

А. Н. КУШНИРЕНКО

ВВЕДЕНИЕ

В КВАНТОВУЮ

ТЕОРИЮ

ПОЛЯ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов физических специальностей
университетов и педагогических институтов



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1971

530.1
К96
УДК 530.145

Кушниренко А. Н.

К96 Введение в квантовую теорию поля. Учеб. пособие для вузов. М., «Высш. школа», 1971. 304 с. с илл.

Настоящее учебное пособие содержит вводные сведения по квантовой теории поля. Книга рассчитана на студентов физических и математических факультетов университетов и пединститутов. Она может быть полезной для научных работников, впервые приступающих к изучению квантовой теории поля.

2—3—2
302—70

530.1

Анатолий Никанорович Кушниренко

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯ

Научный редактор А. А. Боргарлт
Редактор издательства Е. С. Гридасова
Технический редактор Р. С. Родичева
Корректор В. А. Орлова

Сдано в набор 15/IX 1970 г.
Подп. к печати 27/IV 1971 г.
Формат 84×108¹/₃₂. Объем печ. л. 9,5. 15,96 усл. п. л.
Уч.-изд. л. 12,81. Изд. № ФМ—263. Тираж 21 000 экз.
Цена 55 к. Зак. тип. 1361
План выпуска литературы издательства
«Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1970 г.
Позиция № 302
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа».

Московская типография № 4 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Б. Переяславская, 46

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга является курсом лекций по квантовой теории поля, прочитанных автором в течение ряда лет в Киевском университете студентам механико-математического факультета. Автор поставил перед собой цель в сжатой и строгой форме с изложением основных выкладок дать читателю основной «классический» материал по квантовой теории поля, который, по-видимому, должен в той или иной степени войти в любую будущую квантовую теорию поля. Те разделы квантовой теории поля, которые, по нашему мнению, в настоящее время еще не получили своего окончательного развития, не нашли отражения в данной книге.

В первой главе книги рассмотрен вводный материал — постановка вопроса в квантовой теории поля, типы полей, представления уравнения Шредингера, инвариантность теории относительно преобразований Лоренца. Во второй главе исследованы различные свободные поля (шредингеровское поле, мезонные поля, электронное и электромагнитное поля). Третья глава посвящена общим вопросам теории взаимодействия полей. В четвертой главе приведены простейшие квантово-полевые задачи. В пятой главе дана методика устранения расходимостей в квантовой теории поля, которая используется в шестой главе для расчета радиационной поправки к магнитному моменту электронов и для расчета сдвига атомных уровней водорода.

Настоящая книга рассчитана на студентов старших курсов физических факультетов университетов и пединститутов, знакомых с теоретической механикой, электродинамикой, специальной теорией относительности, квантовой механикой и высшей математикой (включая элементы теории групп, теории обобщенных функций) в объеме программ физических факультетов университетов (и пединститутов).

В заключение автор выражает благодарность А. А. Боргардту за ценные замечания, сделанные при просмотре рукописи настоящей книги.

Квантовая теория поля [1, 2, 3, 4], являющаяся одним из наиболее важных разделов теоретической физики, возникла из необходимости установить одинаковый подход как к системе частиц, так и к полю, через которое эти частицы взаимодействуют. Квантовая теория поля, близкая по своему математическому аппарату методу вторичного квантования в обычной квантовой механике, стала теоретической базой для рассмотрения проблемы взаимодействующих частиц. Поскольку любое вещество состоит из частиц той или иной природы, методы квантовой теории поля проникли постепенно во все разделы теоретической физики — в теорию твердого тела, в атомную и ядерную физику, в квантовую химию.

Современная квантовая теория поля может быть разделена на две части: 1) теория поля, построенная на основе гамильтонова (или иначе лагранжиева) формализма (динамический подход); 2) теория поля, не использующая гамильтонова формализма

Во втором направлении можно указать на два основных метода: аксиоматический подход и метод непосредственного построения матрицы рассеяния (S-метод). Аксиоматический метод строится на основе ряда аксиом. В нем строго определяются операторы поля, однако уравнение Шредингера в нем не используется.

На основе этого метода получены также строгие дисперсионные соотношения. Уравнения, возникающие в аксиоматическом методе, являются, очевидно, более общими чем уравнения гамильтонова метода. На наш взгляд, аксиоматический метод даст возможность более строго осмыслить гамильтонов метод и в конце концов сольется с ним в будущей квантовой теории поля.

В S-методе, отказываясь от рассмотрения полевых операторов, считают, что физический смысл имеют только наблюдаемые величины (матричные элементы), и поэтому не интересуются внутренней структурой полей. Следовательно, S-метод можно назвать феноменологической квантовой теорией поля.

По нашему мнению, изучение негамильтоновых методов имеет большой интерес, так как оно в конечном итоге внесет соответствующий вклад и в развитие гамильтонова формализма в квантовой теории поля, который является фундаментом настоящей и возможно будущей квантовой теории поля. Вот почему в настоящей книге рассматривается только динамический подход к квантовой теории поля. Целый ряд трудностей, возникших на пути развития квантовой теории поля в динамическом подходе, одно время привел некоторых авторов к пессимистическим взглядам на нее. В частности Гайтлер в своей книге «Квантовая теория излучения» [5] высказывал предположение, что квантовая теория поля, вероятно, неприменима в области высоких энергий. Видимо, такое заявление является преждевременным и скорее его следует отнести не к самому аппарату квантовой теории поля, а к теории возмущений, которая в то время была единственным методом решения квантово-полевых задач. Как известно, одна из наиболее ощутимых неприятностей в динамической квантовой теории поля состоит в возникновении расходящихся интегралов при решении квантово-полевых задач. Проблему устранения расходимостей решил в 1947 г. Бете, введя идею перенормировки масс и зарядов. В этот период появились работы С. Томонага (1946 г.) и Ю. Швингера (1948—1949 гг.) по ковариантной формулировке уравнений квантовой теории поля.

Большой шаг вперед в развитии квантовой теории поля сделал Бете (1947 г.), который рассчитал лэмбовский сдвиг, качественно объясненный в 1938 г. Д. И. Блохинцевым. Затем была получена радиационная поправка к магнитному моменту электрона. Объяснение последних двух эффектов ознаменовало новую эру в развитии квантовой теории поля.

Квантовая теория поля, привлекая внимание как физиков-теоретиков, так и математиков, стала бурно развиваться. В 1947—1949 гг. Р. Фейнман предложил ковариантную теорию возмущений и построил для нее диаграммную технику. Ф. Дайсон в 1949 г. доказал связь диаграммной техники Фейнмана с ковариантной формулировкой теории поля, предложенной С. Томонагой и Ю. Швингером. Дайсоном была разработана также ковариантная теория перенормировок для любого порядка теории возмущений. Дальнейшее развитие полученных выше результатов нашло отражение в работах Н. Н. Боголюбова, Д. Д. Иваненко, А. А. Соколова и др.

Устранение расходимостей при помощи перенормировки масс и зарядов является некоторой удачной полумерой, которая всегда вызывала у физиков определенное чувство неудовлетворенности. Возможно, что возникновение расходимостей обусловлено использованием в современной теории поля метрики специальной теории относительности, что связано с пренебрежением в теории поля гравитационными эффектами. Последнее обстоятельство, по всей вероятности, приводит к существенному пороку теории: к неприменимости ее для очень малых областей пространства и к расходимостям при больших импульсах.

Вполне возможно, что будущую квантовую теорию поля следует строить на базе общей теории относительности, т. е. на базе общековариантного формализма. При этом необходимо решить вопрос о квантовании нелинейных уравнений поля, который представляет, как известно, определенную математическую трудность. Можно надеяться, что на этом пути удастся построить квантовую теорию поля, применимую для сколь угодно малых областей пространства и лишенную таких пороков, как расходимость. В такой теории можно будет найти соотношения между затравочными и экспериментальными массами и зарядами. Определив из этих соотношений затравочные массы и заряды, мы избавимся от необходимости выполнения процедуры перенормировки масс и зарядов.

Из сказанного следует, что более детальный учет свойств пространства — времени, связанный с переходом от метрики специальной теории относительности к метрике общей теории относительности, может привести к революционному преобразованию квантовой теории поля. Как хорошо известно, аналогичная ситуация имеется при переходе от метрики классической физики к метрике специальной теории относительности.

Конечно, и общая теория относительности не полностью описывает реальный пространственно-временной мир, свойства которого фактически неисчерпаемы. В связи с этим следует отметить, что нарушение закона сохранения четности при слабых взаимодействиях находится в органической связи со свойствами пространства — времени.

Если отвлечься от проблемы корректного устранения расходимостей, то можно считать, что в квантовой электродинамике положение более или менее удовлетворительное. Однако нельзя утверждать это об общей теории сильно взаимодействующих частиц — адронов. Существует несколько

моделей, в рамках которых пытаются классифицировать адроны и объяснить их физические свойства. К ним относятся: траектории Редже, модель унитарной симметрии (модель кварков) и бутстрап-метод (Чу). Наибольший успех был достигнут в рамках модели унитарной симметрии. Однако без преувеличения можно сказать, что в связи с неудачей экспериментально обнаружить кварки, можно прийти к выводу, что вопрос о построении общей теории адронов весьма далек от завершения. Кроме того, столь красивый и изящный групповой подход к проблеме построения теории адронов обладает ограниченными возможностями. Безусловно, что последовательная строгая теория адронов должна базироваться на динамических принципах, учитывающих законы взаимодействия между частицами, входящими в такую составную связанную систему, как адрон.

В связи с существующими в модели кварков трудностями, автором настоящей книги предложена новая модель адронов [7], которая базируется на следующих предположениях.

Предположение I. В природе существует псевдовекторный изоспинорный бозон K_a , обладающий следующими свойствами: а) масса бозона больше, чем масса нуклона; б) бозон K_a и соответствующий антибозон \bar{K}_a в результате очень сильного взаимодействия могут превратиться в пару нуклон—антинуклон (и наоборот).

K_a -бозоны и нуклоны в данной модели считаются фундаментальными частицами.

Предположение II. Вклад, вносимый в энергию связи составной системы взаимодействием между двумя фундаментальными частицами, меньший, чем соответствующий вклад, вносимый взаимодействием между фундаментальной частицей и фундаментальной античастицей (предполагается, что соответствующие частицы находятся в аналогичных одночастичных состояниях).

Предположение III. Последовательное присоединение к нуклону антибозонов \bar{K}_a , помещенных на один и тот же однобозонный энергетический уровень, приводит к созданию связанных систем, массы которых вплоть до насыщения сил взаимодействия подчиняются закону эквидистантности.

В данной модели адрон является связанной составной частицей, состоящей из нуклонов, K_a -бозонов и их античастиц. Барийонное число равно разности между числом нуклонов и числом антинуклонов, входящих в адрон. Странность равна разности между числом K_a -бозонов и числом антибозонов \bar{K}_a , из которых состоит адрон.

Законы сложения моментов и изоспинов позволили получить разумную классификацию адронов. Нуклон и антибозон \bar{K}_a , входящие в мезон, могут образовать связанную подсистему, сходную по своим свойствам с Λ -гипероном. Поэтому большинство мезонов состоит из протонов, нейтронов и Λ -подсистем, что приводит к возникновению SU(3)-симметрии, которая для мезонов дает массовую формулу Окубо и Гелл-Манна. При увеличении спина мезона входящая в него Λ -подсистема разрушается. В этом случае массовые соотношения

для мезонов дает формула смешивания, которая здесь легко выводится. Показано, что существует пять нонетов (девятка) мезонов.

Для барионов, для которых в данной модели SU(3)-симметрия не существует, массовые соотношения вытекают из предположения III.

Из предположения I следует, что время жизни K_a -бозона не превышает 10^{-23} сек. Это затрудняет его обнаружение. Анализ масс адронов показывает, что масса K_a -бозона равна приблизительно трем массам нуклона.

Операторы нуклонного поля $\hat{\psi}$ и K_a -бозонного поля $\hat{\phi}_v$ должны удовлетворять соответствующим перестановочным соотношениям и уравнениям:

$$(\square - \mu_0^2) \hat{\phi}_v^+(x) = -\frac{f_v}{2} [\hat{\psi}, \hat{\gamma}_v \hat{\gamma}_5 \hat{\tau}_k \hat{\psi}]_x (\hat{\tau}_k \hat{P})^+ - \\ - \frac{f_s}{2} [\hat{\psi}, \hat{\gamma}_v \hat{\gamma}_5 \hat{\psi}]_x \hat{P}^+, \quad (1)$$

$$i\hbar c \hat{\gamma}_a \frac{\partial \hat{\psi}(x)}{\partial x_{(a)}} + f_v \hat{\gamma}_v \hat{\gamma}_5 [\hat{\tau}_k \hat{\psi} (\hat{\phi}_v^+ \hat{\tau}_k \hat{P})^+ + \hat{\tau}_k^+ \hat{\psi} (\hat{\phi}_v^+ \hat{\tau}_k \hat{P})] + \\ + f_s \hat{\gamma}_v \hat{\gamma}_5 [\hat{\psi} (\hat{\phi}_v^+ \hat{P})^+ + \hat{\psi} (\hat{\phi}_v^+ \hat{P})] = 0, \quad (2)$$

где

$$\hat{\phi}_v = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{v1} \\ \hat{\phi}_{v2} \end{pmatrix}, \quad \hat{\psi} = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_p \\ \hat{\psi}_n \end{pmatrix}, \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$\hat{\phi}_{v1}$ — оператор заряженного K_a -бозонного поля; $\hat{\phi}_{v2}$ — оператор нейтрального K_a -бозонного поля; $\hat{\psi}_p$ — оператор протонного поля; $\hat{\psi}_n$ — оператор нейтронного поля; \hat{P}_1 и \hat{P}_2 — операторы уничтожения соответственно заряженного и нейтрального шпурниона (или операторы рождения антишпурнионов); \hat{P}_1^+ и \hat{P}_2^+ — операторы рождения соответственно заряженного и нейтрального шпурниона (или операторы уничтожения антишпурнионов); f_v — константа изовекторной связи; f_s — константа изоскалярной связи; $\hat{\tau}_k$ ($k=1, 2, 3$) — изоспиновые матрицы Паули; μ_0 — масса K_a -бозона ($\mu_0 > 0$).

Шпурнионы — вспомогательные фиктивные частицы, обладающие следующими свойствами:

1) для заряженного шпурниона изотопический спин $T=1/2$, $T_3=1/2$, странность $S=+1$; для нейтрального шпурниона $T=1/2$, $T_3=-1/2$, странность $S=+1$; странность антишпурниона равна $S=-1$;

2) операторы \hat{P}_i и \hat{P}_i^+ коммутируют с полевыми операторами $\hat{\psi}$ и $\hat{\phi}_v$;

3) оператор \hat{P}_i является унитарным, т. е.

$$\hat{P}_i^+ \hat{P}_i = \hat{P}_i \hat{P}_i^+ = \hat{1} \quad (i=1, 2); \quad (4)$$

4) если \hat{C} — оператор зарядового сопряжения, то

$$\hat{C} \hat{P}_i \hat{C}^{-1} = \hat{P}_i^+ \quad (i=1, 2); \quad (5)$$

5) если Ψ_0 — вектор гильбертова пространства состояний, то

$$(\Psi_0, \hat{P}_i^k \hat{P}_i^{l'} \Psi_0) = (\Psi_0, \hat{P}_i^{+k} \hat{P}_i^{l'} \Psi_0) = \delta_{kl}, \quad (6)$$

где l и k — положительные целые числа (или нули).

Из первого свойства следует, что K_a -бозон имеет странность $+1$, а странность антибозона \bar{K}_a равна -1 . Условие (6) обеспечивает выполнение закона сохранения странности в сильных взаимодействиях и объясняет правило парного рождения K_a -бозона совместно с соответствующим антибозоном¹.

Рассматривая уравнения (1) и (2) как уравнения Эйлера для некоторого интеграла действия, находим оператор энергии системы взаимодействующих нуклонного и K_a -бозонного полей:

$$\hat{H} = \hat{H}_K + \hat{H}_F + \hat{H}_{int}, \quad (7)$$

где \hat{H}_F — оператор энергии свободного нуклонного поля; \hat{H}_K — оператор энергии свободного K_a -бозонного поля:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & -\frac{f_V}{2} \int d^3x [\hat{\bar{\psi}}, \hat{\gamma}_V \hat{\gamma}_5 \hat{\tau}_k \hat{\psi}] (\hat{\phi}_V^+ \hat{\tau}_k \hat{P})^+ - \\ & -\frac{f_S}{2} \int d^3x [\hat{\bar{\psi}}, \hat{\gamma}_V \hat{\gamma}_5 \hat{\psi}] (\hat{\phi}_V^+ \hat{P})^+ + \text{э. с.} \end{aligned} \quad (8)$$

— оператор энергии взаимодействия нуклонного и K_a -бозонного полей.

Формулы (1), (2), (7) и (8) легко так обобщить, чтобы учесть электромагнитное поле.

Рассматриваемая выше квантовая теория поля является перенормируемой.

Формулы (7) и (8) позволили обосновать предположение III.

В формулах (1), (2), (7) и (8) оператор $\hat{\psi}$ можно считать оператором некоторого общего спинорного поля. В тривиальном случае $\hat{\psi}$ — оператор нуклонного поля. Однако при наложении на вектор состояния разумных дополнительных условий, оператор $\hat{\psi}$ можно рассматривать как оператор поля электронов и электронного нейтрино или как оператор поля мюонов и мюонного нейтрино². При этом

¹ Согласно свойству (6) на графах Фейнмана нет внешних шпурнонных линий. Поэтому все графы Фейнмана имеют четное число вершин и четное число внешних K_a -бозонных линий, а K -мезон, имеющий структуру (N, \bar{N}, K_a) , должен рождаться в паре с соответствующей античастицей.

² Таким образом, здесь протон, нейтрон, электрон, мюон и оба нейтрино рассматриваются как различные состояния унитарного фермиона.

разность масс электрона и мюона объясняется наличием умеренного взаимодействия мюона с вакуумом K_a -бозонного поля, а сильное взаимодействие из соотношения (7) выпадает.

Для описания слабых взаимодействий в левую часть формулы (7) следует добавить оператор энергии:

$$\hat{H}_l^{(w)} = -\frac{g_w}{2} \int d^3x \left[\hat{\psi}, \hat{\tau}^1 \hat{\gamma}_v (1 + \hat{\gamma}_5) \hat{\psi} \right] \hat{\phi}_{v1} (1 + \hat{P}_2^+) + \text{э. с.}, \quad (9)$$

где g_w — константа связи слабых взаимодействий; $\hat{\tau}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Оператор (9) объясняет реакции с $\Delta S \neq 0$. Подставляя в формулу (9) найденный из уравнения (1) оператор $\hat{\phi}_{v1}$ для случая, когда $f_s = 0$, получим оператор энергии универсального слабого четырехфермионного взаимодействия:

$$\begin{aligned} \hat{H}_l^{(w)} = \frac{g_w f_v}{4} \int d^3x \int d^4y G_B(x-y) & \left[\hat{\psi}, \hat{\tau}^1 \hat{\gamma}_v (1 + \hat{\gamma}_5) \hat{\psi} \right]_x \times \\ & \times \left[\hat{\psi}, \hat{\gamma}_v \hat{\gamma}_5 \hat{\tau}^1 \hat{\psi} \right]_y^+ + \text{э. с.} + \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

где $G_B(x-y)$ удовлетворяет уравнению

$$(\square - \mu_0^2) G_B(x-y) = \delta^4(x-y).$$

Обобщение формулы (10) на случай, когда $f_s \neq 0$, не представляет трудностей.

Эксперимент в согласии с выражениями (9) и (10) показывает, что реакция $\Lambda \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$ протекает в 10 раз слабее, чем реакция $n \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + p$. Отсюда следует, что $f_v^2/4\pi \approx 100$.

Как известно, нуклоны и π -мезоны — это те адроны, о существовании которых мы уже знали на наиболее ранней стадии развития ядерной физики. Поэтому вполне естественно, что построению общей теории элементарных частиц предшествовало построение теории нуклонного и мезонного полей (квантовой мезодинамики). Квантовая мезодинамика была оформлена в виде самостоятельной физической теории, призванной объяснить явления физики мезонов, являющейся разделом физики элементарных частиц. Как хорошо известно, квантовая мезодинамика при помощи теории возмущений только качественно объяснила некоторые явления в мезонной физике.

Возникает естественный вопрос: какова природа столь значительных неудач квантовой мезодинамики? Вполне понятно, что неудачи при решении задач квантовой мезодинамики могут быть вызваны или принципиальной порочностью основных уравнений квантовой мезодинамики, или

несостоятельностью методов решения этих уравнений. Еще хуже, если здесь имеют место обе причины.

Вопрос о корректности уравнений квантовой мезодинамики чрезвычайно трудный и деликатный. К решению этого вопроса можно подойти двояко: или в результате строгого анализа принципиальных основ квантовой теории поля в рамках аксиоматического подхода, или путем практической проверки различных вариантов квантовой теории поля. Во втором случае необходимо прежде всего быть уверенным, что существуют эффективные методы решения практических квантово-полевых задач.

На ранней стадии развития квантовой теории поля наиболее распространенным методом решения квантово-полевых задач являлся метод теории возмущений. В квантовой электродинамике, где константа взаимодействия мала, теория возмущений уже во втором приближении дает довольно хорошие результаты. В квантовой мезодинамике, где взаимодействие между мезонным и нуклонным полями является сильным, применение теории возмущений нельзя считать обоснованным. В связи с этим были предприняты многочисленные попытки построения различных методов теории сильной и промежуточной связи.

Наибольшую известность получили такие методы: 1) метод разложения решения по обратной константе связи; 2) метод Тамма—Данкова, представляющий своеобразный вариант метода Галеркина в теории поля; 3) дисперсионный метод [2]. Первые два метода столкнулись с определенными трудностями при устранении расходимостей. Наибольшей популярностью при анализе задач квантовой мезодинамики в настоящее время пользуется метод дисперсионных соотношений, позволивший получить большое количество соотношений, связывающих полные и дифференциальные сечения различных процессов.

В работе [8] предложен ковариантный метод сильной связи, основанный на использовании метода моментов и метода Бубнова—Галеркина. Применение метода моментов в квантовой теории поля заново поставило вопрос о сходимости так называемых «расходящихся» рядов, т. е. рядов, расходящихся в классическом смысле. В настоящее время существует громадное количество обобщенных методов суммирования «расходящихся» рядов.

Автор настоящей книги ввел новый метод обобщенного суммирования «расходящихся» рядов, названный естественным суммированием.

Естественная сумма «расходящегося» ряда — это предел последовательности приближенных решений соответствующего уравнения, полученных методом моментов («соответствующее уравнение» — уравнение, решением которого является рассматриваемый «расходящийся» ряд). Доказано, что при некоторых условиях естественное суммирование является регулярным. А также показано, что если ряд суммируется в естественном смысле к конечной «сумме», то при определенных условиях он также суммируется по методу Пуассона—Абеля и притом к той же сумме.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В природе существуют поля различного рода. Наиболее хорошо изучено электромагнитное поле. В меньшей степени изучено поле ядерных сил и поле сил тяготения (гравитационное поле). Ядерными силами называются силы взаимодействия между частицами в ядре.

Как будет рассмотрено в гл. II, каждому полю соответствуют частицы с определенной массой покоя. Электромагнитному полю соответствуют фотоны, масса покоя которых равна нулю. Полю тяготения соответствуют гравитоны, которые также обладают массой покоя, равной нулю. Юкава впервые предположил, что ядерное поле — это поле, обладающее частицами с массой покоя порядка 200 электронных масс, т. е. с массой, промежуточной между массой протона и массой электрона. Поэтому частицы ядерного поля были названы мезонами (от греческого слова «мезос» — средний), а само ядерное поле — мезонным.

В классической теории состояние любого физического поля характеризуется некоторой конечной совокупностью функций $\psi_j = \psi_j(x, y, z, t)$, т. е. функций координат и времени, называемых функциями поля.

В релятивистской теории поле описывается набором функций, преобразующихся по какому-либо неприводимому представлению группы Лоренца; так, например, электромагнитное поле описывается четырьмя функциями $A_\mu(\mathbf{r}, t)$, образующими в пространстве Минковского 4-мерный вектор-потенциал. Нейтральное мезонное поле описывается одной функцией ψ , следовательно, его волновая функция может быть скаляром или псевдоскаляром в пространстве Минковского. Эксперимент показал, что мезонное поле является псевдоскалярным. Гравитационное поле описывается симметричным тензором второго ранга в четырехмерном пространстве (т. е. является тензорным).

В классической теории поля функции поля подчинены уравнениям поля, которые обычно представляют собой дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.

Допустим, что нам необходимо решить задачу о движении системы частиц определенного сорта (например, электронов), взаимодействующих с электромагнитным (или каким-то другим) полем. До создания квантовой теории поля подобная задача решалась так: электроны описывались квантово-механически, а электромагнитное поле — классически. Такой подход к решению поставленной задачи является непоследовательным, он не дает возможности описать корпускулярные свойства поля (рождение и аннигиляция частиц), проявляющиеся в целом ряде экспериментов. Поэтому сразу же после построения квантовой механики возникла необходимость в построении теории, которая описывала бы также процессы рождения и аннигиляции частиц. Такой теорией является квантовая теория поля. В этой теории в упомянутых выше задачах (и в других аналогичных задачах) учитываются как процессы рождения и аннигиляции квантов электромагнитного поля, так и процессы рождения пар электрон — позитрон, которые являются квантами электронно-позитронного поля.

Для построения квантовой теории поля необходимо обобщить уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad (1.1)$$

на такую систему взаимодействующих полей, другими словами, необходимо составить оператор энергии для такой системы.

Отметим, что поле является динамической системой с бесконечно большим числом степеней свободы. Поэтому вектор состояния Ψ в квантовой теории поля зависит от бесконечно большого числа динамических переменных. Следовательно, вектор состояния Ψ в квантовой теории поля является функционалом.

Для того чтобы определить оператор энергии поля или системы взаимодействующих полей, используем схему построения квантовой механики. Сущность этой схемы в простейшем случае, допускающем классический аналог, состоит в следующем:

1) строим функцию Гамильтона системы;

2) заменяем в функции Гамильтона динамические переменные (т. е. пространственные координаты и импульсы) соответствующими операторами, на которые накладываем перестановочные соотношения:

$$x_i^{(k)} \hat{p}_j^{(l)} - \hat{p}_j^{(l)} x_i^{(k)} = i\hbar \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.2)$$

где $x_i^{(k)}$ — координаты k -й частицы; $\hat{p}_j^{(l)}$ — операторы проекций импульса l -й частицы;

3) полученный оператор энергии подставляем в уравнение Шредингера (1.1).

Проследим за реализацией этой методики для построения квантовой теории поля

Сначала построим функцию Гамильтона для поля. Будем считать, что физическое поле описывается системой функций $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$. Для простоты предположим, что m — конечное число. Разобьем все пространство на малые объемы $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, которые назовем ячейками поля. В определенном приближении можно считать, что функции поля во всех точках ячейки имеют одно и то же значение. Координаты центра «тяжести» ячейки являются ее обобщенным номером. Значения функций ψ_j ($j=1, \dots, m$) внутри ячейки можно принять за обобщенные координаты. В соответствии с этим функция Лагранжа элементарной ячейки поля равна

$$\Delta L = \mathcal{L} \left(\psi_j, \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \right) \Delta x \Delta y \Delta z,$$

где \mathcal{L} — плотность функции Лагранжа (плотность лагранжиана) в заданной ячейке поля. Функцию Лагранжа всего поля приближенно можно выразить в виде суммы

$$L(t) \approx \sum \mathcal{L} \Delta x \Delta y \Delta z;$$

переходя к пределу, когда максимальные значения Δx , Δy и Δz стремятся к нулю, последнюю формулу преобразуем к виду

$$L(t) = \int \mathcal{L} \left(\psi_j, \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \right) dx dy dz. \quad (1.3)$$

После предельного перехода переменные x, y, z являются «непрерывным» номером бесконечно малых ячеек поля, а функции $\psi_j(x, y, z, t)$ — обобщенными координатами этих ячеек; множество всех значений (x, y, z) имеет мощность континуума.

Лагранжиан системы полей равен сумме лагранжианов полей плюс лагранжианы взаимодействий. В случае двух взаимодействующих полей имеем

$$L = L_1 + L_2 + L_{int},$$

где L_1 и L_2 — лагранжианы соответственно первого и второго полей; L_{int} — лагранжиан взаимодействия этих полей.

Зная лагранжиан поля, построим интеграл действия для поля:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt = \int \mathcal{L}(x, y, z, t) dx dy dz dt. \quad (1.4)$$

В дальнейшем вместо обозначений x, y, z и t введем $x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}$ и $x_{(0)} = ct$, а интегрирование по этим переменным обозначим символом $\int \dots d^4 x$. Обычно плотность лагранжиана является функцией от функций полей $\psi_i(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, x_{(0)})$ и их первых производных:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu}\right).$$

Будем считать, что компоненты, для которых $i = 1, \dots, n_1$, относятся к первому полю; компоненты, для которых $i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$, относятся ко второму полю и т. д. Из принципа стационарного действия, согласно которому $\delta S = 0$, можно получить уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu}\right)} = 0 \quad (i = 1, \dots, N), \quad (1.5)$$

которые являются уравнениями поля, так как из них можно определить функции ψ_i .

Функция Гамильтона для элементарной ячейки поля, очевидно, равна

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial (\mathcal{L} dV)}{\partial \dot{\psi}_k} \dot{\psi}_k - \mathcal{L} dV = \left[\sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_k} \dot{\psi}_k - \mathcal{L} \right] dV = \Gamma dV.$$

Функцию $\Gamma = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_k} \dot{\psi}_k - \mathcal{L}$ называют плотностью га-

Мильтониана. Таким образом, функция Гамильтона всего поля, т. е. его полная энергия, равна

$$H = \int \Gamma dV = \int \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_k} \dot{\psi}_k - \mathcal{L} \right) dx dy dz. \quad (1.6)$$

Выражение $\pi_k = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\psi}_k$ называется функцией поля, канонически сопряженной с функцией ψ_k . Вводя π_k , выражения для Γ и H можно переписать в виде

$$\Gamma = \sum_{j=1}^m \pi_j \dot{\psi}_j - \mathcal{L}, \quad (1.6')$$

$$H = \int \left(\sum_{j=1}^m \pi_j \dot{\psi}_j - \mathcal{L} \right) dx dy dz.$$

Если функция Лагранжа поля неизвестна, то ее можно восстановить по известным уравнениям поля, рассматривая их как уравнения Эйлера для некоторого функционала S -интеграла действия.

Перейдем теперь ко второму пункту построения теории поля — к построению оператора энергии системы полей. Для этого по аналогии с квантовой механикой в гамильтониане чисто формально заменим функции π_j и ψ_j соответственно операторами $\hat{\pi}_j$ и $\hat{\psi}_j$, на которые следует наложить определенные перестановочные соотношения. Для того чтобы полученное выражение было эрмитовым оператором, в нем необходимо еще произвести симметризацию. Процесс симметризации осуществляется следующим образом: всякую функцию вида $f(\hat{\pi}_j, \hat{\psi}_j)$ формально можно разложить в ряд Тейлора:

$$f(\hat{\pi}_j, \hat{\psi}_j) = \sum_{n, m} a_{nm} (\hat{\pi}_j^n)^+ \hat{\psi}_j^m,$$

тогда симметризованная функция $f(\hat{\pi}_j, \hat{\psi}_j)$ имеет вид

$$f(\hat{\pi}_j, \hat{\psi}_j)_{\text{sim}} = \frac{1}{2} \sum_{n, m} a_{nm} [(\hat{\pi}_j^n)^+ \hat{\psi}_j^m + (\hat{\psi}_j^m)^+ \hat{\pi}_j^n];$$

это выражение является эрмитовым оператором.

Производя симметризацию, получаем выражение

$$\hat{H} = \int \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\hat{\pi}_j^+ \hat{\psi}_j + \hat{\psi}_j^+ \hat{\pi}_j) - \hat{\mathcal{L}}_{\text{sim}} \right] dx dy dz, \quad (1.7)$$

которое, строго говоря, не имеем права в полной мере считать оператором энергии системы полей. Чтобы это показать, составим перестановочные соотношения для операторов какого-нибудь одного поля.

В квантовой механике перестановочные соотношения записываются для операторов координат частиц и операторов проекций импульсов частиц. Оператор проекции импульса частицы выражается формулой

$$\hat{p}_j = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{x}_j},$$

где \hat{L} — лагранжиан всей системы частиц.

Аналогично этому, в квантовой теории поля необходимо составить перестановочные соотношения для операторов динамических величин, описывающих поведение волнового поля в его бесконечно малых ячейках. Такими операторами являются, во-первых, операторы усредненных по ячейке значений волновых функций, которые будем обозначать через $\hat{\psi}_i(\Delta\tau_k)$; во-вторых, операторы

$$\hat{p}_i(\Delta\tau_k) = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{\psi}_j(\Delta\tau_k)}, \quad (1.8)$$

где $\Delta\tau_k$ — объем k -й ячейки поля. Операторам $\hat{\psi}_j$ в квантовой механике соответствуют координаты частиц, а операторам \hat{p}_i — операторы импульсов частиц. Оператор лагранжиана системы полей приближенно равен

$$\hat{L} = \sum_k \hat{\mathcal{L}}(x_k, \dots) \Delta\tau_k, \quad (1.9)$$

где $\hat{\mathcal{L}}(x_k, \dots)\Delta\tau_k$ — оператор функции Лагранжа k -й ячейки поля; так как $\hat{\mathcal{L}}(x_k, \dots)$ зависит только от значений функций поля и их производных, взятых именно внутри k -й ячейки, то, подставляя \hat{L} из выражения (1.9) в (1.8), получаем

$$\hat{p}_j(\Delta\tau_k) = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{\psi}_j} = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}(x_k)}{\partial \hat{\psi}_j(\Delta\tau_k)} \Delta\tau_k = \hat{\pi}_j(\Delta\tau_k) \Delta\tau_k. \quad (1.10)$$

В квантовой теории поля на операторы $\hat{\psi}_j(\Delta\tau_k)$ и $\hat{\rho}_j(\Delta\tau_k)$ накладываются перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}_j(\Delta\tau_k), \hat{\rho}_{j'}(\Delta\tau_{k'})] &= i\hbar \delta_{kk'} \delta_{jj'}, \\ [\hat{\psi}_j(\Delta\tau_k), \hat{\psi}_{j'}(\Delta\tau_{k'})] &= [\hat{\rho}_j(\Delta\tau_k), \hat{\rho}_{j'}(\Delta\tau_{k'})] = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

аналогичные соотношениям (1.2) квантовой механики. Учитывая (1.10), первое соотношение (1.11) перепишем в виде

$$[\hat{\psi}_j(\Delta\tau_k), \hat{\pi}_{j'}(\Delta\tau_{k'})] = i\hbar \delta(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{k'}) \delta_{jj'}, \quad (1.12)$$

где символ $\delta(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{k'}) = \frac{\delta_{kk'}}{\Delta\tau_{k'}}$ равен $(\Delta\tau_{k'})^{-1}$, если \mathbf{r}_k и $\mathbf{r}_{k'}$ относятся к одной ячейке, и равен нулю в остальных случаях.

Можно показать [14], что предел последовательности функций $\delta(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{k'})$, когда размеры всех ячеек поля стремятся к нулю, является некоторой сингулярной обобщенной функцией, называемой дельта-функцией Дирака $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Поэтому в пределе перестановочное соотношение (1.12) получает следующий символический вид:

$$[\hat{\psi}_j(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}_{j'}(\mathbf{r}', t)] = i\hbar \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{jj'}, \quad (1.13)$$

смысл которого будет объяснен ниже. Аналогично из (1.11) находим

$$[\hat{\psi}_j(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_{j'}(\mathbf{r}', t)] = [\hat{\pi}_j(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}_{j'}(\mathbf{r}', t)] = 0; \quad (1.13')$$

эти квантовые перестановочные соотношения составлены для двух операторов, взятых в один и тот же момент времени.

В гл. II будет показано, что перестановочные соотношения вида (1.13) и (1.13') имеют место для частиц с целым спином. Для полей, которым соответствуют частицы с полуделым спином, подчиняющиеся принципу Паули, вместо перестановочных соотношений (1.13) и (1.13') необходимо ввести антиперестановочные соотношения вида

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}_j(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}_{j'}(\mathbf{r}', t)]_+ &= i\hbar \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{jj'}, \\ [\hat{\psi}_j(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_{j'}(\mathbf{r}', t)]_+ &= [\hat{\pi}_j(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}_{j'}(\mathbf{r}', t)]_+ = 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где введено обозначение

$$[\hat{A}, \hat{B}]_+ = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}.$$

В правых частях первых перестановочных соотношений (1.13) и (1.14) стоит δ -функция, которая является обобщенной функцией и дает закон, по которому любой достаточно гладкой функции $f(x)$ сопоставляется число. Таким образом, первые формулы (1.13) и (1.14) имеют символический смысл, а в полном виде они записываются следующим образом:

$$\int d^3x f(x, t) [\hat{\psi}_j(x, t), \hat{\pi}_i(x', t)] = i\hbar f(x', t) \delta_{ij},$$

$$\int d^3x f(x, t) [\hat{\psi}_j(x, t), \hat{\pi}_i(x', t)]_+ = i\hbar f(x', t) \delta_{ij},$$

где $f(x) \equiv f(x, t)$ — основная функция.

Обычно в качестве основных функций выбирают класс функций, бесконечно большое число раз дифференцируемых и финитных, т. е. отличных от нуля лишь в конечных областях. Отсюда следует, что в квантовой теории поля операторы $\hat{\psi}_j(x)$ и $\hat{\pi}_j(x)$ являются обобщенными операторами, определяемыми через функционал

$$\int d^4x (\Psi_i, \hat{\psi}_j(x) \Psi_k) f(x) = c_{ik}(f), \quad (1.15)$$

где i, k — индексы состояний; Ψ_i и Ψ_k — векторы состояний; c_{ik} — постоянная; $f(x)$ — основная функция.

Функционал (1.15) определяет обобщенный оператор $\hat{\psi}_j(x)$ как некоторый закон, по которому каждому двум векторам состояния Ψ_i и Ψ_k [при заданной основной функции $f(x)$] сопоставляется некоторое число c_{ik} .

Определяя оператор $\hat{\psi}_j(x)$ соотношением (1.15), мы сталкиваемся с трудностями при нахождении оператора $\hat{\psi}_j^2(x)$. А так как лагранжиан свободного поля в классической теории поля должен быть квадратичным относительно функции $\psi_j(x)$, то при формальном переходе к квантовой теории необходимо в нем заменить функцию $\psi_j^2(x)$ оператором $\hat{\psi}_j^2(x)$, который, как сказано ранее, определить трудно. Таким образом, в квантовой теории свободных полей построение оператора Лагранжа и оператора энергии путем замены в соответствующих классических выражениях функций $\psi_j(x)$ на операторы $\hat{\psi}_j(x)$ вызывает серьезные и обоснованные возра-

жения. Это в еще большей степени относится к теории нескольких взаимодействующих полей. Чтобы обойти эту трудность, потребуем, чтобы вектор состояния системы полей Ψ определялся правилом

$$\Psi = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \Psi_\alpha, \quad (1.16)$$

где α — набор некоторых параметров; Ψ_α — решение уравнения, полученного в результате обобщения обычного уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(N_d, t) = \int d^3x \hat{\Gamma}(x) \Psi(N_d, t) \quad (1.17)$$

(N_d — набор динамических величин).

Для построения обобщенного уравнения выясним в общих чертах структуру оператора плотности энергии $\hat{\Gamma}_\alpha$. В классической теории поля плотность гамильтониана системы взаимодействующих полей равна

$$\Gamma = \Gamma_{fr} + \Gamma_{int}, \quad (1.18)$$

где Γ_{fr} — плотность гамильтониана свободных полей; Γ_{int} — плотность гамильтониана взаимодействия.

Рассмотрим для простоты теорию двух взаимодействующих действительных скалярных полей $\psi(x)$ и $\phi(x)$, в которой Γ_{fr} содержит члены, квадратичные относительно волновых функций $\psi(x)$ и $\phi(x)$, а Γ_{int} содержит произведение вида $\psi^2(x)\phi(x)$. Следовательно, можно принять $\Gamma_{fr} \equiv \Gamma_{fr}[\psi^2(x); \phi^2(x)]$ и, например, $\Gamma_{int} \equiv G\psi^2(x)\phi(x)$, где G — постоянная связи. В последних выражениях сделаем замену:

$$\psi^2(x) \rightarrow \int f_\alpha(x, y) \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(y) d^4y, \quad (1.19)$$

$$\phi^2(x) \rightarrow \int f_\alpha(x, y) \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) d^4y,$$

$$\psi^+(x)\psi(x)\phi(x) \rightarrow \iiint f_\alpha(x, y, z) \hat{\psi}^+(y) \hat{\psi}(y) \hat{\phi}(z) d^4y d^4z,$$

где $f_\alpha(x, y)$ и $f_\alpha(x, y, z)$ — основные функции. В результате получим оператор плотности квазиэнергии в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_\alpha(x) = & \int d^4y f_\alpha(x, y) \hat{\Gamma}_{fr}[\hat{\psi}(x) \hat{\psi}(y); \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)] + \\ & + \iiint d^4y d^4z f_\alpha(x, y, z) \hat{\Gamma}_{int}[\hat{\psi}(y) \hat{\psi}(y) \hat{\phi}(z)], \end{aligned} \quad (1.20)$$

где основные функции $f_\alpha(x, y)$, $f_\alpha(x, y, z)$ подбираются таким образом, чтобы при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ оператор $\hat{\Gamma}_\alpha$ формально стремился к плотности классической функции Гамильтона.

Таким образом, если в (1.20) вместо операторов $\hat{\psi}(x)$ и $\hat{\varphi}(x)$ подставить функции поля $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, то должно выполняться равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \Gamma_\alpha(x) = \Gamma_{fr}[\psi^2(x); \varphi^2(x)] + \Gamma_{int}[\psi^2(x) \varphi(x)].$$

Для более сложных систем полей вместо соотношения (1.20) возникает более сложное выражение.

В квантовой теории полей уравнение Шредингера согласно (1.17) будет иметь вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_\alpha(N_d, t) = \int d^3x \hat{\Gamma}_\alpha(x) \Psi_\alpha(N_d, t), \quad (1.21)$$

где $\Gamma_\alpha(x)$ в рассмотренном частном случае выражается формулой (1.20). Можно записать (1.19) и (1.20) в симметрической форме, т. е. симметризовать, однако этого делать мы не будем и предоставим читателю возможность самостоятельно проделать симметризацию.

Для построения квантовой теории полей было бы разумно, таким образом, принять следующую систему аксиом:

1. Состояние системы полей характеризуется обобщенным вектором состояния Ψ , который является пределом последовательности векторов Ψ_α , зависящих от набора параметров (считаем, что этот предел существует хотя бы при $t = \pm \infty$) и являющихся решением уравнения, сформулированного в пункте 5.

2. При любых значениях параметров $\alpha \neq \alpha_0$ векторы Ψ_α являются векторами некоторого фиксированного полного гильбертова пространства H , т. е.

а) если Ψ_α и $\Phi_\alpha \in H$, то и $c_1 \Psi_\alpha + c_2 \Phi_\alpha \in H$, где c_1 и c_2 — постоянные числа;

б) каждым двум векторам Ψ_α и $\Phi_\alpha \in H$ можно сопоставить число $(\Psi_\alpha, \Phi_\alpha)$ — скалярное произведение векторов;

в) $(\Psi_\alpha, \Psi_\alpha) > 0$ — метрика гильбертова пространства, положительно определенная;

г) норма вектора $\|\Psi_\alpha\| = \sqrt{(\Psi_\alpha, \Psi_\alpha)}$ — конечное число.

В гильбертовом пространстве можно определить обобщенный оператор $\hat{\psi}(x)$ как закон, по которому каждым

двум векторам гильбертового пространства H и основной функции $f(x)$ сопоставляется число $c(f)$:

$$\int d^4 x f(x) (\Phi_\alpha, \hat{\psi}(x) \Psi_\alpha) = c(f).$$

Можно определить обобщенный оператор $\hat{\psi}_i(x) \hat{\psi}_j(y)$ как закон, по которому каждому двум векторам гильбертового пространства Ψ_α и Φ_α и основной функции $f(x, y)$ сопоставляется число $c(f)$:

$$\iint d^4 x d^4 y f(x, y) (\Phi_\alpha, \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(y) \Psi_\alpha) = c(f).$$

Аналогично определяются более сложные операторы.

3. Среди обобщенных операторов существует такой класс операторов $\hat{\psi}^+$ и $\hat{\psi}$, которые удовлетворяют определенным перестановочным соотношениям и некоторому дифференциальному уравнению и которые можно интерпретировать как операторы рождения и уничтожения частицы в заданной точке, а их соответствующие Фурье-компоненты \hat{a}_k^+ и \hat{a}_k — как операторы рождения и уничтожения частицы с заданным импульсом k . Динамическим величинам в квантовой теории поля можно сопоставить самосопряженные операторы, построенные из операторов такого класса.

4. При $t = \pm \infty$ существует вектор состояния математического вакуума Ψ_v , для которого $\hat{a}_k \Psi_v = 0$ (при всех импульсах k).

5. Векторы последовательности $\{\Psi_\alpha\}$ являются решениями уравнения Шредингера (1.21) с оператором плотности квазиэнергии типа (1.20), причем $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \Psi_\alpha = \Psi$ не зависит от способа выбора основных функций $f_\alpha(x, y)$, $f_\alpha(x, y, z)$.

6. Теория должна быть лоренц-инвариантной в том смысле, что выражение $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{\Gamma}_\alpha(x)$ должно иметь лоренц-инвариантный вид, т. е. должно формально совпадать с лоренц-инвариантной плотностью классического гамильтониана.

В теории взаимодействующих полей затравочные массы и заряды частиц не совпадают с экспериментальными массами и зарядами и отличаются от них на величины полевых добавок dm_i и dg_i .

7. Еще до перехода к пределу при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ в решении уравнения Шредингера (1.21) следует выразить затравочные массы и заряды частиц через их соответствующие экспериментальные величины и только после этого перейти к пределу $\alpha \rightarrow \alpha_0$, причем предполагается, что это обеспечивает

получение конечных результатов при решении квантово-полевых задач.

Процедура, описанная в п. 7, называется перенормировкой массы и заряда.

Программа построения квантовой теории поля в рамках приведенной аксиоматики является наиболее целесообразной. В последующих главах, там, где нет особой необходимости в строгом изложении материала, будем придерживаться общепринятой методики исследования, в которой оператор энергии системы в квантовой теории поля будет иметь вид, формально совпадающий с соответствующим гамильтонианом классической теории. Там, где мы не имеем права уклоняться от более строгого рассмотрения вопросов, будем придерживаться сформулированной в этом параграфе системы аксиом.

§ 2. КОМПЛЕКСНЫЕ ПОЛЯ. ПЛОТНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Если поле комплексное, то оно несет какой-то заряд (в частном случае это может быть электрический заряд); если поле не обладает никаким зарядом, то оно описывается действительными волновыми функциями. Так, например, фотоны и гравитоны — частицы нейтральные; им соответствуют электромагнитное и гравитационное поля, состояние которых характеризуется действительными функциями. Наоборот, электронно-позитронное поле описывается комплексными функциями, причем двум знакам электрического заряда частиц соответствуют две комплексно-сопряженные функции. Покажем, что отмеченные свойства присущи и остальным полям.

В электродинамике плотность лагранжиана имеет вид

$$\underline{\mathcal{L}} = -\frac{1}{16\pi} \sum_{\mu, \nu} \left\{ \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right)^2 \right\} + \frac{1}{c} \sum_{\mu} A_\mu j_\mu, \quad (2.1)$$

где A_μ — компоненты вектора-потенциала электромагнитного поля. Четырехмерный вектор плотности электрического тока согласно (2.1) равен

$$j_\mu = c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}. \quad (2.2)$$

Это правило обобщим для нахождения четырехмерного вектора плотности электрического тока, обусловленного любым

заряженным полем, описываемым функциями ψ и ψ^* . Пусть \mathcal{L} — лагранжиан рассматриваемого заряженного поля. Взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем описывается путем замены компоненты импульса p_μ на обобщенный импульс:

$$P_\mu = p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu, \quad (2.3)$$

т. е. путем замены

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu; \quad (2.4)$$

поэтому лагранжиан $\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu}, \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}, \psi^*, \psi \right)$ при наличии электромагнитного поля заменяется выражением

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \psi^*, \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \psi, \psi^*, \psi \right]. \quad (2.5)$$

Отсюда, подставляя \mathcal{L} в выражение (2.2), находим

$$j_\mu = c \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \psi^*} \left(-\frac{ie}{\hbar c} \psi^* \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \psi} \left(\frac{ie}{\hbar c} \psi \right) \right\}. \quad (2.6)$$

Таким образом, четырехмерный вектор плотности электрического тока при отсутствии электромагнитного поля (или в бесконечно слабом электромагнитном поле) выражается формулой

$$j_\mu = \frac{ie}{\hbar} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu}} \psi^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}} \psi \right\}. \quad (2.7)$$

Если рассматриваемое поле вещественно, т. е. если $\psi = \psi^*$, то согласно (2.7) плотность электрического тока $j_\mu = 0$, что находится в полном согласии со сказанным в начале § 2. Как будет видно в следующих главах, в свободном лагранжиане \mathcal{L} обычно содержатся произведения вида $\psi_i^* \psi_j$, что и обеспечивает его вещественность. Поэтому лагранжиан

является инвариантным по отношению к так называемому калибровочному преобразованию первого рода:

$$\psi_k \rightarrow e^{i\alpha} \psi_k, \quad \psi_k^* \rightarrow e^{-i\alpha} \psi_k^*, \quad (2.8)$$

где α — действительная постоянная, или

$$\begin{aligned} \psi_i &\rightarrow \psi_i e^{i\varepsilon} \sim (1 + i\varepsilon) \psi_i, \\ \psi_i^* &\rightarrow \psi_i^* e^{-i\varepsilon} \sim (1 - i\varepsilon) \psi_i^*, \end{aligned} \quad (2.8')$$

где ε — действительная бесконечно малая постоянная. Таким образом, при калибровочном преобразовании имеем

$$\delta\psi_i = i\varepsilon\psi_i, \quad \delta\psi_i^* = -i\varepsilon\psi_i^*. \quad (2.9)$$

Если плотность лагранжиана \mathcal{L} инвариантна относительно калибровочного преобразования первого рода, то согласно (2.9) тензор энергии-импульса поля

$$T_{\mu\nu} = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu}} \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\nu} \right) + \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}$$

также будет инвариантным относительно этого преобразования.

Покажем теперь, что четырехмерный вектор плотности электрического тока, обусловленного комплексным полем, удовлетворяет уравнению непрерывности. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial x_{\nu}} &= \frac{ie}{\hbar} \sum_{\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\nu}}} \right) \psi^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\nu}}} \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\nu}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}}} \right) \psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

откуда, учитывая уравнения поля, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial x_{\nu}} &= \frac{ie}{\hbar} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} \psi^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \psi + \sum_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\nu}}} \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\nu}} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}} \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Согласно (2.9) преобразуем формулу (2.11) к виду

$$\sum_{\nu} \frac{\partial j_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = -\frac{e}{e\hbar} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} \delta \psi^* + \sum_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\nu}}} \delta \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\nu}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \sum_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}}} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}} \right) \right].$$

или

$$\sum_{\nu} \frac{\partial j_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = -\frac{e}{e\hbar} \delta \mathcal{L}. \quad (2.12)$$

Так как при калибровочном преобразовании (2.9) плотность лагранжиана \mathcal{L} должна быть инвариантной, т. е. $\delta \mathcal{L} = 0$, то из формулы (2.12) следует уравнение непрерывности для четырехмерного тока:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial j_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0. \quad (2.13)$$

Если учесть, что $x_{(4)} = ict$ и $j_{(4)} = ic\rho$, то можно формулы (2.7) и (2.13) переписать в следующем виде:

$$\rho = -\frac{ie}{\hbar} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} \psi^* \right) = -\frac{e}{\hbar} (\pi\psi - \pi^* \psi^*), \quad (2.14)$$

$$j_k = -i \frac{e}{\hbar} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_k}} \psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k}} \psi^* \right) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2.14')$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) — закон сохранения электрического заряда, записанный в дифференциальной форме.

Вместо полевых функций ψ и ψ^* можно ввести две вещественные функции ψ_1 и ψ_2 . Действительно, для поля, описываемого одной комплексной функцией ψ , можно написать

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + i\psi_2), \quad \psi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 - i\psi_2). \quad (2.16)$$

Покажем, что уравнения Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}} \right)} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\nu}} \right)} &= 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

полученные в результате варьирования ψ и ψ^* , эквивалентны уравнениям Эйлера, полученным в предположении, что ψ_1 и ψ_2 являются независимыми. Из (2.16) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \psi_1} - i \frac{\partial}{\partial \psi_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \psi^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \psi_1} + i \frac{\partial}{\partial \psi_2} \right). \quad (2.18)$$

Согласно (2.18) сумма и разность уравнения Эйлера для ψ_1 и уравнения Эйлера для ψ_2 , умноженного на i , дают уравнение (2.17), что и требовалось доказать.

Подобная же ситуация имеет место и для гамильтониана. Действительно,

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}, \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*}. \quad (2.19)$$

Кроме того, можно написать

$$\begin{aligned} \pi_k &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \cdot \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\psi}_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} \cdot \frac{\partial \dot{\psi}^*}{\partial \dot{\psi}_k} = \\ &= \pi \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\psi}_k} + \pi^* \frac{\partial \dot{\psi}^*}{\partial \dot{\psi}_k} \quad (k = 1, 2). \end{aligned}$$

Учитывая выражения (2.16), получаем отсюда

$$\pi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi + \pi^*), \quad \pi_2 = \frac{i}{2} (\pi - \pi^*), \quad (2.20)$$

и, следовательно,

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 - i\pi_2), \quad \pi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 + i\pi_2). \quad (2.21)$$

Так как из соотношений (2.16) и (2.21) следует, что

$$\pi \dot{\psi} + \pi^* \dot{\psi}^* = \pi_1 \dot{\psi}_1 + \pi_2 \dot{\psi}_2,$$

то для плотности гамильтониана находим формулу

$$\Gamma = \pi \dot{\psi} + \pi^* \dot{\psi}^* - \mathcal{L} = \pi_1 \dot{\psi}_1 + \pi_2 \dot{\psi}_2 - \mathcal{L}. \quad (2.22)$$

Аналогично получаем формулу для плотности импульса

$$G = -\pi \nabla \psi - \pi^* \nabla \psi^* = -\pi_1 \nabla \psi_1 - \pi_2 \nabla \psi_2. \quad (2.23)$$

При переходе к квантовой теории поля функции ψ , ψ^* , π и π^* заменяются операторами $\hat{\psi}$, $\hat{\psi}^+$, $\hat{\pi}$ и $\hat{\pi}^+$, на которые накладываются перестановочные соотношения вида:

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\pi}(\mathbf{r}')] &= [\hat{\psi}^+(\mathbf{r}), \hat{\pi}^+(\mathbf{r}')] = i\hbar \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}(\mathbf{r}')] &= [\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}^+(\mathbf{r}')] = [\hat{\psi}^+(\mathbf{r}), \hat{\psi}^+(\mathbf{r}')] = \\ &= [\hat{\pi}(\mathbf{r}), \hat{\pi}(\mathbf{r}')] = [\hat{\pi}(\mathbf{r}), \hat{\pi}^+(\mathbf{r}')] = [\hat{\pi}(\mathbf{r}), \hat{\pi}^+(\mathbf{r}')] = \\ &= [\hat{\pi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}^+(\mathbf{r}')] = [\hat{\pi}^+(\mathbf{r}), \hat{\psi}(\mathbf{r}')] = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

если рассматриваемому нами полю соответствуют частицы с целым спином. Для частиц с полуцелым спином вместо (2.24) на операторы поля необходимо наложить соответствующие антиперестановочные соотношения:

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}(\mathbf{r}')]_{+} \equiv \psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}') + \psi(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}) = 0 \text{ и т. д.}$$

Из первых двух соотношений (2.24) следует, что пары (ψ, π) и (ψ^*, π^*) являются двумя парами канонически сопряженных функций.

§ 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В квантовой механике состояние системы описывается единичным вектором в гильбертовом пространстве, который называется вектором состояния. Изменение состояния системы во времени описывается изменением вектора состояния в гильбертовом пространстве. Указанное изменение можно представить многими способами. В первом способе вектор состояния вращается, а координатная система в гильбертовом пространстве остается неподвижной; такое представление называется шредингеровским. Во втором способе, который называется гейзенберговским представлением, вектор состояния неподвижен, а система координат вращается. В шредингеровском представлении операторы не зависят от времени, от времени зависит вектор состояния $\Psi(t)$. В гейзенберговском представлении операторы изменяются со временем, а вектор состояния не зависит от времени.

Можно построить бесконечное множество промежуточных представлений, в которых вращается как вектор состоя-

ния, так и система координат в гильбертовом пространстве. Наибольшее значение из всех промежуточных представлений имеет так называемое представление взаимодействия. Рассмотрим подробно представления Шредингера, Гейзенберга и взаимодействия.

Введем следующие обозначения:

Ψ^S, \hat{L}^S — вектор состояния и оператор в представлении Шредингера; Ψ^H, \hat{L}^H — то же в представлении Гейзенберга; Ψ^I, \hat{L}^I — то же в представлении взаимодействия.

Представление Шредингера. В этом представлении поведение системы описывается изменяющимся со временем вектором состояния $\Psi^S(t)$, который определяется уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^S(t)}{\partial t} = \hat{H}^S \Psi^S(t), \quad (3.1)$$

где \hat{H}^S — оператор энергии системы (не зависящий от времени для замкнутых систем). Динамическим переменным замкнутых систем соответствуют операторы, не зависящие явно от времени. Средние значения динамических величин, определяемые формулой

$$\langle F \rangle = (\Psi^S(t), \hat{F}^S \Psi^S(t)), \quad (3.2)$$

могут зависеть от времени через вектор состояния $\Psi^S(t)$.

Представление Гейзенберга. Полагая, что оператор \hat{H}^S не изменяется во времени, проинтегрируем формально уравнение (3.1):

$$\Psi^S(t) = \exp\left(-i \frac{\hat{H}^S t}{\hbar}\right) \Psi^H. \quad (3.3)$$

Подставляя $\Psi^S(t)$ из (3.3) в выражение (3.2), получаем

$$\langle \hat{F} \rangle = \left(\Psi^H, \exp\left\{i \frac{\hat{H}^S t}{\hbar}\right\} \hat{F}^S \exp\left\{-i \frac{\hat{H}^S t}{\hbar}\right\} \Psi^H \right),$$

или

$$\langle \hat{F} \rangle = (\Psi^H, \hat{F}^H \Psi^H), \quad (3.4)$$

где

$$\hat{F}^H = \exp\left\{i \frac{\hat{H}^S t}{\hbar}\right\} \hat{F}^S \exp\left\{-i \frac{\hat{H}^S t}{\hbar}\right\}. \quad (3.5)$$

Формула (3.4) показывает, что среднее значение динамической величины в данном случае зависит от времени через опе-

ратор; формула (3.5) дает переход от оператора в представлении Шредингера к оператору в представлении Гейзенберга. Формула (3.3) является формулой перехода от вектора состояния в представлении Гейзенберга к вектору состояния в представлении Шредингера. Согласно (3.5) имеем

$$\hat{H}^H = \hat{H}^S. \quad (3.5')$$

Дифференцируя обе части равенства (3.5) по времени, получаем

$$-i\hbar \frac{\partial \hat{F}^H}{\partial t} = [\hat{H}^H, \hat{F}^H]. \quad (3.6)$$

Формула (3.6) определяет изменение во времени оператора в гейзенберговском представлении. Если оператор энергии не зависит от времени, то вектор состояния в уравнении (3.1) можно представить в виде

$$\Psi^S(t) = \Phi^H \exp\left(-i \frac{Et}{\hbar}\right); \quad (3.7)$$

подставляя отсюда Ψ^S в формулу (3.1), находим уравнение для множителя Φ^H :

$$\hat{H}^H \Phi^H = E \Phi^H. \quad (3.8)$$

Как известно читателю из квантовой механики, уравнение (3.8) имеет решение, вообще говоря, не при всех значениях параметра E . Те значения параметра E , при которых уравнение (3.8) имеет решение, называются собственными значениями оператора энергии, а соответствующие им решения уравнения (3.8) называются собственными векторами. Пусть Φ_n^H — один из векторов стационарного состояния, а E_n — соответствующее ему собственное значение оператора энергии. Тогда, учитывая выражение (3.7), получаем формулу

$$\begin{aligned} (\hat{F})_{nn'} &= (\Psi_n^S, \hat{F}^S \Psi_{n'}^S) = \\ &= (\Phi_n^H, \hat{F}^S \Phi_{n'}^H) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} (E_n - E_{n'}) t\right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

характеризующую зависимость матричных элементов от времени.

Представление взаимодействия. Оператор энергии системы обычно делят на две части. Например, его можно представить так

$$\hat{H}^S = \hat{H}_0^S + \hat{H}_{int}^S, \quad (3.10)$$

где \hat{H}_0^S — оператор энергии свободных полей; \hat{H}_{int}^S — оператор энергии взаимодействия.

Произведем унитарное преобразование волнового вектора:

$$\Psi'(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0^S t\right) \Psi^S(t); \quad (3.11)$$

в правую часть (3.11) входит не весь оператор \hat{H}^S , а только его часть \hat{H}_0^S . Подставляя Ψ^S из (3.11) в выражение (3.2), получаем

$$\langle \hat{F} \rangle = \langle \Psi', \hat{F}' \Psi' \rangle,$$

где

$$\hat{F}' = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0^S t\right\} \hat{F}^S \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0^S t\right\} \quad (3.12)$$

— унитарное преобразование от оператора в представлении Шредингера к оператору в представлении взаимодействия.

Дифференцируя выражение (3.11) по времени и используя уравнение (3.1), получаем формулу для изменения во времени вектора состояния

$$i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = \hat{H}'_{int} \Psi', \quad (3.13)$$

где

$$\hat{H}'_{int} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0^S t\right\} \hat{H}_{int}^S \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0^S t\right\}. \quad (3.14)$$

Таким образом, вектор состояния системы в представлении взаимодействия Ψ' удовлетворяет уравнению Шредингера (3.13) с оператором энергии взаимодействия в представлении взаимодействия \hat{H}'_{int} .

Дифференцируя соотношение (3.12) по времени и учитывая, что $\hat{H}_0^I = \hat{H}_0^S$, находим формулу для изменения во времени оператора в представлении взаимодействия:

$$-i\hbar \frac{\partial \hat{F}'}{\partial t} = [\hat{H}'_0, \hat{F}']. \quad (3.15)$$

Сюда в отличие от (3.6) входит не весь оператор энергии \hat{H}' , а только его часть \hat{H}'_0 .

Итак, основные уравнения имеют следующий вид: в представлении Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^S}{\partial t} = \hat{H}^S \Psi^S, \quad -i\hbar \frac{\partial \hat{F}^S}{\partial t} = 0;$$

в представлении Гейзенберга

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^H}{\partial t} = 0, \quad -i\hbar \frac{\partial \hat{F}^H}{\partial t} = [\hat{H}^H, \hat{F}^H];$$

в представлении взаимодействия

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = \hat{H}'_{int} \Psi', \quad -i\hbar \frac{\partial \hat{F}'}{\partial t} = [\hat{H}'_0, \hat{F}'].$$

Векторы состояния и операторы в этих трех представлениях связаны между собой унитарными преобразованиями:

$$\Psi^H = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}^S t\right) \Psi^S(t),$$

$$\Psi'(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}'_0 t\right) \Psi^S(t),$$

$$\hat{F}^H = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}^S t\right) \hat{F}^S \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}^S t\right),$$

$$\hat{F}' = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}'_0 t\right) \hat{F}^S \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}'_0 t\right).$$

Замечания. 1. Как известно, оператор взаимодействия \hat{H}'_{int} — линейная комбинация членов вида

$$\hat{h}^S_{int} = \hat{\psi}_1^S(0, \mathbf{r}) \dots \hat{\psi}_n^S(0, \mathbf{r}).$$

Переходя к представлению взаимодействия, получаем

$$\begin{aligned} \hat{h}'_{int} &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}'_0 t\right) \hat{h}^S_{int} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}'_0 t\right) = \\ &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}'_0 t\right) \hat{\psi}_1^S(0, \mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}'_0 t\right) \times \dots \times \\ &\times \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}'_0 t\right) \hat{\psi}_n^S(0, \mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}'_0 t\right) = \hat{\psi}'_1(t, \mathbf{r}) \dots \hat{\psi}'_n(t, \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Таким образом, переход к оператору \hat{H}'_{int} осуществляется заменой в операторе \hat{H}'_{int} операторов поля $\hat{\psi}_I^S(0, \mathbf{r})$ на операторы $\hat{\psi}'_I(t, \mathbf{r})$ по формуле

$$\hat{\psi}'(t, \mathbf{r}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}'_0 t\right) \hat{\psi}^S(0, \mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}'_0 t\right). \quad (3.16)$$

2. Согласно формулам (3.12) и (3.16) в представлении взаимодействия операторные выражения динамических величин можно рассматривать как функции операторов поля в представлении Гей-

зенберга для свободных полей, т. е. как функции операторов, удовлетворяющих однородным уравнениям свободных полей. Поэтому операторы поля $\hat{\psi}$ в представлении взаимодействия удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям, как и для свободных полей.

§ 4. ИНВАРИАНТНОСТЬ ПО ОТНОШЕНИЮ К ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ ЛОРЕНЦА

Можно построить бесконечное множество вариантов различных теорий поля, но из всего этого многообразия необходимо отобрать только те теории, которые удовлетворяют определенным требованиям. В случае, когда пространство считается псевдоевклидовым, одним из основных требований, налагаемых на теорию поля, является ее инвариантность по отношению к преобразованиям Лоренца. Под инвариантностью классической теории поля по отношению к преобразованиям Лоренца будем понимать инвариантность интеграла действия поля; ковариантность уравнений поля относительно этих преобразований при этом будет выполняться автоматически. Так как элемент объема в четырехмерном пространстве инвариантен относительно преобразований Лоренца, то согласно (1.4) для инвариантности действия S достаточно, чтобы плотность функции Лагранжа \mathcal{L} была инвариантна относительно этих преобразований.

При построении квантовой теории поля мы сталкиваемся с определенными трудностями. Как было показано в § 1, при строгом подходе в теорию необходимо ввести функции $f_\alpha(x, y, z)$. Если подобрать эти функции так, чтобы теория была лоренц-инвариантной, то в этом случае не будет выполняться условие интегрируемости уравнения Шредингера. Если же функции $f_\alpha(x, y, z)$ подобрать так, чтобы выполнялось условие интегрируемости уравнения Шредингера, то теория не будет лоренц-инвариантной. Для того чтобы преодолеть это противоречие, необходимо заметить, что практически нужна такая теория, в которой функции $f_\alpha(x, y, z)$ обеспечивают выполнение условия интегрирования и обеспечивают законность всех математических операций на всех этапах вычислительного процесса; при этом в конце вычислительного процесса, осуществляя предельный переход $\alpha \rightarrow \alpha_0$, мы получаем окончательное выражение, имеющее лоренц-инвариантный вид. Квантовую теорию поля, удовлетворяющую этим требованиям, будем называть асимптотически лоренц-инвариантной.

Квантовая теория поля будет асимптотически лоренц-инвариантной, если уравнение Шредингера для поля будет асимптотически ковариантным, а перестановочные или антиперестановочные соотношения для операторов поля будут асимптотически инвариантными относительно преобразований Лоренца. В уравнении Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t} = \hat{H}_{\alpha i} \Psi_\alpha \quad (4.1)$$

время играет особую роль, а поэтому это уравнение не является асимптотически ковариантным. Этот формальный дефект теории был ликвидирован Томонагой (1946 г.) и Швингером (1948 г.), которые модифицировали уравнение (4.1). Для этого в пространстве Минковского вместо гипер-плоскости $t = \text{const}$ они ввели произвольную пространственно-подобную гиперповерхность σ . Нормаль к указанной поверхности в любой ее точке x является времени-подобной; никакие две точки поверхности σ нельзя соединить световым сигналом, так как любые две точки этой поверхности разделены пространственно-подобным интервалом. Каждой точке x гиперповерхности σ можно сопоставить время $t(x)$, которое называется локальным временем точки (отметим, что все точки плоскости $t = \text{const}$ имеют одно и то же время t); поэтому на поверхности σ вектор состояния Ψ_α будет функционалом от $t(x)$, т. е. $\Psi = \Psi[t(x)]$. Оператор энергии \hat{H} можно представить в виде суммы по элементарным ячейкам пространственно-подобной поверхности σ :

$$\hat{H}_{\alpha i} = \sum_{\sigma} \hat{\Gamma}_{\alpha i}(x) \Delta V_{\sigma}. \quad (4.2)$$

Рассматривая уравнение (4.1) как сумму бесконечно большого числа уравнений, записанных для каждой точки пространственно-подобной поверхности, и учитывая (4.2), найдем уравнение для i -й элементарной ячейки

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_\alpha [t(x)]}{\partial t(x)} = \hat{\Gamma}_{\alpha i}(x) \cdot \Delta V \Psi_\alpha [t(x)]. \quad (4.3)$$

Пусть σ и σ' — две пространственно-подобные поверхности, отличающиеся на бесконечно малую величину в окрестности некоторой точки x в пространстве Минковского (рис. 1).

Введем вариационную производную:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Psi_\alpha(\sigma)}{\delta\sigma(x)} &= \lim \frac{\Psi_\alpha[t(x) + \Delta t(x)] - \Psi_\alpha[t(x)]}{c\Delta V \cdot \Delta t(x)} = \\ &= \lim_{\Delta\Omega(x) \rightarrow 0} \frac{\Psi_\alpha(\sigma') - \Psi_\alpha(\sigma)}{\Delta\Omega(x)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\Delta\Omega(x) = c\Delta V \cdot \Delta t(x).$$

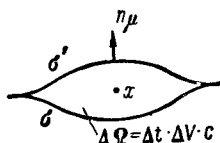


Рис. 1

Учитывая определение (4.4), перепишем уравнение (4.3) в виде

$$i\hbar c \frac{\delta\Psi_\alpha(\sigma)}{\delta\sigma(x)} = \hat{\Gamma}_{\alpha i}(x) \Psi_\alpha(\sigma). \quad (4.5)$$

Формула (4.5) представляет собой краткую запись бесконечной системы уравнений (4.3). Так как $\Delta\Omega(x) = c\Delta V \times \Delta t(x)$ — инвариант и определение пространственно-подобной поверхности не связано с выбором какой-либо определенной инерциальной системы отсчета, то уравнение (4.5) будет асимптотически ковариантным, если плотность гамильтониана асимптотически лоренц-инвариантна. Итак, если плотность гамильтониана асимптотически лоренц-инвариантна, то уравнение движения системы (4.5), получившее название уравнения Томонага—Швингера, имеет один и тот же вид в любой частной системе координат при $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

Плотность гамильтониана будет асимптотически лоренц-инвариантной, если плотность лагранжиана асимптотически лоренц-инвариантна и не зависит от ψ_k , так как в этом случае согласно формуле (1.6) $\hat{\Gamma}_{\alpha i} = -\hat{\mathcal{L}}_{\alpha i}$.

Найдем условие интегрируемости бесконечной системы уравнений (4.5) [или, что то же самое, уравнений (4.3)]. Для этого, используя (4.5), образуем вторые вариационные производные для x и $x' \neq x$.

Согласно уравнению (4.5) имеем

$$\frac{\delta^2 \Psi_\alpha}{\delta\sigma(x') \cdot \delta\sigma(x)} = -\frac{1}{\hbar^2 c^2} \hat{\Gamma}_{\alpha i}(x) \hat{\Gamma}_{\alpha i}(x') \Psi_\alpha. \quad (4.6)$$

Но результат не должен зависеть от порядка дифференцирования, т. е. должно быть

$$\frac{\delta^2 \Psi_\alpha}{\delta\sigma(x') \cdot \delta\sigma(x)} = \frac{\delta^2 \Psi_\alpha}{\delta\sigma(x) \delta\sigma(x')}, \quad (4.7)$$

отсюда согласно (4.6) и (4.7) находим

$$[\hat{\Gamma}_{\alpha i}(x), \hat{\Gamma}_{\alpha i}(x')] = 0, \quad (4.8)$$

где x и x' — точки, лежащие на пространственно-подобной поверхности σ .

Итак, для того чтобы система уравнений (4.5) была интегрируемой, необходимо, чтобы для любых двух точек x и x' , лежащих на пространственно-подобной поверхности, выполнялось условие (4.8). Условие (4.7), а также вытекающее из него условие (4.8), называется условием интегрируемости системы уравнений (4.5).

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ (СВОБОДНЫХ) ПОЛЕЙ

§ 1. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ШРЕДИНГЕРОВСКОГО ПОЛЯ

В природе все существующие волновые поля находятся во взаимодействиях. Однако полезно предварительно исследовать изолированные поля, не взаимодействующие с другими полями. Квантовая теория свободного (изолированного) поля, очевидно, должна быть наиболее простой.

В качестве примера, иллюстрирующего особенности математического аппарата квантовой теории поля, приведем квантование уравнения Шредингера, рассматриваемого как уравнение для некоторого классического поля $\psi(x, y, z, t)$. Уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(\mathbf{r}, t) \psi, \quad (1.1)$$

где $U(\mathbf{r}, t)$ — потенциальная энергия частицы. Построим квантовую теорию этого поля, используя разработанную в гл. I методику. Будем рассматривать уравнение (1.1) как уравнение Эйлера некоторой вариационной задачи, для которой плотность лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L} = i\hbar \psi^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi - U(\mathbf{r}, t) \psi^* \psi - i\hbar \dot{\psi}^* \psi \quad (1.2)$$

и где функции ψ и ψ^* считаем независимыми.

Действительно, подставляя в уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \sum_{k=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right)} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \sum_{k=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} \right)} = 0$$

выражение для \mathcal{L} , получим уравнение (1.1) и уравнение, сопряженное с (1.1):

$$-i\hbar \dot{\psi}^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + U(\mathbf{r}, t) \psi^*. \quad (1.3)$$

Функции, канонически сопряженные с ψ и ψ^* , даются выражениями:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar \dot{\psi}^*, \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = -i\hbar \dot{\psi}. \quad (1.4)$$

Согласно уравнениям (1.2) и (1.4) плотность гамильтониана равна

$$\Gamma = \pi \dot{\psi} + \pi^* \dot{\psi}^* - \mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi + U \psi^* \psi, \quad (1.5)$$

а функция Гамильтона всего поля

$$H = \int \Gamma dV. \quad (1.6)$$

В квантовой теории согласно уравнению (1.5) оператор квазиэнергии шредингеровского поля имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_\alpha = & \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}') + \right. \\ & \left. + \frac{U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}')}{2} \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \right] dV dV', \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ —основная функция, причем $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = f_\alpha(\mathbf{r}', \mathbf{r})$. На операторы $\hat{\pi}$ и $\hat{\psi}$ накладываются перестановочные соотношения

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}(\mathbf{r}', t)] = i\hbar \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

или

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^+(\mathbf{r}', t)] = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.8)$$

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}(\mathbf{r}', t)] = [\hat{\psi}^+(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^+(\mathbf{r}', t)] = 0. \quad (1.8')$$

Энергия—величина действительная, поэтому оператор энергии поля должен быть эрмитовым. Последнее условие будет выполняться, если $\hat{\psi}^+$ —оператор, эрмитово сопряженный с $\hat{\psi}$. Действительно, учитывая формулу $(\hat{A} \hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+$, из уравнения (1.7) получаем

$$\begin{aligned} \hat{H}_\alpha^+ = & \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} [\nabla \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}')]^+ + \right. \\ & \left. + \frac{U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}')}{2} [\hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}')]^+ \right\} dV dV' = \hat{H}_\alpha, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Пусть функция U не зависит от t , тогда оператор энергии не зависит от времени явно и из формулы $i\hbar\dot{\hat{L}} = [\hat{L}, \hat{H}_\alpha]$, где \hat{L} —произвольный оператор, следует, что энергия поля является интегралом движения. В этом случае уравнение Шредингера для поля получает вид

$$\hat{H}_\alpha \Phi_\alpha = E_\alpha \Phi_\alpha, \quad (1.9)$$

где Φ_α —вектор состояния поля в квантовой теории. Пусть $u_k(\mathbf{r})$ —ортонормированные функции, где k —набор дискретных индексов; разложим операторы $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^\dagger$ в ряд по функциям $u_k(\mathbf{r})$:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \hat{B}_k u_k(\mathbf{r}), \quad \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \sum_k \hat{B}_k^\dagger u_k^*(\mathbf{r}), \quad (1.10)$$

где \hat{B}_k —новые операторы. Подставляя отсюда $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^\dagger$ в формулу (1.8), получаем

$$\sum_{k, k'} [\hat{B}_k u_k(\mathbf{r}), \hat{B}_{k'}^\dagger u_{k'}^*(\mathbf{r}')] = \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

Умножая обе части последнего равенства на $u_k^*(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}')$, интегрируя полученное равенство по \mathbf{r} и \mathbf{r}' и учитывая ортонормированность функций u_k , получаем

$$[\hat{B}_k, \hat{B}_l^\dagger] = \iint u_k^*(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dV dV' = \delta_{kl}; \quad (1.11)$$

аналогично из соотношения (1.8') находим

$$[\hat{B}_k, \hat{B}_l] = [\hat{B}_k^\dagger, \hat{B}_l^\dagger] = 0. \quad (1.11')$$

Подставляя выражения (1.10) для операторов $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^\dagger$ в формулу (1.7), получаем

$$\begin{aligned} \hat{H}_\alpha &= \sum_{j, l} \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_l \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla u_j^*(\mathbf{r}) \nabla u_l(\mathbf{r}') + \right. \\ &\quad \left. + \frac{U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}')}{2} u_j^*(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}') \right] dV dV' = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j, l} \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_l \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left\{ u_j^*(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] u_l(\mathbf{r}') + \right. \\ &\quad \left. + u_l(\mathbf{r}') \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}') \right] u_j^*(\mathbf{r}) \right\} dV dV'. \quad (1.12) \end{aligned}$$

Если $u_k(\mathbf{r})$ — собственные функции оператора энергии для одной частицы с собственными значениями E_k , т. е. если функции $u_k(\mathbf{r})$ удовлетворяют уравнению Шредингера

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U\right)u_k = E_k u_k, \quad (1.13)$$

то формулу (1.12) можно переписать в следующем виде:

$$\hat{H}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j, l} \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_l \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_j^*(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}') \times \\ \times (E_j + E_l) dV dV'. \quad (1.14)$$

Выберем основные функции $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ таким образом, чтобы

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \quad (1.15)$$

тогда из формулы (1.14) получим следующее выражение для оператора энергии:

$$\hat{H} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{H}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j, l} \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_l \int u_j^*(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}) (E_j + E_l) dV = \\ = \sum_j \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j E_j = \sum_j \hat{N}_j E_j, \quad (1.16)$$

где $\hat{N}_j = \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j$.

Введем теперь эрмитов оператор

$$\hat{N}_\alpha = \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') dV dV', \quad (1.17)$$

который будем называть оператором числа квазичастиц. Подставляя $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^\dagger$ из (1.10) в выражение для \hat{N}_α , имеем

$$\hat{N}_\alpha = \sum_{i, j} \hat{B}_i^\dagger \hat{B}_j \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_i^*(\mathbf{r}) u_j(\mathbf{r}') dV dV'; \quad (1.18)$$

отсюда, учитывая (1.15), получаем выражение для оператора числа частиц

$$\hat{N} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{N}_\alpha = \sum_{i, j} \hat{B}_i^\dagger \hat{B}_j \int u_i^*(\mathbf{r}) u_j(\mathbf{r}) dV = \\ = \sum_j \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j = \sum_j \hat{N}_j. \quad (1.19)$$

Как видно из выражений (1.16) и (1.19), операторы \hat{H} и \hat{N} коммутируют, поэтому они одновременно могут быть

приведены к диагональному виду и, следовательно, имеют общую систему собственных векторов; кроме того, из формулы

$$i\hbar \hat{N} = [\hat{N}, \hat{H}]$$

следует, что \hat{N} — интеграл движения.

Найдем собственные значения N_n и собственные векторы оператора \hat{N} , для этого рассмотрим уравнение

$$\sum_k \hat{N}_k \Phi = N \Phi, \quad \text{или} \quad \hat{N} \Phi = N \Phi. \quad (1.20)$$

Оператор \hat{N} — эрмитов, поэтому его собственные значения вещественны. Оператор \hat{N}_k — оператор числа частиц в состоянии k .

Все операторы \hat{N}_k коммутируют друг с другом, поэтому их можно одновременно привести к диагональному виду. Согласно выражениям (1.19) и (1.20) $\Phi_N = f_{N_1} f_{N_2} f_{N_3} f_{N_4} \dots$, где f_{N_k} — собственный вектор оператора \hat{N}_k , соответствующий собственному значению N_k этого оператора. Собственные значения N_k не отрицательны; действительно, имеем

$$N_k = \frac{(\hat{B}_k^+ \hat{B}_k f_{N_k}, f_{N_k})}{(f_{N_k}, f_{N_k})} = \frac{(\hat{B}_k f_{N_k}, \hat{B}_k f_{N_k})}{(f_{N_k}, f_{N_k})} \geq 0, \quad (1.21)$$

где $(f_{N_k}, f_{N'_k})$ — скалярное произведение волновых векторов f_{N_k} и $f_{N'_k}$.

Рассмотрим вектор $\Phi_1 = \hat{B}_k f_{N_k}$, где $N_k > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \hat{N}_k \Phi_1 &= \hat{N}_k \hat{B}_k f_{N_k} = \hat{B}_k^+ \hat{B}_k \hat{B}_k f_{N_k} = \\ &= (\hat{B}_k \hat{B}_k^+ - 1) \hat{B}_k f_{N_k} = \hat{B}_k \hat{N}_k f_{N_k} - \hat{B}_k f_{N_k} = \\ &= (N_k - 1) \hat{B}_k f_{N_k} = (N_k - 1) \Phi_1. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Таким образом, Φ_1 — собственный вектор оператора \hat{N}_k , соответствующий собственному значению $N_k - 1$. Аналогично можно показать, что $\Phi_m = (\hat{B}_k)^m f_{N_k}$ — собственные векторы оператора \hat{N}_k , соответствующие собственным значениям $N_k - m$, где $m > 1$ — целое число. Эта последо-

вательность должна где-то оборваться, так как собственные значения оператора \hat{N}_k не могут быть отрицательными.

Рассмотрим теперь вектор $X_1 = \hat{B}_k^+ f_{N_k}$. Имеем

$$\begin{aligned} \hat{N}_k X_1 &= \hat{N}_k \hat{B}_k^+ f_{N_k} = \hat{B}_k^+ \hat{B}_k \hat{B}_k^+ f_{N_k} = \\ &= \hat{B}_k^+ (1 + \hat{B}_k^+ \hat{B}_k) f_{N_k} = (N_k + 1) X_1. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Отсюда следует, что X_1 — собственный вектор оператора \hat{N}_k , соответствующий собственному значению $N_k + 1$. Можно показать, что векторы $X_m = (\hat{B}_k^+)^m f_{N_k}$ — собственные векторы оператора \hat{N}_k , соответствующие собственным значениям $N_k + m$ (m — целое число, причем $m > 1$).

Итак, оператор \hat{N}_k имеет бесконечно большое число собственных значений. Полагаем: $N_k = n_k + N_k^0$, где n_k — целое положительное число или нуль, $0 \leq N_k^0 < 1$. Найдем N_k^0 . Согласно доказанному имеем

$$\hat{B}_k f_{N_k} = A_k^{-1} f_{N_k-1}, \quad \hat{B}_k^+ f_{N_k} = B_k^{-1} f_{N_k+1}, \quad (1.24)$$

где A_k^{-1} и B_k^{-1} — некоторые числа. Пусть N_k^0 — первое (наименьшее) собственное значение оператора \hat{N}_k . Тогда $f_{N_k^0-1} = 0$ и $\hat{B}_k f_{N_k^0} = 0$, откуда следует равенство

$$\hat{B}_k^+ \hat{B}_k f_{N_k^0} = N_k^0 f_{N_k^0} = 0. \quad (1.25)$$

Из него вытекает, что $N_k^0 = 0$, а поэтому $N_k = n_k$, т. е. собственные значения оператора \hat{N}_k равны целым положительным числам или нулю, а собственные значения оператора \hat{N} равны

$$N = \sum_k n_k. \quad (1.26)$$

Собственные векторы f_{n_k} должны быть нормированными на единицу, т. е. должно быть $(f_{n_k}, f_{n_k}) = 1$. Поэтому, учитывая равенства (1.24), можно написать

$$\begin{aligned} (f_{n_k+1}, f_{n_k+1}) &= B_k^2 (f_{n_k}, \hat{B}_k \hat{B}_k^+ f_{n_k}) = \\ &= B_k^2 (f_{n_k}, (n_k + 1) f_{n_k}) = (n_k + 1) B_k^2 = 1, \end{aligned}$$

откуда $B_k = (1 + n_k)^{-1/2}$; аналогично находим, что $A_k = n_k^{-1/2}$. Подставляя найденные значения для A_k и B_k в формулы (1.24), получаем

$$f_{n_k+1} = (1 + n_k)^{-1/2} \hat{B}_k^+ f_{n_k}, \quad f_{n_k-1} = n_k^{-1/2} \hat{B}_k f_{n_k}, \quad (1.27)$$

а подставляя f_{n_k} из выражения (1.27) в формулу $\Phi_N = f_{n_1} f_{n_2} \dots f_{n_k} \dots$, находим

$$\begin{aligned} & \hat{B}_k^+ \Phi_N(n_1, \dots, n_k, \dots) = \\ & = \sqrt{n_k + 1} \Phi_{N+1}(n_1, \dots, n_k + 1, \dots), \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\hat{B}_k \Phi_N(n_1, \dots, n_k, \dots) = \sqrt{n_k} \Phi_{N-1}(n_1, \dots, n_k - 1, \dots),$$

где Φ_N — вектор состояния поля (с N частицами).

Из формул (1.22) и (1.23), которые можно переписать так

$$\hat{N}_k (\hat{B}_k f_{n_k}) = (n_k - 1) \hat{B}_k f_{n_k}, \quad \hat{N}_k (\hat{B}_k^+ f_{n_k}) = (n_k + 1) \hat{B}_k^+ f_{n_k},$$

и из формул (1.24) следует, что, действуя оператором \hat{B}_k на собственный вектор Φ с собственным значением n , получим собственный вектор с собственным значением $n - 1$ и, соответственно, действуя оператором \hat{B}_k^+ на указанный вектор, получим собственный вектор с собственным значением $n + 1$. Отсюда вытекает, что оператор \hat{B}_k^+ можно интерпретировать как оператор рождения частицы в состоянии k , так как его действие на вектор состояния сводится к увеличению на единицу числа частиц в состоянии, которое характеризуется набором квантовых чисел k . Аналогично оператор \hat{B}_k можно интерпретировать как оператор уничтожения частицы в состоянии с волновой функцией $u_k(\mathbf{r})$. Введем «вакуум-вектор» $\Phi_v = (0, 0, \dots, 0, \dots)$, у которого все $n_k = 0$ и, следовательно, $n = 0$, а поэтому и $\hat{N}\Phi_v = 0$. Из определения вакуума-вектора вытекает, что

$$\hat{B}_k \Phi_v = 0 \quad (\text{для всех } k).$$

Множественно действуя операторами \hat{B}_k^+ на вакуум-вектор Φ_v , построим базисные векторы гильбертова пространства:

$$\Phi_N(n_1, \dots, n_k, \dots) = (n_1! \dots n_k! \dots)^{-1/2} (\hat{B}_1^+)^{n_1} \dots (\hat{B}_k^+)^{n_k} \dots \Phi_v, \quad (1.29)$$

где множитель $(n_1! \dots n_k! \dots)^{-1/2}$ введен для нормировки а через $(\hat{B}_k^+)^{n_k} \Phi_v$ обозначено n_k -кратное применение, оператора \hat{B}_k^+ к вектору Φ_v .

Перейдем к нахождению собственных значений оператора энергии. Согласно формуле (1.16) оператор энергии \hat{H} в N -представлении имеет следующие собственные значения:

$$E = \sum_k n_k E_k. \quad (1.30)$$

Формула (1.30) дает энергии стационарных состояний поля. В каждом одночастичном состоянии k число частиц n_k постоянно. Состояния поля описываются векторами состояния $\Phi_n (n_1, \dots, n_k, \dots)$, которые одновременно являются собственными векторами операторов \hat{H}, \hat{N} и всех \hat{N}_k .

Изложенные результаты полностью совпадают с результатами квантовой механики для системы многих частиц, не взаимодействующих между собой (если учитывать только симметричные решения уравнения Шредингера). Можно показать, что обе теории будут полностью эквивалентными и при наличии взаимодействия между частицами. В обоих случаях мы имеем теорию частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна, т. е. теорию частиц, не подчиняющихся принципу Паули. Такими частицами являются, например, фотоны и π -мезоны. Для частиц, подчиняющихся статистике Бозе—Эйнштейна, числа n_k могут принимать все положительные целые значения или нуль, т. е. в каждом одночастичном состоянии системы может находиться любое число частиц. Последнее обстоятельство является следствием из перестановочных соотношений (1.11) для операторов \hat{B}_k и \hat{B}_k^+ или, что то же самое, из перестановочных соотношений (1.8) для $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^+$.

Нерелятивистская квантовая механика применяется и для исследования системы частиц, подчиняющихся принципу Паули. В этом случае берутся решения уравнения Шредингера, антисимметричные относительно обмена координат двух частиц. Правила перестановок для $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^+$ надо выбрать теперь так, чтобы операторы $\hat{N}_k = \hat{B}_k^+ \hat{B}_k$ имели только два собственных значения: 0 и 1. Йордан и Вигнер показали [9], что для этого перестановочные соотношения

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} = C$$

необходимо заменить антиперестановочными вида

$$[\hat{A}, \hat{B}]_+ = \hat{A} \hat{B} + \hat{B} \hat{A} = C.$$

В случае шредингеровского поля, подчиняющегося принципу Паули, антиперестановочные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^+(\mathbf{r}', t)]_+ &= \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\hat{\psi}^+(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^+(\mathbf{r}', t)]_+ &= [\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}(\mathbf{r}', t)]_+ = 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Подставляя сюда выражения для $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^+$ из формул (1.10), найдем антиперестановочные соотношения для \hat{B}_k и \hat{B}_k^+ :

$$[\hat{B}_i^+, \hat{B}_j]_+ = \delta_{ij}, \quad [\hat{B}_i, \hat{B}_j]_+ = [\hat{B}_i^+, \hat{B}_j^+]_+ = 0. \quad (1.32)$$

Найдем собственные значения оператора \hat{N}_k ; согласно соотношениям (1.32) $\hat{B}_k \hat{B}_k = 0$, поэтому имеем

$$\begin{aligned} \hat{N}_k^2 &= \hat{B}_k^+ \hat{B}_k \hat{B}_k^+ \hat{B}_k = \hat{B}_k^+ \hat{B}_k (1 - \hat{B}_k \hat{B}_k^+) = \hat{B}_k^+ \hat{B}_k - \\ &- \hat{B}_k^+ \hat{B}_k \hat{B}_k \hat{B}_k^+ = \hat{B}_k^+ \hat{B}_k = \hat{N}_k. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Для собственных значений оператора \hat{N}_k имеем уравнение

$$\hat{N}_k f_{N_k} = n_k f_{N_k}, \quad (1.34)$$

откуда

$$\hat{N}_k^2 f_{N_k} = n_k^2 f_{N_k}. \quad (1.35)$$

Учитывая выражения (1.33), (1.34) и (1.35), находим

$$n_k^2 = n_k \quad (\text{для произвольных } k). \quad (1.36)$$

Это уравнение имеет только два решения $n_k = 0$ и 1 в полном соответствии с принципом Паули. Собственные значения оператора полного числа частиц $\hat{N} = \sum_k \hat{N}_k$ равны $n = 0, 1, 2, \dots$. Так как зависимость оператора \hat{N} от \hat{B}_k^+ и \hat{B}_k не изменяется при изменении условий, налагаемых на операторы поля, то для собственных значений оператора энергии справедлива та же самая формула

$$E = \sum_k n_k E_k,$$

где, однако, n_k пробегает только два значения 0 или 1 . Из соотношений (1.32) имеем для операторов \hat{B}_k

$$\hat{B}_k^2 = \hat{B}_k^{+2} = 0, \quad \hat{B}_k^+ \hat{B}_k + \hat{B}_k \hat{B}_k^+ = 1. \quad (1.32')$$

Эти соотношения удовлетворяются матрицами

$$\hat{B}_k^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_k \text{ и } \hat{B}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_k,$$

тогда

$$\hat{N}_k = \hat{B}_k^+ \hat{B}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_k.$$

Условие $\hat{N}_k f_{0_k} = 0$, где f_{0_k} — вакуум-вектор, удовлетворяется, если $f_{0_k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_k$. Действительно,

$$f_{1_k} = \hat{B}_k^+ f_{0_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_k. \quad (1.37)$$

В формуле (1.37) k — номер одночастичного состояния; 0_k и 1_k — означают соответственно, что в состоянии k нет частицы или находится одна частица. Далее

$$\hat{N}_k f_{1_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_k = f_{1_k}. \quad (1.38)$$

Таким образом, f_{1_k} — вектор состояния частицы (k — квантовые числа)

Можно доказать справедливость следующих формул:

$$\hat{B}_k^+ f_{n_k}(n_k) = \sqrt{1-n_k} f_{n_k+1}(1-n_k) = \begin{cases} f_{1_k} & \text{для } n_k = 0 \\ 0 & \text{для } n_k = 1, \end{cases} \quad (1.39)$$

$$\hat{B}_k f_{n_k}(n_k) = \sqrt{n_k} f_{n_k-1}(1-n_k) = \begin{cases} f_{0_k} & \text{для } n_k = 1 \\ 0 & \text{для } n_k = 0, \end{cases} \quad (1.40)$$

согласно которым операторы \hat{B}_k^+ и \hat{B}_k — операторы рождения и уничтожения частиц в состоянии k . Действительно, если подействовать оператором \hat{B}_k^+ на Φ_v , получается вектор Φ_1 с $n_k = 1$; действуя этим оператором на Φ_1 , получаем нуль; далее, действуя оператором \hat{B}_k на Φ_1 , получим Φ_v , тогда как действие этого оператора на вектор состояния Φ_v дает нуль.

Собственные векторы оператора \hat{N} можно согласно выражениям (1.37) и (1.38) представить в следующем виде:

$$\Phi_n(1_1, \dots, 1_n) = \hat{B}_1^+ \dots \hat{B}_n^+ \Phi_v. \quad (1.41)$$

Действуя \hat{B}_k^+ на некоторую функцию Φ_n , получим

$$\begin{aligned} \hat{B}_k^+ \Phi_n(1_1, \dots, 1_{k-1}, 0_k, 1_{k+1}, \dots) &= \hat{B}_k^+ \hat{B}_1^+ \dots \\ \dots \hat{B}_{k-1}^+ \hat{B}_{k+1}^+ \dots \Phi_v &= (-1)^{k-1} \hat{B}_1^+ \dots \hat{B}_{k-1}^+ \hat{B}_k^+ \hat{B}_{k+1}^+ \dots \Phi_v = \\ &= (-1)^{k-1} \Phi_{n+1}(1_1, \dots, 1_{k-1}, 1_k, 1_{k+1}, \dots), \\ \hat{B}_k^+ \Phi_{n+1}(1_1, \dots, 1_{k-1}, 1_k, 1_{k+1}, \dots) &= \\ &= (-1)^{k-1} \hat{B}_1^+ \dots \hat{B}_{k-1}^+ \hat{B}_k^{+2} \hat{B}_{k+1}^+ \dots \Phi_v = 0. \end{aligned}$$

Эти две формулы можно записать так

$$\begin{aligned} \hat{B}_k^+ \Phi_n(n_1, \dots, n_k, \dots) &= (-1)^{\sum_{i=1}^{k-1} n_i} \sqrt{1-n_k} \times \\ &\times \Phi_{n+1}(n_1, \dots, 1-n_k, \dots); \end{aligned} \quad (1.42)$$

аналогично находим

$$\begin{aligned} \hat{B}_k \Phi_n(n_1, \dots, n_k, \dots) &= (-1)^{\sum_{i=1}^{k-1} n_i} \sqrt{n_k} \times \\ &\times \Phi_{n-1}(n_1, \dots, 1-n_k, \dots). \end{aligned} \quad (1.43)$$

§ 2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СВОБОДНОГО НЕЙТРАЛЬНОГО СКАЛЯРНОГО (ПСЕВДОСКАЛЯРНОГО) МЕЗОННОГО ПОЛЯ

Мезонное поле может быть заряженным или нейтральным. Построим квантовую теорию свободного нейтрального мезонного поля. В классической теории такое мезонное поле описывается действительной скалярной или псевдоскалярной функцией, которая удовлетворяет следующему уравнению:

$$(\square^2 - \mu^2) \varphi \equiv \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu^2 \right) \varphi = 0, \quad (2.1)$$

где μ — некоторая константа ($\mu = \frac{mc}{\hbar}$, где m — масса мезона). Различие между скалярным и псевдоскалярным полями проявляется во взаимодействии с другими полями.

Уравнение (2.1) будем рассматривать как уравнение Эйлера для функционала $S = \int_{t_1}^{t_2} \int \mathcal{L} dV dt$, где плотность лагранжиана имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{c^2}{2} \left\{ \sum_{\nu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_{\nu}} \right)^2 + \mu^2 \varphi^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \{ \dot{\varphi}^2 - c^2 |\nabla \varphi|^2 - c^2 \mu^2 \varphi^2 \}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Действительно, подставляя выражение для \mathcal{L} из формулы (2.2) в уравнение Эйлера, получим уравнение (2.1). Функция, канонически сопряженная с φ , равна

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}. \quad (2.3)$$

Согласно выражению (2.2), для плотности гамильтониана получаем

$$\Gamma = \frac{1}{2} [\pi^2 + c^2 (\nabla \varphi)^2 + c^2 \mu^2 \varphi^2], \quad (2.4)$$

откуда видно, что Γ является положительно-определенной функцией, как это и должно быть для плотности энергии.

В квантовой теории надо перейти от функций φ и π к операторам $\hat{\varphi}$ и $\hat{\pi}$, на которые накладываются перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(\mathbf{r}), \hat{\pi}(\mathbf{r}')] &= i\hbar \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\hat{\varphi}(\mathbf{r}), \hat{\varphi}(\mathbf{r}')] &= [\hat{\pi}(\mathbf{r}), \hat{\pi}(\mathbf{r}')] = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Согласно формуле (2.4) оператор квазиэнергии поля имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_\alpha &= \int dV \hat{\Gamma}_\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \{ \hat{\pi}(\mathbf{r}) \hat{\pi}(\mathbf{r}') + c^2 \nabla \hat{\varphi}(\mathbf{r}) \nabla \hat{\varphi}(\mathbf{r}') + \\ &\quad + c^2 \mu^2 \hat{\varphi}(\mathbf{r}) \hat{\varphi}(\mathbf{r}') \} dV dV'. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Так как энергия — величина действительная, достаточно, чтобы оператор \hat{H}_α был эрмитовым, а для этого достаточно, чтобы были эрмитовыми операторы $\hat{\varphi}$ и $\hat{\pi}$ ($\hat{\varphi}^\dagger = \hat{\varphi}$, $\hat{\pi}^\dagger = \hat{\pi}$).

Предположим, что функция $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ отлична от нуля только тогда, когда точка \mathbf{r} и точка \mathbf{r}' находятся внутри куба объема $V = L^3$, где L — длина ребра куба. Это предположение эквивалентно предположению, что мезонное поле заключено внутри указанного куба. При этом можно разложить оператор $\hat{\phi}$ в ряд Фурье:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} [\hat{c}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}], \quad (2.7)$$

где $\omega_{\mathbf{k}} = c\sqrt{\mu^2 + \mathbf{k}^2}$, а $\hat{c}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ — новые операторы. Оператор, даваемый формулой (2.7), является эрмитовым, как это и должно быть.

Подставляя выражение (2.7) для $\hat{\phi}$ в формулу (2.5), находим перестановочные соотношения для $\hat{c}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$:

$$\begin{aligned} [\hat{c}_{\mathbf{k}}, \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ [\hat{c}_{\mathbf{k}}, \hat{c}_{\mathbf{k}'}] &= [\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Далее подставляя $\hat{\phi}$ из (2.7) в формулу (2.6), получим следующее выражение для оператора квазиэнергии поля:

$$\begin{aligned} \hat{H}_\alpha &= \frac{\hbar}{4V} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \left[(-\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'} + c^2\mathbf{k}\mathbf{k}' + c^2\mu^2) \times \right. \\ &\times \left\{ \hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}_{-\mathbf{k}'} \iint dV dV' f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}'\mathbf{r}' - \omega_{\mathbf{k}'}t)] + \right. \\ &+ \left. \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{c}_{-\mathbf{k}'}^{\dagger} \iint dV dV' f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp[i(-\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k}'\mathbf{r}' + \omega_{\mathbf{k}'}t)] \right\} + \\ &+ (\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'} + c^2\mathbf{k}\mathbf{k}' + c^2\mu^2) \times \\ &\times \left\{ \hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} \iint dV dV' f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}'\mathbf{r}' + \omega_{\mathbf{k}'}t)] + \right. \\ &+ \left. \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{k}'} \iint dV dV' f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \right. \\ &\left. \times \exp[i(-\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k}'\mathbf{r}' - \omega_{\mathbf{k}'}t)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В четвертой сумме (2.9) произведем замену

$$k \rightarrow -k \text{ и } k' \rightarrow -k',$$

тогда вместо (2.9) получим

$$\hat{H}_\alpha = \hat{\varepsilon}_\alpha + \hbar \sum_k \Omega_k \left[\hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k + \frac{1}{2} \right], \quad (2.9')$$

где

$$\Omega_k = \frac{\omega_k}{V} \iint dV dV' f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp i k(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (A)$$

а $\hat{\varepsilon}_\alpha$ — оператор, стремящийся к нулю при $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

Оператор $\hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k$ (см. § 1) имеет собственные значения n_k (n_k — целое положительное число или 0). Поэтому при $\alpha \sim \alpha_0$ оператор квазиэнергии \hat{H}_α имеет следующие собственные значения:

$$E_\alpha \approx \hbar \sum_k \Omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right). \quad (2.10)$$

Если все числа заполнения n_k равны нулю, т. е. если мезоны в поле отсутствуют, то квазиэнергия поля равна своему минимуму:

$$E_\alpha^{(0)} \approx \frac{\hbar}{2} \sum_k \Omega_k, \quad (2.11)$$

который называется нулевой квазиэнергией поля.

Можно так подобрать $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, чтобы ряд (2.11) был сходящимся и нулевая квазиэнергия поля была конечной. Принимая нулевую квазиэнергию поля за начало отсчета энергии, получим следующую формулу для квазиэнергии мезонного поля:

$$E'_\alpha \approx E_\alpha - E_\alpha^{(0)} = \hbar \sum_k n_k \Omega_k. \quad (2.12)$$

Можно выбрать основные функции $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ таким образом, чтобы они удовлетворяли условию (1.15). Учитывая (1.15) и переходя к пределу $\alpha \rightarrow \alpha_0$, из формулы (A) получаем

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \Omega_k = \omega_k. \quad (B)$$

Согласно формулам (B) и (2.12), выражение для энергии поля приобретает вид

$$E = \hbar \sum_k n_k \omega_k. \quad (2.12')$$

Интересно отметить, что ввиду равенства (Б)

$$E^{(0)} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} E_\alpha^{(0)} = \frac{\hbar}{2} \sum_k \omega_k$$

Так как эта сумма расходится, то нулевая энергия поля бесконечна.

Пусть мезонное поле, находящееся в стационарном состоянии, характеризуется числами заполнения n_1, n_2, \dots . Согласно формуле (2.12') энергия мезонного поля равна сумме энергий n_1 мезонов, находящихся в состоянии 1, n_2 мезонов, находящихся в состоянии 2, и т. д. При этом энергия мезона, находящегося в состоянии k , равна $\hbar \omega_k = \hbar c \sqrt{\mu^2 + k^2} = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}$, где $m = \frac{\hbar \mu}{c}$ — масса мезона, а $p = \hbar k$ — его импульс.

Таким образом, целое число n_k выражает число частиц с импульсом $\hbar k$. Чтобы убедиться в этом, определим собственные значения оператора импульса мезонного поля \hat{G} . Для определения вида оператора \hat{G} заметим, что плотность импульса в классической теории поля равна

$$g_l = \frac{1}{ic} T_{4l} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \dot{\varphi} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \pi, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.13)$$

откуда получаем оператор квазиимпульса поля

$$\hat{G}_\alpha = - \frac{1}{2} \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [\hat{\pi}(\mathbf{r}) \nabla \hat{\varphi}(\mathbf{r}') + \nabla \hat{\varphi}(\mathbf{r}) \hat{\pi}(\mathbf{r}')] dV dV'. \quad (2.14)$$

Этот оператор является эрмитовым, так как

$$\left(\hat{\pi} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_l} \right)^+ = \frac{\partial \hat{\varphi}^+}{\partial x_l} \hat{\pi}^+ = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_l} \hat{\pi}. \quad (2.15)$$

Учитывая принятые здесь свойства основных функций f_α и подставляя в формулу (2.14) выражение для $\hat{\varphi}$ из (2.7), получаем

$$\begin{aligned} \hat{G}_\alpha = & \frac{\hbar}{4V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}} \left[(\mathbf{k}' \omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}'}) \times \right. \\ & \times \left\{ \hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}_{-\mathbf{k}'} \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k}' \mathbf{r}' - \omega_{\mathbf{k}'} t)] dV dV' + \right. \\ & \left. + \hat{c}_{\mathbf{k}}^+ \hat{c}_{-\mathbf{k}'}^+ \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k}' \mathbf{r}' - \omega_{\mathbf{k}'} t)] dV dV' \right\} + \\ & + (\mathbf{k}' \omega_{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}'}) \left\{ \hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}'}^+ \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \right. \\ & \times \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k}' \mathbf{r}' + \omega_{\mathbf{k}'} t)] dV dV' + \hat{c}_{\mathbf{k}}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}'} \times \\ & \left. \times \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k}' \mathbf{r}' + \omega_{\mathbf{k}'} t)] dV dV' \right\}. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Учитывая (1.15) и соотношение

$$\frac{1}{V} \int \exp i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{r} dV = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (\text{B})$$

из формулы (2.16) находим, что оператор импульса поля равен

$$\begin{aligned} \hat{G} &= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{G}_\alpha = \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (\hat{c}_{\mathbf{k}}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}} + \hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}}^+) = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \mathbf{k} \left(\hat{c}_{\mathbf{k}}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Собственные значения оператора $\hat{c}_{\mathbf{k}}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}}$ равны $n_{\mathbf{k}}$ (см. § 1), поэтому собственные значения оператора (2.17) равны

$$G = \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (2n_{\mathbf{k}} + 1). \quad (2.18)$$

Так как $\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} = 0$ (каждые два вектора \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$ сокращаются), то формулу (2.18) можно переписать так

$$G = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \hbar \mathbf{k}. \quad (2.19)$$

Следовательно, согласно выражению (2.19) в стационарном состоянии мезонного поля существует $n_{\mathbf{k}}$ мезонов, каждый из которых обладает импульсом $\hbar \mathbf{k}$, что и требовалось доказать.

§ 3. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЗАРЯЖЕННОГО СКАЛЯРНОГО МЕЗОННОГО ПОЛЯ

Как уже упоминалось в § 2 гл. I, заряженные поля должны описываться комплексной функцией. Поэтому для описания заряженных мезонов введем две действительные функции φ_1 и φ_2 , из которых образуем комплексные поля φ и φ^* . В классической мезонной теории функции φ и φ^* , описывающие заряженные скалярные или псевдоскалярные мезонные поля, должны подчиняться однородному уравнению Клейна—Гордона:

$$(\square^2 - \mu^2) \varphi = 0, \quad (\square^2 - \mu^2) \varphi^* = 0, \quad (3.1)$$

где $\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_{(1)}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{(2)}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{(3)}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{(4)}^2}$. Эти уравнения можно рассматривать как уравнения Эйлера для функциона-

ла $S = \int_{t_1}^{t_2} \int \mathcal{L} dV dt$, где плотность лагранжиана выражается в виде

$$\mathcal{L} = -c^2 \left\{ \sum_{\nu} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\nu}} + \mu^2 \varphi^* \varphi \right\} = \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} - c^2 (\nabla \varphi^*, \nabla \varphi) - c^2 \mu^2 \varphi^* \varphi. \quad (3.2)$$

Так как согласно формуле (3.2) плотность лагранжиана (инвариантна относительно преобразования калибровки $\varphi \rightarrow \varphi e^{i\alpha}$, $\varphi^* \rightarrow \varphi^* e^{-i\alpha}$), то для мезонного заряженного поля находим выражения для плотности заряда и тока:

$$\rho = -i \frac{e}{\hbar} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} \varphi^* \right) = -i \frac{e}{\hbar} (\dot{\varphi}^* \varphi - \dot{\varphi} \varphi^*);$$

$$j_k = -i \frac{e}{\hbar} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}} \varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_k}} \varphi^* \right), \quad \mathbf{j} = \frac{ie c^2}{\hbar} (\varphi \nabla \varphi^* - \varphi^* \nabla \varphi).$$

Учитывая уравнения (3.1), можно проверить выполнение закона сохранения заряда (т. е. убедиться в удовлетворении уравнения непрерывности для вектора \mathbf{j}_k).

Функции, канонически сопряженные с φ и φ^* , равны

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^*, \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi}. \quad (3.3)$$

Согласно формулам (3.2) и (3.3) для плотности гамильтониана получаем выражение

$$\Gamma = \pi \dot{\varphi} + \pi^* \dot{\varphi}^* - \mathcal{L} = \dot{\varphi} \dot{\varphi}^* + c^2 \nabla \varphi \nabla \varphi^* + c^2 \mu^2 \varphi \varphi^*, \quad (3.4)$$

откуда видно, что Γ является положительно-определенной функцией, как это и должно быть для плотности энергии. В квантовой теории надо перейти от функций φ и φ^* к операторам $\hat{\varphi}$ и $\hat{\varphi}^+$, на которые накладываются перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(\mathbf{r}), \hat{\varphi}^+(\mathbf{r}')] &= i\hbar \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\hat{\varphi}(\mathbf{r}), \hat{\varphi}(\mathbf{r}')] &= i\hbar \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В остальных (не выписанных) перестановочных соотношениях в правой части стоит ноль.

Согласно выражению (3.4) оператор квазиэнергии поля равен

$$\hat{H}_\alpha = \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[\hat{\phi}(\mathbf{r}) \hat{\phi}^+(\mathbf{r}') + c^2 \nabla \hat{\phi}(\mathbf{r}) \nabla \hat{\phi}^+(\mathbf{r}') + \right. \\ \left. + \epsilon^2 \mu^2 \hat{\phi}(\mathbf{r}) \hat{\phi}^+(\mathbf{r}') \right] dV dV', \quad (3.6)$$

где $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — основная функция, обладающая свойством (1.15). Так же как и в § 2, будем полагать, что $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ отлична от нуля только в том случае, когда точки \mathbf{r} и \mathbf{r}' находятся внутри объема куба $V = L^3$, где L — ребро куба. При этом можно разложить операторы поля в ряд Фурье

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)] + \right. \\ \left. + \hat{b}_{\mathbf{k}}^+ \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)] \right], \quad (3.7) \\ \hat{\phi}^+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)] + \right. \\ \left. + \hat{b}_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)] \right],$$

где $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{a}_{\mathbf{k}}^+$ — операторы поглощения и рождения положительно заряженных мезонов, а $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{k}}^+$ — операторы поглощения и рождения отрицательно заряженных мезонов. Очевидно, $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{a}_{\mathbf{k}}^+$ коммутируют с $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{k}}^+$. Подставляя выражения (3.7) для $\hat{\phi}$ и $\hat{\phi}^+$ в формулы (3.5), получим перестановочные соотношения для операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{k}}$:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+] = [\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^+] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (3.8)$$

(остальные пары операторов попарно коммутируют).

Подставляя выражения (3.7) для операторов поля в формулу (3.6), находим следующее выражение для оператора квазиэнергии мезонного поля:

$$\hat{H}_\alpha = \frac{\hbar}{2V} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}} \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \\ \times \{ (\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'} + c^2 \mathbf{k}\mathbf{k}' + c^2 \mu^2) (\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+ \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k}'\mathbf{r}' + \omega_{\mathbf{k}'} t)] + \\ + \hat{b}_{\mathbf{k}}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}'} \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k}'\mathbf{r}' - \omega_{\mathbf{k}'} t)] \} + \\ + (-\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'} + c^2 \mathbf{k}\mathbf{k}' + c^2 \mu^2) (\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}'} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t - \\ - \mathbf{k}'\mathbf{r}' - \omega_{\mathbf{k}'} t)] + \hat{b}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{-\mathbf{k}'}^+ \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k}'\mathbf{r}' - \\ - \omega_{\mathbf{k}'} t)] \} dV dV'; \quad (3.9)$$

отсюда, учитывая формулы (1.15) и (B), получаем

$$\hat{H} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{H}_\alpha = \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ + \hat{b}_{\mathbf{k}}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^+], \quad (3.10)$$

где

$$\omega_{\mathbf{k}} = c \sqrt{\mu^2 + \mathbf{k}^2}.$$

Найдем теперь операторы импульса и электрического заряда. Плотность импульса в классической теории поля можно записать в виде

$$\mathbf{g} = -(\pi \nabla \varphi + \nabla \varphi^* \pi^*). \quad (3.11)$$

Согласно формуле (3.11) оператор квазиимпульса мезонного поля равен

$$\hat{\mathbf{G}}_\alpha = -\iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [\hat{\pi}(\mathbf{r}) \nabla \hat{\varphi}(\mathbf{r}') + \nabla \hat{\varphi}^+(\mathbf{r}) \hat{\pi}^+(\mathbf{r}')] dV dV', \quad (3.12)$$

отсюда, используя формулы (1.15), (B) и (3.7), получаем

$$\hat{\mathbf{G}} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{\mathbf{G}}_\alpha = \hbar \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^+) \quad (3.13)$$

— оператор импульса мезонного поля.

Плотность электрического заряда в классической теории равна

$$\rho = -i \frac{e}{\hbar} (\dot{\varphi}^* \varphi - \dot{\varphi} \varphi^*). \quad (3.14)$$

Согласно (3.14) оператор полного электрического квази-заряда равен

$$\hat{Q}_\alpha = -i \frac{e}{\hbar} \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [\dot{\varphi}^+(\mathbf{r}) \dot{\varphi}(\mathbf{r}') - \dot{\varphi}(\mathbf{r}) \dot{\varphi}^+(\mathbf{r}')] dV dV'; \quad (3.15)$$

отсюда, учитывая формулы (1.15), (B) и (3.7), находим оператор полного электрического заряда

$$\hat{Q} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{Q}_\alpha = \frac{e}{2} \sum_{\mathbf{k}} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ - \hat{b}_{\mathbf{k}}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}} - \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^+]. \quad (3.16)$$

Обозначим собственные значения операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{k}}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}}$ через $\overset{+}{n}_{\mathbf{k}}$ и $\overset{-}{n}_{\mathbf{k}}$ ($\overset{+}{n}_{\mathbf{k}}$ и $\overset{-}{n}_{\mathbf{k}}$ — целые положительные чис-

ла или нуль). Тогда собственные значения операторов \hat{H} , \hat{G} и \hat{Q} выражаются следующими формулами:

$$E = \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left[(2n_{\mathbf{k}}^+ + 1) + (2\bar{n}_{\mathbf{k}} + 1) \right] = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} (n_{\mathbf{k}}^+ + \bar{n}_{\mathbf{k}}) + 2E_0, \quad (3.17)$$

$$G = \hbar \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (n_{\mathbf{k}}^+ - \bar{n}_{\mathbf{k}} - 1) = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \mathbf{k} (n_{\mathbf{k}}^+ - \bar{n}_{\mathbf{k}}), \quad (3.18)$$

$$Q = \frac{e}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[(2n_{\mathbf{k}}^+ + 1) - (2\bar{n}_{\mathbf{k}} + 1) \right] = e \sum_{\mathbf{k}} (n_{\mathbf{k}}^+ - \bar{n}_{\mathbf{k}}). \quad (3.19)$$

Эти формулы можно интерпретировать так: каждый из $n_{\mathbf{k}}^+$ мезонов обладает зарядом $+e$, импульсом $+\hbar\mathbf{k}$ и энергией $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$, а каждый из $\bar{n}_{\mathbf{k}}$ мезонов обладает зарядом $-e$, импульсом $-\hbar\mathbf{k}$ и энергией $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$.

В природе существуют как нейтральные, так и заряженные мезоны. Можно рассматривать заряженные и нейтральные мезоны как компоненты единого мезонного поля¹. Эта точка зрения последовательно осуществлена в симметричной мезонной теории Кеммера. В теории Кеммера удалось получить ядерные силы, т. е. силы взаимодействия между нуклонами, не зависящие от зарядового состояния нуклонов, что как раз и наблюдается на опыте. Обозначим через Φ_3 ($\Phi_3 = \Phi_3^*$) волновую функцию, описывающую нейтральные мезоны. Заряженные мезоны, как и раньше, будем описывать функциями Φ_1 и Φ_2 . Оператор квазиэнергии мезонного поля можно записать в виде

$$\hat{H}_\alpha = \frac{1}{2} \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_{s=1}^3 \left[\hat{\pi}_s(\mathbf{r}) \hat{\pi}_s(\mathbf{r}') + c^2 \nabla \hat{\psi}_s(\mathbf{r}) \nabla \hat{\psi}_s(\mathbf{r}') + c^2 \mu^2 \hat{\psi}_s(\mathbf{r}) \hat{\psi}_s(\mathbf{r}') \right], \quad (3.20)$$

отсюда, разлагая операторы поля в ряды Фурье и учитывая формулы (1.15) и (A), получаем выражение для оператора энергии

$$\hat{H} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{H}_\alpha = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}}) + 3E_0, \quad (3.21)$$

¹ Так как массы заряженных и нейтральных мезонов близки, то говорят, что они образуют изотопический триплет.

где \hat{c}_k^+ и \hat{c}_k — операторы рождения и уничтожения нейтральных мезонов.

Можно показать, что собственные значения оператора энергии равны

$$E = \sum_k \hbar \omega_k (n_k^+ + \bar{n}_k + n_k^0) + 3E_0, \quad (3.22)$$

где n_k^+ , \bar{n}_k , n_k^0 — целые числа или нуль (числа соответственно положительных, отрицательных и нейтральных мезонов).

Состояние мезонного поля, характеризующееся отсутствием в поле мезонов, называется мезонным вакуумом. Если Φ_v — вектор состояния мезонного вакуума, то должно выполняться условие

$$\hat{a}_k \Phi_v = \hat{b}_k \Phi_v = \hat{c}_k \Phi_v = 0 \quad (\text{для всех } k). \quad (3.23)$$

§ 4. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННОГО ПОЛЯ

В квантовой механике электрон описывается уравнением Дирака

$$i\hbar \psi + i\hbar c \hat{\alpha} \nabla \psi - mc^2 \hat{\beta} \psi = 0, \quad (4.1)$$

где ψ — волновая функция, являющаяся биспинором следующего вида:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

а $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\alpha}_3$ — эрмитовы матрицы Дирака:

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\hat{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \hat{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

причем

$$\hat{\alpha} = i\hat{\alpha}_1 + j\hat{\alpha}_2 + k\hat{\alpha}_3.$$

Матрицы Дирака подчиняются следующим правилам коммутации, полностью определяющим их алгебру:

$$\hat{\alpha}_\nu \hat{\alpha}_\mu + \hat{\alpha}_\mu \hat{\alpha}_\nu = 2\delta_{\nu\mu} \quad (\nu, \mu = 1, 2, 3, 4).$$

Если ввести матрицы Паули

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

и единичную матрицу

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то матрицы Дирака можно записать в следующем виде:

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_3 \\ \hat{\sigma}_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ 0 & -\hat{I} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Уравнение, эрмитово-сопряженное относительно уравнения (4.1), имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi^+}{\partial t} + ic\hbar \nabla \psi^+ \hat{\alpha} + mc^2 \psi^+ \hat{\beta} = 0, \quad (4.1')$$

где ψ^+ — матрица, эрмитово-сопряженная с ψ и содержащая одну строку и четыре столбца.

Введем обозначения, принадлежащие фон-Нейману:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_k &= -i\hat{\beta}\hat{\alpha}_k = i\hat{\alpha}_k\hat{\beta} \quad (k = 1, 2, 3), \quad \hat{\gamma}_4 = \hat{\beta}, \\ \bar{\psi} &= i\psi^+ \hat{\beta}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где эрмитовы матрицы $\hat{\gamma}_\mu$ удовлетворяют соотношениям

$$\hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu + \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\mu = 2\delta_{\mu\nu}.$$

Согласно формулам (4.6) уравнения (4.1) и (4.1') можно преобразовать к виду

$$\left(\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \chi \right) \psi = 0, \quad \bar{\psi} \left(\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \chi \right) = 0, \quad (4.7)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ — компоненты радиуса-вектора \mathbf{r} ;
 $x_4 = ix_{(0)} = ict$; $\chi = \frac{mc}{\hbar}$.

В уравнениях (4.7) по индексу μ производится суммирование от 1 до 4. Умножая второе уравнение (4.7) справа на $-\psi$, а первое уравнение (4.7) слева на $\bar{\psi}$ и складывая их, получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad (4.8)$$

где $s_\mu = c\bar{\psi}\hat{\gamma}_\mu\psi$ — четырехмерный вектор плотности потока вероятности. В трехмерной форме уравнение (4.8) имеет вид

$$\frac{\partial s_{(0)}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{s} = 0, \quad (4.8')$$

где $s_{(0)} = -i\bar{\psi}\hat{\gamma}_4\psi = \psi^+\psi$ — плотность вероятности нахождения электрона в данной точке пространства, $\mathbf{s} = c\bar{\psi}\hat{\boldsymbol{\gamma}}\psi = = c\psi^+\hat{\boldsymbol{\alpha}}\psi$ — трехмерный вектор плотности потока вероятности.

Для заряженной частицы, несущей электрический заряд e , выражение

$$\rho = -ie\bar{\psi}\hat{\gamma}_4\psi = e\psi^+\psi \quad (4.9)$$

дает плотность распределения электрического заряда в пространстве, а выражение

$$\mathbf{j} = e\bar{\psi}\hat{\boldsymbol{\gamma}}\psi = e\psi^+\hat{\boldsymbol{\alpha}}\psi \quad (4.10)$$

— трехмерный вектор плотности электрического тока. Согласно формулам (4.9) и (4.10) четырехмерный вектор плотности электрического тока имеет вид

$$j_\mu = e\bar{\psi}\hat{\gamma}_\mu\psi. \quad (4.11)$$

Уравнения (4.1) и (4.1') можно получить из вариационного принципа

$$\delta \int \mathcal{L} dV dt = 0,$$

если в качестве плотности лагранжиана взять выражение

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \left[c\hat{\gamma}_v \frac{\partial\psi}{\partial x_v} + mc^2\psi \right], \quad (4.12)$$

а при варьировании \mathcal{L} функции ψ и $\bar{\psi}$ считать независимыми. Действительно, из формулы (4.12) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} &= i \left[c\hat{\gamma}_v \frac{\partial\psi}{\partial x_v} + mc^2\psi \right], \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}} = 0, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} &= i\bar{\psi}mc^2, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}} = ic\hat{\gamma}_\mu\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Учитывая это, из уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial x_\mu}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\lambda} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\bar{\psi}_\lambda}{\partial x_\mu}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_\lambda} = 0 \quad (4.14) \\ (\lambda = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

получаем уравнения Дирака (4.7).

Из выражений (4.13) находим также плотность гамильтониана

$$\Gamma = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}} \dot{\bar{\psi}} - \mathcal{L} = -i [c\hat{\gamma}_v\bar{\psi}\nabla\psi + mc^2\bar{\psi}\psi]. \quad (4.15)$$

Функция Гамильтона для всего электронно-позитронного поля в объеме V имеет вид

$$\begin{aligned} H = \int dV\Gamma = -i \int dV [c\hat{\gamma}_v\bar{\psi}\nabla\psi + mc^2\bar{\psi}\psi] = \\ = \int dV [i\hat{\alpha}_v c\psi^+ \nabla\psi - mc^2\psi^+ \hat{\beta}\psi]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Из (4.16) следует вещественность функции Гамильтона H ; действительно, интегрируя в формуле (4.16) по частям половину первого члена, преобразуем ее к виду

$$H = \int dV \left[\frac{i\hbar c}{2} (\psi^+ \hat{\alpha}_v \nabla\psi - \nabla\psi^+ \hat{\alpha}_v \psi) - mc^2\psi^+ \hat{\beta}\psi \right]. \quad (4.17)$$

В правой части формулы (4.17) опущен интеграл по поверхности, так как он равен нулю ввиду обращения ψ в нуль на

бесконечности или в силу периодических граничных условий. Согласно выражению (4.17) $H^+ = H$, что и доказывает вещественность функции Гамильтона H .

Подставляя в формулу (4.17) разложение ψ и ψ^+ в ряды Фурье, можно доказать, что функция Гамильтона H не является положительно определенной. Позже будет показано, что в квантовой теории при определенных условиях соответствующий оператор энергии можно сделать положительно-определенным. Трактруя уравнение Дирака как уравнение некоторого классического электронно-позитронного поля, заменяем в квантовой теории функции ψ и ψ^+ операторами $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^+$. В результате из формулы (4.16) получаем оператор энергии электронно-позитронного поля

$$\hat{H} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{H}_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \iint dV dV' f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [i\hbar c \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\alpha} \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}') - mc^2 \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\beta} \hat{\psi}(\mathbf{r}')] = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \sum_{i,j,l} \iint dV dV' f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times [i\hbar c \hat{\psi}_j^+(\mathbf{r}) \hat{\alpha}_{ji} \nabla \hat{\psi}_l(\mathbf{r}') - mc^2 \hat{\psi}_j^+(\mathbf{r}) \hat{\beta}_{jl} \hat{\psi}_l(\mathbf{r}')]. \quad (4.18)$$

Оператор полного числа электронов и позитронов в поле равен

$$\hat{N} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{N}_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \iint dV dV' f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}'); \quad (4.19)$$

оператор полного заряда поля имеет вид

$$\hat{Q} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{Q}_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} e \iint dV dV' f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}'). \quad (4.20)$$

Для свободного электронно-позитронного поля, которое рассматривается в этой главе, операторы \hat{Q} и \hat{N} коммутируют с оператором энергии \hat{H} . Следовательно, данные операторы можно одновременно с оператором \hat{H} привести к диагональному виду. Поэтому операторы \hat{H} , \hat{N} и \hat{Q} имеют общую систему собственных векторов. Кроме того, имеем

$$i\hbar \hat{N} = [\hat{N}, \hat{H}] = 0 \quad \text{и} \quad i\hbar \hat{Q} = [\hat{Q}, \hat{H}] = 0,$$

отсюда следует, что число частиц и заряд поля являются интегралами движения.

Для того чтобы найти собственные значения операторов \hat{H} , \hat{N} и \hat{Q} , разложим операторы поля $\hat{\psi}^+$ и $\hat{\psi}$ в ряды Фурье

по решениям уравнения Дирака для свободного электрона. Полная система этих решений, ортонормированных в кубе объема V , выражается в виде

$$u_{j,ks}(\mathbf{r}) = c_{j,ks} V^{-1/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (4.21)$$

где $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}$ — волновой вектор плоской волны, $c_{j,ks}$ — амплитуда волны; числа j и s пробегает значения от 1 до 4.

Индекс s характеризует собственные значения уравнения Дирака. Решения, для которых $s = 1, 2$, соответствуют двум ориентациям спина при положительном значении энергии

$$E_{ks} = +(\hbar^2 c^2 \mathbf{k}^2 + m^2 c^4)^{1/2} \quad (s = 1, 2); \quad (4.22)$$

решения, для которых $s = 3, 4$, соответствуют отрицательному значению энергии

$$E_{ks} = -(\hbar^2 c^2 \mathbf{k}^2 + m^2 c^4)^{1/2} \quad (s = 3, 4). \quad (4.23)$$

Четыре компоненты (4.21) образуют матрицу с одним столбцом

$$u_{ks}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} u_{1,ks}(\mathbf{r}) \\ u_{2,ks}(\mathbf{r}) \\ u_{3,ks}(\mathbf{r}) \\ u_{4,ks}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

где функции $u_{j,ks}$ ортонормированы согласно формуле

$$\sum_j \int u_{j,ks}^*(\mathbf{r}) u_{j,k's'}(\mathbf{r}) dV = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'}. \quad (4.25)$$

Разложения операторов $\hat{\psi}_j$ и $\hat{\psi}_j^\dagger$ в ряды по функциям $u_{j,ks}$ имеют вид

$$\hat{\psi}_j(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, s} \hat{A}_{\mathbf{k}s}(t) u_{j,ks}(\mathbf{r}), \quad \hat{\psi}_j^\dagger(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, s} \hat{A}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) u_{j,ks}^*(\mathbf{r}), \quad (4.26)$$

где $\hat{A}_{\mathbf{k}s}$ и $\hat{A}_{\mathbf{k}s}^\dagger$ — зависящие от времени операторы амплитуд. Подставляя выражения (4.26) для операторов $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^\dagger$ в оператор \hat{H}_α , получаем

$$\hat{H}_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \sum_{\substack{\mathbf{k}, s \\ \mathbf{k}', s'}} \hat{A}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{A}_{\mathbf{k}'s'} \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_{\mathbf{k}s}^*(\mathbf{r}) [i\hbar c \hat{\alpha} \nabla - m c^2 \hat{\beta}] \times \\ \times u_{\mathbf{k}'s'}(\mathbf{r}') dV dV'. \quad (4.27)$$

Учитывая, что функции $u_{j,ks}$ удовлетворяют уравнению Дирака

$$\sum_l (i\hbar c \hat{\alpha}_{il} \nabla - mc^2 \hat{\beta}_{il}) u_{l, k's'}(\mathbf{r}) = E_{k's'} u_{j, k's'}(\mathbf{r}), \quad (4.28)$$

из формулы (4.27) найдем выражение для квазиэнергии поля¹

$$E_\alpha \approx (\Psi_\alpha, \hat{H}_\alpha \Psi_\alpha) = \sum_{k,s} (\Psi_\alpha, \hat{A}_{ks}^+ \hat{A}_{ks} \Psi_\alpha) E_{ks} F_{ks}^{(\alpha)}, \quad (4.29)$$

где

$$F_{ks}^{(\alpha)} \approx \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_{ks}^*(\mathbf{r}) u_{ks}(\mathbf{r}') dV dV'.$$

Аналогично находим выражение для электрического квазизаряда поля

$$Q_\alpha \approx e \sum_{k,s} (\Psi_\alpha, \hat{A}_{ks}^+ \hat{A}_{ks} \Psi_\alpha) F_{ks}^{(\alpha)}. \quad (4.30)$$

Полученные выше результаты не зависят от условий, наложенных на операторы $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^+$. Если на $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^+$ наложить условия

$$[\hat{\psi}_j(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_l^+(\mathbf{r}', t)] = \delta_{jl} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

то, как известно, для \hat{A}_{ks} и $\hat{A}_{k's'}^+$ согласно формулам (4.26) будем иметь соотношение

$$[\hat{A}_{ks}, \hat{A}_{k's'}^+] = \delta_{kk'} \delta_{ss'}.$$

При этом собственными значениями оператора $\hat{A}_{ks}^+ \hat{A}_{ks}$ являются целые положительные числа и нуль. Так как E_{k3} и E_{k4} — отрицательные величины, то оператор энергии поля \hat{H}_α в данном случае может иметь отрицательные собственные значения сколь угодно большой абсолютной величины². В рассматриваемом случае при наличии взаимодействия с электромагнитным полем электроны должны все время излучать фотоны, переходя при этом в состояния все более низкой энергии.

¹ В формуле (4.29) мы пренебрегли недиагональными матричными элементами, так как при α , сколь угодно близком к α_0 , их можно сделать сколь угодно малыми.

² При $\alpha \rightarrow \alpha_0$ энергия в данном случае может иметь отрицательные значения.

Для устранения этой трудности можно предположить, что на операторы $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^+$ наложены условия

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}_i(\mathbf{r}), \hat{\psi}_l(\mathbf{r}')]_+ &= [\hat{\psi}_i^+(\mathbf{r}), \hat{\psi}_l^+(\mathbf{r}')]_+ = 0, \\ [\hat{\psi}_i(\mathbf{r}), \hat{\psi}_l^+(\mathbf{r}')]_+ &= \delta_{il} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Подставляя в соотношения (4.31) выражения (4.26) для операторов $\hat{\psi}_i$ и $\hat{\psi}_i^+$, получим для операторов $\hat{A}_{\mathbf{k}s}^+$ и $\hat{A}_{\mathbf{k}s}$ соотношения вида

$$\begin{aligned} [\hat{A}_{\mathbf{k}s}, \hat{A}_{\mathbf{k}'s'}]_+ &= [\hat{A}_{\mathbf{k}s}^+, \hat{A}_{\mathbf{k}'s'}^+]_+ = 0, \\ [\hat{A}_{\mathbf{k}s}, \hat{A}_{\mathbf{k}'s'}^+]_+ &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

При выполнении этих равенств собственные значения оператора $\hat{A}_{\mathbf{k}s}^+ \hat{A}_{\mathbf{k}s}$ равны нулю или единице; отсюда вытекает, что собственные значения операторов \hat{N}_α , \hat{Q}_α соответственно равны

$$E_\alpha \approx \sum_{\mathbf{k},s} E_{\mathbf{k}s} n_{\mathbf{k}s} F_{\mathbf{k}s}^{(\alpha)}, \quad Q_\alpha \approx e \sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k}s} F_{\mathbf{k}s}^{(\alpha)}, \quad (4.33)$$

где число $n_{\mathbf{k}s}$ может принимать значение, равное нулю или единице.

Чтобы избавиться от трудностей, связанных с отрицательными энергиями, Дирак предположил, что в нормальном состоянии, т. е. в вакууме, все положительные энергетические электронные уровни свободны, а все отрицательные энергетические уровни заняты

$$n_{\mathbf{k}1} = n_{\mathbf{k}2} = 0, \quad n_{\mathbf{k}3} = n_{\mathbf{k}4} = 1$$

(для всех \mathbf{k}). Такое состояние электронно-позитронного поля является равновесным, так как в силу принципа Паули переходы в состояние с отрицательной энергией осуществляться не могут.

Дирак предположил также, что электроны, находящиеся на отрицательных энергетических уровнях, ненаблюдаемы; наблюдаемыми являются отклонения от состояния вакуума. Поэтому в формулах (4.33) из E_α и Q_α надо вычесть соответствующие вакуумные значения этих величин:

$$E_{\text{vac}}^{(\alpha)} \approx \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=3}^4 E_{\mathbf{k}s} F_{\mathbf{k}s}^{(\alpha)}, \quad \hat{Q}_{\text{vac}} \approx \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=3}^4 e F_{\mathbf{k}s}^{(\alpha)}.$$

Производя эту вычитательную процедуру, получим следующие выражения для полной наблюдаемой квазиэнергии и полного наблюдаемого квазизаряда:

$$E_{\text{obs}}^{(\alpha)} \approx E_{\alpha} - E_{\nu}^{(\alpha)} = \sum_k F_{k_s}^{(\alpha)} \left(\sum_{s=1}^2 n_{k_s} E_{k_s} + \sum_{s=3}^4 n'_{k_s} |E_{k_s}| \right),$$

$$Q_{\text{obs}}^{(\alpha)} \approx Q_{\alpha} - Q_{\nu}^{(\alpha)} = e \sum_k F_{k_s}^{(\alpha)} \left(\sum_{s=1}^2 n_{k_s} - \sum_{s=3}^4 n'_{k_s} \right),$$

где $n'_{k_s} = 1 - n_{k_s}$; при этом $n'_{k_s} = 0$, если состояние ks (где $s = 3, 4$) занято, и $n_{k_s} = 1$, если оно не занято («дырка» в вакууме).

Переходя в последних формулах к пределу $\alpha \rightarrow \alpha_0$, получим выражения для полной наблюдаемой энергии и полного наблюдаемого заряда¹:

$$E_{\text{obs}} = \sum_k \left[\sum_{s=1}^2 n_{k_s} E_{k_s} + \sum_{s=3}^4 n'_{k_s} |E_{k_s}| \right], \quad (4.34)$$

$$Q_{\text{obs}} = e \sum_k \left[\sum_{s=1}^2 n_{k_s} - \sum_{s=3}^4 n'_{k_s} \right]. \quad (4.35)$$

Из выражений (4.34) и (4.35) следует, что электрон, находящийся на положительном энергетическом уровне, ведет себя как частица с отрицательным зарядом, тогда как отсутствие электрона на отрицательном энергетическом уровне проявляется как наличие электрона с положительным зарядом в состоянии с положительной энергией. Итак, дырка в вакууме может быть интерпретирована как положительно заряженный электрон, т. е. как позитрон. Из выражения (4.34) следует, что масса покоя позитрона равна массе покоя отрицательно заряженного электрона. В теории Дирака, предсказавшей существование позитронов еще до открытия их в космических лучах, показано [10], что позитрон может рождаться в паре с отрицательно заряженным электроном в результате поглощения микросистемой кванта света, энергия которого должна превышать $2mc^2 \approx 1 \text{ Мэв}$. Формула (4.34) показывает, что теперь наблюдаемая энергия положительна и равна сумме энергий всех электронов и позитронов.

¹ Формулы (4.34) и (4.35) — точные равенства, так как диагональные элементы, пренебрежение которыми делало равенства (4.33) приближенными, при $\alpha = \alpha_0$ равны нулю.

Итак, электроны, являющиеся фермионами и обладающие спином $1/2$, должны подчиняться принципу Паули. Этот вывод является частным случаем общей теоремы Паули, согласно которой частицы с нулевым и целым спином подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна, а частицы с полуцелым спином — статистике Ферми—Дирака, основанной на принципе Паули.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим среднее значение оператора электрического тока в состоянии вакуума. Данный оператор согласно (4.11) имеет вид

$$\hat{J}_\mu = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} ec \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\gamma}_\mu \hat{\Psi}(\mathbf{r}') dV dV'.$$

Обозначим через Φ_v вектор вакуумного состояния, а через $\langle \hat{J}_\mu \rangle_0$ среднее значение оператора \hat{J}_μ в состоянии вакуума, т. е.

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}_\mu \rangle_0 &= (\Phi_v, \hat{J}_\mu \Phi_v) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} ec \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \\ &\times (\Phi_v, \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\gamma}_\mu \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \Phi_v) dV dV'. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Подставляя в эту формулу выражения (4.26) для $\hat{\Psi}^+$ и $\hat{\Psi}$, можно показать, что выражение $\langle \hat{J}_\mu(x) \rangle_0$ бесконечно велико. Гейзенберг знал об этой трудности еще в 1934 г. Как уже показано, бесконечная средняя плотность электрического тока в состоянии вакуума вызвана электронами, заполняющими все состояния с отрицательной энергией. Так как заряд и ток в состоянии вакуума ненаблюдаемы, то необходимо соответствующим образом изменить оператор плотности электрического тока, чтобы среднее значение по вакууму от такого модифицированного оператора равнялось нулю.

Модифицированный оператор плотности электрического тока можно определить так

$$\hat{J}'_\mu = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \iint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{j}'_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV dV', \quad (4.37)$$

где

$$\hat{j}'_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{ec}{2} [\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\gamma}_\mu \hat{\Psi}(\mathbf{r}')],$$

и можно показать, что

$$(\Phi_v, \hat{J}'_\mu(x) \Phi_v) = 0. \quad (4.38)$$

Преобразуем выражение для оператора $\hat{J}'_{\mu}(x)$. Для этого введем понятие об упорядоченном или нормальном произведении. Произведение операторов, в котором операторы испускания частиц стоят слева от операторов поглощения, назовем нормальным. Пусть $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \dots, \hat{X}$ — операторы поглощения и испускания. Если $\hat{A} \cdot \hat{B} \cdot \hat{C} \dots \hat{X}$ — данное операторное произведение, то соответствующим нормальным произведением является оператор $\delta_p \hat{A}' \cdot \hat{B}' \dots \hat{X}'$, где $\hat{A}', \hat{B}', \hat{C}', \dots, \hat{X}'$ — та же совокупность операторов, что и $\hat{A}, \hat{B}, \dots, \hat{X}$, но расположенная таким образом, что операторы испускания стоят слева от операторов поглощения, а множитель δ_p равен $+1$ или -1 в зависимости от того, является ли перестановка электронно-позитронных операторов четной или нечетной. Отдельные операторы испускания (или поглощения) друг относительно друга могут быть расположены как угодно. Нормальное произведение обозначается символом¹ \hat{N} :

$$\hat{N}(\hat{A} \hat{B} \hat{C} \dots \hat{X}) = \delta_p \hat{A}' \hat{B}' \dots \hat{X}'. \quad (4.39)$$

Если $\hat{\psi} = \hat{u} + \hat{v}^+$, где \hat{u} — оператор поглощения, а \hat{v}^+ — оператор испускания частиц, то

$$\begin{aligned} \hat{N}(\hat{A} \dots \hat{B} \hat{\psi} \hat{C} \dots \hat{X}) &= \hat{N}(\hat{A} \dots \hat{B} \hat{u} \hat{C} \dots \hat{X}) + \\ &+ \hat{N}(\hat{A} \dots \hat{B} \hat{v}^+ \hat{C} \dots \hat{X}). \end{aligned}$$

Покажем, что оператор \hat{J}'_{μ} можно представить так

$$\hat{J}'_{\mu} = ec \hat{N}(\hat{\psi} \hat{\gamma}_{\mu} \hat{\psi}), \quad (4.40)$$

где для простоты опущены аргументы r и r' . Действительно, пусть

$$\hat{\psi} = \hat{u} + \hat{v}^+, \quad \hat{\bar{\psi}} = \hat{u}^+ + \hat{v}, \quad (4.41)$$

где \hat{u}, \hat{u}^+ — операторы поглощения и испускания электронов; \hat{v}, \hat{v}^+ — операторы поглощения и испускания пози-

¹ До сих пор символом \hat{N} обозначался оператор числа частиц. Начиная с этой страницы, символ \hat{N} будет использоваться только для обозначения нормального произведения операторов.

тронов. Согласно (4.41) имеем

$$\begin{aligned} \hat{j}'_{\mu} &= \frac{e}{2} c (\hat{\gamma}_{\mu})_{\alpha\beta} (\hat{\psi}_{\alpha} \hat{\psi}_{\beta} - \hat{\psi}_{\beta} \hat{\psi}_{\alpha}) = \\ &= \frac{e}{2} (\hat{\gamma}_{\mu})_{\alpha\beta} c [\hat{u}_{\alpha}^{+} \hat{u}_{\beta} + \hat{u}_{\alpha}^{+} \hat{v}_{\beta}^{+} + \hat{v}_{\alpha} \hat{u}_{\beta} + \hat{v}_{\alpha} \hat{v}_{\beta}^{+} - \\ &\quad - \hat{u}_{\beta} \hat{u}_{\alpha}^{+} - \hat{u}_{\beta} \hat{v}_{\alpha} - \hat{v}_{\beta}^{+} \hat{u}_{\alpha}^{+} - \hat{v}_{\beta}^{+} \hat{v}_{\alpha}] = \\ &= \frac{ec}{2} (\hat{\gamma}_{\mu})_{\alpha\beta} \{ [\hat{u}_{\alpha}^{+} \hat{u}_{\beta} - \hat{v}_{\beta}^{+} \hat{v}_{\alpha}] + [\hat{u}_{\alpha}^{+} \hat{v}_{\beta}^{+} - \hat{v}_{\beta}^{+} \hat{u}_{\alpha}^{+}] + \\ &\quad + [\hat{v}_{\alpha} \hat{u}_{\beta} - \hat{u}_{\beta} \hat{v}_{\alpha}] + [\hat{v}_{\alpha} \hat{v}_{\beta}^{+} - \hat{u}_{\beta}^{+} \hat{u}_{\alpha}] \}. \end{aligned}$$

Используя антиперестановочные соотношения для \hat{a}_{ks}^{+} и \hat{a}_{ks} , получим равенства

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\alpha}^{+} \hat{v}_{\beta}^{+} + \hat{v}_{\beta}^{+} \hat{u}_{\alpha}^{+} &= 0, \quad \hat{v}_{\alpha} \hat{u}_{\beta} + \hat{u}_{\beta} \hat{v}_{\alpha} = 0, \\ \hat{u}_{\alpha}^{+} \hat{u}_{\beta} + \hat{u}_{\beta} \hat{u}_{\alpha}^{+} &= \hat{v}_{\alpha} \hat{v}_{\beta}^{+} + \hat{v}_{\beta}^{+} \hat{v}_{\alpha}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\alpha}^{+} \hat{v}_{\beta}^{+} &= -\hat{v}_{\beta}^{+} \hat{u}_{\alpha}^{+}, \quad \hat{v}_{\alpha} \hat{u}_{\beta} = -\hat{u}_{\beta} \hat{v}_{\alpha}, \\ \hat{u}_{\alpha}^{+} \hat{u}_{\beta} - \hat{v}_{\beta}^{+} \hat{v}_{\alpha} &= \hat{v}_{\alpha} \hat{v}_{\beta}^{+} - \hat{u}_{\beta} \hat{u}_{\alpha}^{+}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Учитывая это, находим

$$\hat{j}'_{\mu} = ec (\hat{\gamma}_{\mu})_{\alpha\beta} [\hat{u}_{\alpha}^{+} \hat{u}_{\beta} - \hat{v}_{\beta}^{+} \hat{v}_{\alpha} + \hat{u}_{\alpha}^{+} \hat{v}_{\beta}^{+} + \hat{v}_{\alpha} \hat{u}_{\beta}]. \quad (4.43)$$

Используя теперь оператор нормального произведения \hat{N} , перепишем формулу (4.43) в виде

$$\begin{aligned} \hat{j}'_{\mu} &= ec (\hat{\gamma}_{\mu})_{\alpha\beta} \hat{N} [\hat{u}_{\alpha}^{+} (\hat{u}_{\beta} + \hat{v}_{\beta}^{+}) + \hat{v}_{\alpha} (\hat{v}_{\beta}^{+} + \hat{u}_{\beta})] = \\ &= ec (\hat{\gamma}_{\mu})_{\alpha\beta} \hat{N} \hat{\psi}_{\alpha} \hat{\psi}_{\beta}, \end{aligned}$$

или, учитывая, что $\hat{N} \hat{v}_{\alpha} \hat{v}_{\beta}^{+} = -\hat{v}_{\beta}^{+} \hat{v}_{\alpha}$,

$$\hat{j}'_{\mu} = ec \hat{N} (\hat{\psi} \hat{\gamma}_{\mu} \hat{\psi}). \quad (4.44)$$

Формула (4.44) совпадает с соотношением (4.40).

Замечание. В § 1—4 показано, что энергия вакуума для любого поля равна бесконечности. Этот недостаток теории легко ликвидировать путем упорядочения (т. е. нормализации) рассмотренных операторов энергии поля. Так, например, в квантовой мезодинамике вместо оператора (2.6) следует взять оператор

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\alpha} &= \frac{1}{2} \iint \hat{i}_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{N} \{ \hat{\pi}(\mathbf{r}) \hat{\pi}(\mathbf{r}') + c^2 \nabla \hat{\phi}(\mathbf{r}) \nabla \hat{\phi}(\mathbf{r}') + \\ &\quad + c^2 \mu^2 \hat{\phi}(\mathbf{r}) \hat{\phi}(\mathbf{r}') \} dV dV'. \end{aligned}$$

§ 5. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

При отсутствии электрических зарядов и токов электромагнитное поле описывается системой уравнений

$$\square^2 A_\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, 4), \quad (5.1)$$

где A_μ — компоненты четырехмерного вектора-потенциала, удовлетворяющие условию Лоренца

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (5.2)$$

(трехмерный вектор-потенциал $\mathbf{A} = (A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)})$, а $A_{(4)} = i\varphi$, где φ — скалярный потенциал).

Электромагнитное поле проявляется в результате действия на электрические заряды. Это действие характеризуется напряженностями электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей, которые выражаются формулами

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi. \quad (5.3)$$

Компоненты потенциала не определяются однозначно, так как градиентное преобразование

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla X, \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial X}{\partial t} \quad (5.4)$$

не изменяет \mathbf{E} и \mathbf{H} . Но так как на A_ν наложено условие Лоренца, то скалярная функция X должна удовлетворять условию

$$\square^2 X = 0.$$

Таким образом, электромагнитное поле является векторным полем, динамика которого описывается четырьмя функциями A_ν пространственных координат и времени. Уравнения движения поля (5.1) можно рассматривать как уравнения Эйлера для действия с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi} \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right)^2. \quad (5.5)$$

Согласно (5.5) импульсы, канонически сопряженные с A_μ , равны

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{i c \partial \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_{(4)}} \right)} = -\frac{1}{4\pi i c} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_{(4)}}. \quad (5.6)$$

Используя эту формулу, находим плотность гамильтониана

$$\begin{aligned} \Gamma &= \pi_\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \left[(4\pi)^2 \sum_\mu c^2 \pi_\mu + \sum_{k, \mu} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_k} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi} \sum_\mu \left[-\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_{(4)}} \right)^2 + \sum_k \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_k} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (5.7)$$

где по k ведется суммирование от 1 до 3.

В квантовой теории функции A_μ и π_μ заменяем операторами \hat{A}_μ и $\hat{\pi}_\mu$, на которые накладываем перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} [\hat{A}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}_\nu(\mathbf{r}', t)] &= \frac{1}{4\pi c^2} \left[\hat{A}_\mu(\mathbf{r}, t), \frac{\partial \hat{A}_\nu(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \right] = \\ &= i\hbar \delta_{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$[\hat{A}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{A}_\nu(\mathbf{r}', t)] = [\hat{\pi}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}_\nu(\mathbf{r}', t)] = 0$$

(фотоны — кванты электромагнитного поля, они не подчиняются принципу Паули).

Согласно выражению (5.7) оператор энергии электромагнитного поля имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{H}_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{1}{8\pi} \iint dV dV' f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \\ &\times \left[-\frac{\partial \hat{A}_\mu(\mathbf{r})}{\partial x_{(4)}} \frac{\partial \hat{A}_\mu(\mathbf{r}')}{\partial x_{(4)}} + \frac{\partial \hat{A}_\mu(\mathbf{r})}{\partial x_k} \frac{\partial \hat{A}_\mu(\mathbf{r}')}{\partial x'_k} \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Операторы поля \hat{A}_μ в формуле (5.9) можно разложить в ряды Фурье по решениям волнового уравнения (5.1), которые имеют вид

$$A_{\mu, k\lambda} = V^{-1/2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}} e_{k\lambda}^{(\mu)} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (5.10)$$

где $e_{k\lambda}^{(\mu)}$ — вектор поляризации; k — волновой вектор. Введем четырехмерные векторы $k \equiv k_\mu = (k, i \omega/c) = (k, ik_{(0)})$ и $x \equiv x_\mu = (r, ict)$, тогда можно написать

$$kx = k_\mu x_\mu = k\mathbf{r} - \omega t. \quad (5.11)$$

Учитывая (5.11), перепишем формулу (5.10) в виде

$$A_{\mu, k\lambda}(x) = V^{-1/2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}} e_{k\lambda}^{(\mu)} e^{ikx}. \quad (5.12)$$

Подставляя A_μ из (5.12) в формулу (5.1), находим дисперсионное соотношение

$$k^2 = 0, \quad (5.13)$$

из которого следует, что $|k| = \frac{\omega}{c}$.

Функция (5.10) или (5.12) описывает плоскую волну частоты $\omega = c|k|$, распространяющуюся в направлении волнового вектора k и линейно поляризованную в направлении вектора поляризации $e_{k\lambda}^{(\mu)}$. При заданном k индекс λ (как и индекс μ) может пробегать целые значения от 1 до 4.

Выберем векторы $e_{k\lambda}^{(\mu)}$ в качестве ортов системы координат, т. е. положим

$$e_{k\lambda}^{(\mu)} = \delta_{\mu\lambda}. \quad (5.14)$$

Тогда если направить ось x_3 вдоль k , а оси x_1 и x_2 перпендикулярно к вектору k и друг к другу, то число $\lambda = 3$ будет соответствовать продольной поляризации, а числа $\lambda = 1, 2$ — поперечной, в то время как число $\lambda = 4$ относится к скалярной («временной») поляризации. Отсюда находим соотношения поперечности и продольности:

$$e_{k\lambda}^{(\mu)} k_\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda = 1, 2 \\ |k|, & \text{если } \lambda = 3, \\ \frac{i\omega}{c}, & \text{если } \lambda = 4, \end{cases} \quad (5.15)$$

и условия ортогональности

$$e_{k\lambda}^{(\mu)} e_{k\lambda'}^{(\mu)} = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad e_{k\lambda}^{(\mu)} e_{k\lambda}^{(\nu)} = \delta_{\mu\nu}, \quad (5.16)$$

или

$$(e_{k\lambda}, e_{k\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (e_k^{(\mu)}, e_k^{(\nu)}) = \delta_{\mu\nu}. \quad (5.16')$$

Полагая, что основные функции $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ отличны от нуля только тогда, когда как точки \mathbf{r} , так и точки \mathbf{r}' находятся внутри куба объема $V = L^3$ (где L — ребро куба), разложим операторы \hat{A}_μ в ряды Фурье по функциям (5.12):

$$\hat{A}_\mu = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} (\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} A_{\mu, \mathbf{k}\lambda} + \tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda} A_{\mu, \mathbf{k}\lambda}^*), \quad (5.17)$$

где $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$, $\tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ — операторные амплитуды. Суммирование по λ является суммированием по состояниям поляризации. Подставляя выражение (5.12) для $A_{\mu, \mathbf{k}\lambda}$ в формулу (5.17), получаем

$$\hat{A}_\mu = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k_{(0)}}} e_{\mathbf{k}\lambda}^{(\mu)} (\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}). \quad (5.18)$$

Подставляя это в равенство (5.8), находим перестановочные соотношения для $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \tilde{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}, \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] &= [\tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \tilde{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] = 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Так как в классической теории функции $A_l(x)$ ($l=1, 2, 3$) — действительные, а $A_4(x) = iA_0(x)$ — мнимая функция, то отсюда следует, что в квантовой теории операторы \hat{A}_l ($l=0, 1, 2, 3$) должны быть эрмитовыми. Поэтому из выражения (5.18) следует, что

$$\tilde{a}_{\mathbf{k}l} = \hat{a}_{\mathbf{k}l}^\dagger \quad (l=1, 2, 3), \quad \hat{a}_{\mathbf{k}4} = i\hat{a}_{\mathbf{k}0}^\dagger, \quad \tilde{a}_{\mathbf{k}4} = i\hat{a}_{\mathbf{k}0},$$

где $\hat{a}_{\mathbf{k}l}$ и $\hat{a}_{\mathbf{k}l}^\dagger$ ($l=0, 1, 2, 3$) — эрмитово-сопряженные операторы.

При этом первое перестановочное соотношение (5.19) получает вид

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}l}, \hat{a}_{\mathbf{k}l}^\dagger] = 1 \quad (l=0, 1, 2, 3). \quad (5.19')$$

Отсюда следует, что собственные значения операторов числа частиц $\hat{N}_{\mathbf{k}l} = \hat{a}_{\mathbf{k}l}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}l}$ ($l=0, 1, 2, 3$) равны $N_{\mathbf{k}l} = 0, 1, 2, \dots$ (см. § 1 настоящей главы) и операторы $\hat{a}_{\mathbf{k}l}$ и $\hat{a}_{\mathbf{k}l}^\dagger$ при $l=0, 1, 2, 3$ являются соответственно операторами поглощения и рождения поперечных, продольных и скалярных фотонов.

Таким образом, можно написать

$$\begin{aligned} \hat{a}_{kl}^+ \Phi_n(\dots, n_{kl}, \dots) &= \sqrt{n_{kl} + 1} \Phi_{n+1}(\dots, n_{kl} + 1, \dots), \\ \hat{a}_{kl} \Phi_n(\dots, n_{kl}, \dots) &= \sqrt{n_{kl}} \Phi_{n-1}(\dots, n_{kl} - 1, \dots), \end{aligned} \quad (5.20)$$

($l = 0, 1, 2, 3$)

где

$$\begin{aligned} \Phi_n(n_\alpha, \dots, n_{\alpha'}, \dots) &= (n_\alpha! \dots n_{\alpha'}! \dots)^{-1/2} \times \\ &\times (\hat{a}_\alpha^+)^{n_\alpha} \dots (\hat{a}_{\alpha'}^+)^{n_{\alpha'}} \dots \Phi_v, \end{aligned}$$

а Φ_v — вектор, удовлетворяющий условию

$$\hat{a}_{kl} \Phi_v = 0$$

при $l = 0, 1, 2, 3$ и для всех k .

Как уже отмечалось, потенциал A_μ в классической теории определяется неоднозначно, поэтому на него накладывается условие Лоренца (5.2), которое в квантовой электродинамике можно переписать символически так

$$\frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (5.21)$$

Оно, однако, является противоречивым¹. Действительно, подставляя в условие (5.21) разложение (5.18) и используя формулу (5.15), получаем

$$\begin{aligned} &\sum_k \sqrt{\frac{1}{k_{(0)}}} e_{k\lambda}^{(\mu)} k_\mu (\hat{a}_{k\lambda} e^{ikx} - \tilde{a}_{k\lambda} e^{-ikx}) = \\ &= \sum_k \sqrt{k_{(0)}} [(\hat{a}_{k3} + i\hat{a}_{k4}) e^{ikx} - (\tilde{a}_{k3} + i\tilde{a}_{k4}) e^{-ikx}] = 0, \end{aligned} \quad (5.21')$$

откуда следует, что

$$\hat{a}_{k3} + i\hat{a}_{k4} = 0, \quad \tilde{a}_{k3} + i\tilde{a}_{k4} = 0. \quad (5.22)$$

Согласно первой формуле (5.22) $\hat{a}_{k3} = -i\hat{a}_{k4}$, что невозможно, так как операторы \hat{a}_{k3} и \hat{a}_{k4} в квантовой теории яв-

¹ Кроме того, условие Лоренца несовместимо с перестановочными соотношениями

$$[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(x')] = 4\pi i \hbar c^2 D_0(x - x') \delta_{\mu\nu}.$$

В самом деле, из последнего равенства имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(x') \right] = 4\pi i \hbar c^2 \delta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} D_0(x - x').$$

Согласно условию (5.21) левая часть этого равенства равна нулю, в то время как правая часть его нулю не равна.

ляются независимыми Поэтому потребуем, чтобы в квантовой электродинамике обратился в нуль не оператор $\frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\mu}$, а среднее значение этого оператора в произвольном состоянии Φ , т. е. чтобы выполнялось для любого вектора состояния Φ условие, символически записанное в виде

$$\left(\Phi, \frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\mu} \Phi \right) \equiv \left\langle \frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\mu} \right\rangle = 0.$$

Последнее условие можно переписать так:

$$\sum_k \sqrt{k_{(0)}} \{ (\Phi, [\hat{a}_{k3} + i\hat{a}_{k4}] \Phi) e^{ikx} - (\Phi, [\tilde{a}_{k3} + i\tilde{a}_{k4}] \Phi) e^{-ikx} \} = 0. \quad (5.23)$$

Если потребовать, чтобы

$$(\hat{a}_{k3} + i\hat{a}_{k4}) \Phi = (\hat{a}_{k3} - \hat{a}_{k0}^+) \Phi = 0, \quad (5.24)$$

то отсюда вытекает, что

$$\Phi^* (\hat{a}_{k3}^+ - \hat{a}_{k0}) = 0. \quad (5.25)$$

Условие (5.24) согласно (5.25) является достаточным для выполнения условия (5.23).

Из выражений (5.24) и (5.25) находим

$$(\Phi, [(\hat{a}_{k3}^+ + \hat{a}_{k0})(\hat{a}_{k3} - \hat{a}_{k0}^+) + (\hat{a}_{k3}^+ - \hat{a}_{k0})(\hat{a}_{k3} + \hat{a}_{k0}^+)] \Phi) = 0,$$

или

$$\begin{aligned} (\Phi, [\hat{a}_{k3}^+ \hat{a}_{k3} - \hat{a}_{k0} \hat{a}_{k0}^+] \Phi) = \\ = \langle \hat{a}_{k3}^+ \hat{a}_{k3} \rangle - \langle \hat{a}_{k0} \hat{a}_{k0}^+ \rangle = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

С другой стороны, можно потребовать, чтобы

$$(\tilde{a}_{k3} + i\tilde{a}_{k4}) \Phi = (\hat{a}_{k3}^+ - \hat{a}_{k0}) \Phi = 0, \quad (5.27)$$

откуда следует

$$\Phi^* (\hat{a}_{k3} - \hat{a}_{k0}^+) = 0. \quad (5.28)$$

Отсюда видно, что условие (5.27) является достаточным для выполнения условия (5.23).

Из последних соотношений получаем

$$(\Phi, [(\hat{a}_{k3} - \hat{a}_{k0}^+) (\hat{a}_{k3}^+ + \hat{a}_{k0}) + (\hat{a}_{k3} + \hat{a}_{k0}^+) (\hat{a}_{k3}^+ - \hat{a}_{k0})] \Phi) = 0$$

или

$$(\Phi, [\hat{a}_{k3} \hat{a}_{k3}^+ - \hat{a}_{k0}^+ \hat{a}_{k0}] \Phi) = 0. \quad (5.29)$$

Используя перестановочные соотношения (5.19'), перепишем формулы (5.26) и (5.29) в окончательном виде

$$\langle \hat{a}_{k3}^+ \hat{a}_{k3} \rangle - \langle \hat{a}_{k0}^+ \hat{a}_{k0} \rangle = +1, \quad (5.26')$$

$$\langle \hat{a}_{k3}^+ \hat{a}_{k3} \rangle - \langle \hat{a}_{k0}^+ \hat{a}_{k0} \rangle = -1. \quad (5.29')$$

Будем считать, что в природе реализуются только такие состояния электромагнитного поля, для которых векторы Φ удовлетворяют условию (5.24), а не условию (5.27). Действительно, при этом предположении согласно формуле (5.26) можно, как это будет видно ниже, сделать так, чтобы энергия так называемого вакуумного состояния равнялась нулю. Выясним физический смысл соотношений (5.26') и (5.29'), которые можно переписать так

$$\langle n_{k3} \rangle - \langle n_{k0} \rangle = +1, \quad (5.26'')$$

$$\langle n_{k3} \rangle - \langle n_{k0} \rangle = -1. \quad (5.29'')$$

Отсюда видно, что согласно формуле (5.23) в природе не могут реализоваться такие состояния, в которых одновременно равны нулю числа продольных и скалярных фотонов с одним и тем же волновым числом k . Согласно соотношениям (5.26'') и (5.29'') в природе реализуются только такие состояния, для которых абсолютное значение разности числа скалярных и числа продольных фотонов с одним и тем же волновым числом k равно единице.

Преобразуем теперь оператор энергии (5.9). Подставляя в оператор (5.9) выражение (5.18) для \hat{A}_μ , получаем

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \sum_{k, \lambda} \omega_k (\tilde{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda} + \hat{a}_{k\lambda} \tilde{a}_{k\lambda}), \quad (5.30)$$

аналогично для оператора импульса поля находим

$$\hat{G} = \frac{\hbar}{2} \sum_{k, \lambda} k (\tilde{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda} + \hat{a}_{k\lambda} \tilde{a}_{k\lambda}). \quad (5.31)$$

Используя соотношения (5.19) и (5.26), из выражения (5.30) найдем следующие собственные значения оператора энергии:

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) + \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=3}^4 \frac{\hbar}{2} \omega_{\mathbf{k}}, \quad (5.32)$$

где $\sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^4 \frac{\hbar}{2} \omega_{\mathbf{k}}$ — энергия электромагнитного вакуума.

Если вместо соотношения (5.26) взять соотношение (5.29), то вместо (5.32) получим такие собственные значения оператора энергии:

$$E = \hbar \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (5.32')$$

Аналогично находим собственные значения оператора импульса поля (5.31)

$$\hat{\mathbf{G}} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \hbar \mathbf{k} \left(n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \hbar \mathbf{k} n_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (5.33)$$

В формулах (5.32) и (5.33) сумма $n_{\mathbf{k}_1} + n_{\mathbf{k}_2}$ выражает число поперечных фотонов с импульсом $\hbar \mathbf{k}$ и энергией $\hbar \omega_{\mathbf{k}}$. Энергия и импульс поля определяются только поперечными фотонами ($\lambda = 1, 2$), числа продольных и скалярных фотонов $n_{\mathbf{k}_3}, n_{\mathbf{k}_4}$ не входят в выражения для энергии и импульса поля. Согласно (5.32) энергия поля получает минимальное значение, когда все числа $n_{\mathbf{k}\lambda} (\lambda = 1, 2)$ обращаются в нуль, т. е. когда поперечные фотоны отсутствуют.

Состояние поля, характеризуемое равенством нулю всех чисел $n_{\mathbf{k}\lambda} (\lambda = 1, 2)$, назовем поперечным электромагнитным вакуумом. Следовательно, если $\Phi_{\mathbf{v}}$ — вектор состояния поперечного электромагнитного вакуума, то для всех \mathbf{k} должны выполняться условия:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \Phi_{\mathbf{v}} = 0 \quad (\lambda = 1, 2).$$

В гл. VI будет показано, что электромагнитный вакуум, взаимодействуя с электронами, обуславливает ряд наблюдаемых явлений.

Как видно из предыдущего рассмотрения, энергия электромагнитного вакуума, равная минимальной величине, в то

же время равна бесконечности; чтобы избежать этой трудности, можно с самого начала переформулировать теорию, введя вместо оператора энергии (5.9) оператор энергии электромагнитного поля:

$$\hat{H} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{H}_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{1}{8\pi} \iint dV dV' f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \\ \times \hat{N} \left\{ -\frac{\partial \hat{A}_\mu(\mathbf{r})}{\partial x_{(4)}} \frac{\partial \hat{A}_\mu(\mathbf{r}')}{\partial x_{(4)}} + \frac{\partial \hat{A}_\mu(\mathbf{r})}{\partial x_k} \frac{\partial \hat{A}_\mu(\mathbf{r}')}{\partial x'_k} \right\}, \quad (5.34)$$

где \hat{N} — оператор нормального произведения.

Вычисления, аналогичные тем, которые были проделаны для нахождения собственных значений оператора (5.9), дают следующие собственные значения оператора (5.34):

$$E = \sum_k \sum_{\lambda=1}^2 \hbar \omega_k n_{k\lambda}. \quad (5.35)$$

Отсюда видно, что при такой переформулировке оператора энергии электромагнитного поля энергия вакуума становится равной нулю в полном соответствии с физическими представлениями о вакууме. Аналогичную переформулировку оператора энергии можно сделать и в случае других полей, что обеспечит равенство нулю энергии соответствующих вакуумов.

С помощью дополнительного условия (5.23) исключались из рассмотрения продольные и скалярные фотоны. Подобная процедура не является, строго говоря, релятивистски инвариантной, так как в другой движущейся системе координат снова появляются продольная и скалярная компоненты электромагнитного поля.

Гупте [11] и Блейлеру [12] удалось так сформулировать квантовую электродинамику, чтобы теория была симметричной относительно всех четырех компонент потенциала и полностью релятивистски инвариантной. Для этой цели Гупта вместо операторов \hat{a}_{kl}^{\pm} ($l = 0, 1, 2, 3$) ввел операторы $\bar{\alpha}_{ki}$ ($l = 0, 1, 2, 3$) при помощи формул

$$\bar{\alpha}_{k0} = -\hat{a}_{k0}^+ = i\hat{a}_{k4}, \quad \bar{\alpha}_{kj} = \hat{a}_{kj}^+ = \hat{a}_{kj} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (5.36)$$

$$\hat{\alpha}_{k0} = -i\hat{a}_{k4}, \quad \hat{\alpha}_{kj} = \hat{a}_{kj}.$$

Действительно, согласно формулам (5.36) перестановочные соотношения (5.19) получают вид

$$[\hat{a}_{kj}, \bar{a}_{kj}] = 1 \quad (j=0, 1, 2, 3), \quad (5.37)$$

откуда видно, что \bar{a}_{kj} ($j=0, 1, 2, 3$) являются операторами рождения, а \hat{a}_{kj} ($j=0, 1, 2, 3$) — операторами уничтожения фотонов.

Вектор вакуумного состояния Ψ_v теперь должен удовлетворять условиям

$$\hat{a}_{kj} \Psi_v = 0 \quad \text{при } j=0, 1, 2, 3 \text{ и всех } k. \quad (5.38)$$

Оператор энергии электромагнитного поля, если отбросить энергию вакуума, согласно выражениям (5.36) получает вид

$$\hat{H} = \hbar \sum_k \omega_k (\bar{a}_{k1} \hat{a}_{k1} + \bar{a}_{k2} \hat{a}_{k2} + \bar{a}_{k3} \hat{a}_{k3} - \bar{a}_{k0} \hat{a}_{k0}). \quad (5.39)$$

В формулы (5.37) и (5.39) все четыре компоненты электромагнитного поля входят на одинаковых основаниях.

Формулы (5.36) можно представить в виде

$$\bar{a}_{kj} = \hat{\eta}^{-1} \hat{a}_{kj}^+ \hat{\eta} \quad (j=0, 1, 2, 3). \quad (5.40)$$

Для того чтобы выражения (5.36) и (5.40) совпадали, необходимо, чтобы оператор $\hat{\eta}$ обладал свойствами:

$$\hat{a}_{k0}^+ \hat{\eta} = -\hat{\eta} \hat{a}_{k0}^+, \quad \hat{a}_{ki}^+ \hat{\eta} = \hat{\eta} \hat{a}_{ki}^+ \quad (j=1, 2, 3). \quad (5.41)$$

Операторы \bar{a}_{kj} будем называть операторами, сопряженными по Гупту относительно операторов \hat{a}_{kj} . В общем случае для произвольного оператора \hat{L} можно построить сопряженный по Гупту относительно него оператор при помощи следующей формулы:

$$\bar{L} = \hat{\eta}^{-1} \hat{L}^+ \hat{\eta}, \quad (5.42)$$

где \hat{L}^+ — оператор, эрмитово-сопряженный оператору \hat{L} . Если выполняется условие

$$\hat{L} = \bar{L}, \quad (5.43)$$

то такой оператор \hat{L} будем называть самосопряженным по Гупту.

Обычно среднее значение оператора \hat{L} определяется формулой

$$\langle L \rangle = (\Psi, \hat{L} \Psi) \equiv \int \Psi^* \hat{L} \Psi dq. \quad (5.44)$$

где Ψ^* — вектор состояния, комплексно-сопряженный Ψ , dq — произведение дифференциалов динамических переменных, от которых зависит Ψ ; при этом считают, что Ψ является нормированным вектором состояния:

$$(\Psi\Psi) \equiv \int \Psi^*\Psi dq = 1. \quad (5.45)$$

Теперь можно иначе определить среднее значение оператора; для этого определим скалярное произведение по Гупту

$$(\Psi, \Phi)_G = (\Psi, \hat{\eta}\Phi) \equiv \int \Psi^*\hat{\eta}\Phi dq \quad (5.46)$$

и потребуем, чтобы среднее значение самосопряженного по Гупту оператора выражалось следующим образом:

$$\langle L \rangle_G = (\Psi, \hat{L}\Psi)_G \equiv (\Psi, \hat{\eta}\hat{L}\Psi) = \int \Psi^*\hat{\eta}\hat{L}\Psi dq. \quad (5.47)$$

Покажем, что для вещественности среднего значения самосопряженного по Гупту оператора необходимо, чтобы оператор $\hat{\eta}$ был самосопряженным. Действительно, из формулы (5.47) имеем

$$\langle L \rangle_G^* = \int \Psi^*\hat{L}^+\hat{\eta}^+\Psi dq = \int \Psi^*\hat{\eta}\bar{L}\hat{\eta}^{-1}\hat{\eta}^+\Psi dq. \quad (5.48)$$

Если $\hat{\eta} = \hat{\eta}^+$ и $\bar{L} = \hat{L}$, то из формулы (5.48) следует, что $\langle L \rangle_G^* = \langle L \rangle_G$, и значит среднее значение самосопряженного по Гупту оператора будет действительным, если $\hat{\eta}$ — самосопряженный оператор.

Рассмотрим теперь скалярное произведение

$$(\Psi, \Psi)_G = (\Psi, \hat{\eta}\Psi), \quad (5.49)$$

где вектор состояния Ψ можно представить в виде

$$\Psi = \prod_{k, \lambda} \bar{\alpha}_{k\lambda} \Psi_v, \quad (5.50)$$

где Ψ_v — вектор вакуумного состояния. Если на $\hat{\eta}$ наложить дополнительное условие

$$\hat{\eta}\Psi_v = \Psi_v, \quad (5.51)$$

то формула (5.49) получает вид

$$(\Psi, \Psi)_G = \pm 1, \quad (5.52)$$

где знак плюс будет в том случае, когда для перестановки оператора $\hat{\eta}$ к вектору состояния Ψ_v требуется четное число перестановок с операторами $\bar{\alpha}_{k_0}$ и $\hat{\alpha}_{k_0}$ (в противном случае будет знак минус). Из формулы (5.52) видно, что скалярное произведение по Гупту (5.46) вводит в гильбертово пространство, натянутое на базисные векторы $\Psi = \prod_{k,\lambda} \bar{\alpha}_{k\lambda} \Psi_v$, так называемую *индефинитную метрику*.

Условие Лоренца в пространстве с индефинитной метрикой записывается символически в следующем виде:

$$\left\langle \frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\mu} \right\rangle_G = \left(\Phi, \hat{\eta} \frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\mu} \Phi \right) = 0, \quad (5.53)$$

откуда следует соотношение

$$\sum_k \sqrt{k_{(0)}} \left(\Phi, \hat{\eta} [(\hat{\alpha}_{k3} - \hat{\alpha}_{k0}) e^{ikx} - (\bar{\alpha}_{k3} - \bar{\alpha}_{k0}) e^{-ikx}] \Phi \right) = 0. \quad (5.54)$$

Здесь, так же как и раньше, имеются две возможности. Рассмотрим только одну из них. Положим, что

$$(\hat{\alpha}_{k3} - \hat{\alpha}_{k0}) \Phi = 0. \quad (5.55)$$

Условие, сопряженное по Гупту относительно условия (5.55), запишется в виде

$$\Phi^* (\bar{\alpha}_{k3} + \bar{\alpha}_{k0}) = 0, \quad (5.56)$$

отсюда находим

$$\begin{aligned} & (\Phi, \hat{\eta} [(\bar{\alpha}_{k3} + \bar{\alpha}_{k0}) (\hat{\alpha}_{k3} - \hat{\alpha}_{k0}) + \\ & + (\hat{\alpha}_{k3} + \hat{\alpha}_{k0}) (\bar{\alpha}_{k3} - \bar{\alpha}_{k0})] \Phi) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & (\Phi, \hat{\eta} [\bar{\alpha}_{k3} \hat{\alpha}_{k3} - \bar{\alpha}_{k0} \hat{\alpha}_{k0}] \Phi) = \\ & = \langle \bar{\alpha}_{k3} \hat{\alpha}_{k3} \rangle_G - \langle \bar{\alpha}_{k0} \hat{\alpha}_{k0} \rangle_G = 0. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Принимая во внимание это равенство, из выражения (5.39) получим следующие собственные значения оператора энергии:

$$E = \sum_k \sum_{\lambda=1}^2 \hbar \omega_k n_{k\lambda}. \quad (5.58)$$

Таким образом, и в случае определения среднего значения по Гупту (путем введения в гильбертово пространство indefinite метрики) полная энергия продольных и скалярных фотонов в допустимых состояниях, как это видно из формулы (5.57), равна нулю. Аналогичный вывод получаем и для полного импульса электромагнитного поля.

Итак, в случае свободного поля состояния с продольными и временными (скалярными) фотонами не вносят вклада в физически наблюдаемые величины.

§ 6. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОМЕНТОВ ВРЕМЕНИ

Найдем перестановочные соотношения для операторов поля, взятых в различные моменты времени, и убедимся в их релятивистской инвариантности.

1. *Теория скалярного мезонного поля.* Для оператора поля имеем (см. § 2):

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = V^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} [\hat{c}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}]. \quad (6.1)$$

Используя формулу (6.1) и учитывая, что $[\hat{c}_{\mathbf{k}}, \hat{c}_{\mathbf{k}'}] = [\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = 0$, находим

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \hat{\phi}(\mathbf{r}', t')] &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{\hbar}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \times \\ &\times \{ [\hat{c}_{\mathbf{k}}, \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] e^{-i(\omega t - \omega' t') + i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \mathbf{k}'\mathbf{r}')} + \\ &+ [\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \hat{c}_{\mathbf{k}'}] e^{i(\omega t - \omega' t') - i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \mathbf{k}'\mathbf{r}')} \}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Принимая во внимание, что $[\hat{c}_{\mathbf{k}}, \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, после суммирования по \mathbf{k}' преобразуем выражение (6.2) к виду

$$[\hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \hat{\phi}(\mathbf{r}', t')] = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar}{i} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \frac{\sin \omega(t-t')}{\omega}}. \quad (6.3)$$

В предельном случае $a \rightarrow a_0$ переходим от нормирующего объема $V = L^3$ к бесконечной области. При этом надо перейти от дискретных \mathbf{k} -значений к \mathbf{k} -континууму согласно формуле

$$L^{-3} \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} (2\pi)^{-3} \int f(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (6.4)$$

($dk = dk_{(1)} dk_{(2)} dk_{(3)}$). В результате из соотношения (6.3) получим

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{r}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{r}', t')] = i\hbar D_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \quad (6.5)$$

где

$$D_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \frac{\sin \omega(t - t')}{\omega} d\mathbf{k} \quad (6.6)$$

— перестановочная D_0 -функция.

Если $t = t'$, то из (6.5) в пределе находим:

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{r}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{r}', t)] = i\hbar D_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; 0) = 0, \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} [\hat{\pi}(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}(\mathbf{r}', t)] &= [\hat{\varphi}(\mathbf{r}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{r}', t)] = \\ &= i\hbar \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} D_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') \right\}_{t' \rightarrow t} = 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} &[\hat{\pi}(\mathbf{r}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{r}', t)] = \\ &= i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial t} D_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') \right\}_{t' \rightarrow t} = -i\hbar \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (6.9)$$

где

$$\delta^3(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} d\mathbf{k}. \quad (6.10)$$

Таким образом, перестановочные соотношения (6.5) при $t \rightarrow t'$ переходят в известные соотношения (2.5).

2. Теория электромагнитного поля. Операторы электромагнитного поля выражаются в виде (см. § 5):

$$\begin{aligned} \hat{A}_v(\mathbf{r}, t) &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^4 \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}} \times \\ &\times [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}] e_{\mathbf{k}\lambda}^{(v)}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Используя формулу (6.11), находим

$$\begin{aligned} [\hat{A}_v(\mathbf{r}, t), \hat{A}_{v'}(\mathbf{r}', t')] &= V^{-1} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sum_{\lambda\lambda'} \frac{\hbar c^2 2\pi}{\sqrt{\omega\omega'}} e_{\mathbf{k}\lambda}^{(v)} e_{\mathbf{k}'\lambda'}^{(v')} \times \\ &\times \{ [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \mathbf{k}'\mathbf{x}')} + [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \tilde{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{k}'\mathbf{x}')} + \\ &+ [\tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{k}'\mathbf{x}')} + [\tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \tilde{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \mathbf{k}'\mathbf{x}')} \}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Учитывая соотношения (5.16) и (5.19), преобразуем (6.12) к виду

$$[\hat{A}_v(\mathbf{r}, t), \hat{A}_{v'}(\mathbf{r}', t')] = \frac{2\pi\hbar c^2}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \times \\ \times \{ e^{i\mathbf{k}(x-x')} - e^{-i\mathbf{k}(x-x')} \} \delta_{vv'}. \quad (6.13)$$

Переходя в формуле (6.13) от суммирования по \mathbf{k} к интегрированию в \mathbf{k} -пространстве, согласно (6.4) получим

$$[\hat{A}_v(\mathbf{r}, t), \hat{A}_{v'}(\mathbf{r}', t')] = 4\pi i \hbar c^2 D_0(x-x') \delta_{vv'}, \quad (6.14)$$

где $D_0(x)$ определяется формулой (6.6). Дифференцируя соотношение (6.14) по t' и затем полагая $t'=t$, преобразуем его к виду

$$[\hat{A}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}_\nu(\mathbf{r}', t)] = i\hbar \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \delta_{\mu\nu}, \quad (6.15)$$

т. е. получаем обычные перестановочные соотношения (5.8) для операторов поля, взятых в один и тот же момент времени.

3. *Теория электронно-позитронного поля.* Определим зависимость операторов \hat{A}_{ks}^+ и \hat{A}_{ks} от времени. По общему правилу можно написать

$$i\hbar \hat{A}_{ks} = [\hat{A}_{ks}, \hat{H}], \quad i\hbar \hat{A}_{ks}^+ = [\hat{A}_{ks}^+, \hat{H}];$$

подставляя сюда выражение (4.29) для \hat{H} и используя перестановочные соотношения (4.32), получаем

$$i\hbar \hat{A}_{ks} = E_{ks} \hat{A}_{ks}, \quad i\hbar \hat{A}_{ks}^+ = -E_{ks} \hat{A}_{ks}^+.$$

Интегрируя последние уравнения, находим

$$\hat{A}_{ks}(t) = \hat{A}_{ks}(0) e^{-i \frac{E_{ks} t}{\hbar}}, \quad \hat{A}_{ks}^+(t) = \hat{A}_{ks}^+(0) e^{i \frac{E_{ks} t}{\hbar}}. \quad (6.16)$$

Учитывая эти выражения, напомним

$$\hat{\psi}_j(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, s} \hat{A}_{ks}(t) u_{j, ks}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}, s} \hat{A}_{ks}(0) u_{j, ks}(\mathbf{r}) e^{-i \frac{E_{ks} t}{\hbar}}, \\ \hat{\psi}_j^+(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, s} \hat{A}_{ks}^+(t) u_{j, ks}^*(\mathbf{r}) = \\ = \sum_{\mathbf{k}, s} \hat{A}_{ks}^+(0) u_{j, ks}^*(\mathbf{r}) e^{i \frac{E_{ks} t}{\hbar}}. \quad (6.17)$$

Используя перестановочные соотношения (4.32) и формулы (6.17), находим соотношения антикоммутиации для операторов $\hat{\psi}$, взятых в различные моменты времени:

$$\begin{aligned}
 [\hat{\psi}_j(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_l(\mathbf{r}', t')]_{+} &= [\hat{\psi}_j^{\dagger}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_l^{\dagger}(\mathbf{r}', t')]_{+} = 0; \quad (6.18) \\
 [\hat{\psi}_j(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_l^{\dagger}(\mathbf{r}', t')]_{+} &= \\
 &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', s, s'} [\hat{A}_{\mathbf{k}s}, \hat{A}_{\mathbf{k}'s'}^{\dagger}]_{+} u_{j, \mathbf{k}s}(\mathbf{r}) u_{l, \mathbf{k}'s'}^*(\mathbf{r}') \times \\
 &\times \exp\left[-i \frac{E_{\mathbf{k}s} t - E_{\mathbf{k}'s'} t'}{\hbar}\right] = \sum_{\mathbf{k}, s} u_{j, \mathbf{k}s}(\mathbf{r}) u_{l, \mathbf{k}s}^*(\mathbf{r}') \times \\
 &\times \exp\left[i \frac{E_{\mathbf{k}s} (t' - t)}{\hbar}\right]. \quad (6.19)
 \end{aligned}$$

Преобразуем экспоненту в правой части (6.19):

$$\begin{aligned}
 \exp\left\{-i \frac{E_{\mathbf{k}s} \tau}{\hbar}\right\} &= \cos \frac{E_{\mathbf{k}s} \tau}{\hbar} - i \sin \frac{E_{\mathbf{k}s} \tau}{\hbar} = \cos \frac{|E_{\mathbf{k}s}| \tau}{\hbar} - \\
 - \frac{i E_{\mathbf{k}s}}{\hbar} \frac{\sin(|E_{\mathbf{k}s}| \tau / \hbar)}{|E_{\mathbf{k}s}| / \hbar} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i E_{\mathbf{k}s}}{\hbar}\right) \frac{\sin(|E_{\mathbf{k}s}| \tau / \hbar)}{|E_{\mathbf{k}s}| / \hbar}, \quad (6.20)
 \end{aligned}$$

где $\tau = t - t'$. Заметим, что величина

$$k_{(0)} = \frac{|E_{\mathbf{k}s}|}{\hbar c} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \chi^2}, \quad \text{где } \chi = \frac{mc}{\hbar},$$

не зависит от s . Принимая во внимание формулу (6.20) и уравнение Дирака

$$\sum_{l'} [-i\hbar c (\hat{\alpha})_{ll'} \nabla + mc^2 (\hat{\beta})_{ll'}] u_{l', \mathbf{k}s}(\mathbf{r}) = E_{\mathbf{k}s} u_{j, \mathbf{k}s}(\mathbf{r}), \quad (6.21)$$

перепишем соотношения (6.19) в виде

$$\begin{aligned}
 &[\hat{\psi}_j(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_l^{\dagger}(\mathbf{r}', t')]_{+} = \\
 &= \sum_{\mathbf{k}, s} u_{l, \mathbf{k}s}^*(\mathbf{r}') \sum_{l'} \left\{ \delta_{ll'} \frac{\partial}{\partial \tau} - c (\hat{\alpha})_{ll'} \nabla - ic\chi (\hat{\beta})_{ll'} \right\} \times \\
 &\times u_{l', \mathbf{k}s}(\mathbf{r}) \frac{\sin c\tau \sqrt{\mathbf{k}^2 + \chi^2}}{c \sqrt{\mathbf{k}^2 + \chi^2}}. \quad (6.22)
 \end{aligned}$$

Решение уравнения (6.21) можно представить так [см. (4.21)]:

$$u_{j, \mathbf{k}s} = c_{j, \mathbf{k}s} L^{-3/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

где согласно формуле (4.25) для $c_{j,ks}$ имеем условия полноты

$$\sum_s c_{j,ks} c_{i,ks}^* = \delta_{ji}. \quad (6.23)$$

Согласно формулам (4.21) и (6.23) из формулы (6.22) получаем

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}_j(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_{l'}^+(\mathbf{r}', t')]_+ &= \frac{1}{c} \left[\delta_{jl} - \frac{\partial}{\partial \tau} - c(\hat{\alpha})_{jl} \nabla - ic\chi(\hat{\beta})_{jl} \right] \times \\ &\times \sum_{\mathbf{k}} L^{-3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{\sin c\tau \sqrt{\mathbf{k}^2 + \chi^2}}{c \sqrt{\mathbf{k}^2 + \chi^2}} = \\ &= -\frac{1}{c} \left[\delta_{jl} \frac{\partial}{\partial \tau} - c(\hat{\alpha})_{jl} \nabla - ic\chi(\hat{\beta})_{jl} \right] D_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \end{aligned} \quad (6.24)$$

где

$$D_m(\mathbf{r}, t) = -\sum_{\mathbf{k}} L^{-3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\sin ct \sqrt{\mathbf{k}^2 + \chi^2}}{c \sqrt{\mathbf{k}^2 + \chi^2}}. \quad (6.25)$$

Умножая соотношение (6.24) на $i(\hat{\beta})_{ll'}$ и суммируя по l , находим

$$\begin{aligned} &[\hat{\psi}_j(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_{l'}^+(\mathbf{r}', t')]_+ = \\ &= -\frac{1}{c} \left[i(\hat{\beta})_{ll'} \frac{\partial}{\partial t} - c(\hat{\gamma})_{ll'} \nabla + c\chi \delta_{ll'} \right] D_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &[\hat{\psi}_j(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_{l'}^+(\mathbf{r}', t')]_+ = \\ &= \left(\sum_{\mu} \hat{\gamma}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - \chi \right)_{ll'} D_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Переходя от нормирующего объема V к бесконечной области, совершим переход от дискретных \mathbf{k} -значений к \mathbf{k} -континууму согласно формуле (6.9). В результате получим

$$D_m(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\sin ct \sqrt{\mathbf{k}^2 + \chi^2}}{c \sqrt{\mathbf{k}^2 + \chi^2}} d\mathbf{k}. \quad (6.27)$$

4. Свойства D_m -функции.

Первое. Функцию $D_m(\mathbf{r}, t)$ можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} D_m(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\mathbf{k} = \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{k_{(0)}}{|k_{(0)}|} \delta(k^2 + \chi^2) d^4 k, \end{aligned} \quad (6.28)$$

где

$$\omega = c \sqrt{k^2 + \chi^2}, \quad d^4 k = dk dk_{(0)}, \quad \chi = \frac{mc}{\hbar}.$$

Чтобы проверить формулу (6.28), учтем, что

$$\begin{aligned} \delta(k^2 + \chi^2) &= \delta\left[\left(k_{(0)} - \sqrt{k^2 + \chi^2}\right)\left(k_{(0)} + \sqrt{k^2 + \chi^2}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{k^2 + \chi^2}} \left[\delta\left(k_{(0)} - \sqrt{k^2 + \chi^2}\right) + \delta\left(k_{(0)} + \sqrt{k^2 + \chi^2}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2k_{(0)}} \left[\delta\left(k_{(0)} - \sqrt{k^2 + \chi^2}\right) - \delta\left(k_{(0)} + \sqrt{k^2 + \chi^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Итак, функция $\delta(k^2 + \chi^2)$ является антисимметричной относительно $\sqrt{k^2 + \chi^2}$. Построим симметричную функцию (относительно $\sqrt{k^2 + \chi^2}$):

$$\frac{1}{k_{(0)}} \left[\delta\left(k_{(0)} - \sqrt{k^2 + \chi^2}\right) + \delta\left(k_{(0)} + \sqrt{k^2 + \chi^2}\right)\right].$$

Используя множитель

$$\varepsilon(k_{(0)}) = \frac{k_{(0)}}{|k_{(0)}|} = \begin{cases} 1, & \text{если } k_{(0)} > 0, \\ -1, & \text{если } k_{(0)} < 0, \end{cases}$$

запишем последнюю сумму следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k_{(0)}) \delta(k^2 + \chi^2) &= \frac{1}{2k_{(0)}} \times \\ &\times \left[\delta\left(k_{(0)} - \sqrt{k^2 + \chi^2}\right) + \delta\left(k_{(0)} + \sqrt{k^2 + \chi^2}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2} (k^2 + \chi^2)^{-1/2} \times \\ &\times \left[\delta\left(k_{(0)} - \sqrt{k^2 + \chi^2}\right) - \delta\left(k_{(0)} + \sqrt{k^2 + \chi^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Эта формула и может быть использована для проверки (6.28).

Покажем теперь, что функция $D_m(\mathbf{r}, t)$ — лоренц-инвариантная. Трехмерный вектор \mathbf{k} совместно с $k_{(0)} = \frac{\omega}{c}$

образует четырехмерный вектор, поэтому фаза волны $\mathbf{k}\mathbf{r} - k_{(0)} ct$ является релятивистским инвариантом. Четырехмерный элемент объема $dk dk_{(0)}$, также релятивистски инвариантен, $\delta(k^2 + \chi^2)$ — релятивистски инвариантна, так как она зависит только от релятивистского инварианта k^2 . Наличие в формуле (6.28) δ -функции $\delta(k^2 + \chi^2)$ говорит о том, что интегрирование проводится по поверхности $k^2 + \chi^2 = 0$, а поэтому знак частоты в данном случае релятивистски инвариантен. Отсюда следует релятивистская инвариантность функции $\epsilon(k_{(0)}) = \frac{k_{(0)}}{|k_{(0)}|}$. Все это говорит о том, что D_m -функция и полученные перестановочные соотношения (6.5), (6.14) и (6.26) являются лоренц-инвариантными.

В т о р о е. Имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\partial}{\partial t'} D_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathbf{k} = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Т р е т ь е. Из (6.27) видно, что $D_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ — четная функция пространственных координат и нечетная функция времени, т. е.

$$\begin{aligned} D_m(\mathbf{r}, t) &= D_m(-\mathbf{r}, t) = -D_m(\mathbf{r}, -t) = \\ &= -D_m(-\mathbf{r}, -t). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Ч е т в е р т о е. Так как интеграл в формуле (6.27) представляет суперпозицию волн типа $\exp\{i(\mathbf{k}\mathbf{r} \pm \omega t)\}$, которые являются решениями уравнения Клейна — Гордона, то и $D_m(\mathbf{r}, t)$ также является решением этого уравнения, т. е.

$$(\square^2 - \mu^2) D_m(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (6.31)$$

П я т о е. Так как $D_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0) = 0$, то из инвариантности $D_m(\mathbf{r}, t)$ следует, что D_m равно нулю во всей области, внешней по отношению к световому конусу $\mathbf{r}^2 - c^2 t^2 = 0$, так как каждая мировая точка, принадлежащая к этой области, при помощи преобразования Лоренца может быть сведена к точке с $t = 0$, т. е.

$$D_m(\mathbf{r}, t) = 0 \text{ при } c|t| < |\mathbf{r}|.$$

Шестое. Выполняя интегрирование в выражении для D_m -функции, получаем

$$D_m(r, t) = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon(t) \delta(r^2 - c^2 t^2) +$$

$$+ \frac{\chi}{4\pi} \varepsilon(t) \operatorname{Re} \left\{ \frac{H_1^{(1)}(i\chi \sqrt{r^2 - c^2 t^2})}{i \sqrt{r^2 - c^2 t^2}} \right\} = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon(t) \delta(r^2 - c^2 t^2) +$$

$$+ \frac{\chi}{4\pi} \varepsilon(t) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{I_1(\chi \sqrt{c^2 t^2 - r^2})}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} & \text{— для времени-подобной области} \\ 0 & \text{— для пространственно-подобной области,} \end{array} \right. \quad (6.32)$$

где $\varepsilon(t) = \frac{t}{|t|}$, а $H_1^{(1)}$, I_1 — функции Ханкеля и Бесселя соответственно. Вблизи светового конуса ($r^2 - c^2 t^2 \approx 0$) выражение (6.32) принимает вид

$$D_m(r, t) \approx -\frac{1}{2\pi} \varepsilon(t) \delta(r^2 - c^2 t^2) +$$

$$+ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\chi^2}{8\pi} \varepsilon(t) & \text{— для времени-подобной области} \\ 0 & \text{— для пространственно-подобной области.} \end{array} \right. \quad (6.33)$$

Согласно (6.33) функция $D_m(r, t)$ имеет на световом конусе δ -образную особенность и скачок на $\frac{\chi^2}{8\pi} \varepsilon(t)$ при переходе от пространственной области к временной.

В случае электромагнитного поля ($\chi=0$) формула (6.32) примет вид

$$D_0(r, t) = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon(t) \delta(r^2 - c^2 t^2). \quad (6.34)$$

Таким образом, в случае электромагнитного поля на световом конусе (рис. 2) существует δ -образная особенность, но скачок на нем отсутствует, т. е. функция D_0 тождественно равна нулю как в пространственно-подобной, так и во времени-подобной области.

Представление (6.34) можно получить, если выполнить

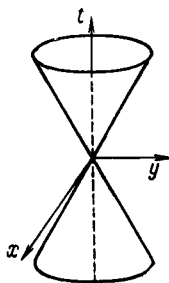


Рис. 2

интегрирование по углу между векторами \mathbf{k} и \mathbf{r} в выражении для $D_0(\mathbf{r}, t)$:

$$D_0(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^\infty \{e^{i\omega(r-ct)} + e^{-i\omega(r-ct)} - e^{i\omega(r+ct)} + e^{-i\omega(r+ct)}\} d\omega = -\frac{1}{4\pi r} \{\delta(r-ct) - \delta(r+ct)\} = \\ = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon(t) \delta(r^2 - c^2 t^2),$$

где $\varepsilon(t) = \frac{t}{|t|}$.

Замечание. При выводе формулы (6.28) использовалась формула

$$\delta[(x-x')(x-x'')] = \frac{\delta(x-x') + \delta(x-x'')}{|x' - x''|} \quad (6.35)$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta[(x-x')(x-x'')] dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\delta(x-x') + \delta(x-x'')}{|x' - x''|} dx, \quad (6.36)$$

где $f(x)$ — основная функция

Действительно, правая часть в последнем выражении равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\delta(x-x') \delta(x-x'')}{|x' - x''|} dx = \frac{f(x') + f(x'')}{|x' - x''|}. \quad (6.37)$$

Пусть x_0 — точка, лежащая внутри (x', x'') , и для определенности $x' < x''$, тогда левая часть в формуле (6.36) может быть записана так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta[(x-x')(x-x'')] dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x) \delta[(x-x')|x' - x''] dx + \\ + \int_{x_0}^{\infty} f(x) \delta[|x' - x''|(x-x'')] dx. \quad (6.38)$$

Если $x_1 < x_0 < x_2$, то, делая замену переменной $y = x|c|$, получим

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta[(x-x_0)c] dx = \int_{x_1|c|}^{x_2|c|} f\left(\frac{y}{|c|}\right) \delta[y-x_0|c|] \frac{dy}{|c|} = \frac{f(x_0)}{|c|}, \quad (6.39)$$

после чего формула (6.38) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta[(x-x')(x-x'')] dx = \frac{f(x') + f(x'')}{|x' - x''|}. \quad (6.40)$$

Из (6.37) и (6.40) следует справедливость формулы (6.36).

5. *Физическая интерпретация.* Возникает вопрос: при каких условиях некоторую физическую величину можно измерить в различных точках пространства Минковского так, чтобы акт первого измерения не влиял на акт второго измерения?

Дадим ответ на этот вопрос. Пусть \hat{L} и \hat{M} — операторы, соответствующие физическим величинам L и M . В общем случае имеет место соотношение

$$[\hat{L}, \hat{M}] = i \hat{G}, \quad (6.41)$$

где \hat{G} — некоторый оператор. Как известно, из формулы (6.41) вытекает неравенство (см. стр. 14 и 92 в [13]):

$$\Delta L \cdot \Delta M \geq |\langle \hat{G} \rangle|, \quad (6.42)$$

где $\langle \hat{G} \rangle$ — среднее значение оператора \hat{G} , а

$$\Delta A = \sqrt{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle}.$$

Из неравенства (6.42) следует, что если операторы \hat{L} и \hat{M} , соответствующие некоторым физическим величинам, не коммутируют между собой, то не существует состояний системы с определенными значениями величин L и M . При этом состояния системы характеризуются значениями \hat{L} и \hat{M} , заключенными в интервалах ΔL и ΔM . Если же операторы \hat{L} и \hat{M} коммутируют, то, как это следует из формулы (6.42), система может находиться в состоянии с определенными значениями величин L и M .

Используя полученный вывод, мы заключаем, что из перестановочных соотношений типа (6.15) следует соотношение неопределенностей

$$\Delta \psi_j(\mathbf{r}, t) \cdot \Delta \psi_j(\mathbf{r}', t') \geq D_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'). \quad (6.43)$$

Так как функция D_m обладает δ -образной особенностью на световом конусе $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = c^2 |t - t'|^2$, а δ -функция имеет непосредственный смысл только после интегрирования по области, заключающей δ -образную особенность, то, строго говоря, необходимо брать значения поля не в дискретных мировых точках, а усреднять их по пространственно-временным областям Ω и Ω' . Обозначая операцию усреднения

символами M_Ω и $M_{\Omega'}$, преобразуем соотношение (6.43) к виду

$$\begin{aligned} \Delta \{M_\Omega \psi_j(\mathbf{r}, t)\} \Delta \{M_{\Omega'} \psi_{j'}(\mathbf{r}', t')\} &\geq \\ &\geq \hbar M_\Omega M_{\Omega'} D_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Если любая точка из области Ω отделена от любой точки области Ω' пространственным интервалом

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > c|t - t'|,$$

то из формулы (6.44) имеем

$$\Delta \{M_\Omega \psi_j(\mathbf{r}, t)\} \cdot \Delta \{M_{\Omega'} \psi_{j'}(\mathbf{r}', t')\} = 0. \quad (6.45)$$

Таким образом, если операторы, изображающие измеряемую величину в разных точках, коммутируют друг с другом, то соответствующую величину можно измерить в разных точках пространства Минковского так, чтобы одно измерение не влияло на другое. Это объясняется тем, что в данном случае $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > c|t - t'|$, а поэтому возмущение поля, вызванное актом измерения в одной области и распространяющееся даже со скоростью света, не может достигнуть другой области. Если же области Ω и Ω' хотя бы частично связаны световыми сигналами, то акт одного измерения может влиять на акт второго измерения.

Приведенные выше рассуждения справедливы в релятивистской теории. В нерелятивистской теории на скорость передачи взаимодействия не налагаются ограничения, поэтому в этом случае подобные выводы могут и не иметь силы. (Не следует забывать, однако, что нерелятивистская теория неточна! — *Прим. ред.*)

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ (МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ)

§ 1. ТРАНСФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА

1. *Классификация преобразований Лоренца.* В § 2, 3 будут построены выражения для плотности лагранжианов взаимодействия двух или более полей. Такие выражения должны быть лоренц-инвариантными. При рассмотрении системы полей, включающей одно или несколько спинорных (дираковских) полей, в выражение для плотности лагранжиана взаимодействия должны быть включены соответствующие спинорные функции в комбинации с матрицами Дирака. При этом надо выбрать такие комбинации матриц Дирака, которые обеспечивают лоренц-инвариантность плотности лагранжиана взаимодействия. Для того чтобы уметь делать необходимый выбор комбинаций матриц Дирака, необходимо знать их трансформационные свойства, к изучению которых сейчас и переходим.

Рассмотрим выражения вида

$$\bar{\psi} \hat{O} \psi,$$

где $\bar{\psi}$ и ψ — спинорные функции, \hat{O} — оператор, представляющий собой произведение нескольких матриц $\hat{\gamma}_\mu$. Прежде чем изучать свойства таких выражений, введем различные классы преобразований. Наиболее важным классом преобразований являются преобразования Лоренца

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 a_{\mu\nu} x_\nu, \quad (1.1)$$

или в матричной форме

$$x' = \hat{a}x, \quad (1.1')$$

где

$$\sum_{\mu} a_{\nu\mu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \quad (1.2)$$

(коэффициенты $a_{\nu\mu}$ действительные).

Преобразование Лоренца называется собственным, если

$$\det |a_{\nu\mu}| = \det |\hat{a}| = +1 \text{ и } a_{00} > 0. \quad (1.3)$$

Несобственные преобразования Лоренца могут быть выражены как произведение собственных преобразований Лоренца и простейших несобственных преобразований, представляющих собой отражения пространственно-временных осей. Существуют следующие классы отражений:

1) пространственные отражения, при которых

$$x'_{(0)} = x_{(0)}, \quad (1.4)$$

и одна из координат преобразуется по формуле

$$x'_{(k)} = -x_{(k)}, \quad (1.5)$$

в то время как остальные остаются неизменными;

2) пространственная инверсия, при которой

$$x'_{(0)} = x_{(0)}, \quad (1.6)$$

а все x_k преобразуются по формуле

$$x'_{(k)} = -x_{(k)} \quad (k = 1, 2, 3); \quad (1.7)$$

3) обращение знака времени:

$$x'_{(0)} = -x_{(0)}, \quad x'_{(k)} = x_{(k)} \quad (k = 1, 2, 3); \quad (1.8)$$

4) обращение знака времени и пространственная инверсия:

$$x'_{(0)} = -x_{(0)}, \quad x'_{(k)} = -x_{(k)} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.8')$$

Для первого и второго классов отражений $a_{00} > 0$, а для третьего и четвертого $a_{00} < 0$. Для первых трех классов отражений $\det |\hat{a}| = -1$, а для четвертого класса $\det |\hat{a}| = +1$. В дальнейшем не будут рассматриваться преобразования, которые содержат изменение знака времени, т. е. ограничимся случаями, когда $a_{00} > 0$.

2. *Собственные преобразования Лоренца.* При преобразовании Лоренца волновая функция ψ' в новой системе координат получается из функции ψ при помощи линейного преобразования¹

$$\psi' = \hat{S} \psi, \quad (1.9)$$

где \hat{S} — четырехмерная матрица, не зависящая от координат пространства Минковского. Матрица \hat{S} имеет обратную матрицу \hat{S}^{-1} и зависит только от $a_{\nu\mu}$. Поэтому формулу (1.9) можно переписать в виде

$$\psi'_\alpha(x') = \sum_{\beta=1}^4 S_{\alpha\beta}(\hat{a}) \psi_\beta(\hat{a}^{-1} x'). \quad (1.9')$$

Уравнение Дирака имеет вид

$$[\hat{E} - c \hat{\rho} \hat{\alpha} - \hat{\beta} m_0 c^2] \psi = 0, \quad (1.10)$$

или

$$\left(\sum_{\mu=0}^3 \hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \chi \right) \psi = 0, \quad (1.10')$$

где $\hat{\gamma}_0 = -i\hat{\beta}$, $\hat{\rho} = -i\hbar\nabla$, $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$. Для ковариантности уравнения Дирака необходимо, чтобы в новой системе координат выполнялось равенство

$$[\hat{E}' - c \hat{\rho}' \hat{\alpha}' - \hat{\beta}' m_0 c^2] \psi' = 0, \quad (1.11)$$

или

$$\left(\sum_{\mu} \hat{\gamma}'_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} + \chi \right) \psi' = 0. \quad (1.11')$$

Учитывая, что согласно преобразованию (1.1)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = \sum_{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x'_\lambda} \cdot \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\mu} = \sum_{\lambda} a_{\lambda\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x'_\lambda}, \quad (1.12)$$

и используя преобразование (1.9), из уравнения (1.10') найдем

$$\left(\sum_{\mu} \sum_{\lambda} a_{\lambda\mu} \hat{\gamma}'_\mu \frac{\partial \hat{S}^{-1} \psi'}{\partial x'_\lambda} + \chi \hat{S}^{-1} \psi' \right) = 0. \quad (1.13)$$

¹ Матрицы \hat{S} образуют представление группы Лоренца.

Умножая это уравнение слева на \hat{S} , получаем

$$\sum_{\lambda} \hat{S} \left(\sum_{\mu} a_{\lambda\mu} \hat{\gamma}_{\mu} \right) \hat{S}^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial x'_{\lambda}} + \chi \psi' = 0. \quad (1.14)$$

Сравнивая уравнения (1.14) и (1.11'), заключаем, что уравнение Дирака будет ковариантным при преобразовании координат Лоренца, если выполняется условие

$$\hat{S}^{-1} \hat{\gamma}_{\lambda} \hat{S} = \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} \hat{\gamma}_{\mu}. \quad (1.15)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи собственных преобразований Лоренца.

Вращение в плоскости Xt . В данном случае формулы (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} x' &= x \operatorname{ch} \gamma - ct \operatorname{sh} \gamma, & ct' &= ct \operatorname{ch} \gamma - x \operatorname{sh} \gamma, \\ y' &= y, & z' &= z. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Для обратного преобразования можем написать

$$\begin{aligned} x &= x' \operatorname{ch} \gamma + ct' \operatorname{sh} \gamma, & ct &= ct' \operatorname{ch} \gamma + x' \operatorname{sh} \gamma, \\ y &= y', & z &= z'. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Согласно (1.17) для оператора энергии-импульса имеем следующие формулы преобразований:

$$\begin{aligned} c\hat{p}_x &= c\hat{p}'_x \operatorname{ch} \gamma + \hat{E}' \operatorname{sh} \gamma, & \hat{E} &= \hat{E}' \operatorname{ch} \gamma + c\hat{p}'_x \operatorname{sh} \gamma, \\ \hat{p}_y &= \hat{p}'_y, & \hat{p}_z &= \hat{p}'_z. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Подставляя выражения для компонент оператора энергии-импульса из формул (1.18) в уравнение (1.10), получаем

$$\left[(\hat{E}' - c\hat{p}'_x \hat{\alpha}_1) (\operatorname{ch} \gamma - \hat{\alpha}_1 \operatorname{sh} \gamma) - c\hat{p}'_y \hat{\alpha}_2 - c\hat{p}'_z \hat{\alpha}_3 - \hat{\beta} m_0 c^2 \right] \psi = 0. \quad (1.19)$$

Умножая это уравнение слева на оператор

$$\operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} + \hat{\alpha}_1 \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2}$$

и учитывая, что матрица $\hat{\alpha}_1$ антикоммутирует с матрицами $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\alpha}_3$ и $\hat{\beta}$, преобразуем уравнение (1.19) к виду

$$[\hat{E}' - c(\hat{\alpha} \hat{p}') - \hat{\beta} m_0 c^2] \psi' = 0,$$

где

$$\psi' = \left(\operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} - \hat{\alpha}_1 \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} \right) \psi = e^{-\frac{\gamma}{2} \hat{\alpha}_1} \psi. \quad (1.20)$$

Таким образом, в данном случае матрица \hat{S} равна

$$\hat{S}_{xt} = \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} - \hat{\alpha}_1 \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} = e^{-\frac{\gamma}{2} \hat{\alpha}_1}. \quad (1.21)$$

Для преобразования, обратного преобразованию (1.20), имеем

$$\psi = \hat{S}^{-1} \psi', \quad (1.22)$$

где

$$\hat{S}_{xt}^{-1} = \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} + \hat{\alpha}_1 \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} = e^{\frac{\gamma}{2} \hat{\alpha}_1}. \quad (1.23)$$

Из преобразования (1.20) имеем

$$\psi'^+ = \psi^+ \left(\operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} - \hat{\alpha}_1 \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} \right) = \psi^+ e^{-\frac{\gamma}{2} \hat{\alpha}_1}, \quad (1.24)$$

так как $\hat{\alpha}_1$ — эрмитова матрица. Умножая формулу (1.24) справа на $i \hat{\beta}$, находим

$$i \psi'^+ \hat{\beta} = i \psi^+ e^{-\frac{\gamma}{2} \hat{\alpha}_1} \hat{\beta} = i \psi^+ \hat{\beta} e^{\frac{\gamma}{2} \hat{\alpha}_1},$$

или согласно выражению (1.23)

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} \hat{S}_{xt}^{-1}. \quad (1.25)$$

Вращение в плоскости XU . В этом случае формулы преобразований координат имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, & y &= y' \cos \varphi + x' \sin \varphi, \\ z &= z', & t &= t', \end{aligned} \quad (1.26)$$

а формулы преобразования для оператора энергии-импульса можно записать в виде

$$\hat{p}_x = \hat{p}'_x \cos \varphi - \hat{p}'_y \sin \varphi, \quad \hat{p} = \hat{p}_y \cos \varphi + \hat{p}'_x \sin \varphi, \quad (1.27)$$

$$\hat{p}_z = \hat{p}'_z, \quad \hat{E} = \hat{E}'.$$

Подставляя эти выражения в уравнение Дирака (1.10) и умножая слева полученное равенство на оператор

$$\cos \frac{\varphi}{2} + \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \sin \frac{\varphi}{2},$$

преобразуем уравнение (1.10) к виду (1.11) и найдем закон преобразования для ψ -функции:

$$\psi' = \hat{S}_{xy} \psi, \quad (1.28)$$

где

$$\hat{S}_{xy} = \cos \frac{\varphi}{2} + \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \sin \frac{\varphi}{2} = e^{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (1.29)$$

Преобразование, обратное преобразованию (1.28), имеет вид

$$\psi = \hat{S}_{xy}^{-1} \psi', \quad (1.28')$$

где

$$\hat{S}_{xy}^{-1} = \cos \frac{\varphi}{2} - \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \sin \frac{\varphi}{2} = e^{-\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (1.30)$$

Из формулы (1.28), учитывая, что $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\alpha}_2$ — эрмитовы операторы, получаем

$$\psi'^{\dagger} = \psi^{\dagger} \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \psi^{\dagger} \hat{S}_{xy}^{-1} \quad (1.31)$$

(здесь учтены коммутационные соотношения для $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\alpha}_2$). Умножая формулу (1.31) справа на $i\hat{\beta}$, находим

$$i\psi'^{\dagger} \hat{\beta} = i\psi^{\dagger} \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \hat{\beta}, \quad (1.32)$$

или согласно выражению (1.30)

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} \hat{S}_{xy}^{-1}. \quad (1.33)$$

Преобразования (1.20) и (1.28) показывают, что решения уравнения Дирака ψ преобразуются не как тензор, а как полувектор, вращение которого при повороте координат на угол γ или φ характеризуется углом $\frac{\gamma}{2}$ или $\frac{\varphi}{2}$; величины, преобразующиеся по законам (1.20) и (1.28), являются спинорами.

3 *Пространственная инверсия.* Формулы преобразования координат в данном случае имеют вид

$$x'_{(0)} = x_{(0)}, \quad x'_k = -x_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1.34)$$

отсюда имеем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_{(0)}} = \frac{\partial \psi}{\partial x'_{(0)}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = -\frac{\partial \psi}{\partial x'_k} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.35)$$

Учитывая последние соотношения, преобразуем уравнение Дирака (1.10') к виду

$$\left(\hat{\gamma}_0 \frac{\partial}{\partial x'_{(0)}} - \hat{\gamma}_1 \frac{\partial}{\partial x'_{(1)}} - \hat{\gamma}_2 \frac{\partial}{\partial x'_{(2)}} - \hat{\gamma}_3 \frac{\partial}{\partial x'_{(3)}} + \chi \right) \psi = 0. \quad (1.36)$$

Умножая это уравнение слева на $\hat{\beta}$, получим уравнение (1.11'), где

$$\psi' = \hat{\beta} \psi. \quad (1.37)$$

Таким образом, в данном случае матрица \hat{S}_i равна $\hat{\beta}$; матрица обратного преобразования также равна $\hat{\beta}$, так как $\hat{\beta}^2 = 1$. Из формулы (1.37) имеем: $\psi'^+ = \psi^+ \hat{\beta}$, так как матрица $\hat{\beta}$ эрмитова. Умножая последнее равенство на $i\hat{\beta}$ справа, получим

$$i\psi'^+ \hat{\beta} = i\psi^+ \hat{\beta} \hat{\beta},$$

или

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} \hat{S}_i^{-1} \quad (\hat{S}_i^{-1} = \hat{\beta}). \quad (1.38)$$

4. *Обращение знака времени.* Формулы преобразования в рассматриваемом случае имеют вид

$$x'_{(0)} = -x_{(0)}, \quad x'_k = x_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.39)$$

Согласно формулам (1.39) имеем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_{(0)}} = -\frac{\partial \psi}{\partial x'_{(0)}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \frac{\partial \psi}{\partial x'_k} \quad (k=1, 2, 3). \quad (1.40)$$

Учитывая формулы (1.40), преобразуем уравнение Дирака (1.10') к виду

$$\left(-\hat{\gamma}_0 \frac{\partial}{\partial x'_{(0)}} + \hat{\gamma}_1 \frac{\partial}{\partial x'_{(1)}} + \hat{\gamma}_2 \frac{\partial}{\partial x'_{(2)}} + \hat{\gamma}_3 \frac{\partial}{\partial x'_{(3)}} + \chi \right) \psi = 0. \quad (1.41)$$

Умножая уравнение (1.41) слева на $\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3$, получим уравнение (1.11'), в котором новая функция выражается в виде

$$\psi' = \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 \psi = \hat{S}_t \psi. \quad (1.42)$$

Таким образом, в данном случае матрица \hat{S}_t равна $\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3$. Легко показать, что

$$(\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3) (\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3) = -1. \quad (1.43)$$

Следовательно, матрица обратного преобразования равна $-(\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3)$, т. е.

$$\hat{S}_t^{-1} = (\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3)^{-1} = -(\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3). \quad (1.44)$$

Из формулы (1.42), учитывая, что матрица $\hat{\gamma}_\mu$ эрмитова, имеем

$$\begin{aligned} \psi'^+ &= \psi^+ \hat{\gamma}_3^+ \hat{\gamma}_2^+ \hat{\gamma}_1^+ = \psi^+ \hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_1 = \\ &= -\psi^+ \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_1 = -\psi^+ \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Умножая (1.45) на $i\hat{\beta}$ справа, находим

$$i\psi'^+ \hat{\beta} = -i\psi^+ \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 \hat{\beta} = i\psi^+ \hat{\beta} \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3,$$

или с учетом формулы (1.44)

$$\bar{\psi}' = -\bar{\psi} \hat{S}_t^{-1}. \quad (1.46)$$

Принимая во внимание равенства (1.25), (1.33), (1.38) и (1.46), мы приходим к выводу, что формула

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} \hat{S}^{-1} \quad (1.47)$$

имеет место для тех преобразований, которые не меняют знака времени ($a_{00} > 0$), в то время как соотношение

$$\bar{\psi}' = -\bar{\psi} \hat{S}^{-1} \quad (1.48)$$

справедливо для преобразований, содержащих отражение времени ($a_{00} < 0$).

5. *Трансформационные свойства выражений вида $\bar{\psi} \hat{O} \psi$.* Покажем, что эти выражения преобразуются по тензорным представлениям группы Лоренца. При преобразовании Лоренца (1.1) согласно формулам (1.9) и (1.47) находим

$$\bar{\psi}'(x') \hat{O} \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \hat{S}^{-1} \hat{O} \hat{S} \psi(x). \quad (1.49)$$

Рассмотрим простейшие частные случаи:

а) $\hat{O} = i$. Равенство (1.49) получает вид

$$i \bar{\psi}'(x') \psi'(x') = i \bar{\psi}(x) \psi(x), \quad (1.50)$$

откуда следует, что выражение $i \bar{\psi} \psi$ является скаляром;

б) $\hat{O} = \hat{\gamma}_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Согласно формуле (1.15) равенство (1.49) преобразуется к виду

$$\bar{\psi}'(x') \hat{\gamma}_\lambda \psi'(x') = \sum_\mu a_{\lambda\mu} \bar{\psi}(x) \hat{\gamma}_\mu \psi(x). \quad (1.51)$$

Отсюда видно, что компоненты $\bar{\psi} \hat{\gamma}_\mu \psi$ составляют четырехмерный вектор;

в) $\hat{O} = \hat{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu - \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\mu) = -\hat{\sigma}^{\nu\mu}$. Используя преобразование (1.15), запишем формулу (1.49) в виде

$$\bar{\psi}'(x') \hat{\sigma}^{\mu\nu} \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \hat{S}^{-1} \hat{\sigma}^{\mu\nu} \hat{S} \psi = \sum_\rho \sum_\lambda a_{\mu\rho} a_{\nu\lambda} \bar{\psi} \hat{\sigma}^{\rho\lambda} \psi, \quad (1.52)$$

т. е. выражение $\bar{\psi} \hat{\sigma}^{\mu\nu} \psi$ преобразуется как антисимметричный тензор второго ранга;

г) $\hat{O} = \hat{\gamma}_5 = \hat{\beta} \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3$. При собственных преобразованиях Лоренца имеем

$$\bar{\psi}'(x') \hat{\gamma}_5 \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \hat{S}^{-1} \hat{\gamma}_5 \hat{S} \psi(x) = \bar{\psi}(x) \hat{\gamma}_5 \psi(x), \quad (1.53)$$

тогда как при пространственной инверсии получаем

$$\bar{\psi}'(x') \hat{\gamma}_5 \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \hat{\beta} \hat{\beta} \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 \hat{\beta} \psi(x) = -\bar{\psi}(x) \hat{\gamma}_5 \psi(x), \quad (1.54)$$

т. е. $\bar{\psi} \hat{\gamma}_5 \psi$ преобразуется как скаляр при собственных преобразованиях Лоренца и меняет знак при пространственной инверсии. Следовательно, $\bar{\psi} \hat{\gamma}_5 \psi$ является псевдоскаляром;

д) $\hat{O} = \hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_\mu$. Можно показать, что четыре выражения $\bar{\psi}(x) \hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_\mu \psi(x)$ образуют псевдовектор.

Легко также показать, что

$$[i \bar{\psi} \psi]^+ = i \bar{\psi} \psi, \quad [\bar{\psi} \hat{\gamma}_\mu \psi]^+ = \bar{\psi} \hat{\gamma}_\mu \psi \quad (\mu = 1, 2, 3),$$

$$[\bar{\psi} \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu \psi]^+ = \bar{\psi} \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu \psi, \quad [\bar{\psi} \hat{\gamma}_5 \psi]^+ = \bar{\psi} \hat{\gamma}_5 \psi \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3),$$

$$[\bar{\psi} \hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_\mu \psi]^+ = \bar{\psi} \hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_\mu \psi \quad (\mu = 1, 2, 3).$$

Таким образом, все рассматриваемые выражения являются эрмитовыми.

§ 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ПОЛЯМИ

1. *Общие сведения.* Для построения теории двух (или более) взаимодействующих полей необходимо построить плотность лагранжиана, которая должна быть суммой плотностей лагранжианов изолированных полей и плотностей лагранжианов взаимодействия. В спинорной электродинамике

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_d + \mathcal{L}_v + \mathcal{L}_{int},$$

где \mathcal{L}_d — плотность лагранжиана поля Дирака; \mathcal{L}_v — плотность лагранжиана электромагнитного поля, \mathcal{L}_{int} — плотность лагранжиана взаимодействия. Эти плотности должны иметь лоренц-инвариантную форму и размерность плотности энергии. Очевидно, \mathcal{L}_{int} должна состоять из членов, в которые в качестве множителей входят как волновые функции ψ и ψ^* электронно-позитронного поля, так и волновые функции A_μ электромагнитного поля. Соответствующий член запишем как $G \hat{A}(x) \hat{B}(x)$, где G — константа связи; множитель $\hat{A}(x)$ относится к первому полю, а множитель $\hat{B}(x)$ — ко второму полю.

Взаимодействия делятся на локальные и нелокальные. В первом случае множители $A(x)$ и $\hat{B}(x)$ берутся в одной и той же точке пространства Минковского. Кроме того, взаимодействия делятся на взаимодействия прямые и взаимодействия с производной. Если ни в $\hat{A}(x)$, ни в $\hat{B}(x)$ не входят производные от функций поля, то взаимодействие называется прямым, в противном случае — взаимодействием с производной. Так как энергия — величина действительная, то оператор $\hat{A}\hat{B}$ должен быть эрмитовым. Рассмотрим кратко различные типы взаимодействий.

2. Прямые локальные связи.

Взаимодействие скалярного и спинорного полей. Пусть φ — волновая функция скалярного поля, а ψ — волновая функция спинорного поля. Как известно, $\bar{\psi}\psi$ — скаляр¹. Полагая $\hat{A} = \varphi$ и $\hat{B} = i\bar{\psi}$, получаем следующее выражение для лоренц-инвариантной плотности лагранжиана взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = iG \bar{\psi} \varphi \psi. \quad (2.1)$$

Взаимодействие псевдоскалярного и спинорного полей. Пусть теперь φ — волновая функция псевдоскалярного поля, а ψ — как и раньше, волновая функция спинорного поля. Так как $\bar{\psi}\hat{\gamma}_5\psi$ — псевдоскаляр, то эрмитово лоренц-инвариантное выражение для плотности лагранжиана взаимодействия, в частности, может иметь вид

$$\mathcal{L}_{int} = G \bar{\psi} \hat{\gamma}_5 \varphi \psi, \quad (2.2)$$

где функция φ может описывать нейтральные π -мезоны, а функция ψ — нуклоны.

Взаимодействие векторного и спинорного полей. Пусть функция φ_μ описывает векторное поле, выражение $\bar{\psi}\hat{\gamma}_\mu\psi$, где ψ — функция спинорного поля, является вектором. В данном случае плотность лагранжиана взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_{\mu} G \bar{\psi} \hat{\gamma}_{\mu} \varphi_{\mu} \psi. \quad (2.3)$$

¹ Утверждение не совсем точное, хотя это обстоятельство и несущественно для дальнейшего (см. Ю. Швингер. Теория квантованных полей. — *Прим. ред.*).

Если в формуле (2.3) вместо φ_μ поставить четырехмерный вектор-потенциал электромагнитного поля, то получим член взаимодействия классической электродинамики, который можно записать так:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{c} \sum_{\mu} A_{\mu} j_{\mu}, \quad \text{где } j_{\mu} = ec \bar{\psi} \hat{\gamma}_{\mu} \psi.$$

Взаимодействие псевдовекторного и спинорного полей. Пусть φ_{μ} — компоненты псевдовекторного поля. Выражение $\bar{\psi} \hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_{\mu} \psi$ является псевдовектором, поэтому для плотности лагранжиана взаимодействия получаем

$$\mathcal{L}_{int} = G \bar{\psi} \hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_{\mu} \psi \varphi_{\mu}. \quad (2.4)$$

3. Локальные связи с производной.

Плотность лагранжиана взаимодействия скалярного поля со спинорным можно записать так

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{F}{\mu} \sum_{\nu} \bar{\psi} \hat{\gamma}_{\nu} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\nu}}, \quad (2.5)$$

где F — константа связи; $\mu = \frac{mc}{\hbar}$; m — масса частицы скалярного поля φ ; ψ — функция спинорного поля.

Плотность лагранжиана взаимодействия псевдоскалярного и спинорного полей (псевдовекторная связь) имеет вид

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{F}{\mu} \sum_{\nu} \bar{\psi} \hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_{\nu} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\nu}}. \quad (2.6)$$

Взаимодействие векторного и спинорного полей. Пусть φ_{μ} — компоненты векторного поля. Введем тензор

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = \varphi_{\mu, \nu} - \varphi_{\nu, \mu}.$$

Комбинируя тензор $F_{\mu\nu}$ с антисимметричным тензором

$\bar{\psi} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \psi$, где $\hat{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu - \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\mu)$, получим

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{F}{\mu} \sum_{\mu, \nu} \bar{\psi} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \psi F_{\mu\nu} = \frac{F}{2\mu} \sum_{\mu, \nu} \bar{\psi} (\hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu - \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\mu) \psi F_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

4. Локальное взаимодействие между спинорными полями

При β -распаде имеет место взаимодействие трех спинорных полей: нуклонного ψ_N , электронно-позитронного ψ_e и нейтринного ψ_ν . Для описания β -процесса Ферми предложил следующий вид взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = g_F (\bar{\psi}_N \hat{O} \psi_N) (\bar{\psi}_e \hat{O} \psi_\nu), \quad (2.8)$$

где обе матрицы \hat{O} одинаковы. Функция свободного поля ψ_ν удовлетворяет уравнению Дирака для частицы с массой покоя, равной нулю. В качестве оператора \hat{O} можно взять один из следующих пяти операторов:

$$\hat{O} = i, \quad \hat{\gamma}_\mu, \quad \hat{\sigma}_{\mu\tau}, \quad \hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_\mu, \quad \hat{\gamma}_5. \quad (2.9)$$

В 1935 г. Конопинский и Уленбек для описания β -распада ввели взаимодействие с производной вида

$$\mathcal{L}_{int} = F_K \bar{\psi}_N \hat{\gamma}_\mu \psi_N \bar{\psi}_e \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_\mu}. \quad (2.10)$$

Однако эксперименты находятся в противоречии с теорией β -распада, основанной как на формуле (2.8), где оператор имеет вид (2.9), так и на формуле (2.10). Учитывая это, а также принимая во внимание другие соображения, Фейнман и Гелл-Манн в 1958 г. предложили так называемое универсальное четырехфермионное взаимодействие, выражаемое формулой (2.8), где под \hat{O} следует понимать оператор $\hat{\gamma}_\mu (1 + \hat{\gamma}_5)$. Точно такой же закон четырехфермионного взаимодействия получили Сударшан и Маршак на основе анализа экспериментальных данных.

Юкава для объяснения β -распада предложил взаимодействие вида $\mathcal{L}_{NN} + \mathcal{L}_{e\nu}$, где

$$\mathcal{L}_{NN} = G \bar{\psi}_N \hat{O} \psi_N \varphi, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{L}_{e\nu} = g \bar{\psi}_e \hat{O} \psi_\nu \varphi$$

($G \gg g$), а φ — волновая функция мезонного поля. В квантовой теории поля функция φ заменяется на оператор $\hat{\varphi}$, описывающий процесс рождения и поглощения виртуального мезона в промежуточном состоянии. Ответственным за такое взаимодействие не является π -мезон. Возможно, что ответственным за β -распад является тяжелый векторный мезон, получивший название W -мезона. Если такой мезон существует, то его масса должна быть большей, чем тройная масса нуклона (см. «Введение»).

§ 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Рассмотрим взаимодействие заряженного поля с электромагнитным. Для учета этого взаимодействия необходимо заменить \hat{p}_μ на $\hat{p}_\mu + eA_\mu$ (где e — заряд частицы), т. е. оператор $\partial/\partial x_\mu$, действующий на комплексную функцию φ , необходимо заменить по формуле

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu = D_\mu. \quad (3.1)$$

Оператор $\partial/\partial x_\mu$, действующий на φ^* , заменяется оператором

$$D_\mu^* = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu; \quad (3.2)$$

оператор $\partial/\partial x_\mu$, действующий на вещественное поле, оставляем неизменным.

1. *Взаимодействие дираковского и электромагнитного полей.* Плотность лагранжиана свободного дираковского поля имеет вид

$$\mathcal{L}_d = i\bar{\psi} \left[c\hbar \hat{\gamma}_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + mc^2 \psi \right]. \quad (3.3)$$

Для получения плотности лагранжиана системы взаимодействующих заряженного дираковского и электромагнитного полей необходимо заменить в формуле (3.3) оператор $\frac{\partial}{\partial x_\nu}$, пользуясь (3.1), и добавить к \mathcal{L}_d лагранжиан электромаг-

нитного поля. В результате те получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{8\pi} \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} + \\ & + i\bar{\psi} \left[c\hbar \hat{\gamma}_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \right) \psi + mc^2 \psi \right] = \\ = & i\hbar c \left[\bar{\psi} \hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi + \chi \bar{\psi} \psi \right] - \frac{1}{8\pi} \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} + e\bar{\psi} \hat{\gamma}_\mu A_\mu \psi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Итак, плотность лагранжиана взаимодействия равна

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi} \hat{\gamma}_\mu A_\mu \psi. \quad (3.5)$$

Подставляя выражение для \mathcal{L} из формулы (3.4) в соответствующие уравнения Эйлера, получим уравнения для взаимодействующих полей:

$$\left[\hat{\gamma}_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) + \chi \right] \psi = 0, \quad (3.6)$$

$$\left[\hat{\gamma}_\mu^\tau \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) - \chi \right] \bar{\psi} = 0, \quad (3.6')$$

$$\square^2 A_\mu = -4\pi e\bar{\psi} \hat{\gamma}_\mu \psi, \quad (3.7)$$

где $\hat{\gamma}_\mu^\tau = \tilde{\gamma}_\mu$ — транспонированные матрицы Дирака. Из уравнения (3.7) следует, что плотность тока определяется по формуле

$$j_\mu = ec\bar{\psi} \hat{\gamma}_\mu \psi. \quad (3.8)$$

Учитывая (3.8), перепишем формулу (3.5) в виде

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{c} \sum_\mu A_\mu j_\mu.$$

Используя (3.4), найдем выражение для плотности гамильтониана

$$\Gamma = \Gamma_d + \Gamma_\nu + \Gamma_{int}. \quad (3.9)$$

Так как \mathcal{L}_{int} не содержит производных от волновых функций, то

$$\Gamma_{int} = -\mathcal{L}_{int} = -e\bar{\psi} \hat{\gamma}_\mu A_\mu \psi. \quad (3.10)$$

Член в правой части (3.10) с $\mu=4$ имеет вид $ec\psi^+\psi$, как и должно быть для плотности энергии электростатического взаимодействия. В квантовой теории поля функции $\bar{\psi}$, ψ и A_μ заменяют операторами $\hat{\bar{\psi}}$, $\hat{\psi}$ и \hat{A}_μ , которые удовлетворяют таким же самым перестановочным соотношениям (для одного момента времени), как и для свободных полей.

Оператор плотности электрического тока необходимо выбрать в виде (см. гл. II):

$$\hat{j}_\mu(x) = ec \hat{N}(\hat{\bar{\psi}} \hat{\gamma}_\mu \hat{\psi}), \quad (3.11)$$

поэтому для оператора плотности энергии взаимодействия получаем

$$\hat{\Gamma}_{int} = -\hat{\mathcal{L}}_{int} = -\frac{1}{c} \hat{A}_\mu \hat{j}_\mu = -e \hat{N}(\hat{\bar{\psi}} \hat{\gamma}_\mu \hat{A}_\mu \hat{\psi}). \quad (3.12)$$

Вводя обозначение

$$\hat{A} = \hat{\gamma}_\mu \hat{A}_\mu,$$

перепишем формулу (3.12) так

$$\hat{\Gamma}_{int} = -e \hat{N}(\hat{\bar{\psi}} \hat{A} \hat{\psi}). \quad (3.13)$$

Замечание. В дальнейшем операторы и векторы состояний будем брать в представлении взаимодействия, так как в этом представлении перестановочные соотношения для двух операторов, взятых в различные моменты времени, будут иметь тот же вид, что и в теории свободных волновых полей. Во всех остальных представлениях эти соотношения имеют более сложный вид.

2. *Взаимодействие заряженного скалярного поля с электромагнитным полем.* Плотность лагранжиана заряженного скалярного поля имеет вид

$$\mathcal{L}_m = -c^2 \left\{ \sum_{\nu} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} + \mu^2 \varphi^* \varphi \right\}. \quad (3.14)$$

Для получения полного лагранжиана рассматриваемой системы полей заменим в выражении (3.14) оператор $\partial/\partial x_\mu$ оператором D_μ и добавим к \mathcal{L}_m лагранжиан электромагнитного поля. В результате получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{8\pi} \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right)^2 - c^2 \mu^2 \varphi^* \varphi - \\ & - c^2 \sum_{\nu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} - ie A_\nu \frac{\varphi}{\hbar c} \right) \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\nu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \varphi^* \right), \quad (3.15) \end{aligned}$$

или

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_v + \mathcal{L}_{int},$$

где \mathcal{L}_v — плотность лагранжиана свободного электромагнитного поля,

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{iec}{\hbar} \sum_v A_v \left(\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_v} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_v} \varphi^* \right) - \frac{e^2}{\hbar^2} \sum_v A_v^2 \varphi \varphi^* \quad (3.16)$$

— плотность лагранжиана взаимодействия. Варьируя \mathcal{L} по A_μ , получаем уравнение Даламбера

$$\square^2 A_\mu = -4\pi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}, \quad (3.17)$$

а при варьировании по φ и φ^* находим уравнения Клейна—Гордона с учетом взаимодействия с электромагнитным полем. Согласно уравнению (3.17) плотность электромагнитного тока равна

$$j_\mu = c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}. \quad (3.18)$$

Подставляя сюда выражение для \mathcal{L} из формулы (3.15), находим

$$j_v = \frac{iec^2}{\hbar} \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_v} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x_v} \varphi^* \right) - 2 \frac{e^2 c}{\hbar^2} A_v \varphi \varphi^*. \quad (3.19)$$

Учитывая (3.19), выражение для плотности лагранжиана взаимодействия (3.16) можно преобразовать к виду

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{c} \sum_v A_v j_v + \frac{e^2}{\hbar^2} \sum_v A_v^2 \varphi \varphi^*, \quad (3.20)$$

где j_v определяется формулой (3.19).

3. *Взаимодействие электромагнитного поля с нуклонным и заряженным скалярным полями.* Рассмотрим теперь взаимодействие трех полей: нуклонного поля, заряженного скалярного поля и электромагнитного поля. В случае прямой связи член, описывающий взаимодействие нуклонного поля со скалярным, обычно берут в виде $iG(\bar{\psi}\psi\varphi + \bar{\psi}\psi\varphi^*)$. Наличие электромагнитного поля учитывается заменой $\partial/\partial x_\mu$ на D_μ в выражениях для плотности лагранжианов свободных полей¹.

¹ Подобная замена допустима только в лагранжианах, дающих волновые уравнения 1-го порядка (Дирака и Кеммера). — *Прим. ред.*

В случае взаимодействия с производной, которое описывается членом вида

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{F}{\mu} \sum_{\nu} \left(\bar{\psi} \hat{\gamma}_{\nu} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\nu}} + \bar{\psi} \hat{\gamma}_{\nu} \psi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_{\nu}} \right), \quad (3.21)$$

также необходимо произвести замену $\partial/\partial x_{\mu}$ на D_{μ} и в лагранжиане взаимодействия (3.21). В результате этого в выражении для плотности лагранжиана взаимодействия возникает член, включающий волновые функции трех полей:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{F}{\mu} \frac{ie}{\hbar c} \sum_{\nu} (\bar{\psi} \hat{\gamma}_{\nu} \psi A_{\nu}) (\varphi - \varphi^*). \quad (3.22)$$

В теории псевдоскалярного мезонного поля вместо формулы (3.22) получим

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{F}{\mu} \cdot \frac{ie}{\hbar c} \sum_{\nu} (\bar{\psi} \hat{\gamma}_{5} \hat{\gamma}_{\nu} \psi A_{\nu}) (\varphi - \varphi^*). \quad (3.23)$$

Замечание. При переходе к квантовой теории поля необходимо произвести упорядочение (т. е. нормализацию) оператора плотности энергии взаимодействия, что обеспечивает обращение в нуль соответствующих вакуумных токов.

§ 4. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ. S-МАТРИЦА

Найдем решение уравнения Шредингера в представлении взаимодействия

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_{\alpha}(t)}{\partial t} = \hat{H}_{al}(t) \Phi_{\alpha}(t), \quad (4.1)$$

где \hat{H}_{al} — оператор квазиэнергии взаимодействия. Интегрируя это уравнение, получим

$$\Phi_{\alpha}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}_{al}(t_1) \Phi_{\alpha}(t_1) dt_1 + \Phi_{\alpha}(t_0). \quad (4.2)$$

Будем решать интегральное уравнение (4.2) методом последовательных приближений, в нулевом приближении $\Phi_{\alpha}(t) = \Phi_{\alpha}(t_0)$. Подставляя это значение $\Phi_{\alpha}(t)$ в правую часть (4.2), находим второе приближение

$$\Phi_{\alpha}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}_{al}(t_1) dt_1 \Phi_{\alpha}(t_0) + \Phi_{\alpha}(t_0). \quad (4.3)$$

Подставляя $\Phi_\alpha(t)$ из формулы (4.3) снова в правую часть (4.2), находим второе приближение

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(t) = & \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t \hat{H}_{\alpha i}(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \hat{H}_{\alpha i}(t_2) dt_2 \Phi_\alpha(t_0) + \\ & + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}_{\alpha i}(t_1) dt_1 \Phi_\alpha(t_0) + \Phi_\alpha(t_0) \end{aligned} \quad (4.4)$$

и т. д. В итоге точное решение уравнения (4.1) можно представить в виде ряда

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}_{\alpha i}(t_1) \hat{H}_{\alpha i}(t_2) \dots \\ \dots \hat{H}_{\alpha i}(t_n) \Phi_\alpha(t_0). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Отсюда, подставляя $\Phi_\alpha(t)$ в формулу (4.1), убеждаемся, что последнее уравнение удовлетворяется. Формулу (4.5) можно переписать так

$$\Phi_\alpha(t) = \hat{S}_\alpha(t, t_0) \Phi_\alpha(t_0), \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{S}_\alpha(t, t_0) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}_{\alpha i}(t_1) \dots \hat{H}_{\alpha i}(t_n). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Оператор $\hat{S}_\alpha(t, t_0)$, введенный Дайсоном, является унитарным и называется S_α -матрицей. Он преобразует вектор заданного начального состояния $\Phi_\alpha(t_0)$ в момент времени t_0 в вектор конечного состояния $\Phi_\alpha(t)$ в момент времени t ; очевидно, $\hat{S}_\alpha(t_0, t_0) = 1$ и $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_{n-1} \geq \dots \geq t_0$. Преобразуем входящие в формулу (4.7) кратные интегралы. Рассмотрим сначала член $S_{\alpha 2}(t)$:

$$\hat{S}_{\alpha 2}(t) = - \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{\alpha i}(t_1) \hat{H}_{\alpha i}(t_2), \quad (4.8)$$

здесь интегрирование производится по треугольнику ABC (рис. 3).

Поменяем в формуле (4.8) t_1 на t_2 и обратно t_2 на t_1 , тогда получим

$$\hat{S}_{\alpha 2}(t) = - \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}_{\alpha i}(t_2) \hat{H}_{\alpha i}(t_1). \quad (4.9)$$

Здесь интегрирование производится по треугольнику ABD . Если бы $\hat{H}_{\alpha i}(t_1)$ и $\hat{H}_{\alpha i}(t_2)$ коммутировали, то подынтегральные выражения в формулах (4.8) и (4.9) совпали бы

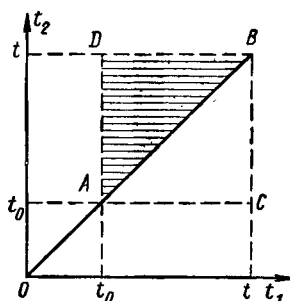


Рис. 3

и $\hat{S}_{\alpha 2}(t)$ можно было бы представить как половину интеграла по квадрату $ACBD$. Но в общем случае $\hat{H}_{\alpha i}(t_1)$ не коммутирует с $\hat{H}_{\alpha i}(t_2)$ и поэтому требуется ввести хронологический оператор \hat{P} , выражаемый формулой

$$\hat{P} [\hat{H}_{\alpha i}(t_1) \hat{H}_{\alpha i}(t_2)] = \begin{cases} \hat{H}_{\alpha i}(t_1) \hat{H}_{\alpha i}(t_2), & \text{если } t_1 > t_2, \\ \hat{H}_{\alpha i}(t_2) \hat{H}_{\alpha i}(t_1), & \text{если } t_2 > t_1. \end{cases} \quad (4.10)$$

Учитывая определение (4.10), преобразуем формулу (4.8) к виду

$$\hat{S}_{\alpha 2}(t) = - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \hat{P} [\hat{H}_{\alpha i}(t_1) \hat{H}_{\alpha i}(t_2)].$$

Аналогично для k -го члена в (4.7) получаем

$$\hat{S}_{\alpha k}(t) = \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_k \hat{P} [\hat{H}_{\alpha i}(t_1) \hat{H}_{\alpha i}(t_2) \dots \hat{H}_{\alpha i}(t_k)].$$

В результате для S_α -матрицы получаем

$$\hat{S}_\alpha(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n \hat{P} [\hat{H}_{\alpha i}(t_1) \dots \hat{H}_{\alpha i}(t_n)]. \quad (4.11)$$

Обычно для применения полученных результатов используют так называемую адиабатическую гипотезу (Дайсон). Смысл этой гипотезы состоит в следующем. Начальный момент времени t_0 устремляем к $-\infty$, а конечный момент времени t к $+\infty$. Причем для усреднения членов, гармонически зависящих от времени t и t_0 , оператор энергии взаимодействия умножаем на сходящийся множитель вида $e^{-\lambda|t|}$, который после всех преобразований стремим к единице (что достигается предельным переходом $\lambda \rightarrow 0$). Так как при $t \rightarrow \pm\infty$ оператор $e^{-\lambda|t|} \hat{H}_i = 0$, то, следовательно, в адиабатической гипотезе векторы начального и конечного состояний являются собственными векторами невозмущенного оператора энергии \hat{H}_0 . Указанные векторы будем называть векторами состояний систем свободных или «голых» частиц. Принятые предположения справедливы, если рассеяние частиц не приводит к возникновению или распаду связанных состояний. Уточним, что речь идет о связанных состояниях, которые обусловлены взаимодействием «квантованных» полей. Связанные состояния, обусловленные внешними полями, из рассмотрения не выбрасываются.

Расчеты в квантовой электродинамике, основанные на адиабатической гипотезе, хорошо согласуются с экспериментом. Однако в реальной действительности невозможно адиабатически или каким-либо другим способом выключить, а затем снова включить взаимодействие между полями. Поэтому адиабатическая гипотеза является просто удобным математическим приемом.

Согласно адиабатической гипотезе рассеяние происходит следующим образом:

1. В момент $t = -\infty$ система свободных частиц (фотонов, электронов, позитронов), находящихся далеко друг от друга и не взаимодействующих между собой [$e^{-\lambda|t|} \hat{H}_i = 0$], описывается вектором состояния $\Phi_{\alpha i}(-\infty)$ — собственным вектором оператора энергии \hat{H}_0 . Поэтому под $\Phi_{\alpha i}(-\infty)$, который не зависит от времени, можно понимать как вектор в представлении взаимодействия, так и вектор в представлении Гейзенберга с $\hat{H} = \hat{H}_0$.

2. Затем адиабатически включается взаимодействие,

что приводит к взаимодействию частиц с вакуумом, в результате чего частицы обволакиваются «шубой» из виртуальных бозонов и пар фермион — антифермион. «Голая» частица, одетая в такую шубу, интерпретируется как физически реальная частица, энергия и импульс которой удовлетворяют соотношению $p^2 + \chi^2 = 0$. В момент времени, когда взаимодействие между частицами можно считать все еще очень малым, а сами частицы достаточно удалены друг от друга, состояние системы физических («одетых») частиц (с теми же импульсами и спинами) описывается вектором состояния $\Phi_\alpha(t_0) = \hat{S}_\alpha(t_0, -\infty)\Phi_{\alpha i}(-\infty)$.

3. При полном включении взаимодействия происходит рассеяние частиц. Начиная с момента времени $t = T + t_0$, частицы, удаляясь друг от друга, почти не взаимодействуют между собой, но все еще взаимодействуют с вакуумом и остаются еще облаченными в шубы.

Состояние системы физически реальных (одетых) частиц после рассеяния описывается вектором состояния $\Phi_\alpha(t) = \hat{S}_\alpha(t, -\infty)\Phi_{\alpha i}(-\infty)$.

4. В момент времени $t = +\infty$ взаимодействие адиабатически выключается и частицы, теряя свои шубы и удаляясь друг от друга, становятся снова свободными (голыми). Состояние такой системы голых частиц описывается вектором состояния $\Phi_{\alpha f}(+\infty)$.

Вектор конечного состояния системы $\Phi_{\alpha f}(+\infty)$ имеет один и тот же вид как в представлении взаимодействия, так и в представлении Гейзенберга. Рассмотренный процесс взаимодействия частиц должен протекать так, чтобы энергия системы частиц в конечный момент времени равнялась энергии системы частиц в начальном состоянии при $t = -\infty$. Векторы состояния $\Phi_{\alpha i}(-\infty)$ и $\Phi_{\alpha f}(+\infty)$ связаны соотношением

$$\Phi_{\alpha f}(+\infty) = \hat{S}_\alpha(+\infty, -\infty)\Phi_{\alpha i}(-\infty), \quad (4.12)$$

где согласно формуле (4.11) для $\hat{S}_\alpha(+\infty, -\infty)$ имеем

$$\begin{aligned} & \hat{S}_\alpha(+\infty, -\infty) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^n} \cdot \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \hat{P} [\hat{H}_{\alpha i}(t_1) \dots \hat{H}_{\alpha i}(t_n)]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Так как оператор энергии взаимодействия равен

$$\hat{H}_{\alpha i}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Gamma}_{\alpha i}(x) dV, \quad (4.14)$$

то, обозначая $d^4x = c dt \cdot dV$, преобразуем формулу (4.13) к виду

$$\begin{aligned} & \hat{S}_\alpha(+\infty, -\infty) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar c}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n \hat{P} [\hat{\Gamma}_{\alpha i}(x_1) \dots \hat{\Gamma}_{\alpha i}(x_n)]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Матрицу $\hat{S}_\alpha(+\infty, -\infty)$, называемую матрицей рассеяния или S_α -матрицей, ввел Уилер в 1937 г., а начало ее применению положил Гейзенберг (1943 г.). Квадрат матричного элемента

$$S_{i \rightarrow f} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} (\tilde{\Phi}_{\alpha f}, \hat{S}_\alpha \Phi_{\alpha i}) \quad (4.16)$$

дает вероятность перехода системы из начального состояния $\Phi_{\alpha i}$ в некоторое конечное состояние $\tilde{\Phi}_{\alpha f}$.

Если система состоит из взаимодействующих между собой электромагнитного и электронно-позитронного полей, то оператор плотности квазиэнергии взаимодействия равен

$$\hat{\Gamma}_{\alpha i}(x) = -e\hat{N} \int \int d^4y d^4z f_\alpha(x, y, z) \hat{\psi}(z) \hat{A}(y) \hat{\psi}(z), \quad (4.17)$$

где $\hat{A} = \hat{\gamma}_\mu \hat{A}_\mu$. Множитель \hat{A} включен в нормальное произведение, так как относительный порядок множителей $\hat{\psi} \hat{\gamma}_\mu \hat{\psi}$ и $\hat{A}_\mu(x)$ несуществен, ибо они коммутируют.

Вместо хронологического оператора \hat{P} введем хронологический оператор \hat{T} , действие которого сводится к упорядочению всех множителей в произведении операторов таким образом, чтобы для любого оператора все операторы, взятые в более ранние моменты времени, находились справа от него, а все операторы, взятые в более поздние моменты, находились слева от него; знак полученного упорядоченного произведения операторов должен быть положительным, если в процессе упорядочения совершается четное число перестановок электронно-позитронных операторов, и отрицательным, если — нечетное. Таким образом, если $t_1 > t_n > \dots > t_2$, то

$$\hat{T} [\hat{A}_1(t_1) \hat{A}_2(t_2) \dots \hat{A}_n(t_n)] = \delta_p \hat{A}_1(t_1) \hat{A}_n(t_n) \dots \hat{A}_2(t_2), \quad (4.18)$$

где $\delta_p = \pm 1$. Итак, T -произведение отличается от P -произведения множителем δ_p , который равен $+1$, если в равенстве (4.18) совершается четное число перестановок Фер-

ми-операторов, и равен -1 , если n — нечетное. Учитывая формулы (4.17) и (4.18), S_α -матрицу можно представить в виде

$$\hat{S}_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ie}{\hbar c} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n \int_{-\infty}^{\infty} d^4y_1 \dots$$

$$\dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4y_n \int_{-\infty}^{\infty} d^4z_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4z_n \prod_i f_\alpha(x_i, y_i, z_i) \hat{T} \times$$

$$\times \{ \hat{N}(\hat{\psi}(x_1) \hat{A}(y_1) \hat{\psi}(z_1)) \dots \hat{N}(\hat{\psi}(z_n) \hat{A}(y_n) \hat{\psi}(z_n)) \}. \quad (4.19)$$

Здесь вместо \hat{P} -оператора поставлен \hat{T} -оператор, так как между ними теперь нет разницы ввиду того, что операторы Ферми входят в S -матрицу всегда парами, в которых оба множителя зависят от одного и того же времени.

§ 5. ТЕОРЕМЫ ВИКА

Рассмотрим операторное выражение

$$\hat{C} = \hat{T}(\hat{A}\hat{B}) - \hat{N}(\hat{A}\hat{B}), \quad (5.1)$$

где \hat{A} и \hat{B} — два произвольных оператора, представляющих собой суперпозиции операторов рождения и поглощения частиц. Если операторы \hat{A} и \hat{B} в произведении $\hat{A}\hat{B}$ уже упорядочены по времени справа налево в порядке возрастания t , то выражение (5.1) можно переписать в виде

$$\hat{C} = \hat{A}\hat{B} - \hat{N}(\hat{A}\hat{B}). \quad (5.2)$$

Если \hat{A} — оператор рождения частицы, а \hat{B} — оператор поглощения частицы, то $\hat{N}(\hat{A}\hat{B}) = \hat{A}\hat{B}$ и $\hat{C} = 0$; если же \hat{A} — оператор поглощения частицы, а \hat{B} — оператор ее рождения, то $\hat{N}(\hat{A}\hat{B}) = \pm \hat{B}\hat{A}$, причем в последнем равенстве надо взять знак плюс, если \hat{A} и \hat{B} — операторы Бозе, и знак минус, если эти операторы являются Ферми-операторами. Итак, если \hat{A} и \hat{B} — операторы Бозе, то \hat{C} — коммутатор этих операторов, если же \hat{A} и \hat{B} — операторы Ферми, то \hat{C} — антикоммутатор. В обоих случаях действие оператора \hat{C} на вектор состояния сводится

к умножению его на некоторое число, которое будем называть сверткой или связкой операторов \hat{A} и \hat{B} . Связку операторов \hat{A} и \hat{B} обозначим через $\hat{A}^{(1)}\hat{B}^{(1)}$ или $\overline{\hat{A}\hat{B}}$. Таким образом, можно написать

$$\hat{T}(\hat{A}\hat{B}) - \hat{N}(\hat{A}\hat{B}) = \overline{\hat{A}\hat{B}}. \quad (5.3)$$

Имеют место следующие теоремы.

Первая теорема Вика. T -произведение n линейных операторов равно сумме их N -произведений со всеми возможными комбинациями свертков (включая и член без свертков), т. е.

$$\begin{aligned} \hat{T}(\hat{A}_1 \hat{A}_2 \dots \hat{A}_n) = & \hat{N}(\hat{A}_1 \hat{A}_2 \dots \hat{A}_n) + \hat{N}(\hat{A}_1^{(1)} \hat{A}_2^{(1)} \dots \hat{A}_n) + \\ & + \hat{N}(\hat{A}_1^{(1)} \hat{A}_2 \hat{A}_3^{(1)} \dots \hat{A}_n) + \dots + \\ & + \hat{N}\left(\hat{A}_1^{(1)} \hat{A}_2^{(2)} \hat{A}_3^{(2)} \dots \hat{A}_{n-2}^{(\frac{n}{2})} \hat{A}_{n-1}^{(1)} \hat{A}_n^{(\frac{n}{2})}\right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь различные цифры сверху обозначают различные свертки. Если сворачиваются операторы Бозе, то их можно просто поставить рядом. Сворачиваемые операторы Ферми можно поставить рядом, умножив предварительно N -произведение на δ_p , где $\delta_p = 1$, если p -четное число произведенных при этом парных перестановок операторов Ферми, и $\delta_p = -1$, если p — нечетное число таких перестановок.

Так, например, если $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{A}_5, \hat{A}_6$ — операторы Ферми, то

$$\hat{N}(\hat{A}_1^{(1)} \hat{A}_2 \hat{A}_3^{(2)} \hat{A}_4^{(2)} \hat{A}_5^{(1)} \hat{A}_6) = -(\hat{A}_1^{(1)} \hat{A}_5^{(1)})(\hat{A}_3^{(2)} \hat{A}_4^{(2)}) \hat{N}(\hat{A}_2 \hat{A}_6).$$

Доказательство. Если произвести в каждом члене формулы (5.4) одновременно одинаковые перестановки сомножителей, то от этого равенство не нарушится. Переставим множители в членах формулы (5.4) так, чтобы в левой ее части произведение операторов было упорядочено по времени, т. е. чтобы операторы были расположены в порядке возрастания времени, если двигаться справа налево. При этом символ T -произведения в левой части (5.4) можно опустить.

Расположим теперь операторы в левой части (5.4) таким образом, чтобы все операторы поглощения были справа от операторов рождения, т. е. N -упорядочим левую часть (5.4). Для этого самый левый N -неупорядоченный оператор рожде-

ния будем последовательно переставлять со всеми операторами поглощения, которые стоят левее этого оператора. При этом в соответствии с формулой

$$\begin{aligned} \hat{A} \hat{B}^+ &= \hat{T} (\hat{A} \hat{B}^+) = \hat{N} (\hat{A} \hat{B}^+) + \hat{A}^{(1)} \hat{B}^{+(1)} = \\ &= \pm \hat{B}^+ \hat{A} + \hat{A}^{(1)} \hat{B}^{+(1)} \end{aligned} \quad (5.5)$$

возникнут дополнительные члены со свертками между переставляемыми операторами. Продолжая подобную процедуру упорядочения и с другими неупорядоченными операторами испускания, в конечном итоге представим исходное T -произведение в виде суммы N упорядоченных произведений операторов. Такие N -произведения могут иметь как положительный, так и отрицательный знак, но если под символами N -произведений поставить множители так, чтобы они снова стали T -упорядоченными, то все N -произведения получат положительный знак.

Таким образом, мы представили T -произведение в виде суммы N -произведений, однако в эту сумму войдут только члены со всеми возможными комбинациями сверток между парами N -неупорядоченных операторов.

Так как свертки между N -упорядоченными операторами, которые являются к тому же T -упорядоченными, равны нулю, то можно считать, что в правую часть равенства входят члены со всеми возможными комбинациями сверток между парами (как N -неупорядоченных, так и N -упорядоченных) операторов. Этим первая теорема доказана полностью.

Определение. T -произведение

$$\hat{T} \{ \hat{N} (\hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3) \dots \hat{N} (\hat{A}_4 \hat{A}_5 \hat{A}_6) \},$$

множители которого являются N -произведениями, будем называть смешанным T -произведением.

Вторая теорема Вика. Смешанное T -произведение можно разложить на сумму N -произведений аналогично формуле (5.4), но при этом отсутствуют члены со свертками операторов, входящих в одно и то же нормальное произведение.

Например, при разложении произведения

$$\hat{T} \{ \hat{A} \hat{B} \hat{N} (\hat{C} \hat{D} \hat{E}) \dots \hat{Z} \}$$

отсутствуют члены со свертками

$$\hat{C}^{(a)} \hat{D}^{(a)}, \quad \hat{C}^{(a)} \hat{E}^{(a)}, \quad \hat{D}^{(a)} \hat{E}^{(a)}.$$

При доказательстве теоремы не нужно менять местами операторы, стоящие под знаком одного и того же N -произведения, ибо эти операторы уже N -упорядочены, а поэтому члены со свертками таких операторов должны быть опущены.

§ 6. ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ЧЛЕНОВ S -МАТРИЦЫ. ГРАФЫ ФЕЙНМАНА

В квантовой электродинамике отдельные члены S -матрицы являются интегралами от смешанных T -произведений операторов $\hat{\psi}$, $\hat{\bar{\psi}}$ и \hat{A} . Используя вторую теорему Вика, эти произведения можно представить в виде суммы нормальных произведений тех же операторов с соответствующими множителями. Каждому такому нормальному произведению можно сопоставить граф (диаграмму) Фейнмана. Методика построения графов Фейнмана заключается в следующем. Четырехмерные векторы x_1, x_2, \dots, x_n , по которым в S -матрице производится интегрирование, на графе изображаются точками, которые называются вершинами (или узловыми точками) графа.

При составлении графов Фейнмана учитывается, что

$$\hat{\psi} = \hat{u} + \hat{v}^+, \quad \hat{\bar{\psi}} = \hat{u}^+ + \hat{v}, \quad \hat{A} = \hat{a}^+ + \hat{a},$$

где $\hat{u}^+, \hat{v}^+, \hat{a}^+$ — операторы рождения соответственно электронов, позитронов и фотонов; $\hat{u}, \hat{v}, \hat{a}$ — операторы уничтожения соответственно электронов, позитронов и фотонов.

Свертка операторов Ферми $\hat{\psi}(x_i)$ и $\hat{\bar{\psi}}(x_m)$ изображается сплошной прямой линией, соединяющей вершины x_i и x_m и направленной от точки x_i к точке x_m . Эта линия, очевидно, описывает процесс рождения электрона в точке x_i и поглощения его в точке x_m или процесс рождения позитрона в точке x_m с последующим его поглощением в точке x_i . Свертке операторов Бозе $\hat{A}(x_i)$ и $\hat{A}(x_m)$ сопоставим пунктирную линию, соединяющую точки x_i и x_m . Такая линия изображает процесс рождения фотона в одной вершине с последующим поглощением его в другой вершине. Оператору $\hat{\psi}(x_i)$ сопоставляется сплошная линия, выходящая из точки x_i и уходящая на бесконечность. Эта линия описывает процесс рож-

¹ В следующем параграфе будет показано, что свертка одинаковых операторов Ферми [например, $\hat{\psi}(x_i)$ и $\hat{\bar{\psi}}(x_m)$] равна нулю. Поэтому таким сверткам мы не сопоставляем никаких линий.

дения свободного электрона или процесс поглощения свободного позитрона. Свободный оператор $\hat{\psi}(x_i)$ изображается сплошной линией, приходящей из бесконечности в точку x_i . Такая линия соответствует процессу поглощения свободного электрона или процессу излучения свободного позитрона. Оператор $\hat{A}(x_i)$ обозначим пунктирной линией, выходящей из точки x_i и уходящей на бесконечность. Эта линия изображает процесс поглощения или рождения свободного фотона. Пунктирной линией, выходящей из вершины x_i на бесконечность, обозначим также «внешнее» электромагнитное поле. Как видно из формулы (4.19), из каждой вершины графа выходит одна фотонная и две электронные линии. Члену n S -матрицы соответствуют графы с n вершинами. Так как в электродинамике n -й член пропорционален множителю $\left(\frac{e}{\hbar c}\right)^n = \left(\frac{1}{137}\right)^n$, то полученные от него матричные элементы также будут пропорциональными $\left(\frac{e}{\hbar c}\right)^n$.

Графы, изображающие такие процессы, называются графами n -го порядка. Таким образом, графы с n вершинами — это графы n -го порядка. Один и тот же граф, соответствующий некоторому нормальному произведению операторов полей, может описывать ряд различных процессов рассеяния.

Члены, графы Фейнмана которых отличаются только перестановкой индексов вершин, называются эквивалентными. Эквивалентные произведения описывают одну и ту же совокупность процессов и равны между собой. Второму члену S -матрицы соответствует шесть различных графов Фейнмана второго порядка, изображенных на рис. 4.

На рис. 5 изображено 15 графов, описывающих все эффекты третьего порядка. На рис. 4 и 5 с графами приведены соответствующие им операторные выражения.

Кроме диаграмм, представленных на рис. 4, б—д, следует взять еще диаграммы, в которых вершины 1 и 2 переставлены. Сумма матричных элементов, соответствующих двум топологически эквивалентным диаграммам, равна удвоенному значению матричного элемента, соответствующего одной из упомянутых диаграмм.

Заметим, что линия электрона ввиду закона сохранения заряда нигде не может обрываться, поэтому число внешних электронных линий всегда должно быть четным.

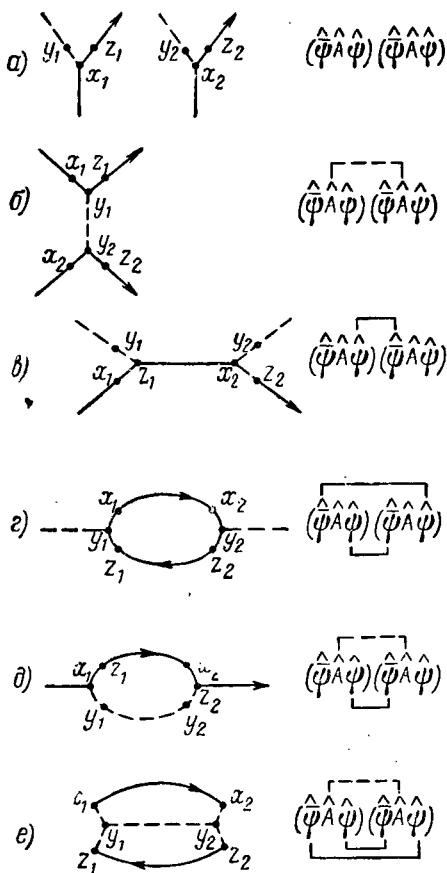


Рис. 4

- а) два одновременно происходящих эффекта первого порядка;
 б) рассеяние электрона на электроне (позитрона на позитроне), электрона на позитроне;
 в) рассеяние фотона электроном; излучение двух фотонов; двукратное рассеяние электрона (позитрона) во внешнем поле; тормозное излучение электрона (позитрона); образование пары; превращение пары в 2 фотона;
 г) взаимодействие фотона с электронно-позитронным вакуумом («собственная» энергия фотона);
 д) взаимодействие электрона с вакуумом электромагнитного поля («собственная» энергия электрона);
 е) виртуальное образование пары электрон — позитрон и фотона с последующим поглощением пары и фотона (переход-вакуум вакуум)

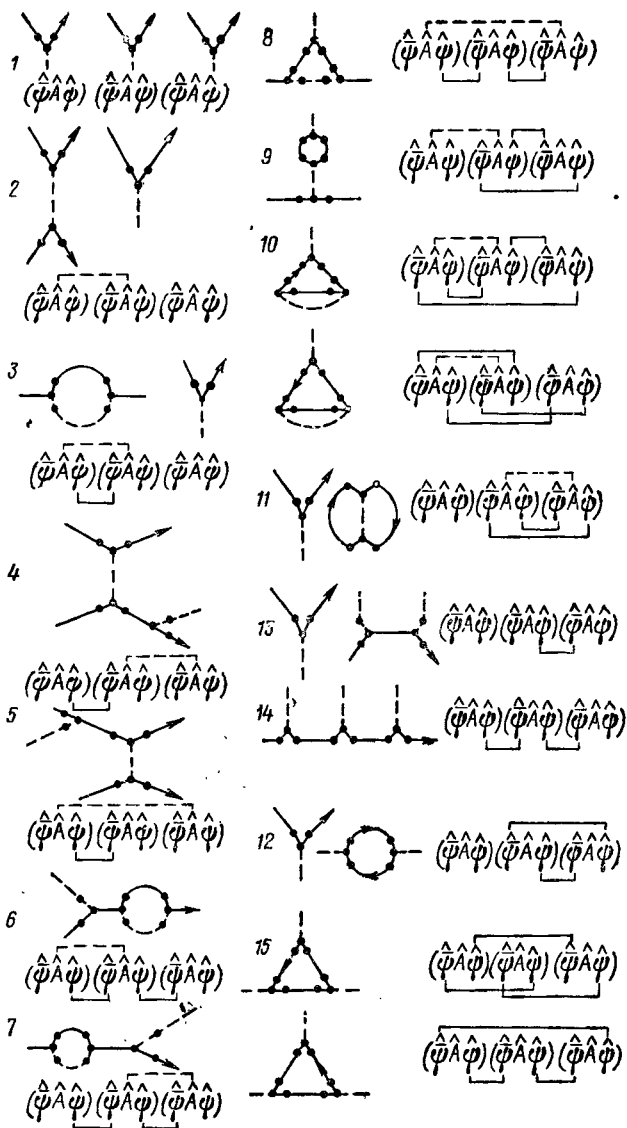


Рис. 5

1. Вычислим свертку операторов электромагнитного поля

$$\hat{A}_\mu^2(x) \hat{A}_\nu^2(x') = \hat{T} [\hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x')] - \hat{N} [\hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x')]. \quad (7.1)$$

Пусть $t > t'$. Рассматривая поле в бесконечном пространстве, разложим оператор \hat{A}_ν в интеграл Фурье (по плоским волнам):

$$\hat{A}_\nu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^4 \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k_{(0)}}} (\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}) d\mathbf{k} e_{\mathbf{k}\lambda}^{(\nu)}. \quad (7.2)$$

Можно показать что перестановочные соотношения для операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ и $\tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \tilde{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'}, \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] &= [\tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \tilde{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] = 0. \end{aligned}$$

Подставляя в формулу (7.1) выражение (7.2) для \hat{A}_ν и учитывая, что при $t > t'$ хронологический оператор \hat{T} можно опустить, получим

$$\begin{aligned} \hat{T} [\hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x')] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{(\mathbf{k})} \int_{(\mathbf{k}')} \sum_{\lambda, \lambda'} \frac{\hbar c}{\sqrt{k_{(0)} k'_{(0)}}} \times \\ &\times \{ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \mathbf{k}'\mathbf{x}')} + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \tilde{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{k}'\mathbf{x}')} + \\ &+ \tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{k}'\mathbf{x}')} + \tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda} \tilde{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \mathbf{k}'\mathbf{x}')} \} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \times \\ &\times e_{\mathbf{k}\lambda}^{(\mu)} e_{\mathbf{k}'\lambda'}^{(\nu)}; \quad (7.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{N} [\hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x')] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbf{k}} \int_{\mathbf{k}'} \sum_{\lambda, \lambda'} \frac{\hbar c}{\sqrt{k_{(0)} k'_{(0)}}} \times \\ &\times \{ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \mathbf{k}'\mathbf{x}')} + \tilde{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{k}'\mathbf{x}')} + \\ &+ \tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{x}' - \mathbf{k}\mathbf{x})} + \tilde{a}_{\mathbf{k}\lambda} \tilde{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \mathbf{k}'\mathbf{x}')} \} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \times \\ &\times e_{\mathbf{k}\lambda}^{(\mu)} e_{\mathbf{k}'\lambda'}^{(\nu)}. \quad (7.4) \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения для $\hat{T} [\hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x')]$ и $\hat{N} [\hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x')]$ в формулу (7.1), находим

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu^a(x) \hat{A}_\nu^a(x') = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbf{k}} \int_{\mathbf{k}'} \sum_{\lambda, \lambda'} \frac{\hbar c}{V k_{(0)} k'_{(0)}} (\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \tilde{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} - \tilde{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}) \times \\ \times e^{i(kx - k'x')} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' e_{\mathbf{k}\lambda}^{(\mu)} e_{\mathbf{k}'\lambda'}^{(\nu)}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Используя перестановочные соотношения для $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$, преобразуем формулу (7.5) к виду

$$\hat{A}_\mu^a(x) \hat{A}_\nu^a(x') = \frac{\hbar c}{(2\pi)^2} \int_{(\mathbf{k})} \sum_{\lambda} \frac{1}{k_{(0)}} e^{ik(x-x')} e_{\mathbf{k}\lambda}^{(\mu)} e_{\mathbf{k}\lambda}^{(\nu)} d\mathbf{k}, \quad (7.6)$$

но так как

$$\sum_{\lambda} e_{\mathbf{k}\lambda}^{(\mu)} e_{\mathbf{k}\lambda}^{(\nu)} = \delta_{\mu\nu}, \quad (7.7)$$

то формулу (7.6) можно переписать в виде

$$\hat{A}_\mu^a(x) \hat{A}_\nu^a(x') = \frac{\hbar c}{(2\pi)^2} \int_{(\mathbf{k})} \frac{1}{k_{(0)}} e^{ik(x-x')} d\mathbf{k} \delta_{\mu\nu} \quad (t > t'). \quad (7.8)$$

Если $t < t'$, то в выражении (7.3) необходимо переставить местами переменные без штрихов со штрихованными переменными. Учитывая это, получим в обоих случаях (для $t > t'$ и $t' > t$) следующую формулу для свертки:

$$\hat{A}_\mu^a(x) \hat{A}_\nu^a(x') = D^c(x-x') \cdot \delta_{\mu\nu}, \quad (7.9)$$

где

$$D^c(x) = \frac{\hbar c}{(2\pi)^2} \int e^{i(kr - \omega |t|)} \frac{d\mathbf{k}}{k_{(0)}} \quad (7.10)$$

— причинная функция.

Найдем среднее значение по вакууму от хронологического произведения двух операторов Бозе:

$$(\Phi_\nu, \hat{T} \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') \Phi_\nu) = \langle \hat{T} \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') \rangle_0, \quad (7.11)$$

где Φ_ν — вектор вакуумного состояния поля, т. е. такого состояния поля, в котором отсутствуют частицы (все числа

заполнения равны нулю). Согласно формуле (7.1) имеем

$$\langle \hat{T} \{ \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') \} \rangle_0 = \langle \hat{A}_\mu^a(x) \hat{A}_\nu^a(x') \rangle_0 + \langle \hat{N} \{ \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') \} \rangle_0. \quad (7.12)$$

Так как связка является c -числом, то

$$\langle \hat{A}_\mu^a(x) \hat{A}_\nu^a(x') \rangle_0 = \hat{A}_\mu^a(x) \hat{A}_\nu^a(x') = D^c(x-x') \delta_{\mu\nu}. \quad (7.13)$$

Вычислим второй член в формуле (7.12); согласно (7.2) имеем

$$\begin{aligned} \langle \hat{N} \{ \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') \} \rangle_0 &= \frac{\hbar c}{(2\pi)^2} \int_{(k)} \int_{(k')} \frac{1}{\sqrt{k_{(0)} k'_{(0)}}} \times \\ &\times \sum_{\lambda, \lambda'} \{ \langle \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda'} \rangle_0 e^{i(kx+k'x')} + \langle \tilde{a}_{k'\lambda'} \hat{a}_{k\lambda} \rangle_0 \times \\ &\times e^{i(kx-k'x')} + \langle \tilde{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda'} \rangle_0 e^{-i(kx-k'x')} + \\ &+ \langle \tilde{a}_{k\lambda} \tilde{a}_{k'\lambda'} \rangle_0 e^{-i(kx+k'x')} \} e_{\lambda}^{(\mu)} e_{\lambda'}^{(\nu)} dk dk'. \quad (7.14) \end{aligned}$$

Так как в состоянии вакуума числа поперечных фотонов равны нулю, то

$$\langle \tilde{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda} \rangle_0 = 0 \quad (\lambda = 1, 2).$$

Справедливы также формулы

$$\begin{aligned} \langle \tilde{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda'} \rangle_0 &= 0, \quad \langle \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda'} \rangle_0 = 0, \\ \langle \tilde{a}_{k\lambda} \tilde{a}_{k'\lambda'} \rangle_0 &= 0 \quad (\lambda, \lambda' = 1, 2). \end{aligned}$$

Предположим, что в общем случае

$$\langle \tilde{a}_{k_3} \hat{a}_{k_3} \rangle_0 = (k e_3)^2 \chi(k) \delta^3(k-k'), \quad (7.15)$$

где $\chi(k)$ — произвольная функция от k . Кроме того, предположим, что при всех λ выполняются соотношения

$$\langle \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda'} \rangle_0 = \langle \tilde{a}_{k\lambda} \tilde{a}_{k'\lambda'} \rangle_0 = 0.$$

Из формул второй главы [см. (5.15)] видим, что

$$\begin{aligned} (e_1, k) = (e_2, k) &= 0, \quad (e_3, k) = \frac{\omega}{c}, \quad (e_4, k) = i \frac{\omega}{c}, \\ (\hat{a}_{k_3} + i \hat{a}_{k_4}) \Phi &= 0, \quad \Phi^* (\tilde{a}_{k_3} + i \tilde{a}_{k_4}) = 0, \end{aligned}$$

а из формулы (7.15) следует

$$\begin{aligned} i \langle \tilde{a}_{k_3} \hat{a}_{k'3} \rangle_0 &= \langle \tilde{a}_{k_3} \hat{a}_{k'4} \rangle_0 = \langle \tilde{a}_{k_4} \hat{a}_{k'3} \rangle_0 = -i \langle \tilde{a}_{k_4} \hat{a}_{k'4} \rangle_0 = \\ &= i (ke_3)^2 \chi(k) \delta^3(k-k') = -i (ke_4)^2 \chi(k) \delta^3(k-k') = \\ &= (ke_3)(ke_4) \chi(k) \delta^3(k-k'). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Все полученные выше формулы можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle \tilde{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda'} \rangle_0 &= (ke_\lambda)(k'e_{\lambda'}) \chi(k) \delta^3(k-k'), \\ \langle \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k'\lambda'} \rangle_0 &= 0, \quad \langle \tilde{a}_{k\lambda} \tilde{a}_{k'\lambda'} \rangle_0 = 0 \\ &(\lambda, \lambda' = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Пользуясь формулами (7.17), преобразуем соотношение (7.14) к виду

$$\begin{aligned} &\langle \hat{N} \{ \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') \} \rangle_0 = \\ &= \frac{2\hbar c}{(2\pi)^2} \int \sum_{(k) \lambda, \lambda'} \frac{1}{k_{(0)}} (ke_\lambda)(k'e_{\lambda'}) \cos k(x-x') e_\lambda^{(\mu)} e_{\lambda'}^{(\nu)} \chi(k) dk, \end{aligned} \quad (7.18)$$

или, так как $e_\lambda^{(\mu)} e_{\lambda'}^{(\nu)} = \delta_{\mu\nu}$, то

$$\langle \hat{N} \{ \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') \} \rangle_0 = \frac{\hbar c}{2\pi^2} \int \frac{k_\mu k_\nu}{k_{(0)}} \cos k(x-x') \chi(k) dk. \quad (7.18')$$

Полагая

$$\Phi(x) = -\frac{2\hbar c}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{k_{(0)}} \cos kx \cdot \chi(k) dk, \quad (7.19)$$

перепишем формулу (7.18') в виде

$$\langle \hat{N} \{ \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') \} \rangle_0 = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \Phi(x-x'). \quad (7.18'')$$

Учитывая формулы (7.12), (7.13) и (7.18''), окончательно получим для $\langle \hat{T} \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') \rangle_0$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^c(x-x') &\equiv \langle \hat{T} \{ \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') \} \rangle_0 = D^c(x-x') \delta_{\mu\nu} + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \Phi(x-x'). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Второе слагаемое в правой части (7.20) обязано произвольности калибровки потенциалов. Если выбрать такую

калибровку, при которой $N_3 = N_0 = 0$, то оно обратится в нуль. Отметим однако, что физические величины не зависят от произвольной функции $\varphi(x)$. Это следует из свойства градиентной инвариантности этих величин.

2. Вычислим свертку операторов электронно-позитронного поля

$$\hat{\psi}_\alpha^a(x) \hat{\psi}_\beta^a(x') = \hat{T} [\hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta(x')] - \hat{N} [\hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta(x')]. \quad (7.21)$$

Пусть $t > t'$. Рассматривая поле в бесконечном пространстве, разложим $\hat{\psi}$ и $\hat{\bar{\psi}}$ в интеграл Фурье по плоским волнам:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_j(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=1}^4 \hat{A}_{\mathbf{k}s} c_{j,\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}x} d\mathbf{k}, \\ \hat{\bar{\psi}}_j(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=1}^4 \hat{A}_{\mathbf{k}s}^+ \bar{c}_{j,\mathbf{k}s} e^{-i\mathbf{k}x} d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Можно показать, что в данном случае операторы $\hat{A}_{\mathbf{k}s}$ и $\hat{A}_{\mathbf{k}s}^+$ подчиняются следующим соотношениям коммутации:

$$\begin{aligned} [\hat{A}_{\mathbf{k}s}, \hat{A}_{\mathbf{k}'s'}^+]_+ &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{ss'}, \\ [\hat{A}_{\mathbf{k}s}, \hat{A}_{\mathbf{k}'s'}]_+ &= [\hat{A}_{\mathbf{k}s}^+, \hat{A}_{\mathbf{k}'s'}^+]_+ = 0. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (7.22) для $\hat{\psi}$ и $\hat{\bar{\psi}}$ в формулу (7.21), получаем

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_\alpha^a(x) \hat{\psi}_\beta^a(x') &= \hat{T} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{s=1}^4 \sum_{s'=1}^4 \hat{A}_{\mathbf{k}s}^+ \hat{A}_{\mathbf{k}'s'} \bar{c}_{\alpha,\mathbf{k}s} \times \\ &\quad \times c_{\beta,\mathbf{k}'s'} e^{-i(\mathbf{k}x - \mathbf{k}'x')} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' - \frac{1}{(2\pi)^3} \times \\ &\quad \times \hat{N} \int \int \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{s=1}^4 \sum_{s'=1}^4 \hat{A}_{\mathbf{k}s}^+ \hat{A}_{\mathbf{k}'s'} \bar{c}_{\alpha,\mathbf{k}s} c_{\beta,\mathbf{k}'s'} e^{-i(\mathbf{k}x - \mathbf{k}'x')} d\mathbf{k} d\mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Так как $\hat{A}_{\mathbf{k}s}^+$ ($s = 1, 2$) — операторы рождения электронов,

\hat{A}_{ks} ($s=3,4$) — операторы рождения позитронов, то формулу (7.23) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_\alpha^a(x) \hat{\Psi}_\beta^a(x') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_k \int_{k'} \sum_{s=1}^4 \sum_{s'=1}^4 \hat{A}_{ks}^+ \hat{A}_{k's'} \bar{c}_{\alpha, ks} \times \\ &\times c_{\beta, k's'} e^{-i(kx - k'x')} dk dk' - \frac{1}{(2\pi)^3} \times \\ &\times \int_k \int_{k'} \sum_{s=1}^2 \sum_{s'=1}^4 \hat{A}_{ks}^+ \hat{A}_{k's'} \bar{c}_{\alpha, ks} c_{\beta, k's'} e^{-i(kx - k'x')} dk dk' + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int_k \int_{k'} \sum_{s'=1}^4 \sum_{s=3}^4 \hat{A}_{k's'} \hat{A}_{ks}^+ \bar{c}_{\alpha, ks} c_{\beta, k's'} e^{-i(kx - k'x')} dk dk'. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Учитывая перестановочные соотношения \hat{A}_{ks} , из формулы (7.24) получаем

$$\hat{\Psi}_\alpha^a(x) \hat{\Psi}_\beta^a(x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{(k)} \sum_{s=3}^4 \bar{c}_{\alpha, ks} c_{\beta, ks} e^{-ik(x-x')} dk \quad (\omega < 0). \quad (7.25)$$

Если же $t < t'$, то аналогично находим

$$\hat{\Psi}_\alpha^a(x) \hat{\Psi}_\beta^a(x') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_k \sum_{s=1}^2 c_{\alpha, ks} c_{\beta, ks} e^{-ik(x'-x)} dk \quad (\omega > 0). \quad (7.26)$$

Вычислим суммы $\sum_{s=3}^4 \bar{c}_{\alpha, ks} c_{\beta, ks}$ и $\sum_{s=1}^2 \bar{c}_{\alpha, ks} c_{\beta, ks}$, входящие в формулы (7.25) и (7.26); для этого рассмотрим уравнение Дирака

$$-i\hbar\psi - i\hbar c(\hat{\alpha}\nabla)\psi + mc^2\hat{\beta}\psi = 0. \quad (7.27)$$

Подставляя в уравнение (7.27) разложение ψ в интеграл Фурье

$$\psi_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_k \sum_{s=1}^4 c_{\alpha, ks} e^{ikx} dk \hat{A}_{ks}, \quad (7.28)$$

где $k = \left(\mathbf{k}, i \frac{\omega}{c} \right)$ и $kx = \mathbf{k}\mathbf{r} - k_{(0)} x_{(0)} = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$, получим уравнение Дирака в импульсном пространстве

$$(\hat{\alpha}\mathbf{k} + \chi\hat{\beta}) c_{\alpha, ks} = \frac{\omega}{c} c_{\alpha, ks}, \quad (7.29)$$

где

$$\frac{|\omega|}{c} \sqrt{\mathbf{k}^2 + \chi^2}, \quad \chi = \frac{mc}{\hbar}.$$

Так как спиноры $c_{\alpha, k1}$ и $c_{\alpha, k2}$ относятся к состояниям с положительной энергией, а $c_{\alpha, k3}$ и $c_{\alpha, k4}$ — к состояниям с отрицательной энергией, то добавляя к правой и левой частям уравнения (7.29) выражение $\frac{|\omega|}{c} c_{\alpha, ks}$ и поделив полученное равенство на $2|\omega|$, имеем

$$\frac{\hat{\alpha}\mathbf{k} + \chi\hat{\beta} + \frac{|\omega|}{c}}{2 \frac{|\omega|}{c}} c_{\alpha, ks} = \begin{cases} c_{\alpha, ks}, & \text{если } \omega > 0 (s=1, 2), \\ 0, & \text{если } \omega < 0 (s=3, 4). \end{cases} \quad (7.30)$$

Аналогично находим

$$\frac{-\hat{\alpha}\mathbf{k} - \chi\hat{\beta} + \frac{|\omega|}{c}}{2 \frac{|\omega|}{c}} c_{\alpha, ks} = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega > 0 (s=1, 2), \\ c_{\alpha, ks}, & \text{если } \omega < 0 (s=3, 4). \end{cases} \quad (7.31)$$

Учитывая соотношение (7.30), можем написать

$$\sum_{s=1}^2 c_{\alpha, ks}^* c_{\beta, ks} = \sum_{s=1}^4 c_{\alpha, ks}^* \left\{ \sum_{\sigma} \left(\frac{\hat{\alpha}\mathbf{k} + \chi\hat{\beta} + \frac{|\omega|}{c}}{2 \frac{|\omega|}{c}} \right)_{\beta\sigma} c_{\sigma, ks} \right\}, \quad (7.32)$$

а согласно формуле ортонормировки

$$\sum_{s=1}^4 c_{\alpha, ks}^* c_{\beta, ks} = \delta_{\alpha\beta} \quad (7.33)$$

из формулы (7.32) получаем

$$\sum_{s=1}^2 c_{\alpha, ks}^* c_{\beta, ks} = \left(\frac{\hat{\alpha}\mathbf{k} + \chi\hat{\beta} + \frac{|\omega|}{c}}{2 \frac{|\omega|}{c}} \right)_{\beta\alpha}. \quad (7.34)$$

Умножая (7.34) на $i(\hat{\beta})_{\alpha\lambda}$, учитывая, что $\hat{\psi} = i\hat{\psi}^+\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}_k = i\hat{\alpha}_k\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}_4 = \hat{\beta}$, и суммируя по α , преобразуем формулу (7.34) к виду

$$\sum_{s=1}^2 \bar{c}_{\lambda, ks} c_{\beta, ks} = \frac{ic}{2|\omega|} (-i\hat{\gamma}_v k_v + \chi)_{\beta\lambda}. \quad (7.35)$$

Согласно уравнению (7.31) аналогично получаем

$$\sum_{s=3}^4 \bar{c}_{\lambda, ks} c_{\beta, ks} = \frac{ic}{2|\omega|} (i\hat{\gamma}_v k_v - \chi)_{\beta\lambda}. \quad (7.36)$$

Используя (7.35) и (7.36), преобразуем формулы (7.25) и (7.26) к виду

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_\alpha^a(x) \hat{\Psi}_\beta^a(x') &= \frac{ic}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{|\omega|} (i\hat{\gamma}_v k_v - \chi)_{\beta\alpha} e^{-ik(x-x')} dk = \\ &= \frac{i}{2(2\pi)^3} \left(\hat{\gamma}_v \frac{\partial}{\partial x'_v} - \chi \right)_{\beta\alpha} \int_{\mathbf{k}} \frac{e^{-ik(x-x')}}{\frac{|\omega|}{c}} dk \\ &\quad (\omega < 0, t > t'); \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_\alpha^a(x) \hat{\Psi}_\beta^a(x') &= -\frac{ic}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{|\omega|} (-i\hat{\gamma}_v k_v + \chi)_{\beta\alpha} e^{ik(x'-x)} dk = \\ &= \frac{i}{2(2\pi)^3} \left(\hat{\gamma}_v \frac{\partial}{\partial x'_v} - \chi \right)_{\beta\alpha} \int_{\mathbf{k}} \frac{e^{ik(x'-x)}}{\frac{|\omega|}{c}} dk \\ &\quad (\omega > 0, t < t'). \end{aligned} \quad (7.37')$$

Обе формулы (7.37) и (7.37') можно переписать так

$$\hat{\Psi}_\alpha^a(x) \hat{\Psi}_\beta^a(x') = -S_{\beta\alpha}^c(x' - x), \quad (7.38)$$

где

$$\begin{aligned} S^c(x) &= -i \left(\hat{\gamma}_v \frac{\partial}{\partial x'_v} - \chi \right) \Delta^c(x), \\ \Delta^c(x) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbf{k}} \frac{e^{ikr} e^{-i|\omega||t|}}{\frac{|\omega|}{c}} dk. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Аналогично можно показать что

$$\begin{aligned}\psi_{\beta}^a(x') \bar{\psi}_{\alpha}^a(x) &= S_{\beta\alpha}^c(x' - x), \\ \hat{\psi}_{\alpha}^a(x') \hat{\psi}_{\beta}^a(x) &= \hat{\bar{\psi}}_{\alpha}^a(x') \hat{\bar{\psi}}_{\beta}^a(x) = 0.\end{aligned}\quad (7.40)$$

Найдем среднее значение по вакууму от хронологического произведения двух операторов Ферми:

$$(\Phi_v, \hat{T} \hat{\psi}_{\alpha}^a(x) \hat{\psi}_{\beta}^a(x') \Phi_v) = \langle \hat{T} \hat{\psi}_{\alpha}^a(x) \hat{\psi}_{\beta}^a(x') \rangle_0, \quad (7.41)$$

где Φ_v — вектор вакуумного состояния поля, в котором отсутствуют частицы (все числа заполнения равны нулю). Согласно формуле (7.21) имеем

$$\langle \hat{T} \{ \hat{\psi}_{\alpha}^a(x) \hat{\psi}_{\beta}^a(x') \} \rangle_0 = \langle \hat{\bar{\psi}}_{\alpha}^a(x) \hat{\psi}_{\beta}^a(x') \rangle_0 + \langle \hat{N} \{ \hat{\psi}_{\alpha}^a(x) \hat{\psi}_{\beta}^a(x') \} \rangle_0. \quad (7.42)$$

Так как свертка является c -числом, то

$$\langle \hat{\bar{\psi}}_{\alpha}^a(x) \hat{\psi}_{\beta}^a(x') \rangle_0 = \hat{\bar{\psi}}_{\alpha}^a(x) \hat{\psi}_{\beta}^a(x') = -S_{\beta\alpha}^c(x' - x). \quad (7.43)$$

В нормальном произведении операторов $\hat{\psi}_{\alpha}^a(x)$ и $\hat{\psi}_{\beta}^a(x')$ содержатся операторные произведения четырех типов:

$$\begin{aligned}\hat{A}_{k_s}^+ \hat{A}_{k's'}^-, \hat{A}_{k_s} \hat{A}_{k's'}^+, \hat{A}_{k_s}^+ \hat{A}_{k's'}^+, \\ \hat{N} \hat{A}_{k_s} \hat{A}_{k's'}^+ = -\hat{A}_{k's'}^+ \hat{A}_{k_s},\end{aligned}\quad (7.44)$$

но так как $\hat{A}_{k_s} \Phi_v = 0$, то вклады в среднее по вакууму от нормального произведения $\hat{\psi}$ и $\hat{\bar{\psi}}$ за счет операторных произведений первого, второго и четвертого типов равны нулю. Вклад в это значение за счет операторных произведений третьего типа также равен нулю ввиду ортогональности двух векторов Φ_v и $\hat{A}_{k_s}^+ \hat{A}_{k's'}^+ \Phi_v = \Phi_2(\dots I_{k_s} \dots I_{k's'} \dots)$, т. е. ввиду того, что

$$(\Phi_v, \Phi_2) = (\Phi_v, \hat{A}_{k_s}^+ \hat{A}_{k's'}^+ \Phi_v) = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\langle \hat{N} (\hat{\psi}_{\alpha} \hat{\psi}_{\beta}) \rangle_0 = 0, \quad (7.45)$$

а учитывая формулы (7.43) и (7.45), перепишем окончательно формулу (7.42) в виде

$$\langle \hat{T} \{ \hat{\psi}_{\alpha}^a(x) \hat{\psi}_{\beta}^a(x') \} \rangle_0 = -S_{\beta\alpha}^c(x - x'). \quad (7.46)$$

3. Рассмотрим свойства функций $D^c(x)$ и $S^c(x)$.

Представим функцию $D^c(x)$ в виде интеграла по четырехмерному импульсному пространству. Для этого воспользуемся формулой

$$\frac{\sigma}{|\omega|} e^{-t|\omega|} = \frac{1}{\pi i} \int_c \frac{e^{-ik_{(0)}t}}{k^2} dk_{(0)}, \quad (7.47)$$

где $k^2 = k^2 - k_{(0)}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_{(0)}^2$; c — путь интегрирования, лежащий в комплексной плоскости $k_{(0)}$ (рис. 6). Так как подынтегральная функция в нижней полуплоскости при $t > 0$

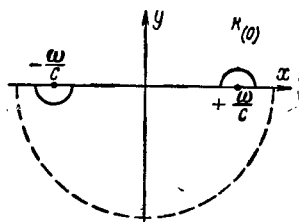


Рис. 6

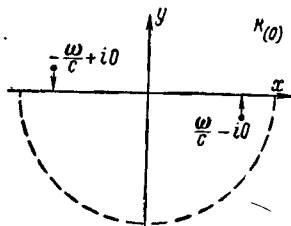


Рис. 7

стремится к нулю (из-за наличия обрезающего множителя $\exp\{-|Im(k_{(0)})t|\}$, то для доказательства формулы (7.47) при $t > 0$ путь интегрирования дополним полуокружностью бесконечного радиуса, лежащей в нижней полуплоскости $k_{(0)}$. Так как интеграл по нижней полуокружности равен нулю, то интеграл в правой части (7.47) равен вычету в точке $k_{(0)} = \frac{\omega}{c}$, умноженному на $2\pi i$; в результате получаем формулу (7.47). Если же $t < 0$, то путь интегрирования необходимо дополнить полуокружностью бесконечного радиуса в верхней полуплоскости $k_{(0)}$. Интеграл по этой полуокружности равен нулю, а интеграл в правой части (7.47) в данном случае равен вычету в точке $k_{(0)} = -\frac{\omega}{c}$, умноженному на $2\pi i$; мы снова получаем формулу (7.47). Если в (7.47) заменить знаменатель k^2 подынтегрального выражения на $k^2 - i\epsilon$, где ϵ — бесконечно малое положительное число, то полюсами при этом будут точки $k_{(0)} = \pm \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{i\epsilon c^2}{2\omega^2}\right)$, положение которых показано на рис. 7. При этом можно

интегрировать вдоль вещественной оси $k_{(0)}$. Учитывая соотношение (7.47) получаем

$$D^c(x) = \frac{4\pi\hbar c}{(2\pi)^4 i} \int_c \frac{e^{ikx}}{k^2} d^4 k. \quad (7.48)$$

Действуя на правую и левую части формулы (7.48) оператором Даламбера, легко убедиться, что $D^c(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\square^2 D^c(x) = 4\pi i \hbar c \delta^4(x). \quad (7.49)$$

Таким образом, $D^c(x)$ является функцией Грина для волнового уравнения¹. Правую часть в формуле (7.48) можно переписать в виде четырехмерного интеграла Фурье

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D^c(k) e^{ikx} d^4 k, \quad (7.50)$$

где компонента Фурье равна

$$D^c(k) = \frac{4\pi\hbar c}{ik^2}. \quad (7.51)$$

Найдем компоненту Фурье $D_{\mu\nu}^c(k)$ функции $D_{\mu\nu}^c(x)$. Так как дифференцированию функции по x_μ соответствует умножение ее компоненты Фурье на ik_μ , то

$$D_{\mu\nu}^c(k) = \frac{4\pi\hbar c}{i(k^2 - i0)} \{\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{k^2} k_\mu k_\nu f(k^2)\},$$

где $f(k^2)$ — произвольная функция от инварианта k^2 , являющаяся Фурье-образом функции $\varphi(x)$. Полагая $f(k^2) = 0$, получим $D_{\mu\nu}^c(k) = D^c(k) \delta_{\mu\nu}$. При $f(k^2) = -\frac{1}{k^2}$ функция

$D_{\mu\nu}^c(k)$ имеет вид

$$D_{\mu\nu}^c(k) = D^c(k) \left\{ \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{k^2} k_\mu k_\nu \right\}.$$

Такая функция $D_{\mu\nu}^c(k)$ обладает свойством поперечности:

$$D_{\mu\nu}^c(k) k_\mu = 0,$$

¹ В квантовой теории поля, кроме $D^c(x)$, часто рассматриваются и другие функции, удовлетворяющие уравнению вида (7.49).

которое в координатном представлении выражается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} D_{\mu\nu}^c(x) = 0.$$

Физические величины не зависят от произвольной функции $\varphi(x)$, а следовательно, не зависят и от $f(k^2)$.

Рассмотрим теперь функцию $S^c(x)$, которая определена формулой (7.39). Можно показать, что в четырехмерном виде

$$\Delta^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{e^{ikx}}{k^2 + \chi^2 - i0} d^4 k. \quad (7.52)$$

Действуя на правую и левую части формул (7.52) оператором Даламбера, убеждаемся, что функция $\Delta^c(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$(\square^2 - \chi^2) \Delta^c(x) = i\delta^4(x). \quad (7.53)$$

Таким образом, $\Delta^c(x)$ — функция Грина уравнения Клейна — Гордона. Формулу (7.39) перепишем в виде

$$\hat{S}^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \hat{S}^c(k) e^{ikx} d^4 k, \quad (7.54)$$

где согласно формуле (7.52) компонента Фурье имеет вид

$$\hat{S}^c(k) = -\frac{(i\hat{\gamma}_\mu k_\mu - \chi)}{k^2 + \chi^2 - i0}. \quad (7.55)$$

Так как $k^2 + \chi^2 = -(i\hat{\gamma}_\mu k_\mu - \chi)(i\hat{\gamma}_\mu k_\mu + \chi)$, то Фурье-компоненту можно символически представить так:

$$\hat{S}^c(k) = \frac{1}{i\hat{\gamma}_\mu k_\mu + \chi} (\chi \rightarrow \chi - i0). \quad (7.56)$$

В знаменателе формулы (7.56) не записываем мнимую величину $-i|\eta|$ ($|\eta| \rightarrow 0$), а считаем χ комплексной величиной с бесконечно малой отрицательной мнимой частью. Согласно (7.39) формулу (7.53) можно переписать в виде

$$\left(\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \chi \right) \hat{S}^c(x) = \delta^4(x). \quad (7.57)$$

Отсюда видно, что $\hat{S}^c(x)$ является функцией Грина для уравнения Дирака.

§ 8. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для определения вероятности некоторого процесса в заданном приближении необходимо вычислить матричные элементы следующего вида:

$$S_{i \rightarrow f}^{(k)} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} (\Phi_{\alpha f}, \hat{S}_{\alpha k} \Phi_{\alpha i}) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (8.1)$$

где $\hat{S}_{\alpha k}$ — k -й член матрицы рассеяния; $\Phi_{\alpha i}$ — вектор начального состояния, описывающий систему свободных частиц в начальном состоянии; $\Phi_{\alpha f}$ — вектор конечного состояния изучаемой системы. Так как свободные частицы обладают определенными импульсами, удобно представить входящие в выражение для $\hat{S}_{\alpha k}$ операторы полей, свертки между операторами и внешние потенциалы в виде разложений по плоским волнам. Дальнейшие рассуждения будем проводить в рамках квантовой электродинамики, при этом рассмотрим систему, состоящую из спинорного и электромагнитного полей, взаимодействующих между собой. Полученные при этом результаты легко обобщить на изучение процессов, обязанных взаимодействию полей другой природы.

Предположим, что функция $f_{\alpha}(x, y, z)$ отлична от нуля только тогда, когда точки x, y и z находятся внутри гиперкуба объема $\Omega = cTV$, где L — длина ребра трехмерного куба, T — интервал времени. Это эквивалентно предположению, что взаимодействующие поля заключены внутри указанного гиперкуба. При этом можно разложить операторы поля в ряды Фурье. Подставляя разложения операторов поля в ряды Фурье в правую часть формулы (8.1), так же, как и во второй главе, замечаем, что оператор $\hat{S}_{\alpha k}$ является оператором в классическом смысле. Это позволяет выбрать основные функции $f_{\alpha}(x, y, z)$ таким образом, чтобы они удовлетворяли условию

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f_{\alpha}(x, y, z) = \delta^4(x - y) \delta^4(x - z).$$

Учитывая это условие и переходя в формуле (8.1) к пределу $\alpha \rightarrow \alpha_0$, получим выражение для $S_{i \rightarrow f}^{(k)}$.

Точно такое же выражение для $S_{i \rightarrow f}^{(k)}$ получится, если в формуле (8.1) сначала перейти к пределу $\alpha \rightarrow \alpha_0$, а затем разложить операторы поля в интегралы Фурье. Совпадение результатов показывает, что первый строгий путь

является обоснованием второго символического рассмотрения выражения, стоящего в правой части формулы (8.1). Исходя из этого, чтобы сократить выкладки, с самого начала в формуле (8.1) перейдем к пределу $\alpha \rightarrow \alpha_0$ и разложим операторы поля в интегралы Фурье. Аналогично будем поступать в остальных параграфах настоящей главы, а также в гл. IV, V.

Разложения операторов в интегралы Фурье дают формулы:

$$\hat{A}_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 k \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k_{(0)}}} (\hat{a}_{k\lambda} e^{ikx} + \tilde{a}_{k\lambda} e^{-ikx}) e_{k\lambda}^{(\nu)} \delta(k^2), \quad (8.2)$$

$$\hat{\psi}_i(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 p \hat{A}_{ps} c_{j,ps} e^{ipx} \delta(p^2 - \chi^2), \quad (8.3)$$

$$\hat{\bar{\psi}}_j(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 p \hat{A}_{ps}^+ \bar{c}_{j,ps} e^{-ipx} \delta(p^2 - \chi^2).$$

Связки между операторами согласно (7.9) и (7.38) равны

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu^a(x) \hat{A}_\nu^a(x') &= D^c(x-x') \delta_{\mu\nu} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k D^c(k) e^{ik(x-x')} \delta_{\mu\nu}, \\ \hat{\psi}_\alpha^a(x) \hat{\psi}_\beta^a(x') &= -\hat{S}_{\beta\alpha}^c(x'-x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \hat{S}_{\alpha\beta}^c(p) e^{ip(x-x')}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$D^c(k) = \frac{4\pi\hbar c}{ik^2}, \quad \hat{S}^c(p) = \frac{1}{i\hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi} = \frac{-i\hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi}{p^2 + \chi^2}.$$

Интеграл Фурье внешнего потенциала $A_\mu^{(e)}(x)$ можно записать в виде

$$A_\mu^{(e)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q A_\mu^{(e)}(q) e^{iqx}, \quad A_\mu^{(e)}(q) = \int d^4 x A_\mu^{(e)}(x) e^{-iqx}. \quad (8.5)$$

Вектор состояния Φ_i (и Φ_j) можно представить в виде линейной комбинации произведений частных векторов состояния, каждый из которых описывает систему из определенного числа частиц одного и того же сорта с одинаковыми импульсами и спинами (или поляризациями).

Введем обозначения: $f_e(n_{ps})$ — вектор состояния электрона; $f_\gamma(n_{k\lambda})$ — вектор состояния фотона; n_{ps} — число элект-

ронов в состоянии с импульсом $\hbar\mathbf{p}$ и с заданным спиновым квантовым числом s ; $n_{k\lambda}$ — число фотонов в состоянии с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и поляризацией λ .

Матричные элементы операторов полей легко определяются из формул (8.2) и (8.3). Матричные элементы операторов $\hat{\psi}(x)$ и $\hat{\bar{\psi}}(x)$, соответствующие поглощению и испусканию электрона или позитрона с импульсом $\hbar\mathbf{p}$ и квантовым числом s равны

$$\left. \begin{aligned} (f(0_{ps+}), \hat{\psi}(x) f(1_{ps+})) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} c_{i,ps+} e^{i\rho x} (s^+ = 1, 2), \\ (f(1_{ps+}), \hat{\bar{\psi}}(x) f(0_{ps+})) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \bar{c}_{i,ps+} e^{-i\rho x} (s^+ = 1, 2), \\ (f(0_{p,s-}), \hat{\bar{\psi}}(x) f(1_{ps-})) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \bar{c}_{i,-ps-} e^{i\rho x} (s^- = 3, 4), \\ (f(1_{ps-}), \hat{\psi}(x) f(0_{ps-})) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} c_{i,-ps-} e^{-i\rho x} (s^- = 3, 4). \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

При выводе формул (8.6) учтено, что \hat{A}_{ps+}^+ , \hat{A}_{ps+}^+ — операторы рождения и поглощения электрона с импульсом $\hbar\mathbf{p}$; \hat{A}_{ps-} , \hat{A}_{ps-}^+ — операторы рождения и поглощения позитрона с импульсом $-\hbar\mathbf{p}$. Матричные элементы оператора $\hat{A}_\mu(x)$, соответствующие поглощению и испусканию фотона с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и поляризацией λ , согласно формуле (8.2) равны:

$$\begin{aligned} (f(n_{k\lambda}), \hat{A}_\mu(x) f(n_{k\lambda} + 1)) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k_{(0)}}} e_\lambda^{(\mu)} e^{ikx}, \\ (f(n_{k\lambda} + 1), \hat{A}_\mu(x) f(n_{k\lambda})) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k_{(0)}}} e_\lambda^{(\mu)} e^{-ikx}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Подставим выражения для сверток, внешних потенциалов и матричных элементов из (8.4), (8.5), (8.6) и (8.7) в формулу (8.1). Группируя множители типа $e^{i\rho x_j}$ с заданным x_j (здесь ρ — четырехмерные волновые векторы свободных частиц или переменные интегрирования в интегралах Фурье для функций $A_\mu^{(e)}$, $\hat{S}_{\alpha\beta}^c$ и D^c), получим $e^{i(\Sigma\rho)x_j}$, причем число векторов в $\Sigma\rho$ равно трем, т. е. равно числу линий, проходящих через вершину x_j графика. Как известно, интеграл по x_j от

множителя $e^{i(\Sigma p)x}$, равен $(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p)$, где $\delta^4(\Sigma p)$ — четырехмерная δ -функция. Поэтому проинтегрировав по x_1, \dots, x_k , получим произведение k четырехмерных δ -функций.

Каждой линии графа соответствует определенный четырехмерный вектор p . Функции \hat{S}^c и D^c , описывающие внутренние линии графа, зависят от $(x_1 - x_2)$, где x_1 и x_2 — координаты концов соответствующей внутренней линии. Поэтому концам любой внутренней линии соответствуют две δ -функции, в которые вектор p входит с противоположными знаками. На этом основании векторы $\hbar p$, соответствующие внутренним линиям графа, можно интерпретировать, как четырехмерные импульсы виртуальных частиц, рождаемых на одном конце внутренней линии и поглощаемых на другом ее конце. По компонентам временной и пространственной составляющих четырехмерного импульса виртуальной частицы производится интегрирование. Поэтому между этими составляющими не существует никакой связи.

Внешним линиям графа, уходящим на бесконечность, соответствуют четырехмерные импульсы реальных частиц, принимающих участие в рассматриваемом процессе.

В выражении для $S_{i,j}^{(k)}$ интегрирование производится как по импульсам виртуальных частиц, так и по переменным q , которые возникли от разложения внешних потенциалов в интеграл Фурье. Кроме того, в выражении для $S_{i,j}^{(k)}$ производится суммирование по поляризациям виртуальных фотонов.

Четырехмерные δ -функции, возникшие при интегрировании по x_1, \dots, x_h , обеспечивают соблюдение закона сохранения энергии-импульса в каждой вершине графа.

В матричном элементе каждой функции D^c на графе Фейнмана соответствует внутренняя фотонная линия, двум концам которой сопоставляются матрицы $\hat{\gamma}_\nu$ и $\hat{\gamma}_\mu$. При этом в матричном элементе матрицы $\hat{\gamma}_\nu$ и \hat{S}^c располагаются в такой последовательности, считая справа налево, в которой они встречаются на соответствующем графе, если двигаться на нем вдоль электронной линии.

Рассмотрим частный случай, когда граф содержит замкнутые электронные петли с четным числом электронных линий. Покажем, что в выражении $S_{i,j}^{(n)}$ каждой электронной петле соответствует взятый со знаком минус след произведения матриц $\hat{\gamma}_\mu$ и \hat{S}^c , относящихся к данной петле. Для этого

рассмотрим часть графа, содержащую замкнутую электронную линию (рис. 8; квадраты A и B обозначают остальную часть диаграммы). Множитель, которому сопоставляется петля на рис. 8, равен

$$G = \hat{N} \left[\hat{\Psi}_\alpha(x_1) (\hat{\gamma}_\mu)_{\alpha\beta} \hat{\Psi}_\beta(x_1) \hat{\Psi}_\sigma(x_2) (\hat{\gamma}_\nu)_{\sigma\rho} \hat{\Psi}_\rho(x_2) \right]. \quad (8.8)$$

Используя выражение для сверток операторов, получим

$$\begin{aligned} G &= - (\hat{\gamma}_\mu)_{\alpha\beta} \hat{S}_{\beta\delta}^c(x_1 - x_2) (\hat{\gamma}_\nu)_{\delta\rho} \hat{S}_{\rho\alpha}^c(x_2 - x_1) = \\ &= - \text{Sp} \left[\hat{\gamma}_\mu \hat{S}^c(x_1 - x_2) \hat{\gamma}_\nu \hat{S}^c(x_2 - x_1) \right], \end{aligned} \quad (8.9)$$

что и требовалось доказать.



Рис. 8

Аналогично можно показать, что для диаграммы с l замкнутыми электронными петлями, состоящими из четного числа линий, матричный элемент $S_{ij}^{(n)}$ получает множитель $(-1)^l$.

В заключение приведем правила написания матричных элементов для произвольной диаграммы, найденные Фейнманом.

1. Внешней электронной или позитронной линии соответствует спинор $v_{ps} = (2\pi)^{-3/2} c_{ps}$ или $\bar{v}_{p\bar{r}} = (2\pi)^{-3/2} \bar{c}_{p\bar{r}}$, причем c_{ps} и $\bar{c}_{p\bar{r}}$ соответствуют поглощению и испусканию электрона с импульсом $\hbar p$ и поляризацией s_+ , а c_{-ps} и $\bar{c}_{-p\bar{r}}$ — поглощению и испусканию позитрона с импульсом $\hbar p$ и поляризацией s_- .

2. Внешней фотонной линии, описывающей фотон соответствует множитель $a_\mu = (2\pi)^{-3/2} e^{(\mu)} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k_{(0)}}}$, где $\omega = k_{(0)} c$ — частота; $e^{(\mu)}$ — единичный вектор поляризации; внешней фотонной линии, описывающей внешнее электромагнитное поле, — множитель $(2\pi)^{-4} A_\mu^{(e)}(q) = \tilde{A}_\mu^{(e)}(q)$.

3. Внутренней электронной линии с импульсом $\hbar p$ соответствует матрица

$$\begin{aligned}\hat{S}^F(p) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \hat{S}^c(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{-i\hat{\gamma}_\alpha p_\alpha + \chi}{p^2 + \chi^2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{i\hat{\gamma}_\alpha p_\alpha + \chi}.\end{aligned}$$

4. Внутренней фотонной линии с импульсом $\hbar k$ соответствует множитель

$$D_{\mu\nu}^F(k) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} D^c(k) = \frac{4\pi\hbar c \delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4 i k^2}.$$

5. Вершине диаграммы с индексом суммирования μ , в которую входят электронная линия с импульсом $\hbar p_1$ и фотонная линия с импульсом $\hbar k$ и из которой выходит электронная линия с импульсом $\hbar p_2$, соответствует множитель

$$\hat{\lambda}_\mu \delta^4(p_2 - p_1 - k) = (2\pi)^4 \frac{ie}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu \delta^4(p_2 - p_1 - k).$$

6. Матрицы, действующие на спинор, располагаются справа налево в таком порядке, в котором они встречаются при движении вдоль электронной линии.

7. В матричный элемент диаграммы, содержащей замкнутую электронную петлю с четным числом электронных линий, входит взятый с обратным знаком след произведения матриц $\hat{\gamma}_\mu$ и \hat{S}^c , относящихся к рассматриваемой петле. Матричные элементы диаграмм, в которые входят замкнутые электронные петли с нечетным числом электронных линий, равны нулю (см. § 9).

8. По четырехмерным импульсам внутренних линий, изображающих виртуальные частицы, и по переменным q , возникшим от потенциалов внешних полей, производится интегрирование, а по поляризациям виртуальных фотонов — суммирование.

9. Численный множитель, стоящий в выражении для $S_i^{(n)} \rightarrow f$ перед интегралом, равен

$$(-1)^l \delta_p \frac{r}{n!},$$

где l — число электронных петель с четным числом электронных линий; δ_p — четность перестановки индексов импуль-

сов электронов в $(\overset{1}{j_1}, \overset{2}{j_2}, \dots)$ (здесь 1, 2, ... нумеруют начальные, а j_1, j_2, \dots — конечные импульсы электронов); n — число вершин в диаграмме Фейнмана; r — число эквивалентных диаграмм, описывающих данный процесс.

В квантовой мезодинамике (скалярной или псевдоскалярной) необходимо добавить следующие правила:

1) каждой внутренней мезонной линии с импульсом $\hbar k$ соответствует множитель

$$\frac{\hbar}{(2\pi)^4 ci} \cdot \frac{1}{k^2 + \mu^2};$$

2) каждой внешней мезонной линии, изображающей мезон с энергией $\hbar\omega_k = \hbar \sqrt{k^2 + \mu^2}$, соответствует фактор

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}};$$

3) каждой вершине, в которую входят нуклонная линия с импульсом $\hbar p_1$ и мезонная с импульсом $\hbar k$ и из которой выходит нуклонная линия с импульсом $\hbar p_2$, соответствует множитель

$$\frac{iG}{\hbar c} \hat{\Gamma} (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1 - k),$$

где G — мезонный заряд, $\hat{\Gamma}$ — соответствующий оператор.

§ 9. ЗАМКНУТЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ЛИНИИ С НЕЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН

Теорема Фарри. Суммарный матричный элемент, соответствующий диаграммам, содержащим замкнутые внутренние электронные или другие фермионные петли, состоящие из нечетного числа линий, равен нулю.

Доказательство. Процесс, в котором принимает участие нечетное число виртуальных фотонов, описывается двумя графами с противоположными направлениями обхода вдоль замкнутой электронной петли (рис. 9). Сумма матричных элементов, соответствующих этим диаграммам, $S_{i \rightarrow f}^{G_1}$ и $S_{i \rightarrow f}^{G_2}$ определяет весь процесс:

$$S_{i \rightarrow f} = S_{i \rightarrow f}^{G_1} + S_{i \rightarrow f}^{G_2}. \quad (9.1)$$

Согласно формуле (8.8) петлям на рис. 9 соответствуют множители, входящие в $S_{i \rightarrow j}^{G_1}$ и $S_{i \rightarrow j}^{G_2}$, (N — число вершин в петле):

$$S_{i \rightarrow j}^a = \int d^4 p \text{Sp} [\hat{\gamma}_{\mu_1} \hat{S}^F(p+k_1) \hat{\gamma}_{\mu_2} \hat{S}^F(p+k_1+k_2) \dots \\ \dots \hat{S}^F(p-k_N) \hat{\gamma}_{\mu_N} \hat{S}^F(p)], \quad (9.2)$$

$$S_{i \rightarrow j}^b = \int d^4 p' \text{Sp} [\hat{S}^F(p') \hat{\gamma}_{\mu_N} \hat{S}^F(p'+k_N) \dots \\ \dots \hat{S}^F(p'-k_2-k_1) \hat{\gamma}_{\mu_1} \hat{S}^F(p'-k_1) \hat{\gamma}_{\mu_1}].$$

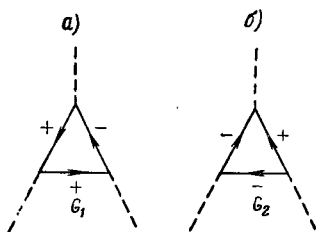


Рис. 9

Используя формулу

$$\text{Sp} \hat{A} = \text{Sp} \hat{C}^{-1} \hat{A} \hat{C}, \quad (9.3)$$

где \hat{A} и \hat{C} — произвольные матрицы¹, преобразуем $S_{i \rightarrow j}^{(b)}$ к виду

$$S_{i \rightarrow j}^{(b)} = \int d^4 p' \text{Sp} [\hat{C}^{-1} \hat{S}^F(p') \hat{C} \hat{C}^{-1} \hat{\gamma}_{\mu_N} \hat{C} \hat{C}^{-1} \hat{S}^F(p'+k_N) \hat{C} \dots \\ \dots \hat{C}^{-1} \hat{S}^F(p'-k_1) \hat{C} \hat{C}^{-1} \hat{\gamma}_{\mu_1} \hat{C}]. \quad (9.4)$$

Выберем матрицу \hat{C} так, чтобы выполнялось соотношение

$$\hat{C}^{-1} \hat{\gamma}_{\mu} \hat{C} = -\tilde{\gamma}_{\mu}, \quad (9.5)$$

где $\tilde{\gamma}_{\mu}$ — матрица, транспонированная относительно матрицы $\hat{\gamma}_{\mu}$. Тогда согласно формуле (9.5) имеем

$$\hat{C}^{-1} \hat{S}^F(p) \hat{C} = \tilde{S}^F(-p). \quad (9.6)$$

¹ Однако следует учесть, что матрица \hat{C} не должна быть сингулярной.

Используя формулы (9.5) и (9.6) получаем

$$S_{i \rightarrow j}^{(b)} = (-1)^N \int d^4 p \operatorname{Sp} [\tilde{S}^F(-p') \tilde{\gamma}_{\mu_N} \tilde{S}^F(-p' - k_N) \dots \\ \dots \tilde{S}^F(-p' + k_1) \tilde{\gamma}_{\mu_1}], \quad (9.7)$$

а производя замену переменной $p' = -p$ и учитывая соотношение $\operatorname{Sp} \hat{A} = \operatorname{Sp} \tilde{A}$, где \tilde{A} — произвольная матрица, найдем

$$S_{i \rightarrow j}^{(b)} = (-1)^N \int d^4 p \operatorname{Sp} [\hat{\gamma}_{\mu_1} \hat{S}^F(p + k_1) \hat{\gamma}_{\mu_2} \hat{S}^F(p + k_1 + k_2) \dots \\ \dots \hat{S}^F(p - k_N) \hat{\gamma}_{\mu_N} \hat{S}^F(p)]. \quad (9.8)$$

Согласно формулам (9.2) и (9.8) при нечетном N матричный элемент $S' = S_{i \rightarrow j}^{(a)} + S_{i \rightarrow j}^{(b)}$ равен нулю, что и требовалось доказать.

Полученный результат интерпретируется следующим образом. Фермионные линии соответствуют положительным или отрицательным электронам (см. рис. 9, где приведены зряды частиц). Диаграмма на рис. 9, б отличается от диаграммы на рис. 9, а обратным направлением электронных линий, так как обратному направлению линии заряженного фермиона соответствует обратный знак заряда, то матричный элемент $S_{i \rightarrow j}^{(b)}$ отличается от матричного элемента $S_{i \rightarrow j}^{(a)}$ только множителем $(-1)^3 = -1$, откуда $S_{i \rightarrow j}^{(a)} + S_{i \rightarrow j}^{(b)} = 0$.

В общем случае любой замкнутый многоугольник из электронных линий (замкнутая петля) с нечетным числом вершин дает нулевой вклад в матричный элемент.

§ 10. ВЕРОЯТНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

Определим вероятность перехода системы из начального состояния, описываемого вектором состояния Φ_i , в конечное состояние, характеризуемое вектором состояния Φ_j . В приведенных далее процессах начальные и конечные состояния относятся к непрерывному спектру. Поэтому нам требуется рассмотреть обычную задачу теории рассеяния, когда до включения взаимодействия имеется s потоков различных частиц с вполне определенными волновыми числами p_1, \dots, p_s и внутренними квантовыми числами $\sigma_1, \dots, \sigma_s$, характеризующими спин, заряд, массу, и вычислить сред-

нее число частиц, рассеянных с волновыми числами, находящимися в интервалах $(p_1 + dp_1), \dots, (p_r + dp_r)$ и с внутренними квантовыми числами $\sigma_1, \dots, \sigma_r$. Вектор состояния для случая одной частицы можно представить в виде

$$\Phi_1 = \int dp \chi_\sigma(p) \hat{a}_{p\sigma}^+ \Phi_v, \quad (10.1)$$

где Φ_v — вектор вакуумного состояния; $\hat{a}_{p\sigma}^+$ — оператор рождения одной частицы. Из (10.1) имеем

$$N = (\Phi_1, \Phi_1) = \int |\chi_\sigma(p)|^2 dp. \quad (10.2)$$

Полагая, что N — общее число частиц с заданным σ , будем интерпретировать выражение $|\chi_\sigma(p)|^2 dp$ как число частиц, характеризуемых внутренним квантовым числом σ и обладающих импульсом, заключенным в интервале $(p, p + dp)$. Таким образом, $\chi_\sigma(p)$ — волновая функция частицы в импульсном представлении. Фурье-компонента этой функции является волновой функцией в конфигурационном представлении

$$\varphi_\sigma(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipr} \chi_\sigma(p) dp. \quad (10.3)$$

Квадрат нормы функции $\varphi_\sigma(r)$ равен

$$\int |\varphi_\sigma(r)|^2 dV = \int |\chi_\sigma(p)|^2 dp = N,$$

величина $|\varphi_\sigma(r)|^2 dV$ — число частиц в объеме dV . Пусть $N \rightarrow \infty$, но так, чтобы при этом

$$\chi_\sigma(p) \rightarrow (2\pi)^{3/2} \delta^3(p) \sqrt{n}. \quad (10.4)$$

Тогда согласно формуле (10.3)

$$\varphi_\sigma(r) \rightarrow \sqrt{n}, \quad |\varphi_\sigma(r)|^2 \rightarrow n,$$

и в пределе на единицу объема будет приходиться n частиц. Согласно (10.4) из выражения (10.1) для волнового вектора одночастичного состояния, нормированного на единицу объема, в пределе получим

$$\Phi_1 = (2\pi)^{3/2} \sqrt{n} \hat{a}_{p_0\sigma}^+ \Phi_v. \quad (10.5)$$

Вектор состояния нескольких сортов частиц равен

$$\Phi_i = \int dp_1 \chi_{\sigma_1}(p_1) \hat{a}_{p_1\sigma_1}^+ \dots \int dp_s \chi_{\sigma_s}(p_s) \hat{a}_{p_s\sigma_s}^+ \Phi_v, \quad (10.6)$$

а квадрат нормы такого вектора состояния равен произведению квадратов норм векторов одночастичных состояний:

$$(\Phi_i, \Phi_i) = \Pi \int |\chi_{\sigma_i}(\mathbf{p}_i)|^2 d\mathbf{p}_i = \Pi N_i.$$

Аналогично находим, что вектор многочастичного состояния, нормированный для частиц каждого сорта на единицу объема, равен

$$\Phi_i = (2\pi)^{3s/2} \sqrt{n_1 n_2 \dots n_s} \hat{a}_{\sigma_1}^+(\mathbf{p}_1) \hat{a}_{\sigma_2}^+(\mathbf{p}_2) \dots \hat{a}_{\sigma_s}^+(\mathbf{p}_s) \Phi_v. \quad (10.7)$$

В результате взаимодействия система перейдет из состояния, описываемого вектором (10.7), в состояние, которое характеризуется вектором

$$\Phi_a = \hat{S} \Phi_i = \hat{S} (2\pi)^{3s/2} \sqrt{n_1 \dots n_s} \Phi_{\mathbf{p}_1 \sigma_1 \dots \mathbf{p}_s \sigma_s}, \quad (10.8)$$

где

$$\Phi_{\mathbf{p}_1 \sigma_1 \dots \mathbf{p}_s \sigma_s} = \hat{a}_{\mathbf{p}_1 \sigma_1}^+ \dots \hat{a}_{\mathbf{p}_s \sigma_s}^+ \Phi_v.$$

Среднее число частиц в конечном состоянии, описываемом вектором состояния Φ_f , равно

$$P_1 = \frac{|(\Phi_f, \Phi_a)|^2}{(\Phi_f, \Phi_f)}. \quad (10.9)$$

Действительно, пусть $\{\Phi_f^{(k)}\}$ — полная система векторов (конечных) состояний, где $\Phi_f^0 = \Phi_f$ — вектор интересующего нас состояния. Вектор $\Phi_a = \hat{S} \Phi_i$ можно разложить в ряд по полной системе векторов $\{\Phi_f^{(k)}\}$:

$$\Phi_a = \hat{S} \Phi_i = \sum_k \frac{c_k \Phi_f^{(k)}}{\|\Phi_f^{(k)}\|}, \quad (10.10)$$

откуда находим

$$(\Phi_a, \Phi_a) = \sum_k |c_k|^2. \quad (10.11)$$

Если интерпретировать (Φ_a, Φ_a) как полное число частиц во всех конечных состояниях, то согласно формуле (10.11) квадрат модуля коэффициента c_k дает число частиц, которое под действием взаимодействия перейдет в состояние, характеризваемое вектором $\Phi_f^{(k)}$. Умножая скалярно левую и правую

части (10.10) на вектор состояния $\Phi_f / \|\Phi_f\|$ и учитывая свойство ортогональности этих векторов, получаем

$$c_0 = \frac{(\Phi_f, \hat{S}\Phi_i)}{\|\Phi_f\|}. \quad (10.12)$$

Возведя правую и левую части (10.12) в квадрат, приходим к формуле (10.9).

Согласно (10.8) из равенства (10.9) находим

$$P_1 = \frac{n_1 \dots n_s (2\pi)^{3s} |(\Phi_f, \hat{S}\Phi_{p_1\sigma_1 \dots p_s\sigma_s})|^2}{(\Phi_f, \Phi_f)}. \quad (10.13)$$

Вектор конечного состояния системы частиц, рассеянных в интервалы волновых чисел $\Delta p'_1, \dots, \Delta p'_r$ в окрестности средних значений p_1, \dots, p_r , можно записать в виде

$$\Phi_f = (2\pi)^{3r/2} \sqrt{\prod_{i=1}^r n_i} \int_G \Phi_{k_1\sigma_1 \dots k_r\sigma_r} dk_1 \dots dk_r, \quad (10.14)$$

где n_i — число частиц i -го сорта в единице объема; G — область интегрирования, равная произведению объемов $\Delta p'_1 \dots \Delta p'_r$. Квадрат нормы вектора Φ_f равен

$$(\Phi_f, \Phi_f) = (2\pi)^{3r} \prod_{i=1}^r (n_i \Delta p'_i). \quad (10.15)$$

Подставляя выражения (10.14) и (10.15) для Φ_f и (Φ_f, Φ_f) в формулу (10.13), находим

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{(2\pi)^{3s} n_1 \dots n_s}{\Delta p'_1 \dots \Delta p'_r} \int_G dk_1 \dots dk_r (\Phi_{k_1\sigma_1 \dots k_r\sigma_r}, \hat{S}\Phi_{p_1\sigma_1 \dots p_s\sigma_s})^* \times \\ &\quad \times \int_G dk'_1 \dots dk'_r (\Phi_{k'_1\sigma'_1 \dots k'_r\sigma'_r}, \hat{S}\Phi_{p_1\sigma_1 \dots p_s\sigma_s}) = \\ &= (2\pi)^{3s} n_1 \dots n_s |(\Phi_{\dots p' \dots}, \hat{S}\Phi_{\dots p \dots})|^2 \Delta p'_1 \dots \Delta p'_r, \end{aligned} \quad (10.16)$$

где

$$\Phi_{\dots p \dots} \equiv \Phi_{p_1\sigma_1 \dots p_r\sigma_r}.$$

После выполнения в $(\Phi_{\dots}, \hat{S}\Phi_{\dots})$ всех указанных в § 8 интегрирований получим

$$(\Phi_{\dots k_f \dots}, \hat{S}\Phi_{\dots k_i \dots}) = M_{if} \delta^4(\sum k_i - \sum k_f). \quad (10.17)$$

В формуле (10.17) остается только одна четырехмерная δ -функция, которая содержит разность начальных и конечных четырехмерных импульсов частиц (деленных на \hbar). Согласно (10.17) имеем

$$|(\Phi \dots, \hat{S}\Phi \dots)|^2 = |M_{if}|^2 [\delta^4(\sum k_i - \sum k_f)]^2. \quad (10.18)$$

Для того чтобы избавиться в формуле (10.18) от одной δ -функции, заметим, что

$$\delta^4(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{V, T \rightarrow \infty} \int_{(V, cT)} e^{iqx} d^4x \quad (10.19)$$

$$(q = \sum k_i - \sum k_f);$$

отсюда имеем

$$\int [\delta^4(q)]^2 d^4q = \int d^4q \delta^4(q) \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{V, T \rightarrow \infty} \int_{(V, cT)} e^{iqx} d^4x \right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{V, T \rightarrow \infty} \int_{V, cT} d^4x = \lim_{V, T \rightarrow \infty} \frac{c}{(2\pi)^4} VT. \quad (10.20)$$

Из этого следует, что

$$[\delta^4(\sum k_i - \sum k_f)]^2 = \delta^4(\sum k_i - \sum k_f) \lim_{V, T \rightarrow \infty} \frac{c}{(2\pi)^4} VT. \quad (10.21)$$

Формулу (10.21) можно получить и другим способом. Действительно, можно написать

$$\delta(q) = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-x_0}^{x_0} e^{iqx} dx = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin qx_0}{q},$$

отсюда вытекает

$$[\delta(q)]^2 = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin^2 qx_0}{q^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{x_0 \rightarrow \infty} x_0 \cdot \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{x_0} \frac{\sin^2 qx_0}{q^2}.$$

Как известно, для δ -функции справедлива формула

$$\delta(q) = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 qx_0}{x_0 q^2}. \quad (10.22)$$

Поэтому окончательно получим

$$[\delta(q)]^2 = \frac{\delta(q)}{(2\pi)} \lim_{x_0 \rightarrow \infty} 2x_0, \quad (10.23)$$

что для четырехмерной функции Дирака приводит к формуле (10.21), так как $VT = 2x_0 \cdot 2y_0 \cdot 2z_0 \cdot 2t_0$.

Учитывая формулу (10.21), получим для $|(\Phi \dots, \hat{S}\Phi \dots)|^2$ выражение

$$\begin{aligned} & |(\Phi \dots, \hat{S}\Phi \dots)|^2 = \\ & = \frac{c}{(2\pi)^4} |M_{if}|^2 \delta^4(\sum k_i - \sum k_f) \lim_{V, T \rightarrow \infty} VT. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Подставляя выражение (10.24) в (10.16) и деля на VT , получим формулу для числа частиц, рассеянных в интервал $d\mathbf{p}'_1, \dots, d\mathbf{p}'_r$ в единице объема за единицу времени:

$$P_1 = c (2\pi)^{3s-4} n_1 \dots n_s |M_{if}|^2 \delta^4(\sum p - \sum p') d\mathbf{p}'_1 \dots d\mathbf{p}'_r. \quad (10.25)$$

В случае рассеяния частицы на частице ($r = s = 2$) формула (10.25) получает вид

$$P_1 = c (2\pi)^2 n_1 n_2 |M_{if}|^2 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2. \quad (10.26)$$

Так как \mathbf{p}'_1 полностью определяет \mathbf{p}'_2 и, наоборот, интегрируя в (10.26) по \mathbf{p}'_2 , найдем

$$P_2 = c (2\pi)^2 n_1 n_2 |M_{if}|^2 \delta^4(p_{1(0)} + p_{2(0)} - p'_{1(0)} - p'_{2(0)}) d\mathbf{p}'_1, \quad (10.27)$$

где M_{if} взято при $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1$. Чтобы избавиться в формуле (10.27) от δ -функции, поступим следующим образом. Имеем

$$d\mathbf{p}'_1 = d^3 p'_1 = |\mathbf{p}'_1|^2 d|\mathbf{p}'_1| d\Omega'_1,$$

а из соотношения $|\mathbf{p}'_1|^2 - p'^2_{1(0)} + \chi^2 = 0$ находим

$$|\mathbf{p}'_1| \cdot d|\mathbf{p}'_1| = p'_{1(0)} dp'_{1(0)}, \quad (10.28)$$

поэтому выражение для $d\mathbf{p}'_1$ приобретает вид

$$d\mathbf{p}'_1 = |\mathbf{p}'_1| p'_{1(0)} dp'_{1(0)} d\Omega'_1. \quad (10.29)$$

Интегрирование по $p'_{1(0)}$ легко выполнить, если заменить $d\mathbf{p}'_{1(0)}$ на $d(\sum p'_{i(0)})$. Так как $\sum p'_{i(0)}$ — функция от $p'_{1(0)}$, то

$$d(\sum p'_{i(0)}) = \frac{\partial(\sum p'_{i(0)})}{\partial p'_{1(0)}} dp'_{1(0)},$$

откуда

$$dp'_{i(0)} = \frac{d(\sum p'_{i(0)})}{\frac{\partial(\sum p'_{i(0)})}{\partial p'_{i(0)}}}. \quad (10.30)$$

Учитывая формулу (10.30), находим, что

$$d^3 p_i \equiv dp'_i = |p'_i| p'_{i(0)} \cdot \frac{d(\sum p'_{i(0)})}{\frac{\partial(\sum p'_{i(0)})}{\partial p'_{i(0)}} d\Omega'_i. \quad (10.31)$$

Подставляя отсюда $d^3 p'_i$ в выражение (10.27) и интегрируя по $p'_{i(0)}$, получаем

$$P_3 = c (2\pi)^2 n_1 n_2 |M_{if}|^2 \left. \frac{|p'_i| p'_{i(0)} d\Omega'_i}{\left| \frac{\partial \sum p'_{i(0)}}{\partial p'_{i(0)}} \right|} \right|_{p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2 = 0}. \quad (10.32)$$

Как известно, P_3 можно представить так:

$$P_3 = n_1 n_2 v_{12} d\sigma, \quad (10.33)$$

где v_{12} — модуль разности скоростей частиц в первом пучке относительно частиц во втором пучке; $d\sigma$ — дифференциальное эффективное поперечное сечение.

Скорость $v_{12} = c$, если частицы в первом пучке — фотоны. Если же эти частицы обладают массой покоя, отличной от нуля, то $v_{12} = c \frac{|p|}{p_{(0)}}$; действительно, в системе координат, связанной с частицей второго пучка, имеем

$$c \frac{|p|}{p_{(0)}} = c^2 \frac{mv_{12}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{12}}{c}\right)^2}} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{12}}{c}\right)^2}} \right)^{-1} = v_{12}.$$

Величина $d\sigma$ имеет размерность площади [$см^2$], а интеграл от $d\sigma$ по полному телесному углу называется полным эффективным поперечным сечением.

Сравнивая формулы (10.32) и (10.33), для дифференциального эффективного поперечного сечения получаем выражение

$$d\sigma = \frac{c(2\pi)^2}{v_{12}} \left| M_{if} \right|^2 \frac{|\mathbf{p}_1| p'_{1(0)}}{\left| \frac{\partial \Sigma p'_{i(0)}}{\partial p'_{1(0)}} \right|} d\Omega'_1 \Bigg|_{p_1+p_2-p'_1-p'_2=0}, \quad (10.34)$$

отсюда находим полное эффективное сечение интегрированием по $d\Omega'_1$:

$$\sigma(p_2, p'_1) = \frac{c(2\pi)^2}{v_{12}} \int_{\Omega'_1} \frac{|\mathbf{p}_1| p'_{1(0)}}{\left| \frac{\partial \Sigma p'_{i(0)}}{\partial p'_{1(0)}} \right|} |M_{if}|^2 d\Omega'_1. \quad (10.35)$$

Допустим, что пучок рассеивающихся частиц не поляризован (т. е. частицы этого пучка имеют различные ориентации спина), а приборы, регистрирующие рассеянные частицы, реагируют на частицы со всеми значениями проекции спина. В этом случае по спиновым индексам рассеянных частиц производится суммирование, а по спиновым индексам рассеивающихся частиц — усреднение. Обозначая эти операции символом \sum_{σ} , перепишем выражение для дифференциального поперечного сечения в виде

$$d\sigma = \frac{c(2\pi)^2 |\mathbf{p}_1| p'_{1(0)}}{v_{12} \left| \frac{\partial \Sigma p'_{i(0)}}{\partial p'_{1(0)}} \right|} \sum_{\sigma} |M_{if}|^2 d\Omega'_1 \Bigg|_{p_1+p_2-p'_1-p'_2=0}. \quad (10.36)$$

§ 11. ВЕРОЯТНОСТИ ПРОЦЕССОВ РАССЕЙАНИЯ ВНЕШНИМИ ПОЛЯМИ И ЧАСТИЦАМИ В СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ

1. *Рассеяние внешними полями.* В данном случае внешним линиям графов Фейнмана, изображающим внешние поля, нельзя приписать определенные волновые числа. Поэтому импульс системы не сохраняется, сохраняется только энергия (если внешние поля не зависят от времени). Для

матричного элемента S-матрицы теперь получаем формулу

$$(\Phi \dots, \hat{S}\Phi \dots) = \delta (\sum p_{(0)} - \sum p'_{(0)}) M_{if}. \quad (11.1)$$

Используя формулу (10.23), находим отсюда

$$(\Phi \dots, \hat{S}\Phi \dots)^2 = \frac{cT}{2\pi} |M_{if}|^2 \delta (\sum p_{(0)} - \sum p'_{(0)}). \quad (11.2)$$

Согласно (11.2) при помощи вычислений, аналогичных вычислениям § 10, получим число частиц, рассеянных в интервалы dp'_1, \dots, dp'_r в единицу времени:

$$P = c (2\pi)^{3s-1} n_1 \dots n_s |M_{if}|^2 \delta (\sum p_{(0)} - \sum p'_{(0)}) dp'_1 \dots dp'_r. \quad (11.3)$$

Пусть частица при рассеянии на внешнем поле рождает еще одну частицу с волновым вектором k (тормозное излучение). Полагая $s=1, r=2$, перепишем формулу (11.3) в виде

$$P = c (2\pi)^2 n_1 |M_{if}|^2 \delta (p_{1(0)} - p'_{1(0)} - k_{(0)}) dp'_1 dk. \quad (11.4)$$

Выполнив интегрирование по $dp'_{1(0)}$, а также суммирование и усреднение по спиновым индексам, из выражения (11.4) найдем

$$P_1 = c (2\pi)^2 n_1 \sum_{\sigma} |M_{if}|^2 |p'_1| p'_{1(0)} d\Omega'_1 dk \Big|_{p_{1(0)} - p'_{1(0)} - k_{(0)} = 0}. \quad (11.5)$$

Формулу (11.5) можно представить в виде

$$P_1 = n_1 v_1 d\sigma_1,$$

отсюда находим дифференциальное эффективное сечение рассеяния внешним полем:

$$d\sigma_1 = \frac{c (2\pi)^2}{v_1} |M_{if}|^2 |p_1| p'_{1(0)} d\Omega'_1 dk \Big|_{p_{1(0)} - p'_{1(0)} - k_{(0)} = 0}. \quad (11.6)$$

2. *Процессы с участием частиц, находящихся в связанных состояниях*¹. Вектор одночастичного связанного состояния можно записать в виде

$$\Phi_1 = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \Phi_v, \quad (11.7)$$

¹ Представление взаимодействия Фарри для связанных состояний изложено в гл. VI.

где λ — квантовые числа этого состояния. Квадрат нормы этого вектора равен

$$(\Phi_1, \Phi_1) = \sum_{\lambda} c_{\lambda}^* c_{\lambda} \quad (11.8)$$

и, следовательно, $c_{\lambda}^* c_{\lambda}$ представляет вероятность того, что частица находится в состоянии с квантовыми числами λ . Функция c_{λ} — волновая функция частицы в λ -представлении. Волновую функцию частицы в конфигурационном представлении можно записать так:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \varphi_{\lambda}(\mathbf{r}), \quad (11.9)$$

где φ_{λ} — стационарные волновые функции (собственные векторы оператора энергии частицы). Квадрат нормы функции $\varphi(\mathbf{r})$ равен

$$(\varphi, \varphi) = \sum_{\lambda} c_{\lambda}^* c_{\lambda} = N. \quad (11.10)$$

Пусть теперь $c_{\lambda} = \delta_{\lambda\lambda_0}$. Тогда формула (11.10) преобразуется к виду

$$(\varphi, \varphi) = 1, \quad (11.11)$$

а формула (11.7) — к виду

$$\Phi_1 = \hat{a}_{\lambda}^+ \Phi_v. \quad (11.12)$$

Ради простоты ограничимся следующим примером: найдем вероятность самопроизвольного перехода частицы одного сорта из связанного состояния λ в связанное состояние μ с одновременным рождением частицы другого сорта. В данном случае вектор начального состояния выражается формулой (11.12). Вектор конечного состояния можно записать так:

$$\Phi_f = \hat{a}_{\mu}^+ \cdot (2\pi)^{3/2} \int_{\Delta\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^+ d\mathbf{k} \Phi_v, \quad (11.13)$$

где \hat{a}_{μ}^+ — оператор рождения частицы первого сорта в μ -состоянии; $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^+$ — оператор рождения частицы второго сорта в состоянии с волновым числом \mathbf{k} и внутренними квантовыми числами σ , $\Delta\mathbf{k}$ — интервал волновых векторов, в котором заключен волновой вектор частицы второго сорта. Квадрат нормы вектора Φ_f равен

$$(\Phi_f, \Phi_f) = (2\pi)^3 \Delta\mathbf{k}. \quad (11.14)$$

По общим правилам квантовой механики среднее число час-

тиц в конечном состоянии с вектором состояния Φ_f равно

$$P = \frac{(\Phi_f, \hat{S} \hat{a}_\lambda^+ \Phi_v)^2}{(\Phi_f, \Phi_f)} = \frac{1}{\Delta k} \left[\int_{\Delta k} (\hat{a}_\mu^+ \hat{a}_{k\sigma}^+ \Phi_v, \hat{S} \hat{a}_\lambda^+ \Phi_v) dk \right]^2 = \\ = \Delta k (\Phi_{\dots}, \hat{S} \Phi_{\dots})^2. \quad (11.15)$$

В рассматриваемом случае для частиц, находящихся в связанных состояниях (так же, как и в первом случае), импульс не сохраняется, сохраняться будет только энергия; следовательно, квадраты матричных элементов S -матрицы надо подсчитывать по формуле (11.2).

Подставляя выражение (11.2) для матричного элемента в формулу (11.15) и деля на T , получим число частиц второго сорта, рассеянных в интервал dk в единицу времени:

$$P_1 = \frac{c}{2\pi} |M_{if}|^2 \delta(p_{1(0)} - p'_{1(0)} - k_{(0)}) dk; \quad (11.16)$$

интегрируя по $k_{(0)}$, избавляемся от δ -функции и находим

$$P_2 = \frac{c |k| k_{(0)}}{2\pi} |M_{if}|^2 d\Omega' \Big|_{p_{1(0)} - p'_{1(0)} - k_{(0)} = 0}. \quad (11.17)$$

Здесь необходимо еще произвести суммирование по спиновым индексам (или по индексам поляризации).

§ 12. ДИАГРАММЫ ФЕЙНМАНА В ТЕОРИИ ПСЕВДОСКАЛЯРНОГО МЕЗОННОГО ПОЛЯ

В классической теории псевдоскалярного вещественного мезонного поля, взаимодействующего простейшим образом со спинорным полем, плотность гамильтониана взаимодействия выражается формулой

$$\Gamma_{int}(x) = -G \bar{\psi}(x) \hat{\gamma}_5 \psi(x) \phi(x). \quad (12.1)$$

Согласно замечанию, сделанному в конце § 3, при переходе к квантовой теории поля вместо формулы (12.1) получим следующее выражение для оператора плотности энергии взаимодействия (в представлении взаимодействия):

$$\hat{\Gamma}_{int}(x) = \frac{-1}{2} G [\hat{\bar{\psi}}(x) \hat{\gamma}_5, \hat{\psi}(x)] \hat{\phi}(x) = \\ = -GN [\hat{\bar{\psi}}(x) \hat{\gamma}_5 \hat{\phi}(x) \hat{\psi}(x)]. \quad (12.2)$$

Согласно формуле (12.2) S -матрица в мезонной теории получает форму, аналогичную S -матрице в квантовой элект-

родинамике. Матричный элемент от \hat{S}_1 равен нулю, так как энергия и импульс не сохраняются при излучении или поглощении свободного мезона свободным нуклоном. Поэтому рассмотрим матричный элемент от \hat{S}_2 , который имеет вид

$$\hat{S}_2 = \left(\frac{iG}{\hbar c}\right)^2 \frac{1}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \{ \hat{T} [\hat{\psi}(x_1) \hat{\gamma}_5 \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \hat{\gamma}_5 \hat{\psi}(x_2)] \times \\ \times \hat{T} [\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] \}. \quad (12.3)$$

Здесь T -произведения для нуклонных и мезонных операторов записаны отдельно, ибо они коммутируют между собой. Диаграммы, соответствующие отдельным членам матричного элемента от \hat{S}_2 , имеют такой же вид, как диаграммы, представленные на рис. 4.

Рассмотрим отдельные члены матричного элемента от \hat{S}_2 . Выражение $\hat{N}(\hat{\psi}\hat{\psi}\hat{\psi})\hat{N}(\hat{\phi}\hat{\phi})$ имеет вид $(\hat{S}_1)^2$, ему соответствует граф на рис. 4, а. Матричный элемент от $(\hat{S}_1)^2$ равен нулю, так как энергия и импульс не сохраняются. Выражению $(\hat{\psi}\hat{\phi}\hat{\phi})(\hat{\psi}\hat{\phi}\hat{\psi})$ соответствует диаграмма на рис. 4, б;

она описывает процессы рассеяния нуклона на нуклоне, антинуклона на нуклоне. Диаграмме на рис. 4, в соответ-

ствует выражение $(\hat{\psi}\hat{\phi}\hat{\phi})(\hat{\psi}\hat{\phi}\hat{\phi})$; эта диаграмма описывает рассеяние мезона на нуклоне, рассеяние мезона на антинуклоне, аннигиляцию нуклона и антинуклона с излучением двух мезонов, рождение пары нуклон—антинуклон двумя взаимодей-

ствующими мезонами. Выражению $(\hat{\psi}\hat{\phi}\hat{\phi})(\hat{\psi}\hat{\phi}\hat{\phi})$ сопоставляется граф на рис. 4, г, описывающий взаимодействие мезона с нуклонно-антинуклонным вакуумом (собственная энергия мезона). Член $(\hat{\psi}\hat{\phi}\hat{\psi})(\hat{\psi}\hat{\phi}\hat{\psi})$ и соответствующий ему граф на рис. 4, д описывают взаимодействие нуклона или антинуклона с вакуумом мезонного поля (собственная энер-

гия нуклона). Наконец, выражение $(\hat{\psi}\hat{\phi}\hat{\phi})(\hat{\psi}\hat{\phi}\hat{\psi})$, диаграмма Фейнмана которого представлена на рис. 4, е, описывает виртуальное образование пары нуклон—антинуклон и мезона с последующим поглощением и пары, и мезона (переход вакуум-вакуум, т. е. флуктуации вакуума).

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОНОВ С ФОТОНАМИ

§ 1. СПОНТАННОЕ (САМОПРОИЗВОЛЬНОЕ) ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНА

Рассмотрим возбужденный атом. Будем считать, что возбуждение вызвано переходом только одного электрона на более высокий энергетический уровень. Найдем вероятность спонтанного перехода электрона на первоначальный энер-



Рис. 10

гетический уровень с одновременным излучением соответствующего фотона. Этот переход описывается членом S -матрицы первого порядка \hat{S}_1 и графом на рис. 10.

Электроны в начале и конце процесса находятся в связанном состоянии. Поэтому обе электронные линии на рис. 10 необходимо описывать не плоской волной, а соответствующими волновыми функциями связанных состояний. Обозначим: $u_i e^{-ip(0)x(0)}$ — функция, соответствующая входящей линии на графе Фейнмана; $\bar{u}_f e^{ip(0)x(0)}$ — функция, соответствующая выходящей линии на графе Фейнмана, где u_i и \bar{u}_f — не зависящие от времени решения уравнения Дирака для электрона в кулоновском поле. Фотонной линии в матричном элементе соответствует множитель

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k(0)}} e_{\lambda k}^{(\mu)} e^{-ikx}.$$

Учитывая сказанное, для матричного элемента спонтанного излучения фотона получаем выражение

$$S_{i \rightarrow f} = \frac{ie}{\hbar c} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k_{(0)}}} e_{\lambda k}^{(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} dV dx_{(0)} \bar{u}_f \hat{\gamma}_\mu u_i \times \\ \times e^{-ikr + i(k_{(0)} - p_{(0)} + p'_{(0)})x_{(0)}} = \frac{-e}{\sqrt{\hbar c k_{(0)}}} \times \\ \times e_{\lambda k}^{(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} dV u_f^* \hat{\beta} \hat{\gamma}_\mu u_i e^{-ikr} \delta(p_{(0)} - p'_{(0)} - k_{(0)}). \quad (1.1)$$

В этой формуле поперечное электромагнитное поле описывается при помощи множителей $e_{1k}^{(\mu)}$ и $e_{2k}^{(\mu)}$. Согласно выражению (II.5.12) имеем

$$ie_{\lambda k}^{(\mu)} \hat{\beta} \hat{\gamma}_\mu = i\hat{\beta} \hat{\gamma}_\lambda = \hat{a}_\lambda \quad (\lambda = 1, 2). \quad (1.2)$$

Учитывая это, найдем квадрат модуля матричного элемента $S_{i \rightarrow f}$:

$$|S_{i \rightarrow f}|^2 = \frac{e^2}{\hbar c k_{(0)}} \left[\int u_f^* \hat{a}_\lambda u_i e^{-ikr} dV \right]^2 [\delta(p_{(0)} - p'_{(0)} - k_{(0)})]^2. \quad (1.3)$$

Учитывая выражение (1.3), по формуле (III.11.17) найдем вероятность испускания фотона в единицу времени:

$$P = \frac{c}{2\pi} |M_{if}|^2 k_{(0)}^2 d\Omega', \quad (1.4)$$

или окончательно

$$P = \frac{e^2 k_{(0)}}{2\pi\hbar} d\Omega' \left| \int u_f^* \hat{a}_\lambda u_i e^{-ikr} dV \right|^2, \quad (1.5)$$

где $d\Omega'$ — элемент телесного угла в направлении излучения фотона. Эта вероятность не равна нулю, если квадрат матричного элемента

$$M'_{if} = \int u_f^* \hat{a}_\lambda u_i e^{-ikr} dV \quad (1.6)$$

не равен нулю. Матричный элемент M'_{if} в нерелятивистском случае в первом приближении равен матричному элементу дипольного момента

$$\tilde{d}_{if} = e \int u_f^* r u_i dV, \quad (1.7)$$

где u_i и u_f — собственные функции стационарного уравнения Шредингера для электрона в потенциальном электростатическом поле атомного ядра. Формула (1.7) получается из равенства (1.6) разложением экспоненты e^{-ik} в степенной ряд. Исследование выражения для d_{if} позволяет найти правила отбора для дипольного излучения.

§ 2. КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ

Комптовское рассеяние — рассеяние фотона на электро-не. Этот процесс в наинизшем приближении описывается двумя диаграммами Фейнмана второго порядка (рис. 11).

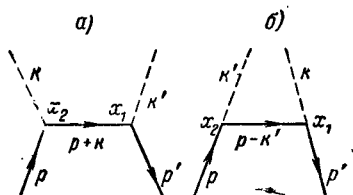


Рис. 11

На первом графе происходит сначала поглощение фотона с импульсом $\hbar k$, а затем испускание фотона с импульсом $\hbar k'$, на втором графе — наоборот, сначала излучается фотон с импульсом $\hbar k'$, а затем поглощается фотон с импульсом $\hbar k$. Матричный элемент для изучаемого процесса в первом порядке равен нулю, а во втором порядке равен

$$S_{if} = S_{if}^{(a)} + S_{if}^{(b)}, \quad (2.1)$$

где

$$S_{if}^{(a)} = - \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 \frac{\hbar c}{(2\pi)^9 \sqrt{k_{(0)} k_{(0')}}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 d^4 x_2 e^{i(kx_2 - k'x_1 - p'x_1 + px_2)} \bar{c}_{\gamma, p', s'} e^{i\nu} (\hat{\gamma}_\nu)_{\gamma\delta} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d^4 q \frac{[i\hat{\gamma}_\rho q_\rho - \chi]_{\beta\alpha}}{\lambda^2 + q^2 + \chi^2} e^{iq(x_1 - x_2)} e^{i(\mu\nu)} (\hat{\gamma}_\mu)_{\alpha\beta} c_{\beta, p, s} \quad (2.2)$$

Вводя обозначения для скалярных произведений:

$$\hat{E} = ie^{(i\mu)} \hat{\gamma}_\mu, \quad \hat{Q} = i\hat{\gamma}_\rho q_\rho \quad (2.3)$$

и интегрируя по x_1 и x_2 , преобразуем формулу (2.2) к виду

$$S_{if}^{(a)} = \frac{e^2}{2\pi\hbar c \sqrt{k_{(0)} k'_{(0)}}} \bar{c}_{\nu, p's'} \hat{E}'_{\nu\delta} \int_{-\infty}^{\infty} d^4q \frac{(\hat{Q}-\chi)_{\delta\alpha}}{q^2+\chi^2} \hat{E}_{\alpha\beta} \times \\ \times c_{\beta, ps} \delta^4(k+p-q) \delta^4(k'-p'-q). \quad (2.4)$$

Интегрируя в (2.4) по q , имеем

$$S_{if}^{(a)} = \frac{e^2}{2\pi\hbar c \sqrt{k_{(0)} k'_{(0)}}} \bar{c}_{\nu, p's'} \hat{E}'_{\nu\delta} \frac{[(\hat{P}+\hat{K})-\chi]_{\delta\alpha}}{(\rho+k)^2+\chi^2} \hat{E}_{\alpha\beta} \times \\ \times c_{\beta, ps} \delta^4(\rho+k-p'-k'). \quad (2.5)$$

Матричный элемент $S_{if}^{(b)}$ получим из $S_{if}^{(a)}$ заменой \hat{E}' на \hat{E} , $(\hat{P}+\hat{K})$ на $(\hat{P}-\hat{K}')$, $(\rho+k)$ на $(\rho-k')$:

$$S_{if}^{(b)} = \frac{e^2}{2\pi\hbar c \sqrt{k_{(0)} k'_{(0)}}} \bar{c}_{\nu, p's'} \hat{E}_{\nu\delta} \frac{[(\hat{P}-\hat{K}')-\chi]_{\delta\alpha}}{(\rho-k')^2+\chi^2} \hat{E}'_{\alpha\beta} \times \\ \times c_{\beta, ps} \delta^4(\rho+k-p'-k'). \quad (2.6)$$

Из выражений (2.1), (2.5) и (2.6) находим

$$|S_{if}|^2 = \frac{e^4}{(2\pi\hbar c)^2 k_{(0)} k'_{(0)}} \left[\bar{c}_{\nu, p's'} \left\{ \hat{E}'_{\nu\delta} \frac{[(\hat{P}+\hat{K})-\chi]_{\delta\alpha}}{(\rho+k)^2+\chi^2} \hat{E}_{\alpha\beta} + \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{E}_{\nu\delta} \frac{[(\hat{P}-\hat{K}')-\chi]_{\delta\alpha}}{(\rho-k')^2+\chi^2} \hat{E}'_{\alpha\beta} \right\} c_{\beta, ps} \right]^2 \cdot [\delta^4(\rho+k-p'-k')]^2; \quad (2.7)$$

для удобства выражение в фигурных скобках обозначим через \hat{L} :

$$\hat{L} = \hat{E}' \frac{\hat{P}+\hat{K}-\chi}{(\rho+k)^2+\chi^2} \hat{E} + \hat{E} \frac{\hat{P}-\hat{K}'-\chi}{(\rho-k')^2+\chi^2} \hat{E}'. \quad (2.8)$$

Выберем систему координат, в которой электрон вначале покоился, т. е. в которой $p = (0, 0, 0, i\chi)$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} (p+k)^2 + \chi^2 &= (p, p) + (k, k) + 2(p, k) + \chi^2 = 2(p, k) = -2\chi k_{(0)}, \\ (p-k')^2 + \chi^2 &= (p, p) + (k', k') - 2(p, k') + \chi^2 = \\ &= -2(p, k') = 2\chi k'_{(0)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем формулу

$$\begin{aligned} \hat{M} &\equiv -2\chi k_{(0)} k'_{(0)} \hat{L} = k'_{(0)} \hat{E}' (\hat{P} + \hat{K} - \chi) \hat{E} - \\ &- k_{(0)} \hat{E} (\hat{P} - \hat{K}' - \chi) \hat{E}'. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Упростим \hat{M} . Учитывая свойства матриц Дирака, получим

$$\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} = -2(a, b). \quad (2.10)$$

Используя формулу (2.10), в которую вместо \hat{a} и \hat{b} подставлены \hat{P} и \hat{E} (или \hat{E}'), а вместо a и b — p и e (или e'), представим \hat{M} в виде

$$\begin{aligned} \hat{M} &= k'_{(0)} \hat{E}' \hat{K} \hat{E} - k'_{(0)} \hat{E}' \hat{E} (\hat{P} + \chi) - 2(p, e) k_{(0)} \hat{E}' + \\ &+ k_{(0)} \hat{E} \hat{K}' \hat{E}' + k_{(0)} \hat{E} \hat{E}' (\hat{P} + \chi) + 2(p, e') k_{(0)} \hat{E}. \end{aligned}$$

Учитывая, что в (2.7) оператор \hat{M} действует на волновую функцию электрона $c(p)$ в импульсном представлении, а также используя уравнение Дирака в импульсном пространстве:

$$(\hat{P} + \chi) c = (i\hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi) c = 0,$$

перепишем выражение для \hat{M} в виде

$$\begin{aligned} \hat{M} &= k'_{(0)} \hat{E}' \hat{K} \hat{E} - 2(p, e) k_{(0)} \hat{E}' + k_{(0)} \hat{E} \hat{K}' \hat{E}' + \\ &+ 2(p, e') k_{(0)} \hat{E}. \end{aligned}$$

С помощью калибровочного преобразования подберем такие векторы поляризации, которые имеют только пространственные компоненты. В этом случае

$$(p, e) = (p, e') = 0, \quad (2.11)$$

так как вектор p имеет только временную компоненту, а векторы e и e' — только пространственные компоненты. Поэтому для \hat{M} получаем выражение

$$\hat{M} = k'_{(0)} \hat{E}' \hat{K} \hat{E} + k_{(0)} \hat{E} \hat{K}' \hat{E}'. \quad (2.12)$$

Согласно формуле (2.8) имеем

$$\begin{aligned} (\bar{c}_{p's'} \hat{L} c_{ps})^+ &= (i c_{p's'}^* \hat{\beta} \hat{L} c_{ps})^+ = -i c_{ps}^* \hat{L}^+ \hat{\beta} c_{p's'} = \\ &= -i c_{ps}^* \hat{\beta} \hat{\beta} \hat{L}^+ \hat{\beta} c_{p's'} = -\bar{c}_{ps} \bar{L} c_{p's'}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где введено обозначение $\bar{L} = \hat{\beta} \hat{L}^+ \hat{\beta}$. Используя это, напишем

$$(\bar{c}_{p's'} \hat{L} c_{ps})^2 = -(\bar{c}_{p's'} \hat{L} c_{ps}) (\bar{c}_{ps} \bar{L} c_{p's'}). \quad (2.14)$$

Преобразуем далее выражение для $\bar{M} = \hat{\beta} \hat{M}^+ \hat{\beta}$:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \hat{\beta} [k'_{(0)} \hat{E}' \hat{K} \hat{E} + k_{(0)} \hat{E} \hat{K}' \hat{E}']^+ \hat{\beta} = \\ &= k'_{(0)} \hat{\beta} \hat{E}^+ \hat{K}^+ \hat{E}^+ \hat{\beta} + k_{(0)} \hat{\beta} \hat{E}'^+ \hat{K}'^+ \hat{E}'^+ \hat{\beta} = \\ &= k'_{(0)} \hat{E} \hat{K} \hat{E}' + k_{(0)} \hat{E}' \hat{K}' \hat{E}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где учтено, что

$$\hat{\gamma}_v^+ = \hat{\gamma}_v, \quad \hat{\beta} \hat{K}^+ \hat{\beta} = \hat{K}, \quad \hat{\beta} \hat{E}^+ \hat{\beta} = \hat{E}.$$

Выражение для $|S_{if}|^2$ дает вероятность рассеяния фотона электроном с определенным спином в начальном и конечном состояниях.

Если электрон находится в состоянии с неопределенным спином, то следует произвести усреднение по спину в начальном состоянии и суммирование по спину электрона в конечном состоянии, т. е. необходимо определить сумму

$$\langle |S_{if}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 \sum_{s'=1}^2 |S_{if}|^2.$$

Согласно равенству (2.13) имеем

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 \sum_{s'=1}^2 [\bar{c}_{\alpha, p's'} (\hat{L})_{\alpha\beta} c_{\beta, ps}]^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{s'=1}^2 \sum_{s=1}^2 [\bar{c}_{\alpha, p's'} (\hat{L})_{\alpha\beta} c_{\beta, ps}] \cdot [\bar{c}_{\gamma, ps} (\bar{L})_{\gamma\delta} c_{\delta, p's'}] = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{s'=1}^2 \bar{c}_{\alpha, p's'} (\hat{L})_{\alpha\beta} \left\{ \sum_{s=1}^2 c_{\beta, ps} \bar{c}_{\gamma, ps} \right\} (\bar{L})_{\gamma\delta} c_{\delta, p's'}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Учитывая дважды формулу (III.7.35)

$$\sum_{s=1}^2 \bar{c}_{\alpha, p_s} c_{\beta, p_s} = \frac{i}{2\rho_{(0)}} (-i\hat{\gamma}_\nu p_\nu + \chi)_{\beta\alpha},$$

преобразуем выражение (2.16) к виду

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sum_{s'=1}^2 \left[\bar{c}_{\alpha, p's'} (\hat{L})_{\alpha\beta} \frac{-i(\hat{P}-\chi)_{\beta\gamma}}{2\rho_{(0)}} (\bar{L})_{\gamma\delta} c_{\delta, p's'} \right] = \\ &= \frac{1}{8\rho_{(0)} p_{(0)}} (i\hat{\gamma}_\nu p_\nu - \chi)_{\delta\alpha} (\hat{L})_{\alpha\beta} (\hat{P}-\chi)_{\beta\gamma} (\bar{L})_{\gamma\delta} = \\ &= \frac{1}{8\rho_{(0)} p_{(0)}} [(\hat{P}' - \chi) \hat{L} (\hat{P} - \chi) \bar{L}]_{\delta\delta} = \\ &= \frac{1}{32\rho_{(0)} p'_{(0)} (k_{(0)} k'_{(0)} \chi)^2} \text{Sp} (\hat{P}' - \chi) \hat{M} (\hat{P} - \chi) \bar{M}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Введем обозначение

$$\hat{B} = (\hat{P}' - \chi) \hat{M} (\hat{P} - \chi) \bar{M}. \quad (2.18)$$

Для вычисления $\text{Sp} \hat{B}$ воспользуемся следующими теоремами.

Теорема 1. Можно циклически переставлять матричные сомножители под знаком следа.

Так, например,

$$\text{Sp} \hat{A} \hat{B} \hat{C} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} C_{\gamma\alpha} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} C_{\gamma\alpha} A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} = \text{Sp} \hat{C} \hat{A} \hat{B}. \quad (2.19)$$

Теорема 2. След произведения нечетного числа матриц $\hat{\gamma}_\mu$ равен нулю.

Доказательство. Воспользуемся формулой

$$\hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_\mu + \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_5 = 0, \quad (2.20)$$

или

$$\hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_5^{-1} = -\hat{\gamma}_\mu,$$

откуда

$$\hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_{\mu_1} \hat{\gamma}_{\mu_2} \dots \hat{\gamma}_{\mu_n} (\hat{\gamma}_5)^{-1} = (-1)^n \hat{\gamma}_{\mu_1} \dots \hat{\gamma}_{\mu_n}. \quad (2.21)$$

Взяв следы обеих частей равенства (2.21) и учтя теорему 1, приходим к соотношению

$$(-1)^n \text{Sp}(\hat{\gamma}_{\mu_1} \dots \hat{\gamma}_{\mu_n}) = \text{Sp}(\hat{\gamma}_{\mu_1} \dots \hat{\gamma}_{\mu_n}), \quad (2.22)$$

откуда видно, что след произведения нечетного числа матриц $\hat{\gamma}_\mu$ равен нулю. В частности

$$\text{Sp} \hat{\gamma}_\mu = 0. \quad (2.23)$$

Аналогично находим

$$\text{Sp} \hat{\gamma}_5 = -\text{Sp}[\hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_\mu^{-1}] = -\text{Sp} \hat{\gamma}_5 = 0. \quad (2.24)$$

Теорема 3. Если n — четное число, то

$$\frac{1}{4} \text{Sp}(\hat{\gamma}_{\nu_1} \dots \hat{\gamma}_{\nu_n}) = \sum_P (-1)^P \delta_{ik} \delta_{lm} \dots \quad (n = 2n'), \quad (2.25)$$

где $i, k, l, m \dots$ — некоторая комбинация индексов $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \dots$. Сумма в выражении (2.25) берется по всем возможным комбинациям пар чисел $(i, k), (l, m) \dots$; число членов суммы, т. е. число таких комбинаций, равно

$$\frac{n!}{2^{n/2} \left(\frac{n}{2}\right)!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1).$$

Число P в (2.25) определяется следующим образом. Каждой матрице $\hat{\gamma}_\nu$ сопоставляем точку на окружности, располагаем эти точки в том же порядке, в котором расположены матрицы $\hat{\gamma}_\nu$, и соединяем точки попарно прямыми линиями.

Тогда каждой прямой линии, соединяющей точки i и k , соответствует множитель δ_{ik} , а каждому способу соединения точек, т. е. каждому разбиению индексов i, k, l, m, \dots на пары $(i, k), (l, m), \dots$ — член в сумме (2.25), причем P — число точек пересечения прямых линий.

Проверим эту теорему для частных случаев. Пусть сначала $n = 2$, тогда согласно перестановочным соотношениям

$$\hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu + \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (2.26)$$

имеем

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu) &= \text{Sp}(\hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\mu) = \frac{1}{2} \text{Sp}(\hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\mu + \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu) = \\ &= \delta_{\mu\nu} \text{Sp} I = 4\delta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где учтено, что

$$\text{Sp } I = 4. \quad (2.28)$$

Пусть теперь $n = 4$; используя теорему 1 и формулы (2.26) и (2.27), получаем

$$\begin{aligned} \text{Sp } \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\rho \hat{\gamma}_\sigma &= \text{Sp} [2\delta_{\mu\nu} - \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\mu] \hat{\gamma}_\rho \hat{\gamma}_\sigma = 2\delta_{\mu\nu} \text{Sp } \hat{\gamma}_\rho \hat{\gamma}_\sigma - \\ &- \text{Sp } \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\rho \hat{\gamma}_\sigma = 8\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \text{Sp } \hat{\gamma}_\sigma \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\rho = 8\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \\ &- \text{Sp} [2\delta_{\sigma\nu} - \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\sigma] \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\rho = 8\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - 8\delta_{\sigma\nu} \delta_{\mu\rho} + \\ &+ \text{Sp } \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\sigma \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\rho = 8\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - 8\delta_{\sigma\nu} \delta_{\mu\rho} + \text{Sp } \hat{\gamma}_\rho \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\sigma \hat{\gamma}_\mu = \\ &= 8\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - 8\delta_{\sigma\nu} \delta_{\mu\rho} + \text{Sp} [2\delta_{\rho\nu} - \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\rho] \hat{\gamma}_\sigma \hat{\gamma}_\mu = \\ &= 8\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - 8\delta_{\sigma\nu} \delta_{\mu\rho} + 8\delta_{\rho\nu} \delta_{\sigma\mu} - \text{Sp } \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\rho \hat{\gamma}_\sigma \hat{\gamma}_\mu, \end{aligned}$$

откуда следует окончательная формула

$$\frac{1}{4} \text{Sp} (\hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\rho \hat{\gamma}_\sigma) = \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\sigma\nu} \delta_{\mu\rho} + \delta_{\rho\nu} \delta_{\sigma\mu}. \quad (2.29)$$

Теорема 4. Из формул (2.25), (2.27), (2.29) следует, что след произведения матриц $\hat{\gamma}_\nu$ равен следу произведения матриц $\hat{\gamma}_\nu$, записанных в зеркальном порядке, т. е.

$$\text{Sp } \hat{\gamma}_{\nu_1} \hat{\gamma}_{\nu_2} \dots \hat{\gamma}_{\nu_n} = \text{Sp } \hat{\gamma}_{\nu_n} \dots \hat{\gamma}_{\nu_2} \hat{\gamma}_{\nu_1}. \quad (2.30)$$

Если $\hat{A} = ia_\mu \hat{\gamma}_\mu$, $\hat{B} = ib_\nu \hat{\gamma}_\nu$, ..., где $a, b \dots$ попарно коммутируют, то из теорем 2 и 3 следуют формулы:

$$\text{Sp } \hat{A} = \text{Sp} (\hat{A} \hat{B} \hat{C}) = \text{Sp} (\hat{A} \hat{B} \hat{C} \hat{D} \hat{E}) = \dots = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{4} \text{Sp } \hat{A}_{\nu_1} \dots \hat{A}_{\nu_n} = \pm \sum_P (-1)^P (a_i a_k) (a_l a_m) \dots \quad (2.32)$$

Если $n = 2, 4$, то формула (2.32) соответственно принимает вид

$$\frac{1}{4} \text{Sp} (\hat{A} \hat{B}) = -(ab) = -a_\mu b_\mu, \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{4} \text{Sp} (\hat{A} \hat{B} \hat{C} \hat{D}) = (ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc). \quad (2.34)$$

Будем использовать также соотношения:

$$\text{Sp } \hat{\gamma}_4 A = 4_i a_{(4)} = -4a_{(0)}, \quad (2.33')$$

$$\text{Sp } \hat{\gamma}_4 \hat{A} \hat{B} \hat{C} = 4 \{ a_{(0)} (bc) - (ac) b_{(0)} + (ab) c_{(0)} \}, \quad (2.34')$$

которые можно получить из формул (2.33) и (2.34).

Переходя к вычислению $\text{Sp } \hat{B}$, согласно формуле (2.18) имеем

$$\begin{aligned} \text{Sp } \hat{B} &= \text{Sp } (\hat{P}' - \chi) \hat{M} (\hat{P} - \chi) \bar{M} = \\ &= \text{Sp } \hat{P}' \hat{M} \hat{P} \bar{M} - \chi \text{Sp } \hat{P}' \hat{M} \bar{M} - \\ &\quad - \chi \text{Sp } \hat{M} \hat{P} \bar{M} + \chi^2 \text{Sp } \hat{M} \bar{M}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где второй и третий члены равны нулю согласно теореме 2. Поэтому из равенства (2.35) находим

$$\text{Sp } \hat{B} = \text{Sp } \hat{P}' \hat{M} \hat{P} \bar{M} + \chi^2 \text{Sp } \hat{M} \bar{M} + \text{Sp } (\hat{P}' - \hat{P}) \hat{M} \hat{P} \bar{M}. \quad (2.36)$$

Рассмотрим первый член в этом выражении. Учитывая равенства (2.10), (2.11) и соотношения

$$(p, k) = -\chi k_{(0)}, \quad (p, k') = -\chi k'_{(0)}, \quad (2.37)$$

произведем перестановку второго и третьего множителей в произведении под знаком следа в первом члене формулы (2.36). В результате получим

$$\begin{aligned} \text{Sp } \hat{P}' \hat{M} \hat{P} \bar{M} &= \text{Sp } \hat{P}' (k'_{(0)} \hat{E} \hat{K} \hat{E} + k_{(0)} \hat{E} \hat{K}' \hat{E}') \hat{P} \bar{M} = \\ &= -\text{Sp } \hat{P}' \hat{P} \hat{M} \bar{M} - 2\text{Sp } \hat{P}' (k'_{(0)} \hat{E}' \hat{E} \chi k_{(0)} + k_{(0)} \hat{E} \hat{E}' \chi k'_{(0)}) \bar{M}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Пусть $a = (a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)}, a_{(4)})$ — некоторый четырехмерный вектор. Тогда согласно (2.26) можно написать

$$\begin{aligned} \hat{a}^2 &= - (a_{(1)} \hat{\gamma}_1 + a_{(2)} \hat{\gamma}_2 + a_{(3)} \hat{\gamma}_3 + a_{(4)} \hat{\gamma}_4)^2 = \\ &= - \sum_{\mu=0}^4 a_{\mu}^2 = -a^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

В частном случае отсюда имеем

$$\hat{P}^2 = -p^2 = \chi^2, \quad -\hat{K}^2 = k^2 = 0, \quad \hat{E}^2 = -\hat{I}. \quad (2.40)$$

Поэтому сумма первых двух членов в выражении (2.36) равна

$$\begin{aligned} G_1 &= \text{Sp } \hat{P} \hat{M} \hat{P} \bar{M} + \chi^2 \text{Sp } \hat{M} \bar{M} = \\ &= -2\chi k_{(0)} k'_{(0)} \text{Sp } \hat{P} (\hat{E}' \hat{E} + \hat{E} \hat{E}') \bar{M} = \\ &= -2\chi k_{(0)} k'_{(0)} \text{Sp } \hat{P} (\hat{E}' \hat{E} + \hat{E} \hat{E}') \times \\ &\quad \times (k'_{(0)} \hat{E} \hat{K}' \hat{E}' + k_{(0)} \hat{E}' \hat{K}' \hat{E}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Подставляя в формулу (2.41)

$$(\hat{E}' \hat{E} + \hat{E} \hat{E}') = -2(e, e'),$$

находим, что

$$G_1 = 4\chi k_{(0)} k'_{(0)} (e, e') \text{Sp } \hat{P} (k'_{(0)} \hat{E} \hat{K}' \hat{E}' + k_{(0)} \hat{E}' \hat{K}' \hat{E}).$$

Используя затем формулу (2.34), преобразуем G_1 к виду

$$G_1 = 32 [\chi k_{(0)} k'_{(0)} (e, e')]^2 = 32 [\chi k_{(0)} k'_{(0)} \cos \theta]^2, \quad (2.42)$$

где θ — угол между векторами e и e' .

Рассмотрим теперь третий член в выражении (2.36). Используя закон сохранения энергии-импульса

$$p + k = p' + k', \quad (2.43)$$

или

$$\hat{P} + \hat{K} = \hat{P}' + \hat{K}', \quad (2.43')$$

перепишем этот член в виде

$$\begin{aligned} G_2 &= \text{Sp} (\hat{P}' - \hat{P}) \hat{M} \hat{P} \bar{M} = \text{Sp} (\hat{K} - \hat{K}') \hat{M} \hat{P} \bar{M} = \\ &= (k'_{(0)})^2 \text{Sp} (\hat{K} - \hat{K}') \hat{E}' \hat{K}' \hat{E} \hat{P} \hat{E} \hat{K}' \hat{E}' + \\ &+ k_{(0)} k'_{(0)} \text{Sp} (\hat{K} - \hat{K}') \hat{E}' \hat{K}' \hat{E} \hat{P} \hat{E}' \hat{K}' \hat{E} + \\ &+ k_{(0)} k'_{(0)} \text{Sp} (\hat{K} - \hat{K}') \hat{E} \hat{K}' \hat{E}' \hat{P} \hat{E} \hat{K}' \hat{E}' + \\ &+ (k_0)^2 \text{Sp} (\hat{K} - \hat{K}') \hat{E} \hat{K}' \hat{E}' \hat{P} \hat{E}' \hat{K}' \hat{E}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Согласно теоремам 1 и 4 второй и третий члены в формуле (2.44) равны между собой. Поэтому имеем

$$G_2 = (k'_{(0)})^2 i_2 + 2k_{(0)} k'_{(0)} (i_3 + i_3) + k_{(0)}^2 i_4, \quad (2.45)$$

где

$$i_1 = \text{Sp} (\hat{K} - \hat{K}') \hat{E}' \hat{K} \hat{E} \hat{P} \hat{E} \hat{K} \hat{E}',$$

$$i_2 = \text{Sp} \hat{K} \hat{E} \hat{K} \hat{E} \hat{P} \hat{E}' \hat{K} \hat{E},$$

$$i_3 = \text{Sp} \hat{K}' \hat{E}' \hat{K} \hat{P} \hat{E}' \hat{K}' \hat{E},$$

$$i_4 = \text{Sp} (\hat{K} - \hat{K}') \hat{E} \hat{K}' \hat{E}' \hat{P} \hat{E}' \hat{K}' \hat{E}.$$

Переставляя в выражении для i_1 оператор \hat{P} с двумя операторами, стоящими справа от него, согласно формулам (2.10) и (2.11) получим

$$\begin{aligned} i_1 &= -\text{Sp} (\hat{K} - \hat{K}') \hat{E}' \hat{K} \hat{P} \hat{K} \hat{E}' = \\ &= -2\chi k_{(0)} \text{Sp} (\hat{K} - \hat{K}') \hat{E}' \hat{K} \hat{E}'. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Переставляя местами второй и третий операторы в правой части (2.46), согласно соотношениям (2.10), (2.11) и (2.40) найдем, что

$$i_1 = -2\chi k_{(0)} \text{Sp} (\hat{K} - \hat{K}') \hat{K} + 4(e', k) \chi k_{(0)} \text{Sp} (\hat{K} - \hat{K}') \hat{E}', \quad (2.47)$$

а учитывая, что $(k', e') = 0$ и $\hat{K}^2 = 0$, по формуле (2.33) получаем

$$i_1 = 8\chi k_{(0)} (k, k') + 16(e', k)^2 \chi k_{(0)}. \quad (2.48)$$

Аналогичные вычисления для i_4 дают формулу

$$i_4 = 8\chi k'_{(0)} (k, k') + 16\chi k'_{(0)} (e, k')^2. \quad (2.49)$$

Преобразуем далее выражение для i_2 :

$$\begin{aligned} i_2 &= -2\text{Sp} \hat{K} \hat{E} \hat{P} \hat{E}' \hat{K}' \hat{E} (e', k) = \\ &= -2(e', k) \text{Sp} \hat{E} \hat{K} \hat{E} \hat{P} \hat{E}' \hat{K}' = 2(e', k) \text{Sp} \hat{K} \hat{P} \hat{E}' \hat{K}'. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Применяя формулу (2.34), приведем i_2 к виду

$$i_2 = -8\chi k'_{(0)} (k, e')^2. \quad (2.51)$$

Аналогично для i_3 найдем

$$i_3 = -8\chi k_{(0)} (k', e)^2. \quad (2.52)$$

Используя формулы (2.48), (2.49), (2.51) и (2.52), преобразуем G_2 к следующему виду:

$$G_2 = 8\chi k_{(0)} k'_{(0)} (k, k') (k_{(0)} - k'_{(0)}). \quad (2.53)$$

Умножая равенство (2.43) на k' и учитывая, что $k^2 = 0$, получим

$$(p, k') + (k, k') = (p', k'),$$

откуда

$$(k, k') = (p', k') + \chi k'_{(0)}. \quad (2.54)$$

Для того чтобы определить (p', k') , возведем уравнение (2.43) в квадрат:

$$p^2 + k^2 + 2(p, k) = p'^2 + k'^2 + 2(p', k'). \quad (2.55)$$

Так как

$$p^2 = p'^2 = -\chi^2, \quad k^2 = k'^2 = 0,$$

то из равенства (2.55) имеем

$$(p', k') = (p, k) = -\chi k_{(0)}. \quad (2.56)$$

Подставляя это выражение для (p', k') в формулу (2.54), находим

$$(k, k') = \chi (k'_{(0)} - k_{(0)}) \quad (2.57)$$

и получаем

$$G_2 = 8\chi^2 k_{(0)} k'_{(0)} (k'_{(0)} - k_{(0)})^2. \quad (2.58)$$

Складывая G_1 и G_2 , имеем

$$\text{Sp } \hat{B} = 8\chi^2 k_{(0)}^2 k'_{(0)} \left[4 \cos^2 \theta + \frac{k_{(0)}}{k'_{(0)}} + \frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} - 2 \right] \quad (2.59)$$

Согласно равенствам (2.7), (2.16), (2.18) и (2.59) квадрат модуля матричного элемента M_{if} равен

$$|M_{if}|^2 = \frac{e^4}{(4\pi\hbar c)^2 k_{(0)} k'_{(0)} p_{(0)} p'_{(0)}} \left[4 \cos^2 \theta + \frac{k_{(0)}}{k'_{(0)}} + \frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} - 2 \right]. \quad (2.60)$$

Подставляя это выражение для $|M_{if}|^2$ в формулу (III.10.36), находим эффективное дифференциальное поперечное сечение для Комpton-эффекта:

$$d\sigma = \frac{e^4 k'_{(0)} d\Omega}{\left| \frac{\partial \Sigma p'_{\lambda(0)}}{\partial k'_{(0)}} \right| (2\hbar c)^2 k_{(0)} p_{(0)} p'_{(0)}} \times \\ \times \left[4 \cos^2 \theta + \frac{k_{(0)}}{k'_{(0)}} + \frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} - 2 \right]. \quad (2.61)$$

Исследуем выражение $\frac{\partial \Sigma p'_{\lambda(0)}}{\partial k'_{(0)}}$. Имеем

$$\begin{aligned} \Sigma p'_{\lambda(0)} &= k'_{(0)} + p'_{(0)} = k'_{(0)} + \sqrt{p'^2 + \chi^2} = \\ &= k'_{(0)} + \sqrt{(k - k')^2 + \chi^2}, \end{aligned}$$

или

$$\Sigma p'_{\lambda(0)} = k'_{(0)} + \sqrt{k_{(0)}^2 + k'^2_{(0)} - 2k_{(0)} k'_{(0)} \cos \vartheta + \chi^2}, \quad (2.62)$$

где ϑ — угол рассеяния между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' .

Применяя закон сохранения энергии, из формулы (2.62) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma p'_{\lambda(0)}}{\partial k'_{(0)}} &= 1 + \frac{k'_{(0)} - k_{(0)} \cos \vartheta}{\sqrt{k_{(0)}^2 + k'^2_{(0)} - 2k_{(0)} k'_{(0)} \cos \vartheta + \chi^2}} = \\ &= 1 + \frac{k'_{(0)} - k_{(0)} \cos \vartheta}{\sqrt{p'^2 + \chi^2}} = \frac{p'_{(0)} + k'_{(0)} - k_{(0)} \cos \vartheta}{p'_{(0)}} = \\ &= \frac{\chi + k_{(0)} (1 - \cos \vartheta)}{p'_{(0)}}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Рассмотрим скалярное произведение (k, k') :

$$(k, k') = \mathbf{k}\mathbf{k}' - k_{(0)} k'_{(0)} = -k_{(0)} k'_{(0)} (1 - \cos \vartheta). \quad (2.64)$$

Сравнивая выражения (2.57) и (2.64), находим

$$k_{(0)} k'_{(0)} (1 - \cos \vartheta) = \chi (k_{(0)} - k'_{(0)}),$$

откуда

$$\chi + k_{(0)} (1 - \cos \vartheta) = \frac{\chi k_{(0)}}{k'_{(0)}}. \quad (2.65)$$

Согласно этому формула (2.63) приобретает вид

$$\frac{\partial \Sigma p'_{\lambda(0)}}{\partial k'_{(0)}} = \frac{\chi k_{(0)}}{p'_{(0)} k'_{(0)}}. \quad (2.66)$$

Учитывая это равенство, преобразуем формулу (2.61) к виду

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} \right)^2 d\Omega \left[4 \cos^2 \theta + \frac{k_{(0)}}{k'_{(0)}} + \frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} - 2 \right], \quad (2.67)$$

где $r_0 = \frac{e^2}{\hbar c \chi}$ — классический радиус электрона.

Формула (2.67) называется формулой Клейна—Нишины для комптоновского рассеяния. Эта формула дает значение $d\sigma$ для случая, когда начальный квант света имеет определенную частоту и определенное направление поляризации, а вектор поляризации рассеянного кванта составляет с вектором поляризации начального кванта угол θ (см. рис. 12, б). Если вектор поляризации e' перпендикулярен к e , т. е. если $\cos \theta = (e, e') = 0$, то

$$d\sigma_{\perp} = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} \right)^2 d\Omega \left(\frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} + \frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} - 2 \right). \quad (2.68)$$

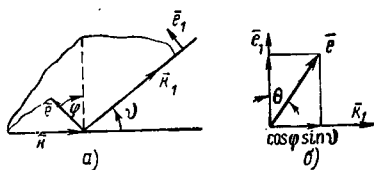


Рис. 12

Если же векторы e' и e лежат в одной плоскости (в плоскости $k'e$), то, как видно на рис. 12, б, имеем

$$\cos^2 \theta = 1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta, \quad (2.69)$$

где φ — угол между плоскостью (kk') и плоскостью (ke) .

Подставляя выражение для $\cos^2 \theta$ из (2.69) в формулу (2.67), получим для данного случая эффективное дифференциальное поперечное сечение

$$d\sigma_{\perp} = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} \right)^2 d\Omega \left(\frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} + \frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} + 2 - 4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \right). \quad (2.70)$$

Суммарное поперечное сечение равно

$$d\sigma = d\sigma_{\perp} + d\sigma_{\parallel} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} \right)^2 d\Omega \left(\frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} + \frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} - 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \right). \quad (2.71)$$

Если начальное излучение неполяризовано, то усредняя по углу φ , получим

$$\langle d\sigma \rangle = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} \right)^2 d\Omega \left(\frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} + \frac{k'_{(0)}}{k_{(0)}} - \sin^2 \vartheta \right). \quad (2.72)$$

Определяя из равенства (2.65) величину

$$k_{(0)} = \frac{k_{(0)}}{1 + \varepsilon (1 - \cos \vartheta)}, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{k_{(0)}}{\chi},$$

формулу (2.72) преобразуем к виду

$$\langle d\sigma \rangle = r_0^2 \frac{(1 + \cos^2 \vartheta) d\Omega}{2 [1 + \varepsilon (1 - \cos \vartheta)]^2} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2 (1 - \cos \vartheta)^2}{(1 + \cos^2 \vartheta) [1 + \varepsilon (1 - \cos \vartheta)]} \right\}. \quad (2.73)$$

Эта формула дает хорошее совпадение теоретической величины $d\sigma$ с опытными данными. На рис. 13 приведены теоре-

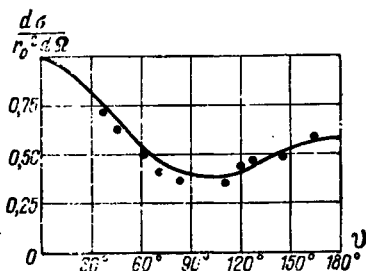


Рис. 13

тическая кривая, полученная по формуле (2.73), и экспериментальные данные (обозначенные точками) для случая, когда $\varepsilon = 0,173$.

§ 3. РОЖДЕНИЕ ПАРЫ ЭЛЕКТРОН — ПОЗИТРОН

Превращение фотона в пару электрон — позитрон казалось бы можно описать в первом приближении теории возмущений. Однако можно показать, что для сохранения энергии и импульса необходимо присутствие в процессе еще одной частицы. Такой частицей может быть атомное ядро, в электростатическом поле которого может произойти акт превращения фотона в электронно-позитронную пару. Отсюда следует, что процесс рождения пары в наиболее низком приближении теории возмущений является процессом второго порядка и описывается графами Фейнмана, представленными на рис. 14.

Внешнее поле обозначается пунктирной линией, идущей от кружка. По общим правилам построения матричных элементов S -матрицы проводим сопоставление:

а) внешней линии электрона множитель

$$\bar{u}_{p's} = (2\pi)^{-3/2} \bar{u}_{p's} e^{-i p' x_2};$$

б) внешней линии позитрона множитель

$$v_{-ps} = (2\pi)^{-3/2} u_{-ps} e^{-i p x_2} \quad (s = 3, 4);$$

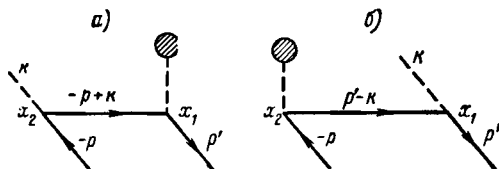


Рис. 14

в) внутренней линии электрона множитель

$$-\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{(\hat{Q} - \chi)}{q^2 + \chi^2} e^{iq(x_1 - x_2)} \quad (\hat{Q} = i\hat{\gamma}_\nu q_\nu);$$

г) внешней линии фотона с соответствующей вершиной множитель

$$\hat{\gamma}_\mu \hat{A}_\mu \rightarrow -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k_{(0)}}} \hat{E} e^{ikx}, \quad (\hat{E} = i\hat{\gamma}_\mu e^\mu).$$

Потенциал электростатического поля атомного ядра равен

$$A_{(0)}^{(e)}(\mathbf{r}) = U = -\frac{eZ}{r}, \quad (3.1)$$

где eZ — заряд ядра. Отсюда находим его Фурье-компоненту¹:

$$\begin{aligned} A_{(0)}^{(e)}(\mathbf{k}') &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int A_{(0)}^{(e)}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} dV = \\ &= -\frac{eZ}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}}{r} dV = -\frac{4\pi eZ}{(2\pi)^{3/2} (\mathbf{k}')^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

¹ Интеграл в формуле (3.2) имеет следующий смысл:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}}{r} e^{-\varepsilon r} dV.$$

Поэтому имеем

$$A_{(0)}^{(e)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int A_{(0)}^{(e)}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} d\mathbf{k}' = \\ = -\frac{4\pi eZ}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}}{|\mathbf{k}'|^2} d\mathbf{k}', \quad (3.3)$$

или

$$A_{(0)}^{(e)}(x_1) = -\frac{4\pi eZ}{(2\pi)^3} \int \frac{\delta(k'_{(0)})}{|\mathbf{k}'|^2} e^{ik'x_1} d^4k'. \quad (3.3')$$

Следовательно, внешней линии электростатического поля атомного ядра и соответствующей вершине надо сопоставить множитель вида

$$i\hat{\gamma}_4 A_{(0)}^{(e)} = \hat{\gamma}_4 A_{(4)}^{(e)} \rightarrow -\frac{4\pi ieZ}{(2\pi)^3} \hat{\gamma}_4 \int \frac{\delta(k'_{(0)})}{|\mathbf{k}'|^2} e^{ik'x_1} d^4k'.$$

Учитывая сказанное, после выполнения всех интегрирований для графа на рис. 14, а находим следующее выражение матричного элемента:

$$S_{i \rightarrow f}^{(a)} = -\frac{2Ze^3}{(2\pi)^2 (\hbar c)^2} \sqrt{\frac{\hbar c}{k_{(0)}}} \bar{u}_{p's'} \hat{\gamma}_4 \frac{(-\hat{P} + \hat{K}) - \chi}{(-p+k)^2 + \chi^2} \hat{E} u_{-ps} \times \\ \times \frac{\delta(k_{(0)} - p_{(0)} - p'_{(0)})}{|\mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2}. \quad (3.4)$$

Матричный элемент для графа на рис. 14, б получим, если в формуле (3.4) поменяем местами $\hat{\gamma}_4$ и \hat{E} , а также заменим $(-\hat{P} + \hat{K})$ и $(-p+k)$ соответственно на $(\hat{P}' - \hat{K})$ и $(p' - k)$:

$$S_{i \rightarrow f}^{(b)} = -\frac{2Ze^3}{(2\pi)^2 (\hbar c)^2} \sqrt{\frac{\hbar c}{k_{(0)}}} \bar{u}_{p's'} \hat{E} \frac{(\hat{P}' - \hat{K}) - \chi}{(p' - k)^2 + \chi^2} \hat{\gamma}_4 u_{-ps} \times \\ \times \frac{\delta(k_{(0)} - p_{(0)} - p'_{(0)})}{|\mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2}. \quad (3.5)$$

Складывая выражения (3.4) и (3.5) и возводя в квадрат модуль, получим

$$|S_{i \rightarrow f}|^2 = |S_{i \rightarrow f}^{(a)} + S_{i \rightarrow f}^{(b)}|^2 = \\ = \frac{Z^2 e^6}{16\pi^4 \hbar^3 c^3 k_{(0)}} \int \left\{ \frac{\delta(k_{(0)} - p_{(0)} - p'_{(0)})}{|\mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2} \right\}^2, \quad (3.6)$$

где

$$J = \left| \bar{u}_{p', s'} \left\{ \hat{\gamma}_4 \frac{(-\hat{P} + \hat{K}) - \chi}{(p, k)} \hat{E} + \hat{E} \frac{(\hat{P}' - \hat{K}) - \chi}{(p', k)} \hat{\gamma}_4 \right\} u_{-ps} \right|^2. \quad (3.7)$$

Здесь учтено, что

$$\begin{aligned} (-p + k)^2 + \chi^2 &= -2(p, k), \\ (p' - k)^2 + \chi^2 &= -2(p', k). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \hat{\gamma}_4 \frac{(-\hat{P} + \hat{K}) - \chi}{(p, k)} \hat{E} + \hat{E} \frac{(\hat{P}' - \hat{K}) - \chi}{(p', k)} \hat{\gamma}_4, \\ \bar{N} &= \hat{\beta} \bar{N} + \hat{\beta} = \hat{E} \frac{(-\hat{P} + \hat{K}) - \chi}{(p, k)} \hat{\gamma}_4 + \hat{\gamma}_4 \frac{(\hat{P}' - \hat{K}) - \chi}{(p', k)} \hat{E}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Используя формулу (2.10) и следствие из нее

$$\hat{\gamma}_4 \hat{A} + \hat{A} \hat{\gamma}_4 = 2ia_{(4)} = -2a_{(0)}, \quad (2.10')$$

получим

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \frac{1}{(p, k)} \left\{ \hat{\gamma}_4 \hat{K} \hat{E} + \hat{\gamma}_4 \hat{E} (\hat{P} - \chi) + 2(p, e) \hat{\gamma}_4 \right\} - \\ &- \frac{1}{(p', k)} \left\{ \hat{E} \hat{K} \hat{\gamma}_4 + \hat{E} \hat{\gamma}_4 (\hat{P}' + \chi) + 2p'_{(0)} \hat{E} \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В выражении (3.7) оператор \bar{N} действует на волновую функцию электрона, удовлетворяющую уравнениям:

$$(\hat{P} - \chi) c_\alpha = 0 \quad \text{и} \quad (\hat{P}' + \chi) c_\alpha = 0.$$

Поэтому второй и пятый члены в формуле (3.9) равны нулю. Это позволяет переписать ее в виде

$$\bar{N} = \frac{\hat{a}}{(p, k)} - \frac{\hat{b}}{(p', k)}, \quad (3.10)$$

где

$$\hat{a} = \hat{\gamma}_4 \hat{K} \hat{E} + 2(p, e) \hat{\gamma}_4, \quad \hat{b} = \hat{E} \hat{K} \hat{\gamma}_4 + 2p'_{(0)} \hat{E}. \quad (3.11)$$

Аналогично получаем

$$\bar{N} = \frac{\bar{a}}{(p, k)} - \frac{\bar{b}}{(p', k)}, \quad (3.12)$$

где

$$\bar{a} = \hat{E} \hat{K} \hat{\gamma}_4 + 2(\rho, e) \hat{\gamma}_4; \quad \bar{b} = \hat{\gamma}_4 \hat{K} \hat{E} + 2\rho'_{(0)} \hat{E}. \quad (3.13)$$

Просуммируем выражение (3.7) для J по спиновым состояниям электрона s' и позитрона s . Используя формулы (III.7.35), (III.7.36) для ρ' и $-\rho$ и (2.13), получим

$$\begin{aligned} \sum_{s, s'} J &= \sum_{s, s'} [\bar{u}_{\alpha, \rho' s'} \tilde{N} u_{\beta, -\rho s}]^2 = \\ &= \sum_{s'} \left[\bar{u}_{\alpha, \rho' s'} \tilde{N}_{\alpha\gamma} \frac{(\hat{P} + \chi)_{\gamma\delta}}{2\rho'_{(0)}} \bar{N}_{\delta\alpha} u_{\alpha, \rho' s'} \right] = \\ &= \frac{1}{4\rho'_{(0)} \rho_{(0)}} (\hat{P}' - \chi)_{\alpha\epsilon} \tilde{N}_{\epsilon\gamma} (\hat{P} + \chi)_{\gamma\delta} \bar{N}_{\delta\alpha} = \\ &= \frac{1}{4\rho'_{(0)} \rho_{(0)}} [(\hat{P}' - \chi) \tilde{N} (\hat{P} + \chi) \bar{N}]_{\alpha\alpha} = \\ &= \frac{1}{4\rho'_{(0)} \rho_{(0)}} \text{Sp} [(\hat{P}' - \chi) \tilde{N} (\hat{P} + \chi) \bar{N}] = \frac{1}{4\rho'_{(0)} \rho_{(0)}} \text{Sp} \hat{C}, \quad (3.14) \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\hat{C} = (\hat{P}' - \chi) \tilde{N} (\hat{P} + \chi) \bar{N}. \quad (3.15)$$

Согласно формулам (3.10) и (3.12) представим \hat{C} в виде суммы:

$$\hat{C} = \frac{\hat{C}_1}{(\rho_1, k)^2} + \frac{\hat{C}_2}{(\rho', k)^2} + \frac{\hat{C}_3}{(\rho, k)(\rho', k)}, \quad (3.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \hat{C}_1 &= (\hat{P} - \chi) \hat{a} (\hat{P} + \chi) \bar{a}, \quad \hat{C}_2 = (\hat{P}' - \chi) \hat{b} (\hat{P} + \chi) \bar{b}, \\ \hat{C}_3 &= -(\hat{P} - \chi) \hat{a} (\hat{P} + \chi) \bar{b} - (\hat{P}' - \chi) \hat{b} (\hat{P} + \chi) \bar{a}. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \text{Sp} \hat{C}_1 &= \text{Sp} (\hat{P}' - \chi) \hat{a} (\hat{P} + \chi) \bar{a} = \\ &= \text{Sp} \hat{P}' \hat{a} \hat{P} \bar{a} - \chi^2 \text{Sp} \hat{a} \bar{a}, \quad (3.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sp} \hat{C}_2 &= \text{Sp} (\hat{P}' - \chi) \hat{b} (\hat{P} + \chi) \bar{b} = \\ &= \text{Sp} \hat{P}' \hat{b} \hat{P} \bar{b} - \chi^2 \text{Sp} \hat{b} \bar{b}, \quad (3.18') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sp} \hat{C}_3 &= -\text{Sp} \hat{P}' \hat{a} \hat{P} \bar{b} + \chi^2 \text{Sp} \hat{a} \bar{b} - \\ &- \text{Sp} \hat{P}' \hat{b} \hat{P} \bar{a} + \chi^2 \text{Sp} \hat{b} \bar{a}. \quad (3.18'') \end{aligned}$$

В этих формулах учтено, что след произведения нечетного числа матриц $\hat{\gamma}_\mu$ равен нулю. Учитывая (2.10), (2.10'), равенства

$$\hat{E}^2 = -1, \quad \hat{\gamma}_4^2 = 1, \quad \hat{K}^2 = 0,$$

а также принимая во внимание ортогональность векторов e и k , т. е. условие $(e, k) = 0$, согласно равенствам (2.33), (2.34) и (2.10) из формул (3.18) находим:

$$\begin{aligned} \text{Sp } \hat{C}_1 = & -8(p, k) [(p', k) + 2k_{(0)} p'_{(0)}] - 16(e, p) \{ (p', k)(e, p) - \\ & - (e, p')(k, p) + 2p'_{(0)} k_{(0)}(e, p) \} + \\ & + 16(e, p)^2 [(p', p) + 2p'_{(0)} p_{(0)}] - 16\chi^2(e, p)^2, \quad (3.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sp } \hat{C}_2 = & -8(p, k) [(p', k) + 2k_{(0)} p_{(0)}] + \\ & + 16(e, p) \{ (p', k)(e, p) - (e, p')(k, p) + 2p'_{(0)} k_{(0)}(e, p) \} + \\ & + 16(e, p)^2 [(p', p) + 2p'_{(0)} p_{(0)}] - 16\chi^2(e, p)^2, \quad (3.19') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sp } \hat{C}_3 = & -16(e, p)(e, p') \{ -(p', k) + (p, k) - 2\chi^2 - \\ & - 4p_{(0)} p'_{(0)} - 2(p, p') \} + 16 \{ k_{(0)} [-k_{(0)}(p, p') + \\ & + p_{(0)}(p', k) - p'_{(0)}(p, k)] - (p', k)(p, k) - \chi^2 k_{(0)}^2 - \\ & - (e, p)^2(p', k) - (e, p')^2(p, k) \}. \quad (3.19'') \end{aligned}$$

Если исходное γ -излучение является неполяризованным, то полученные выражения необходимо еще усреднить по двум направлениям поляризации фотона e_λ^μ ($\lambda = 1, 2$). Для этого следует вычислить выражения $\text{Sp } \hat{C}$ сначала для $\lambda = 1$, а затем для $\lambda = 2$, после чего взять половину суммы найденных результатов. Эта процедура сводится к вычислению сумм

$$\sum_{\lambda=1}^2 (e_\lambda, p)^2, \quad \sum_{\lambda=1}^2 (e_\lambda, p')^2 \quad \text{и} \quad \sum_{\lambda=1}^2 (e_\lambda, p')(e_\lambda, p).$$

Первые две суммы вычисляются так. Учитывая, что $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^2 (e_\lambda, p)^2 &= p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2, \\ \sum_{\lambda=1}^2 (e_\lambda, p')^2 &= p'_{(1)}^2 + p'_{(2)}^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Величина $\sqrt{p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2}$ — проекция вектора \mathbf{p} на направление, перпендикулярное вектору \mathbf{k} . Поэтому имеем (рис. 15)

$$\sum_{\lambda=1}^2 (e_{\lambda}, \mathbf{p})^2 = p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2 = |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta, \quad (3.21)$$

где θ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{p} . Аналогично находим

$$\sum_{\lambda=1}^2 (e_{\lambda}, \mathbf{p}')^2 = |\mathbf{p}'|^2 \sin^2 \theta', \quad (3.22)$$

где θ' — угол между \mathbf{k} и \mathbf{p}' .

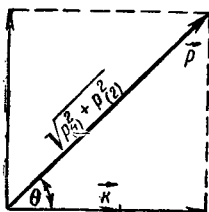


Рис. 15

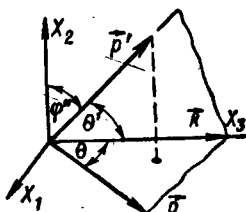


Рис. 16

Вычислим третью сумму. Рассматривая рис. 16, на котором вектор \mathbf{p} лежит в плоскости $X_1 X_3$ и φ — угол между плоскостями $(\mathbf{k}\mathbf{p})$ и $(\mathbf{k}\mathbf{p}')$, находим:

$$p_{(1)} = |\mathbf{p}| \sin \theta, \quad p'_{(1)} = |\mathbf{p}'| \sin \theta' \cos \varphi, \\ p_{(2)} = 0, \quad p'_{(2)} = |\mathbf{p}'| \cos \varphi'.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{\lambda=1}^2 (e_{\lambda}, \mathbf{p})(e_{\lambda}, \mathbf{p}') = p_{(1)} p'_{(1)} + p_{(2)} p'_{(2)} = \\ = |\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{p}'| \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi. \quad (3.23)$$

Используя формулы (3.21) — (3.23), получаем

$$-\sum_{\lambda} \text{Sp } \hat{C} = \frac{8p^2 \sin^2 \theta}{(p, k)^2} (4p_{(0)}'^2 - q^2) + \frac{8p'^2 \sin^2 \theta'}{(p', k)^2} (4p_{(0)}^2 - q^2) + \\ + \frac{8}{(p, k)(p', k)} \{2|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{p}'| \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi (4p_{(0)} p'_{(0)} + q^2) - \\ - k_{(0)}^2 (2|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{p}'| \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi + p^2 \sin^2 \theta + p'^2 \sin^2 \theta')\}, \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{p}', \\ (\mathbf{k}, \mathbf{p}) &= k_{(0)} |\mathbf{p}| \cos \theta, \quad (\mathbf{k}, \mathbf{p}') = k_{(0)} |\mathbf{p}'| \cos \theta', \\ p p' &= |\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{p}'| (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi). \end{aligned}$$

В качестве примера покажем, как получается первый член в правой части (3.24). С этой целью выделим в выражениях для $\text{Sp} \hat{C}_1$ и $\text{Sp} \hat{C}_2$ члены, пропорциональные $(e, p)^2$. Согласно равенству (3.16) первую группу членов делим на $(p, k)^2$, вторую — на $(p, k) (p', k)$. Складывая полученные таким образом результаты, найдем

$$\begin{aligned} J &= -\frac{16 (e, p)^2}{(p, k)^2} \{ (p', k) + p'_{(0)} k_{(0)} - (p, p') - \\ &\quad - p'_{(0)} p_{(0)} + 16\chi^2 + (p, k) - p_{(0)} k_{(0)} \}. \end{aligned}$$

Считая, что ядро имеет очень большую массу M (по сравнению с массой электрона), пренебрегаем кинетической энергией ядра $\frac{q^2}{2M}$. Поэтому законы сохранения импульса и энергии в данном случае можно записать в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{p}', \quad k_{(0)} - p_{(0)} - p'_{(0)} = 0.$$

Учитывая законы сохранения энергии и импульса, для J получим выражение

$$J = -\frac{16 (e, p)^2}{(p, k)^2} \{ (p', q) + 2p'^2_{(0)} + (k, p) - k_{(0)} p_{(0)} \},$$

где учтено, что

$$(p')^2 - (p'_{(0)})^2 + \chi^2 = 0.$$

Из законов сохранения импульса и энергии имеем:

$$\begin{aligned} q^2 &= (\mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = k^2 + p^2 + p'^2 - 2(\mathbf{k}, \mathbf{p}) - 2(\mathbf{k}, \mathbf{p}') + 2(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \\ (k_{(0)} - p_{(0)})^2 - |\mathbf{p}'|^2 - \chi^2 &= p^2_{(0)} + k^2_{(0)} - \\ &\quad - 2k_{(0)} p_{(0)} - (p')^2 - \chi^2 = 0. \end{aligned}$$

Вычитая из верхнего равенства нижнее и учитывая, что $p^2 - p^2_{(0)} + \chi^2 = 0$ и $k^2 - k^2_{(0)} = 0$, получим

$$q^2 = -2(\mathbf{k}, \mathbf{p}) + 2k_{(0)} p_{(0)} + 2(p')^2 - 2(\mathbf{k}, \mathbf{p}') + 2(\mathbf{p}, \mathbf{p}').$$

Отсюда находим

$$(k, p) = (\mathbf{k}, \mathbf{p}) - k_{(0)} p_{(0)} = -\frac{q^2}{2} + \mathbf{p}'^2 - (\mathbf{k}, \mathbf{p}') + (\mathbf{p}, \mathbf{p}')$$

Подставляя это выражение в формулу для J и учитывая закон сохранения импульса, окончательно получим

$$\begin{aligned} J &= -\frac{16(e, p)^2}{(p, k)^2} \left\{ 2(p'_{(0)})^2 - \frac{q^2}{2} + \mathbf{p}'(\mathbf{p}' - \mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q}) \right\} = \\ &= -\frac{8(e, p)^2}{(k, p)^2} \{ 4(p'_{(0)})^2 - q^2 \}. \end{aligned}$$

Это, согласно формуле (3.21), совпадает с первым членом в правой части (3.24), что и требовалось показать. Аналогично находим остальные члены в формуле (3.24). Таким образом, усредненное по направлениям поляризации γ -кванта и просуммированное по спинам электрона и позитрона выражение для $|M_{if}|^2$ можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_s \sum_{s'} |M_{if}|^2 = \frac{Z^2 e^6}{128\pi^4 \hbar^3 c^3 k_{(0)} q^4 p'_{(0)} p_{(0)}} \sum_{\lambda} \text{Sp } \hat{C}. \quad (3.25)$$

Поперечное сечение рассматриваемого нами процесса [см. формулу (III.11.6)] равно

$$\begin{aligned} d\sigma &= (2\pi)^2 p'_{(0)} |\mathbf{p}'| \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_s \sum_{s'} |M_{if}|^2 \right\} \times \\ &\times d\Omega_p d\Omega_{p'} |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}|. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Используя формулу [см. (III.10.28)]

$$|\mathbf{p}| \cdot d|\mathbf{p}| = p_{(0)} dp_{(0)},$$

выражение (3.26) перепишем в виде

$$\begin{aligned} d\sigma &= (2\pi)^2 p_{(0)} p'_{(0)} |\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{p}'| \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_s \sum_{s'} |M_{if}|^2 \right\} \times \\ &\times d\Omega_p d\Omega_{p'} dp_{(0)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Так как выражение для $d\sigma$ не зависит от угла φ' , то можно выполнить интегрирование по углу φ' , используя для этого равенство $d\Omega_{p'} = \sin \theta' d\theta' d\varphi'$. В итоге возникает множитель 2π . Учитывая, что $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$, получим

для дифференциального поперечного сечения образования пары электрон — позитрон формулу Бете и Гайтлера:

$$\begin{aligned}
 d\sigma = & -\frac{Z^2}{137^2} \cdot \frac{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{p}'| dp_{(0)} \sin \theta \sin \theta' d\theta d\theta' d\varphi}{2\pi k_{(0)}^3 |q|^4} \times \\
 & \times \left\{ \frac{|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta}{[p_{(0)} - |\mathbf{p}| \cos \theta]^2} (4p_{(0)}^2 - q^2) + \frac{|\mathbf{p}'|^2 \sin^2 \theta'}{[p'_{(0)} - |\mathbf{p}'| \cos \theta']^2} \times \right. \\
 & \times (4p_{(0)}^2 - q^2) + \frac{2|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{p}'| \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi}{[p_{(0)} - |\mathbf{p}| \cos \theta] \cdot [p'_{(0)} - |\mathbf{p}'| \cos \theta']} \times \\
 & \times (4p_{(0)} p'_{(0)} + q^2) - \\
 & \left. - 2k_{(0)}^2 \frac{2|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{p}'| \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi + |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta + |\mathbf{p}'|^2 \sin^2 \theta'}{[p_{(0)} - |\mathbf{p}| \cos \theta] \cdot [p'_{(0)} - |\mathbf{p}'| \cos \theta']} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Производя здесь интегрирование по углам и по всем возможным значениям $p_{(0)}$, получим полное поперечное сечение $\sigma_{\text{пар}}$. Сравнивая $\sigma_{\text{пар}}$ с полным поперечным сечением $\sigma_{\text{комп}}$ для комптоновского рассеяния, которое можно получить из формулы (2.73), найдем, что комптоновское рассеяние преобладает в случае, когда γ -кванты обладают малой энергией. Наоборот, когда γ -кванты имеют большую энергию, преобладает образование пар.

Экспериментально измеренные значения отношения $\sigma_{\text{пар}}/\sigma_{\text{комп}}$ хорошо согласуются с теорией.

Следует заметить, что из формулы (3.28) легко получить поперечное дифференциальное сечение для тормозного излучения электрона в поле ядра. Как известно, этот процесс заключается в испускании фотона электроном, проходящим через электрическое поле ядра. При этом ядро принимает часть импульса, что обеспечивает выполнение закона сохранения энергии. В первом приближении тормозное излучение описывается двумя графами второго порядка, изображенными на рис. 17, где p — начальный четырехмерный импульс электрона, q — импульс, передаваемый ядру, p' — конечный четырехмерный импульс электрона, k — импульс излучаемого фотона, заштрихованный кружок символически обозначает электрическое поле ядра. На рис. 17, а электрон сначала передает часть импульса ядру, а затем излучает фотон, а на рис. 17, б, наоборот, электрон сначала излучает

фотон, а затем передает часть импульса ядру. Поперечное сечение данного процесса согласно формуле (III.11.6) равно

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^2 c}{v_1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_s \sum_{s'} |M_{if}|^2 \right\} |\mathbf{p}'| p_{(0)}' d\Omega_{\mathbf{p}'} dk, \quad (3.29)$$

где $v_1 = c \frac{|\mathbf{p}|}{p_{(0)}}$, причем

$$d\mathbf{k} = k^2 d|k| d\Omega_k = k_{(0)}^2 dk_{(0)} d\Omega_k dk_{(0)}. \quad (3.30)$$

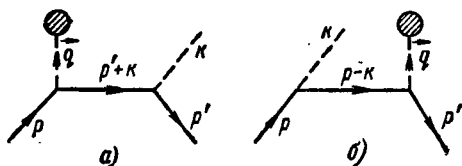


Рис. 17

Из сравнения рис. 14 и рис. 17 видно, что рис. 17 можно построить из рис. 14 путем преобразования

$$p \rightarrow -p, \quad p' \rightarrow p', \quad k \rightarrow -k$$

или

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}| \rightarrow |\mathbf{p}|, \quad |\mathbf{p}'| \rightarrow |\mathbf{p}'|, \quad p_{(0)} \rightarrow -p_{(0)}, \quad p_{(0)}' \rightarrow p_{(0)}', \\ \theta \rightarrow \pi - \theta, \quad \theta' \rightarrow \theta', \quad \varphi \rightarrow \pi + \varphi. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Совершая преобразования (3.31), вместо формул (3.25) и (3.24) получаем

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_s \sum_{s'} |M_{if}|^2 = \frac{Z^2 e^6}{128\pi^4 (\hbar c)^3 k_{(0)} q^4 p_{(0)}' p_{(0)}} \sum_{\lambda} \text{Sp} \hat{C}, \quad (3.32)$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} \text{Sp} \hat{C} = & \frac{8p^2 \sin^2 \theta}{(p, k)^2} (4p_{(0)}'^2 - q^2) + \frac{8p_{(0)}'^2 \sin^2 \theta'}{(p', k)^2} (4p_{(0)}^2 - q^2) + \\ & + \frac{8}{(p, k)(p', k)} \{ 2|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{p}'| \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi (-4p_{(0)} p_{(0)}' + q^2) + \\ & + 2k_{(0)}^2 (-2|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{p}'| \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi + \\ & + |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta + |\mathbf{p}'|^2 \sin^2 \theta') \}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Учитывая формулы (3.29), (3.30), (3.32) и (3.33) находим, что эффективное поперечное дифференциальное сечение

тормозного излучения электрона в поле атомного ядра равно

$$d\sigma = \frac{Z^2}{2\pi (137)^3 \cdot q^4} \cdot \frac{|p'|}{|p|} \cdot k_{(0)} dk_{(0)} \sin \theta d\theta \sin \theta' d\theta' d\varphi \times \\ \times \left\{ \frac{p^2 \sin^2 \theta}{(p, k)^2} (4p_{(0)}'^2 - q^2) + \frac{p'^2 \sin^2 \theta'}{(p', k)^2} (4p_{(0)}^2 - q^2) - \right. \\ \left. - \frac{2|p| \cdot |p'| \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi}{(p, k)(p', k)} (4p_{(0)} p_{(0)}' - q^2 + 2k_{(0)}^2) + \right. \\ \left. + 2k_{(0)}^2 \frac{p^2 \sin^2 \theta + p'^2 \sin^2 \theta'}{(p, k)(p', k)} \right\},$$

где

$$(p, k) = k_{(0)} (p_{(0)} - |p| \cos \theta),$$

$$(p', k) = k_{(0)} (p_{(0)}' - |p'| \cos \theta').$$

При вычислении (3.34) учтено, что

$$d\Omega_k d\Omega_{p'} = \sin \theta d\theta d\varphi \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

и интегрирование проведено по φ' .

§ 4. АННИГИЛЯЦИЯ ПАРЫ ЭЛЕКТРОН — ПОЗИТРОН

Рассмотрим процесс превращения электрона и позитрона в γ -квант. Диаграмма первого порядка, соответствующая этому процессу, изображена на рис. 18. Однако про-

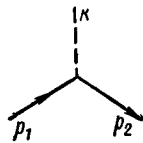


Рис. 18

цесс, описываемый этой диаграммой, запрещен законами сохранения энергии и импульса. Действительно, в данном случае эти законы имеют вид

$$k = p_1 + p_2,$$

$$k = \sqrt{|p_1|^2 + \chi^2} + \sqrt{|p_2|^2 + \chi^2}.$$

Переходя к системе центра масс электрона и позитрона ($p_1 + p_2 = 0$), замечаем, что второе равенство не выполняется. Следовательно, процесс превращения пары электрон — позитрон в два фотона описывается в первом приближении двумя диаграммами второго порядка, изображенными на рис. 19. В системе центра масс электрона и позитрона

имеем:

$$p_1 = -p_2 = p, \quad k_1 = -k_2 = k,$$

где $p_{(0)} = \sqrt{p^2 + \chi^2}$ — импульс электрона; $\bar{p}_{(0)}$ — импульс позитрона; $p_{(0)} = k_{(0)} = |k|$, k — импульс первого фотона; $\bar{p}_{(0)} = \bar{k}_{(0)}$, $-k$ — импульс второго фотона.

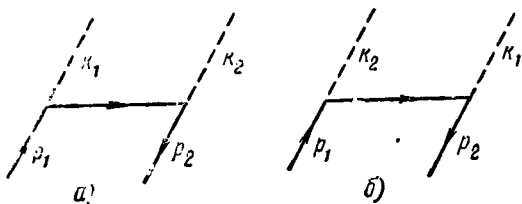


Рис. 19

Пользуясь правилами Фейнмана, составляем матричные элементы рассматриваемых процессов:

$$M_a(p, k) = \frac{e^2}{2\pi\hbar ck_{(0)}} \bar{c}_{sp_2} \hat{E}_2 \frac{\hat{P}_1 - \hat{K}_1 + \chi}{(p_1 - k_1) + \chi^2} \hat{E}_1 c_{s'p_1}, \quad (4.1)$$

$$M_b(p, k) = \frac{e^2}{2\pi\hbar ck_{(0)}} \bar{c}_{sp_2} \hat{E}_1 \frac{\hat{P}_1 - \hat{K}_2 + \chi}{(p_1 - k_2) + \chi^2} \hat{E}_2 c_{s'p_1}. \quad (4.2)$$

Складывая эти равенства, получаем

$$M(p, k) = -\frac{e^2}{2\pi\hbar ck_{(0)}} \cdot \frac{\bar{c}_{sp_2} \hat{M} c_{s'p_1}}{2(p_1, k_1)(p_1, k_2)}, \quad (4.3)$$

где оператор

$$\hat{M} = (p_1, k_2) \hat{E}_2 (\hat{P}_1 - \hat{K}_1 + \chi) \hat{E}_1 + \hat{E}_1 (\hat{P}_1 - \hat{K}_2 + \chi) \hat{E}_2 (p_1, k_1) \quad (4.4)$$

действует на волновую функцию электрона. Осуществляя в выражении (4.4) коммутации множителей и учитывая уравнение Дирака в импульсном представлении

$$(\hat{P}_1 + \chi) c(p_1) = 0,$$

преобразуем \hat{M} к виду

$$\begin{aligned} \hat{M} = & (p_1, k_2) [2(p_1, e_1) \hat{E}_2 - \hat{E}_2 \hat{K}_1 \hat{E}_1] + \\ & + (p_1, k_1) [2(p_1, e_2) \hat{E}_1 - \hat{E}_2 \hat{K}_1 \hat{E}_2]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Отсюда легко получаем

$$\begin{aligned} \bar{M} = & (p_1, k_2) [2(p_1, e_1) \hat{E}_2 - \hat{E}_1 \hat{K}_2 \hat{E}_2] + \\ & + (p_1, k_1) [2(p_1, e_2) \hat{E}_1 - \hat{E}_2 \hat{K}_2 \hat{E}_1]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Принимая во внимание формулы (III.7.35) и (III.7.36), усредним выражение $|M(\rho, k)|^2$ по спинам электрона и позитрона и найдем, что

$$\begin{aligned} \langle M(\rho, k)^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{s, s'} |M(\rho, k)|^2 = \left[\frac{e^2}{2\pi\hbar ck_{(0)}} \right]^2 \times \\ &\times \frac{1}{16(\rho_1, k_1)^2 (\rho_1, k_2)^2} \sum_{s, s'} \bar{c}_{sp_2} \hat{M}_{cs'p_1} \bar{c}_{s'p_1} \bar{M}_{csp_2} = \\ &= \frac{e^4}{(4\pi\hbar ck_{(0)}^2)^2} \cdot \frac{1}{16(\rho_1, k_1)^2 (\rho_1, k_2)^2} \text{Sp} \hat{D}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где введено обозначение

$$\hat{D} = (\hat{P}_2 - \chi) \hat{M} (\hat{P}_1 + \chi) \bar{M}. \quad (4.8)$$

Используя закон сохранения четырехмерного импульса

$$\rho_2 = k_1 + k_2 - \rho_1,$$

преобразуем выражение для \hat{D} к виду

$$\hat{D} = \hat{D}_1 + \hat{D}_2 + \hat{D}_3, \quad (4.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \hat{D}_1 &= (\hat{K}_1 + \hat{K}_2) \hat{M} \hat{P}_1 \bar{M}, \\ \hat{D}_2 &= -(\hat{P}_1 + \chi) \hat{M} (\hat{P}_1 + \chi) \bar{M}, \\ \text{Sp} \hat{D}_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Используя затем формулы (2.31), (2.32) и соотношения

$$\left. \begin{aligned} (k_1, e_1) &= (k_2, e_2) = (k_1, e_2) = (k_2, e_1) = 0, \quad k_1^2 = k_2^2 = 0, \\ (k_1, p_1) &= (k_1, p_1) - k_{(0)}^2 = k_{(0)} (|\mathbf{p}| \cos \theta - k_{(0)}), \\ (k_2, p_1) &= (k_2, p_1) - k_{(0)}^2 = -k_{(0)} (k_{(0)} + |\mathbf{p}| \cos \theta), \\ -(k_1, k_2) &= 2k_{(0)}^2, \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

где θ — угол между векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{p}_1 , в результате сложных вычислений получим:

$$\begin{aligned} \text{Sp} \hat{D}_1 &= 32k_{(0)}^2 (\rho, k_1) (\rho, k_2) \{ 2(e_1, e_2) (\rho, e_1) (\rho, e_2) + \\ &+ k_{(0)}^2 + (\rho, e_1)^2 + (\rho, e_2)^2 \}, \\ \text{Sp} \hat{D}_2 &= -32k_{(0)}^2 (\rho, k_1) (\rho, k_2) \{ 2(e_1, e_2) (\rho, e_1) (\rho, e_2) + \\ &+ (\rho, e_1)^2 + (\rho, e_2)^2 \} - 32 \{ 2k_{(0)}^2 (\rho, e_1) (\rho, e_2) + \\ &+ (e_1, e_2) (\rho, k_1) (\rho, k_2) \}^2, \end{aligned}$$

$$\text{Sp}\hat{D} = 32 (p, k_1)^2 (p, k_2)^2 \left\{ \frac{k_{(0)}^4}{(p, k_1)(p, k_2)} - \frac{4k_{(0)}^4 (p, e_1)^2 (p, e_2)^2}{(p, k_1)^2 (p, k_2)^2} - \frac{4k_{(0)}^2 (e_1, e_2)(p, e_1)(p, e_2)}{(p, k_1)(p, k_2)} - (e_1, e_2)^2 \right\}. \quad (4.12)$$

Учитывая формулы

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\lambda} (p, e_{1\lambda})^2 &= \sum_{\lambda'} (p, e_{2\lambda'})^2 = p^2 \sin^2 \theta, \quad \sum_{\lambda\lambda'} (e_{1\lambda}, e_{2\lambda'})^2 = 2, \\ \sum_{\lambda, \lambda'} (p, e_{1\lambda})^2 (p, e_{2\lambda'})^2 &= p^4 \sin^4 \theta, \\ \sum_{\lambda, \lambda'} (e_{1\lambda}, e_{2\lambda'}) (p, e_{1\lambda})(p, e_{2\lambda'}) &= -p^2 \sin^4 \theta, \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

выполним суммирование по направлениям поляризации фотонов:

$$\sum_{\lambda, \lambda'} \text{Sp}\hat{D} = 64 (p, k_1)^2 (p, k_2)^2 \times \left\{ \frac{k_{(0)}^2 + p^2 + p^2 \sin^2 \theta}{k_{(0)}^2 - p^2 \sin^2 \theta} - \frac{2p^4 \sin^4 \theta}{[k_{(0)}^2 - p^2 \cos^2 \theta]^2} \right\}. \quad (4.14)$$

Сечение рассматриваемого процесса равно

$$\begin{aligned} d\sigma &= 2c \frac{\pi^2 k_{(0)}^3}{v_{12}} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda'} \sum_{s, s'} |M(p, k)|^2 \right\} d\Omega = \\ &= \frac{\pi^2 k_{(0)}^3}{|p|} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda'} \sum_{ss'} |M(p, k)|^2 \right\} d\Omega, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где учтено, что $(\sum k'_{i(0)})' k'_{i(0)} = 2$, так как $\sum k_{i(0)} = 2k_{(0)}$, и $v_{12} = 2c \frac{|p|}{k_{(0)}}$. Отсюда согласно формулам (4.14) и (4.7) получаем окончательное выражение для дифференциального эффективного сечения аннигиляции электронно-позитронной пары:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{e^4}{4(\hbar c)^2 k_{(0)} |p|} \times \\ &\times \left\{ \frac{k_{(0)}^2 + p^2 + p^2 \sin^2 \theta}{k_{(0)}^2 - p^2 \cos^2 \theta} - \frac{2p^4 \sin^4 \theta}{[k_{(0)}^2 - p^2 \cos^2 \theta]^2} \right\} d\Omega. \end{aligned} \quad (4.16)$$

УСТРАНЕНИЕ РАСХОДИМОСТЕЙ ИЗ S-МАТРИЦЫ
ПЕРЕНОРМИРОВКОЙ МАССЫ И ЗАРЯДА

§ 1. ОБЩИЙ АНАЛИЗ ГРАФОВ ФЕЙНМАНА

Часть графа, не содержащая внешних линий и не связанная электронными и фотонными линиями с остальной ее частью, описывает процесс, происходящий в вакууме, и называется вакуумной петлей. Вакуумным петлям соответствуют члены, входящие в выражение $(\Phi_v, \hat{S}\Phi_v)$, модуль которого равен единице. Действительно, вектор вакуумного состояния Φ_v описывает невырожденное состояние, обладающее наименьшей энергией. Поэтому согласно закону сохранения энергии-импульса вектор $\Psi = \hat{S}\Phi_v$ может отличаться от Φ_v самое большее постоянным множителем c , т. е. вектор Φ_v является собственным вектором оператора \hat{S} :

$$\hat{S}\Phi_v = c\Phi_v. \quad (1.1)$$

Отсюда ввиду унитарности \hat{S} -матрицы, если $(\Phi_v, \Phi_v) = 1$, получаем

$$|c|^2 = 1, \quad \text{или} \quad c = e^{i\alpha},$$

где α — действительное число. Поэтому

$$(\Phi_v, \hat{S}\Phi_v) = e^{i\alpha}, \quad (1.2)$$

что и требовалось доказать.

Имеем

$$(\Phi_v, \hat{S}\Phi_v) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_v, \hat{S}_n \Phi_v), \quad (1.3)$$

где члены, входящие в сумму, стоящую в правой части, описывают соответствующие вакуумные петли (или системы вакуумных петель).

Пусть V_i — матричный элемент i -й вакуумной петли или i -й системы вакуумных петель. Тогда формулу (1.3) можно переписать в виде

$$(\Phi_v, \hat{S}\Phi_v) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} V_i. \quad (1.4)$$

Любому процессу можно поставить в соответствие счетное множество графов Фейнмана (см., например, рис. 51), отличающихся друг от друга всеми возможными вакуумными петлями. Этому множеству графов в матричном элементе рассматриваемого процесса соответствует множитель

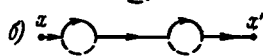


Рис. 20

$$M(1 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots) = M(\Phi_v, \hat{S}\Phi_v) = Me^{i\alpha}. \quad (1.5)$$

Поперечное сечение рассеяния пропорционально квадрату модуля этого выражения, т. е.

$$\sigma \sim |M|^2. \quad (1.6)$$

Отсюда видно, что сумма $\sum_{i=1}^{\infty} V_i$,

учитывающая вакуумные петли, не входит в поперечное сечение ис-

следуемого процесса. Поэтому в дальнейшем вакуумные петли можно вообще не рассматривать.

В графах Фейнмана наибольший интерес представляют: 1) собственно-энергетические электронные части; 2) собственно-энергетические фотонные части; 3) вершинные части; 4) части рассеяния фотона на фотоне. Рассмотрим эти части.

1. *Собственно-энергетические электронные части.* Собственно-энергетической электронной частью называется такая часть графа Фейнмана, которая соединяется со всей остальной частью только при помощи двух электронных линий. На рис. 20 приведены собственно-энергетические электронные части второго и четвертого порядков. Собственно-энергетические части электрона могут быть компактными и некомпактными. Граф называется компактным, если его нельзя разбить на части, соединенные между собой только одной линией (см. рис. 20, а, в, г, д); в противном случае он называется некомпактным (см. рис. 20, б).

Обозначим через $\hat{\Sigma}_W$ множитель в матричном элементе, соответствующий собственно-энергетической части W . Он является функцией четырехмерного импульса входной или выходной электронной линии (эти импульсы равны между собой в силу закона сохранения энергии-импульса). Сумма множителей $\hat{\Sigma}_W$, соответствующих всем собственно-энергетическим частям W , называется собственно-энергетической электронной функцией:

$$\hat{\Sigma}(\rho) = \sum_W \hat{\Sigma}_W(\rho).$$

Символически эту функцию обозначим квадратом. Поэтому графу на рис. 21 соответствует сумма всех диаграмм



Рис. 21

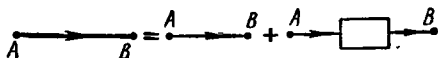


Рис. 22

(с собственно-энергетическими электронными частями), в которых электронная линия соединяет две вершины A и B . Сумму множества таких графов и обычной электронной линии, соединяющей вершины A и B , можно заменить одним графом, на котором две вершины A и B соединены эффективной электронной линией (рис. 22; жирная сплошная линия). Как известно, обычной внутренней электронной линии соответствует функция \hat{S}^F ; эффективной же внутренней линии электрона сопоставлена некоторая другая функция G^e , которую называют электронной функцией распространения, или полной (обобщенной) электронной функцией Грина. Функция G^e должна зависеть только от разности координат $x - x'$.

Рассмотрим, наконец, внешнюю электронную линию, выходящую из вершины A диаграммы D (рис. 23). В высших приближениях теории возмущений появляются графы, сходные с графом D , в которых во «внешнюю» электронную линию, выходящую из вершины A , включены различные собственно-энергетические электронные части (см. рис. 23). Сумма множества электронных линий со всеми различными собственно-энергетическими электронными частями и обычной электронной линией, выходящих из вершины A , графически изображена на рис. 24 эффективной внешней электронной линией.

2. *Собственно-энергетические фотонные части.* Собственно-энергетической фотонной частью называется такая часть графа Фейнмана, которая соединена с остальной ее частью только двумя фотонными линиями. На рис. 25 изображены фотонные собственно-энергетические части второго и четвертого порядков. Собственно-энергетическая фотонная часть также называется компактной, если ее



Рис. 23

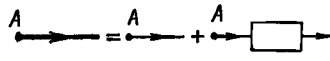
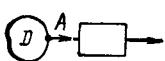


Рис. 24

нельзя разбить на части, соединенные между собой только одной фотонной линией (см. рис. 25, а, в, г). Собственно-энергетическая некомпактная часть фотона, изображенная на рис. 25, б, состоит из двух компактных частей. Множитель в матричном элементе, обусловленный собственно-энерге-

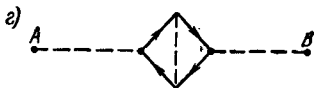
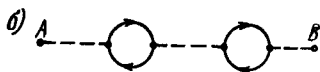
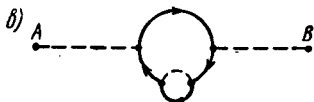
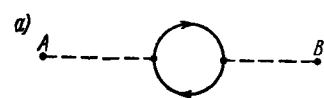


Рис. 25

тической фотонной частью, обозначим через Π_{ω} . Он является функцией импульса входной или выходной фотонной линии; сумма множителей Π_{ω} всех фотонных собственно-энергетических частей называется собственно-энергетической фотонной функцией:

$$\Pi(p) = \sum_{\omega} \Pi_{\omega}(p).$$

Символически эту функцию обозначим квадратом. Поэтому граф на рис. 26 изображает сумму всех диаграмм (с собственно-энергетическими фотонными частями), в которых фотонная линия соединяет две вершины A и B . Сумма множества таких графов и обычной фотонной линии, соединяющей вершины A и B , графически изображена на рис. 27 эффективной фотонной линией (жирная пунктирная линия).

Обычной внутренней фотонной линии соответствует функция D^F ; эффективной фотонной внутренней линии со-

поставлена некоторая другая функция G_Y , которую называют фотонной функцией распространения или полной (обобщенной) фотонной функцией Грина. Рассмотрим множество графов, отличающихся друг от друга только частью, которая

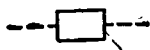


Рис. 26

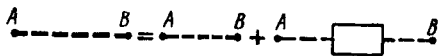


Рис. 27

соединяет внешнюю фотонную линию с вершиной A . Сумма множества фотонных линий со всеми различными собственно-энергетическими фотонными частями и обычной фотонной линией, выходящих из вершины A , графически изображена на рис. 28 эффективной внешней фотонной линией.

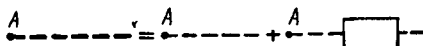


Рис. 28

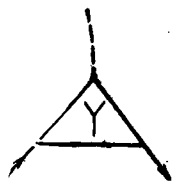


Рис. 29

3. *Вершинные части диаграмм.* Вершинной частью диаграммы Фейнмана называется часть, связанная с остальной частью диаграммы двумя электронными и одной фотонной

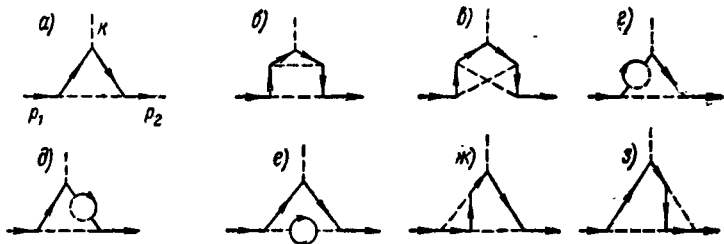


Рис. 30

линией. Вершинная часть изображается символически в виде треугольника (рис. 29). Вершинные части третьего и пятого порядков показаны на рис. 30. Множитель в матричном элементе, соответствующий определенной вершинной части Y , обозначим через $\hat{\Lambda}_Y$, а всю сумму подобных функций,

соответствующих всем компактным вершинным частям — через $\hat{\Lambda}$:

$$\hat{\Lambda} = \sum_Y \hat{\Lambda}_Y.$$

В дальнейшем будем рассматривать только компактные вершинные части, так как любую некомпактную вершинную часть можно представить как совокупность компактной вер-

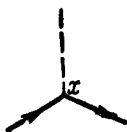


Рис. 31

шинной части и эффективных электронных и фотонных линий. Функцию, равную сумме функций всех компактных вершинных частей и обыкновенной вершинной диаграммы (рис. 31), которой соответствует выражение $(2\pi)^4 \frac{ie}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu$, назовем вершинной функцией:

$$\hat{\Gamma}_\mu = (2\pi)^4 \frac{ie}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu + \hat{\Lambda}_\mu,$$

или

$$\hat{\Gamma}_\mu = \hat{\lambda}_\mu + \hat{\Lambda}_\mu.$$

В импульсном представлении матрица $\hat{\Lambda}_\mu$ является функцией двух электронных ($p_1; p_2$) и одного фотонного (k) четырехмерных импульсов, соответствующих линиям, выходящим из вершинной части. Таким образом, имеем $\hat{\Lambda}_\mu = \hat{\Lambda}_\mu(p_1, p_2; k)$, причем согласно закону сохранения энергии-импульса $p_1 - p_2 = k$.

Собственно-энергетические и вершинные части делятся на приводимые и неприводимые. Часть графа называется неприводимой, если она не содержит в себе собственно-энергетических и вершинных частей; в противном случае она называется приводимой. На рис. 20, *a* диаграмма является неприводимой, остальные диаграммы на этом рисунке — приводимые (диаграмма *b* — некомпактная; диаграммы *в*, *г* содержат собственно-энергетические части, а диаграмма *д* — вершинную часть). На рис. 25, *a* диаграмма является неприводимой, остальные диаграммы

на этом рисунке — приводимые. Неприводимыми вершинными частями являются диаграммы *a*, *b* на рис. 30; остальные графы на этом рисунке — приводимые (диаграммы *б*, *ж*, *з* содержат вершинные части, диаграммы *г*, *д*, *е* — собственно-энергетические части).

4. *Часть рассеяния фотона на фотоне.* Часть графа Фейнмана, соединенная с остальной частью при помощи четырех фотонных линий, называется частью рассеяния фотона на

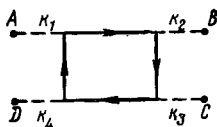


Рис. 32

фотоне. Множитель в матричном элементе, соответствующий части графа, описывающей рассеяние фотона на фотоне, обозначим через

$$M(k_1, k_2, k_3, k_4).$$

На рис. 32 представлен граф, изображающий рассеяние фотона фотоном в четвертом приближении теории возмущений. Матричный элемент, соответствующий этому графу, имеет вид

$$S_{i \rightarrow f}^{(4)} = a_\mu(k_1) a_\nu(k_2) a_\lambda(k_3) a_\sigma(k_4) \times \\ \times M_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \cdot \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4),$$

где $a_\mu(k_1)$, $a_\nu(k_2)$, $a_\lambda(k_3)$, $a_\sigma(k_4)$ — четырехмерные функции, описывающие фотоны с импульсами k_1 , k_2 , k_3 и k_4 . Докажем, что *собственно-энергетические функции* фотона и электрона пропорциональны соответствующим добавкам к собственным энергиям этих частиц.

Пусть вектор Φ_i является собственным вектором невозмущенного оператора энергии \hat{H}_0 :

$$\hat{H}_0 \Phi_i = E_i \Phi_i. \quad (1.7)$$

Здесь i означает набор квантовых чисел начального состояния, f — конечного, а m — промежуточного.

Рассмотрим матричный элемент

$$(\Phi_f, \hat{S} \Phi_i) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi_f, \hat{S}_n \Phi_i); \quad (1.8)$$

для первого члена в правой части (1.8) можно написать

$$(\Phi_f, \Phi_i) = \delta_{fi}, \quad (1.9)$$

второй член имеет вид

$$(\Phi_f, \hat{S}_1 \Phi_i) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (\Phi_f, \hat{H}'_i(t) \Phi_i). \quad (1.10)$$

Перейдем от представления взаимодействия к представлению Шредингера:

$$\hat{H}'_i(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \hat{H}'_i^S(t_0) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t}. \quad (1.11)$$

Используя формулу (1.11), преобразуем (1.10) к виду

$$\begin{aligned} (\Phi_f, \hat{S}_1 \Phi_i) &= -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (\Phi_f, e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \hat{H}'_i^S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \Phi_i) = \\ &= -\frac{i}{\hbar} (\Phi_f, \hat{H}'_i^S \Phi_i) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{\frac{i}{\hbar} (E_f - E_i) t}, \end{aligned}$$

или

$$(\Phi_f, \hat{S}_1 \Phi_i) = -2\pi i \delta(E_f - E_i) (\Phi_f, \hat{H}'_i^S \Phi_i). \quad (1.12)$$

Используя условие полноты системы $\{\Phi_i\}$, третий член в правой части формулы (1.8)

$$\begin{aligned} &(\Phi_f, \hat{S}_2 \Phi_i) = \\ &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 (\Phi_f, \hat{H}'_i(t_1) \hat{H}'_i(t_2) \Phi_i) \end{aligned} \quad (1.13)$$

преобразуем к виду

$$\begin{aligned} (\Phi_f, \hat{S}_2 \Phi_i) &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \sum_m (\Phi_i, \hat{H}'_i(t_1) \Phi_m) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (\Phi_m, \hat{H}'_i(t_2) \Phi_i). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Отсюда согласно формуле (1.11) получаем

$$\begin{aligned}
 (\Phi_f, \hat{S}_2 \Phi_i) &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m (\Phi_f, \hat{H}_i^S \Phi_m) \times \\
 &\times (\Phi_m, \hat{H}_i^S \Phi_i) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_m)t_1} \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_i)t_2}. \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

Интеграл по t_2 в этом выражении определим следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_i)t_2} &= \lim_{|\varepsilon| \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_i - i|\varepsilon|)t_2} = \\
 &= i\hbar \lim_{|\varepsilon| \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_i - i|\varepsilon|)t_1}}{E_i - E_m + i|\varepsilon|}. \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

Используя (1.16), преобразуем формулу (1.15):

$$\begin{aligned}
 (\Phi_f, \hat{S}_2 \Phi_i) &= -\frac{i}{\hbar} \sum_m (\Phi_f, \hat{H}_i^S \Phi_m) \times \\
 &\times (\Phi_m, \hat{H}_i^S \Phi_i) \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t_1}}{E_i - E_m}, \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

или

$$(\Phi_f, \hat{S}_2 \Phi_i) = -2\pi i \delta(E_i - E_f) \sum_m \frac{(\Phi_f, \hat{H}_i^S \Phi_m) (\Phi_m, \hat{H}_i^S \Phi_i)}{E_i - E_m}.$$

Продолжая рассматривать следующие члены в правой части соотношения (1.8), окончательно найдем

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_f, \hat{S}_n \Phi_i) &= -2\pi i \delta(E_i - E_f) \left\{ (\Phi_f, \hat{H}_i^S \Phi_i) + \right. \\
 &+ \sum_m \frac{(\Phi_f, \hat{H}_i^S \Phi_m) (\Phi_m, \hat{H}_i^S \Phi_i)}{E_i - E_m} + \\
 &+ \sum_m \sum_{m'} \frac{(\Phi_f, \hat{H}_i^S \Phi_m) (\Phi_m, \hat{H}_i^S \Phi_{m'}) (\Phi_{m'}, \hat{H}_i^S \Phi_i)}{(E_i - E_m)(E_i - E_{m'})} + \dots \left. \right\}. \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

Как известно, матричный элемент $(\Phi_f, \hat{S}_n \Phi_i)$ можно представить так

$$(\Phi_f, \hat{S}_n \Phi_i) = M_{fi}^{(n)} \delta(E_i - E_f); \quad (1.19)$$

учитывая это, перепишем формулу (1.18) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_{fi}^{(n)} = -2\pi i \left\{ (\Phi_f, \hat{H}_i^S \Phi_i) + \sum_m \frac{(\Phi_f, \hat{H}_i^S \Phi_m) (\Phi_m, \hat{H}_i^S \Phi_i)}{E_i - E_m} + \dots \right\}. \quad (1.20)$$

Пусть Φ_i — вектор состояния одной частицы. Если начальное состояние совпадает с конечным (т. е. если $i = f$), то матричный элемент $(\Phi_f, \hat{H}_i^S \Phi_f) = \Delta E_1$ — поправка к собственной энергии частицы в первом приближении неинвариантной теории возмущений [в электродинамике $(\Phi_f, \hat{H}_i^S \Phi_f) = 0$], $\sum_m \frac{(\Phi_f, \hat{H}_i^S \Phi_m) (\Phi_m, \hat{H}_i^S \Phi_f)}{E_f - E_m} = \Delta E_2$ — поправка к собственной энергии частицы во втором приближении теории возмущений и т. д.

Отсюда следует, что в квантовой электродинамике

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta E_1 + \Delta E_2 + \dots = \\ &= (\Phi_f, \hat{H}_i^S \Phi_f) + \sum_m \frac{(\Phi_f, \hat{H}_i^S \Phi_m) (\Phi_m, \hat{H}_i^S \Phi_f)}{E_f - E_m} + \dots \end{aligned} \quad (1.21)$$

— полная добавка к собственной энергии частицы вследствие взаимодействия ее с электромагнитным и электронно-позитронным вакуумом.

Принимая во внимание равенство (1.21) и полагая $f = i$, из формулы (1.20) находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_{ii}^{(n)} = -2\pi i \Delta E. \quad (1.22)$$

Если Φ_f — вектор состояния, в котором находится один свободный электрон, то $\sum_{n=1}^{\infty} M_{ii}^{(n)} = \Sigma(p)$ представляет собой сумму всех собственно-энергетических функций электрона, которая согласно выражению (1.22) пропорциональна добавке ΔE к собственной энергии этого электрона.

Аналогично, если Φ_f — вектор состояния, в котором находится один свободный фотон, то $\sum_{n=1}^{\infty} M_{ff}^{(n)} = \Pi(k)$ является суммой всех собственно-энергетических функций фотона, которая на основании соотношения (1.22) пропорциональна добавке ΔE к собственной энергии рассматриваемого фотона.

§ 2. РАСХОДИМОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ПЕРЕХОДОМ В НЕПРИВОДИМЫХ ДИАГРАММАХ

Рассмотрим некоторую неприводимую часть диаграммы после того, как в ней совершен предельный переход $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

Пусть n — число вершин в этой части, F — число ее внутренних линий (F_e — число электронных, F_γ — число фотонных линий, $F = F_e + F_\gamma$). В матричном элементе этой диаграммы стоит многократный интеграл по импульсам виртуальных частиц:

$$I = \int R(q_1, \dots, q_F) d^4 q_1 \dots d^4 q_F, \quad (2.1)$$

где подынтегральная функция является дробью, структуру которой сейчас определим. Каждой внутренней электронной линии при больших p соответствует множитель $\hat{S}^F(p) \sim \frac{1}{p}$, а каждой внутренней фотонной линии — множитель $D^F(p) \sim \frac{1}{p^2}$. Поэтому подынтегральная функция в формуле (2.1) является дробью $R \sim (q)^{-(F_e + 2F_\gamma)}$. В выражении (2.1) интегрирование ведется по F различным импульсам внутренних линий. Однако эти импульсы не независимы, так как в матричный множитель, соответствующий части диаграммы с n вершинами, входит n δ -функций. Каждая δ -функция обеспечивает закон сохранения энергии-импульса для заданного узла, а одну из n δ -функций необходимо отнести к закону сохранения энергии-импульса для внешних линий. Поэтому число независимых импульсов, по которым производится интегрирование, равно $F + 1 - n$. Отсюда следует, что интеграл (2.1) можно переписать так

$$I \sim \int \frac{(d^4 q)^{\tilde{K}_1}}{(q)^{\tilde{K}_2}}, \quad (2.2)$$

где $\tilde{K}_1 = F - n + 1$, $\tilde{K}_2 = F_e + 2F_\gamma$.

Так как рассматриваемая диаграмма неприводима, то подынтегральная функция в формуле (2.2) не распадается на множители, содержащие независимые переменные. Поэтому в области больших импульсов интеграл (2.2) сходится, если

$$\tilde{K} = \tilde{K}_2 - 4\tilde{K}_1 = -F_e - 2F - 4(-n + 1) \geq 1;$$

он расходится, если $\tilde{K} \leq 0$.

Интеграл (2.2) расходится логарифмически, если $\tilde{K} = 0$; линейно, если $\tilde{K} = -1$; квадратично, если $\tilde{K} = -2$, и т. д. Учитывая, что через каждую вершину графа проходят две электронные линии и одна фотонная, а также учитывая, что каждая внутренняя линия соединяет две вершины, а внешняя линия — только одну вершину, получим

$$2F_e + N_e = 2n, \quad 2F_\gamma + N_\gamma = n, \quad (2.3)$$

где N_e — число внешних электронных линий; N_γ — число внешних фотонных линий. Согласно формуле (2.3) имеем

$$\tilde{K} = \frac{3}{2} N_e + N_\gamma - 4, \quad (2.4)$$

отсюда находим все случаи расходимостей для неприводимых частей графов Фейнмана:

- а) $N_e = 2, N_\gamma = 0, \tilde{K} = -1$ — линейная расходимость;
- б) $N_e = 2, N_\gamma = 1, \tilde{K} = 0$ — логарифмическая расходимость;
- в) $N_e = 0, N_\gamma = 1, \tilde{K} = -3$ — кубическая расходимость;
- г) $N_e = 0, N_\gamma = 2, \tilde{K} = -2$ — квадратичная расходимость;
- д) $N_e = 0, N_\gamma = 3, \tilde{K} = -1$ — линейная расходимость;
- е) $N_e = 0, N_\gamma = 4, \tilde{K} = 0$ — логарифмическая расходимость;
- ж) $N_e = 0; N_\gamma = 0, \tilde{K} = -4$ — расходимость четвертого порядка.

На рис. 33 представлены простейшие неприводимые графы, которым при предельном переходе $\alpha \rightarrow \alpha_0$ соответствуют в матричных элементах расходящиеся интегралы. Существует только один неприводимый собственно-энергетический электронный граф и только один неприводимый собственно-энергетический фотонный граф. Неприводимых

вершинных графов и графов рассеяния фотона на фотоне существует бесконечно большое число. Графы *в* и *д* (см. рис. 33) имеют нечетное число внешних фотонных линий, поэтому согласно теореме Фарри соответствующие им суммы матричных элементов равны нулю; граф *ж*, описывающий переход «вакуум-вакуум», исключается из рассмотрения на основании соображений, высказанных в § 1.

Таким образом, существует только четыре типа расходимостей. Им соответствуют неприводимые собственно-энер-

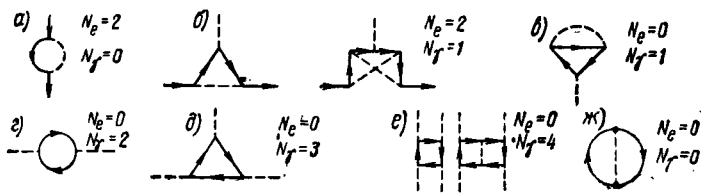


Рис. 33

гетические части электрона и фотона, вершинные части и части рассеяния фотона на фотоне. Итак, Σ , Π , Λ и M — интегралы, расходящиеся после предельного перехода $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

Надеясь, что в будущей квантовой теории поля удастся непосредственно получить конечные выражения для функций Σ , Π , Λ и M , в настоящее время для устранения упомянутых выше расхождений можно использовать некоторые физические соображения и на их основе построить математическую процедуру, называемую перенормировкой массы и заряда.

Все интегралы, входящие в любые матричные элементы, могут быть сделаны конечными до перехода к пределу $\alpha \rightarrow \alpha_0$. Действительно, в матричный элемент входят операторы энергии взаимодействия, содержащие основную функцию $f_\alpha(x, y, z)$, а ее всегда можно подобрать так, чтобы интегралы, входящие в матричный элемент, были сходящимися. В дальнейшем операторы поля, свертки и функция $f_\alpha(x, y, z)$ разлагаются в ряды Фурье. После проведения интегрирований по пространствам Минковского возникают четырехмерные символы Кронекера, которые снимают некоторые суммирования по четырехмерным импульсам. В итоге получают матричный элемент, в который входят суммы по четырех-

мерным импульсам. Эти суммы являются заведомо сходящимися, так как проведенные преобразования не могут изменить величину матричного элемента. Полученные суммы можно заменить интегралами по четырехмерным импульсам. Поэтому изложенная процедура эквивалентна введению в матричном элементе под интегралы по четырехмерным импульсам соответствующих «обрезающих множителей». Можно так подобрать функцию $f_\alpha(x, y, z)$, чтобы обрезающий множитель, например, имел вид

$$f(p, K) = \left(\frac{K^2}{\sum_i a_i^2 p_i^2 + K^2} \right)^n \quad (n > 1), \quad (2.5)$$

где a_i — некоторые постоянные; K — предельный импульс. Чтобы упростить выкладки, можно взять обрезающий множитель в более простом виде

$$f(p, K) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i p_i \leq K, \\ 0, & \text{если } a_i p_i > K. \end{cases} \quad (2.6)$$

Тогда функции Σ , Π , Λ и M будут функциями предельного импульса K . Все преобразования, выполняемые над функциями Σ , Π , Λ и M при перенормировке массы и заряда, осуществляются до перехода к пределу $K \rightarrow \infty$ (который является частным случаем предельного перехода $\alpha \rightarrow \alpha_0$), а поэтому вполне законны. После выполнения интегрирования и упомянутой процедуры перенормировки массы и заряда, в полученных выражениях необходимо перейти к пределу $K \rightarrow \infty$, что дает вполне определенный конечный результат.

Первоначально квантовая теория поля в гамильтоновой форме формулировалась без введения в ее основные уравнения функции $f_\alpha(x, y, z)$. Поэтому при устранении указанных ранее расхождений для придания законности операциям с расходящимися интегралами вводились в теорию где-то на пол-пути необходимые обрезающие множители. С нашей точки зрения, такое введение обрезающих множителей, призванных «подштопать» теорию, сформулированную с самого начала некорректно, является непоследовательным. Дело заключается в том, что уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi,$$

до сих пор применяемое в квантовой теории поля, возможно не имеет решения в обычном понимании этого слова. Это уравнение, по всей вероятности, имеет обобщенное решение, являющееся пределом $\Psi = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \Psi_\alpha$, где Ψ_α — решение уравнения Шредингера вида

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t} = \hat{H}_\alpha \Psi_\alpha.$$

Здесь \hat{H}_α получено введением под интеграл в \hat{H} основной функции $f_\alpha(x, y, z)$. Эта точка зрения была сформулирована еще в начале первой главы в виде соответствующих постулатов.

§ 3. ИДЕЯ МЕТОДА УСТРАНЕНИЯ РАСХОДИМОСТЕЙ

Множители в матричных элементах, соответствующие собственно-энергетическим и вершинным частям, а также частям рассеяния фотона на фотоне, можно разложить по формуле Тэйлора

$$\hat{\Sigma}(p) = \hat{\Sigma}(p_0) + \frac{\partial \hat{\Sigma}(p_0)}{\partial p_\mu} (p_\mu - p_{0\mu}) + \hat{\Sigma}_R(p), \quad (3.1)$$

$$\Pi(k) = \Pi(0) + \frac{\partial \Pi(0)}{\partial k_\alpha} k_\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} k_\alpha k_\beta + \Pi_R(k), \quad (3.2)$$

$$\hat{\Lambda}(p_1, p_2; k) = \hat{\Lambda}(p_0, p_0; 0) + \hat{\Lambda}_R(p_1, p_2; k), \quad (3.3)$$

$$M(k_1, k_2, k_3, k_4) = M(0, 0, 0, 0) + M_R(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (3.4)$$

где p_0 — импульс свободного электрона, удовлетворяющий условию $p_0^2 + \chi^2 = 0$.

Легко показать, что

$$\frac{\partial \hat{\Sigma}(p_0)}{\partial p_\mu} = \hat{\Sigma}_1(p_0) i\hat{\gamma}_\mu, \quad (3.5)$$

тогда формулу (3.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(p) = & \left[\hat{\Sigma}(p_0) - \frac{\partial \hat{\Sigma}(p_0)}{\partial p_\mu} p_{0\mu} - \hat{\Sigma}_1(p_0) \chi \right] + \\ & + \hat{\Sigma}_1(p_0) (i\hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi) + \hat{\Sigma}_R(p). \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\hat{\Sigma}_0(p_0) = \hat{\Sigma}(p_0) - \frac{\partial \hat{\Sigma}(p_0)}{\partial p_\mu} p_{0\mu} - \hat{\Sigma}_1(p_0) \chi,$$

преобразуем последнюю формулу к виду

$$\hat{\Sigma}(p) = \hat{\Sigma}_0(p_0) + \hat{\Sigma}_1(p_0) (i\hat{\gamma}_\alpha p_\alpha + \chi) + \hat{\Sigma}_R(p). \quad (3.1')$$

Так как функция $\Pi(k)$ должна быть инвариантной функцией от k^2 (строго говоря, при предельном переходе $\alpha \rightarrow \alpha_0$), то $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial k_\alpha}\right)_{k_\alpha=0} = 0$ и $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} = \Pi_1 \delta_{\alpha\beta}$. Поэтому равенство (3.2) можно переписать так

$$\Pi(k) = \Pi(0) + \Pi_1 \cdot k^2 + \Pi_R(k). \quad (3.2')$$

В формулах (3.1) — (3.4) в пределе, когда $K \rightarrow \infty$, выражения $\frac{\partial \hat{\Sigma}(p)}{\partial p_\mu}$, $\frac{\partial \Pi(0)}{\partial k^2}$, $\hat{\Lambda}(p_0, p_0; 0)$ и $M(0, 0, 0, 0, 0)$ расходятся логарифмически, $\hat{\Sigma}(p_0)$ — линейно и $\Pi(0)$ — квадратично. В дальнейшем покажем, что выражения $\hat{\Sigma}_R(p)$, $\Pi_R(k)$, $\hat{\Lambda}_R(p_1, p_2; k)$ и $M_R(p_1, p_2, p_3, p_4)$ представляются в виде сходящихся интегралов. Они соответственно называются перенормированными собственно-энергетическими функциями электрона и фотона, перенормированной вершинной функцией и перенормированной функцией рассеяния фотона на фотоне. Вполне понятно, что

$$\hat{\Sigma}_R(p) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \hat{\Sigma}(p') \cdot (p_\mu - p_{0\mu})(p_\nu - p_{0\nu})$$

$$(p \geq p' \geq p_0),$$

$$\Pi_R(k) = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial k_\alpha \partial k_\beta \partial k_\gamma} \Pi(k') k_\alpha k_\beta k_\gamma$$

$$(k \geq k' \geq 0),$$

$$\hat{\Lambda}_R(p_1, p_2; p_1 - p_2) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial p_{i\mu}} \hat{\Lambda}(p'_1, p'_2; p'_1 - p'_2) \times$$

$$\times (p_{i\mu} - p_{0\mu}) \quad (p_i \geq p'_i \geq p_0), \quad (3.6)$$

$$M_R(k_1, k_2, k_3, k_4) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial k_{i\mu}} M(k'_1, k'_2, k'_3, k'_4) k_{i\mu}$$

$$(k \geq k' \geq 0),$$

где p_0 — импульс свободного электрона ($p_0^2 + \chi^2 = 0$). Согласно § 2 функции Σ , Π , $\hat{\Lambda}^{(3)}$ и M имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}(p) &= \int d^4 q \cdot \hat{R}_1(p+q); \\ \Pi(k) &= \int d^4 q \cdot R_2(k+q); \\ \hat{\Lambda}^{(3)}(p_1, p_2; k) &= \int d^4 q \cdot \hat{R}_3(p_1 - q, p_2 - q); \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$M(k_1, k_2, k_3, k_4) = \int d^4 q \cdot R_4(k_1 + q, k_2 + q, k_3 + q, k_4 + q),$$

причем при больших значениях $|q|$

$$\hat{R}_1 \sim \frac{1}{q^3}, \quad R_2 \sim \frac{1}{q^2}, \quad \hat{R}_3 \sim \frac{1}{q^4}, \quad R_4 \sim \frac{1}{q^4}. \quad (3.8)$$

Подставляя выражение (3.7) для $\hat{\Sigma}$, Π , $\hat{\Lambda}^{(3)}$ и M в формулу (3.6), проводя в (3.6) под знаком интеграла дифференцирование по волновым числам внешних частиц p и k , а также учитывая, что p и k встречаются в подинтегральных функциях в сумме с вектором q , получим для $\hat{\Sigma}_R$, Π_R , $\hat{\Lambda}_R$ и M_R формулу вида

$$J_R = \int d^4 q F, \quad (3.9)$$

где при больших $|q|$

$$F \sim \frac{1}{q^5}. \quad (3.10)$$

Из выражений (3.9) и (3.10) видно, что функции $\hat{\Sigma}_R$, Π_R , $\hat{\Lambda}_R^{(3)}$ и M_R сходятся абсолютно.

В приведенных рассуждениях была рассмотрена вершинная часть третьего порядка $\hat{\Lambda}_R^{(3)}$. Полученный результат легко обобщается на случай произвольной неприводимой вершинной части порядка $(2n + 1)$.

Идея устранения перечисленных ранее расходимостей сводится к следующему:

1) в матричные элементы вместо функций $\hat{\Sigma}(p)$, $\Pi(k)$, $\hat{\Lambda}(p_1, p_2; k)$, $M(p_1, p_2, p_3, p_4)$, которые расходятся при $K \rightarrow \infty$, соответственно ставятся перенормированные функции $\hat{\Sigma}_R(p)$, $\Pi_R(k)$, $\hat{\Lambda}_R(p_1, p_2; k)$, $M_R(p_1, p_2, p_3, p_4)$, в которых переходят к пределу $K \rightarrow \infty$;

2) проведенная замена эквивалентна вычитанию из первоначальных функций соответствующих членов, рас-

ходящихся в пределе при $K \rightarrow \infty$, что эквивалентно отбрасыванию указанных членов в соответствующем ряде Тэйлора. Исходя из физических соображений и предпосылок, следует обосновать введенную методику устранения расходимостей, основанную на отбрасывании в разложениях в ряд Тэйлора тех членов, которые расходятся при $K \rightarrow \infty$.

В квантовой электродинамике для обоснования законности вычитания членов, расходящихся при $K \rightarrow \infty$, используются следующие три физические принципа: 1) перенормировка массы электрона; 2) перенормировка заряда электрона; 3) требование калибровочной инвариантности теории.

Первые два принципа, дающие возможность отбросить (вычесть) члены $\hat{\Sigma}(p_0)$ и $\frac{\partial \Pi(0)}{\partial k^2} k^2$, будут подробно рассмотрены в следующих параграфах настоящей главы. В данном параграфе покажем, как, пользуясь третьим принципом, можно обосновать законность вычитания членов $\Pi(0)$ и $M(0, 0, 0, 0)$.

Ввиду градиентной инвариантности теории электромагнитного поля наблюдаемые физические величины зависят только от тензора электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu}(k) = k_\mu A_\nu(k) - k_\nu A_\mu(k), \quad (3.6)$$

а не от самих потенциалов $A_\mu(k)$. Поэтому физические величины должны обращаться в нуль при $k_\mu = 0$, а следовательно, и $\Pi(0) = 0$. Величина $\Pi(0)$ пропорциональна собственной энергии фотона, т. е. пропорциональна массе покоя фотона. Следовательно, из градиентной инвариантности теории вытекает, что масса покоя фотона равна нулю. Кроме того, из инвариантности выражений относительно преобразования калибровки следует, что $M(0, 0, 0, 0) = 0$.

Итак, вычитание констант $\Pi(0)$ и $M(0, 0, 0, 0)$, расходящихся при $K \rightarrow \infty$, обосновывается требованием калибровочной инвариантности теории.

§ 4. ПЕРЕНОРМИРОВКА МАССЫ И ЗАРЯДА ЭЛЕКТРОНА

1. В § 2 было показано, что матричный элемент собственно-энергетической части расходится. Устранение этой расходимости можно осуществить при помощи перенормировки массы электрона. Физическая сущность этой операции заключается в следующем.

Электрон испускает и поглощает виртуальные фотоны, т. е. взаимодействует с электромагнитным вакуумом. Это взаимодействие является ответственным за собственную электромагнитную массу электрона δm . Сумма собственной электромагнитной массы электрона δm и механической «затравочной» массы m_0 равна общей массе электрона m_c , которую и определяют экспериментально (определить экспериментально m_0 и δm отдельно нельзя). Однако масса, стоящая в уравнении Дирака, является массой свободного изолированного электрона m_0 , которая неизвестна. Таким образом, в уравнении Дирака должно стоять $\chi_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}$, а не $\chi_c = \frac{m_c c}{\hbar}$. Так как известна только общая масса электрона m_c , то уравнение Дирака необходимо записать в виде

$$\left[\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + (\chi_c - \delta\chi) \right] \hat{\psi} = 0 \quad \left(\delta\chi = \frac{\delta m c}{\hbar} \right). \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) является уравнением Эйлера для интеграла действия с плотностью лагранжиана

$$\hat{\mathcal{L}}_D^{(0)} = \hat{\mathcal{L}}_D^{(c)} + \hat{\mathcal{L}}_s = ic\hbar \hat{\psi} \left(\hat{\gamma}_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \chi_0 \right) \hat{\psi}, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_D^{(c)} &= ic\hbar \hat{\psi} \left(\hat{\gamma}_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \chi_c \right) \hat{\psi}, \\ \hat{\mathcal{L}}_s &= -i\delta m c^2 \hat{\psi} \hat{\psi}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Плотность функции Лагранжа системы двух взаимодействующих полей равна

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} &= \hat{\mathcal{L}}_D^{(0)} + \hat{\mathcal{L}}_V + \hat{\mathcal{L}}_{int} = \hat{\mathcal{L}}_D^{(c)} + \hat{\mathcal{L}}_V + \hat{\mathcal{L}}_{int} + \hat{\mathcal{L}}_s = \\ &= \hat{\mathcal{L}}_D^{(c)} + \hat{\mathcal{L}}_V + \hat{\mathcal{L}}_{int}^{(c)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $\hat{\mathcal{L}}_V$ — плотность функции Лагранжа электромагнитного поля; $\hat{\mathcal{L}}_{int}^{(c)}$ — плотность функции Лагранжа взаимодействия;

$$\hat{\mathcal{L}}_{int}^{(c)} = ie\hat{N} \hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi} - i\delta m c^2 \hat{\psi} \hat{\psi} \quad (4.5)$$

— перенормированная плотность лагранжиана взаимодействия.

Согласно формуле (4.5) перенормированный оператор плотности гамильтониана взаимодействия имеет вид

$$\hat{\Gamma}_{int}^{(c)} = -\hat{\mathcal{L}}_{int}^{(c)} = -ie\hat{N}\hat{\psi}\hat{A}\hat{\psi} + i\delta mc^2\hat{\psi}\hat{\psi}. \quad (4.6)$$

Первый член здесь обуславливает появление в графах Фейнмана обычных трехлучевых вершин, а второй член порождает двухлучевые вершины (рис. 34).

Из вершины на рис. 34 выходят только две электронные линии, фотонные линии из нее не выходят. Покажем, что при определенном выборе δt член $\hat{\Sigma}(p_0)$ в правой части вы-

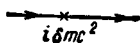


Рис. 34

ражения (3.1) для любой собственно-энергетической части электрона компенсируется членом \hat{L}_3 , так как этот член дает только одну дополнительную неприводимую диаграмму, которая представляет собой электронную собственно-энергетическую часть с матричным элементом, не содержащим импульса электрона. Каждую диаграмму, содержащую обычную неприводимую электронную собственно-энергетическую часть, дополняем аналогичной диаграммой, в которой вместо обычной неприводимой собственно-энергетической части включена собственно-энергетическая часть, представленная на рис. 34. Сумме таких собственно-энергетических частей электрона в матричном элементе соответствует множитель

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^{(2)'}(p) &= \hat{\Sigma}^{(2)}(p) + i\delta\chi = \hat{\Sigma}^{(2)}(p_0) + \\ &+ \frac{\partial \hat{\Sigma}(p_0)}{\partial p_\mu} (p_\mu - p_{0\mu}) + \hat{\Sigma}_R + i\delta\chi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Можно так подобрать¹ $\delta\chi$, чтобы $\hat{\Sigma}^{(2)'}(p_0) + i\delta\chi = 0$. Это можно сделать ввиду независимости $\hat{\Sigma}^{(2)}(p_0)$ от p . Рассмотрим теперь произвольную приводимую компактную диаграмму W для собственной энергии электрона. Сог-

¹ Из соотношения $p_0^2 + (\chi_0 + \delta\chi)^2 = 0$ видно, что $\delta\chi$ зависит от p_0 .

ласно рис. 34 имеем

$$\hat{\Sigma}'_W(p) = \hat{\Sigma}^*_W(p) + i\delta\chi = \hat{\Sigma}^*_W(p_0) + \frac{\partial \hat{\Sigma}^*_W(p_0)}{\partial p_\mu} (p_\mu - p_{0\mu}) + \hat{\Sigma}^*_R + i\delta\chi, \quad (4.8)$$

где в $\hat{\Sigma}^*_W$ вместо m_0 подставлена масса m_c , причем каждой неприводимой компактной электронной собственно-энергетической части, входящей в W , вместо выражения $\hat{\Sigma}^{(2)}(p)$ сопоставляем функцию $\hat{\Sigma}^{(2)'}$. При выбранном значении $\delta\chi$ в правой части (4.8) член $i\delta\chi$ полностью компенсирует $\hat{\Sigma}^*_W(p_0)$. Второй член в формуле (3.1), как будет показано дальше,



Рис. 35

компенсируется в матричных элементах различных процессов первым членом из разложения $\hat{\Lambda}_\mu$ в ряд Тэйлора (3.3).

Можно обосновать законность отбрасывания второго члена в правой части равенства (3.1), кроме того, следующим образом. Рассмотрим эффективную электронную линию, выходящую из графа Фейнмана на рис. 35. Этой линии в матричном элементе соответствует множитель

$$\tilde{v} = v + \hat{S}^F \hat{\Sigma} v, \quad (4.9)$$

второй член которого дает вклад в электромагнитную массу электрона. Так как при подстановке в уравнения поля вместо m_0 массы m_c уже учтена электромагнитная масса электрона, то надо положить

$$\hat{S}^F(p) \hat{\Sigma}(p) v(p) = 0. \quad (4.10)$$

Поскольку \hat{S}^F имеет полюс первого порядка в точке $i\hat{\gamma}_\mu p_\mu = -\chi_c$, то $\hat{\Sigma}(p)$ должна иметь в этой точке нуль второго порядка, а этим свойством как раз обладает только третий член в правой части равенства (3.1), который обозначен через $\hat{\Sigma}^*_R(p)$.

2. Пусть электрон движется в слабом электромагнитном внешнем поле $A_{\mu}^{(e)}$. Взаимодействию электрона с этим полем в первом и третьем приближении теории возмущений соответствуют графы на рис. 36. Граф на рис. 36, б описывает процесс излучения электроном фотона, который порождает виртуальную пару электрон—позитрон.

Таким образом, электрон, взаимодействуя с внешним электромагнитным полем, порождает вокруг себя «облако» виртуальных электронно-позитронных пар. Ввиду этого

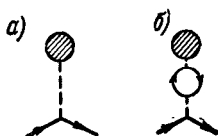


Рис. 36

свойства вакуума аналогичны в некоторой степени свойствам диэлектрика; взаимодействие электрона с виртуальными электронно-позитронными парами приводит к поляризации вакуума, что эквивалентно изменению заряда электрона. В результате этого полный (т. е. экспериментальный) заряд электрона равен

$$e_c = e + \delta e,$$

где e — «затравочный» заряд электрона, δe — его добавочный заряд, обусловленный поляризацией вакуума. В современной теории δe выражается расходящимся интегралом. С другой стороны, экспериментально можно определить только e_c , тогда как отдельно найти e или δe нельзя. Подставляя $e = e_c - \delta e$ в формулы (4.5), получим

$$\hat{\mathcal{L}}_{int}^{(c)} = ie_c \hat{N} \hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi} - i\delta e \hat{N} \hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi} - i\delta mc^2 \hat{\psi} \hat{\psi}, \quad (4.9')$$

откуда следует, что если в $\hat{\mathcal{L}}_{int}$ подставить величину e_c вместо e , то в порядке компенсации надо вычесть из $\hat{\mathcal{L}}_{int}$ выражение $i\delta e \hat{N} \hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi}$. Действие члена $-i\delta e \hat{N} \hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi}$ эквивалентно изменению компонент потенциала электромагнитного поля. Таким образом, этот член можно учесть, если вместо тензора напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ ввести тензор $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} (1 + \delta f)^{1/2}$. Так как

плотность функции Лагранжа свободного электромагнитного поля равна $\hat{\mathcal{L}}_V = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}^2$, то действие члена $-i\delta e \hat{N} \hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi}$

и будет учтено, если вместо $\hat{\mathcal{L}}_V$ ввести плотность лагранжиана¹

$$\hat{\mathcal{L}}_{VR} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}^2 - \frac{\delta f}{16\pi} F_{\mu\nu}^2.$$

Отсюда следует, что можно отбросить $-i\delta e \hat{N} \hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi}$, добавив в оператор плотности лагранжиана член $-\frac{\delta f}{16\pi} F_{\mu\nu}^2$.

Относя это слагаемое к оператору плотности лагранжиана взаимодействия, можно теперь переписать последний в следующем виде²:

$$\hat{\mathcal{L}}_{int} = ie_c \hat{N} \hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi} - i\delta mc^2 \hat{\psi} \hat{\psi} - \frac{\delta f}{16\pi} F_{\mu\nu}^2. \quad (4.10')$$

¹ Этот результат можно получить так. В представлении Гейзенберга имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} \cdot \frac{e}{2} [\hat{\psi}, \hat{\gamma}_\nu \hat{\psi}]. \quad (A)$$

Согласно формуле (A) получаем

$$\delta\hat{\mathcal{L}} \equiv -\frac{i\delta e}{2} [\hat{\psi}, \hat{\gamma}_\nu \hat{\psi}] \hat{A}_\nu = \frac{i\delta ec}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\mu\nu} \cdot \hat{A}_\nu.$$

Легко показать, что это выражение для $\delta\hat{\mathcal{L}}$ эквивалентно выражению

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = -\frac{i\delta ec}{4\pi} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \hat{A}_\nu, \quad (B)$$

или

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = +\frac{i\delta ec}{4\pi} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \hat{A}_\mu. \quad (B)$$

Беря полусумму выражений (B) и (B), находим

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = -\frac{\delta f}{16\pi} F_{\mu\nu}^2, \quad (Г)$$

где

$$\delta f = 2ic\delta e.$$

При переходе из представления Гейзенберга в представление взаимодействия вид формулы (Г) не изменяется.

² Второй и третий члены в правой части выражения (4.10') обычно называются контрчленами.

Так как последний член в (4.10') пропорционален квадрату тензора поля, то при переходе к импульсному пространству отсюда возникают члены, пропорциональные квадрату импульса фотона, которым соответствуют диаграммы Фейнмана с двумя фотонными линиями, выходящими из одной вершины. Эти диаграммы являются диаграммами собственной энергии фотона. Следовательно, к каждой диаграмме, в которую входит неприводимая собственно-энергетическая фотонная часть, надо добавить диаграмму, которая отличается от первой заменой обычной собственно-энерге-



Рис. 37

тической части фотона частью, приведенной на рис. 37. Сумме этих собственно-энергетических частей фотона в матричном элементе соответствует множитель

$$\Pi^{(2)'}(k) = \Pi^{(2)}(k) + P \cdot k^2, \quad (4.11)$$

где $P(k)$ — выражение, соответствующее диаграмме рис. 37. Можно так подобрать δf , чтобы было $\frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial k^2} \cdot k^2 + P \cdot k^2 = 0$ (эта операция осуществляется еще до перехода $K \rightarrow \infty$). Рассмотрим теперь произвольную приводимую компактную диаграмму W собственной энергии фотона. Вычислим для нее Π_W^* , подставляя вместо m и e величины m_c и e_c . При этом каждой неприводимой компактной собственно-энергетической части электрона (или фотона), входящей в W , сопоставим вместо $\hat{\Sigma}^{(2)}(p)$ или $\Pi^{(2)}(p)$ функцию $\hat{\Sigma}^{(2)'}(p)$ или $\Pi^{(2)'}(k)$. В конце вычислений к $\Pi_W^*(k)$ добавим член $P \cdot k^2$, соответствующий собственно-энергетической части фотона, представленной на рис. 37. В итоге получим

$$\Pi_W'(k) = \Pi_W^*(k) + P \cdot k^2. \quad (4.12)$$

Очевидно, что при выбранном нами значении δf в правой части последнего равенства член $P \cdot k^2$ полностью компенсирует выражение $\frac{\partial \Pi^{*(0)}}{\partial k^2} \cdot k^2$.

Можно обосновать законность вычитания из $\Pi(k)$ члена $\frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial k^2} \cdot k^2$ еще и другим способом. Действительно, рассмотрим эффективную фотонную линию, выходящую из графа

Фейнмана на рис. 38. Этой линии соответствует функция

$$\tilde{a}(k) = a(k) + D^f(k) \Pi(k) a(k), \quad (4.13)$$

где второй член несет ответственность за собственную массу фотона. Так как масса покоя фотона равна нулю, то должно быть

$$D^f(k) \Pi(k) a(k) = 0. \quad (4.14)$$

Функция D^f имеет полюс второго порядка при $k = 0$, поэтому функция Π при $k = 0$ должна иметь нуль третьего порядка. Этому условию удовлетворяет функция Π_R , но не

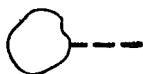


Рис. 38

удовлетворяют первые два члена в правой части (3.2). Поэтому необходимо в формуле (3.2) отбросить члены $\Pi(0)$ и $\frac{\partial \Pi(0)}{\partial k^2} k^2$, расходящиеся при $K \rightarrow \infty$, и во всех матричных элементах заменить Π функцией Π_R , в которой предварительно совершен предельный переход $K \rightarrow \infty$.

Таким образом, учитывая условие инвариантности теории относительно преобразования калибровки и используя операцию перенормировки массы и заряда электрона, удалось устранить четыре расходящихся выражения из шести имеющих. В дальнейшем, используя так называемое тождество Уорда, покажем, что в выражении для матричного элемента оставшиеся два расходящихся интеграла взаимно компенсируются.

Замечание. Введение контрчленов можно обосновать еще и несколько иным способом. Действительно, рассмотрим третий член S_α -матрицы

$$\hat{S}_{\alpha 2} = \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{2} \int \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 d^4 x_2 \hat{\Gamma}_{\alpha i}(x_1) \hat{\Gamma}_{\alpha i}(x_2),$$

где

$$\hat{\Gamma}_{\alpha i}(x) = -e \iint d^4 y d^4 z f_\alpha(x, y, z) \hat{\psi}(z) \hat{A}(y) \hat{\psi}(z).$$

Хронологическое произведение, очевидно, теряет свой смысл, если

$$y_1(0) = y_2(0), \quad z_1(0) = z_2(0).$$

Это делает необходимым доопределение T -произведения с помощью введения дополнительных контрчленов в исходный оператор энергии взаимодействия. Используя эти контрчлены, условие инвариантности теории относительно преобразования калибровки и тождество Уорда, доказываемое в следующем параграфе, можно устранить все выражения, расходящиеся при $K \rightarrow \infty$. Введенные таким образом контрчлены можно интерпретировать в духе идей перенормировки массы и заряда [2].

§ 5. ТОЖДЕСТВО УОРДА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ УСТРАНЕНИЯ РАСХОДИМОСТЕЙ

При $k=0$ имеет место тождество Уорда

$$\hat{\Lambda}_\mu(p, p; 0) = -\frac{e}{\hbar c} \frac{\partial \hat{\Sigma}^*(p)}{\partial p_\mu}. \quad (5.1)$$

Для доказательства этого соотношения рассмотрим тождество

$$\hat{S}^c(p) [\hat{S}^c(p)]^{-1} = 1. \quad (5.2)$$

Дифференцируя его по p_μ , получим

$$\frac{\partial \hat{S}^c(p)}{\partial p_\mu} = -\hat{S}^c(p) \frac{\partial (\hat{S}^c)^{-1}}{\partial p_\mu} \hat{S}^c(p). \quad (5.3)$$

Учитывая, что

$$\hat{S}^c(p) = \frac{1}{i\hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi}, \quad \text{т. е. } [\hat{S}^c(p)]^{-1} = i\hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi, \quad (5.4)$$

преобразуем формулу (5.3) к виду

$$\frac{\partial \hat{S}^c(p)}{\partial p_\mu} = -i\hat{S}^c(p)\hat{\gamma}_\mu \hat{S}^c(p), \quad (5.5)$$

т. е.

$$\frac{\partial \hat{S}^F(p)}{\partial p_\mu} = -i(2\pi)^4 \hat{S}^F(p)\hat{\gamma}_\mu \hat{S}^F(p). \quad (5.5')$$

Правой части формулы (5.5) соответствует простейшая вершинная диаграмма, на которой импульс фотона равен нулю (рис. 39). Таким образом, формальное дифференцирование функции распространения \hat{S}^c по переменной p_μ эквивалентно включению в электронную линию внешней фотонной линии с нулевым импульсом.

Для простого собственно-энергетического графа имеем

$$\hat{\Sigma}^{(2)*}(\rho) = (2\pi)^8 \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)^2 \int \hat{\gamma}_\nu \hat{S}^F(\rho-k) \hat{\gamma}_\nu D^F(k) d^4 k. \quad (5.6)$$

Дифференцируя (5.6) по ρ_μ и используя выражение (5.5'), находим

$$\frac{\partial \hat{\Sigma}^{(2)*}}{\partial \rho_\mu} = -i (2\pi)^{12} \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)^2 \int \hat{\gamma}_\nu \hat{S}^F(\rho-k) \hat{\gamma}_\mu \times \\ \times \hat{S}^F(\rho-k) \hat{\gamma}_\nu D^F(k) d^4 k. \quad (5.7)$$

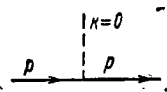


Рис. 39

Для вершины на рис. 30, а имеем

$$\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}(\rho_1, \rho_2; k_1) = (2\pi)^{12} \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)^3 \int \hat{\gamma}_\nu \hat{S}^F(\rho_1-k) \times \\ \times \hat{\gamma}_\mu \hat{S}^F(\rho_2-k) \hat{\gamma}_\nu D^F(k) d^4 k \quad (5.8)$$

Полагая $k_1=0$, $\rho_1=\rho_2=\rho$ и сравнивая это равенство с выражением (5.7), получаем тождество Уорда:

$$\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}(\rho, \rho; 0) = -\frac{e}{\hbar c} \frac{\partial \hat{\Sigma}^{(2)*}}{\partial \rho_\mu}. \quad (5.9)$$

Составляя аналогичные соотношения для вершинных частей более высоких порядков и производя суммирование, получим соотношение (5.1), где $\hat{\Sigma}^*$ — сумма выражений $\hat{\Sigma}(\rho)$, относящихся ко всем компактным частям W собственной энергии электрона, а $\hat{\Lambda}_\mu$ — сумма выражений $\hat{\Lambda}_\mu(\rho, \rho; 0)$, относящихся ко всем компактным вершинным частям V . Согласно выражению (3.5) для случая, когда $\rho_0^2 + \chi^2 = 0$, тождество Уорда получает вид

$$\hat{\Lambda}_\mu(\rho_0, \rho_0; 0) = -\frac{ie}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu \hat{\Sigma}_1(\rho_0). \quad (5.1')$$

Покажем, что на основании тождества Уорда выражения $\frac{\partial \hat{\Sigma}(\rho_0)}{\partial \rho_\mu}$ и $\hat{\Lambda}(\rho_0, \rho_0; 0)$, входящие в матричные элементы и

расходящиеся при $K \rightarrow \infty$, компенсируются. Проиллюстрируем это на примере рассеяния электрона во внешнем поле. Этому процессу в первом и третьем приближениях теории возмущений соответствуют графы, представленные на рис. 40. Графам б, в, г, д соответствует сумма матричных элементов:

$$\begin{aligned}
 M_{if}^{(3)} = & \bar{v}_2 \Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2, q) \tilde{A}_\mu(q) v_1 + \\
 & + (2\pi)^4 \frac{ie}{\hbar c} \{ \bar{v}_2 \hat{\gamma}_\mu \tilde{A}'_\mu(q) v_1 + \\
 & + \bar{v}_2' \hat{\gamma}_\mu \tilde{A}_\mu(q) v_1 + \bar{v}_2 \hat{\gamma}_\mu \tilde{A}_\mu(q) v_1' \} \\
 & (q = p_2 - p_1), \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

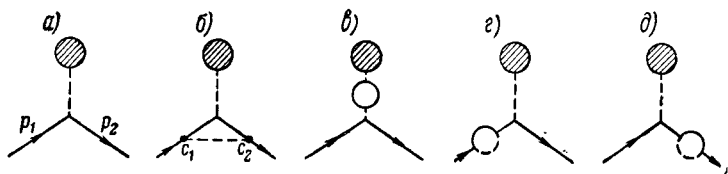


Рис. 40

где штрих над v и \tilde{A} означает, что в соответствующую электронную или фотонную линию включена простейшая собственно-энергетическая часть.

Обозначим через $\hat{S}^{F'}(p)$ электронную функцию распространения, соответствующую сумме обычной внутренней электронной линии и внутренней электронной линии с включенной в нее простейшей собственно-энергетической электронной частью. Очевидно, эта функция равна

$$\hat{S}^{F'}(p) = \hat{S}^F(p) + \hat{S}^F(p) \hat{\Sigma}(p) \hat{S}^F(p), \quad (5.11)$$

где

$$\hat{\Sigma}(p) = \hat{\Sigma}_0(p_0) + (i \hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi) \hat{\Sigma}_1(p_0) + \hat{\Sigma}_R(p). \quad (5.12)$$

После перенормировки массы электрона, отбрасывая в формуле (5.12) линейно расходящуюся при $K \rightarrow \infty$ константу $\hat{\Sigma}_0(p_0)$, получим

$$\hat{\Sigma}(p) = (i \hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi) \hat{\Sigma}_1(p_0) + \hat{\Sigma}_R(p). \quad (5.13)$$

Учитывая, что $\hat{S}^F(p) = [(2\pi)^4 (i \hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi)]^{-1}$, и подставляя $\hat{\Sigma}(p)$ из (5.13) в формулу (5.11), получим

$$\hat{S}^{F'}(p) = \hat{S}^F(p) + \frac{1}{(2\pi)^4} \hat{\Sigma}_1(p_0) \hat{S}^F(p) + \hat{S}^F(p) \hat{\Sigma}_R(p) \hat{S}^F(p). \quad (5.14)$$

Согласно (3.1) и (3.6) для свободного электрона $\hat{\Sigma}_R(p) = 0$ и поэтому в данном случае имеем

$$\hat{S}^{F'}(p) = \left[1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \hat{\Sigma}_1(p_0) \right] \hat{S}^F(p). \quad (5.15)$$

Поскольку функция $\hat{S}^F(p)$ является Фурье-компонентой функции Фейнмана $\langle \hat{T} \{ \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x') \} \rangle_0$, величину $\hat{S}^{F'}(p)$ можно рассматривать как соответствующую Фурье-компоненту функции Фейнмана с переопределенной волновой функцией (в пространстве импульсов):

$$\tilde{v} = \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \hat{\Sigma}_1 \right)^{1/2} v \approx \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\hat{\Sigma}_1}{(2\pi)^4} \right) v$$

(последнее равенство написано на том основании, что $\hat{\Sigma}_1$ является малой поправкой, пропорциональной e^2). Следовательно,

$$v' = \frac{1}{2} \frac{\hat{\Sigma}_1}{(2\pi)^4} v. \quad (5.16)$$

Далее можно написать

$$\hat{\Lambda}^{(3)}(p_1, p_2; k) = \hat{\Lambda}^{(3)}(p_0, p_0; 0) + \hat{\Lambda}_R^{(3)}(p_1, p_2; k). \quad (5.17)$$

Подставляя выражения для v' и $\hat{\Lambda}^{(3)}$ из формул (5.16) и (5.17) в формулу (5.10), найдем

$$M_{if}^{(3)} = \bar{v}_2 \hat{\Lambda}^{(3)}(p_0, p_0; 0) \tilde{A}_\mu(q) v_1 + \bar{v}_2 \hat{\Lambda}_R^{(3)}(p_1, p_2; k) \tilde{A}_\mu(q) v_1 + \frac{ie_c}{\hbar c} \left\{ \hat{\Sigma}_1 \bar{v}_2 \hat{\gamma}_\mu \tilde{A}_\mu(q) v_1 \right\} + \mathfrak{M}_b, \quad (5.18)$$

где \mathfrak{M}_b — перенормированный матричный элемент, соответствующий графу на рис. 40, в.

Согласно тождеству Уорда (5.1') первый и третий члены в правой части (5.18) компенсируются, в результате чего это выражение можно переписать в виде

$$M_{if}^{(3)} = \bar{v}_2 \hat{\Lambda}_R^{(3)}(p_1, p_2; k) \tilde{A}_\mu(q) v_1 + \mathfrak{M}_b. \quad (5.19)$$

Формула (5.19) дает конечную величину для матричного элемента рассматриваемого процесса (в третьем приближении теории возмущений). Таким образом, расходимость в матричном элементе $M_{if}^{(3)}$, обязанная вершинной части, сокращается с расходимостью, которая осталась в собственно-энергетической части электрона после перенормировки массы электрона.

В качестве второго примера сокращения интегралов $\frac{\partial \hat{\Sigma}(p_0)}{\partial p_\mu}$ и $\hat{\Lambda}(p_0, p_0; 0)$, расходящихся при $K \rightarrow \infty$, рассмотрим поляризацию вакуума с точностью до членов, пропорциональных e^4 . Этому процессу соответствуют графы, изо-

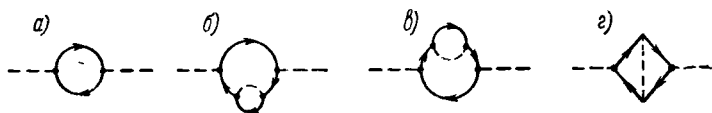


Рис. 41

браженные на рис. 41. Устранение расходимостей в данном случае производится точно таким же способом, как и в первом случае. В обоих примерах имеются вершинные части третьего порядка и собственно-энергетические части электрона второго порядка. В более высоких приближениях теории возмущений появляются вершинные части порядка выше третьего и собственно-энергетические части электрона порядка выше второго, что значительно затрудняет применение разработанной выше методики для доказательства сокращения оставшихся расходимостей. Для того чтобы доказать перенормируемость матричных элементов в любом приближении теории возмущений, в последующих параграфах рассмотрим некоторые дополнительные вопросы.

Суммируя полученные ранее результаты, можно сформулировать следующие выводы:

1. Пусть $M(p, k)$ — расходящийся множитель в матричном элементе, связанный с неприводимыми внутренними частями графа; p и k — импульсы электронных и фотонных линий, которые соединяют рассматриваемую часть графа с остальными частями. Для устранения расходимости в матричном элементе необходимо из $M(p, k)$ вычесть несколько первых членов разложения $M(p, k)$ в ряд по степеням $(p_\mu - p_{0\mu})$ или k_μ . Число вычитаемых членов должно быть минимально необходимым для обеспечения сходимости ос-

татка $M_R(p, k)$, который называют перенормированным значением функции $M(p, k)$.

2. В интеграле, определяющем $M(p, k)^1$:

$$M(p, k) = \int R(p, k, t) d^4 t$$

можно сначала выполнить интегрирование по некоторой конечной области, затем вычесть из него необходимое число членов разложения в ряд по степеням $(p_\mu - p_{0\mu})$ и k_μ , а после всего этого сделать предельный переход к бесконечно большой области интегрирования.

3. Операция перенормировки аддитивна: если расходящееся при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ выражение является суммой нескольких интегралов, то каждый из них можно перенормировать отдельно (если один из интегралов сходится, то нет еще оснований утверждать, что он совпадает с перенормированным выражением).

§ 6. ПОЛНЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА (ФУНКЦИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ)

Перед нами стоит задача обосновать операцию устранения расходимостей для совокупности всех диаграмм, описывающих любой процесс. Для этого необходимо оперировать с функциями, учитывающими поправки от высших приближений теории возмущений. Такими функциями являются так называемые полные функции Грина.

Рассмотрим средние по вакууму:

$$\langle \hat{T} \{ \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta(x') \hat{S} \} \rangle_0, \quad \langle \hat{T} \{ \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') \hat{S} \} \rangle_0, \quad (6.1)$$

где \hat{S} — матрица рассеяния (S-матрица), которую можно представить в виде ряда

$$\hat{S} = 1 + \hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \dots \quad (6.2)$$

Подставим это выражение для S в формулы (6.1). Нулевой член в разложении S-матрицы приводит к функциям Грина $\hat{S}^c(x - x')$ и $D^c(x - x')$, которым соответствуют на графах Фейнмана простые линии (рис. 42). Используя явный вид \hat{S}_1 , можно показать, что члены в формулах (6.1), обязанные \hat{S}_1 , равны нулю. Член \hat{S}_2 несет ответственность

¹ Заметим, что операция перенормировки не является однозначной [2].

за появление в выражениях (6.1) членов, пропорциональных следующим интегралам:

$$\int d^4 x_1 d^4 x_2 \overbrace{\hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta(x_1)} (\hat{\gamma}_\nu)_{\beta\beta'} \overbrace{\hat{\psi}_{\beta'}(x_1) \hat{\psi}_\nu(x_2)} (\hat{\gamma}_\mu)_{\nu\nu'} \times \\ \times \overbrace{\hat{\psi}_\nu(x_2) \hat{\psi}_\delta(x')} \overbrace{\hat{A}_\nu(x_1) \hat{A}_\mu(x_2)}, \quad (6.3)$$

$$\int d^4 x_1 d^4 x_2 \overbrace{\hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x_1)} \times \\ \times \text{Sp} \left\{ \overbrace{\hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2)} \hat{\gamma}_\mu, \overbrace{\hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1)} \hat{\gamma}_\nu \right\} \overbrace{\hat{A}_\mu(x_2) \hat{A}_{\nu_1}(x')}.$$

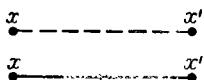


Рис. 42

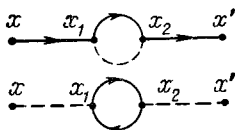


Рис. 43

Этим выражениям, которые дают поправки второго порядка к функциям Грина \hat{S}^c и D^c , соответствуют диаграммы, изображенные на рис. 43. Аналогично можно показать, что остальные члены в формуле (6.2) дают поправки более высоких порядков к функциям \hat{S}^c и D^c .

В выражениях (6.1) содержатся, однако, члены, соответствующие ненаблюдаемым вакуумным процессам, которые описываются графами Фейнмана без внешних линий. Действительно, от \hat{S}_2 в формулах (6.1), кроме (6.3), появляются еще члены, пропорциональные выражениям:

$$\overbrace{\hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta(x')} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \overbrace{\hat{A}_\lambda(x_2) \hat{A}_\lambda(x_1)} \times \\ \times \text{Sp} \left\{ \overbrace{\hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2)} \hat{\gamma}_\lambda, \overbrace{\hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1)} \hat{\gamma}_\lambda \right\}, \quad (6.4) \\ \overbrace{\hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x')} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \overbrace{\hat{A}_\lambda(x_2) \hat{A}_\rho(x_1)} \times \\ \times \text{Sp} \left\{ \overbrace{\hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2)} \hat{\gamma}_\lambda, \overbrace{\hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1)} \hat{\gamma}_\rho \right\},$$

которым соответствуют диаграммы, изображенные на рис. 44. Вакуумным петлям на этом рисунке соответствуют определенные члены в среднем по вакууму от S-матрицы:

$$S_0 = \langle \hat{S} \rangle_0 = (\Phi_v, \hat{S} \Phi_v) \quad (6.5)$$

Всю совокупность слагаемых в первом выражении (6.1) можно разбить на бесконечное множество следующих последо-

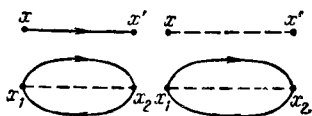


Рис. 44

вательностей членов. Первой последовательности соответствуют графы, показанные на рис. 45. Сумму этой последова-

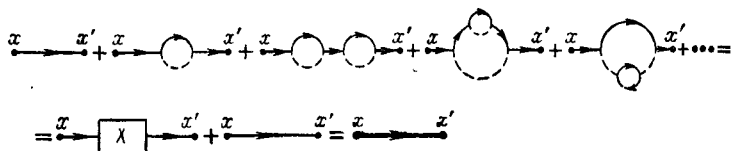


Рис 45

тельности обозначим через $G^{(e)}$, где функция $G^{(e)}$ — полная электронная функция Грина (электронная функция распространения).

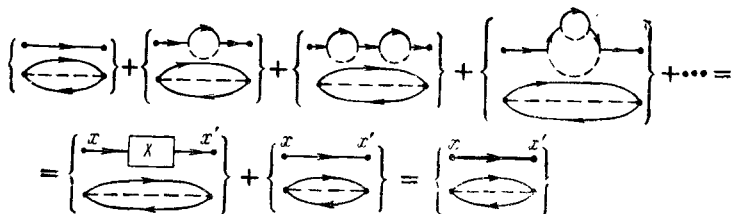


Рис 46

Второй совокупности членов сопоставляются графы, показанные на рис. 46. Согласно рис. 46 сумма второй совокупности членов равна $G^{(e)}(x - x') \cdot V_1$, где $G^{(e)}(x - x')$ — функция, описывающая эквивалентную электронную линию,

а V_1 — множитель, характеризующий вакуумную петлю с двумя вершинами.

Аналогично можно построить другие последовательности членов, которые будут отличаться от второй последовательности тем, что им будут поставлены в соответствие графы с вакуумными петлями другой топологической структуры. Таким последовательностям графов в матричном элементе будет соответствовать множитель $G^{(e)}(x - x') \cdot V_i$, где множитель V_i относится к соответствующей вакуумной петле. Отсюда следует формула

$$\langle \hat{T}(\hat{\psi}_\alpha \hat{\psi}_\beta \hat{S}) \rangle_0 = G_{\alpha\beta}^e (1 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n + \dots). \quad (6.6)$$

Так как члены V_i порождены петлями, то

$$S_0 = \langle \hat{S} \rangle_0 = (\Phi_\nu, \hat{S} \Phi_\nu) = 1 + V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots \quad (6.7)$$

Учитывая формулу (6.7), находим полную электронную функцию Грина

$$G_{\alpha\beta}^e = \frac{1}{\langle \hat{S} \rangle_0} \langle \hat{T}(\hat{\psi}_\alpha \hat{\psi}_\beta \hat{S}) \rangle_0. \quad (6.8)$$

Аналогично получаем полную электромагнитную функцию Грина

$$G_{\mu\nu}^y = \frac{\hbar c}{\langle \hat{S} \rangle_0} \langle \hat{T}(\hat{A}_\mu \hat{A}_\nu \hat{S}) \rangle_0. \quad (6.9)$$

Оценим теперь величину выражения $\langle \hat{S} \rangle_0$. Так как вектор вакуумного состояния $\Phi_\nu^{\hat{S}}$ описывает невырожденное состояние, обладающее наименьшей энергией, то согласно закону сохранения энергии-импульса вектор $\Psi = \hat{S}\Phi_\nu$ может отличаться от Φ_ν самое большее постоянным множителем C . Отсюда следует, что вектор Φ_ν является собственным вектором оператора \hat{S} :

$$\hat{S} \Phi_\nu = C \Phi_\nu.$$

Отсюда ввиду унитарности S -матрицы получаем, что

$$|C|^2 = 1$$

или

$$C = e^{i\alpha},$$

где α — действительное число. Поэтому

$$\langle \hat{S} \rangle_0 = e^{i\alpha}.$$

Производя анализ, аналогичный анализу, проведенному для внутренних линий, можно показать, что внешним эквивалентным линиям соответствуют следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned} (\Phi_v, \hat{T} \hat{\psi}(x) \hat{S} \Phi_r), \quad (\Phi_r \hat{T} \hat{\psi}_x \hat{S} \Phi_v), \\ (\Phi_v, \hat{T} \hat{A}_\mu(x) \hat{S} \Phi_r), \end{aligned} \quad (6.10)$$

где Φ_r — вектор одночастичного состояния.

Выше мы работали в представлении взаимодействия. Рассмотрим теперь матричные элементы операторов $\hat{\psi}$ и \hat{A}_μ в гейзенберговском представлении. Для этого заметим, что зная лагранжиан, можно построить тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, а из $T_{\mu\nu}$ можно сконструировать оператор 4-вектора энергии-импульса \hat{P}_μ . Временная компонента $\hat{P}_{(0)}$ оператора \hat{P}_μ является оператором энергии системы.

Операторы \hat{P}_μ коммутируют друг с другом, поэтому можно найти такое представление, в котором они имеют общую систему собственных векторов с собственными значениями p_μ :

$$\hat{P}_\mu \Psi_r^H = p_\mu \Psi_r^H, \quad (6.11)$$

где r — полный набор физических величин, определяющих состояние. Каждый вектор состояния Ψ_r^H описывает состояние с определенными энергией и импульсом. Любое состояние системы характеризуется не только энергией и импульсом, но и набором других физических величин, например электрическим зарядом. Следовательно, $r = (p_\mu, \alpha)$, где α — другие квантовые числа.

Наинищее энергетическое состояние системы, как известно, называется состоянием вакуума. Вектор этого состояния обозначен через Φ_V^H . В состоянии вакуума

$$p_\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, 4),$$

что обеспечивает релятивистскую инвариантность основного состояния системы. Электрический заряд вакуумного состояния также полагается равным нулю. Для возбужденных состояний системы должно выполняться неравенство

$$p_{(0)} > 0,$$

из которого согласно специальной теории относительности вытекает соотношение $p^2 < 0$.

Учитывая сказанное, легко получаем следующие формулы для матричных элементов операторов $\hat{\Psi}$ и \hat{A}_μ в представлении Гейзенберга:

$$\begin{aligned}(\Phi_v^H, \hat{\Psi}^H(x) \Phi_r^H) &= \xi(r) v(p) e^{ipx}, \\(\Phi_r^H, \hat{\Psi}^H(x) \Phi_v^H) &= \xi'(r) v(p) e^{-ipx}, \\(\Phi_0^H, \hat{A}_\mu^H \Phi_r^H) &= \eta(r) a_\mu(k) e^{ikx}, \\(\Phi_r^H, \hat{A}_\mu^H(x) \Phi_v^H) &= \eta'(r) a_\mu(k) e^{-ikx},\end{aligned}\tag{6.12}$$

где $\xi(r)$, $\xi'(r)$, $\eta(r)$, $\eta'(r)$ — некоторые инвариантные функции квантовых чисел r ; $v(p)$ — функция одноэлектронного состояния; $a_\mu = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k_{(0)}V}} e^{(\mu)}$ — четырехмерный вектор ($e^{(\mu)}$ — единичный вектор поляризации фотона; V — нормировочный объем).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\xi(r) = \xi'(r) = Z_1^{1/2} & \quad \text{при } p^2 + \chi_c^2 = 0, \\ \eta(r) = \eta'(r) = Z^{1/2} & \quad \text{при } k^2 = 0,\end{aligned}$$

тогда формулы (6.12) при $p^2 + \chi_c^2 = 0$ и $k^2 = 0$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}(\Phi_v^H, \hat{\Psi}^H(x) \Phi_r^H) &= Z_1^{1/2} v(p) e^{ipx} \quad (p^2 + \chi_c^2) = 0, \\ (\Phi_r^H, \hat{A}_\mu^H(x) \Phi_v^H) &= Z^{1/2} a(k) e^{ikx} \quad (k^2 = 0).\end{aligned}\tag{6.13}$$

§ 7. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Рассмотрим процесс рассеяния фотона на электроне. Во втором приближении теории возмущений этому процессу соответствует граф, изображенный на рис. 47, а в четвертом приближении — графы, изображенные на рис. 48. Множество диаграмм, приведенных на этих рисунках, сводится к одной так называемой эффективной скелетной диаграмме, приведенной на рис. 49.

Для того чтобы получить матричный элемент, соответствующий графу на рис. 49, необходимо составить матричный элемент для процесса, изображенного на графе второго по-

рядка на рис. 47, а затем в полученном выражении произвести замену:

$$\hat{\lambda}_\mu \rightarrow \hat{\Gamma}_\mu, \quad D^F \rightarrow G^V, \quad \hat{S}^F \rightarrow G^e.$$

В результате получим искомый матричный элемент

$$M = Z_1 Z_{a_{2\mu}} a_1 \bar{v}_2 \hat{\Gamma}_\mu(p_2 + k_2, p_2; k_2) \hat{G}^e(p_2 + k_2) \times \\ \times \hat{\Gamma}_\nu(p_1, p_1 + k_1; k_1) v_1.$$

Таким образом, при исследовании какого-либо процесса можно совокупность различных графов заменить одним скелетным графом, который по форме совпадает с графом Фейнмана для этого процесса, взятым в наинищем неисчезающем приближении теории возмущений. В таком скелетном графе все линии являются эквивалентными, а все вершины характеризуются вершинными функциями $\hat{\Gamma}_\mu$. Чтобы вычислить соответствующие матричные элементы, необходимо прежде всего найти уравнения для определения функций $\hat{\Gamma}_\mu$, \hat{G}^V и G^e . Для этого подставим в формулу (6.8),

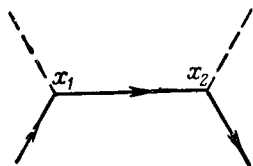


Рис. 47

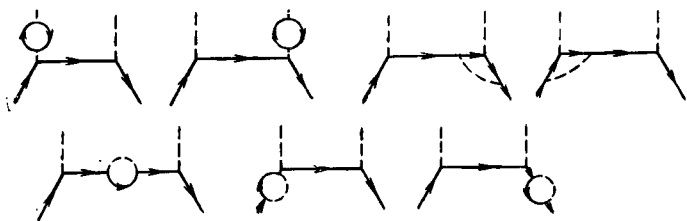


Рис. 48

дающую выражение для функции \hat{G}^e , разложение матрицы рассеяния (6.2) и рассмотрим все множество полученных при этом членов, которое можно поделить на счетное множество подмножеств.

Первому подмножеству членов соответствуют графы, представленные на рис. 50. Этому подмножеству графов Фейнмана в матричном элементе соответствует множитель

$$\hat{S}^c(1 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots) = \hat{S}^c \langle \hat{S} \rangle_0. \quad (7.1)$$

Второму подмножеству членов соответствуют графы, приведенные на рис. 51. Первый член второго подмножества дает первая формула (6.3), которую можно переписать так:

$$J_1 = \int d^4 x_1 d^4 x_2 \hat{S}_{\alpha\beta}^c(x-x_1) \hat{\Sigma}_{\beta\gamma'}^{(1)}(x_1-x_2) \hat{S}_{\gamma'\delta}^c(x_2-x'),$$

где

$$\hat{\Sigma}_{\beta\gamma'}^{(1)}(x_1-x_2) = (\hat{\gamma}_\nu)_{\beta\beta'} \overbrace{\hat{\psi}_{\beta'}}(x_1) \overbrace{\hat{\psi}_\nu}(x_2) (\hat{\gamma}_\mu)_{\gamma\gamma'} \overbrace{\hat{A}_\nu}(x_1) \overbrace{\hat{A}_\mu}(x_2).$$

Второму подмножеству графов Фейнмана в матричном элементе соответствует множитель

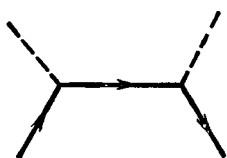


Рис. 49

$$J_1(1 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots) = J_1 \langle \hat{S} \rangle_0, \quad (7.2)$$

i -му подмножеству графов Фейнмана сопоставляется множитель

$$J_i \langle \hat{S} \rangle_0, \quad (7.3)$$

где

$$J_i = \int d^4 x_1 d^4 x_2 \hat{S}_{\alpha\beta}^c(x-x_1) \hat{\Sigma}_{\beta\gamma'}^{(i)}(x_1-x_2) \hat{S}_{\gamma'\delta}^c(x_2-x'),$$

$\hat{\Sigma}_{\beta\gamma'}^{(i)}(x_1-x_2)$ — множитель, соответствующий i -й собственно-энергетической электронной части.

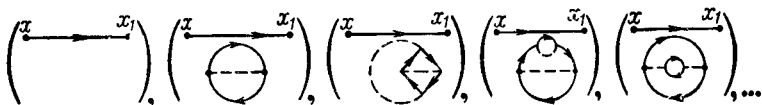


Рис. 50

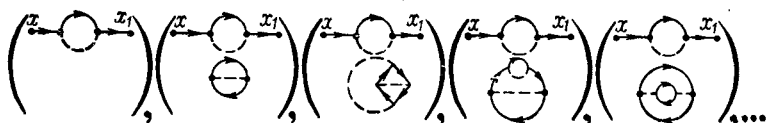


Рис. 51

Учитывая формулы (7.1), (7.2) и (7.3), получим

$$\hat{G}^c(x-x') = \hat{S}^c + (J_1 + J_2 + J_3 + \dots). \quad (7.4)$$

Сумму в правой части (7.4) можно преобразовать к виду

$$\sum_{i=1}^{\infty} J_i = \int d^4 x_1 d^4 x_2 \hat{S}_{\alpha\beta}^c(x-x_1) \sum_{\beta\gamma'} (x_1-x_2) \hat{S}_{\gamma'\delta}^c(x_2-x'), \quad (7.5)$$

где $\sum_{\beta\gamma'} = \sum_I \sum_{\beta\gamma'}^{(I)}$ — собственно-энергетическая электронная функция. Согласно формуле (7.5) равенство (7.4) получает вид

$$\hat{G}^e(x-x') = \hat{S}^c(x-x') + \int d^4 x_1 d^4 x_2 \hat{S}^c(x-x_1) \times \\ \times \sum (x_1-x_2) \hat{S}^c(x_2-x'). \quad (7.6)$$

В импульсном представлении формула (7.6) приобретает следующий вид:

$$\hat{G}^e(p) = \hat{S}^F(p) + \hat{S}^F(p) \hat{\Sigma}(p) \hat{S}^F(p). \quad (7.7)$$

Аналогично подставляя выражение (6.2) для \hat{S} в формулу (6.9), находим

$$G_{\mu\nu}^Y(x-x') = D_{\mu\nu}^c(x-x') + \\ + \int d^4 x_1 d^4 x_2 D_{\mu\lambda}^c(x-x_1) \Pi_{\lambda\gamma}(x_1-x_2) D_{\gamma\nu}^c(x_2-x'), \quad (7.8)$$

где Π — фотонная собственно-энергетическая функция. В импульсном представлении формула (7.8) получает вид

$$G_{\mu\nu}^Y(k) = D_{\mu\nu}^F(k) + D_{\mu\lambda}^F(k) \Pi_{\lambda\sigma}(k) D_{\sigma\nu}^F(k). \quad (7.9)$$

Формулы (7.7) и (7.9) имеют следующую геометрическую интерпретацию. Пусть внутренней электронной линии сопоставляется функция $\hat{S}^F(p)$; эквивалентной электронной собственно-энергетической части — функция $\hat{\Sigma}(p)$; участку графа — произведение соответствующих функций, сумме двух графов — сумма соответствующих произведений. Тогда видно, что формуле (7.7) соответствует граф на рис. 22.

Эквивалентная собственно-энергетическая часть, которую обозначаем квадратом, равна сумме графов, построенных из компактных частей. Это графически изображено на рис. 52, где прямоугольником обозначена компактная

электронная часть, которой соответствует функция $\hat{\Sigma}^*$. Из рис. 52 получаем равенство

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma} &= \hat{\Sigma}^* + \hat{\Sigma}^* \hat{S}^F \hat{\Sigma}^* + \hat{\Sigma}^* \hat{S}^F \hat{\Sigma}^* \hat{S}^F \hat{\Sigma}^* + \dots = \\ &= \hat{\Sigma}^* (1 - \hat{S}^F \hat{\Sigma}^*)^{-1};\end{aligned}\quad (7.10)$$

аналогично находим, что формуле (7.9) соответствует граф на рис. 27, а из рис. 53 получаем

$$\Pi = \Pi^* + \Pi^* D^F \Pi^* + \dots = \Pi^* (1 - D^F \Pi^*)^{-1}, \quad (7.11)$$

где Π^* — функция, соответствующая компактной электромагнитной собственно-энергетической части, изображенной на рис. 53 прямоугольником.



Рис. 52

Рис. 53

Подставляя выражения (7.10) и (7.11) для $\hat{\Sigma}$ и Π соответственно в формулы (7.7) и (7.9), получим уравнения Дайсона:

$$\begin{aligned}\hat{G}^e(p) &= \hat{S}^F(p) + \hat{S}^F(p) \hat{\Sigma}^*(p) \hat{G}^e(p), \\ G^v(k) &= D^F(k) + D^F(k) \Pi^*(k) G^v(k),\end{aligned}\quad (7.12)$$

или

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{G}^e(p)} &= \frac{1}{\hat{S}^F(p)} - \hat{\Sigma}^*(p), \\ \frac{1}{G^v(k)} &= \frac{1}{D^F(k)} - \Pi^*(k).\end{aligned}\quad (7.13)$$

В координатном представлении уравнения (7.12) переходят в интегральные уравнения

$$\begin{aligned}\hat{G}^e(x-x') &= \hat{S}^c(x-x') + \int \hat{S}^c(x-x_1) \hat{\Sigma}^*(x_1-x_2) \times \\ &\quad \times \hat{G}^e(x_2-x') d^4 x_1 d^4 x_2, \\ G^v(x-x') &= D^c(x-x') + \int D^c(x-x_1) \Pi^*(x_1-x_2) \times \\ &\quad \times G^v(x_2-x') d^4 x_1 d^4 x_2.\end{aligned}\quad (7.14)$$

Определим теперь выражения для $\hat{\Sigma}^*$ и Π^* . Рассмотрим граф на рис. 54, его можно интерпретировать или как граф

с двумя вершинными частями третьего порядка, или как граф с одной вершинной частью пятого порядка. В зависимости от того, как группировать вершины, этому графу надо сопоставить скелетный граф на рис. 55, а или на рис. 55, б. Отсюда следует, что в компактных собственно-энергетических частях должна быть только одна эквивалентная вершинная часть и одна обычная вершина. В противном случае одна и та же собственно-энергетическая часть

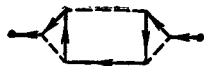


Рис. 54

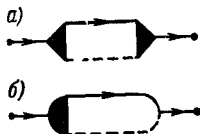


Рис. 55

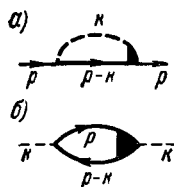


Рис. 56

может учитываться дважды. Учитывая сказанное, функциям $\hat{\Sigma}^*$ и Π^* сопоставим графы, изображенные на рис. 56. Согласно рис. 56, а для нахождения $\hat{\Sigma}^*$ надо составить матричный элемент для собственно-энергетической электронной части второго порядка, а затем в полученном выражении сделать замену

$$D^F \rightarrow G^V, \quad \hat{S}^F \rightarrow \hat{G}^e$$

и, кроме того, для одной из вершин сделать замену $\hat{\lambda}_\mu \rightarrow \hat{\Gamma}_\nu$.

В результате получим

$$\hat{\Sigma}^*(p) = \int \hat{\lambda}_\mu \hat{G}^e(p-k) \hat{\Gamma}_\nu(p, p-k; k) G_{\mu\nu}^Y(k) d^4 k. \quad (7.15)$$

Аналогично, используя рис. 56, б, находим

$$\Pi_{\mu\nu}^*(k) = -\text{Sp} \int \hat{\lambda}_\mu \hat{G}^e(p) \hat{\Gamma}_\nu(p, p-k; k) \hat{G}^e(p-k) d^4 p. \quad (7.16)$$

Интегрирование в формулах (7.15) и (7.16) учитывает все графы на рис. 56 с разными импульсами виртуальной частицы. Подставляя выражения (7.15) и (7.16) для $\hat{\Sigma}^*$ и Π^*

в формулы (7.12), получим два интегральных уравнения для трех неизвестных функций \hat{G}^e , G^ν и $\hat{\Gamma}_\mu$:

$$\hat{G}^e(p) = \hat{S}^F(p) + \hat{S}^F(p) \int \hat{\lambda}_\mu \hat{G}^e(p-k) \hat{\Gamma}_\nu(p, p-k; k) \times \\ \times G_{\mu\nu}^\nu(k) d^4 k \cdot \hat{G}^e(p), \quad (7.17)$$

$$G_{\mu\nu}^\nu(k) = D_{\mu\nu}^F(k) - D_{\mu\nu}^F(k) \times$$

$$\times \text{Sp} \int \hat{\lambda}_\lambda \hat{G}^e(p) \hat{\Gamma}_\sigma(p, p-k; k) \hat{G}^e(p-k) d^4 p \cdot G_{\sigma\nu}^\nu(k).$$

Для того чтобы можно было определить эти функции, необходимо систему уравнений (7.17) дополнить еще одним уравнением, которое можно составить, используя для этого функциональное интегрирование. Однако полученную сумму трех уравнений для трех функций \hat{G}^e , G^ν и $\hat{\Gamma}_\mu$ в настоящее время решать не умеют, ввиду того что пока нет еще эффективных методов вычисления функциональных интегралов.

Теперь выведем уравнения, которым удовлетворяют амплитуды внешних линий. Подставляя разложение (6.2) для \hat{S} в первый матричный элемент (6.11) и выполняя те же преобразования, которые приводят к формуле (7.6) для \hat{G}^e , получим

$$(\Phi_\nu, \hat{T} \hat{\psi}(x) \hat{S} \Phi_r) = (\Phi_\nu, \hat{\psi}(x) \Phi_r) + \\ + \int \hat{S}^e(x-x') \hat{\Sigma}(x'-x'') (\Phi_\nu, \hat{\psi}(x'') \Phi_r) d^4 x' d^4 x''. \quad (7.18)$$

Учитывая формулы (6.10) и (6.12) и переходя к импульсному представлению, из выражения (7.18) находим

$$\tilde{v}(p) = v(p) + \hat{S}^F(p) \hat{\Sigma}(p) v(p). \quad (7.19)$$

Аналогично получаем

$$\tilde{\bar{v}}(p) = \bar{v}(p) + \bar{v}(p) \hat{\Sigma}(p) \hat{S}^F(p), \quad (7.20)$$

$$\tilde{a}(k) = a(k) + D^F(k) \Pi(k) a(k). \quad (7.21)$$

Формулам (7.19) и (7.20) соответствует граф на рис. 24, а формуле (7.21) — граф на рис. 28.

Замечание. Применяя к первому уравнению (7.14) дифференциальный оператор $\left(\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \chi_0\right)$ и учитывая, что

$$\left(\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \chi_0\right) \hat{S}^c(x-x') = \delta^4(x-x'),$$

получим

$$\left(\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \chi_0\right) \hat{G}^e(x-x') = -i \int \sum^* (x-x'') \hat{G}^e(x''-x') d^4x'' + \delta^4(x-x'). \quad (7.22)$$

Вводя интегральный оператор с ядром $\hat{\Sigma}^*(x-x'')$

$$\hat{M} \hat{G}^e(x-x') = i \int \sum^* (x-x'') \hat{G}^e(x''-x') d^4x'', \quad (7.23)$$

перепишем формулу (7.22) в виде

$$\left(\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \chi_0 + \hat{M}\right) \hat{G}^e(x-x') = \delta^4(x-x'). \quad (7.24)$$

Оператор \hat{M} называется массовым оператором.

Применяя ко второму уравнению (7.14) оператор $\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}$ и используя уравнение $\square^2 D^c(x-x') = 4\pi i \hbar c \delta^4(x-x')$, аналогично находим

$$(\square^2 + \hat{P}) G^V(x-x') = 4\pi i \hbar c \delta^4(x-x'), \quad (7.25)$$

где \hat{P} — интегральный оператор с ядром $\Pi^*(x-x'')$, т. е.

$$\hat{P} G^V(x-x') = i \int \Pi^*(x-x'') G^V(x''-x') d^4x''. \quad (7.26)$$

Оператор \hat{P} называется оператором поляризации вакуума (или поляризационным оператором).

Так как $\left(\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \chi_0\right) \psi = 0$ и $\square^2 A = 0$, то уравнения (7.19) и (7.21) можно преобразовать к виду

$$\left(\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \chi_0 + \hat{M}\right) \tilde{\psi} = 0, \quad (7.27)$$

$$(\square^2 + \hat{P}) \tilde{A} = 0. \quad (7.28)$$

Производя перенормировку массы электрона и фотона, запишем эти уравнения так:

$$\left(\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \chi_c\right) \tilde{\psi} = 0, \quad \chi_c = \chi_0 + \delta\chi \quad (p^2 + \chi_c^2 = 0), \quad (7.29)$$

$$\square^2 \tilde{A} = 0, \quad \hat{P} \tilde{A} = 0 \quad (k^2 = 0). \quad (7.30)$$

Теорема. Функцию распространения G^y можно представить в виде

$$G_{\mu\nu}^y(x-x') = (\Psi_\nu^H, \hat{T} [\hat{A}_\mu^H(x) \hat{A}_\nu^H(x')] \Psi_\nu^H), \quad (8.1)$$

где \hat{A}_μ^H — гейзенберговский оператор; Ψ_ν^H — вектор состояния вакуума в представлении Гейзенберга.

Доказательство. Перейдем в правой части (8.1) от представления Гейзенберга к представлению взаимодействия. Предположим, что преобразование векторов состояния выражается формулой

$$\Psi'(t) = \hat{Q}(t) \Psi^H, \quad (8.2)$$

где $\hat{Q}(t)$ — унитарный оператор.

Подставляя выражения для $\Psi'(t)$ и $\Psi'(t_0)$ в формулу $\Psi'(t) = \hat{S}(t, t_0) \Psi'(t_0)$, получим

$$Q(t) = \hat{S}(t, t_0) \hat{Q}(t_0). \quad (8.3)$$

Для определения $\hat{Q}(t)$ подставим в равенство (8.2) $\Psi'(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) \Psi^S$, где $\Psi^S(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right) \cdot \Psi^H$, и $Q(t)$ из формулы (8.3). В результате получим

$$\hat{Q}(t_0) = \hat{S}^{-1}(t, t_0) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right). \quad (8.4)$$

Это соотношение должно иметь место при любом t , при $t = t_0$ оно приобретает вид

$$\hat{Q}(t_0) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t_0\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t_0\right).$$

При $t_0 = 0$ отсюда имеем

$$\hat{Q}(0) = 1. \quad (8.5)$$

Учитывая это, перепишем равенство (8.3) в виде

$$\hat{Q}(t) = \hat{S}(t, 0). \quad (8.6)$$

Согласно (8.6) формула (8.2) принимает вид

$$\Psi^I(t) = \hat{S}(t, 0) \Psi^H. \quad (8.7)$$

На основании (8.7) для любого оператора можно написать

$$\hat{L}^I(t) = \hat{S}(t, 0) \hat{L}^H(t) \hat{S}^{-1}(t, 0). \quad (8.8)$$

Пусть $t > t'$. Учитывая выражения (8.7) и (8.8), получаем

$$\begin{aligned} J \equiv (\Psi_v^H, \hat{A}_\mu^H(x) \hat{A}_v^H(x') \Psi_v^H) &= (\Psi_v^I(\infty), \hat{S}(\infty, 0) \hat{S}^{-1}(t, 0) \times \\ &\times \hat{A}_\mu^I(x) \hat{S}(t, 0) \hat{S}^{-1}(t', 0) \hat{A}_v^I(x') \hat{S}(t', 0) \times \\ &\times \hat{S}(0, -\infty) \Psi_v^I(-\infty)). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Далее пользуясь формулами

$$\begin{aligned} \hat{S}(t_2, t_1) \hat{S}(t_1, t_0) &= \hat{S}(t_2, t_0), \\ \hat{S}(t_1, t_2) &= \hat{S}^{-1}(t_2, t_1), \end{aligned}$$

преобразуем соотношение (8.9) к виду

$$\begin{aligned} J &= (\Psi_v^I(\infty), \hat{S}(\infty, t) \hat{A}_\mu^I(x) \hat{S}(t, t') \hat{A}_v^I(x') \times \\ &\times \hat{S}(t', -\infty) \Psi_v^I(-\infty)). \end{aligned} \quad (8.9')$$

Используя, наконец, \hat{T} -оператор и учитывая, что

$$\hat{S}(\infty, t) \hat{S}(t, t') \hat{S}(t', -\infty) = \hat{S},$$

перепишем формулу (8.9') в виде

$$J = (\Psi_v^I(\infty), \hat{T} [\hat{A}_\mu^I(x) \hat{A}_v^I(x') \hat{S}] \Psi_v^I(-\infty)). \quad (8.9'')$$

Для одночастичных стационарных состояний и для вакуумного состояния вектор $\Psi_r^I(+\infty)$ может отличаться от вектора $\Psi_r^I(-\infty)$ лишь несущественным фазовым множителем, который по модулю равен единице, т. е.

$$\Psi_v^I(\infty) = \hat{S}(\infty, -\infty) \Psi_v^I(-\infty) = e^{i\alpha} \Psi_v^I(-\infty), \quad (8.10)$$

отсюда имеем

$$e^{i\alpha} = (\Psi_v^I, \hat{S} \Psi_v^I) = \langle \hat{S} \rangle, \quad (8.10')$$

где введено обозначение $\Psi'_v \equiv \Psi'_v(-\infty)$. Подставляя выражение (8.10) для $\Psi'_v(\infty)$ в формулу (8.9'') и учитывая (8.10'), получаем

$$J = \frac{(\Psi'_v, \hat{T} [\hat{A}'_\mu(x) \hat{A}'_\nu(x') \hat{S}] \Psi'_v)}{(\Psi'_v, \hat{S} \Psi'_v)} = G_{\mu\nu}^y(x-x'). \quad (8.9''')$$

Теорема доказана.

Аналогично можно доказать, что

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^e(x-x') &= (\Psi_v^H, \hat{T} [\hat{\psi}_\alpha^H(x) \hat{\psi}_\beta^H(x')] \Psi_v^H), \\ \langle \hat{S} \rangle_{0s}^{-1} (\Psi'_v, \hat{T} \hat{A}' \hat{S} \Psi'_s) &= (\Psi_v^H, \hat{A}^H \Psi_s^H), \\ \langle \hat{S} \rangle_{0r}^{-1} (\Psi'_v, \hat{T} \hat{\psi}' \hat{S} \Psi'_r) &= (\Psi_v^H, \hat{\psi}^H \Psi_r^H), \\ \langle \hat{S} \rangle_{s0}^{-1} (\Psi'_s, \hat{T} \hat{A}' \hat{S} \Psi'_v) &= (\Psi_s^H, \hat{A}^H \Psi_v^H), \\ \langle \hat{S} \rangle_{r0}^{-1} (\Psi'_r, \hat{T} \hat{\psi}' \hat{S} \Psi'_v) &= (\Psi_r^H, \hat{\psi}^H \Psi_v^H). \end{aligned}$$

где r — полный набор физических величин, характеризующих стационарное состояние, $\langle \hat{S} \rangle_{rs} = (\Psi_r^H, \hat{S} \Psi_s^H)$.

1. *Функция распространения фотона.* Согласно выражению (8.1) при $x_{(0)} > x'_{(0)}$ (т. е. при $t > t'$) имеем

$$G_{\mu\nu}^y(x-x') = (\Psi_v^H | \hat{A}_\mu^H(x) \hat{A}_\nu^H(x') | \Psi_v^H). \quad (8.11)$$

На основании правила умножения матриц перепишем это в виде

$$G_{\mu\nu}^y(x-x') = \sum_r (\Psi_v^H | \hat{A}_\mu^H(x) | \Psi_r^H) (\Psi_r^H | \hat{A}_\nu^H(x') | \Psi_v^H), \quad (8.12)$$

где Ψ_r^H — полная система векторов стационарных состояний. Подставляя в формулу (8.12) выражения (6.12) для матричных элементов, получаем

$$G_{\mu\nu}^y(x-x') = \sum_r \eta(r) \eta'(r) a_\mu(k) a_\nu(k) e^{ik(x-x')}, \quad (8.13)$$

что можно переписать так [полагая $r = (k, s, \lambda)$]:

$$G_{\mu\nu}^y(x-x') = \sum_{k,s} |\eta(k, s)|^2 \sum_\lambda a_\mu^{(\lambda)}(k) a_\nu^{(\lambda)}(k) e^{ik(x-x')}, \quad (8.14)$$

где λ — число, характеризующее поляризацию; s — совокупность остальных квантовых чисел.

В общем случае $k_{(0)} = \sqrt{k^2 + M^2}$, где M — масса системы. Поэтому в формуле (8.14) суммирование по четырехмерному вектору k можно заменить суммированием по трехмерному вектору \mathbf{k} и по M . При этом сумму в выражении (8.14) можно разбить на две части: в первой $M = 0$, а во второй $M > 0$. В результате формула (8.14) преобразуется к виду

$$G_{\mu\nu}^{\gamma}(x-x') = Z \sum_{\substack{\mathbf{k}, \lambda \\ (M=0)}} a_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a_{\nu}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(x-x')} + A, \quad (8.15)$$

где A — вторая сумма. В первой сумме индекс s отсутствует, так как состояния одного фотона характеризуются только импульсом и поляризацией.

При $x_{(0)} < x'_{(0)}$ выражение для G^{γ} отличается от выражения (8.15) заменой k на $-k$. Так как суммирования по \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$ тождественны, в общем случае имеем

$$G_{\mu\nu}^{\gamma}(x-x') = Z \sum_{\substack{\mathbf{k}, \lambda \\ (M=0)}} a_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a_{\nu}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \times \\ \times \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i|\mathbf{k}|(x_{(0)}-x'_{(0)})] + A(x-x'). \quad (8.16)$$

Сумма в формуле (8.16) равна $D^c(x-x') \cdot \delta_{\mu\nu}$. Учитывая это, из (8.16) получаем

$$G_{\mu\nu}^{\gamma}(x-x') = Z D^c(x-x') \delta_{\mu\nu} + A(x-x'). \quad (8.17)$$

Представляя функцию Грина фотона в виде четырехкратного интеграла Фурье, находим

$$G^{\gamma}(k) = Z \cdot D^F(k) + A(k) = \frac{4\pi\hbar c Z}{(2\pi)^4 i(k^2 - i0)} + A(k). \quad (8.18)$$

Можно показать (на чем не будем останавливаться), что функция $A(k)$ имеет вид

$$A(k) = -iZ \int_0^{\infty} \frac{\rho(M^2) dM^2}{k^2 + M^2 - i0},$$

где $\rho(M^2)$ — некоторая функция от M^2 . Согласно (8.18) функция $G^{\gamma}(k)$ имеет полюс при $k^2 = 0$, т. е. в точке, соответствующей состоянию реального фотона.

2. *Функция распространения электрона.* Согласно выражению (8.1) при $x_{(0)} > x'_{(0)}$ имеем

$$G_{\alpha\beta}^e(x-x') = (\Psi_v^H | \hat{\Psi}_\alpha^H(x) \hat{\Psi}_\beta^H(x') | \Psi_v^H). \quad (8.19)$$

Используя равенство (6.12), из (8.19) находим, что

$$\hat{G}_{\alpha\beta}^e(x-x') = \sum_r \xi(r) \xi'(r) v_\alpha(p) \bar{v}_\beta(p) e^{ip(x-x')}$$

или

$$\hat{G}_{\alpha\beta}^e(x-x') = \sum_{p,s} \xi(p,s) \xi'(p,s) \sum_\mu v_{\alpha, p\mu} \bar{v}_{\beta, p\mu} e^{ip(x-x')}, \quad (8.20)$$

где μ — число, определяющее поляризацию; s — совокупность остальных квантовых чисел. Так как $p_{(0)} = \sqrt{p^2 + M^2}$, то суммирование по четырехмерному вектору p можно заменить суммированием по трехмерному вектору p и по M . В результате формулу (8.20) запишем в виде

$$\hat{G}_{\alpha\beta}^e(x-x') = \sum_{p,M,s} \xi(p,s) \xi'(p,s) \sum_\mu v_{\alpha, p\mu} \bar{v}_{\beta, p\mu} \times \\ \times \exp [ip(r-r') - i \sqrt{p^2 + M^2} (x_{(0)} - x'_{(0)})]. \quad (8.21)$$

При $x_{(0)} < x'_{(0)}$ получим формулу, отличающуюся от (8.21) заменой $x-x'$ на $x'-x$. Поэтому в общем случае для \hat{G} находим формулу

$$\hat{G}_{\alpha\beta}^e(x-x') = Z_1 \sum_{p,\mu} v_{\alpha, p\mu} \bar{v}_{\beta, p\mu} \exp [ip(r-r') - \\ - i \sqrt{p^2 + m_c^2} |x_{(0)} - x'_{(0)}|] + B. \quad (8.22)$$

Первая сумма в (8.22) относится к состоянию реального электрона, поэтому индекс s в ней отсутствует; второй член является суммой состояний с $M > m_c$. Учитывая, что первая сумма (8.22) равна $\hat{S}_{\alpha\beta}^c(x-x')$, можно переписать формулу (8.22) в виде

$$\hat{G}^e(x-x') = Z_1 \hat{S}_{m_c}^c(x-x') + B(x-x'). \quad (8.23)$$

Для коэффициентов Фурье в разложении

$$\hat{G}^e(x-x') = \int d^4p \rho \hat{G}^e(p) e^{ip(x-x')}$$

находим

$$\hat{G}^e(p) = Z_1 S_{m_c}^F(p) + B(p) = \frac{Z_1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{i\hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi_c} + B(p). \quad (8.24)$$

Можно показать (это легко сделать читателю самостоятельно) что функция $B(p)$ выражается формулой

$$B(p) = -Z_1 \left\{ \int_{\chi_c}^{\infty} \frac{\rho(\chi_M) d\chi_M}{\hat{p} - i\chi_M - 0} + \int_{\chi_c}^{\infty} \frac{\rho(-\chi_M) d\chi_M}{\hat{p} + i\chi_M + 0} \right\},$$

где $\rho(M)$ — некоторая функция от $\chi_M = Mc/\hbar$. Согласно (8.24) функция $\hat{G}^e(p)$ имеет полюс при $p^2 + \chi_c^2 = 0$, т. е. в точке, соответствующей состоянию реального электрона.

3. Следствие из тождества Уорда Дифференцируя по p_μ формулу

$$\frac{1}{\hat{G}^e(p)} = \frac{1}{\hat{S}^F(p)} - \sum^*(p) = (2\pi)^4 (i\hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi) - \sum^*(p)$$

и учитывая тождество Уорда, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left(\frac{1}{\hat{G}^e(p)} \right) &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left[\frac{1}{\hat{S}^F(p)} - \sum^*(p) \right] = \\ &= i \left[(2\pi)^4 \hat{\gamma}_\mu + \frac{\hbar c}{ie} \hat{\Lambda}_\mu(p, p; 0) \right]. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Так как $\hat{\lambda}_\mu + \hat{\Lambda}_\mu(p, p; 0) = \hat{\Gamma}_\mu(p, p; 0)$, то выражение (8.25) переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \left(\frac{1}{\hat{G}^e(p)} \right) = \frac{\hbar c}{e} \hat{\Gamma}_\mu(p, p; 0). \quad (8.26)$$

Пусть из вершинной части выходят внешние электронные линии, для которых $p^2 + \chi_c^2 = 0$. В этом случае \hat{G} , согласно (8.24) равно

$$\hat{G}^e(p) = \frac{Z_1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{i\hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi_c}. \quad (8.27)$$

Подставляя это выражение для $\hat{G}^e(p)$ в формулу (8.26), получаем

$$\hat{\Gamma}_\mu(p, p; 0) = Z_1^{-1} (2\pi)^4 \frac{ie}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu \quad (p^2 + \chi_c^2 = 0), \quad (8.28)$$

или

$$\hat{\Gamma}_\mu(p, p; 0) = Z_1^{-1} \hat{\lambda}_\mu.$$

§ 9. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ И ЗАТРАВОЧНЫМ ЗАРЯДАМИ ЭЛЕКТРОНА

Можно доказать справедливость соотношения

$$e_c = Z^{1/2} e, \quad (9.1)$$

где Z — некоторая постоянная. Действительно, заряд электрона можно определить, изучая движение электрона во внешнем электромагнитном поле. Этому процессу соответствует

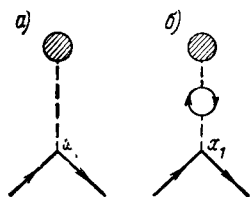


Рис. 57

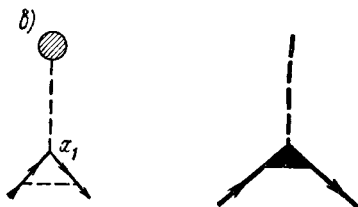


Рис. 58

множество графов Фейнмана, три из которых изображены на рис. 57 (внешняя пунктирная линия соответствует внешнему электромагнитному полю). Данное множество графов является эквивалентным скелетному графу, представленному на рис. 58. Матричный элемент, соответствующий графу на рис. 58, имеет вид

$$M_{if} = \tilde{v} \hat{\Gamma}_\mu \tilde{v} a_\mu. \quad (9.2)$$

Так как

$$\tilde{v} = \sqrt{Z_1} \bar{v}, \quad \tilde{v} = \sqrt{Z_1} v, \quad \tilde{a}_\mu = \sqrt{Z} a_\mu, \quad (9.3)$$

$$\hat{\Gamma}_\mu(p, p; 0) = \hat{\lambda}_\mu Z_1^{-1} \quad (p^2 + \chi_c^2 = 0),$$

то формулу (9.2) можно преобразовать к виду

$$M_{if} = \frac{ie}{\hbar c} (2\pi)^4 \sqrt{Z} \bar{v} \hat{\gamma}_\mu v a_\mu. \quad (9.4)$$

Если положить $e_c = \sqrt{Z} e$, то матричный элемент (9.4) будет иметь вид, сходный с видом матричного элемента, полученного в первом приближении теории возмущений.

Полный заряд электрона можно также определить, исследуя рассеяние электромагнитных волн с малым волновым числом ($k \rightarrow 0$) на покоящемся электроне. Этому процессу

соответствуют: а) диаграммы, сводящиеся к скелетной диаграмме на рис. 49; б) диаграммы, к замкнутым электронным петлям которых подключены внешние фотонные линии; в) диаграммы, являющиеся собственно-энергетическими частями с двумя фотонными линиями, подключенными к электронной линии (рис. 59). Диаграммы второго типа содержат электронные петли с четным числом фотонных линий (выходящих из них), причем для некоторых фотонных линий $k = 0$ (см. рис. 59, б). Такие диаграммы связаны соотноше-

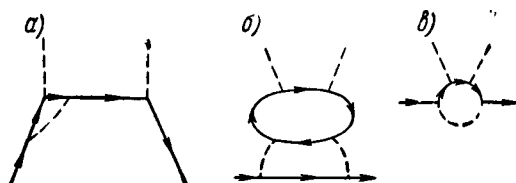


Рис. 59

нием Уорда с диаграммами, содержащими петли с нечетным числом вершин, для которых матричный элемент равен нулю согласно теореме Фарри. Поэтому диаграммы типа, представленного на рис. 59, б, не вносят вклада в матричный элемент.

Учитывая, что для внешних фотонных линий $k \rightarrow 0$, и используя тождество Уорда, получим вклад в матричный элемент от диаграммы третьего типа:

$$M_1 = \bar{v}(p) \frac{\partial^2 \hat{\Sigma}(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} v(p) a_{1\mu} a_{2\nu}. \quad (9.5)$$

Используя соотношение (7.7), находим

$$\hat{\Sigma}(p) = [\hat{S}^F(p)]^{-1} \hat{G}^e(p) [\hat{S}^F(p)]^{-1} - [\hat{S}^F(p)]^{-1}. \quad (9.6)$$

Согласно (9.6) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{\Sigma}(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} &= (\hat{S}^F)^{-1} \frac{\partial^2 \hat{G}^e}{\partial p_\mu \partial p_\nu} (\hat{S}^F)^{-1} + \hat{\gamma}_\mu \hat{G}^e \hat{\gamma}_\nu + \hat{\gamma}_\nu \hat{G}^e \hat{\gamma}_\mu + \\ &+ \left(\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial \hat{G}^e}{\partial p_\nu} + \hat{\gamma}_\nu \frac{\partial \hat{G}^e}{\partial p_\mu} \right) (\hat{S}^F)^{-1} + \\ &+ (\hat{S}^F)^{-1} \left(\frac{\partial \hat{G}^e}{\partial p_\mu} \hat{\gamma}_\nu + \hat{\gamma}_\mu \frac{\partial \hat{G}^e}{\partial p_\nu} \right). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Подставляя сюда выражение (8.24) для \hat{G}^e :

$$\hat{G}^e(p) = Z_1 \hat{S}_{m_c}^F(p) (p^2 \rightarrow -\chi_c^2) \quad (8.24')$$

и учитывая, что

$$[S^F(p)]^{-1} v = \bar{v} [\hat{S}^F(p)]^{-1} = 0,$$

получим

$$M_1 = 0.$$

Графам первого типа соответствует скелетная диаграмма на рис. 49, которой отвечает в матричном элементе выражение

$$M_2 = \tilde{a}_{2\mu} \tilde{a}_{1\nu} \tilde{v}_2 [\hat{\Gamma}_\mu(p_2 + k_2, p_2; k_2) \hat{G}^e(p_2 + k_2) \hat{\Gamma}_\nu(p_1, p_1 + k_1, k_1) + \hat{\Gamma}_\nu(p_2 + p_2, p_2; k_2) \hat{G}^e(p_2 + k_2) \hat{\Gamma}_\mu(p_1, p_1 + k_1; k_1)] \tilde{v}_1. \quad (9.8)$$

Эта формула при $k_1 = k_2 = 0$ получает вид

$$M_2 = \tilde{a}_{2\mu} \tilde{a}_{1\nu} \tilde{v}_2 [\hat{\Gamma}_\mu(p, p; 0) \hat{G}^e(p) \hat{\Gamma}_\nu(p, p; 0) + \hat{\Gamma}_\nu(p, p; 0) \hat{G}^e(p) \hat{\Gamma}_\mu(p, p; 0)] \tilde{v}_1.$$

Используя формулу (8.24') и соотношения

$$\tilde{v} = \sqrt{Z_1} v, \quad \tilde{\bar{v}} = \sqrt{Z_1} \bar{v}, \quad \tilde{a} = \sqrt{Z} a,$$

$$\hat{\Gamma}_\mu(p, p; 0) = Z_1^{-1} (2\pi)^4 \frac{ie}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu \quad (p^2 + \chi_c^2 \rightarrow 0)$$

преобразуем M_2 к виду

$$M_2 = Z (2\pi)^8 \left(\frac{ie}{\hbar c} \right)^2 \tilde{v}_2 [\hat{\gamma}_\mu \hat{S}_{m_c}^F(p) \hat{\gamma}_\nu + \hat{\gamma}_\nu \hat{S}_{m_c}^F(p) \hat{\gamma}_\mu] v_1 a_{1\mu} a_{2\nu}. \quad (9.9)$$

Матричный элемент (9.9) отличается от матричного элемента второго порядка для рассеяния фотонов с нулевым импульсом только множителем Z . Таким образом, вклад в матричный элемент для процесса рассеяния фотонов с нулевым импульсом-энергией от выброшенных графов более высокого порядка можно учесть, производя в соответствующем графе второго порядка замену заряда «голового» электрона его полным зарядом e_c , который согласно формуле (9.9) равен $e_c = e\sqrt{Z}$. Указанная операция называется перенормировкой заряда электрона.

Можно показать, что из выражения (9.9) следует формула Томсона

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e_c^2}{4\pi mc^2} \right), \quad (9.10)$$

которую можно использовать для определения полного заряда электрона.

Л. Д. Ландау, а затем Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В. показали [2], что в пределе, когда $K \rightarrow \infty$, во втором приближении теории возмущений имеем $Z \rightarrow -\infty$. Подставляя это значение для Z в формулу (9.1), получим для затравочного заряда бессмысленный результат

$$e = \frac{e_c}{\sqrt{Z}} \rightarrow \frac{1}{i\infty}, \quad (9.11)$$

согласно которому затравочный заряд — чисто мнимая и бесконечно малая величина. Однако такой вывод противоречит условию эрмитовости исходного оператора энергии.

Результат (9.11) иногда интерпретируется как доказательство внутренней противоречивости и незамкнутости современной квантовой теории поля. Однако такое утверждение является преждевременным, так как формула (9.11) получена во втором приближении теории возмущений. Вопрос о противоречивости или непротиворечивости квантовой теории поля является еще открытым и для своего разрешения требует более строгих исследований.

§ 10. ПЕРЕНОРМИРОВКА ФУНКЦИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ВЕРШИННЫХ ЧАСТЕЙ. ПЕРЕНОРМИРОВКА МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

1. Перенормированные функции. В формулы для определения функций распространения \hat{G}^e и G^y входят функции $\hat{\Sigma}(p)$ и $\hat{\Pi}(p)$, расходящиеся при $K \rightarrow \infty$; вершинная часть $\hat{\Gamma}_\mu$ также расходится при $K \rightarrow \infty$. Поэтому целесообразно вместо \hat{G}^e , G^y , $\hat{\Gamma}_\mu$ и коэффициента вершины $\hat{\lambda}_\mu$ ввести перенормированные функции распространения \hat{G}_c^e и G_c^y , перенормированную вершинную функцию $\hat{\Gamma}_{c\mu}$ и перенормированный коэффициент вершины $\hat{\lambda}_{c\mu}$ при помощи

следующих формул:

$$\begin{aligned} \hat{G}_c^e &= Z_1^{-1} \hat{G}^e; \quad G_c^y = Z^{-1} G^y; \\ \hat{\Gamma}_{c\mu} &= Z_1 Z_1^{1/2} \hat{\Gamma}_\mu; \quad \hat{\lambda}_{c\mu} = Z_1 \sqrt{Z} \hat{\lambda}_\mu. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Найдем уравнения для определения \hat{G}_c^e , G_c^y и $\hat{\Gamma}_{c\mu}$.

2. *Первое уравнение.* Для нахождения первого уравнения воспользуемся формулой (7.12):

$$\hat{G}^e(p) = \hat{S}^F(p) + \hat{S}^F(p) \hat{\Sigma}^*(p) \hat{G}^e(p), \quad (10.2)$$

где

$$\hat{\Sigma}^*(p) = \int d^4 k \lambda_\mu \hat{G}^e(p-k) \hat{\Gamma}_\nu(p, p-k; k) G_{\mu\nu}^y(k) \quad (10.3)$$

— собственно-энергетическая функция компактной части электрона, выраженная через перенормированные функции. Добавляя к обеим частям формулы (10.2) член $Z_1^{-1} \hat{G}^e(p) = \hat{G}_c^e$, получим

$$\hat{G}_c^e(p) = \hat{S}^F(p) + \hat{S}^F(p) \hat{\Sigma}^*(p) \hat{G}^e(p) + (Z_1^{-1} - 1) \hat{G}^e(p). \quad (10.4)$$

Используя соотношение

$$\hat{S}^F(p) (i \hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi_c) (2\pi)^4 = 1, \quad (10.5)$$

где $\chi_c = \frac{m_c c}{\hbar}$; m_c — наблюдаемая масса электрона (т. е. учтено, что уже произведена перенормировка массы электрона), формулу (10.4) преобразуем к виду

$$\hat{G}_c^e(p) = \hat{S}^F(p) + \hat{S}^F(p) [\hat{\Sigma}^*(p) - (2\pi)^4 (1 - Z_1^{-1}) (i \hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi_c)] \hat{G}^e(p). \quad (10.6)$$

Введем теперь регуляризованную собственно-энергетическую функцию электрона для компактной собственно-энергетической части:

$$\hat{\Sigma}_R^*(p) = \hat{\Sigma}^*(p) - \hat{\Sigma}^*(p_0) - \frac{\partial \hat{\Sigma}^*(p_0)}{\partial p_\mu} (p_\mu - p_{0\mu}), \quad (10.7)$$

где p_0 — четырехмерный импульс свободного электрона. Для определения второго и третьего членов в правой

части (10.7) воспользуемся формулой

$$\frac{1}{\hat{G}^e(p_0)} = \frac{1}{\hat{S}^F(p_0)} - \hat{\Sigma}^*(p_0),$$

или

$$\frac{1}{\hat{G}^e(p_0)} = (2\pi)^4 (i\hat{\gamma}_\mu p_{0\mu} + \chi_c) - \hat{\Sigma}^*(p_0),$$

полученной из соотношения (10.2), и формулой (8.24), которая для значений p^2 , близких к $-\chi_c^2$, имеет вид

$$\frac{1}{\hat{G}^e(p_0)} = Z_1^{-1} (2\pi)^4 (i\hat{\gamma}_\mu p_{0\mu} + \chi_c), \quad p_c^2 + \chi_c^2 \rightarrow 0. \quad (10.9)$$

Сравнивая равенства (10.8) и (10.9), имеем

$$\hat{\Sigma}^*(p_0) = (2\pi)^4 (1 - Z_1^{-1}) (i\hat{\gamma}_\mu p_{0\mu} + \chi_c), \quad (10.10)$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \hat{\Sigma}^*(p_0) = (2\pi)^4 i (1 - Z_1^{-1}) \hat{\gamma}_\mu. \quad (10.11)$$

Подставляя выражения (10.10) и (10.11) для $\hat{\Sigma}^*(p_0)$ и $\frac{\partial}{\partial p_\mu} \hat{\Sigma}^*(p_0)$ в формулу (10.7), находим

$$\hat{\Sigma}_R^*(p) = \hat{\Sigma}^*(p) - (2\pi)^4 (1 - Z_1^{-1}) (i\hat{\gamma}_\mu p_\mu + \chi_c). \quad (10.12)$$

Учитывая это и равенство $\hat{G}_c^e(p) = Z_1^{-1} \hat{G}^e(p)$, из выражения (10.6) получаем

$$\hat{G}_c^e(p) = \hat{S}^F(p) + \hat{S}^F(p) \tilde{\Sigma}_R^*(p) \hat{G}_c^e(p), \quad (10.13)$$

где

$$\tilde{\Sigma}_R^*(p) = Z_1 \hat{\Sigma}_R^*(p). \quad (10.14)$$

Согласно соотношению (10.7) формулу (10.14) можно переписать в виде

$$\tilde{\Sigma}_R^*(p) = \tilde{\Sigma}^*(p) - \tilde{\Sigma}^*(p_0) - \frac{\partial \tilde{\Sigma}^*(p_0)}{\partial p_\mu} (p_\mu - p_{0\mu}), \quad (10.15)$$

где

$$\tilde{\Sigma}^*(p) = Z_1 \hat{\Sigma}^*(p). \quad (10.16)$$

Подставляя в правую часть (10.16) выражения (10.1) для \hat{G}^e , $\hat{\lambda}_\mu$, $\hat{\Gamma}_\nu$ и G^Y , получаем

$$\tilde{\Sigma}^*(p) = \int d^4 k \hat{\lambda}_{c\mu} \hat{G}_c^e(p-k) \hat{\Gamma}_{c\nu}(p, p-k; k, G_{c\mu\nu}^Y(k). \quad (10.17)$$

Формулы (10.13), (10.15) и (10.17) дают первое уравнение для нахождения \hat{G}_c^e , G_c^y и $\hat{\Gamma}_{c\nu}$.

Вводя общую регуляризованную собственнно-энергетическую функцию электрона

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_R(p) &= \tilde{\Sigma}_R^* + \tilde{\Sigma}_R \hat{S}^F \tilde{\Sigma}_R^* + \tilde{\Sigma}_R^* \hat{S}^F \tilde{\Sigma}_R \hat{S}^F \tilde{\Sigma}_R^* + \dots = \\ &= \tilde{\Sigma}_R^* (1 - \hat{S}^F \tilde{\Sigma}_R^*)^{-1}, \end{aligned} \quad (10.18)$$

можно преобразовать формулу (10.13) к виду

$$\hat{G}_c^e(p) = \hat{S}^F(p) + \hat{S}^F(p) \hat{\Sigma}_R(p) \hat{S}^F(p). \quad (10.19)$$

3. Второе уравнение. Для получения второго уравнения используем формулу

$$\hat{G}^y(k) = D^F(k) + D^F(k) \Pi^*(k) G^y(k), \quad (10.20)$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}^*(k) = -\text{Sp} \int d^4 p \hat{\lambda}_\mu \hat{G}^e(p) \hat{\Gamma}_\nu(p, p-k; k) \hat{G}^e(p-k) \quad (10.21)$$

— собственнно-энергетическая фотонная функция компактной собственнно-энергетической части, выраженная через неперенормированные функции. Добавляя к обеим частям формулы (10.20) член $G_c^y = Z^{-1} G^y$, получим

$$G_c^y(k) = D^F(k) + D^F(k) \Pi^*(k) G^F(k) + G^F(k) (Z^{-1} - 1). \quad (10.22)$$

Так как

$$\frac{(2\pi)^4 i k^2}{4\pi\hbar c} D^F(k) = 1, \quad (10.23)$$

то формулу (10.22) можно преобразовать к виду

$$G_c^y(k) = D^F(k) + D^F(k) \left\{ \Pi^*(k) - \frac{(2\pi)^4 i}{4\pi\hbar c} (1 - Z^{-1}) k^2 \right\} G^y(k). \quad (10.24)$$

Введем регуляризованную собственнно-энергетическую функцию фотона для компактной собственнно-энергетической части:

$$\Pi_R^*(k) = \Pi^*(k) - \Pi^*(0) - \left(\frac{\partial \Pi^*(k)}{\partial k^2} \right) \Big|_{k=0} \cdot k^2. \quad (10.25)$$

Для определения второго и третьего членов в правой части (10.25) воспользуемся формулой

$$\frac{1}{G^{\nu}(k)} = \frac{1}{D^F(k)} - \Pi^*(k),$$

или

$$\frac{1}{G^{\nu}(k)} = \frac{(2\pi)^4 ik^2}{4\pi\hbar c} - \Pi^*(k), \quad (10.26)$$

полученной из соотношения (10.20), и формулой (8.18), которая для значений k^2 , близких нулю, имеет вид

$$\frac{1}{G^{\nu}(k)} = (2\pi)^4 \frac{ik^2}{4\pi\hbar c} Z^{-1}. \quad (10.27)$$

Сравнивая равенства (10.26) и (10.27), находим

$$\Pi^*(k) = \frac{(2\pi)^4 ik^2}{4\pi\hbar c} (1 - Z^{-1}), \quad (10.28)$$

откуда

$$\Pi^*(0) = 0, \quad \left(\frac{\partial \Pi^*(k)}{\partial k^2} \right)_0 = \frac{(2\pi)^4 i}{4\pi\hbar c} (1 - Z^{-1}). \quad (10.29)$$

Равенство $\Pi^*(0) = 0$ согласуется с градиентной инвариантностью теории электромагнитного поля.

Подставляя выражения (10.29) для $\left(\frac{\partial \Pi^*(k)}{\partial k^2} \right)_0$ и $\Pi^*(0)$ в формулу (10.25), находим

$$\Pi_R^*(k) = \Pi^*(k) - \frac{(2\pi)^4 i}{4\pi\hbar c} (1 - Z^{-1}). \quad (10.30)$$

Учитывая это и равенство $G_c^{\nu}(k) = Z^{-1} G^{\nu}(k)$, из формулы (10.24) получим

$$G_c^{\nu}(k) = D^F(k) + D^F(k) \tilde{\Pi}_R^*(k) G_c^{\nu}(k), \quad (10.31)$$

где

$$\tilde{\Pi}_R^*(k) = Z \Pi_R^*(k). \quad (10.32)$$

Используя формулу (10.25), соотношение (10.32) можно переписать в виде

$$\tilde{\Pi}_R^*(k) = \tilde{\Pi}^*(k) - \tilde{\Pi}^*(0) - \left(\frac{\partial \tilde{\Pi}^*(k)}{\partial k^2} \right)_{k=0} \cdot k^2, \quad (10.33)$$

где

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^*(k) = Z \Pi_{\mu\nu}^*(k). \quad (10.34)$$

Подставляя в правую часть (10.34) выражения (10.1) для \hat{G}^e , $\hat{\lambda}_\mu$, $\hat{\Gamma}_\nu$ и G^ν , получаем

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^*(k) = -\text{Sp} \int d^4 p \hat{\lambda}_{c\mu} \hat{G}_c^e(p) \hat{\Gamma}_{c\nu}(p, p-k; k) \hat{G}_c^e(p-k). \quad (10.35)$$

Формулы (10.31), (10.33) и (10.35) дают второе уравнение для нахождения \hat{G}_c^e , G^ν и $\hat{\Gamma}_{c\nu}$.

Вводя общую регуляризованную собственнно-энергетическую функцию фотона

$$\begin{aligned} \Pi_R(k) &= \tilde{\Pi}_R^* + \tilde{\Pi}_R^* D^F \tilde{\Pi}_R^* + \tilde{\Pi}_R^* D^F \tilde{\Pi}_R^* D^F \tilde{\Pi}_R^* + \dots = \\ &= \tilde{\Pi}_R^* (1 - D^F \tilde{\Pi}_R^*)^{-1}, \end{aligned} \quad (10.36)$$

можно преобразовать формулу (10.31) к виду

$$G_c^\nu(k) = D^F(k) + D^F(k) \Pi_R(k) D^F(k). \quad (10.37)$$

4. *Третье уравнение.* Уравнения (10.13) и (10.31) содержат три неизвестные функции \hat{G}_c^e , G_c^ν и $\hat{\Gamma}_{c\mu}$. Поэтому к ним необходимо добавить еще одно уравнение. Для получения третьего уравнения воспользуемся третьей формулой (10.1):

$$\hat{\Gamma}_{c\mu} = Z_1 \sqrt{Z} \hat{\Gamma}_\mu = Z_1 \sqrt{Z} (\hat{\lambda}_\mu + \hat{\Lambda}_\mu), \quad (10.38)$$

где

$$\hat{\Lambda}_\mu(p_1, p_2; k) = \sum_n \hat{\Lambda}_\mu^n = \sum_n \int d\tau (\hat{\Gamma})^n (\hat{G}_c^e)^{n-1} (G^\nu)^{\frac{n-1}{2}} \quad (10.39)$$

— сумма вершинных функций, выраженная через ненормированные функции $\hat{\Gamma}_\mu$, \hat{G}_c^e и G^ν .

В формуле (10.39) индекс суммирования n пробегает положительные нечетные значения, начиная с трех. Выражение для $\hat{\Lambda}_\mu^n$ записано нами схематически.

Введем функцию

$$\hat{\Lambda}_{1\mu}(p_1, p_2; k) = \sum_n \hat{\Lambda}_{1\mu}^n = Z_1 \sqrt{Z} \hat{\Lambda}_\mu(p_1, p_2; k). \quad (10.40)$$

Подставляя в правую часть (10.40) выражения (10.1) для функций $\hat{\Gamma}_\mu$, \hat{G}_c^e и G^ν , получаем

$$\hat{\Lambda}_{1\mu}(p_1, p_2; k) = \sum_n \int d\tau (\hat{\Gamma}_c)' (\hat{G}_c^e)^{n-1} (G_c^\nu)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (10.41)$$

Формула (10.41) дает сумму вершинных функций, выраженную через перенормированные функции $\hat{\Gamma}_\mu$, \hat{G}^e и G^y .

Согласно соотношению (10.40) формула (10.38) приобретает вид

$$\hat{\Gamma}_{c\mu} = Z_1 \sqrt{Z} \hat{\lambda}_\mu + \hat{\Lambda}_{1\mu}(\rho_1, \rho_2; k). \quad (10.42)$$

В правую часть (10.42) входит функция $\hat{\Lambda}_{1\mu}$, которая при $K \rightarrow \infty$ расходится. Чтобы устранить эту расходимость, добавим и отнимем в правой части (10.42) выражение $\hat{\Lambda}_{1\mu}(\rho_0, \rho_0, 0)$. В результате получим

$$\hat{\Gamma}_{c\mu} = Z_1 \sqrt{Z} \hat{\lambda}_\mu + \hat{\Lambda}_{1\mu}(\rho_0, \rho_0, 0) + \hat{\Lambda}_{R\mu}(\rho_1, \rho_2, k), \quad (10.43)$$

где

$$\hat{\Lambda}_{R\mu}(\rho_1, \rho_2; k) = \hat{\Lambda}_{1\mu}(\rho_1, \rho_2; k) - \hat{\Lambda}_{1\mu}(\rho_0, \rho_0; 0),$$

а $\rho_{0\mu}$ удовлетворяет равенству $\rho_0^2 + \chi_c^2 = 0$.

Как известно, функция $\hat{\Lambda}_{R\mu}(\rho_1, \rho_2; k)$ при $K \rightarrow \infty$ не расходится. Покажем, что и выражение $[-\hat{\Lambda}_{1\mu}(\rho_0, \rho_0; 0) + Z_1 \sqrt{Z} \hat{\lambda}_\mu]$ при $K \rightarrow \infty$ является также сходящимся. Действительно, согласно формуле (10.40) имеем

$$\hat{\Lambda}_{1\mu}(\rho_0, \rho_0; 0) = Z_1 \sqrt{Z} \hat{\Lambda}_\mu(\rho_0, \rho_0; 0)$$

или

$$\hat{\Lambda}_{1\mu}(\rho_0, \rho_0; 0) = -Z_1 \sqrt{Z} \hat{\lambda}_\mu + Z_1 \sqrt{Z} \hat{\Gamma}_\mu(\rho_0, \rho_0; 0). \quad (10.44)$$

Так как согласно выражению (8.28) $Z_1 \hat{\Gamma}_\mu(\rho_0, \rho_0; 0) = \hat{\lambda}_\mu$, то формулу (10.44) можно переписать в виде

$$\hat{\Lambda}_{1\mu}(\rho_0, \rho_0; 0) = (1 - Z_1) \sqrt{Z} \hat{\lambda}_\mu. \quad (10.45)$$

На основании (10.45) формула (10.43) приобретает вид

$$\hat{\Gamma}_{c\mu} = \sqrt{Z} \hat{\lambda}_\mu + \hat{\Lambda}_{R\mu}(\rho_1, \rho_2; k), \quad (10.46)$$

или

$$\hat{\Gamma}_{c\mu}(\rho_1, \rho_2; k) = \frac{(2\pi)^4 i e_c}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu + \hat{\Lambda}_{R\mu}(\rho_1, \rho_2; k). \quad (10.47)$$

Формула (10.47) дает искомое третье уравнение для нахождения функций \hat{G}_c^e , G_c^y , $\hat{\Gamma}_{c\mu}$.

5. *Матричные элементы.* В уравнения (10.13), (10.31) и (10.47) не входят расходящиеся (при $K \rightarrow \infty$) выражения.

Поэтому можно ожидать, что, решая эту систему уравнений, получим конечные выражения для перенормированных функций \hat{G}_c^e , G_c^y и $\hat{\Gamma}_{c,\mu}$. Если выразить матричный элемент через перенормированные функции, то такой перенормированный матричный элемент тоже, очевидно, должен являться конечной величиной. Чтобы вычислить матричный элемент некоторого процесса, достаточно рассмотреть совокупность всех неприводимых скелетных диаграмм для этого процесса, в которых внутренним электронным и фотонным линиям и вершинным частям отвечают множители \hat{G}^e , G^y и $\hat{\Gamma}_\mu$, а внешним линиям — множители \tilde{v} и \tilde{a} . Тем самым будут учтены все приводимые диаграммы. Пусть одна из неприводимых скелетных диаграмм имеет n вершин, F_e внутренних электронных линий, F_y внутренних фотонных линий, N_y внешних фотонных линий и N_e внешних электронных линий. В каждой вершине диаграммы сходятся две электронных и одна фотонная линия, причем каждая внутренняя линия соединяет две вершины, а внешняя — только одну. Поэтому имеют место равенства

$$n = F_e + \frac{N_e}{2} = 2F_y + N_y. \quad (10.48)$$

Символически матричный элемент для рассматриваемого скелетного графа можно записать в виде

$$M \sim \int (\hat{\Gamma})^n (\hat{G}^e)^{F_e} (G^y)^{F_y} (\tilde{v})^{N_e} (\tilde{a})^{N_y} d\tau \quad (10.49)$$

Подставляя сюда перенормированные функции

$$\hat{\Gamma}_\mu = Z_1^{-1} Z^{-1/2} \hat{\Gamma}_{c,\mu}, \quad \hat{G}^e = Z_1 \hat{G}_c^e, \quad G^y = Z G_c^y, \quad (10.50)$$

а также

$$\tilde{v} = Z_1^{1/2} v, \quad \tilde{a} = Z^{1/2} a, \quad e = Z^{-1/2} e_c$$

и учитывая равенство (10.48), получаем

$$M \sim \int (\hat{\Gamma}_c)^{(n)} (\hat{G}_c^e)^{F_e} (G_c^y)^{F_y} (v)^{N_e} (a)^{N_y} d\tau. \quad (10.51)$$

Таким образом, матричный элемент (10.51) выражен через перенормированные функции $\hat{\Gamma}_{c,\mu}$, \hat{G}_c^e , G_c^y и истинный заряд электрона e_c . Постоянные Z и Z_1 не входят в выражение

(10.51). Поэтому формула (10.51) дает конечное значение для матричного элемента и в предельном переходе $K \rightarrow \infty$.

Итак, доказано, что в квантовой электродинамике перенормировкой массы и заряда электрона устраняются расходимости во всех приближениях теории возмущений.

§ 11. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Любой физический процесс изображается множеством неприводимых скелетных диаграмм W с различным числом вершин n . Скелетная диаграмма W состоит из эквивалентных (эффективных) внешних и внутренних линий и эффективных вершинных частей. Если эффективной диаграмме W некоторого процесса соответствует в матричном элементе выражение M_W , то множеству всех скелетных эффективных диаграмм этого процесса надо сопоставить в матричном элементе множитель

$$M = \sum_W M_W. \quad (11.1)$$

Для определения входящих в формулу (11.1) перенормированных функций $\hat{\Gamma}_{c\mu}$, \hat{G}_c^e и G_c^y необходимо решить систему уравнений (10.19), (10.37) и (10.47), или, что то же самое, систему уравнений

$$\begin{aligned} \hat{G}_c^e(p) &= \hat{S}^F(p) + \hat{S}^F(p) \hat{\Sigma}_R^*(p) \hat{G}_c^e(p), \\ G_c^y(k) &= D^F(k) + D^F(k) \hat{\Pi}_R^*(k) G_c^y(k), \\ \hat{\Gamma}_{c\mu}(p_1, p_2; k) &= (2\pi)^4 \frac{ie_c}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu + \\ &+ \sum_n \left\{ \int (\hat{\Gamma}_c)^n (\hat{G}_c^e)^{n-1} (G_c^y)^{\frac{n-1}{2}} d\tau - \right. \\ &\left. - \int (\hat{\Gamma}_c)^n (\hat{G}_c^e)^{n-1} (G_c^y)^{\frac{n-1}{2}} d\tau \Big|_{\substack{k=0 \\ p_1=p_2=p_0}} \right\}. \end{aligned}$$

Ввиду известных математических трудностей эта система уравнений решается приближенно. При этом функции $\hat{\Gamma}_{c\mu}$, \hat{G}_c^e и G_c^y представляют в виде рядов по степеням

e_c^2 . В качестве первого приближения для этих функций, очевидно, необходимо взять выражения

$$(\hat{\Gamma}_{c\mu})_0 = (2\pi)^4 \frac{ie_c}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu, \quad (\hat{G}_c^e)_0 = \hat{S}^F, \quad (G_c^y)_0 = D^F. \quad (11.2)$$

Для демонстрации методики приближенного вычисления функций $\hat{\Gamma}_{c\mu}$, \hat{G}_c^e , G_c^y и матричных элементов в качестве примера возьмем задачу о рассеянии фотона электроном.

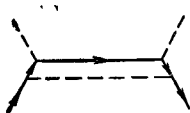


Рис. 60

В первом исчезающем приближении (т. е. во втором приближении теории возмущений) этому процессу соответствует диаграмма, представленная на рис. 47. Матричный элемент, соответствующий этой диаграмме, пропорционален e_c^2 и символически равен

$$M = -(2\pi)^8 \left(\frac{e_c}{\hbar c} \right)^2 \int (\hat{\gamma})^2 (\hat{S}^F)^1 (a)^2 (v)^2 dt.$$

Во втором исчезающем приближении (в четвертом приближении теории возмущений) добавляется элементарный граф на рис. 60, а граф на рис. 47 рассматривается как скелетный, в котором функции $\hat{\Gamma}_{c\mu}$, \hat{G}_c^e и G_c^y вычисляются с точностью до e_c^2 по формулам:

$$\hat{\Gamma}_{c\mu}^{(3)} = (2\pi)^4 \frac{ie_c}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu + \hat{\Lambda}_{R\mu}^{(3)} = (2\pi)^4 \frac{ie_c}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu + \hat{\Lambda}_{1\mu}^{(3)} - \hat{\Lambda}_{1,0\mu}^{(3)}, \quad (11.3)$$

$$\hat{G}_c^{e(2)} = \hat{S}^F + \hat{S}^F \hat{\Sigma}_R^{(2)} \hat{S}^F, \quad (11.4)$$

$$D_c^{y(2)} = D^F + D^F \Pi_R^{(2)} D^F, \quad (11.5)$$

где $\hat{\Sigma}_R^{(2)}$ — перенормированная собственно-энергетическая электронная часть второго порядка; $\Pi_R^{(2)}$ — перенормированная собственно-энергетическая фотонная часть второго порядка, а $\hat{\Lambda}_R^{(3)}$ — перенормированная вершинная часть

третьего порядка. Оператор $\hat{\Lambda}_R^{(3)}$ можно определить, вычисляя функцию вершинной части $\hat{\Lambda}_1^{(3)}$ по элементарной диаграмме на рис. 30, а. Функции $\hat{\Sigma}_R^{(2)}$ и $\hat{\Pi}_R^{(2)}$ согласно выражениям (10.15) и (10.33) находим по следующим формулам:

$$\hat{\Sigma}_R^{(2)}(p) = \hat{\Sigma}^{(2)}(p) - \hat{\Sigma}^{(2)}(p_0) - \frac{\partial \hat{\Sigma}^{(2)}(p_0)}{\partial p_\mu} (p_\mu - p_{0\mu}), \quad (11.6)$$

$$\hat{\Pi}_R^{(2)}(k) = \hat{\Pi}^{(2)}(k) - \hat{\Pi}^{(2)}(0) - \left[\frac{\partial \hat{\Pi}^{(2)}}{\partial k^2} \right]_0 \cdot k^2, \quad (11.7)$$

где $\hat{\Sigma}^{(2)}(p)$ — собственно-энергетическая часть электрона, вычисленная по диаграмме на рис. 20, а, и $\hat{\Pi}^{(2)}(k)$ — собст-



Рис. 61

венно-энергетическая фотонная часть, вычисленная по диаграмме на рис. 25, а. Во втором приближении вычисления осуществляются с точностью до e_c^4 .

В третьем исчезающем приближении (т. е. в шестом приближении теории возмущений) рассматриваются диаграммы на рис. 61, которые считаются элементарными; диаграмму на рис. 60 полагаем скелетной и заменяем в ней функции $\hat{\Gamma}_{c\mu}$, \hat{G}_c^e и G_c^y на $\hat{\Gamma}_{c\mu}^{(3)}$, $\hat{G}_c^{e(2)}$ и $G_c^{y(2)}$, используя для этого формулы (11.3) — (11.7), т. е. $\hat{\Gamma}_{c\mu}$, \hat{G}_c^e и G_c^y для рис. 60 вычисляются с точностью до e_c^2 . Кроме этого, в третьем приближении учитывается диаграмма на рис. 47, которая, как и во втором приближении, считается скелетной, но теперь для нее функции $\hat{\Gamma}_{c\mu}$ и \hat{G}_c^e вычисляются с точностью до e_c^4 . Оператор $\hat{\Gamma}_c^{(3)}$ находим по формуле

$$\hat{\Gamma}_c^{(3)} = (2\pi)^4 \frac{ie_c}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu + \hat{\Lambda}_{R\mu}^{(3)} + \hat{\Lambda}_{R\mu}^{(5)}. \quad (11.8)$$

Вершинная часть $\hat{\Lambda}_{1\mu}^{(5)}$ пропорциональна e_c^4 . Она вычисляется по элементарной неприводимой диаграмме, пред-

ставленной на рис. 30, в. Вершинная часть $\hat{\Lambda}_{1\mu}^{(3)}$, пропорциональная e_c^2 , вычисляется по скелетной диаграмме на рис. 30, а, для которой функции $\hat{\Gamma}_{c\mu}$, \hat{G}_c^e и G_c^y вычисляются с точностью до e_c^2 .

Вычислим $\hat{\Sigma}_R^{(4)}$ с точностью до e_c^4 . Очевидно, что

$$\hat{\Sigma}_R^{(4)} = \hat{\Sigma}_{IR}^{(4)} + \hat{\Sigma}_{IIR}^{(4)} + \hat{\Sigma}_{IIIR}^{(4)}, \quad (11.9)$$

где $\hat{\Sigma}_{IR}^{(4)}$ соответствует графу рис. 62, а, $\hat{\Sigma}_{IIR}^{(4)}$ — графу рис. 62, б; $\hat{\Sigma}_{IIIR}^{(4)}$ — графу рис. 62, в.

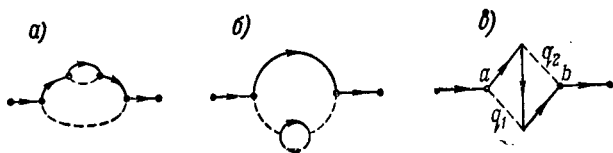


Рис 62

На графе рис. 62, а, который содержит внутри собственно-энергетическую часть второго порядка $\hat{\Sigma}_I^{(2)}$, необходимо вначале заменить $\hat{\Sigma}_I^{(2)}$ величиной $\hat{\Sigma}_R^{(2)}$, определяемой формулой (11.6). Затем, учитывая эту замену, вычисляем величину $\hat{\Sigma}_I^{(4)}$, соответствующую всей диаграмме, и повторно производим перенормировку: заменяем $\hat{\Sigma}_I^{(4)}$ выражением $\hat{\Sigma}_{IR}^{(4)}$ по формуле

$$\hat{\Sigma}_R^{(4)}(p) = \hat{\Sigma}^{(4)}(p) - \hat{\Sigma}^{(4)}(p_0) - \left(\frac{\partial \hat{\Sigma}^{(4)}}{\partial p_\mu} \right)_{p_0} (p_\mu - p_{0\mu}). \quad (11.10)$$

На графе рис. 62, б, который содержит фотонную собственно-энергетическую часть второго порядка $\Pi^{(2)}$, вначале заменяем $\Pi^{(2)}$ на $\Pi_R^{(2)}$ согласно формуле (11.7), а затем, с учетом этой замены, вычисляем соответствующую величину $\hat{\Sigma}_{II}^{(4)}$ для всей диаграммы на рис. 62, б, которую перенормируем по формуле (11.10).

Для диаграммы на рис. 62, в, которая содержит вершинную часть $\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}$, поступаем аналогично. Согласно общим правилам написания матричных элементов для рис. 62, в имеем

$$\hat{\Sigma}_{II}^{(4)} = \int d^4 q_2 \hat{\Lambda}_\nu^{(3)}(p, p - q_2, q_2) \hat{S}^i(p - q_2) \hat{\Lambda}_\nu^f(q_2), \quad (11.11)$$

где

$$\hat{\Lambda}_v^{(3)} = \int d^4 q_1 \hat{\lambda}_\mu \hat{S}^F(p - q_1) \hat{\lambda}_\nu \hat{S}^F(p - q_1 - q_2) \hat{\lambda}_\mu D^F(q). \quad (11.11')$$

Выражение $\hat{\Sigma}_{III}^{(4)}$ расходится линейно в области больших $|q_1|$, $|q_2|$ и является примером перекрывающихся расходимостей¹.

Устраним расходимость, содержащуюся в $\hat{\Sigma}_{III}^{(4)}$. Для этого преобразуем выражение (11.11) к виду

$$\hat{\Sigma}_{III}^{(4)} = \hat{\Lambda}_v^{(3)}(p_0, p_0, 0) \int d^4 q \hat{S}^F(p - q) \hat{\lambda}_\nu D^F(q) + \int d^4 q \hat{\lambda}_\nu \hat{S}^F(p - q) D^F(q) \hat{\Lambda}_v^{(3)}(p_0, p_0, 0) + \tilde{\Sigma}_{III}^{(4)}, \quad (11.12)$$

где

$$\hat{\Lambda}_v^{(3)}(p_0, p_0, 0) = \int d^4 q \hat{\lambda}_\mu \hat{S}^F(p_0 - q) \hat{\lambda}_\nu \hat{S}^F(p_0 - q) \hat{\lambda}_\mu D^F(q); \quad (11.13)$$

p_0 — волновой вектор свободного электрона, удовлетворяющий соотношению $p_0^2 + \chi_c^2 = 0$.

При перенормировке вершинных частей первые два члена в правой части (11.12) обращаются в нуль. Перенормируя последний член, получим для $\hat{\Sigma}_{III}^{(4)}$ следующее перенормированное выражение:

$$\hat{\Sigma}_{III R}^{(4)} = \tilde{\Sigma}_{III}^{(4)}(p) - \tilde{\Sigma}_{III}^{(4)}(p_0) - \left(\frac{\partial \tilde{\Sigma}_{III}^{(4)}}{\partial p_\mu} \right)_{p_0} (p_\mu - p_{0\mu}). \quad (11.14)$$

В заключение этого параграфа рассмотрим еще один пример. На рис. 63 приведены приводимые вершинные части пятого порядка. Для нахождения перенормированных вершинных частей $\hat{\Lambda}_{R\mu}^{(5)}$, соответствующих диаграммам на рис. 63, заменим их соответствующими эквивалентными неприводимыми скелетными диаграммами. Эквивалентные неприводимые скелетные диаграммы представлены на рис. 64, где черный треугольник изображает вершинную часть третьего порядка $\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}$, а жирные линии изображают функции пространства, вычисленные на основе собственно-энергетических частей второго порядка $\hat{\Sigma}_R^{(2)}$ и $\Pi_R^{(2)}$.

¹ Заметим, что перекрывающимися расходимостями называются расходимости в собственно-энергетических частях, в которых часть внешних вершин заменена на вершинные части.

Вычислим сначала $\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}$, соответствующую графу на рис. 63, а, и, используя выражения для $\hat{\Sigma}_R^{(2)}$ и $\Pi_R^{(2)}$ находим функции $\hat{G}_c^e(p)$ и $G_c^y(k)$. Найденное выражение для $\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}$ перенормируем. Затем по графам на рис. 64, а, б и в вычисляем величины $\hat{\Lambda}_I^{(5)}$, $\hat{\Lambda}_{II}^{(5)}$ и $\hat{\Lambda}_{III}^{(5)}$, после перенормировки которых получаем конечные величины $\hat{\Lambda}_{IR}^{(5)}$, $\hat{\Lambda}_{IIR}^{(5)}$ и $\hat{\Lambda}_{IIIR}^{(5)}$.

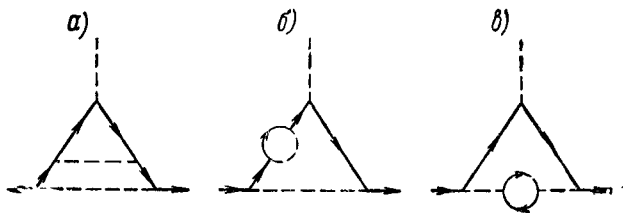


Рис. 63

Таким образом, методика устранения расходимостей, связанных с приводимыми графами, и перекрывающихся расходимостей сводится к следующему: 1) сначала устра-

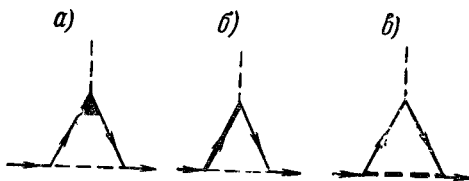


Рис. 64

нением расходимости во внутренних вершинах и собственно-энергетических частях графа, заменяя его скелетной неприводимой диаграммой, в которой линиям и вершинам соответствуют функции \hat{G}_c^e , G_c^y и $\hat{\Gamma}_{c\mu}$; 2) затем устраняем расходимость, обязанную всему графу как целому.

Необходимо еще доказать, что после выполнения первого пункта не возникает новых типов расходимостей, кроме перечисленных в § 2. Для этого достаточно доказать, что функции $\hat{G}_c^e(p)$, G_c^y и $\hat{\Gamma}_{c\mu}(q, q, 0)$ ведут себя асимптотически в области больших импульсов, так же как и функции $\hat{S}^f(p)$, $D^f(k)$ и $\hat{\gamma}_\mu$. Используя формулы (10.19) и (10.37) и учитывая,

что $\Sigma_R(p)$ и $\Pi_R(p)$ асимптотически при $|p| \gg \chi_c$ ведут себя соответственно как $|p|$ и $|p^2|$ (с точностью до множителя $f(\ln \frac{p^2}{\chi_c^2})$), как это можно показать непосредственным вычислением), а также принимая во внимание, что при больших $|p|$

$$\hat{S}^F(p) \sim \frac{1}{p}, \quad D^F(p) \sim \frac{1}{p^2},$$

приходим к выводу, что при $|p| \gg \chi_c$ функции $\hat{G}_c^e(p)$ и $G_c^y(k)$ могут отличаться от \hat{S}^F и D^F только множителем вида $f\left(\ln \frac{p^2}{\chi_c^2}\right)$. Итак, в общем случае сколь угодно сложных частей собственной энергии и вершинных частей имеют место следующие асимптотические выражения для функций \hat{G}_c^e , G_c^y и $\hat{\Gamma}_{c\mu}$:

$$\hat{G}_c^e(p) \sim \hat{S}^F(p) f_1\left(\ln \frac{p^2}{\chi_c^2}\right),$$

$$G_c^y(k) \sim D^F(k) f_2\left(\ln \frac{k^2}{\chi_c^2}\right),$$

$$\hat{\Gamma}_{c\mu}(q, q; 0) \sim f_3\left(\ln \frac{q^2}{\chi_c^2}\right) \hat{\gamma}_\mu \quad (|p^2| \geq \chi_c^2),$$

где f_1 , f_2 и f_3 — безразмерные полиномы от логарифмических аргументов¹. Следовательно, после устранения расходимостей во внутренних частях диаграммы будет получен интеграл, подынтегральная функция которого, кроме рациональных дробей рассмотренного типа, может содержать в качестве множителей лишь логарифмы от импульсов, что не меняет характера расходимости интеграла. Итак, новых типов расходимостей, кроме изученных в § 2, не возникает.

Замечание. Если порядок диаграммы стремится к бесконечности, то f_1 , f_2 и f_3 могут стать бесконечными рядами, что может изменить характер асимптотического поведения функций \hat{G}_c^e , G_c^y и $\hat{\Gamma}_{c\mu}$. В последнем случае приведенные рассуждения могут потерять силу. Так, например, если окажется, что f_1 , f_2 , f_3 являются рядами типа

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{2n} \left(\ln \frac{p^2}{\chi_c^2}\right)^n = \left(\frac{p^2}{\chi_c^2}\right)^{e'}$$

то интеграл, полученный при выполнении первого пункта (т. е. при перенормировке внутренних частей графа), будет иметь расходимость, характер которой будет отличаться от характера расходимостей, изученных в § 2.

¹ Это утверждение доказал Леманн.

§ 12. ПЕРЕНОРМИРУЕМЫЕ И НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫЕ ТЕОРИИ

Рассмотрим некоторую компактную диаграмму Фейнмана G , которой соответствует матричный элемент $S_{i \rightarrow f}$. Определим степень расходимости интеграла I , входящего в $S_{i \rightarrow f}$. Пусть n — число вершин в G . С помощью δ -функции в I снимается $4(n-1)$ интеграций (оставшаяся δ -функция выражает закон сохранения четырехмерного полного импульса). Таким образом, число независимых переменных интегрирования равно $4(F-n+1)$, где F — полное число внутренних линий. Вводя в $4(F-n+1)$ -мерном пространстве «радиус» P , произведение независимых дифференциалов $\prod_i dp_i$ запишем в виде $P^{4(F-n+1)-1} dP$.

Свертки, входящие в $S_{i \rightarrow f}$, можно записать так:

$$\Delta^F(p_l) = \frac{a_l}{p_l^2 + \chi_c^2}, \quad (12.1)$$

где a_l — полином степени r_l относительно p_l . Произведение всех сверток при больших $|p_l|$ дает множитель

$$P^{\sum_l r_l - 2F} = P^{\sum_l (r_l - 2)},$$

в котором суммирование производится по всем внутренним линиям. Пусть X — число операторов дифференцирования в операторе энергии взаимодействия (или число импульсных множителей). Множитель в матричном элементе, обусловленный вершинами, имеет вид P^{nX} . Таким образом, при больших $|p_l|$ подынтегральное выражение принимает форму

$$P^{\sum_l (r_l + 2) - 4(n-1) - 1 + nX} = P^{\omega(G)},$$

где

$$\omega(G) = \sum_l (r_l + 2) - 4(n-1) + nX$$

— индекс диаграммы G . Интеграл, входящий в $S_{i \rightarrow f}$, расходится, если

$$\omega(G) \geq 0,$$

и сходится, если

$$\omega(G) < 0.$$

Индекс вершины определим равенством

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sum_{l_i} (r_l + 2) - 4 + X, \quad (12.2)$$

где суммирование производится по всем внутренним линиям, входящим в i -ю вершину. Согласно формуле (12.2) имеем

$$\omega(G) = \sum_{i=1}^n \omega_i + 4, \quad (12.3)$$

ибо каждая внутренняя линия входит одновременно в две вершины. Если все линии, входящие в вершину, являются внутренними, то ее индекс получает максимальное значение ω_i^{\max} . Если

$$\omega_i^{\max} \leq 0, \quad (12.4)$$

то из выражения (12.3) получаем

$$\omega(G) \leq 4.$$

Если же

$$\omega_i^{\max} > 0,$$

то можно составить такую диаграмму G с достаточным количеством вершин, у которой индекс $\omega(G)$ будет больше, чем любое наперед заданное большое число.

Формулу (12.2) можно преобразовать к виду

$$\omega_i = \omega_i^{\max} - \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{ext}}} (r_l + 2), \quad (12.5)$$

где l_{ext} — индекс внешних линий, входящих в i -ю вершину. Согласно (12.5) формулу (12.3) перепишем так:

$$\omega(G) = \sum_i \omega_i^{\max} + 4 - \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{ext}}} (r_l + 2), \quad (12.6)$$

где в последнем члене суммирование производится по всем внешним линиям рассматриваемой диаграммы. Если все $\omega_i^{\max} \leq 0$, то согласно формуле (12.6), при $\omega(G) > 0$, число внешних линий N диаграммы не превышает четырех. Таким образом, в этом случае $\omega(G)$ и N ограничены сверху числом 4. Если же $\omega_i^{\max} > 0$, то обе суммы в (12.6) могут быть сделаны сколь угодно большими при неотрицательном $\omega(G)$.

Поэтому теперь $\omega(G)$ и N будут неограниченными. В связи с этим типы взаимодействий делятся на два класса: взаимодействия первого рода, когда все $\omega_i \leq 0$; взаимодействия второго рода, когда некоторые из $\omega_i > 0$.

Для взаимодействий первого рода индекс любой диаграммы $\omega(G)$ — величина ограниченная. Следовательно, в этом случае существует конечное число типов расходящихся диаграмм. Для устранения расходимостей требуется конечное число контрчленов в операторе энергии взаимодействия, а следовательно, и конечное число перенормировочных констант. Во втором случае индекс диаграммы может быть больше любого наперед заданного числа; в этом случае существует бесконечное число различных типов расходящихся диаграмм. Для устранения этих расходимостей требуется бесконечное число контрчленов в операторе энергии взаимодействия, а следовательно, и бесконечное число перенормировочных констант. Каждой константе должна соответствовать определенная физическая величина. Итак, в теории с взаимодействием второго рода для перенормировки необходимо использовать бесконечное число физических величин. Последняя операция неосуществима. Таким образом, теории с взаимодействиями первого рода являются перенормируемыми, а теории с взаимодействиями второго рода — перенормируемыми¹.

Рассмотрим более подробно взаимодействия первого и второго рода. В формуле (12.1) число r_l для скалярного и векторного полей с массой нуль со скалярной связью (например, для электромагнитного поля) равно нулю, для спинорного поля со спином $1/2$ — равно единице, для векторного поля u_μ (при $\chi \neq 0$) со скалярной связью — равно двум. Так как при $\omega_i^{\max} \leq 0$ число внешних линий в диаграммах с неотрицательным индексом не может быть более четырех, то максимальное число операторных множителей в лагранжиане взаимодействия первого рода также равно четырем. Согласно формуле (12.2) индекс вершины с четырьмя линиями

$$\omega_l^{\max} = \frac{1}{2} \sum_l (r_l + 2) - 4, \quad (12.7)$$

¹ Если вспомнить, что все существующие перенормировки (исключением является только перенормировка заряда в методе Швингера) проводятся в рамках теории возмущений, это заключение представляется несколько преждевременным. — *Прим ред.*

где суммирование производится по всем линиям, выходящим из данной вершины, будет только тогда не больше нуля, когда все четыре линии будут иметь $r_i = 0$ и когда $X = 0$.

Таким образом, из всех операторов плотности энергии взаимодействия с четырьмя операторными полевыми множителями к взаимодействиям первого рода относятся лишь выражения типа

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4, \quad \varphi_1 \varphi_2 A_\mu A_\mu, \quad A_\mu A_\mu A_\lambda A_\lambda,$$

где φ — скалярное поле. Остальные операторы плотности энергии взаимодействия с четырьмя операторными полевыми множителями относятся к взаимодействиям второго рода. Примерами таких операторов плотности энергии взаимодействия являются следующие выражения:

а) $\{\bar{\psi}_1 \hat{O} \psi_2\} \{\bar{\psi}_3 \hat{O} \psi_4\}$ — оператор плотности энергии взаимодействия четырех ферми-полей (этот оператор плотности энергии был введен Ферми в теории β -распада) ($\omega_i = 2$);

$$\text{б) } \varphi_1 \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_\mu} A_\mu \quad (\omega_i = 1);$$

$$\text{в) } \varphi_1 \varphi_2 u_\mu u_\mu \quad (\omega_i = 2),$$

где φ — скалярное поле; A_μ, u_μ — векторные поля.

Операторы плотности энергии взаимодействия первого рода с тремя операторными полевыми множителями могут иметь следующие структуры: а) произведение из скалярных и электромагнитных функций без производных вида

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3, \quad \varphi A_\mu A_\mu \quad (\omega_i = -1);$$

б) произведение из скалярных и электромагнитных функций с одной производной первого порядка

$$\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_\mu} A_\mu \quad (\omega_i = 0);$$

в) произведение одной скалярной, одной векторной и одной электромагнитной функций

$$\sum_\mu \varphi u_\mu A_\mu \quad (\omega_i = 0);$$

г) произведение двух спинорных и одной скалярной (или электромагнитной) функций

$$\sum_{\alpha, \beta} \bar{\psi}_\alpha \hat{M}_{\alpha\beta} \psi_\beta \varphi, \quad \sum_{\alpha, \beta, \mu} \bar{\psi}_\alpha \hat{O}_{\alpha\beta}^\mu \psi_\beta A_\mu \quad (\omega_i = 0).$$

Все остальные взаимодействия, у которых оператор плотности энергии взаимодействия содержит три операторных полевых множителя, относятся к неперенормируемым теориям. Примером такой теории является теория с оператором плотности энергии взаимодействия вида

$$\sum_{\alpha, \beta, \mu} \bar{\psi}_{\alpha} \hat{O}_{\alpha\beta}^{\mu} \psi_{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} \quad (\omega_i = 1).$$

Если $\hat{O}^{\mu} = \hat{\gamma}_{\mu} \hat{\gamma}_5$, а φ — псевдоскаляр, то эта формула дает оператор плотности энергии взаимодействия псевдоскалярной мезонной теории с псевдовекторной связью. Если же $\hat{O}^{\mu} = \hat{\gamma}_{\mu}$, а φ — скаляр, то получаем то же самое в скалярной мезонной теории с векторной связью.

Кроме того, к неперенормируемым теориям следует отнести теорию, в которой рассматривается тензорная связь векторного поля с спинорным полем. Оператор плотности энергии взаимодействия в такой теории имеет вид

$$\bar{\psi} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \psi \left(\frac{\partial u^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial u^{\mu}}{\partial x_{\nu}} \right) \quad (\omega_i = 2).$$

Итак, перечислены все возможные взаимодействия первого рода, так как операторы энергии взаимодействия, состоящие из произведения только двух операторных полевых множителей, не описывают процессов взаимного превращения частиц.

§ 13. ПЕРЕНОРМИРОВКА В МЕЗОННОЙ ТЕОРИИ

В квантовой теории псевдоскалярного мезонного поля с псевдоскалярной связью, так же как и в квантовой электродинамике, расходящимися являются матричные элементы следующих диаграмм Фейнмана: 1) собственно-энергетических частей фермиона и мезона; 2) вершинной части; 3) части рассеяния мезона на мезоне. В первых двух случаях удастся устранить расходимости путем перенормировки мезонного заряда G и масс нуклона и мезона. В результате перенормировки массы мезона в операторе энергии взаимодействия возникает контрчлен вида $-\delta\mu^2\varphi^2(x)$. В третьем случае нельзя устранить расходимость, основываясь на требовании калибровочной инвариантности, как это делалось в квантовой электродинамике. Итак, в данном случае имеется расходимость, которую не удастся устранить пере-

нормировки массы или заряда (константы связи). Согласно идее перенормировки для устранения этой расходимости в оператор плотности энергии взаимодействия включается контрчлен вида $\lambda\varphi^4$ с соответственно выбранным коэффициентом λ .

Определенный интерес в мезонной теории поля представляют так называемые треугольные диаграммы. Простейшая треугольная диаграмма представлена на рис. 9. Индекс треугольной диаграммы равен 1. Поэтому соответствующий ей матричный элемент является линейно расходящимся.

Треугольной диаграмме соответствует матричный элемент, пропорциональный шпуру величины

$$\hat{\gamma}_5 \frac{1}{\hat{P}_1 + \chi} \hat{\gamma}_5 \frac{1}{\hat{P}_2 + \chi} \hat{\gamma}_5 \frac{1}{\hat{P}_3 + \chi}, \quad (13.1)$$

где $\hbar p_1, \hbar p_2, \hbar p_3$ — импульсы виртуальных фермионов. Учитывая, что матрицы $\hat{\gamma}_5$ и $\hat{\gamma}_\mu$, входящие в \hat{P} , антикоммутируют между собой, преобразуем (13.1) к выражению с числителем

$$\hat{\gamma}_5 (-\hat{P}_1 + \chi) (\hat{P}_2 + \chi) (-\hat{P}_3 + \chi). \quad (13.2)$$

Для получения матричного элемента необходимо взять шпур от выражения (13.1) или (13.2). Учитывая равенства

$$\text{Sp } \hat{\gamma}_5 = \text{Sp } (\hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_\mu) = \text{Sp } (\hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu) = \text{Sp } (\hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\rho) = 0, \quad (13.3)$$

находим, что шпур выражения (13.1) равен нулю, а следовательно, в псевдоскалярной мезонной теории матричный элемент для треугольной диаграммы равен нулю. Это положение может быть доказано для общего случая замкнутой петли с нечетным числом вершин (аналог теоремы Фарри). Из этой теоремы следует, в частности, невозможность распада под действием взаимодействия $\hat{\Gamma}_I = -GN\hat{\psi}\hat{\gamma}_5\hat{\psi}\hat{\phi}$ тяжелого псевдоскалярного мезона на два (или, в общем случае, на четное число) более легких псевдоскалярных мезона.

В скалярной мезонной теории в операторе плотности энергии $\hat{\Gamma}_I$ вместо оператора $\hat{\gamma}_5$ стоит единица. Поэтому вместо выражения (13.2) имеем

$$(-\hat{P}_1 + \chi) (-\hat{P}_2 + \chi) (-\hat{P}_3 + \chi). \quad (13.4)$$

Беря шпур от этого выражения и учитывая, что

$$\text{Sp } \hat{\gamma}_\mu = \text{Sp } \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\rho = 0,$$

а

$$\text{Sp } \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu \neq 0, \quad \text{Sp } \hat{I} \neq 0,$$

получим отличный от нуля результат (расходящийся). Для устранения этой расходимости в оператор энергии взаимодействия вводим контрчлен вида $a\phi^3$, где a — бесконечная величина (при $K \rightarrow \infty$).

Рассмотрим теперь треугольную диаграмму, из которой выходит две фотонных и одна мезонная линия. Такая диаграмма описывает распад мезона на два фотона. Матричный элемент, соответствующий такой диаграмме, пропорционален величине

$$\hat{O}(-\hat{P}_1 + \chi) \hat{\gamma}_\nu (-\hat{P}_2 + \chi) \hat{\gamma}_\mu (-\hat{P}_3 + \chi).$$

Если $\hat{O} = \hat{\gamma}_5$ (псевдоскалярная мезонная теория), то в матричном элементе содержится член с операторным выражением

$$\hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_4 \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 = \hat{\gamma}_5^2 = 1;$$

если же $\hat{O} = 1$, то отличный от нуля результат дают члены, содержащие четное число матриц $\hat{\gamma}_\mu$.

Итак, как в псевдоскалярной, так и в скалярной мезонной теории получен отличный от нуля результат. В обеих теориях рассмотренный матричный элемент является калибровочно инвариантным и сходящимся. В соответствии с этим отметим, что распад нейтрального псевдоскалярного π -мезона на два фотона действительно наблюдается экспериментально.

Аналогично можно получить отличный от нуля матричный элемент для распада скалярного мезона на два псевдоскалярных мезона.

§ 14. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

При вычислении $\hat{\Sigma}$, Π и $\hat{\Lambda}$ встречаются интегралы, у которых подынтегральная функция содержит «обрезающий множитель» вида (2.5) или (2.6). Ради простоты остановимся

на обрезающем множителе (2.6). В этом случае упомянутые интегралы имеют вид

$$I = \int \frac{\Phi(p) d^4 p}{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad (14.1)$$

где a_n — полиномы второго порядка относительно p_μ ; $\Phi(p)$ — полином порядка m относительно p_μ , а интегрирование проводится по некоторой конечной области N в четырехмерном пространстве p .

В конце всех вычислений необходимо переходить к пределу $N \rightarrow \infty$. При этом интегрирование, проводимое по отрезку прямой, расположенной на комплексной плоскости $k_{(0)}$, распространяется на весь контур, изображенный на рис. 6 или рис. 7. Для вычисления интегралов типа (14.1) методом параметризации используется тождество

$$\frac{1}{nA^n a} = \int_0^1 \frac{u^{n-1} du}{[au + a(1-u)]^{n+1}}, \quad (14.2)$$

где A — полином второго порядка относительно p .

В частном случае, когда $n = 1$, формула (14.2) имеет вид

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{dt}{[a_1 t + a_2(1-t)]^2}, \quad (14.3)$$

что легко проверить непосредственным вычислением интеграла.

Используя тождество (14.2), перепишем интеграл (14.1) в следующем виде:

$$I = (n-1)! \int_0^1 x_1^{n-2} dx_1 \int_0^1 x_2^{n-3} dx_2 \dots \int_0^1 dx_{n-1} Q(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (14.4)$$

где

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \int \frac{\Phi(p) d^4 p}{[(p-k)^2 + l]^n}, \quad (14.5)$$

а k и l зависят от параметров x_1, \dots, x_{n-1} . После подстановки в формулу (14.1) выражения для $1/a_1 a_2 \dots a_n$ была произведена перестановка интеграций по x_1, x_2, \dots, x_{n-1} с интеграцией по $(p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}, p_{(0)})$. Эта операция является вполне законной, так как если интегрирование

по $p_{(0)}$ производится вдоль контура c (см. рис. 6 или 7), то ни одно из a_i не обращается в нуль. Если интеграл (14.5) сходится, то, делая замену $p-k \rightarrow p$, можно преобразовать его к виду

$$Q = \int \frac{\tilde{\Phi}(p) d^4 p}{(p^2 + l)^n}. \quad (14.6)$$

В частном случае, когда $\tilde{\Phi}(p) = p_\mu F(p^2)$ — антисимметричная подинтегральная функция, где $F(p^2)$ — функция аргумента p^2 , интеграл (14.6) равен нулю, т. е.

$$\int \frac{p_\mu F(p^2)}{(p^2 + l)^n} d^4 p = 0. \quad (14.7')$$

Отсюда, а также из инвариантности функции $F(p^2)$ относительно вращений в четырехмерном импульсном пространстве следует вторая формула

$$\int \frac{p_\mu p_\nu F(p^2)}{(p^2 + l)^n} d^4 p = \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \int \frac{p^2 F(p^2)}{(p^2 + l)^n} d^4 p. \quad (14.7'')$$

При вычислении интеграла (14.6) необходимо помнить, что в нем интегрирование по $p_{(0)}$ производится вдоль «замкнутого» контура c на рис. 6. Согласно основной теореме о вычетах результат интегрирования не изменится, если контур c деформировать так, чтобы полюса подинтегральной функции, находящиеся внутри контура c , продолжали оставаться внутри деформированного контура c . В частном случае деформацию контура c можно выполнить таким образом, чтобы часть нового контура проходила вдоль мнимой оси на комплексной плоскости $p_{(0)}$ (см. рис. 7). При этом $p_{(0)} = ip'_{(0)}$, где $p'_{(0)}$ — действительное число. Отсюда вытекает, что $p^2 = p^2 - p_{(0)}^2 = p^2 + p_{(0)}'^2 > 0$. Последнее означает, что в p -пространстве имеется евклидова метрика. Это позволяет в четырехмерном p -пространстве ввести сферическую систему координат:

$$\begin{aligned} p_{(1)} &= \rho \cos \theta_1, & p_{(2)} &= \rho \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ p_{(3)} &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi, & p_{(0)} &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Легко проверить, что из формул (14.8) следует соотношение

$$p_{(1)}^2 + p_{(2)}^2 + p_{(3)}^2 + p_{(0)}^2 = \rho^2 > 0,$$

элемент объема в четырехмерном p -пространстве в сферической системе координат выражается формулой

$$dk dp'_{(0)} = d^4 k' = H_1 H_2 H_3 H_4 dp d\theta_1 d\theta_2 d\varphi. \quad (14.9)$$

Метрические коэффициенты H_i вычисляются обычно по формуле

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial p_{(1)}}{\partial u^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_{(2)}}{\partial u^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_{(3)}}{\partial u^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial p'_{(0)}}{\partial u^i}\right)^2}, \quad (14.10)$$

где $u^1 = \rho$, $u^2 = \theta_1$, $u^3 = \theta_2$, $u^4 = \varphi$. Используя формулы (14.8), из выражения (14.10) имеем

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = \rho \sin \theta_1, \quad H_4 = \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2. \quad (14.11)$$

Согласно формулам (14.11) объем (14.9) приобретает вид

$$d^4 k' = \rho^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 dp d\theta_1 d\theta_2 d\varphi. \quad (14.12)$$

Подставляя это выражение для $d^4 k'$ в интеграл (14.6), получаем

$$\begin{aligned} Q &= \int \frac{\Phi(\rho^2) d^4 p}{(\rho^2 + l)^n} = \int \frac{\Phi(\rho^2) dp dp'_{(0)}}{(\rho^2 - \rho'^2_{(0)} + l)^n} = i \int \frac{\Phi(\rho^2) dp dp'_{(0)}}{(\rho^2 + \rho'^2_{(0)} + l)^n} \\ &= i \int_0^R \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(\rho^2) \rho^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 dp d\theta_1 d\theta_2 d\varphi}{(\rho^2 + l)^n}, \quad (14.13) \end{aligned}$$

где R — радиус сферы в четырехмерном импульсном пространстве. Производя здесь интегрирование по θ_1 , θ_2 и φ , находим

$$\int \frac{\Phi(\rho^2) d^4 p}{(\rho^2 + l)^n} = 2\pi^2 i \int_0^R \frac{\Phi(\rho^2) \rho^3 d\rho}{(\rho^2 + l)^n} = \pi^2 i \int_0^{R^2} \frac{\Phi(z) z dz}{(z + l)^n}. \quad (14.14)$$

Используя эту формулу, легко вычислить интегралы:

$$\int \frac{d^4 p}{\rho^2 + l} = \pi^2 i \left(R^2 - l \ln \frac{R^2}{l} \right), \quad (14.15)$$

$$\int \frac{d^4 p}{(\rho^2 + l)^2} = \pi^2 i \left(\ln \frac{R^2}{l} - 1 \right), \quad (14.15')$$

$$\int \frac{d^4 p}{(\rho^2 + l)^n} = \pi^2 i \frac{1}{l^{n-2} (n-1)(n-2)} \quad (n \geq 3), \quad (14.16)$$

где $l > 0$ (в последней формуле положено $R \rightarrow \infty$).

Делая в формуле (14.16) замену $\rho \rightarrow \rho - k$ и $l + k^2 \rightarrow l$, получим

$$\int \frac{d^4 \rho}{(\rho^2 - 2\rho k + l)^n} = \frac{\pi^2 i}{(l - k^2)^{n-2} (n-1)(n-2)} \quad (k^2 \leq l; n \geq 3). \quad (14.17)$$

В частном случае, когда $F(\rho^2) \equiv 1$, формула (14.7') имеет вид

$$\int \frac{\rho_\mu d^4 \rho}{(\rho^2 + l)^n} = 0. \quad (14.18)$$

Производя в (14.18) замену $\rho \rightarrow \rho - k$ и $l + k^2 \rightarrow l$, согласно формуле (14.17) находим

$$\int \frac{\rho_\mu d^4 \rho}{(\rho^2 - 2\rho k + l)^n} = \frac{\pi^2 i k_\mu}{(l - k^2)^{n-2} (n-1)(n-2)} \quad (n \geq 3) \quad (14.19)$$

Чтобы вычислить логарифмически расходящийся интеграл

$$I_1(k, l) = \int_{N'} \frac{d^4 \rho}{(\rho^2 - 2\rho k + l)^2}, \quad (14.20)$$

созершим замену $\rho - k \rightarrow \rho$, $l - k^2 \rightarrow l$ в формуле (14.15'). В результате получим

$$\int_{N'} \frac{d^4 \rho}{(\rho^2 - 2\rho k + l)^2} = \pi^2 i \left(\ln \frac{R^2}{l - k^2} - 1 \right), \quad (14.21)$$

где, однако, область интегрирования N' несколько отличается от области N , по которой производится интегрирование интеграла (14.20). Покажем, что интеграл (14.20) с увеличением R сколь угодно мало отличается от интеграла, стоящего в левой части (14.21). Действительно, радиус R' гиперсферы N' в четырехмерном ρ -пространстве отличается от радиуса R гиперсферы N на конечную величину. Отсюда следует, что с увеличением R отношение R'/R стремится к единице, а логарифм этого отношения стремится к нулю. Поэтому для разности рассматриваемых интегралов имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{N - N'} \frac{d^4 \rho}{(\rho^2 - 2\rho k + l)^2} \sim \int_{N - N} \frac{d\rho}{\rho} \sim \ln \frac{R'}{R} \sim \ln 1 = 0.$$

Учитывая это, можно написать

$$\int_N \frac{d^4 \rho}{(\rho^2 - 2\rho k + l)^2} = \pi^2 i \left(\ln \frac{R'}{l - k^2} - 1 \right). \quad (14.22)$$

Вычислим логарифмически расходящийся интеграл

$$I_2 = \int_N \frac{\rho_\sigma \rho_\tau d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^3}. \quad (14.23)$$

Производя замену $p - k \rightarrow p$, преобразуем интеграл (14.23) к виду

$$\int_N \frac{\rho_\sigma \rho_\tau d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^3} = \int_{N'} \frac{(\rho_\sigma + k_\sigma)(\rho_\tau + k_\tau)}{(p^2 + l - k^2)^3} d^4 p.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} i_1 &= \int \frac{\rho_\sigma \rho_\tau d^4 p}{(p^2 + l)^3} = \frac{\delta_{\sigma\tau}}{4} \int \frac{p^2 d^4 p}{(p^2 + l)^3} = \\ &= \frac{\delta_{\sigma\tau}}{4} \left[\int \frac{d^4 p}{(p^2 + l)^2} - l \int \frac{d^4 p}{(p^2 + l)^3} \right]. \end{aligned}$$

Согласно формулам (14.15') и (14.16) отсюда получим

$$i_1 = \frac{\pi^2 i}{4} \delta_{\sigma\tau} \left\{ \ln R^2 - \ln l - \frac{3}{2} \right\}. \quad (14.24)$$

Кроме того,

$$\int \frac{\rho_\sigma d^4 p}{(p^2 + l)^3} = 0, \quad \int \frac{d^4 p}{(p^2 + l)^3} = \frac{\pi^2 i}{2l} \quad (14.25)$$

Учитывая равенства (14.24) и (14.25), получаем

$$\int \frac{\rho_\sigma \rho_\tau d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^3} = \frac{\pi^2 i}{4} \delta_{\sigma\tau} \left(\ln \frac{R^2}{l - k^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{\pi^2 i}{2} \frac{k_\sigma k_\tau}{l - k^2}. \quad (14.26)$$

Интегрируя формулу (14.26) по k_τ , находим

$$\int \frac{\rho_\sigma d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} = \pi^2 i k_\sigma \left\{ \ln \frac{R^2}{l - k^2} - \frac{3}{2} \right\} + c_\sigma, \quad (14.27)$$

где c_σ — некоторая постоянная.

Для нахождения постоянной c_σ подставим в формулу (14.27) $k_\sigma = 0$. Тогда интеграл в левой части (14.27) согласно равенству (14.18) обратится в нуль и из (14.27) следует, что

$$c_\sigma = 0. \quad (14.28)$$

Согласно (14.28) формула (14.27) приобретает окончательный вид

$$\int \frac{\rho_\sigma d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} = \pi^2 i k_\sigma \left\{ \ln \frac{R^2}{l - k^2} - \frac{3}{2} \right\}. \quad (14.29)$$

§ 15. ЭЛЕКТРОННАЯ СОБСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ
ЧАСТЬ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Найдем выражение для электронной собственно-энергетической части второго порядка, которой соответствует диаграмма на рис. 33, а. Используя правила Фейнмана, имеем

$$\hat{\Sigma}^{(2)}(p) = \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)^2 \int d^4 k \hat{\gamma}_\mu \hat{S}^c(p-k) \hat{\gamma}_\mu D^c(k), \quad (15.1)$$

где

$$\hat{S}^c(p) = \frac{-i \hat{\gamma}_\alpha p_\alpha + \chi}{p^2 + \chi^2}, \quad D^c(k) = -\frac{4\pi\hbar c l}{k^2 + \lambda^2}. \quad (15.2)$$

В выражение для $D^c(k)$ включена «масса» фотона λ . Такая модификация функции $D^c(k)$ позволяет устранить так называемую инфракрасную расходимость в $\hat{\Sigma}^{(2)}(p)$, т. е. расходимость соответствующих интегралов при малых значениях четырехмерного импульса $\hbar k$. Подставляя выражения (15.2) для \hat{S}^c и D^c в формулу (15.1), получаем

$$\hat{\Sigma}^{(2)}(p) = \frac{4\pi e^2 l}{\hbar c} \int d^4 k \hat{\gamma}_\mu \frac{-i \hat{\gamma}_\alpha (p-k)_\alpha + \chi}{(p-k)^2 + \chi^2} \hat{\gamma}_\mu \frac{1}{k^2 + \lambda^2}. \quad (15.3)$$

Используя соотношение

$$\hat{\gamma}_\alpha \hat{\gamma}_\beta + \hat{\gamma}_\beta \hat{\gamma}_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}, \quad (15.4)$$

преобразуем числитель подынтегральной функции в (15.3) к виду

$$\hat{\gamma}_\mu [-i \hat{\gamma}_\alpha (p-k)_\alpha + \chi] \hat{\gamma}_\mu = 2i \hat{\gamma}_\alpha (p-k)_\alpha + 4\chi. \quad (15.5)$$

Принимая во внимание это равенство и формулу

$$\frac{1}{(k^2 + \lambda^2) [(p-k)^2 + \chi^2]} = \int_0^1 \frac{dx}{(k^2 - 2pkx + l)^2}, \quad (15.6)$$

где $l = (p^2 + \chi^2 - \lambda^2)x + \lambda^2$, из выражения (15.3) находим

$$\hat{\Sigma}^{(2)}(p) = \frac{8\pi e^2 l}{\hbar c} \int_0^1 dx \int d^4 k \frac{i \hat{\gamma}_\alpha (p-k)_\alpha + 2\chi}{(k^2 - 2kpx + l)^2}, \quad (15.7)$$

что согласно формулам (14.22) и (14.29) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^{(2)}(\rho) = & \\ = \frac{8\pi^3 e^2 i}{\hbar c} & \left\{ i (\hat{\gamma}_\alpha \rho_\alpha + 2\chi) \left[\ln R^2 - 1 - \int_0^1 dx \ln(l - \rho^2 x^2) \right] + \right. \\ & \left. + \hat{\gamma}_\alpha \rho_\alpha \left[\frac{1}{2} \left(\ln R^2 - \frac{3}{2} \right) - \int_0^1 dx \cdot x \ln(l - \rho^2 x^2) \right] \right\}. \quad (15.8) \end{aligned}$$

Произведем перенормировку функции $\hat{\Sigma}^{(2)}(\rho)$. Для этого учтем, что импульс ρ_0 свободного электрона удовлетворяет уравнению Дирака в импульсном представлении:

$$(i \hat{\gamma}_\alpha \rho_\alpha + \chi) c(\rho) = 0. \quad (15.9)$$

Согласно этому равенству, чтобы найти $\hat{\Sigma}^{(2)}$ при $\rho = \rho_0$, заменим в $\hat{\Sigma}^{(2)}(\rho)$ выражение $\hat{\gamma}_\alpha \rho_\alpha$ через $i\chi$. В результате получим

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^{(2)}(\rho_0) = & - \frac{8\pi^3 e^2 \chi}{\hbar c} \left\{ \frac{3}{2} \ln R^2 - \frac{7}{4} - \int_0^1 dx \ln(l_0 - \rho_0^2 x^2) - \right. \\ & \left. - \int_0^1 dx \cdot x \ln(l_0 - \rho_0^2 x^2) \right\}, \quad (15.10) \end{aligned}$$

где $l_0 = \lambda^2(1 - x)$. Кроме того, формально дифференцируя формулу (15.8) по $\hat{\gamma}_\alpha \rho_\alpha$, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\Sigma}^{(2)}(\rho)}{\partial \hat{\gamma}_\alpha \rho_\alpha} = & \frac{8\pi^3 e^2 i}{\hbar c} \int_0^1 dx \left\{ - \ln \frac{R^2}{l - \rho^2 x^2} + 1 + x \ln \frac{R^2}{l^2 - \rho^2 x^2} - \right. \\ & \left. - \frac{3x}{2} + 2\chi^2 \frac{x(1-x)}{l - \rho^2 x^2} + 2\chi^2 \frac{x^2(1-x)}{l - \rho^2 x^2} \right\}. \quad (15.11) \end{aligned}$$

Подставляя в это равенство $i\chi$ вместо $\hat{\gamma}_\alpha p_\alpha$, имеем

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_1 &= \frac{\partial \hat{\Sigma}^{(2)}(p)}{\partial \hat{\gamma}_\alpha p_\alpha} \Big|_{p=p_0} = \frac{8\pi^3 e^2 i}{\hbar c} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} R^2 + \right. \\ &+ \int_0^1 dx \ln(l_0 - p_0^2 x^2) - \int_0^1 dx \cdot x \ln(l_0 - p_0^2 x^2) + \\ &\left. + 2\chi^2 \int_0^1 \frac{x(1-x) dx}{l_0^2 - p_0^2 x^2} + 2\chi \int_0^1 \frac{x^2(1-x) dx}{l_0^2 - p_0^2 x^2} \right\}. \quad (15.12) \end{aligned}$$

Учитывая формулы (15.8), (15.10) и (15.12), вычислим перенормированную электронную собственно-энергетическую часть второго порядка:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_R(p) &= \hat{\Sigma}(p) - \hat{\Sigma}(p_0) - (\hat{\gamma}_\alpha p_\alpha - i\chi) \hat{\Sigma}_1 = \frac{8\pi^3 e^2 i}{\hbar c} \times \\ &\times \left\{ (2i\chi - \hat{\gamma}_\alpha p_\alpha) \left[\int_0^1 dx \ln(l_0 - p_0^2 x^2) - \int_0^1 dx \ln(l - p^2 x^2) \right] + \right. \\ &+ \hat{\gamma}_\alpha p_\alpha \left[\int_0^1 dx \cdot x \ln(l_0 - p_0^2 x^2) - \int_0^1 dx \cdot x \ln(l - p^2 x^2) \right] + \\ &\left. + 2\chi (i\chi - \hat{\gamma}_\alpha p_\alpha) \int_0^1 \frac{x - x^3}{l_0 - p_0^2 x^2} dx \right\}. \quad (15.13) \end{aligned}$$

Элементарные вычисления приводят к следующим формулам:

$$1) \int_0^1 \frac{x dx}{\chi^2 x^2 - \lambda^2 x + \lambda^2} = \frac{1}{\chi^2} \ln \frac{\chi}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{2\chi^3} I,$$

где

$$I = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \left(\arctg \frac{2\chi^2 - \lambda^2}{\sqrt{\Delta}} - \arctg \frac{-\lambda^2}{\sqrt{\Delta}} \right), \quad \sqrt{\Delta} = \lambda \sqrt{4\chi^2 - \lambda^2};$$

$$2) \int_0^1 dx \ln(\chi^2 x^2 - \lambda^2 x + \lambda^2) = 2 \ln \chi - 2 - \frac{\lambda^2}{\chi^2} \ln \frac{\chi}{\lambda} + \frac{\Delta}{2\chi^2} I;$$

$$3) \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\chi^2 x^2 - \lambda^2 x + \lambda^2} = \frac{1}{2\chi^2} - \frac{\lambda^2}{\chi^2} \ln \frac{\chi}{\lambda} - \frac{\lambda^4}{2\chi^4} I + \\ + \frac{\lambda^2}{\chi^4} + \frac{\lambda^3}{\chi^6} \ln \frac{\chi}{\lambda} + \frac{\lambda^4 (\lambda^2 - 2\chi^2)}{2\chi^6} I;$$

$$4) \int_0^1 dx \cdot x \ln (\chi^2 x^2 - \lambda^2 x + \lambda^2) = \ln \chi - \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{\chi^2} \ln \frac{\chi}{\lambda} - \frac{\lambda^3}{2\chi^2} - \\ - \frac{\lambda^4}{2\chi^4} \ln \frac{\chi}{\lambda} + \frac{\lambda^2 \Delta}{4\chi^4} I;$$

$$5) \int_0^1 dx \ln (l - \rho^2 x^2) = 2 \ln \chi - \int_0^1 \frac{(-\lambda^2 + \rho^2 + \chi^2) x - 2\rho^2 x^2}{\lambda^2 (1-x) + \rho^2 (x-x^2) + \chi^2 x^2} dx = \\ = 2 \ln \chi - 1 + \int_0^1 \frac{(\rho^2 x^2 + \lambda^2) dx}{-\rho^2 x^2 + (\rho^2 + \chi^2 - \lambda^2) x + \lambda^2};$$

$$6) \int_0^1 dx \cdot x \ln (l - \rho^2 x^2) = \ln \chi - \frac{1}{4} + \\ + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\rho^2 x^3 + \lambda^2 x) dx}{-\rho^2 x^2 + (\rho^2 + \chi^2 - \lambda^2) x + \lambda^2}.$$

Используя полученные результаты, преобразуем выражение (15.13) к виду

$$\hat{\Sigma}_R^{(2)}(\rho) = \frac{8\pi^3 e^2 i}{\hbar c} \left\{ (2i\chi - \hat{\gamma}_\alpha \rho_\alpha) \left[-1 - \frac{\lambda^2}{\chi^2} \ln \frac{\chi}{\lambda} + \frac{\Delta'}{2\chi^4} - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^1 \frac{(\rho^2 x^2 + \lambda^2) dx}{-\rho^2 x^2 + (\rho^2 + x^2 - \lambda^2) x + \lambda^2} \right] + 2\chi^2 (i\chi - \hat{\gamma}_\alpha \rho_\alpha) \times \right. \\ \times \left[\left(1 - \frac{\lambda^2}{\chi^2} - \frac{\lambda^4}{\chi^4} \right) \frac{1}{\chi^2} \ln \frac{\chi}{\lambda} - \frac{1}{2\chi^2} - \frac{\lambda^2}{\chi^4} + \left(1 + \frac{3\lambda^2}{\chi^2} - \frac{\lambda^4}{\chi^4} \right) \frac{\lambda^2 \Delta'}{2\chi^4} \right] + \\ \left. + \hat{\gamma}_\alpha \rho_\alpha \left[-\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{2\chi^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{\chi^2} \ln \frac{\chi}{\lambda} - \frac{\lambda^2}{2\chi^2} + \frac{\lambda^2 \Delta'}{4\chi^2} I \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\rho^2 x^3 + \lambda^2 x) dx}{-\rho^2 x^2 + (\rho^2 + \chi^2 - \lambda^2) x + \lambda^2} \right] \right\}. \quad (15.14)$$

В пределе, когда $\lambda \rightarrow 0$, имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{(\rho^2 x^2 + \lambda^2) dx}{-\rho^2 x^2 + (\rho^2 + \chi^2 - \lambda^2)x + \lambda^2} = -1 - \frac{\rho^2 + \chi^2}{\rho^2} \ln \frac{\chi^2}{\rho^2 + \chi^2};$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x(\rho^2 x^2 + \lambda^2) dx}{-\rho^2 x^2 + (\rho^2 + \chi^2 - \lambda^2)x + \lambda^2} = -\frac{3}{2} - \frac{\chi^2}{\rho^2} -$$

$$-\frac{(\rho^2 + \chi^2)^2}{\rho^4} \ln \frac{\chi^2}{\rho^2 + \chi^2};$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I\Delta = 0.$$

Учитывая последние равенства, из формулы (15.14) находим выражение для перенормированной электронной собственно-энергетической части второго порядка в приближении малых значений «массы» фотона λ :

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_R^{(2)}(\rho) = & \frac{8\pi^3 e^2 i}{\hbar c} \left\{ (2i\chi - \hat{\gamma}_\alpha \rho_\alpha) \frac{\rho + \chi^2}{\rho^2} \ln \frac{\chi^2}{\rho^2 + \chi^2} + \right. \\ & + (i\chi - \hat{\gamma}_\alpha \rho_\alpha) \left(2 \ln \frac{\chi}{\lambda} - 1 \right) + \frac{\hat{\gamma}_\alpha \rho_\alpha}{2} \times \\ & \left. \times \left[1 + \frac{\chi^2}{\rho^2} + \frac{(\rho^2 + \chi^2)^2}{\rho^4} \ln \frac{\chi^2}{\rho^2 + \chi^2} \right] \right\}. \quad (15.15) \end{aligned}$$

В гл. VI будет показано, что член $\ln\left(\frac{\chi}{\lambda}\right)$, расходящийся при $\lambda \rightarrow 0$, можно исключить из теории специальным приемом, основанным на использовании инвариантности теории относительно калибровочного преобразования.

§ 16. ПЕРЕНОРМИРОВКА ФОТОННОЙ СОБСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Фотонная собственно-энергетическая функция второго порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = & -\text{Sp} \int \hat{\lambda}_\mu \hat{S}^F(\rho) \hat{\lambda}_\nu \hat{S}^F(\rho - k) d^4\rho = \\ = & \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 \text{Sp} \int \hat{\gamma}_\mu \frac{\hat{P} - \chi}{\rho^2 + \chi^2} \hat{\gamma}_\nu \frac{(\hat{P} - \hat{K}) - \chi}{(\rho - k)^2 + \chi^2} d^4\rho. \quad (16.1) \end{aligned}$$

Так как физические величины не зависят от продольной части функции (16.1), можно ее отбросить и интересоваться только ее поперечной частью. При этом можно формулу (16.1) переписать в виде

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \Pi^{(2)}(k). \quad (16.2)$$

Для нахождения $\Pi^{(2)}(k)$ возьмем шпур от левой и правой частей (16.2), тогда

$$\Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) = 3\Pi^{(2)}(k),$$

откуда

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(k) &= \frac{1}{3} \Pi_{\mu\mu}^{(2)}(k) = \frac{1}{3} \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 \text{Sp} \int \hat{\gamma}_\mu \frac{\hat{P} - \chi}{p^2 + \chi^2} \hat{\gamma}_\mu \times \\ &\times \frac{(\hat{P} - \hat{K}) - \chi}{(p-k)^2 + \chi^2} d^4 p = \frac{1}{3} \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 \text{Sp} \int \frac{4\chi^2 - 2\hat{P}(\hat{P} - \hat{K})}{(p^2 + \chi^2)[(p-k)^2 + \chi^2]} d^4 p. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Вычисляя $\text{Sp} \{4\chi^2 - 2\hat{P}(\hat{P} - \hat{K})\}$, преобразуем $\Pi^{(2)}(k)$ к виду

$$\Pi^{(2)}(k) = \frac{8}{3} \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 \int \frac{(p-k)^2 + \chi^2 + pk + \chi^2 - k^2}{(p^2 + \chi^2)[(p-k)^2 + \chi^2]} d^4 p, \quad (16.4)$$

или

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(k) &= \frac{8}{3} \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 \int \frac{d^4 p}{p^2 + \chi^2} + \frac{8}{3} \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 \times \\ &\times k_\sigma \int \frac{p_\sigma d^4 p}{(p^2 + \chi^2)[(p-k)^2 + \chi^2]} + \frac{8}{3} \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 \times \\ &\times (\chi^2 - k^2) \int \frac{d^4 p}{(p^2 + \chi^2)[(p-k)^2 + \chi^2]}. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Первый интеграл (16.5) расходится квадратично:

$$\int \frac{d^4 p}{p^2 + \chi^2} = -i\pi^2 \chi^2 \ln \frac{L^2}{\chi^2} + \pi^2 iL^2. \quad (16.6)$$

Используя формулу

$$\frac{1}{(p^2 + \chi^2)[(p-k)^2 + \chi^2]} = \int_0^1 \frac{dx}{[p^2 - 2pK_x + lx]^2},$$

где $K_x = kx$ и $l_x = k^2 x + \chi^2$, а также формулы (14.22) и (14.27), получим

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(p^2 - 2\rho K_x + l_x)^2} =$$

$$= -\pi^2 i \int_0^1 dx \left\{ -\ln \frac{L^2}{\chi^2} + 1 + \ln \left[1 + \frac{k^2}{\chi^2} x(1-x) \right] \right\}, \quad (16.7)$$

$$\int_0^1 dx \int \frac{\rho_\sigma d^4 p}{(p^2 - 2\rho K_x + l_x)^2} =$$

$$= -\pi^2 i k_\sigma \int_0^1 x dx \left\{ -\ln \frac{L^2}{\chi^2} + \frac{3}{2} + \ln \left[1 + \frac{k^2}{\chi^2} (1-x)x \right] \right\}.$$

Учитывая (16.6) и (16.7), преобразуем (16.5) к виду

$$\Pi^{(2)}(k) = \frac{8}{3} \left(\frac{e\pi}{\hbar c} \right)^2 i \left\{ L^2 - \chi^2 \ln \frac{L^2}{\chi^2} - \right.$$

$$\left. - (\chi^2 - k^2) \int_0^1 \left(-\ln \frac{L^2}{\chi^2} + 1 + \ln \left[1 + \frac{k^2}{\chi^2} x(1-x) \right] \right) dx - \right.$$

$$\left. - k^2 \int_0^1 x \left(-\ln \frac{L^2}{\chi^2} + \frac{3}{2} + \ln \left[1 + \frac{k^2}{\chi^2} x(1-x) \right] \right) dx \right\} \quad (16.8)$$

Перенормируем функцию $\Pi^{(2)}(k)$. Для этого вычтем из $\Pi^{(2)}(k)$ выражение $\Pi^{(2)}(0) + k^2 \left(\frac{\partial \Pi^{(2)}}{\partial k^2} \right)_0$, которое равно

$$\Pi^{(2)}(0) + k^2 \left(\frac{\partial \Pi^{(2)}(k)}{\partial k^2} \right)_0 = \frac{8e^2 \pi^2 i}{3(\hbar c)^2} \left\{ L^2 - \chi^2 - \frac{k^2}{2} \left(\ln \frac{L^2}{\chi^2} + \frac{1}{6} \right) \right\}. \quad (16.9)$$

Согласно равенствам (16.8) и (16.9) имеем перенормированную функцию

$$\Pi_R^{(2)}(k) = -\frac{8}{3} \left(\frac{e\pi}{\hbar c} \right)^2 i k^2 \left\{ \frac{\chi^2}{k^2} \int_0^1 \left[\ln \left(1 + \frac{k^2}{\chi^2} x(1-x) \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{k^2}{\chi^2} x(1-x) \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{k^2}{\chi^2} x(1-x) \right) dx \right\}. \quad (16.10)$$

Полагая здесь $x = \frac{1+\eta}{2}$, преобразуем $\Pi_R^{(2)}(k)$ к виду

$$\Pi_R^{(2)}(k) = i \left(\frac{e\pi}{\hbar c} \right)^2 k^2 \int_{-1}^1 (1-\eta^2) \ln \left[1 + \frac{1}{4} \frac{k^2}{\chi^2} (1-\eta^2) \right] d\eta. \quad (16.11)$$

Учитывая, что

$$\int_{-1}^1 \ln \left[1 + \frac{1}{4} \frac{k^2}{\chi^2} (1-\eta^2) \right] d\eta = -4(1-\theta \operatorname{ctg} \theta),$$

$$\int_{-1}^1 \eta^2 \ln \left[1 + \frac{1}{4} \frac{k^2}{\chi^2} (1-\eta^2) \right] d\eta = -\frac{4}{9} + \frac{4}{3} (1-\theta \operatorname{ctg} \theta) \operatorname{ctg}^2 \theta,$$

$$\sin^2 \theta = -\frac{k^2}{4\chi^2},$$

из формулы (16.11) получим окончательно

$$\Pi_R^{(2)}(k) = i \left(\frac{2\pi e}{\hbar c} \right)^2 k^2 \left\{ \frac{1}{9} + (1-\theta \operatorname{ctg} \theta) \frac{4\chi^2 - 2k^2}{3k^2} \right\}. \quad (16.12)$$

§ 17. ПЕРЕНОРМИРОВКА ВЕРШИННОЙ ЧАСТИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ВНЕШНИМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ЛИНИЯМИ

Вершинной части третьего порядка $\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}(p_1, p_2; q)$ соответствует диаграмма, изображенная на рис. 30, а. Пользуясь правилами Фейнмана, напишем

$$\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}(p_1, p_2; q) = \int \hat{\lambda}_\nu \hat{S}^F(p_2 - k) \hat{\lambda}_\mu \hat{S}^F(p_1 - k) \hat{\lambda}_\nu D^F(k) d^4 k =$$

$$= -\frac{4\pi e^3}{(\hbar c)^2} \int \hat{\gamma}_\nu \frac{1}{i\hat{\gamma}_\rho (p_2 - k)_\rho + \chi} \hat{\gamma}_\mu \frac{1}{i\hat{\gamma}_\sigma (p_1 - k)_\sigma + \chi} \hat{\gamma}_\nu \frac{1}{k^2} d^4 k. \quad (17.1)$$

Если p_1 и p_2 — волновые векторы свободного электрона, то $\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}(p_1, p_2; q)$ содержит инфракрасную расходимость. Поэтому при вычислении $\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}(p_1, p_2; q)$ функцию $D^f(k)$ определим так:

$$D_\lambda^f(k) = \frac{4\pi\hbar c}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{(k^2 + \lambda^2) i}, \quad (17.2)$$

где λ — «масса» фотона. Подставляя выражения для $\hat{S}^F(\rho)$ и $D^F(k)$ в формулу (17.1) и полагая $\hat{P} = i\rho_\mu \hat{\gamma}_\mu$, $\hat{Q} = iq_\mu \hat{\gamma}_\mu$ находим

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_\mu^{(3)}(\rho_1, \rho_2; q) = & \frac{4\pi e^3}{(\hbar c)^2} \{ \hat{\gamma}_\nu (\hat{P}_2 - \chi) \hat{\gamma}_\mu (\hat{P}_1 - \chi) \hat{\gamma}_\nu I - \\ & - i [\hat{\gamma}_\nu (\hat{P}_2 - \chi) \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_0 \hat{\gamma}_\nu + \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_0 \hat{\gamma}_\mu (\hat{P}_1 - \chi) \hat{\gamma}_\nu] I_\sigma - \\ & - \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_0 \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\tau \hat{\gamma}_\nu I_{\sigma\tau} \}, \end{aligned} \quad (17.3)$$

где

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^4 k}{(k^2 - 2\rho_1 k + \rho_1^2 + \chi^2) (k^2 - 2\rho_2 k + \rho_2^2 + \chi^2) (k^2 + \lambda^2)}, \\ I_\sigma &= \int \frac{k_\sigma d^4 k}{(k^2 - 2\rho_1 k + \rho_1^2 + \chi^2) (k^2 - 2\rho_2 k + \rho_2^2 + \chi^2) (k^2 + \lambda^2)}, \quad (17.3') \\ I_{\sigma\tau} &= \int \frac{k_\sigma k_\tau d^4 k}{(k^2 - 2\rho_1 k + \rho_1^2 + \chi^2) (k^2 - 2\rho_2 k + \rho_2^2 + \chi^2) (k^2 + \lambda^2)}. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что расходящимся при больших $|k|$ является только третий интеграл (причем он расходится логарифмически); в области малых $|k|$ при $\lambda = 0$ расходится только первый интеграл. Поэтому в I_σ и $I_{\sigma\tau}$ положим $\lambda = 0$.

Принимая во внимание, что $\rho_1^2 = \rho_2^2 = -\chi^2$, а также учитывая формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - 2\rho_1 k) (k^2 - 2\rho_2 k)} &= \int_0^1 \frac{dy}{(k^2 - 2\rho_y k)^2}, \\ \frac{1}{(k^2 - 2\rho_y k)^2 (k^2 + \lambda^2)} &= \int_0^1 \frac{2xdx}{(k^2 - 2\rho_x k + l_x)^3}, \end{aligned}$$

где $\rho_y = y\rho_1 + (1-y)\rho_2$, $\rho_x = x\rho_y$, $l_x = (1-x)\lambda^2$, преобразуем интегралы (17.3')

$$\left. \begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_0^1 2xdx \int \frac{d^4 k}{(k^2 - 2\rho_x k + l_x)^3}, \\ I_\sigma &= \int_0^1 dy \int_0^1 2xdx \int \frac{k_\sigma d^4 k}{(k^2 - 2\rho_x k)^3}, \\ I_{\sigma\tau} &= \int_0^1 dy \int_0^1 2xdx \int \frac{k_\sigma k_\tau d^4 k}{(k^2 - 2\rho_x k)^3}. \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

Интегрируя в формулах (17.4) по k , согласно § 14 получаем

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(k^2 - 2p_x k + l_x)^3} &= \frac{\pi^2 i}{2} \cdot \frac{1}{l_x - p_x^2}, \\ \int \frac{k_\sigma d^4 k}{(k^2 - 2p_x k)^3} &= -\frac{\pi^2 i}{2p_x^2} \cdot p_{\lambda\sigma}, \\ \int \frac{k_\sigma k_\tau d^4 k}{(k^2 - 2p_x k)^3} &= -\frac{\pi^2 i}{4} \delta_{\sigma\tau} \left[-\ln \frac{L^2}{p_x^2} + \frac{3}{2} \right] - \frac{\pi^2 i}{2p_x^2} p_{x\sigma} p_{x\tau}. \end{aligned} \right\} (17.5)$$

Учитывая это и интегрируя в формулах (17.4) по x , находим

$$\left. \begin{aligned} I &= -\pi^2 i \int_0^1 \frac{dy}{p_y^2} (\ln V \sqrt{-p_y^2} - \ln \lambda), \\ I_\sigma &= -\pi^2 i \int_0^1 \frac{p_{y\sigma} dy}{p_y^2}, \\ I_{\sigma\tau} &= -\frac{\pi^2 i}{4} \int_0^1 \left\{ \delta_{\sigma\tau} \left[-\ln \frac{L^2}{-p_y^2} + \frac{1}{2} \right] + 2 \frac{p_{y\sigma} p_{y\tau}}{p_y^2} \right\} dy. \end{aligned} \right\} (17.6)$$

Кроме этого, имеем

$$\begin{aligned} p_y^2 &= [y p_1 + (1-y) p_2]^2 = [p_1 + q(1-y)]^2 = -\chi^2 - q^2(1-y)y = \\ &= -\chi^2 [1 - 4y(1-y) \sin^2 \theta], \end{aligned} \quad (17.7)$$

где $q = p_2 - p_1$, $q^2 = -4\chi^2 \sin^2 \theta$. Вводя в выражение (17.7) новую переменную ξ по формуле

$$2y - 1 = \frac{\text{tg } \xi}{\text{tg } \theta},$$

получим

$$p_y^2 = -\chi^2 \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \xi}. \quad (17.8)$$

Аналогично находим

$$p_{y\sigma} = \frac{\text{tg } \xi}{2 \text{tg } \theta} (p_{1\sigma} - p_{2\sigma}) + \frac{1}{2} (p_{1\sigma} + p_{2\sigma}). \quad (17.9)$$

Используя формулы (17.8) и (17.9), преобразуем интеграл I к виду

$$I = \frac{2\pi^2 i}{\chi^2 \sin 2\theta} \left\{ - \int_0^\theta \ln \frac{\cos \xi}{\cos \theta} d\xi - \int_0^\theta \ln \frac{\lambda}{\chi} d\xi \right\}. \quad (17.9')$$

Проинтегрируем первый интеграл в формуле (17.9') по частям

$$\int_0^\theta \ln \frac{\cos \xi}{\cos \theta} d\xi = \int_0^\theta \xi \operatorname{tg} \xi d\xi, \quad (17.10)$$

тогда окончательно получим

$$I = - \frac{2\pi^2 i}{\lambda^2 \sin 2\theta} \left\{ \int_0^\theta \xi \operatorname{tg} \xi d\xi + \theta \ln \frac{\lambda}{\chi} \right\}. \quad (17.11)$$

Подставляя выражения (17.8) и (17.9) для p_ν^2 и $p_{\nu\sigma}$ в выражения для I_σ и $I_{\sigma\tau}$, преобразуем эти интегралы к виду

$$I_\sigma = \frac{\pi^2 i}{\chi^2} \frac{\theta}{\sin 2\theta} (p_{1\sigma} + p_{2\sigma}), \quad (17.12)$$

$$I_{\sigma\tau} = \frac{\pi^2 i}{2} \left\{ \delta_{\sigma\tau} \left(\ln \frac{L}{\chi} + \frac{1}{4} \right) + \frac{\theta (p_{1\sigma} + p_{2\sigma})(p_{1\tau} + p_{2\tau})}{2\chi^2 \sin 2\theta} + \left(\delta_{\sigma\tau} - \frac{q_\sigma q_\tau}{q^2} \right) (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) \right\}.$$

Для преобразований коэффициентов, стоящих перед интегралами I , I_σ , $I_{\sigma\tau}$, используем соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\mu &= 4, \quad \hat{\gamma}_\mu \hat{A} \hat{\gamma}_\mu = -2 \hat{A}, \quad \hat{\gamma}_\mu \hat{A} \hat{B} \hat{C} \hat{\gamma}_\mu = -2 \hat{C} \hat{B} \hat{A}, \\ \hat{\gamma}_\mu \hat{A} \hat{B} \hat{\gamma}_\mu &= 2 (\hat{A} \hat{B} + \hat{B} \hat{A}) = -4AB, \end{aligned} \quad (17.13)$$

где по индексу μ производится суммирование от 1 до 4. Формулы (17.13) получаются из соотношения $\hat{A} \hat{B} + \hat{B} \hat{A} = -2AB = -2A_\mu B_\mu$, которое в частном случае можно переписать так:

$$i \hat{\gamma}_\mu \hat{A} = -i \hat{A} \hat{\gamma}_\mu - 2A_\mu, \quad (17.14)$$

отсюда находим

$$\hat{\gamma}_\mu \hat{A} \hat{R} \hat{\gamma}_\mu = -\hat{A} \hat{\gamma}_\mu \hat{R} \hat{\gamma}_\mu + 2iA_\mu \hat{R} \hat{\gamma}_\mu. \quad (17.15)$$

Полагая теперь в формуле (17.15) последовательно $\hat{R} = 1$, \hat{B} , $\hat{B}\hat{C}$, получим соответственно вторую, третью и четвертую формулы (17.13), согласно которым выражение, стоящее в (17.3) перед I , можно переписать в виде

$$\hat{\gamma}_\nu (\hat{P}_2 - \chi) \hat{\gamma}_\mu (\hat{P}_1 - \chi) \hat{\gamma}_\nu = -2\hat{P}_1 \hat{\gamma}_\mu \hat{P}_2 - 2\chi (\hat{\gamma}_\mu \hat{P}_2 + \hat{P}_2 \hat{\gamma}_\mu) - 2\chi (\hat{\gamma}_\mu \hat{P}_1 + \hat{P}_1 \hat{\gamma}_\mu) - 2\chi^2 \hat{\gamma}_\mu. \quad (17.16)$$

Так как в матричных элементах функция $\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}$ умножается слева на \bar{v}_2 , а справа — на v_1 , то в формуле (17.16) матрицу \hat{P}_2 , стоящую слева, и матрицу \hat{P}_1 , стоящую справа, можно заменить на $-\chi$ (матрицу \hat{P}_1 , стоящую слева, заменяем на $\hat{P}_1 = \hat{P}_2 - \hat{Q}$, а матрицу \hat{P}_2 , стоящую справа, — на $\hat{P}_2 = \hat{P}_1 + \hat{Q}$). В итоге множитель перед I приобретает вид

$$\hat{\gamma}_\nu (\hat{P}_2 - \chi) \hat{\gamma}_\mu (\hat{P}_1 - \chi) \hat{\gamma}_\nu = 4\chi^2 \hat{\gamma}_\mu + 2\hat{Q} \hat{\gamma}_\mu \hat{Q}. \quad (17.17)$$

Умножая равенство $\hat{\gamma}_\mu \hat{Q} = -\hat{Q} \hat{\gamma}_\mu + 2iq_\mu$ слева на \hat{Q} , найдем

$$\hat{Q} \hat{\gamma}_\mu \hat{Q} = q^2 \hat{\gamma}_\mu + 2iq_\mu \hat{Q}. \quad (17.18)$$

Второе слагаемое в правой части (17.18) равно нулю, так как

$$\bar{v}_2 \hat{Q} v_1 = \bar{v}_2 (\hat{P}_2 - \hat{P}_1) v_1 = \bar{v}_2 (\chi - \chi) v_1 = 0.$$

Учитывая это, представим коэффициент, стоящий перед I так:

$$\hat{\gamma}_\nu (\hat{P}_2 - \chi) \hat{\gamma}_\mu (\hat{P}_1 - \chi) \hat{\gamma}_\nu = 4\chi^2 \hat{\gamma}_\mu + 2q^2 \hat{\gamma}_\mu. \quad (17.19)$$

Аналогично находим выражения для множителей, стоящих перед интегралами I_σ и $I_{\sigma\tau}$:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_\nu (\hat{P}_2 - \chi) \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\sigma \hat{\gamma}_\nu + \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\sigma \hat{\gamma}_\mu (\hat{P}_1 - \chi) \hat{\gamma}_\nu &= -4\chi \delta_{\sigma\mu} + \\ &+ 2(\hat{Q} \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\sigma - \hat{\gamma}_\sigma \hat{\gamma}_\mu \hat{Q}), \\ \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\sigma \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\tau \hat{\gamma}_\nu &= -2\hat{\gamma}_\tau \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\sigma. \end{aligned} \quad (17.20)$$

На основании формул (17.11), (17.12), (17.19) и (17.20)

получим следующее выражение для $\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}(p_1, p_2; q)$:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_\mu^{(3)}(p_1, p_2; q) = & \frac{4\pi e^3}{(\hbar c)^2} \{ (4\chi^2 + 2q^2) \hat{\gamma}_\mu I + |4i\chi(p_1 + p_2)_\mu + \\ & + 2(\hat{P}_1 + \hat{P}_2) \hat{\gamma}_\mu \hat{Q} - 2\hat{Q} \hat{\gamma}_\mu (\hat{P}_1 + \hat{P}_2) - \frac{1}{2} (\hat{P}_1 + \hat{P}_2) \hat{\gamma}_\mu \times \\ & \times (\hat{P}_1 + \hat{P}_2) | K_1 - 2\hat{Q} \hat{\gamma}_\mu \hat{Q} K_2 - 4\hat{\gamma}_\mu K_3 \}, \end{aligned} \quad (17.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K_1 = & \frac{\pi^2 i}{\chi^2} \cdot \frac{\theta}{\sin 2\theta}, \quad K_2 = -\frac{\pi^2 i}{2q^2} (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta), \\ K_3 = & \frac{\pi^2 i}{2} \left[1 - \theta \operatorname{ctg} \theta + \ln \frac{L}{\chi} - \frac{1}{4} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (17.22)$$

Учитывая уравнение Дирака $(i\hat{\gamma}_\alpha p_\alpha + \chi)c = 0$, перепишем равенство (17.21) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_\mu^{(3)}(p_1, p_2; q) = & 16i \frac{(\pi e)^3}{(\hbar c)^2} \hat{\gamma}_\mu \left\{ \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} \left(\ln \frac{\chi}{\lambda} - 1 \right) - \frac{2}{\operatorname{tg} 2\theta} \times \right. \\ & \times \int_0^\theta \xi \operatorname{tg} \xi d\xi - \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \theta + \frac{5}{8} - \frac{1}{4} \ln \frac{L^2}{\chi^2} \left. \right\} + \\ & + \frac{2(\pi e)^3}{i\chi(\hbar c)^2} (\hat{\gamma}_\mu \hat{Q} - \hat{Q} \hat{\gamma}_\mu) \frac{2\theta}{\sin 2\theta}, \end{aligned} \quad (17.23)$$

откуда получаем

$$\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}(p_1, p_2; 0) = \hat{\gamma}_\mu \frac{16i(\pi e)^3}{(\hbar c)^2} \left\{ -\frac{1}{4} \ln \frac{L^2}{\chi^2} - \frac{9}{8} + \ln \frac{\chi}{\lambda} \right\}. \quad (17.24)$$

Вычитая выражение (17.24) для $\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}(p_1, p_2; 0)$ из $\hat{\Lambda}_\mu^{(3)}(p_1, p_2; q)$, найдем перенормированную вершинную функцию третьего порядка:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_{\mu R}^{(3)}(p_1, p_2; q) = & \frac{16i(\pi e)^3}{(\hbar c)^2} \hat{\gamma}_\mu \left\{ \left(\frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} - 1 \right) \left(\ln \frac{\chi}{\lambda} - 1 \right) - \right. \\ & - \frac{2}{\operatorname{tg} 2\theta} \int_0^\theta \xi \operatorname{tg} \xi d\xi - \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \theta \left. \right\} + \frac{2(\pi e)^3}{i\chi(\hbar c)^2} (\hat{\gamma}_\mu \hat{Q} - \hat{Q} \hat{\gamma}_\mu) \frac{2\theta}{\sin 2\theta}. \end{aligned} \quad (17.25)$$

ТЕОРЕМЫ О СВЯЗИ СРЕДНИХ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН С МАТРИЦЕЙ РАССЕЯНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 1. СВЯЗЬ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН С S-МАТРИЦЕЙ

Теорема 1. Если для заданного вектора Ψ_k можно найти такой вектор Ψ_{0k} , являющийся собственным вектором невозмущенного оператора \hat{H}_0 , чтобы выполнялось равенство

$$\Psi_k = \hat{S}(t, -\infty) \Psi_{0k}, \quad (1.1)$$

где \hat{S} — матрица рассеяния, порожденная оператором возмущения $\hat{H}_t = \hat{H} - \hat{H}_0$, то среднее значение физической величины в состоянии Ψ_k равно

$$\langle L \rangle_k = \lim_{t \rightarrow 0} (\Psi_{0k}, \hat{S}^+ \hat{T} \hat{L}(t) \hat{S} \Psi_{0k}), \quad (1.2)$$

где \hat{T} — хронологический оператор; \hat{L} — оператор рассматриваемой физической величины в представлении взаимодействия (т. е. в представлении «возмущения»).

Доказательство. Среднее значение физической величины в момент времени $t=0$ определяется формулой

$$\langle L \rangle_k = (\Psi_k, \hat{L} \Psi_k)_{t=0}, \quad (1.3)$$

где Ψ_k — вектор состояния системы в представлении взаимодействия; \hat{L} — оператор рассматриваемой физической величины в том же представлении. Можно написать соотношение

$$\Psi_k = \hat{S}(t, +\infty) \Psi'_{0k}, \quad (1.4)$$

где Ψ'_{0k} — вектор состояния системы в момент времени $t = +\infty$. Согласно выражениям (1.1) и (1.4) формула (1.3) приобретает вид

$$\langle L \rangle_k = \lim_{t \rightarrow 0} (\Psi'_{0k}, \hat{S}(\infty, t) \hat{L}(t) \hat{S}(t, -\infty) \Psi_{0k}) \quad (1.5)$$

Вводя хронологический оператор \hat{T} , перепишем эту формулу в виде

$$\langle L \rangle_k = \lim_{t \rightarrow 0} (\Psi_{0k}, \hat{T} \hat{L}(t) \hat{S} \Psi_{0k}). \quad (1.6)$$

Из равенств (1.1) и (1.4) вытекает, что

$$\Psi'_{0k} = \hat{S} \Psi_{0k}. \quad (1.7)$$

Подставляя отсюда Ψ'_{0k} в формулу (1.6), находим

$$\langle L \rangle_k = \lim_{t \rightarrow 0} (\hat{S} \Psi_{0k}, \hat{T} \hat{L}(t) \hat{S} \Psi_{0k}). \quad (1.8)$$

Если ввести матрицу \hat{S}^+ , сопряженную с матрицей \hat{S} , то из (1.8) получим формулу (1.2). Теорема доказана.

Замечание. Из закона сохранения энергии и импульса вытекает, что адиабатическое выключение возмущения должно привести систему в состояние с теми же энергией и импульсом, какие система имела до адиабатического включения возмущения. Таким образом, если Ψ_0 — невырожденный энергетический уровень, то можно написать

$$\Psi'_0 = c \Psi_0 \quad |c| = 1. \quad (1.9)$$

Соотношение (1.9) выполняется для вакуумного и одночастичного состояния, а также для основного состояния связанной системы частиц. Во всех этих случаях согласно формулам (1.6) и (1.9) среднее абсолютное значение физической величины определяется так:

$$|\langle L \rangle| = \lim_{t \rightarrow 0} |(\Psi_0, \hat{T} \hat{L}(t) \hat{S} \Psi_0)|. \quad (1.10)$$

§ 2. СВЯЗЬ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ С S-МАТРИЦЕЙ

Из гл. I следует, что при $t=0$ векторы состояний и операторы в представлении Гейзенберга и в представлении взаимодействия совпадают:

$$\begin{aligned} \Psi^H &= \Psi'(0) = \hat{S}(0, t) \Psi'(t), \\ \hat{L}_{(0)}^H &= \hat{L}'(0) = \hat{S}(0, t) \hat{L}'(t) \hat{S}^{-1}(0, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Полагая (2.1) $t = -\infty$, находим

$$\Psi^H = \hat{S}(0, -\infty) \Psi^I(-\infty). \quad (2.2)$$

Так как Ψ^H совпадает с независимым от времени множителем в векторе состояния в представлении Шредингера, то можно написать

$$(\hat{H}_0 + \hat{H}_i - E)|_{t=0} \hat{S}(0, -\infty) \Psi^I(-\infty) = 0, \quad (2.3)$$

где \hat{H}_i — оператор энергии взаимодействия; E — энергия системы. Выясним смысл вектора $\Psi^I(-\infty)$. Для этого устремим постоянную связи в \hat{H}_i к нулю. В этом случае $\hat{H}_i \rightarrow 0$, $\hat{S}(0, -\infty) \rightarrow 1$, $E \rightarrow E_0$, а уравнение (2.3) непрерывным образом преобразуется в уравнение

$$\hat{H}_0(0) \Psi^I(-\infty) = E_0 \Psi^I(-\infty), \quad (2.4)$$

откуда следует: если Ψ^H — собственный вектор оператора \hat{H} , то $\Psi_0 = \Psi^I(-\infty)$ является собственным вектором оператора \hat{H}_0 . Аналогично доказывается, что $\Psi^I(\infty)$ также является собственным вектором оператора \hat{H}_0 , вообще говоря, отличным от $\Psi^I(-\infty)$. Необходимо заметить, что не имеет силы обратное заключение. Именно, если $\Psi^I(-\infty)$ является собственным вектором оператора \hat{H}_0 , то из выражения (2.2) вовсе не следует, что Ψ^H будет собственным вектором оператора \hat{H} . Такое утверждение будет иметь силу только тогда, когда $\Psi^I(-\infty)$ является вектором невырожденного состояния. В противном случае вектор $\hat{S}(0, -\infty) \Psi_{k_0}^I(-\infty)$ может оказаться суперпозицией собственных векторов оператора \hat{H} . Только при специальном выборе векторов $\tilde{\Psi}_k^I(-\infty)$ каждому вектору $\tilde{\Psi}_k^I(-\infty)$ будет соответствовать определенный вектор $\Psi_k^H = \hat{S}(0, -\infty) \tilde{\Psi}_k^I(-\infty)$, являющийся собственным вектором оператора \hat{H} . Вектор $\tilde{\Psi}_k^I(-\infty)$ является линейной комбинацией

$$\tilde{\Psi}_k^I(-\infty) = \sum_m a_{km} \Psi_m^I(-\infty), \quad (2.5)$$

¹ Это утверждение строго доказали Гелл-Манн и Лоу [4].

где a_{km} — коэффициенты, определяемые из законов сохранения физических величин (или из условия минимума энергии системы), а $\{\Psi'_m\}$ — первоначальная система векторов состояния, соответствующих собственному значению E_0 оператора \hat{H}_0 . Вместо нахождения векторов $\tilde{\Psi}'_k(-\infty)$ можно попытаться расщепить вырожденные состояния оператора \hat{H}_0 путем добавления к нему оператора $\lambda \hat{H}_d$ (при этом после всех вычислений необходимо устремить λ к нулю).

Теорема 2. Если можно собственный вектор Ψ_{0l} оператора \hat{H}_0 , соответствующий уровню энергии E_0 , выбрать так, чтобы $\Psi_l = \hat{S}(0, -\infty) \Psi_{0l}$ был собственным вектором оператора $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_d$, то собственное значение оператора энергии \hat{H} определяется формулой

$$E_l = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Psi_{0l}, \hat{T} \hat{H}(t) \hat{S} \Psi_{0l})}{(\Psi_{0l}, \hat{S} \Psi_{0l})} \quad (2.6)$$

или

$$E_l = \lim_{t \rightarrow 0} (\Psi_{0l}, \hat{S}^+ \hat{T} \hat{H}(t) \hat{S} \Psi_{0l}), \quad (2.7)$$

где \hat{S} — матрица рассеяния, порожденная оператором энергии взаимодействия \hat{H}_d , взятым в представлении взаимодействия.

Доказательство. Уравнение (2.3) можно переписать так:

$$\hat{H}(0) \hat{S}(0, -\infty) \Psi_{0l} = E_l \hat{S}(0, -\infty) \Psi_{0l}. \quad (2.8)$$

Умножая его скалярно на вектор $\hat{S}^+(\infty, 0) \Psi_{0l}$, получим

$$(\Psi_{0l}, \hat{S}(\infty, 0) \hat{H}(0) \hat{S}(0, -\infty) \Psi_{0l}) = E_l (\Psi_{0l}, \hat{S} \Psi_{0l}), \quad (2.9)$$

откуда следует формула (2.6).

В частном случае, когда Ψ_{0l} описывает невырожденное состояние, из формулы (2.6) находим

$$|E_l| = \lim_{t \rightarrow 0} |(\Psi_{0l}, \hat{T} \hat{H}(t) \hat{S} \Psi_{0l})|. \quad (2.10)$$

Умножая уравнение (2.8) скалярно на вектор $\hat{S}^+(\infty, 0) \times \times \hat{S} \Psi_{0l}$, получим

$$(\Psi_{0l}, \hat{S}^+ \hat{S}(\infty, 0) \hat{H}(0) \hat{S}(0, -\infty) \Psi_{0l}) = E_l (\Psi_{0l}, \hat{S}^+ \hat{S} \Psi_{0l}), \quad (2.11)$$

откуда, согласно условию унитарности

$$\hat{S} \hat{S}^+ = \hat{S}^+ \hat{S} = 1, \quad (2.12)$$

находим формулу (2.7), что полностью доказывает теорему.

§ 3. АНОМАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ЭЛЕКТРОНА

Теория Дирака дает для магнитного момента электрона величину

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}, \quad (3.1)$$

где m — масса электрона; e — заряд электрона.

Шупп, Пидд и Крейн [1, 2] экспериментально измерили магнитный момент электрона, который оказался равным

$$\mu = (1,0011609 \pm 0,0000024) \mu_0.$$

Учитывая взаимодействие электрона с вакуумом электромагнитного поля, Швингер [15] вычислил μ . Его результат

$$\mu = \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) \mu_0, \quad \text{где } \alpha \approx \frac{1}{137}.$$

Аналогичные вычисления Sommerfeld [16] дали для μ следующую величину:

$$\mu = \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) \mu_0 = 1,0011596 \mu_0,$$

что находится в прекрасном согласии с результатом эксперимента Шуппа, Пидда и Крейна.

Вычислим добавку к магнитному моменту электрона, обусловленную взаимодействием электрона с электромагнитным вакуумом [17]. Для этой цели используем теорему 2. Согласно формуле (2.6), во втором приближении теории возмущений для энергии электрона в слабом постоянном однородном магнитном поле можно написать выражение

$$E(H_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{Z_1} \left[(\Psi_0, \hat{H} \Psi_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 (\Psi_0, \hat{T} \hat{H}(t) \hat{H}_i(t_1) \Psi_0) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 (\Psi_0, \hat{T} \hat{H}(t) \hat{H}_i(t_1) \hat{H}_i(t_2) \Psi_0) \right], \quad (3.2)$$

где Ψ_0 — вектор состояния электрона при выключенном взаимодействии,

$$Z_1 = (\Psi_0, \Psi_0) - \frac{i}{\hbar} \left(\Psi_0, \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \hat{H}_i(t_1) \Psi_0 \right) - \\ - \frac{1}{2\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 (\Psi_0, \hat{T} \hat{H}_i(t_1) \hat{H}_i(t_2) \Psi_0), \quad (3.3)$$

а $\hat{H}_i(t)$ — оператор энергии взаимодействия, не зависящий от напряженности внешнего магнитного поля.

Оператор энергии взаимодействия $\hat{H}_i(t)$ ради упрощения выкладок будем брать в виде

$$\hat{H}_i(t) = -e \int dV \hat{N} [\hat{\psi}(x) \hat{A}_\mu(x) \hat{\gamma}_\mu \hat{\psi}(x)], \quad (3.4)$$

хотя, строго говоря, вычисления следовало бы проводить с оператором

$$\hat{H}_{\alpha i}(t) = -e \int dV \int d^4 y \int d^4 z f_\alpha(x, y, z) \hat{N} [\hat{\psi}(z) \hat{A}_\mu(y) \hat{\gamma}_\mu \hat{\psi}(z)],$$

а затем перейти к пределу, когда $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

Второй член в выражении для Z_1 равен нулю, так как вектор состояния Ψ_0 ортогонален вектору состояния $\hat{H}_i(t) \Psi_0$. Третий член в (3.3) является собственно-энергетической электронной функцией. Так как Ψ_0 — вектор состояния свободного электрона, то после перенормировки третий член в выражении (3.3) обратится в нуль. В итоге получим, что

$$Z_1 = (\Psi_0, \Psi_0). \quad (3.5)$$

Согласно формуле (3.2) магнитный момент электрона равен

$$\mu = - \frac{\partial}{\partial H_z} E(H_z) \Big|_{H_z=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{Z_1} \left[(\Psi_0, \hat{M}(t) \Psi_0) - \right. \\ \left. - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 (\Psi_0, \hat{T} \hat{M}(t) \hat{H}_i(t_1) \Psi_0) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 (\Psi_0, \hat{T} \hat{M}(t) \hat{H}_i(t_1) \hat{H}_i(t_2) \Psi_0) \right] \Big|_{H_z=0}, \quad (3.6)$$

где H_z — напряженность магнитного (внешнего) поля, а

$$\hat{M} = -e \int y dV \hat{N} (\hat{\psi} \hat{\gamma}_1 \hat{\psi}) \quad (3.7)$$

— оператор магнитного момента. Оператор \hat{M} получается в виде коэффициента при $-H_z$ в операторе энергии взаимодействия:

$$\hat{H}_I^{(e)} = -e \int dV \hat{N} (\hat{\psi} \hat{\gamma}_\mu A_\mu^{(e)} \hat{\psi}) \quad (3.8)$$

после подстановки в него

$$A_x^{(e)} = -yH_z, \quad A_y^{(e)} = A_z^{(e)} = A_4^{(e)} = 0. \quad (3.9)$$

Рассмотрим первый член в правой части формулы (3.6):

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{Z_1} \lim_{t \rightarrow 0} (\Psi_0, \hat{M} \Psi_0) = \\ &= -\frac{1}{Z_1} \lim_{t \rightarrow 0} (\Psi_0, e \int y dV \hat{N} (\hat{\psi} \hat{\gamma}_1 \hat{\psi}) \Psi_0). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Выражение m_1 вычисляется при $H_z = 0$. Поэтому в формуле (3.10) можно подставить разложение операторов электронно-позитронного поля по плоским волнам:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=1}^4 \int d\mathbf{p} \hat{A}_{\mathbf{p}s} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} c_{\mathbf{p}s}, \\ \hat{\bar{\psi}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=1}^4 \int d\mathbf{p} \hat{A}_{\mathbf{p}s}^+ e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} \bar{c}_{\mathbf{p}s}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\hat{A}_{\mathbf{p}s}$ и $\hat{A}_{\mathbf{p}s}^+$ — соответственно операторы уничтожения и рождения электрона, если $s=1, 2$. В результате получаем¹

$$\begin{aligned} m_1 &= -\frac{e}{8\pi^3 Z_1} \int y dV \int d\mathbf{q}_0 \int d\mathbf{p}_0 D(\mathbf{q}_0) \times \\ &\times D(\mathbf{p}_0) \bar{c}_{\mathbf{q}_0 s_0} \hat{\gamma}_1 c_{\mathbf{p}_0 s_0} \exp[-i(\mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0)\mathbf{r}], \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $D(\mathbf{p}_0)$ — амплитуда разложения вектора состояния по векторам состояний свободного электрона. Используя

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ikx} dx = i \frac{d}{dk} \delta(k), \quad (3.13)$$

¹ При этом полагаем, что $\Psi_0 = \int d\mathbf{p}_0 D(\mathbf{p}_0) \hat{A}_{\mathbf{p}_0 s_0}^+ \Psi_v$.

из выражения (3.12) находим

$$m_1 = \frac{ie}{Z_1} \int d\mathbf{q}_0 \int d\mathbf{p}_0 D(\mathbf{q}_0) D(\mathbf{p}_0) \bar{c}_{\mathbf{q}_0 s_0} \hat{\gamma}_1 c_{\mathbf{p}_0 s_0} \frac{\partial}{\partial p_{0z}} \delta^3(\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}_0). \quad (3.14)$$

Далее, используя свойство $\delta(x)$

$$\int_a^b dx f(x) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x') = -\frac{\partial f(x')}{\partial x'} \quad (a < x' < b), \quad (3.15)$$

преобразуем формулу (3.14) к виду

$$m_1 = -\frac{ie}{Z_1} \int d\mathbf{q}_0 |D(\mathbf{q}_0)|^2 \bar{c}_{\mathbf{q}_0 s_0} \hat{\gamma}_1 \frac{\partial}{\partial q_{0z}} c_{\mathbf{q}_0 s_0} - \frac{ie}{Z_1} \int d\mathbf{q}_0 D(\mathbf{q}_0) \frac{\partial D(\mathbf{q}_0)}{\partial q_{0z}} \bar{c}_{\mathbf{q}_0 s_0} \hat{\gamma}_1 c_{\mathbf{q}_0 s_0}. \quad (3.16)$$

В формулу (3.16) входят матрицы Дирака

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

и решение уравнения Дирака для свободного электрона¹

$$c_{k1} = \begin{pmatrix} K \\ 0 \\ Z \\ X + iY \end{pmatrix}_{k1}, \quad c_{k2} = \begin{pmatrix} 0 \\ K \\ X - iY \\ -Z \end{pmatrix},$$

$$c_{k3} = \begin{pmatrix} -Z \\ -X - iY \\ K \\ 0 \end{pmatrix}_{k3}, \quad c_{k4} = \begin{pmatrix} -X + iY \\ Z \\ 0 \\ K \end{pmatrix}_{k4}, \quad (3.18)$$

¹ Это делается в интересах упрощения вычислений. В квантовой теории поля нет случаев, когда использование представлений алгебры Дирака или Кеммера было бы необходимым. — *Прим. ред.*

где

$$K = (\sqrt{p^2 + \chi^2} + \chi) \bar{K}, \quad X = p_{(1)} \bar{K}, \quad Y = p_{(2)} \bar{K}, \quad (3.19)$$

$$Z = p_{(3)} \bar{K}, \quad \bar{K} = [(\sqrt{p^2 + \chi^2} + \chi)^2 + p^2]^{1/2}, \quad \chi = \frac{mc}{\hbar}.$$

В случае покоящегося электрона формулы (3.18) и (3.19) приобретают вид

$$c_{01} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_{02} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_{03} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_{04} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Согласно формулам (3.17) и (3.18) имеем

$$\bar{c}_{p1} \hat{\gamma}_1 c_{p1} = c_{p1}^+ \hat{\alpha}_1 c_{p1} = 2KX. \quad (3.21)$$

Выражение $\bar{c}_{p1} \hat{\gamma}_1 c_{p1}$ для покоящегося электрона равно нулю. Пусть функция $[D(p_0)]^2$ является дельтообразной функцией $\delta_\alpha^3(p_0 - p) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{(p_0 - p)^2 + \alpha^2}$, обладающей свойством

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta_\alpha^3(p_0 - p) = \delta^3(p_0 - p); \quad (3.22)$$

производная от дельтообразной функции равна

$$\frac{\partial \delta_\alpha^3(p_0 - p)}{\partial p_{0y}} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\alpha (p_0 - p)_y}{[(p_0 - p)^2 + \alpha^2]^2}. \quad (3.23)$$

Отсюда видно, что эта производная равна нулю в точке $p = p_0$:

$$\left. \frac{\partial \delta_\alpha^3(p_0 - p)}{\partial p_{0y}} \right|_{p=p_0} = 0. \quad (3.24)$$

Используя формулу (3.21) и свойство производной от дельтообразной функции, приходим к выводу, что второй интеграл в правой части формулы (3.16) равен нулю. Поэтому эта формула получает вид

$$m_1 = -\frac{ie}{Z_1} \int dq_0 |D(q_0)|^2 \bar{c}_{q_0 s_0} \hat{\gamma}_1 \frac{\partial}{\partial q_{02}} c_{q_0 s_0}. \quad (3.25)$$

Для свободного электрона, обладающего импульсом \mathbf{p} , можно написать

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} [D(\mathbf{q}_0)]^2 = \delta^3(\mathbf{q}_0 - \mathbf{p}). \quad (3.26)$$

Согласно этому из формулы (3.25) имеем

$$m_1 = -ie \bar{c}_{p1} \hat{\gamma}_1 \frac{\partial c_{p1}}{\partial p_{(2)}}. \quad (3.27)$$

Подставляя сюда выражения (3.18) и (3.17) для c_{p1} , $\hat{\gamma}_1$ и $\hat{\gamma}_2$, получаем

$$m_1 = \frac{e\hbar}{2mc}. \quad (3.28)$$

Таким образом, первый член в правой части формулы (3.6) дает дираковский магнитный момент электрона; второй член равен нулю ввиду ортогональности вектора состояния Ψ_0 вектору состояния $\hat{T} \hat{M}(t) \hat{H}_i(t_1) \Psi_0$.

Рассмотрим третий член формулы (3.6)

$$m_3 = \frac{1}{2\hbar^2 Z_1} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 (\Psi_0, \hat{T} \hat{M}(t) \hat{H}_i(t_1) \hat{H}_i(t_2) \Psi_0). \quad (3.29)$$

Используя выражения для оператора $\hat{M}(t)$ и для оператора энергии взаимодействия \hat{H}_i

$$\hat{H}_i = -e \int dV \hat{N} (\hat{\psi} \hat{\gamma}_\mu \hat{A}_\mu \hat{\psi})_t, \quad (3.30)$$

а также применяя теорему Вика, преобразуем формулу (3.29) к виду

$$\begin{aligned} m_3 = & \frac{e^3}{\hbar^2 Z_1} \lim_{t \rightarrow 0} \int y dV \int d^4x_1 \int d^4x_2 \times \\ & \times \left\{ (\Psi_0, \hat{N} (\hat{\psi} \hat{\gamma}_1 \hat{\psi})_t \overbrace{(\hat{\psi} \hat{\gamma}_\mu \hat{A}_\mu \hat{\psi})_{t_1}}^{\text{---}} \overbrace{(\hat{\psi} \hat{\gamma}_\nu \hat{A}_\nu \hat{\psi})_{t_2}}^{\text{---}} \Psi_0) + \right. \\ & + (\Psi_0, \hat{N} (\hat{\psi} \hat{\gamma}_1 \hat{\psi})_t \overbrace{(\hat{\psi} \hat{\gamma}_\mu \hat{A}_\mu \hat{\psi})_{t_1}}^{\text{---}} \overbrace{(\hat{\psi} \hat{\gamma}_\nu \hat{A}_\nu \hat{\psi})_{t_2}}^{\text{---}} \Psi_0) + \\ & + (\Psi_0, \hat{N} (\hat{\psi} \hat{\gamma}_1 \hat{\psi})_t \overbrace{(\hat{\psi} \hat{\gamma}_\mu \hat{A}_\mu \hat{\psi})_{t_1}}^{\text{---}} \overbrace{(\hat{\psi} \hat{\gamma}_\nu \hat{A}_\nu \hat{\psi})_{t_2}}^{\text{---}} \Psi_0) + \end{aligned}$$

$$+ \left(\Psi_0 \hat{N} \left(\widehat{\hat{\psi}} \hat{\gamma}_1 \widehat{\hat{\psi}} \right)_t \left(\widehat{\hat{\psi}} \hat{\gamma}_\mu \widehat{\hat{A}}_\mu \widehat{\hat{\psi}} \right)_{t_1} \left(\widehat{\hat{\psi}} \hat{\gamma}_\nu \widehat{A}_\nu \widehat{\hat{\psi}} \right)_{t_2} \Psi_0 \right) \}. \quad (3.31)$$

Легко показать, что первый, второй и четвертый члены формулы (3.31) не вносят вклада в магнитный момент электрона. Третий член в (3.31) после подстановки в него выражений для разложения операторов $\widehat{\hat{\psi}}$ и $\hat{\psi}$ из (3.11) и выражений для сверток из формул

$$\widehat{\hat{\psi}}(x) \widehat{\hat{\psi}}(x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{-i\hat{\gamma}_\alpha p_\alpha + \chi}{p^2 + \chi^2} e^{ip(x-x')} d^4p, \quad (3.32)$$

$$\widehat{\hat{A}}_\mu(x) \widehat{\hat{A}}_\nu(x') = \frac{4\pi\hbar c}{(2\pi)^4 i} \int e^{ik(x-x')} \left(\delta_{\mu\nu} + D \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{d^4k}{k^2} \quad (3.33)$$

(где D — произвольная постоянная) и использования формул (3.13) и (3.15) получает вид

$$m_3^{(3)} = \frac{2e^2c}{\hbar(2\pi)^3} c_{0s} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left\{ \hat{\gamma}_\mu \int d^4k \frac{-i\hat{\gamma}_\alpha (p-k)_\alpha + \chi}{(p-k)^2 + \chi^2} \times \right. \\ \left. \times \left(\delta_{\mu\nu} + D \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{\hat{\gamma}_1}{k^2} \cdot \frac{-i\hat{\gamma}_\beta (q-k)_\beta + \chi}{(q-k)^2 + \chi^2} \hat{\gamma}_\nu c_{qs} \right\} \Big|_{p=q=0}. \quad (3.34)$$

В круглых скобках правой части формулы (3.33) стоит произвольный член $Dk_\mu k_\nu/k^2$, появление которого обязательно инвариантности уравнений электродинамики относительно калибровочного преобразования

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial x_\mu},$$

где $\tilde{\chi}$ — произвольная скалярная величина. Можно таким образом подобрать постоянную D , входящую в этот член, чтобы ликвидировать так называемую инфракрасную расходимость, т. е. расходимость интегралов при малых значениях четырехмерного импульса [17].

Так как p и q — импульсы свободного электрона, то в выражении (3.34) перенормированные части при $p=q$

обращаются в нуль. Поэтому формулу (3.34) можно переписать в виде

$$m_3^{(3)} = \frac{2e^3 c}{\hbar(2\pi)^3} [\bar{c}_{0s} \hat{I} c_{0s} + D \bar{c}_{0s} \hat{E} c_{0s}], \quad (3.35)$$

где

$$\hat{I} = \hat{\gamma}_\mu \int d^4 k \frac{-i \hat{\gamma}_\alpha (\rho - k)_\alpha + \chi}{(\rho - k)^2 + \chi^2} \cdot \frac{\hat{\gamma}_1}{k^2} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial q_y} \left[\frac{-i \hat{\gamma}_\beta (q - k)_\beta + \chi}{(q - k)^2 + \chi^2} \right] \hat{\gamma}_\mu \Big|_{q=p=0}, \quad (3.36)$$

$$\hat{E} = \hat{\gamma}_\mu \int d^4 k \frac{-i \hat{\gamma}_\alpha (\rho - k)_\alpha + \chi}{(\rho - k)^2 + \chi^2} \cdot \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \times \\ \times \hat{\gamma}_1 \frac{\partial}{\partial q_y} \left[\frac{-i \hat{\gamma}_\beta (q - k)_\beta + \chi}{(q - k)^2 + \chi^2} \right] \hat{\gamma}_\nu \Big|_{p=q=0}. \quad (3.37)$$

Операторы \hat{I} и \hat{E} можно записать так:

$$\hat{I} = \hat{X} J + \hat{Y}_\alpha J_\alpha + \hat{Z} \bar{J} + \hat{V}_\alpha \bar{J}_\alpha + \hat{W}_{\alpha\beta} \bar{J}_{\alpha\beta}, \quad (3.38) \\ \hat{E} = \hat{A}^{\mu\nu} i^{\mu\nu} + \hat{B}_\alpha^{\mu\nu} i_\alpha^{\mu\nu} + \hat{C}^{\mu\nu} \bar{i}^{\mu\nu} + \\ + \hat{D}_\alpha^{\mu\nu} \bar{i}_\alpha^{\mu\nu} + \hat{G}_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \bar{i}_{\alpha\beta}^{\mu\nu},$$

где

$$\hat{X} = -i\chi \hat{\gamma}_\mu (\hat{\gamma}_4 + 1) \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_\mu, \quad \hat{Y}_\alpha = \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\alpha \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_\mu, \\ \hat{Z} = 2\chi^2 \hat{\gamma}_\mu (\hat{\gamma}_4 + 1) \hat{\gamma}_1 (\hat{\gamma}_4 + 1) \hat{\gamma}_\mu, \\ \hat{W}_{\alpha\beta} = -2 \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\alpha \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_\beta \hat{\gamma}_\mu, \\ \hat{V}_\alpha = 2i\chi \hat{\gamma}_\mu [\hat{\gamma}_\alpha \hat{\gamma}_1 (\hat{\gamma}_4 + 1) + (\hat{\gamma}_4 + 1) \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_\alpha] \hat{\gamma}_\mu, \quad (3.39) \\ \hat{A}^{\mu\nu} = -i\chi \hat{\gamma}_\mu (\hat{\gamma}_4 + 1) \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_\nu, \quad \hat{B}^{\mu\nu} = \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\alpha \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_\nu, \\ \hat{C}^{\mu\nu} = 2\chi^2 \hat{\gamma}_\mu (\hat{\gamma}_4 + 1) \hat{\gamma}_1 (\hat{\gamma}_4 + 1) \hat{\gamma}_\nu, \\ \hat{G}_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = -2 \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\alpha \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_\beta \hat{\gamma}_\nu, \\ \hat{D}_\alpha^{\mu\nu} = 2i\chi \hat{\gamma}_\mu [\hat{\gamma}_\alpha \hat{\gamma}_1 (\hat{\gamma}_4 + 1) + (\hat{\gamma}_4 + 1) \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_\alpha] \hat{\gamma}_\nu;$$

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{d^4 k}{k^2 l^2}, & J_\alpha &= \int \frac{k_\alpha d^4 k}{k^2 l^2}, \\
\bar{J} &= \int \frac{k_y d^4 k}{k^2 l^3}, & \bar{J}_\alpha &= \int \frac{k_y k_\alpha d^4 k}{k^2 l^3}, \\
\bar{J}_{\alpha\beta} &= \int \frac{k_y k_\alpha k_\beta d^4 k}{k^2 l^3}, & i^{\mu\nu} &= \int \frac{k_\mu k_\nu d^4 k}{k^4 l^2}, \\
i_a^{\mu\nu} &= \int \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha d^4 k}{k^4 l^2}, & \bar{i}^{\mu\nu} &= \int \frac{k_\mu k_\nu k_y d^4 k}{k^4 l^3}, \\
\bar{i}_a^{\mu\nu} &= \int \frac{k_y k_\mu k_\nu k_\alpha d^4 k}{k^4 l^3}, & \bar{i}_{\alpha\beta}^{\mu\nu} &= \int \frac{k_y k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta d^4 k}{k^4 l^3}, \\
l &= k^2 - 2i\chi k_4.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Приведенные выше интегралы вычисляются элементарно. В результате получим

$$\hat{I} = \frac{\pi^2}{\chi} \left(2 \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \int_0^1 \frac{dx}{x} + \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_1 \right) \hat{\gamma}_4, \tag{3.41}$$

$$\hat{E} = \frac{\pi^2}{\chi} \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \left(-2 \int_0^1 \frac{dx}{x} + \hat{\gamma}_4 \right).$$

Подставляя эти выражения для операторов \hat{I} и \hat{E} в формулу (3.35) и учитывая, что

$$\bar{c}_{0s} \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_4 c_{0s} = \bar{c}_{0s} \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 c_{0s} = -1, \tag{3.42}$$

находим

$$m_3^{(3)} = \frac{e^3 \pi^2}{\hbar c (2\pi)^3 \chi} \left[(D - 2) \int_0^1 \frac{dx}{x} + 4 - D \right], \tag{3.43}$$

Полагая, что $D = 2$, отсюда имеем

$$m_3^{(3)} = \frac{\alpha e \hbar}{4\pi m c}, \tag{3.44}$$

где $\alpha = \frac{1}{137}$.

Следовательно, магнитный момент электрона в принятом нами приближении равен

$$\mu = \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \frac{e\hbar}{2mc}. \tag{3.45}$$

Это результат, найденный Швингером.

§ 4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФАРРИ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Существует обширная область квантовой теории поля, в которой решаются задачи для систем частиц, находящихся в связанных состояниях. Для решения подобных задач Фарри в 1951 г. предложил представление взаимодействия специального вида [4]. Фарри исходил из уравнения Шредингера в представлении взаимодействия:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^I}{\partial t} = \hat{H}_i^I(t) \Psi^I(t), \quad (4.1)$$

где

$$\hat{H}_i^I = \hat{H}_i^{(0, I)} + \hat{H}_i^{(e, I)}; \quad (4.2)$$

$$\hat{H}_i^{(0, I)} = -e \hat{N} [\hat{\psi} \hat{\gamma}_\mu \hat{\psi} \hat{A}_\mu] = -\frac{e}{2} \left[\hat{\psi}(x) \hat{\gamma}_\mu, \hat{\psi}(x) \right] \hat{A}_\mu(x) \quad (4.3)$$

— оператор энергии взаимодействия с квантованным электромагнитным полем;

$$\hat{H}_i^{(e, I)} = -e \hat{N} \left[\hat{\psi} \hat{\gamma}_\mu \hat{\psi} A_\mu^e(x) \right] \quad (4.3')$$

— оператор энергии взаимодействия с внешним полем, описываемым вектором-потенциалом $A_\mu^e(x)$.

Произведем унитарное преобразование вектора состояния

$$\Psi^F(t) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \hat{H}_i^{(e, I)} t \right\} \Psi^I(t). \quad (4.4)$$

В это выражение входит не весь оператор \hat{H}_i^I , а только его часть $\hat{H}_i^{(e, I)}$. Из формулы (4.4) следует унитарное преобразование от оператора в представлении взаимодействия к оператору в представлении Фарри

$$\hat{L}^F = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \hat{H}_i^{(e, I)} t \right\} \hat{L}^I \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_i^{(e, I)} t \right\}. \quad (4.5)$$

Дифференцируя равенство (4.4) по времени и используя соотношение (4.5), получаем уравнение для вектора состояния $\Psi^F(t)$:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^F}{\partial t} = \hat{H}_i^F \Psi^F, \quad (4.6)$$

где

$$\hat{H}_i^F = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \hat{H}_i^{(e, I)} t \right\} \hat{H}_i^{(0, I)} \exp \left\{ - \frac{i}{\hbar} \hat{H}_i^{(e, I)} t \right\}. \quad (4.7)$$

Таким образом, вектор состояния системы в представлении Фарри ψ^F удовлетворяет уравнению Шредингера (4.6) с оператором энергии взаимодействия \hat{H}_i^0 в представлении Фарри. Дифференцируя соотношение (4.5) по времени, находим уравнение для оператора в представлении Фарри:

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial \hat{L}^F}{\partial t} &= [\hat{H}_i^{(e, F)}, \hat{L}^F] + \\ &+ \frac{\hbar}{i} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \hat{H}_i^{(e, I)} t \right\} \frac{\partial \hat{L}^I}{\partial t} \exp \left\{ - \frac{i}{\hbar} \hat{H}_i^{(e, I)} t \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

При выводе формулы (4.8) учтено, что

$$\hat{H}_i^{(e, I)} = \hat{H}_i^{(e, F)}. \quad (4.9)$$

В соотношение (4.8) входит не весь оператор энергии взаимодействия \hat{H}_i^F , а только его часть $\hat{H}_i^{(e, F)}$.

Используя формулы (4.8) и (4.5), можно показать, что операторы поля в представлении Фарри $\hat{\psi}^F$ и \hat{A}_μ^F подчиняются следующим уравнениям:

$$\left(\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \chi \right) \hat{\psi}^F(x) = \frac{ie}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu A_\mu^{(e)}(x) \hat{\psi}^F(x), \quad (4.10)$$

$$\hat{A}_\mu^F(x) = \hat{A}_\mu^I(x), \quad \square^2 \hat{A}_\mu^F(x) = 0. \quad (4.11)$$

Таким образом, оператор поля $\hat{\psi}^F$ удовлетворяет уравнению Дирака, написанному для случая, когда существует внешнее электромагнитное поле $A_\mu^e(x)$. Из формул (4.6) и (4.7) следует, что операторы поля $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^F$ целесообразно разлагать по полной системе собственных функций уравнения Дирака с внешним потенциалом. Действительно, собственные векторы оператора $\hat{H}_0 + \hat{H}_i^e$ являются векторами состояний системы (невзаимодействующих) частиц, находящихся в одночастичных состояниях, описываемых уравнением Дирака с внешним потенциалом.

Пусть $\{\varphi_\beta(x)\}$ — система решений уравнения (4.10), записанного в неоператорном смысле, где индекс β обозначает

набор квантовых чисел (как одночастичных связанных состояний, так и одночастичных состояний рассеяния). Разложим оператор $\hat{\psi}^F(x)$ в ряд Фурье по функциям $\{\varphi_\beta(x)\}$:

$$\hat{\psi}^F(x) = \sum_{\beta} \varphi_{\beta}(x) \hat{A}_{\beta}, \quad (4.12)$$

где знак Σ означает суммирование по дискретным одночастичным состояниям и интегрирование по одночастичным состояниям рассеяния. Функции $\varphi_{\beta}(x)$ можно представить так:

$$\varphi_{\beta}(x) = \varphi_{\beta}(r) e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\beta} t}, \quad (4.13)$$

где E_{β} — энергия частицы в состоянии β . Разложение в ряд Фурье, даваемое формулой (4.12), является законным только в том случае, когда существует энергетическая щель между собственными значениями положительной и отрицательной энергий. Это условие выполняется в случае достаточно слабого внешнего поля.

В случае сильных полей может наступить перекрытие полос с положительной и отрицательной энергиями, а это нарушит стабильность вакуумного состояния Φ_0^F спонтанным рождением электронно-позитронных пар.

В теории возмущений решение уравнения (4.6) имеет вид

$$\Psi^F(t_2) = \hat{S}^F(t_2, t_1) \Psi^F(t_1), \quad (4.14)$$

где

$$\hat{S}^F(t_2, t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar c}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \dots \int_{t_1}^{t_2} d^4 x_1 d^4 x_2 \dots d^4 x_n \times \\ \times \{\hat{T} [\hat{\Gamma}_i^F(x_1) \hat{\Gamma}_i^F(x_2) \dots \hat{\Gamma}_i^F(x_n)]\}, \quad (4.15)$$

$$\hat{\Gamma}_i^F(x) = -\frac{e}{2} \left[\hat{\psi}^F(x) \hat{\gamma}_{\mu}, \hat{\psi}^F(x) \right] \hat{A}_{\mu}(x). \quad (4.16)$$

Пусть Φ_a^F — вектор состояния системы, состоящей из одного фермиона, находящегося в связанном состоянии a ; E_a — энергия этого состояния, т. е. собственное значение энергии, соответствующее собственной функции φ_a уравнения Дирака, в оператор энергии которого включено внешнее поле. В результате взаимодействия фермиона с вакуумом электромагнитного поля его энергия изменяется на величину

ΔE_a , определяемую согласно § 1 гл. V скалярным произведением вида $(\Phi_a^F, \hat{S}^F \Phi_a^F)$.

Для проведения количественных расчетов необходимо воспользоваться диаграммной техникой. Однако в отличие от обычного представления взаимодействия в данном случае свертка фермионных операторов определяется формулой

$$\hat{S}_e^F(x_2, x_1) = (\Phi_v^F, \hat{T} [\hat{\psi}^F(x_2) \hat{\psi}^F(x_1)] \Phi_v^F), \quad (4.17)$$

где Φ_v^F — вектор вакуумного состояния в представлении Фарри.

Если ввести функцию включения (знаковая функция)

$$\varepsilon(x_{(0)} - y_{(0)}) = \begin{cases} +1 & \text{при } x_{(0)} > y_{(0)}, \\ -1 & \text{при } x_{(0)} < y_{(0)}, \end{cases} \quad (4.18)$$

то можно написать

$$\begin{aligned} \hat{T} [\hat{\psi}^F(x) \hat{\psi}^F(y)] &= \frac{1}{2} [\hat{\psi}^F(x), \hat{\psi}^F(y)]_+ + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon(x_{(0)} - y_{(0)}) [\hat{\psi}^F(x), \hat{\psi}^F(y)]_+. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Действуя на обе части формулы (4.19) оператором

$$\hat{D}_x \equiv \left[\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu A_\mu^e(x) + \chi \right],$$

получим

$$\begin{aligned} \hat{D}_x \hat{T} [\hat{\psi}^F(x) \hat{\psi}^F(y)] &= \hat{T} [\hat{D}_x \hat{\psi}^F(x) \hat{\psi}^F(y)] - \\ &- \frac{i}{2} \hat{\gamma}_0 \frac{\partial}{\partial x_{(0)}} \varepsilon(x_{(0)} - y_{(0)}) [\hat{\psi}^F(x), \hat{\psi}^F(y)]_+. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Для знаковой функции имеет место следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial x_{(0)}} \varepsilon(x_{(0)} - y_{(0)}) = 2\delta(x_{(0)} - y_{(0)}). \quad (4.21)$$

Кроме того, если $x_{(0)} = y_{(0)}$, то для операторов $\hat{\psi}^F(x)$ и $\hat{\psi}^F(x)$ можно написать антиперестановочные соотношения

$$[\hat{\psi}^F(x), \hat{\psi}^F(y)]_+ = i\beta\delta^3(x - y). \quad (4.22)$$

Учитывая равенства (4.21), (4.22) и уравнение (4.10) выражение (4.20) преобразуем к виду

$$\left[\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu A_\mu^e(x) + \chi \right] \hat{T} [\hat{\psi}^F(x) \hat{\bar{\psi}}^F(y)] = \delta^4(x-y). \quad (4.23)$$

Беря среднее значение по вакуумному состоянию Φ_v^F от правой и левой частей формулы (4.23), согласно определению (4.17) получим

$$\left[\hat{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} \hat{\gamma}_\mu A_\mu^e(x) + \chi \right] \hat{S}_e^F(x, y) = \delta^4(x-y). \quad (4.24)$$

Умножим обе части формулы (4.24) на $\exp(-ip_1 x + ip_2 y)$ и проинтегрируем по всему пространству x и y . В результате правая часть преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int d^4x \int d^4y \delta^4(x-y) e^{-ip_1 x + ip_2 y} &= \int d^4x e^{-i(p_1 - p_2)x} = \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2), \end{aligned} \quad (4.25)$$

а второй член левой части запишется в форме

$$\begin{aligned} \int d^4x \int d^4y A_\mu^e(x) \hat{S}_e^F(x, y) e^{-ip_1 x + ip_2 y} &= \\ = \int d^4y e^{ip_2 y} \left\{ \int d^4p' a_\mu^e(p_1 - p') \hat{S}_e^F(p', y) \right\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

В формуле (4.26) использовано равенство [18]

$$\int d^4x e^{-ip_1 x} A_\mu^e(x) \hat{S}_e^F(x, y) = \int d^4p' a_\mu^e(p_1 - p') \hat{S}_e^F(p', y), \quad (4.27)$$

где $a_\mu^e(p)$ — Фурье-образ функции $A_\mu^e(x)$, а $\hat{S}_e^F(p', y)$ — Фурье-образ функции $\hat{S}_e^F(x, y)$ по переменной x . Вводя Фурье-образ функции $\hat{S}_e^F(x, y)$ по обоим переменным:

$$\hat{S}_e^F(p', p_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4y e^{ip_2 y} \hat{S}_e^F(p', y), \quad (4.28)$$

перепишем равенство (4.26) ак:

$$\begin{aligned} \int d^4x \int d^4y A_\mu^e(x) \hat{S}_e^F(x, y) e^{-ip_1 x + ip_2 y} &= \\ = (2\pi)^4 \int d^4p' a_\mu^e(p_1 - p') \hat{S}_e^F(p', p_2). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Используя определение Фурье-образа функции $\hat{S}_e^F(x, y)$:

$$\hat{S}_e^F(p_1, p_2) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4x \int d^4y e^{-ip_1 x + ip_2 y} \hat{S}_e^F(x, y), \quad (4.30)$$

преобразуем первый член в левой части (4.24). Интегрируя по частям, получаем

$$\hat{\gamma}_\mu \int d^4x \int d^4y \frac{\partial}{\partial x_\mu} \hat{S}_e^F(x, y) e^{-i p_1 x + i p_2 y} = i \hat{\gamma}_\mu p_{1\mu} \times \\ \times \int d^4x \int d^4y \hat{S}_e^F(x, y) e^{-i p_1 x + i p_2 y} = i \hat{\gamma}_\mu p_{1\mu} (2\pi)^8 \hat{S}_e^F(p_1, p_2). \quad (4.31)$$

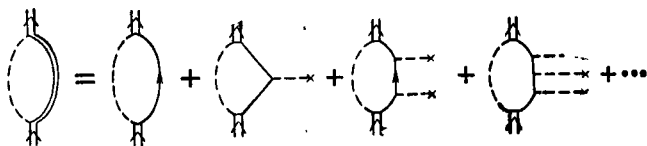


Рис. 65

Учитывая выражения (4.25), (4.29), (4.30) и (4.31), уравнение (4.24) представим в импульсном пространстве:

$$\hat{S}_e^F(p_1, p_2) = \delta^4(p_1 - p_2) \hat{S}^F(p_1) + \frac{ie}{\hbar c} \hat{S}^F(p_1) \times \\ \times \int d^4p' \hat{\gamma}_\mu a_\mu^e(p_1 - p') \hat{S}_e^F(p', p_2), \quad (4.32)$$

где

$$\hat{S}^F(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{i \hat{\gamma}_\mu + \chi}$$

— Фурье-образ обычной свертки.

Итак, получено интегральное уравнение для определения Фурье-компоненты свертки фермиевских операторов в представлении Фарри. Решая это уравнение методом итераций, можно второй член в формуле (4.32) разложить в ряд по степеням константы связи e . Отсюда следует, что линии связанного электрона, которую будем обозначать двумя близко расположенными параллельными линиями, соответствует бесконечно большое число графов. Первый граф представляет собой обыкновенную электронную линию, описываемую первым членом в правой части (4.32); $(n + 1)$ -й граф представляет обыкновенную электронную линию, из n точек которой выходит n внешних линий, описывающих внешнее электромагнитное поле. Отсюда следует, что собственно-энергетическая часть фермиона изображается графом Фейнмана, эквивалентным бесконечной сумме обычных графов Фейнмана (рис. 65), отличающихся друг от друга числом линий внешнего электромагнитного поля, исходящих из точек фермионной линии.

Любое расходящееся при $K \rightarrow \infty$ выражение, содержащее в качестве множителей под интегралом функции S_c^F , в представлении Фарри, при помощи формулы (4.32) можно выразить через выражения, расходящиеся при $K \rightarrow \infty$ и содержащие только функции \hat{S}^F в представлении взаимодействия, и конечные выражения с функциями S_c^F в представлении Фарри. Полученные таким образом выражения, расходящиеся при $K \rightarrow \infty$, можно перенормировать, применяя методику, изложенную в гл. V.

§ 5. РАДИАЦИОННОЕ СМЕЩЕНИЕ АТОМНЫХ УРОВНЕЙ

Используя уравнение Дирака, можно вычислить энергетические уровни атома водорода. Оказывается, что в теории Дирака уровни $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ для атома водорода совпадают. Однако в 1947 г. Лэмб и Резерфорд [19] экспериментально установили, что между $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ -уровнями существует энергетическая щель, равная $1057,77 \pm 0,1$ Мгц. Теоретически эту щель можно объяснить следующим образом. Электрон атома водорода взаимодействует с вакуумом электромагнитного поля. Это взаимодействие приводит к сдвигу уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$. Разность сдвигов и дает наблюдаемую энергетическую щель.

Сдвиги уровней можно подсчитать по формуле (V.1.22)

$$\Delta E = \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} M_{ff}^{(n)}, \quad (5.1)$$

где $M_{ff}^{(n)}$ — матричный элемент, определяемый из соотношения

$$(\Phi_f, \hat{S}_n \Phi_i) = M_{fi}^{(n)} \delta(E_i - E_f). \quad (5.2)$$

В формуле (5.2) векторы состояний Φ_f и Φ_i взяты в представлении Фарри, \hat{S}_n — $(n+1)$ -член матрицы рассеяния, порожденной оператором взаимодействия, взятом также в представлении Фарри.

Учитывая, что $M_{ff}^{(1)} = 0$, и ограничиваясь вторым приближением теории возмущений, из формулы (5.1) получим приближенное значение сдвига атомного уровня

$$\Delta E \approx \frac{i}{2\pi} M_{ff}^{(2)}. \quad (5.3)$$

Чтобы найти $M_{ij}^{(2)}$, вычислим выражение $(\Phi_f, \hat{S}_2 \Phi_i)$.
Имеем

$$(\Phi_f, \hat{S}_2 \Phi_i) = -\frac{1}{2\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 (\Phi_f, \hat{T} \hat{H}_i^F(t_1) \hat{H}_i^F(t_2) \Phi_i), \quad (5.4)$$

или

$$(\Phi_f, \hat{S}_2 \Phi_i) = -\frac{1}{2\hbar^2 c^2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 (\Phi_f, \hat{T} \hat{\Gamma}_i^F(x_1) \hat{\Gamma}_i^F(x_2) \Phi_i). \quad (5.5)$$

Так же, как и в § 4, оператор плотности энергии возьмем в виде

$$\hat{\Gamma}_i^F(x) = -\frac{e}{2} [\hat{\psi}^F(x) \hat{A}(x), \hat{\psi}^F(x)], \quad (5.6)$$

где

$$\hat{A}(x) = \hat{\gamma}_\mu \hat{A}_\mu(x).$$

Операторы $\hat{\psi}^F$ и $\hat{\bar{\psi}}^F$ можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям уравнения Дирака для атома водорода. Это уравнение, как известно, имеет вид

$$\hat{H}\varphi = E\varphi, \quad (5.7)$$

где

$$\hat{H} = -\frac{e^2}{r} + mc^2 \hat{\beta} - i\hbar c \hat{\alpha} \nabla \quad (5.8)$$

— оператор энергий, а $\varphi_\beta(\mathbf{r})$ — волновая функция электрона в атоме водорода; β — набор квантовых чисел.

Искомое разложение имеет вид (см. формулы (11.4.26) и (4.12))

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^F &= \sum_{\beta} \varphi_{\beta}(\mathbf{r}) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_{\beta} t\right] \hat{A}_{\beta}, \\ \hat{\bar{\psi}}^F &= \sum_{\beta} \bar{\varphi}_{\beta}(\mathbf{r}) \exp\left[+\frac{i}{\hbar} E_{\beta} t\right] \hat{A}_{\beta}^{\dagger}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Подставляя выражение (5.6) для $\hat{\Gamma}_i^F$ в формулу (5.5), применяя теорему Вика и учитывая формулы (5.9), получаем

$$\begin{aligned}
 (\Phi_f, \hat{S}_2 \Phi_i) = & -\frac{e^2}{c^2 \hbar^2} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \{ \bar{\varphi}_0(x_1) \hat{\gamma}_\mu \hat{S}_e^F(x_1, x_2) \times \\
 & \times \hat{\gamma}_\mu \varphi_0(x_2) D^F(x_1 - x_2) + \bar{\varphi}_0(x_1) \hat{\gamma}_\mu \varphi_0(x_1) D^F(x_1 - x_2) \times \\
 & \times \text{Sp}[\hat{\gamma}_\mu \hat{S}_e^F(x_1, x_2)] \}. \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

Согласно уравнению (4.32) фермионную свертку можно представить в виде

$$\hat{S}_e^F(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{-i\hat{\gamma}_\alpha p_\alpha + \chi}{p^2 + \chi^2} e^{ip(x_1 - x_2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \quad (5.11)$$

где Δ_k — добавки к обычной свертке, пропорциональные e^k .
Для фотонной свертки имеем

$$D^f(x_1 - x_2) \equiv \overset{\text{-----}}{\hat{A}}_\mu(x_1) \hat{A}_\nu(x_2) = \frac{4\pi\hbar c \delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k}{k^2} e^{ik(x_1 - x_2)}. \quad (5.12)$$

Подставляя в формулу (5.10) выражения (5.11) и (5.12) для свертки и интегрируя по t_1 и t_2 , во втором приближении относительно e находим

$$\begin{aligned}
 (\Phi_f, \hat{S}_2 \Phi_i) = & \frac{2ie^2 c}{\hbar (2\pi)^6} \int d^4 p \int d^4 k \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \bar{\varphi}_0(\mathbf{r}_1) \times \\
 & \times \hat{\gamma}_\mu \frac{-i\hat{\gamma}_\alpha p_\alpha + \chi}{p^2 + \chi^2} \hat{\gamma}_\mu \varphi'_0(\mathbf{r}_2) \frac{1}{k^2} \exp[i\mathbf{r}_1(\mathbf{p} + \mathbf{k}) - \\
 & - i\mathbf{r}_2(\mathbf{p} + \mathbf{k})] \delta(p_{(0)} + k_{(0)} + p_{0(0)}) \delta(p_{(0)} + k_{(0)} + p'_{0(0)}), \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

где было положено: $p_{0(0)} = \frac{E_0}{\hbar c}$, $p'_{0(0)} = \frac{E'_0}{\hbar c}$ и учтено, что $(\Phi_v, \Phi_v) = 1$. Разложим спиноры $\varphi_0(\mathbf{r})$ в ряд Фурье. Заметим, что в задаче об атоме водорода спинор $\varphi(\mathbf{r})$ имеет следующую структуру [20]:

1) первый тип решения $\left(l = j - \frac{1}{2}\right)$

$$\varphi = \begin{pmatrix} R(r) \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_{l-1/2, m-1/2} \\ R(r) \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_{l-1/2, m+1/2} \\ iS(r) \sqrt{\frac{j+1-m}{2(j+1)}} Y_{l+1/2, m-1/2} \\ -iS(r) \sqrt{\frac{j+1+m}{2(j+1)}} Y_{l+1/2, m+1/2} \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

где функции $R(r)$ и $S(r)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar c} \left(E - mc^2 + \frac{e^2}{r} \right) R(r) &= S'(r) + \left(j + \frac{3}{2} \right) \frac{S(r)}{r}, \\ \frac{1}{\hbar c} \left(E + mc^2 + \frac{e^2}{r} \right) S(r) &= -R'(r) + \left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{R(r)}{r}; \end{aligned} \quad (5.15)$$

2) второй тип решения $\left(l = j + \frac{1}{2}\right)$

$$\varphi = \begin{pmatrix} R(r) \sqrt{\frac{j+1-m}{2(j+1)}} Y_{l+1/2, m-1/2} \\ R(r) \sqrt{\frac{j+1+m}{2(j+1)}} Y_{l+1/2, m+1/2} \\ -iS(r) \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_{l-1/2, m-1/2} \\ iS(r) \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_{l-1/2, m+1/2} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

где функции $R(r)$ и $S(r)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar c} \left(E - mc^2 + \frac{e^2}{r} \right) R(r) &= -S'(r) + \left(j - \frac{1}{2} \right) \frac{S(r)}{r}, \\ \frac{1}{\hbar c} \left(E + mc^2 + \frac{e^2}{r} \right) S(r) &= R'(r) + \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{R(r)}{r}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

В формулах (5.14) и (5.16) $Y_{\lambda\mu}$ — известные сферические функции, причем $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$.

Для основного состояния атома водорода $2s_{1/2}$ ($l=0$, $j=1/2$) формула (5.14) при $m=1/2$ принимает вид

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} R(r)Y_{00} \\ 0 \\ iS(r)Y_{10}/\sqrt{3} \\ -iS(r)Y_{11}\sqrt{2/3} \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Из уравнений (5.15) следует, что

$$S(r) \sim \frac{1}{2 \cdot 137} R(r). \quad (5.19)$$

Учитывая это, для состояния $2s_{1/2}$ из формулы (5.18) получаем приближенное выражение

$$\Phi_0(r) = Y_{00} R(r) c_1, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Для состояния атома водорода $2p_{1/2}$ ($l=1$, $j=1/2$) из формулы (5.16) при $m=1/2$ получаем

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} R(r)Y_{10}/\sqrt{3} \\ R(r)Y_{11}\sqrt{2/3} \\ -iS(r)Y_{00} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Учитывая, что в данном случае $R \ll S$, отсюда для Φ_0 находим приближенное выражение

$$\Phi_0 = \frac{Y_{00}}{i} S(r) c_3, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Проведем сначала вычисление энергетического уровня $2s_{1/2}$. Для этого в формуле (5.20) функцию $R(r)$ разложим в интеграл Фурье

$$R(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dp e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} R(\mathbf{p}), \quad (5.23)$$

где $R(p)$ — Фурье-образ функции $R(r)$. Подставляя полученное выражение для $\Phi_0(r)$ из (5.20) и (5.23) в формулу (5.13) и производя интегрирование по r_1 и r_2 , находим

$$(\Phi_f, \hat{S}_2, \Phi_i) = -\frac{2e^2 c^2}{(2\pi)^2} |Y_{00}|^2 \int dp |R(p)|^2 \times \\ \times \left\{ c_1^+ \hat{\beta} \hat{\gamma}_\mu \int d^4 k \frac{i\hat{\gamma}_\alpha (k+p)_\alpha + \chi}{(k+p)^2 + \chi^2} \cdot \frac{1}{k^2} \hat{\gamma}_\mu c_1 \right\} \delta(E_0 - E'_0). \quad (5.24)$$

Отсюда следует, что $M_{if}^{(2)}$ равно:

$$M_{if}^{(2)} = \frac{-2e^2 c^2}{(2\pi)^2} |Y_{00}|^2 \int dp |R(p)|^2 \times \\ \times \left\{ c_1^+ \hat{\beta} \hat{\gamma}_\mu \int d^4 k \frac{i\hat{\gamma}_\alpha (k+p)_\alpha + \chi}{(k+p)^2 + \chi^2} \cdot \frac{1}{k^2} \hat{\gamma}_\mu c_1 \right\}. \quad (5.25)$$

Подставляя выражение (5.25) для $M_{if}^{(2)}$ в формулу (5.3), определим сдвиг уровня $2s_{1/2}$

$$\Delta E_s = \frac{-2ie^2 c^2}{(2\pi)^3} |Y_{00}|^2 \int dp |R(p)|^2 \times \\ \times \left\{ c_1^+ \hat{\beta} \hat{\gamma}_\mu \int d^4 k \frac{i\hat{\gamma}_\alpha (k+p)_\alpha + \chi}{(k+p)^2 + \chi^2} \cdot \frac{1}{k^2} \hat{\gamma}_\mu c_1 \right\}. \quad (5.26)$$

Аналогично для сдвига уровня $2p_{1/2}$ получаем выражение

$$\Delta E_p = -\frac{2ie^2 c^2}{(2\pi)^3} |Y_{00}|^2 \int dp |S(p)|^2 \times \\ \times \left\{ c_3^+ \hat{\beta} \hat{\gamma}_\mu \int d^4 k \frac{i\hat{\gamma}_\alpha (k+p)_\alpha + \chi}{(k+p)^2 + \chi^2} \cdot \frac{1}{k^2} \hat{\gamma}_\mu c_3 \right\}, \quad (5.27)$$

где $S(p)$ — Фурье-образ функции $S(r)$.

Производя в формулах (5.26) и (5.27) перенормировку массы и заряда, а также устранение инфракрасной расходимости методом, рассмотренным в § 3, после элементарных вычислений для радиационных смещений энергетических уровней в атоме водорода получим следующие значения:

$$\Delta E(2s_{1/2}) = 1034 \text{ Мгц},$$

$$\Delta E(2p_{1/2}) = -17 \text{ Мгц}.$$

Отсюда видно, что ввиду взаимодействия электрона с электромагнитным вакуумом уровень $2s_{1/2}$ лежит выше уровня $2p_{1/2}$ на 1051 Мгц.

Учитывая целый ряд поправок, для разности между энергетическими уровнями $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода можно получить значение $(1057,70 \pm 0,15)$ Мгц. Экспериментальное значение для этой величины, полученное в 1947 г. [19], равнялось $(1057,77 \pm 0,1)$ Мгц.

В новом эксперименте [21] для лэмбовского сдвига найдено значение

$$\Delta E = (1058,07 \pm 0,1) \text{ Мгц.}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. А х и е з е р, В. Б. Б е р е с т е ц к и й. Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
2. Н. Н. Б о г о л ю б о в, Д. В. Ш и р к о в. Введение в теорию квантовых полей. М., Гостехиздат, 1957.
3. А. А. С о к о л о в, Д. Д. И в а н е н к о. Квантовая теория поля. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.
4. С. Ш в е б е р. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., ИЛ, 1963.
5. В. Г а й т л е р. Квантовая теория излучения. М., ГИТТЛ, 1940.
6. М. А. М а р к о в. Гипероны и К-мезоны. М., Физматгиз, 1958.
7. А. Н. К у ш н и р е н к о. Информационное письмо ИПМ АН УССР от 8. VII. 1966 г.; препринт ИПМ АН УССР № 1, 1969.
8. А. Н. К у ш н и р е н к о. Изв. вузов. Физика, 3, 19 (1965).
9. P. J o r d a n, E. P. W i g n e r, Zs. f. Phys. 47, 631, (1928).
10. П. А. М. Д и р а к. Принципы квантовой механики. М., Физматгиз, 1960.
11. S. G u p t a, Proc. Phys. Soc., A63, 681 (1950).
12. K. B l e u l e r. Helv. Phys. Acta. 23, 567 (1950).
13. И. И. Г о л ь д м а н и В. Д. К р а в ч е н к о в. Сборник задач по квантовой механике. М., Гостехиздат, 1957.
14. Я. М и к у с и н с к и й и Р. С и к о р с к и й. Элементарная теория обобщенных функций. М., ИЛ, 1959.
15. J. S w i n g e r. Phys. Rev. 75, 1912 (1949).
16. С. М. S o m m e r f i e l d. Phys. Rev. 107, 328 (1957).
17. А. Н. К у ш н и р е н к о. Доповіді АН УССР, 7, 884 (1965).
18. И. С н е д д о н. Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1955.
19. W. E. L a m b, R. C. R e t h e r f o r d. Phys. Rev. 72, 241 (1947).
20. Э. Ф е р м и. Квантовая механика. М., «Мир», 1965.
21. Phys. Rev. Lett. 17, № 2, 69 (1966).

	Стр.
Предисловие.	3
Введение	4
Глава I. Общие сведения	
§ 1. Постановка задачи в квантовой теории поля.	13
§ 2. Комплексные поля. Плотность электрического тока.	24
§ 3. Представления уравнения Шредингера.	29
§ 4. Инвариантность по отношению к преобразованиям Лоренца.	34
Глава II. Квантовая теория изолированных (свободных) полей	
§ 1. Квантовая теория шредингеровского поля.	38
§ 2. Квантовая теория свободного нейтрального скалярного (псевдоскалярного) мезонного поля.	48
§ 3. Квантовая теория заряженного скалярного мезонного поля.	53
§ 4. Квантовая теория свободного электронно-позитронного поля.	58
§ 5. Квантовая теория свободного электромагнитного поля	70
§ 6. Перестановочные соотношения для различных моментов времени.	82
Глава III. Квантовая теория взаимодействующих полей (метод возмущений)	
§ 1. Трансформационные свойства операторов Дирака.	93
§ 2. Взаимодействия между полями.	102
§ 3. Взаимодействие с электромагнитным полем.	106
§ 4. Теория возмущений. S-матрица.	110
§ 5. Теоремы Вика.	116
§ 6. Графическая интерпретация отдельных членов S-матрицы. Графы Фейнмана.	119
§ 7. Свертки операторов. Среднее по вакууму от хронологического произведения двух операторов.	123
§ 8. Представление матричных элементов в импульсном пространстве.	135
§ 9. Замкнутые электронные линии с нечетным числом вершин	141
§ 10. Вероятности различных процессов.	143
§ 11. Вероятности процессов рассеяния внешними полями и частицами в связанных состояниях.	150
§ 12. Диаграммы Фейнмана в теории псевдоскалярного мезонного поля.	153

Глава IV. Примеры расчета процессов взаимодействия электронов с фотонами

§ 1. Спонтанное (самопроизвольное) излучение фотона.	155
§ 2. Комптоновское рассеяние.	157
§ 3. Рождение пары электрон—позитрон.	170
§ 4. Аннигиляция пары электрон—позитрон.	181

Глава V. Устранение расходимостей из S-матрицы перенормировкой массы и заряда

§ 1. Общий анализ графов Фейнмана.	185
§ 2. Расходимости, связанные с предельным переходом в неприводимых диаграммах.	195
§ 3. Идея метода устранения расходимостей.	199
§ 4. Перенормировка массы и заряда электрона.	202
§ 5. Тожество Уорда и его применение для устранения расходимостей.	210
§ 6. Полные функции Грина (функции распространения).	215
§ 7. Интегральные уравнения для функций распространения	220
§ 8. Параметрическое представление функций распространения.	228
§ 9. Соотношение между экспериментальным и затравочным зарядами электрона.	234
§ 10. Перенормировка функций распространения и вершинных частей. Перенормировка матричных элементов.	237
§ 11. Приближенное вычисление матричных элементов.	245
§ 12. Перенормируемые и перенормируемые теории.	252
§ 13. Перенормировка в мезонной теории.	256
§ 14. Вычисление интегралов методом параметризации.	258
§ 15. Электронная собственно-энергетическая часть второго порядка.	264
§ 16. Перенормировка фотонной собственно-энергетической функции второго порядка.	268
§ 17. Переинормировка вершинной части третьего порядка с внешними электронными линиями.	271

Глава VI. Теоремы о связи средних и собственных значений физических величин с матрицей рассеяния и их применение

§ 1. Связь средних значений физических величин с S-матрицей	277
§ 2. Связь собственных значений оператора энергии с S-матрицей.	278
§ 3. Аномальный магнитный момент электрона.	281
§ 4. Представление взаимодействия Фарри для связанных состояний.	290
§ 5. Радиационное смещение атомных уровней.	296
Литература.	302