

**А. Д. КУТАСОВ**

**ЭЛЕМЕНТЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ЛОГИКИ**

**ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ  
9 — 10 КЛАССОВ**

**В 52-б7**

**МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1977**

Кутасов А. Д.  
К95 Элементы математической логики. Пособие для учащихся 9—10 кл. М., «Просвещение», 1977.  
63 с.

Настоящее пособие предназначено в первую очередь ученикам IX—X классов средней общеобразовательной школы, интересующимся математикой. Учителя математики также найдут в нем материал, который смогут использовать в своей работе. Первоначальные сведения из математической логики используются автором для разъяснения таких важных для математики понятий, как взаимно-обратные и взаимно противоположные теоремы, необходимые и достаточные условия, математическая индукция.

$$K \frac{60601 - 487}{103 (03) - 77} 222 - 77$$

## ОТ АВТОРА

В пособии рассматриваются первоначальные понятия математической логики, которые затем используются для изучения таких вопросов школьного курса математики, как логическое следование, теоремы и их структура, взаимно-обратные и взаимно противоположные теоремы, необходимые и достаточные условия, метод математической индукции. Рассматриваются, таким образом, именно те понятия, восприятие которых вызывает у учащихся определенные трудности.

Предварительное знакомство с терминологией и символикой математической логики, с ее понятиями, с одной стороны, позволяет сделать изложение всех перечисленных вопросов совершенно прозрачным, с другой — несомненно, полезно само по себе, во всяком случае, для тех школьников, которые собираются учиться в вузах с расширенной программой по математике.

В пособии содержится более 60 задач, разнообразных по содержанию и степени трудности. Задачи объединяются только общностью цели: они призваны иллюстрировать теоретический материал и вырабатывать у учащихся твердые навыки математического мышления. Задачи рекомендуется решать в порядке их расположения по мере изучения соответствующего теоретического материала. К § 1 относятся задачи 1—17, к § 2 18—35 и к § 3 36—64. Почти все задачи снабжены решениями или указаниями.

Учащийся, внимательно прочитавший всю брошюру и ознакомившийся с решениями задач, несомненно что-то узнает и, вероятно, чему-то научится. Но при этом он должен отдавать себе отчет в том, что выбранный им путь является самым легким и в то же время самым неэффективным. К разделу «Решения, указания, ответы» следует обращаться только после настойчивых неоднократных попыток решить задачу самостоятельно. Давно и хорошо известно, что самостоятельное решение одной задачи приносит больше пользы, чем разбор готовых решений нескольких задач. Решив задачу, стоит подумать, нельзя ли улучшить решение, нельзя ли достичь цели быстрее и проще. Только после этого следует сравнить найденное решение (не только ответ) с приведенным в книге.

Из сказанного должно быть ясно, что пособие рассчитано на активную работу читателя, желающего и умеющего трудиться. В то же время хочется со всей определенностью подчеркнуть, что

никаких особых способностей для успешной работы над этой книгой не требуется. Опыт работы Заочной физико-технической школы при Московском физико-техническом институте, где материал пособия использовался при работе с девятиклассниками с 1971 года, показал, что школьники, интересующиеся математикой и физикой, достаточно хорошо овладевают понятиями, о которых идет речь в пособии.

Пособие предназначается в первую очередь учащимся IX—X классов, желающим самостоятельно углубить и расширить свои знания, но весьма вероятно, что и учителя найдут в нем полезный для себя материал, который они смогут использовать в своей работе.

Автор благодарен доцентам МФТИ Т. С. Пиголкиной, В. И. Чехлову, М. И. Шабунину, рецензентам А. Я. Блоху, К. С. Муравину за полезные замечания и советы.

## § 1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ. ОПЕРАЦИИ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ

В математике и физике, в биологии и географии, в повседневной жизни мы постоянно встречаемся с различными утверждениями. Рассмотрим несколько утверждений.

1. В каждом ромбе диагонали взаимно перпендикулярны.
2. Число 3 является делителем числа 17.
3. Каждый атом водорода содержит ровно один электрон.
4. Все собаки — животные млекопитающие.
5. Нью-Йорк — столица США.
6. Число  $1 + 2^6 = 4294967297$  — простое.
7. Картины Пикассо слишком абстрактны.
8. Число  $x$  не превосходит единицы.

Среди этих утверждений есть утверждения истинные (1, 3, 4), есть утверждения ложные (2, 5, 6). Последние два утверждения нельзя отнести ни к истинным, ни к ложным.

Утверждение 7 содержит слова «слишком абстрактны», смысл которых точно не определен и без предварительного уточнения этих слов нельзя судить об истинности или ложности этого утверждения. В утверждении 8 ничего не сказано о числе  $x$  и потому нельзя сказать, истинно оно или ложно.

Всякое утверждение, относительно которого имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно, мы будем называть **высказыванием**.

Всякое высказывание, следовательно, либо истинно, либо ложно. Никакое высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Утверждения 1—6 являются высказываниями. Утверждения 7 и 8 высказываниями не являются.

Подчеркнем, что не о всяком высказывании можно сразу сказать, истинно оно или ложно. Так обстоит дело, например, с утверждением 6. Ясно, что это утверждение является высказыванием. Число  $2^{2^6} + 1$  не может быть одновременно простым и составным, значит, утверждение 6 либо истинно, либо ложно, т. е. оно является высказыванием. Утверждение 6 принадлежит французскому математику Ферма (1601—1665). Только в 1732 году Эйлер доказал, что оно ложно.

Высказыванием является и следующее утверждение: «7 ноября 2017 года дневная температура воздуха в Москве будет 10—15 градусов выше нуля», хотя установить его истинность или ложность в настоящее время невозможно.

Изучением высказываний занимается специальная математическая дисциплина — **математическая логика**, точнее, тот раздел этой науки, который называется **алгеброй логики** или **алгеброй высказываний**.

В алгебре высказываний предполагается, что уже имеется некоторый запас высказываний, некоторое множество высказываний, причем для каждого высказывания уже известно, истинно оно или ложно. Высказывания, входящие в это множество, называются **элементарными высказываниями**. Каждому элементарному высказыванию уже приписано либо значение истины, либо значение лжи. В первом случае говорят, что элементарному высказыванию поставлено в соответствие буква *I*, во втором — буква *L*.

Алгебра логики не занимается обоснованием того, почему тому или иному элементарному высказыванию приписано значение истины, а не лжи или, наоборот, лжи, а не истины, и не вступает в дискуссию по этому поводу. Этот вопрос решается *вне алгебры логики*, за ее пределами. Например, истинность или ложность высказывания: «Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ » — устанавливается не алгеброй логики, а геометрией, причем в геометрии Евклида это высказывание является истинным, а в геометрии Лобачевского — ложным.

Алгебра логики отвлечена и от смысловой содержательности высказываний, она интересуется только одним свойством высказываний: быть истинными или ложными, находиться в одном и только в одном из двух возможных состояний, в состоянии истины или в состоянии лжи. Такое сужение интересов и самоограничение оказывается плодотворным: оно дает возможность изучать высказывания алгебраическими методами, позволяет ввести операции над элементарными высказываниями и с их помощью строить и изучать как угодно сложные составные высказывания. Истинность или ложность сложных высказываний при этом однозначно определяется в зависимости от истинности или ложности составляющих их элементарных высказываний.

Перейдем к рассмотрению пяти основных операций алгебры логики. Элементарные высказывания будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита.

1. **Операция отрицания.** Каждому элементарному высказыванию *A* можно сопоставить утверждение, заключающееся в том, что высказывание *A* ложно. Такое утверждение либо истинно, либо ложно и, следовательно, само является высказыванием, причем истинным, если *A* ложно, и ложным, если *A* истинно. Это новое высказывание (его обозначают  $\bar{A}$  и называют отрицанием *A*) можно определить с помощью такой таблицы:

—	$A$	$\bar{A}$
1.	$I$	$L$
2	$L$	$I$

Из первой строки таблицы видно, что  $\bar{A}$  ложно, если  $A$  истинно. Вторая строка устанавливает, что  $\bar{A}$  истинно, если  $A$  ложно. Приведенная таблица называется таблицей истинности для отрицания. Отметим, что черта — в качестве знака отрицания — употребляется не всегда; иногда используется знак  $\neg$ , т. е. вместо  $\bar{A}$  пишут  $\neg A$ .

Пример 1. Рассмотрим высказывание

$$A \equiv \{\text{Город Нью-Йорк — столица США}\}^*$$

Отрицанием этого высказывания будет высказывание

$$\bar{A} \equiv \{\text{Город Нью-Йорк не является столицей США}\}.$$

Заметим, что было бы ошибкой считать отрицанием высказывания  $A$  высказывание

$$B \equiv \{\text{Город Вашингтон — столица США}\}.$$

Часто говорят, что операции отрицания в обычной речи соответствует употребление частицы *не*. Это не всегда так. В самом деле, пусть

$$A \equiv \{\text{Это пособие написано не для любителей музыки}\},$$

тогда

$$\bar{A} \equiv \{\text{Это пособие написано не не для любителей музыки}\}$$

или, в соответствии с правилами русской речи,

$$\bar{A} \equiv \{\text{Это пособие написано для любителей музыки}\},$$

т. е. для построения отрицания надо убрать из высказывания частицу «не».

2. Дизъюнкция двух высказываний. Этим латинским словом называется операция, которая каждым двум элементарным высказываниям  $A$  и  $B$  ставит в соответствие новое высказывание, которое обозначается  $A \vee B$  и определяется следующей таблицей истинности:

---

\* Запись читается так:  $A$  есть высказывание: «Город Нью-Йорк — столица США», т. е. здесь знак  $\equiv$  заменяет слова «есть высказывание».

$v$	$A$	$B$	$A \vee B$
1	И	И	И
2	И	Л	И
3	Л	И	И
4	Л	Л	Л

Из таблицы видно, что дизъюнкция двух элементарных высказываний истинна, если хотя бы одно из образующих ее высказываний истинно (строки 1, 2, 3), и ложна только в том случае, когда ложны оба элементарных высказывания (строка 4).

Пример 2. Даны два высказывания

$$A \equiv \{\text{Завтра первый урок литература}\}$$

и

$$B \equiv \{\text{Завтра первый урок математика}\}.$$

Дизъюнкция этих высказываний

$$A \vee B \equiv \{\text{Завтра первый урок литература или математика}\}$$

будет истинной, если на первом уроке будет литература (2-я строка таблицы истинности) или математика (3-я строка таблицы), и ложной, если на первом уроке будет любой другой предмет или если урока вообще не будет (4-я строка таблицы).

Пример 3. Пусть

$$A \equiv \{\text{Для получения I разряда по шахматам достаточно набрать 11,5 очка из 15}\}$$

и

$$B \equiv \{\text{Для получения I разряда достаточно занять 1-е место}\}.$$

Дизъюнкцией высказываний будет высказывание

$$A \vee B \equiv \{\text{Для получения I разряда достаточно набрать 11,5 очка или выйти на 1-е место}\}.$$

Согласно Единой всесоюзной спортивной классификации и высказывание  $A$  и высказывание  $B$  истинны, следовательно, и дизъюнкция их истинна (1-я строка таблицы истинности).

Как видно из приведенных примеров, для образования дизъюнкции используется союз *или*. В обычной речи этот союз чаще всего имеет разделительный смысл (как в примере 2: либо математика, либо литература), но не всегда. В примере 3 союз *или* лишен раз-

делительного оттенка: шахматист одновременно может набрать 11,5 очка и занять 1-е место.

В математике союз *или* всегда понимается в широком смысле: высказывание  $A \vee B$  (*A или B*) истинно, если:

- а) *A* истинно, а *B* ложно;
- б) *A* ложно, а *B* истинно;
- в) *A* истинно и *B* истинно.

**3. Конъюнкция двух высказываний.** Так называется операция, ставящая в соответствие каждым двум элементарным высказываниям *A* и *B* новое высказывание, которое обозначается  $A \wedge B$  и определяется следующей таблицей истинности:

$\wedge$	<i>A</i>	<i>B</i>	$A \wedge B$
1	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>
2	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>
3	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>
4	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>

Согласно определению конъюнкция двух элементарных высказываний истинна только в том случае, когда истинны оба высказывания, ее образующие (строка 1), и ложна в любом другом случае (строки 2, 3, 4).

П р и м е р 4. Пусть

$$A \equiv \{\text{Петя не любит математику}\}$$

и

$$B \equiv \{\text{Петя любит физику}\}.$$

Конъюнкция

$A \wedge B \equiv \{\text{Петя не любит математику и любит физику}\}$  истинна только тогда, когда Петя любит физику, *а* математику не любит.

В остальных трех случаях, т. е. когда Петя:

- а) не любит математику *и* не любит физику,
- б) любит математику *и* физику,
- в) любит математику, *но* не любит физику

высказывание  $A \wedge B$  ложно.

Для образования конъюнкций в русском языке используются союзы *и*, *а*, *но*, *хотя*, *однако*.

**4. Эквиваленция двух высказываний.** Если *A* и *B* два элементарных высказывания, то можно образовать новое высказывание с помощью такой таблицы истинности:

$\sim$	$A$	$B$	$A \sim B$
1	И	И	И
2	И	Л	Л
3	Л	И	Л
4	Л	Л	И

Эта логическая операция называется эквиваленцией и обозначается  $A \sim B$ . Из таблицы истинности следует, что сложное высказывание, образованное с помощью знака эквиваленции  $\sim$ , истинно, если оба элементарных высказывания истинны или оба ложны (строки 1, 4), и ложно, если одно из элементарных высказываний истинно, а другое ложно (строки 2, 3).

Пример 5. Рассмотрим два высказывания

$A \equiv \{\text{На Марсе будут обнаружены бактерии}\}$ .

$B \equiv \{\text{Елена Водорезова станет олимпийской чемпионкой}\}$ .  
Эквиваленцией этих двух высказываний является высказывание

$A \sim B \equiv \{\text{На Марсе будут обнаружены бактерии в том и только в том случае, если Елена Водорезова станет олимпийской чемпионкой}\}$ .

Это высказывание истинно, если:

- а) на Марсе будут обнаружены бактерии и Елена Водорезова действительно станет олимпийской чемпионкой;
- б) на Марсе не будут обнаружены бактерии, а Елена Водорезова не станет чемпионкой,

и ложно, если:

- в) на Марсе будут найдены бактерии, но олимпийской чемпионкой Елена Водорезова не станет;
- г) на Марсе не найдут бактерий, а Елена Водорезова будет чемпионкой олимпийских игр.

Для образования эквиваленции используются слова «в том и только в том случае», «тогда и только тогда» и другие.

5. Импликация. Пусть  $A$  и  $B$  — два элементарных высказывания. Импликацией высказываний  $A$  и  $B$  (обозначается  $A \Rightarrow B$ , читается: из  $A$  следует  $B$ ) называется высказывание, определяемое следующей таблицей истинности:

$\Rightarrow$	$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
1	И	И	И
2	И	Л	Л
3	Л	И	И
4	Л	Л	И

Таблица истинности для импликации изменяется при перестановке столбцов для  $A$  и  $B$ . Первый член  $A$  импликации  $A \Rightarrow B$  называется *посылкой импликации* или *условием*, второй член  $B$  — *заключением*. Как показывает таблица истинности, импликация представляет собой ложное высказывание только в том случае, когда посылка истинна, а заключение ложно (строка 2). Во всех других случаях импликация истинна (строки 1, 3, 4).

Обратим еще раз внимание на 3-ю и 4-ю строки таблицы истинности для импликации. Эти строки показывают, что импликация не полностью соответствует обычному пониманию слова «следует». Из этих строк вытекает, что если высказывание  $A$  ложно, то, каково бы ни было высказывание  $B$ , утверждение  $A \Rightarrow B$  считается истинным. Другими словами, из неверного утверждения следует все что угодно. Например, утверждение: «Если  $2 > 3$ , то существуют ведьмы» — является истинным.

**Пример 6.** Даны два ложных высказывания

$$A = \{\text{Число } 3 \text{ является делителем числа } 17\}$$

и

$$B = \{\text{Число } 6 \text{ — простое число}\}.$$

В чем заключаются следующие высказывания:

- a)  $\bar{A}$ ;
- б)  $A \vee B$ ;
- в)  $A \wedge B$ ;
- г)  $A \sim B$ ;
- д)  $A \Rightarrow B$ .

Какие из этих высказываний истинны и какие ложны?

- а) Высказывание

$$\bar{A} = \{\text{Число } 3 \text{ не является делителем числа } 17\}$$

истинно, поскольку  $A$  ложно.

б) Высказывание

$A \vee B \equiv \{\text{Число } 3 \text{ — делитель числа } 17 \text{ или } 6 \text{ — простое число}\}$

ложно, так как оба члена дизъюнкции  $A$  и  $B$  ложны (см. строку 4 таблицы истинности для дизъюнкции).

в) Высказывание

$A \wedge B \equiv \{\text{Число } 3 \text{ — делитель числа } 17 \text{ и } 6 \text{ — простое число}\}$

ложно (см. строку 4 таблицы истинности для конъюнкции).

г) Высказывание

$A \sim B \equiv \{\text{Число } 3 \text{ — делитель числа } 17 \text{ тогда и только тогда, когда } 6 \text{ — простое число}\}$

истинно (согласно строке 4 таблицы истинности для эквиваленции).

д) Высказывание

$A \Rightarrow B \equiv \{\text{Если число } 3 \text{ — делитель } 17, \text{ то } 6 \text{ — простое число}\}$

истинно (согласно строке 4 таблицы истинности для импликации).

Введенные нами пять логических операций дают возможность, исходя из первоначального набора элементарных высказываний, построить некоторое количество сложных высказываний.

Но таблицы истинности на самом деле определяют логические операции не только над элементарными высказываниями, но и над сложными высказываниями. Таким образом, появляется возможность применять логические операции многократно, получая с их помощью все более сложные высказывания. При этом возникает одно затруднение: при записи сложных высказываний может оказаться неясным порядок, в котором следует проводить операции. Например, неоднозначной будет запись высказывания  $A \wedge B \vee C$ . Это затруднение, как и в обычной алгебре, легко устраняется введением скобок, которые и устанавливают надлежащий порядок выполнения операций. Вместо  $A \wedge B \vee C$  должно писаться или  $A \wedge (B \vee C)$ , или  $(A \wedge B) \vee C$ ; операция, заключенная в скобки, выполняется первой.

Истинность или ложность сложного высказывания в зависимости от истинности или ложности составляющих его высказываний можно установить, построив таблицу истинности сложного высказывания, последовательно используя таблицы истинности логических операций.

Пример 7. Составить таблицу истинности для высказывания  $A \vee B$ .

Истина и ложь могут распределяться между двумя высказываниями четырьмя различными способами, следовательно, таблица истинности состоит из четырех строк:

	$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$
1	И	И	Л	И
2	И	Л	Л	Л
3	Л	И	И	И
4	Л	Л	И	И

Третий столбец заполняется по первому на основании таблицы истинности для отрицания, последний — по второму и третьему, с использованием таблицы истинности для дизъюнкции.

Сравним теперь полученную таблицу истинности для высказывания  $\bar{A} \vee B$  с таблицей истинности для импликации:

	$A$	$B$	$\bar{A} \vee B$		$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
1	И	И	И	1	И	И	И
2	И	Л	Л	2	И	Л	Л
3	Л	И	И	3	Л	И	И
4	Л	Л	И	4	Л	Л	И

Мы видим, что высказывания  $\bar{A} \vee B$  и  $A \Rightarrow B$  имеют одинаковые таблицы истинности. Такие высказывания называются равносильными. Равносильные высказывания принято соединять знаком равенства. Мы можем, следовательно, записать

$$A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B.$$

Употребление знака равенства для соединения равносильных высказываний совершенно естественно.

Действительно, сложные высказывания  $\bar{A} \vee B$  и  $A \Rightarrow B$  имеют различную форму: из элементарных высказываний  $A$  и  $B$  они строятся с помощью различных логических операций. Но для алгебры логики существенно только одно: будет ли при определенном распределении значений истины и лжи для элементарных высказыва-

ний составленное из них сложное высказывание истинным или ложным. В этом смысле высказывания  $\bar{A} \vee B$  и  $A \Rightarrow B$  «одинаковы»: если высказываниям  $A$  и  $B$  приписаны какие-то значения истины или лжи, то высказывания  $\bar{A} \vee B$  и  $A \Rightarrow B$  будут либо оба истинны, либо оба ложны. Ведь таблицы истинности сложных высказываний  $\bar{A} \vee B$  и  $A \Rightarrow B$  одинаковы!

Пример 8. Составить таблицу истинности для высказывания  $(A \Rightarrow B) \sim (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$ .

Истина и ложь могут распределяться между двумя высказываниями четырьмя различными способами, следовательно, таблица истинности в данном случае состоит из четырех строк.

	1	2	3	4	5	6	7
	$A$	$B$	$A \Rightarrow B$	$\bar{B}$	$\bar{A}$	$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$	$(A \Rightarrow B) \sim (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$
1	И	И	И	Л	Л	И	И
2	И	Л	Л	И	Л	Л	И
3	Л	И	И	Л	И	И	И
4	Л	Л	И	И	И	И	И

Третий столбец таблицы заполняется по первым двум на основании таблицы истинности для импликации; четвертый и пятый — соответственно по второму и первому столбцу на основании таблицы истинности для отрицания. Шестой столбец составляется по четвертому и пятому с помощью таблицы истинности для импликации, и, наконец, последний седьмой столбец выписывается по третьему и шестому согласно таблице истинности для эквиваленции.

Заполнив таблицу истинности, мы получили важный результат: высказывание  $(A \Rightarrow B) \sim (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$  истинно всегда, т. е. при любом наборе значений истины и лжи для составляющих его высказываний  $A$  и  $B$ . Такие высказывания называются тождественно истинными, мы будем обозначать их латинской буквой  $I$ . Правый столбец таблицы истинности такого высказывания сплошь заполнен буквой  $I$ , поэтому можно записать:

$$(A \Rightarrow B) \sim (\bar{B} \Rightarrow \bar{A}) = I.$$

Заметим, что этот результат можно сформулировать проще, если заметить, что в нашей таблице столбцы 3 и 6 совпадают, т. е. таб-

лицы истинности высказываний  $A \Rightarrow B$  и  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$  одинаковы, и, следовательно, эти высказывания равносильны, т. е.  $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ . Таким образом, высказывания  $A \Rightarrow B$  и  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$  либо оба истинны, либо оба ложны. Из истинности или ложности одного из них следует соответственно истинность или ложность другого.

Наряду с тождественно-истинными высказываниями отметим высказывания тождественно-ложные, т. е. ложные всегда, независимо от того, истинны или ложны составляющие их высказывания. Правый столбец таблицы истинности такого высказывания сплошь заполнен буквой  $L$ . Тождественно-ложные высказывания будем обозначать латинской буквой  $L$ .

Тождественно-истинные и тождественно-ложные высказывания играют большую роль в процессе логических заключений. Иногда их называют законами логики. Например, легко проверяемое равенство  $A \vee \bar{A} = I$  выражает так называемый закон исключенного третьего: всякое высказывание либо истинно, либо должно, третьего не дано. Тождественно-ложное высказывание  $A \wedge \bar{A} = L$  выражает закон противоречия, согласно которому никакое высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Равносильность  $\bar{\bar{A}} = A$  (или  $\bar{\bar{A}} \sim A = I$ ) выражает закон отрицания отрицания. Этот закон утверждает, что отрицание отрицания совпадает с исходным высказыванием.

И для теории и для практики важно умение исследовать различные высказывания на равносильность. Хотя равносильность составных высказываний можно проверить непосредственно, заполнив таблицы истинности и сравнив их, метод этот практически приемлем только в случае небольшого числа простых высказываний, образующих составные. Ведь если сложное высказывание состоит из  $n$  простых, то таблица истинности такого высказывания содержит  $2^n$  строк и, следовательно, уже при  $n = 7$  число строк превысит сотню, а при  $n = 10$  превзойдет тысячу. В то же время в приложениях алгебры логики, в частности в теории автоматического управления при анализе релейно-контактных и электронно-ламповых схем, как раз приходится иметь дело с высказываниями, составленными из сотен и даже тысяч простых высказываний. Ясно, что доказательство равносильности высказываний с помощью таблиц истинности в таких случаях практически невозможно.

Равносильность высказываний можно устанавливать и другим способом: некоторое количество основных равносильностей (записанное алгебры высказываний) проверяется на основании таблиц истинности, полученные равенства используются при доказательстве других равенств точно так, как в элементарной алгебре в тождественных преобразованиях используются алгебраические законы:

$$a + b = b + a \quad (\text{коммутативный}),$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad (\text{ассоциативный}),$$

$$a(b + c) = ab + ac \quad (\text{дистрибутивный}) \text{ и другие.}$$

Легко проверяются следующие равносильности (законы алгебры высказываний):

**1. Коммутативность дизъюнкции**

$$A \vee B = B \vee A.$$

**2. Коммутативность конъюнкции**

$$A \wedge B = B \wedge A.$$

**3. Ассоциативность дизъюнкции**

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C.$$

**4. Ассоциативность конъюнкции**

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C.$$

**5. Первый дистрибутивный закон**

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

**6. Второй дистрибутивный закон**

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

**7. Законы де Моргана**

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}, \quad \overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}.$$

**8. Закон двойного отрицания**

$$\overline{\bar{A}} = A.$$

**9. Законы идемпотентности**

$$A \vee A = A, \quad A \wedge A = A.$$

**10. Законы, включающие тождественно-истинные (*I*) и тождественно-ложные (*L*) высказывания**

$$A \vee \bar{A} = I, \quad A \wedge \bar{A} = L,$$

$$A \vee I = I, \quad A \wedge I = A,$$

$$A \vee L = A, \quad A \wedge L = L,$$

$$\bar{I} = L.$$

Выписанные выше первые пять законов алгебры логики аналогичны законам обычной алгебры чисел. Эта аналогия станет особенно прозрачной, если назвать, как это иногда делают, дизъюнкцию и конъюнкцию соответственно логическим сложением и логическим умножением и заменить знаки  $\vee$  и  $\wedge$  обычными знаками сложения (+) и умножения (.). То, что указанная аналогия не распространяется очень далеко, ясно видно, например, при рассмотрении второго дистрибутивного закона или законов идемпотентности, не имеющих аналогий в обычной алгебре чисел.

Может показаться странным, что приведенные законы алгебры высказываний описывают свойства только трех операций: дизъюнкции, конъюнкции, отрицания — и ничего не говорят об остальных двух операциях — эквиваленции и импликации. Объяснение этому

заключается в том, что введенные нами пять основных логических операций не являются независимыми: одни из них могут быть выражены через другие. В частности, эквиваленция и импликация выражаются через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание следующим образом:

$$A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B,$$

$$A \sim B = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}).$$

Первая из этих формул уже доказана при рассмотрении примера 7, вторая доказывается аналогично (см. задачу 4).

Пример 9. Доказать равносильность

$$(A \wedge \bar{B}) \vee (B \wedge \bar{C}) = (\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

Используя законы де Моргана, можем записать

$$\begin{aligned} \overline{(A \wedge \bar{B}) \vee (B \wedge \bar{C})} &= \overline{(\bar{A} \wedge \bar{B}) \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C})} = \\ &= (\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge (\bar{B} \vee \bar{C}). \end{aligned}$$

Согласно закону двойного отрицания, получаем

$$(\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee C);$$

теперь, используя первый дистрибутивный закон, преобразуем полученное выражение далее

$$\begin{aligned} ((\bar{A} \vee B) \wedge \bar{B}) \vee ((\bar{A} \vee B) \wedge C) &= \\ = ((\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee (B \wedge \bar{B})) \vee ((\bar{A} \wedge C) \vee (B \wedge C)). \end{aligned}$$

Ассоциативность дизъюнкции позволяет опустить две пары скобок

$$(\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee (B \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge C) \vee (B \wedge C);$$

учитывая законы пункта 10:  $A \wedge \bar{A} = L$  и  $A \vee L = A$ , окончательно получаем

$$(\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

Пример 10. Упростить высказывание

$$(A \wedge B \wedge \bar{B}) \vee (A \wedge \bar{A}) \vee (B \wedge C \wedge \bar{C}).$$

Так как

$$A \wedge B \wedge \bar{B} = A \wedge L = L,$$

$$A \wedge \bar{A} = L,$$

$$B \wedge C \wedge \bar{C} = B \wedge L = L,$$

то предложенное высказывание равносильно высказыванию  $L \vee L \vee L = L$ , т. е. является тождественно-ложным.

Задача. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике»; Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать

следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

Решим задачу алгебраически. Рассмотрим высказывания:

- $A \equiv \{\text{Машина синего цвета}\},$
- $B \equiv \{\text{Машина марки «Бьюик»}\},$
- $C \equiv \{\text{Машина черного цвета}\},$
- $D \equiv \{\text{Машина марки «Крайслер»}\},$
- $E \equiv \{\text{Машина марки «Форд Мустанг»}\}.$

Так как либо цвет машины, либо марка каждым из соучастников преступления названы верно, то

$$\begin{aligned} A \vee B &= I, \\ C \vee D &= I, \\ \bar{A} \vee E &= I. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(A \vee B) \wedge (C \vee D) \wedge (\bar{A} \vee E) = I \wedge I \wedge I = I.$$

В левой части конъюнкцию трех дизъюнкций можно, используя первый дистрибутивный закон, заменить дизъюнкцией восьми конъюнкций

$$\begin{aligned} (A \wedge C \wedge \bar{A}) \vee (A \wedge C \wedge E) \vee (A \wedge D \wedge \bar{A}) \vee \\ \vee (A \wedge D \wedge E) \vee (B \wedge C \wedge \bar{A}) \vee (B \wedge C \wedge E) \vee \\ \vee (B \wedge D \wedge \bar{A}) \vee (B \wedge D \wedge E) = I. \end{aligned}$$

Это преобразование аналогично преобразованию в обычной алгебре чисел:

$$(a + b)(c + d)(f + e) = acf + ace + adf + ade + \\ + bcf + bce + bdf + bde.$$

Но

$$\begin{aligned} A \wedge C \wedge \bar{A} &= C \wedge L = L, \\ A \wedge C \wedge E &= L \wedge E = L, \\ A \wedge D \wedge \bar{A} &= L \wedge D = L, \\ A \wedge D \wedge E &= A \wedge L = L, \\ B \wedge C \wedge \bar{A} &= L \wedge C = L, \\ B \wedge D \wedge \bar{A} &= L \wedge \bar{A} = L, \\ B \wedge D \wedge E &= L \wedge E = L \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$B \wedge C \wedge \bar{A} = I, \text{ т. е.}$$

преступники скрылись на черном «Бьюике».

Выше уже отмечалось, что алгебра логики успешно применяется при анализе релейно-контактных и электронно-ламповых схем. Физическая природа таких схем (будем называть их переключательными) может быть самой разнообразной и нас сейчас не интересует. Под переключательной схемой мы будем понимать схематическое изображение какого-либо устройства, содержащего только двух-

позиционные переключатели, т. е. переключатели, которые могут находиться только в двух состояниях: в замкнутом (ток проходит) и в разомкнутом (ток не проходит). Связь между переключательными схемами и алгеброй высказываний устанавливается следующим образом. Каждому переключателю ставится в соответствие высказывание, истинное тогда, когда переключатель замкнут, и ложное, если переключатель разомкнут. На схемах переключатели будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие им высказывания.

Переключателям, соединенным параллельно, будет соответствовать при этом дизъюнкция соответствующих высказываний; переключателям, соединенным последовательно, — конъюнкция высказываний. Если два переключателя работают так, что один из них замкнут, когда другой разомкнут, и наоборот, то им ставятся в соответствие высказывания  $A$  и  $\bar{A}$ .

Каждой переключательной схеме, таким образом, будет поставлено в соответствие сложное высказывание, истинное тогда и только тогда, когда схема проводит ток. Это сложное высказывание можно исследовать методами математической логики. Если такое сложное высказывание удается упростить, то соответствующая схема допускает аналогичное упрощение. Естественно считать из двух схем более простой ту, которая содержит меньше переключателей.

**Пример 11.** Упростить схему, изображенную на рисунке 1.

Выписываем высказывание, соответствующее данной схеме, и упрощаем его:

$$\begin{aligned}
 & ((A_1 \vee A_3) \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge A_3) \vee (\bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge A_3) = \\
 & = ((A_1 \vee A_3) \wedge A_2) \vee \bar{A}_2 \wedge A_3 \wedge (A_1 \vee \bar{A}_1) = \\
 & = (A_1 \wedge A_2) \vee (A_3 \wedge A_2) \vee (\bar{A}_2 \wedge A_3) = \\
 & = (A_1 \wedge A_2) \vee (A_3 \wedge (A_2 \vee \bar{A}_2)) = \\
 & = (A_1 \wedge A_2) \vee A_3.
 \end{aligned}$$

Следовательно, рассматриваемая схема может быть заменена более простой, изображенной на рисунке 2 и содержащей только 3 переключателя. Исходная схема содержала 9 переключателей.

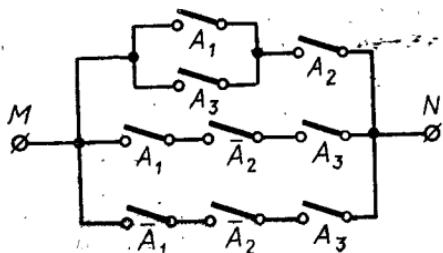


Рис. 1

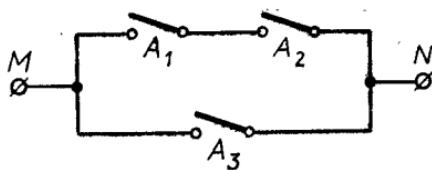


Рис. 2

## § 2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ (ПРЕДИКАТЫ). ЗНАКИ ОБЩНОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИЯ

Часто встречаются утверждения, относящиеся к элементам некоторого множества  $M$ , причем для части элементов этого множества утверждение оказывается истинным, а для всех остальных ложным. Такие утверждения называются *неопределенными высказываниями*, заданными на множестве  $M$ , и обозначаются  $A(x)$ ,  $B(n)$ ,  $C(a, b)$  и т. д., причем всякий раз должно быть четко указано, элементами каких множеств являются  $x$ ,  $n$ ,  $a$  и  $b$ . Например, можно рассматривать неопределенное высказывание  $A(x) \equiv \{x > 5\}$  на множестве всех действительных чисел; неопределенное высказывание  $B(n) \equiv \{n — простое число\}$  на множестве натуральных чисел. Неопределенным высказыванием, заданным на множестве всех пар действительных чисел, будет и такое утверждение:  $C(a, b) \equiv \{a \leq b\}$ . Заметим, что множество  $M$  вовсе не обязано быть числовым множеством; это может быть, например, множество всех учеников какого-либо класса или множество всех четырехугольников.

Важно понять, что неопределенные высказывания не являются высказываниями, но становятся ими, если выбрать какой-нибудь один вполне определенный элемент множества  $M$ , на котором задано неопределенное высказывание. Для каждого фиксированного элемента множества  $M$  неопределенное высказывание либо истинно, либо ложно и, следовательно, является высказыванием.

Для только что рассмотренных неопределенных высказываний  $A(x)$ ,  $B(n)$ ,  $C(a, b)$  высказываниями будут, например,  $A\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $B(13)$ ,  $C(\pi, 3)$ , причем второе из этих трех высказываний истинно, а первое и третье — ложны.

Утверждение

$A \equiv \{\text{Баскетболист сборной СССР 1975 года имеет рост больше двух метров}\}$

также является неопределенным высказыванием\*. Оно задано на множестве всех баскетболистов, входивших в сборную страны в 1975 году. Утверждение это не является высказыванием, так как не указано, о каком именно баскетболисте идет речь, и поэтому принципиально нельзя решить вопрос о его истинности или ложности: в сборную 1975 года входили и игроки, рост которых был больше двух метров, и игроки, рост которых не превышал двух метров.

\* В случаях, когда не может возникнуть недоразумений, мы иногда будем неопределенные высказывания  $A(x)$  обозначать одной буквой  $A$ .

Неопределенные высказывания в математической логике называют **предикатами**. Слово «предикат» в переводе с латинского означает «сказуемое». Этим названием подчеркивается, что если задается неопределенное высказывание (предикат), то тем самым однозначно задается некоторое сказуемое с подчиненными ему словами, но не подлежащее. В нашем примере однозначно определено сказуемое «имеет» и подчиненные ему слова «рост больше двух метров», подлежащее «баскетболист» не конкретизировано полностью, известно только множество, которому принадлежит подлежащее, — множество всех баскетболистов, входивших в сборную ССР в 1975 году.

На предикаты естественным образом переносятся определения логических операций.

**Отрицанием предиката  $A(x)$** , заданного на множестве  $M$ , называется предикат  $\bar{A}(x)$ , определенный на том же множестве  $M$  и обращающийся в истинное высказывание для тех и только тех элементов множества  $M$ , для которых  $A(x)$  — ложное высказывание.

Множество  $M$ , на котором задан предикат  $A(x)$ , разбивается на два подмножества: одно содержит элементы, для которых  $A(x)$  истинно, другое — элементы, для которых  $A(x)$  ложно. Первое из этих подмножеств будем называть множеством истинности предиката  $A(x)$  и обозначать буквой  $A$ ; второе подмножество, очевидно, является множеством истинности предиката  $\bar{A}(x)$ . На рисунке 3 схематически представлены множества  $M$ ,  $A$ ,  $\bar{A}$  (множество  $A$  заштриховано). Множество  $\bar{A}$  является дополнением к множеству  $A$  в множестве  $M$ .

Операции дизъюнкции, конъюнкции и импликации вводятся для предикатов, определенных на одном и том же множестве  $M$ . Результатом этих операций каждый раз является некоторый предикат, определенный на том же множестве  $M$ .

**Дизъюнцией  $A(x) \vee B(x)$**  предикатов  $A(x)$  и  $B(x)$  называется предикат, обращающийся в ложное высказывание для тех и только тех элементов множества  $M$ , для которых оба предиката  $A(x)$  и  $B(x)$  становятся ложными высказываниями.

**Конъюнцией  $A(x) \wedge B(x)$**  предикатов  $A(x)$  и  $B(x)$  называется предикат, обращающийся в истинное высказывание для тех и только тех элементов множества  $M$ , для которых оба предиката  $A(x)$  и  $B(x)$  являются истинными высказываниями.

**Импликацией  $A(x) \Rightarrow B(x)$**  предикатов  $A(x)$  и  $B(x)$  называется предикат, обращающийся в ложное высказывание для тех и только тех элементов множества  $M$ , для которых предикат  $A(x)$  является истинным высказыванием, а предикат  $B(x)$  ложным.

Множества истинности дизъюнкции  $A(x) \vee B(x)$  и конъюнкции  $A(x) \wedge B(x)$  представляют собой соответственно объединение и

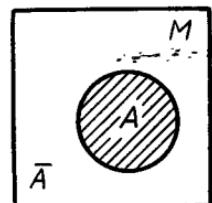
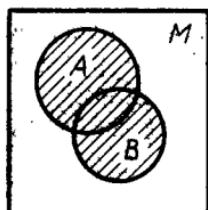
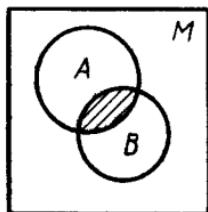


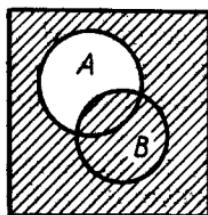
Рис. 3



a)



б)



в)

Рис. 4

пересечение множеств  $A$  и  $B$ , т. е., множеств истинности предикатов  $A(x)$  и  $B(x)$ . На рисунках 4, а и 4, б множества истинности дизъюнкции и конъюнкции заштрихованы. На рисунке 4, в штриховкой показано множество истинности импликации  $A(x) \Rightarrow B(x)$ .

Отметим, что между алгеброй предикатов и алгеброй множеств существует полная аналогия, причем операциям отрицания ( $\neg$ ), дизъюнкции ( $\vee$ ), конъюнкции ( $\wedge$ ), импликации ( $\Rightarrow$ ) соответствуют операции дополнения ( $\bar{}$ ), объединения ( $\cup$ ), пересечения ( $\cap$ ) и включения ( $\subset$ ).

Если задан предикат  $A(x)$ , то особый интерес представляет рассмотрение следующих двух утверждений:

1. Неопределенное высказывание  $A(x)$  истинно для *всех* элементов  $x$  множества  $M$ .
2. Неопределенное высказывание  $A(x)$  истинно *хотя бы для одного* элемента  $x$  множества  $M$ , или, другими словами, *существует* элемент  $x$  множества  $M$ , для которого  $A(x)$  истинно.

В математике принято записывать такие утверждения кратко, используя для этого специальные знаки (кванторы): знак общности  $\forall$  (перевернутая первая буква английского слова All — все) и знак существования  $\exists$  (перевернутая первая буква английского слова Exists — существует). Знак общности  $\forall$  заменяет в словесных формулировках слова: *все, всякий, каждый, любой*. Знак существования  $\exists$  употребляется вместо слов *хотя бы один, найдется, существует*.

Утверждения 1 и 2 в краткой записи выглядят следующим образом:

1.  $(\forall x) A(x), x \in M$
2.  $(\exists x) A(x), x \in M$ .

Появление знаков общности или существования перед неопределенным высказыванием существенно меняет характер утверждения: каждое утверждение и  $(\forall x) A(x)$  и  $(\exists x) A(x)$  либо истинно, либо ложно, и, следовательно, есть высказывание.

**Пример 1.** Пусть

$$A(\Delta) \equiv \{\text{В } \Delta \text{ } ABC \text{ угол } B \text{ равен } 60^\circ\} —$$

предикат, заданный на множестве всех треугольников с вершинами  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

С помощью знаков общности и существования из неопределенного высказывания  $A(\Delta)$  можно построить два утверждения:

$$(\forall \Delta) A(\Delta) \text{ и } (\exists \Delta) A(\Delta),$$

каждое из которых является высказыванием, причем первое (во всяком  $\Delta ABC$  угол  $B$  равен  $60^\circ$ ), очевидно, ложно, а второе (существует  $\Delta ABC$ , у которого угол  $B$  равен  $60^\circ$ ) — истинно.

Очень важно научиться правильно строить отрицание высказываний, особенно таких, которые имеют форму

$$(\forall x) A(x) \text{ или } (\exists x) A(x).$$

Рассмотрим сначала пример.

Пример 2. Пусть

$$A(p) \equiv \{\text{Число } p \text{ нечетное}\} —$$

предикат, заданный на множестве простых чисел.

Рассмотрим высказывание

$$(\forall p) A(p) \equiv \{\text{Каждое простое число } p — \text{нечетное}\}.$$

Отрицание этого высказывания можно построить двумя различными способами:

- Не каждое простое число нечетное.
- Найдется (существует) простое число, которое четно.

Для высказывания

$$(\exists p) A(p) \equiv \{\text{Существует простое число } p, \text{ являющееся нечетным}\}$$

отрицание можно построить также двумя способами:

- Не существует простого нечетного числа.
- Все простые числа являются четными.

Способ а) построения отрицания в обоих случаях отличается от способа б) тем, что использует отрицательную частицу *не*, — это так называемый *негативный* способ построения отрицания.

В способе б) частица *не* не использовалась — это *позитивный* способ построения отрицания. В математике именно позитивный способ построения отрицания особенно часто оказывается нужным и удобным. Негативный способ построения отрицания для высказывания  $(\forall x) A(x)$  соответствует проставлению черты (знака отрицания) над всем высказыванием, т. е.  $(\overline{\forall x}) \overline{A(x)}$ ; позитивный способ связан с записью отрицания в форме  $(\exists x) \overline{A(x)}$ . Для высказывания  $(\exists x) A(x)$  негативный способ также соответствует проставлению черты над всем высказыванием, т. е.  $(\overline{\exists x}) \overline{A(x)}$ ; позитивный способ основан на очевидной возможности записать отрицание в форме  $(\forall x) \overline{A(x)}$ .

Равносильность двух способов построения отрицания следует из формул

$$\overline{(\forall x) A(x)} = (\exists x) \overline{A(x)},$$

$$\overline{(\exists x) A(x)} = (\forall x) \overline{A(x)}.$$

Первая формула утверждает:  $A(x)$  истинно не для всех  $x$  тогда и только тогда, когда существует  $x$ , для которого  $A(x)$  ложно.

Вторая формула утверждает: не существует  $x$ , для которого  $A(x)$  истинно тогда и только тогда, когда  $A(x)$  ложно для всех  $x$ .

Итак, для построения отрицания позитивным способом знак отрицания (черту) следует ввести под знак общности  $\forall$  или существования  $\exists$ , но при этом обязательно знак общности заменить знаком существования, а знак существования — знаком общности.

Если, следовательно, высказывание содержит слова *все, каждый, любой*, то при построении отрицания позитивным способом необходимо заменить их словами *найдется, существует, хотя бы один*, и наоборот, если в высказывании употребляются слова *найдется, существует, хотя бы один*, то при построении отрицания они заменяются словами *все, каждый, любой*.

Непонимание этого простого правила приводит к типичной ошибке при построении отрицания. Пусть  $A(x)$  — неопределенное высказывание, рассмотренное в примере 1, т. е.

$$A(\Delta) \equiv \{\text{В } \Delta \text{ } ABC \text{ угол } B \text{ равен } 60^\circ\}.$$

Отрицание для высказывания

$$(\forall \Delta) A(\Delta) \equiv \{\text{В любом } \Delta \text{ } ABC \text{ угол } B \text{ равен } 60^\circ\}$$

часто формулируют так:

«В любом  $\Delta ABC$  угол  $B$  не равен  $60^\circ$ », что является грубой ошибкой: слово *любой* не заменено словом *существует*, знак общности  $\forall$  не заменен знаком существования  $\exists$ . Правильно построенное отрицание выглядит так:

$$(\exists \Delta) \overline{A(\Delta)} \equiv \{\text{Существует } \Delta \text{ } ABC, \text{ у которого угол } B \text{ не равен } 60^\circ\}.$$

Другой пример: пусть

$$A(k) \equiv \{\text{Кошка серая}\} —$$

предикат, определенный на множестве всех кошек.

Для высказывания

$$(\forall k) A(k) \equiv \{\text{Все кошки серы}\}$$

отрицание иногда дается следующим образом:

«Все кошки не серы». Здесь сделана та же ошибка: слово *все* осталось в формулировке отрицания, знак общности не заменен знаком существования. На самом деле отрицанием является высказывание  $(\exists k) \overline{A(k)} \equiv \{\text{Хотя бы одна кошка не серая}\}$ .

В заключение этого параграфа остановимся еще на вопросе установления истинности или ложности высказывания  $(\forall x) A(x)$ . Чтобы убедиться в истинности такого высказывания, необходимо проверить справедливость утверждения  $A(x)$  для всех элементов множества  $M$ , на котором определен предикат  $A(x)$ . В случае, если множество  $M$  содержит мало элементов, можно попытаться все их перебрать и для каждого убедиться в истинности утверждения  $A(x)$ . Если же  $M$  — бесконечное множество или хотя и конеч-

ное, но содержит очень много элементов, доказать истинность высказывания можно лишь рассуждением.

Очень важно понимать, что для того, чтобы опровергнуть высказывание  $(\forall x) A(x)$ , т. е. доказать его ложность, достаточно указать только один элемент  $x$  множества  $M$ , для которого  $A(x)$  ложно. Это следует и из самого определения высказывания  $(\forall x) A(x)$  и из равносильности

$$(\forall x) \overline{A(x)} = (\exists x) \overline{A(x)}.$$

Элемент  $x$  множества  $M$ , для которого утверждение  $A(x)$  неверно, называется *контрпримером* для высказывания  $(\forall x) A(x)$ .

Таким образом, чтобы убедиться в ложности высказывания  $(\forall x) A(x)$ , достаточно найти (или, как еще говорят, построить) один контрпример.

Рассмотрим предикат

$$A(n) \equiv \{\text{Число } n^2 + n + 41 \text{ простое}\}$$

на множестве всех натуральных чисел. Для высказывания

$$(\forall n) A(n) \equiv \{\text{Число } n^2 + n + 41 \text{ простое при всех } n\}$$

элемент  $n = 41$  является контрпримером.

Интересно отметить, что для всех  $n < 40$   $A(n)$  истинно. Тем не менее контрпример ( $n = 41$ ) доказывает ложность высказывания  $(\forall n) A(n)$ .

### § 3.

## ПРИЛОЖЕНИЯ ЛОГИКИ К НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ МАТЕМАТИКИ

Рассмотрим с точки зрения введенных в предыдущих параграфах понятий теоремы. Большинство теорем, встречающихся в школьном курсе математики, представляют собой высказывания вида

$$(\forall x) A(x) \Rightarrow B(x), x \in M.$$

Ограничимся изучением строения таких теорем. Возьмем, например, теорему: «Во всяком треугольнике против равных сторон лежат равные углы». Здесь на самом деле рассматриваются два неопределенных высказывания, два предиката

$$A(\Delta) \equiv \{B \Delta ABC \text{ стороны } AB \text{ и } BC \text{ равны}\}$$

и

$$B(\Delta) \equiv \{B \Delta ABC \text{ угол } A \text{ равен углу } C\},$$

заданных на множестве всех треугольников.

Теорема утверждает, что для *любого* треугольника из истинности  $A(\Delta)$  следует истинность  $B(\Delta)$ , а это как раз можно записать кратко:  $(\forall \Delta) A(\Delta) \Rightarrow B(\Delta)$ .

В формулировке каждой теоремы, имеющей рассматриваемую структуру  $(\forall x) A(x) \Rightarrow B(x)$ , будем различать:

1. Условие теоремы — предикат  $A(x)$ .
2. Заключение теоремы — предикат  $B(x)$ .
3. Разъяснительную часть теоремы — описание элементов множества  $M$ , на котором заданы предикаты  $A(x)$  и  $B(x)$  вместе с указанием на то, что импликация  $A(x) \Rightarrow B(x)$  истинна для всех его элементов.

Нередко при формулировке теорем опускается разъяснительная часть; например, теорема о диагоналях ромба формулируется так: «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны». При этом, конечно, подразумевается, что утверждение теоремы относится к *каждому* ромбу. Из-за краткости формулировки теоремы о диагоналях ромба может даже показаться, что эта теорема не имеет формы  $(\forall x) A(x) \Rightarrow B(x)$ . На самом деле это не так. Точная формулировка этой теоремы такова (напомним, что ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны):

**Теорема 1.** Пусть  $R$  — множество всех параллелограммов и пусть  $A(r) \equiv \{\text{Параллелограмм } r \text{ — ромб}\}$  и  $B(r) \equiv \{\text{Диагонали параллелограмма } r \text{ взаимно перпендикулярны}\}$  — два предиката, заданные на множестве  $R$ .

Тогда

$$(\forall r) A(r) \Rightarrow B(r),$$

т. е. для любого параллелограмма верно утверждение: если параллелограмм — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

Теоремы, отличающиеся друг от друга условием, или заключением, или разъяснительной частью, являются *различными* теоремами.

Рассмотрим еще одну теорему.

**Теорема 2.** Пусть  $Q$  — множество всех четырехугольников  $q$  и пусть

$$\begin{aligned} A(q) &\equiv \{\text{Четырехугольник } q \text{ есть ромб}\}, \\ B(q) &\equiv \{\text{В четырехугольнике } q \text{ диагонали взаимно перпендикулярны}\} \end{aligned}$$

два неопределенных высказывания, заданные на множестве  $Q$ .

Тогда

$$(\forall q) A(q) \Rightarrow B(q),$$

т. е. для любого четырехугольника верно утверждение: если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

Теорема 2 не тождественна теореме 1, — это две *различные* теоремы, так как предикаты  $A$  и  $B$  заданы в одном случае на множестве всех параллелограммов, в другом — на множестве всех четырехугольников.

Четкое и однозначное выделение в каждой теореме условия, заключения и разъяснительной части позволяет однозначно определить понятия *обратной* и *противоположной* теоремы.

## Теоремы

и  $(\forall x) A(x) \Rightarrow B(x), x \in M$   
 $(\forall x) B(x) \Rightarrow A(x), x \in M$

называются взаимно-обратными.

Иногда одну из этих теорем называют прямой, тогда другую называют обратной. Заметим, что совершенно бессмысленным был бы спор о том, какую именно из двух взаимно-обратных теорем считать прямой и какую — обратной.

Из данного определения видно, что, поменяв местами в формулировке некоторой теоремы условие и заключение и оставив без изменения разъяснительную часть, мы получаем формулировку теоремы, обратной исходной.

Очень важно осознать, что для любой пары взаимно-обратных теорем могут осуществляться все четыре мыслимые возможности, а именно:

- а) обе теоремы верны,
- б) прямая теорема верна, обратная неверна,
- в) прямая неверна, обратная верна,
- г) обе теоремы неверны.

Осуществимость случая а) демонстрируют, например, рассмотренная выше теорема 1 о диагоналях ромба и теорема, ей обратная (для любого параллелограмма верно утверждение: если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм есть ромб). Теорема 2 о диагоналях ромба доказывает осуществимость случая б). В самом деле, сама теорема 2, как известно, верна. Обратная ей теорема (для любого четырехугольника верно утверждение: если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то такой четырехугольник есть ромб) неверна. В качестве контрпримера можно взять четырехугольник, изображенный на рисунке 5\*.

Иллюстрацию случая в) можно получить, приняв теорему, обратную теореме 2, за прямую.

Случай г) также может иметь место: если

$$A(n) \equiv \{n \text{ — простое число}\}$$

и

$$B(n) \equiv \{n \text{ — число нечетное}\} —$$

два предиката, определенные на множестве всех натуральных чисел, то обе теоремы

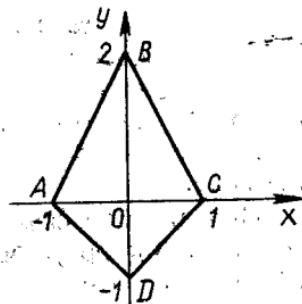


Рис. 5

\* Выше мы уже отмечали, что теоремы 1 и 2 о диагоналях ромба суть различные теоремы; если бы мы не различали их, понятие обратной теоремы потеряло бы однозначный смысл: теорема имела бы две обратных, из которых одна была бы верна, а другая нет.

$$(\forall n) A(n) \Rightarrow B(n)$$

и

$$(\forall n) B(n) \Rightarrow A(n)$$

неверны.

Первая теорема опровергается контрпримером  $n = 2$ , вторая — контрпримером  $n = 9$ .

С понятием прямой и обратной теоремы тесно связано употребление слов *необходимо*, *достаточно*, *необходимо и достаточно* и им подобных.

Если теорема  $(\forall x) A(x) \Rightarrow B(x)$  верна, то неопределенное высказывание  $A(x)$  называется *достаточным условием* для  $B(x)$ , а неопределенное высказывание  $B(x)$  — *необходимым условием* для  $A(x)$ .

Например, пусть

$$A(n) \equiv \{\text{Число } n \text{ делится нацело на 4}\}$$

и

$$B(n) \equiv \{\text{Последняя цифра числа } n \text{ четная}\} —$$

два предиката, заданные на множестве всех натуральных чисел.  
Тогда теорема

$$(\forall n) A(n) \Rightarrow B(n)$$

верна и можно сказать, что  $A(n)$  является *достаточным условием* для  $B(n)$ , т. е. для того, чтобы натуральное число оканчивалось четной цифрой, *достаточно*, чтобы оно делилось на 4. В свою очередь  $B(n)$  является *необходимым условием* для  $A(n)$ , т. е. для того, чтобы число  $n$  делилось на 4, *необходимо* (но не *достаточно*), чтобы последняя цифра числа  $n$  была четной.

Если справедлива не только теорема

$$(\forall x) A(x) \Rightarrow B(x),$$

но и ей обратная

$$(\forall x) B(x) \Rightarrow A(x),$$

то каждое из неопределенных высказываний  $A(x)$  и  $B(x)$  является *необходимым и достаточным условием* для другого. В этом случае пишут

$$(\forall x) A(x) \Leftrightarrow B(x)$$

и говорят, что для истинности  $A(x)$  (соответственно  $B(x)$ ) для всех  $x$  *необходимо и достаточно*, чтобы  $B(x)$  (соответственно  $A(x)$ ) было истинно также для всех  $x$ .

Отметим, что вместо слов *необходимо и достаточно* иногда употребляют слова *тогда и только тогда, в том и только в том случае и т. д.* Например, натуральное число  $n$  делится на 9 *тогда и только тогда*, когда сумма цифр числа  $n$  делится на 9.

Наконец, часто слово «условие» заменяют словом «признак» и говорят *достаточный признак* или *необходимый признак*.

Перейдем к понятию противоположной теоремы.

Теоремы

$$(\forall x) A(x) \Rightarrow B(x), x \in M$$

и

$$(\forall x) \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}, x \in M$$

называются взаимно противоположными.

Если, следовательно, в формулировке некоторой теоремы заменить и условие, и заключение теоремы их отрицаниями, сохранив неизменной разъяснительную часть, то получится формулировка теоремы, противоположной исходной.

Рассмотрим теорему

$$(\forall q) A(q) \Rightarrow B(q),$$

где  $A(q) \equiv \{\text{Многоугольник } q — четырехугольник}\}$

и  $B(q) \equiv \{\text{Сумма внутренних углов многоугольника } q \text{ равна } 360^\circ\} —$

предикаты, заданные на множестве всех многоугольников. Противоположная теорема

$$(\forall q) \overline{A(q)} \Rightarrow \overline{B(q)}$$

формулируется так: пусть  $q$  — любой многоугольник, тогда если  $q$  не четырехугольник, то сумма его внутренних углов не равна  $360^\circ$ . Всякая теорема

$$(\forall x) A(x) \Rightarrow B(x)$$

порождает, таким образом, еще три теоремы:  
обратную

$$(\forall x) B(x) \Rightarrow A(x),$$

противоположную

$$(\forall x) \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$$

и противоположную обратную

$$(\forall x) \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}.$$

Если, например, за исходную теорему принять рассмотренную выше теорему 2 о диагоналях ромба, то порождаемые ею три теоремы формулируются следующим образом:

а) обратная теорема: пусть  $q$  — произвольный четырехугольник, тогда если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то четырехугольник есть ромб (теорема неверна);

б) противоположная теорема: пусть  $q$  — любой четырехугольник, тогда если  $q$  не ромб, то его диагонали не перпендикулярны (теорема неверна);

в) противоположная обратная: пусть  $q$  — произвольный четырехугольник, тогда если диагонали четырехугольника не перпендикулярны друг другу, то четырехугольник не является ромбом (теорема верна).

В рассмотренном примере прямая теорема и противоположная обратной оказались истинными, а обратная и противоположная — ложными. Это совпадение не является случайным. Прямая теорема

и теорема, противоположная обратной, либо обе истинны, либо обе ложны, т. е. имеет место равносильность

$$(\forall x) A(x) \Rightarrow B(x) = (\forall x) \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}.$$

Часто доказательство одной из этих теорем вызывает трудности, в таком случае следует попытаться доказать другую. Известный метод доказательства от противного как раз и состоит в том, что вместо исходной теоремы  $(\forall x) A(x) \Rightarrow B(x)$  доказывают противоположную обратную  $(\forall x) \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$ .

Если обратную теорему

$$(\forall x) B(x) \Rightarrow A(x)$$

принять за прямую, то противоположная

$$(\forall x) \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$$

будет для нее противоположной обратной, и, следовательно, эти теоремы также истинны или ложны одновременно, т. е. имеет место равносильность

$$(\forall x) B(x) \Rightarrow A(x) = (\forall x) \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}.$$

Расположим для наглядности рассматриваемые теоремы в виде следующей таблицы:

1.	$\forall x) A(x) \Rightarrow B(x)$	2.	$(\forall x) B(x) \Rightarrow A(x)$
3.	$(\forall x) \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$	4.	$(\forall x) \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$

Из сказанного следует, что для доказательства теоремы, имеющей необходимый и достаточный характер, т. е. теоремы

$$(\forall x) A(x) \Leftrightarrow B(x),$$

нужно доказать две теоремы на выбор: либо прямую (1) и обратную (2), либо прямую (1) и противоположную (3), либо противоположную обратную (4) и обратную (2), либо противоположную обратной (4) и противоположную (3), т. е. доказывать следует любые две теоремы, расположенные в одной строке или в одном столбце нашей таблицы.

Понятия и терминология, введенные в § 2, могут быть использованы при формулировании принципа и метода математической индукции.

Принцип математической индукции может быть сформулирован следующим образом:

Пусть  $A(n)$  — произвольный предикат, заданный на множестве всех натуральных чисел. Высказывание  $(\forall n) A(n)$  истинно, если истинно высказывание  $A(1) \wedge (\forall k) A(k) \Rightarrow A(k+1)$ .

Этот принцип является одной из аксиом, определяющих натуральный ряд чисел, и, следовательно, не подлежит доказательству.

Под методом математической индукции понимают, как известно, следующий способ доказательства.

Если хотят доказать истинность неопределенного высказывания  $A(n)$  для всех натуральных  $n$ , то сначала проверяют истинность высказывания  $A(1)$  и затем, предположив истинность высказывания  $A(k)$ , пытаются доказать, что высказывание  $A(k+1)$  истинно. Если это удается доказать, причем доказательство остается справедливым для каждого натурального  $k$ , то в соответствии с принципом математической индукции высказывание  $A(n)$  признается истинным для всех  $n$ .

Обобщенный принцип математической индукции может быть сформулирован так: высказывание  $A(n)$  является истинным для всех целых значений  $n \geq n_0$ , если истинно высказывание

$$A(n_0) \wedge ((\forall k \geq n_0) A(k) \Rightarrow A(k+1)).$$

При  $n_0 = 1$  получается первоначальная формулировка принципа математической индукции.

Пример 1. Доказать истинность высказывания

$$A(n) \equiv \{\text{Число } 11 \text{ является делителем числа } 6^{2n+4} + 3^{n+4} + 3^{n+2}\}$$

для каждого целого значения  $n \geq -2$ .

Высказывание

$A(-2) \equiv \{\text{Число } 11 \text{ является делителем числа } 11\}$ , очевидно, истинно.

Далее, так как

$$\begin{aligned} 6^{2(k+1)+4} + 3^{(k+1)+4} + 3^{(k+1)+2} &= 36 \cdot 6^{2k+4} + 3 \cdot 3^{k+4} + 3 \cdot 3^{k+2} = \\ &= (33 + 3) 6^{2k+4} + 3 \cdot 3^{k+4} + 3 \cdot 3^{k+2} = \\ &= 33 \cdot 6^{2k+4} + 3(6^{2k+4} + 3^{k+4} + 3^{k+2}), \end{aligned}$$

то при  $k \geq -2$  из истинности  $A(k)$  вытекает истинность  $A(k+1)$ . В самом деле, первое слагаемое содержит множитель 33 и поэтому делится на 11, второе слагаемое делится на 11 в силу индуктивного предположения.

В некоторых задачах принцип математической индукции используется в следующей видоизмененной форме.

Высказывание  $A(n)$  истинно для всех  $n \geq n_0$ , если истинны высказывания  $A(n_0)$  и  $A(n_0 + 1)$  и для каждого  $k > n_0$  из истинности высказываний  $A(k-1)$  и  $A(k)$  следует истинность высказывания  $A(k+1)$ .

Проиллюстрируем применение этого принципа на следующем примере.

Пример 2. Доказать, что функция  $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$  на отрезке  $[-1; 1]$  совпадает с некоторым многочленом степени  $n$  ( $n$  — неотрицательное целое число).

При  $n = 0$  и  $n = 1$  получаем, соответственно,  $T_0(x) = 1$  и  $T_1(x) = x$ , т. е. утверждение верно и для  $n = 0$  и для  $n = 1$ .

Рассмотрим  $T_{k+1}(x)$  и, проведя преобразования

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) &= \cos((k+1)\arccos x) = \\ &= \cos(k\arccos x) \cdot \cos(\arccos x) - \sin(k\arccos x) \cdot \sin(\arccos x) = \\ &\quad = T_k(x) \cdot T_1(x) - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\cos((k-1)\arccos x) - \cos((k+1)\arccos x)) = \\ &= T_k(x)T_1(x) - \frac{1}{2}(T_{k-1}(x) - T_{k+1}(x)), \end{aligned}$$

получим следующее рекуррентное соотношение

$$T_{k+1}(x) = 2T_1(x)T_k(x) - T_{k-1}(x)$$

или

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x).$$

Сделаем индуктивное предположение: функции  $T_{k-1}(x)$  и  $T_k(x)$  на отрезке  $[-1; 1]$  совпадают с многочленами, соответственно,  $k-1$ -й степени и  $k$ -й степени. Тогда из полученной рекуррентной формулы следует, что  $T_{k+1}(x)$  совпадает с многочленом степени  $k+1$ .

Согласно принципу математической индукции (в видоизмененной форме) утверждение доказано для всех  $n \geq 0$ .

## ЗАДАЧИ

1. Даны следующие элементарные высказывания:

- $A \equiv \{\text{Число } 3 \text{ является делителем числа } 171\},$
- $B \equiv \{\text{Коля Петров — отличник}\},$
- $C \equiv \{\text{Число } 2 \text{ больше числа } 3\},$
- $D \equiv \{\text{Идет дождь}\},$

и пусть  $A$  и  $B$  истинны, а  $C$  и  $D$  ложны.

Применяя к данным элементарным высказываниям операции отрицания, дизъюнкции, эквиваленции и импликации, можно получить 34 сложных высказывания. Сколько среди них истинных?

2. Электрическая цепь между точками  $M$  и  $N$  составлена по схеме, изображенной на рисунке 6. Рассмотрим следующие четыре высказывания:

$A \equiv \{\text{Элемент цепи } k \text{ вышел из строя}\},$

$B_i \equiv \{\text{Элемент цепи } l_i \text{ вышел из строя}\} (i = 1, 2, 3).$

Замкнута ли цепь, если

a) высказывание  $A \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3)$  истинно,

б) высказывание  $\bar{A} \wedge (\bar{B}_1 \vee \bar{B}_2 \vee \bar{B}_3)$  истинно?

Является ли одно из этих высказываний отрицанием другого?

3. По мишени произведено три выстрела.

Пусть  $A_k \equiv \{\text{Мишень поражена при } k\text{-м выстреле}\} (k = 1, 2, 3).$

Что означают следующие высказывания:

а)  $A_1 \vee A_2 \vee A_3;$

б)  $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3;$

в)  $(A_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \bar{A}_3) \vee (\bar{A}_1 \wedge A_2 \wedge \bar{A}_3) \vee (\bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge A_3);$

г)  $(A_1 \wedge A_2) \vee (\bar{A}_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge A_3)?$

4. Докажите равносильность

$$A \sim B = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}).$$

5. Докажите равносильность

$$A \sim B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

6. Составьте таблицу истинности для высказывания

$$(A \sim B) \Rightarrow (A \wedge C).$$

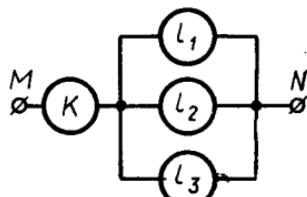


Рис. 6

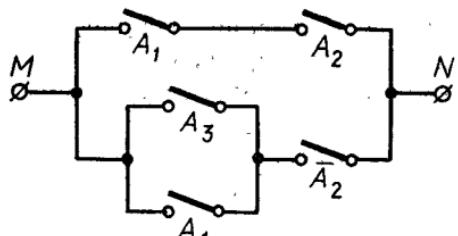


Рис. 7

7. Электрическая цепь, изображенная на рисунке 7, содержит только двухпозиционные переключатели (при одном состоянии переключателя ток через него проходит, при другом — не проходит). Можно ли эту цепь заменить более простой цепью, изображенной на рисунке 8?

8. Упростите схему, изображенную на рисунке 9.  
9. Найдите  $X$ , если

$$\overline{(X \vee A)} \vee \overline{(X \vee \bar{A})} = B.$$

10. Последовательность высказываний ( $A_n$ ) определена следующим рекуррентным соотношением:

$$A_n = A_{n-1} \wedge (A_{n-2} \vee A_{n-3}), \quad n > 3.$$

Высказывания  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  заданы, причем  $A_1$  и  $A_3$  истинны, а  $A_2$  ложно. Истинно ли можно высказывание  $A_n$ ? Как выражается  $A_n$  через  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ ?

11. Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление.

Браун. Я не делал этого.

Смит сделал это.

Джонс. Смит не виновен.

Браун сделал это.

Смит. Я не делал этого.

Джонс не делал этого.

Суд установил, что один из них дважды солгал, другой — дважды сказал правду, третий — один раз солгал, один раз сказал правду. Кто совершил преступление?

12. «Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.

— Говорят Мегрэ. Есть новости?

— Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Жуссье считает, что или Этьен убийца, или Франсуа

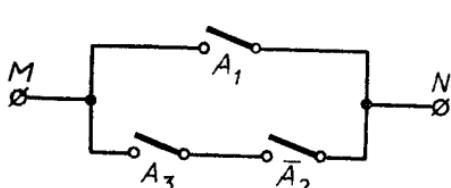


Рис. 8

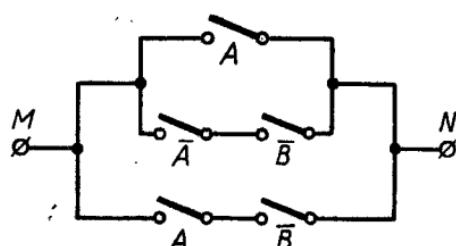


Рис. 9

не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонила...

— Все. Спасибо. Этого достаточно. — Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все».

Рассмотрите следующие элементарные высказывания:

$$A \equiv \{\text{Франсуа был пьян}\},$$

$$B \equiv \{\text{Этьен убийца}\},$$

$$C \equiv \{\text{Франсуа лжет}\},$$

$$D \equiv \{\text{Убийство произошло после полуночи}\}.$$

Запишите, используя логические операции, высказывания инспекторов Торранса, Жуссье и Люка. Составьте конъюнкцию этих трех высказываний и упростите ее. Что следует из показаний инспекторов? Какой вывод сделал комиссар Мегрэ?

13. Для полярной экспедиции из восьми претендентов  $A, B, C, D, E, F, G$  и  $H$  надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика, радиста, механика и врача. Обязанности биолога могут выполнять  $E$  и  $G$ , гидролога  $B$  и  $F$ , синоптика  $F$  и  $G$ , радиста  $C$  и  $D$ , механика  $C$  и  $H$ , врача  $A$  и  $D$ . Хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями, в экспедиции каждый сможет выполнять только одну обязанность. Кого и кем следует взять в экспедицию, если  $F$  не может ехать без  $B$ ,  $D$  — без  $H$  и без  $C$ ,  $C$  не может ехать одновременно с  $G$ , а  $A$  не может ехать вместе с  $B$ ?

14. Путешественник находится в одном из городов  $M$  или  $N$ , но, в каком именно, ему неизвестно. Он задает вопрос, на который может получить ответ «да» или «нет», причем этот ответ может быть правдой или ложью. Что следует спросить путешественнику, чтобы определить, в какой город он прибыл?

15. Для доказательства тождества

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 2$$

ученик проделал следующие выкладки: «Возведя в куб обе части равенства, получим

$$14 + 3\sqrt[3]{(7 + 5\sqrt{2})^2} \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} \sqrt[3]{(7 - 5\sqrt{2})^2} = 8$$

или

$$3\sqrt[3]{(7 + 5\sqrt{2})(7 - 5\sqrt{2})} (\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}) = -6;$$

но, так как

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 2,$$

можем записать

$$\sqrt[3]{49 - 50} = -1,$$

т. е.

$$-1 = -1,$$

что и требовалось доказать». Доказал ли ученик тождество?

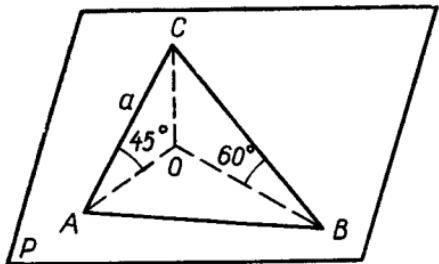


Рис. 10

16. Ученик дал следующее доказательство тождества  $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$ : «Преобразуя левую часть в произведение, получим

$$2 \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2};$$

затем, умножив обе части полученного равенства на  $\sin \frac{\pi}{5}$ , будем

иметь

$$2 \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{5}$$

или

$$\cos \frac{2\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{5},$$

т. е.

$$\sin \frac{4\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5},$$

$$\sin \frac{\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5},$$

$$1 = 1,$$

что и требовалось доказать». Доказано ли тождество?

17. Ученику была предложена следующая задача:

«Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит в плоскости  $P$ , один катет составляет с плоскостью  $P$  угол в  $45^\circ$ , другой — угол в  $60^\circ$ . Большой катет равен  $a$ . Найти гипотенузу».

Ученик сделал чертеж (см. рис. 10), из прямоугольного треугольника  $AOC$  нашел

$$|CO| = a \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

из прямоугольного треугольника  $BOC$  нашел

$$|BC| = \frac{|CO|}{\sin 60^\circ} = \frac{2|CO|}{\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

и по теореме Пифагора определил гипотенузу

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = a\sqrt{1 + \frac{2}{3}} = a\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Верен ли полученный результат?

18. Изобразите схематически множества истинности предикатов  $A(x)$  и  $B(x)$  и покажите штриховкой множества истинности следующих предикатов:

- а)  $\overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)}$ ;      в)  $\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$ ;  
б)  $\overline{A(x) \vee B(x)}$ ;      г)  $\overline{A(x) \wedge B(x)}$ .

19. Контрольную работу, содержащую одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии, писали 105 учащихся. Задачу по алгебре решили 70 человек, по геометрии — 59, по тригонометрии — 62.

90 учащихся решили задачи по алгебре или геометрии, 89 — по геометрии или тригонометрии. По алгебре или тригонометрии задачи были решены 91 учащимся, а 6 школьников не решили ни одной задачи.

Сколько учащихся решили все три задачи?

20. Пусть  $E$  — множество всех европейцев  $e$  и пусть

$$\begin{aligned} A(e) &\equiv \{\text{Европеец является гражданином Швейцарии}\}, \\ B(e) &\equiv \{\text{Европеец владеет немецким языком}\}, \\ C(e) &\equiv \{\text{Европеец владеет французским языком}\}, \\ D(e) &\equiv \{\text{Европеец владеет итальянским}\} \end{aligned}$$

четыре предиката, заданные на этом множестве.

Что означает высказывание

$$(\forall e) A(e) \Rightarrow B(e) \vee C(e) \vee D(e)?$$

21. Верны ли утверждения:

а) Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна свободному члену;

б) Сумма корней любого приведенного квадратного уравнения равна свободному члену;

в) Существует приведенное квадратное уравнение, сумма корней которого равна свободному члену?

22. Дано неравенство  $kx + l^2 > 0$ . При каких значениях  $k$  истинны следующие высказывания:

$$A_1(k) \equiv \{\text{При любом } l \text{ неравенство имеет хотя бы одно решение}\},$$

$$A_2(k) \equiv \{\text{Существует } l, \text{ при котором неравенство верно для всех } x\},$$

$$A_3(k) \equiv \{\text{При любом } l \text{ неравенство верно для всех } x\},$$

$$A_4(k) \equiv \{\text{Существует } l, \text{ при котором неравенство имеет хотя бы одно решение}\}?$$

23. Рассмотрим два определения легкой контрольной:

1. Контрольная работа называется легкой, если каждую задачу решил хотя бы один ученик.

2. Контрольная работа называется легкой, если хотя бы один ученик решил все задачи.

а) Может ли контрольная быть легкой в смысле первого определения и трудной (не легкой) в смысле второго?

б) Может ли работа быть легкой в смысле второго определения и трудной в смысле первого?

24. Ученики 10 В класса хвастались тем, что они выше ростом учеников 10 А. На вопрос учителя математики: «Что, собственно, означает, что вы выше ростом?» — ученики 10 В дали следующие ответы:

1. Любой из нас выше любого из них.

2. Самый высокий из нас выше самого высокого из них.

3. Для любого ученика нашего класса найдется ученик класса А меньшего роста.

4. Каждый ученик класса А ниже хотя бы одного ученика нашего класса.

5. Средний рост учеников нашего класса больше среднего роста учеников класса А.

Есть ли среди этих ответов эквивалентные? Если есть, то какие?

25. Дано высказывание: в некотором поезде, идущем из Москвы во Владивосток, в каждом вагоне есть (существует) свободное место. Сформулируйте (в позитивном смысле) отрицание этого высказывания.

26. Последовательность  $(x_n)$  называется ограниченной, если существует такое число  $C$ , что  $|x_n| < C$  для всех  $n$ . Дайте определение (в позитивном смысле) неограниченной последовательности.

27. Сформулируйте в позитивном смысле, что означает, что число  $a$  не является пределом последовательности  $(x_n)$ .

28. Сформулируйте в позитивном смысле, что означает, что последовательность  $(x_n)$  не имеет предела.

29. Даны три неопределенных высказывания ( $a$  — действительное число):

$$A(a) \equiv \left\{ \text{Уравнение } x + \frac{1}{x} = a \text{ не имеет решений} \right\},$$

$$B(a) \equiv \left\{ \text{Справедливо равенство } \sqrt{a^2 - 6a + 9} = 3 - a \right\},$$

$$C(a) \equiv \left\{ \text{Неравенство } \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} > -3 \text{ справедливо при всех } x \right\}.$$

При каких значениях  $a$  истинны два и только два из этих трех высказываний?

При каких значениях  $a$  из трех высказываний  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  и  $\bar{C}$  по крайней мере два истинны?

30. Даны три неопределенных высказывания ( $a$  — действительное число):

$$A(a) \equiv \left\{ \text{Уравнение } x + \sqrt{x} = a \text{ не имеет решений} \right\},$$

$$B(a) \equiv \left\{ \text{Уравнение } \sqrt{x^2 - 1} = a - x \text{ имеет решение} \right\},$$

$C(a) \equiv \{ \text{Неравенство } (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0 \text{ верно при всех } x \}.$

При каких значениях  $a$  истинны два и только два из этих трех высказываний?

31. Даны три неопределенных высказывания, заданные на множестве всех действительных чисел:

$$A(x) \equiv \{x \text{ — целое число}\},$$

$$B(x) \equiv \{x^2 - 3x \text{ — целое отрицательное число}\},$$

$$C(x) \equiv \{x + \frac{1}{x} \text{ — целое положительное число}\}.$$

При каких значениях  $x$  должно *одно и только одно* из этих трех высказываний?

32. Даны четыре неопределенных высказывания, заданные на множестве всех упорядоченных пар целых положительных чисел:

$$A(m, n) \equiv \{m + 1 \text{ делится на } n\},$$

$$B(m, n) \equiv \{m \text{ равно } 2n + 5\},$$

$$C(m, n) \equiv \{m + n \text{ делится на } 3\},$$

$$D(m, n) \equiv \{m + 7n \text{ — простое число}\}.$$

Найдите все пары чисел  $(m, n)$ , для которых *одно и только одно* из этих четырех высказываний должно.

33. При каких значениях  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} ax + y = b, \\ x^2 - 4y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет действительные решения при *любых* значениях  $b$ ?

34. Данна система уравнений

$$\begin{cases} bx - y = ac^2, \\ (b - 6)x + 2by = c + 1, \end{cases}$$

где  $a, b, c$  — действительные числа. При каких значениях  $a$  при любом  $b$  *найдется* такое  $c$ , при котором система имеет хотя бы *одно* решение?

35. Данна система уравнений

$$\begin{cases} x + 2by = a, \\ bx + (1 - b)y = c^2 + c, \end{cases}$$

где  $a, b, c$  — действительные числа.

При каких значениях  $a$  при любом  $b$  *найдется* такое  $c$ , при котором система имеет хотя бы *одно* решение?

36. В следующих теоремах выделите условие, заключение и разъяснительную часть. Для каждой теоремы сформулируйте обратную, противоположную и противоположную обратной. Укажите, какие из этих теорем верны.

а) Если в четырехугольник можно вписать окружность, то этот четырехугольник представляет собой ромб.

б) Если параллелограмм является прямоугольником, то вокруг него можно описать окружность.

в) Если квадратное уравнение не имеет двух различных действительных корней, то дискриминант этого квадратного уравнения неположителен.

37. а) Для теоремы: «Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в ней» — сформулируйте обратную, противоположную и противоположную обратной теоремы. Какие из этих четырех теорем верны?

б) Если  $f$  и  $g$  дифференцируемы на  $]-\infty; +\infty[$ , то  $f+g$  также дифференцируема на  $]-\infty; +\infty[$ . Верно ли **обратное утверждение**?

38. Рассмотрим два неопределенных высказывания, заданные на множестве всех квадратных функций  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ):

$$A(y) \equiv \{ax^2 + bx + c > 0 \text{ при всех } x\},$$
$$B(y) \equiv \{b^2 - 4ac < 0\}.$$

Верны ли теоремы:

а)  $(\forall y) A(y) \Rightarrow B(y)$ ,    б)  $(\forall y) B(y) \Rightarrow A(y)$ ?

39. Какие из следующих шести теорем являются по отношению друг к другу обратными, противоположными, противоположными обратными? Какие из этих теорем верны?

Теорема 1. Если ~~каждое~~ из двух натуральных чисел делится нацело на 7, то их сумма делится на 7.

Теорема 2. Если ни одно из двух чисел не делится на 7, то и их сумма не делится на 7.

Теорема 3. Если хотя бы одно из двух чисел делится на 7, то и их сумма делится на 7.

Теорема 4. Если сумма двух чисел делится на 7, то каждое слагаемое делится на 7.

Теорема 5. Если сумма двух чисел не делится на 7, то ни одно из слагаемых не делится на 7.

Теорема 6. Если сумма двух чисел не делится на 7, то хотя бы одно из слагаемых не делится на 7.

40. Могут ли взаимно противоположные теоремы быть обе верными, обе неверными, одна верна, другая неверна? Приведите примеры.

41. В следующих предложениях замените многоточия словами «необходимо и достаточно», «необходимо, но не достаточно», «достаточно, но не необходимо» так, чтобы получились верные утверждения:

а) Для того чтобы выиграть в лотерее, ... иметь хотя бы один лотерейный билет.

б) Для того чтобы из трех чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  хотя бы два были равны между собой, ..., чтобы

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0.$$

в) Для того чтобы медиана треугольника была равна половине стороны, которую она делит, . . . , чтобы треугольник был прямоугольным.

г) Для того чтобы функция  $y = ax^2 + bx + c$  при всех целых  $x$  принимала целые значения, . . . , чтобы  $2a, a+b, c$  были целыми числами.

42. В следующих предложениях замените многоточия словами «тогда», «только тогда», «тогда и только тогда» так, чтобы получились верные утверждения:

а) Число делится на 9 . . . , когда сумма его цифр делится на 9.

б) Последовательность имеет предел . . . , когда она ограничена.

в) Неравенство  $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{20}$  справедливо . . . , когда справедливо равенство  $2a + 4b = 1$ .

В нижеследующих задачах (43—49) требуется либо доказать, либо опровергнуть содержащиеся в них утверждения.

43. Точка является серединой некоторого отрезка, концы которого принадлежат разным сторонам данного угла, тогда и только тогда, когда она расположена на биссектрисе данного угла.

44. Точка является серединой некоторого отрезка, концы которого принадлежат разным сторонам данного угла, тогда и только тогда, когда она расположена внутри данного угла.

45. Дан отрезок  $AB$  и на нем точка  $C$ . Для того чтобы точка  $M$  (несовпадающая с  $C$ ) была точкой пересечения двух конгруэнтных окружностей, одна из которых проходит через точки  $A$  и  $C$ , другая через  $C$  и  $B$ , необходимо и достаточно, чтобы точка  $M$  принадлежала прямой, перпендикулярной отрезку  $AB$  и проходящей через его середину.

46. На плоскости даны две точки  $A$  и  $B$ . Точка является основанием перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на некоторую прямую, проходящую через точку  $B$ , тогда и только тогда, когда она принадлежит окружности, диаметром которой является отрезок  $AB$ .

47. Для того чтобы сумма двух действительных чисел была числом рациональным, необходимо и достаточно, чтобы каждое слагаемое было числом рациональным.

48. Для делимости числа  $n^2 - 1$  ( $n \geq 5$ ) на 24 достаточно, чтобы  $n$  было простым числом.

49. Для делимости числа  $n^2 - 1$  ( $n \geq 5$ ) на 24 необходимо и достаточно, чтобы  $n$  было простым числом.

В задачах 50—60, 63, 64 примените метод математической индукции.

50. Докажите истинность высказывания  $(\forall n) A(n)$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$ , если

$A(n) \equiv \{\text{Число } 2^{2^n} + 1 \text{ оканчивается цифрой } 7\}.$

51. Докажите истинность высказывания  $(\forall n) A(n)$ ,  
 $n = 0, 1, 2, \dots$ , если

$$A(n) \Leftrightarrow \{\text{Число } 5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2} \text{ кратно } 19\}.$$

52. Докажите, что при всех натуральных значениях  $n$  имеет место неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

53. Последовательность  $(a_n)$  задается следующим рекуррентным соотношением:

$$a_n = \frac{5}{2} a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n > 1), \quad a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{5}{2}.$$

Найдите  $n$ -й член последовательности.

54. Докажите равенство

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

(в левой части содержится  $n$  радикалов).

55. Докажите, что любую сумму денег, большую 7 копеек, можно разменять только трехкопеечными и пятикопеечными монетами.

56. На плоскости даны  $n$  точек  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ . Каково множество точек  $M$  таких, что сумма  $|A_1M|^2 + |A_2M|^2 + \dots + |A_nM|^2$  постоянна?

57. На сколько частей разделится поверхность шара плоскостями, проходящими через центр, если никакие три плоскости не проходят через один и тот же диаметр.

58. На плоскости произвольным образом проведены  $n$  прямых. Докажите, что черной и белой красками можно так закрасить плоскость, что любые две части, имеющие общую сторону, будут окрашены в разные цвета.

59. Докажите, что если  $p$  — простое число,  $n$  — натуральное, то  $n^p - n$  делится на  $p$  (теорема Ферма).

60. Дано  $n$  положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , причем  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ .

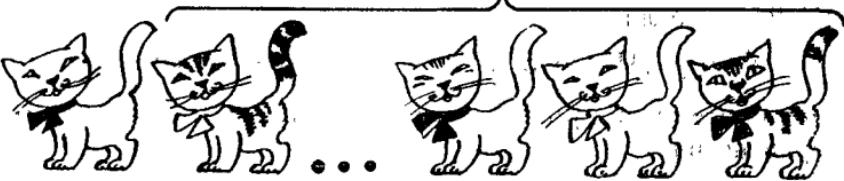
Докажите, что  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$ .

61. Дано  $n$  положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Докажите неравенство

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n},$$

используя результат задачи 60.

62. Рассмотрим следующее «доказательство» методом математической индукции утверждения: «У всех кошек глаза одного и того же цвета». Для  $n = 1$  (одна кошка) утверждение, очевидно,



1-я кошка, 2-я кошка, ...,  $n-1$ -я кошка,  $n$ -я кошка,  $n+1$ -я кошка

$n$  кошек

Рис. 11

справедливо. Предположим, что утверждение справедливо для  $n$ , т. е. предположим, что любые  $n$  кошек имеют одинаковый цвет глаз. Докажем, что утверждение верно для  $n + 1$ . Возьмем любую совокупность, состоящую из  $(n + 1)$  кошек (рис. 11), и перенумеруем всех кошек.

По индуктивному предположению кошки с номерами от 1 до  $n$  имеют один и тот же цвет глаз, кошки с номерами от 2 до  $n + 1$  (их  $n$  штук) также имеют один и тот же цвет глаз. В обе эти совокупности входит, например, кошка номер 2. Следовательно, у всех  $(n + 1)$  кошек глаза одного и того же цвета. Утверждение доказано для  $n + 1$ , и, следовательно, оно верно для всех  $n$ , т. е. у всех кошек глаза одинакового цвета. В этом «доказательстве» допущена одна ошибка. Найдите ее.

63. Докажите равенство

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$$

$(x \neq 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

64. Найдите  $f_n'(0)$ , если

$$f_n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ раз}} \quad \text{и} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

( $f \circ g$  — композиция функций  $f$  и  $g$ , т. е.  $f \circ g = f(g(x))$ ).

## РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ

1. С помощью операции отрицания получаем четыре высказывания:  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$ , из которых два истинны.

Дизъюнкция дает шесть высказываний:

$$A \vee B, A \vee C, A \vee D, B \vee C, B \vee D, C \vee D.$$

Первые пять из этих высказываний, очевидно, истинны. Используя операцию конъюнкции, получаем шесть высказываний:

$$A \wedge B, A \wedge C, A \wedge D, B \wedge C, B \wedge D, C \wedge D,$$

из которых истинным является только одно  $A \wedge B$ .

Среди шести высказываний:  $A \sim B$ ,  $A \sim C$ ,  $A \sim D$ ,  $B \sim C$ ,  $B \sim D$ ,  $C \sim D$  — истинными являются два высказывания — первое и последнее.

Импликация дает 12 высказываний:

$$\begin{array}{ll} A \Rightarrow B, & B \Rightarrow A, \\ A \Rightarrow C, & C \Rightarrow A, \\ A \Rightarrow D, & D \Rightarrow A, \\ B \Rightarrow C, & C \Rightarrow B, \\ B \Rightarrow D, & D \Rightarrow B, \\ C \Rightarrow D, & D \Rightarrow C. \end{array}$$

Среди высказываний, выписанных в левом столбике, два истинных — первое и последнее. Все высказывания, записанные справа, истинны. Таким образом, импликация дает восемь истинных высказываний. Всего, следовательно, получаем  $2 + 5 + 1 + 2 + 8 = 18$  истинных высказываний.

2. а) Цепь разорвана, так как или элемент  $k$  вышел из строя, или вышли из строя одновременно все три элемента  $l_i$ , или произошло и то и другое.

б) Ток проходит по цепи.

Высказывание б) есть отрицание высказывания а). В самом деле, используя законы де Моргана, получаем

$$\begin{aligned} \bar{A} \wedge (\bar{B}_1 \vee \bar{B}_2 \vee \bar{B}_3) &= \bar{A} \wedge (\bar{B}_1 \wedge B_2 \wedge \bar{B}_3) = \\ &= \bar{A} \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3). \end{aligned}$$

3. а) Есть хотя бы одно попадание.

б) Все три выстрела попали в цель.

- в) Мишень поражена одним и только одним выстрелом.  
г) Есть, по крайней мере, два попадания.

4. Составляем таблицу истинности для высказывания

$$(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$$

	$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \wedge B$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$	$(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$
1	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>
2	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>
3	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>
4	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>

и убеждаемся в том, что она совпадает с таблицей истинности для эквиваленции. Таким образом, доказано, что эквиваленция выражается через логические операции отрицания, дизъюнкции и конъюнкции.

5. Задача решается аналогично предыдущей.

6. Для трех высказываний:  $A$ ,  $B$  и  $C$  — существует восемь различных способов распределения между ними значений истины и лжи. В первых трех столбцах таблицы перечислены все возможные случаи размещения двух букв *И* и *Л* по трем местам, по столбцам  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

1            2            3            4            5            6

	$A$	$B$	$C$	$A \sim B$	$A \wedge C$	$(A \sim B) \Rightarrow (A \wedge C)$
1	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>
2	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>
3	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>
4	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>
5	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>
6	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>
7	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>
8	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>

Четвертый столбец таблицы заполняется на основании таблицы истинности для эквиваленции по первым двум столбцам. По первому и третьему столбцам заполняется пятый на основании таблицы истинности для конъюнкции. Таблица истинности для импликации дает возможность по четвертому и пятому столбцам заполнить шестой.

7. Да, можно. Это следует из равносильности

$$(A_1 \wedge A_2) \vee ((A_3 \vee A_1) \wedge \bar{A}_2) = A_1 \vee (A_3 \wedge \bar{A}_2),$$

которая легко устанавливается. В самом деле,

$$\begin{aligned} & (A_1 \wedge A_2) \vee ((A_3 \vee A_1) \wedge \bar{A}_2) = \\ & = (A_1 \wedge A_2) \vee (A_3 \wedge \bar{A}_2) \vee (A_1 \wedge \bar{A}_2) = \\ & = (A_1 \wedge (A_2 \vee \bar{A}_2)) \vee (A_3 \wedge \bar{A}_2) = A_1 \vee (A_3 \wedge \bar{A}_2). \end{aligned}$$

8. Схема соответствует высказыванию

$$(A \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})) \vee (A \wedge \bar{B}),$$

которое упрощается следующим образом:

$$\begin{aligned} & (A \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})) \vee (A \wedge \bar{B}) = \\ & = A \vee ((\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee (A \wedge \bar{B})) = \\ & = A \vee (\bar{B} \wedge (A \vee \bar{A})) = A \vee \bar{B}. \end{aligned}$$

9. По закону де Моргана получаем:

$$(\bar{X} \wedge \bar{B}) \vee (\bar{X} \wedge \bar{\bar{B}}) = A.$$

Применив закон двойного отрицания и первый дистрибутивный закон, будем иметь

$$\bar{X} \wedge (\bar{B} \vee B) = A$$

или, принимая во внимание закон исключенного третьего  $\bar{B} \vee B = I$ , получим:

$$\bar{X} \wedge I = A,$$

откуда

$$\bar{X} = A \text{ и } X = \bar{A}.$$

10. Используя законы алгебры высказываний, получаем:

$$\begin{aligned} A_5 &= A_4 \wedge (A_3 \vee A_2) = (A_3 \wedge (A_2 \vee A_1)) \wedge (A_3 \vee A_2) = \\ &= A_3 \wedge (A_2 \vee (A_1 \wedge A_3)) = (A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_3) = \\ &= A_3 \wedge (A_2 \vee A_1) = A_4. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что  $A_6 = A_4$ . Докажем, что  $A_n = A_4$  ( $n > 3$ ). Для  $n = 4, 5, 6$  утверждение верно. Предположим, что оно верно для всех номеров, не превосходящих  $n$ , тогда

$$A_{n+1} = A_n \wedge (A_{n-1} \vee A_{n-2}) = A_4 \wedge (A_4 \vee A_4) = A_4.$$

Высказывание  $A_4$ , очевидно, истинно. Следовательно, истинно и  $A_n$ .

Итак,  $A_n$  истинно и  $A_n = A_3 \wedge (A_2 \vee A_1)$ .

11. Пусть

$B \equiv \{\text{Преступление совершил Браун}\}$ ,

$D \equiv \{\text{Преступление совершил Джонс}\}$ ,

$C \equiv \{\text{Преступление совершил Смит}\}$ .

Рассмотрим все шесть возможных случаев:

	Дважды солгал	Один раз солгал	Дважды сказал правду
1	Браун	Джонс	Смит
2	Браун	Смит	Джонс
3	Джонс	Браун	Смит
4	Джонс	Смит	Браун
5	Смит	Браун	Джонс
6	Смит	Джонс	Браун

В первом случае из заявления Брауна следует, что высказывание  $B$  истинно, а  $C$  ложно, но отсюда вытекает, что первое заявление Джонса — правда, второе — ложь, т. е.  $B$  ложно. Никакое высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Следовательно, первый случай невозможен.

Во втором случае из заявления Брауна вытекает, что  $B$  истинно и  $C$  ложно, следовательно, у Смита первое заявление — правда, а второе — ложь, т. е.  $D$  истинно, но  $B$  и  $D$  не могут быть истинны одновременно, т. е. второй случай невозможен.

В третьем случае из заявления Джонса вытекает, что  $C$  истинно, а из заявления Смита вытекает, что истинно  $B$ , следовательно, и этот случай невозможен.

В четвертом случае из заявления Джонса следует истинность  $C$  и ложность  $B$ , из заявления Брауна — ложность  $B$  и истинность  $C$ . Заявления Смита не противоречат заявлению Брауна и Джонса, если Смит первый раз солгал, второй раз сказал правду. В пятом и шестом случаях из заявлений Смита следует одновременная истинность  $C$  и  $D$ , т. е. эти случаи невозможны.

Таким образом, преступление совершил Смит.

12. Введем следующие элементарные высказывания:

$A \equiv \{\text{Франсуа был пьян}\}$ ,

$B \equiv \{\text{Этьен убийца}\}$ ,

$C \equiv \{\text{Франсуа лжет}\}$ ,

$D \equiv \{\text{Убийство произошло после полуночи}\}$ .

Инспектора комиссара Мегрэ установили, что

$$\begin{aligned} A \Rightarrow (B \vee C) &= I, \\ B \vee (\bar{A} \wedge D) &= I, \\ D \Rightarrow (B \vee C) &= I. \end{aligned}$$

Рассмотрим конъюнкцию этих трех сложных высказываний и упростим ее:

$$(A \Rightarrow (B \vee C)) \wedge (B \vee (\bar{A} \wedge D)) \wedge (D \Rightarrow (B \vee C)) = I.$$

Используя формулу  $A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$ , доказанную в § 1 (при мер 7), освободимся от импликации

$$(\bar{A} \vee B \vee C) \wedge (B \vee (\bar{A} \wedge D)) \wedge (\bar{D} \vee B \vee C) = I.$$

Согласно второму дистрибутивному закону можем записать:

$$(B \vee C \vee (\bar{A} \wedge \bar{D})) \wedge (B \vee (\bar{A} \wedge D)) = I.$$

Еще раз применяя этот закон, получим:

$$B \vee ((\bar{A} \wedge D) \wedge (C \vee (\bar{A} \wedge \bar{D}))) = I$$

или

$$B \vee (\bar{A} \wedge D \wedge C) \vee (D \wedge \bar{A} \wedge \bar{D}) = I,$$

и так как  $D \wedge \bar{A} \wedge \bar{D} = L$ , то окончательно имеем:

$$B \vee (\bar{A} \wedge D \wedge C) = I.$$

Таким образом, из показаний инспекторов следовало лишь, что или Этьен убийца, или одновременно имели место три обстоятельства: Франсуа не был пьян, убийство произошло после полуночи, Франсуа лгал. Но комиссару Мегрэ было известно, что трезвый Франсуа не лжет, т. е. что

$$\bar{A} \wedge \bar{C} = I$$

или

$$\bar{A} \wedge C = L,$$

и, следовательно, результат, вытекающий из показаний инспекторов,

$$B \vee (\bar{A} \wedge D \wedge C) = I,$$

при этом условии дает

$$B \vee L = I, \text{ т. е. } B = I.$$

Убийство совершил Этьен.

13. Рассмотрим восемь высказываний

$$\begin{aligned} A &\equiv \{\text{Претендент } A \text{ взят в экспедицию}\}, \\ B &\equiv \{\text{Претендент } B \text{ взят в экспедицию}\}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$H \equiv \{\text{Претендент } H \text{ взят в экспедицию}\}.$$

Для краткости записи будем опускать знак конъюнкции. Так как из двух претендентов, владеющих одной специальностью, необходимо взять, по крайней мере, одного, то

$$\begin{aligned} E \vee G &= I, & B \vee F &= I, & F \vee G &= I, \\ C \vee D &= I, & C \vee H &= I, & A \vee D &= I. \end{aligned}$$

Помимо этого, в условии задачи сказано, что

$$\bar{B} \Rightarrow \bar{F} = I, \quad \bar{H}C \Rightarrow \bar{D} = I, \quad G \Rightarrow \bar{C} = I, \quad B \Rightarrow \bar{A} = I.$$

Выпишем конъюнкцию всех десяти высказываний и упростим получившееся выражение:

$$(\bar{B} \Rightarrow \bar{F}) (\bar{H}C \Rightarrow \bar{D}) (G \Rightarrow \bar{C}) (B \Rightarrow \bar{A}) (E \vee G) (B \vee F) \\ (F \vee G) (C \vee D) (C \vee H) (A \vee D) = I.$$

Освободимся от знака импликации, используя равносильность, полученную в § 1 (пример 7):

$$(B \vee \bar{F}) (H\bar{C} \vee \bar{D}) (\bar{G} \vee \bar{C}) (\bar{B} \vee \bar{A}) (E \vee G) (B \vee F) \\ (F \vee G) (C \vee D) (C \vee H) (A \vee D) = I.$$

Первая, шестая и четвертая скобки дают

$$(B \vee \bar{F}) (B \vee F) (\bar{B} \vee \bar{A}) = (B \vee \bar{F}\bar{F}) (\bar{B} \vee \bar{A}) = \\ = B\bar{B} \vee B\bar{A} = B\bar{A}.$$

«Умножаем» полученное выражение на десятую скобку и затем на вторую:

$$B\bar{A} (A \vee D) (H\bar{C} \vee \bar{D}) = B\bar{A}D (H\bar{C} \vee \bar{D}) = B\bar{A}DH\bar{C}.$$

Следовательно:

$$B\bar{A}DH\bar{C} (\bar{G} \vee \bar{C}) (E \vee G) (F \vee G) (C \vee D) (C \vee H) = I.$$

Упрощая далее, получим:

$$\begin{aligned} B\bar{A}DH\bar{C} (\bar{G} \vee \bar{C}) (G \vee EF) (C \vee DH) &= I, \\ B\bar{A}DH\bar{C}\bar{G} (G \vee EF) (C \vee DH) &= I, \\ B\bar{A}DH\bar{C}\bar{G}EF (C \vee DH) &= I, \\ B\bar{A}DH\bar{C}\bar{G}EF \vee B\bar{A}DH\bar{C}\bar{G}EF &= I, \\ B\bar{A}DH\bar{C}\bar{G}EF &= I, \end{aligned}$$

т. е. в экспедицию следует взять всех, кроме  $A$  и  $G$ . Но если  $A$  не едет, то  $D$  должен ехать в качестве врача. Поскольку не едет  $G$ , то  $E$  обязан ехать в качестве биолога и  $F$  в качестве синоптика, но тогда  $B$  будет выполнять обязанности гидролога. Далее, так как  $D$  едет врачом, то  $C$  должен работать радиостом, а, следовательно,  $H$  механиком.

Ответ: в экспедицию следует взять  $E$  — биологом,  $B$  — гидрологом,  $C$  — радиостом,  $D$  — врачом,  $F$  — синоптиком,  $H$  — механиком.

14. Достаточно спросить: «Верно ли, что я нахожусь в городе  $M$  и мне говорят правду или что я нахожусь в городе  $N$  и мне говорят ложь?». Действительно, пусть

$$\begin{aligned} A &\equiv \{\text{Путешественник находится в городе } M\}, \\ B &\equiv \{\text{Путешественнику говорят правду}\}. \end{aligned}$$

Путешественник спрашивает, истинно ли высказывание  $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$ ? Легко видеть, что из ответа «да», вне зависимости от того, правдив этот ответ или нет, вытекает, что путешественник находится в городе  $M$ , а из ответа «нет» следует, что он находится в городе  $N$ . Например, допустим, что путешественник получил ответ «да» и этот ответ — ложь. Это означает, что высказывание  $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$  ложно и высказывание  $B$  тоже ложно. Но если высказывание  $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$  ложно, то  $\bar{A} \wedge \bar{B}$  ложно, и так как  $\bar{B}$  истинно, то  $\bar{A}$  ложно, т. е.  $A$  истинно. Аналогично рассматриваются остальные три случая.

15. Тождество не доказано. В процессе «доказательства» дважды использовалось соотношение

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 2,$$

справедливость которого как раз и требовалось установить.

Для доказательства тождества можно поступить так. Обозначим левую часть через  $a$ , т. е. положим

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = a.$$

Возведя в куб обе части этого равенства, получим

$$14 + 3\sqrt[3]{(7 + 5\sqrt{2})^2} \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} \sqrt[3]{(7 - 5\sqrt{2})^2} = a^3,$$

или

$$3\sqrt[3]{(7 + 5\sqrt{2})(7 - 5\sqrt{2})}(\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}) = a^3 - 14.$$

Но, так как

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = a,$$

то

$$3\sqrt[3]{49 - 50}a = a^3 - 14,$$

т. е. левая часть тождества обязана быть равной одному из корней кубического уравнения

$$a^3 + 3a - 14 = 0.$$

Теперь тождество доказано, так как  $a = 2$ , очевидно, единственный действительный корень уравнения.

16. Тождество не доказано.

17. Проведенные рассуждения и выкладки доказывают лишь следующее: если прямоугольный треугольник, о котором говорится в условии задачи, существует, то его гипotenуза равна  $a\sqrt{\frac{5}{3}}$ . Но само существование такого треугольника никуда не следует. Легко убедиться в том, что на самом деле такого треугольника не существует. В противном случае величина плоского угла  $ACB$  трехгранного угла  $CAOB$  была бы больше суммы величин двух остальных плоских углов  $ACO$  и  $OCB$ .

18. Множества истинности показаны на рисунке 12. Свпадение множеств на рисунках а) и б), а также в) и г) иллюстрирует законы де Моргана.

19. Все три задачи были решены двадцатью учащимися.

20. Если европеец является гражданином Швейцарии, то он владеет, по крайней мере, одним из трех названных языков.

21. а) Утверждение не является высказыванием — это неопределенное высказывание, заданное на множестве всех приведенных квадратных уравнений. На заданный вопрос ответить нельзя.

б) Утверждение является высказыванием: оно ложно, что показывает контрпример  $x^2 - 1 = 0$ .

в) Утверждение является высказыванием, причем истинным. Сумма корней уравнения

$$x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} = 0$$

равна свободному члену.

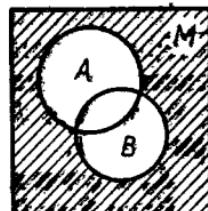
22.  $A_1$  истинно при всех значениях  $k$ , кроме значения  $k = 0$ .

В самом деле, если  $k = 0$ , то при  $l = 0$  неравенство не имеет решений. Если  $k > 0$ , то при любом  $l$  решением неравенства является, например,  $x = 1$ . Если  $k < 0$ , то при любом  $l$  решением является, например,  $x = -1$ .

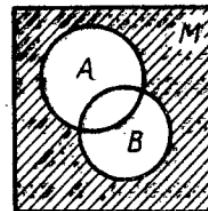
$A_2$  истинно только при  $k = 0$ .

Если  $k = 0$ , то, например, при  $l = 1$  неравенство верно при всех  $x$ . Если  $k > 0$ , то, каково бы ни было  $l$ , всегда можно взять  $x$  таким (отрицательным и большим по абсолютной величине), что  $kx + l^2$  будет меньше нуля. Если  $k < 0$ , то для любого  $l$  можно найти  $x$  так, чтобы  $kx + l^2$  было меньше нуля. Впрочем, то, что высказывание  $A_2$  истинно только при  $k = 0$ , следует уже из предыдущего, если учесть, что  $A_2 = \bar{A}_1$ .

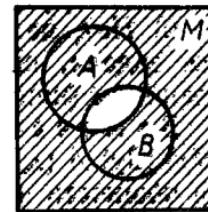
$A_3$  ложно при всех значениях  $k$ .



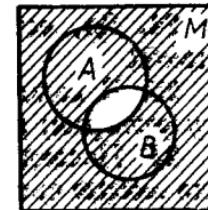
а)



б)



в)



г)

Рис. 12

Действительно, если  $k = 0$ , то для  $l = 0$  неравенство будет неверным, например, при  $x = 1$ . Если  $k > 0$ , то для  $l = 0$  неравенство не будет выполняться, например, при  $x = -1$ . Если  $k < 0$ , то для  $l = 0$  неравенство не будет справедливо, например, при  $x = 1$ .

$A_4$  истинно при всех значениях  $k$ .

Если  $k = 0$ , то за  $l$  можно взять единицу и тогда  $x = 0$ , например, есть решение неравенства. Если  $k > 0$ , то для  $l = 0$  решением неравенства будет  $x = 1$ . Если  $k < 0$ , то для  $l = 0$  решением будет  $x = -1$ . Заметим также, что истинность  $A_4$  при всех значениях  $k$  следует сразу из доказанной уже ложности  $A_3$  при всех значениях  $k$ , так как  $A_4 = \overline{A}_3$ .

23. а) Да, может. Такой контрольной будет, например, контрольная, в которой количество задач равно количеству учеников, причем первый ученик решил только первую задачу, второй — только вторую, третий — только третью и т. д.

б) Нет, не может. Из того, что существует ученик, решивший все задачи, следует, что каждая задача решена хотя бы одним учеником (например, тем, который решил все задачи).

Замечание. Этот пример показывает, что в высказывании  $(\forall x)(\exists y) A(x, y)$  нельзя, вообще говоря, поменять местами знаки общности и существования, т. е. написать

$$(\exists y)(\forall x) A(x, y).$$

24. Да, есть. Эквивалентными являются второй и четвертый ответы.

25. В каждом поезде, идущем из Москвы во Владивосток, есть (существует) вагон, в котором все места заняты.

26. Последовательность  $(x_n)$  называется неограниченной, если для любого числа  $C$  существует номер  $n$  такой, что  $|x_n| \geq C$ . Слова «существует число  $C$ » и «для всех номеров  $n$ » при построении отрицания заменены соответственно словами «для любого числа  $C$ » и «существует номер  $n$ ». Кроме того, неравенство  $|x_n| < C$  заменяется неравенством противоположного смысла. Если ввести предикат

$$A(n, C) \equiv \{|x_n| < C\},$$

то можно сказать, что последовательность будет ограничена, если  $(\exists C)(\forall n) A(n, C)$ ,

и неограничена, если

$$(\forall C)(\exists n) \overline{A(n, C)}.$$

27. Число  $a$  не является пределом последовательности  $(x_n)$ , если существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что для каждого натурального числа  $N$  найдется такое натуральное число  $n > N$ , что

$$|x_n - a| \geq \varepsilon.$$

28. Последовательность  $(x_n)$  не имеет предела, если для каждого числа  $a$  существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что для каждого на-

турального числа  $N$  найдется такое  $n > N$ , что  $|x_n - a| \geq \varepsilon$ .

29. Высказывание  $A$  истинно, если  $|a| < 2$ . Так как  $\sqrt{a^2 - 6a + 9} = |a - 3|$ , то  $B$  истинно при  $a \leq 3$ . Легко видеть, что  $C$  истинно при  $-1 < a < 7$ . Два и только два высказывания будут истинны, если  $-2 < a \leq -1$  или  $2 \leq a \leq 3$ .

Из трех высказываний  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  и  $\bar{C}$  истинны, по крайней мере, два, если

$$a \leq -2 \text{ или } a > 3.$$

30. Определим значения  $a$ , при которых истинно каждое из высказываний  $A$ ,  $B$  и  $C$  порознь. Если  $a < 0$ , то уравнение  $x + \sqrt{x} = a$  не имеет решений, так как левая часть  $x + \sqrt{x} \geq 0$ . Если  $a \geq 0$ , то уравнение  $x + \sqrt{x} = a$  имеет решение. Следовательно,  $A$  истинно тогда и только тогда, когда  $a < 0$ .

Рассмотрим уравнение  $\sqrt{x^2 - 1} = a - x$ . Отметим, что при  $a = 0$  решений нет. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x^2 - 1 = a^2 - 2ax + x^2,$$

откуда

$$x = \frac{a^2 + 1}{2a}.$$

Так как при решении обе части уравнения возводились в квадрат, необходимо сделать проверку:

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 + 1}{2a}\right)^2 - 1} = a - \frac{a^2 + 1}{2a};$$

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 - 1}{a}\right)^2} = \frac{a^2 - 1}{a};$$

$$\left|\frac{a^2 - 1}{a}\right| = \frac{a^2 - 1}{a}.$$

Теперь видно, что уравнение имеет решение только при значениях  $a$ , удовлетворяющих неравенству  $\frac{a^2 - 1}{a} \geq 0$ , т. е. при  $-1 \leq a < 0$  или  $a \geq 1$ .

Следовательно,  $B$  истинно тогда и только тогда, когда  $-1 \leq a < 0$  или  $a \geq 1$ .

Перейдем к исследованию высказывания  $C$ . Если  $a = 1$ , левая часть неравенства равна 2 и неравенство верно для всех  $x$ . Если  $a = -1$ , неравенство принимает вид  $-4x + 2 > 0$ . Оно не выполняется, например, для  $x = 1$ . Если  $a \neq 1$  и  $a \neq -1$ , то в левой части неравенства стоит квадратный трехчлен; для положительности его необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} (a-1)^2 - 2(a^2 - 1) < 0, \\ a^2 - 1 > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a^2 + 2a - 3 > 0, \\ a^2 - 1 > 0, \end{cases}$$

отсюда  $a < -3$  или  $a > 1$ .

Таким образом, С истинно тогда и только тогда, когда  $a < -3$  или  $a \geq 1$ .

Два и только два из трех высказываний A, B и C будут истинны тогда и только тогда, когда истинно высказывание

$$(A \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge \bar{B} \wedge C) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge C),$$

т. е. при

$$a < -3, \quad -1 \leq a < 0, \quad a \geq 1.$$

31. Одно и только одно из данных трех высказываний будет ложно тогда и только тогда, когда истинно высказывание

$$(A \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge \bar{B} \wedge C) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge C).$$

Рассмотрим все три случая:

1. Истинно  $A \wedge B \wedge \bar{C}$ . A и B истинны при  $x = 1$  и  $x = 2$ , но при  $x = 1$  истинно C, и, следовательно,  $x = 1$  не годится. Остается  $x = 2$ .

2. Истинно  $A \wedge \bar{B} \wedge C$ .

A и C истинны только при  $x = 1$ , но при  $x = 1$  истинно B. Следовательно,  $A \wedge \bar{B} \wedge C$  ложно при всех значениях  $x$ .

3. Истинно  $\bar{A} \wedge B \wedge C$ .

Легко убедиться в том, что B истинно только при  $x = 1$ ,  $x = 2$  и  $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$  (постройте график параболы  $y = x^2 - 3x$ ).

Первые два значения  $x$  не подходят, так как при них  $\bar{A}$  ложно. Легко проверить, что при  $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$  высказывание C истинно.

Таким образом, только при  $x = 2$  и  $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

одно и только одно из данных трех высказываний будет ложно.

32. (9, 2) и (17, 6).

33. Исключая  $y$  из системы уравнений, получаем

$$x^2 - 4(b - ax)^2 = 1$$

или

$$(1 - 4a^2)x^2 + 8abx - 4b^2 - 1 = 0.$$

Если  $a = \pm \frac{1}{2}$ , то при  $b = 0$  решений нет. Если  $a \neq \frac{1}{2}$ , то для существования действительных решений необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$16a^2b^2 + (4b^2 + 1)(1 - 4a^2) \geq 0,$$

т. е.

$$4b^2 - 4a^2 + 1 \geq 0.$$

Это неравенство будет справедливо при *всех* значениях  $b$  тогда и только тогда, когда  $|a| \leq \frac{1}{2}$ . Так как  $a \neq \pm \frac{b}{2}$ , то получаем систему имеет действительные решения при любых значениях  $b$ , если  $|a| < \frac{1}{2}$ .

**34.** Если коэффициенты при переменных  $x$  и  $y$  в системе уравнений не пропорциональны, то система имеет решение при любых свободных членах. Следовательно, если

$$\frac{b}{b-6} \neq -\frac{1}{2b},$$

т. е. если  $b \neq -2$  и  $b \neq \frac{3}{2}$ , то при любом  $a$  система имеет решение.

Если  $b = -2$ , то система принимает вид

$$\begin{cases} -2x - y = ac^2, \\ -8x - 4y = a + 1. \end{cases}$$

Для существования решения коэффициенты при переменных и свободные члены уравнений должны быть соответственно пропорциональны, т. е.

$$4ac^2 = a + 1..$$

Полученное уравнение — квадратное относительно  $c$ . Для того чтобы оно имело решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$1 + 16a \geq 0,$$

т. е.  $a \geq -\frac{1}{16}$ .

Если  $b = \frac{3}{2}$ , то система принимает вид

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2ac^2, \\ -9x + 6y = 2c + 2. \end{cases}$$

Аналогичные рассуждения дают

$$\begin{aligned} 6ac^2 + 2c + 2 &= 0; \\ 1 - 12a &\geq 0; \quad a \leq \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Таким образом, если  $-\frac{1}{16} \leq a \leq \frac{1}{12}$ , то при любом  $b$  найдется такое  $c$ , при котором система имеет хотя бы одно решение.

35.  $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{4}$ .

36. в) Условием теоремы является предикат

$A = \{\text{Уравнение } ax^2 + bx + c = 0 \text{ не имеет двух различных действительных корней}\}.$

Предикат

$B \equiv \{b^2 - 4ac \leq 0\}$  является заключением теоремы. Оба предиката определены на множестве всех квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0$$

с действительными коэффициентами  $a, b, c$ , и теорема утверждает, что для любого квадратного уравнения верна импликация  $A \Rightarrow B$ .

Обратная теорема  $B \Rightarrow A$ : если дискриминант квадратного уравнения неположителен, то уравнение не имеет двух различных действительных корней.

Противоположная теорема  $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ : если квадратное уравнение имеет два различных действительных корня, то дискриминант этого уравнения положителен.

Противоположная обратной  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ : если дискриминант уравнения положителен, то оно имеет два различных действительных корня.

Все четыре теоремы верны.

37. а) Рассмотрим предикаты, определенные на множестве всех функций

$$A \equiv \{ \text{Функция дифференцируема в точке } x_0 \}$$

и

$$B \equiv \{ \text{Функция непрерывна в точке } x_0 \}.$$

Тогда данная в условии теорема может быть записана следующим образом:

$$A \Rightarrow B.$$

Обратная теорема  $B \Rightarrow A$ : если функция непрерывна в точке  $x_0$ , то она дифференцируема в этой точке.

Противоположная теорема  $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ : если функция не дифференцируема в точке  $x_0$ , то она не может быть непрерывной в этой точке.

Противоположная обратной  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ : если функция не является непрерывной в точке  $x_0$ , то она не дифференцируема в этой точке.

Прямая теорема и противоположная обратной верны. Обратная и противоположная неверны (контрпример  $y(x) = |x|$ ,  $x_0 = 0$ ).

б) Обратное утверждение неверно. В качестве контрпримера можно взять

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — рациональное число.} \end{cases}$$

38. а) Теорема верна.

б) Теорема неверна.

39. Пусть  $A \equiv \{ \text{Каждое из двух слагаемых делится на 7} \}$ ,  
 $B \equiv \{ \text{Сумма делится на 7} \}$ ,  
 $C \equiv \{ \text{По крайней мере, одно из слагаемых делится на 7} \}$ .

Тогда теоремы могут быть записаны так:

1.  $A \Rightarrow B$ .
2.  $\overline{C} \Rightarrow \overline{B}$ .
3.  $C \Rightarrow B$ .
4.  $B \Rightarrow A$ .
5.  $\overline{B} \Rightarrow \overline{C}$ .
6.  $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ .

Таким образом,

1 и 4, 2 и 5 являются взаимно-обратными;

2 и 3, 4 и 6 — взаимно противоположными;

1 и 6, 3 и 5 являются противоположными обратным.

Теоремы 1 и 6 верны, остальные неверны.

40. Да, могут.

41. г) Необходимо и достаточно.

Необходимость. Пусть  $y = ax^2 + bx + c$  принимает целые значения при всех  $x$ . Тогда, если  $x = 0$ , то  $y = c$  и, следовательно,  $c$  — целое.  $y(1) = a + b + c$ , значит,  $a + b$  — целое.  $y(-1) = a - b + c$  тоже целое число. Так как  $a + b + c$  и  $a - b + c$  — целые числа, то их сумма  $2a + 2c$  есть целое число, но  $2c$  — целое и, следовательно,  $2a$  — целое.

Достаточность. Пусть  $2a, a + b, c$  — целые числа, тогда при  $x$  целом  $y$  будет целым, что видно из представления для  $y$ :

$$y = 2a \frac{x(x-1)}{2} + (a+b)x + c.$$

42. в) Многоточие следует заменить словом «тогда». Пусть  $2a + 4b = 1$ , тогда неравенство  $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{20}$  справедливо.

В самом деле, неравенство  $(5b - 1)^2 \geq 0$  верно, но из него следует, что

$$\begin{aligned} 25b^2 - 10b + 1 &\geq 0, \\ 5b^2 - 2b + \frac{1}{5} &\geq 0, \\ b^2 + \frac{1}{4} - 2b + 4b^2 &\geq \frac{1}{20}, \\ \left(\frac{1}{2} - 2b\right)^2 + b^2 &\geq \frac{1}{20}, \\ a^2 + b^2 &\geq \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Условие  $2a + 4b = 1$  не является необходимым условием для выполнения неравенства  $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{20}$ . Чтобы доказать это, достаточно взять  $a = 1$  и  $b = 0$ .

43. Утверждение неверно.

44. Утверждение верно.

Очевидно, что никакая точка плоскости, расположенная вне данного угла  $ABC$  (рис. 13) или на его границе, не может быть

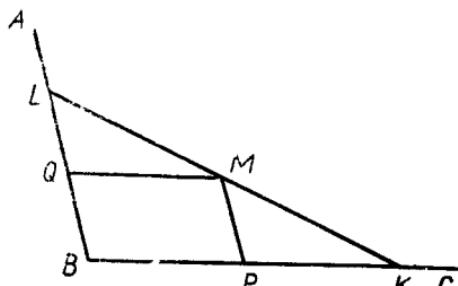


Рис. 18.

ла  $ABC$ , и, пусть  $P$  — точка пересечения этой прямой со стороной угла  $BC$ . Отложим на стороне  $BC$  отрезок  $PK$ , конгруэнтный отрезку  $BP$ , через точки  $K$  и  $M$  проведем прямую. Отрезок  $PM$  является средней линией треугольника  $KBL$ , т. е.  $M$  — середина отрезка  $KL$ .

45. Утверждение неверно.

46. Утверждение верно.

47. Утверждение неверно.

48. Утверждение верно. Докажем это. Пусть  $n$  — простое число, тогда  $n - 1$  и  $n + 1$  — два последовательных четных числа, и, следовательно, их произведение  $n^2 - 1$  делится на 8. Помимо этого, из трех последовательных чисел  $n - 1$ ,  $n$ ,  $n + 1$  одно должно делиться на 3, но  $n$  не делится на 3, а поэтому  $n^2 - 1$  обязано делиться на 9.

49. Утверждение неверно. Для доказательства достаточно рассмотреть  $n = 25$ .

50. Высказывание  $A(2)$  истинно. Предположим, что  $A(n)$  верно при  $n = k$ . Тогда, так как  $2^{2k+1} + 1 = [(2^{2k} + 1) - 1]^2 + 1$ , то число, стоящее в квадратных скобках, оканчивается цифрой 6, квадрат его также оканчивается цифрой 6, и, следовательно,  $A(n)$  истинно при  $n = k + 1$ .

51.  $A(0)$  истинно. Предположим, что истинно  $A(k)$ , тогда так как

$$5 \cdot 2^{3(n+1)+1} + 3^{3(n+1)+2} = 8 \cdot 5 \cdot 2^{3n+1} + 27 \cdot 3^{3n+2} = \\ = 27(5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+1}) - 19 \cdot 5 \cdot 2^{3n+1},$$

то истинно и  $A(k + 1)$ .

52. Пусть неравенство верно для  $n = k$ , т. е.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}}.$$

Умножив обе части неравенства на  $\frac{2k+1}{2(k+1)}$ , получим

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} \leqslant \frac{2k+1}{2(k+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3k+1}}.$$

серединой отрезка, концы которого лежат на разных сторонах угла. С другой стороны, каждая точка, лежащая внутри угла, является серединой некоторого отрезка, концы которого расположены на сторонах угла. Докажем это. Пусть  $M$  — произвольная точка, лежащая внутри угла. Проведем через нее прямую параллельно стороне  $BA$  угла

Остается доказать, что

$$\frac{2k+1}{2(k+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3k+1}} < \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$$

Неравенство (\*) можно записать так:

$$(2k+1)\sqrt{3k+1} < (2k+2)\sqrt{3k+1} \text{ или} \\ (4k^2 + 4k + 1)(3k + 1) < (4k^2 + 8k + 4)(3k + 1),$$

откуда

$$12k^3 + 28k^2 + 19k + 4 < 12k^3 + 28k^2 + 20k + 4,$$

т. е.

$$19 < 20.$$

Последнее неравенство верно, но из него следует предыдущее и т. д.; таким образом, убеждаемся в справедливости неравенства (\*).

53.  $a_n = 2^n + 2^{-n}$ .

54. При  $n = 1$  имеем верное равенство  $\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$ . Предположив, что равенство верно при  $n = k$ , получаем

$$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}{k+1 \text{ радиан}} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}},$$

т. е. равенство справедливо при  $n = k + 1$ .

55. Пусть сумма денег равна  $n$  копейкам. Если  $n = 8$ , то утверждение верно. Пусть утверждение верно для  $n = k$ . Могут представиться только два случая для размена суммы в  $k$  копеек:

а) потребовались только трехкопеечные монеты,

б) потребовалась хотя бы одна пятикопеечная монета.

В случае а) удаляем три трехкопеечные монеты, добавляем две пятикопеечные и тем самым размениваем сумму в  $k+1$  копеек. В случае б) удаляем одну пятикопеечную монету, добавляем две трехкопеечные монеты и тем самым размениваем сумму в  $k+1$  копеек.

56. Окружность, или точка, или пустое множество.

57.  $n^2 - n + 2$ .

58. В случае одной прямой утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно при  $n = k$ . Пусть теперь на плоскости произвольным образом проведено  $k+1$  прямых. Докажем, что черной и белой краской можно закрасить плоскость так, что любые две части, имеющие общую сторону, будут окрашены в разные цвета. Для этого выберем из проведенных прямых одну прямую и назовем ее для удобства дополнительной. Остальные  $k$  прямых назовем основными. Закрасим плоскость нужным нам образом, учитывая только основные прямые. По индуктивному предположению это сделать можно. Дополнительная прямая разбивает теперь уже раскрашенную плоскость на две полуплоскости. В одной из них изменим цвет каждой части на противоположный. Покажем, что после

этого вся плоскость с учетом всех  $k + 1$  прямых закрашена так, как нам надо. Возьмем любые два соседних участка. Они разделяются либо какой-либо из основных прямых, либо дополнительной. В первом случае эти участки были первоначально окрашены в разные цвета, а затем либо оба поменяли свой цвет на противоположный, либо не меняли вообще свой цвет. Таким образом, в этом первом случае они окрашены в разные цвета. Во втором случае эти участки первоначально были окрашены одинаково; а затем цвет одного из них был изменен на противоположный, т. е. и в этом случае они окрашены в разные цвета. Таким образом, из возможности окрасить плоскость нужным нам способом в случае  $k$  прямых вытекает, что и в случае  $k + 1$  прямых такая раскраска возможна.

**59.** При  $n = 1$  утверждение верно. Предположим, что оно верно при  $n = k$ , т. е. что  $k^p - k$  делится на простое число  $p$ . Покажем, что из сделанного допущения вытекает делимость на  $p$  числа  $(k + 1)^p - (k + 1)$ . Для доказательства воспользуемся формулой Ньютона:

$$(k + 1)^p - (k + 1) = k^p - k + C_p^1 k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} k.$$

Легко видеть, что все коэффициенты  $C_p^1, C_p^2, \dots, C_p^{p-1}$  делятся на  $p$ , так как  $p$  — простое число; по индуктивному предположению делится на  $p$  и  $k^p - k$ , а значит, и  $(k + 1)^p - (k + 1)$ .

**60.** Если  $n = 1$ , то по условию  $x_1 = 1$ , и, следовательно, можно написать  $x_1 \geq 1$ , т. е. для  $n = 1$  утверждение верно. Пусть утверждение верно для  $n = k$ . Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$  — произвольные положительные числа и

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1.$$

Могут представиться два случая: либо все эти числа равны 1, и тогда их сумма равна  $k + 1$ , и неравенство доказано, либо среди этих чисел есть хотя бы одно число, не равное единице, и тогда обязательно есть, по крайней мере, еще одно число, не равное единице, причем если одно из них меньше единицы, то другое больше единицы. Не ограничивая общности, можно считать, что  $x_k > 1$ , а  $x_{k+1} < 1$ . Рассмотрим теперь  $k$  чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, (x_k x_{k+1}).$$

Произведение их равно единице, и, следовательно, по индуктивному предположению

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} \geq k.$$

Прибавим к обеим частям последнего неравенства  $x_k + x_{k+1}$ , перенесем  $x_k x_{k+1}$  направо и преобразуем правую часть неравенства:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} &\geq k - x_k x_{k+1} + x_k + x_{k+1} = k + 1 + \\ &+ x_k (1 - x_{k+1}) + x_{k+1} - 1 = k + 1 + x_k (1 - x_{k+1}) - (1 - x_{k+1}) = \\ &= k + 1 + (1 - x_{k+1})(x_k - 1) \geq k + 1. \end{aligned}$$

**61.** Это важное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим  $n$  чисел является простым следствием утверждения, доказанного в задаче 60. В самом деле, пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — произвольные положительные числа.

Рассмотрим  $n$  чисел

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}, \quad \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}.$$

Очевидно, что все эти числа положительны и произведение их равно единице. Следовательно, их сумма больше или равна  $n$ , т. е.

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} \geq n,$$

откуда

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

**62.** Истинность импликации  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$  доказана для всех  $n \geq 2$ . При  $n = 1$  доказательство не проходит.

**63.** При  $n = 1$  утверждение справедливо. Предположим, что оно верно для  $n = k$ , и докажем, что из этого предположения при любом натуральном значении  $k$  вытекает справедливость равенства при  $n = k + 1$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \dots + \sin kx + \sin(k+1)x &= \frac{\sin \frac{k}{2}x \sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} + \\ &+ \sin(k+1)x = \sin \frac{k+1}{2}x \left( \frac{\sin \frac{k}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} + 2 \cos \frac{k+1}{2}x \right) = \\ &= \sin \frac{k+1}{2}x \frac{\sin \frac{k}{2}x + 2 \cos \frac{k+1}{2}x \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \\ &= \sin \frac{k+1}{2}x \frac{\sin \frac{k}{2}x + \sin \frac{k+2}{2}x - \sin \frac{k}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \sin \frac{k+2}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}, \end{aligned}$$

т. е. равенство имеет место при  $n = k + 1$ .

**64.** Так как  $f_1(x) = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ,

$$f_2(x) = f \circ f = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x) = f \circ f \circ f = f \circ f_2 = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1 + f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1 + 3x^2}},$$

то возникает гипотеза, что

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + nx^2}}.$$

Докажем справедливость этой гипотезы методом математической индукции.

При  $n = 1$  утверждение, очевидно, верно. Предположим, что оно верно при  $n = k$ , т. е.

$$f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + kx^2}},$$

и докажем, что

$$f_{k+1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + (k+1)x^2}}.$$

В самом деле,

$$f_{k+1}(x) = f \circ f_k = \frac{\frac{x}{\sqrt{1 + kx^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1 + kx^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + (k+1)x^2}},$$

что и требовалось доказать.

Теперь легко находим

$$f'_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + nx^2}} - \frac{nx^2}{\sqrt{(1 + nx^2)^3}},$$

и, следовательно,

$$f'_n(0) = 1.$$

### Рекомендуемая литература

1. В. Г. Болтязанский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин. Лекции и задачи по элементарной математике. Глава I. М., «Наука», 1971.
2. В. Г. Болтязанский. Как устроена теорема? — «Математика в школе», 1973, № 1.
3. Ю. А. Гастев. С чего начинается логика. — «Квант», 1975, № 1.

## **СОДЕРЖАНИЕ**

От автора . . . . .	3
§ 1. Высказывания. Операции над высказываниями . . . . .	5
§ 2. Неопределенные высказывания (предикаты). Знаки общности и существования . . . . .	20
§ 3. Приложения логики к некоторым вопросам математики . . . . .	25
Задачи . . . . .	33
Решения, указания, ответы . . . . .	44
Рекомендуемая литература . . . . .	62