Обозначим через $Ч^a$ двухбуквенное расширение $Ч \cup \{ab\}$ алфавита $Ч$. Поскольку рассматриваемые в главах 2—8 алгорифмы интересуют нас лишь с точки зрения выполняемых ими преобразований слов алфавита $Ч$ (или $Ч_1$), то все эти алгорифмы могут быть построены с помощью теоремы о переводе (п. 5 § 1 гл. 1) как алгорифмы в алфавите $Ч^a$. Поэтому мы, как правило, опускаем упоминания об алфавитах, в которых строятся те или иные алгорифмы, имея в виду алфавит $Ч^a$.

Мы будем использовать обозначения $\widetilde{\mathfrak{A}}_P$ и $\widehat{\mathfrak{A}}_P$, введенные в п. 11 § 1 гл. 1. При этом под $\widehat{\mathfrak{A}}_P$ понимается перевод алгорифма $\widetilde{\mathfrak{A}}_P$ в алфавит $Ч^a$. Полезно помнить следующие свойства алгорифма $\widehat{\mathfrak{A}}_P$. Если алгорифм $\mathfrak{A}$ неприменим к слову PQ (P и Q — слова в $Ч$), то алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}_P$ неприменим к слову Q. Если же $\mathfrak{A}$ перерабатывает PQ в некоторое слово в алфавите $Ч$, то

$$\widehat{\mathfrak{A}}_P(Q) \simeq \mathfrak{A}(PQ).$$

В тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, мы будем опускать в обозначениях $\widetilde{\mathfrak{A}}_P$ и $\widehat{\mathfrak{A}}_P$ последнюю разделительную букву, т. е. если P имеет вид

$$P \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} P_1,$$

или

$$P \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} P_1 *,$$

то вместо $\widehat{\mathfrak{A}}_{P_1}$ и $\widehat{\mathfrak{A}}_{P_1 *}$ мы будем писать $\widehat{\mathfrak{A}}_{P_1}$. Используемая разделительная буква должна в этом случае усматриваться из контекста.

Для алгорифмов в алфавите $Ч^a$ определяется их запись (см. п. 8 § 1 гл. 1). Запись алгорифма $\mathfrak{A}$ есть слово в алфавите $\{0|\}$. Это слово мы обозначаем посредством $\mathcal{E}\mathfrak{A}\mathcal{Z}$.

ГЛАВА 2
КОНСТРУКТИВНЫЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

В этой главе будет приведено сжатое построение некоторой системы конструктивных действительных чисел. Избранный нами путь аналогичен канторовскому способу введения действительных чисел в традиционном анализе. Системы конструктивных действительных чисел, изоморфные излагаемой, могли бы быть построены и другими методами, в частности, с помощью надлежащим образом уточненных понятий вложенной последовательности рациональных сегментов и дедекиндова сечения (см., например, Заславский [3]—[4], Успенский [3; § 12]).

§ 1. Натуральные, целые и рациональные числа

Мы не излагаем сколько-нибудь подробно арифметики рациональных чисел, ограничиваясь определениями и формулировками некоторых элементарных свойств отношений равенства, порядка и арифметических операций на натуральных, целых и рациональных числах. Конструктивная специфика сравнительно слабо проявляется в этих вопросах — приводимые нами элементарные теоремы в большинстве случаев могли бы быть доказаны примерно так же, как и в известной книге Ландау [1]. Следует лишь подчеркнуть, что, в отличие от некоторых традиционных изложений (например, от той же книги Ландау [1]), мы систематически проводим знаковый подход — натуральные, целые и рациональные числа определяются как знаковые комплексы (слова) определенных типов.

1. Натуральные числа. Сформулируем несколько более точно, чем это делалось раньше (см. п. 4 введения), определение натурального числа.

Определение 1. *Натуральными числами являются слова в алфавите Ч, которые могут быть получены с помощью следующих порождающих правил:*

1) *слово* 0 *есть натуральное число*;

2) *если слово* P *в алфавите* $Ч$ — *натуральное число, то слово* $P|$, *получаемое приписыванием к* P *буквы* «|», *также есть натуральное число.*

Для обозначения конкретных натуральных чисел мы будем часто использовать обычную десятичную символику, так что слова $0|$, $0||$, $0|||$ ... будут обозначаться посредством 1, 2, 3 ...

Множество слов в алфавите $Ч$, являющихся натуральными числами, мы обозначим через $\mathscr{H}$. Нетрудно видеть, что это множество разрешимо. Буквы i, j, k, l, m, n с индексами или без них будут использоваться нами в качестве переменных по натуральным числам.

Определение 2 (отношения равенства и порядка на множестве натуральных чисел).

Пусть n *и* m — *произвольные натуральные числа.*

1) *Будем говорить, что* n *и* m *равны* (*запись* $n \underset{\mathscr{H}}{=} m$), *если* $n \dot{=} m$.

2) *Будем говорить, что* n *меньше* (*больше*) m, *и писать* $n \underset{\mathscr{H}}{<} m$ (*соответственно* $n \underset{\mathscr{H}}{>} m$), *если осуществимо непустое слово* $P \in Ч$ *такое, что* $m \dot{=} nP$ (*соответственно* $n \dot{=} mP$).

3) *Будем говорить, что* n *не меньше* (*не больше*) m, *и писать* $n \underset{\mathscr{H}}{\geqslant} m$ (*соответственно* $n \underset{\mathscr{H}}{\leqslant} m$), *если неверно, что* $n \underset{\mathscr{H}}{<} m$ (*соответственно неверно, что* $n \underset{\mathscr{H}}{>} m$).

Очевидно, отношения $\underset{\mathscr{H}}{=}$, $\underset{\mathscr{H}}{>}$, $\underset{\mathscr{H}}{<}$, $\underset{\mathscr{H}}{\geqslant}$, $\underset{\mathscr{H}}{\leqslant}$ разрешимы, т. е. для каждого из этих отношений осуществим алгорифм, применимый к любому слову P в $Ч$ и перерабатывающий P в пустое слово тогда и только тогда, когда $P \dot{=} n * m$, где n и m — натуральные числа, связанные соответствующим отношением.

Ниже индекс «$\mathscr{H}$» будет, как правило, опускаться. Вместо $\neg(n = m)$ мы будем писать $n \neq m$.

Теорема 1. *Каковы бы ни были натуральные числа* n, m, l, n_1, m_1, *имеет место*

1) $(n = m) \vee (n > m) \vee (n < m)$;

2) $(n \neq m) \supset ((n > m) \vee (n < m))$;

3) $(n \geqslant m) \vee (n \leqslant m)$;

4) $(n \geqslant m) \supset ((n = m) \vee (n > m))$;

5) $(n \leqslant m) \supset ((n = m) \vee (n < m))$;

6) $(n = m) \supset ((n \geqslant m) \& (n \leqslant m))$;

7) $((n \geqslant m) \& (m \geqslant n)) \supset (m = n)$;

8) $((n \delta m) \& (m \delta l)) \supset (n \delta l)$;

9) $((n \delta m) \& (n = n_1) \& (m = m_1)) \supset (n_1 \delta m_1)$ (в 8) — 9) δ означает любой из знаков $\underset{\mathcal{H}}{=}, \underset{\mathcal{H}}{<}, \underset{\mathcal{H}}{>}, \underset{\mathcal{H}}{\leqslant}, \underset{\mathcal{H}}{\geqslant}$);

10) $(n = m) \supset (m = n)$.

На доказательстве этой теоремы мы не останавливаемся. Заметим, что для доказательства, например, утверждения 1) нужно построить алгорифм $\mathfrak{A}$, перерабатывающий всякое слово вида n, m в одно из чисел 1, 2, 3, и доказать, что если $\mathfrak{A}(n, m) \simeq i$, то верен i-й член дизъюнкции

$$(n = m) \vee (n > m) \vee (n < m).$$

Используя разрешимость отношения $\underset{\mathcal{H}}{\leqslant}$, нетрудно с помощью теоремы разветвления п. 7 § 1 гл. 1 построить алгорифмы $\underset{\mathcal{H}}{\min}$ и $\underset{\mathcal{H}}{\max}$ такие, что

$$\underset{\mathcal{H}}{\min}(n, m) \simeq \begin{cases} n, & \text{если } n \leqslant m, \\ m, & \text{если } m < n, \end{cases}$$

и

$$\underset{\mathcal{H}}{\max}(n, m) \simeq \begin{cases} n, & \text{если } m \leqslant n, \\ m, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

Обозначим через $\underset{\mathcal{H}}{+}$ и $\underset{\mathcal{H}}{\cdot}$ алгорифмы, построенные в примерах 10) — 11) п. 7 § 1 гл. 1. Эти алгорифмы являются алгорифмами типа $(\mathcal{H}^2 \to \mathcal{H})$ и, как нетрудно показать, обладают следующими свойствами:

$$\underset{\mathcal{H}}{+}(m, 0) \simeq m, \tag{1}$$

$$\underset{\mathcal{H}}{+}(m, n|) \simeq \underset{\mathcal{H}}{+}(m, n)|, \tag{2}$$

$$\underset{\mathcal{H}}{\cdot}(m, 0) \simeq 0, \tag{3}$$

$$\underset{\mathcal{H}}{\cdot}(m, n|) \simeq \underset{\mathcal{H}}{+}(\underset{\mathcal{H}}{\cdot}(m, n), m). \tag{4}$$

Алгорифмы $\underset{\mathcal{H}}{+}$ и $\underset{\mathcal{H}}{\cdot}$ будем называть соответственно *операциями сложения* и *умножения натуральных чисел*. Натуральные числа $\underset{\mathcal{H}}{+}(n, m)$ и $\underset{\mathcal{H}}{\cdot}(n, m)$ называются *суммой* и *произведением* чисел n и m. Для их обозначения мы часто будем использовать более привычную запись $m \underset{\mathcal{H}}{+} n$ и $m \underset{\mathcal{H}}{\cdot} n$, опуская там, где это не ведет к недоразумениям, индекс «$\mathcal{H}$».

Пользуясь (1)—(4), можно доказать ряд обычных свойств операций сложения и умножения (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивные законы и т. д.).

2. Целые числа. Определение 3. *Слово $P \in \text{Ч}$ называется целым числом, если P является натуральным числом или имеет вид $P \mathrel{\underset{\cdot}{=}} -n$, где n — натуральное число, отличное от* 0.

В качестве переменных для целых чисел мы будем использовать букву «p» (с индексом или без индекса).

Множество слов в Ч, являющихся целыми числами, будем обозначать через Ц. Очевидно, множество Ц разрешимо.

Построим алгорифм $\underset{\text{Ц}}{\mathrm{mod}}$ со схемой

$$\{ - \to .$$

Очевидно, если p — натуральное число, то $\underset{\text{Ц}}{\mathrm{mod}}(p) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} p$. Если же $p \mathrel{\underset{\cdot}{=}} -n$ (n — натуральное число), то $\underset{\text{Ц}}{\mathrm{mod}}(p) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} n$. Вместо $\underset{\text{Ц}}{\mathrm{mod}}(p)$ там, где это не может вызвать недоразумений, будет использоваться запись $|p|$.

Целое число назовем *неотрицательным* (*отрицательным*), если оно является (не является) натуральным числом.

Определение 4 (отношения равенства и порядка на множестве целых чисел).

а) *Целые числа p_1 и p_2 называются равными* (*запись $p_1 \underset{\text{Ц}}{=} p_2$*), *если $p_1 \mathrel{\underset{\cdot}{=}} p_2$.*

б) *Целое число p_1 меньше целого числа p_2* (*запись $p_1 \underset{\text{Ц}}{<} p_2$*), *если выполняется одно из следующих условий:*

1) p_1 — *отрицательное, а* p_2 — *неотрицательное целое число;*

2) p_1, p_2 — *неотрицательные и* $p_1 \underset{\mathscr{H}}{<} p_2$;

3) p_1, p_2 — *отрицательные целые числа и* $|p_1| \underset{\mathscr{H}}{>} |p_2|$.

в) *Целое число* p_1 *больше целого числа* p_2 (*запись* $p_1 \underset{Ц}{>} p_2$), *если* p_2 *меньше* p_1.

г) *Целое число* p_1 *не меньше* (*не больше*) *целого числа* p_2, *если* $\urcorner(p_1 \underset{Ц}{<} p_2)$ (*соответственно* $\urcorner(p_1 \underset{Ц}{>} p_2)$). *Запись*: $p_1 \underset{Ц}{\geqslant} p_2$ (*соответственно* $p_1 \underset{Ц}{\leqslant} p_2$).

Отношения $\underset{Ц}{=}$, $\underset{Ц}{<}$, $\underset{Ц}{>}$, $\underset{Ц}{\leqslant}$, $\underset{Ц}{\geqslant}$, так же как и одноименные отношения для натуральных чисел, разрешимы, и для них может быть переформулирована теорема 1.

Введение операции сложения целых чисел требует некоторой подготовки.

Рассмотрим алгорифм $\dot{-}$ (арифметического вычитания) со схемой

$$\left\{\begin{array}{l} 0,\ 0\,| \to 0,\ 0 \\ |,\ 0\,| \to ,\ 0 \\ \quad ,\ 0 \to \cdot \end{array}\right.$$

Этот алгорифм является алгорифмом типа $(\mathscr{H}^2 \to \mathscr{H})$ и при любых натуральных n и m выполняется

1) если $n \leqslant m$, то $\dot{-}(n, m) \doteq 0$;

2) если $n > m$, то $n \doteq m \underset{\mathscr{H}}{+} (\dot{-}(n, m))$.

Используя теорему разветвления (п. 7 § 1 гл. 1), построим алгорифм $\underset{Ц}{+}$ так, чтобы при любых целых числах p_1, p_2 выполнялось

1) если p_1, p_2 — натуральные числа, то

$$\underset{Ц}{+}(p_1,\ p_2) \doteq \underset{\mathscr{H}}{+}(p_1,\ p_2);$$

2) если p_1, p_2 — отрицательные целые числа, то

$$\underset{Ц}{+}(p_1,\ p_2) \doteq -\underset{Ц}{+}(|p_1|,\ |p_2|);$$

3) если p_1 — отрицательное, а p_2 — неотрицательное целое число, то

$$\underset{Ц}{+}(p_1, p_2) \mathrel{\dot{=}} \begin{cases} \dot{-}(p_2, |p_1|), & \text{если } p_2 \underset{\mathscr{H}}{\geqslant} |p_1|, \\ -\dot{-}(|p_1|, p_2), & \text{если } p_2 \underset{\mathscr{H}}{<} |p_1|; \end{cases}$$

4) если p_1 — неотрицательное, а p_2 — отрицательное целое число, то

$$\underset{Ц}{+}(p_1, p_2) \mathrel{\dot{=}} \underset{Ц}{+}(p_2, p_1).$$

Построим алгорифм $\underset{Ц}{\cdot}$ типа $(Ц^2 \to Ц)$ так, чтобы для любых целых чисел p_1, p_2 выполнялось

1) если p_1, p_2 — натуральные числа, то

$$\underset{Ц}{\cdot}(p_1, p_2) \mathrel{\dot{=}} \underset{\mathscr{H}}{\cdot}(p_1, p_2);$$

2)
$$\underset{Ц}{\cdot}(0, p_2) \mathrel{\dot{=}} \underset{Ц}{\cdot}(p_1, 0) \mathrel{\dot{=}} 0;$$

3) если оба числа p_1, p_2 отличны от 0 и в точности одно из них отрицательно, то

$$\underset{Ц}{\cdot}(p_1, p_2) \mathrel{\dot{=}} -\underset{\mathscr{H}}{\cdot}(|p_1|, |p_2|);$$

4) если оба p_1, p_2 отрицательны, то

$$\underset{Ц}{\cdot}(p_1, p_2) \mathrel{\dot{=}} \underset{\mathscr{H}}{\cdot}(|p_1|, |p_2|).$$

3. Рациональные числа. Определение 5. *Слово Q в алфавите $Ч$ называется рациональным числом, если Q является целым числом или $Q \mathrel{\dot{=}} p_1/p_2$, где p_1, p_2 — целые числа, причем $p_2 \mathrel{\dot{\neq}} 0$.*

Множество слов в алфавите $Ч$, являющихся рациональными числами, будем обозначать через $\mathscr{P}$. Очевидно, множество $\mathscr{P}$ разрешимо.

В качестве переменных по рациональным числам мы будем использовать буквы r, s с индексами или без индексов. Для обозначения конкретных рациональных чисел часто будет использоваться общепринятая символика (так что, например, вместо $0|/0||$ пишется $^1/_2$).

В этом пункте мы будем использовать следующие обозначения. Если r — рациональное число и $r \underset{\cdot}{=} p_1/p_2$, то через $\underline{r}$, $\bar{r}$ обозначаются соответственно p_1 и p_2. Если r — целое число, то через $\underline{r}$ мы обозначаем само это число, а через $\bar{r}$ — натуральное число $0|$.

Определение 6 (отношения порядка и равенства на множестве рациональных чисел).

1) *Рациональные числа* r_1 *и* r_2 *называются равными* (*запись* $r_1 \underset{\mathscr{P}}{=} r_2$), *если* $\underline{r}_1 \underset{Ц}{\cdot} \bar{r}_2 \underset{Ц}{=} \underline{r}_2 \underset{Ц}{\cdot} \bar{r}_1$.

2) *Рациональное число* r_1 *меньше рационального числа* r_2 (*запись* $r_1 \underset{\mathscr{P}}{<} r_2$), *если* а) $\underline{r}_1 \underset{Ц}{\cdot} \bar{r}_2 \underset{Ц}{>} \underline{r}_2 \underset{Ц}{\cdot} \bar{r}_1$ *и* $\bar{r}_1 \underset{Ц}{\cdot} \bar{r}_2 > 0$ *или* б) $\underline{r}_1 \underset{Ц}{\cdot} \bar{r}_2 \underset{Ц}{<} \underline{r}_2 \underset{Ц}{\cdot} \bar{r}_1$ *и* $\bar{r}_1 \underset{Ц}{\cdot} \bar{r}_2 < 0$.

3) *Рациональное число* r_1 *больше рационального числа* r_2 (*запись* $r_1 \underset{\mathscr{P}}{>} r_2$), *если* $r_2 \underset{\mathscr{P}}{<} r_1$.

4) *Рациональное число* r_1 *не больше* (*не меньше*) *рационального числа* r_2 (*запись соответственно* $r_1 \underset{\mathscr{P}}{\leqslant} r_2$ *и* $r_1 \underset{\mathscr{P}}{\geqslant} r_2$), *если* $\neg(r_1 \underset{\mathscr{P}}{>} r_2)$ (*соответственно* $\neg(r_1 \underset{\mathscr{P}}{<} r_2)$).

Очевидно, введенные отношения являются разрешимыми. Для них может быть переформулирована теорема 1 § 1, иначе говоря, имеют место следующие утверждения.

Теорема 2. *Каковы бы ни были рациональные числа* r, r_1, s, s_1, *имеет место*

1) $(r \underset{\mathscr{P}}{=} s) \vee (r \underset{\mathscr{P}}{>} s) \vee (r \underset{\mathscr{P}}{<} s)$;

2) $(r \underset{\mathscr{P}}{\neq} s) \supset ((r \underset{\mathscr{P}}{>} s) \vee (r \underset{\mathscr{P}}{<} s))$;

3) $(r \underset{\mathscr{P}}{\geqslant} s) \vee (r \underset{\mathscr{P}}{\leqslant} s)$;

4) $(r \underset{\mathscr{P}}{\geqslant} s) \supset ((r \underset{\mathscr{P}}{=} s) \vee (r \underset{\mathscr{P}}{>} s))$;

5) $(r \underset{\mathscr{P}}{\leqslant} s) \supset ((r \underset{\mathscr{P}}{=} s) \vee (r \underset{\mathscr{P}}{<} s))$;

6) $(r \underset{\mathscr{P}}{=} s) \supset ((r \underset{\mathscr{P}}{\geqslant} s) \,\&\, (r \underset{\mathscr{P}}{\leqslant} s))$;

7) $((r \underset{\mathscr{P}}{\geqslant} s) \,\&\, (r \underset{\mathscr{P}}{\leqslant} s)) \supset (r \underset{\mathscr{P}}{=} s)$;

8) $((r \,\delta\, s) \,\&\, (s \,\delta\, s_1)) \supset (r \,\delta\, s_1)$;

9) $((r\,\delta s)\ \&\ (r \underset{\mathscr{P}}{=} r_1)\ \&\ (s \underset{\mathscr{P}}{=} s_1)) \supset (r_1\,\delta s_1)$ (*в* 8) *и* 9) δ *обозначает любой из знаков* $\underset{\mathscr{P}}{=}$, $\underset{\mathscr{P}}{<}$, $\underset{\mathscr{P}}{>}$, $\underset{\mathscr{P}}{\leqslant}$, $\underset{\mathscr{P}}{\geqslant}$);

10) $(r \underset{\mathscr{P}}{=} s) \supset (s \underset{\mathscr{P}}{=} r)$.

Очевидна также следующая

Теорема 3. *Каково бы ни было целое число* p, $p \underset{\mathscr{P}}{=} p/0|$.

Из разрешимости отношений $\underset{\mathscr{P}}{=}$, $\underset{\mathscr{P}}{<}$, $\underset{\mathscr{P}}{>}$, $\underset{\mathscr{P}}{\leqslant}$, $\underset{\mathscr{P}}{\geqslant}$ вытекает

Теорема 4. *Пусть* δ — *любой из знаков* $\underset{\mathscr{P}}{=}$, $\underset{\mathscr{P}}{<}$, $\underset{\mathscr{P}}{>}$, $\underset{\mathscr{P}}{\leqslant}$, $\underset{\mathscr{P}}{\geqslant}$. *Для любых рациональных чисел* r_1, r_2 *выполняется*

$$\neg\neg(r_1\,\delta r_2) \equiv r_1\,\delta r_2.$$

Переходим к определению арифметических операций над рациональными числами.

Построим алгорифм $\underset{\mathscr{P}}{+}$ типа $(\mathscr{P}^2 \to \mathscr{P})$ таким образом, чтобы для любых рациональных чисел r, s выполнялось

1) если r, s — целые числа, то

$$\underset{\mathscr{P}}{+}(r,\ s) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \underset{Ц}{+}(r,\ s);$$

2) если хотя бы одно из r, s не является целым числом, то

$$\underset{\mathscr{P}}{+}(r,\ s) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \underset{Ц}{+}(\underline{r} \underset{Ц}{\cdot} \bar{s},\ \bar{r} \underset{Ц}{\cdot} \underline{s})/\bar{r} \underset{Ц}{\cdot} \bar{s}.$$

Построим алгорифм $\underset{\mathscr{P}}{\cdot}$ типа $(\mathscr{P}^2 \to \mathscr{P})$ такой, что для любых рациональных чисел r, s

1) если r, s — целые числа, то

$$\underset{\mathscr{P}}{\cdot}(r,\ s) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \underset{Ц}{\cdot}(r,\ s);$$

2) если хотя бы одно из r, s не является целым числом, то

$$\underset{\mathscr{P}}{\cdot}(r,\ s) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \underline{r} \underset{Ц}{\cdot} \underline{s}/\bar{r} \underset{Ц}{\cdot} \bar{s}.$$

Построим алгорифм $\underset{\mathscr{P}}{-}$ такой, чтобы для любых r, s

$$\underset{\mathscr{P}}{-}(r,\ s) \doteqdot \underset{\mathscr{P}}{+}(r, \underset{\mathscr{P}}{\cdot}(-0\,|,\ s)).$$

Построим далее алгорифм «об» типа $(\mathscr{P} \dot{\to} \mathscr{P})$ такой, что при любом рациональном r

1) если $r \underset{\mathscr{P}}{=} 0$, то $\neg\,!\,$об(r);

2) если $r \underset{\mathscr{P}}{\neq} 0$, то

$$\text{об}\,(r) \doteqdot \bar{r}/\underline{r}.$$

Построим алгорифм $\underset{\mathscr{P}}{:}$ типа $(\mathscr{P}^2 \dot{\to} \mathscr{P})$ таким образом, чтобы для любых рациональных чисел r и s выполнялось

$$\underset{\mathscr{P}}{:}(r,\ s) \simeq \underset{\mathscr{P}}{\cdot}(r,\ \text{об}\,(s)).$$

Очевидно,

$$!\underset{\mathscr{P}}{:}(r,\ s) \equiv s \underset{\mathscr{P}}{\neq} 0.$$

Алгорифмы $\underset{\mathscr{P}}{+}$, $\underset{\mathscr{P}}{-}$, $\underset{\mathscr{P}}{\cdot}$, $\underset{\mathscr{P}}{:}$ будем называть соответственно *операциями сложения*, *вычитания*, *умножения* и *деления* рациональных чисел. Вместо записи $\delta(r, s)$ (где δ — знак одной из только что введенных операций) мы будем часто использовать более привычную запись $r\delta s$. В тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, индекс «$\mathscr{P}$» в знаках отношений равенства и порядка и в знаках арифметических операций будет опускаться.

Арифметические операции над рациональными числами, как нетрудно показать, сохраняют равенство рациональных чисел. Операции сложения и умножения обладают свойствами коммутативности и ассоциативности. Выполняются также распределительные законы для умножения относительно сложения и вычитания. Формулировка соответствующих свойств предоставляется читателю.

Непосредственно из определений арифметических операций и отношений равенства и порядка вытекают следующие утверждения.

Теорема 5. *Каковы бы ни были рациональные числа* r *и* s

1) $r + ((-1) \cdot r) = 0$;
2) $r + 0 = r$;
3) $r \cdot 1 = r$;
4) $r : 1 = r$;
5) *если* $s \neq 0$, *то* $s : s = s \cdot \text{об}(s) = 1$;
6) *если* $s \neq 0$, *то* $s \cdot (r : s) = r$.

Имеют место и обычные свойства неравенств.

Теорема 6. *Пусть* δ — *любой из знаков* $\underset{\mathscr{P}}{<}$, $\underset{\mathscr{P}}{>}$, $\underset{\mathscr{P}}{\leqslant}$, $\underset{\mathscr{P}}{\geqslant}$; r_1, r_2, s, s_1, s_2 — *произвольные рациональные числа. Тогда*

1) *если* $r_1 \delta r_2$, *то* $(r_1 \underset{\mathscr{P}}{+} s)\, \delta\, (r_2 \underset{\mathscr{P}}{+} s)$;

2) *если* $r_1 \delta r_2$ *и* $s \underset{\mathscr{P}}{>} 0$, *то* $(r_1 \underset{\mathscr{P}}{\cdot} s)\, \delta\, (r_2 \underset{\mathscr{P}}{\cdot} s)$;

3) *если* $r_1 \delta r_2$ *и* $s \underset{\mathscr{P}}{<} 0$, *то* $(r_2 \underset{\mathscr{P}}{\cdot} s)\, \delta\, (r_1 \underset{\mathscr{P}}{\cdot} s)$;

4) *если* $r_1 \delta r_2$ *и* $s_1 \delta s_2$, *то* $(r_1 \underset{\mathscr{P}}{+} s_1)\, \delta\, (r_2 \underset{\mathscr{P}}{+} s_2)$;

5) *если* $r_1 \delta r_2$, $s_1 \delta s_2$ *и* $r_1 \underset{\mathscr{P}}{>} 0$, $r_2 \underset{\mathscr{P}}{>} 0$, $s_1 \underset{\mathscr{P}}{>} 0$, $s_2 \underset{\mathscr{P}}{>} 0$, *то*

$$(r_1 \underset{\mathscr{P}}{\cdot} s_1)\, \delta\, (r_2 \underset{\mathscr{P}}{\cdot} s_2).$$

Обозначим через $\underset{\mathscr{P}}{\text{mod}}$ алгорифм в алфавите $Ч$ со схемой

$$\{ - \to$$

Очевидно, $\underset{\mathscr{P}}{\text{mod}}$ является алгорифмом типа $(\mathscr{P} \to \mathscr{P})$. Для любого рационального числа r рациональное число $\underset{\mathscr{P}}{\text{mod}}(r)$ будем называть *модулем* или *абсолютной величиной* r. Вместо записи $\underset{\mathscr{P}}{\text{mod}}(r)$ мы будем, как правило, использовать запись $|r|_{\mathscr{P}}$ или просто $|r|$.

Непосредственно из определения алгорифма $\underset{\mathscr{P}}{\text{mod}}$ и определений отношений порядка и равенства рациональных чисел и арифметических операций усматриваются следующие утверждения.

Теорема 7. *Для всякого рационального числа* r

1) $|r| \geqslant 0$ *и* $|r| = 0 \equiv r = 0$;
2) $r \leqslant |r|$;
3) $(r = |r|) \equiv (r \geqslant 0)$;
4) $|r| = |-r|$.

Теорема 8. *Для всяких рациональных чисел* r, s

1) $|r \cdot s| = |r| \cdot |s|$;
2) *если* $s \neq 0$, *то* $|r : s| = |r| : |s|$;
3) $||r| - |s|| \leqslant |r + s| \leqslant |r| + |s|$.

Построим алгорифм $\max\limits_{\mathscr{P}}$ такой, что для любых рациональных чисел r_1, r_2

$$\max_{\mathscr{P}}(r_1, r_2) \mathrel{\dot{=}} \begin{cases} r_1, & \text{если} \quad r_1 \geqslant r_2, \\ r_2, & \text{если} \quad r_1 < r_2. \end{cases}$$

Очевидно, всегда

$$\max_{\mathscr{P}}(r_1, r_2) \geqslant r_1$$

и

$$\max_{\mathscr{P}}(r_1, r_2) \geqslant r_2.$$

Нетрудно убедиться также, что

$$\max_{\mathscr{P}}(r_1, r_2) \mathrel{\underset{\mathscr{P}}{=}} \frac{(r_1 + r_2) + |r_1 - r_2|}{2}.$$

Построим также алгорифм $\min\limits_{\mathscr{P}}$ такой, что

$$\min_{\mathscr{P}}(r_1, r_2) \mathrel{\dot{=}} \begin{cases} r_1, & \text{если} \quad r_1 \leqslant r_2, \\ r_2, & \text{если} \quad r_1 > r_2. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\min_{\mathscr{P}}(r_1, r_2) \leqslant r_1$$

и

$$\min_{\mathscr{P}}(r_1, r_2) \leqslant r_2.$$

Нетрудно показать, что

$$\min_{\mathscr{P}}(r_1,\ r_2) = \frac{(r_1+r_2)-|r_1-r_2|}{2}.$$

Индекс «$\mathscr{P}$» в записи вида $\max\limits_{\mathscr{P}}(r_1,\ r_2)$, $\min\limits_{\mathscr{P}}(r_1,\ r_2)$ будет, как правило, опускаться.

§ 2. Конструктивные действительные числа (КДЧ). Основные определения

Определение 1. *Последовательностью натуральных (рациональных) чисел будем называть алгорифм (в алфавите $Ч^{\alpha}$) типа $(\mathscr{H}\to\mathscr{H})$ (соответственно типа $(\mathscr{H}\to\mathscr{P})$).*

Вместо термина «последовательность натуральных (рациональных) чисел» мы будем часто использовать сокращение *ПНЧ* (*ПРЧ*).

Определение 2. *ПНЧ β называется регулятором сходимости в себе (или регулятором фундаментальности) ПРЧ α, если*

$$\forall nml(m,\ l \geqslant \beta(n) \supset |\,\alpha(m) \underset{\mathscr{P}}{-} \alpha(l)\,| \underset{\mathscr{P}}{<} 2^{-n}).$$

Определение 3. *ПРЧ α называется фундаментальной (квазифундаментальной), если осуществима (не может не существовать) ПНЧ β, являющаяся регулятором сходимости в себе ПРЧ α.*

Определение 4. *ПРЧ α называется псевдофундаментальной, если*

$$\forall n \urcorner\urcorner \exists m \forall kl(k,\ l \geqslant m \supset |\,\alpha(k) \underset{\mathscr{P}}{-} \alpha(l)\,| \underset{\mathscr{P}}{<} 2^{-n}).$$

Определение 5. *Слово Q в алфавите $Ч$ назовем FR-числом (конструктивным действительным числом или, короче, КДЧ), если Q является рациональным числом или $Q \rightleftharpoons \{\alpha\} \diamondsuit \{\beta\}$, где α — ПРЧ, β — ПНЧ, являющаяся регулятором сходимости в себе ПРЧ α.*

Определение 6. *Слово Q в $Ч$ назовем F-числом (квазичислом), если Q — рациональное число или $Q \rightleftharpoons \{\alpha\} \diamondsuit$, где α — фундаментальная (квазифундаментальная) ПРЧ.*

Определение 7. *Слово Q в Ч назовем псевдочислом, если Q — рациональное число или $Q \rightleftharpoons \{\alpha\}\Diamond$, где α — псевдофундаментальная ПРЧ.*

Понятия *FR*-числа *), *F*-числа, квазичисла и псевдочисла введены Шаниным [6]**).

Каждое из определений 5—7 может быть положено в основу построения системы конструктивных действительных чисел. На получающиеся системы действительных чисел естественным образом распространяются с системы рациональных чисел отношения равенства, порядка и арифметические операции (причем последние могут быть заданы алгорифмами). Каждая из этих систем в различной степени соответствует интуитивному представлению о том, что вычислимое (конструктивное) действительное число должно быть объектом, сколь угодно точно аппроксимируемым рациональными числами.

С этой точки зрения наиболее естественным представляется понятие *FR*-числа. Индивидуальное задание *FR*-числа содержит в себе исчерпывающую информацию о последовательности рациональных приближений к этому числу и о скорости сходимости этих рациональных приближений.

Индивидуальное задание *F*-числа (квазичисла) позволяет лишь вычислять члены фундаментальной (квазифундаментальной) последовательности рациональных чисел; в этом задании не содержится, вообще говоря, никакой информации об эффективной оценке скорости сходимости упомянутой ПРЧ (т. е. о регуляторе сходимости в себе этой ПРЧ). Ясно, что такое различие содержащейся в индивидуальном задании *FR*-чисел и *F*-чисел (квазичисел) информации приводит к существенной неравноценности этих объектов как исходных данных для тех или иных алгорифмов (ср. § 2 гл. 4). Что же касается псевдочисел, то, как будет показано ниже (§ 3 гл. 3), последовательность рациональных чисел, извлекаемая из задания псевдочисла, может вообще

---

*) В качестве синонима этого термина в литературе используется часто термин «дуплекс».

**) Наши определения отличаются от соответствующих определений Н. А. Шанина несущественными техническими деталями.

не допускать никакой эффективной оценки скорости сходимости. Таким образом, можно привести пример псевдочисла, не являющегося F-числом (а следовательно, и квазичислом). Это псевдочисло не может быть, очевидно, дополнено до FR-числа *).

Несколько менее очевидна разница между F-числами и квазичислами. В самом деле, непосредственно из определений 3 и 6 следует, что нельзя построить квазичисло, которое не являлось бы F-числом. Однако тогда как для доказательства того, что некоторое слово Q вида $\{\alpha\}\Diamond$, где α — ПРЧ, есть F-число, нужно построить регулятор фундаментальности α, для доказательства того, что Q — квазичисло, достаточно лишь опровергнуть предположение, что такой регулятор невозможен. Нетрудно привести примеры квазичисел, для которых в настоящее время неизвестно доказательство того, что они являются F-числами **). Другое различие между F-числами и квазичислами, также связанное с конструктивным пониманием математических суждений, можно пояснить следующим примером.

Пусть алгорифм $\mathfrak{A}'$ переработает всякое натуральное число в запись ПРЧ, а алгорифм $\mathfrak{A}$ таков, что

$$\mathfrak{A}(n) \doteq \mathfrak{A}'(n)\Diamond.$$

Обозначим через $\mathcal{F}_1(\mathcal{F}_2)$ множество всех слов в $Ч$, являющихся F-числами (квазичислами). Для доказательства утверждения: «алгорифм $\mathfrak{A}$ является алгорифмом типа $(\mathcal{H} \to \mathcal{F}_1)$» нужно указать построение алгорифма $\mathfrak{B}$ такого, что при любом n алгорифм $\widehat{\mathfrak{B}}_n$ является регулятором сходимости в себе той ПРЧ, записью которой является $\mathfrak{A}'(n)$. Для доказательства же утверждения, что $\mathfrak{A}$ является алгорифмом типа $(\mathcal{H} \to \mathcal{F}_2)$, достаточно лишь опровергнуть предположение, что существует n, при котором ПРЧ с записью $\mathfrak{A}'(n)$ не является фундаментальной. Можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$ так, что $\mathfrak{A}$ является алгорифмом типа $(\mathcal{H} \to \mathcal{F}_2)$, но не

*) Будет построено также псевдочисло, которое не равно (в некотором естественном смысле) никакому FR-числу.

**) Нетрудно, в частности, привести пример такого квазичисла, для которого решение этой задачи давало бы решение проблемы Ферма.

является алгорифмом типа ($\mathcal{H} \to \mathcal{F}_1$) (т. е. упомянутый выше алгорифм $\mathfrak{B}$ невозможен).

Мы сосредоточим основное внимание на понятии FR-числа; за FR-числами мы сохраняем название «конструктивное действительное число» *). Таким образом, ниже термин «конструктивное действительное число» (КДЧ) понимается как синоним термина «FR-число».

Множество слов в алфавите $Ч$, являющихся КДЧ, мы обозначаем через $\mathcal{D}$. В качестве переменных по КДЧ будут использоваться буквы x, y, z, t, u, v (с индексами или без индексов).

Обозначим через Id алгорифм со схемой

$$\{\to\cdot$$

Очевидно, при любом $P \in Ч$

$$\mathrm{Id}(P) \simeq P.$$

Построим также алгорифм $\mathrm{Id}^{(1)}$ (см. пример 6 п. 4 § 1 гл. 1) так, что при любых словах P и Q в алфавите $Ч_1$

$$\mathrm{Id}^{(1)}(P, Q) \simeq P.$$

Определение 8. *Пусть r — рациональное число. Слово $\{\widehat{\mathrm{Id}}^{(1)}_r\} \diamond \{\mathrm{Id}\}$ будем называть действительным образом r.*

Очевидно, действительный образ любого рационального числа есть КДЧ. Можно построить алгорифм $\mathfrak{D}$, перерабатывающий всякое рациональное число в его действительный образ и такой, что если $P \in Ч$ не является рациональным числом, то $\mathfrak{D}(P) \simeq P$.

Примем следующие сокращенные обозначения.

Если x — КДЧ и $x \simeq \{\alpha\} \diamond \{\beta\}$, то через $\underline{x}$ и $\overline{x}$ будут обозначаться соответственно алгорифмы α и β. Если же x — КДЧ и x является рациональным числом, то под $\underline{x}$ и $\overline{x}$ будут подразумеваться алгорифмы $\underline{\mathfrak{D}(x)}$ и $\overline{\mathfrak{D}(x)}$.

---

*) Некоторые сведения о F-числах, квазичислах и псевдочислах можно найти в работах Шанина [6], Кушнера [4]—[5], Кушнера и Цейтина [1], Лифшица [4].

Очевидно, для любого рационального числа r при всяком натуральном n выполняется

$$\underline{r}(n) \doteq r,$$

$$\overline{r}(n) \doteq n.$$

Ниже вместо $\underline{x}(\overline{x}(n))$ мы будем часто использовать более короткую запись x_n.

§ 3. Отношения равенства и порядка на множестве КДЧ

1. Определение 1. *Будем говорить, что КДЧ x равно КДЧ y, и писать $x \underset{\mathscr{D}}{=} y$, если при любом натуральном n*

$$|\underline{x}(\overline{x}(n)) \underset{\mathscr{P}}{-} \underline{y}(\overline{y}(n))|_{\mathscr{P}} \underset{\mathscr{P}}{\leqslant} 2^{-n+1}$$

(обозначения $\underline{x}$ и $\overline{x}$ введены в предыдущем параграфе).

Определение 2. 1) *Будем говорить, что КДЧ x больше КДЧ y, и писать $x \underset{\mathscr{D}}{>} y$, если можно найти натуральное число n, при котором*

$$\underline{x}(\overline{x}(n)) \underset{\mathscr{P}}{-} \underline{y}(\overline{y}(n)) \underset{\mathscr{P}}{>} 2^{-n+1}.$$

2) *Будем говорить, что x меньше y, и писать $x \underset{\mathscr{D}}{<} y$, если имеет место $y \underset{\mathscr{D}}{>} x$.*

Определение 3. *Будем говорить, что КДЧ x не меньше (не больше) КДЧ y, и писать $x \underset{\mathscr{D}}{\geqslant} y$ (соответственно $x \underset{\mathscr{D}}{\leqslant} y$), если неверно, что $x \underset{\mathscr{D}}{<} y$ (соответственно неверно, что $x \underset{\mathscr{D}}{>} y$).*

Вместо записи $\neg(x \underset{\mathscr{D}}{=} y)$ мы будем использовать запись $x \underset{\mathscr{D}}{\neq} y$. Индекс «$\mathscr{D}$» при знаках отношений будет, как правило, опускаться.

Отметим, что, в отличие от одноименных отношений над рациональными числами, все введенные только что отношения не являются разрешимыми.

Ниже будут изложены некоторые свойства отношений равенства и порядка на КДЧ.

2. Теорема 1. *Для любых КДЧ x и y*

1) $$x \underset{\mathscr{D}}{=} x;$$

2) $$x \underset{\mathscr{D}}{=} y \equiv y \underset{\mathscr{D}}{=} x.$$

Теорема 1 легко следует из определения 1.

Теорема 2. *Пусть x, y — произвольные КДЧ. Тогда*

1) *если* $x \underset{\mathscr{D}}{=} y$, *то* $x \underset{\mathscr{D}}{\geqslant} y$;

2) *если* $x \underset{\mathscr{D}}{=} y$, *то* $x \underset{\mathscr{D}}{\leqslant} y$;

3) *если* $x \underset{\mathscr{D}}{>} y$, *то* $x \underset{\mathscr{D}}{\geqslant} y$;

4) *если* $x \underset{\mathscr{D}}{<} y$, *то* $x \underset{\mathscr{D}}{\leqslant} y$;

5) *если* $x \underset{\mathscr{D}}{>} y$, *то* $x \underset{\mathscr{D}}{\neq} y$;

6) *если* $x \underset{\mathscr{D}}{<} y$, *то* $x \underset{\mathscr{D}}{\neq} y$.

Доказательство. Утверждения 1), 2), 5), 6) очевидны. Утверждение 4) следует из утверждения 3).

Докажем утверждение 3). Пусть

(1) $$x > y.$$

Предположим, что

(2) $$x < y.$$

Тогда по определению 2 осуществимы натуральные числа m и n такие, что *)

(3) $$x_m - y_m > 2^{-m+1},$$

(4) $$y_n - x_n > 2^{-n+1}.$$

Пусть $i \geqslant \max(\overline{x}(m),\ \overline{y}(m))$. Тогда

(5) $$|\underline{x}(i) - x_m| < 2^{-m},$$

(6) $$|\underline{y}(i) - y_m| < 2^{-m}.$$

*) Напомним, что через x_n мы обозначаем $\underline{x}(\overline{x}(n))$ (§ 2).

Имеем

$$\underline{x}(i) - \underline{y}(i) \underset{\mathscr{P}}{=} (x_m - y_m) + (\underline{x}(i) - x_m) + (y_m - \underline{y}(i)).$$

Отсюда, учитывая (3), (5), (6), получаем

$$(7)\qquad \underline{x}(i) - \underline{y}(i) > 2^{-m+1} - 2^{-m} - 2^{-m} = 0.$$

Точно так же при $i \geqslant \max(\overline{x}(n), \overline{y}(n))$ выполняется

$$(8)\qquad \underline{y}(i) - \underline{x}(i) > 0.$$

Таким образом, при $i \geqslant \max(\overline{x}(m), \overline{y}(m), \overline{x}(n), \overline{y}(n))$ одновременно выполняется (7) и (8), что невозможно.

Следовательно, $\urcorner(x < y)$, т. е. $x \geqslant y$, что и требовалось.

Теорема 3. *Для любого рационального числа r выполняется*

$$r \underset{\mathscr{D}}{=} \mathfrak{D}(r),$$

т. е. всякое рациональное число равно своему действительному образу.

Теорема 4. *Для любых рациональных чисел r_1, r_2 имеет место $r_1 \underset{\mathscr{P}}{\delta} r_2 \equiv r_1 \underset{\mathscr{D}}{\delta} r_2$, где $\underset{\mathscr{P}}{\delta}$ обозначает любой из знаков $\underset{\mathscr{P}}{=}$, $\underset{\mathscr{P}}{<}$, $\underset{\mathscr{P}}{>}$, $\underset{\mathscr{P}}{\leqslant}$, $\underset{\mathscr{P}}{\geqslant}$, а $\underset{\mathscr{D}}{\delta}$ — одноименный знак с индексом «$\mathscr{D}$».*

Теорема 3 непосредственно усматривается из определения 1. Теорема 4 (показывающая, что отношения равенства и порядка КДЧ совпадают на рациональных числах с введенными ранее рациональными отношениями) легко следует из следующих трех простых лемм, доказательство которых предоставляется читателю.

Лемма 1. *При каждом натуральном n $2^n > n$.*

Лемма 2. *Можно построить алгорифм α типа $(\mathscr{P} \to \mathscr{H})$ так, что для любого рационального r, если $r \underset{\mathscr{P}}{\neq} 0$, то*

$$|r| > 2^{-\alpha(r)}.$$

Лемма 3. *Пусть r — рациональное число и при любом n*

$$|r| < 2^{-n}.$$

Тогда $r = 0$.

3. Приведем некоторые необходимые и достаточные условия равенства КДЧ.

Определение 4. *ПНЧ β назовем возрастающей, если при любом n*

$$\beta(n) < \beta(n+1).$$

Теорема 5 (необходимое условие равенства КДЧ). *Пусть x, y — равные КДЧ. Тогда осуществима возрастающая ПНЧ α такая, что при любом натуральном n*

$$|\underline{x}(\alpha(n)) - \underline{y}(\alpha(n))| < 2^{-n}. \tag{9}$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно построить алгорифм $\mathfrak{B}$ такой, что для любых x, y из $x \underset{\mathfrak{D}}{=} y$ следует, что $\widehat{\mathfrak{B}}_{x,y}$ есть возрастающая ПНЧ, удовлетворяющая (9).

Пользуясь теоремой об универсальном алгорифме и теоремами сочетания алгорифмов, можно построить алгорифм $\mathfrak{B}$ так, чтобы выполнялись условия:

$$\mathfrak{B}(x, y, 0) \simeq \max_{\mathcal{K}}(\overline{x}(2), \overline{y}(2));$$

$$\mathfrak{B}(x, y, n+1) \simeq \max_{\mathcal{K}}(\mathfrak{B}(x, y, n), \overline{x}(n+3), \overline{y}(n+3)) + 1.$$

Очевидно, для любых КДЧ x и y алгорифм $\widehat{\mathfrak{B}}_{x,y}$ является возрастающей ПНЧ, причем при любом n

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{B}}_{x,y}(n) &\geqslant \overline{x}(n+2), \\ \widehat{\mathfrak{B}}_{x,y}(n) &\geqslant \overline{y}(n+2). \end{aligned} \tag{10}$$

Пусть x, y — равные КДЧ. Покажем, что $\widehat{\mathfrak{B}}_{x,y}$ удовлетворяет (9).

При $m \geqslant \max(\overline{x}(n+2), \overline{y}(n+2))$ выполняется

$$|\underline{x}(m) - x_{n+2}| < 2^{-n-2}, \tag{11}$$

$$|\underline{y}(m) - y_{n+2}| < 2^{-n-2} \tag{12}$$

(напомним, что x_k обозначает $\underline{x}(\overline{x}(k))$ см. стр. 130).

Ввиду равенства $x = y$

$$|x_{n+2} - y_{n+2}| \leqslant 2^{-n-1}. \tag{13}$$

Из (11) — (13) получаем, что при

$$m \geqslant \max(\overline{x}(n+2),\ \overline{y}(n+2))$$

имеет место

(14) $\quad |\underline{x}(m) - \underline{y}(m)| < 2^{-n-2} + 2^{-n-2} + 2^{-n-1} = 2^{-n}.$

Из (10) и (14) вытекает, что $\widehat{\mathfrak{V}}_{x,y}$ удовлетворяет (9).

Теорема 6 (достаточное условие равенства КДЧ). *Пусть x, y — КДЧ такие, что осуществимы возрастающие ПНЧ α_1, α_2, для которых при любом n*

(15) $$|\underline{x}(\alpha_1(n)) - \underline{y}(\alpha_2(n))| < 2^{-n}.$$

Тогда $x \underset{\mathcal{D}}{=} y$.

Предположим, что при некотором k

(16) $$|x_k - y_k| > 2^{-k+1}.$$

Пользуясь леммой 2, найдем натуральное l таким образом, чтобы

(17) $$|x_k - y_k| > 2^{-k+1} + 2^{-l}.$$

Пусть теперь m_1, m_2 — натуральные числа не меньшие, чем $\max(\overline{x}(k), \overline{y}(k))$. Тогда

(18) $$|\underline{x}(m_1) - x_k| < 2^{-k}$$

и

(19) $$|\underline{y}(m_2) - y_k| < 2^{-k}.$$

Из очевидного равенства

$$\underline{x}(m_1) - \underline{y}(m_2) = x_k - y_k - (x_k - \underline{x}(m_1)) - (\underline{y}(m_2) - y_k),$$

ввиду (17), (18) и (19), получаем

(20) $$|\underline{x}(m_1) - \underline{y}(m_2)| \geqslant |x_k - y_k| - |x_k - \underline{x}(m_1)| - \\ - |\underline{y}(m_2) - y_k| > 2^{-k+1} + 2^{-l} - 2^{-k} - 2^{-k} = 2^{-l}.$$

Пользуясь тем, что α_1, α_2 — возрастающие ПНЧ, найдем $n > l$ такое, чтобы

$$\alpha_1(n) \geqslant \max(\overline{x}(k), \overline{y}(k)),$$

$$\alpha_2(n) \geqslant \max(\overline{x}(k), \overline{y}(k)).$$

Тогда, ввиду (20),

$$|\underset{\smile}{x}(\alpha_1(n)) - \underset{\smile}{y}(\alpha_2(n))| > 2^{-l}.$$

Это, однако (так как $n > l$), противоречит (15). Следовательно, при любом k

$$\neg(|x_k - y_k| > 2^{-k+1}),$$

т. е.

$$|x_k - y_k| \leqslant 2^{-k+1},$$

что и дает $x \underset{\mathscr{D}}{=} y$.

4. Теорема 7 (транзитивность отношения равенства КДЧ). *Каковы бы ни были x, y, z, если $x \underset{\mathscr{D}}{=} y$, $y \underset{\mathscr{D}}{=} z$, то $x \underset{\mathscr{D}}{=} z$.*

Доказательство. Ввиду равенств $x = y$ и $y = z$ при любом натуральном n имеем

(21) $$|x_n - y_n| \leqslant 2^{-n+1},$$

(22) $$|y_n - z_n| \leqslant 2^{-n+1}.$$

Пусть теперь $m \geqslant \overline{x}(n)$. Тогда

$$|\underset{\smile}{x}(m) - x_n| < 2^{-n}.$$

Следовательно,

(23) $$|\underset{\smile}{x}(m) - y_n| < 2^{-n+1} + 2^{-n} < 2^{-n+2}.$$

Нетрудно построить возрастающую ПНЧ α_1 такую, что при всяком n

$$\alpha_1(n) \geqslant \overline{x}(n+3).$$

Тогда ввиду (23) при любом n

(24) $$|\underset{\smile}{x}(\alpha_1(n)) - y_{n+3}| < 2^{-n-1}.$$

Аналогично построим возрастающую ПНЧ α_2 такую, что при любом n

(25) $$|\underset{\smile}{z}(\alpha_2(n)) - y_{n+3}| < 2^{-n-1}.$$

Из (24) и (25) следует, что при всяком n

$$|\underset{\sim}{x}(\alpha_1(n)) - \underset{\sim}{z}(\alpha_2(n))| < 2^{-n}.$$

Ввиду теоремы 6 отсюда следует $x = z$.

Построим алгорифм «осн» такой, что для любого $P \in Ч$

$$\text{осн}(P) \mathrel{\bar{\bar{\cdot}}} \begin{cases} P, & \text{если } \diamondsuit \text{ не входит в } P, \\ Q_1, & \text{если } P \mathrel{\bar{\bar{\cdot}}} Q_1 \diamondsuit Q_2 \text{ и } \diamondsuit \text{ не входит в } Q_1. \end{cases}$$

Определение 5. *Пусть x — КДЧ. Слово* осн(x) *назовем основой x.*

Теорема 8. *Пусть x, y — КДЧ и*

$$\text{осн}(x) \mathrel{\bar{\bar{\cdot}}} \text{осн}(y);$$

тогда $x \underset{\mathscr{D}}{=} y$.

Теорема 9. *Пусть x, y — КДЧ и существует n такое, что*

$$\forall m (m \geqslant n \supset \underset{\sim}{x}(m) \underset{\mathscr{P}}{=} \underset{\sim}{y}(m)).$$

Тогда $x = y$.

Теоремы 8—9 очевидным образом вытекают из теоремы 6.

5. Теорема 10. *Пусть x, y — КДЧ. Для того чтобы выполнялось $x \underset{\mathscr{D}}{<} y$,*

1) *необходимо, чтобы существовали натуральные числа m и n такие, что*

$$\forall kl (k, l \geqslant m \supset (\underset{\sim}{y}(k) - \underset{\sim}{x}(l) > 2^{-n})); \tag{26}$$

2) *достаточно, чтобы существовали натуральные числа m и n такие, что*

$$\forall k (k \geqslant m \supset (\underset{\sim}{y}(k) - \underset{\sim}{x}(k) > 2^{-n})). \tag{27}$$

Доказательство.

1) Пусть $x \underset{\mathscr{D}}{<} y$. Тогда осуществимо i такое, что

$$y_i - x_i > 2^{-i+1}. \tag{28}$$

Пользуясь леммой 2, найдем натуральное число n такое, что

$$y_i - x_i > 2^{-i+1} + 2^{-n}. \tag{29}$$

Пусть $k,\ l \geqslant \max(\overline{x}(i),\ \overline{y}(i))$. Тогда

$$|\underline{y}(k) - y_l| < 2^{-l}.$$

Следовательно,

$$\underline{y}(k) > y_l - 2^{-l}. \tag{30}$$

Аналогично получаем

$$\underline{x}(l) < x_l + 2^{-l}. \tag{31}$$

Используя (30) — (31), получаем

$$\underline{y}(k) - \underline{x}(l) > y_l - 2^{-l} - x_l - 2^{-l} = y_l - x_l - 2^{-l+1}.$$

Следовательно ((29)),

$$\underline{y}(k) - \underline{x}(l) > 2^{-n_0}. \tag{32}$$

(32) показывает, что условие (26) выполняется, если в качестве n взять n_0, а в качестве m — $\max(\overline{x}(i),\ \overline{y}(i))$.

2) Пусть натуральные числа m и n таковы, что выполняется (27). Пусть далее k — натуральное число такое, что

$$k \geqslant m \tag{33}$$

и

$$k \geqslant \max(\overline{x}(n+2),\ \overline{y}(n+2)). \tag{34}$$

Ввиду (33)

$$\underline{y}(k) - \underline{x}(k) > 2^{-n}. \tag{35}$$

Ввиду (34)

$$|\underline{y}(k) - y_{n+2}| < 2^{-n-2}, \tag{36}$$

$$|\underline{x}(k) - x_{n+2}| < 2^{-n-2}. \tag{37}$$

Из (36) и (37) вытекает

$$y_{n+2} > \underline{y}(k) - 2^{-n-2}, \tag{38}$$

$$x_{n+2} < \underline{x}(k) + 2^{-n-2}. \tag{39}$$

Следовательно,

$$y_{n+2} - x_{n+2} > \underline{y}(k) - 2^{-n-2} - \underline{x}(k) - 2^{-n-2}.$$

Отсюда, ввиду (35), следует

$$y_{n+2} - x_{n+2} > 2^{-n} - 2^{-n-1} = 2^{-n-1} = 2^{-(n+2)+1}.$$

Следовательно, $x < y$.

Теорема 11. *Пусть x, y — КДЧ такие, что осуществимо натуральное число n, удовлетворяющее условию*

$$\forall m (m \geqslant n \supset \underline{x}(m) \underset{\mathscr{P}}{\leqslant} \underline{y}(m)). \tag{40}$$

Тогда $x \underset{\mathscr{D}}{\leqslant} y$.

Доказательство. Предположим, что $x \underset{\mathscr{D}}{>} y$. Тогда по теореме 10 осуществимы k, l такие, что

$$\forall ij (i, j \geqslant k \supset (\underline{x}(i) - \underline{y}(j) > 2^{-l})).$$

Это, очевидно, противоречит (40).

6. Докажем инвариантность отношений порядка относительно равенства КДЧ.

Теорема 12. *Для любых КДЧ x, y, x_1, y_1, если $x \underset{\mathscr{D}}{<} y$, $x_1 \underset{\mathscr{D}}{=} x$, $y_1 \underset{\mathscr{D}}{=} y$, то $x_1 \underset{\mathscr{D}}{<} y_1$.*

Доказательство. Пользуясь теоремой 10, найдем натуральные числа m, n так, чтобы

$$\forall ij (i, j \geqslant m \supset \underline{y}(i) - \underline{x}(j) > 2^{-n}). \tag{41}$$

Положим

$$m_1 \rightleftharpoons \max (\bar{x}(n+4), \bar{y}(n+4), \bar{x}_1(n+4), \bar{y}_1(n+4), m).$$

При $i, j \geqslant m_1$ выполняется

$$| \underline{x}(i) - x_{n+4} | < 2^{-n-4}, \tag{42}$$

$$| \underline{y}(j) - y_{n+4} | < 2^{-n-4}, \tag{43}$$

$$| \underline{x_1}(i) - (x_1)_{n+4} | < 2^{-n-4}, \tag{44}$$

$$| \underline{y_1}(j) - (y_1)_{n+4} | < 2^{-n-4}, \tag{45}$$

$$| (x_1)_{n+4} - x_{n+4} | \leqslant 2^{-n-3}, \tag{46}$$

$$| (y_1)_{n+4} - y_{n+4} | \leqslant 2^{-n-3}. \tag{47}$$

Из (42), (44), (46) получаем

$$| \underline{x_1}(i) - \underline{x}(i) | < 2^{-n-4} + 2^{-n-4} + 2^{-n-3} = 2^{-n-2}. \tag{48}$$

Аналогично,

(49) $$|\underline{y_1}(j)-\underline{y}(j)|<2^{-n-2}.$$

Из (41), (48), (49) получаем

$$\underline{y_1}(j)-\underline{x_1}(i)>\underline{y}(j)-\underline{x}(i)-2^{-n-1}>2^{-n}-2^{-n-1}=2^{-n-1}.$$

Согласно теореме 10 отсюда следует $y_1>x_1$.

Замечание. При формулировке теорем 10 и 12 мы воспользовались нашими соглашениями о конструктивном понимании математических суждений. По сути дела, теорема 10 утверждает существование трех алгорифмов $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{B}^3$ соответственно типов

$$((\mathscr{D}^2\times\mathscr{H})\to\mathscr{H}),\quad((\mathscr{D}^2\times\mathscr{H})\to\mathscr{H}),\quad((\mathscr{D}^2\times\mathscr{H}^2)\to\mathscr{H})$$

со следующими свойствами:

1) если слово x, y, n таково, что

$$y_n-x_n>2^{-n+1},$$

то $!\mathfrak{B}^1(x,y,n)$, $!\mathfrak{B}^2(x,y,n)$ и для всех k, l, не меньших, чем $\mathfrak{B}^1(x,y,n)$, выполняется

$$\underline{y}(k)-\underline{x}(l)>2^{-\mathfrak{B}^2(x,y,n)};$$

2) если слово x, y, n, m таково, что

$$\forall k\,(k\geqslant m\supset\underline{y}(k)-\underline{x}(k)>2^{-n}),$$

то $!\mathfrak{B}^3(x,y,n,m)$ и

$$y_{\mathfrak{B}^3(x,y,n,m)}-x_{\mathfrak{B}^3(x,y,n,m)}>2^{-\mathfrak{B}^3(x,y,n,m)+1}.$$

Способ построения таких алгорифмов непосредственно усматривается из доказательства теоремы 10. Аналогичным образом следует трактовать формулировку теоремы 12 (и следующих ниже теорем 14 и 15).

Теорема 13. *Для любых КДЧ x, y, x_1, y_1, если $x\leqslant y$ и $x_1=x$, $y_1=y$, то $x_1\leqslant y_1$.*

Доказательство. Предположим, что $x_1>y_1$. Тогда по теореме 12 $x>y$, что невозможно. Следовательно, $x_1\leqslant y_1$.

7. Теорема 14 (транзитивность отношений $\underset{\mathscr{D}}{<}$ и $\underset{\mathscr{D}}{>}$). *Пусть x, y, z — произвольные КДЧ. Если $x<y$,*

$y < z$, то $x < z$ (соответственно, если $x > y$, $y > z$, то $x > z$).

Доказательство. Пользуясь теоремой 10, найдем n, m такие, что

$$\forall kl(k,\ l \geqslant m \supset (\underline{y}(l) - \underline{x}(k) > 2^{-n})), \tag{50}$$

$$\forall ij(i,\ j \geqslant m \supset (\underline{z}(i) - \underline{y}(j) > 2^{-n})). \tag{51}$$

Но тогда при любом $l \geqslant m$

$$\underline{z}(l) - \underline{x}(l) > 2^{-n+1}.$$

Отсюда по теореме 10 следует, что $z \underset{\mathscr{D}}{>} x$.

Теорема 15. *Для любых КДЧ x, y, z 1) если $x \leqslant y$, $y < z$, то $x < z$; 2) если $x < y$, $y \leqslant z$, то $x < z$ (соответственно, 1′) если $x \geqslant y$ и $y > z$, то $x > z$, и 2′) если $x > y$ и $y \geqslant z$, то $x > z$).*

Доказательство. Докажем, например, утверждение 1). По теореме 10 найдем m, n такие, что

$$\forall kl(k,\ l \geqslant m \supset (\underline{z}(k) - \underline{y}(l) > 2^{-n})). \tag{52}$$

Пусть теперь

$$i \geqslant \max(m,\ \overline{x}(n+3),\ \overline{y}(n+3)).$$

Имеем

$$|\underline{x}(i) - x_{n+3}| < 2^{-n-3},$$

откуда

$$\underline{x}(i) < x_{n+3} + 2^{-n-3}. \tag{53}$$

Далее, ввиду того, что $x \leqslant y$,

$$x_{n+3} - y_{n+3} \leqslant 2^{-n-2}. \tag{54}$$

Из (53) и (54) получаем

$$\underline{x}(i) < y_{n+3} + 2^{-n-3} + 2^{-n-2}. \tag{55}$$

Далее,

$$|\underline{y}(i) - y_{n+3}| < 2^{-n-3}.$$

Отсюда и из (55) получаем

$$\underline{x}(i) < \underline{y}(i) + 2^{-n-3} + 2^{-n-3} + 2^{-n-2} = \underline{y}(i) + 2^{-n-1}.$$

Следовательно,

(56) $\underline{z}(i)-\underline{x}(i) > \underline{z}(i)-\underline{y}(i)-2^{-n-1} > 2^{-n}-2^{-n-1}=2^{-n-1}.$

Ввиду теоремы 10 из (56) следует, что $x < z$.

Докажем теперь транзитивность отношений $\underset{\mathcal{D}}{\leqslant}$ и $\underset{\mathcal{D}}{\geqslant}$.

Теорема 16. *Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ (соответственно, если $x \geqslant y$, $y \geqslant z$, то $x \geqslant z$).*

Доказательство. Предположим, что $x > z$. Тогда по теореме 15 $x > y$, что противоречит условию. Следовательно, $x \leqslant z$.

Теорема 17. *Для любых КДЧ x и y, если $x \leqslant y$ и $x \geqslant y$, то $x = y$.*

Доказательство. Из $x \leqslant y$ следует, что

$$\forall n\,(x_n - y_n \leqslant 2^{-n+1}). \tag{57}$$

Из условия $x \geqslant y$ вытекает, что

$$\forall n\,(y_n - x_n \leqslant 2^{-n+1}). \tag{58}$$

Из (57) и (58) следует, что

$$\forall n\,(|\,y_n - x_n\,| \leqslant 2^{-n+1}),$$

что и дает $x = y$.

Теорема 18. *Для любых КДЧ x, y выполняется*

$$\neg\neg((x = y) \vee (x > y) \vee (x < y)).$$

Доказательство. Утверждение теоремы означает, что ни при каких x, y не могут одновременно выполняться условия

$$\neg(x = y), \tag{59}$$

$$\neg(x < y), \tag{60}$$

$$\neg(x > y). \tag{61}$$

Это очевидно, поскольку из (60) и (61) согласно теореме 17 следует $x = y$.

Как будет показано в § 1 гл. 4, двойное отрицание в формулировке теоремы 18 не может быть устранено (при конструктивном понимании дизъюнкции).

8. Для доказательства некоторых дальнейших свойств отношений порядка и равенства нам потребуются следующие четыре леммы.

Лемма 4. *Можно построить алгорифм* Nr *типа* $(\mathscr{D}^2 \dot{\to} \mathscr{H})$ *так, что для любых* x, y

1) $x < y \equiv\, !\mathrm{Nr}(x, y) \,\&\, (y_{\mathrm{Nr}(x,y)} - x_{\mathrm{Nr}(x,y)}) \underset{\mathscr{P}}{>} 2^{-\mathrm{Nr}(x,y)+1}$;

2) $x > y \equiv\, !\mathrm{Nr}(x, y) \,\&\, (x_{\mathrm{Nr}(x,y)} - y_{\mathrm{Nr}(x,y)}) \underset{\mathscr{P}}{>} 2^{-\mathrm{Nr}(x,y)+1}$;

3) $x = y \equiv \neg\, !\mathrm{Nr}(x, y)$;

4) $!\mathrm{Nr}(x, y) \supset |y_{\mathrm{Nr}(x,y)} - x_{\mathrm{Nr}(x,y)}| \underset{\mathscr{P}}{>} 2^{-\mathrm{Nr}(x,y)+1}$.

Доказательство. Пользуясь теоремой об универсальном алгорифме и теоремами п. 7 § 1 гл. 1, можно построить алгорифм Nr так, чтобы для любых КДЧ x и y

$$\mathrm{Nr}(x, y) \simeq \mu i\left(|x_i - y_i| \underset{\mathscr{P}}{>} 2^{-i+1}\right).$$

Нетрудно убедиться, что алгорифм Nr действительно обладает свойствами 1)—4).

Лемма 5. *Можно построить алгорифм* $\mathrm{sgn}^{(2)}$ *типа* $(\mathscr{D}^2 \dot{\to} Ц)$ *такой, что для любых КДЧ* x *и* y *выполняется*

1) *если* $!\mathrm{sgn}^{(2)}(x, y)$, *то* $\mathrm{sgn}^{(2)}(x, y) \doteq 1$ *или* $\mathrm{sgn}^{(2)}(x, y) \doteq -1$;

2) $x < y \equiv \mathrm{sgn}^{(2)}(x, y) \doteq 1$;

3) $x > y \equiv \mathrm{sgn}^{(2)}(x, y) \doteq -1$;

4) $x = y \equiv \neg\, !\mathrm{sgn}^{(2)}(x, y)$.

Доказательство. Используя разрешимость отношения $\underset{\mathscr{P}}{>}$, построим алгорифм $\mathrm{sgn}^{(2)}$ такой, что если $!\mathrm{sgn}^{(2)}(x, y)$, то $!\mathrm{Nr}(x, y)$ и

$$\mathrm{sgn}^{(2)}(x, y) \simeq$$
$$\simeq \begin{cases} 1, & \text{если } !\mathrm{Nr}(x, y) \text{ и } y_{\mathrm{Nr}(x,y)} - x_{\mathrm{Nr}(x,y)} > 2^{-\mathrm{Nr}(x,y)+1}, \\ -1, & \text{если } !\mathrm{Nr}(x, y) \text{ и } x_{\mathrm{Nr}(x,y)} - y_{\mathrm{Nr}(x,y)} > 2^{-\mathrm{Nr}(x,y)+1}. \end{cases}$$

Покажем, что алгорифм $\mathrm{sgn}^{(2)}$ обладает требуемыми свойствами.

Если $!\mathrm{sgn}^{(2)}(x, y)$, то $!\mathrm{Nr}(x, y)$. Следовательно,

$$|y_{\mathrm{Nr}(x,y)} - x_{\mathrm{Nr}(x,y)}| \underset{\mathscr{P}}{>} 2^{-\mathrm{Nr}(x,y)+1}. \tag{62}$$

Ввиду разрешимости отношения $\underset{\mathscr{P}}{>}$ можно указать верное из утверждений

$$y_{\mathrm{Nr}(x,y)} - x_{\mathrm{Nr}(x,y)} > 2^{-\mathrm{Nr}(x,y)+1}, \tag{63}$$

$$x_{\mathrm{Nr}(x,y)} - y_{\mathrm{Nr}(x,y)} > 2^{-\mathrm{Nr}(x,y)+1}. \tag{64}$$

Если выполняется (63), то, очевидно, $\mathrm{sgn}^{(2)}(x, y) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 1$, если же верно (64), то $\mathrm{sgn}^{(2)}(x, y) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} -1$. Свойство 1) доказано.

Если $x < y$, то по лемме 6 $!\,\mathrm{Nr}(x, y)$ и выполняется (63). Следовательно, $\mathrm{sgn}^{(2)}(x, y) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 1$. Если $\mathrm{sgn}^{(2)}(x, y) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 1$, то $!\,\mathrm{Nr}(x, y)$ и, следовательно, выполняется (62). Из построения $\mathrm{sgn}^{(2)}$ очевидно, что (64) в данном случае не выполняется. Следовательно, имеет место (63), откуда и следует, что $x < y$. Свойство 3) доказывается совершенно аналогично.

Докажем свойство 4). Если $x = y$, то $\urcorner\, !\mathrm{Nr}(x, y)$ и, следовательно, $\urcorner\, !\mathrm{sgn}^{(2)}(x, y)$. Пусть теперь $\urcorner\, !\mathrm{sgn}^{(2)}(x, y)$. Тогда, ввиду уже установленных свойств 2) и 3) алгорифма $\mathrm{sgn}^{(2)}$, выполняется $\urcorner(x < y)$ и $\urcorner(x > y)$, т. е. выполняется $x \leqslant y$ и $x \geqslant y$. Отсюда согласно теореме 17 следует, что $x = y$. Этим и заканчивается доказательство леммы.

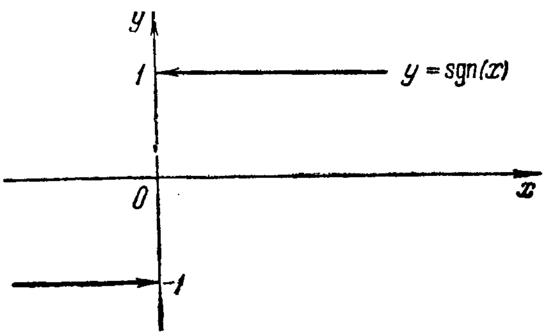


Рис. 7.

Алгорифм $\widehat{\mathrm{sgn}_0^{(2)}}$ мы в дальнейшем будем обозначать через sgn. Свойства этого алгорифма напоминают свойства классической сигнум-функции (ср. рис. 7), причем в отличие от последней алгорифм sgn неприменим ни к какому КДЧ, равному 0. Ниже будет показано, что это обстоятельство является существенным, так что классическая сигнум-функция является в этом смысле невычислимой.

В доказательствах следующих двух лемм используется принцип Маркова.

Лемма 6. *Если* $x \neq y$, *то* $!\,\mathrm{Nr}(x, y)$.

Доказательство. Предположим, что $\neg\, !\,\mathrm{Nr}(x, y)$. Тогда, ввиду леммы 4, $x = y$, что неверно. Следовательно, $\neg\neg !\mathrm{Nr}(x, y)$, откуда по принципу Маркова следует, что $!\,\mathrm{Nr}(x, y)$.

Лемма 7. *Если* $x \neq y$, *то* $!\,\mathrm{sgn}^{(2)}(x, y)$. (*В частности, если* $x \neq 0$, *то* $!\,\mathrm{sgn}(x)$.)

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству леммы 6.

9. Теорема 19. $\forall xy\,((x \neq y) \supset ((x > y) \vee (x < y)))$.

Доказательство. Теорема 19 утверждает существование алгорифма α такого, что для любых КДЧ x и y, если

$$x \neq y, \quad \text{то} \quad !\alpha(x, y), \quad \alpha(x, y) \doteq 1 \quad \text{или} \quad \alpha(x, y) \doteq 2$$

и

$$(\alpha(x, y) \doteq 1) \supset (x > y), \quad (\alpha(x, y) \doteq 2) \supset (x < y).$$

Возможность построения такого алгорифма непосредственно усматривается из лемм 5 и 7. Теорема 19, таким образом, доказывается с использованием принципа Маркова.

Значение следующих двух теорем состоит в том, что они позволяют в ряде случаев «конструктивизировать» классические доказательства, содержащие разбор случаев $x \neq y$ или $x = y$.

Теорема 20. $\forall xy\,((x < y) \supset \forall z\,((z < y) \vee (z > x)))$.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы нужно построить алгорифм $\mathfrak{B}$ такой, что для любых КДЧ x, y, z и натурального n, если $y_n - x_n > 2^{-n+1}$, то

$$!\mathfrak{B}(x, y, n, z), \quad \mathfrak{B}(x, y, n, z) \doteq 1 \quad \text{или} \quad \mathfrak{B}(x, y, n, z) \doteq 2,$$

причем, если $\mathfrak{B}(x, y, n, z) \doteq 1$, то $z < y$, и если $\mathfrak{B}(x, y, n, z) \doteq 2$, то $z > x$, Построим (пользуясь леммой 2) алгорифм β, перерабатывающий всякое слово вида x, y, n такое, что

(65) $$y_n - x_n > 2^{-n+1},$$

в натуральное число, для которого

(66) $$y_n - x_n > 2^{-n+1} + 2^{-\beta(x, y, n)}.$$

Построим далее алгорифм $\mathfrak{B}$ такой, что для любого слова вида x, y, n, z, для которого выполняется (65),

$$\mathfrak{B}(x, y, n, z) \simeq \begin{cases} 1, & \text{если} \quad z_{\beta(x, y, n)+2} \underset{\mathscr{P}}{\leqslant} \frac{x_n + y_n}{2}, \\ 2, & \text{если} \quad z_{\beta(x, y, n)+2} \underset{\mathscr{P}}{>} \frac{x_n + y_n}{2} \end{cases}$$

(алгорифм $\mathfrak{B}$ нетрудно построить, используя теорему об универсальном алгорифме, теоремы сочетания алгорифмов и разрешимость отношений $\underset{\mathscr{P}}{\leqslant}$, $\underset{\mathscr{P}}{>}$).

Покажем, что $\mathfrak{B}$ обладает требуемыми свойствами. Пусть x, y, z, n — слово такое, что выполняется (65). Тогда $!\beta(x, y, n)$. Следовательно, $!\mathfrak{B}(x, y, n, z)$ и $\mathfrak{B}(x, y, n, z) \doteqdot 1$ или $\mathfrak{B}(x, y, n, z) \doteqdot 2$. Обозначим на время доказательства $\beta(x, y, n)$ через l.

Пусть $\mathfrak{B}(x, y, n, z) \doteqdot 1$. Тогда, очевидно,

(67) $$z_{l+2} \leqslant \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Пусть теперь i — произвольное натуральное число, не меньшее, чем

$$\max(\overline{y}(n), \overline{z}(l+2)).$$

Тогда

(68) $$|\underline{y}(i) - y_n| < 2^{-n},$$

(69) $$|\underline{z}(i) - z_{l+2}| < 2^{-l-2}.$$

Кроме того, из (66) и (67) следует, что

(70) $$y_n - z_{l+2} > 2^{-n} + 2^{-l-1}.$$

Следовательно,

(71) $$\underline{y}(i) - \underline{z}(i) > 2^{-n} + 2^{-l-1} - 2^{-n} - 2^{-l-2} = 2^{-l-2},$$

Из (71) по теореме 10 следует, что $y > z$.

Аналогично доказывается, что из $\mathfrak{B}(x, y, n, z) \mathrel{\dot{=}} 2$ вытекает $z > x$.

Лемма 4 позволяет следующим образом усилить только что доказанную теорему.

Теорема 21. *Можно построить алгорифм* Рз, *перерабатывающий всякое слово вида* x, y, z, *где* $x < y$, *в* 1 *или в* 2 *и такой, что для любого слова указанного вида, если* $\text{Рз}(x, y, z) \mathrel{\dot{=}} 1$, *то* $z < y$, *и если* $\text{Рз}(x, y, z) \mathrel{\dot{=}} 2$, *то* $z > x$.

10. Следующая теорема позволяет использовать доказательства «от противного» при установлении отношений порядка между КДЧ.

Теорема 22. *Пусть* δ — *любой из знаков* $\underset{\mathscr{D}}{=}$, $\underset{\mathscr{D}}{>}$, $\underset{\mathscr{D}}{<}$, $\underset{\mathscr{D}}{\geqslant}$, $\underset{\mathscr{D}}{\leqslant}$. *Для любых КДЧ* x, y *имеет место*

$$\neg\neg(x\,\delta\,y) \equiv x\,\delta\,y.$$

Доказательство. Импликации $(x\,\delta\,y) \supset \neg\neg(x\,\delta\,y)$ очевидны. При доказательстве обратных импликаций достаточно ограничиться отношениями $\underset{\mathscr{D}}{\leqslant}$, $\underset{\mathscr{D}}{=}$, $\underset{\mathscr{D}}{<}$.

1) $\underset{\mathscr{D}}{\leqslant}$. По определению $\neg\neg(x \leqslant y)$ означает $\neg\neg\neg(x > y)$. Предположим, что $x > y$. Тогда выполняется $\neg\neg(x > y)$, что приводит к противоречию. Следовательно, $\neg(x > y)$, т. е. $x \leqslant y$, что и требуется.

2) $\underset{\mathscr{D}}{=}$. По определению 1 $\neg\neg(x \underset{\mathscr{D}}{=} y)$ означает

$$\neg\neg\forall n(|x_n - y_n| \underset{\mathscr{P}}{\leqslant} 2^{-n+1}). \tag{72}$$

Из (72) вытекает, что

$$\neg\exists n(|x_n - y_n| \underset{\mathscr{P}}{>} 2^{-n+1}). \tag{73}$$

Из (73) получаем

$$\forall n(\neg(|x_n - y_n| \underset{\mathscr{P}}{>} 2^{-n+1})). \tag{74}$$

Наконец, (74) можно записать так:

$$\forall n(|x_n - y_n| \underset{\mathscr{P}}{\leqslant} 2^{-n+1}).$$

Это и означает, что $x = y$.

3) $\underset{\mathscr{D}}{<}$. При доказательстве этой части теоремы (так же, как и при доказательстве соответствующего утверждения для отношения $\underset{\mathscr{D}}{>}$) используется принцип Маркова.

Для доказательства импликации $\neg\neg(x < y) \supset \supset (x < y)$ нужно построить алгорифм, перерабатывающий всякое слово вида x, y, где x и y — КДЧ, для которых выполняется $\neg\neg(x, y)$, в натуральное число $n_{x,\,y}$ такое, что

$$y_{n_{x,\,y}} - x_{n_{x,\,y}} > 2^{-n_{x,\,y}+1}.$$

Нетрудно убедиться, что этим свойством обладает алгорифм Nr, построенный согласно лемме 4.

В заключение данного пункта докажем теоремы, позволяющие совершать предельный переход в неравенствах.

Лемма 8. *Можно построить алгорифм G типа $(\mathscr{D} \dashrightarrow \mathscr{H})$ такой, что для любого КДЧ x*

1) $!G(x) \equiv x > 0$;

2) *если* $!G(x)$, *то* $x > 2^{-G(x)}$.

Доказательство. Пусть Nr — алгорифм, построенный согласно лемме 4. Пусть далее α — такой алгорифм, что для любого рационального числа r, если $r > 0$, то $\alpha(r) \doteqdot \Lambda$, и если $r \leqslant 0$, то $\neg\,!\,\alpha(r)$. Построим алгорифм $\overline{\mathrm{Nr}}$ такой, что для любых x, y

$$\overline{\mathrm{Nr}}\,(x, y) \simeq \mathrm{Nr}\,(x, y)\,\alpha\left(\left(y_{\mathrm{Nr}\,(x,\,y)} - x_{\mathrm{Nr}\,(x,\,y)} - 2^{-\mathrm{Nr}\,(x,\,y)+1}\right)\right).$$

Из утверждения 1) леммы 4 очевидно, что

$$(75) \qquad !\overline{\mathrm{Nr}}\,(x, y) \equiv x < y.$$

Очевидно также, что если $x < y$, то

$$(76) \qquad \overline{\mathrm{Nr}}\,(x, y) \doteqdot \mathrm{Nr}\,(x, y).$$

Построим алгорифм G такой, что

$$G(x) \simeq \overline{\mathrm{Nr}}\,(0, x) \underset{\mathscr{H}}{+} 1.$$

Алгорифм G обладает требуемыми свойствами.

Действительно, свойство 1) следует из (75). Докажем, что выполняется 2). Пусть $!G(x)$. Тогда $!\overline{\mathrm{Nr}}(0, x)$. Следовательно, $!\mathrm{Nr}(0, x)$ и $\overline{\mathrm{Nr}}(0, x) \mathrel{\dot{=}} \mathrm{Nr}(0, x)$. Далее

(77) $$x_{\mathrm{Nr}(0,\, x)} > 2^{-\mathrm{Nr}(0,\, x)+1}.$$

При любом $i \geqslant \overline{x}(\mathrm{Nr}(0, x))$

(78) $$|\underline{x}(i) - x_{\mathrm{Nr}(0,\, x)}| < 2^{-\mathrm{Nr}(0,\, x)}.$$

Из (77) и (78) получаем, что при таких i

(79) $$\underline{x}(i) > 2^{-\mathrm{Nr}(0,\, x)+1} - 2^{-\mathrm{Nr}(0,\, x)} = 2^{-\mathrm{Nr}(0,\, x)}.$$

Отсюда согласно теореме 11 следует, что

$$x \geqslant 2^{-\mathrm{Nr}(0,\, x)}.$$

Следовательно,

$$x > 2^{-\mathrm{Nr}(0,\, x)-1} \mathrel{\dot{=}} 2^{-G(x)},$$

что и требовалось.

Теорема 23. *Пусть x — КДЧ такое, что при любом n $x \leqslant 2^{-n}$.*

Тогда $x \leqslant 0$.

Доказательство. Предположим, что $x > 0$. Тогда $!G(x)$, $G(x)$ — натуральное число и $x > 2^{-G(x)}$, что противоречит условию. Следовательно, $\neg(x > 0)$, что и означает $x \leqslant 0$.

Теорема 24. *Пусть x — КДЧ такое, что $x \geqslant 0$ и при любом n $x \leqslant 2^{-n}$. Тогда $x = 0$.*

Доказательство. По теореме 23 имеем $x \leqslant 0$. Отсюда и из $x \geqslant 0$ по теореме 17 следует $x = 0$.

Аналогично теореме 23 может быть доказана следующая

Теорема 25. *Пусть x — КДЧ такое, что при любом n имеет место $-2^{-n} \leqslant x$. Тогда $x \geqslant 0$.*

Из теорем 23, 25 и 17 вытекает следующее утверждение.

Теорема 26. *Пусть x — КДЧ такое, что при любом n имеет место $-2^{-n} \leqslant x \leqslant 2^{-n}$. Тогда $x = 0$* *).

*) Запись $y \leqslant x \leqslant z$ понимается как сокращение записи $(y \leqslant x) \& (x \leqslant z)$.

§ 4. Арифметические операции над КДЧ

1. В основе построений этого параграфа лежит следующая лемма, несложное доказательство которой (использующее универсальный алгорифм, теоремы сочетания алгорифмов и теорему 16 (§ 1 гл. 1)) предоставляется читателю.

Лемма 1. *Каковы бы ни были алгорифмы* $\mathfrak{A}^1$, $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{A}^3$, *можно построить алгорифмы* $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{B}^3$, $\mathfrak{B}^4$ *так, что для любых КДЧ* x, y *и любого натурального* n

$$\mathfrak{B}^1(x, y, n) \simeq \mathfrak{A}^1(\underline{x}(\mathfrak{A}^2(n)), \underline{y}(\mathfrak{A}^3(n))),$$

$$\mathfrak{B}^2(x, y, n) \simeq \mathfrak{A}^1(\overline{x}(\mathfrak{A}^2(n)), \overline{y}(\mathfrak{A}^3(n))),$$

$$\mathfrak{B}^3(x, y) \simeq \{\widehat{\mathfrak{B}}^1_{x, y}\},$$

$$\mathfrak{B}^4(x, y) \simeq \{\widehat{\mathfrak{B}}^2_{x, y}\}.$$

2. Операции сложения, вычитания; абсолютная величина. Определение 1. *Будем говорить, что ПРЧ* α *является суммой (разностью) ПРЧ* α_1, α_2, *если при любом* n

$$\alpha(n) \underset{\mathscr{P}}{=} \alpha_1(n) \underset{\mathscr{P}}{+} \alpha_2(n)$$

(соответственно

$$\alpha(n) \underset{\mathscr{P}}{=} \alpha_1(n) \underset{\mathscr{P}}{-} \alpha_2(n)).$$

Лемма 2. *Пусть* α_1, α_2, α — *ПРЧ, причем* α *является суммой (разностью) ПРЧ* α_1, α_2. *Пусть далее* β_1, β_2 — *регуляторы фундаментальности соответственно* α_1 *и* α_2, *а* β — *ПНЧ такая, что при любом* n

$$\beta(n) \underset{\mathscr{H}}{=} \max(\beta_1(n+1), \beta_2(n+1)). \tag{1}$$

Тогда β — *регулятор фундаментальности* α.

Доказательство. Рассмотрим, например, случай, когда α является суммой α_1 и α_2. Фиксируем произволное n. Пусть i, $k \geqslant \beta(n)$. Ввиду (1) тогда

$$|\alpha_1(k) - \alpha_1(i)| < 2^{-n-1} \tag{2}$$

и

$$|\alpha_2(k) - \alpha_2(i)| < 2^{-n-1}. \tag{3}$$

Далее

$$|\alpha(k)-\alpha(i)| \underset{\mathscr{P}}{=} |\alpha_1(k)+\alpha_2(k)-\alpha_1(i)-\alpha_2(i)| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha_1(k)-\alpha_1(i)|+|\alpha_2(k)-\alpha_2(i)|<2^{-n},$$

что и требовалось.

Пользуясь леммой 1, построим алгорифмы $\text{сл}^{(1)}$ и $\text{вч}^{(1)}$ такие, что для любых КДЧ x, y и любого n

$$\text{сл}^{(1)}(x, y, n) \simeq \underline{x}(n) \underset{\mathscr{P}}{+} \underline{y}(n),$$

$$\text{вч}^{(1)}(x, y, n) \simeq \underline{x}(n) \underset{\mathscr{P}}{-} \underline{y}(n).$$

Построим также алгорифм $\text{рег}^{(\pm)}$ такой, что

$$\text{рег}^{(\pm)}(x, y, n) \simeq \max_{\mathscr{H}}(\overline{x}(n+1), \overline{y}(n+1)).$$

Построим далее (согласно той же лемме 1) алгорифмы $\text{сл}^{(2)}$, $\text{вч}^{(2)}$, $\overline{\text{рег}}^{(\pm)}$ такие, что

$$\text{сл}^{(2)}(x, y) \doteq \{\widehat{\text{сл}}^{(1)}_{x, y}\},$$

$$\text{вч}^{(2)}(x, y) \doteq \{\widehat{\text{вч}}^{(1)}_{x, y}\},$$

$$\overline{\text{рег}}^{(\pm)}(x, y) \doteq \{\widehat{\text{рег}}^{(\pm)}_{x, y}\}.$$

Построим далее по теореме объединения алгорифмы $\text{сл}^{(3)}$ и $\text{вч}^{(3)}$ такие, что

$$\text{сл}^{(3)}(x, y) \doteq \text{сл}^{(2)}(x, y) \diamondsuit \overline{\text{рег}}^{(\pm)}(x, y),$$

$$\text{вч}^{(3)}(x, y) \doteq \text{вч}^{(2)}(x, y) \diamondsuit \overline{\text{рег}}^{(\pm)}(x, y).$$

Пусть теперь $\mathfrak{C}$ — алгорифм, применимый к любому слову вида P_1, P_2, где P_1 и P_2 — слова в $Ч$, такой, что $\mathfrak{C}(P_1, P_2) \doteq \Lambda$ тогда и только тогда, когда P_1 и P_2 — рациональные числа.

Пользуясь теоремой разветвления и теоремой о переводе, построим алгорифмы $\underset{\mathscr{D}}{+}$ и $\underset{\mathscr{D}}{-}$ в $Ч^a$ такие, что для любых КДЧ x, y

$$\underset{\mathscr{D}}{+}(x, y) \simeq \begin{cases} x \underset{\mathscr{P}}{+} y, & \text{если} \quad \mathfrak{C}(x, y) \doteq \Lambda, \\ \text{сл}^{(3)}(x, y), & \text{если} \quad \mathfrak{C}(x, y) \not\doteq \Lambda; \end{cases}$$

$$\underset{\mathscr{D}}{-}(x, y) \simeq \begin{cases} x \underset{\mathscr{P}}{-} y, & \text{если} \quad \mathfrak{C}(x, y) \doteq \Lambda, \\ \text{вч}^{(3)}(x, y), & \text{если} \quad \mathfrak{C}(x, y) \not\doteq \Lambda. \end{cases}$$

Ввиду леммы 2 алгорифмы $\underset{\mathscr{D}}{+}$ и $\underset{\mathscr{D}}{-}$ являются алгорифмами типа $(\mathscr{D}^2 \to \mathscr{D})$. Эти алгорифмы мы будем называть операциями сложения и вычитания конструктивных действительных чисел.

Определение 2. *Будем говорить, что ПРЧ α является абсолютной величиной (или модулем) ПРЧ α_1, если при любом n*

$$\alpha(n) \underset{\mathscr{P}}{=} |\alpha_1(n)|_{\mathscr{P}}.$$

Лемма 3. *Пусть α — ПРЧ, являющаяся модулем ПРЧ α_1, и ПНЧ β_1 является регулятором фундаментальности α_1. Тогда β_1 есть регулятор фундаментальности α.*

Доказательство. Фиксируем произвольное n. Пусть $i, j \geqslant \beta_1(n)$. Тогда

$$|\alpha(j) - \alpha(i)| \underset{\mathscr{P}}{=} \| \alpha_1(j) | - | \alpha_1(i) \| \leqslant | \alpha_1(j) - \alpha_1(i) | < 2^{-n},$$

что и требуется.

Построим алгорифм M такой, что для всех x, n

$$M(x, n) \simeq \underset{\mathscr{P}}{\mathrm{mod}}(\underline{x}(n)).$$

Построим далее алгорифм $\underset{\mathscr{D}}{\mathrm{mod}}$ такой, что

$$\underset{\mathscr{D}}{\mathrm{mod}}(x) \simeq \begin{cases} |x|_{\mathscr{P}}, & \text{если } x \text{ является рациональным числом,} \\ \xi \widehat{M}_x \zeta \lozenge \xi \overline{x} \zeta, & \text{если } x \text{ не является рациональным числом.} \end{cases}$$

Ввиду леммы 3, алгорифм $\underset{\mathcal{D}}{\mathrm{mod}}$ является алгорифмом типа $(\mathcal{D} \to \mathcal{D})$.

Непосредственно из определений алгорифмов $\underset{\mathcal{D}}{+}$, $\underset{\mathcal{D}}{-}$ и $\underset{\mathcal{D}}{\mathrm{mod}}$ устанавливается следующая

Лемма 4. *Для любых КДЧ x, y и любого n*

1) $\underbrace{\underset{\mathcal{D}}{+}(x, y)}(n) \underset{\cdot}{=} \underline{x}(n) \underset{\mathcal{P}}{+} \underline{y}(n)$;

2) $\underbrace{\underset{\mathcal{D}}{-}(x, y)}(n) \underset{\cdot}{=} \underline{x}(n) \underset{\mathcal{P}}{-} \underline{y}(n)$;

3) $\underbrace{\underset{\mathcal{D}}{\mathrm{mod}}(x)}(n) \underset{\cdot}{=} |\underline{x}(n)|_{\mathcal{P}}$;

4) $\overbrace{\underset{\mathcal{D}}{\mathrm{mod}}(x)}(n) \underset{\cdot}{=} \overline{x}(n)$.

Вместо записей $\underset{\mathcal{D}}{+}(x, y)$, $\underset{\mathcal{D}}{-}(x, y)$ и $\underset{\mathcal{D}}{\mathrm{mod}}(x)$ мы будем часто использовать записи $x \underset{\mathcal{D}}{+} y$, $x \underset{\mathcal{D}}{-} y$ и $|x|_{\mathcal{D}}$, причем в тех случаях, когда это не ведет к недоразумениям, индекс «$\mathcal{D}$» будет опускаться.

3. Операции умножения, деления, $\underset{\mathcal{D}}{\mathbf{max}}$, $\underset{\mathcal{D}}{\mathbf{min}}$. Определение 3. *Будем говорить, что ПРЧ α является произведением ПРЧ α_1, α_2, если при всех n*

$$\alpha(n) \underset{\mathcal{P}}{=} \alpha_1(n) \underset{\mathcal{P}}{\cdot} \alpha_2(n).$$

Лемма 5. *Пусть ПРЧ α является произведением ПРЧ α_1, α_2, ПНЧ β_1, β_2 являются регуляторами фундаментальности α_1 и α_2. Пусть далее k — натуральное число и β — ПНЧ такие, что при любом n*

$$|\alpha_1(n)| < 2^k,$$

$$|\alpha_2(n)| < 2^k$$

и

$$\beta(n) \underset{\cdot}{=} \underset{\mathcal{K}}{\max}(\beta_1(n+k+1), \beta_2(n+k+1)).$$

Тогда β есть регулятор фундаментальности ПРЧ α, Доказательство. Фиксируем произвольное n. Пусть $i, j \geqslant \beta(n)$. Тогда

$$|\alpha(i)-\alpha(j)|=|\alpha_1(i)\cdot\alpha_2(i)-\alpha_1(j)\cdot\alpha_2(j)|=$$
$$=|\alpha_1(i)\cdot(\alpha_2(i)-\alpha_2(j))+\alpha_2(j)\cdot(\alpha_1(i)-\alpha_1(j))|\leqslant$$
$$\leqslant|\alpha_1(i)|\cdot|\alpha_2(i)-\alpha_2(j)|+|\alpha_2(j)|\cdot|\alpha_1(i)-\alpha_1(j)|<$$
$$<2^k\cdot 2^{-k-n-1}+2^k\cdot 2^{-k-n-1}=2^{-n},$$

что и требуется.

Лемма 6. *Можно построить алгорифм G^+ типа $(\mathscr{D}\to\mathscr{H})$ такой, что для любого x и n*

1) $$|x|<2^{G^+(x)};$$

2) $$|\underline{x}(n)|<2^{G^+(x)}.$$

Доказательство. Построим алгорифм λ_1 такой, что для любого рационального r

$$\lambda_1(r)\doteqdot|\underline{r}|$$

(обозначения $\underline{r}$ и $\bar{r}$ введены на стр. 121; $\underline{r}$ обозначает «числитель» r).

При любом r

(4) $$|r|<2^{\lambda_1(r)}.$$

Построим алгорифм λ_2 так, что

$$\lambda_2(x)\simeq|\underline{x}(\bar{x}(0))|+3.$$

Очевидно, λ_2 является алгорифмом типа $(\mathscr{D}\to\mathscr{P})$ и, ввиду леммы 4,

(5) $$\lambda_2(x)>|x|.$$

Построим алгорифм G' так, что

$$G'(x)\simeq\lambda_1(\lambda_2(x)).$$

Этот алгорифм является алгорифмом типа $(\mathscr{D}\to\mathscr{H})$ и, ввиду (4)—(5), при любом x

(6) $$|x|<2^{G'(x)}.$$

Искомый алгорифм G^+ строим теперь так, чтобы выполнялось

$$G^+(x)\doteqdot\max_{\mathscr{H}}(G'(x),\ \lambda_1(\underline{x}(0)),\ \ldots,\ \lambda_1(\underline{x}(\bar{x}(0)))).$$

Свойство 1) очевидным образом следует из (6). Докажем свойство 2). Если $n \leqslant \overline{x}(0)$, то, очевидно,

$$|\underline{x}(n)| < 2^{\lambda_1(\underline{x}(n))} \leqslant 2^{G^+(x)}.$$

Если же $n > \overline{x}(0)$, то

$$\| \underline{x}(n) | - | \underline{x}(\overline{x}(0)) \| \leqslant | \underline{x}(n) - \underline{x}(\overline{x}(0)) | < 1.$$

Следовательно,

$$|\underline{x}(n)| < \lambda_2(x) < 2^{G'(x)} \leqslant 2^{G^+(x)}.$$

Лемма доказана.

Построим теперь (пользуясь леммой 1) алгорифмы умн$^{(1)}$ и рег$^{(\cdot)}$ такие, что для любых КДЧ x и y

$$\text{умн}^{(1)}(x, y, n) \simeq \underline{x}(n) \underset{\mathscr{P}}{\cdot} \underline{y}(n),$$

$$\text{рег}^{(\cdot)}(x, y, n) \simeq \max_{\mathscr{H}}(\overline{x}(n + \max_{\mathscr{H}}(G^+(x), G^+(y)) + 1),$$
$$\overline{y}(n + \max_{\mathscr{H}}(G^+(x), G^+(y)) + 1))$$

Ввиду лемм 5 и 6 алгорифм $\widehat{\text{рег}}^{(\cdot)}_{x, y}$ является регулятором фундаментальности ПРЧ $\widehat{\text{умн}}_{x, y}$.

Построим алгорифм $\underset{\mathscr{D}}{\cdot}$ такой, что для любых КДЧ x, y

$$\underset{\mathscr{D}}{\cdot}(x, y) \simeq \begin{cases} x \underset{\mathscr{P}}{\cdot} y, & \text{если } x \text{ и } y \text{ — рациональные числа,} \\ \{\widehat{\text{умн}}^{(1)}_{x, y}\} \diamond \{\widehat{\text{рег}}^{(\cdot)}_{x, y}\}, & \text{если хотя бы одно из } x, y \text{ не является рациональным числом.} \end{cases}$$

Алгорифм $\underset{\mathscr{D}}{\cdot}$ будем называть *операцией умножения* КДЧ. Из сказанного выше следует, что $\underset{\mathscr{D}}{\cdot}$ является алгорифмом типа $(\mathscr{D}^2 \to \mathscr{D})$.

Из определения алгорифма $\underset{\mathscr{D}}{\cdot}$ непосредственно усматривается следующая

Лемма 7. *Для любых КДЧ x, y и любого n*

$$\underbracket{\underset{\mathscr{D}}{\cdot}(x, y)}(n) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \underset{\smile}{x}(n) \underset{\mathscr{P}}{\cdot} \underset{\smile}{y}(n).$$

Переходим к определению операции деления.

Лемма 8. *Можно построить алгорифмы G^- и $\bar{G}^-$ типа $(\mathscr{D} \to \mathscr{H})$ так, что для любого КДЧ x*

1) $!G^-(x) \equiv x \neq 0$, *и если* $!G^-(x)$, *то* $|x| > 2^{-G^-(x)}$;

2) *если* $x \neq 0$, *то* $!\bar{G}^-(x)$, *и* $|\underset{\smile}{x}(i)| > 2^{-\bar{G}^-(x)}$ *при* $i \geqslant \bar{G}^-(x)$.

Доказательство. В качестве G^- можно взять такой алгорифм, что

$$G^-(x) \simeq G(\underset{\mathscr{D}}{\mathrm{mod}}(x)),$$

где G — алгорифм, построенный согласно лемме 8 § 3. Утверждение 1) вытекает (с применением принципа Маркова) из леммы 8 § 3 и теоремы 2 (стр. 159). Алгорифм $\bar{G}^-$ строим так, чтобы

$$\bar{G}^-(x) \simeq \bar{x}\left(G^-(x) - 1\right).$$

Выполнение утверждения 2) для определенного таким образом алгорифма $\bar{G}^-$ уже фактически установлено в доказательстве леммы 8 § 3 (см. утверждения (75), (76) и (79) этого доказательства).

Определение 4. *Будем говорить, что ПРЧ α является обратной для ПРЧ α_1, если при любом n*

$$\alpha(n) \underset{\mathscr{P}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_1(n) \underset{\mathscr{P}}{=} 0, \\ 1 \underset{\mathscr{P}}{:} \alpha_1(n), & \text{если } \alpha_1(n) \underset{\mathscr{P}}{\neq} 0. \end{cases}$$

Лемма 9. *Пусть ПРЧ α является обратной для α_1, ПНЧ β_1 является регулятором фундаментальности α_1 и натуральные числа n, k таковы, что при $i \geqslant k$*

$$|\alpha_1(i)| > 2^{-n}.$$

Пусть далее ПНЧ β такова, что при любом l

$$\beta(l) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \max(k, \beta_1(l + 2 \cdot n)).$$

Тогда β *является регулятором фундаментальности ПРЧ* α.

Доказательство. Пусть $l, j \geqslant \beta(l)$. Тогда, так как $\beta(l) \geqslant k$ и $\beta(l) \geqslant \beta_1(l + 2 \cdot n)$, имеет место *)

$$|\alpha(i) - \alpha(j)| = \left| \frac{\alpha_1(j) - \alpha_1(i)}{\alpha_1(i) \cdot \alpha_1(j)} \right| =$$

$$= \frac{|\alpha_1(j) - \alpha_1(i)|}{|\alpha_1(i)| \cdot |\alpha_1(j)|} < \frac{2^{-l-2\cdot n}}{2^{-2\cdot n}} = 2^{-l},$$

что и требовалось.

Построим алгорифмы обр$^{(1)}$ и рег$^{(1)}$ такие, что для любого КДЧ x и любого n

$$\text{обр}^{(1)}(x, n) \simeq \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \underset{\smile}{x}(n) \underset{\mathscr{P}}{=} 0, \\ 1 \underset{\mathscr{P}}{:} \underset{\smile}{x}(n), & \text{если} \quad \underset{\smile}{x}(n) \underset{\mathscr{P}}{\neq} 0; \end{cases}$$

$$\text{рег}^{(1)}(x, n) \simeq \max\left(\overline{x}\left(n + 2 \cdot G^{-}(x)\right), \overline{G}^{-}(x)\right).$$

Используя лемму 8, легко построить алгорифм λ так, что при любом КДЧ x

$$!\lambda(x) \equiv x \neq 0,$$

и если $!\lambda(x)$, то $\lambda(x) \mathrel{\overline{\overline{}}} \Lambda$.

Построим теперь алгорифм обр так, что **)

$$\text{обр}(x) \simeq \lambda(x) \,\mathcal{E}\, \widehat{\text{обр}_x^{(1)}} \,\mathcal{Z} \diamond \mathcal{E}\, \widehat{\text{рег}_x^{(1)}} \,\mathcal{Z}.$$

Из леммы 9 и определения λ получаем следующее утверждение.

Лемма 10. *Алгорифм* обр *является алгорифмом типа* $(\mathscr{D} \dot{\rightarrow} \mathscr{D})$ *и при любом КДЧ* x

$$!\text{обр}(x) \equiv x \neq 0.$$

Кроме того, из леммы 8 следует

---

*) Запись $\frac{r_1}{r_2}$ понимается как $r_1 \underset{\mathscr{P}}{:} r_2$.

**) Алгорифм λ введен для того, чтобы алгорифм обр (а затем и алгорифм деления) оказался конструктивной функцией (см. § 1 гл. 5).

Лемма 11. *Если* $!\text{обр}(x)$, *то* $!\overline{G}^{-}(x)$, *и при* $i \geqslant \overline{G}^{-}(x)$

$$\underbrace{\text{обр}(x)}(i) \mathrel{\dot{=}} 1 \mathop{:}_{\mathscr{P}} \underline{x}(i).$$

Построим алгорифм $\mathop{:}_{\mathscr{D}}$ так, что

$$\mathop{:}_{\mathscr{D}}(x, y) \simeq \begin{cases} x \mathop{:}_{\mathscr{P}} y, & \text{если } x \text{ и } y \text{ — рациональные числа,} \\ \mathop{\cdot}_{\mathscr{D}}(x, \text{обр}(y)), & \text{если хотя бы одно из } x, y \text{ не есть рациональное число.} \end{cases}$$

Этот алгорифм, очевидно, является алгорифмом типа $(\mathscr{D}^2 \dot{\to} \mathscr{D})$.

Лемма 12. *Каковы бы ни были КДЧ x и y,*

$$!\mathop{:}_{\mathscr{D}}(x, y) \equiv y \neq 0.$$

Из леммы 11 и леммы 7 вытекает следующее утверждение.

Лемма 13. *Каковы бы ни были КДЧ x и y, если* $!\mathop{:}_{\mathscr{D}}(x, y)$, *то* $!\overline{G}^{-}(y)$, *и при всех* $i \geqslant \overline{G}^{-}(y)$

$$\underbrace{\mathop{:}_{\mathscr{D}}(x, y)}(i) \mathrel{\dot{=}} \underline{x}(i) \mathop{:}_{\mathscr{P}} \underline{y}(i).$$

Алгорифм $\mathop{:}_{\mathscr{D}}$ мы будем называть *операцией деления* КДЧ. Вместо записей $\mathop{\cdot}_{\mathscr{D}}(x, y)$ и $\mathop{:}_{\mathscr{D}}(x, y)$ мы будем часто использовать запись $x \mathop{\cdot}_{\mathscr{D}} y$ и $x \mathop{:}_{\mathscr{D}} y$ или даже $x \cdot y$ и $x : y$. Вместо записи $x : y$ будет также использоваться запись $\frac{x}{y}$.

Построим алгорифмы $\min\limits_{\mathscr{D}}$ и $\max\limits_{\mathscr{D}}$ такие, что для любых КДЧ x и y

$$\max_{\mathscr{D}}(x, y) = \frac{(x+y) + |x-y|}{2},$$

$$\min_{\mathscr{D}}(x, y) = \frac{(x+y) - |x-y|}{2}.$$

Очевидно, алгорифмы $\max\limits_{\mathscr{D}}$ и $\min\limits_{\mathscr{D}}$ являются алгорифмами типа $(\mathscr{D}^2 \to \mathscr{D})$.

Индекс «$\mathscr{D}$» в записи $\max\limits_{\mathscr{D}}(x, y)$, $\min\limits_{\mathscr{D}}(x, y)$, как правило, опускается.

Вполне очевидна следующая

Лемма 14. *Каковы бы ни были КДЧ x, y и натуральное n,*

$$\underline{\max(x, y)}(n) \underset{\mathscr{P}}{=} \max_{\mathscr{P}}(\underline{x}(n), \underline{y}(n)),$$

$$\underline{\min(x, y)}(n) \underset{\mathscr{P}}{=} \min_{\mathscr{P}}(\underline{x}(n), \underline{y}(n)).$$

Множество $\mathscr{D}$ вместе с определенными на нем отношениями равенства и порядка мы будем иногда называть *конструктивным континуумом* или *конструктивной прямой* (*осью*). КДЧ будут иногда называться точками.

4. Изложенные в § 3 свойства отношений равенства и порядка позволяют без труда установить ряд обычных свойств арифметических операций. Можно показать (предоставляем это читателю), что все введенные операции сохраняют равенство КДЧ (т. е. являются конструктивными функциями в смысле § 1 гл. 5). Операции сложения, умножения и деления удовлетворяют аксиомам поля, имеют место обычные правила обращения с неравенствами (ср. теорема 6 § 1) и т. д. Объем книги не позволяет подробно остановиться на этих вопросах, и мы ограничимся несколькими примерами.

Теорема 1. *Каковы бы ни были КДЧ x, y, z*

1) $x + (y + z) \underset{\mathscr{D}}{=} (x + y) + z$;

2) $x + y \underset{\mathscr{D}}{=} y + x$;

3) $x + 0 \underset{\mathscr{D}}{=} x$;

4) $x + (-x) \underset{\mathscr{D}}{=} 0$;

5) $x \cdot (y \cdot z) \underset{\mathscr{D}}{=} (x \cdot y) \cdot z$;

6) $x \cdot y \underset{\mathscr{D}}{=} y \cdot x$;

7) $x \cdot 1 \underset{\mathscr{D}}{=} x$;

8) *если* $x \underset{\mathscr{D}}{\neq} 0$, *то* $x \cdot \frac{1}{x} \underset{\mathscr{D}}{=} 1$;

9) $x \cdot (y + z) \underset{\mathscr{D}}{=} (x \cdot y) + (x \cdot z)$

(в утверждениях 4) и 8) через $(-x)$ и $\frac{1}{x}$ обозначены соответственно КДЧ $0 \underset{\mathscr{D}}{-} x$ и $1 \underset{\mathscr{D}}{:} x$).

Доказательства утверждений 1) — 9) совершенно идентичны. Установим, например, коммутативность сложения. Согласно лемме 4 при любом n

$$\underbrace{x+y}(n) \underset{\mathscr{P}}{=} \underline{x}(n) \underset{\mathscr{P}}{+} \underline{y}(n),$$

$$\underbrace{y+x}(n) \underset{\mathscr{P}}{=} \underline{y}(n) \underset{\mathscr{P}}{+} \underline{x}(n).$$

Отсюда, ввиду коммутативности операции $\underset{\mathscr{P}}{+}$, следует

$$\underbrace{x+y}(n) \underset{\mathscr{P}}{=} \underbrace{y+x}(n),$$

что на основании теоремы 9 п. 4 § 3 позволяет заключить о равенстве $x+y \underset{\mathscr{D}}{=} y+x$.

Теорема 2. *Каковы бы ни были КДЧ* x, y,

1) $|x| \geqslant 0$;
2) $|x| = 0 \equiv x = 0$;
3) *если* $x > 0$, *то* $|x| = x$;
4) *если* $x < 0$, *то* $|x| = -x$;
5) $\|x| - |y\| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Доказательство. Утверждение 2) непосредственно следует из леммы 4 и определения отношения $\underset{\mathscr{D}}{=}$. Доказательства 1) и 5) аналогичны. Докажем 1). По лемме 4

$$\underbrace{|x|}(n) \underset{\mathscr{P}}{=} |\underline{x}(n)| \underset{\mathscr{P}}{\geqslant} 0.$$

Следовательно (теорема 11 § 3), $|x| \geqslant 0$, что и требуется. Для доказательства 3) найдем по теореме 10 § 3 натуральные n и m такие, что при $i \geqslant m$

$$\underline{x}(i) > 2^{-n}.$$

Следовательно, при $i \geqslant m$

$$|\underline{x}(i)| \underset{\mathscr{P}}{=} \underline{x}(i).$$

Отсюда по лемме 4 и теореме 9 § 3 получаем $|x|=x$. Утверждение 4) доказывается аналогично.

Теорема 3. *При любых КДЧ x, y*

1) $\min(x, y) \leqslant x \leqslant \max(x, y)$;
2) $\min(x, y) \leqslant y \leqslant \max(x, y)$;
3) *невозможно, чтобы одновременно имело место*

$$\min(x, y) \neq x$$

и

$$\min(x, y) \neq y;$$

4) *то же, что и* 3), *с заменой* min *на* max. Доказательство этой теоремы предоставляется читателю.

§ 5. Рациональные числа в конструктивном континууме

Введем некоторые важные понятия.

Определение 1. *Слово вида $x \triangle y$ ($x \nabla y$), где x, y — КДЧ такие, что $x \leqslant y$ ($x < y$), назовем сегментом (интервалом). КДЧ x и y будем называть соответственно левым и правым концами сегмента $x \triangle y$ (соответственно интервала $x \nabla y$). Сегмент $x \triangle y$ (интервал $x \nabla y$) назовем рациональным, если x и y — рациональные числа.*

Ниже, в тех контекстах, где речь может идти безразлично о сегменте или интервале, мы будем употреблять термин «промежуток» и запись $x \between y$. Два промежутка называются одноименными, если они одновременно являются сегментами или интервалами.

Определение 2. *Будем говорить, что КДЧ z принадлежит сегменту $x \triangle y$ (интервалу $x \nabla y$), если $x \leqslant z \leqslant y$ (соответственно $x < z < y$). Принадлежность z данному промежутку $x \between y$ будет выражаться записью $z \in x \between y$.*

Нетрудно построить алгорифмы $K^{\text{л}}$ и $K^{\text{п}}$, перерабатывающие всякий промежуток соответственно в его левый и правый концы (ср. пример 6 п. 4 § 1 гл. 1).

Определение 3. *Будем говорить, что промежуток $x \between y$ включен (строго включен) в одноименный промежуток $x_1 \between y_1$, и писать $x \between y \subseteq x_1 \between y_1$ (соответственно $x \between y \subset x_1 \between y_1$), если $x \leqslant x_1$ и $y_1 \leqslant y$ (соответственно $x < x_1$ и $y_1 < y$).*

Аналогично можно было бы определить включение (строгое включение) и для разноименных промежутков.

Построим алгорифм Дл так, что для любого промежутка $x ⧖ y$

$$\text{Дл}(x ⧖ y) = y - x.$$

Определение 4. *КДЧ* Дл$(x ⧖ y)$ *называется длиной промежутка* $x ⧖ y$. *Сегмент* $x \triangle y$ *назовем вырожденным, если* Дл$(x \triangle y) = 0$, *и невырожденным, если* Дл$(x \triangle y) \neq 0$.

Длину промежутка $x ⧖ y$ мы будем часто обозначать посредством $|x ⧖ y|$.

Теорема 1. *Можно построить арифметически полный алгорифм, перечисляющий множество всех рациональных чисел.*

Эта теорема вытекает из разрешимости и бесконечности множества рациональных чисел.

Нам потребуется следующая, представляющая самостоятельный интерес,

Лемма 1. *Можно построить алгорифм, перерабатывающий всякий интервал* $x \triangledown y$ *в рациональный интервал, концы которого принадлежат* $x \triangledown y$.

Доказательство. Воспользуемся алгорифмами D^-, D^+, которые будут построены в лемме 2 § 3 гл. 3, и алгорифмом G, построенным согласно лемме 8 § 3. Искомый алгорифм β строим так, что

$$\beta(x \triangledown y) \simeq D^+(x, G(y-x)+1) \triangledown D^-(y, G(y-x)+1).$$

Требуемые свойства β легко устанавливаются на основании леммы 8 § 3 и леммы 2 § 3 гл. 3.

Теорема 2. *Можно построить алгорифм, перерабатывающий всякий интервал в рациональное число, принадлежащее этому интервалу.*

Теорема 3. *Можно построить алгорифм* γ *такой, что для любого интервала* $x \triangledown y$ *алгорифм* $\hat{\gamma}_{x \triangledown y}$ *является ПРЧ, причем:* 1) *при любом* i $\hat{\gamma}_{x \triangledown y}(i) \in x \triangledown y$; 2) *равенство* $\hat{\gamma}_{x \triangledown y}(i) \underset{\mathcal{P}}{=} \hat{\gamma}_{x \triangledown y}(j)$ *возможно лишь при* $i = j$.

Теорема 2 показывает, что множество рациональных чисел всюду плотно на конструктивной прямой, а теорема 3 — что множество различных (в смысле отношения $\underset{\mathcal{P}}{=}$) рациональных чисел, принадлежащих произвольному интервалу, бесконечно.

Теорема 4. *Можно построить алгорифм* σ *такой, что для любого интервала* $x \triangledown y$ *область определения* *алгорифма* $\hat{\sigma}_{x \nabla y}$ *относительно алфавита* Ч (см. п. 4 § 3 гл. 1) *есть множество рациональных чисел, принадлежащих* $x \nabla y$.

Доказательство. Построим алгорифм σ', применимый к слову Q в алфавите Ч тогда и только тогда, когда $Q \in \mathscr{P}$, и такой, что если $!\sigma'(Q)$, то $\sigma'(Q) \doteq Q$.

Легко видеть, что требуемыми свойствами обладает алгорифм σ такой, что

$$\sigma(x \nabla y, Q) \simeq G(\underset{\mathscr{D}}{-}(\sigma'(Q), x))\, G(\underset{\mathscr{D}}{-}(y, \sigma'(Q))).$$

Следствие 1. *Для любого интервала* $x \nabla y$ *множество рациональных чисел, принадлежащих этому интервалу, перечислимо* *).

Следствие 2. *Можно построить алгорифм* Рц *так, что*: 1) Рц *является арифметически полным алгорифмом, перечисляющим множество всех рациональных чисел*; 2) *для любого интервала* $x \nabla y$ $\widehat{\text{Рц}}_{x \nabla y}$ *является арифметически полным алгорифмом, перечисляющим множество рациональных чисел, принадлежащих* $x \nabla y$.

Замечание. Алгорифм Рц перечисляет множество рациональных чисел (множество рациональных чисел из данного интервала) заведомо с повторениями в том смысле, что для каждого рационального r при бесконечном числе значений i выполняется равенство $\text{Рц}(i) \underset{\mathscr{P}}{=} r$. Этот «дефект», однако, может быть устранен. Именно, аналогично теореме 2 п. 3 § 3 гл. 1 доказывается, что для каждого перечислимого множества рациональных чисел $\mathscr{M}$ осуществим стройный алгорифм α типа $(\mathscr{H} \to \mathscr{M})$ такой, что: 1) для любого $r \in \mathscr{M}$ найдется i, при котором $!\alpha(i)$ и $\alpha(i) \underset{\mathscr{P}}{=} r$; 2) равенство $\alpha(i) \underset{\mathscr{P}}{=} \alpha(j)$ возможно лишь при $i = j$.

Определение 5. *КДЧ* x *назовем иррациональным, если невозможно рациональное число* r *такое, что* $x \underset{\mathscr{D}}{=} r$.

Предоставляем читателю доказать, что для любого интервала множество иррациональных КДЧ, принадлежащих этому интервалу, неперечислимо и, более того, это множество эффективно несчетно (в смысле § 3 гл. 3).

*) Нетрудно убедиться, что для любого интервала множество рациональных чисел, принадлежащих этому интервалу, не может быть неразрешимым.

ГЛАВА 3

КОНСТРУКТИВНАЯ СХОДИМОСТЬ. ЭФФЕКТИВНАЯ НЕСЧЕТНОСТЬ КОНСТРУКТИВНОГО КОНТИНУУМА

В данной главе излагаются основные факты конструктивной теории сходимости. Эта теория, как будет видно из дальнейшего, наряду со значительным сходством с традиционной теорией пределов, имеет также значительные от нее отличия. Эти отличия, однако, связаны не столько с конкретными приложениями теории пределов (сходимость тех или иных используемых в анализе последовательностей и рядов), сколько с теоретическими вопросами (такими, как существование предела ограниченной монотонной последовательности).

В своей прикладной части (признаки сходимости, сходимость тех или иных конкретных последовательностей и рядов) конструктивная теория пределов почти аналогична традиционной теории и, по-видимому, в такой же или почти в такой же степени может обслуживать ее обычные приложения. Чтобы не пересказывать соответствующих разделов учебников анализа, мы почти не останавливаемся на этих вопросах, приводя лишь в качестве иллюстрации некоторые признаки сходимости рядов и определение числа e.

В последнем параграфе главы устанавливается конструктивный вариант теоремы Кантора о несчетности континуума.

§ 1. Основные определения. Первоначальные теоремы о пределах

Определение 1. *Последовательностью конструктивных действительных чисел (ПКДЧ или, короче, ПДЧ) называется алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в КДЧ.*

Определение 2. *Пусть α — ПДЧ. ПНЧ β называется* ***регулятором сходимости в себе*** *(или, короче,* *регулятором фундаментальности)* α, *если*

$$\forall nml\left(m,\ l \geqslant \beta(n) \supset |\alpha(m) - \alpha(l)| < 2^{-n}\right).$$

Определение 3. *ПДЧ* α *назовем фундаментальной (квазифундаментальной), если осуществим (неверно, что не существует) регулятор фундаментальности этой последовательности.*

Определение 4. *ПДЧ* α *назовем псевдофундаментальной, если*

$$\forall n \neg\neg \exists k \forall ml\left(m,\ l \geqslant k \supset |\alpha(m) - \alpha(l)| < 2^{-n}\right).$$

Определение 5. *Пусть* x — *КДЧ и алгорифм* α — *ПДЧ. ПНЧ* β *назовем регулятором сходимости ПДЧ* α *к КДЧ* x, *если*

$$\forall nm\left(m \geqslant \beta(n) \supset |\alpha(m) - x| < 2^{-n}\right).$$

Определение 6. *Будем говорить, что ПДЧ* α *сходится к КДЧ* x *(или что* x *является пределом ПДЧ* α*), если осуществим регулятор сходимости* α *к* x.

Определение 7. *ПДЧ назовем сходящейся, если осуществимо КДЧ, к которому сходится эта последовательность.*

Почти очевидны следующие три теоремы.

Теорема 1 (единственность предела). *Если ПДЧ* α *сходится к* КДЧ x *и* x_1, *то* $x = x_1$.

Теорема 2. *Пусть ПДЧ* α *сходится к КДЧ* x *и ПДЧ* α_1 *такова, что при любом* n

$$\alpha_1(n) = \alpha(n).$$

Тогда α_1 *сходится к* x. *(При этом всякий регулятор сходимости* α *к* x *является регулятором сходимости* α_1 *к* x.)

Теорема 3. *Пусть ПДЧ* α *сходится к* x *и* $x_1 = x$. *Тогда* α *сходится к* x_1. *(При этом всякий регулятор сходимости* α *к* x *является регулятором сходимости* α *к* x_1.)

Теорема 4. *Пусть ПДЧ* α_1 *и* α_2 *сходятся соответственно к* x_1 *и* x_2, *причем осуществимо* m *такое, что для любого* $n \geqslant m$

$$\alpha_1(n) \leqslant \alpha_2(n).$$

Тогда $x_1 \leqslant x_2$.

Доказательство. Пусть $x_1 > x_2$. Тогда по построению алгорифма G (лемма 8 § 3 гл. 2)

$$x_1 - x_2 > 2^{-G(x_1 - x_2)}. \tag{1}$$

Пусть δ_1, δ_2 — регуляторы сходимости соответственно α_1 и α_2 к x_1 и x_2.

Рассмотрим произвольное i такое, что

$$i \geqslant \max(\delta_1(G(x_1 - x_2) + 1),\ \delta_2(G(x_1 - x_2) + 1),\ m).$$

Тогда

$$|\alpha_1(i) - x_1| < 2^{-G(x_1 - x_2) - 1}, \tag{2}$$

$$|\alpha_2(i) - x_2| < 2^{-G(x_1 - x_2) - 1}. \tag{3}$$

Из (1) — (3) получаем

$$\alpha_1(i) - \alpha_2(i) > 0,$$

что противоречит условию.

Следствие 1. *Если ПДЧ α сходится к x и осуществимо m такое, что при любом $n \geqslant m$ $\alpha(n) \leqslant y$, то $x \leqslant y$. (Аналогично, если при $n \geqslant m$ $\alpha(n) \geqslant y$, то $x \geqslant y$.)*

Нетрудно также доказать следующее утверждение.

Теорема 5. *Если ПДЧ α_1, α_2 сходятся к одному и тому же КДЧ и ПДЧ α такова, что при любом n*

$$\min(\alpha_1(n), \alpha_2(n)) \leqslant \alpha(n) \leqslant \max(\alpha_1(n), \alpha_2(n)),$$

то α сходится к этому же КДЧ.

Определение 8. *Пусть α — ПДЧ.*

1) *Назовем α возрастающей (неубывающей), если при любом n*

$$\alpha(n+1) > \alpha(n)$$

(соответственно $\alpha(n+1) \geqslant \alpha(n)$).

2) *Назовем α убывающей (невозрастающей), если при любом n*

$$\alpha(n+1) < \alpha(n)$$

(соответственно $\alpha(n+1) \leqslant \alpha(n)$).

3) *Назовем α монотонной, если α является неубывающей или невозрастающей ПДЧ.*

Теорема 6. *Если неубывающая (невозрастающая) ПДЧ α сходится к КДЧ x, то для любого n*

$$\alpha(n) \leqslant x \qquad (\text{соответственно } \alpha(n) \geqslant x).$$

Доказательство. Пусть при некотором n_0

$$x < \alpha(n_0). \tag{4}$$

Тогда при $i \geqslant n_0$

$$x < \alpha(n_0) \leqslant \alpha(i). \tag{5}$$

Отсюда по следствию 1 получаем

$$x < \alpha(n_0) \leqslant x,$$

что невозможно.

Лемма 1. *Пусть алгорифм β является регулятором фундаментальности ПДЧ α. Тогда если α сходится к КДЧ x, то при любом $k \geqslant \beta(n)$*

$$|\alpha(k) - x| \leqslant 2^{-n}.$$

Доказательство. Пусть k, $i \geqslant \beta(n)$. Тогда

$$|\alpha(k) - \alpha(i)| < 2^{-n},$$

т. е.

$$\alpha(k) - 2^{-n} \leqslant \alpha(i) \leqslant \alpha(k) + 2^{-n}. \tag{6}$$

Отсюда согласно следствию 1 получаем

$$\alpha(k) - 2^{-n} \leqslant x \leqslant \alpha(k) + 2^{-n},$$

т. е.

$$|x - \alpha(k)| \leqslant 2^{-n},$$

что и требовалось.

Следующая теорема устанавливает простую связь между регуляторами сходимости и фундаментальности данной ПДЧ.

Теорема 7. *Пусть β и β' — ПНЧ такие, что при любом n $\beta'(n) \rightleftharpoons \beta(n+1)$. Тогда*

1) *если β есть регулятор фундаментальности ПДЧ α и α сходится к некоторому КДЧ, то β' есть регулятор сходимости α к этому КДЧ;*

2) *если β есть регулятор сходимости α к некоторому КДЧ, то β' является регулятором фундаментальности α.*

Доказательство. 1) Пусть β — регулятор фундаментальности ПДЧ α и α сходится к КДЧ x. Согласно лемме 1 при любом n и $k \geqslant \beta(n)$

$$|\alpha(k) - x| \leqslant 2^{-n}.$$

Следовательно, если $i \geqslant \beta'(n) \rightleftharpoons \beta(n+1)$, то

$$|\alpha(i) - x| \leqslant 2^{-n-1} < 2^{-n},$$

т. е. β' является регулятором сходимости α к x.

2) Пусть β — регулятор сходимости α к x. Фиксируем произвольное n. При $i, j \geqslant \beta'(n)$

$$|x - \alpha(i)| < 2^{-n-1},$$

$$|x - \alpha(j)| < 2^{-n-1},$$

откуда

$$|\alpha(i) - \alpha(j)| < 2^{-n},$$

что и требуется.

Теорема 8. *Для любого КДЧ x ПРЧ $\underline{x}$ сходится к x.*

Доказательство. Пусть β_x — алгорифм такой, что при любом n

$$\beta_x(n) \rightleftharpoons \overline{x}(n+1).$$

Тогда при любых $i, j \geqslant \beta_x(n)$

$$|\underline{x}(i) - \underline{x}(j)| < 2^{-n-1}. \tag{7}$$

Фиксируем j. Ввиду леммы 4 § 4 гл. 2 (7) можно записать так:

$$\underbrace{|x - \underline{x}(j)|}(i) < 2^{-n-1}.$$

Отсюда по теореме 11 § 3 гл. 2 следует, что

$$|x - \underline{x}(j)| \leqslant 2^{-n-1} < 2^{-n}.$$

Следовательно, алгорифм β_x является регулятором сходимости ПРЧ $\underline{x}$ к КДЧ x. Теорема доказана.

Могут быть установлены и обычные правила предельного перехода в сумме, разности, произведении и частном. Соответствующие формулировки и доказательства предоставляются читателю.

Как известно, часто удобно излагать теорию пределов не в терминах последовательностей, а в терминах рядов. Приведем соответствующие определения.

Определение 9. 1) *Пусть α — ПДЧ. ПДЧ α_1 называется числовым рядом с общим членом α, если при любом n*

$$\alpha_1(n) = \sum_{i=0}^{n} \alpha(i).$$

2) *ПНЧ β называется регулятором сходимости ряда α_1 к КДЧ x, если β является регулятором сходимости ПДЧ α_1 к x.*

3) *Будем говорить, что ряд сходится к КДЧ x (или что x является суммой данного ряда), если осуществим регулятор сходимости этого ряда к x.*

4) *Ряд назовем сходящимся, если осуществимо КДЧ x, к которому сходится этот ряд.*

Можно построить алгорифм $\sum$ такой, что для любой ПДЧ α алгорифм $\widehat{\sum}_{\{\alpha\}}$ является рядом с общим членом α. Этот ряд мы будем (чтобы сделать обозначения более привычными) обозначать через $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \alpha(i)$. Вообще, мы будем свободно пользоваться обычной символикой теории рядов, предоставляя читателю в каждом конкретном случае ее уточнение в духе определения 9.

Для рядов очевидным образом можно переформулировать теоремы 1—3. В частности, из сходимости какого-нибудь ряда с общим членом α следует сходимость любого другого ряда с общим членом α.

Нетрудно построить алгорифм $\text{mod}^{(\text{П})}$ (ср. § 4 гл. 2) такой, что для любой ПДЧ α при любом n

$$\text{mod}^{(\text{П})}(\{\alpha\}, n) \simeq |\alpha(n)|.$$

Определение 10. *Будем говорить, что ряд с общим членом α абсолютно сходится, если сходится ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \widehat{\text{mod}}^{(\text{П})}_{\{\alpha\}}(i).$$

§ 2. Полнота конструктивного континуума. Теорема о вложенных сегментах

1. Нам будут полезны следующие леммы.

Лемма 1. *Для любого КДЧ x при любом n*

$$|x - \underline{x}(\overline{x}(n))| \leqslant 2^{-n}.$$

Доказательство. Поскольку алгорифм $\overline{x}$ является регулятором фундаментальности ПДЧ $\underline{x}$ и в силу теоремы 8 § 1 $\underline{x}$ сходится к x, то лемма 1 непосредственно вытекает из леммы 1 § 1.

Лемма 2. *Можно построить алгорифмы D^- и D^+ типа $((\mathscr{D} \times \mathscr{H}) \to \mathscr{P})$ такие, что для любого КДЧ x и любого n*

$$D^-(x, n) < x < D^+(x, n)$$

и

$$D^+(x, n) - D^-(x, n) < 2^{-n}.$$

Доказательство. Используя теорему об универсальном алгорифме, построим алгорифмы D^- и D^+ такие, что

$$D^-(x, n) \simeq \underline{x}(\overline{x}(n+3)) - 2^{-n-2},$$

$$D^+(x, n) \simeq \underline{x}(\overline{x}(n+3)) + 2^{-n-2}.$$

Очевидно, D^- и D^+ являются алгорифмами типа $((\mathscr{D} \times \mathscr{H}) \to \mathscr{P})$ и для любых x, n

$$D^+(x, n) - D^-(x, n) = 2^{-n-1} < 2^{-n}.$$

Далее ввиду леммы 1

$$\underline{x}(\overline{x}(n+3)) - 2^{-n-3} \leqslant x \leqslant \underline{x}(\overline{x}(n+3)) + 2^{-n-3}.$$

Следовательно,

$$D^-(x, n) < x < D^+(x, n).$$

Алгорифмы D^- и D^+ обладают требуемыми свойствами.

Имеет место следующая важная

Теорема 1 (теорема о полноте конструктивного континуума). *Можно построить алгорифмы* $\underline{\lim}$ *и* $\underline{\lim}^{(1)}$

такие, что для любых ПДЧ α и ПНЧ β, если β — регулятор фундаментальности α, то

1) *алгорифм* lim *перерабатывает слово* $\{\alpha\}, \{\beta\}$ *в КДЧ;*

2) *алгорифм* $\widehat{\lim}^{(1)}_{\{\beta\}}$ *является регулятором сходимости* α *к КДЧ* $\lim(\{\alpha\}, \{\beta\})$.

(*Таким образом, для каждой фундаментальной последовательности конструктивных действительных чисел можно построить конструктивное действительное число, к которому сходится эта последовательность.*)

Доказательство. Используя теоремы сочетания алгорифмов и теорему об универсальном алгорифме, можно построить алгорифмы $\mathfrak{A}^1$, $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{A}^3$ такие, что для любой ПДЧ α, ПНЧ β и любого n

$$\mathfrak{A}^1(\{\beta\}, n) \simeq \max_{\mathscr{K}}(\beta(0), \ldots, \beta(n+1)),$$

$$\mathfrak{A}^2(\{\alpha\}, \{\beta\}, n) \simeq \alpha(\mathfrak{A}^1(\{\beta\}, n)),$$

$$\mathfrak{A}^3(\{\alpha\}, \{\beta\}, n) \simeq D^-(\mathfrak{A}^2(\{\alpha\}, \{\beta\}, n), n+2).$$

Построим далее алгорифмы lim и $\lim^{(1)}$ такие, что

$$\lim(\{\alpha\}, \{\beta\}) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \{\widehat{\mathfrak{A}}^3_{\{\alpha\}, \{\beta\}}\} \diamond \{\mathrm{Id}\}$$

(напомним, что Id — алгорифм такой, что $\mathrm{Id}(n) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} n$ при любом n),

$$\lim{}^{(1)}(\{\beta\}, n) \simeq \beta(n+1).$$

Покажем, что эти алгорифмы обладают требуемыми свойствами.

Пусть α — ПДЧ и β — ПНЧ, являющаяся регулятором фундаментальности α.

Тогда, очевидно, при любом n $\mathfrak{A}^1(\{\beta\}, n)$ есть натуральное число, $\mathfrak{A}^2(\{\alpha\}, \{\beta\}, n)$ — конструктивное действительное число и $\mathfrak{A}^3(\{\alpha\}, \{\beta\}, n)$ — рациональное число. Обозначим для краткости на время доказательства эти числа соответственно через k_n, α_n и r_n.

Очевидно, при любых m, n

$$(1) \qquad k_n \geqslant \beta(n+1),$$

и если $m \geqslant n$, то

$$k_m \geqslant k_n.$$

Следовательно, при $m \geqslant n$ выполняется

(2) $$|\alpha_m - \alpha_n| = |\alpha(k_m) - \alpha(k_n)| < 2^{-n-1}.$$

Далее по построению алгорифма D^-

(3) $$|r_n - \alpha_n| < 2^{-n-2},$$

(4) $$|r_m - \alpha_m| < 2^{-m-2}.$$

Из (2)—(4) следует, что при $m \geqslant n$

(5) $$|r_n - r_m| < 2^{-n}.$$

Следовательно, алгорифм Id является регулятором фундаментальности ПРЧ $\widehat{\mathfrak{A}}^3_{\{\alpha\},\,\{\beta\}}$. Таким образом, алгорифм lim перерабатывает слово $\{\alpha\}, \{\beta\}$ в КДЧ. Обозначим это КДЧ на время доказательства через x.

Поскольку при любом n

$$\overline{x}(n) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \mathrm{Id}(n) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} n,$$

то

$$\underline{x}(\overline{x}(n)) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} r_n.$$

Тогда по лемме 1

(6) $$|r_{n+1} - x| \leqslant 2^{-n-1}.$$

Ввиду (3)

(7) $$|r_{n+1} - \alpha(k_{n+1})| < 2^{-n-3}.$$

Ввиду (1) при любом $i \geqslant k_{n+1}$

$$|\alpha(i) - \alpha(k_{n+1})| < 2^{-n-2}.$$

Следовательно, при любом $i \geqslant k_{n+1}$

(8) $$|\alpha(i) - x| < 2^{-n-1} + 2^{-n-2} + 2^{-n-3} < 2^{-n}.$$

Построим алгорифм $\mathfrak{A}^4$ такой, что

$$\mathfrak{A}^4(\{\beta\}, n) \simeq \mathfrak{A}^1(\{\beta\}, n+1).$$

Ввиду (8) алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}^4_{\{\beta\}}$ является регулятором сходимости α к x. Тогда по теореме 7 § 1 алгорифм $\widehat{\lim}^{(1)}_{\{\beta\}}$ также является регулятором сходимости α к x. Теорема доказана.

Следствие 1. *Всякая фундаментальная ПДЧ является сходящейся.*

2. Определение 1. *Последовательностью сегментов (интервалов) назовем алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в сегмент (интервал).*

Определение 2. *Последовательность сегментов (интервалов) назовем вложенной, если при любом n*

$$\Phi(n+1) \subseteq \Phi(n).$$

Определение 3. *Последовательность сегментов (интервалов) Φ назовем регулярной, если при любом n*

$$\text{Дл}(\Phi(n)) < 2^{-n}$$

(напомним, что алгорифм Дл перерабатывает всякий промежуток в его длину).

Имеет место следующая теорема, аналогичная известной теореме о вложенных сегментах традиционного анализа.

Теорема 2. *Можно построить алгорифм $\lim^{(2)}$, перерабатывающий запись всякой вложенной регулярной последовательности сегментов Φ в КДЧ такое, что при любом n*

$$\lim{}^{(2)}(\{\Phi\}) \in \Phi(n).$$

(Таким образом, для всякой вложенной регулярной последовательности сегментов можно построить КДЧ, принадлежащее всем сегментам этой последовательности.)

Доказательство. Пользуясь теоремами сочетания алгорифмов и теоремой об универсальном алгорифме, построим алгорифм $\mathfrak{A}^1$ так, чтобы для любой последовательности сегментов Φ и любого n

$$\mathfrak{A}^1(\{\Phi\}, n) \simeq \frac{K^{\text{л}}(\Phi(n)) + K^{\text{п}}(\Phi(n))}{2}.$$

Построим далее алгорифм $\mathfrak{A}^2$ так, чтобы для любого слова P в $Ч$

$$\mathfrak{A}^2(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \{\widehat{\mathfrak{A}}^1_P\}, \{\mathrm{Id}\}.$$

Искомый алгорифм $\lim^{(2)}$ строим теперь так, чтобы выполнялось

$$\lim{}^{(2)}(P) \simeq \lim(\mathfrak{A}^2(P)).$$

Покажем, что этот алгорифм обладает нужными свойствами. Пусть Φ — вложенная регулярная последовательность сегментов. Тогда $\widehat{\mathfrak{A}}^1_{\xi\Phi\zeta}$ есть ПДЧ, причем если $i, j \geqslant n$, то $\mathfrak{A}^1(\xi\Phi\zeta, i) \in \Phi(n)$ и $\mathfrak{A}^1(\xi\Phi\zeta, j) \in \Phi(n)$, и, следовательно,

$$\left|\widehat{\mathfrak{A}}^1_{\xi\Phi\zeta}(i) - \widehat{\mathfrak{A}}^1_{\xi\Phi\zeta}(j)\right| < 2^{-n}.$$

Таким образом, алгорифм Id является регулятором фундаментальности ПДЧ $\widehat{\mathfrak{A}}^1_{\xi\Phi\zeta}$ и по теореме о полноте $\lim^{(2)}(\xi\Phi\zeta)$ есть КДЧ, к которому сходится эта ПДЧ.

Фиксируем теперь произвольное n и докажем, что $\lim^{(2)}(\xi\Phi\zeta) \in \Phi(n)$. По построению $\mathfrak{A}^1$ при любом $i \geqslant n$

$$\mathfrak{A}^1(\xi\Phi\zeta, i) \in \Phi(n)$$

и, следовательно,

$$K^{\text{л}}(\Phi(n)) \leqslant \widehat{\mathfrak{A}}^1_{\xi\Phi\zeta}(i) \leqslant K^{\text{п}}(\Phi(n)). \tag{9}$$

Переходя в (9) к пределу (по i), согласно следствию 1 § 1 получим

$$K^{\text{л}}(\Phi(n)) \leqslant \lim^{(2)}(\xi\Phi\zeta) \leqslant K^{\text{п}}(\Phi(n)),$$

т. е.

$$\lim^{(2)}(\xi\Phi\zeta) \in \Phi(n).$$

Теорема доказана.

Теорему 2 можно дополнить теоремой единственности общей точки вложенной регулярной последовательности.

Теорема 3. *Пусть Φ — вложенная регулярная последовательность сегментов и КДЧ x_1, x_2 таковы, что при любом n*

$$x_1 \in \Phi(n)$$

и

$$x_2 \in \Phi(n).$$

Тогда $x_1 = x_2$.

Доказательство. При условиях теоремы для любого n

$$|x_1 - x_2| \leqslant 2^{-n},$$

откуда и следует, что $x_1 = x_2$.

Отметим, что теоремы 2 и 3 ценою некоторого усложнения доказательств можно усилить в следующем направлении. Назовем последовательность сегментов Φ стягивающейся, если ПДЧ $|\Phi|$ такая, что $|\Phi|(n) = |\Phi(n)|$, сходится к 0. 1) Можно построить алгорифм, перерабатывающий запись всякой вложенной, стягивающейся последовательности сегментов в КДЧ, принадлежащее всем сегментам этой последовательности; 2) если КДЧ x_1 и x_2 принадлежат всем сегментам некоторой стягивающейся последовательности сегментов, то $x_1 = x_2$. Эти утверждения нам не понадобятся и на их доказательствах мы не останавливаемся.

В гл. 4 будет показано, что условие регулярности в формулировке теоремы 2 (или условие стягиваемости в приведенном выше ее усилении) является существенным.

Из леммы 2 очевидным образом вытекает

Теорема 4. *Можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$ такой, что для любого КДЧ x алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}_x$ является вложенной регулярной последовательностью рациональных сегментов и при любом n*

$$x \in \widehat{\mathfrak{A}}_x(n).$$

Теоремы 2 и 4 устанавливают некоторое эффективное соответствие между КДЧ и вложенными регулярными последовательностями рациональных сегментов. Понятие вложенной регулярной последовательности рациональных сегментов можно принять за основу построения системы вычислимых действительных чисел. При естественном определении отношений равенства, порядка и арифметических операций над такими числами упомянутое выше соответствие оказывается изоморфизмом между этой системой вычислимых действительных чисел и рассматриваемой нами системой КДЧ (ср. Успенский [3], Заславский [4]).

3. Приведем некоторые признаки сходимости рядов *).

*) Подробное изложение этого круга вопросов можно найти в книге Гудстейна [2] и работе Хачатряна [1]. Приводимые ниже результаты заимствованы нами из работы Хачатряна [1].

Пусть α — некоторая ПДЧ. Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha(i). \tag{10}$$

Непосредственно из теоремы о полноте вытекает следующий критерий сходимости Коши.

Теорема 5. *Для того чтобы ряд* (10) *был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы была осуществима ПНЧ* δ (*называемая регулятором фундаментальности этого ряда*) *такая, что при любых* m, n, l, *если* $m \geqslant \delta(l)$, *то*

$$\left| \sum_{i=m}^{m+n} \alpha(i) \right| < 2^{-l}.$$

Очевидно, располагая регулятором фундаментальности данного ряда, можно построить КДЧ, являющееся его суммой.

Ряд (10) назовем *неотрицательным* (*положительным*), если при любом i

$$\alpha(i) \geqslant 0 \quad (\text{соответственно } \alpha(i) > 0).$$

Будем говорить, что ряд *расходится*, если он не является сходящимся.

Пусть β — ПДЧ. Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta(i). \tag{11}$$

Следствие 2. *Если ряды* (10) *и* (11) *неотрицательные и осуществимо натуральное число* m *такое, что при любом* $i \geqslant m$

$$\alpha(i) \leqslant \beta(i),$$

то из сходимости ряда (11) *следует сходимость ряда* (10) (*и, следовательно, из расходимости ряда* (10) *вытекает расходимость ряда* (11)).

Следствие 3. *Если ряды* (10) *и* (11) *положительны и осуществимо натуральное число* m *такое, что при* $i \geqslant m$

$$\frac{\alpha(i+1)}{\alpha(i)} \leqslant \frac{\beta(i+1)}{\beta(i)},$$

то из сходимости ряда (11) *вытекает сходимость ряда* (10) (*и*, тем самым, *из расходимости ряда* (10) *следует расходимость ряда* (11)).

Будем говорить, что ряд (11) является остатком ряда (10), если можно указать m такое, что при любом i

$$\beta(i) = \alpha(m+i).$$

Следствие 4. *Всякий остаток сходящегося ряда сходится.*

Следствие 5. *Если некоторый остаток ряда сходится, то этот ряд сходится.*

Следствие 6. *Если ряд* (10) *сходится, то ПДЧ* α *сходится к* 0.

Следствие 7. *Если* x — *КДЧ и при любом* n

$$\beta(n) = x \cdot \alpha(n),$$

то из сходимости ряда (10) *вытекает сходимость ряда* (11).

Пусть γ — ПДЧ такая, что при всех n

$$\gamma(n) = \alpha(n) + \beta(n).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \gamma(i). \tag{12}$$

Следствие 8. *Если ряды* (10) *и* (11) *сходятся, то ряд* (12) *сходится.*

Следствие 9. *Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Последовательность натуральных чисел δ назовем натуральной перестановкой, если осуществима ПНЧ δ' такая, что при любом n

$$\delta(\delta'(n)) \doteq n$$

и при любых k, l, если $k \not\doteq l$, то

$$\delta(k) \not\doteq \delta(l).$$

Ряд с общим членом γ назовем образом ряда (10) при натуральной перестановке δ, если при любом n

$$\gamma(n) = \alpha(\delta(n)).$$

Следствие 10. *Образ любого абсолютно сходящегося ряда при любой натуральной перестановке абсолютно сходится (и имеет ту же самую сумму, что и исходный ряд).*

Следствие 11 (критерий Лейбница сходимости знакочередующихся рядов). *Пусть ряд* (10) *таков, что при любом* i

$$\alpha(i) \cdot \alpha(i+1) < 0$$

и ПДЧ α *сходится к* 0. *Тогда ряд* (10) *сходится, и если КДЧ* x *является его суммой, то при любом* m

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha(i) < x < \sum_{i=0}^{m+1} \alpha(i)$$

или

$$\sum_{i=0}^{m+1} \alpha(i) < x < \sum_{i=0}^{m} \alpha(i).$$

Будем говорить, что ряд (10) *расходится к бесконечности*, если можно построить ПНЧ δ такую, что при любых m, n, если $m \geqslant \delta(n)$, то

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha(i) > n.$$

Имеет место следующий конструктивный аналог признака сходимости Куммера.

Теорема 6. *Пусть ряд* (10) *положителен.*

I. *Если можно построить ПДЧ* β, *натуральные числа* n *и* m *такие, что*

1) $\forall i (\beta(i) > 0)$;

2) *ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\beta(i)}$ *расходится к бесконечности*;

3) $\forall i \left(i \geqslant m \supset \beta(i) \cdot \frac{\alpha(i)}{\alpha(i+1)} - \beta(i+1) \geqslant 2^{-n}\right)$, *то ряд* (10) *сходится.*

II. *Если осуществима ПДЧ* β *и натуральное число* n *такие, что*

1) $\forall i (\beta(i) > 0)$;

2) *ряд* $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\beta(i)}$ *расходится;*

3) $\forall i \left(i \geqslant n \supset \beta(i) \cdot \frac{\alpha(i)}{\alpha(i+1)} - \beta(i+1) \leqslant 0\right)$,

то ряд (10) *расходится.*

Выбирая в этой теореме в качестве β ПДЧ β^1, β^2, β^3 такие, что для всех $i > 0$

$$\beta^1(i) \doteqdot 1,$$
$$\beta^2(i) \doteqdot i,$$
$$\beta^3(i) \doteqdot i \cdot \ln i\ ^*),$$

получаем признаки сходимости Даламбера, Раабе и Бертрана.

Аналогичным образом могут быть переформулированы признаки сходимости Коши, Абеля и Дирихле (ср. Фихтенгольц [2]).

Приведенные признаки сходимости показывают значительное сходство традиционной и конструктивной теории рядов. Отличительной особенностью конструктивной теории по сравнению с традиционной является устанавливаемое в следующем параграфе существование неотрицательных рядов с ограниченными (в совокупности) частичными суммами, не являющихся (при принятом нами определении сходимости) сходящимися. Однако конкретные, употребляемые в приложениях анализа ряды, как правило, не обладают этим свойством.

4. В качестве иллюстрации изложенного рассмотрим следующий пример.

Пусть $\mathfrak{E}^1$ — ПДЧ такая, что

$$\mathfrak{E}^1(0) \doteqdot 1,$$

и при $i \geqslant 1$

$$\mathfrak{E}^1(i) \doteqdot \frac{1}{i!}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{E}^1(i). \tag{13}$$

*) Через ln здесь обозначается некоторый алгорифм, задающий конструктивную функцию, соответствующую логарифмической функции традиционного анализа (ср. гл. 5, § 1).

Из очевидной оценки

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{(n+m)!}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^{m-1}}\right)<$$
$$<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n\cdot n!}$$

следует, что ряд (13) является сходящимся. (Так как при $n>2$ выполняется $n!\cdot n>2^n$, то, например, алгорифм σ такой, что

$$\sigma(i)\doteq i+3$$

является регулятором фундаментальности ряда (13).)

Пользуясь теоремой о полноте, построим КДЧ, являющееся суммой ряда (13). Это КДЧ по аналогии с традиционным анализом естественно обозначить буквой e.

Нетрудно убедиться, что ПДЧ $\mathfrak{E}$ такая, что при любом $i>0$

$$\mathfrak{E}(i)\doteq\left(1+\frac{1}{i}\right)^i,$$

сходится к e (ср. Рудин [1]).

§ 3. Пример монотонной ограниченной не сходящейся последовательности рациональных чисел

1. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема Шпекера [1].

Теорема 1. *Можно построить последовательность рациональных чисел $\mathfrak{S}$ такую, что*

1) *при любом n*

$$0<\mathfrak{S}(n)<1$$

и

$$\mathfrak{S}(n)<\mathfrak{S}(n+1);$$

2) *последовательность $\mathfrak{S}$ не фундаментальна.*

Доказательство*). Построим арифметически полный алгорифм α, перечисляющий без повторений некоторое неразрешимое множество натуральных чисел $\mathscr{M}$. (Возможность построения такого алгорифма без труда усматривается из теоремы 12 § 3 гл. 1.)

Искомую последовательность $\mathfrak{S}$ построим так, чтобы при любом n

$$\mathfrak{S}(n) \underset{\mathscr{P}}{=} \sum_{i=0}^{n} 2^{-\alpha(i)-1}. \tag{1}$$

Очевидно, при любом n

$$0 < \mathfrak{S}(n)$$

и

$$\mathfrak{S}(n) < \mathfrak{S}(n+1). \tag{2}$$

Далее, так как при $i \neq j$ $\alpha(i) \neq \alpha(j)$, то $\mathfrak{S}(n)$ меньше суммы ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i-1}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{S}(n) < 1. \tag{3}$$

Предположим теперь, что осуществим алгорифм β, являющийся регулятором фундаментальности ПРЧ $\mathfrak{S}$. Тогда при любых $l > 0$, n

$$\mathfrak{S}(\beta(n)+l) - \mathfrak{S}(\beta(n)) = \sum_{i=\beta(n)+1}^{\beta(n)+l} 2^{-\alpha(i)-1} < 2^{-n}.$$

Следовательно, при любом $i > \beta(n)$

$$\alpha(i) > n - 1. \tag{4}$$

Из этой оценки легко следует разрешимость множества $\mathscr{M}$. Действительно, нетрудно построить алгорифм $\mathfrak{D}$ так, чтобы для любого P в $\{0|\}$ выполнялось **)

1) если P не является натуральным числом, то

$$\mathfrak{D}(P) \fallingdotseq 0;$$

---

*) Приводимое нами доказательство теоремы Шпекера принадлежит Райсу [1].

**) Здесь мы используем тот факт, что алгорифм α арифметически полн.

2) если P — натуральное число и существует i такое, что $0 \leqslant i \leqslant \beta(P+1)$ и $\alpha(i) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} P$, то

$$\mathfrak{D}(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \Lambda;$$

3) если P — натуральное число и для всех i таких, что $0 \leqslant i \leqslant \beta(P+1)$, выполняется $\alpha(i) \not\mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} P$, то

$$\mathfrak{D}(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 0.$$

Очевидно, $\mathfrak{D}$ применим к любому слову P в $\{0|\}$. Покажем, что $P \in \mathcal{M} \equiv \mathfrak{D}(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \Lambda$.

а) Пусть $\mathfrak{D}(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \Lambda$. Тогда P — натуральное число и при некотором i таком, что $0 \leqslant i \leqslant \beta(P+1)$, $\alpha(i) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} P$. Следовательно, $P \in \mathcal{M}$.

б) Пусть $P \in \mathcal{M}$. Тогда P — натуральное число и при некотором j $\alpha(j) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} P$. Ввиду (4) при $i > \beta(P+1)$ выполняется $\alpha(i) > P$. Следовательно, $0 \leqslant j \leqslant \beta(P+1)$ и $\mathfrak{D}(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \Lambda$.

Таким образом, регулятор фундаментальности $\mathfrak{S}$ невозможен.

Теорема 2. *Последовательность* $\mathfrak{S}$, *построенная согласно теореме* 1, *не сходится ни к какому КДЧ.*

Доказательство. Если бы $\mathfrak{S}$ сходилась к какому-нибудь КДЧ, то согласно теореме 7 § 1 последовательность $\mathfrak{S}$ была бы фундаментальной.

Определение 1. *Пусть* α, β — *ПДЧ. Будем говорить, что* β *является подпоследовательностью* α, *если можно построить возрастающую ПНЧ* γ *так, что при любом* n

$$\beta(n) = \alpha(\gamma(n)).$$

Вполне очевидна

Лемма 1. *Если ПДЧ* α *сходится к некоторому КДЧ, то любая подпоследовательность* α *сходится к этому же КДЧ.*

В случае монотонных ПДЧ имеет место обратное утверждение.

Лемма 2. *Если какая-нибудь подпоследовательность монотонной ПДЧ* α *сходится к некоторому КДЧ, то* α *сходится к этому же КДЧ.*

Доказательство. Пусть α — ПДЧ, β — возрастающая ПНЧ и α^1 — такая ПДЧ, что при любом n

$$\alpha^1(n) = \alpha(\beta(n)).$$

Предположим, что β^1 — регулятор сходимости α^1 к некоторому КДЧ x.

Построим ПНЧ β^2 такую, что

$$\beta^2(n) \doteq \beta(\beta^1(n)).$$

Покажем, что β^2 является регулятором сходимости α к x.

Пусть, например, α — неубывающая ПДЧ. Тогда, очевидно, α^1 — также неубывающая ПДЧ. Следовательно, при любом i

$$\alpha^1(i) \leqslant x.$$

Пусть теперь при произвольном n натуральное число i таково, что $i \geqslant \beta^2(n)$. Тогда

$$\alpha(i) \geqslant \alpha(\beta(\beta^1(n))).$$

Следовательно,

$$\alpha(i) \geqslant \alpha^1(\beta^1(n)).$$

Поскольку ПНЧ β возрастает, можно найти j такое, что

$$\beta(j) \geqslant i.$$

Тогда мы получим

$$\alpha^1(\beta^1(n)) \leqslant \alpha(i) \leqslant \alpha^1(j) \leqslant x,$$

и так как

$$x - \alpha^1(\beta^1(n)) < 2^{-n},$$

то

$$|x - \alpha(i)| < 2^{-n},$$

что и требовалось.

Из теоремы 2 и леммы 2 немедленно вытекает

Теорема 3. *Никакая подпоследовательность ПРЧ* $\mathfrak{S}$ *(построенной согласно теореме* 1) *не является сходящейся.*

Определение 2. *ПДЧ* α *назовем ограниченной, если осуществимо КДЧ* x *такое, что при всех* i

$$|\alpha(i)| \leqslant x$$

(мы будем также говорить, что КДЧ x *ограничивает ПДЧ* α*).*

Определение 3. *ПДЧ* α *такую, что*

1) α *монотонна,*

2) α *ограничена,*

3) *α не является фундаментальной,*
будем называть шпекеровой.

Очевидно, в теоремах 2—3 вместо $\mathfrak{S}$ может фигурировать любая шпекерова последовательность.

Как будет показано в доказательстве теоремы 4 следующего пункта, для построенной нами шпекеровой ПРЧ $\mathfrak{S}$ последовательность рациональных чисел $\mathfrak{S}(n+1)-\mathfrak{S}(n)$ не сходится к 0. Вместе с тем нетрудно, вставляя между $\mathfrak{S}(n)$ и $\mathfrak{S}(n+1)$ «достаточно густо» рациональные числа, построить возрастающую шпекерову ПРЧ $\mathfrak{S}'$ такую, что

$$\forall n\,\exists m\,\forall i\,(i\geqslant m\supset(\mathfrak{S}'(i+1)-\mathfrak{S}'(i))<2^{-n}).$$

Таким образом, существуют как шпекеровы ПРЧ, для которых разность соседних членов сходится к 0, так и шпекеровы ПРЧ, для которых это не имеет места.

В гл. 8 будет приведено некоторое усиление теоремы 1 (впервые найденное З а с л а в с к и м [4]); именно, будет построена возрастающая шпекерова ПРЧ γ такая, что для нее осуществим «понижающий» алгорифм, т. е. алгорифм, перерабатывающий всякую верхнюю границу x этой ПРЧ в КДЧ, меньшее x и также ограничивающее сверху γ *).

Переформулируем полученные результаты в терминах рядов.

О п р е д е л е н и е 4. *Пусть* $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\alpha(i)$ — *неотрицательный ряд. Будем называть этот ряд шпекеровым, если*

1) *данный ряд не сходится;*
2) *осуществимо КДЧ x такое, что при любом n*

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha(i)\leqslant x.$$

Из теорем 1—2 немедленно вытекает существование шпекеровых рядов. Кроме того, из сделанного выше замечания следует, что существуют как шпекеровы ряды

*) Этот результат может быть установлен и с помощью конструкции Райса (см. доказательство теоремы 1), если в качестве $\mathscr{M}$ взять креативное множество (ср. Ц е й т и н [10]).

со сходящимся к 0 общим членом, так и шпекеровы ряды, для которых это не имеет места.

Отметим также, что если γ — возрастающая шпекерова ПРЧ и $\mathscr{L}$ — множество рациональных чисел, перечисляемое алгорифмом γ (т. е. множество рациональных чисел «встречающихся в последовательности γ»), то множество $\mathscr{L}$ ограничено и вместе с тем невозможно КДЧ, являющееся его точной верхней границей.

Результаты этого пункта устанавливают, таким образом, существенные теоретические различия традиционной и развиваемой нами конструктивной теории сходимости. При принятом нами понятии действительного числа и сходимости не сохраняется теорема Вейерштрасса о сходимости монотонных ограниченных последовательностей, теорема о выборе сходящейся последовательности и теорема о существовании точных границ ограниченных множеств *). В следующем пункте мы коротко коснемся вопроса о том, как изменится положение, если использовать более общее понятие вычислимого действительного числа — псевдочисла и более общее понятие сходимости — псевдосходимости.

2. Определение 5. *Будем говорить, что ПДЧ α псевдосходится к КДЧ x, если*

$$\forall n \neg\neg \exists m \forall l\, (l \geqslant m \supset |x - \alpha(l)| < 2^{-n}).$$

Имеет место следующая теорема (Мазур [1]).

Теорема 4. *Можно построить ПРЧ, псевдосходящуюся, но не сходящуюся к нулю.*

Доказательство. Пусть β — арифметически полный алгорифм, перечисляющий без повторений некоторое неразрешимое

---

*) Чтобы устранить здесь и в дальнейшем возможные недоразумения, заметим, что с точки зрения традиционного анализа результаты этого пункта вовсе не противоречат только что упомянутым классическим теоремам. Результаты эти относятся к системе действительных чисел, отличной от классического континуума, и к другому, более узкому, чем обычно, понятию сходимости. Более того, в некотором смысле полученные результаты дополняют рассматриваемые теоремы традиционного анализа, выявляя их неэффективный характер. Так, например, теорема 1 показывает, что даже алгорифмически заданная монотонная ограниченная последовательность рациональных чисел может не допускать эффективной оценки скорости сходимости. Таким образом, потерю общих теорем типа теоремы Вейерштрасса можно в известном смысле считать «платой за эффективность».

множество натуральных чисел $\mathscr{M}$. Искомую ПРЧ α строим так, что

$$\alpha(n) \rightleftharpoons 2^{-\beta(n)}.$$

Псевдосходимость α к нулю, хотя и очевидная интуитивно (β может разве лишь в конечном числе точек принимать значения, меньшие данного n), оказывается достаточно неудобным объектом для строгого конструктивного доказательства. Поступим следующим образом. Предположим, что при некотором n

$$(5) \qquad \neg \exists m \forall i \left(i \geqslant m \supset |\alpha(i)| < 2^{-n} \right).$$

Тогда

$$(6) \qquad \neg \exists m \forall i \left(i \geqslant m \supset \beta(i) > n \right).$$

При каждом k обозначим через $\mathscr{L}_k$ множество натуральных чисел такое, что

$$(7) \qquad l \in \mathscr{L}_k \equiv (l > k) \mathbin{\&} (\beta(l) \leqslant n).$$

Очевидно, все $\mathscr{L}_k$ разрешимы и, следовательно, перечислимы. Ввиду (6) ни одно из этих множеств не может быть пустым. По теореме 8 § 3 гл. 1 можно построить арифметически полный алгорифм γ такой, что при любом k

$$(8) \qquad \gamma(k) \in \mathscr{L}_k.$$

Построим далее алгорифм σ так, что

$$(9) \qquad \begin{aligned} \sigma(0) &\rightleftharpoons \gamma(0), \\ \sigma(l+1) &\rightleftharpoons \gamma(\sigma(l)). \end{aligned}$$

Ввиду (8) при $i < j$

$$(10) \qquad \sigma(i) < \sigma(j).$$

Рассмотрим теперь натуральные числа $\beta(\sigma(0))$, $\beta(\sigma(1)), \ldots$ $\ldots, \beta(\sigma(n+1))$. Поскольку все они ((8)—(9)) не превосходят n, среди них есть по меньшей мере два одинаковых, что ввиду (10) невозможно. Таким образом, сделанное предположение неверно и мы получаем

$$\forall n \neg\neg \exists m \forall i \left(i \geqslant m \supset |\alpha(i)| < 2^{-n} \right),$$

что и требовалось.

Предположим, что осуществим регулятор сходимости δ ПРЧ α к 0. Тогда при любых i, n, если $i \geqslant \delta(n)$, то $\alpha(i) < 2^{-n}$ и, следовательно, $\beta(i) > n$. Из этой оценки почти дословно так же, как в теореме 1, выводится разрешимость $\mathscr{M}$. Таким образом, α не сходится к 0.

Приведем, предоставляя доказательства читателю, некоторые дальнейшие теоремы.

Теорема 5. *Если монотонная ПДЧ псевдосходится к некоторому КДЧ x, то эта ПДЧ сходится к x.*

Из теоремы 5 вытекает следующее усиление теоремы 2.

Теорема 6. *Для ПРЧ $\mathfrak{S}$, построенной согласно теореме* 1, *невозможно КДЧ, к которому псевдосходилась бы эта ПРЧ.*

Очевидно, $\mathfrak{S}$ в теореме 6 может быть заменена любой шпекеровой последовательностью.

Теорема 6 показывает, что одним ослаблением понятия сходимости получить теорему, аналогичную известной теореме Вейерштрасса, не удается. Некоторый аналог этой теоремы получается, если допустить в качестве пределов последовательностей КДЧ псевдочисла. Приведем необходимые определения.

Пусть q — псевдочисло. Обозначим через $\underline{q}$ алгорифм ρ, если q имеет вид $q \rightleftharpoons \{\rho\} \diamond$, и алгорифм $\widehat{\mathrm{fd}}_q^1$ (стр. 129), если q — рациональное число.

Построим алгорифм $\mathfrak{B}$ такой, что для любых ПДЧ α_1, α_2 при любом n

$$\mathfrak{B}(\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}, n) \simeq \alpha_1(n) - \alpha_2(n).$$

Определение 6. *Будем говорить, что псевдочисло q равно КДЧ x, если ПРЧ $\underline{q}$ псевдосходится к x.*

Определение 7. *Будем говорить, что ПДЧ α псевдосходится к псевдочислу q, если ПДЧ $\widehat{\mathfrak{B}}_{\{\underline{q}\},\ \{\alpha\}}$ псевдосходится к нулю.*

Теорема 7. *Всякая монотонная, ограниченная ПДЧ является псевдофундаментальной.*

Из теорем 6—7 вытекает

Теорема 8. *Слово $\{\mathfrak{S}\}\diamond$, где $\mathfrak{S}$ — ПРЧ, построенная согласно теореме* 1, *является псевдочислом, причем это псевдочисло не равно никакому КДЧ.*

Поскольку, с другой стороны, для каждого КДЧ, как легко видеть, можно построить равное ему псевдочисло, теорема 8 показывает, что псевдочисел в некотором смысле «больше», чем конструктивных действительных чисел.

Теорема 9. *Для всякой псевдофундаментальной последовательности КДЧ можно построить псевдочисло, к которому псевдосходится эта КДЧ.*

Из теорем 7 и 9 вытекает следующий аналог теоремы Вейерштрасса.

Теорема 10. *Для каждой монотонной ограниченной ПДЧ можно построить псевдочисло, к которому псевдосходится эта ПДЧ.*

Таким образом, использование псевдосходимости и псевдочисел позволяет в какой-то степени сохранить привычную картину традиционной теории пределов, но очевидная громоздкость и удаленность этих понятий от интуитивной «вычислимости» сводит это преимущество на нет *).

---

*) В последнее время выявилась возможность плодотворного использования такого рода концепций для установления конструктивных вариантов теорем типа теоремы Бореля о покрытиях (см. Лифшиц [4]). Читатель, например, без труда докажет следующее утверждение. Пусть Φ — последовательность рациональных интервалов такая, что невозможно псевдочисло из единичного сегмента, не принадлежащее ни одному из интервалов $\Phi(n)$. Тогда можно

§ 4. Эффективная несчетность конструктивного континуума

В этом параграфе будет показано, что конструктивный континуум, являющийся, очевидно, счетным при традиционном понимании счетности, не может быть расположен в эффективную последовательность. Доказательство этого результата использует канторовский диагональный метод и по существу мало чем отличается от доказательства известной теоремы Кантора о несчетности классического континуума.

Определение 1. *Множество КДЧ $\mathscr{M}$ назовем эффективно несчетным, если можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$, перерабатывающий запись всякой ПДЧ α в КДЧ таким образом, что*

1) $$\mathfrak{A}(\{\alpha\}) \in \mathscr{M};$$

2) $$\forall n\,(\mathfrak{A}(\{\alpha\}) \underset{\mathscr{D}}{\neq} \alpha(n)).$$

С каждым промежутком естественно связывается множество КДЧ, принадлежащих этому промежутку. В дальнейшем, там, где это не может привести к недоразумениям, мы будем использовать следующий сокращенный оборот речи: вместо того чтобы говорить о множестве КДЧ, принадлежащих данному промежутку, будем говорить о самом этом промежутке.

Основным результатом этого параграфа является теорема об эффективной несчетности любого интервала или, говоря точнее, следующая

Теорема 1. *Можно построить алгорифм $\mathfrak{T}$ такой, что для любого интервала $x \triangledown y$ и ПДЧ α*

1) $!\mathfrak{T}(x \triangledown y, \{\alpha\})$ *и* $\mathfrak{T}(x \triangledown y, \{\alpha\})$ — *КДЧ*;

2) $\mathfrak{T}(x \triangledown y, \{\alpha\}) \in x \triangledown y$;

3) *при любом n*

$$\mathfrak{T}(x \triangledown y, \{\alpha\}) \underset{\mathscr{D}}{\neq} \alpha(n).$$

найти k так, что уже интервалы $\Phi(0), \ldots, \Phi(k)$ покрывают единичный сегмент. В гл. 5 будут также приведены некоторые примеры использования псевдочисел для изучения конструктивных равномерно непрерывных функций.

Доказательство. Построим алгорифм $\mathfrak{A}^1$ такой, что для любых КДЧ x, y, z

$$\mathfrak{A}^2(x \triangle y, z) \simeq$$
$$\simeq \begin{cases} x\triangle x + \frac{y-x}{3}, \text{ если } \mathrm{Pз}\left(x+\frac{y-x}{3}, y-\frac{y-x}{3}, z\right) \doteq 2, \\ y-\frac{y-x}{3}\triangle y, \text{ если } \mathrm{Pз}\left(x+\frac{y-x}{3}, y-\frac{y-x}{3}, z\right) \doteq 1. \end{cases}$$

Пусть $x < y$. Тогда при любом z

$$!\mathrm{Pз}\left(x+\frac{y-x}{3}, y-\frac{y-x}{3}, z\right)$$

и Pз перерабатывает слово

$$x+\frac{y-x}{3}, y-\frac{y-x}{3}, z$$

в 2 или в 1. В первом случае

$$z > x+\frac{y-x}{3}.$$

Во втором

$$z < y-\frac{y-x}{3}.$$

Таким образом, алгорифм $\mathfrak{A}^1$ перерабатывает всякое слово $x \triangle y$, z, где $x < y$, в сегмент длины $\frac{y-x}{3}$, входящий в $x \triangle y$ и такой, что z не принадлежит этому сегменту.

Построим алгорифм $\mathfrak{A}^2$ такой, что для любого интервала $x \nabla y$, любой ПДЧ α и любого n

$$\mathfrak{A}^2(x \nabla y, \{\alpha\}, 0) \simeq \mathfrak{A}^1(x \triangle y, \alpha(0)),$$
$$\mathfrak{A}^2(x \nabla y, \{\alpha\}, n+1) \simeq \mathfrak{A}^1(\mathfrak{A}^2(x \nabla y, \{\alpha\}, n), \alpha(n+1)).$$

Индукцией по n без труда доказывается, что для любого интервала $x \nabla y$ и любой ПДЧ α

а) $\widehat{\mathfrak{A}}^2_{x \nabla y, \{\alpha\}}$ есть вложенная последовательность сегментов;

б) длина сегмента $\mathfrak{A}^2(x \nabla y, \{\alpha\}, n)$ равна $3^{-n-1}\cdot(y-x)$;

в) КДЧ $\alpha(n)$ не принадлежит сегменту $\mathfrak{A}^2(x \nabla y, \{\alpha\}, n)$.

Кроме того, очевидно,

г) $\mathfrak{A}^2(x \nabla y, \{\alpha\}, 0) \subseteq x \triangle y$.

Воспользовавшись леммой 1 § 5 гл. 2, можно построить алгорифм γ, перерабатывающий всякий интервал $x \nabla y$ в интервал длины, меньшей 1, концы которого принадлежат $x \nabla y$.

Построим алгорифм $\mathfrak{A}^3$ такой, что

$$\mathfrak{A}^3(x \nabla y, \xi\alpha\zeta, n) \simeq \mathfrak{A}^2(\gamma(x \nabla y), \xi\alpha\zeta, n).$$

Из пп. а) — г) получаем, что для любого интервала $x \nabla y$, ПДЧ α и любого n

а$'$) — б$'$) $\widehat{\mathfrak{A}}^3_{x \nabla y,\ \xi\alpha\zeta}$ есть вложенная регулярная последовательность сегментов;

в$'$) КДЧ $\alpha(n)$ не принадлежит сегменту $\widehat{\mathfrak{A}}^3_{x \nabla y,\ \xi\alpha\zeta}(n)$;

г$'$) сегмент $\widehat{\mathfrak{A}}^3_{x \nabla y,\ \xi\alpha\zeta}(0)$ включен в интервал $x \nabla y$.

Искомый алгорифм $\mathfrak{T}$ строим, пользуясь теоремой о вложенных сегментах (§ 2) так, чтобы

$$\mathfrak{T}(x \nabla y, \xi\alpha\zeta) \simeq \lim{}^{(2)}(\xi\widehat{\mathfrak{A}}^3_{x \nabla y,\ \xi\alpha\zeta}\zeta).$$

Алгорифм $\mathfrak{T}$ обладает требуемыми свойствами.

Действительно, если $x \nabla y$ — интервал, то по теореме 2 § 2 $\lim^{(2)}$ переработает слово $\xi\widehat{\mathfrak{A}}^3_{x \nabla y,\ \xi\alpha\zeta}\zeta$ в КДЧ, принадлежащее всем сегментам последовательности $\widehat{\mathfrak{A}}^3_{x \nabla y,\ \xi\alpha\zeta}$. Из пп. в$'$) и г$'$) вытекает тогда, что это КДЧ принадлежит интервалу $x \nabla y$ и отлично от всех $\alpha(n)$.

Непосредственно из доказанной теоремы вытекают следующие предложения.

Следствие 1. *Множество $\mathscr{D}$ (всех КДЧ) эффективно несчетно.*

Следствие 2. *Всякий невырожденный сегмент эффективно несчетен.*

Почти очевидна следующая

Лемма 1. *Всякое эффективно несчетное множество КДЧ не является перечислимым.*

Доказательств. Пусть $\mathscr{M}$ — эффективно несчетное множество КДЧ и алгорифм γ перечисляет $\mathscr{M}$. По лемме 1 § 3 гл. 1 построим арифметически полный алгорифм γ', перечисляющий множество $\mathscr{M}'$ такое, что

$$\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}' \subseteq \mathscr{M} \cup \{0\}.$$

Поскольку $\mathscr{M}$ эффективно несчетно, осуществимо КДЧ x, принадлежащее $\mathscr{M}$ и отличное от всех $\gamma'(n)$. Это, однако, невозможно.

Таким образом, получаем следующие теоремы.

Теорема 2. *Каков бы ни был интервал, множество КДЧ, принадлежащих этому интервалу, неперечислимо и, следовательно, не является областью применимости относительно алфавита Ч никакого алгорифма.*

Теорема 3. *То же, что и теорема 2, с заменой интервала на невырожденный сегмент.*

Теорема 4. *Множество $\mathscr{D}$ (всех КДЧ) неперечислимо и, следовательно, не является областью применимости относительно Ч никакого алгорифма.*

Таким образом, невозможен алгорифм, применимый к слову $P \in Ч$ тогда и только тогда, когда P является КДЧ.

Из теорем 2—4 непосредственно получаем

Следствие 3. *Каков бы ни был интервал (невырожденный сегмент), множество КДЧ, принадлежащих этому интервалу (сегменту), не является разрешимым.*

Следствие 4. *Множество $\mathscr{D}$ (всех КДЧ) не является разрешимым.*

В гл. 4 будет показано, что теорема 3 (а следовательно, и следствие 3) сохраняется и для любого вырожденного сегмента.

В заключение заметим, что изложенные результаты можно несколько усилить в следующем направлении.

Пусть $\mathscr{M}$ — эффективно несчетное множество КДЧ. Тогда для всякого перечислимого множества КДЧ $\mathscr{M}'$ можно указать КДЧ, принадлежащее $\mathscr{M}$, и отличное (в смысле отношения равенства КДЧ) от всех КДЧ, принадлежащих $\mathscr{M}'$. Доказательство этого утверждения вполне аналогично доказательству леммы 1. Таким образом, в теореме 1 (и в следствиях 1—2) вместо последовательностей КДЧ могли бы фигурировать любые перечислимые множества КДЧ, т. е. алгорифмы типа $(\mathscr{H} \rightarrow \mathscr{D})$. Соответственно в теоремах 2—4 можно было бы утверждать продуктивность упоминаемых в них множеств *). (Отметим, что любой вырожденный сегмент также является продуктивным множеством.)

В п. 5 § 1 гл. 9 результаты этого параграфа будут обобщены на случай метрических пространств.

---

*) Множество $\mathscr{M}$ (слов в Ч) называется продуктивным, если для всякого перечислимого подмножества $\mathscr{M}'$ множества $\mathscr{M}$ можно указать элемент $\mathscr{M}$, не принадлежащий $\mathscr{M}'$. (Ср. Мальцев [1].)

ГЛАВА 4

НЕВОЗМОЖНОСТЬ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИФМОВ, СВЯЗАННЫХ С КОНСТРУКТИВНЫМИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

В этой главе будет доказана невозможность ряда алгорифмов, решающих некоторые естественно возникающие в теории конструктивных действительных чисел задачи (результаты этого типа уже приводились в § 4 гл. 3). Все получаемые здесь теоремы невозможности устанавливаются путем сведения к данной задаче либо проблемы распознавания применимости, либо проблемы пополнения некоторого алгорифма, для которого эти проблемы заведомо неразрешимы (см. § 2 гл. 1).

Мы будем использовать следующие обозначения. Через $Ч_0$ обозначается алфавит $\{0|\}$. Буква P используется для обозначения произвольных слов в этом алфавите. Через $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ мы обозначаем алгорифмы, построенные согласно теоремам 4 и 6 § 2 гл. 1. Эти алгорифмы обладают следующими свойствами.

1) Невозможен алгорифм $\mathfrak{A}$ над $Ч_0$ такой, что при любом P

$$!\mathfrak{A}(P) \equiv \neg !\mathfrak{H}(P)$$

(таким образом, для $\mathfrak{H}$ неразрешима проблема распознавания применимости относительно $Ч_0$).

2) Алгорифм $\mathfrak{F}$ принимает два значения 0 и 1 и непополним относительно $Ч_0$.

§ 1. Некоторые алгорифмические проблемы, связанные с отношениями равенства и порядка на конструктивном континууме. Приложения к алгебре

Сведéние проблемы распознавания применимости или пополнения какого-нибудь алгорифма к рассматриваемым в данном параграфе алгорифмическим проблемам осуществляется с помощью следующей леммы.

Лемма 1. *Для каждого алгорифма $\mathfrak{D}$ можно построить алгорифм $\mathfrak{D}_{\mathscr{D}}$ типа $(Ч_0 \to \mathscr{D})$ так, что для любого слова P*

1) *если* $\neg\,!\mathfrak{D}(P)$, *то* $\mathfrak{D}_{\mathscr{D}}(P) \underset{\mathscr{D}}{=} 0$;

2) *если* $!\mathfrak{D}(P)$ *и* $\mathfrak{D}(P) \doteq 0$, *то* $\mathfrak{D}_{\mathscr{D}}(P) > 0$;

3) *если* $!\mathfrak{D}(P)$ *и* $\mathfrak{D}(P) \not\doteq 0$, *то* $\mathfrak{D}_{\mathscr{D}}(P) < 0$.

Доказательство. Используем алгорифм $[\mathfrak{D}]$, «разбивающий работу $\mathfrak{D}$ на шаги» (п. 10 § 1 гл. 1). Построим алгорифм V так, что

$$V(P) \simeq \mu n([\mathfrak{D}](P, n) \doteq \Lambda).$$

При любом P

$$!V(P) \equiv\, !\mathfrak{D}(P) \equiv \exists l([\mathfrak{D}](P, l) \doteq \Lambda).$$

Построим алгорифм $\mathfrak{D}^1$ так, что

$$\mathfrak{D}^1(P, n) \simeq$$
$$\simeq \begin{cases} 2^{-n-1}, & \text{если } [\mathfrak{D}](P, n) \not\doteq \Lambda, \\ 2^{-V(P)-1}, & \text{если } [\mathfrak{D}](P, n) \doteq \Lambda \text{ и } \mathfrak{D}(P) \doteq 0, \\ -2^{-V(P)-1}, & \text{если } [\mathfrak{D}](P, n) \doteq \Lambda \text{ и } \mathfrak{D}(P) \not\doteq 0. \end{cases}$$

Очевидно, при любом P алгорифм $\widehat{\mathfrak{D}}^1_P$ является ПРЧ. Нетрудно также проверить, что при любом P и $l, m \geqslant n$

$$|\mathfrak{D}^1(P, m) - \mathfrak{D}^1(P, l)| < 2^{-n}.$$

Поэтому алгорифм Id такой, что

$$\mathrm{Id}(n) \doteq n,$$

является регулятором фундаментальности ПРЧ $\widehat{\mathfrak{D}}^1_P$.

Искомый алгорифм $\mathfrak{D}_{\mathscr{D}}$ строим так, что

$$\mathfrak{D}_{\mathscr{D}}(P) \doteq \{\widehat{\mathfrak{D}}^1_P\} \diamond \{\mathrm{Id}\}.$$

Из сказанного выше следует, что этот алгорифм перерабатывает всякое слово P в КДЧ.

Предположим, что $\neg\,!\mathfrak{D}(P)$. Тогда при любом n

$$[\mathfrak{D}](P, n) \not\doteq \Lambda$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{D}^1(P, n) \doteq 2^{-n-1},$$

откуда вытекает, что

$$\mathfrak{D}_{\mathscr{D}}(P) = 0.$$

Пусть теперь $!\mathfrak{D}(P)$ и $\mathfrak{D}(P) \doteqdot 0$. Тогда $!V(P)$ и при $n \geqslant V(P)$

$$\mathfrak{D}^1(P, n) \doteqdot 2^{-V(P)-1}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{D}_{\mathscr{D}}(P) \doteqdot 2^{-V(P)-1} > 0,$$

чем установлено свойство 2) алгорифма $\mathfrak{D}_{\mathscr{D}}$. Свойство 3) устанавливается совершенно аналогично.

В дальнейшем мы будем использовать следующий сокращенный оборот речи. Пусть $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_k$ — n-местные отношения. Рассмотрим дизъюнкцию

$$(1) \quad \mathscr{A}_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \mathscr{A}_2(x_1, \ldots, x_n) \vee \ldots \\ \ldots \vee \mathscr{A}_k(x_1, \ldots, x_n).$$

Будем говорить, что алгорифм α указывает для любых КДЧ $x_1, \ldots, x_n$ верный член дизъюнкции (1), если он перерабатывает всякое слово $x_1, \ldots, x_n$ (где все x_i — КДЧ) в одно из натуральных чисел от 1 до k, причем если $\alpha(x_1, \ldots, x_n) \doteqdot i$, то выполняется $\mathscr{A}_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Будем говорить, что алгорифм α указывает верный член дизъюнкции (1) для любых КДЧ $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию $\mathscr{A}$, если он перерабатывает любое слово $x_1, \ldots, x_n$ (где все x_i — КДЧ) такое, что выполняется $\mathscr{A}(x_1, \ldots, x_n)$, в одно из натуральных чисел от 1 до k, причем если $\alpha(x_1, \ldots, x_n) \doteqdot i$, то выполняется $\mathscr{A}_i(x_1, \ldots, x_n)$.

При конструктивном понимании дизъюнкции для того, чтобы утверждать, что $\forall x(\mathscr{A}_1(x) \vee \mathscr{A}_2(x))$, нужно построить алгорифм, указывающий для каждого x верный член дизъюнкции $\mathscr{A}_1(x) \vee \mathscr{A}_2(x)$. Следовательно, утверждение $\neg\forall x(\mathscr{A}_1(x) \vee \mathscr{A}_2(x))$ означает лишь невозможность такого алгорифма, тогда как при традиционном понимании дизъюнкции это утверждение всегда связывается с существованием конкретного x, при котором выполняются $\neg\mathscr{A}_1(x)$ и $\neg\mathscr{A}_2(x)$. Указанное различие в трактовке дизъюнкции приводит к внешней парадоксальности некоторых формулировок, возникающей, по существу, вследствие обозначения одним и тем же знаком разных логических операторов.

Теорема 1. *Невозможен алгорифм, применимый к КДЧ x тогда и только тогда, когда $x = 0$.*

Доказательство. Предположим, что построен алгорифм φ такой, что

$$!\varphi(x) \equiv x = 0. \tag{2}$$

Построим алгорифм $\mathfrak{H}_{\mathfrak{D}}$ согласно лемме 1 и алгорифм φ' такой, что при любом P в $Ч_0$

$$\varphi'(P) \simeq \varphi(\mathfrak{H}_{\mathfrak{D}}(P)).$$

Поскольку, ввиду леммы 1,

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{D}}(P) = 0 \equiv \neg\, !\mathfrak{H}(P),$$

то из (2) вытекает, что при любом P в $Ч_0$

$$!\varphi'(P) \equiv \neg\, !\mathfrak{H}(P).$$

Это, однако, невозможно.

Следствие 1. *Каково бы ни было КДЧ y, невозможен алгорифм, применимый к КДЧ x тогда и только тогда, когда $x = y$.*

Доказательство. Пусть такой алгорифм φ построен. Построим алгорифм φ' такой, что

$$\varphi'(z) \simeq \varphi(z + y).$$

Очевидно,

$$!\varphi'(z) \equiv z = 0.$$

Это, как только что доказано, невозможно.

Следствие 2. *Каково бы ни было КДЧ y, множество КДЧ, равных y (т. е. вырожденный сегмент $y \triangle y$), не является перечислимым* *).

Теорема 2. *Невозможен алгорифм, указывающий для любого КДЧ x верный член дизъюнкции*

1) $(x = 0) \vee (x \neq 0)$;

2) $(x = 0) \vee (x > 0) \vee (x < 0)$.

---

*) Как уже указывалось в конце § 4 гл. 3, нетрудно показать, что это множество продуктивно.

(При конструктивном понимании дизъюнкции эти утверждения можно соответственно записать как $\neg\forall x((x = 0) \vee (x \neq 0))$ и $\neg\forall x((x = 0) \vee (x > 0) \vee (x < 0))$.)

Доказательство. Эта теорема очевидным образом вытекает из теоремы 1.

Следствие 1 показывает, что вместо 0 в формулировке теоремы 2 могло бы фигурировать произвольное КДЧ, т. е. имеет место следующая

Теорема 3. *Каково бы ни было КДЧ y, невозможен алгорифм, указывающий для любого x верный член дизъюнкции*

1) $(x = y) \vee (x \neq y)$;

2) $(x = y) \vee (x > y) \vee (x < y)$.

Тем более невозможен алгорифм, указывающий для любых x, y верный член дизъюнкции 1), 2) (т. е. $\neg\forall xy((x = y) \vee (x \neq y))$ и $\neg\forall xy((x = y) \vee (x > y) \vee (x < y))$.

Ниже переформулировки результатов, аналогичные теореме 3, опускаются.

Теорема 2 утверждает неразрешимость следующей алгорифмической проблемы: «построить алгорифм, указывающий для каждого КДЧ x верный член дизъюнкции $(x = 0) \vee (x \neq 0)$». Поскольку ни для какого x не может одновременно выполняться $x = 0$ и $x \neq 0$, то алгорифм, о котором идет речь в этой проблеме, должен для каждого x давать строго определенный результат — 1 или 2. По-другому обстоит дело в следующей задаче: «построить алгорифм, указывающий для каждого КДЧ x верный член дизъюнкции $(x \geqslant 0) \vee (x \leqslant 0)$». Здесь интересующий нас алгорифм мог бы для некоторых x (именно, для $x = 0$) указывать любой член дизъюнкции. Это, как кажется, увеличивает шансы на существование такого алгорифма. Тем не менее приведенная только что алгорифмическая проблема, как показал Цейтин [6], неразрешима. Другими словами, имеет место следующее, более сильное, чем теорема 2, утверждение.

Теорема 4. *Невозможен алгорифм, указывающий для всякого КДЧ x верный член дизъюнкции*

$$(x \geqslant 0) \vee (x \leqslant 0)$$

(*т. е.* $\neg\forall x((x \geqslant 0) \vee (x \leqslant 0))$).

Теорема 4 очевидным образом вытекает из следующей леммы (Цейтин [6]).

Лемма 2. *Невозможен алгорифм, применимый к любому КДЧ, аннулирующий всякое положительное КДЧ и не аннулирующий никакого отрицательного КДЧ* *).

Доказательство. Применив лемму 1 к непополнимому алгорифму $\mathfrak{F}$, построим алгорифм $\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}$. Предположим, что существует алгорифм φ, применимый к любому КДЧ, аннулирующий всякое положительное КДЧ и не аннулирующий никакого отрицательного КДЧ.

Построим алгорифм φ' такой, что для любого P

$$\varphi'(P) \simeq \varphi(\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}(P)).$$

Очевидно, для любого P $!\varphi'(P)$.

Построим далее алгорифм φ'' так, чтобы

$$\varphi''(P) \simeq \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \varphi'(P) \doteq \Lambda, \\ 1, & \text{если} \quad \varphi'(P) \not\doteq \Lambda. \end{cases}$$

Поскольку φ' применим к любому слову в $Ч_0$, φ'' также применим к любому слову в $Ч_0$ и перерабатывает всякое слово в этом алфавите в 0 или в 1.

Пусть $!\mathfrak{F}(P)$ и $\mathfrak{F}(P) \doteq 0$. Тогда по лемме 1 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}(P) > 0$. Следовательно, $\varphi'(P) \doteq \Lambda$ и $\varphi''(P) \doteq 0$. Таким образом, $\varphi''(P) \doteq \mathfrak{F}(P)$.

Предположим теперь, что $!\mathfrak{F}(P)$ и $\mathfrak{F}(P) \doteq 1$. Тогда $\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}(P) < 0$, и потому $\varphi'(P) \not\doteq \Lambda$. Следовательно, $\varphi''(P) \doteq 1$. Тем самым $\varphi''(P) \doteq \mathfrak{F}(P)$.

Итак, мы доказали, что φ'' является пополнением $\mathfrak{F}$ относительно $Ч_0$. Это, однако, невозможно.

Отметим, что тогда как при доказательстве теоремы 2 мы воспользовались существованием алгорифма с неразрешимой проблемой распознавания применимости, для доказательства теоремы 4 потребовался более тонкий результат — существование непополнимого алгорифма.

Предоставляем читателю доказать следующее усиление леммы 2: для любого алгорифма, применимого ко

---

*) Мы говорим, что алгорифм аннулирует данное слово, если он перерабатывает его в пустое слово. КДЧ x называется положительным (отрицательным), если $x > 0$ ($x < 0$).

всякому КДЧ и аннулирующего всякое положительное КДЧ, можно указать отрицательное КДЧ, аннулируемое этим алгорифмом.

Из леммы 2 и теоремы 21 § 3 гл. 2 вытекает уже упоминавшаяся раньше невозможность «доопределения в нуле» алгорифма sgn.

Следствие 3. 1) *Невозможен алгорифм* α, *применимый к любому КДЧ и такой, что если* $!\mathrm{sgn}(x)$, *то* $\alpha(x) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \mathrm{sgn}(x)$; 2) *невозможен алгорифм* β *типа* $(\mathcal{D} \to \mathcal{D})$ *такой, что если* $!\mathrm{sgn}(x)$, *то* $\beta(x) \underset{\mathcal{D}}{=} \mathrm{sgn}(x)$.

Отметим также следующее следствие (Цейтин [6]).

Следствие 4. *Каково бы ни было КДЧ* $z > 0$, *невозможен алгорифм, применимый к любому* x *такому, что* $|x| < z$, *аннулирующий всякое КДЧ* x, *для которого* $0 < x < z$, *и не аннулирующий никакого КДЧ* x *такого, что* $-z < x < 0$.

Доказательство. Предположим, что при некотором $z > 0$ такой алгорифм φ построен. Построим алгорифм φ' такой, что

$$\varphi'(x) \simeq \varphi\left(\frac{z \cdot x}{1 + x^2}\right).$$

Поскольку при любом x

$$-z < \frac{z \cdot x}{1 + x^2} < z,$$

алгорифм φ' применим к любому КДЧ, аннулирует всякое положительное КДЧ и не аннулирует никакое отрицательное КДЧ. Это, однако, противоречит лемме 2.

Следствие 5. *Каково бы ни было* $z > 0$, *невозможен алгорифм, указывающий для любого КДЧ* x *такого, что* $|x| < z$, *верный член дизъюнкции*

$$(x \geqslant 0) \vee (x \leqslant 0).$$

Следствие 6. 1) *Невозможен алгорифм, указывающий для всякого* $x \geqslant 0$ *верный член дизъюнкции* $(x > 0) \vee (x = 0)$ (т. е. $\neg \forall x (x \geqslant 0 \supset ((x > 0) \vee (x = 0)))$).

2) *Невозможен алгорифм, указывающий для всякого* $x \leqslant 0$ *верный член дизъюнкции*

$$(x < 0) \vee (x = 0)$$

(*т. е.* $\neg \forall x (x \leqslant 0 \supset ((x < 0) \vee (x = 0)))$).

Доказательство. Следствие 6 может быть доказано непосредственно (аналогично тому, как доказывалась теорема 2). Мы выведем его из теоремы 4. Сделаем это, например, для утверждения 1).

Пусть φ — алгорифм, указывающий для любого $x \geqslant 0$ верный член дизъюнкции $(x > 0) \vee (x = 0)$. Обозначим для произвольного x через x_+ КДЧ $\max(x, 0)$ и построим алгорифм φ' такой, что

$$\varphi'(x) \simeq \varphi(x_+).$$

Поскольку всегда $x_+ \geqslant 0$, то φ' перерабатывает всякое КДЧ в 1 или в 2. Если $\varphi'(x) \doteqdot 1$, то $x_+ > 0$ и, следовательно, $x > 0$. Тем более $x \geqslant 0$. Если же $\varphi'(x) \doteqdot 2$, то $x_+ = 0$ и, следовательно, $x \leqslant 0$. Таким образом, φ' указывает для каждого x верный член дизъюнкции $(x \geqslant 0) \vee (x \leqslant 0)$, что невозможно.

Предоставляем читателю доказать следующие два утверждения.

Следствие 7. *Невозможен алгорифм, указывающий для каждого x верный член дизъюнкции*

$$(|x| = x) \vee (|x| = -x).$$

Следствие 8. *Невозможен алгорифм, указывающий для любых x, y верный член дизъюнкции*

$$(\max(x, y) = x) \vee (\max(x, y) = y)$$

(*то же с заменой* max *на* min).

Имеет также место

Следствие 9. *Невозможен алгорифм, указывающий для любых x, y таких, что $x \cdot y = 0$, верный член дизъюнкции*

$$(x = 0) \vee (y = 0).$$

Действительно, для произвольного x обозначим

$$x_+ \doteqdot \max(x, 0),$$

$$x_- \doteqdot \min(x, 0).$$

Очевидно, $x_+ \cdot x_- = 0$. Если бы алгорифм, о котором идет речь в следствии 9, был возможен, то мы смогли бы построить алгорифм, указывающий для любого x верный член дизъюнкции

$$(x_+ = 0) \vee (x_- = 0).$$

Легко видеть, что этот алгорифм указывал бы для любого x верный член дизъюнкции

$$(x \leqslant 0) \vee (x \geqslant 0),$$

что невозможно.

Отметим некоторые простые алгебраические следствия полученных результатов (Цейтин [6]). (Все алгебраические образования рассматриваются над полем КДЧ.)

Рассмотрим линейное уравнение (с неизвестным x)

(3) $$u \cdot x = v.$$

Лемма 3. *Невозможен алгорифм, применимый к слову u, v, где u, v — КДЧ, тогда и только тогда, когда уравнение* (3) *имеет решение.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из теоремы 1 и того, что при $u = 0$ уравнение (3) имеет решение тогда и только тогда, когда $v = 0$.

Для последующих формулировок нужно выбрать какой-нибудь способ однозначного кодирования матриц и систем линейных уравнений словами в $Ч$. Например, можно использовать следующий способ: матрица (a_{ij} — КДЧ)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

кодируется словом

$$a_{11},\ a_{12},\ \dots,\ a_{1n} * a_{21},\ a_{22},\ \dots,\ a_{2n} * \dots * a_{m1},$$
$$a_{m2},\ \dots,\ a_{mn} *,$$

а система линейных уравнений с этой матрицей и столбцом свободных членов $b_1, \dots, b_m$ кодируется словом

$$K(A) * b_1,\ \dots,\ b_m$$

(где $K(A)$ — код матрицы A).

Термин «вектор порядка n» понимается нами так же как «кортеж КДЧ длины n». Многочлены мы кодируем векторами, составленными из их коэффициентов так, что многочлен (с переменной x) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ кодируется словом $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Ниже, говоря про алгорифмы, определенным образом работающие над матрицами, системами линейных уравнений, многочленами, мы подразумеваем алгорифмы, соответствующим образом работающие над кодами этих объектов.

Из леммы 3, очевидно, вытекает невозможность эффективного распознавания совместности (или несовместности) систем линейных уравнений.

Теорема 5. *При любом $n \geqslant 1$ невозможен алгорифм, применимый ко всякой системе линейных уравнений с n неизвестными и аннулирующий те и только те системы, которые совместны.*

Рассмотрим линейное уравнение (с неизвестным x) вида

(4) $$|v| \cdot x = v.$$

Лемма 4. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий всякое КДЧ v в КДЧ, удовлетворяющее уравнению* (4).

Доказательство. Пусть такой алгорифм α построен. Построим алгорифм α' такой, что

$$\alpha'(v) \simeq \text{Рз}\left(0, \frac{1}{2}, \alpha(v)\right).$$

По определению α и свойствам алгорифма Рз (теорема 21 § 3 гл. 2) мы получаем, что α' перерабатывает всякое КДЧ v в 1 или в 2, причем если $\alpha'(v) \doteq 1$, то $\alpha(v) < \frac{1}{2}$, и если $\alpha'(v) \doteq 2$, то $\alpha(v) > 0$. Однако из $\alpha(v) < \frac{1}{2}$ вытекает, что $v \leqslant 0$, а из $\alpha(v) > 0$ вытекает $v \geqslant 0$. Таким образом, α' указывает при любом v верный член дизъюнкции

$$(v \leqslant 0) \vee (v \geqslant 0),$$

что невозможно.

Теорема 6. *При любом $n \geqslant 1$ невозможен алгорифм, перерабатывающий всякую совместную систему линейных уравнений с n неизвестными в какое-нибудь решение этой системы.*

Вектор $x_1, \ldots, x_n$ назовем ненулевым, если

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 0.$$

Лемма 5. *Можно построить алгорифм, указывающий для любого ненулевого вектора $x_1, \ldots, x_n$ верный член дизъюнкции*

$$(x_1 \neq 0) \vee (x_2 \neq 0) \vee \ldots \vee (x_n \neq 0).$$

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — ненулевой вектор. Обозначим для краткости $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ через X. Ясно, что $X > 0$ и что не могут одновременно выполняться все неравенства

$$x_i^2 < \frac{X}{n} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Поэтому алгорифм Рз хотя бы одно из слов $\frac{X}{2n}$, $\frac{X}{n}$, x_i^2 (где $1 \leqslant i \leqslant n$) перерабатывает в 2. Следовательно, алгорифм α такой, что

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu i \left(1 \leqslant i \leqslant n \,\&\, \text{Рз}\left(\frac{X}{2n}, \frac{X}{n}, x_i^2\right) \mathrel{\dot{=}} 2\right),$$

применим к любому ненулевому вектору $x_1, \ldots, x_n$ и перерабатывает его в одно из натуральных чисел от 1 до n, причем, если $\alpha(x_1, \ldots, x_n) \mathrel{\dot{=}} i$, то $x_i^2 > \frac{X}{2n} > 0$. Лемма доказана.

Теорема 7 (Цейтин [6]). *При любом $n \geqslant 2$ невозможен алгорифм, перерабатывающий всякую систему n линейных однородных уравнений с n неизвестными, имеющую нулевой определитель, в ненулевое решение этой системы.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Рассмотрим произвольную систему (с неизвестными x, y) вида

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} u \cdot x + v \cdot y = 0, \\ u \cdot x + v \cdot y = 0 \end{cases}$$

(где u, v — произвольные КДЧ). Если бы алгорифм, о котором идет речь в теореме, был возможен, то мы могли бы построить алгорифм φ, перерабатывающий всякое слово u, v в ненулевое решение (5). Обозначим через $x_{u,v}$ и $y_{u,v}$ первую и вторую компоненты вектора $\varphi(u, v)$. Пользуясь леммой 5, построим алгорифм φ', указывающий для любых u, v верный член дизъюнкции

$$(x_{u,v} \neq 0) \vee (y_{u,v} \neq 0).$$

Пусть теперь u и v таковы, что $u \cdot v = 0$. Тогда из $x_{u,v} \neq 0$ следует, очевидно, что $u = 0$ (иначе $v = 0$ и $\varphi(u, v)$ не является решением (5)), а из $y_{u,v} \neq 0$ следует $v = 0$.

Таким образом, φ' для любых u, v таких, что $u \cdot v = 0$, указывает верный член дизъюнкции

$$(u = 0) \vee (v = 0),$$

что противоречит следствию 9.

Предлагаем читателю доказать следующие утверждения (Цейтин [6]).

1) Невозможен алгорифм, перерабатывающий всякую симметрическую матрицу в ее ненулевой собственный вектор.

2) Невозможен алгорифм, перерабатывающий всякую симметрическую матрицу в матрицу, преобразующую ее к диагональному виду.

3) Невозможен алгорифм, распознающий делимость многочленов.

4) Невозможен алгорифм, распознающий приводимость произвольного многочлена (над полем КДЧ).

5) Невозможен алгорифм, разлагающий произвольный многочлен на неприводимые (в поле КДЧ) множители.

§ 2. Невозможность некоторых алгорифмов, связанных со сходимостью

1. Пусть $\mathfrak{H}$ — алгорифм, введенный на стр. 191. В основе результатов этого пункта лежит простая конструкция, позволяющая для каждого слова P (в алфавите $Ч_0$) построить последовательность рациональных чисел таким образом, что если $\mathfrak{H}$ неприменим к P, то эта последовательность состоит из одних нулей, и если $\mathfrak{H}$ применим к P, то все члены отвечающей P последовательности, начиная с некоторого места, равны 1.

Лемма 1. *Можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$ таким образом, что для любого слова P и любых натуральных n, k*

1) *если* $\urcorner !\mathfrak{H}(P)$, *то*

$$\mathfrak{A}(P, n) \doteq 0;$$

2) *если* $!\mathfrak{H}(P)$ *и* $\mathfrak{H}$ *заканчивает работу над* P *точно за* k *шагов* (см. п. 10 § 1 гл. 1), *то при* $i < k$

$$\mathfrak{A}(P, i) \doteq 0$$

и при всех $i \geqslant k$

$$\mathfrak{A}(P, i) \doteq 1.$$

Доказательство. Искомый алгорифм $\mathfrak{A}$ строится с помощью теоремы разветвления:

$$\mathfrak{A}(P, n) \doteq \begin{cases} 0, & \text{если} \quad [\mathfrak{H}](P, n) \not\doteq \Lambda, \\ 1, & \text{если} \quad [\mathfrak{H}](P, n) \doteq \Lambda. \end{cases}$$

Очевидно, $\mathfrak{A}$ обладает нужными свойствами *).

Нам потребуется следующая очевидная

Лемма 2. *Невозможен алгорифм* α *(над Ч) такой, что для любого слова* P

1) *если* $\urcorner !\mathfrak{H}(P)$, *то* $!\alpha(P)$ *и* $\alpha(P) \doteq 0$;

2) *если* $!\mathfrak{H}(P)$, *то* $!\alpha(P)$ *и* $\alpha(P) \not\doteq 0$.

Определение 1. *Натуральное число* n *назовем* k*-индикатором фундаментальности ПРЧ (ПДЧ)* α, *если при любых* $i, j \geqslant n$ *выполняется*

$$|\alpha(i) - \alpha(j)| < 2^{-k}.$$

Теорема 1. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий запись любой фундаментальной неотрицательной ограниченной числом* 1 *ПРЧ в* 0*-индикатор фундаментальности этой ПРЧ* **),

Доказательство. Пусть такой алгорифм α построен. Построим алгорифм α' такой, что для любого

---

*) Вместо $\mathfrak{H}$ в формулировке леммы мог бы фигурировать произвольный алгорифм.

**) ПДЧ α мы называем неотрицательной, если при всех n $\alpha(n) \geqslant 0$.

слова P

$$\alpha'(P) \simeq \alpha(\mathfrak{E}\widehat{\mathfrak{A}}_P\mathfrak{Z})$$

(где $\mathfrak{A}$ — алгорифм, построенный согласно лемме 1).

Фиксируем произвольное P и рассмотрим два случая: а) $!\mathfrak{H}(P)$; б) $\neg !\mathfrak{H}(P)$. В каждом из этих случаев, ввиду леммы 1, $\widehat{\mathfrak{A}}_P$ является ПРЧ, удовлетворяющей условиям теоремы. Следовательно, в каждом из этих случаев α' перерабатывает P в 0-индикатор фундаментальности ПРЧ $\widehat{\mathfrak{A}}_P$.

Очевидно, в случае б)

$$\mathfrak{A}(P, \alpha'(P)) \dot{=} 0. \tag{1}$$

Рассмотрим случай а). Пусть $\mathfrak{H}$ заканчивает работу над P точно за k шагов. Если $\alpha'(P) < k$, то, очевидно,

$$|\mathfrak{A}(P, \alpha'(P)) - \mathfrak{A}(P, k)| \dot{=} 1,$$

что невозможно, так как $\alpha'(P)$ — 0-индикатор фундаментальности ПРЧ $\widehat{\mathfrak{A}}_P$. Следовательно, $\alpha'(P) \geqslant k$ и, таким образом, в случае а) выполняется

$$\mathfrak{A}(P, \alpha'(P)) \dot{=} 1. \tag{2}$$

Построим алгорифм α'' такой, что

$$\alpha''(P) \simeq \mathfrak{A}(P, \alpha'(P)).$$

Ввиду (1) — (2) при любом P выполняется

1) если $\neg !\mathfrak{H}(P)$, то $!\alpha''(P)$ и $\alpha''(P) \dot{=} 0$;

2) если $!\mathfrak{H}(P)$, то $!\alpha''(P)$ и $\alpha''(P) \dot{=} 1$.

Это, однако, в силу леммы 2 невозможно.

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий запись всякой фундаментальной ПРЧ в запись регулятора фундаментальности этой ПРЧ.*

Теорема 2 доказана Г. С. Цейтиным в работе [6], где этот результат получается в качестве следствия одной теоремы, относящейся к вложенным сегментам (см. теорему 8, п. 2 данного параграфа).

Читатель без труда может убедиться, что в теоремах 1 и 2 вместо фигурирующих там ПРЧ можно рассматривать ПРЧ, обладающие всеми прежними свойствами и, сверх того, сходящиеся к 0. (Для доказательства усиленных таким образом теорем 1—2 нужно несколько модифицировать лемму 1.) Другими словами, знание предела сходящейся ПРЧ, вообще говоря, не облегчает нахождение эффективной оценки скорости сходимости этой ПРЧ.

Теорема 3. *Невозможен алгорифм γ, перерабатывающий запись всякой неотрицательной ограниченной числом 1 сходящейся ПРЧ β в конструктивное действительное число таким образом, что если x является пределом β, то*

$$|x-\gamma(\Sigma\beta\Xi)|<\frac{1}{2}.$$

Доказательство. Пусть такой алгорифм γ построен. Построим алгорифм γ' так, что

$$\gamma'(P)\simeq\gamma(\Sigma\hat{\mathfrak{A}}_P\Xi)$$

(где $\mathfrak{A}$ — алгорифм, фигурирующий в лемме 1).

Фиксируем произвольное P и рассмотрим случаи: а) $!\mathfrak{H}(P)$; б) $\neg\,!\mathfrak{H}(P)$.

В каждом из этих случаев ПРЧ $\hat{\mathfrak{A}}_P$ удовлетворяет всем условиям теоремы и поэтому γ' перерабатывает P в КДЧ. Кроме того, поскольку в случаях а) и б) $\hat{\mathfrak{A}}_P$ сходится соответственно к 1 и к 0, то

1) если $!\mathfrak{H}(P)$, то

$$|\gamma'(P)-1|<\frac{1}{2}, \tag{3}$$

2) если $\neg\,!\mathfrak{H}(P)$, то

$$|\gamma'(P)|<\frac{1}{2}. \tag{4}$$

Построим алгорифм γ'' так, что

$$\gamma''(P)\simeq\operatorname{sgn}\left(\gamma'(P)-\frac{1}{2}\right).$$

Тогда ввиду (3) и (4) получаем

1) если $!\mathfrak{H}(P)$, то $\gamma''(P)\doteq 1$;

2) если $\neg\,!\mathfrak{H}(P)$, то $\gamma''(P)\doteq -1$,

что невозможно.

Теорема 4. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий запись всякой сходящейся ПРЧ в КДЧ, к которому она сходится.*

Эта теорема является тривиальным следствием предыдущей. В работах Минца [1]—[2] теоремы 2 и 4 распространены на случай произвольных конструктивных метрических пространств, содержащих по крайней мере две различные точки.

Отметим, что теорема 3 является довольно точной: очевидно, число $\frac{1}{2}$ отличается от предела любой фигурирующей в ее формулировке ПРЧ не более чем на $\frac{1}{2}$.

Интересно сопоставить теоремы 3 и 4 с теоремой о полноте конструктивного континуума (§ 2 гл. 3). В доказательстве последней указан эффективный метод, позволяющий вычислять предел любой фундаментальной ПРЧ, исходя из задающего ПРЧ алгорифма и регулятора фундаментальности этой ПРЧ. Теорема 3 показывает, что аналогичный эффективный метод (т. е. алгорифм), использующий в качестве исходных данных лишь задающий ПРЧ алгорифм, невозможен, даже если удовлетвориться некоторой наперед ограниченной точностью. Это обстоятельство говорит о существенности заключающейся в регуляторе фундаментальности данной ПРЧ информации.

Переформулируем полученные результаты в терминах F-чисел и квазичисел.

Пусть осн — по-прежнему (ср. п. 4 § 3 гл. 2) алгорифм такой, что для любого слова $Q \in Ч$

$$\text{осн}(Q) \doteqdot \begin{cases} Q, & \text{если} \quad \Diamond \quad \text{не входит в} \quad Q, \\ Q_1, & \text{если} \quad Q \doteqdot Q_1 \Diamond Q_2 \quad \text{и} \quad \Diamond \quad \text{не входит в } Q_1. \end{cases}$$

Определение 2. *Будем говорить, что слова Q_1, Q_2 имеют одинаковую основу, если*

$$\text{осн}(Q_1) \doteqdot \text{осн}(Q_2).$$

Пусть $\mathscr{A}$ — некоторое n-местное отношение над конструктивными действительными числами.

Определение 3. *Будем говорить, что слова $P_1, \ldots$ $\ldots, P_k$ (где $0 \leqslant k \leqslant n$) вместе с КДЧ $x_{k+1}, \ldots, x_n$ условно выполняют $\mathscr{A}$, если для любых КДЧ $x_1, \ldots, x_k$*

с той же основой, что $P_1, \ldots, P_k$, выполняется

$$\mathscr{A}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Прилагательное «условно» часто будет опускаться.

В частности, F-число q (условно) равно КДЧ x, если всякое КДЧ с той же основной, что и q (а такие КДЧ по определению F-чисел существуют), равно (в смысле отношения $\underset{\mathscr{D}}{=}$) x.

Непосредственно из теорем 2 и 4 вытекают следующие утверждения (Цейтин [6] и Минц [1]—[2]).

Теорема 5. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий всякое F-число в КДЧ с той же основой.*

Теорема 6. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий всякое F-число в равное ему КДЧ.*

Поскольку всякое F-число является квазичислом, получаем

Следствие 1. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий всякое квазичисло в КДЧ с той же основой.*

Следствие 2. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий всякое квазичисло в равное ему КДЧ.*

2. В связи с результатами п. 2 § 2 гл. 3 интересна следующая дополняющая эти результаты теорема Цейтина [6].

Теорема 7. *Каково бы ни было КДЧ u, невозможен алгорифм, перерабатывающий запись всякой вложенной последовательности сегментов с длинами, не меньшими u, в КДЧ, принадлежащее всем сегментам этой последовательности.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай $u = 1$. Покажем, что к задаче построения фигурирующего в теореме алгорифма сводится задача пополнения непополнимого алгорифма $\mathfrak{F}$.

Построим алгорифм $\mathfrak{B}$ (ср. лемму 1 § 1) так, что для любого слова $P \in Ч_0$ и любого n

$$\mathfrak{B}(P, n) \simeq \begin{cases} 0 \triangle 3, & \text{если} \quad [\mathfrak{F}](P, n) \not\simeq \Lambda, \\ 0 \triangle 1, & \text{если} \quad [\mathfrak{F}](P, n) \simeq \Lambda \quad \text{и} \quad \mathfrak{F}(P) \simeq 0, \\ 2 \triangle 3, & \text{если} \quad [\mathfrak{F}](P, n) \simeq \Lambda \quad \text{и} \quad \mathfrak{F}(P) \simeq 1. \end{cases}$$

Очевидно, при любом P алгорифм $\widehat{\mathfrak{B}}_P$ является вложенной последовательностью сегментов с длинами, не меньшими 1, причем а) если $\neg !\mathfrak{F}(P)$, то при любом i

$$\mathfrak{B}(P, i) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 0 \,\Delta\, 3;$$

б) если $\mathfrak{F}$ заканчивает работу над P точно за k шагов и $\mathfrak{F}(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 0$, то при $i \geqslant k$

$$\mathfrak{B}(P, i) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 0 \,\Delta\, 1; \tag{5}$$

в) если $\mathfrak{F}$ заканчивает работу над P точно за k шагов и $\mathfrak{F}(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 1$, то при $i \geqslant k$

$$\mathfrak{B}(P, i) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 2 \,\Delta\, 3. \tag{6}$$

Предположим, что алгорифм, о котором идет речь в теореме, построен. Тогда можно построить алгорифм φ, перерабатывающий всякое слово P в КДЧ, принадлежащее всем сегментам последовательности $\widehat{\mathfrak{B}}_P$. Построим алгорифм φ' так, чтобы

$$\varphi'(P) \simeq \text{Рз}(1, 2, \varphi(P)) - 1.$$

Очевидно, φ' перерабатывает всякое P в 0 или в 1.

Пусть $!\mathfrak{F}(P)$. Если $\mathfrak{F}(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 0$, то, ввиду (5), $\varphi(P) \leqslant 1$ и, следовательно, $\text{Рз}(1, 2, \varphi(P)) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 1$. Таким образом, $\varphi'(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 0$. Аналогично показывается, что из $\mathfrak{F}(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 1$ следует $\varphi'(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 1$. Таким образом, φ' является пополнением $\mathfrak{F}$, что невозможно.

Следствие 3. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий запись всякой вложенной последовательности сегментов в КДЧ, принадлежащее всем сегментам этой последовательности.*

Это следствие получается из теоремы 7 при $u = 0$. Отметим, что из доказательства теоремы 7 видно, что в ее формулировке (так же, как и в формулировке следствия 3) вместо произвольных вложенных последовательностей сегментов можно было бы рассматривать вложенные последовательности рациональных сегментов.

В связи с теоремой 7 возникает вопрос о существовании вложенной последовательности сегментов, для которой было бы невозможно КДЧ, принадлежащее всем сегментам этой последовательности. То что этот вопрос не праздный, показывает существование соответствующих контрпримеров в случае метрических пространств (см. Гелбаум, Олмстед [1]) и теорема Заславского [4; теорема 4.1], дающая пример вложенной последовательности систем сегментов с пустым пересечением. Отрицательный ответ на поставленный вопрос вытекает из следующей теоремы Г. С. Цейтина (Цейтин [6]).

Теорема 8. *Можно построить алгорифм, перерабатывающий запись всякой вложенной последовательности сегментов, в квазичисло, условно принадлежащее всем сегментам этой последовательности.*

Следствие 4. *Невозможна последовательность вложенных сегментов, для которой не существует КДЧ, принадлежащего всем сегментам этой последовательности.*

Теорема 8 проливает дополнительный свет на природу алгорифмических трудностей, связанных с построением общей точки произвольной вложенной последовательности сегментов, показывая, что дело здесь не столько в построении последовательности приближений к искомому КДЧ (такую последовательность согласно теореме 8 можно построить), сколько в оценке скорости сходимости этих приближений. Такая ситуация часто (но не всегда — ср. Кушнер, Цейтин [1]) встречается в алгорифмических проблемах, где речь идет о нахождении КДЧ с некоторым свойством, причем искомое КДЧ не может не существовать.

§ 3. Конструктивные действительные числа и систематические дроби

При введении вычислимых действительных чисел одним из естественных подходов кажется соответствующее уточнение понятий, связанных с систематическими дробями в той или иной системе счисления. Именно на этом пути в 1936 г. Тьюрингом было введено одно из первых понятий вычислимого действительного числа (Тьюринг [1]); вскоре, однако, Тьюринг констатировал, что это понятие является недостаточно общим, и предложил новое определение (Тьюринг [2]), приводящее, по существу, к понятию вычислимого действительного числа, аналогичному принятому нами понятию КДЧ. Приводимые ниже теоремы показывают, что понятие вычислимого действительного числа нецелесообразно связывать с систематическими дробями в той или иной системе счисления.

Круг вопросов, затрагиваемых в этом параграфе, подробно изучался Мостовским [2] и Успенским [2] — [3].

Определение 1. *Пусть n — натуральное число и $n > 1$. Слово Q назовем n-ичной дробью, если Q имеет вид $\{\mathfrak{A}\} \diamond n$, где $\mathfrak{A}$ — арифметически полный алгорифм (в $Ч^a$) такой, что $\mathfrak{A}(0)$ есть целое число и $\mathfrak{A}(i)$ при $i \geqslant 1$ есть натуральное число, меньшее n. Слово Q назовем систематической дробью, если при некотором k ($k > 1$) Q является k-ичной дробью.*

Буква τ (с индексами или без индексов) будет использоваться в данном параграфе в качестве переменной для систематических дробей.

Нетрудно построить алгорифм $\mathfrak{D}^1$ так, что при любом $n > 1$ для любой n-ичной дроби $\{\mathfrak{A}\} \diamond n$ и любого k выполняется

$$\mathfrak{D}^1(\{\mathfrak{A}\} \diamond n,\ k) \underset{\mathscr{P}}{=} \mathfrak{A}(0) + \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{A}(i) \cdot n^{-i}.$$

Очевидно, для любой систематической дроби τ алгорифм $\widehat{\mathfrak{D}}^1_\tau$ есть ПРЧ и алгорифм Id ($\mathrm{Id}(k) \doteqdot k$ при любом k) является регулятором фундаментальности этой ПРЧ.

Построим алгорифм $\mathfrak{D}$ такой, что для любой систематической дроби τ

$$\mathfrak{D}(\tau) \doteqdot \{\widehat{\mathfrak{D}}^1_\tau\} \diamond \{\mathrm{Id}\}.$$

Очевидно, $\mathfrak{D}$ перерабатывает всякую систематическую дробь в КДЧ. Алгорифм $\mathfrak{D}$ осуществляет естественное вложение систематических дробей в систему конструктивных действительных чисел.

Определение 2. 1) *Будем говорить, что систематическая дробь τ равна КДЧ x, и писать $\tau = x$, если $\mathfrak{D}(\tau) \underset{\mathscr{D}}{=} x$.*

2) *Будем говорить, что систематические дроби τ_1, τ_2 равны, и писать $\tau_1 = \tau_2$, если*

$$\mathfrak{D}(\tau_1) \underset{\mathscr{D}}{=} \mathfrak{D}(\tau_2).$$

Определение 3. 1) *Будем говорить, что система КДЧ сводима к системе n-ичных дробей, если можно построить алгорифм, перерабатывающий всякое КДЧ в равную ему n-ичную дробь.*

2) *Будем говорить, что система n-ичных дробей сводима к системе КДЧ, если осуществим алгорифм, перерабатывающий всякую n-ичную дробь в равное ей КДЧ.*

3) *Будем говорить, что система n-ичных дробей сводима к системе k-ичных дробей, если можно построить алгорифм, перерабатывающий всякую n-ичную дробь в равную ей k-ичную дробь.*

4) *Про алгорифм, фигурирующий в каждом из разделов* 1)—3), *будем говорить, что он сводит первую из соответствующих систем ко второй.*

Очевидно, алгорифм $\mathfrak{D}$ при любом n ($n > 1$) сводит систему n-ичных дробей к системе КДЧ. Таким образом, выполняется

Теорема 1. *При любом $n > 1$ система n-ичных дробей сводима к системе КДЧ.*

Пусть $n > 1$. Рассмотрим сегменты вида $\frac{p}{n^i} \Delta \frac{p+1}{n^i}$, где p — любое целое число, i — любое натуральное число. Эти сегменты назовем базисными сегментами ранга i для системы счисления с основанием n.

Определение 4. *Последовательность сегментов $\mathfrak{A}$ назовем n-правильной, если $\mathfrak{A}$ является вложенной последовательностью сегментов и при любом i сегмент $\mathfrak{A}(i)$ является базисным сегментом ранга i для системы счисления с основанием n.*

Ясно, что построение n-ичной дроби, равной данному КДЧ, эквивалентно построению n-правильной последовательности сегментов, общей точкой которой является это КДЧ *). Точнее говоря, имеет место следующая лемма, доказательство которой предоставляется читателю.

Лемма 1. 1) *Можно построить алгорифм $\mathfrak{C}^1$, перерабатывающий всякое слово вида $\{\mathfrak{A}\}$, n, где $n > 1$ и $\mathfrak{A}$ — n-правильная последовательность сегментов, в*

---

*) Нетрудно понять, что непрекрываемость базисных сегментов любого фиксированного ранга является источником возникающих при таком построении затруднений.

n-ичную дробь такую, что КДЧ $\mathfrak{D}(\mathfrak{E}^1(\xi\mathfrak{A}\zeta,\ n))$ принадлежит всем сегментам последовательности $\mathfrak{A}$.

2) *Если $\mathfrak{A}$ — n-правильная последовательность сегментов и КДЧ x принадлежит всем сегментам $\mathfrak{A}$, то x равно n-ичной дроби $\mathfrak{E}^1(\xi\mathfrak{A}\zeta, n)$.*

3) *Можно построить алгорифм $\mathfrak{E}^2$ таким образом, что при любом $n > 1$ для всякой n-ичной дроби τ алгорифм $\widehat{\mathfrak{E}}^2_\tau$ является n-правильной последовательностью сегментов такой, что КДЧ $\mathfrak{D}(\tau)$ принадлежит всем сегментам этой последовательности.*

Непосредственно из леммы 1 усматривается следующая очевидная

Лемма 2. *Можно построить алгорифм, перерабатывающий всякое слово вида r, n, (где r — рациональное число и $n > 1$) в n-ичную дробь, равную r.*

Вопрос о сводимости друг к другу систем систематических дробей при различных основаниях счисления полностью решается следующей теоремой Мостовского — Успенского.

Теорема 2. *Система l-ичных дробей тогда и только тогда сводима к системе m-ичных дробей, когда все простые делители m являются простыми делителями l.*

Доказательство. 1) Пусть все простые делители m делят l. Тогда при некоторых i и k

$$l^i \mathrel{\dot{=}} k \cdot m.$$

Следовательно, всякий конец базисного сегмента для системы счисления с основанием m является концом некоторого базисного сегмента для системы счисления с основанием l. На этом простом замечании и основана конструкция сводящего алгорифма *).

Пусть τ — l-ичная дробь и $\mathfrak{A}$ — соответствующая l-правильная последовательность сегментов. Очевидно, $\mathfrak{A}(0)$ есть сегмент нулевого ранга (в системе с основанием m) и $\mathfrak{A}(0)$ содержит τ. Чтобы найти базисный сегмент 1-го ранга (в системе с основанием m), содержащий τ, разделим $\mathfrak{A}(0)$ на m равных частей. Обозначим через $r_0, \ldots, r_m$ участвующие в этом делении рацио-

*) Мы лишь излагаем соображения, лежащие в основе сводящего алгорифма. Строгое изложение можно найти у Мостовского [2] и Успенского [3].

нальные числа (включая концы $\mathfrak{A}(0)$). Поскольку каждое r_i является концом некоторого базисного сегмента (в системе с основанием l), можно найти j, при котором все r_i являются концами базисных сегментов ранга j (в системе с основанием l). Тогда сегмент $\mathfrak{A}(j)$ включен в точности в один из сегментов $r_i \triangle r_{i+1}$. Этот сегмент и является искомым. Продолжая таким образом, мы перестроим $\mathfrak{A}$ в m-правильную последовательность, имеющую τ своей общей точкой.

2) Пусть не все простые делители m делят l. Тогда, очевидно, число $\frac{1}{m}$ не совпадает с концом никакого базисного сегмента системы счисления с основанием l.

Построим l-ичную дробь $\{\varphi\} \Diamond l$, равную $\frac{1}{m}$. Эту дробь обозначим на время доказательства через τ. Построим алгорифмы ψ и θ так, что

$$\psi(n, k) \mathrel{\dot{=}} \begin{cases} \varphi(k) & \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad n < k; \end{cases}$$

$$\theta(n, k) \mathrel{\dot{=}} \begin{cases} \varphi(k) & \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \\ l-1 & \text{при} \quad n < k. \end{cases}$$

Рассмотрим l-ичные дроби $\{\hat{\psi}_n\} \Diamond l$ и $\{\hat{\theta}_n\} \Diamond l$, обозначив их соответственно через τ_n и $\bar{\tau}_n$.

Очевидно, при любом n

$$(1) \qquad \mathfrak{D}(\tau_n) < \frac{1}{m} < \mathfrak{D}(\bar{\tau}_n).$$

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — непополнимый алгорифм. Построим алгорифм V типа $(Ч_0 \to \mathscr{H})$ так, чтобы для любого слова $P \in Ч_0$ выполнялось

$$!V(P) \equiv !\mathfrak{F}(P),$$

и если $!V(P)$, то $\mathfrak{F}$ заканчивает работу над P точно за $V(P)$ шагов.

Построим далее алгорифм $\mathfrak{A}$ так, чтобы

$$\mathfrak{A}(P, m) \simeq \begin{cases} \varphi(m), \text{ если } [\mathfrak{F}](P, m) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda, \\ \psi(V(P), m), \text{ если } [\mathfrak{F}](P, m) \mathrel{\dot{=}} \Lambda \text{ и } \mathfrak{F}(P) \mathrel{\dot{=}} 0, \\ \theta(V(P), m), \text{ если } [\mathfrak{F}](P, m) \mathrel{\dot{=}} \Lambda \text{ и } \mathfrak{F}(P) \mathrel{\dot{=}} 1. \end{cases}$$

Очевидно, при любом P слово $\xi\hat{\mathfrak{A}}_P\mathfrak{Z}\Diamond l$ является l-ичной дробью. Обозначим эту дробь через τ_P. Нетрудно убедиться, что

1) если $\neg\,!\mathfrak{F}(P)$, то

$$\tau_P = \tau; \tag{2}$$

2) если $!\,\mathfrak{F}(P)$ и $\mathfrak{F}(P) \doteq 0$, то

$$\tau_P = \tau_{V(P)}$$

и, следовательно, ввиду (1),

$$0 \leqslant \tau_P < \tau = \frac{1}{m}; \tag{3}$$

3) если $!\mathfrak{F}(P)$ и $\mathfrak{F}(P) \doteq 1$, то

$$\tau_P = \bar{\tau}_{V(P)}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{m} = \tau < \tau_P. \tag{4}$$

Для произвольной систематической дроби $t \doteq \doteq \xi\alpha\mathfrak{Z}\Diamond k$ обозначим через $\{t\}_i$ целое число $\alpha(i)$.

Предположим, что построен алгорифм $\mathfrak{R}$, сводящий систему l-ичных дробей к системе m-ичных дробей. Построим алгорифм $\mathfrak{R}'$ такой, что

$$\mathfrak{R}'(P) \simeq \mathfrak{R}(\tau_P).$$

Очевидно, $\mathfrak{R}'$ применим к любому слову $P \in Ч_0$ и перерабатывает всякое P в m-ичную дробь, равную τ_P. Построим алгорифм $\mathfrak{R}''$ так, чтобы

$$\mathfrak{R}''(P) \simeq \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \{\mathfrak{R}'(P)\}_0 \geqslant 0 \text{ и } \{\mathfrak{R}'(P)\}_1 > 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ввиду (3), если $!\mathfrak{F}(P)$ и $\mathfrak{F}(P) \doteq 0$, то $\mathfrak{R}''(P) \doteq 0$. Если же $!\mathfrak{F}(P)$ и $\mathfrak{F}(P) \doteq 1$, то, ввиду (4), $\frac{1}{m} < \mathfrak{R}'(P)$ и, следовательно, $\mathfrak{R}''(P) \doteq 1$.

Таким образом, $\mathfrak{R}''$ является пополнением $\mathfrak{F}$, что невозможно.

Следующее следствие является простым примером применения теоремы 2.

Следствие 1. 1) *Можно построить алгорифм, перерабатывающий всякую десятичную дробь в равную ей двоичную дробь.*

2) *Невозможен алгорифм, перерабатывающий всякую двоичную дробь в равную ей десятичную дробь.*

Из теорем 1—2 легко следует

Теорема 3 (Мостовский [2], Успенский [2] — [3] *)). *Каково бы ни было $n > 1$, система КДЧ несводима к системе n-ичных дробей.*

Из теоремы 3 вытекает, что для систематических дробей в произвольной фиксированной системе счисления не сохраняется теорема о полноте. Можно также показать, что в каждой такой системе невозможен алгорифм сложения. Все эти обстоятельства подчеркивают уже высказанное в начале параграфа замечание о том, что нецелесообразно связывать понятие вычислимого действительного числа с систематическими дробями в какой-нибудь системе счисления.

В заключение остановимся на естественно возникающем в связи с теоремой 3 вопросе о существовании КДЧ, для которых невозможны равные им n-ичные (при фиксированном n) дроби. Отрицательный ответ на этот вопрос дается следующей простой теоремой.

Теорема 4. *Пусть $n > 1$. Не существует КДЧ x такое, что невозможна равная ему n-ичная дробь.*

Теорема 4 очевидным образом вытекает из леммы 2 и следующей леммы.

Лемма 3. *Можно построить алгорифм, перерабатывающий всякое слово вида x, n, где x — иррациональное КДЧ, $n > 1$, в n-ичную дробь, равную x.*

Доказательство леммы 3 (и теоремы 4) предоставляется читателю.

---

*) При $n = 2$ эта теорема была по существу отмечена еще Тьюрингом [2].

КОНСТРУКТИВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Основные определения. Некоторые примеры

1. Определение 1. *Алгорифм $\mathfrak{f}$ в алфавите $Ч^a$ назовем конструктивной функцией m переменных ($m \geqslant 1$), если для любых КДЧ $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ таких, что*

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \ldots, x_m = y_m \quad \text{и} \quad !\mathfrak{f}(x_1, \ldots, x_m),$$

выполняется

1) $!\mathfrak{f}(y_1, \ldots, y_m)$;

2) $\mathfrak{f}(x_1, \ldots, x_m)$ *и* $\mathfrak{f}(y_1, \ldots, y_m)$ *суть равные КДЧ.*

Непосредственно из определения усматривается, что конструктивная функция m переменных является алгорифмом типа $(\mathscr{D}^m \dashrightarrow \mathscr{D})$.

Определение 2. *Будем говорить, что конструктивная функция m переменных $\mathfrak{f}$ определена в точке $x_1, \ldots, x_m$, если $!\mathfrak{f}(x_1, \ldots, x_m)$; в противном случае будем говорить, что $\mathfrak{f}$ не определена в этой точке.*

Понятие конструктивной функции было введено Марковым [5] и оказалось весьма удобным при построении ряда разделов конструктивного анализа *). Это понятие является естественным уточнением интуитивных представлений о вычислимых (точечных) функциях над КДЧ **).

---

*) Наши определения отличаются от соответствующих определений Маркова несущественными техническими деталями.

**) Более близким к реальной вычислительной практике представляется аппроксимативный подход к определению вычислимой действительной функции, развивавшийся Гудстейном [2], Шпекером [1], Гжегорчиком [2], [4], Лакомбом [1]. При этом подходе исходными данными функции являются не сами КДЧ, а их рациональные приближения: параллельно уточнению этих приближений уточняются выдаваемые функцией приближения к результату. Вопрос о связи аппроксимативных и точечных вычислимых

Непосредственно из определений 1—2 следует, что неопределенность конструктивной функции (скажем, одной переменной) в точке x связывается с неприменимостью задающего ее алгорифма ко всем КДЧ, равным x. Такой подход не является единственно возможным (ср. Марков [3], Слисенко [3]). Мы еще вернемся к этому вопросу в гл. 9.

В дальнейшем мы будем рассматривать в основном конструктивные функции одной переменной, называя их для краткости просто конструктивными функциями (КФ). КФ, определенную во всякой точке, будем называть всюду определенной. В тех контекстах, где явно не подразумевается противное, термин «функция» будет использоваться нами как сокращение термина «всюду определенная конструктивная функция».

Введем отношение условного вещественного равенства «$\cong$»: два выражения, соединенные знаком «$\cong$», либо оба не определены, либо являются равными КДЧ.

Определение 3. *Будем говорить, что КФ f и g равны (совпадают) на множестве КДЧ $\mathcal{M}$, и писать $f \underset{\mathcal{M}}{=} g$, если при любом x из $\mathcal{M}$*

$$f(x) \cong g(x).$$

Индекс $\mathcal{M}$ в тех контекстах, где это не приводит к недоразумениям, опускается.

Если КФ f и g равны на множестве всех КДЧ $\mathcal{D}$, то будем просто говорить, опуская упоминание о множестве $\mathcal{D}$, что f и g равны.

2. Приведем некоторые примеры конструктивных функций.

а) Простейшими примерами КФ являются алгорифмы Id и $\widehat{\mathrm{Id}}_x^{(1)}$ (где x — некоторое КДЧ). Каково бы

функций будет рассмотрен в девятой главе (где такие функции называются соответственно операторами Клини и Маркова). Наш выбор понятия конструктивной функции в качестве основного понятия обусловлен тем, что, обладая необходимыми чертами интуитивно вычислимых функций, конструктивные функции напоминают точечные функции (в смысле Дирихле) традиционного анализа, что делает более компактными и привычными обозначения и несомненно облегчает первое знакомство с предметом.

ни было КДЧ z,

$$\mathrm{Id}(z) \mathrel{\dot{=}} z,$$

$$\widehat{\mathrm{Id}}_x^{(1)}(z) \mathrel{\dot{=}} x.$$

Простейшими примерами конструктивных функций n переменных ($n > 1$) являются также построенные в п. 7 § 1 гл. 1 «высекающие» алгорифмы B_i (где $1 \leqslant i \leqslant n$). Для любых КДЧ $x_1, \ldots, x_n$ и $1 \leqslant i \leqslant n$

$$B_i(x_1, \ldots, x_n) \mathrel{\dot{=}} x_i.$$

Использование этих алгорифмов, а также теорем сочетания алгорифмов и теоремы о переводе позволяет вводить «фиктивные переменные». Например, располагая КФ f, можно построить конструктивную функцию n переменных ($n > 1$) так, что для любых КДЧ $x_1, \ldots, x_n$

$$g(x_1, \ldots, x_n) \simeq f(x_1).$$

Аналогично, можно «переставлять аргументы»: например, для конструктивной функции двух переменных f можно построить конструктивную функцию двух переменных g так, что при любых x, y

$$g(x, y) \simeq f(y, x).$$

Далее, использование теорем сочетания алгорифмов позволяет рассматривать суперпозиции конструктивных функций. Пусть, например, f — конструктивная функция n переменных, $f_1, \ldots, f_n$ — конструктивные функции. Нетрудно построить конструктивную функцию g такую, что для любых КДЧ $x_1, \ldots, x_n$

$$g(x_1, \ldots, x_n) \simeq f(f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)).$$

б) Как следует из § 4 гл. 2, арифметические операции над КДЧ являются конструктивными функциями (двух и одной переменной). Использование этих операций позволяет ввести многочлены и рациональные дроби. Точнее говоря, можно построить алгорифмы Мн и Рд так, что для любых n, k и КДЧ $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_k, z$ выполняется

$$\text{Мн}(x_0, \ldots, x_n, z) \cong x_0 \cdot z^n + x_1 \cdot z^{n-1} + \ldots + x_n,$$

$$\text{Рд}(x_0, \ldots, x_n * y_0, \ldots, y_k, z) \cong \frac{\text{Мн}(x_0, \ldots, x_n, z)}{\text{Мн}(y_0, \ldots, y_k, z)}.$$

Нетрудно также определить арифметические операции над КФ. Именно, построим алгорифмы $\mathfrak{A}^\delta$ (где δ — один из знаков $\underset{\mathscr{D}}{+}$, $\underset{\mathscr{D}}{-}$, $\underset{\mathscr{D}}{\cdot}$, $\underset{\mathscr{D}}{:}$, $\underset{\mathscr{D}}{\max}$, $\underset{\mathscr{D}}{\min}$) и $\mathfrak{A}^{\mathrm{mod}}$ так, чтобы для любых КФ f, g и КДЧ x

$$\mathfrak{A}^\delta(\xi f \mathfrak{z}, \xi g \mathfrak{z}, x) \simeq \delta(f(x), g(x)),$$

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{mod}}(\xi f \mathfrak{z}, x) \simeq |f(x)|.$$

Очевидно, алгорифмы $\widehat{\mathfrak{A}}^\delta_{\xi f \mathfrak{z}, \xi g \mathfrak{z}}$, $\widehat{\mathfrak{A}}^{\mathrm{mod}}_{\xi f \mathfrak{z}}$ при любых КФ f и g являются конструктивными функциями. Эти функции мы будем обозначать через $\{f+g\}$, $\{f-g\}$, $\{f\cdot g\}$, $\left\{\frac{f}{g}\right\}$, $\{\max(f, g)\}$, $\{\min(f, g)\}$, $\{|f|\}$, причем там, где это не приводит к недоразумениям, фигурные скобки опускаются и функция $\widehat{\mathrm{Id}}^{(1)}_x$ заменяется на x. Например, вместо $\{f+\widehat{\mathrm{Id}}^{(1)}_1\}$ мы будем писать $\{f+1\}$ или даже просто $f+1$.

По теореме 16 § 1 гл. 1 можно построить алгорифмы $\overline{\mathfrak{A}}^\delta$ и $\overline{\mathfrak{A}}^{\mathrm{mod}}$ (где δ — один из знаков $\underset{\mathscr{D}}{+}$, $\underset{\mathscr{D}}{-}$, $\underset{\mathscr{D}}{\cdot}$, $\underset{\mathscr{D}}{:}$, $\underset{\mathscr{D}}{\max}$, $\underset{\mathscr{D}}{\min}$) таким образом, что для любых КФ f и g

$$\overline{\mathfrak{A}}^\delta(\xi f \mathfrak{z}, \xi g \mathfrak{z}) \doteq \xi \overline{\mathfrak{A}}^\delta_{\xi f \mathfrak{z}, \xi g \mathfrak{z}} \mathfrak{z},$$

$$\overline{\mathfrak{A}}^{\mathrm{mod}}(\xi f \mathfrak{z}) \doteq \xi \overline{\mathfrak{A}}^{\mathrm{mod}}_{\xi f \mathfrak{z}} \mathfrak{z}.$$

Например,

$$\overline{\mathfrak{A}}^{\underset{\mathscr{D}}{+}}(\xi f \mathfrak{z}, \xi g \mathfrak{z}) \doteq \xi\{f+g\}\mathfrak{z}.$$

При построении КФ часто оказывается полезной следующая простая лемма «о склеивании конструктивных функций».

Лемма 1. *Пусть f, g — КФ, z — КДЧ, причем $!f(z)$, $!g(z)$ и $f(z)=g(z)$. Можно построить функцию h так, что*

$$h(x) \cong \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \leqslant z, \\ g(x) & \text{при} \quad x \geqslant z. \end{cases}$$

Действительно, искомая функция может быть задана посредством алгорифма h такого, что

$$h(x) \cong f(\min(x, z)) + g(\max(x, z)) - f(z).$$

Нам понадобится в дальнейшем алгорифм θ такой, что для любого интервала $x \nabla y$ алгорифм $\hat{\theta}_{x \nabla y}$ является функцией, причем (рис. 8)

$$\theta(x \nabla y, t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad z \leqslant x, \\ \dfrac{z-x}{y-x} & \text{при} \quad z \in x \triangle y, \\ 1 & \text{при} \quad z \geqslant y. \end{cases}$$

Алгорифм с такими свойствами может быть построен двукратным применением леммы 1. Проще, однако,

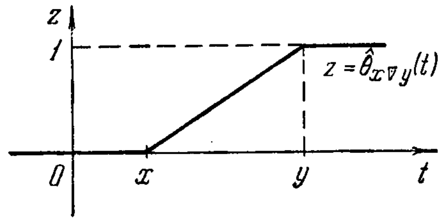


Рис. 8.

воспользовавшись теоремами сочетания алгорифмов и арифметическими операциями, построить θ как алгорифм, для которого выполняется

$$\theta(x \nabla y, z) \cong \frac{y - x + |z - x| - |z - y|}{2 \cdot (y - x)}.$$

в) Алгорифм θ позволяет без труда строить полигональные (кусочно линейные функции). Приведем необходимые определения.

Определение 4. *Функцию f будем называть линейной на промежутке*) $x \between y$ (соответственно слева от x, справа от x и на всей оси), если осуществимы КДЧ u, v такие, что при всяком z, принадлежащем $x \between y$ (соответственно при всяком $z \leqslant x$, $z \geqslant x$ и любом z), выполняется*

$$f(z) = u \cdot z + v.$$

---

*) Напомним, что в тех контекстах, где речь может идти безразлично о сегменте или интервале, мы употребляем термин «промежуток» и обозначение $x \between y$.

КДЧ u и v будем называть соответственно *угловым коэффициентом* и *свободным членом* f на $x ⧖ y$ (слева от x, справа от x, на всей оси).

Очевидно, если f линейна на $x ⧖ y$ и u — ее угловой коэффициент на $x ⧖ y$, то свободный член f может быть найден как $f(x) - u \cdot x$. Далее, если функция f линейна на интервале $x \nabla y$, то ее угловой коэффициент может быть задан как $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Таким образом, для функции, линейной на интервале (или на сегменте положительной длины), легко находятся ее угловой коэффициент и свободный член.

Определение 5. 1) *Кортеж КДЧ* $x_1 * \ldots * x_n$ $(n \geqslant 2)$ *назовем дроблением, если при* $1 \leqslant i < n$

$$x_i \leqslant x_{i+1}.$$

2) *Дробление* $x_1 * \ldots * x_n$ *назовем положительным, если при* $1 \leqslant i < n$

$$x_i < x_{i+1}.$$

3) *Дробление* $x_1 * \ldots * x_n$ *назовем рациональным, если все* x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — *рациональные числа.*

4) *Дробление* $x_1 * \ldots * x_n$ *назовем дроблением сегмента* $u \triangle v$, *если* $u = x_1$, $v = x_n$.

Определение 6. *Дробление* $x_1 * \ldots * x_n$ *назовем определяющим дроблением функции* f, *если* f *линейна на каждом сегменте* $x_i \triangle x_{i+1}$ $(1 \leqslant i < n)$.

Определение 7. 1) *Функцию* f *назовем полигональной на сегменте* $x \triangle y$, *если осуществимо дробление* $x \triangle y$, *являющееся определяющим дроблением функции* f.

2) *Функцию* f *назовем полигональной на всей оси (или, короче, просто полигональной), если она полигональна на некотором сегменте* $x \triangle y$ *и линейна слева от* x *и справа от* y.

Определение 8. *Слово* $\{f\}$, $x_1 * \ldots * x_n$, $v_1 * \ldots * v_{n-1}$ *назовем полигональным шифром функции* f *на* $x \triangle y$, *если* $x_1 * \ldots * x_n$ — *дробление* $x \triangle y$, *являющееся определяющим дроблением* f, *а* v_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ — *угловые коэффициенты* f *на сегментах* $x_i \triangle x_{i+1}$.

Очевидно, функция полигональна на сегменте в том и только в том случае, когда осуществимо слово, являющееся полигональным шифром этой функции на рассматриваемом сегменте. Полигональный шифр функции содержит всю необходимую информацию об этой функции как о полигональной; в этом плане соотношение между записью полигональной функции и ее полигональным шифром примерно такое же, как между F-числом и КДЧ (ср. § 2 гл. 2).

Предлагаем читателю в качестве упражнения доказать, что сумма полигональных на $x \triangle y$ функций есть полигональная на $x \triangle y$ функция; другими словами, осуществим алгорифм, строящий по полигональным шифрам функций f и g на $x \triangle y$ полигональный шифр на $x \triangle y$ функции $\{f + g\}$.

Те конкретные полигональные функции, которые мы будем использовать, будут задаваться с помощью положительных рациональных дроблений. Нетрудно убедиться, что если $T \doteqdot x_1 * \ldots * x_n$ — положительное дробление, $y_1, \ldots, y_n$ — КДЧ, то алгорифм h такой, что

$$h(z) = y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) \cdot \theta(x_i \nabla x_{i+1}, z),$$

является полигональной функцией с определяющим дроблением T, причем $h(z) = y_1$ при $z \leqslant x_1$, $h(x_i) = y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $h(z) = y_n$ при $z \geqslant x_n$. Таким образом, для каждого положительного дробления можно построить полигональную функцию, для которой это дробление является определяющим и которая принимает заданные значения в точках этого дробления.

г) Алгорифм sgn, построенный в § 4 гл. 1, является конструктивной функцией. Напомним, что $\operatorname{sgn}(x) \doteqdot 1$, если $x > 0$, $\operatorname{sgn}(x) \doteqdot -1$, если $x < 0$, и $\urcorner ! \operatorname{sgn}(x)$, если $x = 0$. Использование КФ sgn позволяет строить «ступенчатые» функции. Например, нетрудно построить КФ g такую, что $g(x) \doteqdot 0$ при $x < -1$, $g(x) \doteqdot 1$ при $-1 < x < 0$, $g(x) \doteqdot 2$ при $x > 0$ и g не определена в точках -1 и 0 (рис. 9). (Последнее обстоятельство, ввиду теоремы о неразрывности КФ (§ 2), не является случайным.)

д) Мощным средством построения конструктивных функций является теорема о полноте конструктивного континуума (гл. 3, § 2), позволяющая привлекать для таких построений сходящиеся функциональные последовательности и ряды. Использование известных разложений дает возможность ввести в терминах конструктивных функций элементарные функции (тригонометрические, показательную, степенную и т. д.). Соответствующие конструктивные функции обладают характерными чертами одноименных функций традиционного анализа. (С точки зрения традиционного анализа эти конструктивные функции представляют собой алгорифмы, вычисляющие данные элементарные функции в тех точках

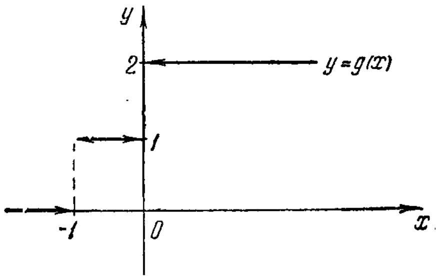


Рис. 9.

(классического) континуума, которые могут быть заданы как КДЧ.)

Мы не останавливаемся подробно на этих вопросах, отсылая читателя к книге Гудстейна [2] и к работам Шанина [6], Слисенко [2], Заславского и Манукян [1].

§ 2. Свойства непрерывности. Равномерно непрерывные функции

1. Наиболее специфическими свойствами конструктивных функций являются свойства непрерывности. Первый существенный шаг в установлении этих свойств был сделан Марковым [3], [5], доказавшим, что конструктивные функции не могут иметь конструктивных разрывов *). Этот результат доведен до логического конца Цейтиным [3]—[5], показавшим, что любая

*) Близкий результат был получен также Мазуром [1].

конструктивная функция непрерывна во всякой точке, в которой она определена.

В этом пункте приводятся упомянутые результаты Маркова и Цейтина. Формулируемые ниже теоремы 1—3 будут доказаны в девятой главе.

Определение 1. 1) *Будем говорить, что КФ f имеет конструктивный разрыв в точке x_0, если $!f(x_0)$ и осуществимы ПДЧ α и натуральное число n_0 такие, что при всяком n*

а) $!f(\alpha(n))$;

б) $|\alpha(n)-x_0|<2^{-n}$;

в) $|f(\alpha(n))-f(x_0)|\geqslant 2^{-n_0}$.

2) *КФ будем называть неразрывной, если она не имеет конструктивных разрывов.*

Теорема 1 (теорема А. А. Маркова о неразрывности конструктивных функций). *Всякая конструктивная функция неразрывна.*

Определение 2. 1) *ПНЧ ω будем называть регулятором непрерывности функции f в точке x_0, если $!f(x_0)$ и при любых n, x таких, что $|x-x_0|<2^{-\omega(n)}$ и $!f(x)$, выполняется*

$$|f(x)-f(x_0)|<2^{-n}.$$

2) *Алгорифм W будем называть регулятором непрерывности функции f, если при любом x таком, что $!f(x)$, алгорифм $\widehat{W}_x$ является регулятором непрерывности f в точке x.*

3) КФ *назовем непрерывной, если осуществим алгорифм, являющийся регулятором непрерывности f.*

Теорема 2. (теорема Г. С. Цейтина о непрерывности конструктивных функций). *Всякая конструктивная функция непрерывна, т. е. осуществим алгорифм $\mathfrak{A}$ такой, что для любой КФ f алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}_{\{f\}}$ является регулятором непрерывности функции f.*

Теорема 2 показывает, что всякая конструктивная функция непрерывна в сильном конструктивном смысле этого слова в любой точке, где она определена. В § 3 нам потребуется следующий более сильный вариант теоремы непрерывности, также принадлежащий Цейтину.

Теорема 3. *Можно построить алгорифмы* σ, τ *и* γ *так, что для любой КФ* f *и натуральных* m, n

1) *если* $!\sigma(\{f\}, m, n)$, *то* $\sigma(\{f\}, m, n)$ — *интервал и* $!\tau(\{f\}, m, n)$;

2) *если* $!\tau(\{f\}, m, n)$, *то* $\tau(\{f\}, m, n)$ — *рациональное число*;

3) *для любого КДЧ* x, *если* $!\sigma(\{f\}, m, n)$, $!f(x)$ *и* $x \in \sigma(\{f\}, m, n)$, *то*

$$|f(x) - \tau(\{f\}, m, n)| \leqslant 2^{-m};$$

4) *для любого КДЧ* x *и любого* m, *если* $!f(x)$, *то* $!\gamma(\{f\}, x, m)$, $\gamma(\{f\}, x, m)$ — *натуральное число, причем*

$$!\sigma(\{f\}, m, \gamma(\{f\}, x, m))$$

и

$$x \in \sigma(\{f\}, m, \gamma(\{f\}, x, m)).$$

Эта теорема, по существу, показывает, что для всякой КФ f и любого m можно построить перечислимое интервальное покрытие области определения f такое, что для любого интервала покрытия колебание f на этом интервале не превосходит 2^{-m}.

2. Определение 3. *Пусть КФ* f *определена в каждой точке сегмента* $x \bigtriangleup y$.

1) *ПНЧ* ω *будем называть регулятором равномерной непрерывности* f *на* $x \bigtriangleup y$, *если при любых* $x_1, x_2 \in x \bigtriangleup y$ *и любом* n *таких, что* $|x_1 - x_2| < 2^{-\omega(n)}$, *выполняется*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < 2^{-n}.$$

2) f *будем называть равномерно непрерывной на* $x \bigtriangleup y$, *если осуществим регулятор равномерной непрерывности* f *на* $x \bigtriangleup y$.

В связи с теоремой о непрерывности конструктивных функций возникает вопрос о том, не является ли всякая всюду определенная, скажем на сегменте $0 \bigtriangleup 1$, КФ равномерно непрерывной на этом сегменте. Ответ на этот вопрос отрицательный, в гл. 8 будут приведены примеры функций, не являющихся равномерно непрерывными на $0 \bigtriangleup 1$.

Устанавливаемые в этом пункте свойства равномерно непрерывных функций изложены в основном в работе Заславского [4]. Для других концепций вычислимых действительных функций аналогичные результаты были установлены Гжегорчиком [2], Лакомбом [1] и Гудстейном [2]. Все упоминаемые ниже конструктивные функции предполагаются всюду определенными.

Определение 4. *Слово вида* $x \triangle y * \{f\} * \{\delta\}$ *назовем равномерным шифром функции* f *на сегменте* $x \triangle y$, *если* δ *является регулятором равномерной непрерывности* f *на* $x \triangle y$.

Равномерные шифры представляют собой естественные исходные данные для алгорифмов, связанных с равномерно непрерывными функциями, — каждый такой шифр содержит исчерпывающую информацию о соответствующей функции как о равномерно непрерывной.

Доказательство следующей простой леммы предоставляется читателю.

Лемма 1. *Пусть* $x_0 * \ldots * x_n$ $(n \geqslant 2)$ — *дробление* (*т. е.* $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$). *Каково бы ни было КДЧ* x *из сегмента* $x_0 \triangle x_n$, *неверно, что* x *не принадлежит ни одному из сегментов* $x_i \triangle x_{i+1}$.

Из леммы 1 без труда следует

Лемма 2. *Если* δ_1, δ_2 — *регуляторы равномерной непрерывности функции* f *на* $x \triangle y$ *и* $y \triangle z$ *и* δ_3 — *такая ПНЧ, что*

$$\delta_3(i) \rightleftharpoons \max(\delta_1(n+1), \delta_2(n+1)),$$

то δ_3 *является регулятором равномерной непрерывности* f *на* $x \triangle z$.

Теорема 4. *Пусть функция* f *равномерно непрерывна на сегментах* $x \triangle y$ *и* $y \triangle z$. *Тогда* f *равномерно непрерывна на сегменте* $x \triangle z$.

Данная теорема утверждает осуществимость алгорифма, строящего по равномерным шифрам произвольной функции на $x \triangle y$ и $y \triangle z$ регулятор равномерной непрерывности этой функции на сегменте $x \triangle z$. Возможность построения такого алгорифма легко усматривается из леммы 2.

Поскольку всякая линейная на данном сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте, то выполняется

Следствие 1. *Всякая полигональная на данном сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте* (*т. е. осуществим алгорифм, перерабатывающий* *полигональный шифр функции в запись регулятора равномерной непрерывности этой функции*).

Определение 5. 1) *Будем говорить, что КДЧ z ограничивает f на $x \triangle y$, если всюду на этом сегменте*

$$|f(t)| \leqslant z.$$

2) *Будем говорить, что функция f ограничена на данном сегменте, если осуществимо КДЧ, ограничивающее f на этом сегменте.*

Определение 6. *КДЧ z назовем верхней (нижней) гранью функции f на $x \triangle y$, если при всяком $t \in \in x \triangle y$ выполняется*

$$f(t) \leqslant z$$

(*соответственно* $f(t) \geqslant z$).

Определение 7. *КДЧ z назовем точной верхней (нижней) гранью функции f на $x \triangle y$, если*

1) *z является верхней (нижней) гранью f на $x \triangle y$;*

2) *можно построить ПДЧ λ такую, что при любом n*

$$\lambda(n) \in x \triangle y$$

и

$$z - f(\lambda(n)) < 2^{-n}$$

(*соответственно* $f(\lambda(n)) - z < 2^{-n}$).

Теорема 5. *Для всякой равномерно непрерывной на $x \triangle y$ функции осуществимы КДЧ, являющиеся точными нижней и верхней гранями этой функции на $x \triangle y$.*

Доказательство. Ограничимся доказательством существования точной верхней грани. Речь идет о построении алгорифма, перерабатывающего равномерный шифр произвольной функции в точную верхнюю границу этой функции (на соответствующем сегменте).

Обозначим на все время доказательства через P произвольный равномерный шифр $x \triangle y * \{f\} * \{\delta\}$, а через $t_{i,n}$ — точки $x + \frac{y-x}{2^n} \cdot i$ $(0 \leqslant i \leqslant 2^n)$.

Построим алгорифм $\mathfrak{A}^1$ так, чтобы при любом слове P рассматриваемого типа и любом n выполнялось

$$\mathfrak{A}^1(P, n) = \max_{0 \leqslant i \leqslant 2^n} f(t_{i,n}). \tag{1}$$

Очевидно, $\widehat{\mathfrak{A}}^1_P$ есть ПДЧ, причем ((1))

$$\mathfrak{A}^1(P, n+1) \geqslant \mathfrak{A}^1(P, n). \tag{2}$$

Построим алгорифм $\mathfrak{A}^2$ такой, что

$$\mathfrak{A}^2(P, n) \simeq \delta(n+1) + G^+(y-x)$$

(где G^+ — алгорифм, удовлетворяющий лемме 6 § 4 гл. 2), и докажем, что $\widehat{\mathfrak{A}}_P^2$ есть регулятор фундаментальности ПДЧ $\widehat{\mathfrak{A}}_P^1$.

Фиксируем произвольное n и рассмотрим i, j такие, что

$$i, \ j \geqslant \mathfrak{A}^2(P, n).$$

Предположим, что

$$(3) \qquad |\mathfrak{A}^1(P, i) - \mathfrak{A}^1(P, j)| > 2^{-n-1}.$$

Не теряя общности, можно считать, что $i > j$. Тогда, ввиду (2), (3), можно записать

$$(4) \qquad \mathfrak{A}^1(P, i) - \mathfrak{A}^1(P, j) > 2^{-n-1}.$$

Допустим далее, что при некотором $0 \leqslant n_0 \leqslant 2^i$ имеет место

$$(5) \qquad \mathfrak{A}^1(P, i) = f(t_{n_0, i}).$$

Из (4)—(5) тогда получаем, что при всех $0 \leqslant l \leqslant 2j$

$$f(t_{n_0, i}) - f(t_{l, j}) > 2^{-n-1}.$$

Это, однако, невозможно, поскольку $i > j$ и

$$\frac{y-x}{2^j} \leqslant \frac{y-x}{2^{G^+(y-x)}} \cdot 2^{-\delta(n+1)} < 2^{-\delta(n+1)}.$$

Таким образом, если выполняется (3), то при всех $0 \leqslant k \leqslant 2^i$

$$\mathfrak{A}^1(P, i) \neq f(t_{k, i}),$$

что противоречит теореме 3 § 4 гл. 2. Следовательно, (3) неверно и имеет место

$$|\mathfrak{A}^1(P, i) - \mathfrak{A}^1(P, j)| \leqslant 2^{-n-1} < 2^{-n},$$

что и требуется.

Пользуясь теоремой о полноте (§ 2 гл. 3), построим теперь алгорифм $\mathfrak{A}^3$ такой, что

$$\mathfrak{A}^3(P) \simeq \lim(\xi \widehat{\mathfrak{A}}_P^1 \zeta, \ \xi \widehat{\mathfrak{A}}_P^2 \zeta).$$

Алгорифм $\mathfrak{A}^3$ перерабатывает всякое слово P рассматриваемого вида в КДЧ, к которому сходится $\widehat{\mathfrak{A}}^1_P$. Можно показать, что это КДЧ и является точной гранью f на $x \triangle y$.

Следствие 2. *Всякая равномерно непрерывная на данном сегменте функция ограничена на этом сегменте* (т. е. *осуществим алгорифм, перерабатывающий равномерный шифр данной функции на данном сегменте в КДЧ, ограничивающее эту функцию на рассматриваемом сегменте*).

Предоставляем читателю доказать следующую теорему.

Теорема 6. *Если функции f и g равномерно непрерывны на $x \triangle y$, то функции $\{f+g\}$, $\{f-g\}$, $\{f \cdot g\}$, $\{|f|\}$ равномерно непрерывны на $x \triangle y$. Если, кроме того, осуществимо n такое, что $|g(t)| \geqslant 2^{-n}$ всюду на $x \triangle y$, то функция $\left\{\frac{f}{g}\right\}$ равномерно непрерывна на $x \triangle y$.*

Отметим, что для доказательства, например, последнего утверждения теоремы нужно указать алгорифм, строящий по равномерным шифрам f и g на $x \triangle y$ и натуральному n такому, что $|g(t)| \geqslant 2^{-n}$ всюду на $x \triangle y$, запись регулятора равномерной непрерывности функции $\left\{\frac{f}{g}\right\}$ на $x \triangle y$.

Теорема 5 намечает некоторую аналогию между равномерно непрерывными конструктивными функциями и непрерывными функциями традиционного анализа. Следует заметить, что хотя эта аналогия подтверждается и рядом других фактов (например, тем, что всякая равномерно непрерывная КФ интегрируема по Риману), она не является очень полной — в частности, в § 2 гл. 8 будет построена равномерно непрерывная на $0 \triangle 1$ КФ, не достигающая на $0 \triangle 1$ своей точной верхней грани.

Важным классом равномерно непрерывных функций являются монотонные функции.

Определение 8. 1) *Функцию f будем называть возрастающей (убывающей) на промежутке $x \between y$, если при любых z_1, z_2 из $x \between y$ таких, что $z_1 < z_2$, выполняется*

$$f(z_1) < f(z_2)$$

(*соответственно*, $f(z_1) > f(z_2)$).

2) *Функцию f будем называть неубывающей (невозрастающей) на $x \between y$, если при всяких z_1, z_2 таких, что $z_1, z_2 \in x \between y$ и $z_1 < z_2$, имеет место*

$$f(z_1) \leqslant f(z_2)$$

(соответственно $f(z_1) \geqslant f(z_2)$).

Определение 9. *Функцию f будем называть строго монотонной (монотонной) на $x \between y$, если она является возрастающей или убывающей (соответственно неубывающей или невозрастающей) на $x \between y$ функцией.*

Следующая теорема показывает, что всякая монотонная на данном сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте.

Теорема 7. *Можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$ таким образом, что для любого сегмента $x \triangle y$ и любой монотонной на этом сегменте функции f алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}_{\{f\},\, x \triangle y}$ является регулятором равномерной непрерывности f на $x \triangle y$.*

Мы ограничимся тем, что наметим доказательство равномерной непрерывности возрастающей на невырожденном сегменте функции. Переход к случаю неубывающей функции проводится рассмотрением вспомогательной функции $g(x) = f(x) + x$, а переход к произвольному сегменту легко выполняется с помощью алгорифма P_3 (теорема 21 § 3 гл. 2).

Итак, пусть функция f возрастает на невырожденном сегменте $x \triangle y$ $(x < y)$. Обозначим через N натуральное число, для которого

$$f(y) - f(x) < 2^N.$$

Пусть $y_{i,n}$ — точки вида $f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{2^{N+n+1}} \cdot i$ (где $0 \leqslant i \leqslant 2^{N+n+1}$).

Очевидно, $y_{i,n} < y_{i+1,n}$ и

$$(6) \qquad |y_{i+1,n} - y_{i,n}| < 2^{-n-1}.$$

Пользуясь теоремой 4 § 4, найдем точки $x_{i,n}$ так, что

$$(7) \qquad f(x_{i,n}) = y_{i,n}.$$

Очевидно,

$$x_{i,n} < x_{i+1,n}.$$

Следовательно, можно найти k_n так, что

$$2^{-k_n} < \min_{0 \leqslant i < 2^{N+n+1}} (x_{i+1,n} - x_{i,n}).$$

Используя (6) — (7) и лемму 1, нетрудно проверить, что при $x_1, y_1 \in x \triangle y$ таких, что

$$|x_1 - y_1| < 2^{-k_n},$$

выполняется

$$|f(x_1) - f(y_1)| < 2^{-n}.$$

Определение 10. *Функцию f назовем кусочно монотонной на сегменте $x \triangle y$, если осуществимо дробление $x_0 * \ldots * x_n$ этого сегмента такое, что f монотонна на каждом сегменте $x_i \triangle x_{i+1}$* $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Из теорем 4 и 7 вытекает

Следствие 3. *Всякая кусочно монотонная на данном сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте.*

3. Использование псевдочисел позволяет получить некоторые интересные результаты о равномерно непрерывных функциях — в частности, установить конструктивный вариант известной теоремы о достижимости точных границ. Мы очень коротко остановимся на этих вопросах.

Примем следующие естественные определения отношений равенства и порядка для псевдочисел (используемые обозначения введены в § 3 гл. 3):

$$q_1 < q_2 \equiv \neg\neg \exists nk \forall m \,(m \geqslant n \supset \underline{q_2}(m) - \underline{q_1}(m) > 2^{-k}),$$

$$q_1 > q_2 \equiv q_2 < q_1,$$

$$q_1 \geqslant q_2 \equiv \neg (q_1 < q_2),$$

$$q_1 \leqslant q_2 \equiv q_2 \geqslant q_1,$$

$$q_1 = q_2 \equiv \forall n \neg\neg \exists m \forall i \,(i \geqslant m \supset |\underline{q_1}(i) - \underline{q_2}(i)| < 2^{-n}).$$

Равенство между КДЧ и псевдочислами, определенное в § 3 гл. 3, можно также ввести, сопоставляя каждому КДЧ x псевдочисло осн$(x) \diamondsuit$ (см. п. 4 § 3 гл. 2).

Пусть $r \mathbin{\overline{\underline{\times}}} s$ — рациональный промежуток. Естественным образом, можно говорить о множестве псевдочисел, принадлежащих этому промежутку. Обозначим возникающее таким образом множество через $\langle r \mathbin{\overline{\underline{\times}}} s \rangle$.

Дальнейшие рассмотрения будут проведены для краткости в случае КФ, определенных на единичном сегменте. Упоминания об этом сегменте часто опускаются.

Определение 11. 1) *Π-оператором назовем алгорифм, переводящий псевдочисла в псевдочисла так, что равные псевдочисла переводятся в равные псевдочисла.*

2) *Π-оператор Ψ назовем продолжением функции f, если при любом КДЧ x (из $0\triangle 1$) и любом псевдочисле q таких, что $x = q$, выполняется $f(x) = \Psi(q)$.*

Почти очевидна

Теорема 8. *Для всякой равномерно непрерывной функции можно построить Π-оператор, являющийся ее продолжением.*

Для равномерно непрерывной функции f *обозначим через* $\bar{f}$ продолжающий ее Π-оператор.

Имеет место следующая теорема (здесь и ниже мы формулируем результаты для точных верхних границ; для точных нижних границ они, разумеется, остаются в силе).

Теорема 9. (Лифшиц [4]). *Для каждой равномерно непрерывной функции f можно построить псевдочисло q (из $0\triangle 1$) так, что $\bar{f}(q)$ равно точной верхней грани f на $0\triangle 1$.*

В силу уже упоминавшихся результатов § 2 гл. 8 для некоторых функций построенное согласно теореме 9 псевдочисло заведомо не равно никакому КДЧ. Поэтому весьма интересна следующая теорема, представляющая собой конструктивную версию результатов Гжегорчика [2] и Лакомба [4] *).

Теорема 10. *Пусть f — равномерно непрерывная функция, КДЧ x — ее точная верхняя грань на $0\triangle 1$. Если псевдочисло q таково, что*

1) $\bar{f}(q) = x$;

2) *можно указать рациональную окрестность точки q такую, что для всех псевдочисел q_1 из этой окрестности, отличных от q, имеет место $\bar{f}(q_1) \neq x$, то осуществимо КДЧ y, равное q.*

Теорема 10 показывает, таким образом, что изолированный экстремум равномерно непрерывной функции вычислим.

Для читателя, придерживающегося традиционной ориентации, заметим, что из первоначального варианта теоремы 10 (сформулированного применительно к классическому континууму) легко следует вычислимость корней полиномов с вычислимыми коэффициентами **).

4. Введенное в предыдущем пункте понятие Π-оператора отличается от понятия всюду определенной конструктивной функции

*) Гжегорчик и Лакомб используют традиционное понятие действительного числа. В работе Лакомба [4] приведена также простая и исчерпывающая характеристика тех множеств действительных чисел, на которых достигаются экстремальные значения вычислимых вычислимо равномерно непрерывных функций. Каждое такое множество получается выбрасыванием из данного сегмента некоторого перечислимого множества рациональных интервалов. Эти результаты также могут быть интерпретированы конструктивно, но мы не имеем возможности углубляться в этот вопрос.

**) Заметим попутно, что основная теорема алгебры имеет место в следующей, гораздо более сильной формулировке (очевидное определение конструктивных комплексных чисел (ККЧ) предоставтолько выбором другой числовой системы (псевдочисел вместо КДЧ). Аналогично примем

Определение 12. 1) *К-оператором называется алгорифм, перерабатывающий квазичисла в квазичисла так, что равные квазичисла перерабатываются в равные квазичисла.*

2) *К-оператор Ψ назовем продолжением функции f, если при любом КДЧ x и любом квазичисле p таких, что $x = p$, выполняется $f(x) = \Psi(p)$.*

П- и *К*-операторы могут наряду с конструктивными функциями рассматриваться как уточнения интуитивной концепции вычислимой (точечной) функции действительной переменной*). Возникающее таким образом расщепление понятий соответствует возможности различных уточнений интуитивной концепции вычислимого действительного числа. (Мы не рассматриваем здесь операторов над *F*-числами, поскольку каждый такой оператор в силу своего определения порождается некоторой конструктивной функцией.)

В этом пункте мы сформулируем некоторые результаты автора (Кушнер [4]—[5]; [11]) о *К*- и *П*-операторах.

Сравнительный объем понятий конструктивной функции и *К*- и *П*-оператора выясняется следующими теоремами. (Термин «функция», как и выше, используется в качестве сокращения термина «всюду определенная конструктивная функция».)

Теорема 11. 1) *Для каждой функции можно построить К-оператор, являющийся ее продолжением.*

2) *Можно построить К-оператор, не являющийся продолжением никакой функции.*

Теорема 12. 1) *Можно построить функцию, для которой невозможен продолжающий ее П-оператор.*

2) *Можно построить П-оператор, не являющийся продолжением никакой функции.*

Заметим, что свойством, указанным в утверждении 1) теоремы 12, обладает, например, эффективно неравномерно непрерывная функция, построенная в доказательстве теоремы 3 § 2 гл. 8.

По аналогии с определением 2 п. 1 можно ввести понятие непрерывности для *К*- и *П*-операторов; однако теорема, аналогичная

ляется читателю): можно построить алгорифм, перерабатывающий всякий полином $P_n(t) = a_0t^n + \ldots + a_n$ (где a_i — ККЧ и $a_0 \neq 0$) в список ККЧ $z_1, \ldots, z_n$ так, что $P_n(t) = a_0 \cdot (t - z_1) \ldots \cdot (t - z_n)$ (см. Оревков [3], ван дер Корпут [1], Гудстейн [3]—[4], Шпекер [3]).

*) Для читателя, не заинтересованного в конструктивной специфике, отметим традиционную интерпретацию *К*- и *П*-операторов. Именно, можно считать, что речь идет об алгорифмических операторах двух типов: в первом случае (*К*-операторы) аргументами и значениями оператора являются коды вычислимых, вычислимо сходящихся последовательностей рациональных чисел, во втором (*П*-операторы) — коды вычислимых, сходящихся (в традиционном смысле этого слова) последовательностей рациональных чисел. (В обоих случаях дополнительно требуется, чтобы оператор сохранял некоторое естественное отношение равенства.)

теореме 2, места не имеет: существуют не непрерывные K- и Π-операторы. Несмотря на это, K- и Π-операторы обладают все же некоторыми свойствами эффективной непрерывности: нужно лишь несколько ослабить требования к регулятору непрерывности (ср. определение 2 п. 1), отказавшись от получения «δ», соответствующего данному $\varepsilon = 2^{-n}$, в виде рационального числа.

Обозначим через $\mathscr{K}^-$ множество квазичисел таких, что $p \in \mathscr{K}^-$ тогда и только тогда, когда ПРЧ $\underline{p}$ не возрастает и

$$\neg\neg \exists n \forall ij\, (i, j \geqslant n \supset \underline{p}(i) = \underline{p}(j))$$

(т. е. задающая p ПРЧ $\underline{p}$ «стабилизируется»).

Ясно, что любое $p \in \mathscr{K}^-$ не может не равняться некоторому рациональному числу.

Следующее определение мы сформулируем для краткости лишь в случае Π-операторов; для K-операторов понятие почти непрерывности вводится совершенно аналогично.

Определение 13. *Π-оператор Ψ назовем почти непрерывным, если можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$, перерабатывающий всякое слово вида q, n (q — псевдочисло, n — натуральное число) в положительное квазичисло, принадлежащее $\mathscr{K}^-$ и такое, что при любом псевдочисле q_1, удовлетворяющем неравенству*

$$|q_1 - q| < \mathfrak{A}(q, n),$$

выполняется

$$|\Psi(q_1) - \Psi(q)| < 2^{-n}.$$

(Таким образом, «δ», соответствующее условию непрерывности в данной точке q при данном $\varepsilon = 2^{-n}$, эффективно находится в виде положительного квазичисла из $\mathscr{K}^-$.)

Теорема 13. 1) *Всякий K-оператор почти непрерывен.*

2) *Всякий Π-оператор почти непрерывен.*

Заметим, что доказательство теоремы 13 опирается на теорему Клини о неподвижной точке (см. Клини [4; § 66], Мальцев [1]) и существенно отличается от доказательств теорем непрерывности, приводимых в гл. 9.

Отметим также, что только что сформулированная теорема непрерывности не мешает K-операторам обладать необычными как для конструктивных, так и для классических функций свойствами. Например, в работе Кушнера [5] указан пример K-оператора (почти непрерывного в силу теоремы 13), принимающего на единичном сегменте в точности два значения (ср. § 4 гл. 5). Для Π-операторов такого рода примеры невозможны.

Из теоремы 11 и теоремы 3 § 2 гл. 8 следует, что существует эффективно неравномерно непрерывные K-операторы. Использование новой по сравнению с гл. 8 конструкции позволяет также построить эффективно неравномерно непрерывную КФ, продолжимую до Π-оператора.

За дальнейшими сведениями о K- и Π-операторах мы отсылаем читателя к уже упоминавшимся работам автора [4]—[5], [11].

§ 3. Структура конструктивных функций

В данном параграфе будет изложена аппроксимационная теорема Цейтина для конструктивных функций. Согласно этой теореме (см. Цейтин [5]) всякая непустая (т. е. определенная хотя бы в одной точке) конструктивная функция допускает равномерное приближение на всей своей области определения посредством некоторых стандартных функций, названных Цейтиным псевдополигональными. Для характеристики псевдополигональных функций следует заметить, что эти функции получаются «склеиванием» согласованных последовательностей «угловых» функций. В свою очередь «угловая» функция — это конструктивная функция, определенная лишь в точках некоторого рационального интервала, кусочно линейная на этом интервале и имеющая на нем не более одной угловой точки (рис. 10).

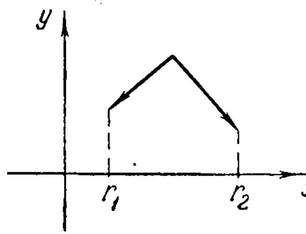


Рис. 10.

Таким образом, область определения псевдополигональной функции получается объединением последовательности рациональных интервалов. В п. 3 § 3 гл. 9 будет показано, что область определения произвольной конструктивной функции может иметь гораздо более сложную структуру. Следует отметить, что несмотря на относительную простоту своего устройства псевдополигональные функции могут обладать необычными с точки зрения традиционного анализа свойствами — например, построенная в § 2 гл. 8 всюду определенная и неограниченная на сегменте $0 \triangle 1$ функция является псевдополигональной. Источником таких свойств псевдополигональных функций служит то обстоятельство, что для конструктивного континуума не имеет места теорема Бореля о выборе конечного покрытия. (Ясно, что если псевдополигональная функция определена на некотором сегменте, то последовательность интервалов, задающая область определения этой функции, образует покрытие данного сегмента.)

Интересным следствием аппроксимационной теоремы Г. С. Цейтина является теорема И. Д. Заславского и Г. С. Цейтина (Цейтин [8]), утверждающая, что всякая конструктивная функция является на всей своей области определения пределом некоторой последовательности всюду определенных полигональных функций. Отсюда, в частности, следует, что любая конструктивная функция является на всей своей области определения пределом некоторой последовательности полиномов.

1. Выполним некоторые предварительные построения.

Лемма 1. *Можно построить алгорифм* $\text{Рз}^{(1)}$, *перерабатывающий всякое слово T вида $x_0 * \ldots * x_n, x$, где $x_0 * \ldots * x_n$ — положительное дробление, x — КДЧ такие, что $n \geqslant 2$ и $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$, в натуральное число, причем*

$$0 \leqslant \text{Рз}^{(1)}(T) \leqslant n-2$$

и

$$x_{\text{Рз}^{(1)}(T)} \leqslant x \leqslant x_{\text{Рз}^{(1)}(T)+2}.$$

Кроме того, если $x_0 < x < x_n$, то

$$x_{\text{Рз}^{(1)}(T)} < x < x_{\text{Рз}^{(1)}(T)+2}.$$

Доказательство. Построим искомый алгорифм $\text{Рз}^{(1)}$, пользуясь теоремами сочетания алгорифмов так, чтобы при всяком $n \geqslant 2$ для любых КДЧ $x_0, \ldots, x_n, x$ выполнялось

$$\text{Рз}^{(1)}(x_0 * \ldots * x_n, x) \simeq$$

$$\simeq \begin{cases} 0, & \text{если } \text{Рз}(x_0, x_1, x) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 1, \\ n-2, & \text{если } \text{Рз}(x_i, x_{i+1}, x) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 2 \text{ для всех } i \text{ таких, что } 0 \leqslant i \leqslant n-1, \\ j, & \text{если } 0 < j \leqslant n-2, \quad \text{Рз}(x_{j+1}, x_{j+2}, x) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 1 \text{ и при } 0 \leqslant k \leqslant j \ \text{Рз}(x_k, x_{k+1}, x) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 2. \end{cases}$$

Пусть теперь $S \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} x_0 * \ldots * x_n$ — положительное дробление, x — КДЧ. Тогда, очевидно, $\text{Рз}^{(1)}$ перерабатывает слово S, x в натуральное число, заключенное между 0 и $n-2$. Предположим далее, что $x \in x_0 \triangle x_n$.

а) Если $\text{Рз}(x_0, x_1, x) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 1$, то $\text{Рз}^{(1)}(S, x) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} 0$. В рассматриваемом случае $x < x_1$. Следовательно, подавно

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_2.$$

При этом, если $x \in x_0 \nabla x_n$, то, очевидно,

$$x_0 < x < x_2.$$

б) $\text{Рз}(x_i, x_{i+1}, x) \doteq 2$ при $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Тогда $\text{Рз}^{(1)}(S, x) \doteq n-2$. Поскольку, в частности, выполняется $\text{Рз}(x_{n-1}, x_n, x) \doteq 1$, то $x \geqslant x_{n-1}$. Следовательно,

$$x_{\text{Рз}^{(1)}(S,\,x)} \leqslant x \leqslant x_{\text{Рз}^{(1)}(S,\,x)+2},$$

причем если $x \in x_0 \nabla x_n$, то

$$x_{\text{Рз}^{(1)}(S,\,x)} < x < x_{\text{Рз}^{(1)}(S,\,x)+2}.$$

в) Пусть j таково, что $0 < j \leqslant n-2$, $\text{Рз}(x_{j+1}, x_{j+2}, x) \doteq 1$ и при $0 \leqslant k \leqslant j$ $\text{Рз}(x_k, x_{k+1}, x) \doteq 2$. Тогда, очевидно, $\text{Рз}^{(1)}(S, x) \doteq j$ и

$$x_j < x < x_{j+2},$$

чем и заканчивается доказательство леммы.

Определение 1. *Системой сегментов (интервалов) назовем всякое слово T вида $P_0 * \ldots * P_n$, где все P_i — сегменты (интервалы). Про сегмент (интервал) P_i будем говорить, что он входит в систему T, и писать $P_i \in T$.*

Лемма 2 (Цейтин [5]). *По всякой последовательности рациональных интервалов Ψ можно построить стройный алгорифм Φ так, что* *)

1) *для всякого n, если $!\Phi(n)$, то $\Phi(n)$ — рациональный интервал;*

2) *если $m \neq n$ и $!\Phi(m)$, $!\Phi(n)$, то интервалы $\Phi(m)$, $\Phi(n)$ дизъюнктны (т. е. не имеют общих внутренних точек);*

3) *осуществим алгорифм λ, перерабатывающий всякое n, к которому применим Φ, в натуральное число такое, что интервал $\Phi(n)$ включен в интервал $\Psi(\lambda(n))$;*

4) *осуществимы алгорифмы γ_1, γ_2, перерабатывающие всякое слово вида x, m такое, что $x \in \Psi(m)$, в натуральное число так, что $!\Phi(\gamma_1(x, m))$, $!\Phi(\gamma_2(x, m))$,*

$$K^{\text{п}}(\Phi(\gamma_1(x, m))) = K^{\text{л}}(\Phi(\gamma_2(x, m)))$$

*) Напомним, что алгорифм Φ называется стройным, если при всяком k из $!\Phi(k+1)$ следует $!\Phi(k)$.

и

$$K^{л}(\Phi(\gamma_1(x, m))) < x < K^{п}(\Phi(\gamma_2(x, m)))\ ^{*)};$$

5) *если последовательность* Ψ *такова, что осуществимы алгорифмы* λ_1, λ_2 *типа* $(\mathscr{H} \to \mathscr{H})$, *для которых при всяком* n *выполняется*

$$K^{л}(\Psi(n)) \in \Psi(\lambda_1(n)),$$

$$K^{п}(\Psi(n)) \in \Psi(\lambda_2(n)),$$

то алгорифм Φ *арифметически полн (т. е. применим к любому натуральному числу) и осуществимы алгорифмы* λ_1', λ_2' *типа* $(\mathscr{H} \to \mathscr{H})$ *такие, что при любом* n

$$K^{л}(\Phi(n)) = K^{п}(\Phi(\lambda_1'(n))),$$

$$K^{п}(\Phi(n)) = K^{л}(\Phi(\lambda_2'(n))).$$

(Другими словами, для всякого интервала последовательности Φ можно найти смежные с ним справа и слева интервалы этой последовательности.)

Доказательство**). Пусть Ψ — последовательность рациональных интервалов. Построим сначала некоторую последовательность систем рациональных интервалов K.

Будем для краткости обозначать левый и правый концы интервала $\Psi(n)$ через r_n и s_n.

Положим

$$K_0 \rightleftharpoons r_0 \nabla \frac{r_0 + s_0}{2} * \frac{r_0 + s_0}{2} \nabla s_0.$$

Пусть уже построена система рациональных интервалов K_n. Систему K_{n+1} строим следующим образом. Рассмотрим интервал $\Psi(n+1)$. Возможны случаи***):

1) $\Psi(n+1)$ не имеет общих внутренних точек с интервалами системы K_n;

2) $\Psi(n+1)$ включен в один из интервалов системы K_n;

---

*) Напомним, что алгорифмы $K^{п}$ и $K^{л}$ перерабатывают всякий промежуток соответственно в его правый и левый концы.

**) Более строгое доказательство можно найти в работе Цейтина [5].

***) Здесь и в дальнейшем следует иметь в виду, что отношения порядка и равенства рациональных чисел разрешимы.

3) $\Psi(n+1)$ имеет общие внутренние точки с интервалами системы K_n, но не включен ни в один из интервалов K_n.

В первом и втором случаях соответственно полагаем

$$K_{n+1} \mathrel{\dot{=}} K_n * r_{n+1} \nabla \frac{r_{n+1}+s_{n+1}}{2} * \frac{r_{n+1}+s_{n+1}}{2} \nabla s_{n+1}$$

и

$$K_{n+1} \mathrel{\dot{=}} K_n.$$

В третьем случае пусть $t_0 \mathrel{\dot{=}} r_{n+1}$, $t_{p_n+1} \mathrel{\dot{=}} s_{n+1}$ и $t_1, \ldots$ $\ldots, t_{p_n}$ — все различные концы интервалов системы K_n, попавшие в интервал $\Psi(n+1)$ и занумерованные в порядке возрастания так, что

$$t_0 \mathrel{\dot{=}} r_{n+1} < t_1 < t_2 < \ldots < t_{p_n} < s_{n+1} \mathrel{\dot{=}} t_{p_n+1}.$$

Пусть далее $t_{i_1} \nabla t_{i_1+1}, t_{i_2} \nabla t_{i_2+1}, \ldots, t_{i_l} \nabla t_{i_l+1}$ — те из интервалов $t_i \nabla t_{i+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant p_n)$, которые не включены в интервалы системы K_n (отметим, что таких интервалов может и не быть). Систему K_{n+1} определяем присоединением этих интервалов к системе K_n, т. е.

$$K_{n+1} \mathrel{\dot{=}} K_n * t_{i_1} \nabla t_{i_1+1} * t_{i_2} \nabla t_{i_2+1} * \ldots * t_{i_l} \nabla t_{i_l+1}$$

(и $K_{n+1} \mathrel{\dot{=}} K_n$, если все интервалы $t_i \nabla t_{i+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant p_n)$ включены в интервалы системы K_n). Заметим, что можно построить алгорифм, перерабатывающий всякое n в систему K_n.

Нетрудно убедиться (индукцией по n), что при любом n

(1) все интервалы системы K_n попарно дизъюнктны;

(2) всякий интервал системы K_n включен по меньшей мере в один из интервалов $\Psi(0), \ldots, \Psi(n)$.

Покажем теперь, что

(3) для каждого x и n таких, что $x \in \Psi(n)$, можно найти интервалы $a_1 \nabla b_1$, $a_2 \nabla b_2$, входящие в K_n, такие, что $b_1 = a_2$ и $a_1 < x < b_2$.

Действительно, при $n = 0$ утверждение очевидно. Пусть мы умеем находить требуемые интервалы для всех z и k таких, что $k \leqslant n$ и $z \in \Psi(k)$. Пусть $x \in$ $\in \Psi(n+1)$. При переходе от системы K_n к K_{n+1} могли представиться случаи 1) — 3). Рассмотрим эти случаи.

В случае 1) утверждение очевидно.

В случае 2) можно найти интервал $a \nabla b$, принадлежащий K_n и содержащий $\Psi(n+1)$. Тогда, очевидно, $x \in a \nabla b$ и, ввиду (2), можно найти m так, что $m \leqslant n$ и $x \in \Psi(m)$. По индукционному предположению можно найти интервалы системы K_m с требуемым свойством. Эти интервалы, очевидно, входят и в систему K_{n+1}.

В случае 3), пользуясь леммой 1, найдем i такое, что $0 \leqslant i \leqslant p_n - 1$ и

$$t_i < x < t_{i+2}.$$

Рассмотрим интервалы $t_i \nabla t_{i+1}$ и $t_{i+1} \nabla t_{i+2}$. Если, например, $t_i \nabla t_{i+1}$ не включен ни в какой интервал системы K_n, то этот интервал входит в K_{n+1}. Если же $t_i \nabla t_{i+1}$ включен в интервал $a_1 \nabla b_1$ системы K_n, то, поскольку t_{i+1} есть конец некоторого интервала из K_n и все интервалы K_n дизъюнктны, $b_1 = t_{i+1}$. Аналогичное замечание можно сделать и для интервала $t_{i+1} \nabla t_{i+2}$. Таким образом, всегда можно указать два интервала $a_1 \nabla b_1$ и $a_2 \nabla b_2$, входящие в K_{n+1} и такие, что

$$b_1 = a_2 = t_{i+1},$$

$$b_2 \geqslant t_{i+2},$$

$$a_1 \leqslant t_i.$$

Тогда

$$a_1 < x < b_2,$$

что и требовалось *).

Искомый алгорифм Φ строим как стройный алгорифм, перечисляющий без повторений множество рациональных интервалов, входящих в системы K_n (т. е. такое множество рациональных интервалов $\mathscr{M}$, что

$$r \nabla s \in \mathscr{M} \equiv \exists n (r \nabla s \in K_n)).$$

Утверждение 1) очевидно. Утверждения 2) — 4) леммы легко вытекают из (1)—(3). Наметим доказательство утверждения 5). Поскольку, ввиду утверждения 4), существуют натуральные числа, к которым применим Φ, то достаточно показать, что для всякого k, к которому применим Φ, можно найти натуральные числа k_1, k_2 та-

*) В приведенных рассуждениях, по существу, содержится рекурсивное определение алгорифмов, находящих по x и n таким, что $x \in \Phi(n)$, искомые интервалы.

ким образом, что $!\Phi(k_1)$, $!\Phi(k_2)$ и $s'_{k_1} = r'_k$, $s'_k = r'_{k_2}$. (Через r'_i, s'_i мы обозначаем левый и правый концы интервала $\Phi(i)$ (в случае, если $!\Phi(i)$.) Пусть $!\Phi(k)$. Покажем, например, как найти k_1. Пользуясь утверждением 3), найдем l такое, что $\Phi(k)$ включен в $\Psi(l)$. Если $r_l < r'_k$, то $r'_k \in \Psi(l)$. Если же $r_l = r'_k$, то по условиям утверждения 5) мы можем найти m, при котором $r'_k \in \in \Psi(m)$. Следовательно, всегда можно найти j такое, что $r'_k \in \Psi(j)$. Тогда в силу утверждения 4) можно найти j_1, j_2 так, что $!\Phi(j_1)$, $!\Phi(j_2)$ и

$$s'_{j_1} = r'_{j_2},$$

$$r'_{j_1} < r'_k < s'_{j_2}.$$

Отсюда и из утверждения 2) леммы без труда следует, что $r'_k = s'_{j_1}$. Таким образом, в качестве k_1 можно взять j_1. Лемма доказана.

2. Определение 2. *Алгорифм F назовем последовательностью конструктивных функций (или, короче, последовательностью КФ), если при всяком n алгорифм $\hat{F}_n$ является конструктивной функцией* *).

Определение 3. *Последовательность конструктивных функций F назовем согласованной, если при всяких n, m, x таких, что $!F(n, x)$ и $!F(m, x)$, выполняется $F(n, x) = F(m, x)$.*

Определение 4. *КФ f назовем объединением согласованной последовательности КФ F, если*

1) *при всяком m и x, если $!F(m, x)$, то $!f(x)$ и $f(x) = F(m, x)$;*

2) *при всяком x КФ f определена в точке x только в том случае, когда осуществимо m, для которого $!F(m, x)$.*

---

*) Здесь мы несколько уклоняемся от нашего обычного способа введения понятия последовательности конструктивных объектов данного типа. Согласно этому способу последовательностью КФ следовало бы называть алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в запись КФ. Это определение и принятое нами определение 2 по существу приводят к эквивалентным понятиям последовательности КФ; вместе с тем определение 2 кажется нам технически более удобным.

Мы будем использовать следующий сокращенный оборот речи. Пусть F — последовательность КФ, причем при каждом n F_n есть КФ некоторого типа. В такой ситуации мы будем называть F последовательностью КФ данного типа.

Лемма 3. *Для всякой согласованной последовательности КФ можно построить КФ, являющуюся ее объединением.*

Доказательство. Пусть F — согласованная последовательность КФ. Обозначим через $\mathcal{M}_x$ множество натуральных чисел таких, что

$$n \in \mathcal{M}_x \equiv !F(n, x).$$

Очевидно, множества $\mathcal{M}_x$ перечислимы. Построим алгорифм $\mathfrak{A}$ так, чтобы при всяком x алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}_x$ был стройным алгорифмом, перечисляющим $\mathcal{M}_x$ (теорема 7 § 3 гл. 1). Построим далее алгорифм f так, чтобы

$$f(x) \simeq F(\mathfrak{A}(x, 0), x).$$

Покажем, что f и есть искомая конструктивная функция.

1) Пусть при некоторых m, x $!F(m, x)$. Тогда $m \in \mathcal{M}_x$. Следовательно, $!\mathfrak{A}(x, 0)$, и так как $\mathfrak{A}(x, 0) \in \mathcal{M}_x$, то $!F(\mathfrak{A}(x, 0), x)$, т. е. $!f(x)$. Ввиду согласованности последовательности F получаем

$$f(x) \doteq F(\mathfrak{A}(x, 0), x) = F(m, x),$$

откуда

$$f(x) = F(m, x).$$

2) Пусть $!f(x)$. Тогда $!\mathfrak{A}(x, 0)$ и $\mathfrak{A}(x, 0)$ есть натуральное число, причем

$$f(x) = F(\mathfrak{A}(x, 0), x).$$

Для завершения доказательства осталось показать, что f есть КФ. Пусть при некотором x $!f(x)$ и $y = x$. Тогда $!F(\mathfrak{A}(x, 0), x)$. Отсюда, так как F — последовательность КФ, следует, что $!F(\mathfrak{A}(x, 0), y)$. Следовательно, $\mathfrak{A}(x, 0) \in \mathcal{M}_y$. Поэтому $!F(\mathfrak{A}(y, 0), y)$, т. е. $!f(y)$. Далее, ввиду согласованности F,

$$F(\mathfrak{A}(y, 0), y) = F(\mathfrak{A}(x, 0), y) = F(\mathfrak{A}(x, 0), x).$$

Следовательно, $f(x) = f(y)$, чем и заканчивается доказательство.

Определение 5. *Конструктивную функцию* φ *назовем угловой, если можно найти рациональные числа* $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ *такие, что* $r_1 < r_2$ *и при всяком* x

1) *если* $r_1 < x < r_2$, *то*

$$\varphi(x) = r_4 \cdot |x - r_3| + r_5 \cdot x + r_6;$$

2) *алгорифм* φ *применим к* x *только в том случае, когда* $r_1 < x < r_2$.

Интервал $r_1 \nabla r_2$ будем называть *носителем* угловой функции φ, а значения функции $r_4 \cdot |x - r_3| + r_5 \cdot x_6 + r_6$ на концах $r_1 \nabla r_2$ — *предельными значениями* φ в точках r_1 и r_2.

Вполне очевидна следующая

Лемма 4. *Для всяких рациональных чисел* $r_1, r_2, r_3, t_1, t_2, t_3$ *таких, что* $r_1 < r_3 < r_2$, *можно построить угловую функцию с носителем* $r_1 \nabla r_2$, *предельными значениями* t_1, t_2 *в точках* r_1, r_2, *принимающую в точке* r_3 *значение, равное* t_3 (рис. 11).

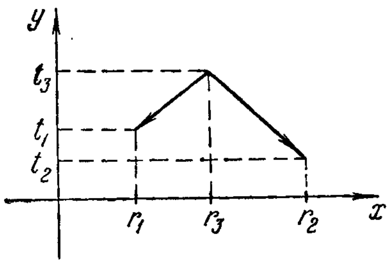


Рис. 11.

В самом деле, положим

$$k_1 \rightleftharpoons \frac{t_3 - t_1}{r_3 - r_1}, \quad k_2 \rightleftharpoons \frac{t_2 - t_3}{r_2 - r_3},$$

$$r_4 \rightleftharpoons \frac{k_2 - k_1}{2}, \quad r_5 \rightleftharpoons \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad r_6 \rightleftharpoons t_3 - r_3 \cdot r_5$$

и рассмотрим КФ φ' такую, что

$$\varphi'(x) = r_4 \cdot |x - r_3| + r_5 \cdot x + r_6.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\varphi'(r_1) = t_1,$$
$$\varphi'(r_2) = t_2,$$
$$\varphi'(r_3) = t_3.$$

Далее, пользуясь алгорифмом sgn, нетрудно построить КФ ψ такую, что (ср. пример г) § 1)

1) если $!\psi(x)$, то $\psi(x) \mathrel{\overset{\cdot}{=}} x$;

2) $!\psi(x) \equiv x \in r_1 \bigtriangledown r_2$.

Пользуясь теоремой композиции алгорифмов, построим алгорифм φ так, что

$$\varphi(x) \simeq \varphi'(\psi(x)).$$

Очевидно, φ является искомой угловой функцией.

Определение 6. *КФ φ назовем псевдополигональной, если φ является объединением согласованной последовательности угловых функций.*

Определение 7. *КФ φ назовем непустой, если φ не является нигде не определенной функцией (т. е. $\neg\forall x(\neg !\varphi(x))$).*

Сформулируем теперь аппроксимационную теорему Цейтина [5].

Теорема 1. *Для всякой непустой КФ f и всякого n можно построить псевдополигональную функцию φ так, что при любом КДЧ x, если $!f(x)$, то $!\varphi(x)$ и*

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant 2^{-n}.$$

Доказательство. Пусть f — непустая КФ, n — натуральное число. Построим сначала искомую псевдополигональную функцию в предположении, что мы располагаем алгорифмами Φ и τ со следующими свойствами.

(4) Φ — последовательность рациональных интервалов, причем при $i \neq j$ интервалы $\Phi(i)$ и $\Phi(j)$ дизъюнктны. (Ниже левый и правый концы интервала $\Phi(k)$ обозначаются через r_k и s_k.)

(5) Алгорифм τ перерабатывает всякое натуральное число в рациональное число, причем при любых k и x, если x принадлежит сегменту $r_k \bigtriangleup s_k$ и $!f(x)$, то

$$|f(x) - \tau(k)| \leqslant 2^{-n-1}.$$

(6) Для всякого x, к которому применим алгорифм f, можно найти натуральные числа l и m таким образом, что

$$s_l = r_m$$

и

$$r_l < x < s_m$$

(т. е. осуществимы алгорифмы, перерабатывающие всякий x, для которого $!f(x)$, в искомые натуральные числа *)).

(7) Для всякого m можно найти натуральные числа k и l так, что

$$s_k = r_m$$

и

$$s_m = r_l$$

(т. е. для каждого интервала последовательности Φ осуществимы примыкающие к нему справа и слева интервалы этой последовательности).

Построим алгорифм λ так, чтобы при всяком k

$$\begin{aligned} \lambda(2\cdot k) &\doteq r_k, \\ \lambda(2\cdot k+1) &\doteq s_k. \end{aligned} \tag{8}$$

Очевидно, λ является арифметически полным алгорифмом, перечисляющим множество рациональных чисел, являющихся концами интервалов последовательности Φ.

Для каждого натурального k через k_1 и k_2 обозначим натуральные числа такие, что

$$s_{k_1} = \lambda(k),$$

$$r_{k_2} = \lambda(k).$$

(Такие числа можно найти ввиду (7).)

Назовем число k числом первого типа, если

$$|\tau(k_1) - \tau(k_2)| \leqslant 2^{-n}. \tag{9}$$

Число k назовем числом второго типа, если

$$|\tau(k_1) - \tau(k_2)| > 2^{-n} \text{ **)}. \tag{10}$$

Сопоставим каждому k два рациональных числа t_k^1 и t_k^2 следующим образом.

---

*) В свете определений § 1 гл. 8 можно сказать, что мы располагаем сегментным дизъюнктным покрытием области определения КФ f.

**) Поскольку $\tau(i)$ при любом i есть рациональное число, то свойство быть числом 1-го или 2-го типа алгорифмически проверяемо.

(11) Если k — число 1-го типа, то

$$t_k^1 \mathrel{\underset{\cdot}{=}} t_k^2 \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \frac{\tau(k_1)+\tau(k_2)}{2}.$$

(12) Если k — число 2-го типа, то

$$t_k^1 \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \tau(k_1),$$
$$t_k^2 \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \tau(k_2).$$

Очевидно,

(13) если $\lambda(i) = \lambda(j)$, то $t_i^1 = t_j^1$ и $t_i^2 = t_j^2$.

Кроме того, ввиду (9)—(12), независимо от типа k,

(14) $$\left| t_k^1 - \tau(k_1) \right| \leqslant 2^{-n-1}$$

и

(15) $$\left| t_k^2 - \tau(k_2) \right| \leqslant 2^{-n-1}.$$

Сопоставим теперь каждому k две угловые функции f_k^1 и f_k^2 следующим образом (построение этих функций может быть выполнено с помощью леммы 4).

Если k — число 1-го типа, то $f_k^1 = f_k^2$ и f_k^1 является угловой функцией с носителем $r_{k_1} \nabla s_{k_2}$, принимающей

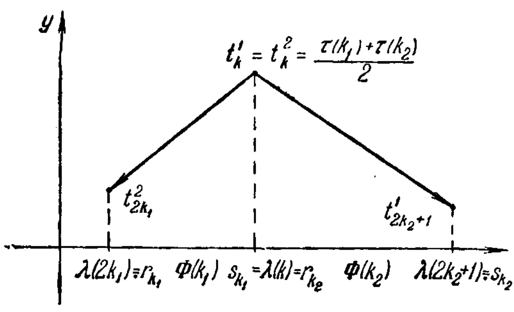


Рис. 12.

в точке $\lambda(k)$ значение $t_k^1 = t_k^2$ и предельные значения $t_{2\cdot k_1}^2$, $t_{2\cdot k_2+1}^1$ в точках r_{k_1} и s_{k_2} (рис. 12). (Очевидно, $\lambda(2\cdot k_1) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} r_{k_1}$ и $\lambda(2\cdot k_2+1) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} s_{k_2}$.)

Если k — число 2-го типа, то f_k^1 имеет носитель $r_{k_1} \nabla \lambda(k)$, линейна на этом интервале и принимает предельные значения $t^2_{2\cdot k_1}$, t^1_k на его концах, f^2_k имеет носитель $\lambda(k) \nabla s_{k_2}$, линейна на этом интервале и принимает на его концах предельные значения t^2_k, $t^1_{2\cdot k_2+1}$ (рис. 13).

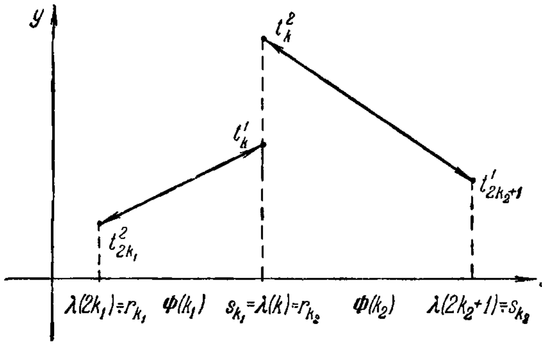


Рис. 13.

Пусть x таков, что $!f(x)$. Ввиду (5) и (14) — (15) имеем

(16) если k — число 1-го типа, то из $r_{k_1} < x \leqslant s_{k_1}$ следует $!f^1_k(x)$ и

$$\left|f(x) - f^1_k(x)\right| \leqslant \left|f(x) - \tau(k_1)\right| + \left|\tau(k_1) - f^1_k(x)\right| \leqslant \\ \leqslant 2^{-n-1} + 2^{-n-1} = 2^{-n},$$

а из $s_{k_1} \leqslant x < s_{k_2}$, следует $!f^2_k(x)$ и

$$\left|f(x) - f^2_k(x)\right| \leqslant 2^{-n};$$

(17) если k — число 2-го типа, то из $x \in \Phi(k_1)$ так же, как и выше, следует $!f^1_k(x)$ и

$$\left|f(x) - f^1_k(x)\right| \leqslant 2^{-n},$$

а из $x \in \Phi(k_2)$ следует $!f^2_k(x)$ и

$$\left|f(x) - f^2_k(x)\right| \leqslant 2^{-n}.$$

Построим теперь алгорифм F так, чтобы

$$F(2 \cdot k,\ x) \simeq f^1_k(x),$$

$$F(2 \cdot k + 1,\ x) \simeq f^2_k(x).$$

Очевидно, F является последовательностью угловых функций. Из (13), дизъюнктности интервалов последовательности Φ и определений функций f_k^1, f_k^2 непосредственно усматривается, что последовательность F согласованная. Пользуясь леммой 3, построим псевдополигональную функцию φ, являющуюся объединением последовательности F. Покажем, что φ — искомая функция. Пусть при некотором x $!f(x)$. Пользуясь (6), найдем k таким образом, что

$$r_k < x < s_{k_2}.$$

Рассмотрим случаи.

1) k — число 1-го типа. Тогда всюду на $r_{k_1} \nabla s_{k_2}$

$$\varphi(t) = f_k^1(t).$$

Предположим, что

$$|\varphi(x) - f(x)| > 2^{-n}.$$

Тогда ввиду (16) не выполняется ни $r_{k_1} < x \leqslant s_{k_1}$, ни $s_{k_1} \leqslant x < s_{k_2}$, что невозможно. Следовательно,

$$|\varphi(x) - f(x)| \leqslant 2^{-n}.$$

2) k — число 2-го типа. Предположим, что $x = \lambda(k)$. Тогда, ввиду (5),

$$|f(x) - \tau(k_1)| \leqslant 2^{-n-1}$$

и

$$|f(x) - \tau(k_2)| \leqslant 2^{-n-1},$$

откуда

$$|\tau(k_1) - \tau(k_2)| \leqslant 2^{-n},$$

что противоречит (10). Следовательно, $x \neq \lambda(k)$, и мы можем (используя принцип Маркова) указать тот из интервалов $\Phi(k_1)$, $\Phi(k_2)$, которому принадлежит x. Пусть, например, $x \in \Phi(k_1)$. Тогда $!f_k^1(x)$, $\varphi(x) = f_k^1(x)$ и согласно (17)

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant 2^{-n}.$$

Таким образом, если $!f(x)$, то $!\varphi(x)$ и

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant 2^{-n},$$

что и требовалось.

Для завершения доказательства теоремы осталось построить алгорифмы Φ и τ, для которых выполнялось бы (4)—(7). Наметим это построение. Пользуясь усиленной формой теоремы о непрерывности конструктивных функций (теорема 3 § 2), построим алгорифмы Ψ_2, τ_2 такие, что

(18) для любого k, если $!\Psi_2(k)$, то $\Psi_2(k)$ — интервал, и если $!\tau_2(k)$, то $\tau_2(k)$ — рациональное число;

(19) при любых k и x, если $!\Psi_2(k)$, $!f(x)$ и $x \in \Psi_2(k)$, то $!\tau_2(k)$ и

$$|f(x) - \tau_2(k)| \leqslant 2^{-n-1};$$

(20) для всякого x такого, что $!f(x)$, можно найти m, при котором $!\Psi_2(m)$ и $x \in \Psi_2(m)$.

Обозначим через $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ множества натуральных чисел, к которым применимы соответственно алгорифмы Ψ_2 и τ_2. Пусть $\mathscr{M}$ — пересечение этих множеств. Очевидно, $\mathscr{M}$ перечислимо. Далее $\mathscr{M}$ непусто (иначе по (19)—(20) f нигде не определена). Следовательно, (теорема 4 § 3 гл. 1), можно построить арифметически полный алгорифм γ, перечисляющий $\mathscr{M}$. Построим алгорифмы Ψ_1 и τ_1 так, что

$$\Psi_1(k) \simeq \Psi_2(\gamma(k)),$$

$$\tau_1(k) \simeq \tau_2(\gamma(k)).$$

Очевидно, Ψ_1 и τ_1 — арифметически полные алгорифмы, причем Ψ_1 есть последовательность интервалов, а τ_1 — последовательность рациональных чисел. Алгорифмы Ψ_1 и τ_1 сохраняют существенные для нас свойства алгорифмов Ψ_2 и τ_2, т. е.

(21) при любом k и x, если $x \in \Psi_1(k)$ и $!f(x)$, то

$$|f(x) - \tau_1(k)| \leqslant 2^{-n-1};$$

(22) для всякого x такого, что $!f(x)$, можно найти k, при котором $x \in \Psi_1(k)$.

Обозначим через x_k, y_k концы интервала $\Psi_1(k)$. Построим алгорифм $\mathfrak{C}$ так, чтобы при любых k и m

$$\mathfrak{C}(k, m) \simeq D^+(x_k, G(y_k - x_k) + 1 + m) \,\nabla$$

$$\nabla\, D^-(y_k, G(y_k - x_k) + 1 + m).$$

Очевидно, при всяком k $\hat{\mathfrak{C}}_k$ есть последовательность рациональных интервалов, строго включенных в интервал $\Psi_1(k)$. Кроме того, при любых k и m

$$0 < a_{k,m} - x_k < 2^{-m}, \tag{23}$$

$$0 < y_k - b_{k,m} < 2^{-m}, \tag{24}$$

где через $a_{k,m}$, $b_{k,m}$ обозначены левый и правый концы интервала $\mathfrak{C}(k, m)$.

Пусть I_2^1, I_2^2 — алгорифмы, введенные в п. 1 § 3 гл. 1 (эти алгорифмы осуществляют взаимно однозначное отображение множества натуральных чисел на множество пар натуральных чисел, т. е. для любой пары m, k можно найти i так, что $I_2^1(i) \doteq m$, $I_2^2(i) \doteq k$). С помощью алгорифмов I_2^2, I_2^1 объединим интервалы вида $\mathfrak{C}(k, l)$ в одну последовательность, т. е. построим алгорифм Ψ такой, что

$$\Psi(m) \simeq \mathfrak{C}(I_2^1(m), I_2^2(m)).$$

Ввиду (23)—(24) для всякого x, принадлежащего $\Psi_1(k)$, можно найти m так, что $x \in \hat{\mathfrak{C}}_k(m)$. (Действительно, в качестве m можно взять, например, число $\max(G(x - x_k), G(y_k - x))$.) Следовательно, для всякого x и k таких, что $x \in \Psi_1(k)$, можно найти l, при котором $x \in \Psi(l)$. Из этого замечания также следует, что для всякого m можно найти l так, что концы интервала $\Psi(m)$ принадлежат $\Psi(l)$.

Построим алгорифм $\bar{\tau}_1$ так, чтобы

$$\bar{\tau}_1(m) \simeq \tau_1(I_2^1(m)).$$

Обозначим через $\bar{a}_m$, $\bar{b}_m$ концы интервала $\Psi(m)$. Сделанные выше замечания, определение алгорифма $\bar{\tau}_1$ и (21)—(22) позволяют сформулировать следующие свойства Ψ и $\bar{\tau}_1$:

(25) для любого k и x, если $!f(x)$ и x принадлежит сегменту $\bar{a}_k \triangle \bar{b}_k$, то

$$|f(x) - \bar{\tau}_1(k)| \leqslant 2^{-n-1};$$

(26) для всякого x такого, что $!f(x)$, можно найти k, при котором $x \in \Psi(k)$;

(27) для всякого k можно найти l так, что

$$\bar{a}_k \in \Psi(l) \quad \text{и} \quad \bar{b}_k \in \Psi(l).$$

Искомый алгорифм Φ получаем теперь применением леммы 2 к алгорифму Ψ. При этом, ввиду (27), будет выполняться заключение утверждения 5) этой леммы. Таким образом, Φ действительно обладает свойствами (4) и (6)—(7). Алгорифм τ построим следующим образом. Пусть λ — алгорифм, фигурирующий в утверждении 3) леммы 2. В рассматриваемом случае λ арифметически полн и при всяком k

$$\Phi(k) \subseteq \Psi(\lambda(k)).$$

Алгорифм τ строим как композицию алгорифмов λ и $\bar{\tau}_1$:

$$\tau(k) \simeq \bar{\tau}_1(\lambda(k)).$$

Ввиду (25) для Φ и τ выполняется (5), чем и заканчивается доказательство.

Предлагаем читателю убедиться, что условие непустоты КФ f в формулировке только что доказанной теоремы существенно: например, невозможен алгорифм F такой, что для любой КФ f $\widehat{F}_{\{f\}}$ есть псевдополигональная функция, причем при всяком x, если $!f(x)$, то $!\widehat{F}_{\{f\}}(x)$ и

$$|F(\{f\}, x) - f(x)| < 1.$$

3. Определение 8. *Всюду определенную КФ f назовем полной полигональной функцией, если осуществимо рациональное дробление $r_0 * \ldots * r_n$ такое, что: 1) f линейна при $x \leqslant r_0$ и $x \geqslant r_n$, причем имеет рациональные угловые коэффициенты; 2) f линейна на каждом сегменте $r_i \Delta r_{i+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ и принимает рациональные значения в точках r_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$.*

Таким образом, на всяком рациональном сегменте, не содержащем точек r_i, f является линейной функцией с рациональными коэффициентами.

Определение 9. *Пусть F — последовательность всюду определенных КФ, f — КФ. Будем говорить, что f является пределом F (или что F сходится к f), и писать $f = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \widehat{F}_n$, если осуществим алгорифм W такой, что* *при всяком* x, *для которого* $!f(x)$, $\widehat{W}_x$ *есть ПНЧ и*

$$\forall kl(k \geqslant \widehat{W}_x(l) \supset |f(x) - \widehat{F}_k(x)| < 2^{-l}).$$

Основным результатом данного пункта является следующая теорема И. Д. Заславского и Г. С. Цейтина (Цейтин [8]).

Теорема 2. *Для всякой конструктивной функции* f *можно построить последовательность полных полигональных функций* F *так, что* $f = \operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \widehat{F}_n$ (*т. е. всякая КФ является пределом некоторой последовательности полных полигональных функций*).

Поскольку для конструктивных равномерно непрерывных функций можно почти дословно воспроизвести доказательство известной аппроксимационной теоремы С. Н. Бернштейна о равномерной сходимости полиномов С. Н. Бернштейна данной функции к этой функции (см. Александров [1] или Натансон [1]), из теоремы 2 вытекает следующее интересное

Следствие 1. *Всякая конструктивная функция является пределом некоторой последовательности полиномов.*

Приводимое ниже сжатое доказательство теоремы 2 почти буквально воспроизводит доказательство данной теоремы в работе Цейтина [8]. Основная конструкция этого доказательства, как отмечает Цейтин, аналогична конструкции, используемой в доказательстве теоремы классической теории функций действительной переменной о том, что равномерный предельный переход не повышает класса функций в классификации Бэра (см. Натансон [1]).

Введем некоторые вспомогательные понятия.

Назовем КФ φ *полигональной на интервале* $x \nabla y$, если осуществима полная полигональная функция, совпадающая с φ на этом интервале.

Назовем КФ φ *частичной полигональной функцией*, если существует система рациональных интервалов $r_0 \nabla s_0 * \ldots * r_n \nabla s_n$ такая, что $s_0 \leqslant r_1$, $s_1 \leqslant r_2, \ldots$ $\ldots, s_{n-1} \leqslant r_n$, φ определена только на интервалах этой системы и полигональна на каждом интервале $r_i \nabla s_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$. Интервалы $r_i \nabla s_i$ называются *интервалами определенности* КФ φ. Частичную полигональную функцию назовем *разделенной*, если любые два несовпадающих интервала определенности этой функции имеют различные концы.

Последовательность КФ F назовем *расширяющейся*, если для любых n, x из $!F(n, x)$ вытекает $!F(n+1, x)$ и $F(n, x) = F(n+1, x)$. Очевидно, всякая расширяющаяся последовательность является согласованной.

Почти очевидны следующие леммы.

Лемма 5. *Всякая псевдополигональная функция является объединением некоторой расширяющейся последовательности частичных полигональных функций и, обратно, объединение всякой расширяющейся последовательности частичных полигональных функций есть псевдополигональная функция.*

Лемма 6. *Всякая псевдополигональная функция является объединением некоторой расширяющейся последовательности разделенных частичных полигональных функций.*

Лемма 7. *Всякая разделенная частичная полигональная функция продолжима до полной полигональной функции.*

Лемма 8. *Всякая разделенная частичная полигональная функция, значения которой ограничены сверху по модулю некоторым числом, продолжима до полной полигональной функции, ограниченной по модулю тем же числом (ср. стр. 222).*

Из лемм 6—8 непосредственно вытекает

Лемма 9. 1) *Для всякой псевдополигональной функции φ можно построить последовательность полных полигональных функций F такую, что для любого x, при котором $!\varphi(x)$, можно найти натуральное l так, что при $n \geqslant l$*

$$\varphi(x) = F(n, x).$$

2) *Пусть φ — псевдополигональная функция, z — КДЧ, причем при всяком x, если $!\varphi(x)$, то $|\varphi(x)| \leqslant z$. Тогда фигурирующую в утверждении 1) последовательность F можно построить так, что при всяком n, x*

$$|F(n, x)| \leqslant z.$$

Лемма 10. *Можно построить алгорифм σ таким образом, что для любой КФ $\mathfrak{f}$ алгорифм $\hat{\sigma}_{\mathcal{E}\mathfrak{f}\mathcal{3}}$ является арифметически полным, и*

1) *если при всех* n $\sigma(\mathcal{E}f\mathcal{Z},\ n) \not\doteq \Lambda$, *то* f — *нигде не определенная КФ*;

2) *если при некотором* k $\sigma(\mathcal{E}f\mathcal{Z},\ k) \doteq \Lambda$, *то можно найти рациональное число* r *такое, что* $!f(r)$.

Доказательство. Искомый алгорифм σ строим так, чтобы

$$\sigma(\mathcal{E}f\mathcal{Z},\ n) \simeq [f]\left(\text{Рц}\left(I_2^1(n)\right),\ I_2^2(n)\right)$$

(Рц — арифметически полный алгорифм, перечисляющий множество всех рациональных чисел).

Очевидно, если при всех n

$$\sigma(\mathcal{E}f\mathcal{Z},\ n) \not\doteq \Lambda,$$

то алгорифм f неприменим ни к какому рациональному числу. Тогда в силу результатов гл. 9 КФ f нигде не определена. (Это легко усматривается также из доказательства теоремы 1 и следствия 1 § 1 гл. 4.)

Если же при некотором k

$$\sigma(\mathcal{E}f\mathcal{Z},\ k) \doteq \Lambda,$$

то алгорифм f заканчивает работу над рациональным числом $\text{Рц}\left(I_2^1(k)\right)$ не более чем за $I_2^2(k)$ шагов. Следовательно, КФ f определена в точке $\text{Рц}\left(I_2^1(k)\right)$.

Лемма 10 позволяет свести доказательство теоремы 2 к случаю, когда f — непустая функция. Действительно, пусть мы располагаем алгорифмом θ^1 таким, что для всякой непустой КФ φ алгорифм $\hat{\theta}^1_{\mathcal{E}\varphi\mathcal{Z}}$ есть последовательность полных полигональных функций, сходящаяся к φ. Построим алгорифм θ таким образом, чтобы для любой КФ f, КДЧ x и n

$$\theta(\mathcal{E}f\mathcal{Z},\ n,\ x) \simeq$$
$$\simeq \begin{cases} 0, & \text{если при } 0 \leqslant i \leqslant n\ \sigma(\mathcal{E}f\mathcal{Z},\ i) \not\doteq \Lambda; \\ \theta^1(\mathcal{E}f\mathcal{Z},\ n,\ x), & \text{если } \sigma(\mathcal{E}f\mathcal{Z},\ k) \doteq \Lambda \text{ при некотором } k \\ & \text{таком, что } 0 \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что для любой КФ f алгорифм $\hat{\theta}_{\mathcal{E}f\mathcal{Z}}$ является последовательностью полных полигональных функций, сходящейся к f.

Наметим теперь доказательство теоремы 2 в случае, когда f — непустая функция. Согласно теореме 1 можно построить последовательность псевдополигональных функций F^1 так, что при всяких m и x

(28) $$\text{если } !f(x), \text{ то } !F^1(m, x)$$

и

(29) $$\left| f(x) - \widehat{F}^1_m(x) \right| < 2^{-m-2}.$$

Построим далее последовательность КФ γ так, что КФ $\hat{\gamma}_m$ определена лишь на интервале $-2^{-m-1} \bigtriangledown 2^{-m-1}$, и если x принадлежит этому интервалу, то

$$\gamma(m, x) = x.$$

(Такой алгорифм γ можно построить, например, с помощью леммы 4.)

Построим алгорифм F^2 так, чтобы

$$F^2(m, x) \simeq \begin{cases} \gamma(m, F^1(m+1, x) - F^1(m, x)), & \text{если } m > 0; \\ F^1(1, x), & \text{если } m = 0. \end{cases}$$

Отметим некоторые свойства F^2.

(30) При всяких m и x, если $!f(x)$, то $!\widehat{F}^2_m(x)$ (это следует из (28) и (29)) и при $m > 0$

$$F^2(m, x) = \widehat{F}^1_{m+1}(x) - \widehat{F}^1_m(x).$$

(31) При всяких m и x, если $!f(x)$, то

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{m} \widehat{F}^2_k(x) \right| < 2^{-m-3}.$$

(32) При всяких $m > 0$ и x, если $!F^2(m, x)$, то

$$\left| \widehat{F}^2_m(x) \right| < 2^{-m-1}.$$

Используя лемму 5, можно показать, что при всяком m алгорифм $\widehat{F}^2_m$ является псевдополигональной функцией. Применяя лемму 9, построим алгорифм H таким образом, что при всяких k, l $\widehat{H}_{k,l}$ является полной полигональной функцией, причем

(33) для всякого m и x таких, что $!F^2(m, x)$, можно найти l так, что при $n \geqslant l$

$$H(m, n, x) = F^2(m, x),$$

(34) при всех $m > 0$, n и x

$$|\hat{H}_{m,n}(x)| \leqslant 2^{-m-1}.$$

Построим алгорифм F так, чтобы

$$F(n, x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{H}_{k,n}(x).$$

Очевидно, F — последовательность полных полигональных функций. Покажем, что $f = \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \hat{F}_n$. Пусть x таково, что $!f(x)$. Зададимся натуральным числом m. Используя (30) и (33), найдем $l > m$ такое, что при всяких $k \leqslant m$ и $n \geqslant l$

$$\hat{H}_{k,n}(x) = F^2(k, x).$$

Тогда, ввиду (31) и (32), при $n \geqslant l$

$$|f(x) - \hat{F}_n(x)| \leqslant \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \hat{H}_{k,n}(x) \right| + \\ + \left| \sum_{k=m+1}^{n} \hat{H}_{k,n}(x) \right| \leqslant \left| f(x) - \sum_{k=0}^{m} \hat{F}_k^2(x) \right| + \\ + \sum_{k=m+1}^{n} |\hat{H}_{k,n}(x)| < 2^{-m-3} + 2^{-m-1} < 2^{-m},$$

что и требовалось.

§ 4. Теоремы о среднем значении для конструктивных функций

Пусть f — всюду определенная (и, следовательно, непрерывная в каждой точке) конструктивная функция, а $x \triangle y$ — сегмент положительной длины. С функцией f и сегментом $x \triangle y$ естественно связать следующую алгорифмическую проблему: построить алгорифм, находящий для каждого КДЧ z, расположенного между $f(x)$ и $f(y)$, КДЧ из $x \triangle y$, придающее f значение, равное z *). Этому кругу вопросов и посвящен данный параграф.

*) Как уже отмечалось в п. 1 введения, доказательства второй теоремы Больцано — Коши, приводимые в традиционном анализе, не дают такого алгорифма (см., например, Фихтенгольц [1; стр. 171]).

Ниже через $x \Delta y$ обозначается произвольный сегмент положительной длины, а через f — произвольная всюду определенная КФ.

1. Обозначим через f_0 такую функцию, что

$$f_0(x) = \left| x - \frac{2}{3} \right| - \left| x - \frac{1}{3} \right| + 2 \cdot x - 1.$$

Нетрудно убедиться, что $f_0(x) = 0$ при $x \in \frac{1}{3} \Delta \frac{2}{3}$, $f_0(x) = 2 \cdot x - \frac{4}{3}$ при $x \geqslant \frac{2}{3}$ и $f_0(x) = 2 \cdot x - \frac{2}{3}$ при $x \leqslant \frac{1}{3}$ (рис. 14). Очевидно, $f_0(0) = -\frac{2}{3}$, $f_0(1) = \frac{2}{3}$.

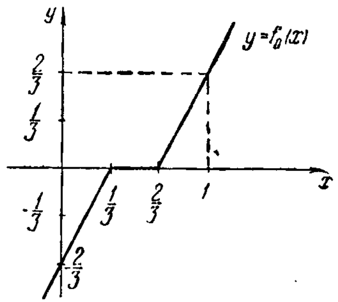


Рис. 14.

Теорема 1 (Цейтин [1], [2], [6]*)). *Невозможен алгорифм α, перерабатывающий всякое КДЧ z такое, что $-\frac{2}{3} < z < \frac{2}{3}$, в КДЧ, при котором*

$$f_0(\alpha(z)) = z.$$

Доказательство. Пусть такой алгорифм α построен. Построим алгорифм α' так, чтобы

$$\alpha'(z) \simeq \text{Рз}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \alpha(z)\right).$$

Очевидно (см. теорему 21 § 3 гл. 2), α' перерабатывает всякое z из интервала $-\frac{2}{3} \nabla \frac{2}{3}$ в 1 или в 2, причем: 1) если $\alpha'(z) = 1$, то $\alpha(z) < \frac{2}{3}$, откуда, ввиду $f(\alpha(z)) = z$, следует $z \leqslant 0$; 2) если $\alpha'(z) = 2$, то $\alpha(z) > \frac{1}{3}$, откуда вытекает $z \geqslant 0$. Следовательно, α' указывает для любого z из интервала $-\frac{2}{3} \nabla \frac{2}{3}$ верный член дизъюнкции $(z \leqslant 0) \vee (z \geqslant 0)$, что согласно следствию 5 § 1 гл. 4 невозможно.

*) Цейтин рассматривает чуть-чуть другую полигональную функцию.

Таким образом, сформулированная в начале параграфа алгорифмическая проблема, оказывается неразрешимой уже для очень простых равномерно непрерывных функций.

Следствие 1. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий запись всякой функции f такой, что $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, в КДЧ, придающее f значение, равное* 0.

Не представляет существенного труда показать, что результаты, аналогичные теореме 1 и следствию 1, сохраняются в классе бесконечно дифференцируемых функций.

2. Функция f_0, фигурирующая в теореме 1, имеет ту особенность, что она постоянна на некотором интервале $\left(\text{именно, на интервале } \frac{1}{3} \nabla \frac{2}{3}\right)$. Как мы сейчас убедимся, это обстоятельство и является источником алгорифмических трудностей, возникающих при решении уравнений вида $f_0(x) = z$, где $f_0(0) < z < f_0(1)$.

Определение 1. *Функцию f назовем нигде не постоянной на $x \Delta y$ $(x < y)$, если невозможен интервал $x_1 \nabla y_1$ такой, что x_1, $y_1 \in x \Delta y$ и при любом $z \in x_1 \nabla y_1$ выполняется*

$$f(z) = f\left(\frac{x_1 + y_1}{2}\right).$$

Определение 2. *Функцию f назовем нигде не нулевой на $x \Delta y$ $(x < y)$, если невозможен интервал $x_1 \nabla y_1$ такой, что x_1, $y_1 \in x \Delta y$ и $f(z) = 0$ при всех $z \in x_1 \nabla y_1$.*

Теорема 2. *Можно построить алгорифм $\mathfrak{C}$, перерабатывающий всякое слово вида $\{f\}$, $x \Delta y$, где $x \Delta y$ — невырожденный сегмент, f — нигде не нулевая на $x \Delta y$ функция такая, что $f(x) \leqslant 0$, $f(y) \geqslant 0$, в КДЧ из $x \Delta y$, придающее f значение, равное* 0.

Теорема 3. *Можно построить алгорифм $\mathfrak{D}$, перерабатывающий всякое слово вида $\{f\}$, $x \Delta y$, z, где $x \Delta y$ — невырожденный сегмент, f — нигде не постоянная на $x \Delta y$ функция, z — КДЧ такие, что $f(x) \leqslant z \leqslant f(y)$, в КДЧ из $x \Delta y$, придающее f значение, равное z.*

Теоремы 2—3 сформулированы нами для случая, когда $f(x) \leqslant f(y)$. Аналогичные утверждения, разумеется, верны для функций f, удовлетворяющих условию

$f(x) \geqslant f(y)$. Возникает естественный вопрос: нельзя ли исключить различение этих двух случаев, т. е. построить алгорифм, решающий интересующую нас задачу независимо от того, какому из двух неравенств $f(x) \leqslant f(y)$, $f(x) \geqslant f(y)$ удовлетворяет f. Ответ на этот вопрос отрицательный: невозможен алгорифм, перерабатывающий запись нигде не нулевой на $0 \triangle 1$ функции f такой, что $f(0) \cdot f(1) \leqslant 0$, в КДЧ из $0 \triangle 1$, придающее f значение, равное 0. Вместе с тем, если $f(x) \neq f(y)$, то мы можем указать верный член дизъюнкции $(f(x) < f(y)) \vee (f(x) > > f(y))$, поэтому для таких функций f теоремы 2—3 могут быть переформулированы с заменой условия $f(x) \leqslant \leqslant 0$, $f(y) \geqslant 0$ на $f(x) \cdot f(y) \leqslant 0$ (в случае теоремы 2) и условия $f(x) \leqslant z \leqslant f(y)$ на условие $\min(f(x), f(y)) \leqslant \leqslant z \leqslant \max(f(x), f(y))$ (в случае теоремы 3).

Ясно, что теорема 3 может быть выведена из теоремы 2. Теорема 2 в свою очередь вытекает из приводимых ниже лемм 1 и 3.

Определение 3. *Алгорифм γ назовем регулятором невырожденности функции f на $x \triangle y$, если он перерабатывает любой интервал $x_1 \triangledown y_1$, включенный в $x \triangledown y$, в КДЧ, принадлежащее этому интервалу и такое, что*

$$f(\gamma(x_1 \triangledown y_1)) \neq 0.$$

На время доказательства следующей леммы обозначим для сокращения записи через $\mathscr{K}$ множество слов вида $\{f\}$, $x \triangle y$, $\{\gamma\}$, где f — функция такая, что $f(x) \leqslant 0$, $f(y) \geqslant 0$, $x \triangle y$ — невырожденный сегмент, γ — регулятор невырожденности f на $x \triangle y$.

Лемма 1. *Можно построить, алгорифм $\mathfrak{C}^1$, перерабатывающий всякое слово $\{f\}$, $x \triangle y$, $\{\gamma\}$ из $\mathscr{K}$ в КДЧ, принадлежащее сегменту $x \triangle y$ и обращающее f в 0.*

Доказательство этой леммы проводится при помощи простой модификации процесса последовательного деления сегмента пополам (ср. Фихтенгольц [1; стр. 168]). Обозначим через P произвольное слово вида $\{f\}$, $x \triangle y$, $\{\gamma\}$, принадлежащее $\mathscr{K}$. Через $x_1 \triangledown y_1$ обозначим произвольный интервал такой, что $x_1, y_1 \in x \triangle y$. Наконец, для $x_1 \triangledown y_1$ через ω_1, ω_2, ω_3 соответственно обозначим промежутки $x_1 + \frac{1}{3} \cdot (y_1 - x_1) \triangledown x_1 + \frac{2}{3} \cdot (y_1 - x_1)$, $x_1 \triangle \gamma(\omega_1)$, $\gamma(\omega_1) \triangle y_1$.

Построим алгорифм $\mathfrak{A}^1$ так, что

$$\mathfrak{A}^1(P, x_1 \triangle y_1) \simeq \operatorname{sgn}(f(\gamma(\omega_1))).$$

По определению γ имеем

$$!\mathfrak{A}^1(P, x_1 \triangle y_1), \tag{1}$$

$$\mathfrak{A}^1(P, x_1 \triangle y_1) \mathrel{\dot{=}} 1 \equiv f(\gamma(\omega_1)) > 0, \tag{2}$$

$$\mathfrak{A}^1(P, x_1 \triangle y_1) \mathrel{\dot{=}} -1 \equiv f(\gamma(\omega_1)) < 0. \tag{3}$$

Построим алгорифмы $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{A}^3$ (ср. п. 7 § 1 гл. 1) так, что

$$\mathfrak{A}^2(P, x_1 \triangle y_1) \simeq \begin{cases} \omega_2, & \text{если } \mathfrak{A}^1(P, x_1 \triangle y_1) \mathrel{\dot{=}} 1, \\ \omega_3, & \text{если } \mathfrak{A}^1(P, x_1 \triangle y_1) \mathrel{\dot{=}} -1, \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}^3(P, 0) \mathrel{\dot{=}} x \triangle y,$$

$$\mathfrak{A}^3(P, n+1) \simeq \mathfrak{A}^2(P, \mathfrak{A}^3(P, n)).$$

Используя (1)—(3), нетрудно показать (индукцией по n), что $\widehat{\mathfrak{A}}^3_P$ есть вложенная последовательность сегментов, причем (если для краткости обозначить через u_n, v_n и t_n концы и длину сегмента $\mathfrak{A}^3(P, n)$)

$$t_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{-n} \cdot (y - x), \tag{4}$$

$$f(u_n) \leqslant 0, \tag{5}$$

$$f(v_n) \geqslant 0. \tag{6}$$

Пусть $\mathfrak{A}^4$ — такой алгорифм, что (см. лемму 6 § 4 гл. 2)

$$\mathfrak{A}^4(P, n) \simeq \mathfrak{A}^3(P, 2 \cdot (n + G^+(y - x))).$$

Из (4)—(6) следует, что $\widehat{\mathfrak{A}}^4_P$ — регулярная вложенная последовательность сегментов, причем (если обозначить через $\bar{u}_n$, $\bar{v}_n$ концы сегмента $\mathfrak{A}^4(P, n)$)

$$\mathfrak{A}^4(P, 0) \subseteq x \triangle y, \tag{7}$$

$$f(\bar{u}_n) \leqslant 0, \tag{8}$$

$$f(\bar{v}_n) \geqslant 0. \tag{9}$$

Пользуясь теоремой о вложенных сегментах (теорема 2 § 2 гл. 3), построим алгорифм $\mathfrak{C}^1$ так, что

$$\mathfrak{C}^1(P) \simeq \lim{}^{(2)}(\mathcal{E}\widehat{\mathfrak{A}}^4_P\mathcal{З}).$$

Этот алгорифм перерабатывает P в общую точку последовательности $\widehat{\mathfrak{A}}^4_P$. Ввиду (7) $\mathfrak{C}^1(P) \in x \triangle y$. Если $f(\mathfrak{C}^1(P)) > 0$, то из (8) легко следует, что f имеет конструктивный разрыв в точке $\mathfrak{C}^1(P)$. Следовательно, $f(\mathfrak{C}^1(P)) \leqslant 0$. Точно так же показывается, что $f(\mathfrak{C}^1(P)) \geqslant 0$. Следовательно, $f(\mathfrak{C}^1(P)) = 0$, чем и заканчивается доказательство.

Лемма 2. *Пусть $x \nabla y$ — интервал, f — функция такие, что при любом рациональном $r \in x \nabla y$ $f(r) = 0$. Тогда при любом $z \in x \triangle y$ $f(z) = 0$.*

Эта лемма без труда следует из неразрывности f. Подробное доказательство предоставляется читателю (заметим, что эта лемма вытекает из следствия 4 § 2 гл. 9).

Лемма 3. *Можно построить алгорифм $\mathfrak{C}^2$ так, что для любой функции f и невырожденного сегмента $x \triangle y$, если f — нигде не нулевая на $x \triangle y$ функция, то $\widehat{\mathfrak{C}}^2_{\{f\}}$ является регулятором невырожденности f на $x \triangle y$.*

Доказательство. Для произвольного интервала $x_1 \nabla y_1$ обозначим через $\mathcal{M}^1_{x_1 \nabla y_1}$ и $\mathcal{M}^2_{f, x_1 \nabla y_1}$ соответственно множество всех рациональных чисел, принадлежащих $x_1 \nabla y_1$, и множество рациональных чисел из $x_1 \nabla y_1$, удовлетворяющих условию $f(r) \neq 0$.

Обозначим через $\mathcal{M}^3_f$ множество слов в $Ч$, для которых

$$!G(|f(P)|).$$

Согласно § 3 гл. 1 $\mathcal{M}^3_f$ перечислимо. Ясно, что

$$\mathcal{M}^2_{f, x_1 \nabla y_1} = \mathcal{M}^3_f \cap \mathcal{M}^1_{x_1 \nabla y_1}.$$

Следовательно, $\mathcal{M}^2_{f, x_1 \nabla y_1}$ перечислимо. По теореме 7 § 3 гл. 1 построим алгорифм $\mathfrak{A}^1$ так, что при любом интервале $x_1 \nabla y_1$ и функции f $\widehat{\mathfrak{A}}^1_{\{f\}, x_1 \nabla y_1}$ является стройным алгорифмом, перечисляющим $\mathcal{M}^2_{f, x_1 \nabla y_1}$.

Построим, наконец, алгорифм $\mathfrak{C}^2$ так, что

$$\mathfrak{C}^2(\{f\}, x_1 \nabla y_1) \simeq \mathfrak{A}^1(\{f\}, x_1 \nabla y_1, 0).$$

Пусть $x_1 < y_1$, x_1, $y_1 \in x \triangle y$ и f — нигде не нулевая на $x \triangle y$ функция. Тогда по лемме 2 множество $\mathcal{M}^2_{f, x_1 \nabla y_1}$ непусто. Следовательно, $!\mathfrak{C}^2(\{f\}, x_1 \nabla y_1)$ и $\mathfrak{C}^2(\{f\}, x_1 \nabla y_1) \in$

$\in \mathscr{M}^2_{\mathfrak{f},\, x_1 \nabla y_1}$, т. е. алгорифм $\mathfrak{C}^2$ обладает требуемым свойством.

Из теоремы 2 легко усматривается следующее интересное предложение: если $x \triangle y$ — невырожденный сегмент, $f(x) \leqslant 0$, $f(y) \geqslant 0$ и f не имеет рациональных корней на $x \triangle y$, то можно указать КДЧ, являющееся корнем f.

Из теоремы 2 немедленно вытекает конструктивный вариант второй теоремы Больцано — Коши для строго монотонных функций (ср. Гжегорчик [2], Лакомб [1], Заславский [4]).

Теорема 4. *Можно построить алгорифм $\mathfrak{B}^1$ ($\mathfrak{B}^2$), перерабатывающий всякое слово вида $\{f\}$, $x \triangle y$, z, где $x < y$, f — возрастающая (убывающая) на $x \triangle y$ функция, z — КДЧ, причем $f(x) \leqslant z \leqslant f(y)$ ($f(y) \leqslant z \leqslant \leqslant f(x)$), в КДЧ, принадлежащее $x \triangle y$ и придающее f значение, равное z.*

Нетрудно видеть, что алгорифмы $\mathfrak{B}^1$ и $\mathfrak{B}^2$ могут быть «объединены в один алгорифм», т. е. осуществим алгорифм $\mathfrak{B}$, который может фигурировать в теореме 4 как в качестве $\mathfrak{B}^1$, так и в качестве $\mathfrak{B}^2$.

Теорема 1 показывает, что условие строгого возрастания (убывания) в теореме 4 является существенным.

3. Полученные выше результаты позволяют дать отрицательный ответ на вопрос о существовании знакопеременных функций, не обращающихся в 0.

Следствие 2. *Каков бы ни был сегмент $x \triangle y$, невозможна функция f такая, что $f(x) \cdot f(y) \leqslant 0$ и f не обращается в 0 на $x \triangle y$.*

Следствие 3. *Каков бы ни был сегмент $x \triangle y$, невозможна функция f и КДЧ z такие, что*

$$\min(f(x), f(y)) \leqslant z \leqslant \max(f(x), f(y))$$

и $f(t) \neq z$ при любом $t \in x \triangle y$.

Следствия 2—3 выводятся из теорем 2—3. Например, если всюду на $x \triangle y$ $f(t) \neq 0$, то $x \neq y$ и f — нигде не нулевая на $x \triangle y$ функция. Тогда (можно, очевидно, не теряя общности, считать, что $f(x) \leqslant 0$, $f(y) \geqslant 0$) по теореме 2 f имеет корень на $x \triangle y$.

Следствия 2—3 можно рассматривать как конструктивные аналоги первой и второй теорем Больцано —

Коши (см. Фихтенгольц [2])*). Так же, как и в случае теорем о вложенных сегментах (гл. 4, § 2), эти результаты могут быть усилены в следующем направлении (Цейтин [6]): 1) для каждой функции f и сегмента $x \triangle y$ таких, что $f(x) \cdot f(y) \leqslant 0$, можно указать квазичисло, условно принадлежащее $x \triangle y$ и условно придающее f значение, равное 0; 2) для каждого сегмента $x \triangle y$, функции f и КДЧ z таких, что $\min(f(x), f(y)) \leqslant z \leqslant \max(f(x), f(y))$, можно указать квазичисло, условно принадлежащее $x \triangle y$ и условно придающее f значение, равное z. Таким образом, и здесь алгорифмические трудности, возникающие при нахождении решений уравнений $f(x) = z$ для промежуточных z, связаны не столько с нахождением последовательности рациональных приближений к корню (такую последовательность можно построить), сколько с оценкой скорости сходимости этих приближений.

В заключение параграфа приведем теорему, трактующую несколько с другой точки зрения рассмотренные нами вопросы.

Теорема 5. *Можно построить алгорифм $\mathfrak{N}$, перерабатывающий всякое слово вида $\xi f \zeta$, $x \triangle y, n$, где $x \triangle y$ — невырожденный сегмент, f — функция такая, что $f(x) \cdot f(y) \leqslant 0$, в рациональное число из $x \nabla y$ такое, что*

$$|f(\mathfrak{N}(\xi f \zeta,\ x \triangle y,\ n))| < 2^{-n}.$$

Доказательство теоремы 5 приводится в том же порядке идей, что и доказательство леммы 3, и опирается, помимо следствия 2, на следующую лемму, аналогичную лемме 2.

Лемма 4. *Если для любой рациональной точки r интервала $x \nabla y$ $f(r) \leqslant z$ $(f(r) \geqslant z)$, то всюду на сегменте $x \triangle y$ $f(t) \leqslant z$ (соответственно $f(t) \geqslant z$).*

Теорема 5 является своеобразным «ε-вариантом» классической теоремы Больцано — Коши и представляет интерес в тех ситуациях, когда вместо нахождения корня данной функции можно удовлетвориться

---

*) Интересной особенностью этих аналогов является отсутствие в их формулировках требований непрерывности, которые для конструктивных функций выполняются автоматически.

нахождением точек, где функция принимает достаточно малые по модулю значения. Теоремы такого типа, по-видимому, рассматривались впервые Гудстейном (см. Гудстейн [2]). Отметим, что аналогичные «ε-варианты» относительно корня функции не имеют места: например, немного изменив доказательство теоремы 1, нетрудно показать, что для фигурирующей в этой теореме функции f_0 невозможен алгорифм α, перерабатывающий всякое z, для которого $f_0(0) < z < f_0(1)$, в КДЧ таким образом, что f_0 не может быть всюду отлична от z на интервале $\alpha(z) - \frac{1}{9} \nabla \alpha(z) + \frac{1}{9}$.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы коротко остановимся на вопросах дифференциального исчисления для конструктивных функций. В своей формульной части конструктивное дифференциальное исчисление весьма напоминает традиционную теорию; в частности, имеют место обычные формулы дифференцирования элементарных функций, дифференцирования сложной функции, диференцирования суммы, разности, произведения и частного дифференцируемых функций. Доказательства этих предложений, которые в принципе мало отличаются от доказательств соответствующих предложений классического дифференциального исчисления, мы не приводим, уделяя за этот счет большее внимание вопросам, в которых действительно сказывается конструктивная специфика. Изложение группируется в основном вокруг теорем о среднем значении дифференциального исчисления. Эта проблематика для конструктивных функций исследовалась Цейтиным [6], которому и принадлежит большинство излагаемых результатов.

§ 1. Основные определения

Определение 1. *Пусть f — конструктивная функция, t — КДЧ и f определена в точке t.*

1) *КДЧ z будем называть производным числом КФ f в точке t (относительно промежутка $x \bigtriangleup y$), если можно построить последовательность натуральных чисел δ таким образом, что при любом n для всякого КДЧ t_1 (для всякого $t_1 \in x \bigtriangleup y$), удовлетворяющего неравенству $|t_1 - t| < 2^{-\delta(n)}$, выполняется $!f(t_1)$ и*

$$|f(t_1) - f(t) - z \cdot (t_1 - t)| \leqslant 2^{-n} \cdot |t_1 - t|.$$

2) *Конструктивную функцию будем называть дифференцируемой в данной точке (относительно данного*

промежутка), если осуществимо КДЧ, являющееся производным числом этой функции в рассматриваемой точке (относительно данного промежутка).

Отношение между f, z, t ($x \between y$) и алгорифмом δ, введенное в разделе 1) определения 1, мы будем сокращенно выражать записью

$$\text{Пр}\,(t,\ f,\ z,\ \delta)$$

(соответственно $\text{Пр}\,(x \between y,\ t,\ f,\ z,\ \delta)$).

Для выражения того обстоятельства, что КДЧ z является производным числом КФ f в точке t (относительно промежутка $x \between y$), мы будем использовать запись

$$\text{Пр}\,(t,\ f,\ z)$$

(соответственно $\text{Пр}\,(x \between y,\ t,\ f,\ z)$).

Очевидно, если $t = t_1$, $z = z_1$ и $g = f$, то

$$\text{Пр}\,(t,\ f,\ z,\ \delta) \equiv \text{Пр}\,(t_1,\ g,\ z_1,\ \delta),$$
$$\text{Пр}\,(t,\ f,\ z) \equiv \text{Пр}\,(t_1,\ g,\ z_1).$$

Если, кроме того, $x = x_1$, $y = y_1$, то

$$\text{Пр}\,(x \between y,\ t,\ f,\ z,\ \delta) \equiv \text{Пр}\,(x_1 \between y_1,\ t_1,\ g,\ z_1,\ \delta),$$
$$\text{Пр}\,(x \between y,\ t,\ f,\ z) \equiv \text{Пр}\,(x_1 \between y_1,\ t_1,\ g,\ z_1).$$

Определение 2. *Пусть f и f' — всюду определенные конструктивные функции.*

1) *Будем говорить, что f' является производной f на всей оси, и писать*

$$\text{Пр}\,(-\infty \bigtriangledown +\infty,\ f,\ f'),$$

если при всяком t выполняется

$$\text{Пр}\,(t,\ f,\ f'(t)),$$

т. е. если можно построить алгорифм $\mathbb{W}$ таким образом, чтобы при любом t выполнялось

$$\text{Пр}\,(t, f, f'(t),\ \widehat{\mathbb{W}}_t).$$

2) *Будем говорить, что функция f дифференцируема на всей оси (везде дифференцируема), если можно построить функцию f', являющуюся ее производной на всей оси.*

Если f, f' и W связаны отношением, введенным в 1) определения 2, то мы будем выражать это записью

$$\text{Пр}(-\infty \triangledown +\infty, f, f', W).$$

Очевидно, если $f = f_1$ и $f' = f'_1$, то

$$\text{Пр}(-\infty \triangledown +\infty, f, f', W) \equiv \text{Пр}(-\infty \triangledown +\infty, f_1, f'_1, W)$$

и

$$\text{Пр}(-\infty \triangledown +\infty, f, f') \equiv \text{Пр}(-\infty \triangledown +\infty, f_1, f'_1).$$

Определение 3. *Пусть КФ f и f' определены во всех точках промежутка $x \between y$.*

1) *Будем говорить, что f' является производной f на $x \between y$, и писать* $\text{Пр}(x \between y, f, f')$, *если при всяком t из $x \between y$ имеет место*

$$\text{Пр}(x \between y, t, f, f'(t)),$$

т. е. осуществим алгорифм W такой, что при любом $t \in x \between y$ выполняется

$$\text{Пр}(x \between y, t, f, f'(t), \widehat{W}_t).$$

2) *Будем говорить, что функция f дифференцируема на промежутке $x \between y$, если можно построить КФ f', являющуюся производной f на $x \between y$.*

Отношение между $x \between y$, f, f' и W, описанное в разделе 1) определения 3, мы будем выражать записью

$$\text{Пр}(x \between y, f, f', W).$$

Очевидно, если $x = x_1$, $y = y_1$, $f \underset{x \between y}{=} f_1$, $f' \underset{x \between y}{=} f'_1$, то

$$\text{Пр}(x \between y, f, f', W) \equiv \text{Пр}(x_1 \between y_1, f_1, f'_1, W),$$

$$\text{Пр}(x \between y, f, f') \equiv \text{Пр}(x_1 \between y_1, f_1, f'_1).$$

Нетрудно также заметить, что в случае, когда $x \between y$ является сегментом, функции f и f' в определении 3 можно, не теряя общности, считать всюду определенными.

В аналогичном порядке идей определяется многократная дифференцируемость конструктивных функций на всей оси или на некотором промежутке. Точная формулировка соответствующих определений предоставляется читателю.

Теорема о полноте КДЧ (гл. 3, § 2) позволяет получить достаточные признаки дифференцируемости на всей оси и на данном невырожденном промежутке, в которых используются лишь значения самих испытуемых функций. Мы остановимся, например, на случае, когда нас интересует дифференцируемость данной функции на всей оси.

Определение 4. *Пусть f — везде определенная КФ.*

1) *Алгорифм W будем называть регулятором дифференцируемости в себе функции f на всей оси, если при любом x $\mathfrak{W}_x$ есть ПНЧ и для любых n, x_1, x_2 таких, что $|x_1 - x| < 2^{-W(x, n)}$, $|x_2 - x| < 2^{-W(x, n)}$, выполняется*

$$|(f(x_1) - f(x)) \cdot (x_2 - x) - (f(x_2) - f(x)) \cdot (x_1 - x)| \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-n} \cdot |x_2 - x| \cdot |x_1 - x|.$$

2) *Функцию f назовем дифференцируемой в себе на всей оси, если можно построить регулятор дифференцируемости в себе этой функции на всей оси.*

Теорема 1. *Функция f дифференцируема на всей оси тогда и только тогда, когда она дифференцируема в себе на всей оси.*

Другими словами, располагая алгорифмом W таким, что при некоторой функции f' выполняется

$$\text{Пр}(-\infty \bigtriangledown +\infty, f, f', W),$$

можно построить регулятор дифференцируемости в себе функции f на всей оси, и, обратно, располагая регулятором дифференцируемости в себе функции f на всей оси, можно построить функцию f' и алгорифм W так, что имеет место

$$\text{Пр}(-\infty \bigtriangledown +\infty, f, f', W).$$

Читатель безусловно отметит значительное сходство приведенных определений, связанных с дифференцируемостью конструктивных функций, с соответствующими определениями классического дифференциального исчисления, по сравнению с которыми в конструктивных определениях сделан существенный акцент на вопросе «эффективного перехода от ε к δ». Неудивительно, что конструктивные и классические определения, как уже отмечалось, во многих случаях приводят к аналогичным результатам.

Для пояснения некоторых отличий классической и конструктивной дифференцируемости приведем один пример. Можно построить везде определенную КФ φ так, что

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x\neq 0,\\ 0 & \text{при} \quad x=0.\end{cases}$$

Очевидно, φ дифференцируема в каждой точке x такой, что $x\neq 0$. Кроме того, φ дифференцируема в 0. Вместе с тем φ не является дифференцируемой на всей оси функцией. Действительно, если бы φ была дифференцируема на всей оси, то существовала бы всюду определенная КФ, являющаяся ее производной на всей оси. Эта КФ имела бы, очевидно, конструктивный разрыв в 0, что невозможно. Этот пример показывает также, что производная конструктивной функции на интервале не всегда может быть продолжена до всюду определенной функции.

§ 2. Теоремы о среднем значении дифференциального исчисления

В этом параграфе будут доказаны некоторые конструктивные аналоги теорем Ролля и Лагранжа, а также формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши.

Определение 1. *Будем говорить, что функция f возрастает (убывает) в точке x, если осуществима окрестность точки x*) такая, что для всякой точки z этой окрестности $f(z)>f(x)$ (соответственно $f(z)<f(x)$) при $z>x$ и $f(z)<f(x)$ ($f(z)>f(x)$) при $z<x$.*

---

*) Окрестностью данной точки мы называем любой интервал, содержащий эту точку.

Лемма 1. *Если функция f возрастает (убывает) в каждой точке интервала $x \nabla y$* *), *то она возрастает (убывает) на сегменте $x \Delta y$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда f возрастает в каждой точке $x \nabla y$. Предположим, что существуют точки x_1, x_2 из $x \nabla y$ такие, что $x_1 < x_2$ и $f(x_1) > f(x_2)$. Рассмотрим середину сегмента $x_1 \Delta x_2$ — точку $\frac{x_1 + x_2}{2}$. Так как $f(x_1) > f(x_2)$, то мы можем указать верный член дизъюнкции

$$\left(f(x_2) < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right) \vee \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < f(x_1)\right).$$

Если мы установили, что верен первый член этой дизъюнкции, то рассмотрим сегмент $\frac{x_1 + x_2}{2} \Delta x_2$; если же установлено, что верен второй член дизъюнкции, то рассмотрим сегмент $x_1 \Delta \frac{x_1 + x_2}{2}$. Обозначим получившийся сегмент через $x_3 \Delta x_4$. Очевидно, $x_3 \Delta x_4 \subseteq x_1 \Delta x_2$, $f(x_3) > f(x_4)$ и $x_4 - x_3 = \frac{x_2 - x_1}{2}$. Проведем аналогичное построение для $x_3 \Delta x_4$ и т. д.

Используя эти соображения, можно построить вложенную последовательность сегментов $\mathfrak{D}$ так, что

$$\mathfrak{D}(0) \mp x_1 \Delta x_2, \tag{1}$$
$$|\mathfrak{D}(n)| = \frac{x_2 - x_1}{2^n}$$

и

$$f(K^{\text{л}}(\mathfrak{D}(n))) > f(K^{\text{п}}(\mathfrak{D}(n))) \tag{2}$$

(через $|\mathfrak{D}(n)|$ обозначается длина сегмента $\mathfrak{D}(n)$; алгорифмы $K^{\text{л}}$ и $K^{\text{п}}$ перерабатывают всякий промежуток соответственно в его левый и правый концы).

Пользуясь теоремой 2 § 2 гл. 3, построим КДЧ z, принадлежащее всем сегментам последовательности $\mathfrak{D}$. Очевидно, $z \in x \nabla y$ и, ввиду (1)—(2), f не может возрастать в точке z, что противоречит условию. Следова-

*) Это означает, что существует алгорифм, перерабатывающий всякую точку интервала $x \nabla y$ в фигурирующую в определении 1 окрестность этой точки.

тельно, при любых $x_1, x_2 \in x \nabla y$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется

$$f(x_1) \leqslant f(x_2). \tag{3}$$

Пользуясь (3) и теоремой о неразрывности конструктивных функций, можно (ср. лемму 4 § 4 гл. 5) показать, что (3) выполняется для любых x_1, x_2 из сегмента $x \Delta y$ таких, что $x_1 < x_2$.

Пусть теперь x_1 и x_2 — любые две точки из $x \Delta y$ такие, что $x_1 < x_2$. Найдем x_1' и x_2' так, что

$$x_1 < x_1' < x_2' < x_2.$$

Очевидно, x_1' и x_2' принадлежат интервалу $x \nabla y$. Следовательно, f возрастает в этих точках. Пользуясь этим, найдем x_1'' и x_2'' так, что

$$x_1' < x_1'' < x_2'' < x_2'$$

и

$$f(x_1') < f(x_1''),$$

$$f(x_2'') < f(x_2').$$

Поскольку выполняется

$$f(x_1) \leqslant f(x_1'),$$

$$f(x_2) \geqslant f(x_2'),$$

$$f(x_1'') \leqslant f(x_2''),$$

то мы получаем

$$f(x_1) < f(x_2),$$

что и требовалось.

Отметим вариант данной леммы с менее ограничительными условиями на f. Будем говорить, что f слабо возрастает (слабо убывает) в точке x, если не может не существовать фигурирующая в определении 1 окрестность этой точки. Почти дословно так же, как и в случае леммы 1, можно доказать, что если функция f слабо возрастает (слабо убывает) в каждой точке $x \nabla y$, то при любых $x_1, x_2 \in x \Delta y$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется $\neg\neg(f(x_1) < f(x_2))$ (соответственно $\neg\neg(f(x_1) > f(x_2))$). Последнее, однако, равносильно (теорема 22 § 3 гл. 2) $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$). Таким образом, если f слабо возрастает (слабо убывает) в каждой точке $x \nabla y$, то f возрастает (убывает) на $x \Delta y$.

Из леммы 1 вытекает

Теорема 1. *Пусть КФ f' является производной функции f на $x \nabla y$ и всюду на $x \nabla y$ $f'(t) > 0$ ($f'(t) < 0$). Тогда f возрастает (убывает) на $x \Delta y$.*

Следствие 1. *Пусть КФ f' является производной функции f на $x \nabla y$ и всюду на $x \nabla y$ $f'(t) \geqslant 0$ ($f'(t) \leqslant 0$). Тогда f не убывает (не возрастает) на $x \Delta y$.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай, когда $f'(t) \geqslant 0$. Обозначим через f_n такую функцию, что

$$f_n(t) = f(t) + 2^{-n} \cdot t.$$

В силу теоремы 1 все функции f_n возрастают на $x \Delta y$. Пусть $x_1 < x_2$ и $x_1, x_2 \in x \Delta y$. Тогда при любом n

$$f_n(x_1) < f_n(x_2),$$

т. е.

$$f(x_1) + 2^{-n} \cdot x_1 < f(x_2) + 2^{-n} \cdot x_2.$$

Следовательно,

$$f(x_2) - f(x_1) > 2^{-n} \cdot (x_1 - x_2).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по n, получим

$$f(x_2) \geqslant f(x_1),$$

что и требовалось.

Следствие 2. *Пусть $f_1' = f_2'$ на $x \nabla y$ и f_1', f_2' являются производными на $x \nabla y$ функций f_1 и f_2. Тогда всюду на $x \Delta y$*

$$f_1(t) = f_2(t) + c,$$

где $c = f_1(x) - f_2(x)$.

Это утверждение вытекает из следствия 1, поскольку, очевидно, функция $f_1 - f_2$ одновременно не убывает и не возрастает на $x \Delta y$.

Докажем теперь некоторый аналог теоремы Ролля.

Теорема 2. *Пусть $x \nabla y$ — произвольный интервал.*

1) *Невозможны КФ f и f' такие, что f всюду определена на $x \Delta y$, $f(x) = f(y)$, f' является производной f*

на $x \nabla y$ *и*

$$f'(t) \neq 0$$

при любом $t \in x \nabla y$.

2) *Пусть* f *всюду определена на* $x \triangle y$, $f(x) = f(y)$ *и* f' *является производной* f *на* $x \nabla y$. *Тогда не может не существовать КДЧ* $z \in x \nabla y$ *такое, что*

$$f'(z) = 0.$$

Доказательство. Утверждение 2) легко выводится из утверждения 1), поскольку

$$\neg \exists z (z \in x \nabla y \,\&\, f'(z) = 0)$$

равносильно

$$\forall z ((z \in x \nabla y) \supset (f'(z) \neq 0)).$$

Докажем утверждение 1). Пусть существуют КФ f, f', удовлетворяющие условиям утверждения 1).

Предположим, что $f'\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0$. Тогда, ввиду следствия 2 § 4 гл. 5, $f' > 0$ всюду на интервалах $x \nabla \frac{x+y}{2}$ и $\frac{x+y}{2} \nabla y$. Следовательно, f возрастает на сегментах $x \triangle \frac{x+y}{2}$ и $\frac{x+y}{2} \triangle y$, откуда вытекает

$$f(x) < f(y),$$

что невозможно.

Таким образом,

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant 0. \tag{4}$$

Точно так же доказывается, что

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant 0. \tag{5}$$

Из (4)—(5) получаем

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0,$$

что невозможно.

Из теоремы 1 обычным образом, с использованием вспомогательной функции

$$\varphi(t) = f(t) - \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \cdot t + \frac{x \cdot f(y) - y \cdot f(x)}{y - x},$$

получается конструктивный вариант теоремы Лагранжа.

Теорема 3. *Пусть $x \nabla y$ — интервал.*

1) *Невозможны КФ f и f' такие, что f всюду определена на $x \triangle y$, f' является производной f на $x \nabla y$ и всюду на $x \nabla y$*

$$f'(t) \neq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

2) *Пусть КФ f' — производная функции f на $x \nabla y$. Тогда не может не существовать z из $x \nabla y$ такое, что*

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Определение 2. *Пусть f — функция, c — КДЧ. Будем говорить, что функция f удовлетворяет на промежутке $x \between y$ условию Липшица с константой c, если при любых t_1, $t_2 \in x \between y$ выполняется $|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant \leqslant c \cdot |t_1 - t_2|$.*

Следствие 3. *Пусть функция f' является производной функции f на $x \triangle y$ и КДЧ c ограничивает f' на $x \triangle y$ (т. е. $|f'(t)| \leqslant c$ при любом $t \in x \triangle y$). Тогда f удовлетворяет на $x \triangle y$ условию Липшица с константой c.*

Несложное доказательство следствия 3 предоставляется читателю.

Следствие 4. *Функция, имеющая на данном сегменте ограниченную производную, равномерно непрерывна на этом сегменте.*

Пользуясь теоремой 2, нетрудно обычными способами получить конструктивные аналоги формулы Тейлора. Например, без существенных изменений можно воспроизвести вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Шлемильха — Роша, приведенный в книге Ильина и Позняка [1]. Прежде чем сформулировать соответствующую теорему, условимся о некоторых обозначениях. Если функция f n раз дифференцируема, то через $f^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ обозначается ее i-я производная, а через T_n многочлен Тейлора n-го порядка этой функции, т. е. такой алгорифм, что при любых КДЧ x и a

$$T_n(x, a) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x - a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Через $R_{a,\,n+1}$ обозначается конструктивная функция такая, что

$$R_{a,\,n+1}(x) = f(x) - T_n(x,\ a).$$

Теорема 4. *Пусть $a \nabla x$ — интервал, p — любое КДЧ, большее нуля.*

1) *Невозможна $n+1$ раз дифференцируемая на $a \nabla x$ функция f такая, что при любом $t \in a \nabla x$*

$$R_{a,\,n+1}(x) \neq \frac{(x-a)^p \cdot (x-t)^{n-p+1}}{n! \cdot p} \cdot f^{(n+1)}(t).$$

2) *Если функция f $n+1$ раз дифференцируема на $a \nabla x$, то не может не существовать z из $a \nabla x$ такое, что*

$$R_{a,\,n+1}(x) = \frac{(x-a)^p \cdot (x-z)^{n-p+1}}{n! \cdot p} \cdot f^{(n+1)}(z).$$

Полагая в теореме 4 $p = n+1$ и $p = 1$, получаем аналоги теоремы Тейлора с представлением остаточного члена соответственно в форме Лагранжа и Коши.

Следствие 5. *Пусть $a \nabla x$ — интервал.*

1) *Невозможна $n+1$ раз дифференцируемая на $a \nabla x$ функция f такая, что при любом $t \in a \nabla x$*

$$R_{a,\,n+1}(x) \neq \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(t).$$

2) *Если f — $n+1$ раз дифференцируемая на $a \nabla x$ функция, то не может не существовать z из $a \nabla x$ такое, что*

$$R_{a,\,n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(z).$$

Следствие 6. *Пусть $a \nabla x$ — интервал.*

1) *Невозможна $n+1$ раз дифференцируемая на $a \nabla x$ функция f такая, что при любом $t \in a \nabla x$*

$$R_{a,\,n+1}(x) \neq \frac{(x-a) \cdot (x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t).$$

2) *Если функция f $n+1$ раз дифференцируема на $a \nabla x$, то не может не существовать z из $a \nabla x$ такое, что*

$$R_{a,\,n+1}(x) = \frac{(x-a) \cdot (x-z)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(z).$$

Из утверждения 1) следствия 5 легко вытекает следующая полезная оценка.

Следствие 7. *Пусть функция f $n+1$ раз дифференцируема на интервале $a \nabla x$ и КДЧ c ограничивает $f^{(n+1)}$ на $a \nabla x$. Тогда при любом $t \in a \nabla x$*

$$|R_{a,\,n+1}(t)| = |f(t) - T_n(t, a)| \leqslant \frac{c \cdot (t-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В связи с теоремами 2 и 3 возникает вопрос о существовании алгорифмов, находящих упоминаемые в утверждениях 2) этих теорем КДЧ. Невозможность таких алгорифмов будет установлена в следующем параграфе. Вместе с тем так же, как и в случае теорем о среднем значении для конструктивных функций (§ 4 гл. 5), Цейтиным [6] доказано существование алгорифмов, находящих (по интервалу, функции и ее производной на этом интервале) квазичисла, условно обладающие сформулированными в утверждениях 2) теорем 2—3 свойствами.

Отметим в заключение некоторый ε-вариант теоремы Ролля. (Аналогичные ε-варианты можно сформулировать также и в случае теорем Лагранжа и Тейлора.)

Теорема 5. *Можно построить алгорифм α, перерабатывающий всякое слово вида $\mathcal{E}f\mathcal{3}$, $\mathcal{E}f'\mathcal{3}$, $x \nabla y$, n, где $x \nabla y$ — интервал, f и f' — функции, причем $f(x) = f(y)$ и f' является производной f на $x \nabla y$, в КДЧ, принадлежащее $x \nabla y$ и такое, что* *)

$$|f'(\alpha(\mathcal{E}f\mathcal{3},\ \mathcal{E}f'\mathcal{3},\ x \nabla y,\ n))| < 2^{-n}.$$

Доказательство этого утверждения совершенно аналогично доказательству теоремы 5 § 4 гл. 5.

§ 3. Невозможность некоторых алгорифмов, связанных с дифференцированием

Нам будет полезен следующий достаточный признак дифференцируемости, позволяющий «склеивать» производные.

---

*) Запись функции f можно было бы и не включать в исходные данные алгорифма α.

Лемма 1. *Пусть функция* $\mathfrak{f}'$ *является производной функции* $\mathfrak{f}$ *на сегментах* $x \triangle y$ *и* $y \triangle z$ *и алгорифмы* W^1, W^2, W^3, ρ *таковы, что выполняется*

1) $\text{Пр}\,(x \triangle y, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}', W^1)$;
2) $\text{Пр}\,(y \triangle z, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}', W^2)$;
3) ρ — *регулятор непрерывности функции* $\mathfrak{f}'$ *в точке* y;
4) *при любом* t *и* n

$$W^3(t, n) \simeq \max(W^1(y, n+2), W^2(y, n+2),$$
$$W^1(\min(t, y), n+2), W^2(\max(t, y), n+2), \rho(n+1)).$$

Тогда $\mathfrak{f}'$ *является производной* $\mathfrak{f}$ *на* $x \triangle z$, *причем выполняется*

$$\text{Пр}\,(x \triangle z, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}', W^3).$$

Доказательство. Достаточно доказать, что выполняется

$$\text{Пр}\,(x \triangle z, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}', W^3).$$

Поскольку для любого t из $x \triangle z$, очевидно, $\min(t, y) \in x \triangle y$, $\max(t, y) \in y \triangle z$, то при любом t из $x \triangle z$ алгорифм $\widehat{W}_t^3$ является алгорифмом типа $(\mathscr{H} \to \mathscr{H})$. Далее, очевидно, что если t и t_1 одновременно принадлежат любому из сегментов $x \triangle y$ или $y \triangle z$ и удовлетворяют неравенству $|t - t_1| < 2^{-\widehat{W}_t^3(n)}$, то для них выполняется

$$(1) \qquad |\mathfrak{f}(t_1) - \mathfrak{f}(t) - \mathfrak{f}'(t) \cdot (t_1 - t)| \leqslant 2^{-n-2} \cdot |t_1 - t|.$$

Зададимся теперь некоторым n и рассмотрим произвольные t_1, t из $x \triangle z$, удовлетворяющие условию

$$|t_1 - t| < 2^{-W^3(t, n)}.$$

Предположим, что

$$(2) \qquad |\mathfrak{f}(t_1) - \mathfrak{f}(t) - \mathfrak{f}'(t) \cdot (t_1 - t)| > 2^{-n} \cdot |t_1 - t|.$$

Предположим, кроме того, что

$$(3) \qquad t \in x \triangle y.$$

Тогда, ввиду (1),

$$t_1 \not\in x \triangle y.$$

Отсюда очевидным образом вытекает, что

$$t_1 \in y \triangle z.$$

Следовательно,

$$t \leqslant y \leqslant t_1.$$

Имеем

$$|f(t_1) - f(t) - f'(t)\cdot(t_1 - t)| = |(f(t_1) - f(y) - f'(y)\cdot(t_1 - y)) + \\ + (f(y) - f(t) - f'(y)\cdot(y - t)) + (f'(y) - f'(t))\cdot(t_1 - t)| \leqslant \\ \leqslant |f(t_1) - f(y) - f'(y)\cdot(t_1 - y)| + |f(y) - f(t) - f'(y)\cdot(y - t)| + \\ + |f'(y) - f'(t)|\cdot|t_1 - t|.$$

Используя (1) и определение W^3, отсюда получаем

$$|f(t_1) - f(t) - f'(t)\cdot(t_1 - t)| \leqslant \\ \leqslant |t_1 - t|\cdot(2^{-n-2} + 2^{-n-2} + 2^{-n-1}) = 2^{-n}\cdot|t_1 - t|,$$

что противоречит предположению (2).

Таким образом, из (2) вытекает, что

$$t \not\in x \triangle y. \tag{4}$$

Точно так же из (2) следует, что

$$t \not\in y \triangle z. \tag{5}$$

Однако (в силу леммы 1 § 2 гл. 5) одновременное выполнение (4) и (5) невозможно. Следовательно, (2) неверно и выполняется

$$|f(t_1) - f(t) - f'(t)\cdot(t_1 - t)| \leqslant 2^{-n}\cdot|t_1 - t|,$$

что и требовалось.

Использование леммы «о склеивании конструктивных функций» (§ 1 гл. 5) и теоремы непрерывности позволяет вывести из этой леммы следующее

Следствие 1. *Пусть функции f'_1, f'_2 являются производными функции f соответственно на сегментах $x \triangle y$ и $y \triangle z$, причем*

$$f'_1(y) = f'_2(y).$$

Тогда осуществима функция f' такая, что

$$f'(t)=\begin{cases} f_1'(t) & \text{при} \quad t\leqslant y, \\ f_2'(t) & \text{при} \quad t\geqslant y, \end{cases}$$

и эта функция является производной f на $x \triangle z$.

Теорема 1 (Цейтин [6]). *Можно построить функции f и f' таким образом, что*

1) *f' является производной f на $0 \triangle 1$;*

2) *невозможен алгорифм, перерабатывающий всякое слово вида x, y, где x и y — КДЧ из $0 \triangle 1$ такие, что $x<y$, в КДЧ из $0 \triangle 1$, придающее f' значение, равное*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Доказательство. В качестве f' возьмем ту же самую функцию, что и в теореме 1 § 4 гл. 5:

$$f'(x)=\left|x-\frac{2}{3}\right|-\left|x-\frac{1}{3}\right|+2\cdot x-1.$$

Очевидно,

$$f'(x)=\begin{cases} 2\cdot x-\frac{4}{3} & \text{при} \quad x\geqslant\frac{2}{3}, \\ 0 & \text{при} \quad \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}, \\ 2\cdot x-\frac{2}{3} & \text{при} \quad x\leqslant\frac{1}{3}. \end{cases} \tag{6}$$

В качестве f возьмем функцию такую, что

$$f(x)=\frac{(f'(x))^2}{4}.$$

Нетрудно проверить, что

$$f(x)=\begin{cases} \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 & \text{при} \quad x\geqslant\frac{2}{3}, \\ 0 & \text{при} \quad \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}, \\ \left(x-\frac{1}{3}\right)^2 & \text{при} \quad x\leqslant\frac{1}{3}. \end{cases} \tag{7}$$

Используя (6)—(7) и лемму 1, легко показать, что функция f' является производной f на $0 \triangle 1$.

Положим теперь

$$y_u = \frac{5}{6} + u,$$

$$x_u = \frac{1}{6} + u.$$

Очевидно, если $|u| < \frac{1}{6}$, то $x_u, y_u \in 0 \triangle 1$, $y_u - x_u > 0$ и

$$\frac{f(y_u) - f(x_u)}{y_u - x_u} = \frac{\left(u + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(u - \frac{1}{6}\right)^2}{\frac{2}{3}} = u.$$

Таким образом, если бы алгорифм, о котором идет речь в утверждении 2) теоремы, существовал, то мы смогли бы построить алгорифм α, перерабатывающий всякое u, для которого $|u| < \frac{1}{6}$, в КДЧ из $0 \triangle 1$ такое, что

$$f'(\alpha(u)) = u.$$

В доказательстве теоремы 1 § 4 гл. 5 фактически уже было показано, что такой алгорифм невозможен. Действительно, располагая алгорифмом α, можно построить алгорифм α_1 так, что

$$\alpha_1(u) \simeq \text{Рз}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \alpha(u)\right).$$

Поскольку $f'(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant \frac{1}{3}$ и $f'(t) \leqslant 0$ при $t \leqslant \frac{2}{3}$, алгорифм α_1 указывает для каждого u такого, что $|u| < \frac{1}{6}$, верный член дизъюнкции

$$(u \leqslant 0) \vee (u \geqslant 0),$$

что противоречит следствию 5 § 1 гл. 4.

Следствие 2. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий всякое слово вида* $\xi f \zeta$, $\xi f' \zeta$, $\xi W \zeta$, *где* f *и* f' — *функции такие, что* $f(0) = f(1) = 0$, f' — *производная* f *на* $0 \triangle 1$, *причем выполняется* Пр $(0 \triangle 1, f, f', W)$, *в КДЧ из* $0 \triangle 1$, *придающее* f' *значение, равное* 0.

Это следствие легко выводится из теоремы 1 с помощью рассмотрения вспомогательных функций

$$F_{x,y}(t) = f((y-x)\cdot t + x) - (f(y) - f(x))\cdot t - f(x),$$

где x, y — произвольные КДЧ из $0 \triangle 1$ такие, что $x < y$, а f — функция, фигурирующая в теореме 1.

В § 1 мы отмечали, что, располагая регулятором дифференцируемости в себе данной функции на данном промежутке, можно построить производную рассматриваемой функции на данном промежутке. В связи с этим возникает вопрос о возможности эффективного вычисления производных чисел дифференцируемых функций, исходя лишь из значений этих функций (т. е. располагая лишь вычисляющим функцию алгорифмом). Нетрудно видеть, что ответ на этот вопрос отрицательный.

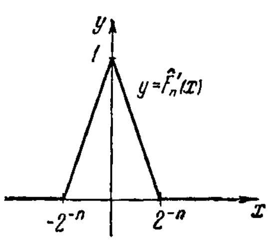


Рис. 15.

Теорема 2 (Минц [1]—[3]). *Невозможен алгорифм, перерабатывающий запись всякой дифференцируемой на всей оси функции в КДЧ, являющееся производным числом этой функции в* 0.

Доказательство. Рассмотрим последовательности КФ F и F' такие, что $F'(n, x) = (|x+2^{-n}| + |x-2^{-n}| - |2\cdot x|)\cdot 2^{n-1}$ (рис. 15),

$$F(n, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -2^{-n}, \\ 2^{n-1}\cdot x^2 + x + 2^{-n-1} & \text{при } -2^{-n} \leqslant x \leqslant 0, \\ -2^{n-1}\cdot x^2 + x + 2^{-n-1} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2^{-n}, \\ 2^{-n} & \text{при } 2^{-n} \leqslant x. \end{cases}$$

С помощью леммы 1 нетрудно убедиться, что при любом n функция $\hat{F}'_n$ является производной функции $\hat{F}_n$ на всей оси. Кроме того, при всяких n и x

$$(8) \qquad |\hat{F}_n(x)| \leqslant 2^{-n}.$$

Пусть теперь $\mathfrak{H}$ — тот же самый алгорифм с неразрешимой проблемой распознавания применимости относительно алфавита $Ч_0$, что и в гл. 4. Нам существенно следующее свойство $\mathfrak{H}$: невозможен алгорифм $\mathfrak{A}$ над $Ч_0$ такой, что при любом $P \in Ч_0$, если $!\mathfrak{H}(P)$, то $!\mathfrak{A}(P)$ и $\mathfrak{A}(P) \doteq \Lambda$, а если $\neg !\mathfrak{H}(P)$, то $!\mathfrak{A}(P)$ и $\mathfrak{A}(P) \not\doteq \Lambda$.

Обозначим через V такой алгорифм, что

$$V(P) \simeq \mu n([\mathfrak{H}](P, n) \doteq \Lambda),$$

и построим алгорифм $\mathfrak{C}$ так, чтобы при любом P и n

$$\mathfrak{C}(P, n) \simeq \begin{cases} 0, & \text{если} \quad [\mathfrak{H}](P, n) \not\doteq \Lambda, \\ 1, & \text{если} \quad [\mathfrak{H}](P, n) \doteq \Lambda \quad \text{и} \quad n \doteq V(P), \\ 0, & \text{если} \quad [\mathfrak{H}](P, n) \doteq \Lambda \quad \text{и} \quad n \not\doteq V(P). \end{cases}$$

Очевидно, при любом P алгорифм $\widehat{\mathfrak{C}}_P$ является ПНЧ, причем

(9) если $\neg ! \mathfrak{H}(P)$, то при всяком i

$$\mathfrak{C}(P, i) \doteq 0,$$

(10) если $!\mathfrak{H}(P)$ и $\mathfrak{H}$ оканчивает работу над P точно за k шагов, то при $i \not\doteq k$

$$\mathfrak{C}(P, i) \doteq 0$$

и

$$\mathfrak{C}(P, k) \doteq 1.$$

Рассмотрим при каждом P в $Ч_0$ функциональный ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \widehat{\mathfrak{C}}_P(i) \cdot \widehat{F}_i. \tag{11}$$

Поскольку при любом P, ввиду (8)—(10),

$$|\widehat{\mathfrak{C}}_P(i) \cdot \widehat{F}_i(t)| \leqslant 2^{-i},$$

этот ряд при любом P равномерно сходится на всей оси. Пользуясь теоремой о полноте КДЧ, построим алгорифм H такой, что $\widehat{H}_P$ есть функция, к которой сходится ряд (11).

Предположим теперь, что алгорифм, о котором идет речь в теореме, построен. Обозначим его α. Построим алгорифм α_1 такой, что

$$\alpha_1(P) \simeq \alpha(\xi \widehat{H}_P \zeta).$$

Очевидно, если $\urcorner!\mathfrak{H}(P)$, то $\mathfrak{A}_P$ — функция; равная нулю на всей оси. Следовательно, в этом случае $!\alpha_1(P)$ и $\alpha_1(P)$ есть КДЧ, равное 0.

Если же $!\mathfrak{H}(P)$ и $\mathfrak{H}$ оканчивает работу над P точно за k шагов, то на всей оси $\mathfrak{A}_P = \mathfrak{F}_k$. Таким образом, в этом случае $!\alpha_1(P)$ и $\alpha_1(P)$ есть КДЧ, равное 1.

Построим теперь алгорифм α_2 так, чтобы

$$\alpha_2(P) \simeq \begin{cases} \Lambda, & \text{если} \quad \operatorname{sgn}\left(\alpha_1(P) - \frac{1}{2}\right) \doteqdot 1, \\ 0, & \text{если} \quad \operatorname{sgn}\left(\alpha_1(P) - \frac{1}{2}\right) \doteqdot -1. \end{cases}$$

Из сказанного ясно, что если $!\mathfrak{H}(P)$, то $!\alpha_2(P)$ и $\alpha_2(P) \doteqdot \Lambda$, если же $\urcorner!\mathfrak{H}(P)$, то $!\alpha_2(P)$ и $\alpha_2(P) \doteqdot 0 \neq \Lambda$. Такой алгорифм, однако, невозможен.

Читатель без труда может усилить теоремы 1—2 в следующем направлении: в случае функций f и f', построенных в доказательстве теоремы 1, невозможен алгорифм, находящий требуемое КДЧ с точностью, большей чем $\frac{1}{9}$; в случае теоремы 2 невозможен алгорифм, находящий требуемое КДЧ с точностью, большей чем $\frac{1}{2}$. Ясно также, что обе эти теоремы сохраняются для класса бесконечно дифференцируемых функций.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ ПО РИМАНУ

В данной главе излагаются основы интегрального исчисления для конструктивных функций. По поводу отношения этой теории к традиционному интегральному исчислению можно было бы повторить вводные замечания к гл. 3 и 6.

§ 1. Основные определения. Теорема об ограниченности интегрируемых функций

1. Мы будем пользоваться понятием дробления, введенным в гл. 5. Напомним, что *дроблением* называется всякое слово вида

(1) $$x_0 * x_1 * \ldots * x_n,$$

где $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Если $x = x_0$ и $y = x_n$, то дробление (1) называется дроблением сегмента $x \Delta y$.

Определение 1. *Дробление* (1) *назовем правильным, если выполняется один из двух случаев:* 1) $n = 1$; 2) $n > 1$, *все* x_i $(0 < i < n)$ — *рациональные числа и* $x_j < x_{j+1}$ $(0 \leqslant j \leqslant n-1)$.

Например, для любого сегмента $x \Delta y$ слово $x * y$ является правильным дроблением этого сегмента.

В данной главе, за исключением специально оговариваемых мест, используются только правильные дробления, поэтому прилагательное «правильное» обычно опускается.

Определение 2. *Пусть* (1) — *правильное дробление сегмента* $x \Delta y$. *Интегральным дроблением сегмента* $x \Delta y$ *назовем произвольное слово вида*

(2) $$x_0 * x_1 * \ldots * x_n, \; y_0 * \ldots * y_{n-1},$$

где y_j $(0 \leqslant j \leqslant n-1)$ — *КДЧ, причем* $x_j \leqslant y_j \leqslant x_{j+1}$. *Про интегральное дробление* (2) *будем говорить, что оно отвечает дроблению* (1).

Все фигурирующие в данной главе конструктивные функции предполагаются всюду определенными. Так же, как и раньше, такие КФ для краткости называются просто функциями.

Определение 3. *Пусть f — функция, (2) — интегральное дробление сегмента $x \triangle y$. Слово вида*

$$\mathfrak{E} f \mathfrak{Z},\ x_0 * x_1 * \ldots * x_n,\ y_0 * \ldots * y_{n-1} \tag{3}$$

будем называть интегральной суммой функции f на сегменте $x \triangle y$. Про интегральную сумму (3) *будем также говорить, что она отвечает интегральному дроблению* (2) *и дроблению* (1).

Определение 4. *КДЧ $\sum\limits_{i=0}^{n} f(y_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$ будем называть значением интегральной суммы* (3).

Можно построить алгорифм $\mathfrak{z}$, перерабатывающий всякую интегральную сумму в ее значение.

Определение 5. *Пусть* (1) — *правильное дробление. КДЧ $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j - x_{j-1})$ будем называть измельченностью этого дробления. Это КДЧ будет также называться измельченностью интегрального дробления* (2) *и интегральной суммы* (3).

Можно построить алгорифм π, перерабатывающий всякое дробление, интегральное дробление и интегральную сумму в их измельченность.

Определение 6. *ПНЧ δ назовем регулятором интегрируемости функции f на сегменте $x \triangle y$, если при любом n для любых интегральных сумм S_1, S_2 функции f на $x \triangle y$ таких, что $\pi(S_1)$, $\pi(S_2) < 2^{-\delta(n)}$, выполняется*

$$|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| < 2^{-n}.$$

Определение 7. *Функция f называется интегрируемой по Риману (R-интегрируемой) на сегменте $x \triangle y$, если можно построить регулятор интегрируемости f на $x \triangle y$*).*

---

*) То обстоятельство, что при определении R-интегрируемости мы ограничились правильными дроблениями сегмента интегрирования, не имеет принципиального значения и обусловлено желанием упростить изложение.

Поскольку в этой главе не рассматриваются понятия интегрируемости, отличные от интегрируемости по Риману, R-интегрируемые функции будут часто называться просто интегрируемыми.

Нам потребуются некоторые алгорифмы, связанные с введенными только что определениями. Через $Д$, $Ю$, $И$, $И_1$ мы будем обозначать фиксированные каким-нибудь образом (построение предоставляется читателю) алгорифмы такие, что если Q, R, S — соответственно произвольные дробление, интегральное дробление и интегральная сумма, имеющие вид (1)—(3), то

$$Д(Q) \doteqdot Д(R) \doteqdot Д(S) \doteqdot Q;$$

$$Ю(Q) \doteqdot Ю(R) \doteqdot Ю(S) \doteqdot n;$$

$$И(Q, i) \doteqdot И(R, i) \doteqdot И(S, i) \doteqdot \begin{cases} x_i, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant n, \\ \Lambda, & \text{если } i > n; \end{cases}$$

$$И_1(R, i) \doteqdot И_1(S, i) \doteqdot \begin{cases} y_i, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant n-1, \\ \Lambda, & \text{если } i \geqslant n. \end{cases}$$

Определение 8. *Последовательность дроблений*) W назовем регулярной, если при любом n*

$$\pi(W(n)) < 2^{-n}.$$

Лемма 1. *Можно построить алгорифм W^1 такой, что для любого сегмента $x \triangle y$ $\widehat{W}^1_{x \triangle y}$ является регулярной последовательностью дроблений этого сегмента.*

Доказательство. Используя алгорифмы G, G^+ (§§ 3—4 гл. 2) и алгорифмы D^-, D^+ (§ 2 гл. 3), можно построить алгорифм U такой, что для любого сегмента $x \triangle y$ положительной длины $\widehat{U}_{x \triangle y}$ является регулярной последовательностью дроблений этого сегмента. Искомый алгорифм W^1 строим теперь так, чтобы

$$W^1(x \triangle y, n) \simeq$$

$$\simeq \begin{cases} U(x \triangle y, n), & \text{если } \text{Рз}(2^{-n-1}, 2^{-n}, y-x) \doteqdot 2, \\ x * y, & \text{если } \text{Рз}(2^{-n-1}, 2^{-n}, y-x) \doteqdot 1, \end{cases}$$

*) Под последовательностью дроблений мы подразумеваем, как обычно, алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в дробление.

где Рз — алгорифм, построенный согласно теореме 21 § 3 гл. 2.

Определение 9. *Будем говорить, что КДЧ z является интегралом Римана (R-интегралом) функции f на сегменте $x \triangle y$, если можно построить ПНЧ σ такую, что при любом n для любой интегральной суммы S функции f на $x \triangle y$ с измельченностью, меньшей $2^{-\sigma(n)}$, выполняется*

$$|\mathfrak{z}(S_1) - z| < 2^{-n}.$$

Теорема 1. *Пусть $x \triangle y$ — произвольный сегмент, f — произвольная функция. Функция f R-интегрируема на $x \triangle y$ тогда и только тогда, когда осуществимо КДЧ, являющееся R-интегралом f на $x \triangle y$.*

Доказательство. Пусть u, v обозначают произвольные слова вида

$$x \triangle y,\ \{f\},\ \{\delta\}, \tag{4}$$

$$x \triangle y,\ \{f\},\ \{\sigma\},\ z \tag{5}$$

где $x \triangle y$ — сегмент, f — функция, z — КДЧ, δ, σ — алгорифмы типа $(\mathscr{H} \to \mathscr{H})$, причем δ является регулятором интегрируемости f на $x \triangle y$, а z и σ удовлетворяют вместе с f и $x \triangle y$ определению 9.

Для доказательства теоремы 1 нужно построить алгорифмы λ^1, λ^2, λ^3 такие, что для любых слов u, v вида (4) — (5)

1) $!\lambda^1(u)$, $\lambda^1(u)$ — КДЧ;

2) $\hat{\lambda}^2_u$ — алгорифм типа $(\mathscr{H} \to \mathscr{H})$;

3) $\lambda^1(u)$, $\hat{\lambda}^2_u$, f и $x \triangle y$ удовлетворяют определению 9 (таким образом, $\lambda^1(u)$ является R-интегралом f на $x \triangle y$);

4) $\hat{\lambda}^3_v$ является регулятором интегрируемости f на $x \triangle y$.

Построение алгорифма λ^3 очевидно: достаточно, чтобы λ^3 удовлетворял условию

$$\lambda^3(v,\ n) \simeq \sigma(n+1).$$

Построение алгорифмов λ^1, λ^2 без труда может быть выполнено с помощью леммы 1 и теоремы о полноте КДЧ (гл. 3, § 2).

Для отношения «КДЧ z является R-интегралом функции f на сегменте $x \triangle y$» мы будем использовать запись

$$z \underset{(R)}{=} \int_x^y f$$

или

$$\int_x^y f \underset{(R)}{=} z,$$

причем индекс (R) будет, как правило, опускаться *). Мы будем также часто использовать следующую сокращенную запись (приближающую наши обозначения к традиционным). Пусть $\mathscr{A}(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторое суждение о КДЧ, а $f_1, \ldots, f_n$ — функции. Тогда под $\mathscr{A}\left(\int_{u_1}^{v_1} f_1, \ldots, \int_{u_n}^{v_n} f_n\right)$ мы будем понимать суждение

$$\exists z_1 z_2 \ldots z_n \left(\left(\mathop{\&}_{i=1}^{n}\left(z_i = \int_{u_i}^{v_i} f_i\right)\right) \& \mathscr{A}(z_1, \ldots, z_n)\right).$$

Например, запись $\int_x^y f > 0$ следует понимать так: существует КДЧ, большее нуля и являющееся R-интегралом f на сегменте $x \triangle y$.

2. Определение 10. *Пусть n — натуральное число, f — функция, Q — дробление. Будем говорить, что Q является n-дроблением для f, если для любых интегральных сумм S_1, S_2 функции f таких, что $D(S_1) \mathrel{\bar{\bar{\cdot}}} D(S_2) \mathrel{\bar{\bar{\cdot}}} Q$, выполняется*

$$|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| < 2^{-n}.$$

---

*) Чтобы предупредить возможные недоразумения, отметим, что запись $z = \int_x^y f \left(\int_x^y f = z\right)$ следует рассматривать как нерасчленяемое целое (символ $\int_x^y$ не является обозначением оператора!).

Лемма 2. *Пусть f — функция, $Q \mp x_0 * \ldots * x_n$ — дробление, причем $x_0 < x_n$ и Q является 0-дроблением для f. Тогда КДЧ*

$$z_{f,Q} = \frac{1}{\min\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1}(x_{i+1} - x_i)} + \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |f(x_i)| \tag{6}$$

ограничивает функцию f на сегменте $x_0 \triangle x_n$.

Доказательство. Ввиду леммы 1 § 2 гл. 5 достаточно показать, что $z_{f,Q}$ ограничивает f на каждом сегменте $x_i \triangle x_{i+1}$. Предположим, что при некоторых i_1 $(0 \leqslant i_1 \leqslant n-1)$ и $x \in x_{i_1} \triangle x_{i_1+1}$ выполняется

$$|f(x)| > z_{f,Q}. \tag{7}$$

Рассмотрим тогда интегральные суммы S_1, S_2 функции f такие, что

$$S_1 \mp \mathfrak{E} f \mathfrak{Z},\ Q,\ x_0 * \ldots * x_{n-1},$$

$$S_2 \mp \mathfrak{E} f \mathfrak{Z},\ Q,\ x_0 * \ldots * x_{i_1-1} * x * x_{i_1+1} * \ldots * x_{n-1}.$$

Очевидно,

$$|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| = |f(x) - f(x_{i_1})| \cdot (x_{i_1+1} - x_{i_1}).$$

Следовательно,

$$|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| \geqslant ||f(x)| - |f(x_{i_1})|| \cdot (x_{i_1+1} - x_{i_1}).$$

Ввиду (6)—(7)

$$|f(x)| - |f(x_{i_1})| > \frac{1}{\min\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1}(x_{i+1} - x_i)}.$$

Поэтому

$$|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| > 1,$$

что противоречит условиям леммы (Q — 0-дробление для f).

Таким образом, (7) невозможно и всюду на $x_0 \triangle x_n$ выполняется

$$|f(t)| \leqslant z_{f,Q},$$

что и требовалось доказать.

Из леммы 2 без труда усматривается

Лемма 3. *Можно построить алгорифм W^3, перерабатывающий всякое слово вида $\xi f \zeta$, Q, где Q — положительное дробление*), являющееся 0-дроблением для f, в КДЧ, ограничивающее f на сегменте $И(Q,0)\triangle\triangle И(Q,Ю(Q))$.*

Использование непрерывности конструктивных функций (теорема 2 § 2 гл. 5) позволяет освободиться в лемме 3 от условия положительности дробления Q.

Лемма 4. *Можно построить алгорифм W^4, перерабатывающий всякое слово вида $\xi f \zeta$, Q, где Q — 0-дробление для f, в КДЧ, ограничивающее f на сегменте $И(Q,0)\triangle И(Q,Ю(Q))$.*

Доказательство. Ввиду непрерывности конструктивных функций (теорема 2 § 2 гл. 5) можно построить алгорифм U такой, что для любого слова $\xi f \zeta$, Q рассматриваемого типа имеет место $!U(\xi f \zeta, Q)$, $U(\xi f \zeta, Q)$ — натуральное число, и если

$$|x - И(Q, 0)| < 2^{-U(\xi f \zeta, Q)}, \tag{8}$$

то

$$|f(x) - f(И(Q, 0))| < 1. \tag{9}$$

Обозначим для краткости на время доказательства $U(\xi f \zeta, Q)$ через $N_{f,Q}$ и сегмент $И(Q,0)\triangle И(Q,Ю(Q))$ через $x_Q \triangle y_Q$. Используя алгорифм W^3, построенный согласно лемме 3, построим алгорифм W^4 так, чтобы

$$W^4(\xi f \zeta, Q) \simeq$$

$$\simeq \begin{cases} W^3(\xi f \zeta, Q), & \text{если } \text{Рз}\left(2^{-N_{f,Q}-1}, 2^{-N_{f,Q}}, y_Q - x_Q\right) \mp 2, \\ |f(x_Q)| + 1, & \text{если } \text{Рз}\left(2^{-N_{f,Q}-1}, 2^{-N_{f,Q}}, y_Q - x_Q\right) \mp 1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться ((8)—(9), лемма 3), что W^4 обладает требуемыми свойствами.

Лемма 4 позволяет доказать ограниченность интегрируемых функций. Прежде чем сформулировать соответствующую теорему, сделаем некоторые замечания, связанные с конструктивным пониманием суждений (применительно к материалу данной главы).

---

*) То есть $И(Q,Ю(Q)) - И(Q,0) > 0$. Очевидно, всякое дробление Q является дроблением сегмента $И(Q,0)\triangle И(Q,Ю(Q))$.

Определение 11. *Интегральным шифром называется всякое слово вида*

$$x \triangle y, \ \{f\}, \ \{\delta\}, \tag{10}$$

где $x \triangle y$ — сегмент, f — функция и δ — регулятор интегрируемости f на $x \triangle y$. Слово (10) *будем называть также интегральным шифром функции f на сегменте $x \triangle y$.*

Интегральные шифры по отношению к интегрируемым функциям играют такую же роль, как равномерные шифры по отношению к равномерно непрерывным функциям. Суждение вида «для любого сегмента $x \triangle y$ и всякой R-интегрируемой на $x \triangle y$ функции f существует конструктивный объект S, находящийся с $x \triangle y$ и f в данном отношении $\mathscr{A}$» конструктивно понимается как утверждение об осуществимости алгорифма, находящего по любому интегральному шифру f на $x \triangle y$ соответствующий конструктивный объект (ср. доказательство теоремы 1).

Для читателя, интересующегося возможностями построения конструктивного анализа без применения принципов Маркова, заметим, что единственное существенное использование этого принципа в данной главе связано со ссылкой на теорему непрерывности при доказательстве ограниченности интегрируемых функций (лемма 4, теорема 2). В свою очередь привлечение теоремы непрерывности вынуждается возможностью вырождения сегмента интегрирования. Таким образом, принцип Маркова может быть устранен введением дополнительных требований непрерывности или ограниченности рассматриваемых функций, либо требованием, чтобы сегмент интегрирования имел положительную длину.

Теорема 2. *Всякая R-интегрируемая на данном сегменте функция ограничена на этом сегменте.*

Доказательство. Теорема утверждает существование алгорифма, перерабатывающего всякий интегральный шифр $x \triangle y$, $\{f\}$, $\{\delta\}$ в КДЧ, ограничивающее f на $x \triangle y$. Возможность построения такого алгорифма без труда усматривается из леммы 4.

В традиционном анализе при доказательстве теоремы, соответствующей теореме 2, обычно доказывают, что интегрируемая функция не может быть неограниченной (см. Фихтенгольц [2; стр. 97], Ландау [2; стр. 342]).

В заключение параграфа сформулируем некоторые элементарные свойства интегрируемых функций.

Теорема 3. *Если* $u_1=\int\limits_x^y f$ *и* $u_2=\int\limits_x^y f$, *то* $u_1=u_2$.

Теорема 4. *Если* $u_1=\int\limits_x^y f$ *и* $u_2=u_1$, *то* $u_2=\int\limits_x^y f$.

Теорема 5. *Если* $u=\int\limits_x^y f$ *и* $x_1=x$, $y_1=y$, *то* $u=\int\limits_{x_1}^{y_1} f$.

Теорема 6. *Если* $u=\int\limits_x^y f$ *и* $f=g$ *на* $x\triangle y$, *то* $u=\int\limits_x^y g$.

Теорема 7. *Если* $u=\int\limits_x^y f$ *и* $f\geqslant 0$ *на* $x\triangle y$, *то* $u\geqslant 0$.

Теорема 8. *Если* $u_1=\int\limits_x^y f$, $u_2=\int\limits_x^y g$, *то*

$$u_1\pm u_2=\int\limits_x^y \{f\pm g\}.$$

В следующем параграфе будет доказана интегрируемость модуля и произведения интегрируемых функций.

Теорема 9. *Если* $u=\int\limits_x^y f$ *и* $g=z\cdot f$ (*где* z — *некоторое КДЧ*), *то* $z\cdot u=\int\limits_x^y g$.

Теорема 10. *Если* $u_1 = \int\limits_x^y f$ *и* $u_2 = \int\limits_x^y g$, *причем* $f \leqslant g$ *на* $x \triangle y$, *то* $u_1 \leqslant u_2$.

Теорема 11. *Если* $f = 0$ *на* $x \triangle y$, *то* $0 = \int\limits_x^y f$.

Теорема 12. *Если* $x = y$, *то для любой функции* f *выполняется* $0 = \int\limits_x^y f$.

Теорема 13. *Если* $f = 1$ *на* $x \triangle y$, *то* $y - x = \int\limits_x^y f$.

§ 2. Некоторые критерии интегрируемости. Интегрируемость равномерно непрерывных функций. Интегрируемость модуля и произведения интегрируемых функций

1. В традиционном анализе при изложении интегрального исчисления весьма удобным оказывается аппарат верхних и нижних сумм Дарбу и связанная с ним известная лемма Дарбу, показывающая, что при установлении интегрируемости достаточно сравнивать интегральные суммы, отвечающие одним и тем же дроблениям (ср. Фихтенгольц [2; стр. 98]). В теории интегрирования конструктивных функций введение верхних и нижних сумм Дарбу встречает принципиальные трудности, так как ограниченная на данном сегменте конструктивная функция может не иметь на нем точных границ (см. гл. 8, § 2 теорема 6). Доказываемая ниже лемма 1 заменит нам упомянутую только что лемму Дарбу.

При доказательстве леммы 1 нам потребуется следующая эквивалентность. Пусть $\mathscr{A}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) — некоторые суждения. Тогда

$$\neg\neg\left(\mathop{\&}_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i\right) \equiv \mathop{\&}_{i=1}^{n} (\neg\neg\mathscr{A}_i).$$

Переход от $\neg\neg\left(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i\right)$ к $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n}\left(\neg\neg\mathscr{A}_i\right)$ очевиден. При доказательстве импликации

$$\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n}(\neg\neg\mathscr{A}_i)\supset\left(\neg\neg\left(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i\right)\right)$$

ограничимся случаем $n=2$ (переход к любому $n>2$ легко проводится с помощью индукции).

Итак, пусть выполняется

(1) $$\neg\neg\mathscr{A}_1 \& \neg\neg\mathscr{A}_2.$$

Предположим, что

(2) $$\neg(\mathscr{A}_1 \& \mathscr{A}_2).$$

Тогда, очевидно,

$$\mathscr{A}_1 \supset \neg\mathscr{A}_2,$$

откуда следует

$$\neg\neg\mathscr{A}_2 \supset \neg\mathscr{A}_1,$$

что противоречит (1).

Следовательно, (2) неверно, т. е. выполняется

$$\neg\neg(\mathscr{A}_1 \& \mathscr{A}_2),$$

что и требовалось.

Определение 1. *Будем говорить, что дробление Q_2 является продолжением дробления Q_1 (запись $Q_2 \supseteq Q_1$), если Q_1, Q_2 суть дробления одного и того же сегмента и для любого $0 \leqslant i \leqslant Ю(Q_1)$ можно найти $0 \leqslant k_i \leqslant Ю(Q_2)$ так, что*

$$И(Q_1, i) = И(Q_2, k_i)$$

(т. е. Q_2 получается из Q_1 добавлением новых точек).

Лемма 1. *Пусть f — функция, $z \geqslant 0$ — КДЧ, Q_1 — правильное дробление, причем для любых интегральных сумм S_1, S_2 функции f, отвечающих дроблению Q_1, выполняется*

$$|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| \leqslant z.$$

Тогда, каково бы ни было правильное дробление $Q_2 \supseteq Q_1$, для любых интегральных сумм S_3, S_4 функции f, отвечающих соответственно дроблениям Q_2 и Q_1, также выполняется неравенство

$$|\mathfrak{z}(S_3) - \mathfrak{z}(S_4)| \leqslant z.$$

Доказательство. Пусть

(3) $$Q_1 \mp x_0 * \ldots * x_n,$$

(4) $$Q_2 \mp y_0 * \ldots * y_m.$$

Очевидно, $x_0 = y_0$, $y_m = x_n$ и $m \geqslant n$.

Найдем для каждого $0 \leqslant i \leqslant n$ k_i так, чтобы

$$x_i = y_{k_i},$$

причем при $i = 0$ и $i = n$ положим соответственно $k_0 = 0$ и $k_n = m$ *). Очевидно,

(5) $$0 = k_0 < k_1 < \ldots < k_n = m.$$

(6) Предположим, что существуют интегральные суммы S_3, S_4 функции f такие, что $D(S_3) \mp Q_2$, $D(S_4) \mp Q_1$ и $|\mathfrak{z}(S_3) - \mathfrak{z}(S_4)| > z$.

Пусть

(7) $$S_3 \mp \{f\}, Q_2, u_0 * \ldots * u_{m-1},$$
$$S_4 \mp \{f\}, Q_1, v_0 * \ldots * v_{n-1}.$$

Обозначим через z_i $(0 \leqslant i \leqslant m-1)$ КДЧ $f(u_i)$. Обозначим через $\mathscr{B}_{ij}$ дизъюнкцию $(z_i \geqslant z_j) \vee (z_i \leqslant z_j)$. Поскольку при любых i, j выполняется $\neg\neg\mathscr{B}_{ij}$, то имеет место

(8) $$\neg\neg \mathop{\&}_{i,j=1}^{n} \mathscr{B}_{ij}.$$

Предположим, что выполняется

(9) $$\mathop{\&}_{i,j=1}^{n} \mathscr{B}_{ij}.$$

Тогда мы сможем указать натуральные числа $l_0, \ldots, l_{n-1}$ и $s_0, \ldots, s_{n-1}$ такие, что при каждом $0 \leqslant i \leqslant n-1$

(10) $$k_i \leqslant l_i < k_{i+1},$$
$$k_i \leqslant s_i < k_{i+1},$$

и если

$$k_i \leqslant j < k_{i+1},$$

то

(11) $$z_{l_i} \leqslant z_j \leqslant z_{s_i},$$

*) Это замечание вызвано возможностью равенства $x_0 = x_n$.

т. е.

(12) $$f(u_{l_i}) \leqslant f(u_j) \leqslant f(u_{s_i}).$$

Рассмотрим теперь интегральные суммы S_5, S_6 функции f такие, что

$$S_5 \doteq \mathcal{E}f\mathcal{Z},\ Q_1,\ u_{l_0} * u_{l_1} * \ldots * u_{l_{n-1}},$$
$$S_6 \doteq \mathcal{E}f\mathcal{Z},\ Q_1,\ u_{s_0} * u_{s_1} * \ldots * u_{s_{n-1}}.$$

Ввиду (3) — (5), (7), (10) — (12), очевидно,

$$\mathfrak{z}(S_5) \leqslant \mathfrak{z}(S_3),$$
$$\mathfrak{z}(S_6) \geqslant \mathfrak{z}(S_3).$$

Поскольку, ввиду (6),

$$|\mathfrak{z}(S_3) - \mathfrak{z}(S_4)| > 0,$$

то

$$|\mathfrak{z}(S_3) - \mathfrak{z}(S_4)| = \mathfrak{z}(S_3) - \mathfrak{z}(S_4)$$

или

$$|\mathfrak{z}(S_3) - \mathfrak{z}(S_4)| = \mathfrak{z}(S_4) - \mathfrak{z}(S_3).$$

В первом случае

$$\mathfrak{z}(S_6) - \mathfrak{z}(S_4) = |\mathfrak{z}(S_6) - \mathfrak{z}(S_4)| \geqslant \mathfrak{z}(S_3) - \mathfrak{z}(S_4) > z.$$

Во втором случае

$$|\mathfrak{z}(S_5) - \mathfrak{z}(S_4)| > z.$$

И то и другое противоречит условиям леммы (очевидно, $D(S_5) \doteq D(S_6) \doteq Q_1$). Следовательно, при выполнении (6) неверно (9), т. е. имеет место

$$\neg\left(\mathop{\&}_{i,\,j=1}^{n} \mathscr{B}_{ij}\right).$$

Это, однако, невозможно в силу (8). Таким образом, (6) неверно, и, следовательно, для любых интегральных сумм S_3, S_4 таких, что $D(S_3) \doteq Q_2$ и $D(S_4) \doteq Q_1$, выполняется

$$|\mathfrak{z}(S_3) - \mathfrak{z}(S_4)| \leqslant z,$$

что и требовалось.

Заметим, что совершенно аналогично лемме 1 можно доказать следующее утверждение, еще более напоминающее лемму Дарбу: если $Q_2 \supseteq Q_1$ и для любых интегральных сумм S_1, S_2 функции f таких, что $D(S_1) \mp D(S_2) \mp Q_1$, выполняется $|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| \leqslant z$, то это же неравенство выполняется и для любых интегральных сумм f, отвечающих дроблению Q_2. Нам это утверждение не понадобится.

Лемма 2. *Пусть $Q = x_0 * \ldots * x_k$ — правильное дробление, f — функция, m, n — натуральные числа, причем 2^m ограничивает f на $x_0 \triangle x_k$ и Q является $(n+2)$-дроблением для f* *).

Тогда для любых интегральных сумм S_1, S_2 функции f на $x_0 \triangle x_k$ таких, что

$$\pi(S_1),\ \pi(S_2) < 2^{-m-n-k-3}, \tag{13}$$

выполняется

$$|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| < 2^{-n}.$$

Доказательство. Пусть S_1, S_2 — произвольные интегральные суммы f, удовлетворяющие неравенству (13). Обозначим через P дробление сегмента $x_0 \triangle x_k$, получающееся из Q добавлением тех точек дробления $D(S_1)$, которые отличны от $x_0, \ldots, x_k$. Очевидно, $P \supseteq Q$. Пусть S_1 и P имеют вид

$$\begin{aligned} &S_1 \mp \mathcal{E} f \mathcal{Z},\ t_0 * t_1 * \ldots * t_l,\ y_0 * \ldots * y_{l-1}, \\ &P \mp s_0 * s_1 * \ldots * s_p \end{aligned} \tag{14}$$

(где $t_0 = s_0 = x_0$ и $t_l = s_p = x_k$).

Сегмент $t_i \triangle t_{i+1}$ назовем сегментом 1-го рода, если внутри него нет точек дробления Q, т. е. если при некотором j

$$t_i = s_j,$$
$$t_{i+1} = s_{j+1}.$$

В противном случае $t_i \triangle t_{i+1}$ назовем сегментом 2-го рода **).

Очевидно, что сегментов 2-го рода не больше, чем k. Обозначим через z сумму длин сегментов 2-го рода.

---

*) См. определения 1 и 10 § 1.

**) Поскольку $t_0 = s_0$, $t_l = s_p$ и все t_i $(1 \leqslant i \leqslant l-1)$, s_i $(1 \leqslant i \leqslant p-1)$ рациональны, по данному i легко узнать, является ли сегмент $t_i \triangle t_{i+1}$ сегментом 1-го рода.

Ввиду (13),

(15) $$z \leqslant k \cdot \pi(S_1) \leqslant k \cdot 2^{-m-n-k-3} < 2^{-m-n-3}.$$

Построим интегральную сумму S_1' функции f вида (см. (14))

(16) $$S_1' \rightleftharpoons \{f\}, \ P, \ z_0 * \ldots * z_{p-1},$$

где $z_i \rightleftharpoons y_j$, если сегмент $s_i \triangle s_{i+1}$ совпадает с некоторым сегментом 1-го рода $t_j \triangle t_{j+1}$, и $z_i \rightleftharpoons s_i$, если $s_i \triangle s_{i+1}$ не совпадает ни с каким сегментом 1-го рода (т. е. когда $s_i \triangle s_{i+1}$ входит в некоторый сегмент 2-го рода). Имеем, как легко видеть,

$$|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_1')| \leqslant 2 \cdot 2^m \cdot z.$$

Отсюда согласно (15)

(17) $$|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_1')| < 2^{-n-2}.$$

Фиксируем произвольно интегральную сумму S_0 функции f, отвечающую дроблению Q. Поскольку $D(S_1') \supseteq Q$ и Q — $(n+2)$-дробление для f, согласно лемме 1 выполняется

(18) $$|\mathfrak{z}(S_1') - \mathfrak{z}(S_0)| \leqslant 2^{-n-2}.$$

Из (17) и (18) следует

$$|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_0)| < 2^{-n-1}.$$

Аналогично,

$$|\mathfrak{z}(S_2) - \mathfrak{z}(S_0)| < 2^{-n-1}.$$

Следовательно,

$$|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| < 2^{-n},$$

что и требовалось.

Определение 2. *Последовательность дроблений W будем называть характеристической для функции f, если при каждом n $W(n)$ есть n-дробление для f.*

Оценка, даваемая леммой 2, позволяет получить следующий критерий интегрируемости.

Теорема 1. *Каковы бы ни были сегмент $x \triangle y$ и функция f, f интегрируема на $x \triangle y$ тогда и только тогда, когда осуществима последовательность дроблений $x \triangle y$, характеристическая для f.*

Необходимость. Построим алгорифм λ так, чтобы для любого интегрального шифра $x \triangle y$, $\{f\}$, $\{\delta\}$

$$\lambda(x \triangle y, \{f\}, \{\delta\}, n) \simeq W^1(x \triangle y, \delta(n)),$$

где W^1 — алгорифм, построенный согласно лемме 1 § 1.

Очевидно, $\hat{\lambda}_{x \triangle y, \{f\}, \{\delta\}}$ является характеристической для f последовательностью дроблений сегмента $x \triangle y$.

Достаточность. Обозначим через R произвольное слово вида

$$x \triangle y, \{f\}, \{W\},$$

где $x \triangle y$ — сегмент, f — функция, W — характеристическая для f последовательность дроблений $x \triangle y$.

Ввиду леммы 4 § 1 можно построить алгорифм τ, перерабатывающий всякое R в натуральное число так, что всюду на $x \triangle y$

$$|f(t)| < 2^{\tau(R)}.$$

Построим алгорифм γ так, чтобы

$$\gamma(R, n) \simeq n + \tau(R) + Ю(W(n+2)) + 3.$$

Ввиду леммы 2 алгорифм $\hat{\gamma}_R$ является регулятором интегрируемости f на $x \triangle y$, что и требовалось.

Определение 3. *Функцию f будем называть слабо интегрируемой на сегменте $x \triangle y$, если осуществима ПНЧ σ (называемая слабым регулятором интегрируемости f на $x \triangle y$) такая, что при всяком n для любых интегральных сумм S_1, S_2 функции f на $x \triangle y$ из $D(S_1) \doteq D(S_2)$ и*

$$\pi(S_1),\ \pi(S_2) < 2^{-\sigma(n)}$$

следует

$$|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| < 2^{-n}.$$

Из теоремы 1 и леммы 1 § 1 вытекает

Теорема 2. *Каковы бы ни были сегмент $x \triangle y$ и функция f, f интегрируема на $x \triangle y$ тогда и только тогда, когда она слабо интегрируема на $x \triangle y$.*

Таким образом, при доказательстве интегрируемости какой-либо функции на рациональном сегменте достаточно рассматривать лишь разбиения этого сегмента на произвольное число равных частей.

Теорема 3. *Каков бы ни был сегмент $x \triangle y$, всякая равномерно непрерывная на $x \triangle y$ функция интегрируема на $x \triangle y$.*

Доказательство. Пусть T — произвольный равномерный шифр $x \triangle y * \{f\} * \{\delta\}$ (§ 2 гл. 5). В силу теоремы 2 достаточно доказать слабую интегрируемость f, для чего нужно построить алгорифм U так, чтобы при любом слове T рассматриваемого типа $\widehat{U}_T$ являлся слабым регулятором интегрируемости f на $x \triangle y$.

Искомый алгорифм U строим так, чтобы

$$U(x \triangle y * \{f\} * \{\delta\},\ n) \simeq \delta(n + G^{+}(y - x)). \tag{19}$$

Пусть $Q \rightleftharpoons x_0 * \ldots * x_m$ — дробление сегмента $x \triangle y$, причем

$$\pi(Q) < 2^{-U(x \triangle y * \{f\} * \{\delta\},\ n)}. \tag{20}$$

Пусть далее

$$S_1 \rightleftharpoons \{f\},\ Q,\ y_0 * \ldots * y_{m-1},$$
$$S_2 \rightleftharpoons \{f\},\ Q,\ z_0 * \ldots * z_{m-1}$$

— две произвольные интегральные суммы f, отвечающие дроблению Q. Тогда

$$|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} |f(z_i) - f(y_i)| \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Ввиду (19) — (20)

$$|f(z_i) - f(y_i)| < 2^{-n-G^{+}(y-x)}.$$

Следовательно,

$$|\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| < 2^{-n-G^{+}(y-x)} \cdot (y - x) < 2^{-n}.$$

Таким образом, алгорифм $\widehat{U}_{x \triangle y * \{f\} * \{\delta\}}$ является слабым регулятором интегрируемости f на $x \triangle y$, что и требовалось.

Следствие 1. *Всякая монотонная на $x \triangle y$ функция интегрируема на $x \triangle y$.*

Следствие 2. *Всякая кусочно монотонная на $x \triangle y$ функция интегрируема на $x \triangle y$.*

Следствие 3. *Всякая полигональная на $x \triangle y$ функция интегрируема на $x \triangle y$.*

Эти следствия вытекают из теоремы 7, следствия 3, следствия 1 § 2 гл. 5 и теоремы 3.

В связи с теоремой 3 возникает вопрос: не исчерпывается ли класс интегрируемых функций равномерно непрерывными функциями. Ответ на этот вопрос отрицательный: существуют всюду неравномерно непрерывные на $0 \triangle 1$, интегрируемые на $0 \triangle 1$ функции (Кушнер [3]).

2. Теорема 4. *Если функция f R-интегрируема на $x \triangle y$, то функция $|f|$ также R-интегрируема на $x \triangle y$, причем* $\left|\int\limits_x^y f\right| \leqslant \int\limits_x^y |f|$.

Доказательство. Пусть σ — слабый регулятор интегрируемости f на $x \triangle y$. Фиксируем произвольное n и рассмотрим произвольное дробление Q сегмента $x \triangle y$ такое, что

$$\pi(Q) < 2^{-\sigma(n+1)}.$$

Пусть, далее, S_1, S_2 — интегральные суммы функции $|f|$, отвечающие дроблению Q и имеющие вид

$$S_1 \rightleftharpoons \xi |f| \zeta,\ x_0 * \ldots * x_k,\ y_0 * \ldots * y_{k-1},$$

$$S_2 \rightleftharpoons \xi |f| \zeta,\ x_0 * \ldots * x_k,\ z_0 * \ldots * z_{k-1}.$$

Предположим, что

$$(21) \qquad |\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| > 2^{-n-1}.$$

Очевидно,

$$(22) \quad |\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| = \left|\sum_{l=0}^{k-1} (|f(y_l)| - |f(z_l)|) \cdot (x_{l+1} - x_l)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{k-1} |f(y_l) - f(z_l)| \cdot (x_{l+1} - x_l).$$

Обозначим через $\mathscr{B}_i$ суждение $(f(y_i) \geqslant f(z_i)) \vee \vee (f(z_i) \geqslant f(y_i))$ и предположим, что выполняется

$$(23) \qquad \mathop{\&}_{l=0}^{k-1} \mathscr{B}_l.$$

Тогда мы сможем указать интегральные суммы S_3 и S_4 функции f, отвечающие дроблению Q, такие, что

$$\mathfrak{z}(S_3)-\mathfrak{z}(S_4)=\sum_{l=0}^{n-1}|f(y_l)-f(z_l)|\cdot(x_{l+1}-x_l).$$

(Для этого к S_3 надо отнести y_i, если верен первый член дизъюнкции $\mathscr{B}_i$, и z_i, если верен второй член $\mathscr{B}_i$; при построении же S_4 следует поступить наоборот.)

Ввиду (21)—(22) получаем

$$|\mathfrak{z}(S_3)-\mathfrak{z}(S_4)|>2^{-n-1},$$

что противоречит определению σ и Q.

Следовательно, из (21) вытекает

$$\neg \mathop{\&}_{l=0}^{k-1}\mathscr{B}_l.$$

С другой стороны, так как при всяком $0\leqslant i\leqslant k-1$ выполняется $\neg\neg\mathscr{B}_i$, то имеет место (см. стр. 293)

$$\neg\neg \mathop{\&}_{l=0}^{k-1}\mathscr{B}_l.$$

Таким образом, (21) неверно и для любых S_1, S_2, отвечающих дроблению Q,

$$|\mathfrak{z}(S_1)-\mathfrak{z}(S_2)|\leqslant 2^{-n-1}<2^{-n}.$$

Следовательно, алгорифм δ, определяемый равенством $\delta(l)\simeq\sigma(l+1)$, является слабым регулятором интегрируемости функции $|f|$ на $x\triangle y$, откуда и вытекает интегрируемость $|f|$ на $x\triangle y$. Неравенство $\left|\int\limits_x^y f\right|\leqslant\int\limits_x^y|f|$ очевидным образом следует из оценки

$$\left|\sum_{l=0}^{k-1}f(y_l)\cdot(x_{l+1}-x_l)\right|\leqslant\sum_{l=0}^{k-1}|f(y_l)|\cdot(x_{l+1}-x_l).$$

Теорема 5. *Если функции f и g интегрируемы на $x\triangle y$, то функция $f\cdot g$ интегрируема на $x\triangle y$.*

Доказательство. Достаточно доказать слабую интегрируемость функции f на $x\triangle y$. Предоставляя подробности читателю, заметим, что слабая интегрируемость $f\cdot g$ легко следует из ограниченности f и g (теорема 2 § 1) и тождества

$$f(x)\cdot g(x)-f(y)\cdot g(y)=$$
$$=f(y)\cdot(g(x)-g(y))+g(x)\cdot(f(x)-f(y)).$$

§ 3. Интеграл как функция верхнего предела. Теорема Ньютона — Лейбница. Теорема о замене переменной

Определение 1. *Натуральное число m назовем n-индикатором интегрируемости функции f на $x\,\Delta\,y$, если для любых интегральных сумм S_1, S_2 этой функции на $x\,\Delta\,y$ таких, что $\pi(S_1)$, $\pi(S_2)<2^{-m}$, выполняется $|\mathfrak{z}(S_1)-\mathfrak{z}(S_2)|<2^{-n}$.*

Лемма 1. *Пусть v, $x\leqslant z\leqslant y$ — КДЧ, f — функция, ограниченная на $x\,\Delta\,y$ числом v, S_1, S_2 — интегральные суммы f на $x\,\Delta\,z$ и $z\,\Delta\,y$. Можно построить интегральную сумму S функции f на $x\,\Delta\,y$ такую, что*

$$|\mathfrak{z}(S)-\mathfrak{z}(S_1)-\mathfrak{z}(S_2)|\leqslant 4v\cdot\max(\pi(S_1),\ \pi(S_2))$$

и

$$\pi(S)\leqslant 2\cdot\max(\pi(S_1),\ \pi(S_2)).$$

Доказательство. Пусть

$$S_1 \rightleftharpoons \{f\},\ x_0*\ \ldots\ *x_n,\ y_0*\ \ldots\ *y_{n-1},$$
$$S_2 \rightleftharpoons \{f\},\ u_0*\ \ldots\ *u_k,\ v_0*\ \ldots\ *v_{k-1}$$

(где $x_0=x$, $x_n=z$, $u_0=z$, $u_k=y$). Построим интегральную сумму S функции f на $x\,\Delta\,y$ так, что

$$S \rightleftharpoons \{f\},\ x_0*\ \ldots\ *x_{n-1}*u_1*\ \ldots\ *u_k,$$
$$y_0*\ \ldots\ *y_{n-2}*z*v_1*\ \ldots\ *v_{k-1}.$$

Очевидно, $\pi(S)\leqslant 2\cdot\max(\pi(S_1),\ \pi(S_2))$ и

$$\mathfrak{z}(S)=\mathfrak{z}(S_1)+\mathfrak{z}(S_2)+f(z)\cdot(u_1-x_{n-1})-$$
$$-f(y_{n-1})(x_n-x_{n-1})-f(v_0)\cdot(u_1-u_0).$$

Следовательно,

$$|\mathfrak{z}(S)-\mathfrak{z}(S_1)-\mathfrak{z}(S_2)|\leqslant v\cdot((u_1-x_{n-1})+(x_n-x_{n-1})+$$
$$+(u_1-u_0))\leqslant 4v\cdot\max(\pi(S_1),\ \pi(S_2)).$$

Лемма 2. *Пусть функция f ограничена на $x \triangle y$ числом 2^l и m является $(n+2)$-индикатором интегрируемости f на $x \triangle y$. Тогда при любом $z \in x \triangle y$ $m+n+l+5$ является n-индикатором интегрируемости f на $x \triangle z$ и $z \triangle y$.*

Доказательство. Рассмотрим, например, сегмент $x \triangle z$. Пусть S_1, S_2 — интегральные суммы f на $x \triangle z$ такие, что

$$\pi(S_1),\ \pi(S_2) < 2^{-m-n-l-5}.$$

Предположим, что

$$(1) \qquad |\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| > 2^{-n-1}.$$

Пользуясь леммой 1 § 1, построим интегральную сумму T функции f на $z \triangle y$ с измельченностью, меньшей $2^{-m-n-l-5}$.

Применяя к S_1 и T лемму 1, построим интегральную сумму S_3 функции f на $x \triangle y$ так, что

$$|\mathfrak{z}(S_3) - \mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(T)| \leqslant 4 \cdot 2^l \cdot 2^{-m-n-l-5} = 2^{-m-n-3}$$

и

$$\pi(S_3) < 2 \cdot 2^{-m-n-l-5} < 2^{-m}.$$

Аналогично построим интегральную сумму S_4 функции f на $x \triangle y$ так, что

$$\pi(S_4) < 2^{-m}$$

и

$$|\mathfrak{z}(S_4) - \mathfrak{z}(S_2) - \mathfrak{z}(T)| \leqslant 2^{-m-n-3}.$$

Тогда

$$|\mathfrak{z}(S_4) - \mathfrak{z}(S_3)| \geqslant |\mathfrak{z}(S_1) - \mathfrak{z}(S_2)| - 2 \cdot 2^{-m-n-3}.$$

Ввиду (1) получаем

$$|\mathfrak{z}(S_4) - \mathfrak{z}(S_3)| > 2^{-n-1} - 2^{-m-n-2} \geqslant 2^{-n-2}.$$

Это, однако, невозможно, так как m есть $(n+2)$-индикатор интегрируемости.

Следовательно, (1) неверно и для любых S_1, S_2

$$|\mathfrak{z}(S_1)-\mathfrak{z}(S_2)|\leqslant 2^{-n-1}<2^{-n}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на сегменте $x\triangle y$, то при любом $z\in x\triangle y$ f интегрируема на сегментах $x\triangle z$ и $z\triangle y$, причем*

$$\int\limits_x^y f=\int\limits_x^z f+\int\limits_z^y f.$$

Доказательство. Пусть $T \rightleftharpoons x\triangle y, \xi f\mathfrak{Z}, \xi\delta\mathfrak{Z}$ — произвольный интегральный шифр. По теореме 2 § 1 построим алгорифм W, перерабатывающий всякое T в КДЧ, ограничивающее f на $x\triangle y$.

Пусть U — алгорифм такой, что

$$U(T,\ n)\simeq\delta(n+2)+n+G^+(W(T))+5.$$

Ввиду леммы 2 U_T является при любом $z\in x\triangle y$ регулятором интегрируемости f на сегментах $x\triangle z$ и $z\triangle y$.

Доказательство равенства

$$\int\limits_x^y f=\int\limits_x^z f+\int\limits_z^y f$$

проводится предельным переходом с помощью леммы 1.

Утверждение, обратное теореме 1, также имеет место: если функция f интегрируема на $x\triangle z$ и $z\triangle y$, то f интегрируема на $x\triangle y$. Доказательство предоставляется читателю.

Из теоремы 1 и теоремы 1 § 1 без труда следует

Теорема 2. *Каков бы ни был сегмент $x\triangle y$ и интегрируемая на нем функция f, можно построить функцию g так, что при любом $t\in x\triangle y$*

$$g(t)=\int\limits_x^t f.$$

Определение 2. *Функцию g будем называть первообразной функции f на сегменте $x\triangle y$, если f является производной g на этом сегменте* (§ 1 гл. 6).

Теорема 3. *Пусть функции f, g и сегмент $x \triangle y$ таковы, что при любом $t \in x \triangle y$*

$$g(t) = \int\limits_x^t f.$$

Тогда g является первообразной f на $x \triangle y$ *).

Доказательство. Пусть W — регулятор непрерывности функции f (такой алгорифм W существует в силу теоремы 2 § 2 гл. 5) и t — произвольная точка $x \triangle y$.

Фиксируем произвольное n и рассмотрим любую точку $t_1 \in x \triangle y$ такую, что

$$|t_1 - t| < 2^{-W(t, n)}. \tag{2}$$

Ввиду (2)

$$|f(t_1) - f(t)| < 2^{-n}. \tag{3}$$

Предположим, что

$$|g(t_1) - g(t) - f(t) \cdot (t_1 - t)| > 2^{-n} \cdot |t - t_1|. \tag{4}$$

Рассмотрим случаи

$$t = t_1, \tag{5}$$

$$t_1 > t, \tag{6}$$

$$t_1 < t. \tag{7}$$

Случай (5), очевидно, невозможен. В случае (6) по теореме 1

$$g(t_1) - g(t) = \int\limits_t^{t_1} f. \tag{8}$$

Поскольку, ввиду (3), всюду на $t \triangle t_1$

$$f(t) - 2^{-n} < f(z) < f(t) + 2^{-n},$$

то согласно (8)

$$\left(f(t) - 2^{-n}\right) \cdot (t_1 - t) \leqslant g(t_1) - g(t) \leqslant \left(f(t) + 2^{-n}\right) \cdot (t_1 - t),$$

*) Отсутствующее в этой теореме требование непрерывности f выполняется автоматически.

откуда

$$-2^{-n}\cdot(t_1-t)\leqslant g(t_1)-g(t)-f(t)\cdot(t_1-t)\leqslant 2^{-n}\cdot(t_1-t),$$

т. е.

$$|g(t_1)-g(t)-f(t)\cdot(t_1-t)|\leqslant 2^{-n}\cdot|t_1-t|,$$

что противоречит (4). Случай (6), таким образом, невозможен. Точно так же из (4) следует, что невозможен случай (7). Следовательно, из (4) вытекает

$$(t\neq t_1)\,\&\,(t_1\leqslant t)\,\&\,(t_1\geqslant t),$$

что невозможно.

Поэтому при выполнении (2) имеет место

$$|g(t_1)-g(t)-f(t)\cdot(t_1-t)|\leqslant 2^{-n}\cdot|t-t_1|$$

и функция f является, таким образом, производной g на $x\,\triangle\,y$.

Следствие 1. *Всякая равномерно непрерывная на $x\,\triangle\,y$ функция имеет первообразную на $x\,\triangle\,y$.*

Следствие 2. *Всякая полигональная на $x\,\triangle\,y$ функция имеет первообразную на $x\,\triangle\,y$.*

Следствие 3. *Всякая интегрируемая на $x\,\triangle\,y$ функция имеет первообразную на $x\,\triangle\,y$.*

Ввиду следствия 2 § 2 гл. 6 имеет место

Лемма 3. *Пусть g_1, g_2 — первообразные функции f на $x\,\triangle\,y$. Тогда всюду на $x\,\triangle\,y$*

$$g_2(t)=g_1(t)+g_2(x)-g_1(x)$$

(две первообразные одной и той же функции могут отличаться лишь на константу).

Из леммы 3 и теоремы 3 получаем теорему, аналогичную теореме Ньютона — Лейбница.

Теорема 4. *Пусть функция g является первообразной функции f на $x\,\triangle\,y$. Тогда, если f интегрируема на $x\,\triangle\,y$*), то*

$$\int_x^y f=g(y)-g(x).$$

---

*) В следующей главе будет показано, что функция, имеющая первообразную, может быть неинтегрируемой.

Теорема 4 позволяет, как и обычно, доказать известные формулы интегрирования элементарных функций. В частности, имеет место

Следствие 4. *Пусть f — полигональная функция, причем $x_0 * \ldots * x_n$ — определяющее дробление f (т. е. f линейна на каждом сегменте $x_i \triangle x_{i+1}$). Тогда*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \cdot (x_{k+1}-x_k) = \int_{x_0}^{x_n} f.$$

Это утверждение понадобится нам в следующей главе.

Из теоремы 4 и правила дифференцирования сложной функции вытекает также теорема о замене переменной.

Теорема 5. *Пусть функции f, h, h', g и сегменты $x \triangle y$, $u \triangle v$ таковы, что $h(u) = x$, $h(v) = y$, всюду на $u \triangle v$ $x \leqslant h(t) \leqslant y$, h' — производная h на $u \triangle v$ и, наконец, всюду на $u \triangle v$*

$$g(t) = f(h(t)) \cdot h'(t).$$

Тогда, если обе функции f и g интегрируемы соответственно на $x \triangle y$ и $u \triangle v$, то

$$\int_x^y f = \int_u^v g.$$

Для доказательства достаточно заметить, что если f_1 — первообразная f на $x \triangle y$, то функция g_1 такая, что

$$g_1(t) = f_1(h(t)),$$

является первообразной g на $u \triangle v$.

В заключение отметим, что в связи с теоремой о среднем интегрального исчисления могут быть получены результаты, аналогичные теоремам гл. 6. В частности (мы ограничиваемся случаем единичного сегмента), невозможен алгорифм α, перерабатывающий всякий интегральный шифр

$$T \mp 0 \triangle 1,\ \{f\},\ \{\delta\}$$

в КДЧ так, что

$$f(\alpha(T)) = \int_0^1 f,$$

и вместе с тем невозможна интегрируемая на $0 \Delta 1$ функция f, для которой всюду на $0 \Delta 1$

$$f(t) \neq \int_0^1 f.$$

В следующей главе будет доказана невозможность некоторых других алгорифмов, связанных с интегрируемыми функциями, и будут приведены примеры неинтегрируемых функций.

СИНГУЛЯРНЫЕ ПОКРЫТИЯ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

В этой главе излагаются некоторые специфические свойства конструктивного континуума, связанные с нарушением для него теоремы Бореля о выборе конечного покрытия. Поскольку именно теорема Бореля является, как правило, основой для перехода от локальных свойств функций к их глобальным свойствам, то неудивительно, что ее нарушение приводит к примерам конструктивных функций, обладающих хорошими локальными свойствами (например, непрерывностью), но не имеющих соответствующих свойств на данном сегменте в целом (например, непрерывность в каждой точке единичного сегмента не влечет равномерной непрерывности на нем). В свою очередь неверность теоремы Бореля для конструктивного континуума связана с нарушением при конструктивном прочтении одного общего принципа, выражаемого следующей теоремой Д. Кёнига: в бесконечном дереве, из каждой вершины которого выходит конечное число ребер, имеется по крайней мере один бесконечный путь (см. Кёниг [1] и Куратовский, Мостовский [1; § 5 гл. 3]; в том и другом случае приводится вывод теоремы Бореля из теоремы Кёнига). Конструкция, показывающая неверность теоремы Кёнига при ограничении рассматриваемых путей вычислимыми (рекурсивными) путями, может быть извлечена из работы Клини [2]; именно, существует бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит не более двух ребер, не имеющее бесконечных вычислимых (общерекурсивных) путей (см. также Марков [7]). Аналогичная конструкция, независимо найденная И. Д. Заславским [1—2; 4], позволила ему получить пример покрытия сегмента $0 \triangle 1$, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия, и построить разнообразные примеры конструктивных функций с необычными свойствами (неограниченная на $0 \triangle 1$ непрерывная функция, ограниченная непрерывная, но неравномерно непрерывная функция и т. д.).

Другим источником подобного рода примеров является разработанная З а с л а в с к и м и Ц е й т и н ы м [1]—[2] теория сингулярных покрытий *). Аппарат сингулярных покрытий оказывается также удобным при построении примеров неинтегрируемых функций и доказательстве неразрешимости алгорифмических проблем, связанных с интегрированием.

§ 1. Основные определения. Существование сингулярных покрытий

1. Условимся о некоторых обозначениях. Два сегмента $x_1 \triangle y_1$ и $x_2 \triangle y_2$ назовем *пересекающимися*, если

$$\max(x_1, x_2) \leqslant \min(y_1, y_2).$$

Если два сегмента $x_1 \triangle y_1$ и $x_2 \triangle y_2$ пересекаются, то сегмент $\max(x_1, x_2) \triangle \min(y_1, y_2)$ называется их *пересечением* и обозначается посредством $x_1 \triangle y_1 \cap x_2 \triangle y_2$. В случае, когда $x_1 \triangle y_1$, $x_2 \triangle y_2$ не пересекаются, мы считаем $|x_1 \triangle y_1 \cap x_2 \triangle y_2| = 0$. (Посредством $|x \mathbin{\underline{\overline{\times}}} y|$ обозначается длина промежутка $x \mathbin{\underline{\overline{\times}}} y$, т. е. $y - x$.) Для любых двух промежутков $x_1 \mathbin{\underline{\overline{\times}}} y_1$, $x_2 \mathbin{\underline{\overline{\times}}} y_2$ величина $|x_1 \mathbin{\underline{\overline{\times}}} y_1 \cap x_2 \mathbin{\underline{\overline{\times}}} y_2|$ понимается как $|x_1 \triangle y_1 \cap x_2 \triangle y_2|$.

Если T — система промежутков (см. § 3 гл. 5), то запись $x \in T$ означает, что x принадлежит какому-нибудь из промежутков этой системы.

2. Пусть $\mathscr{M}$ — некоторое множество КДЧ.

О п р е д е л е н и е 1. *Последовательность интервалов* Φ **) *называется интервальным покрытием множества* $\mathscr{M}$, *если можно построить алгорифм* α (*называемый характеристическим алгорифмом покрытия* Φ) *типа* $(\mathscr{M} \to \mathscr{H})$ ***) *такой, что для всякого* $x \in \mathscr{M}$

$$x \in \Phi(\alpha(x)).$$

---

*) Существование сингулярных интервальных покрытий было независимо установлено также К р а й з е л о м и Л а к о м б о м [1].

**) Так же, как и раньше, под последовательностью интервалов (сегментов) понимается алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в интервал (сегмент).

***) То есть α перерабатывает всякий элемент $\mathscr{M}$ в натуральное число.

Определение 2. *Последовательность сегментов Ψ называется сегментным покрытием множества $\mathscr{M}$, если можно построить алгорифмы α_1, α_2 типа $(\mathscr{M} \to \mathscr{H})$ (характеристические алгорифмы покрытия Ψ) такие, что при любом $x \in \mathscr{M}$*

$$v_{\alpha_1(x)} = u_{\alpha_2(x)}$$

и

$$u_{\alpha_1(x)} \leqslant x \leqslant v_{\alpha_2(x)}$$

(здесь через u_k, v_k обозначены левый и правый концы сегмента $\Psi(k)$).

Определение 3. *Сегментное покрытие Ψ назовем дизъюнктным, если при $i \neq j$ сегменты $\Psi(i)$, $\Psi(j)$ не имеют общих внутренних точек.*

В качестве множества $\mathscr{M}$ у нас будут фигурировать промежутки положительной длины и множество всех КДЧ $\mathscr{D}$, называемое ниже «конструктивной прямой».

Нетрудно показать, что характеристический алгорифм интервального покрытия всегда может быть построен, исходя из самого этого покрытия. Для пояснения понятия сегментного покрытия рассмотрим два простых примера. Пусть Ψ_1, Ψ_2 — такие алгорифмы, что

$$\Psi_1(n) \rightleftharpoons \begin{cases} 0 \vartriangle \frac{1}{4} & \text{при} \quad n = 0, \\ \frac{1}{4} \vartriangle \frac{1}{2} & \text{при} \quad n = 1, \\ \frac{1}{2} + 2^{-n} \vartriangle \frac{1}{2} + 2^{-n+1} & \text{при} \quad n \geqslant 2; \end{cases}$$

$$\Psi_2(n) \rightleftharpoons \begin{cases} 0 \vartriangle \frac{1}{2} & \text{при четном} \quad n, \\ \frac{1}{2} \vartriangle 1 & \text{при нечетном} \quad n. \end{cases}$$

Можно показать, что Ψ_1 не является сегментным покрытием $0 \vartriangle 1$, хотя и невозможен x из $0 \vartriangle 1$, не принадлежащий никакому сегменту $\Psi_1(i)$. Алгорифм Ψ_2 дает пример сегментного покрытия $0 \vartriangle 1$, для которого требование существования пары характеристических алгорифмов нельзя заменить требованием существования одного алгорифма, указывающего для каждого x число i так, что $x \in \Psi_2(i)$.

Определение 4. *Покрытие (сегментное или интервальное) Ψ множества $\mathscr{M}$ назовем рациональным, если все промежутки $\Psi(n)$ рациональные (т. е. концы этих промежутков — рациональные числа), точным, если при любом n $\Psi(n) \subseteq \mathscr{M}$, невырожденным, если всегда $|\Psi(n)| \neq 0$.*

Все рассматриваемые в данной главе покрытия предполагаются рациональными и невырожденными. Поэтому соответствующие прилагательные, как правило, опускаются.

Определение 5. *Последовательность промежутков Φ называется ε-ограниченной, если при любом n*

$$\sum_{i=0}^{n} |\Phi(i)| \leqslant \varepsilon.$$

Определение 6. *Покрытие Ψ (интервальное или сегментное) промежутка $x \between y$ называется сингулярным, если последовательность Ψ ε-ограничена при некотором ε, меньшем $y - x$.*

Определение 7. *Последовательность промежутков Φ назовем регулярной, если при любом i*

$$|\Phi(i)| < 2^{-i}.$$

Определение 8. *Последовательность рациональных интервалов Ψ назовем универсальной, если для любой регулярной последовательности рациональных интервалов Φ можно найти i_Φ и j_Φ такие, что*

$$\Psi(i_\Phi) \mp \Phi(j_\Phi).$$

3. Теорема 1 (Заславский, Цейтин [2]). *Для любого n осуществима 2^{-n}-ограниченная универсальная последовательность интервалов.*

Доказательство этой теоремы использует диагональную конструкцию. Фиксируем произвольное n. Пользуясь универсальным алгорифмом, построим алгорифм $\mathfrak{A}$ так, что для любого алгорифма α (в $Ч^a$)

$$\mathfrak{A}(\{\alpha\}, k) \simeq \alpha(k + n + 1). \tag{1}$$

При каждом k обозначим через $\mathscr{M}_k$ множество рациональных интервалов длины, меньшей чем 2^{-n-k-1}. Очевидно, все множества $\mathscr{M}_k$ перечислимы. Построим алгорифм ν, перерабатывающий слова в $Ч_0$ в натуральные числа так, что разные слова переводятся в разные натуральные числа, и обозначим через $\mathcal{M}$ множество слов вида $P, \nu(P)$ (где $P \in Ч_0$) таких, что

$$P, \nu(P) \in \mathcal{M} \equiv ! \mathfrak{A}(P, \nu(P)) \& \mathfrak{A}(P, \nu(P)) \in \mathcal{M}_{\nu(P)}.$$

Нетрудно убедиться (ср. теоремы 9—10 § 3 гл. 1), что множество $\mathcal{M}$ перечислимо. Ясно также ((1)), что для любой регулярной последовательности рациональных интервалов Φ

$$\xi\Phi\zeta,\ \nu(\xi\Phi\zeta) \in \mathcal{M}. \tag{2}$$

Следовательно, $\mathcal{M}$ бесконечно и можно построить арифметически полный алгорифм γ, перечисляющий без повторений $\mathcal{M}$. Построим алгорифм Ω так, что

$$\Omega(i) \simeq \mathfrak{A}(\gamma(i)). \tag{3}$$

Очевидно, Ω — последовательность рациональных интервалов.

Пусть γ_1, γ_2 — такие алгорифмы, что

$$\gamma(i) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \gamma_1(i),\ \gamma_2(i).$$

Тогда γ_2 — ПНЧ, причем при $i \neq j$

$$\gamma_2(i) \neq \gamma_2(j).$$

Используя это обстоятельство, получаем оценку

$$\sum_{i=0}^{k} |\Omega(i)| < \sum_{i=0}^{k} 2^{-n-\gamma_2(i)-1} < \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-n-i-1} = 2^{-n}.$$

Остается показать, что последовательность Ω универсальна. Пусть Φ — регулярная последовательность. Ввиду (2) при некотором l

$$\gamma(l) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \xi\Phi\zeta, \nu(\xi\Phi\zeta). \tag{4}$$

Тогда ((1), (3)—(4))

$$\Omega(l) \simeq \Phi(\nu(\xi\Phi\zeta) + n + 1),$$

что и требовалось.

Теорема 2 (Заславский, Цейтин [1]—[2], Крайзел, Лакомб [1]). *Для любого n осуществимо 2^{-n}-ограниченное интервальное покрытие конструктивной прямой.*

Доказательство. Пусть Ω — универсальная последовательность, построенная согласно теореме 1. Построим алгорифм λ так, чтобы для любого P в $Ч$

$$\lambda(P, n) \simeq D^-(P, n) \bigtriangledown D^+(P, n)$$

(см. § 2 гл. 3).

Поскольку для любого n и КДЧ x $D^-(x, n)$, $D^+(x, n)$ — рациональные числа, причем

$$D^-(x, n) < x < D^+(x, n), \quad D^+(x, n) - D^-(x, n) < 2^{-n},$$

то при любом x $\hat{\lambda}_x$ является регулярной последовательностью рациональных интервалов такой, что при всех i

$$x \in \hat{\lambda}_x(i).$$

Ввиду универсальности Ω для каждого x можно найти m_x, l_x так, что

$$\hat{\lambda}_x(m_x) \doteq \Omega(l_x).$$

Следовательно,

$$x \in \Omega(l_x),$$

чем и заканчивается доказательство.

Следствие 1. *Для всякого промежутка и любого n осуществимо 2^{-n}-ограниченное интервальное покрытие этого промежутка.*

Следствие 2. *Для всякого невырожденного промежутка осуществимо сингулярное интервальное покрытие этого промежутка.*

Теорема 3. *Для любого n осуществимо 2^{-n}-ограниченное сегментное дизъюнктное покрытие конструктивной прямой.*

Доказательство. Пусть Ω — 2^{-n}-ограниченная универсальная последовательность рациональных интервалов. Применим к Ω лемму 2 § 3 гл. 5 и обозначим получившийся алгорифм через Φ. В силу утверждений 1) — 3) и 5) этой леммы Φ является 2^{-n}-ограниченной последовательностью попарно дизъюнктных рациональных интервалов. Обозначим концы интервала $\Phi(n)$ через r_n и s_n. Согласно утверждению 4) леммы 2 § 3 гл. 5 для каждого КДЧ x можно найти n_x и m_x так, что

$$s_{n_x} = r_{m_x}$$

и

$$r_{n_x} < x < s_{m_x}. \tag{5}$$

Следовательно, в качестве искомого покрытия можно взять такой алгорифм $\overline{\Phi}$, что

$$\overline{\Phi}(n) \doteqdot r_n \triangle s_n.$$

Теорема 4. *Для любого невырожденного рационального сегмента $r \triangle s$ и любого n можно построить 2^{-n}-ограниченное точное сегментное дизъюнктное покрытие этого сегмента.*

Доказательство. Пусть $\overline{\Phi}$ — покрытие конструктивной прямой, построенное в доказательстве предыдущей теоремы. Согласно утверждению (5) можно найти i_1, i_2 так, что

$$r_{i_1} \leqslant r < s_{i_1}$$

и

$$r_{i_2} < s \leqslant s_{i_2}$$

(r_n, s_n, как и в доказательстве теоремы 3, обозначают концы сегмента $\overline{\Phi}(n)$).

Не теряя общности, можно считать, что

$$2^{-n} < s - r. \tag{6}$$

Тогда

$$s_{i_1} < r_{i_2}.$$

Пусть $\mathscr{L}$ — множество натуральных чисел такое, что

$$i \in \mathscr{L} \equiv s_{i_1} \leqslant r_i < s_i \leqslant r_{i_2}.$$

Множество $\mathscr{L}$, очевидно, разрешимо. Ввиду (6) $\mathscr{L}$ бесконечно. Следовательно, можно построить арифметически полный алгорифм λ, перечисляющий без повторений $\mathscr{L}$.

Искомое покрытие Ψ задаем теперь как алгорифм, удовлетворяющий условиям

$$\Psi(0) \doteqdot r \triangle s_{i_1},$$

$$\Psi(1) \doteqdot r_{i_2} \triangle s,$$

$$\Psi(n+2) \doteqdot \overline{\Phi}(\lambda(n)).$$

Несложную проверку (с использованием замечания 1) того, что Ψ обладает требуемыми свойствами, предоставляем читателю.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 3 и утверждения 5) леммы 2 § 3 гл. 5 легко усматривается, что покрытие $\overline{\Phi}$ обладает следующим свойством смежности: при каждом n можно найти n_1, n_2 так, что $s_{n_1} = r_n$ и $s_n = r_{n_2}$ (где r_k, s_k обозначают левый и правый концы $\overline{\Phi}(k)$). Аналогичным свойством обладает и покрытие Ψ сегмента $r \triangle s$, построенное в доказательстве теоремы 4, с тем очевидным ограничением, что при отыскании сегмента $\Psi(i)$, примыкающего к данному сегменту $\Psi(n)$ слева (справа), требуется, чтобы $r \not\in \Psi(n)$ (соответственно $s \not\in \Psi(n)$). Можно показать (мы не останавливаемся на этом), что свойством смежности обладают любые рациональные сегментные дизъюнктные покрытия конструктивной прямой (рационального сегмента).

Следствие 3. *Для любого промежутка положительной длины осуществимы как интервальные, так и сегментные сингулярные покрытия этого промежутка.*

Теорема 2 приводит к несколько парадоксальному выводу, что вся конструктивная прямая имеет меру 0 *). Следующая теорема позволяет выделить класс покрытий, с помощью которых можно ввести понятие множества КДЧ конструктивной меры 0, свободное от этого недостатка.

Теорема 5. *Пусть $x \mathbin{\overline{\underline{\times}}} y$ — произвольный положительный промежуток ($x < y$) и Φ — сингулярное покрытие (сегментное или интервальное) этого промежутка. Тогда ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |\Phi(i)|$ шпекеров* **).

---

*) Эта парадоксальность не снимается в полной мере замечанием, что конструктивная прямая счетна, поскольку покрытие, получаемое согласно теореме 2, перечислимо, чего нельзя сказать о конструктивной прямой (§ 4 гл. 3).

**) См. определение 4 § 3 гл. 3. Другими словами, последовательность $\sum\limits_{i=0}^{n} |\Phi(i)|$ (которая, очевидно, монотонна и ограничена) не фундаментальна и, следовательно, не сходится ни к какому КДЧ.

Докажем более сильное предложение (Заславский, Цейтин [1]—[2], Крайзел, Лакомб [1]).

Лемма 1. *Пусть Φ — ε-ограниченная последовательность сегментов, $x \triangle y$ — сегмент, причем $\varepsilon < y - x$ и ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\Phi(i)| \tag{7}$$

сходится. Тогда можно найти КДЧ z из $x \triangle y$, не принадлежащее ни одному сегменту $\Phi(n)$.

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что Φ — последовательность рациональных интервалов. Для сокращения обозначений в качестве $x \triangle y$ возьмем сегмент $0 \triangle 1$.

При условиях теоремы для любого рационального сегмента $r \triangle s$ ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} |r \triangle s \cap \Phi(i)| \tag{8}$$

мажорируется сходящимся рядом (7) и, следовательно, сходится. Построим алгорифм γ, перерабатывающий всякий сегмент $r \triangle s$ в сумму ряда (8). Ясно, что

$$\gamma(0 \triangle 1) \leqslant \varepsilon < |0 \triangle 1|. \tag{9}$$

Поделим $0 \triangle 1$ пополам и обозначим через a_1, a_2 получившиеся сегменты. Поскольку

$$\gamma(0 \triangle 1) = \gamma(a_1) + \gamma(a_2),$$

то ((9)) не могут одновременно выполняться неравенства

$$\gamma(a_1) \geqslant \frac{1}{2},$$

$$\gamma(a_2) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно, мы можем (ср. лемму 5 § 1 гл. 4) указать один из этих сегментов, скажем a_1, так, что

$$\gamma(a_1) < \frac{1}{2} = |a_1|.$$

Продолжая этот процесс, получим вложенную последовательность сегментов $\mathfrak{A}$ такую, что

$$|\mathfrak{A}(n)| < 2^{-n},$$
$$\gamma(\mathfrak{A}(n)) < |\mathfrak{A}(n)|.$$

По теореме о вложенных сегментах (§ 2 гл. 3) найдем общую точку x последовательности $\mathfrak{A}$. Если при некотором i

$$x \in \Phi(i),$$

то при некотором j, очевидно,

$$\mathfrak{A}(j) \subset \Phi(i).$$

Но тогда

$$\gamma(\mathfrak{A}(j)) \geqslant |\mathfrak{A}(j)|,$$

что невозможно.

Заметим, что лемму 1 нельзя усилить, положив $\varepsilon = y - x$. Из теоремы 4.5 работы Заславского [4] усматривается построение точного дизъюнктного сегментного покрытия Ψ сегмента $0 \triangle 1$ такого, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty} |\Psi(i)|$ сходится к 1.

Определение 9. *Покрытие Φ назовем правильным, если ряд* $\sum_{i=0}^{\infty} |\Phi(i)|$ *сходится.*

Следствие 4. *Никакое сингулярное покрытие не может быть правильным.*

Это утверждение является простой перефразировкой теоремы 5.

Следствие 5. *Никакое ограниченное покрытие конструктивной прямой не может быть правильным**).

Использование правильных покрытий позволяет определить множество КДЧ конструктивной меры нуль как множество, допускающее при любом n 2^{-n}-ограниченное правильное интервальное покрытие. Целесообразность этого определения подчеркивается тем, что, с одной стороны, никакой невырожденный промежуток не является множеством меры нуль, а с другой стороны,

*) Покрытие Φ мы назовем ограниченным, если при некотором ε оно ε-ограничено.

всякое перечислимое множество имеет меру нуль. Можно также показать, что объединение любой (конструктивной) последовательности множеств меры нуль также имеет меру нуль *).

Определение 10. *Будем говорить, что система промежутков T накрывает промежуток $x \between y$, если невозможно $z \in x \between y$ такое, что $z \notin T$.*

Из леммы 1 получаем (через $|T|$ обозначается сумма длин всех промежутков системы T)

Следствие 6. *Пусть $x \between y$ — промежуток, а T — система промежутков, причем $|T| < y - x$. Тогда T не накрывает $x \between y$.*

Это следствие (которое нетрудно доказать и непосредственно) вместе со следствием 3 позволяет получить примеры покрытий, из которых нельзя выбрать конечные подпокрытия, и, таким образом, показать, что для конструктивного континуума неверна теорема Бореля.

Следствие 7. *Пусть $x \triangle y$ — невырожденный сегмент. Тогда осуществимо интервальное покрытие Φ этого сегмента такое, что никакая система интервалов $\Phi(0) * \Phi(1) * \ldots * \Phi(n)$ не накрывает $x \triangle y$.*

4. Из теоремы 5 вытекает, очевидно, теорема 1 § 3 гл. 3, утверждающая существование шпекеровых последовательностей. Использование точных сегментных дизъюнктных покрытий позволяет значительно усилить этот результат.

Определение 11. *Будем говорить, что последовательность рациональных чисел (ПРЧ) γ эффективно не сходится, если осуществимы алгорифмы α_1, α_2 типа $(\mathscr{D} \to \mathscr{H})$ такие, что при любом x и $i \geqslant \alpha_2(x)$*

$$\gamma(i) \notin x - 2^{-\alpha_1(x)} \nabla x + 2^{-\alpha_1(x)}.$$

(Таким образом, для каждого x можно найти его рациональную окрестность и номер так, что члены γ с номерами, бо́льшими данного, не попадают в выбранную окрестность x.)

*) Вопросы конструктивной теории меры и интеграла Лебега рассмотрены в работе Шанина [6] и цикле работ Демута [1]—[16].

Теорема 6*). *Можно построить ПРЧ γ так, что при любом n*

1) $0 \leqslant \gamma(n) \leqslant \gamma(n+1) \leqslant 1$;

2) γ *эффективно не сходится* (*и, следовательно, является шпекеровой*).

Доказательство. Пусть Φ — точное сегментное дизъюнктное покрытие сегмента $0 \triangle 1$ (сегмент $\Phi(n)$ обозначается ниже через $r_n \triangle s_n$). При каждом n рассмотрим интервалы, остающиеся после выбрасывания из $0 \triangledown 1$ сегментов $\Phi(0), \ldots, \Phi(n)$, и обозначим через t_n самый левый из концов этих интервалов. Пользуясь рациональностью покрытия Φ, можно построить алгорифм γ такой, что

$$\gamma(n) \mp t_n.$$

Очевидно, γ — ПРЧ, удовлетворяющая утверждению 1) теоремы. Наметим доказательство утверждения 2). Найдем n_1 и n_2 такие, что

$$0 \in \Phi(n_1), \tag{10}$$

$$1 \in \Phi(n_2). \tag{11}$$

Найдем далее l_1, l_2 так, чтобы

$$\frac{|\Phi(n_1)|}{3} > 2^{-l_1},$$

$$\frac{|\Phi(n_2)|}{3} > 2^{-l_2}.$$

Пусть x — произвольное КДЧ. Поскольку $0 < s_{n_1} < r_{n_2} < 1$, мы можем указать верный член дизъюнкции

$$\left(x < \frac{2 \cdot s_{n_1}}{3}\right) \vee \left(\frac{s_{n_1}}{3} < x < 1 - \frac{|\Phi(n_2)|}{3}\right) \vee \\ \vee \left(1 - \frac{2 \cdot |\Phi(n_2)|}{3} < x\right)$$

(ср. теорему 21 § 3 гл. 2).

Если $x < \frac{2 \cdot s_{n_1}}{3}$, то при $n \geqslant n_1 + 1$, очевидно,

$$\gamma(n) \notin x - 2^{-l_1} \triangledown x + 2^{-l_1}.$$

---

*) По существу, этот результат содержится в доказательстве теоремы 4.3 работы Заславского [4].

Аналогично, если

$$1-\frac{2}{3}\cdot|\Phi(n_2)|<x,$$

то

$$\gamma(n)\notin x-2^{-l_2}\nabla x+2^{-l_2}$$

при $n\geqslant n_2+1$. Остался случай

$$\frac{1}{3}s_{n_1}<x<1-\frac{|\Phi(n_2)|}{3}.$$

В этом случае найдем n_3, n_4 такие, что

$$s_{n_3}=r_{n_4}$$

и

$$r_{n_3}\leqslant x\leqslant s_{n_4}.$$

Имеются три возможности: 1) $n_3=n_1$, $n_4\neq n_2$; 2) $n_3\neq n_1$, $n_4=n_2$; 3) $n_3\neq n_1$, $n_4\neq n_2$ ($n_3=n_1$, $n_4=n_2$ не может выполняться ввиду дизъюнктности Φ). Пусть, например, $n_3\neq n_1$, $n_4\neq n_2$ (первые два случая рассматриваются аналогично). Согласно замечанию 1 п. 2 можно найти n_5 и n_6 так, что

$$s_{n_5}=r_{n_3},\qquad r_{n_6}=s_{n_4}.$$

Тогда

$$r_{n_5}<r_{n_3}\leqslant x\leqslant s_{n_4}<s_{n_6}.$$

Обозначим через l_5 такое натуральное число, что

$$|\Phi(n_5)|>2^{-l_5},$$

$$|\Phi(n_6)|>2^{-l_5}.$$

Тогда при $n\geqslant\max(n_3, n_4, n_5, n_6)$

$$\gamma(n)\notin x-2^{-l_5}\nabla x+2^{-l_5},$$

чем и заканчивается доказательство теоремы.

Очевидно, построенная только что монотонная ПРЧ γ обладает «понижающим» алгорифмом δ таким, что δ есть алгорифм типа $(\mathscr{D}\dot\rightarrow\mathscr{H})$, и если для всех n

$$\gamma(n)\leqslant x,$$

то для всех n

$$\gamma(n)\leqslant x-2^{-\delta(x)}$$

(см. Заславский [4; теорема 4.3]).

Вполне аналогично теореме 6 доказывается следующее утверждение (которое интересно сравнить с теоремой 2 § 2 гл. 3 и с теоремой 8 § 2 гл. 4): можно построить последовательность систем рациональных сегментов Ψ такую, что: 1) $\Psi(n+1) \subseteq \Psi(n)$ при любом n; 2) осуществим алгорифм α типа $(\mathscr{D} \to \mathscr{H})$ такой, что для всякого x и $i \geqslant \alpha(x)$ $x \notin \Psi(i)$. Таким образом, невозможно КДЧ, принадлежащее всем системам $\Psi(n)$. (В качестве Ψ можно взять (в обозначениях доказательства теоремы 6) последовательность систем сегментов, получающуюся выбрасыванием из $0 \nabla 1$ сегментов $\Phi(0), \ldots, \Phi(n)$ и заменой каждого оставшегося интервала сегментом с теми же концами.) Этот результат впервые получен другим методом З а с л а в с к и м [4] (отметим, что для последовательности Ψ, построенной методом Заславского, последовательность суммарных длин сегментов систем $\Psi(n)$ сходится (конструктивно) к 0).

§ 2. Примеры конструктивных функций с необычными свойствами

1. В этом параграфе через Φ обозначается некоторое точное сегментное дизъюнктное рациональное покрытие $0 \triangle 1$, причем концы сегмента $\Phi(n)$ обозначаются соответственно через r_n и s_n. Будем считать, что $0 \in \Phi(0)$ и $1 \in \Phi(1)$.

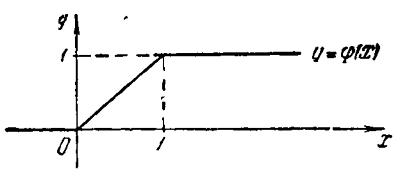


Рис. 16.

Через φ обозначается функция (рис. 16)

$$\varphi(x) = \frac{1 + |x| - |x-1|}{2},$$

а через Ω и H — такие алгорифмы, что

$$\Omega(u \triangle v,\ x) \cong \frac{|x-u| + |x-v| - |2 \cdot x - u - v|}{v-u},$$

$$H(n,\ x) \simeq \Omega(\Phi(n),\ x).$$

Очевидно, при любых $u < v$ и любом n алгорифмы $\hat{\Omega}_{u \Delta v}$ и $\hat{H}_n$ являются функциями с графиками, представленными на рис. 17—18.

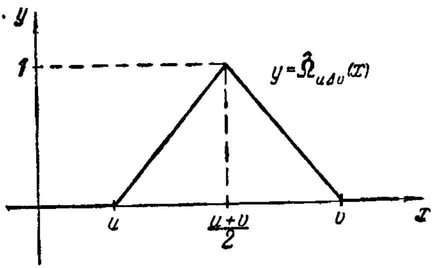


Рис. 17.

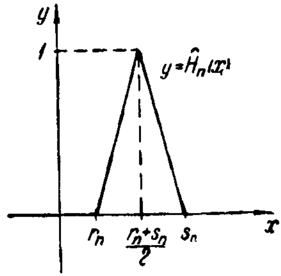


Рис. 18.

2. Определение 1. *Будем говорить, что последовательность функций F согласована с покрытием Φ, если при любых m, n таких, что $s_m = r_n$, выполняется*

$$F(m, s_m) = F(n, r_n).$$

Определение 2. *Пусть F — последовательность функций. Функцию f будем называть склейкой F по покрытию Φ, если при любом n всюду на $\Phi(n)$*

$$f(x) = F(n, x).$$

Следующая теорема (Заславский, Цейтин [2]) позволяет «склеивать» некоторые последовательности функций.

Теорема 1 (теорема о склеивании). *Пусть последовательность функций F согласована с покрытием Φ. Тогда можно построить склейку F по покрытию Φ.*

Доказательство. Пусть α_1, α_2 — характеристические алгорифмы покрытия Φ. При любом $x \in 0 \Delta 1$

$$s_{\alpha_1(x)} = r_{\alpha_2(x)}.$$

Обозначим на время доказательства через n_x и m_x натуральные числа $\alpha_1(\varphi(x))$ и $\alpha_2(\varphi(x))$. При любом x

$$s_{n_x} = r_{m_x} \tag{1}$$

и

$$r_{n_x} \leqslant \varphi(x) \leqslant s_{m_x}. \tag{2}$$

Построим такой алгорифм f, что

$$f(x) \simeq \widehat{F}_{n_x}(\min(\varphi(x), s_{n_x})) + \widehat{F}_{m_x}(\max(\varphi(x), r_{m_x})) - \widehat{F}_{n_x}(s_{n_x}),$$

и покажем, что f является искомой функцией. Очевидно, f перерабатывает любое КДЧ в КДЧ. Предположим теперь, что $x \in \Phi(l)$, т. е.

$$r_l \leqslant x \leqslant s_l. \tag{3}$$

Тогда $\varphi(x) = x$ и

$$f(x) = \widehat{F}_{n_x}(\min(x, s_{n_x})) + \widehat{F}_{m_x}(\max(x, r_{m_x})) - \widehat{F}_{n_x}(s_{n_x}).$$

Согласно (2)

$$r_{n_x} \leqslant x \leqslant s_{m_x}. \tag{4}$$

Поскольку Φ — дизъюнктное покрытие, то ((3) — (4)) возможны случаи: а) $l = n_x$; б) $l = m_x$; в) $s_l = r_{n_x}$; г) $r_l = s_{m_x}$.

В случае а) $x \leqslant s_{n_x} = r_{m_x}$ и, следовательно, $\min(x, s_{n_x}) = x$, $\max(x, r_{m_x}) = r_{m_x}$. Поэтому

$$f(x) = \widehat{F}_l(x) + \widehat{F}_{m_x}(r_{m_x}) - \widehat{F}_{n_x}(s_{n_x}).$$

Отсюда, поскольку последовательность F согласована с Φ и выполняется (1), получаем

$$f(x) = \widehat{F}_l(x).$$

Аналогично, $f(x) = \widehat{F}_l(x)$ в случае б). Если выполняется в), то из $x \leqslant s_l$ и $x \geqslant r_{n_x}$ получаем $x = s_l$. Следовательно,

$$f(x) = \widehat{F}_{n_x}(s_l) + \widehat{F}_{m_x}(r_{m_x}) - \widehat{F}_{n_x}(s_{n_x}) =$$
$$= \widehat{F}_{n_x}(s_l) = \widehat{F}_l(s_l) = \widehat{F}_l(x).$$

Случай г) рассматривается совершенно аналогично.

Таким образом, при любых l и x, если $x \in \Phi(l)$, то $f(x) = \widehat{F}_l(x)$. Осталось показать, что f является функцией. Пусть $x = y$. Тогда $\varphi(x) = \varphi(y)$ и $\varphi(x) \in 0 \Delta 1$.

Если $f(x) > f(y)$, то по только что доказанному невозможно m, при котором $\varphi(x) \in \Phi(m)$, что противоречит принадлежности $\varphi(x)$ сегменту $0 \Delta 1$. Следовательно, $f(x) \leqslant f(y)$. Точно так же получаем $f(x) \geqslant f(y)$. Таким образом, $f(x) = f(y)$. Теорема доказана.

Отметим, что построенная нами склейка f такова, что $f(x) = f(0)$ при $x \leqslant 0$ и $f(x) = f(1)$ при $x \geqslant 1$. Мы будем считать, что этим свойством обладают все используемые ниже склейки. Сформулируем два частных случая теоремы о склеивании.

Следствие 1. *Пусть F — последовательность функций такая, что при $m \geqslant n$ F_m совпадает с F_n на сегментах $\Phi(0), \ldots, \Phi(n)$. Тогда можно построить функцию, являющуюся склейкой F по покрытию Φ.*

Следствие 2. *Пусть F^1 — последовательность функций такая, что $\widehat{F}^1_n = 0$ на сегментах $\Phi(0), \ldots$ $\ldots, \Phi(n-1)$ и*

$$F(n, x) = \sum_{i=0}^{n} F^1(i, x).$$

Тогда осуществима склейка F по покрытию Φ.

Следствие 2 можно также переформулировать в виде утверждения о сходимости на всей оси ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} F^1(n, \varphi(x)),$$

сумма которого и является склейкой F. При этом на каждом сегменте $\Phi(k)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F^1(n, \varphi(x)) = \sum_{n=0}^{k} F^1(n, x).$$

В связи с результатами следующего пункта существенно иметь в виду, что всякая конструктивная функция непрерывна (гл. 5 и 9). Впрочем, из доказательства теоремы 1 можно усмотреть, что если эта теорема применяется к последовательности функций F, для которой мы располагаем таким алгорифмом $\mathfrak{B}$, что $\widehat{\mathfrak{B}}_n$ является регулятором непрерывности F_n, то, исходя из $\mathfrak{B}$, можно построить регулятор непрерывности склейки последовательности F. Поэтому непрерывность строящихся в этом параграфе функций может быть доказана непосредственно, без привлечения общей теоремы непрерывности.

3. Примеры конструктивных функций, даваемые приводимыми ниже теоремами 2—4 и 6, были построены (несколько другими, чем у нас, методами) Заславским [1]—[2], [4]. Результаты, аналогичные теореме 3 и 6, были получены также Лакомбом [2], [4] и Шпекером [2] (теорема 6). Успенским [1] была доказана теорема, аналогичная теореме 3, в случае бэровского пространства.

Теорема 2 (пример неограниченной на единичном сегменте функции). *Можно построить функцию* f_0 *и последовательность рациональных чисел* β *таким образом, что при любом* l $\beta(l) \in 0 \bigtriangleup 1$ *и* $f_0(\beta(l)) = l$.

Доказательство. Построим последовательность функций F так, что

$$F(n, x) = n \cdot H(n, x).$$

Очевидно,

$$\widehat{F}_n\left(\frac{r_n + s_n}{2}\right) = n.$$

Искомую функцию f_0 строим как склейку последовательности F. ПРЧ β определяем посредством

$$\beta(n) \rightleftharpoons \frac{r_n + s_n}{2}.$$

Определение 3. *Будем говорить, что функция* f *эффективно не равномерно непрерывна на сегменте* $x \bigtriangleup y$ $(x < y)$, *если осуществимы ПРЧ* β_1, β_2 *и рациональное* $\varepsilon > 0$ *такие, что для любого* n

$$\beta_1(n),\ \beta_2(n) \in x \bigtriangleup y, \qquad |\beta_1(n) - \beta_2(n)| < 2^{-n}$$

и

$$|f(\beta_1(n)) - f(\beta_2(n))| \geqslant \varepsilon.$$

Неограниченная функция, построенная согласно предыдущей теореме, не может быть, очевидно, равномерно непрерывной на $0 \bigtriangleup 1$ (равномерно непрерывные функции ограничены). Более того, нетрудно показать (ср. доказательство теоремы 3), что эта функция эффективно не равномерно непрерывна на $0 \bigtriangleup 1$. Этот результат усиливается следующей теоремой.

Теорема 3 (пример ограниченной эффективно не равномерно непрерывной функции). *Можно построить функцию* f_1 *такую, что*

1) $0 \leqslant f_1(x) \leqslant 1$ *при любом* x;

2) *осуществимы ПРЧ* β_1, β_2 *такие, что при любом* n

$$\beta_1(n),\ \beta_2(n) \in 0 \triangle 1, \quad |\beta_1(n) - \beta_2(n)| < 2^{-n}$$

и

$$|f_1(\beta_1(n)) - f_1(\beta_2(n))| = 1.$$

Доказательство. Построим последовательность сегментов Ψ так, что при любом n

$$\Psi(n) \subseteq \Phi(n),$$

и

$$|\Psi(n)| < 2^{-n}.$$

Рассмотрим последовательность функций F такую, что

$$F(n, x) \simeq \Omega(\Psi(n), x).$$

В качестве f_1 можно, очевидно, взять склейку F по покрытию Φ.

Замечание 1. Нетрудно показать, что последовательность длин сегментов покрытия Φ сходится к 0. Поэтому в качестве f_1 мы могли бы также взять склейку последовательности H.

Замечание 2. Если покрытие Φ таково, что ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\Phi(i)|$$

сходится к 1, то f_1 интегрируема по Риману на $0 \triangle 1$.

Теорема 4 (пример ограниченной функции, не имеющей на $0 \triangle 1$ точной верхней грани). *Можно построить функцию* f_2 *такую, что всюду на* $0 \triangle 1$ $0 \leqslant f_2(x) < 1$ *и невозможно КДЧ, являющееся точной верхней гранью* f_2 *на* $0 \triangle 1$ *).

Доказательство. Пусть γ — шпекерова ПРЧ, причем

$$0 < \gamma(n) < 1.$$

*) В связи с этой теоремой заметим, что Михалинцем [5] построен пример бесконечно дифференцируемой немонотонной функции, не имеющей локальных экстремумов.

Функцию f_2 строим как склейку последовательности F:

$$F(n, x) \simeq \gamma(n) \cdot H(n, x).$$

Очевидно, на каждом сегменте $\Phi(n)$

$$0 \leqslant f_2(x) \leqslant \gamma(n),$$

откуда при любом $x \in 0 \triangle 1$ получаем $0 \leqslant f_2(x) < 1$.

Далее при каждом n

$$f_2\left(\frac{r_n + s_n}{2}\right) = \gamma(n).$$

Если бы существовало КДЧ, являющееся точной верхней гранью f_2 на $0 \triangle 1$, то γ сходилась бы к этому КДЧ, что невозможно.

Совершенно аналогично можно построить функцию, не имеющую на $0 \triangle 1$ ни точной верхней, ни точной нижней грани. Заметим также, что если в качестве γ взять шпекерову ПРЧ, допускающую понижающий алгорифм (см. § 1), то для f_2 можно построить алгорифм, перерабатывающий всякую верхнюю грань f_2 на $0 \triangle 1$ в меньшую верхнюю грань.

Теорема 5 (пример ограниченной функции, имеющей точную верхнюю грань, но не достигающей ее). *Можно построить функцию f_3 так, что всюду на $0 \triangle 1$ $0 \leqslant f_3(x) < 1$ и осуществима последовательность β рациональных чисел из $0 \triangle 1$ такая, что $f_3(\beta(n)) = 1 - 2^{-n}$. (Таким образом, 1 является точной верхней гранью f_3 на $0 \triangle 1$.)*

Доказательство. В качестве f_3 можно взять склейку последовательности F такой, что

$$F(n, x) = \left(1 - 2^{-n}\right) \cdot H(n, x).$$

Функция f_3, как легко проверить, не равномерно непрерывна на $0 \triangle 1$. Ценою некоторого усложнения доказательства теорему 5 можно доказать в классе равномерно непрерывных функций.

Теорема 6 (пример равномерно непрерывной функции, не достигающей на $0 \triangle 1$ своей точной верхней грани). *Можно построить функцию f_4 так, что*

1) *f_4 равномерно непрерывна на $0 \triangle 1$;*

2) *$0 \leqslant f_4(x) < 1$ на $0 \triangle 1$;*

3) *осуществима ПРЧ* β *такая, что при любом* n

$$\beta(n) \in 0 \,\Delta\, 1$$

и

$$f_4(\beta(n)) > 1 - 2^{-n}.$$

Доказательство. Воспользуемся изящной конструкцией Лакомба [4]. Пусть Ψ есть $\frac{1}{2}$-ограниченное рациональное интервальное покрытие $0 \,\Delta\, 1$.

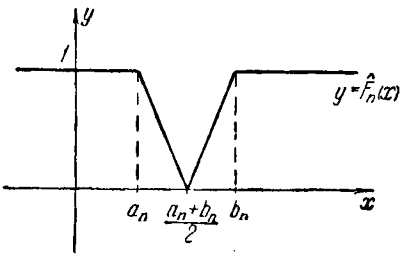


Рис. 19.

Обозначим через a_n, b_n концы интервала $\Psi(n)$ и рассмотрим последовательность функций F такую, что (рис. 19)

$$F(n, x) = 1 - \Omega(a_n \,\Delta\, b_n, x).$$

Очевидно,

$$0 \leqslant F(n, x) \leqslant 1 \tag{5}$$

и при $x \in \Psi(n)$

$$F(n, x) < 1. \tag{6}$$

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i-1} \cdot \hat{F}_i(x).$$

В силу (5) этот ряд равномерно сходится, и, следовательно, можно построить равномерно непрерывную функцию f_4, являющуюся его суммой.

Функция f_4 искомая. Действительно, поскольку каждый x из $0 \,\Delta\, 1$ принадлежит некоторому интервалу $\Psi(l)$, то ((5)—(6)) на $0 \triangle 1$

$$0 \leqslant f_4(x) < 1.$$

Далее при каждом n можно найти (последовательность Ψ $\frac{1}{2}$-ограничена!) рациональное число t_n так, что для $i \leqslant n$

$$t_n \notin \Psi(i).$$

Тогда

$$f_4(t_n) \geqslant \sum_{i=0}^{n} 2^{-i-1} = 1 - 2^{-n-1} > 1 - 2^{-n},$$

что и требуется.

В связи с доказанной теоремой интересно вернуться к результатам Лакомба, упомянутым в п. 3 § 2 гл. 5 (см. также Лифшиц [4]). Эти результаты проясняют характер «патологии» функции f_4, показывая, что f_4 (точнее, продолжающий ее оператор над псевдочислами — см. п. 3 § 2 гл. 5) достигает своей верхней грани на непустом замкнутом множестве псевдочисел, не имеющем изолированных точек.

Нетрудно убедиться, что неравномерно непрерывная функция f_1, построенная в доказательстве теоремы 3, локально равномерно непрерывна, т. е. для каждого x можно указать некоторую его окрестность, в которой f_1 равномерно непрерывна. Пример ограниченной функции, не обладающей этим свойством, дается следующей теоремой (Заславский, Цейтин [2]), доказательство которой мы опускаем.

Теорема 7. *Можно построить функцию f_5 так, что*

1) *на всей оси* $0 \leqslant f_5(x) \leqslant 1$;

2) *f_5 эффективно неравномерно непрерывна на любом невырожденном сегменте, включенном в* $0 \triangle 1$.

В работе автора [3] показано, что функция, удовлетворяющая теореме 7, может быть интегрирумой по Риману на $0 \triangle 1$. Отметим также, что если предыдущие теоремы сохраняются для класса бесконечно дифференцируемых функций*), то функция из теоремы 7 не

---

*) Вообще говоря, свойства гладкости не очень приближают конструктивные функции к классическим непрерывным функциям. В работе автора [2] построен пример неограниченной, непрерывной в замкнутом единичном круге, аналитической внутри него конструк-

может быть дифференцируемой на $0 \triangle 1$ (легко видеть, что дифференцируемая на $0 \triangle 1$ функция локально равномерно непрерывна на $0 \triangle 1$).

4. Использование сингулярных покрытий позволяет получить примеры неинтегрируемых функций. Ниже, до конца главы, мы будем предполагать покрытие Φ сингулярным, для определенности, $\frac{1}{2}$-ограниченным.

Определение 4. *Будем говорить, что колебание функции f на сегменте $x \triangle y$ не меньше ε, если можно указать КДЧ z_1, z_2 из $x \triangle y$ такие, что*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \geqslant \varepsilon.$$

Определение 5. *Будем говорить, что функция f эффективно неинтегрируема по Риману на $0 \triangle 1$, если существует натуральное число k и последовательности W^1, W^2 интегральных сумм f на $0 \triangle 1$ такие, что при любом n*

$$\pi(W^1(n)),\ \pi(W^2(n)) < 2^{-n}$$

и

$$\left|\mathfrak{z}(W^1(n)) - \mathfrak{z}(W^2(n))\right| \geqslant 2^{-k}\ {}^{*)}.$$

Лемма 1 (Кушнер [9]). *Пусть f — функция, k — натуральное число такие, что колебание f на любом сегменте $\Phi(n)$ не меньше, чем 2^{-k}. Тогда f эффективно неинтегрируема по Риману на $0 \triangle 1$.*

Доказательство. Можно построить алгорифм γ, перерабатывающий всякое рациональное r из $0 \triangle 1$ в натуральное число так, что

$$r \in \Phi(\gamma(r)).$$

тивной функции комплексной переменной. Далее, А. А. Марков указал построение аналитической и неограниченной на $0 \triangle 1$ конструктивной функции (действительной переменной). Естественным завершением этих результатов является недавно найденный Лифшицем [5] пример конструктивной функции (комплексной переменной), аналитической на всей плоскости и неограниченной на $0 \triangle 1$. (Аналитичность трактуется здесь как возможность для каждой точки указать некоторую ее окрестность и степенной ряд, в который разлагается данная функция в этой окрестности.)

*) См. § 1 гл. 7.

Построим алгорифм E, перерабатывающий всякое n в дробление $0 \triangle 1$, образованное рациональными числами

$$r_{\gamma(k \cdot 2^{-n-1})} + \frac{|\Phi(\gamma(k \cdot 2^{-n-1}))|}{2^n} \cdot j,$$

где $0 \leqslant k \leqslant 2^{n+1}$, $0 \leqslant j \leqslant 2^n$. (Сегмент $0 \triangle 1$ разбивается на 2^{n+1} равных частей, затем для каждой точки $k \cdot 2^{-n-1}$ находится содержащий ее сегмент покрытия Φ, этот сегмент разбивается на 2^n равных частей. Получившиеся точки и образуют нужное нам дробление.)

Обозначим для краткости

$$E(n) \mathrel{\dot{=}} t_{n,0} * \ldots * t_{n,l_n}$$

и построим алгорифм E^1 такой, что при $0 \leqslant i \leqslant l_n - 1$

$$E^1(n, i) \mathrel{\dot{=}} \begin{cases} 0, & \text{если сегмент } t_{n,i} \triangle t_{n,i+1} \text{ входит} \\ & \text{в некоторый сегмент } \Phi(\gamma(k \cdot 2^{-n-1})) \\ & (0 \leqslant k \leqslant 2^{n+1}), \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что

(7) $$\pi(E(n)) < 2^{-n};$$

(8) если $E^1(n, i) \mathrel{\dot{=}} 1$, то сегмент $\Phi\left(\gamma\left(\frac{t_{n,i} + t_{n,i+1}}{2}\right)\right)$ включен в сегмент $t_{n,i} \triangle t_{n,i+1}$.

Действительно, если $E^1(n, i) \mathrel{\dot{=}} 0$, то $t_{n,i} \triangle t_{n,i+1}$ входит в некоторый сегмент $\Phi(\gamma(j_1 \cdot 2^{-n-1}))$. Тогда

$$t_{n,i+1} - t_{n,i} = \frac{|\Phi(\gamma(j_1 \cdot 2^{-n-1}))|}{2^n} < 2^{-n}.$$

Если же $E^1(n, i) \mathrel{\dot{=}} 1$, то интервал $t_{n,i} \triangledown t_{n,i+1}$ не содержит ни одной точки вида $k \cdot 2^{-n-1}$ $(0 \leqslant k \leqslant 2^{n+1})$. Следовательно, опять

$$t_{n,i+1} - t_{n,i} < 2^{-n}.$$

Свойство (7) доказано.

Пусть $E^1(n, i) \mp 1$. Тогда по построению E можно найти j_1, j_2 так, что

$$t_{n,i} = s_{\gamma(j_1 \cdot 2^{-n-1})},$$
$$t_{n,i+1} = r_{\gamma(j_2 \cdot 2^{-n-1})}.$$

Поэтому, ввиду дизъюнктности Φ, сегмент $\Phi\left(\gamma\left(\frac{t_{n,i}+t_{n,i+1}}{2}\right)\right)$ включен в $t_{n,i} \triangle t_{n,i+1}$, что и утверждается в (8).

Построим алгорифмы γ_1, γ_2 так, чтобы при любом n

$$\gamma_1(n),\ \gamma_2(n) \in \Phi(n)$$

и

(9) $$f(\gamma_1(n)) - f(\gamma_2(n)) \geqslant 2^{-k}.$$

Обозначим на время доказательства

$$\gamma_1\left(\gamma\left(\frac{t_{n,i}+t_{n,i+1}}{2}\right)\right) \quad \text{через} \quad p_{n,i},$$
$$\gamma_2\left(\gamma\left(\frac{t_{n,i}+t_{n,i+1}}{2}\right)\right) \quad \text{через} \quad q_{n,i}.$$

Ввиду (8) — (9)

(10) $$f(p_{n,i}) - f(q_{n,i}) \geqslant 2^{-k}$$

и, если $E^1(n, i) \mp 1$, то

(11) $$p_{n,i},\ q_{n,i} \in t_{n,i} \triangle t_{n,i+1}.$$

Ввиду (11) можно построить последовательности интегральных сумм W^1, W^2 функции f на $0 \triangle 1$ так, что

$$D(W^1(n)) \mp D(W^2(n)) \mp E(n)$$

и при $0 \leqslant i \leqslant l_n - 1$ *)

$$И_1(W^1(n), i) \mp \begin{cases} t_{n,i}, & \text{если} \quad E^1(n, i) \mp 0, \\ p_{n,i}, & \text{если} \quad E^1(n, i) \mp 1; \end{cases}$$

$$И_1(W^2(n), i) \mp \begin{cases} t_{n,i}, & \text{если} \quad E^1(n, i) \mp 0, \\ q_{n,i}, & \text{если} \quad E^1(n, i) \mp 1. \end{cases}$$

---

*) Определения алгорифмов D и $И_1$ приведены в § 1 гл. 7.

Обозначим через s_n сумму длин всех различных сегментов вида $\Phi(\gamma(k\cdot 2^{-n-1}))$ $(0\leqslant k\leqslant 2^{n+1})$. (Некоторые из этих сегментов могут совпадать!). Тогда по построению E и E^1

$$\sum_{i=0}^{l_n-1} E^1(n,\ i)\cdot(t_{n,\,i+1}-t_{n,\,i})=1-s_n.$$

Следовательно ((10)),

$$\mathfrak{z}(W^1(n))-\mathfrak{z}(W^2(n))=\sum_{i=0}^{l_n-1} E^1(n,\ i)\cdot(f(p_{n,\,i})-$$
$$-f(q_{n,\,i}))\cdot(t_{n,\,i+1}-t_{n,\,i})\geqslant 2^{-k}\cdot(1-s_n).$$

Так как $s_n<\frac{1}{2}$ $\left(\text{покрытие } \Phi\ \frac{1}{2}\text{-ограниченное}\right)$, то

$$\mathfrak{z}(W^1(n))-\mathfrak{z}(W^2(n))\geqslant 2^{-k-1}.$$

Кроме того, ввиду (7),

$$\pi(W^1(n)),\ \pi(W^2(n))<2^{-n}.$$

Лемма доказана.

Теорема 8 (Кушнер [9]). *Можно построить функцию f_6 такую, что*

1) *на всей оси* $0\leqslant f_6(x)\leqslant 1$;

2) f_6 *эффективно неинтегрируема по Риману на* $0\triangle 1$.

Доказательство. В качестве f_6 можно взять склейку последовательности H.

Предоставляем читателю показать, что функция f_6 имеет первообразную на $0\triangle 1$. На основе первообразной можно следующим образом ввести понятие интеграла и интегрируемости: 1) функция интегрируема на $0\triangle 1$ тогда и только тогда, когда она имеет первообразную на $0\triangle 1$; 2) КДЧ z является интегралом f на $0\triangle 1$ тогда и только тогда, когда существует первообразная g функции f такая, что $z=g(1)-g(0)$ *).

*) Некоторые свойства и способы построения первообразных (обеспечивающие, в частности, построение первообразной для f_6) изложены в работе автора [6]. Там же приведены примеры ограниченных функций f и g, имеющих первообразные на $0\triangle 1$ и таких, что f^2 и $|g|$ не имеют первообразных.

В силу только что сказанного и теоремы 8, это понятие интегрируемости шире, чем интегрируемость по Риману.

В связи с теоремой 8 и сделанными после нее замечаниями возникает вопрос о возможности введения понятия интеграла, при котором оказались бы интегрируемыми все ограниченные (непрерывные) функции. Ответ на этот вопрос при некоторых естественных ограничениях на понятие интеграла (определение 7) отрицателен. Более того, можно построить функцию, неинтегрируемую сразу для всех таких определений интеграла (теорема 10; этот результат принадлежит Заславскому и Цейтину [2]).

Определение 6. *Пусть функция f полигональна на $0 \triangle 1$ и $x_0 * \ldots * x_n$ $(x_0 = 0, x_n = 1)$ — ее определяющее дробление. Будем говорить, что КДЧ z является полигональным интегралом f на $0 \triangle 1$, если*

$$z = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

В § 3 гл. 7 (следствие 4) показано, что всякий полигональный интеграл f является интегралом Римана f.

Определение 7 (Заславский, Цейтин [2]), *Двухместное отношение I назовем обобщенным интегралом на $0 \triangle 1$, если для любых функций f, g и КДЧ z_1, z_2 выполняется*

1) (*монотонность*) *если $f(x) \geqslant 0$ на $0 \triangle 1$ и $I(f, z_1)$, то $z_1 \geqslant 0$;*

2) (*аддитивность*) *если $I(f, z_1)$ и $I(g, z_2)$, то $I(\{f - g\}, z_1 - z_2)$;*

3) (*перманентность*) *если f полигональна на $0 \triangle 1$ и z_1 — полигональный интеграл f, то выполняется $I(f, z_1)$**).

Из результатов гл. 7 (теоремы 8, 10—11 § 1 и следствие 4 § 3) следует, что двухместное отношение «КДЧ z является интегралом Римана функции f на $0 \triangle 1$» есть обобщенный интеграл. То же самое можно сказать и об упоминавшемся выше определении интеграла, основанном на понятии первообразной.

---

*) Уточнение этого определения требует описания средств, с помощью которых формулируется отношение I, т. е. фиксации некоторого логико-математического языка. Мы предпочитаем не углубляться в этот вопрос.

Отметим сразу два простых следствия свойств 1)—3) обобщенного интеграла.

Теорема 9. *Пусть I — обобщенный интеграл, f и g — функции, z_1, z_2 — КДЧ. Тогда*

1) *если $f = g$ на $0 \triangle 1$ и $I(f, z_1)$, $I(g, z_2)$, то $z_1 = z_2$;*

2) *если $I(f, z_1)$, $I(g, z_2)$, то $I(\{f - \{0 - g\}\}, z_1 - (0 - z_2))$* *).

Доказательство. Поскольку из $f = g$ следует, что $\{f - g\} \geqslant 0$ и $\{g - f\} \geqslant 0$ на $0 \triangle 1$, то согласно 1)—2) определения 6 получаем $z_1 - z_2 \geqslant 0$ и $z_2 - z_1 \geqslant 0$, откуда $z_1 = z_2$.

Далее функция $\{0\}$ (равная тождественно 0 на $0 \triangle 1$), очевидно, полигональна. Поэтому 0 является ее I-интегралом и, следовательно, выполняется $I(\{0 - g\}, 0 - z_2)$, откуда вытекает $I(\{f - \{0 - g\}\}, z_1 - (0 - z_2))$.

Теорема 10. *Можно построить ограниченную неотрицательную функцию f_7 так, что, каков бы ни был обобщенный интеграл I, невозможно КДЧ z, при котором выполняется $I(f_7, z)$ (т. е. f_7 неинтегрируема относительно I).*

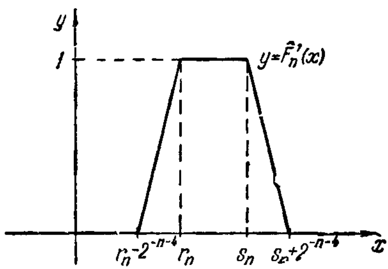


Рис. 20.

Доказательство. Пусть γ — эффективно не сходящаяся шпекерова последовательность рациональных чисел такая, что

$$(12) \qquad 0 \leqslant \gamma(n) \leqslant \gamma(n+1) \leqslant 1$$

(см. определение 12 и теорему 6 § 1).

Построим алгорифм F^1 так, чтобы (рис. 20)

$$F^1(n, x) = 2^{n+3} \cdot \left(\left| x - r_n + 2^{-n-4} \right| - | x - r_n | - | x - s_n | + \right.$$
$$\left. + \left| x - s_n - 2^{-n-4} \right| \right).$$

*) Очевидно, $\{f - \{0 - g\}\} = \{f + g\}$, $z_1 - (0 - z_2) = z_1 + z_2$. Эта громоздкая форма записи объясняется тем, что в определении обобщенного интеграла не требуется его инвариантность относительно равенства функций и КДЧ.

(Напомним, что Φ — $\frac{1}{2}$-ограниченное покрытие $0 \triangle 1$, причем $\Phi(n) \rightleftharpoons r_n \triangle s_n$.)

Обозначим через $a_n \triangle b_n$ сегмент $r_n - 2^{-n-4} \triangle s_n + 2^{-n-4}$. Нетрудно проверить, что при любом n алгорифм $\widehat{F}_n^1$ является полигональной на $0 \triangle 1$ функцией, причем эта функция линейна на сегментах $r_n - 2^{-n-4} \triangle r_n$, $s_n \triangle s_n + 2^{-n-4}$, равна 1 на сегменте $\Phi(n)$ и обращается в 0 вне сегмента $a_n \triangle b_n$.

Построим алгорифм F^2 так, чтобы

$$F^2(n, x) = 1 - \min\left(1, \sum_{k=0}^{n} F^1(k, x)\right).$$

Легко видеть, что $\widehat{F}_n^2$ — полигональная функция (определяющие дробления и угловые коэффициенты функции $\widehat{F}_k^1$ рациональны!), причем

(13) на всей оси $0 \leqslant \widehat{F}_n^2(x) \leqslant 1$;

(14) $\widehat{F}_n^2$ обращается в 0 на сегментах $\Phi(0), \ldots, \Phi(n)$;

(15) если x не принадлежит ни одному из сегментов $a_i \triangle b_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, то $\widehat{F}_n^2(x) = 1$.

Построим алгорифм G^1, перерабатывающий всякое n в КДЧ, являющееся полигональным интегралом $\widehat{F}_n^2$ на $0 \triangle 1$ (для чего предварительно нужно построить алгорифм, перерабатывающий всякое n в определяющее дробление $\widehat{F}_n^2$).

Ввиду (13), (15) и оценки

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k \triangle b_k| = \sum_{k=0}^{n} |\Phi(k)| + \sum_{k=0}^{n} 2^{-k-3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

получаем, что

(16) $$G^1(n) \geqslant \frac{1}{4}.$$

Рассмотрим алгорифм F^3 такой, что

$$F^3(0, x) \simeq \frac{\gamma(0)}{G^1(0)} \cdot F^2(0, x),$$

$$F^3(n+1, x) \simeq \frac{\gamma(n+1) - \gamma(n)}{G^1(n+1)} \cdot F^2(n+1, x).$$

При любом n $\widehat{F}^3_n$ является полигональной функцией, причем ((12)—(16))

(17) на всей оси $0 \leqslant \widehat{F}^3_0(x) \leqslant 4 \cdot \gamma(0)$ и при $n > 0$

$$0 \leqslant \widehat{F}^3_n(x) \leqslant 4 \cdot (\gamma(n) - \gamma(n-1));$$

(18) $\widehat{F}^3_n$ обращается в 0 на сегментах $\Phi(0), \ldots, \Phi(n)$;

(19) $\gamma(0)$ является полигональным интегралом $\widehat{F}^3_0$ на $0 \triangle 1$;

(20) при $n > 0$ $\gamma(n) - \gamma(n-1)$ является полигональным интегралом $\widehat{F}^3_n$ на $0 \triangle 1$.

Построим алгорифм F так, что

(21) $$F(n, x) = \sum_{i=0}^{n} F^3(i, x).$$

Ввиду (18), (21) и следствия 2 можно построить склейку f_7 последовательности F по покрытию Φ. Покажем, что f_7 — искомая функция.

Прежде всего, на каждом сегменте $\Phi(n)$

(22) $$f_7(x) = F(n, x) = \sum_{i=0}^{n} F^3(i, x).$$

Поэтому ((17)) на любом сегменте $\Phi(n)$

$$0 \leqslant f_7(x) \leqslant 4 \cdot \gamma(0) + \sum_{i=1}^{n} 4 \cdot (\gamma(i) - \gamma(i-1)) = 4 \cdot \gamma(n).$$

Следовательно, на всей оси

$$0 \leqslant f_7(x) \leqslant 4,$$

т. е. f_7 — неотрицательная и ограниченная функция.

Далее для любого x из $0 \triangle 1$ можно найти n_1, n_2 так, что $s_{n_1} = r_{n_2}$ и $r_{n_1} \leqslant x \leqslant s_{n_2}$. Тогда $F^3(l, x) = 0$ при

$l \geqslant \max(n_1, n_2)$ и, следовательно,

$$f_7(x) = \sum_{i=0}^{\max(n_1, n_2)} F^3(i, x) = \sum_{i=0}^{l} F^3(i, x) = F(l, x).$$

Поэтому при любом x из $0 \triangle 1$

(23) $\qquad f_7(x)$ является пределом ПДЧ $\widehat{F}_n(x)$.

Пусть I — произвольный обобщенный интеграл. Предположим, что существует КДЧ z такое, что

(24) $$I(f_7, z).$$

Ввиду (17) и (24) при любом x и n

(25) $$F(n, x) \leqslant f_7(x).$$

Далее ((19)—(21)), очевидно, $\gamma(n)$ является полигональным интегралом $\widehat{F}_n$ на $0 \triangle 1$ и поэтому выполняется

(26) $$I(\widehat{F}_n, \gamma(n)).$$

Из (24)—(26) (пользуясь монотонностью и аддитивностью I) получаем при любом n

$$\gamma(n) \leqslant z.$$

Поскольку γ эффективно не сходится, можно найти натуральное число N так, что всегда

(27) $$\gamma(n) \leqslant z - 2^{-N}.$$

Предположим теперь, что существует l_0 такое, что при любых $n \geqslant l_0$ и m

(28) $$\gamma(m+n) - \gamma(n) < 2^{-N-3}.$$

Тогда при любом k ((27), (28))

$$\left| \sum_{i=l_0+1}^{l_0+k+1} F^3(i, x) \right| \leqslant 4 \cdot \left| \sum_{i=l_0+1}^{l_0+k+1} \gamma(i) - \gamma(i-1) \right| =$$
$$= 4 \cdot (\gamma(l_0+k+1) - \gamma(l_0)) < 2^{-N-1}.$$

Следовательно, при любом k

$$F(l_0+k+1, x) \leqslant F(l_0, x) + 2^{-N-1}.$$

Отсюда согласно (23) получаем

$$f_7(x) \leqslant F(l_0, x) + 2^{-N-1}. \tag{29}$$

Но тогда по свойствам перманентности и аддитивности интеграла I и (24), (26), (29)

$$z \leqslant \gamma(l_0) + 2^{-N-1},$$

что противоречит (27).

Следовательно, из предположения об интегрируемости f_7 вытекает, что

$$\neg\exists l \forall mn (n \geqslant l \supset (\gamma(m+n) - \gamma(n) < 2^{-N-3})).$$

Это, однако, невозможно из-за ограниченности последовательности γ (ср. доказательство теоремы 4 § 3 гл. 3).

Следствие 3. *Функция f_7 неинтегрируема по Риману на* $0 \Delta 1$.

Следствие 4. *Функция f_7 не является равномерно непрерывной на* $0 \Delta 1$.

Следствие 5. *Функция f_7 не имеет первообразной на* $0 \Delta 1$.

В связи со следствиями 3—5 интересно заметить, что f_7 не является ни эффективно неравномерно непрерывной, ни эффективно неинтегрируемой по Риману функцией (это можно усмотреть из оценок (25) и (29)).

В работе Заславского и Цейтина [2] можно найти ряд других интересных примеров конструктивных функций с необычными свойствами.

§ 3. Невозможность некоторых алгорифмов, связанных с интегрированием

Материал этого параграфа заимствован в основном из работы автора [9]. Через Φ мы по-прежнему обозначаем некоторое точное сегментное дизъюнктное рациональное $\frac{1}{2}$-ограниченное покрытие $0 \Delta 1$, при этом концы сегмента $\Phi(n)$ обозначаются посредством r_n, s_n. Мы сохраняем также обозначение функции φ, приведенное в начале § 2.

1. Определение 1. *Пусть f — функция, F — последовательность функций. Будем говорить, что алгорифм γ моделирует алгорифм $\mathfrak{D}$ посредством F и f*

(запись $\mathrm{Md}(f, F, \mathfrak{D}, \gamma)$*), если при любом слове* $P \in Ч_0$ *выполняются условия*

1) *алгорифм* $\hat{\gamma}_P$ *— функция;*
2) *если* $\neg !\mathfrak{D}(P)$, *то* $\hat{\gamma}_P$ *совпадает с* f *на* $0 \triangle 1$;
3) *если* $!\mathfrak{D}(P)$ *и* $\mathfrak{D}$ *заканчивает работу над* P *точно за* k *шагов, то* $\hat{\gamma}_P$ *совпадает на* $0 \triangle 1$ *с функцией* $\hat{F}_k$.

Следующая лемма является, по существу, некоторым вариантом теоремы о склеивании.

Лемма 1. *Пусть функция* f *и последовательность функций* F *таковы, что при любых* n *и* $k \leqslant n$ *всюду на* $\Phi(k)$

$$f(x) = \hat{F}_n(x).$$

Тогда для любого алгорифма $\mathfrak{D}$ *можно построить алгорифм* γ *так, что выполняется* $\mathrm{Md}(f, F, \mathfrak{D}, \gamma)$.

Доказательство. Обозначим через α_1, α_2 характеристические алгорифмы покрытия Φ (определение 2 § 1) и рассмотрим алгорифмы $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, $\bar{\alpha}$ такие, что

$$\bar{\alpha}_1(x) \simeq \alpha_1(\varphi(x)),$$

$$\bar{\alpha}_2(x) \simeq \alpha_2(\varphi(x)),$$

$$\bar{\alpha}(x) \simeq \max_{\mathscr{H}}(\bar{\alpha}_1(x), \bar{\alpha}_2(x)).$$

По данному алгорифму $\mathfrak{D}$ построим алгорифм V так, что при любом $P \in Ч_0$

$$V(P) \simeq \mu i([\mathfrak{D}](P, i) \doteq \Lambda).$$

Искомый алгорифм γ строим так, чтобы

$$\gamma(P, x) \simeq \begin{cases} f(\varphi(x)), & \text{если} \quad [\mathfrak{D}](P, \bar{\alpha}(x)) \not\doteq \Lambda, \\ F(V(P), \varphi(x)), & \text{если} \quad [\mathfrak{D}](P, \bar{\alpha}(x)) \doteq \Lambda. \end{cases}$$

Очевидно, γ перерабатывает всякое слово P, x в КДЧ.

Пусть $\neg !\mathfrak{D}(P)$. Тогда при любом x

$$[\mathfrak{D}](P, \bar{\alpha}(x)) \not\doteq \Lambda.$$

Следовательно,

$$\gamma(P, x) \simeq f(\varphi(x))$$

и всюду на $0 \triangle 1$

$$\gamma(P, x) = f(x).$$

Пусть $!\mathfrak{D}(P)$. Тогда $!V(P)$ и $\mathfrak{D}$ заканчивает работу над P точно за $V(P)$ шагов. Если $\bar{\alpha}(x) < V(P)$, то

$$[\mathfrak{D}](P, \bar{\alpha}(x)) \not= \Lambda,$$

и так как $\bar{\alpha}_1(x)$, $\bar{\alpha}_2(x) \leqslant \bar{\alpha}(x)$ и

$$\varphi(x) \in r_{\bar{\alpha}_1(x)} \triangle s_{\bar{\alpha}_2(x)},$$

то

$$\gamma(P, x) \simeq f(\varphi(x)) = F(V(P), \varphi(x)).$$

В случае, когда $\bar{\alpha}(x) \geqslant V(P)$,

$$\gamma(P, x) \simeq F(V(P), \varphi(x)).$$

Таким образом, при всяком x

$$\gamma(P, x) = F(V(P), \varphi(x)),$$

что при $x \in 0 \triangle 1$ дает

$$\gamma(P, x) = F(V(P), x).$$

Осталось показать, что при любом P $\hat{\gamma}_P$ является функцией. Пусть $x = y$ и

$$\gamma(P, x) > \gamma(P, y).$$

Тогда из доказанного выше получаем, что одновременно выполняется $\urcorner\urcorner!\mathfrak{D}(P)$ и $\urcorner!\mathfrak{D}(P)$, что невозможно. Следовательно,

$$\gamma(P, x) \leqslant \gamma(P, y).$$

Аналогично,

$$\gamma(P, x) \geqslant \gamma(P, y).$$

Следовательно,

$$\gamma(P, x) = \gamma(P, y),$$

что и требовалось. Заметим, что при любом P $\hat{\gamma}_P(x) = \hat{\gamma}_P(0)$ при $x \leqslant 0$ и $\hat{\gamma}_P(x) = \hat{\gamma}_P(1)$ при $x \geqslant 1$.

Нам понадобятся некоторые вспомогательные построения.

Построим последовательность $\bar{D}$ положительных рациональных дроблений сегмента $0 \triangle 1$ такую, что

$$\pi(\bar{D}(n)) < 2^{-n}$$

и рациональные числа r_i, s_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ входят в $\bar{D}(n)$. (Алгорифм π введен в § 1 гл. 7.)

Обозначим

$$\overline{D}(n) \mathrel{\dot{=}} t_{n,0} * \ldots * t_{n,k_n}$$

(где $0 \mathrel{\dot{=}} t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,k_n} = 1$ и все $t_{n,i}$ — рациональные числа).

Построим алгорифм D_1 так, что при любом n и $0 \leqslant i \leqslant k_n - 1$

$$D_1(n, i) \mathrel{\dot{=}} \begin{cases} 0, & \text{если сегмент } t_{n,i} \Delta t_{n,i+1} \text{ входит в какой-нибудь из сегментов } \Phi(0), \ldots, \Phi(n); \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть Ω — тот же самый алгорифм, что и в § 2 (см. рис. 17).

Обозначим через $\mathfrak{H}$ алгорифм в алфавите $Ч^a$ со следующим свойством: невозможен алгорифм $\mathfrak{A}$ над $Ч_0$ такой, что при любом $P \in Ч_0$

$$!\mathfrak{A}(P) \equiv \neg\, !\mathfrak{H}(P).$$

Теорема 1. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий запись всякой полигональной, ограниченной числом* 1 *функции f такой, что*

$$0 = \int\limits_0^1 f,$$

в натуральное число, являющееся 0*-индикатором интегрируемости этой функции на* $0 \Delta 1$ (см. определение 1 § 3 гл. 7).

Доказательство. Обозначим на время доказательства

$$t_{n,i} \Delta \frac{t_{n,i} + t_{n,i+1}}{2} \quad \text{через} \quad a_{n,i},$$

$$\frac{t_{n,i} + t_{n,i+1}}{2} \Delta t_{n,i} \quad \text{через} \quad b_{n,i},$$

$$t_{n,i} + \frac{t_{n,i+1} - t_{n,i}}{4} \quad \text{через} \quad c_{n,i},$$

$$t_{n,i} + \frac{3 \cdot (t_{n,i+1} - t_{n,i})}{4} \quad \text{через} \quad d_{n,i}.$$

Построим алгорифм F так, что

$$(1)\qquad F(n, x) = \sum_{i=0}^{k_n-1} D_1(n, i)\cdot\left(\hat{\Omega}_{a_{n,i}}(x) - \hat{\Omega}_{b_{n,i}}(x)\right).$$

Очевидно, F является последовательностью функций, причем на каждом сегменте $t_{n,i}\,\Delta\,t_{n,i+1}$

$$(2)\qquad \hat{F}_n(x) = D_1(n, i)\cdot\left(\hat{\Omega}_{a_{n,i}}(x) - \hat{\Omega}_{b_{n,i}}(x)\right).$$

Следовательно,

$$(3)\qquad \begin{aligned} \hat{F}_n(c_{n,i}) &= 1,\\ \hat{F}_n(d_{n,i}) &= -1. \end{aligned}$$

Из (1)—(2) получаем, что $\hat{F}_n$ — полигональная функция, ограниченная числом 1 и обращающаяся в 0 на сегментах $\Phi(0), \ldots, \Phi(n)$. При этом, очевидно,

$$0 = \int_0^1 \hat{F}_n.$$

Пусть f — функция, тождественно равная 0 на всей оси. Применяя к f, F и $\mathfrak{H}$ лемму 1, получаем алгорифм γ такой, что выполняется

$$(4)\qquad \mathrm{Md}(f, F, \mathfrak{H}, \gamma).$$

Предположим теперь, что алгорифм, невозможность которого утверждается теоремой, построен. Обозначим этот алгорифм через σ. Построим далее алгорифм σ_1 такой, что

$$(5)\qquad \sigma_1(P) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \sigma(\xi\hat{\gamma}_P\zeta).$$

Пусть алгорифм σ_2 таков, что для любого P в $Ч_0$

$$(6)\qquad !\sigma_2(P) \equiv P \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda.$$

Построим алгорифмы $\mathfrak{A}$ так, чтобы для любого слова P в $Ч_0$ выполнялось

$$(7)\qquad \mathfrak{A}(P) \simeq \sigma_2([\mathfrak{H}](P, \sigma_1(P))),$$

и покажем, что

$$(8)\qquad !\mathfrak{A}(P) \equiv \neg !\mathfrak{H}(P).$$

Действительно, если $\neg !\mathfrak{H}(P)$, то при любом n

$$[\mathfrak{H}](P, n) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda.$$

Далее согласно (4) всюду на $0 \triangle 1$

$$\hat{\gamma}_P(x) = f(x) = 0.$$

Поэтому $!\sigma_1(P)$ и $\sigma_1(P)$ — натуральное число. Следовательно,

$$[\mathfrak{H}](P, \sigma_1(P)) \neq \Lambda$$

и ((6)) выполняется $!\mathfrak{A}(P)$.

Пусть теперь $!\mathfrak{A}(P)$. Предположим, что $!\mathfrak{H}(P)$, и обозначим через k число шагов, затрачиваемое алгорифмом $\mathfrak{H}$ на слово P. Согласно (4) всюду на $0 \triangle 1$

$$\hat{\gamma}_P(x) = \hat{F}_k(x),$$

и, следовательно, $\hat{\gamma}_P$ является полигональной, ограниченной числом 1 функцией с R-интегралом, равным 0. Поэтому ((5)) $!\sigma_1(P)$ и $\sigma_1(P)$ — 0-индикатор интегрируемости F_k на $0 \triangle 1$. Необходимо

$$k > \sigma_1(P), \tag{9}$$

так как в противном случае

$$[\mathfrak{H}](P, \sigma_1(P)) = \Lambda$$

и, следовательно ((6)), $\neg !\mathfrak{A}(P)$, что противоречит условию.

Построим интегральные суммы S_1, S_2 функции F_k на $0 \triangle 1$ такие, что

$$S_1 = \{f\},\ \overline{D}(k),\ c_{n,0} * c_{n,1} * \ldots * c_{n,k_n-1},$$

$$S_2 = \{f\},\ \overline{D}(k),\ d_{n,0} * d_{n,1} * \ldots * d_{n,k_n-1}.$$

Ввиду (3) и $\frac{1}{2}$-ограниченности покрытия Φ получаем*)

$$\mathfrak{z}(S_2) - \mathfrak{z}(S_1) = 2 \cdot \left(1 - \sum_{i=0}^{k} |\Phi(i)|\right) > 1. \tag{10}$$

Вместе с тем, поскольку $\sigma_1(P)$ — 0-индикатор интегрируемости $\hat{F}_k$ на $0 \triangle 1$ и выполняется (9), должно быть

$$|\mathfrak{z}(S_2) - \mathfrak{z}(S_1)| < 1,$$

*) Алгорифм $\mathfrak{z}$ введен в § 1 гл. 7.

что противоречит (10). Следовательно, из $!\mathfrak{A}(P)$ следует $\urcorner !\mathfrak{H}(P)$ и эквивалентность (8) доказана.

Однако алгорифм $\mathfrak{A}$, удовлетворяющий (8), невозможен. Теорема доказана.

Заметим, что полученная нами оценка (10) связана с выбором $\frac{1}{2}$-ограниченного покрытия Φ. Выбирая ε-ограниченное покрытие при достаточно малом ε, можно показать, что вместо 1 (см. определение 0-индикатора) в теореме 1 могло бы фигурировать любое положительное КДЧ, меньшее двух.

Отметим два очевидных следствия теоремы 1.

Следствие 1. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий запись всякой ограниченной числом* 1, *полигональной на* $0 \triangle 1$ *функции такой, что* 0 *является ее* R*-интегралом на* $0 \triangle 1$, *в запись регулятора интегрируемости этой функции на* $0 \triangle 1$.

Следствие 2. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий запись всякой интегрируемой по Риману на* $0 \triangle 1$ *функции в запись регулятора интегрируемости этой функции на* $0 \triangle 1$.

Теперь мы рассмотрим задачу вычисления с некоторой наперед фиксированной точностью интеграла произвольной интегрируемой функции по значениям самой функции (располагая записью данной функции, мы можем вычислять любые ее значения). Невозможность эффективного решения этой задачи уже в классе полигональных, наперед ограниченных функций утверждается следующей теоремой.

Теорема 2. *Невозможен алгорифм* σ, *перерабатывающий запись всякой неотрицательной, ограниченной числом* 1, *полигональной на* $0 \triangle 1$ *функции* f *в КДЧ такое, что для любого* z, *если* $z = \int\limits_0^1 f$, *то* $|z - \sigma(\mathcal{E} f \mathcal{3})| < \frac{1}{16}$ *).

*) Вместо $\frac{1}{16}$ в этой теореме могло бы фигурировать любое КДЧ, меньшее $\frac{1}{2}$ (ср. с замечанием, сделанным после доказательства теоремы 1).

Доказательство. Обозначим на время доказательства сегмент $t_{n,i} \Delta t_{n,i+1}$ через $a_{n,i}$. Построим алгорифм F так, чтобы при любых n и x

$$F(n, x) = \sum_{i=0}^{k_n - 1} D_1(n, i) \cdot \Omega(a_{n,i}, x).$$

Нетрудно проверить, что

(11) F является последовательностью функций, причем каждая функция $\widehat{F}_n$ полигональна и обращается в 0 на сегментах $\Phi(0), \ldots, \Phi(n)$,

(12) при любом n

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sum_{i=0}^{n} |\Phi(i)|\right) = \int_0^1 \widehat{F}_n$$

и, следовательно, если $z = \int_0^1 \widehat{F}_n$, то

$$z > \frac{1}{4},$$

(13) функция F_n неотрицательна и ограничена единицей.

Пользуясь леммой 1, построим для F, функции f, тождественно равной 0, и алгорифма $\mathfrak{H}$ такой алгорифм γ, что имеет место

(14) $$\mathrm{Md}(f, F, \mathfrak{H}, \gamma).$$

Предположим теперь, что алгорифм σ, невозможность которого утверждается теоремой, построен. Построим алгорифм σ_1 так, чтобы для любого слова P в $Ч_0$

(15) $$\sigma_1(P) \simeq \sigma(\{\hat{\gamma}_P\}).$$

Нетрудно далее (используя, например, алгорифм Рз) построить алгорифм σ_2, применимый к любому КДЧ и такой, что

(16) если $\sigma_2(x) \dot{=} \Lambda$, то $x < \frac{3}{16}$,

(17) если $\sigma_2(x) \dot{\neq} \Lambda$, то $x > \frac{1}{16}$.

Пусть σ_3 — алгорифм, удовлетворяющий для любого слова P в $Ч_0$ условию

$$(18)\qquad !\sigma_3(P) \equiv P \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda.$$

Построим алгорифм $\mathfrak{A}$ так, чтобы

$$(19)\qquad \mathfrak{A}(P) \simeq \sigma_3(\sigma_2(\sigma_1(P))),$$

и докажем, что

$$(20)\qquad !\mathfrak{A}(P) \equiv \neg\, !\mathfrak{H}(P).$$

Пусть $\neg\, !\mathfrak{H}(P)$. Тогда ((14)) всюду на $0 \triangle 1$

$$(21)\qquad \hat{\gamma}_P(x) = f(x) = 0.$$

Следовательно,

$$(22)\qquad 0 = \int\limits_0^1 \hat{\gamma}_P.$$

Ввиду (15), (21) — (22) $!\sigma_1(P)$ и $\sigma_1(P)$ — КДЧ, причем

$$|\sigma_1(P)| < \frac{1}{16}.$$

Следовательно ((16) — (17)),

$$\sigma_2(\sigma_1(P)) \mathrel{\dot{=}} \Lambda$$

и ((18))

$$!\mathfrak{A}(P).$$

Пусть теперь $!\mathfrak{A}(P)$. Предположим, что $!\mathfrak{H}(P)$ и $\mathfrak{H}$ заканчивает работу над P точно за k шагов. Тогда всюду на $0 \triangle 1$

$$\hat{\gamma}_P(x) = \widehat{F}_k(x)$$

и поэтому ((11) — (13)) $!\sigma_1(P)$, причем, ввиду (12),

$$\sigma_1(P) > \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

Следовательно ((16) — (17)),

$$\sigma_2(\sigma_1(P)) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda$$

и $\neg\, !\mathfrak{A}(P)$, что противоречит условию. Следовательно, из $!\mathfrak{A}(P)$ следует $\neg\, !\mathfrak{H}(P)$ и эквивалентность (20) полностью доказана. Алгорифм $\mathfrak{A}$, удовлетворяющий (20), однако, невозможен. Теорема доказана.

Эту теорему интересно сопоставить с теоремой 1 § 1 гл. 7, показывающей, что интеграл любой интегрируемой функции можно сколь угодно точно эффективно вычислять, используя в качестве исходных данных интегральные шифры функций, т. е. включая в число исходных данных, кроме самой функции, ее регулятор интегрируемости.

Следствие 3. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий запись всякой полигональной на* $0 \triangle 1$ *ограниченной числом* 1 *функции в КДЧ, являющееся интегралом Римана этой функции на* $0 \triangle 1$.

Следствие 4. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий запись всякой R-интегрируемой на* $0 \triangle 1$ *ограниченной числом* 1 *функции в КДЧ, являющееся интегралом Римана этой функции на* $0 \triangle 1$.

Поскольку всякий полигональный интеграл (определение 6 § 2) является интегралом Римана, получаем

Следствие 5. *Невозможен алгорифм, перерабатывающий запись всякой полигональной на* $0 \triangle 1$ *функции в определяющее дробление этой функции* (см. определение 6 § 1 гл. 5).

Кроме того, из каждой из теорем 1—2 вытекает теорема И. Д. Заславского о невозможности алгорифма, перерабатывающего запись всякой равномерно непрерывной на $0 \triangle 1$ функции в запись регулятора равномерной непрерывности этой функции (Заславский [4; теорема 5.6]).

2. Остановимся теперь на вопросе распознавания интегрируемости функций.

Теорема 3. *Невозможен алгорифм, применимый к записи функции тогда и только тогда, когда эта функция интегрируема по Риману на* $0 \triangle 1$.

Теорема 4. *Невозможен алгорифм, применимый к записи функции тогда и только тогда, когда эта функция неинтегрируема по Риману на* $0 \triangle 1$.

Разумеется, эти теоремы остаются в силе для любого сегмента положительной длины. В приводимых ниже доказательствах теорем 3—4 через f_6 обозначается неинтегрируемая по Риману функция, построенная в доказательстве теоремы 8 § 2. Функция f_6 является склейкой последовательности H (стр. 323).

Доказательство теоремы 3. Строим алгорифм F так, чтобы

$$F(n, x) = f_6(x) - \sum_{i=0}^{n} H(i, x).$$

Очевидно, при любом n алгорифм $\bar{F}_n$ является функцией, обращающейся в нуль на сегментах $\Phi(0), \ldots$ $\ldots, \Phi(n)$. Кроме того, $\bar{F}_n$ неинтегрируема по Риману на $0 \triangle 1$ (поскольку f_6 неинтегрируема, а все $\bar{H}_i$ интегрируемы на $0 \triangle 1$).

Пусть f — функция, тождественно равная нулю. Построим по лемме 1 алгорифм γ так, что выполняется

$$\mathrm{Md}(f, F, \mathfrak{H}, \gamma).$$

Пусть алгорифм, невозможность которого утверждается, построен. Обозначим его через U и построим алгорифм $\bar{U}$ так, что

$$\bar{U}(P) \simeq U(\{\hat{\gamma}_P\}).$$

Тогда, очевидно,

$$!\bar{U}(P) \equiv \neg\, !\mathfrak{H}(P),$$

что невозможно.

Доказательство теоремы 4. Построим алгорифм F так, чтобы

$$F(n, x) = \sum_{i=0}^{n} H(i, x).$$

При всяком n, $i \leqslant n$ и $x \in \Phi(i)$

$$F(n, x) = H(i, x) = f_6(x).$$

Следовательно, можно построить алгорифм γ так, что

$$\mathrm{Md}(f_6, F, \mathfrak{H}, \gamma).$$

Пусть алгорифм, невозможность которого утверждается теоремой, построен и обозначен через U. Построим алгорифм $\bar{U}$ так, что

$$\bar{U}(P) \simeq U(\{\hat{\gamma}_P\}).$$

Тогда

$$!\bar{U}(P) \equiv \neg\, !\mathfrak{H}(P),$$

что невозможно.

Следствие 6. *Невозможен алгорифм, применимый к записи всякой функции и перерабатывающий запись всякой R-интегрируемой на* $0 \Delta 1$ *функции в* 0, *а не интегрируемой в* 1.

Следствие 7. *Множество интегрируемых (неинтегрируемых) по Риману на* $0 \Delta 1$ *функций не является перечислимым* *).

Результаты этого параграфа могут быть доказаны в классе бесконечно дифференцируемых функций. Отметим также, что, поскольку согласно свойству перманентности и утверждению 1) теоремы 9 § 2, на классе полигональных функций любой обобщенный интеграл совпадает с интегралом Римана, теорема 2 и следствия 3—4 могут быть переформулированы для любого обобщенного интеграла. То же самое можно сказать и о теоремах 3—4 и следствиях 6—7 (в доказательствах которых вместо неинтегрируемой по Риману функции f_6 нужно будет использовать неинтегрируемую относительно любого обобщенного интеграла функцию, построенную согласно теореме 10 § 2).

---

*) Под множесгвами функций понимаются множества записей функций. Следствие 7 нетрудно усилить: оба фигурирующих в нем множества продуктивны.

ГЛАВА 9

КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Основной целью данной главы является доказательство теорем непрерывности. Использование понятия конструктивного метрического пространства позволяет придать естественную общность как этим теоремам, так и ряду результатов о конструктивных действительных числах и функциях, полученных в предыдущих главах. Имея в виду сформулированную только что цель, мы уделяем сравнительно мало места «пересказу» традиционной теории метрических пространств. На содержание этой главы сильное влияние оказали две выдающиеся работы: Цейтин [5] (см. также более ранние публикации Цейтина [3]—[4]) и Московакис [1]. При этом схема получения теорем непрерывности заимствована нами в основном у Московакиса, тогда как применяемый в доказательствах метод («метод захвата») почерпнут из работ Цейтина. (Таким образом, некоторые результаты Московакиса (например, «сепарационная теорема») доказываются методом Цейтина [5].) Вводимое ниже понятие конструктивного метрического пространства (КМП) предложено Шаниным [6; § 9 гл. 2] (ср. Цейтин [5]). Отметим, что в работах Шанина [5]—[6] также вводятся конструктивные нормированные и гильбертовы пространства*). Рассматриваемые Московакисом [1] рекурсивные метрические пространства вполне аналогичны КМП с точки зрения излагаемых нами результатов. Для интересующихся данным вопросом читателей

*) Конструктивные нормированные и гильбертовы пространства рассматриваются также в более поздних работах Минца [2], Оревкова [5] и др. В монографии Фан Динь Зиеу [9] построена конструктивными средствами теория локально выпуклых топологических пространств (в частности, мультинормируемых пространств). Наконец, вопросы рекурсивной общей топологии рассмотрены в работах Лакомба [5] и Ногиной [1]—[3]. (Эти работы не принадлежат конструктивному направлению.)

заметим, что принцип Маркова почти не применяется в § 1 (исключение составляют результаты п. 5 о совершенных КМП), а употребление его в §§ 2—3 связано в основном с использованием метода захвата. Таким образом, основные результаты данной главы — теоремы непрерывности — существенно опираются на принцип Маркова.

В этой главе будет широко использоваться сокращенная запись суждений. Сделаем в связи с этим некоторые пояснения. Как правило, формулируемые суждения имеют вид

(1) Пусть $\boldsymbol{M}$ — конструктивное метрическое пространство. Для любого алгорифмического оператора Ψ *) и любого слова X (в некотором фиксированном алфавите) осуществимо слово Y, находящееся с X и Ψ в данном отношении $\mathscr{A}$.

(2) Пусть $\boldsymbol{M}$ — конструктивное метрическое пространство. Для любого алгорифмического оператора Ψ и любого слова X осуществим алгорифм, находящийся с Ψ и X в данном отношении $\mathscr{A}$.

В суждениях вида (1) — (2) пространство $\boldsymbol{M}$ предполагается произвольно фиксированным. Суждение вида (1) понимается как утверждение, что можно построить алгорифм, перерабатывающий всякое слово вида $\{\Psi\}$, X (где Ψ — оператор) в слово, находящееся в данном отношении с Ψ и X. Суждение вида (2) трактуется как утверждение возможности построения алгорифма, перерабатывающего всякое слово вида $\{\Psi\}, X$ в запись искомого алгорифма, или (что эквивалентно) как утверждение о возможности построения такого алгорифма $\mathfrak{A}$, что для любого оператора Ψ и слова X алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}_{\{\Psi\}, X}$ (это обозначение поясняется ниже) находится в требуемом отношении с Ψ и X.

С целью избежать частых отвлекающих упоминаний об алфавитах, мы будем считать, что фиксирован некоторый алфавит A, в котором и рассматриваются все метрические пространства. Нам удобно считать, что A не

*) Алгорифмический оператор — это алгорифм, удовлетворяющий некоторым условиям согласованности (см. § 2).

содержит букв «,» и «*» (эти буквы используются для образования систем слов в A) и что алфавит $Ч_1$ (основной алфавит предыдущих глав) включен в A. Алфавит $A \cup \{,*\}$ обозначается через A_1. Наконец, через A_1^a мы обозначаем некоторое двухбуквенное расширение A_1. Напомним, что всякий алгорифм $\mathfrak{A}$ типа $(A_1 \to A_1)$ может быть заменен алгорифмом $\mathfrak{A}'$ в A_1^a так, что при любом $P \in A_1$

$$\mathfrak{A}'(P) \simeq \mathfrak{A}(P).$$

В соответствии со сказанным, при отсутствии других указаний все упоминаемые слова считаются словами в A, а алгорифмы — нормальными алгорифмами в алфавите A_1^a.

Напомним также одно важное обозначение. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгорифм (над алфавитом A) и $P \in A_1$. Тогда через $\widehat{\mathfrak{A}}_P$ обозначается построенный некоторым фиксированным образом (см. п. 11 § 1 гл. 1) алгорифм в алфавите A_1^a такой, что при любом $Q \in A_1$ имеет место

$$!\widehat{\mathfrak{A}}_P(Q) \equiv !\mathfrak{A}(PQ),$$

и если $!\mathfrak{A}(PQ)$ и $\mathfrak{A}(PQ)$ — слово в алфавите A_1, то

$$\widehat{\mathfrak{A}}_P(Q) \doteqdot \mathfrak{A}(PQ).$$

Так же, как в предыдущих главах, если P оканчивается запятой, то мы опускаем в обозначении $\widehat{\mathfrak{A}}_P$ эту запятую, так что вместо $\widehat{\mathfrak{A}}_{P_1,}$ пишется $\widehat{\mathfrak{A}}_{P_1}$. Точный смысл используемых обозначений во всех таких случаях легко усматривается из контекста.

Для алгорифмов в алфавите A_1^a определяются их записи (обозначение $\{\mathfrak{A}\}$), которые являются словами в алфавите $Ч_0 = \{0|\}$ (см. § 1 гл. 1). Мы будем часто и без особых оговорок использовать следующий факт (теорема 16 § 1 гл. 1): для каждого алгорифма $\mathfrak{A}$ можно построить алгорифм $\mathfrak{B}$ так, что при любом слове $P \in A_1$

$$\mathfrak{B}(P) \simeq \{\widehat{\mathfrak{A}}_P\}.$$

§ 1. Конструктивные метрические пространства. Основные определения, некоторые примеры. Пополнение конструктивных метрических пространств

1. Определение 1. *Пусть $\mathscr{M}$ — множество слов в алфавите A, ρ — алгорифм типа $(\mathscr{M}^2 \to \mathscr{D})$ (т. е. ρ перерабатывает всякое слово вида X, Y, где X и Y — элементы $\mathscr{M}$, в КДЧ). Список* $\mathbf{M}$

$$\{\mathscr{M}, \rho\} \tag{1}$$

назовем конструктивным метрическим пространством (КМП) в алфавите A, если для любых слов X, Y, Z из $\mathscr{M}$ выполняется

1) $\rho(X, X) = 0$;

2) $\rho(X, Y) \leqslant \rho(X, Z) + \rho(Y, Z)$ (*аксиома треугольника*) *).

Определение 2. *Алгорифм ρ будем называть метрическим алгорифмом КМП (1), а множество $\mathscr{M}$ — носителем этого КМП.*

Определение 3. *Слова, принадлежащие множеству $\mathscr{M}$, мы будем называть элементами или точками КМП (1) (запись $X \in \mathbf{M}$). Элементы X и Y КМП (1) назовем эквивалентными (различными) в $\mathbf{M}$, если $\rho(X, Y) = 0$ ($\rho(X, Y) \neq 0$) (запись $X \underset{\mathbf{M}}{=} Y$* и *$X \underset{\mathbf{M}}{\neq} Y$).*

Таким образом, записи $X \in \mathscr{M}$ и $X \in \mathbf{M}$ равнозначны. Аналогично, вместо записи $\mathscr{M}_1 \subseteq \mathscr{M}$ будет часто использоваться запись $\mathscr{M}_1 \subseteq \mathbf{M}$.

Из аксиом метрического пространства легко вытекает

Теорема 1. *Каковы бы ни были точки X, Y, Z_1, Z_2 КМП* (1)

1) $\rho(X, Y) \geqslant 0$;

2) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$;

3) *если $X \underset{\mathbf{M}}{=} Y$, $Z_1 \underset{\mathbf{M}}{=} Z_2$, то $\rho(X, Z_1) = \rho(Y, Z_2)$.*

---

*) Уточнение этого определения требует фиксации логико-математического языка, в котором задается множество $\mathscr{M}$ (множества отождествляются с однопараметрическими формулами выбранного языка; при этом КМП оказываются словами определенного типа). Описание подходящих для наших целей языков и изложение теории метрических пространств на их основе можно найти в работах Шанина [4], [6].

Действительно, заменяя в аксиоме треугольника Z на Y и Y на X, получим

$$\rho(X, X) \leqslant \rho(X, Y) + \rho(X, Y),$$

откуда

$$\rho(X, Y) \geqslant 0.$$

Далее, заменяя в той же аксиоме Z на X, получим

$$\rho(X, Y) \leqslant \rho(X, X) + \rho(Y, X) = \rho(Y, X),$$

т. е.

$$\rho(X, Y) \leqslant \rho(Y, X).$$

Аналогично устанавливается, что

$$\rho(Y, X) \leqslant \rho(X, Y).$$

Поэтому

$$\rho(X, Y) = \rho(Y, X).$$

Докажем утверждение 3). По аксиоме треугольника

$$\rho(X, Z_1) \leqslant \rho(X, Y) + \rho(Z_1, Y).$$

Поскольку $\rho(X, Y) = 0$, то отсюда

$$\rho(X, Z_1) \leqslant \rho(Z_1, Y).$$

Опять, применяя аксиому треугольника, получим

$$\rho(X, Z_1) \leqslant \rho(Z_1, Z_2) + \rho(Y, Z_2) = \rho(Y, Z_2).$$

Аналогично показывается, что

$$\rho(Y, Z_2) \leqslant \rho(X, Z_1).$$

Следовательно,

$$\rho(Y, Z_2) = \rho(X, Z_1),$$

что и требовалось.

Определение 4. *КМП* $\mathbf{M}_1 = \{\mathscr{M}_1, \rho\}$ *назовем подпространством КМП* (1) (*запись* $\mathbf{M}_1 \subseteq \mathbf{M}$), *если* $\mathscr{M}_1 \subseteq \mathscr{M}$. *Про подпространство* $\mathbf{M}_1$ *будем говорить, что оно индуцировано подмножеством* $\mathscr{M}_1$ *множества* $\mathscr{M}$.

Определение 5. 1) *Множество* $\mathscr{M}_1 \subseteq \mathscr{M}$ *назовем правильным подмножеством КМП* $\mathbf{M}$ (*или правильным множеством точек этого КМП*), *если для любого* $X \in \mathscr{M}_1$ *из* $Y \underset{M}{=} X$ *следует* $Y \in \mathscr{M}_1$. (*Таким образом,* $\mathscr{M}_1$ *вместе с каждой своей точкой содержит и все эквивалентные ей точки* $\mathbf{M}$.)

2) *Подпространство* $\boldsymbol{M}_1$ *КМП* $\boldsymbol{M}$ *назовем правильным, если его носитель — правильное подмножество* $\boldsymbol{M}$.

Важным частным случаем правильных множеств являются вводимые в следующем параграфе согласованные множества. Приведем некоторые примеры конструктивных метрических пространств*). (Число подобных примеров легко увеличивать.)

а) Пространство натуральных чисел. Пусть $\mathscr{H}$ — множество натуральных чисел и ρ такой алгорифм, что

$$\rho(m, n) \doteq | m - n |.$$

Множество $\mathscr{H}$ вместе с ρ образует КМП, которое мы будем обозначать через $\boldsymbol{H}$.

б) Пространство конструктивных действительных чисел $\boldsymbol{E}_1$. Носителем этого КМП является множество $\mathscr{D}$ всех КДЧ, а метрическим алгорифмом — алгорифм ρ такой, что

$$\rho(x, y) \doteq | x - y |.$$

Очевидно, $\boldsymbol{H}$ — подпространство (не являющееся правильным) $\boldsymbol{E}_1$. КМП $\boldsymbol{E}_1$ мы будем иногда называть конструктивной прямой.

в) n-мерное евклидово пространство $\boldsymbol{E}_n$. Носителем этого КМП является множество $\mathscr{D}^n$, т. е. множество слов вида

$$x_1, \ldots, x_n,$$

где x_i — КДЧ, а метрика задается таким алгорифмом ρ, что

$$\rho(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Аксиома треугольника проверяется для $\boldsymbol{E}_n$ с помощью неравенства Коши — Буняковского (см., например, Колмогоров, Фомин [1; стр. 45]).

При $n = 1$ $\boldsymbol{E}_n$ есть введенное в предыдущем примере пространство КДЧ.

*) Мы не будем в дальнейшем различать КМП с равными носителями и метрическими алгорифмами ρ_1, ρ_2 такими, что для всех точек X, Y этих КМП $\rho_1(X, Y) = \rho_2(X, Y)$.

г) Пространства $\boldsymbol{E}_n^1$ и $\boldsymbol{E}_n^2$. Носитель этих пространств тот же, что и у $\boldsymbol{E}_n$, а в качестве метрических функций берутся алгорифмы ρ_1 и ρ_2, для которых

$$\rho_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

и

$$\rho_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|.$$

Проверка условий 1)—2) определения 1 очевидна. Ясно, что $\boldsymbol{E}_1^1$ и $\boldsymbol{E}_1^2$ совпадают с $\boldsymbol{E}_1$.

д) Пространство $\boldsymbol{C}$ равномерно непрерывных на единичном сегменте функций. Носителем этого пространства является множество $\mathscr{C}$ слов вида $\{f\} * \{\delta\}$, где f — всюду определенная конструктивная функция, δ — ее регулятор равномерной непрерывности на сегменте $0 \triangle 1$ (ср. определение равномерного шифра в § 2 гл. 5). Можно построить (§ 2 гл. 5) алгорифм ρ, перерабатывающий любое слово вида $\{f_1\} * \{\delta_1\}, \{f_2\} * \{\delta_2\}$, где $\{f_1\} * \{\delta_1\}$ и $\{f_2\} * \{\delta_2\}$ принадлежат $\mathscr{C}$, в КДЧ, являющееся точной верхней гранью функции $|f_1 - f_2|$ на $0 \triangle 1$. Итак,

$$\rho(\{f_1\} * \{\delta_1\}, \{f_2\} * \{\delta_2\}) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} (|f_1(x) - f_2(x)|). \quad (2)$$

Этот алгорифм и берется в качестве метрического алгорифма пространства $\boldsymbol{C}$. Обращаем внимание читателя на следующие специфические особенности этого примера: 1) в отличие от одноименного классического пространства (см., например, Колмогоров, Фомин [1]), вместо непрерывных рассматриваются равномерно непрерывные функции (непрерывные конструктивные функции могут быть неограниченными, а будучи ограниченными, не обязательно имеют точные грани); 2) элементами $\boldsymbol{C}$ являются не собственно функции (записи функций), а слова более сложного типа; это вызвано тем, что алгорифм, вычисляющий правую часть (2) и использующий в качестве исходных данных лишь записи функций, невозможен.

е) Бэровское пространство $\boldsymbol{B}$ последовательностей натуральных чисел (ПНЧ).

Это пространство вполне аналогично рассматривавшемуся рядом авторов (см., например, Кузнецов, Трахтенброт [1], Успенский [1]) бэровскому пространству общерекурсивных функций. Носителем пространства $\boldsymbol{B}$ является множество $\mathscr{B}$ записей ПНЧ, а метрический алгорифм ρ строится так, что для любых ПНЧ α_1, α_2

$$\rho(\xi\alpha_1\zeta, \xi\alpha_2\zeta) = \begin{cases} 2^{-k}, & \text{если } \alpha_1(i) \doteq \alpha_2(i) \text{ при } i<k \text{ и } \alpha_1(k) \dot{\neq} \alpha_2(k), \\ 0, & \text{если } \alpha_1(i) \doteq \alpha_2(i) \text{ при любом } i. \end{cases}$$

Наметим построение ρ. Построим сначала алгорифмы β и γ так, чтобы

$$\beta(\xi\alpha_1\zeta, \xi\alpha_2\zeta, n) \doteq \begin{cases} n, & \text{если } \alpha_1(i) \doteq \alpha_2(i) \text{ при } 0 \leqslant i \leqslant n, \\ \mu i(\alpha_1(i) \dot{\neq} \alpha_2(i)) & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\gamma(\xi\alpha_1\zeta, \xi\alpha_2\zeta, n) \doteq 2^{-\beta(\xi\alpha_1\zeta, \xi\alpha_2\zeta, n)}.$$

При любых ПНЧ α_1, α_2 алгорифм $\hat{\gamma}_{\xi\alpha_1\zeta, \xi\alpha_2\zeta}$ является ПРЧ, причем алгорифм $\mathrm{Id}\,(\mathrm{Id}(n) \doteq n)$ является регулятором фундаментальности этой ПРЧ. Поэтому алгорифм ρ такой, что

$$\rho(\xi\alpha_1\zeta, \xi\alpha_2\zeta) \doteq \xi\hat{\gamma}_{\xi\alpha_1\zeta, \xi\alpha_2\zeta}\zeta\,\xi\Diamond\xi\,\mathrm{Id}\,\zeta,$$

задает интересующую нас метрику*).

Очевидно, для любой ПНЧ α

$$\rho(\xi\alpha\zeta, \xi\alpha\zeta) = 0.$$

Проверим для ρ аксиому треугольника. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — ПНЧ. Предположим, что

$$\rho(\xi\alpha_1\zeta, \xi\alpha_2\zeta) > \rho(\xi\alpha_1\zeta, \xi\alpha_3\zeta) + \rho(\xi\alpha_2\zeta, \xi\alpha_3\zeta).$$

Тогда можно найти натуральное l такое, что

$$\rho(\xi\alpha_1\zeta, \xi\alpha_2\zeta) > \rho(\xi\alpha_1\zeta, \xi\alpha_3\zeta) + \rho(\xi\alpha_2\zeta, \xi\alpha_3\zeta) + 2^{-l}.$$

---

*) В данном контексте обозначения типа $\mathfrak{A}_P$ и $\xi\mathfrak{A}\zeta$ следует понимать так же, как и в первых восьми главах (см. стр. 113), т. е. рассматривая вместо A_1^a алфавит $Ч^a$ (в котором, в частности, определялись ПРЧ). В дальнейшем очевидные замечания этого рода опускаются.

Если при $0 \leqslant i \leqslant l$ $\alpha_1(i) \mathrel{\dot{=}} \alpha_2(i)$, то $\rho(\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}) < 2^{-l}$, что невозможно. Следовательно, можно найти $k \leqslant l$ такое, что $\alpha_1(i) \mathrel{\dot{=}} \alpha_2(i)$ при $i < k$ и $\alpha_1(k) \mathrel{\dot{\neq}} \alpha_2(k)$. Но тогда $\alpha_3(k) \mathrel{\dot{\neq}} \alpha_1(k)$ или $\alpha_3(k) \mathrel{\dot{\neq}} \alpha_2(k)$. В первом случае $\rho(\{\alpha_1\}, \{\alpha_3\}) \geqslant 2^{-k}$, во втором $\rho(\{\alpha_2\}, \{\alpha_3\}) \geqslant 2^{-k}$. И то и другое, однако, невозможно, поскольку $\rho(\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}) = 2^{-k}$. Следовательно,

$$\rho(\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}) \leqslant \rho(\{\alpha_1\}, \{\alpha_3\}) + \rho(\{\alpha_2\}, \{\alpha_3\}),$$

что и требовалось.

Ясно, что две ПНЧ тем ближе друг к другу в бэровском пространстве, чем больше начальный отрезок значений аргумента, на котором они совпадают. В частности, эквивалентность двух ПНЧ как элементов бэровского пространства означает их совпадение при всех значениях аргумента.

2. Введем теперь некоторые понятия, связанные с предельным переходом и сепарабельностью КМП. Через $\boldsymbol{M}$ мы по-прежнему будем обозначать КМП

$$\boldsymbol{M} = \{\mathcal{M}, \rho\}. \tag{3}$$

Определение 6. *Пусть β — последовательность точек $\boldsymbol{M}$ (т. е. алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в элемент $\boldsymbol{M}$), X — точка $\boldsymbol{M}$.*

1) *Назовем последовательность β фундаментальной, если можно построить ПНЧ α (регулятор фундаментальности β) такую, что при любом n и $m, l \geqslant \alpha(n)$*

$$\rho(\beta(m), \beta(l)) < 2^{-n}.$$

2) *Назовем β регулярной, если при любых $m \geqslant n$*

$$\rho(\beta(m), \beta(n)) < 2^{-n}.$$

3) *Скажем, что β сходится к X (или что X является пределом β), если можно построить ПНЧ δ (регулятор сходимости β к X) так, что при любом n и $m \geqslant \delta(n)$*

$$\rho(X, \beta(m)) \leqslant 2^{-n}.$$

4) *Скажем, что β регулярно сходится к X, если при любом n*

$$\rho(X, \beta(n)) \leqslant 2^{-n}$$

(т. е. тождественный алгорифм является регулятором сходимости β *к* X).

5) *Последовательность* β *назовем сходящейся, если она сходится к некоторой точке* $X \in \boldsymbol{M}$.

Ясно, что из регулярной сходимости β к X следует сходимость β к X и что если β — регулярная последовательность, сходящаяся к X, то β регулярно сходится к X.

Нетрудно доказать, что свойство быть пределом данной последовательности инвариантно относительно эквивалентности в $\boldsymbol{M}$ и что предел определяется единственным (с точностью до эквивалентности в $\boldsymbol{M}$) образом; другими словами, выполняется

Теорема 2. *Пусть* β — *последовательность точек* $\boldsymbol{M}$, $X \in \boldsymbol{M}$, $Y \in \boldsymbol{M}$.

1) *Если* β *сходится к* X *и* $X \underset{\boldsymbol{M}}{=} Y$, *то* β *сходится к* Y.

2) *Если* β *сходится к* X *и* β *сходится к* Y, *то* $X \underset{\boldsymbol{M}}{=} Y$.

Мы, как правило, вместо произвольных фундаментальных и сходящихся последовательностей будем рассматривать регулярные и регулярно сходящиеся последовательности. Ограничение такими последовательностями соответствует фиксации тождественного регулятора фундаментальности и сходимости и позволяет несколько упростить изложение. Вместе с тем оно не является очень существенным, так как, с одной стороны, нас не будут интересовать регуляторы фундаментальности (или сходимости) каких-либо конкретных последовательностей, а с другой, по любой фундаментальной последовательности, располагая ее регулятором фундаментальности, можно построить ее регулярную подпоследовательность, причем если исходная последовательность сходится к некоторой точке, то построенная подпоследовательность регулярно сходится к той же точке. Последнее обстоятельство позволяет переходить от алгорифмов, определенным образом работающих на записях регулярных последовательностей, к аналогичным алгорифмам, использующим в качестве исходных данных пары: фундаментальные последовательности вместе с их регуляторами фундаментальности. После сказанного читателя не удивит принимаемое нами несколько узкое на первый взгляд определение алгорифма предельного перехода.

Определение 7. 1) *Алгорифм α назовем алгорифмом слабого предельного перехода в* $\mathbf{M}$, *если он перерабатывает запись любой регулярной сходящейся последовательности точек* $\mathbf{M}$ *в точку* $\mathbf{M}$, *к которой сходится эта последовательность.*

2) *Алгорифм α назовем алгорифмом предельного перехода в КМП* $\mathbf{M}$, *если он перерабатывает запись всякой регулярной последовательности точек* $\mathbf{M}$ *в точку* $\mathbf{M}$, *к которой сходится эта последовательность.*

Вводимые ниже слабо полные КМП впервые рассматривались Московакисом [1] (здесь и в дальнейшем мы отвлекаемся от несущественных технических различий между КМП и изучаемыми Московакисом рекурсивными метрическими пространствами). Оревков [5] называет слабо полные КМП L-правильными.

Определение 8. 1) *КМП назовем слабо полным, если для него можно построить алгорифм слабого предельного перехода.*

2) *КМП назовем полным, если для него можно построить алгорифм предельного перехода.*

Таким образом, в полном КМП все регулярные (а следовательно, и все фундаментальные) последовательности сходятся, что, вообще говоря, не имеет места в случае слабо полных КМП.

Вполне очевидны следующие две теоремы.

Теорема 3. *Всякое полное КМП слабо полно.*

Теорема 4. *Всякое правильное подпространство слабо полного КМП слабо полно.*

Определение 9. 1) *Слово вида* $X*n$ ($X**n$), *где* X — *точка КМП* (3), n — *натуральное число, будем называть шаром (замкнутым шаром) пространства* $\mathbf{M}$.

2) *Точку* X *назовем центром шара* $X*n$ ($X**n$), *а число* 2^{-n} — *его радиусом;*

3) *Про точку* Y *пространства* $\mathbf{M}$ *будем говорить, что она принадлежит шару* $X*n$ ($X**n$), *если* $\rho(X, Y) < 2^{-n}$ (*соответственно* $\rho(X, Y) \leqslant 2^{-n}$).

4) *Будем говорить, что шар (замкнутый или нет)* S *вложен в (замкнутый или нет) шар* S_1, *если всякая точка* $Y \in \mathbf{M}$, *принадлежащая* S, *принадлежит и* S_1.

Для обозначения принадлежности точки Y шару S и включения шара S в S_1 мы будем использовать запись $Y \in S$ и $S \subseteq S_1$.

Из теоремы 1 очевидным образом следует, что множество точек, принадлежащих данному шару (замкнутому шару), является правильным.

Определение 10. 1) *Пусть* $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ — *два множества точек КМП* (3). *Будем говорить, что* $\mathscr{M}_1$ *плотно в* $\mathscr{M}_2$, *если осуществим алгорифм* α *такой, что для любого шара* S *с центром в* $\mathscr{M}_2$ $!\alpha(S)$, $\alpha(S) \in \mathscr{M}_1$ *и* $\alpha(S) \in S$.

2) *Будем говорить, что множество* $\mathscr{M}_1$ *плотно в КМП* $\mathbf{M}$, *если* $\mathscr{M}_1$ *плотно в носителе* $\mathbf{M}$.

3) *Подпространство* $\mathbf{M}_1$ *КМП* $\mathbf{M}$ *будем называть плотным в* $\mathbf{M}$, *если носитель* $\mathbf{M}_1$ *плотен в* $\mathbf{M}$.

Нам будет особенно интересен случай, когда данное множество имеет перечислимое плотное подмножество.

Определение 11. 1) *Множество* $\mathscr{M}_1$ *точек КМП* $\mathbf{M}$ *назовем сепарабельным в этом КМП, если можно указать перечислимое множество* $\mathscr{M}_2 \subseteq \mathscr{M}_1$, *плотное в* $\mathscr{M}_1$.

2) *КМП* $\mathbf{M}$ *назовем сепарабельным, если осуществимо перечислимое множество элементов* $\mathbf{M}$, *плотное в* $\mathbf{M}$.

Более подробно определение 11 можно высказать так:

Определение 11′. 1) *Множество* $\mathscr{M}_1$ *назовем сепарабельным в* $\mathbf{M}$, *если можно построить алгорифмы* α *и* β *так, что* α *перечисляет некоторое подмножество* $\mathscr{M}_1$, β *перерабатывает всякий шар* S *с центром в* $\mathscr{M}_1$ *в натуральное число так, что* $!\alpha(\beta(S))$ *и* $\alpha(\beta(S)) \in S$.

2) *КМП* $\mathbf{M}$ *назовем сепарабельным, если можно построить алгорифмы* α *и* β *так, что* α *перечисляет некоторое подмножество носителя* $\mathbf{M}$, *а* β *перерабатывает всякий шар* S *в натуральное число так, что* $!\alpha(\beta(S))$ *и* $\alpha(\beta(S)) \in S$.

Отметим, что если множество $\mathscr{M}_1$ содержит хотя бы один элемент, то алгорифм α в условии 1) определения 11′ можно, не теряя общности, считать арифметически полным (т. е. применимым к любому натуральному числу).

Аналогичное замечание можно сделать и по поводу условия 2) определения 11′.

Определение 12. *Будем говорить, что КМП* $\mathbf{M}_1 = \{\mathscr{M}_1, \rho_1\}$ *изометрично КМП* $\mathbf{M}_2 = \{\mathscr{M}_2, \rho_2\}$, *если можно построить алгорифмы* α_1, β_1 *соответственно типов* $(\mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_2)$ *и* $(\mathscr{M}_2 \to \mathscr{M}_1)$ *так, что при любых* $X_1, X_2 \in \mathbf{M}_1$ *и* $Y \in \mathbf{M}_2$ *выполняется*

а) $\rho_1(X_1, X_2) = \rho_2(\alpha_1(X_1), \alpha_1(X_2))$;
б) $\alpha_1(\beta_1(Y)) \underset{M_2}{=} Y$.

Очевидно, отношение изометричности КМП рефлексивно (каждое пространство изометрично самому себе). Нетрудно также показать, что это отношение симметрично и транзитивно. В самом деле, пусть M_1 изометрично M_2. Тогда для любых Y_1, $Y_2 \in M_2$ и $X \in M_1$

$$\rho_1(\beta_1(Y_1), \beta_1(Y_2)) = \rho_2(\alpha_1(\beta_1(Y_1)), \alpha_1(\beta_1(Y_2))) = \rho_2(Y_1, Y_2)$$

и

$$\rho_1(\beta_1(\alpha_1(X)), X) = \rho_2(\alpha_1(\beta_1(\alpha_1(X))), \alpha_1(X)) = \\ = \rho_2(\alpha_1(X), \alpha_1(X)) = 0,$$

т. е. $\beta_1(\alpha_1(X)) \underset{M_1}{=} X$. Полученные равенства доказывают, что M_2 изометрично M_1. Пусть M_1 изометрично M_2, M_2 изометрично M_3, причем изометрия от M_1 к M_2 осуществляется алгорифмами α_1, β_1, а от M_2 к M_3 — алгорифмами α_2, β_2. Построим алгорифмы α_3, β_3 так, что при любом слове P

$$\alpha_3(P) \simeq \alpha_2(\alpha_1(P)),$$

$$\beta_3(P) \simeq \beta_1(\beta_2(P)).$$

Тогда при любых X_1, $X_2 \in M_1$ и $Z \in M_3$ имеем

$$\rho_1(X_1, X_2) = \rho_2(\alpha_1(X_1), \alpha_1(X_2)) = \rho_3(\alpha_2(\alpha_1(X_1)), \alpha_2(\alpha_1(X_2))) = \\ = \rho_3(\alpha_3(X_1), \alpha_3(X_2)),$$

$$\rho_2(\alpha_1(\beta_1(\beta_2(Z))), \beta_2(Z)) = 0.$$

Следовательно,

$$\rho_3(\alpha_2(\alpha_1(\beta_1(\beta_2(Z)))), \alpha_2(\beta_2(Z))) = 0,$$

т. е.

$$\rho_3(\alpha_3(\beta_3(Z)), \alpha_2(\beta_2(Z))) = 0;$$

отсюда ввиду того, что

$$\alpha_2(\beta_2(Z)) \underset{M_3}{=} Z,$$

получаем

$$\rho_3(\alpha_3(\beta_3(Z)), Z) = 0.$$

Таким образом, $\alpha_3(\beta_3(Z)) \underset{M_3}{=} Z$, чем и заканчивается доказательство изометричности $\boldsymbol{M}_1$ пространству $\boldsymbol{M}_3$.

Определение 13. *КМП $\boldsymbol{M}_1$ назовем пополнением КМП $\boldsymbol{M}$, если $\boldsymbol{M}_1$ полно и можно указать подпространство $\boldsymbol{M}_2 \subseteq \boldsymbol{M}_1$, изометричное $\boldsymbol{M}$ и плотное в $\boldsymbol{M}_1$.*

Одним из важных фактов теории метрических пространств является возможность построить для каждого пространства его пополнение. В следующем пункте будет приведен (доказательство теоремы 5) некоторый стандартный способ построения пополнения, по существу аналогичный способу введения конструктивных действительных чисел, использованному нами в гл. 2 (этот способ в свою очередь имел источником канторовский метод введения действительных чисел).

3. Теорема 5. *Для каждого КМП можно построить его пополнение.*

Нам потребуется одна простая

Лемма 1. *Пусть $\boldsymbol{M} = \{\mathscr{M}, \rho\}$ — КМП, α_1, α_2 — регулярные последовательности точек $\boldsymbol{M}$ и последовательность КДЧ (ПДЧ) β такова, что*

$$\beta(n) = \rho(\alpha_1(n+1), \alpha_2(n+1)).$$

Тогда ПДЧ β фундаментальна, причем алгорифм Id *такой, что* $\mathrm{Id}(n) \simeq n$, *является регулятором фундаментальности β.*

Доказательство. Фиксируем произвольное n. Пусть l_1, $l_2 \geqslant n$. Обозначим для краткости $\alpha_1(l_1+1)$, $\alpha_1(l_2+1)$ через p_1, p_2 и $\alpha_2(l_1+1)$, $\alpha_2(l_2+1)$ через q_1, q_2. По аксиоме треугольника

$$\begin{aligned}
\beta(l_1) - \beta(l_2) &= \rho(p_1, q_1) - \rho(p_2, q_2) \leqslant \\
&\leqslant \rho(p_1, p_2) + \rho(q_1, p_2) - \rho(p_2, q_2) \leqslant \\
&\leqslant \rho(p_1, p_2) + \rho(q_2, p_2) + \rho(q_1, q_2) - \rho(p_2, q_2) = \\
&= \rho(p_1, p_2) + \rho(q_1, q_2) < 2^{-n-1} + 2^{-n-1} = 2^{-n}.
\end{aligned}$$

Итак, при l_1, $l_2 \geqslant n$

$$\beta(l_1) - \beta(l_2) < 2^{-n}.$$

Аналогично,

$$\beta(l_2) - \beta(l_1) < 2^{-n}.$$

Поэтому

$$|\beta(l_1)-\beta(l_2)|<2^{-n},$$

что и требовалось.

Перейдем к доказательству теоремы 5.

Пусть $M=\{\mathscr{M},\rho\}$ — КМП. Обозначим через $\mathscr{M}_1$ множество слов в алфавите A, являющихся записями регулярных последовательностей точек M. Это множество и будет носителем строящегося пространства.

Примем следующее обозначение: если P — запись алгорифма, то $\langle P\rangle$ обозначает этот алгорифм. Построим алгорифм $\mathfrak{A}$ так, что для любых двух элементов P_1, P_2 множества $\mathscr{M}_1$

$$\mathfrak{A}(P_1, P_2, n)\simeq\rho(\langle P_1\rangle(n+1), \langle P_2\rangle(n+1))$$

(при построении такого алгорифма удобно использовать универсальный алгорифм).

Очевидно, при P_1, $P_2\in\mathscr{M}_1$ алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}_{P_1, P_2}$ *) является последовательностью КДЧ, причем в силу леммы 1 алгорифм Id является регулятором фундаментальности этой последовательности. Пусть lim — алгорифм, построенный согласно теореме о полноте КДЧ (§ 2 гл. 3). Построим алгорифм ρ_1 так, что для любых P_1, $P_2\in\mathscr{M}_1$

$$\rho_1(P_1, P_2)\simeq\lim(\mathfrak{z}\widehat{\mathfrak{A}}_{P_1, P_2}\mathfrak{Z}, \mathfrak{z}\,\mathrm{Id}\,\mathfrak{Z}).$$

Алгорифм ρ_1 является, очевидно, алгорифмом типа $(\mathscr{M}_1^2\to\mathscr{D})$. Покажем, что он удовлетворяет аксиомам метрического пространства (условия 1)—2) определения 1). Очевидно,

$$\rho(P_1, P_1)=0.$$

Далее при любом n и P_1, P_2, $P_3\in\mathscr{M}_1$

$$\rho(\langle P_1\rangle(n), \langle P_2\rangle(n))\leqslant\rho(\langle P_1\rangle(n), \langle P_3\rangle(n))+\rho(\langle P_2\rangle(n), \langle P_3\rangle(n)).$$

Переходя здесь к пределу по n, получаем

$$\rho_1(P_1, P_2)\leqslant\rho_1(P_1, P_3)+\rho_1(P_2, P_3),$$

т. е. аксиому треугольника. Итак, $M_1=\{\mathscr{M}_1,\rho_1\}$ — конструктивное метрическое пространство. Покажем, что M_1

---

*) Точнее говоря, перевод этого алгорифма в алфавит $Ч^a$.

является пополнением M. Построим алгорифм F так, чтобы для любого слова P и любого n выполнялось

$$F(P, n) \doteqdot P.$$

Очевидно, если $X \in \mathscr{M}$, то $\hat{F}_X$ — регулярная последовательность точек M. Обозначим через $\mathscr{M}_2$ множество слов вида $\xi \hat{F}_X \zeta$, где $X \in \mathscr{M}$. Очевидно, $\mathscr{M}_2 \subseteq \mathscr{M}_1$, и поэтому $M_2 = \{\mathscr{M}_2, \rho_1\}$ — подпространство M_1. Обозначим на время доказательства $\hat{F}_X$ (где $X \in \mathscr{M}$) через $\{X\}$. Изометричность пространств M и M_2 очевидным образом следует из равенства

$$\rho_1(\xi\{X_1\}\zeta, \ \xi\{X_2\}\zeta) = \rho(X_1, X_2), \tag{4}$$

которое выполняется при всех $X_1, X_2 \in \dot{M}$. Далее, для любой регулярной последовательности α точек M при любом n и $m \geqslant n+1$

$$\rho(\alpha(n+1), \alpha(m)) < 2^{-n-1}.$$

Следовательно, при $m \geqslant n+1$

$$\rho(\{\alpha(n+1)\}(m), \alpha(m)) < 2^{-n-1}.$$

Переходя здесь к пределу по m, получим, что

$$\rho_1(\xi\{\alpha(n+1)\}\zeta, \xi\alpha\zeta) \leqslant 2^{-n-1} < 2^{-n}, \tag{5}$$

откуда следует, что M_2 плотно в M_1.

Осталось доказать полноту пространства M_1. Это доказательство вполне аналогично доказательству теоремы о полноте КДЧ (§ 2 гл. 3).

Построим алгорифм $\mathfrak{B}$ так, чтобы для любой регулярной последовательности θ точек M_1 выполнялось

$$\mathfrak{B}(\xi\theta\zeta, n) \simeq \langle\theta(n+1)\rangle(n+2) \tag{6}$$

(θ перерабатывает всякое n в запись регулярной последовательности точек M).

Алгорифм $\underset{M_1}{\mathrm{Lim}}$ строим так, чтобы

$$\underset{M_1}{\mathrm{Lim}}(\xi\theta\zeta) \simeq \xi\hat{\mathfrak{B}}_{\xi\theta\zeta}\zeta. \tag{7}$$

Покажем, что $\underset{M_1}{\mathrm{Lim}}$ является алгорифмом предельного перехода в пространстве M_1. Фиксируем произвольную регулярную последовательность θ точек M_1 и для краткости обозначим

$$\begin{array}{lll} & \langle\theta(n)\rangle(m) & \text{через} \quad X_{n,m}, \\ (8) & & \\ & \xi\{\langle\theta(n)\rangle(m)\}\zeta & \text{через} \quad Q_{n,m}. \end{array}$$

В обозначениях (8) формула (6) примет вид

$$(9) \qquad \mathfrak{B}(\xi\theta\zeta, n) \simeq X_{n+1,n+2}.$$

Выполним некоторую оценку. Пусть m, n, l_1, l_2 — произвольные числа, причем $m \geqslant n$. Согласно (5)

$$\rho_1(Q_{n,l_1}, \theta(n)) \leqslant 2^{-l_1},$$
$$\rho_1(Q_{m,l_2}, \theta(m)) \leqslant 2^{-l_2}.$$

Следовательно,

$$\rho_1(Q_{n,l_1}, Q_{m,l_2}) \leqslant \rho_1(Q_{n,l_1}, \theta(n)) + \rho_1(Q_{m,l_2}, \theta(n)) \leqslant$$
$$\leqslant \rho_1(Q_{n,l_1}, \theta(n)) + \rho_1(Q_{m,l_2}, \theta(m)) + \rho_1(\theta(n), \theta(m)) <$$
$$< 2^{-l_1} + 2^{-l_2} + 2^{-n}.$$

Отсюда, ввиду (4), получаем при $m \geqslant n$

$$(10) \qquad \rho(X_{n,l_1}, X_{m,l_2}) < 2^{-l_1} + 2^{-l_2} + 2^{-n}.$$

Следовательно, при $m \geqslant n$

$$\rho(X_{n+1,n+2}, X_{m+1,m+2}) < 2^{-n-2} + 2^{-n-2} + 2^{-n-1} = 2^{-n}.$$

Поэтому ((9)) $\hat{\mathfrak{B}}_{\xi\theta\zeta}$ — регулярная последовательность точек M и $\operatorname{Lim}_{M_1}(\xi\theta\zeta) \in M_1$. Обозначим $\operatorname{Lim}_{M_1}(\xi\theta\zeta)$ через P и покажем, что θ сходится (в M_1) к P.

Фиксируем произвольное n. Согласно (8) и (10) при любом $l \geqslant n$

$$\rho(\langle\theta(n)\rangle(l+1), \langle P\rangle(l+1)) = \rho(X_{n,l+1}, X_{l+2,l+3}) <$$
$$< 2^{-l-1} + 2^{-l-3} + 2^{-n}.$$

Переходя здесь к пределу по l, получим

$$\rho_1(\theta(n), P) \leqslant 2^{-n},$$

что и требовалось.

В связи с упомянутой перед формулировкой теоремы аналогией с КДЧ заметим, что пополнение $\boldsymbol{M}$ можно было бы определить и с помощью носителя, элементами которого являются слова вида $\{\alpha\}*\{\beta\}$, где α — последовательность точек $\boldsymbol{M}$, а β — ее регулятор фундаментальности.

4. Вернемся к примерам КМП а)—е), рассмотренным в п. 1. Все эти пространства полны и сепарабельны. В самом деле, для пространства $\boldsymbol{H}$ высказанное утверждение очевидно, для $\boldsymbol{E}_1$ оно следует из теоремы о полноте системы КДЧ и из плотности на конструктивной прямой множества рациональных чисел. Из полноты и сепарабельности $\boldsymbol{E}_1$ без труда выводятся одноименные свойства пространств $\boldsymbol{E}_n$, $\boldsymbol{E}_n^1$, $\boldsymbol{E}_n^2$. Наконец, при доказательстве полноты и сепарабельности пространства $\boldsymbol{C}$ следует воспользоваться теоремой о равномерной непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности равномерно непрерывных функций и аппроксимируемостью равномерно непрерывных функций полигональными функциями с рациональными определяющими дроблениями и рациональными значениями в точках этих дроблений. (Исходными данными при построении таких аппроксимаций служат равномерные шифры.)

Остановимся несколько подробнее на доказательстве полноты и сепарабельности бэровского пространства $\boldsymbol{B}$. Пусть $T \rightleftharpoons n_0 * \ldots * n_k$ — кортеж натуральных чисел. Будем говорить, что ПНЧ α представляет этот кортеж, если $\alpha(i) \rightleftharpoons n_i$ при $i \leqslant k$ и $\alpha(i) \rightleftharpoons n_k$ при $i \geqslant k$. Нетрудно построить алгорифм $\mathfrak{A}$ так, что для любого кортежа T алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}_T$ есть ПНЧ, представляющая T. Пусть теперь арифметически полный алгорифм β перечисляет множество всех кортежей натуральных чисел. Построим алгорифм $\mathfrak{B}$ так, что

$$\mathfrak{B}(n) \rightleftharpoons \{\widehat{\mathfrak{A}}_{\beta(n)}\},$$

и покажем, что $\mathfrak{B}$ перечисляет плотное подмножество $\boldsymbol{B}$. В самом деле, при любом n $\beta(n)$ — кортеж натуральных чисел, $\widehat{\mathfrak{A}}_{\beta(n)}$ — представляющая его ПНЧ. Следовательно, $\mathfrak{B}(n) \in \boldsymbol{B}$. Пусть α — произвольная ПНЧ. Фиксируем произвольное l и найдем m так, что

$$\beta(m) \rightleftharpoons \alpha(0) * \ldots * \alpha(l).$$

Тогда при $i \leqslant l$

$$\widehat{\mathfrak{A}}_{\beta(m)}(i) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \alpha(i)$$

и, следовательно,

$$\rho(\mathfrak{B}(m), \{\alpha\}) < 2^{-l}\,{}^{*)}.$$

Таким образом, КМП $\boldsymbol{B}$ сепарабельно.

Построим алгорифм $\operatorname*{Lim}\limits_{\boldsymbol{B}}{}^{1}$ так, чтобы для любой последовательности γ точек $\boldsymbol{B}$ и любого n

$$\operatorname*{Lim}_{\boldsymbol{B}}{}^{1}(\{\gamma\}, n) \simeq \langle\gamma(n)\rangle(n).$$

(Напомним, что если P — запись алгорифма, то $\langle P\rangle$ означает этот алгорифм.)

Построим алгорифм $\operatorname*{Lim}\limits_{\boldsymbol{B}}$ так, чтобы

$$\operatorname*{Lim}_{\boldsymbol{B}}(\{\gamma\}) \simeq \{\widehat{\operatorname*{Lim}_{\boldsymbol{B}}}{}^{1}_{\{\gamma\}}\},$$

и покажем, что этот алгорифм является алгорифмом предельного перехода в $\boldsymbol{B}$.

Пусть γ — регулярная последовательность точек $\boldsymbol{B}$. Тогда при любом n $\gamma(n)$ есть запись ПНЧ, причем при $m \geqslant n$

$$\rho(\gamma(n), \gamma(m)) < 2^{-n}.$$

Отсюда следует, что при $m \geqslant n$ и $i \leqslant n$

$$\langle\gamma(n)\rangle(i) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \langle\gamma(m)\rangle(i).$$

Следовательно, при $i \leqslant n$

$$\langle\gamma(i)\rangle(i) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \langle\gamma(n)\rangle(i).$$

Поэтому при $i \leqslant n$

$$\operatorname*{Lim}_{\boldsymbol{B}}{}^{1}(\{\gamma\}, i) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \langle\gamma(n)\rangle(i)$$

и

$$\rho(\operatorname*{Lim}_{\boldsymbol{B}}(\{\gamma\}), \gamma(n)) < 2^{-n},$$

что и требуется.

---

*) Здесь ρ — метрический алгорифм бэровского пространства.

Чтобы получить пример несепарабельного пространства, достаточно рассмотреть подпространство $\boldsymbol{H}$, носителем которого является неперечислимое множество. (Получающееся таким образом пространство, очевидно, полно.) В работе Слисенко [4] построено КМП, которое не может быть подпространством никакого сепарабельного пространства. Выбрасывая из конструктивной прямой все КДЧ, равные 0, получаем пример слабо полного, но не полного КМП. Наконец, подпространство конструктивной прямой, носителем которого является множество всех рациональных чисел, дает пример КМП, не являющегося слабо полным *).

5. В этом пункте, как и раньше, через $\boldsymbol{M}$ обозначается некоторое КМП с носителем $\mathscr{M}$ и метрическим алгорифмом ρ.

Определение 14. *Алгорифм β назовем регулярной вложенной последовательностью замкнутых шаров (пространства $\boldsymbol{M}$), если β перерабатывает всякое натуральное число в замкнутый шар пространства $\boldsymbol{M}$, причем при любом n радиус шара $\beta(n)$ меньше, чем 2^{-n}, и $\beta(n+1) \subseteq \beta(n)$.*

Характеристическим свойством полных метрических пространств является следующее утверждение, которое можно рассматривать как обобщение теоремы о вложенных сегментах § 2 гл. 3.

Теорема 6 (принцип вложенных шаров). *Пусть $\boldsymbol{M}$ — полное КМП. Тогда можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$ так, что, какова бы ни была регулярная вложенная последовательность замкнутых шаров (КМП $\boldsymbol{M}$) β, имеет место*:

1) $!\mathfrak{A}(\{\beta\})$;
2) $\mathfrak{A}(\{\beta\}) \in \boldsymbol{M}$;
3) *при любом n* $\mathfrak{A}(\{\beta\}) \in \beta(n)$.

Доказательство. Пусть алгорифм Lim является алгорифмом предельного перехода КМП $\boldsymbol{M}$. Нетрудно построить алгорифм γ, перерабатывающий всякий замкнутый шар в его центр. Используя теорему об универсальном алгорифме, построим алгорифм $\mathfrak{A}^1$ так, что

*) Множество рациональных чисел не следует путать с множеством КДЧ, равных рациональным числам. (Определение рациональных чисел приведено в § 2 гл. 2.)

для любого алгорифма β и натурального n

$$\mathfrak{A}^1(\{\beta\}, n) \simeq \gamma(\beta(n+1)). \tag{11}$$

Для любой регулярной вложенной последовательности замкнутых шаров β алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}^1_{\{\beta\}}$ является регулярной последовательностью точек M. Действительно, при любом m

$$\gamma(\beta(m)) \in \beta(m).$$

Поэтому при $m \geqslant n+1$

$$\gamma(\beta(m)) \in \beta(n+1)$$

и, следовательно,

$$\rho(\gamma(\beta(n+1)), \gamma(\beta(m))) \leqslant 2^{-n-1} < 2^{-n},$$

что ((11)) и требуется.

Построим теперь алгорифм $\mathfrak{A}$ так, что

$$\mathfrak{A}(\{\beta\}) \simeq \operatorname{Lim}(\{\widehat{\mathfrak{A}}^1_{\{\beta\}}\}),$$

и покажем, что $\mathfrak{A}$ обладает нужными свойствами.

Фиксируем произвольную регулярную вложенную последовательность замкнутых шаров β и произвольное n. Обозначим для краткости центр и радиус шара $\beta(k)$ соответственно через X_k и t_k. В этих обозначениях (11) примет вид

$$\mathfrak{A}^1(\{\beta\}, k) \doteq X_{k+1}. \tag{12}$$

Поскольку $\widehat{\mathfrak{A}}^1_{\{\beta\}}$ — регулярная последовательность, то $!\mathfrak{A}(\{\beta\})$ и $\mathfrak{A}(\{\beta\}) \in M$. Далее ((12)) при любом m

$$\rho(\mathfrak{A}(\{\beta\}), X_{m+1}) \leqslant 2^{-m} \tag{13}$$

и при $m \geqslant n$, поскольку $X_{m+1} \in \beta(n)$,

$$\rho(X_{m+1}, X_n) \leqslant t_n. \tag{14}$$

Следовательно ((13)—(14)), при $m \geqslant n$

$$\rho(\mathfrak{A}(\{\beta\}), X_n) \leqslant t_n + 2^{-m}. \tag{15}$$

Из (15) получаем

$$\rho(\mathfrak{A}(\{\beta\}), X_n) \leqslant t_n.$$

Последнее означает, что

$$\mathfrak{A}(\{\beta\}) \in \beta(n).$$

Теорема доказана.

Нетрудно показать, что, располагая алгорифмом $\mathfrak{A}$, фигурирующим в теореме 6, можно построить алгорифм предельного перехода в $\boldsymbol{M}$ и тем самым доказать полноту этого пространства. Ясно также, что в теореме 6 могли бы вместо регулярных фигурировать любые вложенные последовательности замкнутых шаров, для которых соответствующие последовательности радиусов (конструктивно) сходятся к 0. При этом в качестве исходных данных алгорифма $\mathfrak{A}$ выступали бы слова вида $\{\beta\},\{\alpha\}$, где β — вложенная последовательность замкнутых шаров, а α — регулятор сходимости к 0 последовательности радиусов шаров $\beta(n)$.

Так же, как и обычно, можно показать существенность условия сходимости к нулю радиусов шаров: в некоторых полных КМП существуют вложенные последовательности замкнутых шаров с пустым пересечением. (Соответствующий пример можно найти в книге Гелбаума и Олмстеда [1; стр. 201].)

Теорема 6 дополняется следующей теоремой единственности.

Теорема 7. *Пусть β — регулярная вложенная последовательность шаров КМП $\boldsymbol{M}$ и X_1, X_2 — точки $\boldsymbol{M}$, принадлежащие всем шарам $\beta(n)$. Тогда $X_1 \underset{M}{=} X_2$.*

Доказательство. Фиксируем произвольное n и обозначим через Y_{n+1} центр шара $\beta(n+1)$. Тогда

$$\rho(Y_{n+1}, X_1) \leqslant 2^{-n-1}$$

и

$$\rho(Y_{n+1}, X_2) \leqslant 2^{-n-1}.$$

Поэтому

$$\rho(X_1, X_2) \leqslant 2^{-n}.$$

Так как $\rho(X_1, X_2) \geqslant 0$, то отсюда следует $\rho(X_1, X_2) = 0$, что и означает $X_1 \underset{M}{=} X_2$.

Принцип вложенных шаров позволяет обобщить результаты § 4 гл. 3 о неперечислимости конструктивного континуума.

Определение 15. *Множество* $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{M}$ *называется эффективно нигде не плотным в КМП* $\mathbf{M}$, *если можно построить алгорифм* ω, *перерабатывающий всякий шар* S *в шар так, что* $\omega(S) \subseteq S$, *и для любого* $X \in \mathbf{M}$, *если* $X \in \omega(S)$, *то* $x \notin \mathcal{K}$ (*т. е.* $\omega(S)$ *включен в дополнение* $\mathcal{K}$).

Введенное только что отношение между $\mathcal{K}$ и ω мы будем выражать записью Нпл$(\mathcal{K}, \omega)$.

Прежде чем определить понятие множества первой категории, сделаем некоторые пояснения. Под *последовательностью множеств* в алфавите A мы понимаем двухпараметрическую формулу $\mathcal{K}(i, P)$, где i — переменная для натуральных чисел, а P — переменная для слов в алфавите A. Придавая i какое-нибудь значение n, мы получаем однопараметрическую формулу, т. е. множество слов в алфавите A *). Это множество мы называем n-м членом последовательности и обозначаем посредством $\mathcal{K}_n$. Саму последовательность $\mathcal{K}(i, P)$ мы будем иногда обозначать посредством $\{\mathcal{K}_n\}$.

Множество $\mathcal{L}$ назовем *объединением* последовательности множеств $\{\mathcal{K}_n\}$, если для любого слова P

$$P \in \mathcal{L} \equiv \neg\neg \exists n (P \in \mathcal{K}_n).$$

Определение 16. *Множество* $\mathcal{L} \subseteq \mathbf{M}$ *назовем множеством первой категории* (*в* $\mathbf{M}$), *если оно получается объединением последовательности эффективно нигде не плотных множеств, т. е. если осуществима последовательность множеств* $\{\mathcal{K}_n\}$ (*где все* $\mathcal{K}_n$ *включены в* $\mathbf{M}$) *и алгорифм* γ *такие, что* $\mathcal{L}$ *является объединением* $\{\mathcal{K}_n\}$ *и при любом* n *выполняется* Нпл$(\mathcal{K}_n, \hat{\gamma}_n)$.

Описанное в определении 16 отношение между $\mathcal{L}$, $\{\mathcal{K}_n\}$ и γ мы будем выражать записью Кат$(\mathcal{L}, \{\mathcal{K}_n\}, \gamma)$.

Во многих случаях вместе с данным множеством оказывается удобным рассматривать множество, получающееся из него присоединением всех точек, эквивалентных

---

*) Уточнение сказанного требует описания логико-математического языка, в котором строятся соответствующие формулы (ср. примечание на стр. 356).

в $\mathbf{M}$ точкам данного множества. Примем в связи с этим следующее

Определение 17. *Пусть $\mathscr{M}_1$ — множество точек $\mathbf{M}$. Обозначим через $\breve{\mathscr{M}}_1$ множество точек $\mathbf{M}$, задаваемое условием*

$$X \in \breve{\mathscr{M}}_1 \equiv \exists Y\,((Y \in \mathscr{M}_1)\,\&\,(Y \underset{\mathbf{M}}{=} X));$$

$\breve{\mathscr{M}}_1$ будем называть точечным образом $\mathscr{M}_1$.

Очевидно, точечный образ любого множества $\mathscr{M}_1$ есть правильное множество, причем $\mathscr{M}_1 \subseteq \breve{\mathscr{M}}_1$. Точечный образ правильного множества совпадает с ним самим. Ясно, что если точка $X \in \mathbf{M}$ не принадлежит $\breve{\mathscr{M}}_1$, то она отлична в смысле метрики $\mathbf{M}$ от всех точек $\mathscr{M}_1$, т. е. $\rho(X, Y) \neq 0$ при любом $Y \in \mathscr{M}_1$.

Следующая теорема аналогична по формулировке и доказательству известной теореме Бэра (см., например, Колмогоров, Фомин [1; стр. 69]).

Теорема 8. *Пусть $\mathbf{M}$ — полное КМП, S_1 — шар в $\mathbf{M}$. Для всякого множества первой категории $\mathscr{L}$ можно найти точку X из S_1, не принадлежащую $\breve{\mathscr{L}}$ (и тем более не принадлежащую $\mathscr{L}$).*

Наметим доказательство этой теоремы. Пусть $\mathscr{L}$ — множество первой категории, являющееся объединением последовательности эффективно нигде не плотных множеств $\{\mathscr{K}_n\}$, и γ — такой алгорифм, что выполняется $\text{Кат}(\mathscr{L}, \{\mathscr{K}_n\}, \gamma)$.

Исходя из γ, нетрудно построить алгорифм γ_1, перерабатывающий всякое слово вида n, S, где S — шар, в замкнутый шар радиуса, меньшего чем 2^{-n}, вложенный в S и не пересекающийся с $\breve{\mathscr{K}}_n$.

Построим теперь алгорифм β так, что

$$\beta(0) \simeq \gamma_1(0, S_1),$$

$$\beta(n+1) \simeq \gamma_1(n+1, \beta(n)).$$

Очевидно, β — регулярная вложенная последовательность замкнутых шаров, причем каждый замкнутый шар $\beta(n)$ не имеет общих точек с $\breve{\mathscr{K}}_n$. По теореме о вложенных шарах найдем точку X, принадлежащую всем шарам $\beta(n)$. Тогда при любом n $X \notin \breve{\mathscr{K}}_n$ и потому $X \notin \breve{\mathscr{L}}$. Так как, кроме того, $X \in \beta(0)$ и $\beta(0) \subseteq S_1$, то $X \in S_1$.

Из приведенного рассуждения нетрудно усмотреть, что осуществим алгорифм $\mathfrak{A}$ со следующим свойством: если алгорифм γ перерабатывает всякое слово n, S (где S — шар) в шар, причем $\gamma(n, S) \subseteq S$, то для любого шара S_1 $!\mathfrak{A}(\xi\gamma\mathfrak{Z}, S_1)$, $\mathfrak{A}(\xi\gamma\mathfrak{Z}, S_1) \in S_1$, и если для некоторого множества $\mathscr{L}$ и последовательности множества $\{\mathscr{K}_n\}$ выполняется Кат$(\mathscr{L}, \{\mathscr{K}_n\}, \gamma)$, то $\mathfrak{A}(\xi\gamma\mathfrak{Z}, S_1) \notin \breve{\mathscr{L}}$.

Следствие 1. *В полном КМП никакой шар не является множеством первой категории.*

Следствие 2. *Носитель непустого полного КМП не является (в этом КМП) множеством первой категории* *).

Определение 18. *КМП назовем совершенным, если осуществим алгорифм, перерабатывающий всякий шар данного КМП в точку этого шара, отличную от его центра.*

Определение 19. *Точку $X \in \boldsymbol{M}$ назовем изолированной, если можно указать шар с центром в точке X, не содержащий точек $\boldsymbol{M}$, отличных (в смысле метрики $\boldsymbol{M}$) от X.*

Очевидно, всякое совершенное пространство не имеет изолированных точек; обратное утверждение (всякое КМП без изолированных точек совершенно) можно опровергнуть на примере уже в классе полных КМП (см. Кушнер [10]). Вместе с тем каждое сепарабельное КМП без изолированных точек совершенно.

Ясно, что все точки пространства натуральных чисел $\boldsymbol{H}$ изолированные. Таким образом, $\boldsymbol{H}$ не является совершенным пространством (и для него не выполняются формулируемые ниже следствия 3—6). Пространства $\boldsymbol{E}_n$, $\boldsymbol{E}_n^1$. $\boldsymbol{E}_n^2$, $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{B}$ совершенны.

Поскольку каждое непустое перечислимое множество можно перечислить арифметически полным алгорифмом

*) Определением 1 не исключается случай, когда носитель данного КМП пуст. Пустое КМП, очевидно, полно и сепарабельно.

и любое одноэлементное подмножество совершенного КМП эффективно нигде не плотно в этом КМП, то выполняется

Лемма 2. *В совершенном КМП любое непустое перечислимое множество является множеством первой категории* *).

Следствие 3. *Пусть* $\mathbf{M}$ — *полное совершенное КМП и* S — *шар в* $\mathbf{M}$. *По любому перечислимому множеству* $\mathscr{K} \subseteq \mathbf{M}$ *можно найти точку* X *из* S *так, что* $X \notin \breve{\mathscr{K}}$ (*и тем более* $X \notin \mathscr{K}$).

Действительно, пусть S — шар с центром в точке Y и $\mathscr{K}$ — перечислимое множество точек $\mathbf{M}$. Обозначим через $\mathscr{K}_1$ множество $\mathscr{K} \cup \{Y\}$ (где посредством $\{Y\}$ обозначено одноэлементное множество с единственным элементом Y). Множество $\mathscr{K}_1$ перечислимо и непусто. Следовательно (лемма 2), $\mathscr{K}_1$ является множеством первой категории. Остается применить к S и $\mathscr{K}_1$ теорему 8.

Следствие 3 является обобщением теоремы об эффективной несчетности любого интервала конструктивной прямой (теорема 1 § 4 гл. 3).

Следствие 4. *В полном совершенном КМП всякий шар является продуктивным множеством* (ср. сноску на стр. 190).

Следствие 5. *В полном совершенном КМП никакой шар не является перечислимым множеством.*

Следствие 6. *Носитель любого непустого совершенного КМП есть продуктивное множество* (*и, следовательно, не является перечислимым множеством*).

В следующем параграфе полученные результаты будут распространены на любые непустые согласованные множества.

В заключение данного пункта заметим, что аналогично тому, как это делается в традиционной теории метрических пространств, для полных КМП может быть доказана теорема Банаха о неподвижной точке и

---

*) Пустое множество, конечно, тоже является множеством первой категории. Несколько ограничительная на первый взгляд формулировка леммы 2 связана с невозможностью эффективно отличать (исходя из перечисляющих алгорифмов) пустые перечислимые множества от непустых.

получены обычные приложения этой теоремы к дифференциальным и интегральным уравнениям (см., например, Колмогоров, Фомин [1], Люстерник, Соболев [1]).

§ 2. Согласованные множества. Алгорифмические операторы. Теорема непрерывности (первая формулировка)

В этом параграфе через $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ обозначаются некоторые фиксированные КМП с носителями $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ и метрическими алгорифмами ρ, ρ_1, ρ_2.

1. Определение 1. *Пусть* $X \in \boldsymbol{M}$. *Будем говорить, что алгорифм* $\mathfrak{A}$ *согласован в точке* X, *если для любого* $Y \in \boldsymbol{M}$ *такого, что* $Y \underset{\boldsymbol{M}}{=} X$, *выполняется* $!\mathfrak{A}(X) \equiv !\mathfrak{A}(Y)$.

Таким образом, согласованность алгорифма в данной точке означает, что этот алгорифм одновременно применим или неприменим ко всем элементам $\boldsymbol{M}$, совпадающим с данной точкой в смысле метрики $\boldsymbol{M}$.

Определение 2. *Будем говорить, что алгорифм* $\mathfrak{A}$ *согласован на множестве* $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{M}$, *если* $\mathfrak{A}$ *согласован в каждой точке* $\mathscr{K}$. *Алгорифм, согласованный на всем множестве* $\mathscr{M}$, *будем называть согласованным в КМП* $\boldsymbol{M}$ *или, короче, просто согласованным.*

Определение 3. *Множество* $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{M}$ *назовем согласованным*), если осуществим согласованный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *такой, что для любого* X *из* $\boldsymbol{M}$

$$X \in \mathscr{K} \equiv !\mathfrak{A}(X).$$

Про алгорифм $\mathfrak{A}$ мы будем говорить, что он *согласует* множество $\mathscr{K}$; это обстоятельство будет также выражаться записью

$$\text{Согл}(\mathscr{K}, \mathfrak{A}).$$

Согласованное множество полностью характеризуется своим согласующим алгорифмом. Поэтому в тех ситуациях, когда речь идет о построении согласованных множеств с тем или иным свойством, подразумевается построение соответствующего согласованного алгорифма.

---

*) Московакис [1] использует для аналогичного понятия термин *listable set*; в близком смысле употребляется также иногда термин *вполне перечислимое множество.*

Обратно, если требуется построить по согласованному множеству какой-нибудь конструктивный объект, то в качестве исходных данных такого построения выступает соответствующий согласованный алгорифм. Аналогичное замечание можно сделать и по поводу вводимых ниже последовательностей согласованных множеств.

В пространстве натуральных чисел $\boldsymbol{H}$ согласованные множества совпадают, очевидно, с перечислимыми.

Непосредственно из определения 3 получается

Теорема 1. *Всякое согласованное множество правильно.*

Простейшие примеры согласованных множеств дает

Теорема 2. 1) *Пустое множество и носитель КМП — согласованные множества;*

2) *любой шар является согласованным множеством.*

Доказательство. Утверждение 1) очевидно: для пустого множества согласующим является алгорифм, не применимый ни к какому слову, носитель же пространства согласуется всюду применимым алгорифмом. Докажем утверждение 2). Поскольку (в силу утверждения 3) теоремы 1 § 1) всякий шар является правильным множеством, достаточно построить такой алгорифм γ, что для любого шара S и любого $X \in \boldsymbol{M}$

$$!\gamma(S, X) \equiv X \in S.$$

Построим алгорифмы γ_1 и γ_2 так, что для любого шара $X_1 * n$

$$\gamma_1(X_1 * n) \mathrel{\dot{=}} X_1,$$

$$\gamma_2(X_1 * n) \mathrel{\dot{=}} 2^{-n}.$$

В § 3 гл. 2 приведен алгорифм G такой, что для любого КДЧ x

$$!G(x) \equiv x > 0.$$

Искомый алгорифм γ строим теперь так, чтобы для любого шара S и любого X *)

$$\gamma(S, X) \simeq G(\gamma_2(S) - \rho(\gamma_1(S), X)).$$

---

*) Для произвольных слов P и Q запись $P - Q$ следует понимать как сокращение более точной записи $-_{\mathscr{D}}(P, Q)$, где $-_{\mathscr{D}}$ — алгорифм вычитания КДЧ.

Очевидно, для любого шара $S \doteq X_1 * n$ и $X \in M$

$$!\gamma(S, X) \equiv \rho(X_1, X) < 2^{-n} \equiv X \in S,$$

что и требовалось.

Определение 4. *Последовательность множеств* $\{\mathscr{K}_n\}$ ($\mathscr{K}_n \subseteq \mathscr{M}$) *назовем последовательностью согласованных множеств, если осуществим алгорифм* $\mathfrak{A}$ *такой, что при любом* n *выполняется* $\text{Согл}(\mathscr{K}_n, \widehat{\mathfrak{A}}_n)$.

Теорема 3. 1) *Пересечение любого конечного числа согласованных множеств является согласованным множеством.*

2) *Объединение последовательности согласованных множеств является согласованным множеством.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2, \ldots, \mathscr{K}_n$ — согласованные множества и $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — их согласующие алгорифмы. Построим алгорифм γ так, что

$$\gamma(P) \simeq \gamma_1(P)\gamma_2(P) \ldots \gamma_n(P).$$

Очевидно, для любого $X \in \boldsymbol{M}$

$$!\gamma(X) \equiv \mathop{\&}_{i=1}^{n} !\gamma_i(X) \equiv \mathop{\&}_{i=1}^{n} (X \in \mathscr{K}_i).$$

Далее, если $X \underset{M}{=} Y$, то $X \in \mathscr{K}_i \equiv Y \in \mathscr{K}_i$ и потому $!\gamma(X) \equiv !\gamma(Y)$. Следовательно, алгорифм γ согласует пересечение множеств $\mathscr{K}_1, \ldots, \mathscr{K}_n$.

Пусть теперь $\{\mathscr{K}_n\}$ — последовательность согласованных множеств, $\mathscr{K}$ — ее объединение, $\mathfrak{A}$ — такой алгорифм, что при любом n

$$\text{Согл}(\mathscr{K}_n, \widehat{\mathfrak{A}}_n). \tag{1}$$

Построим алгорифм δ так, что при любом слове P

$$\delta(P) \simeq \mu i\left([\mathfrak{A}]\left(I_2^1(i), P, I_2^2(i)\right) \doteq \Lambda\right)$$

(использованные здесь обозначения введены в §§ 1 и 3 гл. 1).

Покажем, что δ согласует множество $\mathscr{K}$. Поскольку для любого $X \in \boldsymbol{M}$

$$X \in \mathscr{K} \equiv \neg\neg\exists n (X \in \mathscr{K}_n)$$

и все множества $\mathcal{K}_n$ правильные (теорема 1), то множество $\mathcal{K}$ правильное. Поэтому достаточно доказать, что для любого $X \in \mathbf{M}$

$$!\delta(X) \equiv X \in \mathcal{K}. \tag{2}$$

Действительно, пусть $!\delta(X)$. Тогда $\delta(X)$, $I_2^1(\delta(X))$, $I_2^2(\delta(X))$ — натуральные числа. Обозначим последние два числа соответственно через n_1 и n_2. Очевидно,

$$[\mathfrak{A}](n_1, X, n_2) \doteq \Lambda,$$

т. е. $\mathfrak{A}$ заканчивает работу над словом n_1, X не более чем за n_2 шагов. Поэтому

$$!\mathfrak{A}(n_1, X),$$

откуда, ввиду (1), получаем

$$X \in \mathcal{K}_{n_1}.$$

Следовательно,

$$X \in \mathcal{K}.$$

Предположим теперь, что $X \in \mathcal{K}$. Если $\neg !\delta(X)$, то при всех i

$$[\mathfrak{A}](I_2^1(i), X, I_2^2(i)) \not\doteq \Lambda,$$

откуда, очевидно, следует, что при каждом n

$$\neg !\mathfrak{A}(n, X).$$

Таким образом, X не принадлежит ни одному из множеств $\mathcal{K}_n$, что невозможно. Поэтому выполняется

$$\neg\neg !\delta(X).$$

Следовательно, $!\delta(X)$, чем заканчивается доказательство эквивалентности (2). Теорема доказана.

Теорема 3 обобщает теорему о перечислимости объединения последовательности и пересечения конечного числа перечислимых множеств, которая получается из теоремы 3, если в качестве $\mathbf{M}$ взять пространство натуральных чисел.

Определение 5. *Алгорифм Ψ назовем алгорифмическим оператором, действующим из КМП $\mathbf{M}_1$ в КМП $\mathbf{M}_2$ или, короче, алгорифмическим оператором типа $\mathbf{M}_1 \dot{\to} \mathbf{M}_2$, если*

1) Ψ *является алгорифмом типа* $(\mathscr{M}_1 \dot{\to} \mathscr{M}_2)$, *т. е. перерабатывает всякий элемент* $\mathscr{M}_1$, *к которому он применим, в элемент* $\mathscr{M}_2$;

2) *для любых* X *и* Y *из* $\boldsymbol{M}_1$, *если* $!\psi(X)$ *и* $X \underset{\boldsymbol{M}_1}{=} Y$, *то* $!\psi(Y)$ *и* $\psi(Y) \underset{\boldsymbol{M}_2}{=} \psi(X)$.

В этом параграфе, за исключением особо оговариваемых мест, все рассматриваемые алгорифмические операторы считаются операторами типа $\boldsymbol{M}_1 \dot{\to} \boldsymbol{M}_2$. В этой связи упоминание о $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$, равно как прилагательное «алгорифмический», часто опускается.

Определение 6. 1) *Будем говорить, что алгорифмический оператор* Ψ *определен (не определен) в точке* $X \in \boldsymbol{M}_1$ *если* $!\Psi(X)$ *(соответственно* $\neg !\Psi(X)$*)*.

2) *Будем говорить, что множество* $\mathscr{K} \subseteq \boldsymbol{M}_1$ *является областью определения оператора* Ψ, *если для любого* X *из* $\boldsymbol{M}$

$$X \in \mathscr{K} \equiv !\psi(X).$$

3) *Назовем оператор* Ψ *всюду определенным, если он определен в каждой точке КМП* $\boldsymbol{M}_1$.

Непосредственно из определений 2—3, 5—6 следует

Теорема 4. 1) *Всякий алгорифмический оператор является согласованным алгорифмом.*

2) *Если множество* $\mathscr{K}$ *является областью определения какого-нибудь алгорифмического оператора, то* $\mathscr{K}$ — *согласованное множество.*

Обратно, если $\boldsymbol{M}_2$ содержит хотя бы один элемент Z, то любое согласованное множество (точек $\boldsymbol{M}_1$) является областью определения некоторого алгорифмического оператора (типа $\boldsymbol{M}_1 \dot{\to} \boldsymbol{M}_2$). Действительно, если алгорифм $\mathfrak{A}$ согласует множество $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{M}_1$, то алгорифм Ψ, перерабатывающий в Z всякое слово, к которому он применим, и такой, что при любом слове P

$$!\Psi(P) \equiv !\mathfrak{A}(P),$$

является искомым алгорифмическим оператором. Таким образом, имеет место

Теорема 5. *Если КМП* $\boldsymbol{M}_2$ *содержит хотя бы один элемент, то множество* $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{M}_1$ *согласовано тогда и только тогда, когда оно является областью определения некоторого алгорифмического оператора.*

Обозначим через $\boldsymbol{H}_0$ подпространство пространства натуральных чисел $\boldsymbol{H}$, индуцированное одноэлементным множеством $\{0\}$.

Следствие 1. *Множество $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{M}_1$ согласовано тогда и только тогда, когда оно является областью определения алгорифмического оператора типа $\boldsymbol{M}_1 \dashrightarrow \boldsymbol{H}_0$.*

Теорема 5 и следствие 1 устанавливают тесную связь между алгорифмическими операторами и согласованными множествами, позволяющую формулировать результаты о согласованных множествах в терминах операторов и наоборот.

Ясно, что конструктивные функции одной переменной являются алгорифмическими операторами типа $\boldsymbol{E}_1 \dashrightarrow \boldsymbol{E}_1$, а конструктивные функции n переменных $(n > 1)$ могут рассматриваться как операторы любого из трех типов: $\boldsymbol{E}_n \dashrightarrow \boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_n^1 \dashrightarrow \boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_n^2 \dashrightarrow \boldsymbol{E}_1$.

Определение 7. *Алгорифмические операторы типа $\boldsymbol{B} \dashrightarrow \boldsymbol{H}$ (где $\boldsymbol{B}$ — бэровское пространство, $\boldsymbol{H}$ — пространство натуральных чисел) будем называть эффективными функционалами.*

Эффективные функционалы есть, очевидно, алгорифмы, перерабатывающие те записи последовательностей натуральных чисел (ПНЧ), к которым они применимы, в натуральные числа; при этом совпадающие ПНЧ переводятся в равные натуральные числа.

Наряду с эффективными функционалами в смысле определения 7 естественно рассматривать вычислимые функционалы более общего рода, областью согласованности которых является множество записей алгорифмов типа $(\mathscr{H} \dashrightarrow \mathscr{H})$ *). (Переход от ПНЧ к таким алгорифмам вполне аналогичен переходу от общерекурсивных функций к частично рекурсивным.) Более точно, вычислимый функционал задается алгорифмом f, перерабатывающим запись всякого алгорифма типа $(\mathscr{H} \dashrightarrow \mathscr{H})$, к которой он применим, в натуральное число, причем если

*) Легко видеть, что на этом множестве нельзя ввести конструктивную метрику, согласованную с совпадением алгорифмов как функций типа $(\mathscr{H} \dashrightarrow \mathscr{H})$. Точнее говоря, если обозначить через T_0 множество записей алгорифмов типа $(\mathscr{H} \dashrightarrow \mathscr{H})$, то невозможен алгорифм ρ такой, что список $\{T_0, \rho\}$ является КМП и

$$\rho(\xi\gamma_1\zeta, \xi\gamma_2\zeta) = 0 \equiv \forall n\,(\gamma_1(n) \simeq \gamma_2(n)).$$

при любом n

$$\gamma_1(n) \simeq \gamma_2(n),$$

то

$$f(\mathcal{E}\gamma_1\mathcal{3}) \simeq f(\mathcal{E}\gamma_2\mathcal{3}).$$

Такие вычислимые функционалы с точностью до технических деталей представляют собой частный случай эффективных операций, введенных и исчерпывающим образом изученных в работе Майхилла и Шепердсона [1].

Наиболее существенные свойства эффективных функционалов (или вполне аналогичных им объектов) были установлены в работах Крайзела, Лакомба, Шёнфилда [1]—[2], Цейтина [3]—[5], Фридберга [1]. Некоторые из результатов этих работ приведены ниже.

2. В этом пункте будет доказано естественное обобщение известной теоремы Маркова о неразрывности конструктивных функций (Марков [3], [5]; доказательство для случая КМП впервые опубликовано в работе Слисенко [3]). Хотя теорема неразрывности и вытекает из доказываемых в п. 5 более сильных результатов, мы предпочитаем привести отдельное доказательство, тем более, что это доказательство, во-первых, приложимо к значительно более широкому, чем алгорифмические операторы, классу алгорифмов, во-вторых, не опирается на принцип Маркова и, в-третьих, благодаря своей прозрачности способствует фиксации используемых в таких ситуациях идей.

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгорифм, X — точка КМП $\boldsymbol{M}_1$.

Определение 8. *Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ является алгорифмом типа ($\boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$) в точке X, если при любом $Y \in \boldsymbol{M}_1$ таком, что $Y \underset{\boldsymbol{M}_1}{=} X$, выполняется $!\mathfrak{A}(Y)$, $\mathfrak{A}(Y) \in \boldsymbol{M}_2$ и $\mathfrak{A}(Y) \underset{\boldsymbol{M}_2}{=} \mathfrak{A}(X)$.*

Определение 9. *Будем говорить, что алгорифм $\mathfrak{A}$ имеет конструктивный разрыв типа ($\boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$) в точке X, если $\mathfrak{A}$ является алгорифмом типа ($\boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$) в этой точке и осуществимы последовательность β точек $\boldsymbol{M}_1$ и рациональное число $r > 0$ такие, что при любом n*

1) $\mathfrak{A}$ является алгорифмом типа ($\boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$) в точке $\beta(n)$;

2) $\rho_1(X, \beta(n)) < 2^{-n}$;

3) $\rho_2(\mathfrak{A}(X), \mathfrak{A}(\beta(n))) \geqslant r$ *).

(Напомним, что ρ_1, ρ_2 — метрические алгорифмы пространств $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$.)

В случае, когда алгорифм $\mathfrak{A}$ (фигурирующий в определении 9) есть алгорифмический оператор, можно сказать, что этот оператор определен в точке X и во всех точках $\beta(n)$, причем всегда $\rho_2(\mathfrak{A}(X), \mathfrak{A}(\beta(n))) \geqslant r$.

Теорема 6 (теорема неразрывности). *Пусть $\boldsymbol{M}_1$ — слабо полное, $\boldsymbol{M}_2$ — произвольное КМП. Никакой алгорифм не может иметь конструктивного разрыва типа $(\boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2)$.*

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму (ср. § 1 гл. 4).

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгорифм, $X \in \boldsymbol{M}_1$, β — последовательность точек $\boldsymbol{M}_1$, причем при любом n*

$$\rho_1(X, \beta(n)) < 2^{-n}. \tag{3}$$

Тогда можно построить алгорифм γ такой, что для любого слова P (в фиксированном нами алфавите A) выполняется

1) *если $\neg\, !\mathfrak{A}(P)$, то $!\gamma(P)$, $\gamma(P) \in \boldsymbol{M}_1$ и $\gamma(P) \underset{\boldsymbol{M}_1}{=} X$;*

2) *если $!\mathfrak{A}(P)$ и $\mathfrak{A}$ заканчивает работу над P точно за k шагов, то $!\gamma(P)$, $\gamma(P) \in \boldsymbol{M}_1$ и $\gamma(P) \underset{\boldsymbol{M}_1}{=} \beta(k+1)$.*

Доказательство. Построим алгорифмы γ^1, γ^2, γ^3 так, что

$$\gamma^1(P) \simeq \mu i([\mathfrak{A}](P, i) \doteqdot \Lambda);$$

$$\gamma^2(P, n) \simeq \begin{cases} \beta(n+1), & \text{если } [\mathfrak{A}](P, n) \not\doteqdot \Lambda, \\ \beta(\gamma^1(P)+1), & \text{если } [\mathfrak{A}](P, n) \doteqdot \Lambda; \end{cases}$$

$$\gamma^3(P) \doteqdot \{\hat{\gamma}^2_P\}.$$

---

*) Приводимая ниже теорема неразрывности почти точно так же может быть доказана и при более общем понятии конструктивного разрыва, связанном с отказом от требования $\mathfrak{A}(Y) \underset{\boldsymbol{M}_2}{=} \mathfrak{A}(X)$ в определении 8. Заметим также, что условие 2) определения 9 (ре-

Пусть Lim — алгорифм слабого предельного перехода в $\boldsymbol{M}_1$ (определение 7 § 1). Строим искомый алгорифм γ так, чтобы

$$\gamma(P) \simeq \operatorname{Lim}(\gamma^3(P)).$$

Если $\urcorner ! \mathfrak{A}(P)$, то при любом n

$$[\mathfrak{A}](P, n) \mathrel{\dot{=}} \Lambda.$$

Поэтому

$$\gamma^2(P, n) \mathrel{\dot{=}} \beta(n+1).$$

Из (3) тогда получаем, что $\hat{\gamma}_P^2$ есть регулярная последовательность точек, сходящаяся к X. Следовательно, $!\operatorname{Lim}(\gamma^3(P))$ и $\operatorname{Lim}(\gamma^3(P)) \underset{\boldsymbol{M}_1}{=} X$, что и требуется.

Пусть теперь $!\mathfrak{A}(P)$ и $\mathfrak{A}$ заканчивает работу над P точно за k шагов. Тогда

$$\gamma^2(P, n) \mathrel{\dot{=}} \begin{cases} \beta(n+1) & \text{при} \quad 0 \leqslant n \leqslant k, \\ \beta(k+1) & \text{при} \quad k < n. \end{cases}$$

Следовательно ((3)), $\hat{\gamma}_P^2$ является регулярной последовательностью. Кроме того, очевидно, $\hat{\gamma}_P^2$ сходится к $\beta(k+1)$. Отсюда так же, как и выше, получаем, что $!\gamma(P)$, $\gamma(P) \in \boldsymbol{M}_1$ и $\gamma(P) \underset{\boldsymbol{M}_1}{=} \beta(k+1)$.

Теперь нетрудно доказать теорему неразрывности. Обозначим через $\mathfrak{H}$ алгорифм со следующим свойством: невозможен алгорифм $\mathfrak{D}$ (над алфавитом A) такой, что для любого слова P (в A)

$$!\mathfrak{D}(P) \equiv \urcorner ! \mathfrak{H}(P).$$

Пусть $\boldsymbol{M}_1$ — слабо полное КМП и алгорифм $\mathfrak{A}$ имеет конструктивный разрыв типа $(\boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2)$ в точке X. Пусть далее β и r — соответствующие последовательность точек $\boldsymbol{M}_1$ и рациональное число (см. определение 9). Применим к $\mathfrak{H}$, β и X лемму 1 и обозначим через γ алгорифм, построенный согласно этой лемме.

гулярная сходимость β к X) можно было бы заменить требованием (конструктивной) сходимости β к X (именно так определяется конструктивный разрыв в работе Маркова [5]): при наличии конструктивного разрыва в этом более широком смысле имеет место и конструктивный разрыв в смысле определения 9.

Построим теперь алгорифм $\mathfrak{C}$ так, что

$$\mathfrak{C}(P) \simeq G(r - \rho_2(\mathfrak{A}(X), \mathfrak{A}(\gamma(P))).$$

(Напомним, что алгорифм G применим к положительным и только положительным КДЧ.)

Пусть $\neg !\mathfrak{H}(P)$. Тогда $\gamma(P) \underset{M_1}{=} X$.

Следовательно,

$$\rho_2(\mathfrak{A}(X), \mathfrak{A}(\gamma(P))) = 0,$$

и поэтому

$$!\mathfrak{C}(P).$$

Если $!\mathfrak{H}(P)$, то при некотором k $\gamma(P) \underset{M_1}{=} \beta(k)$ и, следовательно,

$$\rho_2(\mathfrak{A}(X), \mathfrak{A}((P))) \geqslant r,$$

откуда следует

$$\neg !\mathfrak{C}(P).$$

Поэтому если $!\mathfrak{C}(P)$, то $\neg !\mathfrak{H}(P)$.

Таким образом, при любом P

$$!\mathfrak{C}(P) \equiv \neg !\mathfrak{H}(P).$$

Это, однако, невозможно. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть M_1 — слабо полное КМП, M_2 — произвольное КМП. Никакой алгорифмический оператор типа $M_1 \dashrightarrow M_2$ не может иметь конструктивного разрыва.*

Следствие 3 (теорема А. А. Маркова). *Никакая конструктивная функция не может иметь конструктивного разрыва.*

Это утверждение получается из следствия 2, если в качестве M_1 и M_2 взять пространство КДЧ.

3. Значительная часть наших дальнейших результатов (в частности, теорема непрерывности) будет получаться с помощью одного общего принципа, который мы, следуя терминологии Цейтина [9], назовем «принципом захвата».

Пусть по-прежнему фиксирован некоторый алфавит A (содержащий буквы 0 и $|$), и пусть $\mathscr{K}$ — перечислимое множество слов в этом алфавите, дополнение $\overline{\mathscr{K}}$ которого до множества всех слов в A неперечислимо*). Пусть, далее, $\mathscr{K}_1$ — перечислимое множество (слов в A) такое, что $\overline{\mathscr{K}} \subseteq \mathscr{K}_1$. Тогда можно найти слово P, принадлежащее $\mathscr{K} \cap \mathscr{K}_1$ (принцип захвата). Другими словами, всякое перечислимое множество, накрывающее дополнение множества $\mathscr{K}$, «захватывает» и некоторый элемент $\mathscr{K}$, причем соответствующий элемент может быть эффективно найден (рис. 21).

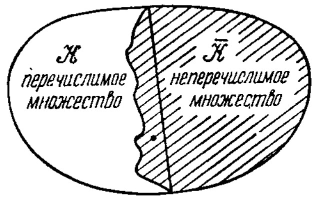


Рис. 21. Заштриховано перечислимое множество $\mathscr{K}_1$ ($\overline{\mathscr{K}} \subseteq \mathscr{K}_1$).

Доказательство высказанного утверждения почти очевидно. Действительно, множество $\mathscr{K} \cap \mathscr{K}_1$ как пересечение перечислимых множеств перечислимо. Построим стройный алгорифм γ, перечисляющий $\mathscr{K} \cap \mathscr{K}_1$. Если $\neg !\gamma(0)$, то множество $\mathscr{K} \cap \mathscr{K}_1$ пусто и, следовательно, $\mathscr{K}_1$ совпадает с $\overline{\mathscr{K}}$, что невозможно из-за неперечислимости $\overline{\mathscr{K}}$. Поэтому выполняется $\neg\neg !\gamma(0)$, откуда по принципу Маркова получаем $!\gamma(0)$. Очевидно, $\gamma(0) \in \mathscr{K} \cap \mathscr{K}_1$, т. е. является искомым общим элементом $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}_1$.

Интересной методической особенностью принципа захвата является то, что он позволяет использовать невозможность алгорифма (именно, алгорифма, перечисляющего $\overline{\mathscr{K}}$) для построения некоторого конструктивного объекта.

Сделаем некоторые пояснения в связи с особенностями применения метода захвата в этой главе**). Пусть $\mathscr{L}$ — некоторое множество слов в алфавите A и $\mathscr{A}$ — какое-нибудь свойство элементов этого множества. Свойство $\mathscr{A}$ назовем потенциально перечислимым на множестве $\mathscr{L}$, если можно указать перечислимое свойство (множество) $\mathscr{A}'$ слов в алфавите A, выполняющееся для тех и только тех элементов $\mathscr{L}$, которые обладают свойством $\mathscr{A}$. Например, свойство точек

---

*) Ясно, что $\overline{\mathscr{K}}$ неперечислимо тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}$ не является разрешимым множеством.

**) Мы рекомендуем вернуться к этим пояснениям после ознакомления с доказательством теоремы 7 и сепарационной теоремы, конструктивного метрического пространства отличаться (в смысле метрики) от данной его точки является потенциально перечислимым. Это обстоятельство и возможность (ср. лемму 1) в случае слабо полных КМП сводить принадлежность (непринадлежность) слов перечислимому множеству к различию (эквивалентности) точек КМП весьма существенны при создании ситуаций для применения принципа захвата.

Метод захвата применяется нами по следующим двум схемам.

а) Пусть $\mathscr{L}$ — некоторое множество точек КМП $\boldsymbol{M}$, $\mathscr{A}$ — потенциальное перечислимое свойство точек $\mathscr{L}$, и мы хотим найти элемент $\mathscr{L}$, обладающим свойством $\mathscr{A}$. Пусть $\mathscr{A}'$ — перечислимое множество слов, пересечение которого с $\mathscr{L}$ состоит из тех и только тех элементов $\mathscr{L}$, которые обладают свойством $\mathscr{A}$. Предположим, что нам удалось построить алгорифм γ так, что ($\mathscr{K}$ — перечислимое множество с неперечислимым дополнением)

(4) $$\text{если } P \in \mathscr{K}, \text{ то } !\gamma(P) \text{ и } \gamma(P) \in \mathscr{L},$$

(5) $$\text{если } P \in \overline{\mathscr{K}}, \text{ то } !\gamma(P) \text{ и } \gamma(P) \in \mathscr{A}'.$$

Обозначим через $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ множество, задаваемое условием

(6) $$P \in \mathscr{L}_{\mathscr{A}} \equiv \, !\gamma(P) \,\&\, \gamma(P) \in \mathscr{A}'.$$

Очевидно, $\mathscr{L}_{\mathscr{A}}$ перечислимо и ((5)) $\overline{\mathscr{K}} \subseteq \mathscr{L}_{\mathscr{A}}$. Следовательно, можно указать $Q \in \mathscr{K} \cap \mathscr{L}_{\mathscr{A}}$. Ввиду (4) и (6) $\gamma(Q) \in \mathscr{L}$ и $\gamma(Q)$ обладает свойством $\mathscr{A}$. Схему а) можно проследить в доказательстве теоремы 7 (а также в теореме § 3 о выборе перечислимого покрытия).

Более тонкой является схема б), применяемая в сепарационной теореме.

б) Пусть $\mathscr{L}_1$ — некоторое множество точек КМП $\boldsymbol{M}$ и X — точка $\boldsymbol{M}$. Скажем, что точка X перечислимо отделима от $\mathscr{L}_1$, если существует перечислимое множество $\mathscr{R}$ такое, что всякая точка, эквивалентная X, принадлежит $\mathscr{R}$, а любая точка из $\check{\mathscr{L}}_1$ не принадлежит $\mathscr{R}$. (Напомним, что $\check{\mathscr{L}}_1$ получается из $\mathscr{L}_1$ присоединением всех точек, эквивалентных в $\boldsymbol{M}$ точках $\mathscr{L}_1$.) Пусть $\mathscr{L}_2$ — некоторое множество шаров $\boldsymbol{M}$, и мы хотим найти шар из $\mathscr{L}_2$, не пересекающийся с $\mathscr{L}_1$ *). Предположим, что нам удалось построить алгорифмы γ_1, γ_2 со следующими свойствами

(7) γ_1 перерабатывает всякое слово из множества $\mathscr{K}$ в шар из $\mathscr{L}_2$;

(8) γ_2 перерабатывает всякое слово из $\bar{\mathscr{K}}$ в точку M, эквивалентную X;

(9) если $P \in \mathscr{K}$ и шар $\gamma_1(P)$ пересекается с $\mathscr{L}_1$, то γ_2 перерабатывает P в точку M, принадлежащую $\breve{\mathscr{L}}_1$.

Пусть $\mathscr{R}$ — перечислимое множество, отделяющее X от $\mathscr{L}_1$. Рассмотрим множество $\mathscr{R}_{\mathscr{L}_1}$ такое, что

$$P \in \mathscr{R}_{\mathscr{L}_1} \equiv\, !\gamma_2(P) \,\&\, (\gamma_2(P) \in \mathscr{R}).$$

Очевидно, $\mathscr{R}_{\mathscr{L}_1}$ перечислимо и ((8)) $\bar{\mathscr{K}} \subseteq \mathscr{R}_{\mathscr{L}_1}$. Следовательно, можно найти слово Q, общее множествам $\mathscr{K}$ и $\mathscr{R}_{\mathscr{L}_1}$. Согласно (9) шар $\gamma_1(Q)$ не пересекается с $\mathscr{L}_1$, что и требуется (рис. 22).

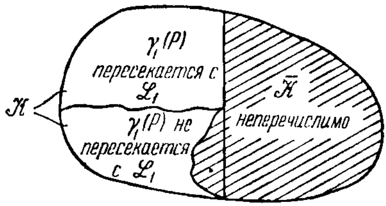


Рис. 22. Заштриховано перечислимое множество $\mathscr{R}_{\mathscr{L}_1}$.

Главную трудность при проведении этой схемы составляет, конечно, построение алгорифмов γ_1 и, в особенности, γ_2. Ясно, что это построение выглядело бы более реальным, если бы мы располагали алгорифмом, находящим по каждому шару из $\mathscr{L}_2$, пересекающемуся с $\mathscr{L}_1$, точку, общую $\mathscr{L}_1$ и этому шару. Условие существования такого алгорифма, напоминающее аксиому выбора, входит в число посылок сепарационной теоремы и в значительной степени обусловливает требования сепарабельности в теореме непрерывности. Условие сепарабельности множества $\mathscr{L}_1$ делает свойство пересекаемости произвольного шара с $\mathscr{L}_1$ потенциально перечислимым (на множестве всех шаров), что обеспечивает существование искомого «алгорифма выбора».

*) Например, при доказательстве непрерывности конструктивной функции f в нуле нужно (при данном фиксированном n) найти окрестность нуля, не пересекающуюся с множеством тех x, для которых $!f(x)$ и $|f(x) - f(0)| > 2^{-n}$.

Метод захвата впервые в явной форме использовался для изучения вычислимых операторов в работах Цейтина [4]—[5]. Близкий метод был развит также Крайзелом, Лакомбом и Шёнфилдом [1]—[2] при доказательстве непрерывности эффективных функционалов *). Другой оригинальный подход, основанный на теореме Клини о неподвижной точке и позволяющий получить примерно тот же круг результатов, что и метод захвата, предложен Московакисом в работе [1]. Как в методе захвата, так и в методе Московакиса, существенным образом используется принцип Маркова.

Нам будет удобно фиксировать некоторое перечислимое множество с неперечислимым дополнением. Доказываемая ниже лемма 2 специфицирует принцип захвата применительно к этому множеству.

Пользуясь универсальным алгорифмом, построим алгорифм $\mathfrak{B}$ так, что для любого алгорифма $\mathfrak{A}$ в алфавите A_1^a и любого слова P в A

$$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{A}\}, P) \simeq \mathfrak{A}(P).$$

Построим также алгорифмы $\mathfrak{C}$ и V такие, что

$$\mathfrak{C}(P) \simeq \mathfrak{B}(P, P),$$

$$V(P) \simeq \mu n([\mathfrak{C}](P, n) \mathrel{\ddot{=}} \Lambda).$$

Очевидно,

$$!V(P) \equiv !\mathfrak{C}(P),$$

и если $!V(P)$, то $\mathfrak{C}$ заканчивает работу над P точно за $V(P)$ шагов.

Определение 10. *Слово P (в алфавите A) назовем предельным (непредельным), если*

$$\neg !\mathfrak{C}(P)$$

(соответственно $!\mathfrak{C}(P)$).

Лемма 2. *Если алгорифм $\mathfrak{A}$ в алфавите A_1^a применим к любому предельному слову, то $\{\mathfrak{A}\}$ есть непредельное слово, к которому применим $\mathfrak{A}$.*

---

*) Конструкцию, близкую к схеме применения метода захвата в теореме 7, можно также найти в работе Майхилла и Шепердсона [1].

Доказательство. Предположим, что $\xi\mathfrak{A}\zeta$ — предельное слово, т. е.

$$\neg\, !\mathfrak{B}(\xi\mathfrak{A}\zeta,\ \xi\mathfrak{A}\zeta).$$

Поскольку

$$\mathfrak{B}(\xi\mathfrak{A}\zeta,\ \xi\mathfrak{A}\zeta) \simeq \mathfrak{A}(\xi\mathfrak{A}\zeta), \tag{10}$$

то тогда

$$\neg\, !\mathfrak{A}(\xi\mathfrak{A}\zeta),$$

что противоречит условиям леммы.

Следовательно, имеет место

$$\neg\neg\, !\mathfrak{B}(\xi\mathfrak{A}\zeta,\ \xi\mathfrak{A}\zeta),$$

откуда по принципу Маркова получаем

$$!\mathfrak{B}(\xi\mathfrak{A}\zeta,\ \xi\mathfrak{A}\zeta), \tag{11}$$

Из (10)—(11) получаем, что $\xi\mathfrak{A}\zeta$ — непредельное слово, причем

$$!\mathfrak{A}(\xi\mathfrak{A}\zeta).$$

Лемма 2 показывает, что множество предельных слов неперечислимо (в то время как множество непредельных слов, очевидно, перечислимо).

4. Проиллюстрируем применение принципа захвата на примере следующего, представляющего самостоятельный интерес предложения (ср. Цейтин [5; лемма § 1 гл. 3]).

Теорема 7. *Пусть M_1 — слабо полное КМП, $\mathcal{R}$ — согласованное множество точек M_1, $X \in \mathcal{R}$ и β — последовательность точек M_1, регулярно сходящаяся к X* (определение 6 § 1). *Тогда при любом m можно найти натуральное l такое, что $\beta(l) \in \mathcal{R}$ и $\rho_1(\beta(l), X) < 2^{-m}$.*

Доказательство. С помощью леммы 1 построим алгорифм γ так, что

(12) если P — предельное слово, то

$$\gamma(P) \underset{M_1}{=} X,$$

(13) если P — непредельное слово, то

$$\gamma(P) \underset{M_1}{=} \beta(V(P) + 1)$$

(алгорифм V перерабатывает всякое непредельное слово в натуральное число — см. стр. 392).

Пусть алгорифм $\mathfrak{A}$ согласует множество $\mathcal{R}$ (определение 3). Построим алгорифм δ так, что

$$\delta(m, P) \simeq G\left(2^{-m} - \rho_1(\gamma(P), X)\right)\mathfrak{A}(\gamma(P)).$$

Очевидно,

$$(14) \qquad !\delta(m, P) \equiv \left(\rho_1(\gamma(P), X) < 2^{-m}\right) \& (\gamma(P) \in \mathcal{R}).$$

Построим такой алгорифм σ, что

$$\sigma(m) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \{\hat{\delta}_m\}.$$

Ввиду (12) и (14) алгорифм $\hat{\delta}_m$ применим к любому предельному слову. Следовательно (лемма 2), $\sigma(m)$ есть непредельное слово и $!\delta(m, \sigma(m))$. Поэтому ((14))

$$(15) \qquad \rho_1(\gamma(\sigma(m)), X) < 2^{-m}$$

и

$$(16) \qquad \gamma(\sigma(m)) \in \mathcal{R}.$$

Построим теперь алгорифм θ так, что

$$\theta(m) \simeq V(\sigma(m)) + 1.$$

Так как при любом m $\sigma(m)$ — непредельное слово, то θ есть последовательность натуральных чисел, причем

$$\gamma(\sigma(m)) \underset{M_1}{=} \beta(\theta(m)).$$

Отсюда на основании (15)—(16) получаем

$$\beta(\theta(m)) \in \mathcal{R}$$

и

$$\rho_1(\beta(\theta(m)), X) < 2^{-m},$$

чем и заканчивается доказательство.

Применительно к алгорифмическим операторам теорема 7 дает

Следствие 4. *Пусть M_1 — слабо полное КМП, $X \in M_1$, β — последовательность точек M_1, регулярно сходящаяся к X. Если алгорифмический оператор Ψ определен в точке X, то для любого m можно указать n так, что $\rho_1(X, \beta(n)) < 2^{-m}$ и $!\Psi(\beta(n))$.*

Предлагаем читателю в качестве простого упражнения усилить следствие 4, потребовав дополнительно

$$\rho_2(\psi(X),\ \psi(\beta(n))) < 2^{-m}$$

(Цейтин [5; лемма § 1 гл. 3]).

Переформулированное таким образом следствие 4 можно рассматривать как усилёние теоремы неразрывности для алгорифмических операторов.

Теорема 7 показывает, что в слабо полном совершенном пространстве согласованное множество не может иметь изолированных точек. Из нее вытекает также, что в слабо полных КМП дополнения согласованных множеств обладают некоторыми свойствами замкнутости.

Определение 11. *Пусть $\mathscr{L}$ — множество точек КМП $\boldsymbol{M}_1$ и $X \in \boldsymbol{M}_1$.*

1) *Назовем X алгорифмической предельной точкой множества $\mathscr{L}$, если можно построить последовательность точек $\mathscr{L}$, сходящуюся к X.*

2) *Множество $\mathscr{L}$ назовем алгорифмически замкнутым, если оно содержит все свои алгорифмические предельные точки.*

Следствие 5. *В слабо полном КМП дополнение любого согласованного множества алгорифмически замкнуто* *).

Действительно, если $\mathscr{L}$ — согласованное множество и β — последовательность точек $\boldsymbol{M}_1$, не принадлежащих $\mathscr{L}$, сходящаяся к X, то $X \notin \mathscr{L}$, поскольку в противном случае по теореме 7 при некоторых l $\beta(l)$ также принадлежало бы $\mathscr{L}$.

Следствие 6. *Подпространство полного КМП, индуцированное дополнением согласованного множества, полно.*

Определение 12. *Пусть $\mathscr{L} \subseteq \boldsymbol{M}_1$. Будем говорить, что алгорифм $\mathfrak{A}$ прослеживает множество $\mathscr{L}$, если он перерабатывает всякий шар, имеющий непустое пересечение с $\mathscr{L}$, в точку, принадлежащую как $\mathscr{L}$, так и*

---

*) Если $\mathscr{L}$ — множество точек КМП $\boldsymbol{M}_1$, то дополнением $\mathscr{L}$ (в $\boldsymbol{M}_1$) мы называем множество, определяемое условием

$$(P \in \boldsymbol{M}_1) \mathbin{\&} (P \notin \mathscr{L}).$$

этому шару *). *Множество* $\mathscr{L}$ *назовем прослеживаемым, если можно построить прослеживающий его алгорифм.*

Теорема 8 (сепарационная теорема; Московакис [1]). *Пусть* $\boldsymbol{M}_1$ — *слабо полное КМП,* $\mathscr{L}_1$ — *согласованное,* $\mathscr{L}_2$ — *прослеживаемое множество точек* $\boldsymbol{M}_1$, *причем* $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \varnothing$. *Тогда для каждой точки* $X \in \mathscr{L}_1$ *можно найти шар с центром в точке* X, *не содержащий точек множества* $\mathscr{L}_2$ (рис. 23). *Точнее говоря, можно построить алгорифм* sep *так, что для каждого слова вида* X, $\{\mathfrak{A}_1\}$, $\{\mathfrak{A}_2\}$ *и любых множеств точек* $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, *если* $\mathfrak{A}_1$ *согласует* $\mathscr{L}_1$, $\mathfrak{A}_2$ *прослеживает* $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \varnothing$ *и* $X \in \mathscr{L}_1$ *то* $!\mathrm{sep}(X, \{\mathfrak{A}_1\}, \{\mathfrak{A}_2\})$ *и* $\mathrm{sep}(X, \{\mathfrak{A}_1\}, \{\mathfrak{A}_2\})$ — *шар с центром в точке* X, *имеющий пустое пересечение с* $\mathscr{L}_2$.

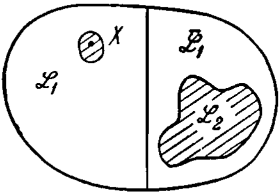


Рис. 23. $\mathscr{L}_1$ — согласованное множество, $\overline{\mathscr{L}}_1$ — дополнение $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ — прослеживаемое множество ($\mathscr{L}_2 \subseteq \overline{\mathscr{L}}_1$).

Доказательство. Построим алгорифм γ такой, что при любых словах P и Q

$$\gamma(P, Q) \simeq P * V(Q).$$

Очевидно,

(17) при любом $X \in \boldsymbol{M}_1$ и непредельном слове Q $!\gamma(X, Q)$ и $\gamma(X, Q)$ — шар с центром в точке X.

Пусть $X \in \boldsymbol{M}_1$, $\mathscr{L}_2$ — множество точек $\boldsymbol{M}_1$. Скажем, что непредельное слово Q сцеплено с X и $\mathscr{L}_2$, если $\gamma(X, Q) \cap \mathscr{L}_2 \neq \varnothing$.

Построим алгорифм γ^1 так, что для любых слов P и Q, любого алгорифма $\mathfrak{A}_2$ и любого натурального n

$$\gamma^1(P, \{\mathfrak{A}_2\}, Q, n) \simeq \begin{cases} P, & \text{если } [\mathfrak{C}](Q, n) \not\doteq \Lambda, \\ \mathfrak{A}_2(P * V(Q)), & \text{если } [\mathfrak{C}](Q, n) \doteq \Lambda. \end{cases}$$

(Алгорифм $\mathfrak{C}$ введен на стр. 392.)

---

*) Мы говорим, что множество R пусто, и пишем $R = \varnothing$, если $\neg \exists P (P \in R)$. Множество R называется непустым ($R \neq \varnothing$), если неверно, что оно пусто.

Пусть Lim — алгорифм слабого предельного перехода в $\boldsymbol{M}_1$. Построим алгорифм γ^2 так, что

(18) $$\gamma^2(P, \{\mathfrak{A}_2\}, Q) \simeq \mathrm{Lim}(\{\hat{\gamma}^1_{P, \{\mathfrak{A}_2\}, Q}\}).$$

(19) Если $X \in \boldsymbol{M}_1$ и Q — предельное слово, то

$$\gamma^2(X, \{\mathfrak{A}_2\}, Q) \in \boldsymbol{M}_1 \quad \text{и} \quad \gamma^2(X, \{\mathfrak{A}_2\}, Q) \underset{\boldsymbol{M}_1}{=} X.$$

В самом деле, при предельном Q для любого $\mathfrak{A}_2$ и n

$$\gamma^1(X, \{\mathfrak{A}_2\}, Q, n) \doteq X.$$

Следовательно, $\hat{\gamma}^1_{X, \{\mathfrak{A}_2\}, Q}$ — регулярная последовательность точек, сходящаяся к X, откуда и следует (19).

(20) Пусть $X \in \boldsymbol{M}_1$, алгорифм $\mathfrak{A}_2$ прослеживает множество $\mathscr{L}_2$ и Q — непредельное слово, сцепленное с X и $\mathscr{L}_2$. Тогда $!\gamma^2(X, \{\mathfrak{A}_2\}, Q)$ и $\gamma^2(X, \{\mathfrak{A}_2\}, Q) \in \mathscr{L}_2$ (см. определение 17 § 1).

Действительно, в рассматриваемом случае шар $X * V(Q)$ имеет непустое пересечение с $\mathscr{L}_2$. Следовательно $!\mathfrak{A}_2(X * V(Q))$ и $\mathfrak{A}_2(X * V(Q))$ есть точка шара $X * V(Q)$, принадлежащая $\mathscr{L}_2$. Поскольку

$$\gamma^1(X, \{\mathfrak{A}_2\}, Q, n) \simeq \begin{cases} X & \text{при} \quad n < V(Q), \\ \mathfrak{A}_2(X * V(Q)) & \text{при} \quad n \geqslant V(Q), \end{cases}$$

$\hat{\gamma}^1_{X, \{\mathfrak{A}_2\}, Q}$ является регулярной последовательностью точек $\boldsymbol{M}_1$, сходящейся к $\mathfrak{A}_2(X * V(Q))$. Отсюда и следует (20).

Построим теперь алгорифм $\mathfrak{A}$ так, что для любых алгорифмов $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и слов P, Q

$$\mathfrak{A}(P, \{\mathfrak{A}_1\}, \{\mathfrak{A}_2\}, Q) \simeq \mathfrak{A}_1(\gamma^2(P, \{\mathfrak{A}_2\}, Q)).$$

Пусть $X \in \boldsymbol{M}_1$, $\mathfrak{A}_1$ согласует множество $\mathscr{L}_1$, $\mathfrak{A}_2$ прослеживает множество $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \varnothing$, $X \in \mathscr{L}_1$. Тогда

(21) если Q — предельное слово, то

$$!\mathfrak{A}(X, \{\mathfrak{A}_1\}, \{\mathfrak{A}_2\}, Q);$$

(22) если Q — непредельное слово, сцепленное с X и $\mathscr{L}_2$, то

$$\neg\, !\mathfrak{A}(X, \{\mathfrak{A}_1\}, \{\mathfrak{A}_2\}, Q);$$

(23) $\{\hat{\mathfrak{A}}_{X, \{\mathfrak{A}_1\}, \{\mathfrak{A}_2\}}\}$ есть непредельное слово, не сцепленное с X и $\mathscr{L}_2$.

Утверждение (21) следует из (19), а утверждение (22) из (20).

Утверждение (23) непосредственно вытекает из леммы 2 и (21)—(22).

Строим теперь алгорифм sep так, чтобы

$$\text{(24)}\qquad \mathrm{sep}(X, \{\mathfrak{A}_1\}, \{\mathfrak{A}_2\}) \simeq X * V(\{\widehat{\mathfrak{A}}_{X, \{\mathfrak{A}_1\}, \{\mathfrak{A}_2\}}\}).$$

Ввиду (23) алгорифм sep обладает требуемыми свойствами.

Определение 13. *Множество $\mathscr{L}$ назовем эффективно открытым, если осуществим алгорифм α (внутренняя функция $\mathscr{L}$), перерабатывающий всякий элемент X из $\mathscr{L}$ в шар с центром в X, целиком содержащийся в $\mathscr{L}$.*

Следствие 7. *В слабо полном КМП всякое согласованное множество с прослеживаемым дополнением эффективно открыто.*

Важный класс прослеживаемых множеств образуют (в случае слабо полных сепарабельных КМП) согласованные множества.

Теорема 9 (Московакис [1]). *В слабо полном сепарабельном КМП всякое согласованное множество прослеживаемо; точнее говоря, можно (при фиксированном исходном КМП) построить алгорифм* tr *так, что для любого алгорифма $\mathfrak{A}$ и множества $\mathscr{L}$, если $\mathfrak{A}$ согласует $\mathscr{L}$, то алгорифм $\widehat{\mathrm{tr}}_{\{\mathfrak{A}\}}$ прослеживает $\mathscr{L}$.*

Как показал недавно Ю. Р. Вайнберг, если усилить определение прослеживаемости, допустив в нем шары произвольных радиусов (мы рассматриваем лишь шары радиусов вида 2^{-n} при натуральном n), то из прослеживаемости всех согласованных множеств данного КМП следует сепарабельность этого КМП. (При принятом нами определении прослеживаемости это утверждение легко опровергается: в качестве контрпримера можно взять подпространство $\boldsymbol{H}$, индуцированное каким-нибудь неперечислимым множеством.)

Теорема 9 вытекает из следующих трех лемм.

Лемма 3. *Всякое перечислимое множество точек КМП прослеживаемо.*

Лемма 4. *Всякое сепарабельное множество прослеживаемо.*

Лемма 5. *В слабо полном сепарабельном КМП всякое согласованное множество сепарабельно.*

Лемма 4 следует из леммы 3 и того очевидного обстоятельства, что алгорифм, прослеживающий плотное подмножество данного множества, прослеживает и само это множество. Пусть теперь M_1 — слабо полное, сепарабельное КМП и $\mathscr{L}$ — согласованное множество точек M_1 с согласующим алгорифмом $\mathfrak{A}$. Обозначим через β алгорифм, перечисляющий плотное подмножество M_1. Построим алгорифм α так, что при любом n

$$\alpha(n) \simeq \mathfrak{A}(\beta(n)).$$

Очевидно, множество тех натуральных чисел, к которым применим α, перечислимо (ср. § 3 гл. 1). Построим алгорифм γ, перечисляющий это множество. Пусть далее θ — такой алгорифм, что

$$\theta(n) \simeq \beta(\gamma(n)).$$

Очевидно, θ перечисляет некоторое подмножество $\mathscr{L}$ (точнее говоря, θ перечисляет множество точек вида $\beta(n)$, принадлежащих $\mathscr{L}$). Из теоремы 7 следует, что перечисляемое θ множество плотно в $\mathscr{L}$, чем и заканчивается доказательство леммы 5. Осталось доказать лемму 3. Пусть M_1 — КМП и алгорифм β перечисляет некоторое множество $\mathscr{L}_1$ точек M_1. Для каждого шара S обозначим через $\mathscr{L}_S$ множество элементов $\mathscr{L}_1$, принадлежащих S. Так же, как и выше, используя согласованность любого шара, можно показать, что все множества $\mathscr{L}_S$ перечислимы, и построить такой алгорифм $\mathfrak{A}^1$, что для любого шара S алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}^1_S$ перечисляет $\mathscr{L}_S$. Построим далее алгорифм $\mathfrak{A}^2$ так, что для любого шара S алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}^2_S$ есть стройный алгорифм, перечисляющий $\mathscr{L}_S$ (теорема 7 § 3 гл. 1). Искомый прослеживающий алгорифм $\mathfrak{A}$ строим теперь так, чтобы

$$\mathfrak{A}(S) \simeq \mathfrak{A}^2(S, 0).$$

Теорема 9 будет использована нами в следующем пункте при доказательстве теоремы непрерывности.

В заключение этого пункта распространим на согласованные множества результаты п. 5 § 1, связанные с теоремой Бэра. (Приводимые результаты (Кушнер

[10]) представляют собой некоторое усиление результатов Московакиса [1].)

Теорема 10. *Пусть* M_1 — *полное КМП*, $\mathscr{L}$ — *согласованное множество и* $X \in \mathscr{L}$. *Для любого множества первой категории* $\mathscr{L}_1$ *можно найти точку, принадлежащую* $\mathscr{L}$, *но не принадлежащую* $\check{\mathscr{L}}_1$ *).

Действительно, пусть $X \in \mathscr{L}$, $\mathscr{L}_1$ — множество первой категории. Построим последовательность шаров ω так, что

$$\omega(n) \doteqdot X * n.$$

Согласно теореме 8 § 1 мы можем построить последовательность точек θ так, что при любом n

$$\theta(n) \in \omega(n) \tag{25}$$

и

$$\theta(n) \notin \check{\mathscr{L}}_1. \tag{26}$$

Ввиду (25) при всяком n

$$\rho_1(X, \theta(n)) < 2^{-n}.$$

Поэтому мы сможем найти (теорема 7) такое l, что $\theta(l) \in \mathscr{L}$. Ввиду (26) $\theta(l) \notin \check{\mathscr{L}}_1$, что и требуется.

Следствие 8. *Пусть* M_1 — *полное сепарабельное КМП. По всякому непустому согласованному множеству* $\mathscr{L}$ *и любому множеству первой категории* $\mathscr{L}_1$ *можно указать точку из* $\mathscr{L}$, *не принадлежащую* $\check{\mathscr{L}}_1$.

Следствие 8 вытекает из теоремы 10 и следующего утверждения, доказательство которого аналогично доказательствам лемм 3—5: если M_1 — полное сепарабельное КМП, то для всякого непустого согласованного множества можно найти точку, принадлежащую этому множеству.

Следствие 9. *В полном КМП никакое непустое согласованное множество не является множеством первой категории.*

Следующее утверждение доказывается вполне аналогично следствию 3 § 1.

*) Напомним, что $Y \notin \check{\mathscr{L}}_1$ означает, что при любом Z из $\mathscr{L}_1$

$$\rho_1(Y, Z) \neq 0.$$

Следствие 10. *Пусть* $\boldsymbol{M}_1$ *— полное совершенное КМП* (см. определение 18 § 1), $\mathscr{L}$ *— согласованное множество точек* $\boldsymbol{M}_1$ *и* $X \in \mathscr{L}$. *По всякому перечислимому множеству* $\mathscr{L}_1$ *точек* $\boldsymbol{M}$ *можно найти точку из* $\mathscr{L}$, *не принадлежащую* $\check{\mathscr{L}}_1$.

Следствие 11. *Пусть* $\boldsymbol{M}_1$ *— полное сепарабельное совершенное КМП. По всякому непустому согласованному множеству* $\mathscr{L}$ *и перечислимому множеству* $\mathscr{L}_1$ *можно найти точку* $\mathscr{L}$, *не принадлежащую* $\check{\mathscr{L}}_1$.

Следствие 12. *В полном совершенном КМП всякое непустое согласованное множество неперечислимо.*

Заметим, что принятое нами понятие совершенного КМП (определение 18 § 1) нельзя ослабить без потери следствия 12: можно построить полное КМП без изолированных точек, в котором существуют непустые согласованные перечислимые множества.

5. Сепарационная теорема и теорема о прослеживаемости согласованных множеств позволяют без труда доказать непрерывность алгорифмических операторов. Этот результат вытекает из основной теоремы работы Цейтина [5] (см. также Цейтин [3] и [4]; упомянутая теорема будет доказана в следующем параграфе) и был затем независимо найден Московакисом [1]*).

Теорема 11 (теорема Цейтина—Московакиса о непрерывности алгорифмических операторов). *Пусть* $\boldsymbol{M}_1$ *— слабо полное сепарабельное КМП,* $\boldsymbol{M}_2$ *— произвольное КМП. Можно построить алгорифм* Нп *так, что для любого алгорифмического оператора* Ψ *типа* $\boldsymbol{M}_1 \dashrightarrow \boldsymbol{M}_2$, *любых* X, $Y \in \boldsymbol{M}_1$ *и любого* n *имеет место*

1) *если* $!\Psi(X)$, *то* $!\text{Нп}(\{\Psi\}, X, n)$ *и* $\text{Нп}(\{\Psi\}, X, n)$ *— шар с центром в точке* X;

2) *если* $!\Psi(X)$, $!\Psi(Y)$ *и* $Y \in \text{Нп}(\{\Psi\}, X, n)$, *то*

$$\rho_2(\Psi(X), \Psi(Y)) < 2^{-n}.$$

Доказательство. Построим алгорифмы $\mathfrak{A}^1$ и $\mathfrak{A}^2$ так, что для любых слов P, Q, алгорифма Ψ и

---

*) В работах Г. С. Цейтина рассматриваются не слабо полные, а полные КМП. Вместе с тем в приводимых там доказательствах фактически используется лишь слабая полнота.

натурального n

$$\mathfrak{A}^1(\{\Psi\}, P, n, Q) \simeq G(2^{-n-1} - \rho_2(\Psi(P), \Psi(Q))),$$
$$\mathfrak{A}^2(\{\Psi\}, P, n, Q) \simeq G(\rho_2(\Psi(P), \Psi(Q)) - 2^{-n-1}).$$

(Напомним, что алгорифм G применим к положительным и только положительным КДЧ.)

Построим далее алгорифм $\mathfrak{A}^3$ так, что для любого слова R

$$\mathfrak{A}^3(\{\Psi\}, P, n, R) \simeq \mathrm{tr}(\{\widehat{\mathfrak{A}}^2_{\{\Psi\}, P, n}\}, R)$$

(где tr — алгорифм, фигурирующий в теореме 9).

Искомый алгорифм Нп строим теперь так, что

$$\text{Нп}(\{\Psi\}, P, n) \simeq \mathrm{sep}(P, \{\widehat{\mathfrak{A}}^1_{\{\Psi\}, P, n}\}, \{\widehat{\mathfrak{A}}^3_{\{\Psi\}, P, n}\}),$$

где sep — алгорифм, построенный по теореме 8.

Фиксируем произвольный алгорифмический оператор Ψ типа $\boldsymbol{M}_1 \dashrightarrow \boldsymbol{M}_2$, точку $X \in \boldsymbol{M}_1$, в которой определен Ψ, и натуральное n. Обозначим для краткости через T слово $\{\Psi\}, X, n$.

Пусть $\mathscr{L}'_T$ и $\mathscr{L}''_T$—множества точек $\boldsymbol{M}_1$, определяемые условиями

$$Y \in \mathscr{L}'_T \equiv\, !\mathfrak{A}^1(T, Y),$$
$$Y \in \mathscr{L}''_T \equiv\, !\mathfrak{A}^2(T, Y).$$

Ясно, что $Y \in \mathscr{L}'_T$ $(Y \in \mathscr{L}''_T)$ тогда и только тогда, когда $!\Psi(Y)$ и

$$\rho_2(\Psi(X), \Psi(Y)) < 2^{-n-1}$$

(соответственно $\rho_2(\Psi(X), \Psi(Y)) > 2^{-n-1}$). Кроме того, $X \in \mathscr{L}'_T$. Нетрудно также убедиться, что множества $\mathscr{L}'_T$ и $\mathscr{L}''_T$ согласованные, причем $\widehat{\mathfrak{A}}^1_T$ и $\widehat{\mathfrak{A}}^2_T$—их согласующие алгорифмы. Тогда по теореме 9 алгорифм $\widehat{\mathfrak{A}}^3_T$ прослеживает множество $\mathscr{L}''_T$. Поскольку $\mathscr{L}''_T \cap \mathscr{L}'_T = \varnothing$ и $X \in \mathscr{L}'_T$, для X, $\mathscr{L}'_T$, $\mathscr{L}''_T$, $\widehat{\mathfrak{A}}^1_T$, $\widehat{\mathfrak{A}}^3_T$ выполняются все условия сепарационной теоремы. Поэтому алгорифм Нп перерабатывает слово $\{\Psi\}, X, n$ в шар с центром в точке X, внутри которого нет точек множества $\mathscr{L}''_T$. Следовательно, если $!\Psi(Y)$ и $Y \in \text{Нп}(\{\Psi\}, X, n)$, то $Y \notin \mathscr{L}''_T$. Отсюда $\rho_2(\Psi(X), \Psi(Y)) \leqslant 2^{-n-1} < 2^{-n}$, что и требовалось.

Следствие 13. *Всякая конструктивная функция непрерывна* (ср. § 2 гл. 5).

Следствие 14. *Всякий эффективный функционал непрерывен.*

Остановимся несколько подробнее на следствии 14. Пусть Ψ — эффективный функционал, т. е. алгорифмический оператор из бэровского пространства в пространство натуральных чисел. Пусть β_1 — такая ПНЧ, что $!\Psi(\{\beta_1\})$. Тогда можно указать такое натуральное N, что для любой ПНЧ β_2, если $\beta_2(i) = \beta_1(i)$ при $i \leqslant N$ и $!\Psi(\{\beta_2\})$, то $\Psi(\{\beta_1\}) \doteq \Psi(\{\beta_2\})$. Таким образом, значение всюду определенного эффективного функционала на данной последовательности натуральных чисел определяется некоторым конечным числом членов этой последовательности. Мы еще вернемся к этому замечанию в следующем параграфе.

§ 3. Теорема о выборе перечислимого покрытия. Усиленная форма теоремы непрерывности. Некоторые контрпримеры

1. Изложение этого пункта заимствовано из работы автора [10]. Доказываемая ниже теорема о выборе перечислимого покрытия представляет собой естественное обобщение теоремы Московакиса [1] о представлении открытых согласованных множеств перечислимыми объединениями шаров (см. следствие 2). Аналогичный результат фактически получен также в доказательстве основной теоремы работы Цейтина [5].

Определение 1. *Пусть $\boldsymbol{M}_1$ — КМП и $\mathscr{L} \subseteq \boldsymbol{M}_1$. Алгорифм α будем называть эффективным покрытием множества $\mathscr{L}$, если он перерабатывает всякий элемент $\mathscr{L}$ в шар, содержащий этот элемент.*

Определение 2. *Будем говорить, что из эффективного покрытия α множества $\mathscr{L}$ можно выбрать перечислимое покрытие множества $\mathscr{L}$, если осуществимы алгорифмы γ и δ такие, что*

1) *γ перечисляет некоторое подмножество $\mathscr{K}$ множества $\mathscr{L}$;*

2) *δ перерабатывает всякий элемент X множества $\mathscr{L}$ в элемент $\mathscr{K}$ таким образом, что $X \in \alpha(\delta(X))$* *).

Следующая теорема напоминает по формулировке (но не по доказательству) классическую теорему Линделёфа (см., например, Камке [1; стр. 48]).

Теорема 1 (о выборе перечислимого покрытия). *Пусть M — слабо полное КМП. Каково бы ни было сепарабельное и правильное множество $\mathscr{L}$ элементов M* (см. определения 11 и 5 § 1) *и эффективное покрытие α этого множества, из α можно выбрать перечислимое покрытие $\mathscr{L}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}$ — правильное сепарабельное множество точек слабо полного КМП M и α — эффективное покрытие $\mathscr{L}$. Обозначим через β алгорифм, перечисляющий плотное подмножество $\mathscr{L}$. Рассмотрим множества натуральных чисел $\mathscr{M}_{P,n}$ такие, что

$$(1) \qquad i \in \mathscr{M}_{P,n} \equiv\, !G\left(2^{-n-1} - \rho(P, \beta(i))\right),$$

где ρ — метрический алгорифм M, i — натуральное число, P — слово (в фиксированном нами алфавите A) и G — алгорифм, применимый к положительным и только положительным КДЧ (см. § 3 гл. 2). Из определения (1) множеств $\mathscr{M}_{P,n}$ усматривается, что все эти множества перечислимы. Построим алгорифм γ^1 так, что при любых P и n алгорифм $\hat{\gamma}^1_{P,n}$ является стройным алгорифмом, перечисляющим множество $\mathscr{M}_{P,n}$ (ср. § 3 гл. 1).

Исходя из (1) и определения β, легко убедиться, что

(2) если $P \in \mathscr{L}$, то при всяком n $!\beta(\gamma^1(P, n, 0))$, $\beta(\gamma^1(P, n, 0)) \in \mathscr{L}$ и $\rho(P, \beta(\gamma^1(P, n, 0))) < 2^{-n-1}$.

Пусть $\mathfrak{C}$ и V — алгорифмы, введенные в п. 3 § 2. Напомним, что

(3) слово Q непредельное тогда и только тогда, когда при некотором n $[\mathfrak{C}](Q, n) \mathrel{\overline{\overline{\mid}}} \Lambda$,

$$(4) \qquad V(Q) \simeq \mu n\left([\mathfrak{C}](Q, n) \mathrel{\overline{\overline{\mid}}} \Lambda\right).$$

---

*) Условие существования алгорифма δ можно, как легко видеть, заменить условием

$$\forall X \left(X \in \mathscr{L} \supset \neg\neg \exists n \left(!\gamma(n) \;\&\; (X \in \alpha(\gamma(n)))\right)\right).$$

Построим алгорифм γ^2 такой, что

$$\gamma^2(P, Q, n) \simeq \begin{cases} \beta(\gamma^1(P, n, 0)), & \text{если} \quad [\mathfrak{C}](Q, n) \not\doteq \Lambda, \\ \beta(\gamma^1(P, V(Q), 0)), & \text{если} \quad [\mathfrak{C}](Q, n) \doteq \Lambda. \end{cases}$$

Из (2) — (4) получаем

(5) если $P \in \mathscr{L}$ и Q—предельное слово, то $\hat{\gamma}^2_{P,Q}$ есть регулярная последовательность точек $\boldsymbol{M}$, сходящаяся к P;

(6) если $P \in \mathscr{L}$ и Q — непредельное слово, то $\hat{\gamma}^2_{P,Q}$ есть регулярная последовательность точек $\boldsymbol{M}$, сходящаяся к $\beta(\gamma^1(P, V(Q), 0))$.

Пусть Lim — алгорифм слабого предельного перехода в пространстве $\boldsymbol{M}$. Построим алгорифмы γ^3 и γ^4 так, чтобы

(7) $$\gamma^3(P, Q) \simeq \mathrm{Lim}(\{\hat{\gamma}^2_{P,Q}\}),$$

(8) $$\gamma^4(P, Q) \simeq \alpha(\gamma^3(P, Q)).$$

Пусть $P_0, P_1, \ldots, P_n$ — список слов (в алфавите A). Назовем этот список регулярным, если при любых $i \leqslant j \leqslant n$

$$!G(2^{-i} - \rho(P_i, P_j)).$$

(Понятие регулярного списка представляет собой естественное «перечислимое расширение» свойства регулярности упорядоченных списков точек КМП.)

Рассмотрим множество $\mathscr{R}$ (в алфавите A_1) слов вида P, Q такое, что $P, Q \in \mathscr{R}$ тогда и только тогда, когда

(9) Q — непредельное слово;

(10) при $i \leqslant V(Q)$ $!\gamma^2(P, Q, i)$ и слова $\gamma^2(P, Q, 0)$, $\gamma^2(P, Q, 1), \ldots, \gamma^2(P, Q, V(Q))$ образуют регулярный список.

Нетрудно убедиться, что

(11) если слово P, Q принадлежит $\mathscr{R}$, то $!\gamma^3(P, Q)$ и $\gamma^3(P, Q) \in \mathscr{L}$.

В самом деле, поскольку Q—непредельное слово, то

$$\gamma^2(P, Q, n) \simeq \begin{cases} \beta(\gamma^1(P, n, 0)) & \text{при} \quad n < V(Q), \\ \beta(\gamma^1(P, V(Q), 0)) & \text{при} \quad n \geqslant V(Q). \end{cases}$$

Отсюда ((10)) получаем, что $\hat{\gamma}^2_{P,\,Q}$ является регулярной последовательностью, сходящейся к $\beta(\gamma^1(P, V(Q), 0))$. Поэтому ((7)) $!\gamma^3(P, Q)$ и $\gamma^3(P, Q) \underset{M}{=} \beta(\gamma^1(P, V(Q), 0))$. Так как $\beta(\gamma^1(P, V(Q), 0)) \in \mathscr{L}$ и $\mathscr{L}$ — правильное множество, то $\gamma^3(P, Q) \in \mathscr{L}$, что и требуется.

Множество $\mathscr{R}$ перечислимо, поскольку можно построить алгорифм, применимый к тем и только тем словам в алфавите A_1, которые принадлежат $\mathscr{R}$. Построим алгорифм γ^5, перечисляющий $\mathscr{R}$, и алгорифм γ такой, что

(12) $$\gamma(n) \simeq \gamma^3(\gamma^5(n)).$$

Ввиду (11) γ перечисляет некоторое подмножество $\mathscr{K}$ множества $\mathscr{L}$. Для завершения доказательства осталось построить алгорифм δ, фигурирующий в определении 2.

Построим алгорифм σ так, что для любого шара S в $\boldsymbol{M}$ и $X \in \boldsymbol{M}$

(13) $$!\sigma(S, X) \equiv X \in S.$$

Возможность такого построения усматривается из согласованности любого шара (теорема 2 § 2). Построим далее алгорифмы δ^1, δ^2 так, что

(14) $$\delta^1(P, Q) \simeq \sigma(\gamma^4(P, Q), P),$$

(15) $$\delta^2(P) \mathrel{\dot{=}} \mathcal{E}\hat{\delta}^1_P\mathcal{З}.$$

Искомый алгорифм δ строим так, что

(16) $$\delta(P) \simeq \gamma^3(P, \delta^2(P)).$$

Фиксируем произвольное $P \in \mathscr{L}$ и покажем, что $!\delta(P)$, $\delta(P) \in \mathscr{K}$ и $P \in \alpha(\delta(P))$.

Действительно, имеет место

(17) если Q — предельное слово, то $!\delta^1(P, Q)$ (см. (5), (7)—(8) и (13)—(14));

(18) $\delta^2(P)$ — непредельное слово и $!\delta^1(P, \delta^2(P))$ ((17), (15) и лемма 2 § 2).

Ввиду (18), (6), (9)—(10) слово $P, \delta^2(P)$ принадлежит $\mathscr{R}$. Отсюда согласно (11) получаем $!\gamma^3(P, \delta^2(P))$, т. е. ((16)) $!\delta(P)$. Тогда по определению γ^5 и (12)

$\delta(P) \in \mathscr{K}$. Согласно (18)

$$!\delta^1(P, \delta^2(P)).$$

Отсюда, поскольку ((14), (16), (7)—(8))

$$\delta^1(P, \delta^2(P)) \simeq \sigma(\alpha(\gamma^3(P, \delta^2(P))), P) \simeq \sigma(\alpha(\delta(P)), P),$$

получаем

$$!\sigma(\alpha(\delta(P)), P).$$

Это означает, что P принадлежит шару $\alpha(\delta(P))$, чем и заканчивается доказательство.

Из теоремы 1 можно вывести ряд интересных следствий.

Поскольку в слабо полном, сепарабельном КМП всякое согласованное множество сепарабельно (лемма 5 § 2), то имеет место

Следствие 1. *В слабо полном сепарабельном КМП из любого эффективного покрытия произвольного согласованного множества можно выбрать перечислимое покрытие этого множества.*

Определение 3. *Будем говорить, что множество $\mathscr{L}$ точек КМП* **M** *является лакомбовым, если можно построить алгорифм ω, перерабатывающий всякое натуральное число, к которому он применим, в шар пространства* **M** *так, что для любого $X \in$* **M**

$$X \in \mathscr{L} \equiv \neg\neg \exists n (!\omega(n) \,\&\, (X \in \omega(n))).$$

Таким образом, лакомбовы множества — это множества, получаемые объединением перечислимых множеств шаров *).

Достаточно простое доказательство следующей теоремы предоставляется читателю.

Теорема 2. 1) *Всякое лакомбово множество согласовано.*

2) *Всякое лакомбово множество эффективно открыто* (определение 13 § 2).

Теорема 1 позволяет получить результаты, в некотором смысле обратные теореме 2.

---

*) Такого рода множества рассматривались Лакомбом в работе [4]; термин «лакомбово множество» предложен Московакисом [1].

Следствие 2. *В слабо полном КМП всякое эффективно открытое сепарабельное множество лакомбово.*

Следствие 3. *В слабо полном КМП всякое эффективно открытое сепарабельное множество является согласованным.*

Следствие 4 (Московакис [1]). *В слабо полном сепарабельном КМП всякое эффективно открытое согласованное множество является лакомбовым.*

Для доказательства следствия 2 достаточно заметить, что всякое эффективно открытое множество является правильным, а его внутренняя функция (определение 13 § 2) образует эффективное покрытие данного множества. Следствие 3 вытекает из следствия 2 и теоремы 2. Следствие 4 вытекает из следствия 2 и леммы 5 § 2.

Теорема 1 позволяет также получить новое доказательство существования сингулярных интервальных покрытий. В самом деле, фиксируем произвольное n и построим алгорифм γ, перерабатывающий слова в алфавите КДЧ в натуральные числа, причем разные слова в разные натуральные числа. С помощью алгорифмов D^-, D^+ нетрудно построить алгорифм θ, перерабатывающий всякое КДЧ x в шар (в пространстве КДЧ $\boldsymbol{E}_1$) с центром в точке x и радиусом, меньшим $2^{-n-\gamma(x)-2}$. Алгорифм θ, очевидно, есть эффективное покрытие конструктивной прямой. Применяя теорему 1, построим алгорифмы β_1, β_2 так, что β_1 перечисляет некоторое множество КДЧ $\mathscr{K}$, а β_2 перерабатывает всякое КДЧ x в натуральное число, причем всегда $!\beta_1(\beta_2(x))$ и $x \in \theta(\beta_1(\beta_2(x)))$. Поскольку, очевидно, множество $\mathscr{K}$ бесконечно, то β_1 можно заменить арифметически полным алгорифмом β_3, перечисляющим без повторений то же самое множество $\mathscr{K}$. При любом k

$$\sum_{i=0}^{k} |\theta(\beta_3(i))| \leqslant \sum_{i=0}^{k} 2^{-n-\gamma(\beta_3(i))-2} < \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-n-i-2} = 2^{-n-1}.$$

(Здесь $|\theta(\beta_3(i))|$ означает радиус шара $\theta(\beta_3(i))$; мы воспользовались тем, что все числа $\gamma(\beta_3(i))$ попарно различны.) Используя эту оценку и алгорифмы β_1, β_2, β_3, нетрудно получить 2^{-n}-ограниченное интервальное рациональное покрытие конструктивной прямой (в смысле определений § 1 гл. 8).

Существование сингулярных покрытий показывает, что теорема 1 не может быть усилена до теоремы о возможности выбора конечных покрытий. Вопрос о конструктивных аналогах теоремы Бореля (о конечных покрытиях) изучался в последнее время Лифшицем [4].

Можно показать (см. Н о г и н а [3] и К у ш н е р [10]), что ни одно из условий теоремы 1 не может быть опущено (даже при сохранении остальных условий).

2. Докажем теперь основную теорему работы Ц е й т и н а [5], усиливающую теорему непрерывности § 2.

Т е о р е м а 3 (Г. С. Цейтин). *Пусть* $\boldsymbol{M}_1$ — *слабо полное сепарабельное КМП,* $\boldsymbol{M}_2$ — *произвольное КМП и* Ψ — *алгорифмический оператор типа* $\boldsymbol{M}_1 \rightarrow \boldsymbol{M}_2$. *Можно построить алгорифмы* σ *и* τ *такие, что при любых* m, n *и* $X \in \boldsymbol{M}_1$

1) *если* $!\sigma(m, n)$, *то* $\sigma(m, n)$ — *шар в* $\boldsymbol{M}_1$ *и* $!\tau(m, n)$;

2) *если* $!\tau(m, n)$, *то* $\tau(m, n) \in \boldsymbol{M}_2$;

3) *если* $!\sigma(m, n)$, $X \in \sigma(m, n)$ *и* $!\Psi(X)$, *то*

$$\rho_2(\Psi(X),\ \tau(m,\ n)) < 2^{-m};$$

4) *если* $!\Psi(X)$, *то осуществимо* k *такое, что* $!\sigma(m, k)$ *и* $X \in \sigma(m, k)$. (Здесь ρ_2 — метрический алгорифм $\boldsymbol{M}_2$.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathscr{L}$ область определения оператора Ψ. Очевидно, $\mathscr{L}$ — согласованное множество. По теореме непрерывности (теорема 11 § 2), построим алгорифм α так, что при любых m и $X \in \boldsymbol{M}_1$

(19) если $!\Psi(X)$ (т. е. $X \in \mathscr{L}$), то $!\alpha(m, X)$, $\alpha(m, X)$ — шар с центром в точке X, причем для любого $Y \in \alpha(m, X)$ такого, что $!\Psi(Y)$, выполняется

$$\rho_2(\Psi(X),\ \Psi(Y)) < 2^{-m}.$$

Очевидно, при любом m алгорифм $\hat{\alpha}_m$ является эффективным покрытием согласованного множества $\mathscr{L}$. Пользуясь следствием 1, построим алгорифмы τ' и γ

так, что при любом m

(20) $\hat{\tau}'_m$ перечисляет некоторое подмножество $\mathscr{K}'_m$ множества $\mathscr{L}$;

(21) если $X \in \mathscr{L}$, то $!\gamma(m, X)$, $\gamma(m, X) \in \mathscr{K}'_m$ и $X \in \alpha(m, \gamma(m, X))$.

Искомые алгорифмы τ и σ строим теперь так, что

(22) $$\tau(m, n) \simeq \Psi(\tau'(m, n)),$$

(23) $$\sigma(m, n) \simeq \alpha(m, \tau'(m, n)).$$

Утверждение 1) теоремы следует из (19), (20) и (23), утверждение 2) из (20) и (22), утверждение 3) из (19), (20) и (22)—(23). Наконец, утверждение 4) вытекает из (21).

Доказанная теорема показывает, что при любом m область определения оператора Ψ может быть покрыта перечислимым множеством шаров так, что каждый шар этого множества отображается этим оператором внутрь некоторого шара пространства $\boldsymbol{M}_2$ радиуса 2^{-m}. Из усиленной теоремы непрерывности вытекает сформулированная нами в § 2 гл. 5 усиленная теорема непрерывности конструктивных функций и теорема Крайзела — Лакомба — Шёнфилда — Цейтина (Крайзел, Лакомб, Шёнфилд [1]—[2], Цейтин [3]—[5]) о продолжимости эффективных функционалов до частично рекурсивных операторов в смысле Клини [4].

Сделаем еще несколько замечаний по поводу теоремы 3 (ср. § 1 гл. 1 работы Цейтина [5]) *).

Существуют два подхода к определению вычислимых операторов. Мы поясним эти подходы на примере операторов, аргументами и значениями которых являются арифметические функции (т. е. функции натурального аргумента с натуральными значениями). При первом подходе в качестве исходных данных и результатов оператора фигурируют (в той или иной кодировке) предписания алгорифмов, вычисляющих аргументные и результирующие функции, на-

*) Следующие два абзаца не претендуют на особую точность. Изложение в них не укладывается в рамки конструктивной математики. (В частности, термин «функция» понимается в традиционном смысле.)

пример, записи алгорифмов типа $(\mathscr{H} \to \mathscr{H})$. При этом на оператор естественно наложить требование корректности, состоящее в данном случае в том, что если два входных предписания определяют одну и ту же функцию, то получаемые по ним с помощью оператора предписания также определяют вычисление одной и той же функции. Такой характер носят эффективные функционалы и конструктивные функции. Следуя Цейтину [5], назовем операторы описанного типа операторами Маркова. При втором подходе оператор использует не предписания для вычисления аргументной функции — такое предписание может быть неизвестным, — а лишь значения исходной функции, которые предполагаются доступными всякий раз, когда в них возникает необходимость. Можно представить себе, что имеется «оракул», вычисляющий исходную фунцию, к которому обращается оператор в процессе вычисления значений результирующей функции. При таком подходе можно даже не предполагать вычислимости исходной функции — вычислимость результата носит здесь относительный характер; именно, результирующая функция вычислима в той степени, в какой умеет вычислять исходную функцию «оракул». Условие корректности в данном случае выполнено автоматически, более того, если результирующая функция оказалась, например, определенной в 0, то при вычислении ее значения были использованы лишь значения исходной функции в некотором конечном числе точек, так что для любой другой функции, совпадающей с исходной в этих точках, результирующая функция примет в нуле то же самое значение. В случае операторов над арифметическими функциями в качестве общего варианта описанного типа операторов естественно принять частично рекурсивные операторы в смысле Клини [4, § 63]*). Аналогичный характер носят вычислимые функционалы Гжегорчика [2] и определяемые на их основе вычислимые действительные функции. (Вычислимые действительные функции такого типа рассматриваются также Клауа [2], [4].) Операторы описанного типа мы, следуя

---

*) Приведем определение частично рекурсивного оператора (от одного функционального аргумента), следуя Лахлану [2]. Назовем f-кортежем пустое слово или кортеж пар натуральных чисел

$$n_1, m_1 * n_2, m_2 * \ldots * n_k, m_k. \tag{24}$$

Пусть φ — (частичная) арифметическая функция. Скажем, что φ продолжает кортеж (24), если $\varphi(n_i) = m_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Будем также считать, что любая функция продолжает пустой f-кортеж. Произвольное слово вида $i * j * P$, где i, j — натуральные числа, P — f-кортеж, назовем 0-кортежем. Пусть Φ — оператор (в традиционном смысле этого слова), переводящий всякую арифметическую функцию φ в арифметическую функцию $\Phi\langle\varphi\rangle$. Назовем Φ частично рекурсивным, если можно построить перечислимое множество 0-кортежей W так, что при любой функции φ и натуральных i, j $\Phi\langle\varphi\rangle(i) = j$ тогда и только тогда, когда существует 0-кортеж $i * j * P$ из W такой, что φ продолжает P. С топологической трактовкой частично рекурсивных операторов можно ознакомиться в работах Успенского [1] и Лахлана [2].

Цейтину [5], назовем операторами Клини *). Ясно, что от оператора Клини нетрудно перейти к совпадающему с ним (на вычислимых функциях) оператору Маркова: оракул может быть заменен универсальным алгорифмом, который, получив запись исходного алгорифма, выдает требуемые в процессе вычисления значения исходной функции. Соединение этого универсального алгорифма с описанием самого оператора позволит построить алгорифм, который по записи исходной функции и n выдает значение результирующей функции в точке n (если оно определено). От этого алгорифма легко перейти к алгорифму, переводящему запись алгорифма вычисления исходной функции в запись алгорифма, вычисляющего результирующую функцию. Обратный переход от оператора Маркова к оператору Клини, напротив, отнюдь не очевиден: в самом деле, в то время как оператор Клини использует при вычислении данного значения результата лишь конечное число значений исходной функции, оператор Маркова использует для той же цели характеристику исходной функции в целом (именно, предписание вычисляющего ее алгорифма). Вместе с тем для многих конкретных марковских операторов такой переход возможен — например, вычисление суммы двух КДЧ (определенное нами посредством некоторого оператора типа Маркова) может быть реализовано посредством оператора Клини: для того чтобы найти рациональное приближение к результату с точностью до 2^{-n}, вовсе не нужно знать исходные числа с любой степенью точности, достаточно иметь рациональные приближения к ним с точностью до 2^{-n-1}. Оказывается, теорему 3 можно в определенном смысле трактовать как утверждение о продолжимости марковских операторов из некоторого достаточно широкого класса до операторов клиниевского типа.

Действительно, всякая точка X сепарабельного КМП может быть некоторым стандартным образом представлена сходящейся к ней последовательностью элементов плотного множества; члены этой последовательности можно рассматривать как приближения к X, а само слово X трактовать как код алгорифма, вычисляющего соответствующую X последовательность. В свете сказанного естественно считать, что рассматриваемые в теореме 3 операторы имеют марковский характер. Теорема 3 позволяет определить клиниевский процесс вычисления приближений фигурирующего в ней оператора Ψ, использующий не саму точку X, а лишь приближения к ней. Этот процесс для данной точки X и точности 2^{-m} можно коротко описать так: пользуясь приближениями к X, ищем l, при котором $!\sigma(m, l)$ и X принадлежит шару $\sigma(m, l)$; в случае нахождения такого l $\tau(m, l)$ считаем приближением $\Psi(X)$ с точностью 2^{-m} (в смысле метрики M_2). Если $!\Psi(X)$, то соответствующее l дей-

---

*) Ясно, что клиниевский характер носят, например, тождественный оператор и оператор наименьшего числа:

$$\Psi\langle\varphi\rangle(n) \simeq \varphi(n),$$

$$\Psi\langle\varphi\rangle(n) \simeq \mu k\left(\left(\mathop{\&}_{l=0}^{k} !\varphi(l)\right) \& \left(\mathop{\&}_{l=0}^{k-1} \varphi(l) \neq 0\right) \& (\varphi(k) = 0)\right).$$

ствительно найдется *). Вместе с тем описанный процесс может дать результат и при X, на котором Ψ не определен. Возникает естественный вопрос об усилении теоремы 3, при котором эта возможность была бы исключена. Из результатов следующего пункта следует, что такое усиление невозможно. В самом деле, при каждом фиксированном m описанный нами процесс будет завершаться нахождением требуемого l для любого X, принадлежащего какому-нибудь из шаров $\sigma(m, k)$. Другими словами, область определения этого процесса будет лакомбовым множеством (объединением шаров, перечисляемых алгорифмом $\hat{\sigma}_m$). Вместе с тем в следующем пункте будут приведены примеры алгорифмических операторов (действующих из полных сепарабельных пространств), области определения которых, во-первых, непусты и, во-вторых, не содержат ни одного шара.

3. Следствие 4 п. 4 § 2 показывает, что если алгорифмический оператор определен в некоторой точке X слабо полного КМП, то в любой последовательности точек, (конструктивно) сходящейся к X, сколь угодно далеко имеются точки определенности этого оператора. В большинстве реально встречающихся случаев оказывается, что, сверх того, существует шар с центром в точке X, на котором всюду определен рассматриваемый оператор. В частности, таким свойством обладают все элементарные конструктивные функции и функции, получаемые из них с помощью арифметических операций и суперпозиций. Построение алгорифмических операторов, не обладающих этим свойством, требует достаточно тонких конструкций. Первые примеры такого рода — примеры эффективных функционалов, области определения которых не являются открытыми множествами — построены Фридбергом [1] и А. А. Мучником **) (результат Мучника, не опубликованный автором, воспроизведен в работе Цейтина [8], там же указано, что Мучник доказал аналогичную теорему и для конструктивных функций).

Мы будем следовать общей конструкции, принадлежащей Московакису [1] и позволяющей получить

---

*) Очевидно, если Ψ — эффективный функционал, $!\Psi(X)$ и $m = 1$, то находимое нами приближение совпадает с $\Psi(X)$. Таким образом, мы получаем клиниевский функционал, являющийся продолжением исходного.

**) И тот и другой автор имели в виду получение примера эффективного функционала, не совпадающего (на общерекурсивных функциях) ни с каким частично рекурсивным оператором.

единообразным способом интересующие нас примеры как для бэровского пространства, так и для конструктивной прямой.

Пусть $\mathfrak{B}$ — тот же самый алгорифм, что и в п. 3 § 2, т. е. при любом алгорифме $\mathfrak{A}$ (в алфавите A_{I}^{a}) и любом слове Q (в алфавите A)

(25) $$\mathfrak{B}(\{\mathfrak{A}\}, Q) \simeq \mathfrak{A}(Q).$$

Для произвольного слова P в алфавите $Ч_0 = \{0|\}$ обозначим через $\langle P\rangle$ алгорифм $\tilde{\mathfrak{B}}_P$. В силу (25), если $P \rightleftharpoons \{\mathfrak{A}\}$, то при любом Q

$$\langle P\rangle(Q) \simeq \mathfrak{A}(Q).$$

Обозначим через $\mathscr{B}_k$ такие множества слов в алфавите $Ч_0$, что

(26) $$P \in \mathscr{B}_k \equiv \underset{i\leqslant k}{\forall i}\,((!\langle P\rangle(i))\ \&\ (\langle P\rangle(i) \in \mathscr{H}))$$

(где $\mathscr{H}$ — множество натуральных чисел).

Пусть $\boldsymbol{M}$ — сепарабельное КМП с метрическим алгорифмом ρ и алгорифм β перечисляет плотное подмножество $\boldsymbol{M}$. Обозначим через $\mathscr{M}_k^{\text{I}}$ такие множества слов в $Ч_0$, что

(27) $$P \in M_k^{\text{I}} \equiv (P \in \mathscr{B}_k)\ \&\ \underset{i\leqslant k}{\forall i}\,(!\beta(\langle P\rangle(i))).$$

Для $P \in \mathscr{M}_k^{\text{I}}$ мы будем использовать следующее сокращение:

(28) через $\{P\}_i$ (при $i \leqslant k$) обозначается $\beta(\langle P\rangle(i))$.

Очевидно, $\{P\}_i$ есть элемент КМП $\boldsymbol{M}$.

Введем в рассмотрение множества $\mathscr{M}_k$ слов в $Ч_0$ такие, что

(29) $$P \in \mathscr{M}_k \equiv (P \in \mathscr{M}_k^{\text{I}})\ \&\ \forall ij\,(i \leqslant j \leqslant k \supset \rho(\{P\}_i, \{P\}_j) < 2^{-i}).$$

Из (25)—(29) легко усматривается, что все множества $\mathscr{M}_k$ перечислимы. Обозначим через $\mathscr{M}_\infty$ пересечение множеств $\mathscr{M}_k$, т. е.

(30) $$P \in \mathscr{M}_\infty \equiv \forall k\,(P \in \mathscr{M}_k).$$

Ясно, что P принадлежит $\mathscr{M}_\infty$ в том и только в том случае, когда: 1) $\langle P\rangle$ есть последовательность натуральных чисел; 2) алгорифм β применим к любому натуральному числу $\langle P\rangle(n)$; 3) последовательность точек КМП M $\beta(\langle P\rangle(n))$ регулярна.

Пользуясь сепарабельностью M, нетрудно построить алгорифм, отображающий M в $\mathscr{M}_\infty$. Действительно, так как β перечисляет плотное подмножество M, можно построить алгорифм α, перерабатывающий всякий шар $X*n$ (где $X\in M$) в натуральное число так, что $!\beta(\alpha(X*n))$ и $\beta(\alpha(X*n))\in X*n$. Построим алгорифмы F^1, F^2 так, что для любого $X\in M$ и n

$$(31)\qquad \begin{aligned} &F^1(X,\ n)\simeq\alpha(X*n+1),\\ &F^2(X,\ n)\simeq\beta(F^1(X,\ n)). \end{aligned}$$

Ясно, что $\widehat{F}^1_X$ — последовательность натуральных чисел, а $\widehat{F}^2_X$ — регулярная последовательность точек M (сходящаяся к X). Поэтому алгорифм F такой, что

$$F(X)\mathrel{\underset{\cdot}{=}}\{\widehat{F}^1_X\},$$

перерабатывает всякий $X\in M$ в некоторый элемент $\mathscr{M}_\infty$. Введем отношение $\underset{k}{\sim}$ следующим образом (см. (28)):

$$(32)\quad P\underset{k}{\sim}Q\equiv(P\in\mathscr{M}_k)\,\&\,(Q\in\mathscr{M}_k)\,\&\,(\rho(\{P\}_k,\ \{Q\}_k)<2^{-k+1}).$$

Нетрудно видеть, что все отношения $\underset{k}{\sim}$ перечислимы; другими словами, можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$ так, что для любых слов P и Q в $Ч_0$ и любого k

$$!\mathfrak{A}(k,\ P,\ Q)\equiv P\underset{k}{\sim}Q.$$

Пусть ν — алгорифм, перерабатывающий слова в алфавите $Ч_0$ в натуральные числа, причем разные слова в разные натуральные числа. Фиксируем произвольное $X_0\in M$ и алгорифм g типа $(\mathscr{H}\to\mathscr{H})$ такой, что

$$(33)\qquad g(n+1)\geqslant g(n)+3.$$

Введем для краткости следующие обозначения:

(34) при $X\in M$ через $\bar{X}$ обозначается $F(X)$;

(35) при любом слове P в $Ч_0$ через n_P обозначается натуральное число $g(\nu(P))$.

Рассмотрим множества $\mathscr{R}_i$ слов в $Ч_0$, определяемые индуктивно следующим образом ((32), (33)—(35)):

(36) $$P \in \mathscr{R}_0 \equiv P \dot{=} \bar{X}_0,$$

(37) $$P \in \mathscr{R}_{n+1} \equiv \exists Q\,((Q \in \mathscr{R}_n) \,\&\, (Q \underset{n_P}{\sim} P)).$$

Перечислимость отношений $\underset{k}{\sim}$ позволяет без особого труда доказать, что все множества $\mathscr{R}_i$ перечислимы. Следовательно, перечислимо их объединение, т. е. такое множество $\mathscr{R}$, что

$$P \in \mathscr{R} \equiv \exists n\,(P \in \mathscr{R}_n).$$

Обозначим теперь через $\mathscr{L}$ множество элементов $\boldsymbol{M}$ такое, что для $X \in \boldsymbol{M}$

$$X \in \mathscr{L} \equiv \bar{X} \in \mathscr{R}.$$

Установим некоторые свойства множества $\mathscr{L}$.

Лемма 1. $X_0 \in \mathscr{L}$.

Для доказательства достаточно заметить, что $\bar{X}_0 \in \in \mathscr{R}_0$.

Лемма 2. *Если* $X \in \boldsymbol{M}$, *то* $\bar{X} \in \mathscr{M}_\infty$ *и при любом* n $\rho(\{\bar{X}\}_n, X) < 2^{-n-1}$.

Эта лемма непосредственно усматривается из определений алгорифмов α, β, F^1, F и (34). Из леммы 2 и (32) немедленно вытекает

Лемма 3. *Если* $X \in \boldsymbol{M}$, $Y \in \boldsymbol{M}$ *и* $X \underset{\boldsymbol{M}}{=} Y$, *то при любом* n $\bar{X} \underset{n}{\sim} \bar{Y}$.

Лемма 4. $\mathscr{L}$ *— согласованное множество.*

Действительно, ввиду перечислимости $\mathscr{R}$ можно построить алгорифм θ^1 так, что

$$!\theta^1(P) \equiv P \in \mathscr{R}.$$

Построим алгорифм θ таким образом, что для любого X

$$\theta(X) \simeq \theta^1(\bar{X}).$$

Тогда при любом $X \in \boldsymbol{M}$

$$!\theta(X) \equiv X \in \mathscr{L}$$

и для окончания доказательства достаточно показать, что $\mathscr{L}$ — правильное множество.

Пусть $X \in \mathscr{L}$. Тогда при некотором n $\overline{X} \in \mathscr{R}_n$. На основании леммы 3 из $Y \underset{M}{=} X$ вытекает тогда $\overline{Y} \in \mathscr{R}_{n+1}$, т. е. $Y \in \mathscr{L}$, что и требуется.

Лемма 5. *Дополнение множества $\mathscr{L}$ (в пространстве M) эффективно открыто.*

Доказательство. Рассмотрим алгорифм γ такой, что при любом $X \in M$

$$\gamma(X) \simeq g(\nu(\overline{X})).$$

Очевидно, при $X \in M$ $!\gamma(X)$ и $\gamma(X)$ — натуральное число. Покажем, что если $X \notin \mathscr{L}$, то все точки шара $X * \gamma(X)$ не принадлежат $\mathscr{L}$. Действительно, пусть $Y \in X * \gamma(X)$. Тогда ((35))

$$\rho(X, Y) < 2^{-g(\nu(\overline{X}))} = 2^{-n_{\overline{X}}}.$$

Предположим, что $Y \in \mathscr{L}$. Тогда при некотором n

$$\overline{Y} \in \mathscr{R}_n.$$

Согласно лемме 2 при любом i

$$\rho(\{\overline{X}\}_i, X) < 2^{-i-1},$$

$$\rho(\{\overline{Y}\}_i, Y) < 2^{-i-1}.$$

Следовательно,

$$\rho(\{\overline{X}\}_i, \{\overline{Y}\}_i) < 2^{-n_{\overline{X}}} + 2^{-i}.$$

Полагая $i = n_{\overline{X}}$, получим

$$\rho(\{\overline{X}\}_{n_{\overline{X}}}, \{\overline{Y}\}_{n_{\overline{X}}}) < 2^{-n_{\overline{X}}+1},$$

т. е. ((32))

$$\overline{X} \underset{n_{\overline{X}}}{\sim} \overline{Y}.$$

Отсюда согласно (37) получаем

$$\overline{X} \in \mathscr{R}_{n+1},$$

что, ввиду $X \notin \mathscr{L}$, невозможно.

Определение 4. 1) *Точку X назовем предельной точкой множества $\mathscr{M}_1$ точек M, если невозможен шар с центром в точке X, не содержащий точек $\mathscr{M}_1$,*

2) *Множество* $\mathcal{M}_1$ *назовем замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.*

Обращаем внимание читателя на отличие этого определения от определений алгорифмической предельной точки и алгорифмически замкнутого множества. Ясно, что алгорифмическая предельная точка является предельной точкой и что замкнутое множество алгорифмически замкнуто. Обратные утверждения, как будет показано ниже, можно опровергнуть на примере.

Лемма 6. *Множество* $\mathcal{L}$ *замкнуто.*

Действительно, пусть X — предельная точка $\mathcal{L}$. Предположим, что $X \notin \mathcal{L}$. Тогда по лемме 5 найдется шар с центром в точке X, не содержащий точек $\mathcal{L}$. Это, однако, невозможно. Следовательно, выполняется $\urcorner\urcorner(X \in \mathcal{L})$, что, ввиду согласованности $\mathcal{L}$, дает $X \in \in \mathcal{L}$.

Лемма 7. *Для каждого* $P \in \mathcal{R}$ *можно построить цепочку* $P_0, \ldots, P_k$ *попарно различных элементов* $\mathcal{R}$ *так, что* $P_0 \doteq \bar{X}_0$, $P_k \doteq P$ *и*

$$P_k \underset{n_{P_k}}{\sim} P_{k-1} \underset{n_{P_{k-1}}}{\sim} \ldots P_1 \underset{n_{P_1}}{\sim} !$$

Действительно, непосредственно из определения множества $\mathcal{R}$ ((36)—(37)) усматривается возможность построения цепочки

$$P \doteq Q_l \underset{n_{Q_l}}{\sim} Q_{l-1} \underset{n_{Q_{l-1}}}{\sim} \ldots Q_1 \underset{n_{Q_1}}{\sim} Q_0 \doteq \bar{X}_0.$$

Остается устранить в этой цепочке повторения. Пусть $i \leqslant l$ — наименьшее число, при котором $Q_i \doteq Q_l$. Тогда отбрасывая члены цепочки с номерами, бо́льшими i, получим цепочку, начинающуюся с $P \doteq Q_l$, в которую P входит точно один раз. Пусть эта цепочка имеет вид

$$P \doteq Q'_m \underset{n_{Q'_m}}{\sim} Q'_{m-1} \underset{n_{Q'_{m-1}}}{\sim} \ldots Q'_1 \underset{n_{Q'_1}}{\sim} Q'_0 \doteq \bar{X}_0.$$

Найдем наименьшее $i \leqslant m-1$, при котором $Q'_i \doteq \doteq Q'_{m-1}$. Выбрасывая все члены с номерами k такими, что $i < k \leqslant m-1$ (если $i = m-1$, то ничего не выбрасывается), получим цепочку, содержащую свои последние два члена точно один раз. Действуя таким образом и дальше, получим требуемую цепочку.

Выполним теперь некоторую оценку, показывающую, что множество $\mathscr{L}$ достаточно «редко».

Для упрощения изложения нам будет удобно считать, что алгорифм ν и фиксированный элемент X_0 выбраны так, что $\nu(\overline{X}_0) \doteq 0$. Для любого слова P в алфавите $Ч_0$ число $\nu(P)$ будем называть номером этого слова. (Различные слова имеют различные номера.)

Лемма 8. *Пусть $Q_0, \ldots, Q_{l_k}$ — список всех элементов $\mathscr{R}$ с номерами, не бо́льшими k. Тогда для любого $X \in \mathscr{L}$ при некотором $i \leqslant l_k$ $Q_i \in \mathscr{M}_{g(k)}$ и X принадлежит шару с центром в точке $\{Q_i\}_{g(k)}$ радиуса $2^{-g(k)+3}$* (см. (28) — (29)).

Доказательство. Можно считать, что $Q_0 \doteq X_0$. Пусть $X \in \mathscr{L}$. Тогда $\overline{X} \in \mathscr{R}$. Возможны случаи:

а) Номер $\overline{X}$ не больше k. Тогда при некотором $i \leqslant l_k$ $\overline{X} \doteq Q_i$. Полагая в лемме 2 $n = g(k)$, получим

$$\rho(\{Q_i\}_{g(k)}, X) < 2^{-g(k)-1} < 2^{-g(k)+3},$$

что и требуется.

б) Номер $\overline{X}$ больше k. Тогда, пользуясь леммой 7, мы сможем найти $Q_i (i \leqslant l_k)$ и элементы $P_1, \ldots, P_s$ из $\mathscr{R}$ так, что номера всех P_i больше k, все слова $\overline{X}, P_1, \ldots$ $\ldots, P_s, Q_i$ попарно различны и

$$\overline{X} \underset{n_{\overline{X}}}{\sim} P_1 \underset{n_{P_1}}{\sim} \cdots \underset{n_{P_{s-1}}}{\sim} P_s \underset{n_{P_s}}{\sim} Q_i \text{ *)}.$$

Так как $n_{P_s} > g(k)$ и $P_s \underset{n_{P_s}}{\sim} Q_i$, то $Q_i \in \mathscr{M}_{n_{P_s}}$, а следовательно, $Q_i \in \mathscr{M}_{g(k)}$. Применяя аксиому треугольника, получим

$$\left.\begin{aligned}
&\rho(\{\overline{X}\}_{g(k)}, \{Q_i\}_{g(k)}) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \rho\left(\{\overline{X}\}_{g(k)}, \{\overline{X}\}_{n_{\overline{X}}}\right) + \rho\left(\{\overline{X}\}_{n_{\overline{X}}}, \{P_1\}_{n_{\overline{X}}}\right) + \\
\text{(I)}\quad &\left\{\begin{aligned}
&+ \rho\left(\{P_1\}_{n_{\overline{X}}}, \{P_1\}_{n_{P_1}}\right) + \rho\left(\{P_1\}_{n_{P_1}}, \{P_2\}_{n_{P_1}}\right) + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \rho\left(\{P_s\}_{n_{P_{s-1}}}, \{P_s\}_{n_{P_s}}\right) + \rho\left(\{P_s\}_{n_{P_s}}, \{Q_i\}_{n_{P_s}}\right) +
\end{aligned}\right. \\
&\qquad\qquad + \rho\left(\{Q_i\}_{n_{P_s}}, \{Q_i\}_{g(k)}\right).
\end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

*) Разумеется, возможен также случай, когда написанная цепочка состоит лишь из $\overline{X}$ и Q_i.

Так как $n_{\overline{X}} > g(k)$, то ((31), (34))

(38) $$\rho\left(\{\overline{X}\}_{g(k)}, \{\overline{X}\}_{n_{\overline{X}}}\right) < 2^{-g(k)}.$$

Аналогично из $Q_l \in \mathscr{M}_{n_{P_s}}$ и $n_{P_s} > g(k)$ следует

(39) $$\rho\left(\{Q_l\}_{n_{P_s}}, \{Q_l\}_{g(k)}\right) < 2^{-g(k)}.$$

При оценке суммы S_{I} членов группы (I) мы воспользуемся следующим очевидным неравенством: если $P \in \mathscr{M}_{\max(i,j)}$, то

$$\rho(\{P\}_i, \{P\}_j) < 2^{-\min(i,j)} < 2^{-i} + 2^{-j}.$$

Следовательно,

$$\rho\left(\{P_1\}_{n_{\overline{X}}}, \{P_1\}_{n_{P_1}}\right) < 2^{-n_{\overline{X}}} + 2^{-n_{P_1}}$$

и при $2 \leqslant i \leqslant s$

$$\rho\left(\{P_i\}_{n_{P_{i-1}}}, \{P_i\}_{n_{P_i}}\right) < 2^{-n_{P_{i-1}}} + 2^{-n_{P_i}}.$$

Следовательно, сумма членов группы (I) оценивается так:

$$S_{\mathrm{I}} < 2^{-n_{\overline{X}}} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{s} 2^{-n_{P_i}} = 2^{-g(\nu(\overline{X}))} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{s} 2^{-g(\nu(P_i))}.$$

Поскольку все числа $\nu(\overline{X})$, $\nu(P_i)$ $(i \leqslant s)$ попарно различны и больше k, то

$$S_{\mathrm{I}} < 2 \cdot \sum_{i=g(k+1)}^{\infty} 2^{-i}.$$

Сумма S_{II} группы членов (II) аналогично оценится (ср. (32)) суммой

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-g(i)+1} = 2 \cdot \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-g(i)} < 2 \cdot \sum_{i=g(k+1)}^{\infty} 2^{-i}.$$

Собирая сделанные оценки, получим ((33))

$$\rho(\{\overline{X}\}_{g(k)}, \{Q_l\}_{g(k)}) < 2^{-g(k)} + 2^{-g(k)} + 4 \cdot \sum_{i=g(k+1)}^{\infty} 2^{-i} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-g(k)+1} + 4 \cdot 2^{-g(k+1)+1} = 2^{-g(k)+1} + 2^{-g(k+1)+3} < 2^{-g(k)+2}.$$

Поскольку, с другой стороны,

$$\rho(\{\overline{X}\}_{g(k)}, X) < 2^{-g(k)-1} < 2^{-g(k)+2},$$

то

$$\rho(X, \{Q_i\}_{g(k)}) < 2^{-g(k)+3},$$

что и требуется.

Определение 5. *Пусть h — последовательность натуральных чисел, **M** — КМП. Будем говорить, что **M** нигде не редко по отношению к h, если никакой шар радиуса 2^{-n} в пространстве **M** не может быть покрыт $n+1$ шарами радиуса $2^{-h(n)+3}$* *).

Определение 6. *Множество точек данного КМП назовем нигде не плотным (в этом КМП), если оно не содержит ни одного шара.*

Ясно, что эффективно нигде не плотное множество (определение 15 § 1) нигде не плотно. Обратное утверждение неверно даже для замкнутых множеств.

Из леммы 8 получается

Лемма 9. *Пусть **M** нигде не редко по отношению к g. Тогда множество $\mathscr{L}$ нигде не плотно в **M**.*

Возьмем теперь в качестве g такой алгорифм, что при любом n

$$g(n) \doteq 3\cdot(n+2)$$

(очевидно, $g(n+1) = g(n)+3$). Нетрудно видеть, что как пространство КДЧ, так и бэровское пространство нигде не редки по отношению к g. В самом деле, если шар радиуса 2^{-n} в $\boldsymbol{E}_1$ (т. е. интервал длины 2^{-n+1}) можно было бы покрыть $n+1$ шарами $\boldsymbol{E}_1$ радиуса $2^{-g(n)+3} = 2^{-3\cdot n-3}$, то оказалось бы

$$2^{-n+1} \leqslant (n+1)\cdot 2^{-3\cdot n-2} < 2^{-2\cdot n-1},$$

что невозможно. Далее, любой шар бэровского пространства не может быть накрыт никаким числом шаров меньшего радиуса **). Это вытекает из того простого обстоятельства, что если $\delta, \delta_0, \ldots, \delta_k$ — последовательности натуральных чисел и n — произвольное число, то

*) Множества $\mathscr{K}_0, \ldots, \mathscr{K}_l$ покрывают множество $\mathscr{K}$, если для любого $X \in \mathscr{K}$ не может не существовать $i \leqslant l$, при котором $X \in \mathscr{K}_i$.

**) Напомним, что нами введены и рассматриваются лишь шары с радиусами вида 2^{-n}.

можно построить такую последовательность натуральных чисел σ, что $\sigma(i) = \delta(i)$ при $i \leqslant n$ и $\sigma(n+1) \neq \neq \delta_j(n+1)$ при $j \leqslant k$. Таким образом, σ принадлежит бэровскому шару $\{\delta\}*n$ и не принадлежит ни одному из шаров $\{\delta_i\}*n+1$ (где $i \leqslant k$).

Из сказанного и леммы 9 вытекают

Теорема 4. *В бэровском пространстве можно построить непустое замкнутое согласованное нигде не плотное множество.*

Теорема 5. *Можно построить непустое замкнутое согласованное нигде не плотное множество КДЧ.*

Из теорем 4—5 вытекают следующие утверждения

Теорема 6. *Можно построить эффективный функционал, определенный на нулевой последовательности, область определения которого не содержит ни одного шара.*

Теорема 7. *Можно построить конструктивную функцию f, определенную в нуле и такую, что невозможен интервал, во всех точках которого была бы определена f* *).

Обозначим через $\mathscr{K}_f$ множество тех КДЧ, на которых не определена функция f. Множество $\mathscr{K}_f$ дает ряд интересных примеров. Легко видеть, что 0 является предельной точкой множества $\mathscr{K}_f$ и вместе с тем (ввиду следствия 4 п. 4 § 2) не является алгорифмической предельной точкой $\mathscr{K}_f$. Здесь мы имеем дело с любопытной ситуацией: хотя сколь угодно близко к 0 и есть точки множества $\mathscr{K}_f$, алгорифм, выбирающий по каждому n точку $\mathscr{K}_f$, по модулю меньшую 2^{-n}, невозможен. Из сказанного также следует, что $\mathscr{K}_f$ непрослеживаемо (определение 12 п. 4 § 2). Далее, поскольку множество $\mathscr{K}_f$, будучи дополнением согласованного множества, алгорифмически замкнуто (следствие 5 п. 4 § 2), то $\mathscr{K}_f$ дает пример алгорифмически замкнутого, но не замкнутого множества. Из непрослеживаемости $\mathscr{K}_f$ вытекает, что область определения f, которая нигде не

---

*) В работе Цейтина [8] приведена значительно менее громоздкая конструкция конструктивной функции, определенной в нуле и не являющейся всюду определенной ни в какой окрестности нуля. Там же в подстрочном примечании приведены примеры эффективных функционалов типа функционала теоремы 6, принадлежащие Фридбергу и Мучнику. Эти примеры, выполненные специально для бэровского пространства, также значительно менее громоздки, чем примеры, даваемые теоремой 6.

плотна на конструктивной прямой, не является эффективно нигде не плотным множеством. Наконец, множество $\mathscr{K}_f$, будучи эффективно открытым (лемма 5), не является лакомбовым (если бы $\mathscr{K}_f$ было лакомбовым, то оно оказалось бы согласованным, а следовательно, и прослеживаемым множеством).

Отметим еще следующее интересное свойство изложенной выше конструкции. Как, вероятно, помнит читатель, при построении множества $\mathscr{L}$ фиксировалась точка $X_0 \in M$, которая затем оказывалась элементом $\mathscr{L}$. Чтобы подчеркнуть это, переобозначим $\mathscr{L}$ посредством $\mathscr{L}^{X_0}$. Пусть $\mathscr{Y}$ — плотное подмножество M. Тогда из определения множества $\mathscr{R}$ (стр. 416) легко усматривается, что пространство M (точнее, его носитель) является объединением множеств $\mathscr{L}^X$, где $X \in \mathscr{Y}$. В частности, как конструктивная прямая, так и бэровское пространство могут быть получены объединением последовательности замкнутых, согласованных, нигде не плотных множеств. Таким образом, условие эффективной нигде не плотности в приведенном в § 1 конструктивном аналоге теоремы Бэра существенно.

4. Определение алгорифмического оператора, данное в § 2, включает условие согласованности задающего оператор алгорифма. Это приводит к тому, что в точках неопределенности оператора не определен (т. е. не заканчивает свою работу) соответствующий алгорифм. Вместе с тем представляется достаточно естественным рассмотрение таких операторов, у которых точки неопределенности являются просто точками рассогласованности, так что задающий оператор алгорифм может быть применим к этим точкам. Именно, такой характер имело определение конструктивной функции, предложенное Марковым в его первой публикации о конструктивных функциях [3]. Как показал Слисенко [3], при отказе от требования согласованности оператора на всем пространстве (или, что то же самое, при отказе от требования согласованности области определения оператора) теорема непрерывности опровергается на примере. В данном пункте мы изложим этот результат Слисенко.

Определение 7. 1) Пусть $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ — *КМП (в фиксированном нами алфавите A). Псевдооператором из* $\mathbf{M}_1$

в M_2 *или, короче, типа* $M_1 \dot{\to} M_2$ *назовем произвольный алгорифм в алфавите* A_1^a.

2) *Будем говорить, что псевдооператор* Ψ *типа* $M_1 \dot{\to} M_2$ *определен в точке* $X \in M_1$, *если при любом* $Y \underset{M_1}{=} X$ $!\Psi(Y)$, $\Psi(Y) \in M_2$ *и* $\Psi(Y) \underset{M_2}{=} \Psi(X)$.

Определение 8. *Псевдооператор* Ψ *из* M_1 *в* M_2 *назовем квазиоператором, если этот псевдооператор определен во всякой точке* $X \in M_1$ *такой, что* $!\Psi(X)$ *и* $\Psi(X) \in M_2$.

Понятия псевдо- и квазиоператора предложены Слисенко [3]. В силу теоремы 6 § 2 псевдооператоры (а следовательно, и квазиоператоры) обладают некоторыми свойствами непрерывности — именно, любой псевдооператор неразрывен, т. е. не может иметь конструктивных разрывов.

Теорема 8 (пример неразрывного, но не непрерывного квазиоператора; Слисенко [3]). *Можно построить квазиоператор* Ψ *из пространства КДЧ в себя такой, что*

1) Ψ *определен в* 0 *и* $\Psi(0) = 0$;

2) *невозможна окрестность нуля такая, что* Ψ *не определен во всех ненулевых точках этой окрестности;*

3) *если* $x \neq 0$ *и* Ψ *определен в точке* x, *то* $\Psi(x) = 1$.

Доказательство. Пусть f — конструктивная функция, построенная согласно теореме 7, т. е.

$$!f(0); \tag{40}$$

(41) область определения f не содержит ни одного интервала.

Пусть $\bar{G}$ — такой алгорифм, что

$$!\bar{G}(x) \equiv x \neq 0. \tag{42}$$

Построим алгорифмы γ^1, γ^2 и γ^3 так, что

$$\gamma^1(x) \simeq \mu n(([f](x, n) \dot{=} \Lambda) \vee ([\bar{G}](x, n) \dot{=} \Lambda));$$

$$\gamma^2(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{если } [\bar{G}](x, \gamma^1(x)) \dot{=} \Lambda, \\ 0, & \text{если } [\bar{G}](x, \gamma^1(x)) \dot{\neq} \Lambda; \end{cases}$$

$$\gamma^3(x, 0) \dot{=} \gamma^2(x)$$

и при $n > 0$

$$\gamma^3(x, n) \mathrel{\dot{=}} \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \gamma^2(x) \mathrel{\dot{=}} 1 \quad \text{и} \quad [f](x, n) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda, \\ 0, & \text{если} \quad \gamma^2(x) \mathrel{\dot{=}} 1 \quad \text{и} \quad [f](x, n) \mathrel{\dot{=}} \Lambda, \\ 0, & \text{если} \quad \gamma^2(x) \mathrel{\dot{=}} 0 \quad \text{и} \quad [\overline{G}](x, n) \mathrel{\dot{\neq}} \Lambda, \\ 1, & \text{если} \quad \gamma^2(x) \mathrel{\dot{=}} 0 \quad \text{и} \quad [\overline{G}](x, n) \mathrel{\dot{=}} \Lambda. \end{cases}$$

Предположим, что при некотором КДЧ $x \urcorner !\gamma^1(x)$. Тогда, ввиду (40), $x \neq 0$. Следовательно ((42)), $!\overline{G}(x)$ и при некотором n $[\overline{G}](x, n) \mathrel{\dot{=}} \Lambda$, что невозможно. Поэтому при любом x выполняется $\urcorner\urcorner !\gamma^1(x)$, т. е. $!\gamma^1(x)$. Отсюда получаем, что всегда $!\gamma^2(x)$ и

(43) если $\gamma^2(x) \mathrel{\dot{=}} 0$, то $!f(x)$;

(44) если $\gamma^2(x) \mathrel{\dot{=}} 1$, то $x \neq 0$.

Из применимости γ^2 к любому x следует, что $\hat{\gamma}^3_x$ является последовательностью рациональных чисел. Нетрудно также убедиться, что ((43) — (44))

(45) если $x = 0$, то при любом n $\gamma^3(x, n) \mathrel{\dot{=}} 0$;

(46) если $x \neq 0$ и $\urcorner ! f(x)$, то при любом n

$$\gamma^3(x, n) \mathrel{\dot{=}} 1.$$

Пусть теперь $x \neq 0$ и $!f(x)$. Тогда при некотором n $[f](x, n) \mathrel{\dot{=}} \Lambda$ и $[\overline{G}](x, n) \mathrel{\dot{=}} \Lambda$. Если $\gamma^2(x) \mathrel{\dot{=}} 1$, то $\hat{\gamma}^3_x(0) \mathrel{\dot{=}} 1$ и при упомянутом только что n $\hat{\gamma}^3_x(n) \mathrel{\dot{=}} 0$. Если же $\gamma^2(x) \mathrel{\dot{=}} 0$, то $\hat{\gamma}^3_x(0) \mathrel{\dot{=}} 0$ и $\hat{\gamma}^3_x(n) \mathrel{\dot{=}} 1$. Таким образом,

(47) если $x \neq 0$ и $!f(x)$, то при некотором n

$$|\gamma^3(x, 0) - \gamma^3(x, n)| \mathrel{\dot{=}} 1.$$

Пусть δ — такой алгорифм, что при любом n

$$\delta(n) \mathrel{\dot{=}} 0.$$

Построим алгорифм Ψ так, что

$$\Psi(x) \mathrel{\dot{=}} \mathcal{E}\hat{\gamma}^3_x\mathcal{Z} \diamondsuit \mathcal{E}\delta\mathcal{Z},$$

и покажем, что Ψ является искомым квазиоператором.

Очевидно, алгорифм Ψ применим к любому x. Предположим, что $\Psi(x)$ — КДЧ и $y = x$. Можно рассмотреть отдельно случаи: а) $x = 0$; б) $x \neq 0$. В случае а) $y = 0$ и, ввиду (45), $\Psi(y)$ также является КДЧ, причем $\Psi(x) = \Psi(y) = 0$. В случае б), ввиду (47), $\neg!f(x)$. Следовательно, $\neg!f(y)$ и согласно (46) получаем, что $\Psi(y)$ — КДЧ, причем $\Psi(y) = \Psi(x) = 1$. Таким образом, Ψ — квазиоператор.

Обозначим через $\mathscr{K}_f$ множество КДЧ, на которых не определена функция f. Из (45)—(47) следует, что квазиоператор Ψ определен в нуле, $\Psi(0) = 0$ и при $x \neq 0$ Ψ определен в точках множества $\mathscr{K}_f$ и только в них, причем принимает в этих точках значение, равное 1. Остается заметить, что утверждение 2) теоремы вытекает из (41) *).

Обозначим через $\mathscr{K}_\Psi$ множество точек определенности построенного нами оператора Ψ ($x \in \mathscr{K}_\Psi \equiv \equiv \neg\neg(x = 0 \vee x \in \mathscr{K}_f)$) и рассмотрим подпространство $\boldsymbol{K}_\Psi$ пространства КДЧ, индуцированное $\mathscr{K}_\Psi$. Используя алгорифмическую замкнутость $\mathscr{K}_f$, нетрудно показать, что $\boldsymbol{K}_\Psi$ —полное КМП. Квазиоператор Ψ, рассмотренный на этом пространстве, является всюду определенным алгорифмическим оператором из $\boldsymbol{K}_\Psi$ в пространство КДЧ $\boldsymbol{E}_1$, при этом Ψ неразрывен, но не непрерывен. Таким образом, теорема непрерывности не сохраняется при отказе от требования сепарабельности, хотя в этом случае и остается в силе теорема неразрывности. Требование полноты в теореме непрерывности также существенно: очевидно, существуют разрывные операторы из пространства рациональных чисел в себя.

За дальнейшими сведениями о характере непрерывности алгорифмических операторов при отказе от тех или иных ограничений на метрические пространства мы отсылаем читателя к работе Оревкова [5].

*) Квазиоператор Ψ дает пример «неконструктивного разрыва»: хотя вблизи нуля и «есть» точки, где Ψ определен и равен единице, (алгорифмическая) последовательность таких точек, (конструктивно) сходящаяся к нулю, невозможна.

БИБЛИОГРАФИЯ

В настоящую библиографию, помимо непосредственно цитируемых в книге источников, включены известные автору работы, относящиеся преимущественно к конструктивному (вычислимому, рекурсивному) анализу. (Опущен лишь ряд работ Гудстейна, упоминаемых в библиографии русского перевода его книг [1]—[2].) Первоначальные библиографические сведения в области интуиционистского анализа можно найти в монографиях Гейтинга [3] и Френкеля, Бар-Хиллела [1].

Составление этой библиографии закончено в январе 1972 года.

Адлер (Adler A.)
[1] Some recursively unsolvable problems in analysis, Proc. Amer. Math. Soc. 22, № 2 (1969), 523—526.

Александров П. С.
[1] Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948.

Банах, Мазур (Banach S., Mazur S.)
[1] Sur les fonctions calculables, Ann. Soc. Pol. de Math. **16** (1937), 223.

Бишоп (Bishop E.)
[1] The constructive development of abstract analysis, Международный конгресс математиков (Москва, 1966), Тезисы докладов, 1966, 31—39.
[2] Foundations of constructive analysis, New York, 1967.
[3] The constructivization of abstract mathematical analysis, Международный конгресс математиков (Москва, 1966), Труды, «Мир», 1968, 308—313.
[4] Mathematics as a numerical language, Intuitionism and Proof Theory, Proc. of the summer conference at Buffalo, N. Y., 1968, North-Holland Publishing Co., Amsterdam — London, 1970, 53—71.

Борель (Borel E.)
[1] Leçons sur la théorie des fonctions, Paris, 1928.

Вандивер (Vandiver H. S.)
[1] Constructive derivation of the decomposition field of polynomial, Ann. Math. 37 (1936), 1—6.
[2] On the ordering of real algebraic numbers by constructive methods, там же, 7—16.

Вейль (Weyl H.)
[1] Das Kontinuum, Leipzig, 1918.

[2] О философии математики, Сборник работ (перев. с нем.), ГТТИ, 1934.

Гейтинг (Heyting A.)

[1] Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss, Phys.-matem. Kl., 1930, 42—56.

[2] Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik, там же, 57—71, 158—169.

[3] Intuitionism, An introduction, Amsterdam, 1956. [Русский перевод: Гейтинг А., Интуиционизм, Введение, «Мир», 1965.]

Гелбаум, Олмстед (Gelbaum B., Olmsted J. O.)

[1] Counterexamples in Analysis, Holden-Day, San Francisco — London — Amsterdam, 1964. [Русский перевод: Гелбаум Б., Олмстед Дж., Контрпримеры в анализе, «Мир», 1967.]

Гжегорчик (Grzegorczyk A.)

[1] Elementarily definable analysis, Fundam. Math. **41** (1954), 311—338.

[2] Computable functionals, там же **42** (1955), 168—202.

[3] On the definition of computable functionals, там же, 232—239.

[4] On the definitions of computable real continuous functions, там же **54** (1967), 61—71.

[5] Some approaches to constructive analysis, Constructivity in mathematics, Amsterdam, 1959, 43—61.

Гильберт (Hilbert D.)

[1] Über das Unendliche, Math. Ann. **95** (1925), 161—190. [Эта статья в сокращенном виде помещена в книге Гильберта «Основания геометрии», Гостехиздат, 1948.]

Гудстейн (Goodstein R. L.)

[1] Recursive number theory, A development of recursive arithmetic in a logic-free equation calculus, Amsterdam, 1957. [Русский перевод в кн.: Гудстейн Р. Л., Рекурсивный математический анализ, «Наука», 1970.]

[2] Recursive analysis, Amsterdam, 1961. [Русский перевод в кн.: Гудстейн Р. Л., Рекурсивный математический анализ, «Наука», 1970.]

[3] A constructive form of the second Gauss proof of the fundamental theorem of algebra, Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of algebra, Proc. Symp. Zürich — Rüschlikon 1967, Wiley-Interscience, New York, 1969, 69—76.

[4] Polynomials with computable coefficients, Notre Dame J. form. Logic **11**, № 4 (1970), 447—448.

Гудстейн, Хули (Goodstein R. L., Hooley J.)

[1] On recursive transcendence, Notre Dame J. form. Logic **1** (1960), 127—137.

Демут (Demuth O.)

[1] Об интегрировании по Лебегу в конструктивном анализе, ДАН СССР **160**, № 6 (1965), 1239—1241.

[2] Интеграл Лебега в конструктивном анализе, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **4** (1967), 30—43.

[3] Необходимое и достаточное условие интегрируемости конструктивных функций по Риману, ДАН СССР **176**, № 4 (1967), 757—758.

[4] Интеграл Лебега и понятие измеримости функций в конструктивном анализе, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **8** (1968), 21—28.
[5] Связь интегрируемости конструктивных функций по Риману и Лебегу, там же, 29—45.
[6] Пространства $\mathscr{L}_r$ и S в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae **10** (1969), 261—284.
[7] Об измеримости множеств по Лебегу в конструктивной математике, там же, 463—492.
[8] О дифференцируемости конструктивных функций, там же, 167—175.
[9] Линейные функционалы в конструктивных пространствах $\mathscr{L}_r$, там же, 357—390.
[10] Теоремы о среднем значении для конструктивного интеграла Лебега, там же **11** (1970), 249—269.
[11] О представимости функций слабо ограниченной вариации, там же, 421—434.
[12] Об интегрируемости производных от конструктивных функций, там же, 667—691.
[13] Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности конструктивных функций, там же, 705—726.
[14] О суперпозициях абсолютно непрерывных конструктивных функций, там же **12** (1971), 423—451.
[15] Необходимое и достаточное условие представимости конструктивных функций в виде суммы сингулярной и абсолютно непрерывной функции, там же, 587—610.
[16] Об одном условии дифференцируемости конструктивных функций ограниченной вариации, там же, 687—710.

Детловс В. К.
[1] Эквивалентность нормальных алгорифмов и рекурсивных функций, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **52**, Изд. АН СССР, 1958, 75—139.

Заславский И. Д.
[1] Опровержение некоторых теорем классического анализа в конструктивном анализе, УМН **10**, № 4 (66) (1955), 209—210.
[2] Некоторые особенности конструктивных функций вещественного переменного по сравнению с классическими, Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, т. 1, Изд. АН СССР, 1956, 183—184.
[3] О конструктивных дедекиндовых сечениях, там же, 182—183.
[4] Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **67**, Изд. АН СССР, 1962, 385—457.
[5] О некоторых различиях между базисными и подчиненными переменными в логико-математических языках, Сб. «Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники», Ереван, 1963, 13—29.
[6] О дифференцировании и интегрировании конструктивных функций, ДАН СССР **156**, № 1 (1964), 25—27.
[7] О спрямляемости конструктивных плоских кривых, ИАН Арм. ССР, сер. матем. **2**, № 2 (1967), 69—82.

[8] Об аксиоматическом определении конструктивных объектов и операций, ИАН Арм. ССР **4**, № 3 (1969), 153—181.

Заславский И. Д., Манукян С. Н.

[1] О разбиениях плоскости конструктивными кривыми, Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники (теория алгорифмов и конструктивный математический анализ), Ереван, 1968, 26—138.

Заславский И. Д., Цейгин Г. С.

[1] О соотношениях между основными свойствами конструктивных функций, Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, т. 1, Изд. АН СССР, 1956, 180—181.

[2] О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **67**, Изд. АН СССР, 1962, 458—502.

[3] К вопросу об обобщениях принципа конструктивного подбора, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **72**, «Наука», 1964, 344—347.

[4] Критерий спрямляемости конструктивных плоских кривых, ИАН Арм. ССР, сер. матем. **5**, № 5 (1970), 434—440.

[5] Еще один конструктивный вариант теоремы Коши, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **20** (1971), 36—39.

Звонкин А. К., Левин Л. А.

[1] Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов, УМН **25**, № 6 (1970), 85—127.

Ильзе (Ilse D.)

[1] Zur Stetigkeit berechenbarer reeller Functionen, Z. math. Logik Grundl. Math. **11** (1965), 297—342.

Ильин В. А., Позняк Э. Г.

[1] Основы математического анализа, «Наука», 1965.

Камке (Kamke E.)

[1] Das Lebesgue — Stieltjes Integral, Leipzig, 1956. [Русский перевод: Камке Э., Интеграл Лебега — Стильтьеса, Физматгиз, 1959.]

Канович М. И., Кушнер Б. А.

[1] Об оценке сложности некоторых массовых проблем анализа, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **16** (1969), 81—90.

Карри (Curry H. B.)

[1] Foundations of matematical logic, McGraw-Hill Co., New York — San Francisco — Toronto — London, 1963. [Русский перевод: Карри Х. Б., Основания математической логики, «Мир», 1969.]

Кёниг (König D.)

[1] Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche, Acta Litt. Ac. Sci. Hung. Fran. Josep. **3** (1927), 121—130.

Клауа (Klaua D.)

[1] Berechenbare Analysis, Z. math. Logik Grundl. Math. **2** (1956), 265—303.

[2] Die Präzisierung des Berechenbarkeitsbegriffes in der Analysis mit Hilfe rationaler Funktionall, там же **5** (1959), 33—96.

[3] Berechenbare Reihen, там же **6** (1961), 143—161.
[4] Konstrunktive Analysis, Mathematische Forschungsberichte, XI, Berlin, 1961.

Клив (Cleave J.)
[1] The Primitive Recursive Analysis of Ordinary Differential Equations and the Complexity of Their Solutions, J. Comput. and Syst. Sci. **3**, № 4 (1969), 447—455.

Клини (Kleene S. C.)
[1] On the interpretation of intuitionistic number theory, J. Symbolic Logic **10** (1945), 109—124.
[2] Recursive functions and intuitionistic mathematics, Proc. of the Int. Congress of Math. (Cambridge, Mass., 1950), vol. 1, 1952, 679—685.
[3] A note on computable functionals, Proc. Konikl. nederl. akad. wet. **A59**, № 3 (1956), 275—280.
[4] Introduction to metamathematics, New York — Toronto, 1952. [Русский перевод: Клини С. К., Введение в метаматематику, ИЛ, 1957.]

Колмогоров А. Н.
[1] О принципе tertium non datur, Матем. сб. **32** (1925), 646—667.
[2] Zur Deutung der intuitionistischen Logik, Math. Z. **35** (1932), 58—65.
[3] Три подхода к определению понятия «количество информации», Проблемы передачи информации **1**, № 1 (1965), 3—11.

Колмогоров А. Н., Фомин С. В.
[1] Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», 1972.

Ван дер Корпут (Corput J. G., van der)
[1] On the fundamental theorem of algebra, Proc. Akad. Amsterdam **49** (1946), 722—732, 878—886, 985—994 = Indag. Math. **8** (1946), 430—440, 549—557, 605—614.

Косовский Н. К.
[1] Необходимые и достаточные условия для шпеккеровых свойств вероятностного пространства, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **16** (1969), 91—96.
[2] Интегрируемые *FR*-конструкты над вероятностным пространством, там же, 97—104.
[3] Законы больших чисел в конструктивной теории вероятностей, там же, 105—113.
[4] Некоторые вопросы конструктивной теории нормированных алгебр Буля, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **113**, «Наука», 1970, 3—38.

Крайзел, Лакомб (Kreisel G., Lacombe D.)
[1] Ensembles récursivement mesurables et ensembles récursivement ouverts ou fermés, Compt. rend. Acad. sci. Paris **245**, № 14 (1957), 1106—1109.

Крайзел, Лакомб, Шёнфилд (Kreisel G., Lacombe D., Schoenfield J.)
[1] Fonctionnelles récursivement définissables et fonctionnelles récursives, Compt. rend. Acad. sci. Paris **245**, № 4 (1957), 399—402.

[2] Partial recursive functionals and effective operations, Constructivity in Mathematics, Amsterdam, 1959, 290—297.

Кузнецов А. В., Трахтенброт Б. А.

[1] Исследование частично-рекурсивных операторов средствами бэровского пространства, ДАН СССР **105**, № 5 (1955), 897—900.

Куратовский, Мостовский (Kuratowski K., Mostowski A.)

[1] Set theory, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, PWN — Polish scientific Publ. Warszawa, 1967. [Русский перевод: Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, «Мир»», 1970.]

Кучера (Kučera A.)

[1] Слабая сходимость в конструктивной математике, Comment. Math. Univ. Carolinae **11** (1970), 285—308.

[2] Достаточные условия нормируемости линейных операторов в конструктивной математике, там же **12** (1971), 2.

Кушнер Б. А.

[1] Об интегрировании по Риману в конструктивном анализе, ДАН СССР **156**, № 2 (1964), 255—267.

[2] О существовании неограниченных аналитических конструктивных функций, там же **160**, № 1 (1965), 29—31.

[3] К конструктивной теории интеграла Римана, там же **165**, № 6 (1965), 1238—1240.

[4] Некоторые свойства квазичисел и операторов из квазичисел в квазичисла, там же **171**, № 2 (1967), 275—277.

[5] Некоторые соотношения между свойствами конструктивных функций и операторов из квазичисел в квазичисла, там же **177**, № 1 (1967), 29—32.

[6] О первообразных конструктивных функциях, Матем. заметки **2**, № 2 (1967), 157—166.

[7] Некоторые примеры квазиплотных, но не плотных множеств дуплексов, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 8 (1968), 95—102.

[8] Замечание об областях определения конструктивных функций, там же, 103—106.

[9] Некоторые массовые проблемы, связанные с интегрированием конструктивных функций, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **113**, «Наука», 1970, 39—72.

[10] Покрытия сепарабельных множеств, Исследования по теории алгорифмов и математической логике, 1, ВЦ АН СССР, 1973, 235—246.

[11] Теоремы непрерывности для некоторых типов вычислимых операторов, ДАН СССР **208**, № 5 (1973), 1031—1034.

Кушнер Б. А., Цейтин Г. С.

[1] Некоторые свойства F-чисел, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 8 (1968), 107—120.

Лакомб (Lacombe D.)

[1] Extension de la notion de fonction recursive aux fonctions d'une ou plusieurs variables reelles, Compt. rend. Acad. sci. Paris **240**, № 26 (1955), 2478—2480; **241**, № 1 (1955), 13—14; **241**, № 2 (1955), 151—153,

[2] Remarques sur les opérateurs récursifs et sur les fonctions récursives d'une variable reelle, там же **241**, № 19 (1955), 1250—1252.
[3] Quelques proprietes d'Analyse recursive, там же **244**, № 7 (1957), 838—840; № 8 (1957), 996—997.
[4] Les ensembles recursivement ouverts ou fermes et leurs applications a l'Analyse recursive, там же **245**, № 13 (1957), 1040—1043; **246**, № 1 (1958), 28—31.
[5] Sur les possibilités d'extension de la notion de fonction recursive aux fonctions d'une ou plusieurs variables reelles, Raisonnement en math. et en sci. experim., Paris, CNRS, 1958, 67—74.
[6] Quelques procedes de definition en topologie recursive, Constructivity in mathematics, Amsterdam, 1959, 129—158.

Ландау (Landau E.)
[1] Grundlagen der Analysis, 1930. [Русский перевод: Ландау Э., Основы анализа, ИЛ, 1947.]
[2] Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung, 1934. [Русский перевод: Ландау Э., Введение в дифференциальное и интегральное исчисление, ИЛ, 1948.]

Лахлан (Lachlan A. H.)
[1] Recursive real numbers, J. Symbolic Logic **28**, № 1 (1963), 1—16.
[2] Effective operations in a general setting, J. Symbolic Logic **29**, № 4 (1964), 163—178.

Лахлан, Медисон (Lachlan A. H., Madison E. W.)
[1] Computable fields and arithmetically definable ordered fields, Proc. Amer. Math. Soc. **24**, № 4 (1970), 803—807.

Леман (Lehman R. S.)
[1] On primitive recursive real numbers, Fundam. Math. **49** (1961), 105—118.

Лифшиц В. А.
[1] О конструктивных группах, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **4** (1967), 86—95.
[2] О конструктивных аналитических функциях одной вещественной переменной, там же **8** (1968), 121—131.
[3] О множестве нулей конструктивного степенного ряда в вещественной области, там же **16** (1969), 114—125.
[4] Об исследовании конструктивных функций методом заполнений, там же **20** (1971), 67—79.
[5] Локально аналитическая конструктивная функция, не являющаяся аналитической, ДАН СССР **202**, № 6 (1972), 1265—1267.

Лоренц А. А.
[1] Элементы конструктивной теории вероятностей, Z. math. Logik Grundl. Math. **15** (1969), 437—459.

Лоренцен (Lorenzen P.)
[1] Constructive mathematics as a philosophical problem, Compositio math. **20** (1968), 133—142.

Люстерник Л. А., Соболев В. И.
[1] Элементы функционального анализа, «Наука», 1965.

Мазур (Mazur S.)
[1] Computable analysis, Edited by A. Grzegorczyk and H. Rasiowa, Rozprawy Matematyczne, XXXIII, Warszawa, 1963.
Майхилл (Myhill J. R.)
[1] Criteria for constructibility of real numbers, J. Symbolic Logic 18, № 1 (1953), 7—10.
[2] A recursive function, defined on a compact interval and having a continuous derivative that is not recursive, Mich. Math. J. 18, № 2 (1971), 97—98.
Майхилл, Шепердсон (Myhill J. R., Shepherdson J. C.)
[1] Effective operations on partial recursive functions, Z. math. Logik Grundl. Math. 1 (1955), 310—317.
Мальцев А. И.
[1] Алгоритмы и рекурсивные функции, «Наука», 1965.
Манукян С. Н.
[1] О конструктивных кривых и криволинейных интегралах от функций комплексной переменной, ИАН Арм. ССР 4, № 2 (1969), 137—143.
[2] О внутренних точках невырожденных конструктивных кривых, ДАН СССР 194, № 4 (1971), 768—769.
Марков А. А.
[1] Теория алгорифмов, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 38, Изд. АН СССР, 1951, 176—189.
[2] Теория алгорифмов, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 42, Изд. АН СССР, 1954.
[3] О непрерывности конструктивных функций, УМН 9, № 3 (61) (1954), 226—229.
[4] Об одном принципе конструктивной математической логики, Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, т. 2, Изд. АН СССР, 1956, 146—147.
[5] О конструктивных функциях, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 52, Изд. АН СССР, 1958, 315—348.
[6] О конструктивной математике, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 67, Изд. АН СССР, 1962, 8—14.
[7] Комментарии редактора перевода, в кн.: Гейтинг А., Интуиционизм, «Мир», 1965.
[8] An approach to constructive mathematical logic, «Logic, Methodology and Philosophy of Sciences», III, Amsterdam, 1968.
[9] О логике конструктивной математики, Вестн. МГУ, сер. матем. мех., № 2 (1970), 7—29.
Мартин-Лёф (Martin-Löf P.)
[1] Notes on constructive mathematics, Almqvist & Wiskell, Stockholm, 1970.
Матиясевич Ю. В.
[1] Достаточное условие сходимости монотонных последовательностей, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 20 (1971), 97—103.
Мендельсон (Mendelson E.)
[1] Introduction to Mathematical Logic, D. van Nostrand Co., Inc., Princeton — Toronto — N. Y. — London. [Русский перевод: Мендельсон Э., Введение в математическую логику, «Наука», 1971.]

Мешковский (Meschkowski H.)

[1] Rekursive reele Zahlen, Math. Z. **66** (1956), 189—202.

Минц Г. Е.

[1] О предикате дифференцируемости и операторе дифференцирования в конструктивном математическом анализе, ДАН СССР **147**, № 5 (1962), 1032—1034.

[2] О предикатных и операторных вариантах построения теорий конструктивной математики, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **72**, «Наука», 1964, 383—436.

[3] Исправления и дополнения к статье «О предикатных и операторных вариантах построения теорий конструктивной математики», Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **93**, «Наука», 1967, 257—258.

Михалинец (Mihaljinec M.)

[1] On the continuity of constructive transformations I—II, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **15** (1960), 21—29, 229—235.

[2] Some local properties of constructive real functions, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **20** (1965), 33—37.

[3] Inverse upper bound theorems for constructive real functions, там же, 177—187.

[4] Одно обобщение конструктивно равномерно непрерывных функций, Международный конгресс математиков (Москва, 1966), Тезисы кратких научных сообщений, Секция 1, 1966, 21.

[5] A nonmonotonous constructive real C^{∞}-differentiable function having no local maximum and no local minimum, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **3** (1968), 155—164.

Московакис (Moschovakis Y. N.)

[1] Recursive metric spaces, Fundam. Math. **55**, № 3 (1964), 215—238.

[2] Notation systems and recursive ordered fields, Compositio Math. **17** (1965), 40—71.

Мостовский (Mostowski A.)

[1] Современное состояние исследований по основаниям математики, УМН **9**, № 3 (61) (1954), 3—38.

[2] On computable sequences, Fundam. Math. **44**, № 1 (1957), 37—51.

[3] On various degrees of constructivism, Constructivity in mathematics, Amsterdam, 1959, 178—194.

Нагорный Н. М.

[1] К усилению теоремы приведения теории алгорифмов, ДАН СССР **90**, № 3 (1953), 341—342.

[2] О минимальном алфавите алгорифмов над данным алфавитом, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **52**, Изд. АН СССР, 1958, 66—74.

[3] Некоторые обобщения понятия нормального алгорифма, там же, 7—65.

Натансон И. П.

[1] Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1957.

Ногина Е. Ю.

[1] Об эффективно топологических пространствах, ДАН СССР **169**, № 1 (1966), 28—31.

[2] Соотношения между некоторыми классами эффективно топологических пространств, Матем. заметки **5**, № 4 (1969), 483—495.
[3] Об одной теореме Московакиса, Труды 1-й конференции молодых специалистов Вычислительного центра АН Арм. ССР и Ер. ГУ, III, Ереван, 1969, 92—100.

Оревков В. П.
[1] Конструктивное отображение квадрата в себя, сдвигающее каждую конструктивную точку, ДАН СССР **152**, № 1 (1963), 55—58.
[2] О конструктивных отображениях круга в себя, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **72**, «Наука», 1964, 437—461.
[3] Некоторые вопросы теории полиномов с конструктивными вещественными коэффициентами, там же, 462—487.
[4] О конструктивных отображениях конечных полиэдров, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **93**, «Наука», 1967, 142—163.
[5] О некоторых типах непрерывности конструктивных операторов, там же, 164—186.
[6] Некоторые свойства гомеоморфизмов конструктивных метрических пространств, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **16** (1969), 157—164.
[7] Эквивалентность двух определений непрерывности, там же **20** (1970), 145—159.
[8] О непрерывности конструктивных функционалов, там же, 160—169.

Петер (Peter R.)
[1] Zur Begriff der rekursiven reellen Zahl, Acta Scient. Math. Szeged. **12A** (1950), 239—245.
[2] Rekursiven Funktionen, Budapest, 1951. [Русский перевод: Петер Р., Рекурсивные функции, ИЛ, 1954.]

Рабин (Rabin M. O.)
[1] Computable algebra, general theory and theory of computable fields, Trans. Amer. Math. Soc. **95**, № 2 (1960), 341—360.

Райс (Rice H. G.)
[1] Recursive real numbers, Proc. Amer. Math. Soc. **5**, № 5 (1954), 784—791.

Ричардсон (Richardson D.)
[1] Some undecidable problems involving elementary functions of a real variable, J. Symbolic Logic **33**, № 4 (1968).

Роджерс (Rogers H., Jr.)
[1] Recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, New York, 1967. [Русский перевод: Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, «Мир», 1972.]

Рудин (Rudin W.)
[1] Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill Book Company, 1964. [Русский перевод: Рудин У., Основы математического анализа, «Мир», 1966.]

Скарпеллини (Scarpellini B.)
[1] Zwei unentscheidbare probleme der Analysis, Z. math. Logik Grundl. Math. **9** (1963), 265—289.

Слисенко А. О.
[1] О некоторых свойствах арифметических операций над дуплексами, ДАН СССР **152**, № 2 (1963), 292—295.
[2] О некоторых алгорифмических задачах, связанных с арифметическими операциями над функциями, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **72**, «Наука», 1964, 488—523.
[3] Пример неразрывного, но не непрерывного конструктивного оператора в метрическом пространстве, там же, 524—532.
[4] О конструктивных несепарабельных пространствах, там же, 533—536.
[5] О максимальных регуляторах непрерывности конструктивных функций, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **4** (1967), 201—208.
[6] Арифметические операции на некоторых множествах дуплексов, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **93**, «Наука», 1967, 187—207.
[7] О построении максимальных регуляторов непрерывности конструктивных функций, там же, 208—249.
[8] Некоторые вопросы аппроксимации максимальных регуляторов непрерывности, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **113**, «Наука», 1970, 73—78.
Соар (Soare Robert I.)
[1] Cohesive sets and recursively enumerable Dedekind cuts, Pacific J. Math. **31**, № 1 (1969), 215—231.
[2] Recursion theory and Dedekind cuts, Trans. Amer. Math. Soc. **140** (1969), 271—294.
Трахтенброт Б. А.
[1] Табличное представление рекурсивных операторов, ДАН СССР **101**, № 3 (1955), 417—420.
[2] Алгоритмы и машинное решение задач, Физматгиз, 1960.
[3] Сложность алгоритмов и вычислений, Новосибирск, 1967.
Тьюринг (Turing A. M.)
[1] On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proc. Lond. Math. Soc., ser. 2, **42** (1936), 230—265.
[2] A correction, там же **43** (1937), 544—546.
Уайтхед, Рассел (Whitehead A., Russell B.)
[1] Principia mathematica, vol. 1, London, 1910.
[2] Principia mathematica, vol. 2, London, 1912.
[3] Principia mathematica, vol. 3, London, 1913.
Успенский В. А.
[1] К теореме о равномерной непрерывности, УМН **12**, № 1 (1957), 99—142.
[2] К вопросу о соотношении между различными системами конструктивных действительных чисел, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 2 (15) (1960), 199—208.
[3] Лекции о вычислимых функциях, Физматгиз, 1960.
Фан Динь Зиеу
[1] Конструктивные локально выпуклые линейные топологические пространства, ДАН СССР **162**, № 4 (1965), 766—769.
[2] Метризуемость, нормируемость и мультинормируемость конструктивных локально выпуклых пространств, там же **162**, № 5 (1965), 1011—1014.

[3] О сопряженных к конструктивным локально выпуклым пространствам, там же **166**, № 1 (1966), 45—48.
[4] Конструктивные обобщенные функции, там же **174**, № 1 (1967), 37—40.
[5] О некоторых свойствах конструктивных обобщенных функций, там же **174**, № 2 (1967), 298—301.
[6] О пространствах конструктивных бесконечно дифференцируемых функций и о функционалах в них, там же **180**, № 4 (1968), 799—802.
[7] Об одном языке конструктивной математики, связанном с системами множеств, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **93**, «Наука», 1967, 123—141.
[8] О замкнутых и открытых множествах в конструктивных топологических пространствах, там же, 250—256.
[9] Некоторые вопросы конструктивного функционального анализа, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **113**, «Наука», 1970.

Феферман (Feferman S.)
[1] Systems of predicative analysis, J. Symbolic Logic **29**, № 1 (1964), 1—30.

Фихтенгольц Г. М.
[1] Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, Физматгиз, 1958.
[2] Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, Физматгиз, 1959.

Френкель, Бар-Хиллел (Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y.)
[1] Foundations of set theory, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1958. [Русский перевод: Френкель А. А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, «Мир», 1966.]

Фридберг (Friedberg R. M.)
[1] Un contre-exeple relatif aux fonctionnelles recursives, Compt. rend. Acad. sci. Paris **247**, № 12 (1958), 852—854.
[2] 4-Quantifier Completeness: A Banach — Mazur Functional not Uniformly Partial Recursive, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astr., et phys. **6**, № 1 (1958), 1—5.

Хаук (Hauck J.)
[1] Ein Kriterium fur die Annahme des Maximums in der berechenbaren Analysis, Z. math. Logik Grundl. Math. **17** (1971), 193—196.

Хачатрян М. А.
[1] О конструктивных числовых рядах, Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники (теория алгорифмов и конструктивный математический анализ), Ереван, 1968, 7—25.
[2] Пример конструктивной недифференцируемой монотонной функции, ИАН Арм. ССР **4**, № 4 (1969), 296—299.

Цейтин Г. С.
[1] О теореме Коши в конструктивном анализе, УМН **10**, № 4 (66) (1955), 207—209.
[2] Теорема о вложенных сегментах, теорема Коши и теорема Ролля в конструктивном анализе, Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, т. 1, Изд. АН СССР, 1956, 186—187.

[3] Равномерная рекурсивность алгорифмических операторов над общерекурсивными функциями и каноническое представление для конструктивных функций вещественного аргумента, там же, 188—189.

[4] Алгорифмические операторы в конструктивных полных сепарабельных метрических пространствах, ДАН СССР 128, № 1 (1959), 49—52.

[5] Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 67, Изд. АН СССР, 1962, 295—361.

[6] Теоремы о среднем значении в конструктивном анализе, там же, 362—384.

[7] Один способ изложения теории алгорифмов и перечислимых множеств, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 72, «Наука», 1964, 69—98.

[8] Три теоремы о конструктивных функциях, там же, 537—543.

[9] Исследования по конструктивному анализу (конструктивные вещественные числа и точечно-определенные функции), Автореферат докт. дисс., Л., 1968.

[10] О верхних границах перечислимых множеств конструктивных вещественных чисел, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 113, «Наука», 1970, 102—172.

[11] Псевдофундаментальная последовательность, не эквивалентная монотонной, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 20 (1971), 263—271.

Цейтин Г. С., Заславский И. Д., Шанин Н. А.

[1] Особенности конструктивного математического анализа, Международный конгресс математиков (Москва, 1966), Тезисы докладов, 1966, 171—177.

[2] Peculiarities of constructive mathematical analysis, Международный конгресс математиков (Москва, 1966), Труды, «Мир», 1968, 253—260.

Шанин Н. А.

[1] О конструктивном математическом анализе, Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, т. 2, Изд. АН СССР, 1956, 69—70.

[2] Некоторые вопросы математического анализа в свете конструктивной логики, Z. math. Logik Grundl. Math. 2 (1956), 27—36.

[3] Об алгорифме конструктивной расшифровки математических суждений, там же 4 (1958), 293—303.

[4] О конструктивном понимании математических суждений, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 52, Изд. АН СССР, 1958, 226—311.

[5] О линейных конструктивных функционалах в конструктивном гильбертовом пространстве, Z. math. Logik Grundl. Math. 5 (1959), 1—8.

[6] Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 67, Изд. АН СССР, 1962, 15—294.

[7] К вопросу о конструктивном понимании опорных формул. I, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 72, «Наука», 1964, 348—379.

[8] О рекурсивном математическом анализе и исчислении арифметических равенств Р. Л. Гудстейна, Вступительная статья к кн.: Гудстейн Р. Л., Рекурсивный математический анализ, «Наука», 1970, 7—76.

Шапиро (Shapiro N. Z.)

[1] Recursively Countable Subsets of Recursive Metric Spaces, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. sci. math., astr., phys. **17**, № 10 (1969), 603—607.

Шнорр (Schnorr C.-P.)

[1] Komplexität von Algorithmen mit Anwendung auf die Analysis, Arch. math. Logik **14** (1971), 54—68.

Шпекер (Specker E.)

[1] Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, J. Symbolic Logic **14**, № 3 (1949), 145—158.

[2] Der Satz vom Maximum in der rekursiven Analysis, Studies in logic and the foundations of mathematics, Constructivity in Mathematics, Proc. of the Colloquium held at Amsterdam **1957**, 1959, 254—265.

[3] The fundamental theorem of algebra in recursive analysis, Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra. Proc. Symp. Zürich — Rüschlikon 1967, Wiley-Interscience, New York, 1969, 321—329.

Шурыгин В. А.

[1] О нетривиальных конструктивных отображениях некоторых множеств, ДАН СССР **168**, № 1 (1966), 40—42.

[2] О конструктивных множествах с равенством и их отображениях, там же **173**, № 1 (1967), 54—57.

[3] Полные множества с равенством и некоторые их свойства, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **8** (1968), 272—280.

[4] Конструктивные множества с равенством и их отображения, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **113**, «Наука», 1970, 173—259.

Эберт (Aberth O.)

[1] Analysis in the computable number field, J. Assoc. Comput. Math. **15**, № 2 (1968), 275—299.

[2] A chain of inclusion relations in computable analysis, Proc. Amer. Math. Soc. **22**, № 2 (1969), 539.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Сокращения

Борис Абрамович Кушнер

ЛЕКЦИИ ПО КОНСТРУКТИВНОМУ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

(Серия: «Математическая логика и основания математики»)

М., 1973 г., 448 стр. с илл.

Редактор *В. В. Донченко*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *З. В. Автонеева*

Сдано в набор 12/III 1973 г. Подписано к печати 23/XI 1973 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$, тип. № 1. Физ. печ. л. 14. Услов. печ. л. 23,52. Уч.-изд. л. 21,31. Тираж 7800 экз. Т-16970. Цена книги 1 р. 60 к. Заказ № 649

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
198052 Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29