Ж. ЛА-САЛЛЬ
С. ЛЕФШЕЦ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

Stability by Liapunov's Direct Method

With Applications

JOSEPH LA SALLE

and

SOLOMON LEFSCHETZ

1961

New York *ACADEMIC PRESS* *London*

Ж. ЛА-САЛЛЬ, С. ЛЕФШЕЦ

Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова

Перевод с английского
Н. Х. РОЗОВА

Под редакцией
Ф. Р. ГАНТМАХЕРА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1964

АННОТАЦИЯ

Книга представляет собой изложение основ теории устойчивости по Ляпунову и его прямого метода, доступное инженерам. Весь необходимый для чтения книги математический аппарат, выходящий за пределы программы технического вуза, приводится в первой ее главе.

Излагая прямой метод Ляпунова, авторы широко используют геометрические интерпретации и приводят примеры приложения полученных результатов к теории автоматического регулирования. Книга содержит и весьма интересный новый материал по распространению метода Ляпунова.

Книга предназначена для математиков и инженеров, занимающихся вопросами устойчивости и автоматического регулирования. Она может быть использована студентами в качестве учебного пособия при изучении теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и теории автоматического регулирования.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория устойчивости, основы которой были изложены в 1892 г. в известном мемуаре Ляпунова, в последние десятилетия усиленно развивалась; особенно широкое распространение получил прямой метод Ляпунова, который позволяет исследовать устойчивость с помощью специально подобранных „пробных“ функций (так называемых функций Ляпунова), не прибегая к вычислению самих решений дифференциальных уравнений.

В настоящее время теория устойчивости Ляпунова завоевала всеобщее признание и с большим успехом применяется в теории автоматического регулирования, а также в смежных областях прикладной механики и техники. Поэтому вопросами устойчивости интересуются не только математики и механики, но и значительно более широкие круги инженеров и специалистов в разных областях техники. В то же время советские книги по теории устойчивости: курсы Н. Г. Четаева и И. Г. Малкина, монографии Н. Н. Красовского и В. И. Зубова и др., имеют фундаментальный характер и рассчитаны на сравнительно узкий класс квалифицированных читателей. В советской научной литературе нет „введения“ в теорию устойчивости, которое в более доступной форме знакомило бы читателей с основными идеями, положениями и применениями ляпуновской теории устойчивости.

Именно этот пробел в нашей литературе и восполняет предлагаемая советскому читателю в русском переводе книга американских ученых Ж. Ла-Салля и С. Лефшеца, вышедшая в США в 1961 г. Написанная с большим педагогическим мастерством и содержащая сравнительно небольшой по объему, но интересно отобранный материал, а также многочисленные примеры, книга не предполагает фундаментальной математической подготовки у читателей. Поэтому в начале книги излагаются вспомогательные сведения о матрицах, квадратичных формах и дифференциальных уравнениях, которые затем используются в книге.

В то же время книга содержит и интересный новый материал, который отсутствует в основных курсах по теории устойчивости. Здесь следует обратить внимание читателя на § 13 гл. II, где излагаются различные расширения критерия асимптотической устойчивости. В последней гл. IV излагаются результаты исследований японских ученых Окамура и Йошизава, а также одного из авторов книги, Ж. Ла-Салля, посвященных решениям с конечным временем определения, устойчивости по Лагранжу, так называемой „практической“ устойчивости и другим вопросам. Все эти исследования проводятся с помощью обобщенного прямого метода Ляпунова.

При переводе книги ряд терминов из оригинала был заменен более привычными для советского читателя терминами. Соответствующие указания даны в подстрочных примечаниях. Затем (уже без соответствующих указаний) исправлены мелкие ошибки, замеченные в оригинале книги.

Один из авторов книги, виднейший американский математик С. Лефшец, хорошо известен советским читателям как автор недавно переведенной на русский язык и пользующейся успехом книги „Геометрическая теория дифференциальных уравнений“ (ИЛ, 1961). Имеются все основания предполагать, что и настоящая книга встретит хороший прием у советского читателя.

Ф. Р. Гантмахер

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

В развитии теории дифференциальных уравнений легко различаются два противоположных направления. К первому направлению можно отнести исследования, в которых отражено стремление получить решение либо в „замкнутой форме“ (что возможно лишь в редких случаях), либо в результате некоторого приближенного процесса. Целью исследований, относящихся ко второму направлению, является получение информации о свойствах всего множества решений уравнения, причем не делается попыток для отыскания точных или приближенных решений этого уравнения.

Именно так формулируются задачи качественной теории дифференциальных уравнений, которая была создана А. Пуанкаре еще в 1880 году и продолжает интенсивно развиваться в настоящее время.

Главная задача качественной теории состоит в изучении поведения решений, близких к некоторому заданному решению. Это решение изображается кривой или траекторией C в некотором пространстве. Возникает вопрос, будет ли траектория D, начинающаяся вблизи C, все время оставаться в окрестности траектории C (тогда C — *устойчивая траектория*), или эта траектория будет удаляться от C (тогда C — *неустойчивая траектория*). Таким образом, исследование устойчивости входит в круг задач качественной теории дифференциальных уравнений.

Без преувеличения можно сказать, что создателем теории устойчивости является А. М. Ляпунов. Отправной точкой всех исследований в этом направлении служит его классическая работа „Общая задача об устойчивости движения“, впервые появившаяся в России в 1892 году и переведенная на многие языки. Этот труд является настольной книгой ученых советской школы специалистов по теории дифференциальных уравнений, школы, которая по праву занимает сегодня ведущее место в мире.

В своей работе А. М. Ляпунов изучает вопросы устойчивости с помощью двух различных методов. Для использования так называемого *первого метода* Ляпунова необходимо предположить, что исследуемое решение известно; этот метод применим лишь к ограниченному классу важных случаев. Напротив, *второй*, или *прямой метод* Ляпунова является чрезвычайно общим и мощным, и, самое главное, *для применения этого метода не нужно знать самих решений* — в этом его неоценимое преимущество.

Целью настоящей книги является изложение в общих чертах теории устойчивости Ляпунова и особенно — ознакомление с его прямым методом. Все изложение ведется на уровне, вполне доступном инженеру с некоторой математической подготовкой. Конечно, мы не в состоянии полностью избежать чисто математических построений; чтобы облегчить их понимание, мы кратко излагаем необходимые сведения, которые для большинства наших читателей могут оказаться достаточно известными.

Мы особенно польщены тем, что эта книга включена в серию, которую организовал и издает наш старый и любимый друг Ричард Беллман [1]). Мы хотели бы также отметить очень приятное для нас сотрудничество с издательством Academic Press и ту большую работу, которая была проделана по изданию книги.

---

[1]) В США книга издана в серии монографий и учебников „Mathematics in Science and Engineering", выходящей под общей редакцией известного американского математика Р. Беллмана.— *Прим. ред.*

Глава I

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ: ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ

§ 1. Пространства, расстояния, векторы

Состояние динамической системы (например, движущегося твердого тела, частей работающей машины, электрической цепи и даже экономической схемы), т. е. ее положение в пространстве и скорость, в каждый момент времени можно описать значениями некоторых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

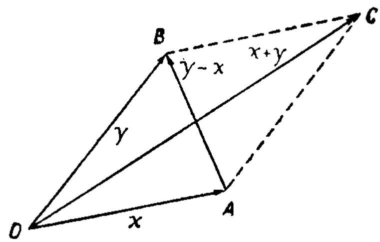


Рис. 1.

Мы будем представлять себе эти параметры как координаты точки x в n-мерном пространстве E^n или, равным образом, как координаты (компоненты) вектора x в том же пространстве. Тем самым в E^n отождествляются точки и векторы[1]). Это позволяет определить операции над точками по аналогии с векторным исчислением. Мы напомним здесь соответствующие правила. Если $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — два вектора (или две точки), то

$$x + y = \{x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_n + y_n\},$$

$$kx = \{kx_1,\ kx_2,\ \ldots,\ kx_n\},$$

$$0 = \{0,\ 0,\ \ldots,\ 0\} \quad \text{(начало координат)},$$

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

(скалярное произведение).

Напомним также следующее хорошо известное построение. Пусть векторы x и y изображены направленными

[1]) Точнее, отождествляется точка x и вектор, идущий из начала координат в точку x. — *Прим. перев.*

отрезками OA и OB (рис. 1). Построим параллелограмм $OACB$. Тогда диагональ OC изображает сумму $x+y$, а диагональ AB — разность $y-x$.

Чтобы получить ***евклидово*** пространство, введем следующий способ измерения длины, т. е. расстояния между парой точек. Из рис. 1 непосредственно видно, что расстояние между точками A и B равно длине отрезка AB или, что то же самое, длине вектора $y-x$. Способ измерения расстояний введем в два этапа. Определим сначала *длину* (*модуль*) вектора x по формуле

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{1.1}$$

После этого ***расстоянием*** от точки A до точки B естественно назвать величину

$$d(x, y) = \|y - x\| = \\ = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}. \tag{1.2}$$

Так, например, при $n=2$ каждый вектор (каждая точка) характеризуется двумя координатами x_1 и x_2. Поэтому длина вектора x в этом случае выражается формулой

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

а расстояние между двумя точками — формулой

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Эти формулы известны из аналитической геометрии.

Заметим, что формулы (1.1) и (1.2) имеют определенный реальный смысл, если смотреть на них с практической точки зрения. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — параметры динамической системы S, и пусть $S(x)$ и $S(y)$ — два ее состояния. „Близость" этих состояний можно характеризовать величиной $d(x, y)$. Действительно, если $d(x, y) < \varepsilon$, то абсолютная величина разности соответствующих значений каждого из параметров меньше ε:

$$|y_k - x_k| < \varepsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

так что состояния системы и в самом деле близки друг к другу.

Может случиться, что компоненты вектора x являются функциями некоторой переменной t; тогда $x(t)$ означает вектор $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$. Иногда вместо $x(t)$ пишут просто x, подразумевая вектор, зависящий от t. Если функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ дифференцируемы, то $\dot{x}(t)$ означает вектор $\{\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \ldots, \dot{x}_n(t)\}$. Аналогично определяется вторая производная $\ddot{x}(t)$, третья $\dddot{x}(t)$ и т. д.

Пример. Если материальная точка P массы m с радиусом-вектором x с течением времени t некоторым образом перемещается в пространстве, то вектор x есть функция времени $x(t)$. Тогда $\dot{x}(t)$ — вектор скорости точки P, а $\ddot{x}(t)$ — вектор ускорения этой же точки. Если F — вектор силы, приложенной к точке P, то движение описывается вторым законом Ньютона $m\ddot{x} = F$.

Скалярную действительную функцую $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, зависящую от компонент вектора x и переменной t, можно представлять себе как функцию вектора x и скаляра t и обозначать ее через $f(x, t)$.

Если имеется s таких функций

$$f_1(x, t),\ f_2(x, t),\ \ldots,\ f_s(x, t),$$

то их в совокупности можно рассматривать как компоненты s-мерного вектора f, который является функцией n-мерного вектора x и переменной t; поэтому его удобно обозначать просто $f(x, t)$. Здесь, в отличие от того, что было ранее, f означает s-мерный вектор, а не скаляр (т. е. одномерный вектор). Чтобы избежать недоразумений, необходимо всякий раз оговаривать, понимается ли под f вектор или скаляр.

Пусть скалярная функция $f(x_1, \ldots x_n, t) = f(x, t)$ имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$. Их можно считать компонентами n-мерного вектора, который называется *градиентом* и обозначается df/dx или grad f.

Предположим, далее, что f имеет также частную производную df/dx по t. Если $x = x(t)$ — функция переменной t, то справедливо следующее хорошо знакомое правило дифференцирования:

$$\frac{df}{dt}=\dot{f}(x,\ t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\dot{x}_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\dot{x}_n+\frac{\partial f}{\partial t}=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial t}=\operatorname{grad} f\cdot\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial t}. \qquad (1.3)$$

§ 2. Матрицы и определители

В дальнейшем мы будем широко использовать матрицы и векторы; целесообразно поэтому остановиться на этих понятиях несколько подробнее.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел (действительных или комплексных). Например,

$$\begin{pmatrix} 2{,}1 & 2{,}6 & -4 & -3 \\ -\frac{3}{2}i & 0 & 1 & 1{,}6 \\ 6 & 4i & -0{,}1 & 7 \end{pmatrix}$$

— матрица, состоящая из 3 *строк* и 4 *столбцов*. Матрица общего вида с буквенными элементами, имеющая m строк и n столбцов, записывается в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Мы будем говорить, что это *$m\times n$-матрица*. Такую матрицу для краткости удобно обозначать одной буквой A или символом (a_{ij}), где индекс i принимает значения $1,\ 2,\ \ldots,\ m$, а j — значения $1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Напомним следующие основные операции над матрицами.

Сложение матриц. Если $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ — две $m\times n$-матрицы, то их *суммой* $A+B$ называется $m\times n$-матрица $(a_{ij}+b_{ij})$, т. е.

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

(одинаково расположенные элементы складываются).

Произведение двух матриц. Если $A=(a_{ij})$ является $m\times n$-матрицей, а $B=(b_{ij})$ является $n\times p$-матрицей (т. е. матрица B имеет столько же строк, сколько столбцов имеет матрица A), то их *произведением* AB называется $m\times p$-матрица $C=(c_{ij})$, элементы которой определяются равенствами

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj},$$
$$i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, p,$$

или короче[1])

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, p.$$

Умножение матрицы на число. Если k — некоторое (действительное или комплексное) число, то произведение kA означает матрицу (ka_{ij}): все элементы матрицы A умножаются на k.

Транспонирование матрицы. Если в матрице A поменять ролями строки и столбцы, то получившаяся $n\times m$-матрица называется *транспонированной* и обозначается символом A':

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Эту формулу легко запомнить, если заметить, что элемент c_{ij} матрицы C, стоящий на пересечении i-й строки с j-м столбцом, является скалярным произведением i-й вектор-строки матрицы A на j-й вектор-столбец матрицы B. — *Прим. перев.*

Пример. Возьмем две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix};$$

тогда [1])

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad AB' = \begin{pmatrix} 10 & 28 \\ -28 & -73 \end{pmatrix},$$

$$6A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 18 \\ -24 & -30 & -36 \end{pmatrix}.$$

Квадратные матрицы. Эти матрицы представляют особый интерес. Матрица (2.1) называется *квадратной*, если она имеет одинаковое число строк и столбцов: $m = n$. Тогда говорят, что это матрица *порядка* n. Квадратные матрицы одного и того же порядка всегда можно складывать и перемножать между собой.

Заслуживают внимания квадратные матрицы вида

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & 0 \\ & a_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & a_n \end{bmatrix},$$

где все невыписанные элементы равны нулю. Мы назовем матрицу такого вида *диагональной* и будем обозначать ее символом $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$.

Важнейшей диагональной матрицей является *единичная матрица порядка* n: $E_n = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$. Если порядок n известен, то такую матрицу часто обозначают просто через E. Если A — произвольная квадратная матрица порядка n, то справедливы равенства $E_n A = A E_n = A$; именно отсюда и произошел сам термин „единичная матрица". Заметим также, что

$$kE = \operatorname{diag}(k, \ldots, k); \qquad (kE)A = A(kE) = kA.$$

---

[1]) Заметим, что произведение AB для матриц этого примера вообще не определено. — *Прим. перев.*

В различных формулах часто бывает полезен символ Кронекера δ_{ij}, который определяется следующим образом:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i = j. \end{cases}$$

При помощи этого символа единичную матрицу можно записать так:

$$E = (\delta_{ij}).$$

Предостережение. Возьмем две квадратные матрицы A и B одного порядка. Для них определены оба прозведения AB и BA, которые, вообще говоря, не равны друг другу. Так, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

то

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 15 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 13 & 20 \end{pmatrix}.$$

Определители. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Как известно из алгебры, с этой матрицей можно связать некоторое число — ее *определитель*, который обозначается через[1] $|A|$.

Напомним некоторые свойства определителей:

а) Матрица A и транспонированная матрица A' имеют один и тот же определитель: $|A| = |A'|$.

б) Если поменять местами какие-нибудь две строки (или два столбца) матрицы, то ее определитель изменит знак. Следовательно, если две строки (или два столбца) матрицы одинаковы, то ее определитель равен нулю.

в) Если умножить все элементы одной строки (или одного столбца) матрицы на число k, то ее определитель умножится на это же число k.

г) Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей: $|AB| = |A|\,|B|$.

Заметим также, что $|\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)| = a_1 a_2 \ldots a_n$, и, следовательно, $|E| = 1$.

---

[1]) Иногда определитель матрицы A называют детерминантом и обозначают символом $\det A$. — *Прим. перев.*

Алгебраическое дополнение. Пусть через A_{ji} обозначен коэффициент при члене a_{ij} в разложении определителя $|A|$, называемый также *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij}. Напомним, что алгебраическое дополнение A_{ji} равно произведению числа $(-1)^{i+j}$ на определитель матрицы, получающейся из матрицы A вычеркиванием в ней i-й строки и j-го столбца (такой определитель называется *минором* определителя $|A|$). Разложение определителя $|A|$ по i-й строке дает соотношение

$$a_{i1}A_{1i}+a_{i2}A_{2i}+\ \ldots\ +a_{in}A_{ni}=|A|. \tag{2.2}$$

Если заменить элементы a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in} в левой части этого равенства соответственно на a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn}, $j \neq i$, то результат получится такой же, как если бы i-я и j-я строки матрицы A были одинаковы. Следовательно,

$$a_{j1}A_{1i}+a_{j2}A_{2i}+\ \ldots\ +a_{jn}A_{ni}=0, \quad j \neq i. \tag{2.3}$$

Соотношения (2.2) и (2.3) можно объединить в одну формулу

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{kj}=\delta_{ij}|A|.$$

Если обозначить через $\mathcal{A}$ матрицу (A_{ij}), то последнее равенство запишется так:

$$A\mathcal{A}=|A|E. \tag{2.4}$$

Обратная матрица. Предположим далее, что $|A| \neq 0$; в этом случае говорят, что A — *невырожденная*[1]) матрица. Для невырожденной матрицы можно определить числа $\alpha_{ij}=\frac{1}{|A|}A_{ij}$. Матрица (α_{ij}) называется *обратной* к невырожденной матрице A и обозначается символом A^{-1}; таким образом, $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathcal{A}$. Используя равенство (2.4), мы получаем

$$AA^{-1}=E. \tag{2.5}$$

---

[1]) Или *неособая. — Прим. перев.*

Как легко видеть, справедливо также равенство

$$A^{-1}A = E. \tag{2.6}$$

Действительно, так как $|A^{-1}| \neq 0$, то и A^{-1} имеют обратную матрицу B, т. е. $A^{-1}B = E$. Но тогда $A = AA^{-1}B = EB = B$, откуда $A^{-1}A = A^{-1}B = E$. Поскольку E — единичная матрица, соотношения (2.5) и (2.6) объясняют, почему матрицу A^{-1} называют „обратной“ к матрице A.

Важно помнить, что *элементы j-го столбца матрицы A^{-1} есть произведения числа $\frac{1}{|A|}$ на алгебраические дополнения соответствующих элементов j-й строки матрицы A.*

Характеристическое уравнение. С квадратной матрицей A связано важное уравнение

$$f(\lambda) = |A - \lambda E| = 0 \tag{2.7}$$

— *характеристическое уравнение* матрицы A. Это уравнение мы еще не раз встретим в дальнейшем; поэтому полезно записать его в развернутом виде:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив этот определитель, получим многочлен относительно λ:

$$(-1)^n f(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0. \tag{2.8}$$

Характеристическое уравнение (2.7) имеет n корней: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; они называются *характеристическими корнями*, или *собственными значениями* матрицы A.

Так как

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = (-1)^n c_n = |A|, \tag{2.9}$$

то *матрица A является вырожденной тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее характеристических корней равен нулю.*

Дифференцирование и интегрирование матриц. Пусть снова A — произвольная $m \times n$-матрица, и пусть ее элементы a_{ij} — функции некоторого переменного t, т. е. $a_{ij} = a_{ij}(t)$. Тогда мы будем говорить, что и сама матрица A — функция от того же переменного: $A = A(t)$. Если все функции $a_{ij}(t)$ имеют производные по t, обозначаемые, как обычно, через $\dot{a}_{ij}(t)$, то мы определим производную $\dot{A}(t)$ матрицы $A(t)$ равенством

$$\dot{A}(t) = (\dot{a}_{ij}(t)).$$

Точно так же определяется интеграл от матрицы A:

$$\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt = \left(\int_{t_0}^{t} a_{ij}(t)\,dt \right).$$

Если рассматривать квадратные матрицы, то справедливы обычные правила дифференцирования суммы и произведения; в частности,

$$\frac{d}{dt}(AB) = \dot{A}B + A\dot{B}.$$

При этом обязательно должен сохраняться порядок сомножителей, ибо матрицы $A(t)\dot{B}(t)$ и $\dot{B}(t)A(t)$, вообще говоря, различны.

§ 3. Векторы и матрицы; квадратичные формы

Общепринятым является отождествление вектора с компонентами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $n \times 1$-матрицы

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix},$$

называемой *вектор-столбцом*. Транспонированную матрицу

$$x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

называют *вектор-строкой*.

Если x — вектор-столбец, а $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — вектор-строка, то произведение матриц yx просто равно скалярному произведению $y \cdot x$ соответствующих векторов.

Пусть A — $n \times n$-матрица. Матричное произведение Ax, где x — вектор-столбец, является $n \times 1$-матрицей, т. е. снова вектор-столбцом. Таким образом, с помощью матрицы A осуществляется преобразование n-мерных векторов в n-мерные векторы.

Это преобразование допускает две интерпретации.

а) *Преобразование координат.* Эта интерпретация имеет смысл только в том случае, если A — невырожденная матрица. Рассмотрим две различные системы координат $x_1, \ldots, x_n$ и $\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_n$ в одном и том же пространстве E^n. Переход от одной системы к другой осуществляется посредством n соотношений [вместо матрицы A здесь взята матрица $P=(p_{ij})$]:

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \ldots + p_{1n}x_n, \\
x_2^* &= p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \ldots + p_{2n}x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n^* &= p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \ldots + p_{nn}x_n.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

При этом точка или вектор x как геометрический образ не изменяется, а приобретает лишь новые координаты x^*. Поскольку подобный переход обратим по самому смыслу этой интерпретации, мы должны иметь возможность находить также и координаты x, зная координаты x^*; иначе говоря, система (3.1) должна быть однозначно разрешима относительно x_i. Как известно, для этого необходимо, чтобы $|P| \neq 0$, т. е. чтобы матрица P была невырожденной; тогда $x=P^{-1}x^*$. Именно поэтому условие невырожденности мы оговорили в самом начале.

Таким образом, здесь наборы чисел (координаты) x и x^* рассматриваются просто как различные представления (способы задания) одного и того же (с геометрической точки зрения) вектора. Эти представления связаны между собой формулами

$$x^*=Px, \quad x=P^{-1}x^*,$$

из которых первая является краткой записью соотношений (3.1). Поэтому мы можем говорить о „векторном пространстве“, существующем независимо от вводимой системы координат. Хорошо известно обычное представление скоростей, ускорений, сил, электрических и магнитных полей с помощью векторов. Все эти физические объекты существуют, естественно, независимо от выбираемой системы координат.

б) *Преобразование векторов.* В другой интерпретации вектору x с помощью равенств

$$y_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

или, в векторной форме,

$$y = Ax, \tag{3.2}$$

ставится в соответствие новый вектор y в том же самом пространстве. На этот раз соответствие уже не обязательно должно быть обратимым, т. е. система (3.2) может и не разрешаться однозначно относительно x. Описанная интерпретация, следовательно, имеет смысл и для вырожденной матрицы A.

Таким образом, в этом случае происходит фактически *преобразование* векторного пространства в себя[1]).

Посмотрим, как будет выглядеть преобразование (3.2) в другой системе координат. Преобразуем координаты по формулам (3.1); при этом x, y переходят соответственно в x^*, y^*:

$$x^* = Px, \quad y^* = Py$$

и, следовательно,

$$y^* = PAx = PAP^{-1}x^*.$$

Другими словами, в новой системе координат преобразование векторного пространства в себя описывается матрицей $A^* = PAP^{-1}$, о которой говорят, что она *подобна* матрице A.

[1]) Иными словами, мы можем представлять себе такую деформацию пространства (при неизменной системе координат), в результате которой точка x переходит в положение $y = Ax$. — *Прим. перев.*

Рассмотрим характеристические уравнения двух подобных матриц. Поскольку

$$PAP^{-1}-\lambda E=PAP^{-1}-P(\lambda E)P^{-1}=P(A-\lambda E)P^{-1},$$

то для определителей этих матриц мы получаем равенство

$$|PAP^{-1}-\lambda E|=|PP^{-1}|\cdot|A-\lambda E|=|A-\lambda E|.$$

Следовательно, *две подобные матрицы A и PAP^{-1} имеют одно и то же характеристическое уравнение* (2.8).

Пусть, далее, все характеристические корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A различны. Если они, кроме того, все действительны, то можно доказать, что матрица A подобна матрице $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Это значит, что можно найти такую систему координат, в которой данное преобразование пространства записывается в виде

$$y_1=\lambda_1 x_1, \qquad y_2=\lambda_2 x_2, \ \ldots, \ y_n=\lambda_n x_n,$$

т. е. в этой специальной системе координат исходное преобразование равносильно умножению на λ_i компоненты вектора, соответствующей i-й оси координат. Допустим теперь, что не все характеристические корни действительной матрицы A действительны. Если $c=a+ib$, то условимся обозначать через $\bar{c}=a-ib$ число, комплексно сопряженное числу c. Как известно из алгебры, все комплексные корни распадаются на пары комплексно сопряженных корней, поскольку коэффициенты характеристического уравнения действительны. Пусть характеристическое уравнение имеет p пар комплексно сопряженных корней $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_p, \bar{\lambda}_p$ и $q=n-2p$ действительных корней $\lambda_{2p+1}, \ldots, \lambda_n$. Тогда можно выбрать комплексную матрицу P такую, что

$$PAP^{-1}=\operatorname{diag}(\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_p, \bar{\lambda}_p, \lambda_{2p+1}, \ldots, \lambda_n).$$

Соответствующее преобразование приобретает в этом случае вид

$$y_1=\lambda_1 x_1, \quad y_2=\bar{\lambda}_1 x_2, \ \ldots, \ y_{2p}=\bar{\lambda}_p x_{2p},$$
$$y_{2p+1}=\lambda_{2p+1}x_{2p+1}, \ \ldots, \ y_n=\lambda_n x_n.$$

Действительные точки при преобразовании координат с матрицей P получают координаты

$$x_1,\ \bar{x}_1,\ x_2,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ x_p,\ \bar{x}_p,\ x_{2p+1},\ \ldots,\ x_n,$$

где $x_{2p+1}, \ldots, x_n$ — действительные числа. Преобразование этих точек может быть записано в виде[1])

$$y_1 = \lambda_1 x_1,\quad \bar{y}_1 = \bar{\lambda}_1 \bar{x}_1,\ \ldots,\ y_p = \lambda_p x_p,\ \bar{y}_p = \bar{\lambda}_p \bar{x}_p,$$
$$y_{2p+1} = \lambda_{2p+1} x_{2p+1},\ \ldots,\ y_n = \lambda_n x_n.$$

Матрицы и квадратичные формы. Пусть

$$F(x) = \sum_{i,\,j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j,\qquad q_{ij} = q_{ji},$$

— квадратичная форма, и пусть $Q = (q_{ij})$ — матрица ее коэффициентов. Если x — вектор-столбец с элементами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то мы можем записать квадратичную форму и так:

$$F(x) = x'Qx.$$

Если совершить преобразование координат $x = Py$, где P — невырожденная матрица, то $G(y) = F(Py) = y'(P'QP)y$, т. е. $G(y)$ — квадратичная форма с матрицей коэффициентов $P'QP$. Таким образом, преобразование координат $x = Py$ порождает преобразование матрицы квадратичной формы $Q \to Q_1 = P'QP$. Обратное преобразование $y = P^{-1}x$ вызывает обратное преобразование матрицы $Q_1 \to Q = (P')^{-1}Q_1P^{-1}$.

---

[1]) Более точно, это утверждение имеет следующий смысл. Если среди характеристических корней матрицы A имеются комплексные, то ее нельзя привести к диагональному виду действительным преобразованием координат: матрица P перехода от старых координат x к новым координатам x^* (и соответственно от y к y^*) оказывается комплексной. При этом точки, имевшие в старой системе координат **действительные** координаты, получают в новой системе координат комплексные координаты, из которых первые $2p$ состоят из p пар комплексно сопряженных чисел, а остальные имеют действительные значения. В новых координатах исходное преобразование задается приведенными в тексте простыми формулами. — *Прим перев.*

Напомним, что всегда существует действительное преобразование P, которое приводит квадратичную форму $F(x)$ к виду

$$G(y) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \ldots + d_m y_m^2. \tag{3.3}$$

Если p есть число положительных, а q — число отрицательных коэффициентов d_k, то разность[1]) $p - q$ не зависит от способа приведения формы $F(x)$ к виду (3.3), а сумма[2]) $p + q = m$ равна рангу матрицы Q.

Ортогональные преобразования представляют особый интерес. Они характеризуются тем, что их матрицы P удовлетворяют условию $PP' = E$ или $P' = P^{-1}$. Важнейшее свойство этих преобразований состоит в том, что они оставляют неизменной квадратичную форму с единичной матрицей коэффициентов. Действительно, ортогональное преобразование P не меняет квадратичную форму

$$H(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

поскольку ее матрица равна E, а $P'EP = P^{-1}EP = E$, и потому

$$H(Py) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

Ортогональные преобразования отличаются тем, что они не изменяют расстояний. В терминах динамики их можно представить себе как вращения (возможно, с отражениями) твердого тела относительно одной неподвижной точки.

Отметим без доказательства, что любая квадратичная форма может быть приведена некоторым ортогональным преобразованием к виду (3.3).

В случае плоскости при помощи ортогональных преобразований координат можно привести любую центральную кривую второго порядка (начало координат предполагается совпадающим с центром кривой) к каноническому виду

$$Ax^2 + By^2 = C$$

[1]) Она называется *сигнатурой* квадратичной формы. — *Прим. перев.*

[2]) Она называется *рангом* квадратичной формы. — *Прим. перев.*

(x и y — обычные прямоугольные координаты). Это справедливо и в случае трехмерного пространства и вообще для пространства n измерений (хотя при $n > 3$ это уже не такой общеизвестный факт).

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Квадратичную форму $F(x)$ называют *положительно* (или *отрицательно*) *определенной*, если $F(x) > 0$ [или $F(x) < 0$] для всех векторов $x \neq 0$. Этот факт часто кратко записывают с помощью матрицы Q квадратичной формы $F(x)$, а именно $Q > 0$ (или $Q < 0$) и говорят, что Q *положительно* (или *отрицательно*) *определенная матрица.* Из формул преобразования координат видно, что векторы $x = 0$ и $y = 0$ соответствуют друг другу. Поэтому если $F(x)$ положительно (отрицательно) определенная форма, то форма $G(y)$ будет также положительно (отрицательно) определенной и обратно. Таким образом, неравенства

$$Q > 0 \quad \text{и} \quad P'QP > 0$$

эквивалентны; конечно, утверждение остается справедливым, если в обоих неравенствах знак неравенства сменить на противоположный. Это показывает, что во многих вопросах, касающихся квадратичных форм, можно свободно применять преобразования координат.

Легко построить положительно определенные матрицы. *Если D — невырожденная матрица, то $D'D > 0$.* Это нетрудно усмотреть, так как квадратичная форма $x'D'Dx = \|Dx\|^2$ принимает лишь неотрицательные значения и обращающаяся в нуль только при $Dx = 0$, т. е., в силу невырожденности матрицы D, только при $x = 0$. Обратное утверждение также справедливо: *если $Q > 0$, то всегда можно найти такую невырожденную матрицу D, что $Q = D'D$.* Действительно, мы знаем, что существует ортогональная матрица P такая, что

$$P'QP = Q^* = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Так как $Q > 0$, то все числа $d_k > 0$. Построим матрицу $D^* = \operatorname{diag}(\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n})$. Очевидно, что эта матрица невырожденная, симметрическая $(D^{*\prime} = D^*)$ и удовлетворяет равенству $D^{*2} = Q^*$. Следовательно,

$$Q = PQ^*P' = PD^*D^*P' = D'D,$$

где $D = D^*P'$.

Из этого результата немедленно следует, что *если Q — положительно определенная матрица, то и обратная к ней матрица Q^{-1} также является положительно определенной*. Действительно, положительно определенная матрица Q может быть представлена в виде $Q = D'D$, где D — некоторая невырожденная матрица. Тогда $Q^{-1} = D^{-1}(D^{-1})'$, и тем самым показано, что матрица Q^{-1} также положительна.

Замечание. Пусть $A = (a_{ij})$ является $m \times n$-матрицей. Часто бывают полезны равенства

$$\operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_m) \cdot A = (b_i a_{ij}),$$
$$A \cdot \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n) = (a_{ij} c_j).$$

В первом случае все элементы i-й строки умножаются на b_i, а во втором случае все элементы j-го столбца умножаются на c_j. Конечно, если $b_1 = \ldots = b_m = b$, то все элементы матрицы A умножаются на b; если $c_1 = \ldots$ $\ldots = c_n = c$, то все элементы умножаются на c.

§ 4. Немного геометрии

Матрицы являются в конечном итоге лишь алгебраическим аппаратом. Однако дифференциальные уравнения не могут быть изучены средствами одной чистой алгебры; для их изучения необходимо широко использовать и геометрию.

Само определение устойчивости и излагаемые ниже теоремы Ляпунова носят наглядный геометрический характер. Для правильного их понимания необходимы некоторые новые понятия. Мы относим эти понятия к „геометрическим“; почти все они принадлежат наиболее общему разделу геометрии, называемому *топологией*.

Между прочим, вместо того, чтобы говорить „фигура" или „конфигурация", мы условимся употреблять в дальнейшем более привычный и простой математический термин *точечное множество* или просто *множество*, который означает произвольную совокупность точек.

Рассмотрим сначала довольно простой объект: евклидову плоскость E^2 и на ней окружность радиуса r с центром в точке $C = \{a, b\}$; уравнение этой окружности имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{4.1}$$

Точки M, отстоящие от C меньше, чем на r, составляют круговую область (внутренность круга) и удовлетворяют условию $d(M, C) < r$. Аналитически это неравенство записывается так:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2. \tag{4.2}$$

В обычном трехмерном пространстве вместо окружности мы возьмем сферу; тогда вместо неравенства (4.2) получим [1]).

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < r^2. \tag{4.3}$$

По аналогии в n-мерном пространстве множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству

$$(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \ldots + (x_n-a_n)^2 = r^2, \tag{4.4}$$

называется *гиперсферой* или $(n-1)$-*мерной сферой*, а *сферическую область* составляют такие точки x, что

$$(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \ldots + (x_n-a_n)^2 < r^2. \tag{4.5}$$

Если мы введем вектор $x - a$, то [2]) неравенству (4.5) можно придать более короткую форму:

$$\|x - a\| < r. \tag{4.6}$$

Точку a пространства E^n называют *центром* сферической области, а r — ее *радиусом*; для обозначения сферической области используется символ $S(a, r)$.

---

[1]) Это неравенство выделяет те точки $\{x, y, z\}$ пространства E^3, которые лежат строго внутри шара радиуса r с центром в точке $\{a, b, c\}$. — *Прим. перев.*

[2]) Уравнение гиперсферы (4.4) примет вид $\|x - a\| = r$. — *Прим. перев.*

Множество, целиком содержащееся в некоторой сферической области, называется *ограниченным*.

Определим теперь понятие *область n-мерного пространства*. Так называют точечное множество U в пространстве E^n, обладающее следующими двумя свойствами:

а) если точка C принадлежит множеству U, то ему целиком принадлежит и некоторая сферическая область $S(C, r)$ с центром в точке C;

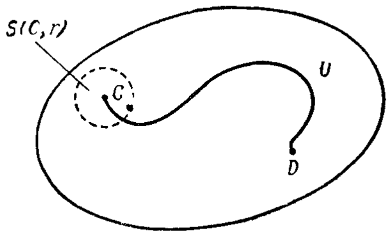


Рис. 2.

б) любые две точки C и D множества U можно соединить некоторой непрерывной кривой, целиком лежащей в U (рис. 2).

Теперь мы определим следующие основные типы точечных множеств в пространстве E^n.

Открытое множество. Открытым называют такое точечное множество U, что ему вместе с любой его точкой C целиком принадлежит и сферическая область $S(C, r)$ с центром в точке C некоторого радиуса r [иначе говоря, множество U обладает свойством а), но не обязательно обладает свойством б)]. Например, внутренность квадрата или какого-либо другого многоугольника на плоскости является открытым множеством[1]) в пространстве E^2.

Замкнутое множество. Замкнутым называют множество F, представляющее собой внешность некоторого открытого множества U. Например, прямая линия или

---

[1]) В этих примерах открытое множество является одновременно и областью. Если два многоугольника на плоскости не имеют общих точек, то их внутренность является открытым множеством (но не областью!). — *Прим. ред.*

плоскость в пространстве E^n представляют собой замкнутые множества.

Граница открытого множества. Границей BU открытого множества U называют совокупность таких не принадлежащих U точек C, что в любой сферической области $S(C, r)$ имеются точки из U (рис. 3). Заметим, что BU — замкнутое множество.

Компактное множество. Компактным называют замкнутое ограниченное множество. Простейший пример

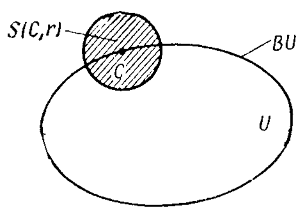


Рис. 3.

компактного множества — произвольное ограниченное открытое множество вместе со своей границей. В частности, сферическая область вместе со своей границей является компактным множеством; это множество иногда называют *шаром*.

Компактные множества имеют большое значение и обладают многими замечательными свойствами. Однако в дальнейшем нам потребуется лишь следующее предложение: *если K — компактное множество и $f(x)$ — непрерывная (скалярная) функция переменного x, определенная на множестве K, то всегда можно найти два числа α и β такие, что $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ для любой точки x из множества K; более того, если $f(x)$ принимает только положительные значения, то оба числа α и β могут быть выбраны также положительными.*

Приложение. Снова рассмотрим невырожденное преобразование координат

$$\overset{*}{x}_m = \sum_{k=1}^{n} p_{mk} x_k, \quad m = 1, \ldots, n.$$

Мы попробуем сравнить длины $\|x\|$ и $\|x^*\|$ одного и того же вектора в старых и новых координатах; на самом деле удобнее сравнивать квадраты этих длин:

$$R^2 = \sum_{m=1}^{n} x_m^2, \quad R^{*2} = \sum_{m=1}^{n} x_m^{*2}.$$

Пусть $x_m = Ru_m$, так что

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = 1; \tag{4.7}$$

тогда

$$R^{*2} = \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} p_{mk} u_k \right)^2 R^2 = R^2 f(u).$$

Заметим теперь, что, в силу предположения о невырожденности преобразования, $|P| \neq 0$, и, следовательно, система линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} p_{mk} u_k = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, n$$

имеет только тривиальное решение $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$. Эти равенства несовместны с равенством (4.7), а потому $f(u)$ всюду на сфере (4.7) положительна [1]). Таким образом, существуют такие положительные постоянные α и β, что на множестве (4.7) выполняется соотношение $\alpha \leqslant f(u) \leqslant \beta$, т. е.

$$\alpha R^2 \leqslant R^{*2} \leqslant \beta R^2.$$

Полученные неравенства показывают, что обе величины R и R^* становятся малыми одновременно. Иными словами, говоря нестрого, R и R^* являются величинами одного и того же порядка. Это свойство будет полезно в дальнейшем.

Обозначения. Мы будем обозначать через $S(r)$ сферическую область $\|x\| < r$, а через $H(r)$ — ее границу, сферу $\|x\| = r$. Для замкнутой сферической кольцевой области $r \leqslant \|x\| \leqslant R$ применяется обозначение S_r^R.

---

[1]) Иначе говоря, $f(u) = 0$ лишь в начале координат пространства переменных u, а на сфере (4.7) имеем $f(u) > 0$. — *Прим. перев.*

Глава II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 5. Общие сведения

Как известно, дифференциальные уравнения в той или иной форме были введены еще Ньютоном. Его законы движения — это первые примеры систем дифференциальных уравнений, и динамика по сей день остается одним из главнейших источников подобных задач.

Так как устойчивость в нашем понимании является свойством некоторых систем дифференциальных уравнений, то нам представляется целесообразным коротко рассказать о таких системах. Мы будем рассматривать *обыкновенные* дифференциальные уравнения в действительной (вещественной) области. Иначе говоря, будут рассматриваться уравнения, в которые входят производные одной или нескольких неизвестных функций по действительной переменной t. Обычно переменную t понимают как время, но это не существенно.

Во всех приложениях встречаются обыкновенные дифференциальные уравнения двух типов. Первый тип — уравнение n-го порядка:

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, t) \qquad (*)$$

($x^{(k)}$ означает k-ю производную от x по t), второй — система из n уравнений первого порядка:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dot{x}_n = X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t). \end{array}\right. \qquad (**)$$

В действительности уравнение (*) может быть сведено к системе (**) следующим образом. Введем новые переменные $x_1, \ldots, x_n$ по формулам

$$x_1 = x, \qquad x_2 = \dot{x}, \qquad x_3 = \ddot{x}, \quad \ldots, \qquad x_n = x^{(n-1)};$$

тогда уравнение $(*)$ можно заменить эквивалентной системой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \end{cases}$$

которая является частным случаем системы $(**)$.

Например, хорошо известное *уравнение Ван-дер-Поля*

$$\ddot{x} + \varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0$$

эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\varepsilon \left(x_1^2 - 1 \right) x_2 - x_1. \end{cases}$$

Рассматривая дифференциальные уравнения в форме $(**)$, можно считать $x_1, \ldots, x_n$ компонентами n-мерного вектора x, а $X_1, \ldots, X_n$ — компонентами n-мерного вектора X; тогда мы получим запись системы $(**)$ в компактной векторной форме

$$\dot{x} = X(x, t). \tag{F}$$

Эта система дифференциальных уравнений и будет изучаться в дальнейшем.

Может случиться, что вектор-функция X зависит только от x и не зависит от времени. Уравнение (F) принимает тогда вид

$$\dot{x} = X(x). \tag{FA}$$

Система такого рода называется *автономной*. Например, система, полученная из уравнения Ван-дер-Поля, является автономной.

Справедливости ради заметим, что в течение длительного времени математики не занимались фундаментальной проблемой о самом существовании решения у системы типа (F). Такие выдающиеся ученые, как Лагранж и

Лаплас, считали существование решений само собой разумеющимся. Даже сравнительно недавно астрономы полагали самоочевидным существование специальных решений с определенными свойствами периодичности. Лишь в начале прошлого столетия великий французский математик Коши впервые доказал соответствующую теорему, в которой обосновал существование решений для широкого класса систем дифференциальных уравнений.

Заметим, что эта проблема фактически является несколько неопределенной. Рассмотрение даже простейших систем с постоянными коэффициентами, например,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2, \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2, \end{cases}$$

показывает, что решение получается с некоторым числом произвольных постоянных. Можно в таком случае требовать, чтобы решение удовлетворяло тем или иным условиям в определенные моменты времени.

После Коши были получены многочисленные теоремы существования. Мы приведем без доказательства одну из таких теорем, которая представляет собой частный случай классического предложения, называемого *теоремой Коши — Липшица*. Эта теорема не является наиболее сильной из теорем существования, но она вполне достаточна для целей настоящей книги [1]).

Пусть $E^{n+1}_{x,t}$ означает $(n+1)$-мерное пространство с координатами $x_1, \ldots, x_n, t$, и пусть Ω — произвольная область в этом пространстве.

Теорема существования. *Предположим, что в каждой точке области Ω существуют и непрерывны частные производные* $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$. *Пусть*

[1]) Отметим только, что эта теорема, одновременно с существованием и единственностью, утверждает непрерывную зависимость решения от начальных условий. Эта непрерывность означает, грубо говоря, что малые возмущения начальных условий приводят (за конечный промежуток времени) лишь к малым возмущениям решений. — *Прим. перев.*

$\{x^0, t_0\}$ — произвольная точка этой области. Тогда существует такое решение $x(t)$ системы (F), *что $x(t_0)=x^0$. Это решение может быть продолжено всюду в области Ω и является непрерывной функцией от $\{x^0, t_0\}$ как точки области Ω* [1]).

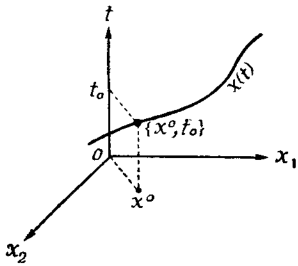


Рис. 4.

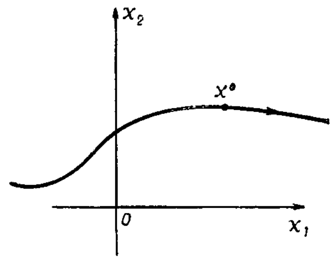


Рис. 5.

Геометрическая интерпретация. Решение $x(t)$ определяет координаты $x_1, \ldots, x_n$ как функции времени t, т. е.

$$x_1=f_1(t), \quad x_2=f_2(t), \quad \ldots, \quad x_n=f_n(t). \tag{5.1}$$

Это означает, что первые n координат в пространстве $E^{n+1}_{x,t}$ являются функциями последней координаты t.

Например, при $n=1$ будет $x_1=f_1(t)$. Если мы напишем x вместо t и y вместо x, то придем к хорошо знакомой форме $y=f(x)$ уравнения кривой в плоскости x, y. Аналогично этому естественно представлять себе набор функций (5.1) как *кривую* в пространстве $E^{n+1}_{x,t}$ (рис. 4). Эта кривая называется *интегральной кривой* системы (F).

Можно, однако, рассматривать набор функций (5.1) как определение некоторой кривой [2]) в пространстве E^n одних только переменных x (рис. 5). В этом случае

[1]) Последнее свойство — непрерывная зависимость решения от $\{x^0, t_0\}$ — имеет место в любой компактной части области Ω. — *Прим. ред.*

[2]) Время t в этом случае считается просто параметром, т. е., иначе говоря, на равенства (5.1) можно смотреть как на параметрическое задание кривой. — *Прим. перев.*

3 Зак. 1824

кривую (5.1) называют *траекторией*, а пространство E^n — *фазовым* пространством (термин ведет свое происхождение из динамики).

Автономная система. Автономная система (FA) может быть также записана в форме

$$\frac{dx_1}{X_1(x)} = \frac{dx_2}{X_2(x)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x)},$$

не содержащей дифференциал dt независимой переменной. По существу это означает, что мы отказываемся от параметризации кривой (5.1). Действительно, если пойти далее и записать уравнения в виде

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n},$$

то получится система, аналогичная (F), причем роль t играет x_n. Решения этой системы удобно называть *траекториями*; как и прежде, через фиксированную точку „области существования" Ω_1 проходит одна и только одна траектория [1]). Переменная t является теперь только параметром, и если прибавить к ней постоянную [т. е. заменить в (5.1) величину t на $t+C$], то траектория не изменится.

Изучая устойчивость, нам придется постоянно рассматривать систему (F), удовлетворяющую дополнительному требованию: $X(a, t) \equiv 0$ для всех $t \geqslant 0$. Это означает, что $x = a$ — решение. Геометрически указанное решение изображается лучом в пространстве $E^{n+1}_{x,t}$ или точкой $x = a$ в пространстве E^n. Такая точка называется *положением равновесия* (особой или критической точкой). Если за новую переменную взять $x - a$ и обозначить ее

[1]) Пространство E^n в случае автономной системы также называется фазовым, а теорема единственности означает геометрически, что траектории системы (FA) не могут пересекаться друг с другом. В этом и состоит отличие автономных систем от неавтономных: траектории (но не решения!) системы (F) в фазовом пространстве могут пересекаться между собой. Подробнее теория автономных систем изложена в книге Л. С. Понтрягина, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, 1961. — *Прим. перев.*

снова через x, то система (F) не изменит своего вида, но теперь $X(0, t) \equiv 0$ при $t \geqslant 0$, т. е. положением равновесия будет уже начало координат. Как правило, в дальнейшем предполагается выполненным именно это последнее условие.

Часто встречается случай, когда функция $X(x, t)$ вблизи значения $x = 0$ может быть представлена в форме

$$X(x, t) = Ax + q(x, t),$$

где A — постоянная матрица, а величина $\|q\|$ мала по сравнению с $\|x\|$ при малых $\|x\|$. Иначе говоря, предполагается, что при всех $t \geqslant 0$

$$\frac{\|q(x, t)\|}{\|x\|} \to 0, \quad \text{если} \quad \|x\| \to 0.$$

Это выражается при помощи стандартного математического обозначения

$$\|q(x, t)\| = o(\|x\|).$$

В рассматриваемом случае система (5.1) имеет вид

$$\dot{x} = Ax + q(x, t). \tag{5.2}$$

Предположим, что все характеристические корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A различны. Тогда существует такая невырожденная матрица P, что

$$PAP^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Рассмотрим сначала случай, когда все характеристические корни действительны; это означает, что и матрица P может быть выбрана действительной. Сделаем в системе (5.2) преобразование координат $y = Px$. Так как $\frac{d}{dt}(Px) = P\dot{x}$, то

$$\dot{y} = P\dot{x} = PAP^{-1}y + Pq = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, y + q_1(y, t), \tag{5.3}$$

где $q_1 = Pq$, и легко можно показать, что

$$\|q_1\| = o(\|y\|).$$

Система (5.3) оказывается того же типа, что и (5.2), но уже с диагональной матрицей A. Если же некоторые из характеристических корней комплексны, то положение будет точно таким же, за исключением того, что появятся такие комплексно сопряженные пары λ_1, $\overline{\lambda}_1$, λ_2, $\overline{\lambda}_2$, ..., что для каждого действительного вектора x соответствующие координаты вектора $y = Px$ будут комплексно сопряженными: y_1, $\overline{y}_1$, y_2, $\overline{y}_2$, ...

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Так называются системы

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.4}$$

где все коэффициенты a_{ij} — постоянные числа. В векторно-матричных обозначениях система (5.4) записывается более компактно

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = (a_{ij}). \tag{5.5}$$

Мы кратко напомним некоторые основные свойства этих систем. Доказательства их хорошо известны и содержатся в большинстве курсов по теории дифференциальных уравнений [1]).

I. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — характеристические корни матрицы A, т. е. корни уравнения

$$f(\lambda) = |A - \lambda E| = 0;$$

каждый корень при этом считается столько раз, какова его кратность. Каждая компонента вектора решения системы (5.5) представляет собой сумму не более n членов вида $g_j(t)e^{\lambda_j t}$, где $g_j(t)$ — многочлен степени строго меньшей n.

II. Существует n линейно независимых решений. *Линейно независимыми* называются такие n векторов-решений $x^{[1]}, \ldots, x^{[n]}$, что соотношение

$$c_1 x^{[1]} + \ldots + c_n x^{[n]} = 0$$

[1]) См., например, Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, 1961; Коддингтон Э. А. и Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958; Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, 1961. — *Прим. перев.*

не удовлетворяется ни при каком наборе констант $c_1, \ldots$ $\ldots, c_n$, если хотя бы одна из них отлична от нуля.

III. Пусть $x_{1j}, \ldots, x_{nj}$ — компоненты вектора-решения $x^{[j]}$, и пусть X — матрица, j-й столбец которой состоит из этих компонент. Матрица $X(t)$ является невырожденной [1]) для каждого t, т. е. $|X(t)| \neq 0$ при любом t, и, следовательно, матрица $X(t)$ всегда имеет себе обратную.

IV. Непосредственно проверяется, что матрица X удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{X} = AX. \tag{5.6}$$

V. Если X удовлетворяет уравнению (5.6), то и XC, где C — любая постоянная матрица, также является решением этого уравнения.

VI. В частности, решение $\mathscr{X}(t) = X(t)X^{-1}(0)$ уравнения (5.6), часто обозначаемое через e^{At}, обладает тем свойством, что $\mathscr{X}(0) = E$, причем других решений, обладающих этим свойством, не существует. Это решение называется *главной матрицей решений* [2]). Решение системы (5.5) с начальным условием $x(0) = c$ имеет вид $\mathscr{X}(t)c$.

Сопряженная система. Вместе с системой (5.4) удобно рассматривать сопряженную к ней систему

$$\dot{y}_i = -(a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + \ldots + a_{ni}y_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.4$'$}$$

или в матричной форме [3]) (y теперь вектор-строка)

$$\dot{y} = -yA. \tag{5.5$'$}$$

---

[1]) Имеется в виду, что $x^{[j]}$, $j = 1, \ldots, n$, — линейно независимые решения, т. е. что они составляют фундаментальную систему решений. Матрицу $X(t)$ иногда называют *фундаментальной матрицей*. — *Прим. перев.*

[2]) В оригинале principal matrix solution. Эту матрицу иногда называют *фундаментальной нормированной матрицей*. — *Прим. перев.*

[3]) Иногда, впрочем, y считают вектор-столбцом и записывают сопряженную систему в виде $\dot{y} = -A'y$. — *Прим. перев.*

Обращаться с системой (5.4)′ можно точно так же, как и с системой (5.4), только теперь всюду строки и столбцы меняются местами, а правое умножение матриц заменяется левым. Все изложенные выше свойства остаются справедливыми и будут обозначаться I′, II′, ..., VI′. В частности, матричное уравнение (5.6) примет вид

$$\dot{Y} = -YA. \tag{5.6$'$}$$

Характеристическими корнями матрицы $-A$ системы (5.5)′ служат корни уравнения

$$|-A-\lambda E| = (-1)^n |A+\lambda E| = (-1)^n f(-\lambda) = 0,$$

т. е. $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, ..., $-\lambda_n$. Мы получаем следующее утверждение.

I′. Каждая компонента вектора решения системы (5.5)′ представляет собой сумму не более n членов вида $g_j(t)e^{-\lambda_j t}$, где $g_j(t)$—многочлен степени строго меньшей n.

Заметим, что n линейно независимых решений системы (5.5)′ являются теперь строками матрицы Y.

Пусть $\mathscr{X}$ — главная матрица решений системы (5.5). Можно показать, что $\mathscr{X}^{-1}$ является главной матрицей решений системы (5.5)′. Действительно, если обозначить $\mathscr{Y}(t) = \mathscr{X}^{-1}(t)$, то $\mathscr{Y}(0) = \mathscr{X}^{-1}(0) = E^{-1} = E$. Кроме того, из $\mathscr{X}\mathscr{Y} = E$ следует

$$0 = \dot{\mathscr{X}}\mathscr{Y} + \mathscr{X}\dot{\mathscr{Y}} = A\mathscr{X}\mathscr{Y} + \mathscr{X}\dot{\mathscr{Y}} = A + \mathscr{X}\dot{\mathscr{Y}},$$

т. е. $\dot{\mathscr{Y}} = -\mathscr{X}^{-1}A = -\mathscr{Y}A$, и уравнение (5.6)′ удовлетворяется. Таким образом, $\mathscr{X}^{-1}(t) = e^{-At}$ — главная матрица решений сопряженной системы (5.6)′.

§ 6. Общие соображения об устойчивости

Термин „устойчивость“ настолько выразителен, что он сам почти все за себя говорит. Пусть какой-нибудь прибор используется некоторым образом при определенных общих условиях. Эти условия слегка изменяются. Повлечет это за собой небольшое или, наоборот, значительное изменение в работе прибора? В первом случае говорят об устойчивости, во втором — о неустойчивости.

Каким образом это понятие применяется для исследования физических систем? Такая система зависит, скажем, от нескольких физических параметров $x_1, \ldots, x_n$ — координат и скоростей. Ее состояние в момент времени t мы обозначим через $x(t)$ и будем представлять себе как точку или вектор x в некотором пространстве E^n. Точка $x(t)$ с течением времени описывает траекторию g в этом пространстве. Возникает вопрос: как ведут себя по отношению к g траектории g^*, которые начинаются[1]) вблизи g? Остаются ли они все время вблизи g (рис. 6)[2]),

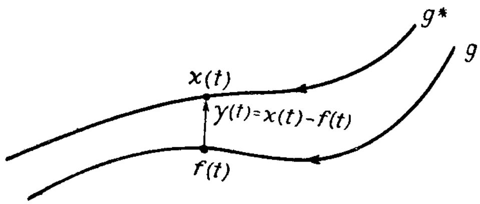


Рис. 6.

что означает устойчивость, или же они уходят прочь от g, что соответствует неустойчивости?

Аналитически эта проблема формулируется следующим образом. Прежде всего, мы ограничимся процессами, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Иными словами, предположим, что траектория g и близкие к ней траектории являются решениями некоторого векторного уравнения

$$\dot{x} = X(x, t). \tag{F}$$

Пусть траектории g соответствует частное решение $f(t)$ уравнения (F). Устойчивость этого решения и предстоит нам исследовать. Сделав замену переменных (рис. 6)

$$y = x - f(t), \quad x = y + f(t),$$

[1]) В соответствующий момент времени. Иногда рассматриваемое свойство называют устойчивостью по отношению к начальным возмущениям. — *Прим. перев.*

[2]) Когда здесь говорится о близости траекторий g и g^*, то имеется в виду близость соответствующих точек этих траекторий, т. е. точек, которые соответствуют одному и тому же значению t. — *Прим. ред.*

мы приведем уравнение (F) к уравнению

$$\dot{y}+\dot{f}(t)=X(y+f(t),\ t),$$

которое принимает ту же общую форму

$$\dot{y}=Y(y,\ t), \qquad Y(0,\ t)\equiv 0,$$

причем теперь траектория g соответствует тривиальному решению $y=0$. Вопрос об устойчивости решения $f(t)$ сводится к изучению устойчивости начала координат пространства E^n.

Особенно важным для приложений является часто встречающийся случай, когда система автономна

$$\dot{x}=X(x) \tag{FA}$$

и координаты $x_1, \ldots, x_n$, являющиеся параметрами объекта, могут сохранять постоянные значения $a_1, \ldots, a_n$. Другими словами, точка $x=a$ есть решение: $X(a)=0$. Если в начальный момент система находилась в положении равновесия a, то она навсегда останется в этой точке. Однако это утверждение — чисто теоретическое. Реальная система испытывает различные возмущения, и потому никогда нельзя точно установить ее начальное состояние. Мы снова приходим к проблеме устойчивости: будет ли система, несмотря на влияние малых возмущений, оставаться вблизи положения равновесия или нет? Эта задача всесторонне обсуждается ниже.

§ 7. Устойчивость в автономных системах

Мы рассмотрим автономную систему (FA) и изучим устойчивость ее положения равновесия $x=a$. Удобно прежде всего выбрать точку $x=a$ началом координат. Этого можно добиться, сделав простое преобразование координат $x^*=x-a$. Будем считать его выполненным и обозначим x^* снова через x. Таким образом, рассматривается основная система

$$\dot{x}=X(x), \qquad X(0)=0 \tag{FA}$$

и исследуется устойчивость начала координат.

Предположим, что в некоторой сферической области $\Omega : \|x\| < \rho$ [такая область обозначается $S(\rho)$] для системы (FA) выполняются все условия основной теоремы существования (см. § 5); в частности, отметим, что в области Ω существуют и непрерывны все частные производные $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Напомним, что тогда через каждую точку x области Ω проходит единственная траектория g системы (FA).

Мы обозначим ту часть кривой g, которая описывается функцией $x(t)$ при $t \geqslant 0$, через g^+, а ту, которая описывается этой же функцией при $t \leqslant 0$, через g^-.

Будем говорить, что положение равновесия в начале координат

устойчиво, если для любого $R < \rho$ существует такое $r \leqslant R$, что траектория (движение) g^+, начинающаяся в точке x^0 сферической области $S(r)$, все время затем остается в сферической области $S(R)$[1]), иначе говоря, траектория g^+, начинающаяся внутри области $S(r)$, никогда не достигает сферы $H(R)$ (рис. 7);

асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и, сверх того, существует такое $R_0 < \rho$, что каждая траектория g^+, начинающаяся в сферической области $S(R_0)$, стремится к началу координат, когда время неограниченно растет (рис. 7);

неустойчиво, если для некоторого (хотя бы одного) $R < \rho$ и любого r, каким бы малым r ни выбиралось, всегда найдется внутри сферической области $S(r)$ такая точка x^0, что траектория g^+, начинающаяся в этой точке, достигает[2]) сферы $H(R)$ (рис. 7).

---

[1]) То есть при всех $0 \leqslant t < \infty$ имеем $\|x(t)\| < R$. То, что функция $x(t)$ определена при всех $t \geqslant 0$, ниоткуда не следует и является еще одним дополнительным предположением при определении устойчивости. Предполагается, что любое решение $x(t)$ с начальным условием $x(0) = x^0$, где x^0 — любая точка области Ω, определено при всех $t \geqslant 0$. Отметим, что в качестве начального можно брать любой конечный момент времени $0 \leqslant t_0 < \infty$. — *Прим. перев.*

[2]) За конечное время. — *Прим. перев.*

Пример 1. Рассмотрим систему второго порядка (x и y — обычные декартовы координаты на плоскости):

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Так как $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$, то траекториями являются концентрические окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале

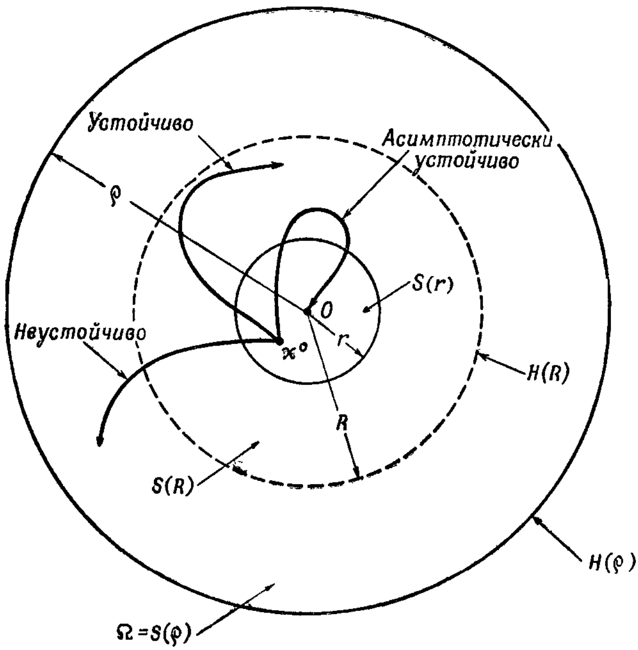


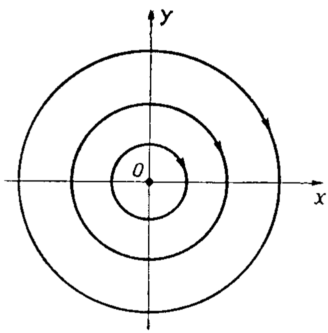
Рис. 7.

координат. Начало координат является единственным положением равновесия. Если взять $r = R$, то любая траектория, начинающаяся внутри $S(r)$, остается все время внутри круговой области $S(r)$, а следовательно, и внутри $S(R)$, так что имеет место устойчивость. Однако траектории не приближаются к началу координат, и положение равновесия не будет асимптотически устойчивым (рис. 8).

Пример 2. Обратимся теперь к системе

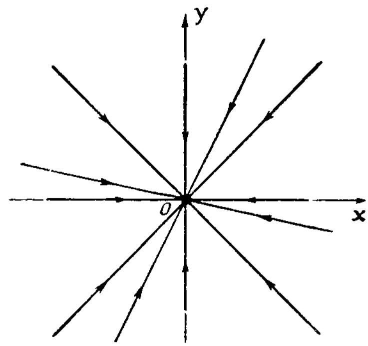
$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Ее решение: $x = Ae^{-t}$, $y = Be^{-t}$. Так как $y/x = B/A = k$, то траекториями являются лучи, исходящие из начала координат (рис. 9). Мы можем снова выбрать $r = R$. Любая



Устойчивость

Рис. 8.



Асимптотическая устойчивость

Рис. 9.

траектория g^+, начинающаяся внутри $S(r)$, остается все время в круговой области $S(R)$ и, кроме того, неограниченно приближается к началу координат при $t \to \infty$. Следовательно, имеет место асимптотическая устойчивость. В действительности здесь будет даже *асимптотическая устойчивость в целом*[1]) — любое решение стремится к положению равновесия.

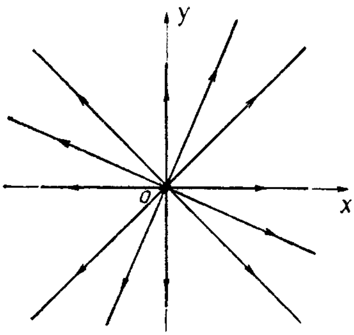
Пример 3. Наконец, возьмем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y; \end{cases}$$

ее решение: $x = Ae^{t}$, $y = Be^{t}$. Так как снова $x/y = k$,

[1]) В оригинале asimptotic stability in the large. — *Прим. перев.*

то траекториями являются лучи, исходящие из начала координат (рис. 10). Этот случай отличается от примера 2 тем, что движение по лучам происходит в направлении от центра. Выбрав любое R и сколь угодно малое r, легко убедиться, что траектория g^+, начинающаяся в любой точке круговой области $S(r)$, обязательно достигает окружности $H(R)$, т. е. положение равновесия неустойчиво.



Неустойчивость

Рис. 10.

Теоремы Ляпунова позволяют свести изучение только что определенных свойств (устойчивости, асимптотической устойчивости и т. д.) систем дифференциальных уравнений к рассмотрению свойств некоторых функций. Этими функциями мы и займемся в первую очередь.

§ 8. Специальный класс функций

Очень важную роль в дальнейшем играют так называемые *положительно определенные* скалярные функции $V(x)$, которые обладают следующими свойствами:

а) функция $V(x)$ непрерывна вместе со всеми своими частными производными первого порядка в некоторой открытой области Ω, содержащей начало координат;

б) $V(0)=0$;

в) всюду внутри области Ω, кроме начала координат, функция $V(x)$ положительна.

Иными словами, функция $V(x)$ неотрицательна всюду внутри Ω и обращается в нуль только в начале координат, где имеет, таким образом, изолированный минимум.

Так как $V(x)$ имеет частные производные первого порядка, то существует $\operatorname{grad} V$. Как известно, вдоль траектории g системы (FA) выполняется равенство[1])

$$\dot{V} = X \cdot \operatorname{grad} V.$$

Если кроме приведенных выше свойств а), б), в) справедливо еще одно:

г) $\dot{V} \leqslant 0$ всюду в области Ω,

то функция $V(x)$ называется *функцией Ляпунова.*

Выясним *геометрический смысл* функции $V(x)$. С этой целью введем новую координату $z = V(x)$ и рассмотрим

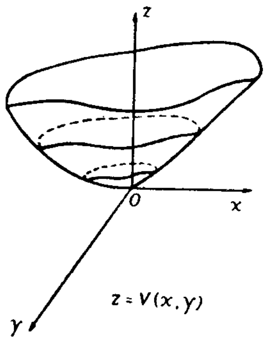


Рис. 11.

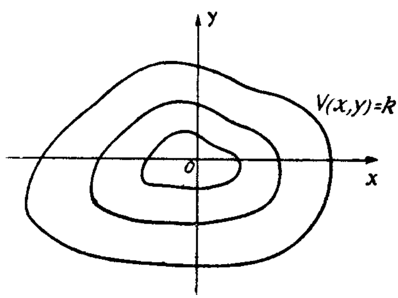


Рис. 12.

эту поверхность в пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, или, короче, в $E^{n+1}_{x,z}$. Чтобы картина стала нагляднее, остановимся на случае $n = 2$ и для координат x_1, x_2 используем более привычные в этом случае обозначения x, y. Таким образом, наша задача — описать поведение поверхности $z = V(x, y)$ вблизи начала координат в предположении, что V — положительно определенная функция. Это теперь совсем нетрудно сделать. Так как $V \geqslant 0$ для малых x, y и $V = 0$ только для $x = y = 0$,

[1]) Таким образом, полная производная функции $V(x)$ по времени в силу системы (FA) равна скалярному произведению вектора фазовой скорости $\{X_1, \ldots, X_n\}$ на градиент функции V. Напомним, что производной в силу системы (FA) называется производная по t сложной функции $V(x(t))$, где $x(t)$ — уравнение траектории g. — *Прим. перев.*

то поверхность $V(x, y)$ напоминает в общих чертах вогнутое вверх параболическое зеркало или стоящую на столе пиалу (рис. 11). Мы для краткости назовем такую поверхность *чашей*[1]). Если V — отрицательно определенная функция, то чаша расположена вверх дном (таким было бы отражение пиалы, стоящей на зеркальном столе). В случае n-мерного пространства положение является точно таким же; поверхность $z = V(x_1, \ldots, x_n)$ будет n-мерной чашей.

Интересно и другое геометрическое истолкование функции $V(x)$. Пусть снова $n = 2$, а x и y — обычные декартовы координаты. Тогда линии уровня $V(x, y) = k$ представляют собой семейство замкнутых кривых, окружающих начало координат (рис. 12)[2]). Эти кривые можно представлять себе как проекции на плоскость x, y (т. е. на плоскость $z = 0$) линий пересечения описанной выше чаши горизонтальными плоскостями. При $n > 2$ интерпретация остается точно такой же.

Некоторые специальные функции Ляпунова. Предположим, что в окрестности начала координат функция V может быть записана в виде степенного ряда по переменным x_i:

$$V = V_p(x) + V_{p+1}(x) + \ldots,$$

где $V_k(x)$ — однородная симметрическая форма степени k от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Форма $V_p(x)$ является совокупностью членов низшего порядка в этом степенном ряде.

При малых x члены $V_{p+1}, V_{p+2}, \ldots$ имеют более высокий порядок малости по сравнению с V_p, а потому знак функции V в некоторой малой окрестности Ω начала координат совпадает со знаком формы V_p[3]).

---

[1]) В оригинале cup. — *Прим. перев.*

[2]) Рис. 12 воспроизводит простейший, наиболее типичный случай, не исчерпывающий, однако, всех возможностей. — *Прим. перев.*

[3]) Предполагается, что форма $V_p(x)$ знакоопределенная (положительно или отрицательно определенная). — *Прим. ред.*

Весьма полезен следующий простой факт: *если p — нечетное число, то функция $V(x)$ не может быть функцией Ляпунова.* Действительно, полагая

$$x_1 = x_n u_1, \quad x_2 = x_n u_2, \ \ldots, \quad x_{n-1} = x_n u_{n-1}, \ x_n = x_n \cdot 1,$$

получаем [1])

$$V_p = x_n^p V_p(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, 1).$$

Фиксируя значения $u_1, \ldots, u_{n-1}$, мы видим, что знак формы V_p совпадает со знаком x_n^p, если величина $V_p(u_1, \ldots, u_{n-1}, 1) > 0$, или со знаком $-x_n^p$, если $V_p(u_1, \ldots, u_{n-1}, 1) < 0$. Так как p — нечетное число, то x_n^p (или, соответственно, $-x_n^p$) вблизи начала координат может принимать как положительные, так и отрицательные значения, а потому функция V не будет положительно определенной. Конечно, приведенное рассуждение справедливо лишь в том случае, когда u_i выбраны таким образом, что $V_p(u_1, \ldots, u_{n-1}, 1) \neq 0$. Такой выбор значений u_i всегда возможен, поскольку форма $V_p(x)$ не обращается тождественно в нуль.

Таким образом, для того чтобы функция $V(x)$ могла быть функцией Ляпунова, низшая степень ее членов должна быть четной. Это, однако, лишь необходимое, но отнюдь не достаточное условие. Действительно, форма $V_2 = x_2^2 - x_1^2$ не является ни положительно, ни отрицательно определенной, так как $V_2 \geqslant 0$, например, при $x_1 = 0$ и $V_2 \leqslant 0$ при $x_2 = 0$.

Простейшей положительно определенной функцией является положительно определенная квадратичная форма

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \qquad a_{ij} = a_{ji}.$$

Необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичной формы $V(x)$ были указаны Сильвестром. Критерий Сильвестра состоит в том, что все

---

[1]) По определению однородности, форма $V_p(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) = k^p V_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. — *Прим. перев.*

последовательные главные миноры матрицы (a_{ij}), соответствующей форме V, должны быть положительны:

$$a_{11} > 0; \qquad \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \ldots; \; |a_{km}| > 0,$$
$$k, \ m = 1, \ 2, \ \ldots, \ n.$$

Доказываться этот результат здесь не будет[1]).

Не следует думать, что положительно определенная функция всегда должна представлять собой один степенной ряд с четной наименьшей степенью. Например, функция

$$V(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ x^4 & \text{при} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

скалярного аргумента, очевидно, является положительно определенной.

Важное замечание. Окрестность Ω начала координат пространства x однозначно отображается на чашу $z = V(x)$: каждой точке x из Ω соответствует единственная точка $\{x, z\}$ на чаше и обратно. Кроме того, это соответствие непрерывно в обе стороны (т. е. взаимно непрерывно). Оба эти свойства имеют в виду, когда говорят, что это соответствие является *топологическим*.

§ 9. Теоремы Ляпунова об устойчивости

Интуитивно ясно, что если при приближении к положению равновесия физической системы энергия системы всегда убывает, то это положение равновесия устойчиво. Теоремы Ляпунова обобщают эту идею, а функции Ляпунова можно рассматривать просто как развитие энергетических концепций. Центральная идея метода Ляпунова — непосредственное исследование устойчивости положения равновесия системы (FA) при помощи подходящим образом построенной функции Ляпунова $V(x)$, причем делается

---

[1]) См., например, Курош А. Г., Курс высшей алгебры, Физматгиз, 1962; Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, Гостехиздат, 1953. — *Прим. перев.*

это без предварительного нахождения решений системы (FA).

Приводимые далее утверждения мы доказываем по возможности геометрически. Однако все формулировки приводятся в строгой аналитической форме, что делает их удобными для приложений.

Теорема I. (Теорема Ляпунова об устойчивости.) *Если в некоторой окрестности* Ω *начала координат существует функция Ляпунова* $V(x)$, *то начало координат устойчиво.*

Теорема II. (Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.) *Если, кроме того,* $-\dot{V}$ *является положительно определенной функцией в* Ω, *то начало координат асимптотически устойчиво.*

Обе эти теоремы мы докажем одновременно; при этом мы используем геометрическую интерпретацию положительно определенной функции $V(x)$ с помощью линий уровня. Рисовать нам будет удобно в случае $n=2$, но все рассуждения справедливы, конечно, для любого n.

Наметим сначала геометрическую идею доказательства. Будем линии уровня функции $V(x)$ рисовать жирно, а сферы $H(r)$, $H(R)$ — пунктиром (рис. 13). Взяв произвольно[1]) $R<\rho$, мы построим $H(R)$ и определим константу k так, чтобы овал C, имеющий уравнение $V(x)=k$, целиком лежал внутри $H(R)$ (рис. 13). Далее выберем константу $r>0$ так, чтобы сфера $H(r)$ целиком находилась внутри C. Рассмотрим теперь какую-нибудь траекторию g^+, начинающуюся в произвольной точке x^0 сферической области $S(r)$; очевидно, что $V(x^0)<k$. Однако, поскольку V не возрастает вдоль траектории, g^+ никогда не сможет достичь C и, следовательно, никогда не пересечет $H(R)$. Таким образом, любая траектория g^+, начинающаяся в области $S(r)$, всегда остается в $S(R)$, что и означает устойчивость. Совершенно ясно, что по заданному R мы всегда можем подобрать r. Действительно, функция V положительна и непрерывна на сфере $H(R)$,

---

[1]) Обозначения см. в § 4 и 7. Здесь предполагается, что областью Ω является некая сферическая область $S(\rho)$. — *Прим. перев.*

а потому из компактности $H(R)$ следует, что эта функция имеет на $H(R)$ положительный минимум, равный k, т. е. $V(x) \geqslant k$ для всех точек x сферы $H(R)$. Но функция $V(x)$ непрерывна и обращается в нуль только в начале координат. Поэтому существует достаточно малое r, такое, что $V(x) < k$ для всех x в сферической области $S(r)$. Теорема I доказана[1]).

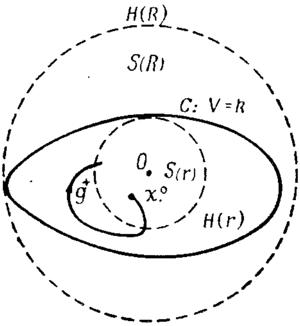


Рис. 13.

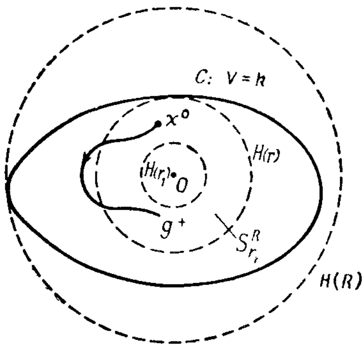


Рис. 14.

В предположениях теоремы II функция $V(x)$ строго убывает вдоль траектории g^+. Но может ли эта функция все время оставаться больше некоторого значения $l > 0$? Конечно, нет. Если бы это было так, то V стремилась бы к нулю вне некоторой сферы $H(r_1)$ (рис. 14), что невозможно, ибо $-\dot{V}$ — положительно определенная функция, и, следовательно, она имеет положительный минимум m в „кольце" $S_{r_1}^R$. Таким образом, $V(x)$ монотонно убывает и стремится к нулю вдоль траектории g^+, что

[1]) В последних строках и заключается строгое доказательство теоремы I. Приведенные же выше рассуждения с линиями уровня $V=k$ являются нестрогими, так как они опираются на неверное положение, что геометрическое место $V=k$ всегда есть замкнутая кривая, внутри которой $V<k$, а вне $V>k$. Так, например, это неверно для положительно определенной функции $\dot{V}(x)=f(\|x\|)$, где $f(z)$ — непрерывная вместе с первой производной положительно определенная функция от z, *немонотонно* стремящаяся к нулю при $z \to 0$. — *Прим. ред.*

возможно лишь в том случае, когда g^+ приближается к началу координат; это и есть асимптотическая устойчивость.

Теорема III. (Первая теорема Ляпунова о неустойчивости.) *Пусть функция $V(x)$ такова, что $V(0)=0$ и все частные производные первого порядка непрерывны в окрестности Ω начала координат. Если $\dot V$ — положительно определенная функция, а сколь угодно близко от начала координат имеются точки, в которых функция V принимает положительные значения, то начало координат неустойчиво.*

Функция $V(x)$ ограничена в окрестности Ω. Возьмем произвольное[1]) R и любое $r \leqslant R$. Внутри сферической области $S(r)$ мы выберем в качестве начальной точки траектории g^+ такую точку x^0, что $V(x^0)>0$. Так как $\dot V$ — положительно определенная функция, то V может только возрастать вдоль g^+, а потому g^+ не будет приближаться к началу координат. Отсюда, как и ранее, получаем, что $\dot V \geqslant m > 0$ вдоль g^+. Следовательно, функция V должна неограниченно возрастать. Но тогда g^+ неминуемо достигнет границы $H(R)$ области $S(R)$, что и означает неустойчивость.

Теорема IV. (Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости.) *Если функция $V(x)$ такая же, как и в теореме* III, *а $\dot V = \lambda V + V^*$, где $\lambda > 0$, и $V^*(x)$ — неотрицательная функция в Ω, то начало координат неустойчиво.*

Выберем, как и раньше, начальное значение x^0 в $S(r)$ так, чтобы $V(x^0)>0$. Пусть $x(t)$ — решение уравнения (FA), удовлетворяющее условию $x(0)=x^0$, а g^+ — траектория, выходящая из точки x^0. Используя условие теоремы, получаем

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \lambda V(x(t)) + V^*(x(t)) \tag{9.1}$$

или

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}V) = e^{-\lambda t}V^* \geqslant 0. \tag{9.2}$$

---

[1]) Но, конечно, такое, чтобы область $S(R)$ целиком входила в Ω. — *Прим. перев.*

Следовательно[1]), $V \geqslant e^{\lambda t} V(x^0)$ вдоль g^+, т. е. V неограниченно возрастает вдоль g^+, что, как и выше, указывает на неустойчивость.

Две приведенные теоремы Ляпунова о неустойчивости имеют тот недостаток, что в них речь идет о всей области Ω. Утверждение, охватывающее обе эти теоремы, но использующее более узкую область, получил в начале 30-х годов Н. Г. Четаев.

Теорема V. (Теорема Четаева о неустойчивости.) *Пусть Ω — некоторая окрестность начала координат. Пусть даны функция $V(x)$ и область Ω_1 в окрестности Ω, обладающие следующими свойствами:*

1) *частные производные первого порядка функции $V(x)$ непрерывны в области Ω_1;*

2) *функции $V(x)$ и $\dot V(x)$ положительны в области Ω_1;*

3) $V(x) = 0$ *в тех граничных точках x области Ω_1, которые являются внутренними для Ω;*

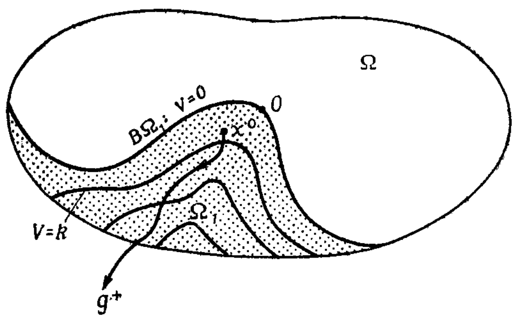


Рис. 15.

4) *начало координат является граничной точкой области Ω_1.*

В этих предположениях начало координат неустойчиво.

Нетрудно видеть, что любая траектория g^+, начинающаяся в Ω_1, должна покинуть Ω, так как она не может

[1]) Интегрируя в пределах от 0 до t, приходим к окончательному результату. — *Прим. перев.*

пересечь границу области Ω_1 внутри Ω. Поскольку начало координат является граничной точкой для Ω_1, мы можем указать произвольно близкие к началу координат точки, принадлежащие области Ω_1. Траектории g^+, начинающиеся в этих точках, покидают Ω. Следовательно, имеет место неустойчивость. Рис. 15 интуитивно, но весьма наглядно иллюстрирует сказанное. Кривые $V(x)=k$ в области Ω_1 обязательно ведут себя только так, как там указано, причем k уменьшается, когда кривая стремится к внутренней границе $B\Omega_1$. Так как k может вдоль g^+ только возрастать, то эта траектория должна вести себя так, как показано на рисунке.

§ 10. Устойчивость и теоремы Ляпунова для неавтономных систем

Рассмотрим теперь неавтономную систему

$$\dot{x} = X(x, t), \tag{F}$$

для которой теорема существования и единственности справедлива при всех $t \geqslant 0$ в некоторой области

$$\Omega: \ \|x\| < \rho.$$

Кроме того, предположим, что $X(0, t) \equiv 0$ для всех $t \geqslant 0$.

Определения устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости, данные в § 7, не изменяются, за исключением того дополнительного условия, что все траектории начинаются в фиксированный момент времени $t=0$.

Обозначим через $W(x)$ положительно определенную функцию в смысле § 8. Мы скажем, что более общая функция $V(x, t)$ является *положительно определенной*, если выполняются следующие условия:

а) функция $V(x, t)$ определена[1]) в области Ω при всех $t \geqslant 0$;

б) $V(0, t) \equiv 0$ при всех $t \geqslant 0$;

---

[1]) Точнее, определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными первого порядка. — *Прим. перев.*

в) существует такая положительно определенная функция $W(x)$, что $W(x) \leqslant V(x, t)$ для всех x из Ω и всех $t \geqslant 0$.

Отметим, что полная производная $V(x, t)$ вдоль траектории системы (F) записывается в виде

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + X \cdot \operatorname{grad} V. \tag{10.1}$$

Если сверх условий а), б), в) еще $\dot{V} \leqslant 0$ в области Ω при всех $t \geqslant 0$, то функция V называется *функцией Ляпунова* в области Ω.

При таком определении функции Ляпунова теоремы устойчивости и неустойчивости § 9 почти в тех же формулировках переносятся и на случай неавтономной системы (F). В утверждении теоремы II об асимптотической устойчивости нужно требовать, чтобы производная $-\dot{V}(x, t)$ при всех $t \geqslant 0$ превосходила некоторую положительно определенную функцию $W_1(x)$. Мы здесь опускаем доказательства, несколько усложненные по сравнению с приведенными выше. В этих доказательствах[1]) приходится позаботиться о равномерности всех оценок по t.

§ 11. Обращение теорем Ляпунова

Возникает вопрос: верно ли, что устойчивость, асимптотическая устойчивость и т. д. гарантируют существование тех функций Ляпунова, которые фигурируют в соответствующих теоремах? Очевидно, это лишь интересная математическая проблема, прикладное значение которой невелико. Конкретная функция Ляпунова может привести к сильному достаточному условию устойчивости, которое и требуется на практике, но она не обязана давать необходимые условия. Однако верно (по крайней мере, для первых трех теорем), что существование функции с требуемыми свойствами необходимо для устойчивости.

Теоретически устойчивость всегда можно установить, построив функцию Ляпунова. Это было окончательно

---

[1]) См., например, Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952; Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1955. — *Прим. перев.*

выяснено в последнее десятилетие трудами ряда ученых (в основном, советских). Но соответствующие доказательства являются предметом специальных монографий и выходят за рамки нашей книги[1]).

§ 12. Несколько примеров

Приводимые здесь примеры служат иллюстрацией очень важного положения, которое хотя и упоминалось, но еще не было нами детально разобрано. Речь идет о том, что метод Ляпунова позволяет выяснять устойчивость, используя лишь сами дифференциальные уравнения; при этом их решения не предполагаются известными.

Первые примеры совсем просты, но именно на таких простых примерах развивается мастерство и познается техника конструирования функций Ляпунова.

Мы не будем здесь интересоваться конкретной величиной радиуса ρ окрестности Ω. При изложении примеров в этом разделе мы будем просто говорить „достаточно близко от начала координат", „достаточно малая область", вместо „область Ω достаточно малого радиуса ρ". В следующем параграфе мы рассмотрим этот вопрос с практической точки зрения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + g(x) = 0,$$

где $g(x)$ — дифференцируемая при всех x функция. Это уравнение можно интерпретировать как закон движения[2]) точечной единичной массы под действием силы $-g(x)$. Вводя переменную $y = \dot{x}$, придем к следующей системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x), \end{cases} \tag{12.1}$$

эквивалентной исходному уравнению.

Пусть график функции $g(x)$ более или менее напоминает прямую, проходящую через начало координат

[1]) Подробнее по этому поводу см., например, Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959. — *Прим. перев.*

[2]) По прямой. — *Прим. перев.*

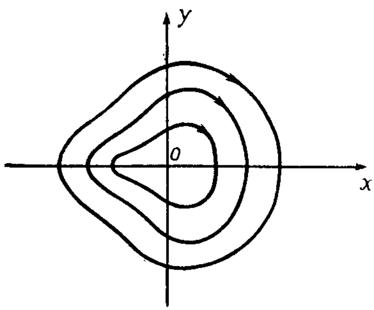
нат[1]) так, что $xg(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $g(0) = 0$. Пусть, далее,

$$G(x) = \int_0^x g(x)\,dx.$$

Кинетическая энергия рассматриваемой массы равна $\frac{y^2}{2}$, а $G(x)$ — ее потенциальная энергия. Поскольку сопротивления движению нет, закон сохранения энергии имеет вид

$$V(x) = \frac{y^2}{2} + G(x) = k^2;$$

это равенство может быть получено также и непосредственно из системы (12.1).



Центр

Рис. 16.

Система (12.1) имеет единственное положение равновесия в начале координат. Функция $V(x)$ является функцией Ляпунова, так как ее производная в силу системы (12.1) равна

$$\dot{V} = y\dot{y} + g(x)\,\dot{x} = 0.$$

Следовательно, по теореме I, положение равновесия устойчиво.

Фактически решениями системы (12.1) служат кривые $V(x) = k^2$. Записав уравнения этих кривых в виде

$$y = \pm\sqrt{2[k^2 - G(x)]},$$

мы легко убедимся, что все они представляют собой замкнутые кривые, окружающие начало координат, которое поэтому не является асимптотически устойчивым положением равновесия.

Только что рассмотренное положение равновесия — простой пример *центра* (рис. 16).

---

[1]) И лежащую в первом и третьем квадрантах. — *Прим. перев.*

Пример 2. Рассмотрим, снова на плоскости, систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda x + \ldots, \\ \dot{y} = -\mu y + \ldots, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ и $\mu > 0$, а многоточием обозначены сходящиеся степенные ряды, начинающиеся с членов степени не ниже второй. Выберем, далее, $V = x^2 + y^2$. Тогда

$$\dot{V} = -2(\lambda x^2 + \mu y^2) + \ldots,$$

где многоточие означает на этот раз члены степени не ниже третьей. При достаточно малых x и y знак производной

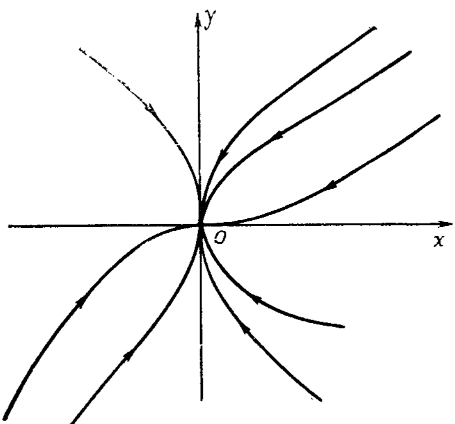


Рис. 17.

определяется знаком выписанного члена, а потому $\dot{V} < 0$ (исключая начало координат), т. е. $\dot{V}$ — отрицательно определенная функция. Так как $V(x)$ — положительно определенная функция, то выполнены условия теоремы II и положение равновесия асимптотически устойчиво.

Положение равновесия в этом случае — хорошо известный *устойчивый узел* (рис. 17).

Если $\lambda < 0$ и $\mu < 0$, то $\dot{V} > 0$ (исключая начало координат) и выполнены условия теоремы III. Положением равновесия является *неустойчивый узел* (на рис. 17 направления всех стрелок должны быть заменены на противоположные).

Пример 3. Пусть теперь

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + \ldots, \\ \dot{y} = -\mu y + \ldots, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ и $\mu > 0$. В этом случае возьмем $V = x^2 - y^2$. Тогда

$$\dot{V} = 2(\lambda x^2 + \mu y^2) + \ldots,$$

где не выписаны члены степени выше второй; $\dot{V}$ имеет вблизи начала координат знак, совпадающий со знаком выписанного члена. Поэтому $\dot{V}$ — функция положительно определенная. Так как сколь угодно близко к началу координат найдутся точки, в которых $V > 0$ (например, $V = x^2 > 0$ вдоль $y = 0$), то выполнены условия теоремы III: начало координат неустойчиво.

Это хорошо известный случай *седла* (рис. 18).

Пример 4. В трех предыдущих примерах характеристические корни λ и μ были действительными. Займемся теперь случаем комплексно сопряженных характеристических корней:

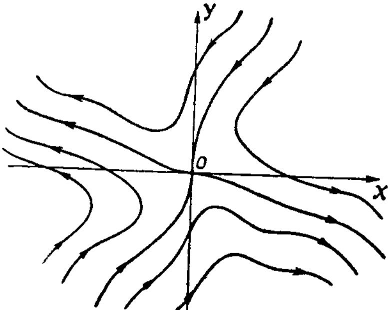
$$\begin{cases} \dot{x} = (a + bi)\,x + \ldots, \\ \dot{\bar{x}} = (a - bi)\,\bar{x} + \overline{\ldots}, \end{cases}$$

где $b \neq 0$; многоточие означает сходящийся степенной ряд относительно x и $\bar{x}$, начинающийся с членов не ниже второй степени, а многоточие с чертой означает степенной ряд, комплексно сопряженный с первым. Предположим, что $a < 0$. Пусть $V = x\bar{x}$. Тогда

$$\dot{V} = \dot{x}\bar{x} + x\dot{\bar{x}} = 2aV(x) + \ldots,$$

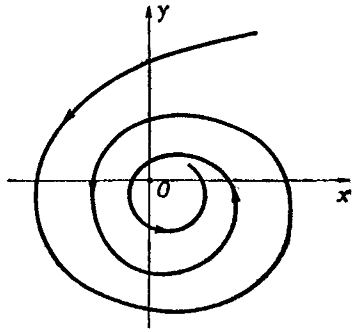
где не выписаны члены степени выше второй. Очевидно, что V и $-\dot{V}$ — положительно определенные функции. Выполнены и остальные условия теоремы II, а поэтому мы имеем асимптотическую устойчивость. В этом случае получаем хорошо известный *устойчивый фокус* (рис. 19).

Если $a > 0$, то функции V и $\dot{V}$ — положительно определенные, а потому положение равновесия — *неустойчивый фокус* (на рис. 19 направления всех стрелок должны быть заменены на противоположные).



Седло

Рис. 18.



Устойчивый фокус

Рис. 19.

Пример 5. Интересным приложением является обычный замкнутый электрический контур с нелинейными элементами (рис. 20). Уравнение контура имеет вид

$$L\ddot{x} + R\dot{x} + \frac{1}{C}x + g(x, \dot{x}) = 0,$$

где x — заряд конденсатора и, следовательно, $\dot{x}$ — ток в цепи; R — сопротивление, L — индуктивность, C — емкость, а $g(x, \dot{x})$ — нелинейные члены, имеющие степень не ниже второй. Эквивалентная этому уравнению система

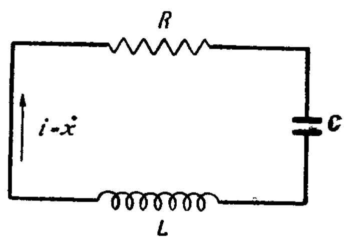


Рис. 20.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{1}{LC}x - \frac{R}{L}y - g(x, y) \end{cases}$$

имеет в начале координат положение равновесия. Характеристическими корнями являются корни уравнения

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0.$$

Они имеют отрицательные действительные части, поскольку R, L и C положительны.

Если $\frac{R^2}{L^2} < \frac{4}{LC}$, т. е. $R^2 < \frac{4L}{C}$, то оба собственных значения комплексно сопряженны и имеют отрицательную действительную часть $-\frac{R}{L}$. В этом случае траектории имеют вид спиралей, а начало координат асимптотически устойчиво (устойчивый фокус). Если $R^2 > \frac{4L}{C}$, то начало координат также асимптотически устойчиво (устойчивый узел). Асимптотическая устойчивость положения равновесия довольно очевидна из физических соображений: при положительном омическом сопротивлении с течением времени ток неизбежно исчезает.

Только что рассмотренные примеры соответствуют хорошо известным типам положений равновесия на плоскости. Перейдем к некоторым примерам в n-мерном фазовом пространстве.

Пример 6. (*Определение устойчивости по линейному приближению.*) Пусть теперь x является n-мерным вектором $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Px + q(x, t), \tag{12.2}$$

где P — постоянная невырожденная матрица, а нелинейный член $q(x, t)$ — малая более высокого порядка, чем $\|x\|$, при всех $t \geqslant 0$. Предположение о $q(x, t)$ выполняется, например, если компоненты вектор-функции q представляют собой сходящиеся при всех x степенные ряды от $x_1, \ldots, x_n$, начинающиеся с членов не ниже второй степени и имеющие в качестве коэффициентов функции от t, ограниченные при больших t. Для простоты мы предположим также, что компоненты вектор-функции $q(x, t)$ имеют частные производные первого порядка по x_k и t, непрерывные при всех $t \geqslant 0$ в некоторой области Ω пространства E^n. Таким образом, в области Ω для всех $t \geqslant 0$ справедлива теорема существования (см. § 5).

Допустим, что характеристические корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы P все *различны*. Разберем сначала случай, когда все они *действительны*. В этом случае можно выбрать такие действительные координаты, в которых система (12.2) сохраняет исходный вид, но $P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Далее имеются две возможности.

а) *Корни* λ_k *все отрицательны*. Положим

$$V = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2;$$

следовательно, производная в силу системы (12.2)

$$\dot{V} = (\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2) + s(x, t),$$

где $s(x, t)$ — малая более высокого порядка, чем выписанная в скобках квадратичная форма. Таким образом, в достаточно малой области Ω как V, так и $-\dot{V}$ — положительно определенные функции. Но тогда выполнены условия теоремы II, и начало координат асимптотически устойчиво.

б) *Некоторые из корней* λ_k (например $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $p \leqslant n$) *положительны, а остальные отрицательны.* Выбирая

$$V = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2,$$

мы находим, что

$$\dot{V} = (\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_p x_p^2 - \lambda_{p+1} x_{p+1}^2 - \ldots - \lambda_n x_n^2) + s(x, t),$$

где $s(x, t)$ имеет тот же смысл, что и в а). Таким образом, сколь угодно близко к началу координат найдутся точки (например, такие, у которых $x_{p+1} = \ldots = x_n = 0$), где $V > 0$. Что касается производной $\dot{V}$, то она (поскольку $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n < 0$) — положительно определенная функция. Используя теорему III, убеждаемся, что начало координат неустойчиво.

Обратимся теперь к случаю, когда некоторые из чисел λ_k *комплексные*, например, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — действительные [1]), а $\lambda_{p+1}, \bar{\lambda}_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+m}, \bar{\lambda}_{p+m}$ — комплексные, причем $p+2m=n$. Если корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — отрицательные и числа λ_{p+k}, $k=1, \ldots, m$, все имеют отрицательные действительные части, то определим

$$V=x_1^2+\ldots+x_p^2+x_{p+1}\bar{x}_{p+1}+\ldots+x_{p+m}\bar{x}_{p+m}.$$

Повторяя рассуждения случая а), мы докажем, что начало координат асимптотически устойчиво. Если же среди корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ есть положительные или если некоторые из чисел λ_{p+k} имеют положительные действительные части, то, элементарно видоизменив рассуждения случая б), получим, что начало координат неустойчиво.

Подводя итог, мы сформулируем следующее утверждение. *Для того чтобы начало координат было асимптотически устойчивым положением равновесия нелинейной системы* (12.2), *достаточно, чтобы все характеристические корни матрицы P имели отрицательные действительные части. Если имеется хотя бы один характеристический корень с положительной действительной частью, то начало координат неустойчиво.*

Подчеркнем, что хотя часто решения системы (12.2) совершенно неизвестны, тем не менее и тогда метод Ляпунова дает очень ценную информацию об устойчивости.

Замечание. Ниже, в связи с задачами автоматического регулирования, будет показано, что *если все корни λ_k, независимо от того, различны они или нет, имеют отрицательные действительные части, то начало координат асимптотически устойчиво.*

Пример 7. (*Критический случай.*) Пусть исследуемая система имеет вид

$$\dot{x}=Px+q(x), \tag{12.3}$$

где P — постоянная матрица, а $q(x)$ — вектор-функция, компоненты $q_1, \ldots, q_n$ которой представляют собой сходящиеся степенные ряды от компонент x_i вектора x, начинающиеся с членов не ниже второй степени.

[1]) Случай $p=0$ не исключается. — *Прим. перев.*

Критическим будет тот случай, когда среди собственных значений матрицы P имеются нули или пары чисто мнимых чисел.

Элементы p_{ij} матрицы P будем представлять себе как координаты в некотором n^2-мерном евклидовом пространстве. Точки этого пространства, отвечающие матрицам, у которых все характеристические корни имеют отрицательные действительные части, заполняют некоторую область R. Эта область соответствует асимптотически устойчивым системам. Если теперь приближаться к граничной точке M области R, то некоторые из характеристических корней стремятся к нулю или к чисто мнимым числам; точка M будет критической точкой.

Ляпунов разобрал случай, когда у матрицы P имеется один нулевой или одна пара чисто мнимых характеристических корней. Мы рассмотрим сейчас оба эти случая [1]).

I. *Один из характеристических корней матрицы P равен нулю.* Будем считать, что ненулевые характеристические корни матрицы P различны и все имеют отрицательные действительные части.

Удобно обозначить порядок системы (12.3) через $n+1$. С помощью нескольких преобразований, которые хотя и запутаны, однако совсем несложны, система (12.3) приводится к следующему виду (одну из переменных обозначим через y, а остальные — через $z_1, \ldots, z_n$, объединяя их в n-мерный вектор z):

$$\left\{\begin{aligned} \dot{y} &= F(y) + f_0(z) + f_1(z)\,y + f_2(z)\,y^2 + \ldots, \\ \dot{z} &= Qz + H(y) + h_0(z) + h_1(z)\,y + h_2(z)\,y^2 + \ldots, \end{aligned}\right. \qquad (12.4)$$

где обозначения имеют следующий смысл:

$F(y)$ — степенной ряд с младшим членом ay^N, $N \geqslant 2$;

f_i, h_i — степенные ряды, младшие члены которых имеют степень не ниже

3 для f_0,

2 для h_0, $f_1, \ldots, f_{N-1}$,

1 для h_1, $h_2, \ldots, f_N$, $f_{N+1}, \ldots$;

---

[1]) Более подробное изложение можно найти в указанных на стр. 54 книгах И. Г. Малкина и Н. Г. Четаева. — *Прим. перев.*

Q — постоянная матрица, характеристические корни которой те же, что и у матрицы P, за исключением нуля, так что все характеристические корни матрицы Q имеют отрицательные действительные части;

$H(y)$ — степенной ряд, начинающийся с членов степени $N+1$.

Следующий этап доказательства заключается в применении теорем Ляпунова. Сделаем предварительно некоторые замечания, касающиеся линейной системы

$$\dot{z} = Qz. \tag{12.5}$$

Поскольку характеристические корни матрицы Q различны и все имеют отрицательные действительные части, для этой системы можно построить [1]) функцию Ляпунова $W(z)$. Как уже было выяснено, эта функция представляет собой положительно определенную квадратичную форму, полная производная $\dot{W} = U(z)$ которой по времени в силу системы (12.5) является отрицательно определенной функцией. Так как

$$U = (\partial W/\partial z) \cdot Qz = \operatorname{grad} W \cdot Qz,$$

то функция U также является квадратичной формой. Эти свойства производной функции Ляпунова системы (12.5) мы сразу же используем.

Обратимся теперь снова к вопросу об устойчивости системы (12.4); при этом разберем отдельно случаи, когда число N четное и нечетное.

N четное. Определим функцию [2])

$$V(y, z) = y - aW(z). \tag{12.6}$$

Непосредственно находим, что вдоль траектории системы (12.4)

$$\dot{V} = \dot{y} - a\dot{W} = a\{y^N - U\} + \ldots,$$

где под многоточием здесь и ниже понимаются члены, малые по сравнению с выписанным (например, y^{N+1}, yz^2, z^3

---

[1]) См. пример 6. — *Прим. перев.*

[2]) Напомним, что a — коэффициент при младшем члене ряда $F(y)$. — *Прим. перев.*

и т. д.). Таким образом, вблизи начала координат знак производной $\dot{V}$ совпадает со знаком выражения $a\{y^N - U\}$, т. е. со знаком коэффициента a. В то же время в произвольно малой окрестности начала координат функция V не является знакоопределенной (например, при $z=0$ знак функции V совпадает со знаком y). Следовательно, в сколь угодно малой окрестности начала координат функции V и $\dot{V}$ могут иметь один и тот же знак; на основании теоремы III начало координат неустойчиво [1]).

N нечетное. В этом случае возьмем

$$V(y,\ z) = \frac{y^2}{2} - aW(z),$$

так что

$$\dot{V} = y\dot{y} - a\dot{W} = a\{y^{N+1} - U\} + \ldots .$$

Вблизи начала координат функция $\dot{V}$ снова имеет знак коэффициента a. Если $a > 0$, то в достаточно малой окрестности начала координат [сама точка (0, 0) исключается] $\dot{V} > 0$; кроме того, сколь угодно близко от начала координат найдутся точки, в которых также и $V > 0$. На основании теоремы III убеждаемся, что начало координат неустойчиво. Если, наоборот, $a < 0$, то вблизи начала координат имеем $V > 0$, $\dot{V} < 0$. А это, согласно теореме II, означает асимптотическую устойчивость начала координат.

Суммируя сказанное, приходим к следующему результату Ляпунова. *Для устойчивости положения равновесия системы* (12.4) *в начале координат необходимо и достаточно, чтобы число N было нечетно и коэффициент a отрицателен.*

II. *Матрица P имеет одну пару чисто мнимых характеристических корней.* Полное исследование этого случая, гораздо более сложного, чем предыдущий, было осуществлено Ляпуновым. Мы же здесь лишь проиллюстрируем возникающую в этом случае ситуацию на примере системы второго порядка.

---

[1]) Для того чтобы формально применить теорему III, надо было бы в качестве функции Ляпунова взять $\operatorname{sign} a \cdot V(y,\ z)$, где V — определенная в (12.6) функция. — *Прим. перев.*

Именно, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xf(x, y), \\ \dot{y} = -x - yf(x, y), \end{cases}$$

где функция $f(x, y)$ разлагается в сходящийся степенной ряд и $f(0, 0) = 0$. Характеристическими корнями матрицы P в этом случае оказываются $\pm i$. Полагая $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, находим

$$\dot{V} = -(x^2 + y^2) f(x, y).$$

Отсюда: если $f \geqslant 0$ в произвольно малой окрестности начала координат, то начало координат устойчиво;

если f — положительно определенная функция в некоторой окрестности начала координат, то начало координат асимптотически устойчиво;

если $f < 0$ в произвольно малой окрестности начала координат, то начало координат неустойчиво.

Разобранный нами пример иллюстрирует также следующий важный факт: *в некоторых случаях вопрос об устойчивости положения равновесия не может быть разрешен только рассмотрением линейных членов; в этих случаях необходимо учитывать характер нелинейности системы.*

Пример 8. Совсем просто применяется первая теорема Ляпунова об устойчивости к системам, имеющим первый интеграл $V(x) = c$. В этом случае $\dot{V} = 0$, и поэтому начало координат устойчиво, если V — положительно или отрицательно определенная функция. (Если V — отрицательно определенная функция, то $-V$ — положительно определенный первый интеграл.) Сейчас мы покажем на примере, как исследуется устойчивость по линейному приближению с использованием первых интегралов.

Нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Ax_2(x_3 - a), \\ \dot{x}_2 = Bx_1(x_3 - b), \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 \end{cases} \tag{12.7}$$

часто встречается при изучении движения твердого тела; A, B, a, b — постоянные. Эта система имеет три положения равновесия:

$$
\begin{aligned}
E_1:&\quad x_1=\alpha, && x_2=0, && x_3=b;\\
E_2:&\quad x_1=0, && x_2=\beta, && x_3=a;\\
E_3:&\quad x_1=0, && x_2=0, && x_3=\gamma
\end{aligned}
$$

(здесь α, β, γ — произвольные постоянные).

а) *Исследование положения равновесия* E_1. Прежде всего, с помощью замены переменных

$$y_1=x_1-\alpha,\quad y_2=x_2,\quad y_3=x_3-b$$

перенесем положение равновесия в начало координат. Система (12.7) в новых координатах примет вид

$$
\begin{cases}
\dot y_1=A(b-a)\,y_2+Ay_2y_3,\\
\dot y_2=B(y_1+\alpha)\,y_3,\\
\dot y_3=(y_1+\alpha)\,y_2.
\end{cases}
$$

Характеристическое уравнение линейного приближения

$$
\begin{vmatrix}
-\lambda & A(b-a) & 0\\
0 & -\lambda & \alpha B\\
0 & \alpha & -\lambda
\end{vmatrix}
=\lambda(\alpha^2B-\lambda^2)=0
$$

имеет корни 0, $\alpha\sqrt{B}$, $-\alpha\sqrt{B}$. Допустим, что $\alpha\neq 0$, так как в противном случае точка E_1 совпадает с точкой E_3. Если $B>0$, то среди трех корней имеется один положительный и положение равновесия E_1 неустойчиво. Если же $B<0$, то мы имеем критический случай: один корень нулевой, а два других — сопряженные чисто мнимые. В этом случае нельзя получить каких-либо заключений из рассмотрения только линейного приближения; мы должны принять во внимание и нелинейные члены. К счастью, имеются два очевидных первых интеграла:

$$
\begin{aligned}
V_1&=y_2^2-By_3^2=c_1,\\
V_2&=(y_1+\alpha)^2-A(y_3+b-a)^2=c_2.
\end{aligned}
$$

Так как $B<0$, то V_1 — положительно определенная функция от y_2 и y_3, что означает устойчивость по этим двум переменным: если первоначально y_2 и y_3 малы [1]), то они и останутся малыми. Далее, с помощью другого первого интеграла V_2 убедимся, что E_1 устойчиво: если y_1, y_2, y_3 в начальный момент все малы, то они должны оставаться малыми все время.

Таким образом, мы показали, что положение равновесия E_1 устойчиво, если $B < 0$, и неустойчиво, если $B > 0$.

б) *Исследование положения равновесия* E_2. Благодаря симметрии мы немедленно убеждаемся, что положение равновесия E_2 устойчиво, если $A < 0$, и неустойчиво, если $A > 0$.

в) *Исследование положения равновесия* E_3. Замена переменных

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = x_2, \qquad y_3 = x_3 - \gamma$$

превращает положение равновесия в начало координат, а система (12.7) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = Ay_2(y_3 - a + \gamma), \\ \dot{y}_2 = By_1(y_3 - b + \gamma), \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение ее линейного приближения таково:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & A(\gamma - a) & 0 \\ B(\gamma - b) & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda\,[\lambda^2 - AB(\gamma - a)(\gamma - b)] = 0.$$

Если $AB(\gamma - a)(\gamma - b) > 0$, то имеется положительный корень, а тогда положение равновесия E_3 неустойчиво. Если же $AB(\gamma - a)(\gamma - b) < 0$, то мы имеем критический случай: один корень нулевой, а два других — сопряжен-

[1]) То есть начальное значение y_1^0 произвольное, а y_2^0 и y_3^0 — достаточно малые. — *Прим. перев.*

ные чисто мнимые; линейное приближение не дает информации об устойчивости. Первым интегралом является

$$V = -B(\gamma - b)\,y_1^2 + A(\gamma - a)\,y_2^2 + AB(a - b)\,y_3^2 = c.$$

Если все коэффициенты этого выражения имеют одинаковые знаки, так что функция V положительно или отрицательно определенная, то положение равновесия E_3 устойчиво.

Таким образом, мы показали, что положение равновесия E_3 устойчиво, если одновременно $AB(\gamma-a)(\gamma-b)<0$ и $A(a-b)(\gamma-b)<0$, и неустойчиво, когда произведение $AB(\gamma-a)(\gamma-b)>0$. Если же $AB(\gamma-a)(\gamma-b)<0$, но $A(a-b)(\gamma-b)>0$, то предложенный способ не позволяет сделать какое-либо заключение об устойчивости положения равновесия E_3.

Пример 9. Рассмотрим консервативную колебательную систему с n степенями свободы. Состояние системы в любой момент времени может быть описано с помощью n обобщенных координат $q_1, \ldots, q_n$ и n обобщенных импульсов $p_1, \ldots, p_n$. Тогда закон движения системы в обобщенных координатах q, p запишется в векторной форме при помощи гамильтоновой функции $H(p, q)$ следующим образом[1]):

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{12.8}$$

Положениям равновесия системы соответствуют такие точки $2n$-мерного пространства q, p, в которых обе частные производные первого порядка функции Гамильтона обращаются в нуль.

Пусть начало координат — изолированное положение равновесия; аддитивную постоянную в функции H мы выберем так, чтобы $H(0, 0) = 0$. В обычных динамических системах функция H имеет смысл полной энергии и ее можно представить в виде $H(p, q) = T(p) + W(q)$, где T — кинетическая, а W — потенциальная энергия. Кинетическая энергия T — положительно определенная функция

[1]) Подробнее об обобщенных координатах и методах аналитической механики см. Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, Физматгиз, 1960. — *Прим. перев.*

от p[1]). Если потенциальная энергия имеет изолированный минимум при $q=0$, то W — положительно определенная функция q. Следовательно, функция H является положительно определенной, и, поскольку $\dot{H}=0$, положение равновесия $p=0$, $q=0$ устойчиво. Это — хорошо известная теорема Лагранжа, впервые сформулированная Лагранжем и доказанная Дирихле: *состояние консервативной системы, в котором потенциальная энергия имеет изолированный минимум, является устойчивым положением равновесия.*

Допустим теперь, что H — аналитическая функция; в этом случае[1])

$$T(p)=T_2(p),$$
$$W(q)=W_k(q)+W_{k+1}(q)+\ \ldots;$$

здесь $T_2(p)$ — положительно определенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами, а $W_j(q)$ — члены j-й степени относительно q. Пусть $W(0)=0$ — изолированный максимум потенциальной энергии; тогда $W_k(q)$ — отрицательно определенная форма k-й степени. Определим функцию

$$V=p\cdot q=\sum_{i=1}^{n} p_i q_i;$$

ее полная производная в силу системы (12.8) равна

$$\dot{V}=2T_2(p)-kW_k(q)-(k+1)W_{k+1}(q)+\ \ldots.$$

Поскольку члены $2T_2-kW_k$, являющиеся доминирующими

---

[1]) Для консервативных систем кинетическая энергия является квадратичной формой от импульсов p_i с коэффициентами, зависящими от координат q_i, т. е. $T=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q_1,\ \ldots,\ q_n)\,p_i p_j$. Авторы же рассматривают весьма *частный* случай, когда все коэффициенты a_{ij} — *постоянные.*

Приводимое здесь доказательство теоремы Лагранжа сохраняет свою силу и для общего случая, когда $T=T(q,\ p)$. Однако при доказательстве дальнейших теорем существенно используется ограничение авторов. — *Прим. ред.*

вблизи начала координат, составляют положительно определенную функцию, то и $\dot{V}$ — положительно определенная функция. Функция Ляпунова V — скалярное произведение векторов p и q, и потому она может принимать положительные значения в произвольно малой окрестности начала координат. Следовательно, по теореме III, начало координат неустойчиво. Таким образом, установлена следующая теорема Ляпунова[1]): *состояние консервативной системы, в которой потенциальная энергия имеет изолированный максимум, является неустойчивым положением равновесия.*

Эта теорема Ляпунова была обобщена Н. Г. Четаевым. Предположим только, что $W(0)=0$ не является минимумом потенциальной энергии. Следовательно, найдутся такие сколь угодно малые q, для которых $W(q)<0$. Так как $H(0, q)=W(q)$, то существуют сколь угодно близкие к началу координат точки $\{p, q\}$, где $H(p, q)<0$ для всех достаточно малых p. В произвольно малой окрестности начала координат имеются поэтому такие точки $\{p, q\}$, что одновременно

$$p \cdot q > 0, \qquad -H(p \cdot q) > 0.$$

Пусть Ω — некоторая окрестность начала координат, а Ω_1 — множество точек окрестности Ω, в которых выполняются оба только что указанных неравенства; очевидно, что начало координат принадлежит границе области Ω_1. Положим $V=-(p \cdot q)H$. Поскольку $\dot{H}=0$, то, как и в рассмотренном раньше случае,

$$\dot{V}=-[2T_2(p)-kW_k(q)+\ \dots]\,H(p, q).$$

Мы выберем окрестность Ω достаточно малой; так как $T_2(p)>0$, то[2]) $W_k(q)<0$ внутри Ω_1. Следовательно, при

[1]) Эта теорема доказана авторами при следующих ограничениях: 1) $W_k(q)$ — отрицательно определенная форма; 2) кинетическая энергия T не зависит явно от q (см. примечание на стр. 70). Первое условие имеется у Ляпунова, а второе уже является излишним (т. е. теорема справедлива без второго условия, но доказательство должно быть иным). — *Прим. ред.*

[2]) Напомним что $T(p)+W(q)=H(p, q)<0$ в области Ω_1. Поскольку $T(p)>0$, то $W(g)<0$. Предполагается, что при этом и $W_k(g)<0$. — *Прим. перев.*

достаточно малой Ω члены в квадратных скобках положительны внутри Ω_1, а потому в этой области производная $\dot{V}$ положительна. В точках границы области Ω_1, лежащих внутри Ω, либо $p \cdot q = 0$, либо $H(p, q) = 0$, т. е. $V = 0$ во всех таких точках. Все условия теоремы V выполнены: положение равновесия неустойчиво. *Положение равновесия консервативной системы, в котором потенциальная энергия не имеет минимума, неустойчиво*[1]).

§ 13. Область асимптотической устойчивости

Очевидно, что в приложениях асимптотическая устойчивость более важна, чем простая устойчивость. Если, скажем, требуется поддерживать определенную температуру T в некоторой системе, то понятно желание, чтобы не только поддерживалась некоторая температура, не слишком сильно отличающаяся от T, но и чтобы малые отклонения температуры со временем исчезали. Сосредоточим теперь наше внимание на асимптотической устойчивости.

Здесь возникают и другие практические соображения. Предположим, что некоторый электрический прибор рассчитан на ток в 127 вольт. Прибор устроен так, что малые отклонения напряжения не существенны. Однако как велики могут быть допустимые отклонения? Система может быть асимптотически устойчивой, однако может перестать нормально функционировать уже при отклонениях напряжения, например, свыше одного милливольта. Итак, эта система, теоретически асимптотически устойчивая, оказывается на практике неустойчивой. Асимптотическая устойчивость имела бы практический смысл, если бы были допустимы отклонения, скажем, в несколько вольт.

Таким образом, возникает потребность в уточнении понятия асимптотической устойчивости. Желательным качеством является асимптотическая устойчивость в целом

---

[1]) В такой общей формулировке теорема неверна. У авторов она доказана для аналитической потенциальной энергии и двух дополнительных предположениях: 1) $T = T(p)$ не зависит явно от q (см. примечание на стр. 70) и 2) из $W(q) < 0$ следует $W_k(q) < 0$. — *Прим. ред.*

или, как мы будем говорить, *полная устойчивость* [1]). Если нет возможности обеспечить полную устойчивость, то приходится довольствоваться уверенностью, что система стремится к положению равновесия, когда возмущения не слишком велики. При этом необходимо иметь некоторые сведения относительно величины области асимптотической устойчивости [2]).

Здесь нужно обратить внимание на фундаментальное различие между линейными и нелинейными системами: *для определения практической устойчивости линейное приближение совершенно недостаточно*. В линейных системах всегда бывает только полная устойчивость, тогда как только в нелинейных системах она может не быть таковой. Другими словами, для нахождения возможных границ области асимптотической устойчивости необходимо использовать нелинейность.

В настоящем параграфе мы приведем некоторые теоремы, служащие для определения области асимптотической устойчивости. Однако прежде чем переходить к ним, мы введем два предварительных понятия. Рассмотрим обычную автономную систему

$$\dot{x} = X(x), \qquad X(0) = 0. \tag{FA}$$

Предельные множества. Это весьма важное понятие было введено Г. Д. Биркгофом. Грубо говоря, если $x(t)$ — решение системы (FA), то его *ω-предельным множеством* [3]) Γ^+ является все то, к чему кривая $x(t)$ приближается при неограниченном возрастании времени. Например, если решение $x(t)$ представляет собой спираль, навивающуюся на предельный цикл [4]) δ, то δ является ω-предельным множеством для этого решения; если реше-

---

[1]) С понятием асимптотической устойчивости в целом мы уже встречались в § 7. — *Прим. перев.*

[2]) Под областью асимптотической устойчивости подразумевается область, содержащая начало координат и обладающая тем свойством, что все движения, начинающиеся в этой области, стремятся при $t \to +\infty$ к началу координат. — *Прим. ред.*

[3]) В оригинале positive limiting set. — *Прим. перев.*

[4]) *Предельным циклом* называется изолированная замкнутая траектория, соответствующая периодическому решению системы (FA). — *Прим. перев.*

ние стремится к точке A, то его ω-предельное множество состоит из этой точки.

Более строго, точка p принадлежит ω-предельному множеству Γ^+ решения $x(t)$ системы (FA), если существует такая неограниченно возрастающая последовательность моментов времени t_n, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, что

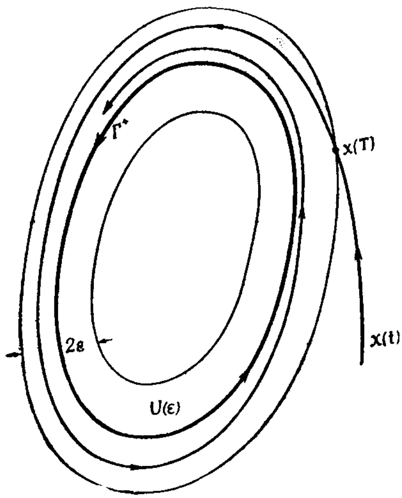


Рис. 21.

$x(t_n) \to p$ при $n \to \infty$. Если решение $x(t)$ ограничено, то оно при $t \to \infty$ стремится к своему ω-предельному множеству Γ^+; другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой момент времени $T(\varepsilon, x(t))$, что для всех $t > T$ решение $x(t)$ целиком лежит в окрестности $U(\varepsilon)$ множества[1]) Γ^+ (рис. 21).

α-предельное множество[2]) решения $x(t)$ определяется точно так же, если только t заменить на $-t$. Однако это понятие в дальнейшем не используется.

---

[1]) ε-окрестность $U(\varepsilon)$ множества M определяется так: точка q принадлежит этой окрестности, если в множестве M найдется такая точка p, что $\|p-q\| < \varepsilon$. — *Прим. перев.*

[2]) В оригинале negative limiting set. — *Прим. перев.*

Инвариантное множество. Множество G называется *инвариантным*, когда оно обладает следующим свойством: если точка x_0 принадлежит множеству G, то и вся траектория (т. е. как положительная, так и отрицательная полутраектории), проходящая через эту точку, целиком лежит в множестве G. Например, замкнутая траектория является инвариантным множеством; совокупность траекторий, проходящих через все точки некоторой дуги, также представляет собой инвариантное множество.

Отметим (без доказательства) важное свойство. *Если решение $x(t)$ ограничено при $t \geqslant 0$, то его ω-предельное множество Γ^+ непусто, компактно и является инвариантным множеством.*

Из определения ω-предельного множества немедленно следует такая лемма.

Лемма. *Если решение $x(t)$ ограничено при $t \geqslant 0$ и если множество M содержит ω-предельное множество Γ^+, то $x(t)$ при $t \to \infty$ неограниченно приближается к множеству*[1] *M.*

После этих предварительных рассмотрений мы можем установить основные предложения, позволяющие расширить и уточнить критерии асимптотической устойчивости.

Теорема VI. *Пусть $V(x)$ — скалярная функция, частные производные первого порядка которой непрерывны при всех x. Обозначим через Ω_l область*[2]*, где $V(x) < l$. Допустим, что эта область ограничена и что внутри нее выполнены условия*

а) $V(x) > 0$ *при* $x \neq 0$;

б) $\dot{V}(x) \leqslant 0$.

Пусть R — множество всех точек области Ω_l, в которых $\dot{V}(x) = 0$, а M — максимальное инвариантное множество, содержащееся в R. Тогда каждое

[1]) Последнее утверждение означает следующее. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $t \geqslant T$ точка $x(t)$ принадлежит ε-окрестности множества M (относительно определения ε-окрестности см. примечание на стр. 74). — *Прим. ред.*

[2]) Точнее, открытое множество (см. § 4). Предполагается, что Ω_l состоит из *всех* точек, где $V(x) < l$. — *Прим. ред.*

решение $x(t)$ *системы* (FA), *начинающееся в области* Ω_l, *неограниченно приближается к* M *при* $t \to \infty$.

Доказательство. Из предположений о функции V следует, что $V(t) = V(x(t))$ при $t \to \infty$ не возрастает и что она неотрицательна внутри Ω_l. Следовательно, каждое решение $x(t)$, начинающееся в какой-либо точке области Ω_l, должно все время оставаться в этой области. Кроме того, существует $\lim\limits_{t \to \infty} V(t) = l_0$, причем $l_0 < l$. В силу соображений непрерывности заключаем, что равенство $V(x) = l_0$ выполняется на ω-предельном множестве Γ^+ траектории $x(t)$. Но отсюда вытекает, что множество Γ^+ целиком лежит внутри области Ω_l и на нем $\dot{V} = 0$[1]). Поэтому Γ^+ лежит в множестве R, а поскольку Γ^+ — инвариантное множество, то оно лежит даже в множестве M. Решение $x(t)$ все время остается в области Ω_l, и поэтому оно ограничено при всех $t \geqslant 0$; на основании сформулированной выше леммы $x(t) \to M$ при $t \to +\infty$.

С помощью теоремы устойчивости Ляпунова на основании условий а) и б) заключаем[2]), что начало координат устойчиво. Чтобы доказать его асимптотическую устойчивость, остается лишь показать, что множество M состоит только из начала координат, т. е. что ни одно решение, за исключением тривиального решения $x = 0$, не может оставаться в множестве M при всех $t \geqslant 0$. Это будет именно так, если, например, $\dot{V}$ — отрицательно определенная функция в области Ω_l; тогда множеству R, а следовательно, и множеству M принадлежит только начало координат. Мы сформулируем это утверждение отдельно.

Теорема VII. *Если сохранить все предположения теоремы* VI, *заменив условие* б) *условием*

б)* $\dot{V}(x) < 0$ *при всех* $x \neq 0$ *в области* Ω_l,

то начало координат — асимптотически устойчивое положение равновесия системы (FA) *и каждое*

---

[1]) В силу инвариантности Γ^+ через каждую точку из Γ^+ проходит траектория, целиком лежащая в Γ^+. Вдоль этой траектории $V = \text{const} = l_0$ и потому $\dot{V} = 0$. — *Прим. ред.*

[2]) При дополнительном условии $V(0) = 0$. — *Прим. ред.*

решение, начинающееся в области Ω_l, будет неограниченно приближаться к началу координат при $t \to \infty$.

(Последнее утверждение является дополнением к теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости.)

Пример 1. Интересны приложения этих теорем к так называемому *уравнению Льенара*

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \tag{13.1}$$

которое является обобщением уравнения электрического контура (см. пример 5, § 12). Это уравнение интенсивно изучалось; ему посвящено большое количество работ, которые продолжают выходить и до сих пор. В этих многочисленных исследованиях делались самые разнообразные предположения. Однако, так как мы не стремимся к большой общности результатов, мы рассмотрим здесь лишь самые простые случаи, когда на функции f и g наложены довольно сильные ограничения.

Для упрощения задачи предположим, что f и g — многочлены[1]), причем f — четная функция, а g — нечетная. Более того, мы допустим[2]), что график функции $g(x)$ более или менее близок к прямой линии, проходящей через начало координат, и монотонно возрастает с ростом x. Заметим, что этот частный случай уравнения Льенара (13.1) полностью охватывает уравнение Ван-дер-Поля (см. пример 2).

Для дальнейшего удобно ввести функции

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx, \qquad G(x) = \int_0^x g(x)\,dx.$$

Очевидно, что функция $F(x)$ — нечетная, $G(x)$ — четная и $F(0) = G(0) = 0$.

Вместо уравнения (13.1) рассмотрим эквивалентную ему систему уравнений

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x), \\ \dot{y} &= -g(x). \end{aligned}\right. \tag{13.2}$$

---

[1]) На самом деле приводимые рассуждения и результаты справедливы и в более общем случае. — *Прим. перев.*

[2]) Сравните с примером 1, § 12. — *Прим. перев.*

Поскольку $F(x)$ и $G(x)$ — многочлены, при любых значениях x и y выполнены условия теоремы существования и единственности: через каждую точку плоскости проходит одна и только одна траектория системы. В силу сделанных допущений уравнения

$$\begin{cases} y - F(x) = 0, \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

имеют общее решение $x = y = 0$, т. е. начало координат — положение равновесия.

В качестве функции Ляпунова возьмем функцию

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + G(x).$$

Если $f \equiv 0$, т. е. если в системе нет (положительного или отрицательного) сопротивления, то эта функция имеет смысл полной энергии системы. Немедленно находим производную функции V в силу системы (13.2):

$$\dot{V} = -g(x) F(x).$$

Пусть существуют положительные константы a и l такие, что выполняются следующие два условия:

$$g(x) F(x) > 0 \quad \text{при} \quad |x| < a, \quad x \neq 0; \tag{13.3а}$$

$$G(x) < l \quad \text{только при} \quad |x| < a. \tag{13.3б}$$

Тогда в области Ω_l, т. е. на множестве тех точек плоскости, в которых справедливо неравенство $V(x, y) < l$, выполняется теорема VI. Действительно, из (13.3б) и из неравенства $V < l$ следует[1]), что $|x| < a$, $y^2 < 2l$, так что область Ω_l ограничена. Используя (13.3а), заключаем, что в этой области $\dot{V} \leqslant 0$. Далее, $\dot{V} = 0$ в тех и только тех точках области Ω_l, в которых $x = 0$, т. е. множество R представляет собой ось OY. Но во всех точках оси OY, отличных от начала координат O, угловой коэффициент

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-g(x)}{y - F(x)}$$

[1]) Заметим, что, в силу предположений о функции $g(x)$, функция $G(x) > 0$ при $x \neq 0$. — *Прим. перев.*

имеет конечное значение, а потому на этой оси не может лежать дуга траектории: инвариантным множеством является только точка O. Следовательно, любое решение, начинающееся во внутренней точке области Ω_l, приближается при $t \to \infty$ к началу координат. Иначе говоря, начало координат асимптотически устойчиво, а Ω_l представляет собой „меру“ асимптотической устойчивости.

Пример 2. Уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \varepsilon > 0, \tag{13.4}$$

эквивалентно системе второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon\left(\dfrac{x^3}{3} - x\right), \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \tag{13.5}$$

Единственное положение равновесия — начало координат; оно является неустойчивым узлом или фокусом в зависимости от величины параметра ε. Известно также[1]), что система (13.5) имеет единственный предельный цикл δ, который окружает начало координат.

Если заменить t на $-t$, то сами траектории не изменятся, но направление движения по ним станет противоположным. В частности, предельный цикл δ останется тем же самым, а начало координат будет уже асимптотически устойчивым положением равновесия. Очевидно, что областью асимптотической устойчивости как раз является область, заключенная внутри замкнутой кривой δ. Однако этот вывод не имеет большой ценности, поскольку фактическое местоположение предельного цикла δ неизвестно.

Интересные результаты получатся, если к уравнению (13.4) применить развитую выше общую теорию. Заметим, что вместо того, чтобы заменять t на $-t$, мы можем просто считать $\varepsilon < 0$, получая тот же результат. Будем поэтому предполагать, что в (13.4) и (13.5) параметр ε отрицателен.

---

[1]) См., например, Стокер Дж., Нелинейные колебання в механических и электрических системах, ИЛ, 1952. — *Прим. перев.*

Сравнивая уравнения (13.4) и (13.1), мы получаем

$$f(x)=\varepsilon(x^2-1), \qquad g(x)=x,$$
$$F(x)=\varepsilon\left(\frac{x^3}{3}-x\right), \qquad G(x)=\frac{x^2}{2}.$$

Далее, следуя примеру 1, получаем

$$V(x, y)=\frac{y^2}{2}+G(x)=\frac{x^2+y^2}{2},$$
$$\dot{V}=-\varepsilon x\left(\frac{x^3}{3}-x\right)=-\varepsilon x^2\left(\frac{x^2}{3}-1\right).$$

Так как $\dot{V}\leqslant 0$ при $x^2\leqslant 3$, то возьмем $a=\sqrt{3}$. Далее, выберем число l так, чтобы неравенство $G(x)=\frac{x^2}{2}<l$ было равносильно неравенству $x^2<a^2$; для этого достаточно положить $l={}^3/_2$. Таким образом, круг $x^2+y^2<3$ содержится в области асимптотической устойчивости. Иными словами, предельный цикл δ лежит *при любом* ε вне круга радиуса $\sqrt{3}$ с центром в начале координат. Диаметр предельного цикла никогда не меньше $2\sqrt{3}$; этот хорошо известный результат справедлив при всех значениях параметра ε.

Отметим, между прочим, что проведенное нами рассуждение сразу показывает асимптотическую устойчивость начала координат для системы (13.5) при $\varepsilon<0$. Этот факт не является в общем случае уравнения (13.1) тривиальным, поскольку линейные члены в системе (13.2) неизвестны.

Пример 3. Возьмем теперь уравнение

$$\ddot{x}+a\dot{x}+2bx+3x^2=0, \quad a>0, \quad b>0; \tag{13.6}$$

оно эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=-2bx-ay-3x^2, \end{cases} \tag{13.7}$$

рассматривать которую удобнее, чем непосредственно само уравнение. Это уравнение не подпадает[1]) под тип (13.1),

---

[1]) Поскольку функция $g(x)=2bx+3x^2$ не является нечетной. — *Прим. перев.*

рассмотренный в примере 1, однако никаких затруднений при использовании теоремы VI у нас не возникнет.

Положений равновесия у системы (13.7) два: в начале координат O и в точке $P=\left\{-\frac{2}{3}b,\ 0\right\}$. Характеристические корни λ_1 и λ_2 матрицы линейного приближения (соответствующей первому положению равновесия) определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2b & -a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + 2b = 0.$$

На основании теоремы Виета

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -a < 0, \quad \lambda_1\lambda_2 = 2b > 0,$$

и, следовательно, собственные значения либо действительные и отрицательные, либо комплексно сопряженные с отрицательными действительными частями. Таким образом, положение равновесия O асимптотически устойчиво.

Для того чтобы изучить положение равновесия P, перенесем начало координат в точку P, т. е. сделаем замену

$$x + \frac{2}{3}b = x^*, \quad x = x^* - \frac{2}{3}b.$$

В новых координатах система (13.7) запишется так:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = y, \\ \dot{y} = -ay - 3\left(x^* - \frac{2}{3}b\right)x^*. \end{cases}$$

Характеристические корни λ_1^* и λ_2^* теперь определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda^* & 1 \\ 2b & -a-\lambda^* \end{vmatrix} = \lambda^{*2} + a\lambda^* - 2b = 0.$$

Поскольку $\lambda_1^*\lambda_2^* = -2b < 0$, действительные корни имеют противоположные знаки. Таким образом, положение равно весия P является седлом. Траектории системы приблизительно изображены на рис. 22 [1]). Заштрихованная площадь является областью асимптотической устойчивости.

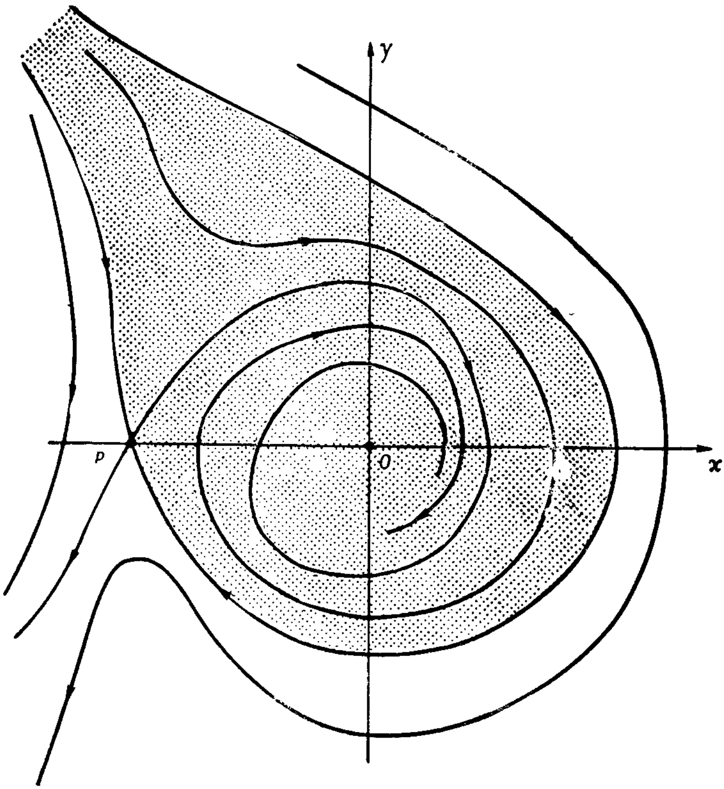


Рис. 22.

Перейдем к определению этой области. Положим

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + bx^2 + x^3;$$

тогда

$$\dot{V} = -ay^2.$$

[1]) Начало координат считается устойчивым фокусом; случай, когда начало координат — устойчивый узел, приводит к аналогичной картине (см. рис. 23). — *Прим. перев.*

Отсюда видно, что всюду вне оси абсцисс $\dot{V} < 0$, т. е. множество R лежит на прямой $y=0$. Так как на оси абсцисс всюду вне начала координат[1]) производная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2bx - 3x^2}{y} - a$$

обращается в бесконечность, то инвариантное множество может состоять только из точек O и P.

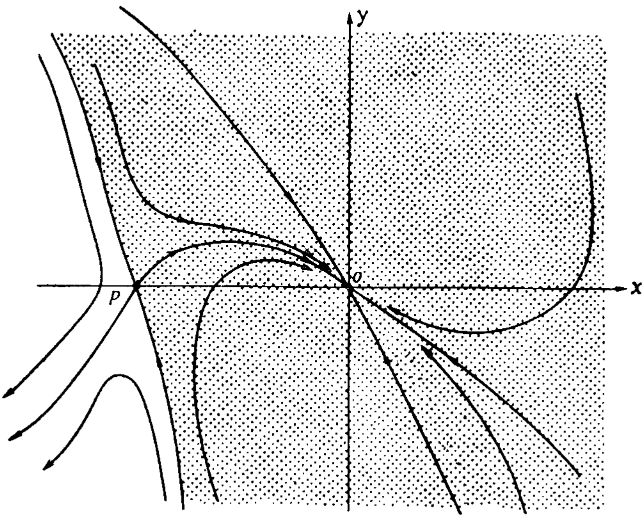


Рис. 23.

Теперь мы выберем область Ω_l: множество тех точек плоскости, отличных от P, в которых выполнено неравенство $V < l$. Для этого мы рассмотрим семейство кривых

$$V(x, y) \equiv \frac{y^2}{2} + bx^2 + x^3 = k$$

и определим число $k = l$ так, чтобы соответствующая кривая проходила через точку P:

$$l = b\left(-\frac{2}{3}b\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}b\right)^3 = \frac{4}{27}b^3.$$

[1]) И точки P. — *Прим. перев.*

Построим кривую $V(x, y) = l$:

$$\frac{1}{2} y^2 + bx^2 + x^3 = \frac{4}{27} b^3,$$

или

$$y = \pm \sqrt{\frac{8}{27} b^3 - 2bx^2 - 2x^3}$$

на плоскости x, y (рис. 24). Поскольку

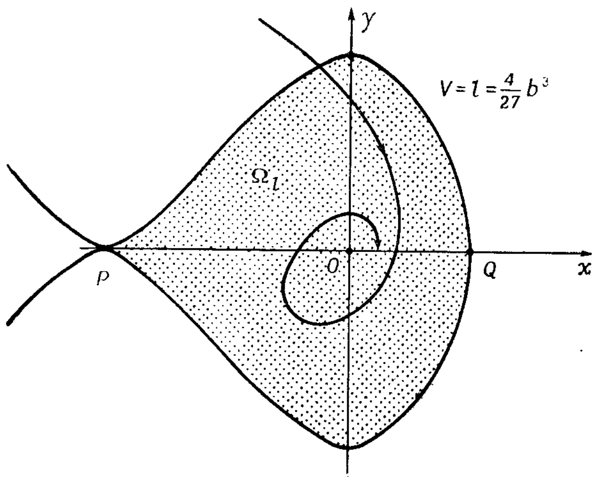


Рис. 24.

$$\frac{d}{dx}(y^2) = -2(2bx + 3x^2),$$

сразу получаем все экстремальные точки этой кривой:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = \sqrt{\frac{8}{27} b^3} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{2}{3} b, \quad y_2 = 0$$

(первая из них дает максимум для y^2, а вторая — минимум). При больших $x > 0$ кривая не определена, поскольку y^2 делается отрицательным. Внутренность получившейся кривой (заштрихованная на рис. 24) и является областью Ω_l. Множество R представляет собой интервал PQ оси абсцисс, а множество M состоит из единственной точки O. Следовательно, все траектории, начинающиеся во внутренних точках овала, при $t \to \infty$ приближаются к началу координат.

Таким образом, внутренность построенной кривой является областью асимптотической устойчивости [1].

Полная устойчивость. В случае, когда все пространство является областью асимптотической устойчивости, говорят о *полной устойчивости*. Общие факты, касающиеся этого понятия, мы и изложим сейчас.

Имеет место следующее аналогичное теореме VI предложение, которое доказывается совершенно так же.

Теорема VIII. *Пусть $V(x)$ — скалярная функция, частные производные первого порядка которой непрерывны при всех x. Допустим, что выполнены следующие условия:*

а) $V(x) > 0$ *при всех* $x \neq 0$;

б) $\dot{V}(x) \leqslant 0$ *во всем пространстве.*

Обозначим через R множество всех таких точек пространства, в которых $\dot{V} = 0$, а через M — максимальное инвариантное множество, содержащееся в R. Тогда каждое решение, остающееся ограниченным при $t \geqslant 0$, неограниченно приближается к M при $t \to +\infty$.

Если сверх того известно, что

$$V(x) \to \infty \quad \text{при} \quad \|x\| \to \infty,$$

то каждое решение ограничено при $t \geqslant 0$ и, следовательно, все решения неограниченно приближаются к M при $t \to \infty$. В случае, когда множество M состоит только из начала координат, имеет место полная устойчивость.

Пример 4. Снова рассмотрим систему (13.2), сохранив предположения примера 1 и заменив условия (13.3а) и (13.3б) следующими:

$$g(x)F(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0; \qquad (13.8\text{а})$$

$$G(x) \to \infty \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \qquad (13.8\text{б})$$

[1] Конечно, получившаяся оценка области асимптотической устойчивости очень груба (особенно по сравнению с рис. 23), однако она позволяет в ряде случаев сделать полезные заключения. — *Прим. перев.*

Используя ту же самую функцию V, мы легко убедимся, что $V \to \infty$ при $x^2+y^2 \to \infty$. Следовательно, каждое решение уравнения (13.1) в этих предположениях ограничено при $t \geqslant 0$, а множество M, как и раньше, состоит только из начала координат. Таким образом, условия (13.8а) и (13.8б) обеспечивают полную устойчивость системы (13.2).

Часто оказывается, что более простые и сильные результаты получаются, если отдельно доказать ограниченность решений (см., например, § 24).

Действительно, для того чтобы установить полную устойчивость, нам необходимо убедиться, что каждое решение ограничено при $t \geqslant 0$, а множество M состоит только из начала координат. Предположим, что $V(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$ и что $\dot{V}(x) < 0$ при $x \neq 0$. Тогда несомненно, что множество M состоит из начала координат и нетрудно убедиться, что каждое решение ограничено при $t \geqslant 0$. Пусть $x(t)$ — решение, начинающееся в произвольной точке x^0. Тогда найдется такое достаточно большое число r, что $V(x) > V(x^0)$, как только $\|x\| > r$. Поскольку $V(x(t))$ убывает с ростом t, то $\|x(t)\| \leqslant r$ для всех $t \geqslant 0$, т. е. каждое решение ограничено. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема IX. *Пусть $V(x)$ — скалярная функция, частные производные первого порядка которой непрерывны при всех x. Допустим, что выполнены следующие условия:*

а) $V(x) > 0$ *при всех* $x \neq 0$;

б) $\dot{V}(x) < 0$ *при всех* $x \neq 0$;

в) $V(x) \to \infty$ *при* $\|x\| \to \infty$.

Тогда система (13.1) *обладает полной устойчивостью.*

Во многих конкретных задачах удается построить функцию Ляпунова $V(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы IX. Примерам такого рода посвящена следующая глава. Однако часто бывает легче найти такую функцию Ляпунова, производная которой в силу системы (FA) лишь неположительна, а затем использовать теорему VIII. Следующий пример является простой иллюстрацией этого.

Пример 5. Относительно функций f и g, входящих в уравнение Льенара

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0, \tag{13.14}$$

мы предположим, что

а) $xg(x)>0$ при всех $x \neq 0$;
б) $f(x)>0$ при всех $x \neq 0$;
в) $G(x)=\int\limits_0^x g(\xi)\,d\xi \to \infty$ при $|x| \to \infty$.

Эти предположения имеют следующий физический смысл:

а) потенциальная энергия $G(x)$ — положительно определенная функция координаты, имеющая при $x=0$ минимум;

б) сопротивление всегда положительно;

в) потенциальная энергия неограниченно растет с ростом $|x|$.

Вместо исходного уравнения рассмотрим эквивалентную ему систему

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=-g(x)-f(x)y. \end{cases}$$

В качестве функции Ляпунова возьмем, как и ранее,

$$V(x,\ y)=\frac{1}{2}y^2+G(x),$$

имеющую смысл полной энергии при отсутствии сопротивления. Непосредственные вычисления дают

$$\dot{V}(x,\ y)=-f(x)y^2 \leqslant 0.$$

Очевидно, что при $x^2+y^2 \to \infty$ будет $V(x,\ y) \to \infty$, а потому все решения ограничены при $t \geqslant 0$. Далее, $\dot{V}$ обращается в нуль только на осях координат, и ясно, что ни одно решение, за исключением положения равновесия в начале координат, не остается на этих осях при всех $t \geqslant 0$. Таким образом, множество M состоит из начала координат, и, по теореме VIII, каждое решение стремится к этому положению равновесия при $t \to \infty$. Согласно первой теореме Ляпунова положение равновесия устойчиво, и, следовательно, система обладает полной устойчивостью.

Пример 6. В предыдущем примере нам удалось построить функцию Ляпунова V, которая стремится к бесконечности при $\|x\| \to \infty$ и с ее помощью прийти к заключению, что все решения ограничены при $t \geqslant 0$. Сейчас мы приведем пример, который показывает, что иногда бывает легче доказать ограниченность решений непосредственно.

Именно, продолжим исследование уравнения Льенара, ослабив предположения относительно функции $g(x)$ и усилив их относительно функции $f(x)$, характеризующей сопротивление (трение):

а) $xg(x) > 0$ при всех $x \neq 0$;

б) $f(x) > 0$ при всех $x \neq 0$;

в)* $|F(x)| = \left|\int_0^x f(\xi)\, d\xi\right| \to \infty$ при $|x| \to \infty$.

Возьмем ту же функцию Ляпунова, что и в предыдущем случае. Поскольку из сделанных предположений не вытекает, что $G(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$, последнее условие теоремы IX, вообще говоря, не выполнено. Поэтому на основании теоремы VIII мы можем сделать заключение только о том, что каждое ограниченное при всех $t \geqslant 0$ решение стремится к началу координат при $t \to \infty$. Таким образом, для установления полной устойчивости нам надо показать, что все решения при сделанных предположениях ограничены при $t \geqslant 0$.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим на плоскости x, y область Ω (рис. 25), определенную условиями

$$\begin{cases} V(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + G(x) < l, \\ [y + F(x)]^2 < a^2. \end{cases}$$

При любых положительных l и a это — ограниченная область. Пусть $x(t)$, $y(t)$ — произвольное решение; выберем числа l и a столь большими, чтобы начальная точка этого решения оказалась в области Ω. Кроме того, мы выберем число a настолько большим, чтобы на участке кривой $y+F(x)=a$, являющемся куском границы области Ω, выполнялось неравенство $x>0$, а на участке

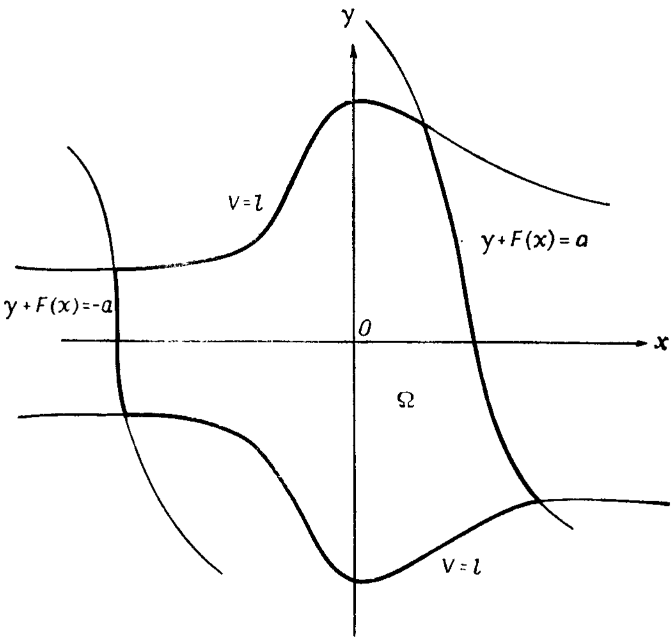


Рис. 25.

кривой $y+F(x)=-a$, входящем в границу этой области, выполнялось неравенство $x<0$.

Очевидно, решение $x(t)$, $y(t)$ не может выйти из области Ω, не пересекаясь с границей этой области. Поэтому оно должно пересечься либо с кривой $V=l$, либо с кривой $y+F(x)=a$, либо с кривой $y+F(x)=-a$. Поскольку $\dot{V}\leqslant 0$, то решение, начинающееся внутри Ω, где $V<l$, не может пересечь тех участков границы этой области, которые имеют уравнение $V=l$. Далее, легко подсчитать, что

$$\frac{d}{dt}[y+F(x)]^2=-2[y+F(x)]\,g(x).$$

На участках кривых $y+F(x)=\pm a$, являющихся частями границы области Ω, мы получаем[1])

$$\frac{d}{dt}[y+F(x)]^2=-2a\,|g(x)|<0.$$

Следовательно, решение $x(t)$, $y(t)$ не может покинуть область Ω, и потому оно ограничено при всех $t \geqslant 0$.

Таким образом, при несколько иных предположениях, чем в предыдущем примере, мы снова показали полную устойчивость уравнения Льенара.

Обычно исследование на устойчивость автономных систем второго порядка не вызывает трудностей. Это происходит благодаря двум обстоятельствам. Во-первых, фазовым пространством является плоскость, что дает нам возможность наглядно представить себе качественную картину поведения траекторий системы. Во-вторых, очень легко угадывать влияние сопротивления (трения) в системах с одной степенью свободы.

Теперь мы продемонстрируем применение изложенного метода к системам третьего порядка. Уравнения, аналогичные рассматриваемому ниже в примере 7, изучались В. А. Плиссом и А. И. Огурцовым.

Пример 7. Попытаемся найти условия, которым должна удовлетворять функция $f(\dot{x})$, характеризующая сопротивление, чтобы уравнение

$$\dddot{x}+f(\dot{x})\,\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$$

обладало полной устойчивостью. Предполагается, что a и b — положительные постоянные.

Вводя новые переменные $y=\dot{x}$ и $z=\ddot{x}$, мы перейдем к эквивалентной системе

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=z, \\ \dot{z}=-f(y)\,z-ay-bx. \end{cases} \tag{13.18}$$

[1]) Напомним, что на участке $y+F(x)=a$ границы имеем $g(x)>0$, а на участке $y+F(x)=-a$ выполнено обратное неравенство $g(x)<0$. — *Прим. перев.*

Функцию Ляпунова будем искать в виде суммы квадратичной формы и некоторых интегралов; после ряда проб приходим к выражению

$$V(x, y, z) = \frac{a}{2}z^2 + byz + b\int_0^y f(u)u\,du + \frac{1}{2}(bx + ay)^2 =$$

$$= \frac{1}{2a}(az + by)^2 + \frac{1}{2}(bx + ay)^2 + b\int_0^y \left[f(u) - \frac{b}{a}\right] u\,du,$$

причем

$$\dot{V}(x, y, z) = -a\left[f(y) - \frac{b}{a}\right] z^2.$$

Если $f(y) \geqslant c > \frac{b}{a}$ при всех y, то ясно, что все условия теоремы IX выполнены, и система обладает полной устойчивостью. Если же предположить только, что $f(y) > \frac{b}{a}$, то, вообще говоря, не обязательно $V \to \infty$ при $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$. Однако и в этом случае можно дать отдельное доказательство (аналогичное рассуждениям в примере 6) того, что все решения ограничены при $t \geqslant 0$, и снова убедиться в полной устойчивости.

§ 14. Устойчивость по отношению к постоянным возмущениям

Проблема устойчивости по отношению к постоянно действующим возмущениям усиленно изучалась советскими математиками, особенно И. Г. Малкиным, которому принадлежит доказываемая ниже теорема.

Возвратимся к неавтономной системе

$$\dot{x} = X(x, t), \tag{F}$$

относительно которой сделаны те же предположения, что и ранее[1]; в частности, $X(0, t) \equiv 0$ при всех $t \geqslant 0$. Если рассматривать „практические“ системы уравнений, которые отражают конкретные физические или техниче-

[1]) См. § 6 и 10. — *Прим. перев.*

ские процессы, то несомненно, что возмущения должны возникать не только вследствие наличия начального отклонения $x(0) \neq 0$. Основным источником возмущений будут внешние случайные влияния, например, резкие толчки и т. д. С учетом внешних возмущений исходная система (F) примет несколько модифицированный вид:

$$\dot{x} = X(x, t) + R(x, t). \qquad (14.1)$$

При этом относительно функции $R(x, t)$ известно лишь то, что она в некотором смысле мала. Естественно было бы ожидать, что и здесь имеет место некоторая устойчивость.

В этой связи заслуживает внимания следующее предложение, доказанное Малкиным.

Теорема X. *Пусть для системы* (F) *существует функция Ляпунова* $V(x, t)$, *о которой известно, что в некоторой области* Ω: $\|x\| < \rho$ *при всех* $t \geqslant 0$ *она удовлетворяет всем требованиям теоремы* II *об асимптотической устойчивости*[1]). *Далее, пусть существуют три положительно определенные функции* $W(x)$, $W_1(x)$, $W_2(x)$ *такие, что в области* Ω *при всех* $t \geqslant 0$ *выполняются неравенства*

$$W(x) \leqslant V(x, t) \leqslant W_1(x); \quad \dot{V}(x, t) \leqslant -W_2(x).$$

Предположим, кроме того, что в области Ω *все частные производные* $\partial V/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$, *ограничены при всех* $t \geqslant 0$; *иначе говоря, существует постоянная* $M > 0$ *такая, что в области* Ω *выполнены неравенства*

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| \leqslant M, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad t \geqslant 0.$$

В этих предположениях тривиальное решение системы (F) *устойчиво в следующем смысле: для любого* ε, $0 < \varepsilon < \rho$, *существуют такие два числа* $\eta_1(\varepsilon) > 0$ *и* $\eta_2(\varepsilon) > 0$, *что из неравенств*

$$\|x(0)\| < \eta_1(\varepsilon);$$
$$\|R(x, t)\| < \eta_2(\varepsilon) \quad \text{при всех} \quad \|x\| < \varepsilon \text{ и } t \geqslant 0$$

вытекает неравенство

$$\|x(t)\| < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad t \geqslant 0.$$

[1]) См. § 9 и 10. — *Прим. перев.*

Для доказательства этой теоремы используем равенства [1])

$$\dot{V} = X \cdot \operatorname{grad} V + \frac{\partial V}{\partial t},$$
$$\dot{V}_* = (X + R) \cdot \operatorname{grad} V + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Здесь $\dot{V}$ — производная функции Ляпунова $V(x, t)$ в силу системы (F) (т. е. производная по времени от этой функции вдоль траекторий невозмущенной системы), а $\dot{V}_*$ — производная этой же функции в силу системы (14.1).

Пусть m — наименьшее значение функции $W(x)$ на сфере $H(\varepsilon)$: $\|x\| = \varepsilon$. Вследствие непрерывности функции $W_1(x)$ и так как $W_1(0) = 0$, существует такое положительное число $\eta_1(\varepsilon)$, что $W_1(x) < m$ в сферической области $S(\eta_1)$: $\|x\| < \eta_1$. Поэтому $V(x, t) < m$ на сфере $H(\eta_1)$ и $V(x, t) > m$ на сфере $H(\varepsilon)$ при всех $t \geqslant 0$. Пусть μ — положительное наименьшее значение функции $W_2(x)$ на кольцеобразном множестве $S^{\varepsilon}_{\eta_1}$: $\eta_1 \leqslant \|x\| \leqslant \varepsilon$, и пусть $0 < k < 1$, причем k достаточно мало отличается от единицы. Возьмем $\eta_2(\varepsilon) = \frac{k\mu}{nM}$ и предположим, что $\|R(x, t)\| < \eta_2(\varepsilon)$ при всех x из Ω и всех $t \geqslant 0$. Рассмотрим траекторию системы (14.1), начинающуюся в момент $t = 0$ в точке x^0 области $S(\eta_1)$ и допустим, что эта траектория попадает в „кольцо" $S^{\varepsilon}_{\eta_1}$. Тогда в некоторый момент времени $t_0 > 0$ мы получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_* &\leqslant -W_2(x) + \operatorname{grad} V \cdot R \leqslant \\ &\leqslant -\mu + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial V}{\partial x_i} \right| \cdot |R_i| \leqslant -\mu + nM\|R\| \leqslant \\ &\leqslant -(1-k)\mu < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, V убывает вдоль каждой траектории системы (14.1) в „кольце" $S^{\varepsilon}_{\eta_1}$, а поэтому ни одна из траекторий системы (14.1), начавшихся в области $S(\eta_1)$, не сможет достигнуть сферы $H(\varepsilon)$. Это завершает доказательство теоремы.

---

[1]) См. соотношение (10.1). — *Прим. перев.*

Глава III

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ЛЯПУНОВА К ЗАДАЧЕ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 15. Общие замечания о задаче автоматического регулирования

Читатель, конечно, представляет себе ту огромную и важную роль, которую играют разного рода сервомеханизмы и регуляторы в современной технике и промышленности.

Наибольший вклад в теорию устойчивости работы таких приборов был внесен учеными советской школы, среди которых прежде всего необходимо назвать А. И. Лурье. Важные результаты в этом направлении принадлежат также А. М. Летову, И. Г. Малкину и В. А. Якубовичу. В частности, В. А. Якубовичу (и параллельно с ним — Р. Э. Бэссу, работа которого осталась неопубликованной) принадлежит изложение вопроса на основе широкого использования теории матриц. Именно этот подход и будет сейчас нами рассмотрен.

Действительную квадратную матрицу A, все характеристические корни которой имеют отрицательные действительные части, мы будем называть, как сейчас это принято, *устойчивой матрицей*. Этот термин позволяет кратко сформулировать следующее утверждение: *система* $\dot{x} = Ax$ *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда матрица* A *устойчива*.

Пусть S — реальный объект (механический, электрический, теплотехнический или некоторая их комбинация), причем его состояние в каждый момент времени характеризуется значениями конечного числа параметров u_1, $u_2, \ldots, u_n$, т. е. значением n-мерного вектора u. Эти параметры могут быть как позиционными, так и кинематическими. Допустим, что изменение состояния объекта S с течением времени подчиняется некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющей в векторной записи вид

$$\dot{u} = U(u). \tag{15.1}$$

Конечно, это некоторое дополнительное предположение, но мы должны его сделать, чтобы создать разумную математическую теорию.

Пусть значению $u = u^0$ соответствует состояние равновесия объекта S. Тогда $U(u^0) = 0$, так что точка u^0 является положением равновесия системы (15.1). Допустим, что в силу практических соображений желательно удерживать объект S как можно „ближе“ к состоянию u^0. Иначе говоря, желательно, чтобы положение равновесия u^0 было устойчивым. Введем новый вектор $y = u - u^0$. Эта замена переменных приводит систему (15.1) к виду

$$\dot{y} = Y(y) = U(u^0 + y), \quad Y(0) = 0. \tag{15.2}$$

В новых координатах $y_1, \ldots, y_n$, являющихся компонентами вектора y, положением равновесия становится начало координат $y = 0$. Считая, что вектор y все время остается малым, можно (при весьма общих предположениях) для решения практических вопросов вместо нелинейной системы (15.2) рассматривать линейное приближение

$$\dot{y} = Ay, \tag{15.3}$$

где A — постоянная матрица. Будем впредь предполагать, что матрица A невырожденная, так что $|A| \neq 0$.

Для того чтобы удерживать объект S вблизи положения равновесия $y = 0$, используется регулятор. Пусть ξ — скалярный параметр, характеризующий состояние регулятора, причем условие $\xi = 0$ означает, что регулятор отключен.

Уравнения движения системы „объект S + регулятор“ записываются в виде[1])

$$\left\{\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + \xi b, \\ \dot{\xi} &= f(\sigma), \\ \sigma &= c'y - r\xi, \end{aligned}\right. \tag{15.4}$$

[1]) Напомним, что c' — вектор-строка; этот вектор получается транспонированием вектора-столбца c, так что $c'y = c \cdot y$. Такое обозначение скалярного произведения (см. § 3) применяется в дальнейшем всюду. — *Прим. перев.*

где b и c — n-мерные векторы, а r — скаляр. Скалярный параметр σ (*сигнал*) представляет собой промежуточную величину. Скалярная функция $f(\sigma)$ называется *характеристикой* регулятора. Обычно предполагается, что характеристика обладает следующими свойствами:

$$\sigma f(\sigma) > 0 \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0; \quad f(0) = 0. \tag{15.5}$$

График характеристики $f(\sigma)$ может иметь достаточно произвольную форму, но обычно это бывает одна из функций, типа изображенных на рис. 26. В дальнейшем, из-

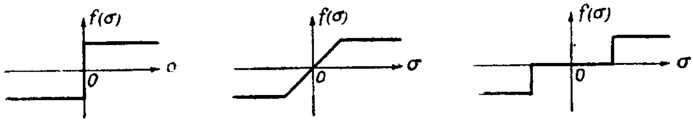


Рис. 26.

бегая излишних усложнений, мы будем, в дополнение к (15.5) считать, что функция $f(\sigma)$ непрерывна и

$$\int_0^{\pm\infty} f(\sigma)\,d\sigma = +\infty \tag{15.6}$$

(интеграл от нее расходится). Это последнее свойство потребуется нам при построении функции Ляпунова.

Удобнее рассматривать задачу в новых переменных x, σ. Именно, вместо переменных y, ξ введем

$$x = Ay + \xi b, \qquad \sigma = c'y - r\xi. \tag{15.7}$$

Второе из этих соотношений совпадает с последним уравнением в (15.4).

Ясно, что если $y \to 0$ и $\xi \to 0$, то неограниченно убывают также x и σ. Желательно, чтобы имело место и обратное утверждение: если $x \to 0$ и $\sigma \to 0$, то $y \to 0$ и $\xi \to 0$; оно означало бы, что устойчивость положения равновесия в новых координатах эквивалентна его устойчивости в первоначальных координатах. Это утверждение справедливо, если из системы (15.7) переменные y и ξ однозначно выражаются через x и σ. Но (15.7) — алгебраическая система, состоящая из $n+1$ линейных уравнений с $n+1$ неизвестными; ее можно однозначно обратить, если матрица ее коэффициентов невырождена. Иными словами, определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} A & b \\ c' & -r \end{pmatrix} \tag{15.8}$$

должен быть отличен от нуля. Так как матрица A невырождена, то существует обратная матрица A^{-1} и, следовательно, существует матрица

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15.9}$$

также невырожденная. Поэтому, для того чтобы определитель матрицы (15.8) был отличен от нуля, достаточно потребовать, чтобы было невырожденным произведение матриц (15.9) и (15.8), которое равно

$$\begin{pmatrix} E & A^{-1}b \\ c' & -r \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель этой последней матрицы, мы получаем неравенство [1])

$$r+c'A^{-1}b \neq 0, \tag{15.10}$$

налагающее ограничения на параметры регулятора: векторы b, c и скаляр r. Везде в дальнейшем условие (15.10) мы предполагаем выполненным, так что замена переменных (15.7) допустима.

В новых переменных x, σ вместо (15.4) получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x}=Ax+f(\sigma)b, \\ \dot{\sigma}=c'x-rf(\sigma). \end{cases} \tag{15.11}$$

---

[1]) Неравенство (15.10) получается и непосредственно, если определитель матрицы (15.8) разложить сначала по элементам последнего столбца, затем полученные миноры разложить по элементам последней строки и, наконец, все выражение разделить на $|A|$. — *Прим. ред.*

Это основная система, к которой относятся все дальнейшие исследования этой главы.

Заметим здесь сразу, чтобы не возвращаться к этому позже, что условие (15.10) инвариантно относительно преобразования[1]) координат $x = Px^*$, примененного к системе (15.11). Действительно, после такого преобразования система (15.11) примет вид

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}^* &= P^{-1}APx^* + f(\sigma)P^{-1}b, \\ \dot{\sigma} &= c'Px^* - rf(\sigma), \end{aligned}\right. \tag{15.12}$$

т. е. матрица A перейдет в $P^{-1}AP$, вектор b — в $P^{-1}b$, вектор c' — в $c'P$, а скаляр r не изменится. Поэтому

$$c'A^{-1}b \to c'P\left(P^{-1}A^{-1}P\right)P^{-1}b = c'A^{-1}b.$$

Прежде чем идти дальше, отметим, что матрица A будет предполагаться устойчивой. Привлечение этой рабочей гипотезы оправдано следующими соображениями. Положим

$$f(\sigma) = k\sigma + f_1(\sigma), \tag{15.13}$$

где $k > 0$ — постоянное число, а функция $f_1(\sigma)$ при $\sigma \to 0$ является малой более высокого порядка по сравнению с σ. Иначе говоря, кривая $f(\sigma)$ имеет в точке $\sigma = 0$ наклонную (негоризонтальную) касательную. Матрицей линейного приближения системы (15.11) будет тогда

$$\mathscr{B} = \begin{pmatrix} A & kb \\ c' & -kr \end{pmatrix}. \tag{15.14}$$

Для асимптотической устойчивости положения равновесия $x = \sigma = 0$ матрица (15.14) должна быть устойчивой. При $k = 0$ характеристические корни этой матрицы совпадают с корнями многочлена

$$\begin{vmatrix} A - \lambda E & 0 \\ c' & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,|A - \lambda E| = 0,$$

каковыми являются нуль и характеристические корни матрицы A. Но тогда при малом k один из характери-

[1]) Невырожденного. — *Прим. перев.*

стических корней матрицы (15.14) будет мал, а остальные n очень близки к характеристическим корням матрицы A. Следовательно, если бы матрица A имела характеристические корни с положительными действительными частями, то этим же свойством обладала бы и матрица (15.14) при достаточно малом k. Для того чтобы избежать усложнений, проще всего считать матрицу A устойчивой [1]).

Очевидно, для того чтобы регулятор обеспечивал устойчивость, на параметр k должно быть наложено еще какое-то дополнительное ограничение снизу. Наконец, хотелось бы обеспечить устойчивость и даже асимптотическую устойчивость для более или менее произвольной характеристики $f(\sigma)$ [2]) и произвольного начального условия (полная устойчивость). Такая устойчивость носит название *абсолютной устойчивости*.

Действительно, установленные ниже достаточные условия асимптотической устойчивости гарантируют *абсолютную асимптотическую устойчивость*, т. е. асимптотическую устойчивость при любых начальных условиях и произвольной характеристике $f(\sigma)$. Иными словами, система будет обладать полной устойчивостью при любой непрерывной функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей условиям (15.5) и (15.6).

§ 16. Построение специальной функции Ляпунова

Мы перейдем теперь к построению функции Ляпунова специального вида, введенной А. И. Лурье. Условия, при которых эта функция удовлетворяет требованиям теорем § 13, будут достаточными условиями для полной устойчивости (асимптотической устойчивости в целом) системы (15.11). Нужно, однако, не забывать, что они не являются необходимыми условиями полной устойчивости.

---

[1]) Случаи, когда некоторые действительные части характеристических корней матрицы A равны нулю, а остальные — отрицательны, являются особыми случаями и требуют специального исследования (см. § 19). — *Прим. ред.*

[2]) А не только для линейных характеристик $y = k\sigma$. — *Прим. ред.*

Мы попытаемся подобрать функцию Ляпунова в виде

$$V(x, \sigma) = x'Bx + \int\limits_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma. \tag{16.1}$$

где матрица $B > 0$ и $B' = B$. Функция V и все ее частные производные первого порядка непрерывны во всем пространстве x, σ. Далее, V представляет собой сумму двух слагаемых: первое положительно при всех $x \neq 0$, а второе — при всех $\sigma \neq 0$, т. е. их сумма обращается в нуль только при $x = \sigma = 0$ и положительна во всех других случаях. Следовательно, функция (16.1) — положительно определенная в пространстве x, σ. Предположение (15.6) о характеристике $f(\sigma)$ означает, что

$$V(x, \sigma) \to \infty \text{ при } \|x\|^2 + \sigma^2 \to \infty.$$

Производная функции V в силу системы (15.11) равна

$$\dot{V}(x, \sigma) = \dot{x}'Bx + x'B\dot{x} + f(\sigma)\dot{\sigma} =$$
$$= x'(A'B + BA)x - rf^2(\sigma) + f(\sigma)(b'Bx + x'Bb + c'x).$$

Поскольку $B' = B$, мы немедленно получаем[1]:

$$b'Bx + x'Bb = 2b'Bx = 2(Bb)'x.$$

Введем матрицу C:

$$A'B + BA = -C; \tag{16.2}$$

так как

$$C' = -(A'B + BA)' = -(BA + A'B) = C,$$

то C является матрицей некоторой квадратичной формы. Окончательно

$$\dot{V}(x, \sigma) = -x'Cx - rf^2(\sigma) + 2f(\sigma)\left(Bb + \frac{1}{2}c\right)'x. \tag{16.3}$$

Таким образом, $\dot{V}$ — квадратичная форма относительно $x_1, \ldots, x_n, f(\sigma)$. Мы хотим сделать квадратичную

---

[1]) В самом деле, по свойству скалярного произведения $x \cdot y = y \cdot x$, т. е. $x'y = y'x$, а потому $b'Bx = (Bx)'b = x'B'b = x'Bb$. Здесь используется также известное правило транспонирования произведения матриц: $(AB)' = B'A'$. — *Прим. перев.*

форму $\dot V$ отрицательно определенной, чтобы удовлетворить условиям теоремы IX, § 13. Для этого необходимо[1]), чтобы, во-первых, $\dot V(x, 0)$ была отрицательно определенной функцией (т. е. чтобы $C>0$), и, во-вторых, $\dot V(0, \sigma)<0$ при всех $\sigma \neq 0$, а поэтому должно быть $r>0$.

§ 17. Соотношение между матрицами B и C

Мы изучим соотношение (16.2). Оно получается следующим образом. Возьмем уравнение, описывающее движение объекта S при отсутствии регулятора:

$$\dot x = Ax, \tag{17.1}$$

и рассмотрим функцию $W(x)=x'Bx$. Производная этой функции в силу системы (17.1) равна

$$\dot W = x'(A'B+BA)x = -x'Cx,$$

где матрица C определяется равенством (16.2). Очевидно, $\dot W$ может быть найдено из формулы (16.3), если положить $c=0$, $f(\sigma)\equiv 0$.

Важным следствием приведенной интерпретации равенства (16.2) является то, что *это соотношение сохраняется без изменения при преобразовании координат*[2]). Связь между W и $\dot W$ не зависит от выбора системы координат: если от координат x перейти к координатам y по формуле $x=Py$, то $W(x)$ превратится просто в $W(Py)$, а $\dot W(x)$ — в $\dot W(Py)$. Таким образом, соотношение (16.2) сохраняется и для новых матриц A, B, C.

Снова возвращаясь к соотношению (16.2), легко видеть, что матрица B однозначно определяет матрицу C при любой матрице A. Это утверждение, однако, не так важно, как обратное. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения матрицы A, каждый из которых повторен столько раз, какова его кратность.

---

[1]) Но не достаточно. Достаточные условия выясняются в § 18. — *Прим. перев.*

[2]) Конечно, невырожденном. — *Прим. перев.*

Теорема XI. *Если все суммы $\lambda_i+\lambda_j\neq 0$, $i, j=1, \ldots, n$, то симметрическая матрица B однозначно определяется по симметрической матрице C (при этом несущественно, являются эти матрицы положительно определенными или нет). Другими словами, соотношение (16.2) оказывается взаимно однозначным: существует*[1] *одна и только одна симметрическая матрица B для каждой симметрической матрицы C, и обратно.*

Важный частный случай: матрица A устойчива. Условие теоремы $\lambda_i+\lambda_j\neq 0$, очевидно, выполнено, и теорема применима.

Доказательство. Выпишем условия симметричности матрицы B и условия равенства соответствующих элементов матриц, стоящих в соотношении (16.2) слева и справа. Тогда мы придем к следующей системе линейных уравнений для определения элементов b_{km} по заданным числам c_{ij}[2]:

$$\left\{\begin{array}{l} b_{ik}=b_{ki}, \quad i, k=1, 2, \ldots, n, \\ \sum\limits_{m=1}^{n}(a_{mi}b_{mk}+a_{mk}b_{im})=-c_{ik}, \quad i\geqslant k. \end{array}\right. \tag{17.2}$$

В силу соображений, высказанных в начале настоящего параграфа, эта система не изменяется при преобразовании координат $x=Py$, где P — невырожденная матрица. После такой замены получаются новые матрицы

$$A^*=P^{-1}AP, \quad B^*=P'BP, \quad C^*=P'CP, \tag{17.3}$$

удовлетворяющие соотношению

$$A^{*\prime}B^*+B^*A^*=-C^*. \tag{17.4}$$

Получающаяся отсюда система (17.2)* для элементов этих матриц отличается от системы (17.2) только звездочками над буквами.

---

[1] При любой матрице A, удовлетворяющей указанному в условии теоремы ограничению. — *Прим. перев.*

[2] Элементы a_{ij} матрицы A предполагаются известными. — *Прим. перев.*

Известно, что преобразование координат P (быть может, комплексное) можно выбрать так, чтобы[1])

$$A^* = \begin{pmatrix} G_1 & & & 0 \\ & G_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & G_r \end{pmatrix},$$

где G_k — квадратные клетки („блоки") вида[2])

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varepsilon & \lambda_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Здесь ε — постоянное (хотя и произвольное) число, отличное от нуля, причем собственные значения матрицы A^* не зависят от ε.

Пусть $\Delta(\varepsilon)$ — определитель линейной системы (17.2)*; нетрудно убедиться, что $\Delta(\varepsilon)$ является многочленом относительно ε. В частности, при $\varepsilon = 0$ из (17.2)* получается система

$$\left\{ \begin{aligned} & b^*_{ik} = b^*_{ki}, \quad i, k = 1, \dots, n, \\ & (\lambda_i + \lambda_k) b^*_{ik} = -c^*_{ik}, \quad i > k. \end{aligned} \right. \tag{17.5}$$

Следовательно, ее определитель $\Delta(0)$ равен произведению всевозможных сумм, $\lambda_i + \lambda_k$, $i > k$ и, в силу условия теоремы, отличен от нуля. Поскольку $\Delta(0) \neq 0$, то мно-

---

[1]) Это так называемая нормальная жорданова форма матриц; клетки G_k называются жордановыми клетками. Подробнее о приведении матриц к жордановой форме см. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, Гостехиздат, 1954; Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, Физматгиз, 1956. — *Прим. перев.*

[2]) Обычно принимают $\varepsilon = 1$. — *Прим. перев.*

гочлен $\Delta(\varepsilon)$ не равен нулю тождественно. Он имеет лишь конечное число корней, и если мы выберем ε отличным от всех этих корней, то получим неравенство $\Delta(\varepsilon) \neq 0$.

Теперь неизвестные $\overset{*}{b}_{ik}$ однозначно определяются из системы (17.2)* по заданным числам c^*_{ik}, т. е. матрица B^* однозначно восстанавливается по матрице C^*. Поскольку, далее, B^* и C^* однозначно определяются соответственно по матрицам B и C равенствами (17.3) и обратно, можно заключить, что все элементы матрицы B взаимно однозначно определяются из системы (17.2) через известные элементы матрицы C. Теорема доказана.

Теорема XII. *Пусть матрица A устойчива. Если матрица C положительно определенна, то указанная в теореме* XI *матрица B — единственное симметрическое решение уравнения* (16.2) — *также положительно определенна.*

Доказательство. Мы построим явным образом симметричную матрицу B и покажем, что она положительно определенная, если $C > 0$.

Явное решение системы (17.2) получается следующим образом. Пусть [1])

$$\dot{Y} = -YA \tag{17.6}$$

— матричное уравнение, сопряженное (см. § 5) к системе (17.1). Тогда убедимся, что

$$B = \int_{-\infty}^{0} Y'(t)CY(t)\,dt.$$

Прежде всего мы должны показать, что интеграл сходится. Согласно свойству I′, § 5, элементы матрицы Y представляют собой конечные суммы членов вида $g(t)e^{-\lambda t}$, где $g(t)$ — многочлен степени меньше n, а λ — характеристический корень матрицы A. Но тогда точно такое же утверждение справедливо и для всех элементов матрицы

[1]) Здесь $Y(t)$ — главная матрица решений (нормированная фундаментальная матрица) системы (17.6). — *Прим. ред.*

$Y'CY$. Поскольку $-\lambda$ имеет положительную действительную часть, то

$$\int_{-\infty}^{0} g(t)\, e^{-\lambda t}\, dt$$

существует[1]), а потому имеют смысл все элементы матрицы B.

Так как $(Y'CY)' = Y'CY$, то $B' = B$, т. е. B — симметрическая матрица. Рассмотрим далее матрицы

$$A'B = \int_{-\infty}^{0} A'Y'CY\, dt = -\int_{-\infty}^{0} \dot{Y}'CY\, dt,$$

$$BA = \int_{-\infty}^{0} Y'CYA\, dt = -\int_{-\infty}^{0} Y'C\dot{Y}\, dt.$$

Учитывая, что Y — главная матрица решений, получаем

$$A'B + BA = -\int_{-\infty}^{0} \frac{d}{dt}[Y'CY]\, dt = -Y'CY\Big|_{-\infty}^{0} = -C,$$

так что матрица B действительно удовлетворяет уравнению (16.2), и, таким образом, совпадает с единственным симметрическим решением этого уравнения, существование которого доказано в теореме XI.

Пусть теперь $C > 0$. Рассмотрим квадратичную форму

$$Q(x, t) = x'Y'(t)\, CY(t)\, x.$$

---

[1]) В самом деле, пусть $\lambda = \mu + i\nu$, $\mu < 0$ (ибо A — устойчивая матрица). Тогда

$$\left| \int_{-\infty}^{0} g(t)\, e^{-\lambda t}\, dt \right| \leqslant \int_{-\infty}^{0} |g(t)\, e^{-i\nu t}| \cdot e^{-\mu t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} |g(t)| \cdot e^{-\frac{1}{2}\mu t} \cdot e^{-\frac{1}{2}\mu t}\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{0} K e^{-\frac{1}{2}\mu t}\, dt < \infty,$$

так как величина $K = |g(t)| \cdot e^{-\frac{1}{2}\mu t}$, $-\infty < t \leqslant 0$, ограниченная. — *Прим. перев.*

Поскольку матрица $Y(t)$ невырождена при любом t, можно сделать преобразование координат $y = Yx$. В результате квадратичная форма примет вид $Q(y, t) = y'Cy$, и, следовательно, $Q(y, t) > 0$ для всех векторов $y \neq 0$ и произвольного t. Так как $x = Y^{-1}y$, то условие $y \neq 0$ при произвольном t равносильно неравенству $x \neq 0$. Поэтому $Q(x, t) > 0$ для всех векторов $x \neq 0$ и любого t. Отсюда следует, что

$$x'Bx = x'\left(\int_{-\infty}^{0} Y'(t)\,CY(t)\,dt\right)x > 0$$

для всех $x \neq 0$, т. е. $B > 0$. Теорема XII полностью доказана.

§ 18. Решение проблемы регулирования

Возьмем некоторую матрицу $C > 0$ и обозначим через $B > 0$ единственную симметрическую матрицу, удовлетворяющую равенству (16.2); функция $V(x, \sigma)$ определяется формулой (16.1). Как уже выяснялось в § 16, эта функция будет положительно определенной для всех значений переменных x, σ, а ее производная $\dot{V}$ [см. (16.3)] представляет собой квадратичную форму относительно x и $f(\sigma)$.

Для того чтобы неравенство $-\dot{V} > 0$ имело место при всех[1]) x, f, должны быть выполнены $n+1$ неравенств критерия Сильвестра (см. § 8). Так как $C > 0$, то первые n из этих неравенств выполняются автоматически, и остается только последнее:

$$\begin{vmatrix} C & -\left(Bb + \frac{1}{2}c\right) \\ -\left(Bb + \frac{1}{2}c\right)' & r \end{vmatrix} > 0, \qquad (18.1)$$

которое является необходимым и достаточным условием отрицательной определенности производной $\dot{V}(x, \sigma)$.

[1]) Одновременно не равных нулю. — *Прим. перев.*

Так как $|C^{-1}| = |C|^{-1} > 0$, то определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

положителен. Следовательно, определитель произведения матриц

$$\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -\left(Bb + \frac{1}{2}c\right) \\ -\left(Bb + \frac{1}{2}c\right)' & r \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E & -C^{-1}\left(Bb + \frac{1}{2}c\right) \\ -\left(Bb + \frac{1}{2}c\right)' & r \end{pmatrix}$$

положителен одновременно с определителем (18.1), а потому условие (18.1) эквивалентно неравенству[1])

$$r > \left(Bb + \frac{1}{2}c\right)' C^{-1} \left(Bb + \frac{1}{2}c\right). \qquad (18.2)$$

К этому неравенству необходимо добавить еще условие (15.10), которое мы перепишем в виде

$$r \neq -c' A^{-1} b. \qquad (18.3)$$

Эти два неравенства (18.2) *и* (18.3) *являются фундаментальными неравенствами теории автоматического регулирования*[2]). Согласно теореме IX, § 13, они

---

[1]) Неравенство (18.2) сразу получается, если определитель в (18.1) разложить по элементам последнего столбца и последней строки и затем разделить на $|C|$. — *Прим. ред.*

[2]) На самом деле, одно неравенство (18.2) является достаточным условием, гарантирующим абсолютную устойчивость системы регулирования (15.4). Что касается неравенства (18.3), то оно выполняется, если выполняется неравенство (18.2).

Действительно, согласно теореме IX, § 13, условие (18.2) обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (15.11) при любой характеристике $f(\sigma)$. Выберем в качестве характеристики функцию (15.13); тогда матрица $\mathcal{B}$ линейного приближения (15.14) обеспечивают полную устойчивость регулируемой системы при всех допустимых функциях f.

Так как $C > 0$, то и $C^{-1} > 0$ (см. § 3). Следовательно, стоящая в правой части неравенства (18.2) квадратичная форма неотрицательна, а потому из этого неравенства следует, что[1] $r > 0$.

Заметим, что эффективность регулирования значительно повышается с увеличением r, поскольку это означает удаление от того состояния, в котором $\dot{V}$ перестает быть отрицательно определенной функцией. По существу увеличение r равносильно, таким образом, улучшению качества регулирующего механизма.

Важный частный случай. Пусть характеристическими корнями матрицы A являются $-\mu_1, \ldots, -\mu_n$, где μ_k все различны и положительны. Предположим, что координаты x с самого начала выбраны так, что в них

$$A = -D, \quad D = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Тогда система (15.11) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -Dx + f(\sigma) b, \\ \dot{\sigma} = c'x - rf(\sigma), \end{cases}$$

оказывается устойчивой. Умножив на нее слева матрицу (15.9), мы придем к матрице

$$M = \mathcal{A}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} E & kA^{-1}b \\ c' & -kr \end{pmatrix},$$

определитель которой равен $-k(r + c'A^{-1}b)$.

Используя формулу (2.9), легко понять, что если A — устойчивая матрица порядка n, то $(-1)^n |A| > 0$. Точно так же легко убедиться, что если A — устойчивая матрица, то и A^{-1} будет устойчивой.

Опираясь на эти результаты, можно сказать, что

$$(-1)^{n+1} |\mathcal{B}| > 0 \quad \text{и} \quad (-1)^n |\mathcal{A}| > 0$$

(ибо одно из собственных значений $\mathcal{A}$ равно $+1$). Поэтому

$$0 < (-1)^n |\mathcal{A}| \cdot (-1)^{n+1} |\mathcal{B}| = -|M| = k(r + c'A^{-1}b).$$

и, в силу положительности k, получаем $r > -c'A^{-1}b$. Таким образом, условие (15.10) выполнено и система (15.4) также асимптотически устойчива. — *Прим. перев.*

[1]) Это необходимое условие положительной определенности производной $\dot{V}$ было указано в конце § 16. — *Прим. перев.*

а система (17.2) — вид

$$\begin{cases} b_{ki} = b_{ik}, & i, k = 1, \ldots, n, \\ (-\mu_i - \mu_k) b_{ik} = -c_{ik}, & i \geqslant k. \end{cases}$$

Возьмем, далее, матрицу $C = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, где все числа d_k положительны. Тогда

$$C^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_n}\right),$$

$$B = \operatorname{diag}\left(\frac{d_1}{2\mu_1}, \ldots, \frac{d_n}{2\mu_n}\right),$$

$$(Bb)' = \frac{1}{2}\left\{\frac{b_1 d_1}{\mu_1}, \ldots, \frac{b_n d_n}{\mu_n}\right\},$$

а неравенство (18.2) записывается так:

$$r > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4d_k}\left(\frac{b_k d_k}{\mu_k} + c_k\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{b_k e_k}{\mu_k} + \frac{c_k}{e_k}\right)^2; \quad e_k = \sqrt{d_k} > 0.$$

Найдем наименьшее значение правой части в зависимости от e_k. Очевидно, стоящая там сумма принимает минимальное значение, если каждая из скобок принимает минимальное значение. Пусть сначала числа b_k и c_k имеют один и тот же знак; можно считать, что оба они положительны. При этом предположении член в k-й скобке представляет собой сумму двух положительных слагаемых, произведение которых постоянно. Следовательно, минимум достигается тогда, когда оба слагаемые равны между собой, т. е. когда $e_k^2 = \frac{\mu_k c_k}{b_k}$. Если же $b_p c_p < 0$, т. е. числа b_p и c_p имеют разные знаки, то сумма в соответствующей p-й скобке может равняться нулю.

Окончательно

$$r > \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k b_k c_k}{\mu_k},$$

где

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad b_k c_k > 0; \\ 0 & \text{при} \quad b_k c_k \leqslant 0. \end{cases} \tag{18.4}$$

Это неравенство дает в рассматриваемом случае нижнюю границу для допустимых[1]) значений r.

§ 19. Регулирование в случае, когда несколько характеристических корней равны нулю

Пусть некоторые (но не все!) характеристические корни матрицы A в системе (15.4) равны нулю.

Сравнительно просто вопрос решается в том случае, когда в подходящим образом выбранной системе координат исходную систему уравнений (15.4) можно записать в виде

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(\sigma)b, \\ \dot{y} &= f(\sigma)d, \\ \dot{\sigma} &= c'x + 2e'y - rf(\sigma), \end{aligned}\right. \tag{19.1}$$

где y, d, e — p-мерные векторы, а остальные буквы имеют тот же смысл, что и раньше[2]). Поскольку вектор y остается постоянным в нерегулируемой системе, то его компоненты y_k называются *нейтральными* параметрами.

Мы будем искать функцию Ляпунова в следующем виде:

$$V(x, y, \sigma) = y'My + \left\{ x'Bx + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma \right\}.$$

Заметим, что в фигурных скобках стоит выражение (16.1), которое используется в качестве функции Ляпунова в на-

---

[1]) Имеются в виду системы, удовлетворяющие условию (18.2). Поскольку это условие является только достаточным, но не необходимым, то, вообще говоря, могут существовать абсолютно устойчивые системы, не удовлетворяющие условию (18.2), для которых r имеет меньшее значение. — *Прим. ред.*

[2]) Таким образом, рассматривается система, состояние которой характеризуется $n+p$ параметрами $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p$; матрица этой системы имеет p нулевых корней. Отметим, чтобы не было недоразумений, что здесь матрица A устойчива и означает не всю матрицу регулируемой системы, как в § 15, а лишь ее часть, имеющую ненулевые собственные значения. — *Прим. перев.*

ших предыдущих рассмотрениях; $M=(m_{ij})$ означает положительно определенную[1]) матрицу порядка p. Таким образом, функция V — положительно определенная во всем пространстве x, y, σ. Непосредственный подсчет показывает, что

$$-\dot{V}=\left\{-x'Cx-rf^2(\sigma)+2f(\sigma)\left(Bb+\frac{1}{2}c\right)'x\right\}+$$
$$+2(Md+e)'yf(\sigma);\quad A'B+BA=-C.$$

К выражению, заключенному в фигурные скобки, применимы рассмотрения § 16. Если мы теперь дополнительно выберем положительно определенную матрицу M так, чтобы выполнялось равенство

$$Md+e=0 \tag{19.2}$$

(если, конечно, такой выбор вообще возможен), то сразу получим функцию Ляпунова V, удовлетворяющую условию $-\dot{V}>0$ при $x\neq 0$, $f\neq 0$ и $\dot{V}=0$ при $x=f=0$, $y\neq 0$. Следовательно, с помощью построенной функции $V(x, y, \sigma)$ можно в лучшем случае получить условия устойчивости, используя первую теорему Ляпунова, а асимптотическое поведение решений может быть охарактеризовано на основании теоремы VIII, § 13. Множеством R, о котором упоминалось в этой теореме, является гиперплоскость $x=0$, $\sigma=0$. Предположим, что решение системы (19.1) все время остается в множестве R. Тогда

$$\begin{cases}\dot{x}=0,\\ \dot{y}=0,\\ \dot{\sigma}=2e'y,\end{cases}$$

и мы видим, что это может случиться только в том случае, когда $e'y=0$. Гиперплоскость $x=0$, $\sigma=0$, $e'y=0$ и является множеством M, фигурирующим в теореме VIII, § 13, а все решения неограниченно приближаются к этой гиперплоскости при $t\to\infty$. Каждая точка этой гиперплоскости служит положением равновесия системы (19.1). Этот результат является наиболее сильным из всех, которые мы могли бы ожидать.

---

[1]) Следовательно, симметрическую. — *Прим. ред.*

Для того чтобы продвинуться дальше, предположим, что $d' = (1, 1, \ldots, 1)$. Вводя обозначения

$$m_i = \sum_{j=1}^{p} m_{ij}, \qquad m' = \{m_1, \ldots, m_p\},$$

мы получаем на основании (19.2), что

$$m = -e. \tag{19.3}$$

Теперь следует выяснить, возможно ли найти матрицу $M > 0$ такую, чтобы выполнялось равенство (19.3).

Прежде всего рассмотрим случай $p = 2$. Тогда (19.3) означает, что $(m_{21} = m_{12})$

$$m_{11} + m_{12} = -e_1, \qquad m_{12} + m_{22} = -e_2,$$

и, поскольку $M > 0$,

$$m_{11}m_{22} - m_{12}^2 > 0.$$

Положим для краткости $m_{12} = h$, т. е. $m_{11} = -e_1 - h$, $m_{22} = -e_2 - h$. Величина h должна удовлетворять неравенству

$$(-e_1 - h)(-e_2 - h) - h^2 = e_1e_2 + (e_1 + e_2)h > 0.$$

Если $e_1 + e_2 = 0$, то это неравенство превращается в $e_1e_2 > 0$, которое невозможно[1]; поэтому при $e_1 + e_2 = 0$ равенство (19.3) не может быть удовлетворено. Если же $e_1 + e_2 \neq 0$, то всегда можно выбрать подходящую величину h.

Общий случай, конечно, гораздо сложнее. Пусть нам нужно выбрать матрицу

$$M = \begin{pmatrix} H & g \\ g & s \end{pmatrix},$$

где $H = \operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_{p-1})$, $g' = (g_1, \ldots, g_{p-1})$, s — скаляр, h_i — положительные постоянные (т. е. $H > 0$). Условие $M > 0$ означает, что

$$s > \sum_{i=1}^{p-1} \frac{g_i^2}{h_i}. \tag{19.4}$$

---

[1]) Ибо равенство $e_1 + e_2 = 0$ означает, что числа e_1 и e_2 разных знаков или одновременно нули. — *Прим. перев.*

Но, с другой стороны, равенство (19.3) дает

$$g_i + h_i = -e_i, \qquad s + \sum_{i=1}^{p-1} g_i = -e_p.$$

Следовательно, неравенство (19.4) можно переписать так:

$$s > \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(e_i + h_i)^2}{h_i}.$$

Полагая $h_i = k_i^2$, мы приходим к выводу, что наименьшее значение каждого слагаемого этой суммы достигается при $e_i = k_i^2 = h_i$ и равно $4k_i^2 = 4h_i$. Следовательно,

$$s > 4 \sum_{i=1}^{p-1} h_i = s_1.$$

В то же время

$$s = \sum_{i=1}^{p-1} (h_i + e_i) - e_p = s_0.$$

Если $s_0 \leqslant s_1$, то за минимальное значение для s можно взять s_1; если $s_0 > s_1$, то s_0 может быть взято за минимум. Тем не менее, даже если и нельзя выбрать s в указанных границах, мы можем надеяться выбрать матрицу $M > 0$, так, чтобы она удовлетворяла условию (19.3)[1]).

[1]) Здесь речь идет об определении нижней границы для значений величины $s = \sum\limits_{i<p} (h_i + e_i) - e_p$ при условиях

$$s > \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(e_i + h_i)^2}{h_i}, \quad h_i > 0 \qquad (i = 1, \ldots, p-1).$$

Подставляя в неравенство выражение для s, получаем

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{e_i^2}{h_i} < -\sum_{i=1}^{p} e_i.$$

Если $\sum\limits_{i=1}^{p} e_i \geqslant 0$, то нельзя удовлетворить этому неравенству при $h_i > 0$ и потому нельзя определить матрицу M. Если же

Во многих приложениях система (19.1) возникает из следующей задачи:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(\sigma)b, \\ \dot{y} = f(\sigma)d, \\ \sigma = c_1'x + e_1'y. \end{cases} \tag{19.5}$$

Характеризующая обратную связь переменная σ является линейной комбинацией фазовых переменных $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_p$. Эта задача, если вычислить производную $\dot{\sigma}$, приводится к системе вида (19.1) при $e = 0$. Поскольку M — положительно определенная матрица, равенство (19.2) не может быть удовлетворено, и поэтому изложенный выше метод уже не проходит.

Если $p > 1$[1]), то у системы (19.5) будет целая гиперплоскость положений равновесия, и лучшее, на что можно надеяться, это то, что каждое решение приближается к этой плоскости при $t \to \infty$.

§ 20. Расчет управления

Проблема расчета управления имеет два аспекта: приближенный численный расчет и решение вопроса в общем

$\sum_{i=1}^{p} e_i = -a^2 < 0$, то следует искать $\min s = \sum_{i<p} (h_i + e_i) - e_p$ „на границе"

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{e_i^2}{h_i} = a^2.$$

Пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа, находим этот минимум, т. е. нижнюю границу для допустимых значений:

$$\inf s = \frac{\left(\sum_{i=1}^{p-1} e_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{p-1} |e_i|\right)^2 - e_p^2}{\sum_{i=1}^{p} e_i}.$$

— *Прим. ред.*

[1]) В частном случае $p = 1$, исключая величину y, можно привести систему (19.5) к эквивалентному ей виду (15.11) и затем применить условие типа (18.2). — *Прим. ред.*

виде. Приближенное нахождение осуществляется строго обоснованными численными методами, и эту проблему можно считать решенной. Выберем числовую матрицу $C > 0$ для простоты в диагональной форме $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, $d_k > 0$; тогда матрица B находится в результате решения линейной алгебраической системы (17.2) с числовыми коэффициентами. Поскольку, далее, $C^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_n}\right)$, то все величины, входящие в неравенство (18.2), нами найдены. Таким образом, мы можем сделать заключение о характере устойчивости системы.

Обратим теперь наше внимание на решение вопроса о нахождении управления в общем виде, когда уравнения содержат буквенные коэффициенты. Такая постановка задачи очень важна с практической точки зрения. Дело в том, что во многих конкретных случаях в условие задачи входят, кроме точных числовых величин, некоторые допускающие варьирование параметры, область изменения которых должна быть определена в зависимости от тех или иных условий. Это оправдывает то внимание, которое будет уделено данному вопросу.

Чтобы избежать серьезных осложнений, мы будем считать, что все характеристические корни матрицы A различны и не равны нулю. Разберем отдельно следующие два возможных случая: 1) все характеристические корни матрицы A действительны; 2) некоторые из них комплексны.

П е р в ы й с л у ч а й. *Все характеристические корни матрицы A действительны и, следовательно, отрицательны* [1]).

Обозначим характеристические корни матрицы A через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и пусть $\lambda_k = -\mu_k$, $\mu_k > 0$. Пусть, далее, $K = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Наша цель—получить в явном виде основное неравенство (18.2). Независимо от способа рассуждений, необходимо прямо или косвенно использовать такое преобразование координат $x = Py$, которое превращает матрицу A в матрицу $-K$. Кроме того, возьмем

[1]) Поскольку с самого начала предполагалось (см. § 15), что матрица A устойчива. — *Прим. перев.*

произвольную симметрическую матрицу $C > 0$ и определим матрицу B из системы (17.2). Пусть, далее, матрицы $A^* = -K$, B^*, C^* определяются так же, как и в (17.3), а векторы $b^* = P^{-1}b$, $c^* = P'c$. Система (15.11) перепишется тогда в форме [см. (15.12)]:

$$\begin{cases} \dot{y} = -Ky + f(\sigma) b^*, \\ \dot{\sigma} = c^* \cdot y - rf(\sigma), \end{cases} \tag{20.1}$$

а равенства (17.5) примут вид

$$\begin{cases} \overset{*}{b}_{ki} = \overset{*}{b}_{ik}, \\ (\mu_i + \mu_k) \overset{*}{b}_{ik} = \overset{*}{c}_{ik}, \quad i \geqslant k. \end{cases}$$

Таким образом, зная матрицу C, последовательно по схеме $C \to C^* \to B^* \to B$ мы можем найти матрицу B. Однако наше основное неравенство (18.2) и не требует, чтобы мы возвращались от C к B. Если $C^{*-1} = (\gamma_{ij})$, то (см. § 2)

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{|C|} \cdot \overset{*}{C}_{ij},$$

где $\overset{*}{C}_{ji}$ — алгебраическое дополнение элемента $\overset{*}{c}_{ij}$ в определителе $|C^*|$, и мы сразу же получаем [см. 18.2)]

$$r > \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} \left(\frac{1}{2} c_i^* + \sum_{k=1}^{n} \frac{\overset{*}{c}_{ik} \overset{*}{b}_k}{\mu_i + \mu_k} \right) \left(\frac{1}{2} c_j^* + \sum_{k=1}^{n} \frac{\overset{*}{c}_{jk} \overset{*}{b}_k}{\mu_j + \mu_k} \right) \tag{20.2}$$

Если мы выберем матрицу C так, чтобы $C^* = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, $d_k > 0$ и чтобы правая часть равенства (20.2) имела минимум, то проведенные ранее вычисления приводят[1]) к гораздо более простому конечному выражению

$$r > \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i \overset{*}{b}_i \overset{*}{c}_i}{\mu_i} \tag{20.3}$$

где ε_i имеет тот же смысл, что и в (18.4).

---

[1]) См. конец § 18. — *Прим. перев.*

Для того чтобы закончить рассмотрение вопроса, остается только указать метод нахождения матриц P и P^{-1}.

Нахождение матрицы P. Из равенства $P^{-1}AP = -K$ мы получаем $AP = -PK$, что приводит к следующей линейной алгебраической системе:

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im}p_{mk} = p_{ik}\lambda_k, \qquad i,\ k = 1,\ \ldots,\ n.$$

Следовательно, величины p_{ik} при фиксированном k являются решениями следующего векторного уравнения:

$$(A - \lambda_k E)\xi = 0. \tag{20.4}$$

Поскольку λ_k — простые корни характеристического уравнения матрицы A, очевидно, что

а) ранг матрицы $A - \lambda_k E$ равен $n - 1$;

б) вектор-решение ξ уравнения (20.4) определяется однозначно с точностью до коэффициента пропорциональности;

в) компоненты ξ_i решения ξ пропорциональны одновременно не равным нулю алгебраическим дополнениям элементов любой r-й строки определителя $|A - \lambda_k E|$.

Из а) следует, что среди алгебраических дополнений (при некотором r) имеются ненулевые. Множество этих чисел и выберем в качестве решения ξ. Иначе говоря, k-й столбец матрицы P будет представлять собой описанное ненулевое решение уравнения (20.4), компоненты которого могут быть найдены как алгебраические дополнения к элементам некоторой строки матрицы $A - \lambda_k E$.

Нахождение матрицы P^{-1}. Из определения обратной матрицы $P^{-1} = (\pi_{ij})$ следует, что

$$\pi_{ij} = \frac{1}{|P|} \cdot P_{ji},$$

где P_{ji} — алгебраическое дополнение для элемента p_{ij} в определителе $|P|$.

Наша проблема, таким образом, полностью решена в рассматриваемом случае.

Второй случай. *Среди характеристичеких корней матрицы A имеются комплексные.*

Характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0$$

имеет действительные коэффициенты, а потому все комплексные корни можно разбить на пары комплексно сопряженных. Предположим, что корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ все различны и имеют отрицательные действительные части. Расположим эти корни следующим образом:

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2, \ldots, \lambda_k, \bar{\lambda}_k, \lambda_{2k+1}, \ldots, \lambda_n;$$

здесь первые $2k$ корней образуют комплексно сопряженные пары, а последние $n-2k$ корней — действительные величины. Пусть, далее,

$$\lambda_p = -\mu_p + i\nu_p \qquad \bar{\lambda}_p = -\mu_p - i\nu_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant k;$$
$$\lambda_p = -\mu_s, \qquad 2k < s \leqslant n, \quad \text{где } \mu_m \text{ — все положительны.}$$

Прежде всего сделаем такое преобразование координат $x = P_1 z$, чтобы

$$P_1^{-1} A P_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_k, \bar{\lambda}_k, \lambda_{2k+1}, \ldots, \lambda_n).$$

Матрица P_1 играет здесь точно такую же роль, как и матрица P в рассмотренном выше первом случае, но только теперь в матрице P_1 столбцы, соответствующие λ_p и $\bar{\lambda}_p$, состоят из комплексно сопряженных элементов. Координаты z можно выбрать так, что действительным точкам соответствуют $z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_k, \bar{z}_k, z_{2k+1}, \ldots, z_n$ при уже указанном порядке чисел λ_i. Таким образом, система $\dot{x} = Ax$ превратится (для действительных точек) в систему

$$\begin{cases} \dot{z}_p = \lambda_p z_p, & \dot{\bar{z}}_p = \bar{\lambda}_p \bar{z}_p, \qquad 1 \leqslant p \leqslant k; \\ \dot{z}_s = \lambda_s z_s, & \qquad\qquad 2k < s \leqslant n. \end{cases}$$

Мы хотим теперь выполнить новое преобразование координат $z = P_2 y$ следующим образом. Если $z_p = y_p' + i y_p''$, $p \leqslant k$, то формулы преобразования выглядят так:

$$z_p = y_p' + i y_p'', \quad \bar{z}_p = y_p' - i y_p'', \quad 1 \leqslant p \leqslant k,$$
$$z_s = y_s, \qquad 2k < s \leqslant n.$$

Иначе говоря, преобразование P_2 отдельно преобразует сопряженные пары z_p, $\bar{z}_p$ и не меняет действительные координаты z_s. Пусть $P=P_1P_2$. Тогда P есть матрица преобразования, переводящего действительные координаты x снова в действительные координаты y, а потому, как легко проверить, P — действительная матрица.

Все дальнейшие рассуждения будем проводить только в координатах y. Пусть A^*, B^* и т. д. имеют тот же смысл, что и в первом случае. В результате преобразования с промежуточной матрицей $A_0=P_1^{-1}AP_1$ пары z_p и $\bar{z}_p$ переходят соответственно в $\lambda_p z_p$ и $\bar{\lambda}_p\bar{z}_p$ при $1\leqslant p\leqslant k$, а z_s при $n\geqslant s>2k$ — в $\lambda_s z_s$, где λ_s — действительное число. Следовательно, матрица A_0 переводит $y'_p+iy''_p$ в $(-\mu_p+i\nu_p)(y'_p+iy''_p)$, т. е. y'_p в $-\mu_p y'_p-\nu_p y''_p$ и y''_p в $\nu_p y'_p-\mu_p y''_p$. В координатах y', y'' мы можем записать это преобразование так:

$$
\begin{aligned}
&(A^*y)'_p=-\mu_p y'_p-\nu_p y''_p, \\
&(A^*y)''_p=\nu_p y'_p-\mu_p y''_p,
\end{aligned}
\qquad 1\leqslant p\leqslant k;
$$
$$
(A^*y)_s=-\mu_s y_s, \qquad 2k<s\leqslant n.
$$

Отсюда видно, что матрица A^* имеет следующую структуру:

$$
A^*=\begin{vmatrix}
G_1 & & & & & & & 0\\
 & G_2 & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & G_k & & & & \\
 & & & & -\mu_{2k+1} & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
0 & & & & & & & -\mu_n
\end{vmatrix},
$$

$$
G_p=\begin{pmatrix} -\mu_p & -\nu_p\\ \nu_p & -\mu_p\end{pmatrix}.
$$

Выберем далее $C^*=\operatorname{diag}(d_1, d_1, \ldots, d_k, d_k, d_{2k+1}, \ldots, d_n)$; тогда $C^{*-1}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_k}, \frac{1}{d_k}, \frac{1}{d_{2k+1}}, \ldots, \frac{1}{d_n}\right)$.

При вычислении матрицы B^* можно считать, что A^* и C^* имеют одинаковую структуру (но, конечно, с разными клетками). Отсюда легко вытекает, что можно предположить точно ту же структуру и для матрицы B^*, скажем,

$$B^* = \begin{pmatrix} H_1 & & & & & & & 0 \\ & H_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & H_k & & & & \\ & & & & k_{2k+1} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & & k_n \end{pmatrix}.$$

Выписывая соотношение (16.2) для k_s, мы немедленно находим

$$k_s = \frac{d_s}{2\mu_s}, \quad n \geqslant s > 2k.$$

Для вычисления клеток H_j потребуется только принять во внимание клетки G_j и аналогичные клетки

$$\begin{pmatrix} d_j & 0 \\ 0 & d_j \end{pmatrix}$$

в матрице C^*. Опуская для простоты индексы, мы приходим к равенству $GH + HG = -\operatorname{diag}(d, d)$ или, полагая

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

к равенству

$$\begin{pmatrix} -\mu & \nu \\ -\nu & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mu & -\nu \\ \nu & -\mu \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Приравнивая здесь соответствующие элементы слева и справа, получаем три уравнения

$$\begin{aligned} -2\mu\alpha + 2\nu\beta &= -d, \\ -2\mu\gamma - 2\nu\beta &= -d, \\ -2\mu\beta + \nu(\gamma - \alpha) &= 0, \end{aligned}$$

которые легко решаются:

$$\alpha=\gamma=\frac{d}{2\mu}, \quad (\mu^2+\nu^2)\beta=0.$$

Поскольку G — невырожденная матрица, то $\mu^2+\nu^2\neq 0$, и потому $\beta=0$. Окончательно:

$$H=\operatorname{diag}\left(\frac{d}{2\mu}, \frac{d}{2\mu}\right),$$

$$B=\operatorname{diag}\left(\frac{d_1}{2\mu_1}, \frac{d_1}{2\mu_1}, \ldots, \frac{d_k}{2\mu_k}, \frac{d_k}{2\mu_k}, \frac{d_{2k+1}}{2\mu_{2k+1}}, \ldots, \frac{d_n}{2\mu_n}\right).$$

Определяя далее $b^*=P_2^{-1}P_1^{-1}b$ и $c^{*'}=c'P_1P_2$, мы находим из (18.2)

$$r>\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{4d_p}\left[\left(\frac{b_{2p-1}^*d_p}{\mu_p}+c_{2p-1}^*\right)^2+\left(\frac{b_{2p}^*d_p}{\mu_p}+c_{2p}^*\right)^2\right]+$$

$$+\sum_{s=2k+1}^{n}\frac{1}{4d_s}\left(\frac{b_s^*d_s}{\mu_s}+c_s^*\right)^2.$$

Наименьшее значение второй суммы вычисляется как и прежде; оно равно

$$\sum_{s=2k+1}^{n}\frac{\varepsilon_s b_s^* c_s^*}{\mu_s},$$

где ε_s определяется формулой (18.4). Рассматривая члены первой суммы, мы попытаемся выбрать каждое из чисел d_p так, чтобы достигался минимум выражения

$$\frac{1}{4d_p}\left(\frac{b_{2p-1}^*d_p}{\mu_p}+c_{2p-1}^*\right)^2+\frac{1}{4d_p}\left(\frac{b_{2p}^*d_p}{\mu_p}+c_{2p}^*\right)^2.$$

Положим

$$b_p'=b_{2p-1}^*, \qquad b_p''=b_{2p}^*,$$

$$c_p'=c_{2p-1}^* \qquad c_p''=c_{2p}^*,$$

$$b_p=\sqrt{b_p'^2+b_p''^2}, \quad c_p=\sqrt{c_p'^2+c_p''^2};$$

вышеупомянутое выражение тогда достигает минимума при

$$d_p^2=\frac{\mu_p^2c_p^2}{b_p^2},$$

а само наименьшее значение равно

$$\frac{1}{2\mu_p}\left(b_p c_p + b'_p c'_p + b''_p c''_p\right).$$

Основное неравенство в случае $2k$ комплексных корней может быть теперь записано в виде

$$r > \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{2\mu_p}\left(b_p c_p + b'_p c'_p + b''_p c''_p\right) + \sum_{s=2k+1}^{n} \frac{\varepsilon_s b_s^* c_s^*}{\mu_s}, \tag{20.5}$$

где ε_s имеет смысл, указанный в (18.4). Напомним только, что μ_p — взятая с обратным знаком действительная часть комплексного корня λ_p.

§ 21. Приложение к одному важному случаю

В теории автоматического регулирования возникла следующая задача. Дана система с регулятором, которая описывается совокупностью уравнений

$$\begin{cases} \ddot{\varepsilon} + \alpha\dot{\varepsilon} + \beta\varepsilon = \gamma\zeta, \\ \dot{q} + aq = g\dot{\varepsilon} + h\varepsilon, \\ \dot{\zeta} = f(\sigma), \\ \sigma = k_1 q - k_2\zeta, \end{cases}$$

где ε, ζ, q, σ — переменные; σ и $f(\sigma)$ — элементы регулирования. Эту систему уравнений надлежит исследовать на устойчивость.

Дифференцируя первые два уравнения и полагая $x_1 = \dot{\varepsilon}$, $x_2 = \ddot{\varepsilon}$, $x_3 = \dot{q}$, приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(\sigma)\, b, \\ \dot{\sigma} = c'x - rf(\sigma) \end{cases} \tag{21.1}$$

знакомого нам вида (15.11), но при $n = 3$. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\beta & -\alpha & 0 \\ h & g & -a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c' = \{0,\ 0,\ k_1\}, \quad r = k_2.$$

Предположив, что $k_1 h\gamma - k_2 a\beta \neq 0$, несложно показать, что если x и σ стремятся к нулю, то это же происходит и с ε и q. Следовательно, вопросы устойчивости исходной системы можно с таким же успехом изучать, рассматривая систему (21.1).

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\beta & -\alpha-\lambda & 0 \\ h & g & -a-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $(\lambda + a)[\lambda(\lambda+\alpha)+\beta] = 0$ имеет корни

$$\lambda_1 = -a, \qquad \lambda_2 = \frac{-\alpha+\delta}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{-\alpha-\delta}{2},$$

где для краткости обозначено $\delta = \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}$.

Первый случай. λ_2, λ_3 — *действительные и различные числа*. Условия, при которых все корни будут действительными, различными и отрицательными, таковы [1]):

$$a > 0, \quad \alpha^2 > 4\beta > 0, \quad \alpha > 0.$$

Мы заметим также, что $\lambda_2 - \lambda_3 = \delta$.

Вычисление матрицы P. Элементы первого столбца этой матрицы пропорциональны алгебраическим дополнениям одной из ненулевых строк матрицы

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -\beta & a-\alpha & 0 \\ h & g & 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмем, например, алгебраические дополнения элементов второй строки; тогда мы можем записать, что

$$p_{11} = p_{21} = 0, \quad p_{31} = h - ag.$$

[1]) Эти условия обеспечивают неравенство $\lambda_2 \neq \lambda_3$. Неравенства же $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_3$ накладывают на параметры a, α, β дополнительные ограничения. — *Прим. ред.*

В качестве элементов p_{2i} второго столбца матрицы P мы должны взять алгебраические дополнения ненулевой строки матрицы

$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 & 0 \\ -\beta & -\lambda_2-\alpha & 0 \\ h & g & -a-\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Возьмем, например, опять вторую строку; тогда

$$p_{21}=\lambda_2+a, \quad p_{22}=\lambda_2(\lambda_2+a), \quad p_{23}=\lambda_2 g+h.$$

Используя уравнение, определяющее величину λ_2, можно записать, что

$$p_{22}=(a-\alpha)\lambda_2-\beta.$$

Те же самые вычисления проводим для нахождения p_{3i}, $i=1, 2, 3$; при этом λ_2 заменяется на λ_3. Это позволяет найти последний столбец матрицы P:

$$p_{31}=\lambda_3+a, \quad p_{32}=(a-\alpha)\lambda_3-\beta, \quad p_{33}=\lambda_3 g+h.$$

Окончательно

$$P=\begin{pmatrix} 0 & a+\lambda_2 & a+\lambda_3 \\ 0 & (a-\alpha)\lambda_2-\beta & (a-\alpha)\lambda_3-\beta \\ h-ag & g\lambda_2+h & g\lambda_3+h \end{pmatrix},$$

Далее находим

$$c'=\{0, 0, k_1\},$$

$$c^{*'}=c'P=\{k_1(h-ag),\ k_1(g\lambda_2+h),\ k_1(g\lambda_3+h)\}.$$

Наконец осталось вычислить $b^*=P^{-1}b$. Пусть $P^{-1}=(\pi_{jk})$. Легко увидеть, что

$$b'=\{0, \gamma, 0\}, \quad b^{*'}=\{\gamma\pi_{12}, \gamma\pi_{22}, \gamma\pi_{32}\}. \tag{21.2}$$

Следовательно, необходимо вычислить элементы только второго столбца матрицы P^{-1}. Если P_{ji} — алгебраическое дополнение элемента p_{ij} матрицы P, то

$$\pi_{ij}=\frac{P_{ij}}{|P|}.$$

Поэтому задача сводится к вычислению алгебраических дополнений элементов второй строки матрицы P и ее определителя. Сразу находим, что

$$\begin{aligned}|P| &= (h-ag)\{a+\lambda_2[(a-\alpha)\lambda_3-\beta]-\\ &\qquad -(a+\lambda_3)[(a-\alpha)\lambda_2-\beta]\} =\\ &= (h-ag)[a(a-\alpha)+\beta](\lambda_3-\lambda_2) =\\ &= -(h-ag)[a(a-\alpha)+\beta]\delta.\end{aligned}$$

Далее, последовательно вычисляем алгебраические дополнения:

элемента p_{21}

$$\begin{aligned}p_{12} &= -(a+\lambda_2)(g\lambda_3+h)+(a+\lambda_3)(g\lambda_2+h) =\\ &= (ag-h)\delta = \pi_{12}|P|;\end{aligned}$$

элемента p_{22}

$$p_{22} = (ag-h)(a+\lambda_3) = \pi_{22}|P|;$$

элемента p_{23}

$$p_{32} = (h-ag)(a+\lambda_2) = \pi_{32}|P|.$$

Подставляя все эти выражения в формулу (21.2), мы находим

$$b^{*\prime} = \frac{\gamma(ag-h)}{|P|}\{\delta,\ a+\lambda_3,\ -a-\lambda_2\}.$$

Основное неравенство принимает вид

$$\begin{aligned}r &> \frac{\varepsilon_1 \overset{*}{b}_1 \overset{*}{c}_1}{-\lambda_1}+\frac{\varepsilon_2 \overset{*}{b}_2 \overset{*}{c}_2}{-\lambda_2}+\frac{\varepsilon_3 \overset{*}{b}_3 \overset{*}{c}_3}{-\lambda_3} =\\ &= \frac{2k_1\gamma}{[a(a-\alpha)+\beta]\delta}\left\{\frac{\varepsilon_1(h-ag)\delta}{2a}+\right.\\ &\qquad \left.+\frac{\varepsilon_2(a+\lambda_3)(g\lambda_2+h)}{\alpha-\delta}-\frac{\varepsilon_3(\alpha+\lambda_2)(g\lambda_3+h)}{\alpha+\delta}\right\},\end{aligned}$$

где ε_i определено равенством, аналогичным (18.4).

Второй случай. λ_2, λ_3 — *комплексно сопряженные числа.* Здесь имеем $\alpha^2 < 4\beta$. Введем обозначение $\delta = \sqrt{4\beta-\alpha^2}$; тогда корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = -a, \qquad \lambda_2 = \frac{-\alpha+i\delta}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{-\alpha-i\delta}{2} = \bar{\lambda}_2.$$

Все корни имеют отрицательные действительные части, если $a > 0$, $\alpha > 0$.

Вычисления, приведенные при рассмотрении первого случая, справедливы и здесь, только δ заменяется на $i\delta$, λ_3 на $\bar{\lambda}_2$ и P на P_1.

Необходимо отметить, что мы отклонились от нашей общей схемы решения, изложенной в § 20, ибо комплексная пара λ_2, $\bar{\lambda}_2$ следует сейчас после действительного собственного значения λ_1, а не перед ним. Однако это служит причиной весьма незначительных изменений, которые вполне доступны читателю.

Видоизменения по сравнению с уже указанным первым случаем имеют место только в первой части исследования. Мы можем представить себе получившееся преобразование в виде $x = P_1 z$, где z имеет две комплексно сопряженные компоненты $z_2 = z' + iz''$, $\bar{z}_2 = z' - iz''$. (Для удобства преобразование записано в обратную сторону: от новых переменных z к начальным переменным x.) Чтобы перейти от действительных координат x к действительным координатам y, надо совершить еще преобразование $\{z_1, z_2, \bar{z}_2\} \to \{z_1, z', z''\}$,

$$
\begin{aligned}
z_1 &= z_1,\\
z_2 &= z' + iz'',\\
z_3 &= z' - iz''.
\end{aligned}
$$

Матрица этого преобразования такова:

$$
P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix},
$$

а обратная матрица

$$
P_2^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{Vmatrix}.
$$

Итак, преобразование $x \to y$ имеет матрицу $P = P_1 P_2$; обратная к ней матрица $P^{-1} = P_2^{-1} P_1^{-1}$. Как и в предыдущем случае,

$$b^* = P^{-1}b = P_2^{-1}P_1^{-1}b, \quad c^{*'} = c'P_1P_2.$$

Если мы введем вспомогательные векторы $b_0 = P_1^{-1}b$ и $c_0' = c'P_1$, то очевидно, что $b^* = P_2^{-1}b_0$, $c^{*'} = c_0'P_2$. Преимущество введения векторов b_0, c_0' в том, что они получаются из действительных векторов b^*, $c^{*'}$ предыдущего случая заменой δ и λ_3 на $i\delta$ и $\bar{\lambda}_2$ соответственно, и, конечно, P на P_1. Таким образом, мы находим

$$c_0' = k_1\{h - ag,\ g\lambda_2 + h,\ g\bar{\lambda}_2 + h\},$$

$$c^{*'} = k_1\{h - ag,\ 2h - g\alpha,\ -g\delta\},$$

$$b_0' = \frac{\gamma(ag - h)}{|P_1|}\{i\delta,\ a + \bar{\lambda}_2,\ -a - \lambda_2\},$$

где $|P_1| = (ag - h)[a(a - \alpha) + \beta]\, i\delta$. Следовательно,

$$b^{*'} = \frac{\gamma}{a(a - \alpha) + \beta}\left\{1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{\alpha - 2a}{2\delta}\right\}.$$

Это приводит нас к неравенству [см. неравенство (20.5)]

$$r > \varepsilon\frac{k_1\gamma(h - ag)}{a[a(a - \alpha) + \beta]} + \frac{1}{\alpha}(bc + b_1c_1 + b_2c_2);$$

здесь

$$b_1 = -\frac{1}{2}\frac{\gamma}{a(a - \alpha) + \beta}, \qquad b_2 = \frac{\gamma(\alpha - 2a)}{2\delta[a(a - \alpha) + \beta]},$$

$$c_1 = (2h - g\alpha)k_1, \qquad c_2 = -g\delta k_1,$$

$$b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \qquad c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2},$$

а

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если стоящий при нем коэффициент положителен,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

§ 22. Общее регулирование

До настоящего момента мы занимались задачей регулирования, в которой требовалось поддерживать систему в положении равновесия довольно простой природы.

Более общей является следующая проблема. Пусть работа машины описывается n-мерным векторным уравнением

$$\dot{y} = Y(y),$$

и пусть оно имеет решение $y = \xi(t)$, которое описывает желаемый режим работы. Из общих соображений мы можем предположить, что $\xi(t)$ ограничено при всех $t \geqslant 0$. Нашей задачей является осуществление такого регулирования, при котором разность $y - \xi(t)$ по возможности незначительна. Иными словами, мы приходим к задаче

$$\dot{x} = Y(y) - \dot{\xi}(t) = Y[x + \xi(t)] - \dot{\xi}(t),$$

или

$$\dot{x} = X(x, t), \quad X(0, t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant 0. \tag{22.1}$$

Здесь начало координат является положением равновесия и требуется, чтобы оно было устойчивым.

Включая регулятор, управляемый с помощью σ, $f(\sigma)$, мы можем записать в общем виде

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, f(\sigma), t), \\ \dot{\sigma} = G(x, f(\sigma), t), \end{cases} \tag{22.2}$$

где $F(x, 0, t) = X(x, t)$, так что $F(0, 0, t) \equiv 0$ при $t \geqslant 0$. Можно также считать, что $G(0, 0, t) \equiv 0$ при всех $t \geqslant 0$. Таким образом, функцию $f(\sigma)$ надо выбирать как и прежде, т. е. начало координат пространства x, σ будет положением равновесия, если $\sigma f(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$ и $f(0) = 0$. Это положение равновесия желательно сделать асимптотически устойчивым.

Пусть α, β, γ — три скалярные функции от t и вектора x, причем

$$\alpha = \beta + \gamma. \tag{22.3}$$

Предположим, что при достаточно больших t и достаточно малых x разность $\alpha - \beta$ мала и стремится к нулю вместе с $\|x\|$. Будем в таком случае вместо (22.3) писать $\alpha \doteq \beta$ и говорить, что α *почти равно* β. Можно сказать также более точно: возьмем $t_0 > 0$ достаточно большим и произвольное $\varepsilon > 0$; тогда существует такое $\eta = \eta(\varepsilon, t_0)$, что при $t \geqslant t_0$ и $\|x\| < \eta$ справедливо неравенство

$|\alpha-\beta|<\varepsilon$. Практическое значение соотношения $\alpha \doteq \beta$ состоит в том, что при всех больших t и малых $\|x\|$ знак α совпадает со знаком β.

Допустим теперь, что систему (22.2) можно переписать в виде

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} \doteq Ax + f(\sigma)b, \\ \dot{\sigma} \doteq c'x - rf(\sigma), \end{array}\right. \tag{22.4}$$

где символ $\doteq$ понимается теперь по отношению к вектору $\{x, \sigma\}$, т. е. по отношению к $\|x\|+|\sigma|$. Конечно смысл остальных символов $A, b\ldots$ тот же, что и в основной системе (15.11). Смысл системы (22.4) просто в том, что в правых частях собраны, так сказать, „главные члены" функций F и G.

Если мы теперь повторим наши прежние рассмотрения § 14, 15, 17, то сможем убедиться, что по существу все остается справедливым при замене знака $=$ на $\doteq$. В частности, если основное неравенство (18.2) выполнено, то функция V будет функцией Ляпунова в некоторой области

$$0 \leqslant \|x\|+|\sigma| < B, \quad t \geqslant t_0.$$

Мы можем тогда иметь асимптотическую устойчивость в „малом" (локально), но мы не в состоянии гарантировать ее в абсолютном смысле. Это все, что может дать изложенный в этой главе метод в затронутом общем случае[1]).

---

[1]) Приведенные в этой главе достаточные условия абсолютной устойчивости системы (15.11) очень просты и удобны, но в то же время эти условия являются весьма узкими и зависят от выбора положительно определенной матрицы C, которая входит в основное неравенство (18.2). Существуют значительно более сильные достаточные условия абсолютиой устойчивости системы (15.11), которые, в частности, охватывают все условия, получаемые из неравенства (18.2) при различных $C>0$. Читателя, желающего более детально познакомиться с этим кругом вопросов, мы отсылаем к книге Айзерман М. А. и Гантмахер Ф. Р., Абсолютная устойчивость регулируемых систем, Изд-во АН СССР, 1963. — *Прим. ред.*

Глава IV

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ЛЯПУНОВА

§ 23. Конечное время определения; устойчивость по Лагранжу

Японский математик Окамура использовал метод, близкий к теории Ляпунова, для изучения продолжаемости решений. Вслед за ним Йошизава довольно подробно исследовал возможности применения методов Ляпунова для получения сведений об ограниченности решений. Дальнейшее изложение целиком опирается на эти их работы.

Теоремы Ляпунова дают возможность судить об устойчивости по знаку производной $\dot{V}$, где функция V — положительно определенная. Иначе говоря, изучается неравенство $\pm\dot{V} \leqslant 0$. Ла-Салль предложил рассматривать более сложное неравенство $\pm\dot{v} \leqslant G(v, t)$, что позволяет получать много интересных выводов, касающихся следующих трех возможностей.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(x, t), \qquad t \geqslant 0. \tag{F}$$

Пусть $x(t)$ — ее решение с начальным условием $x(t_0) = x^0$. Ясно, что:

а) либо это решение может быть продолжено для всех значений $t \geqslant t_0$, и тогда мы будем говорить, что решение $x(t)$ *неограниченно продолжаемо*[1]);

б) либо существует такое $T > t_0$, что $\|x(t)\| \to \infty$ при $t \to T$, и тогда мы будем говорить, что решение $x(t)$ имеет *конечное время определения*[2]).

Эти две возможности явно несовместимы и дополняют друг друга[3]). Третий случай

---

[1]) В оригинале defined in the future. — *Прим. перев.*

[2]) В оригинале finite escape time. — *Прим. перев.*

[3]) То есть всегда имеет место один и только один из двух случаев а) и б). См., например, Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнеиия, Физматгиз, 1961, § 24. — *Прим. перев.*

в) решение $x(t)$ *ограничено*

— совместим с возможностью а), но, конечно, несовместим с б).

Ограниченность всех решений представляет собой своего рода устойчивость; в этом случае говорят об *устойчивости в смысле Лагранжа* или, короче, об *устойчивости по Лагранжу*.

Как и раньше (см. § 8), везде в дальнейшем $V(x, t)$ означает скалярную функцию, которая положительно определена и имеет в некоторой области непрерывные частные производные первого порядка. В этой области

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + X \cdot \operatorname{grad} V.$$

Рассмотрим сначала самое общее дифференциальное неравенство

$$\dot{v} \leqslant G(v, t), \qquad t \geqslant 0, \tag{23.1}$$

где G — скалярная функция своих аргументов, а v — скалярная функция t. Мы интересуемся только *положительными* функциями v, удовлетворяющими неравенству (23.1). Существуют два типа таких неравенств:

I. Неравенства, не имеющие ни одного положительного решения с конечным временем определения;

II. Неравенства, не имеющие ни одного положительного неограниченного[1]) решения.

Второй из этих типов включает в себя первый. Однако неравенство типа I может иметь решения, которые стремятся по модулю к $+\infty$ при $t \to +\infty$, тогда как для неравенств типа II такие решения недопустимы.

Если Ω — произвольное множество, то через Ω^c будем обозначать *дополнение* этого множества; иными словами, Ω^c — множество всех тех точек, которые не принадлежат Ω.

Теорема XIII. *Предположим, что Ω — ограниченное множество пространства E^n, содержащее начало координат, и что функция $V(x, t)$ определена во всем множестве Ω^c и при всех $t \geqslant 0$.*

---

[1]) Не следует путать в дальнейшем неограниченное решение и неограниченно продолжаемое решение. — *Прим. перев.*

Допустим далее, что $V(x, t) \to +\infty$ *при* $\|x\| \to \infty$ *равномерно на каждом конечном интервале изменения времени* $0 \leqslant a \leqslant t < b$. *Наконец, предположим, что* $\dot{V} \leqslant G(V, t)$ *во всем множестве* Ω^c *и для всех* $t \geqslant 0$. *Если неравенство* (23.1) *не имеет ни одного положительного решения с конечным временем определения, то каждое решение* $x(t)$ *системы* (F) *неограниченно продолжаемо.*

Это утверждение почти очевидно. Если бы решение $x(t)$ имело конечное время определения $0 \leqslant t < T$, то в некоторый момент времени $t_1 < T$ оно попало бы в множество Ω^c и затем оставалось бы в нем[1]). Но в таком случае при $t \geqslant t_1$ функция $v(t) = V(x(t), t)$ была бы положительным решением неравенства (23.1) с конечным временем определения, что противоречит предположению теоремы.

Для применения результатов такого рода обычно удобно выбирать $G(v, t) = k(t) L(v)$, где $k(t)$ — непрерывная функция при всех $t \geqslant 0$, а функция $L(v)$ — положительна и непрерывна при всех положительных значениях аргумента. Неравенство (23.1) в этом случае принимает вид

$$\frac{\dot{v}}{L(v)} \leqslant k(t). \tag{23.2}$$

а) *Если*[2]) $\int\limits^{\infty} \frac{dv}{L(v)} = +\infty$, *то неравенство* (23.2) *не имеет ни одного положительного решения с конечным временем определения.*

---

[1]) Момент t_1 может быть выбран столь близким к T, чтобы при всех t, для которых $t_1 \leqslant t < T$, выполнялось неравенство $V(x, t) > 0$. — *Прим. ред.*

[2]) Запись $\int\limits^{\infty} f(x)\, dx = +\infty$ означает, что несобственный интеграл от некоторого нижнего предела до бесконечности расходится, а $\int\limits^{\infty} f(x)\, dx < \infty$ — что этот интеграл сходится (в обычном смысле математического анализа). — *Прим. перев.*

Действительно, пусть существует такое положительное решение $v(t)$, $t_0 \leqslant t < T$; тогда

$$\int\limits_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv}{L(v)} = \int\limits_{t_0}^{t} k(t)\,dt.$$

Правая часть этого равенства ограничена при $t \to T$, в то время как левая неограниченно возрастает, что, очевидно, невозможно.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

б) *Если* $\int\limits^{\infty} \frac{dv}{L(v)} = +\infty$, *а* $\int\limits^{\infty} k(t)\,dt < +\infty$, *то неравенство* (23.2) *не имеет ни одного положительного неограниченного при* $t \geqslant 0$ *решения.*

Таким образом, неравенство $\dot{v} \leqslant k(t)v$, где k — произвольная непрерывная при всех $t \geqslant 0$ функция, принадлежит типу I, а неравенство $\dot{v} \leqslant e^{-t}v$ — типу II. Конечно, простейшим неравенством вида (23.2) является $\dot{v} \leqslant 0$.

Мы получим теперь условия, при которых решения системы (F) имеют конечное время определения. Для этого используем неравенство

$$\dot{v} \geqslant G(v, t), \qquad t \geqslant 0, \tag{23.3}$$

которое не имеет неограниченно продолжаемых положительных решений. Взяв $G(v, t) = k(t)L(v)$, где $k(t)$ и $L(v)$ обладают теми же свойствами, что и в (23.2), мы легко убедимся в справедливости следующего утверждения.

в) *Если* $\int\limits^{\infty} \frac{dv}{L(v)} < +\infty$, *а* $\int\limits^{\infty} k(t)\,dt = +\infty$, *то неравенство* (23.3) *не имеет ни одного неограниченно продолжаемого положительного решения.*

Например, неравенство $\dot{v} \geqslant cv^{\alpha}$, $c > 0$, $\alpha > 1$ не имеет неограниченно продолжаемых положительных решений.

Следующий результат о существовании конечного времени определения решения можно рассматривать как теорему о неустойчивости.

Теорема XIV. *Пусть множество Ω обладает тем свойством, что каждое решение $x(t)$, начинающееся в этом множестве, все время остается в нем. Пусть, далее, функция $V(x, t)$ положительна при всех x из Ω и всех $t \geqslant 0$. Предположим, наконец, что $\dot{V} \geqslant G(V, t)$ для всех $t \geqslant 0$ и всех x из Ω. Если неравенство* (23.3) *не имеет ни одного неограниченно продолжаемого положительного решения, то каждое решение $x(t)$ системы* (F), *удовлетворяющее условию $x(t_0) = x^0$, где x^0 — точка множества Ω имеет конечное время определения.*

В самом деле, допустим, что решение $x(t)$ с таким начальным условием не имеет конечного времени определения. Тогда функция $v(t) = V(x(t), t)$, удовлетворяющая неравенству (23.3), положительна и неограниченно продолжаема, что противоречит предположению теоремы.

Линейные системы являются наиболее известным примером, в котором все решения неограниченно продолжаемы. Именно, если

$$\dot{x} = A(t)\,x + f(t), \qquad t \geqslant 0,$$

где $A(t)$ — квадратная матрица порядка n, а $f(t)$ — n-мерный вектор, причем $A(t)$ и $f(t)$ непрерывны при $t \geqslant 0$, то[1]) все решения этой системы определены при $0 \leqslant t < \infty$.

Пример 1. В качестве иллюстрации к теореме XIII мы обобщим этот результат следующим образом.

Предположим, что существует такое число $R > 0$ и такая скалярная функция $k(t)$, непрерывная при всех $t \geqslant 0$, что правая часть уравнения (F) удовлетворяет неравенству

$$\|X(x, t)\| \leqslant k(t)\,\|x\| \tag{23.4}$$

при всех $t \geqslant 0$ и всех $\|x\| \geqslant R$. Определим функцию $V(x) = \|x\|^2 = x \cdot x$. Тогда, используя известное неравенство Шварца

$$a'b \leqslant \|a\| \cdot \|b\|,$$

[1]) См., например, Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, 1961, § 21. — *Прим. перев.*

мы получаем при всех $\|x\| \geqslant R$ и всех $t \geqslant 0$

$$\dot{V}(x) = 2x'X(t, x) \leqslant 2k(t)\|x\|^2 = 2k(t)V(x).$$

Поскольку неравенство $\dot{v} \leqslant 2k(t)v$ не имеет ни одного положительного решения с конечным временем определения, мы можем на основании теоремы XIII заключить, что при сделанном предположении все решения системы (F) определены для всех $t \geqslant 0$, т. е. неограниченно продолжаемы.

Пример 2. Если правая часть нелинейной системы (F) не удовлетворяет неравенству типа (23.4), то достаточные условия неограниченной продолжаемости всех решений формулируются уже более сложно.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t)\dot{x} + g(x) = e(t). \tag{23.5}$$

Предполагаем, что функции f и g гладкие[1]), а функция $e(t)$ непрерывна при всех $t \geqslant 0$. Кроме того, пусть $f(x, \dot{x}, t) \geqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$ и $x^2 + \dot{x}^2 \geqslant r^2$, а

$$G(x) = \int_0^x g(u)\,du \to +\infty \quad \text{при} \quad |x| \to \infty, \tag{23.6}$$

т. е. достаточно далеко от начала координат сопротивление неотрицательно, а для достаточно больших $|x|$ функция $g(x)$ похожа на характеристику упругой пружины[2]). Уравнению (23.5) эквивалентна система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) - f(x, y, t)y + e(t). \end{cases}$$

Определим теперь функцию

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x);$$

[1]) То есть функция $g(x)$ имеет непрерывную производную, а $f(x, \dot{x}, t)$ — непрерывные частные производные первого порядка по всем трем аргументам. — *Прим. перев.*

[2]) О механическом истолковании членов уравнения второго порядка типа (23.5) см. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, Физматгиз, 1959. — *Прим. перев.*

в качестве множества Ω, о котором упоминается в теореме XIII, возьмем внутренность круга $x^2+y^2<r^2$. Тогда вне этого круга [1])

$$\dot{V}=-f(x,y,t)\,y^2+e(t)\,y\leqslant|e(t)|\,|y|\leqslant\sqrt{2}\,|e(t)|\sqrt{V}.$$

Таким образом, $\dot{V}\leqslant k(t)L(V)$ при $t\geqslant 0$ и $x^2+y^2\geqslant r^2$; здесь $k(t)=\sqrt{2}\,|e(t)|$, а $L(v)=\sqrt{v}$. Но неравенство $\dot{v}\leqslant k(t)L(v)$ в этом случае не имеет ни одного положительного решения с конечным временем определения, а поэтому каждое решение уравнения (23.5) неограниченно продолжаемо.

Пример 3. Наличие конечного времени определения у решений не является чем-то необыкновенным.

Рассмотрим уже упоминавшееся уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\,\dot{x}+x=f(t),$$

где $\varepsilon<0$; внешнее воздействие $f(t)$ непрерывно и ограничено при всех $t\geqslant 0$. Здесь сопротивление отрицательно при $|x|>1$. Вводя новое переменное $y=\dot{x}-\varepsilon\left(x-\frac{x^3}{3}\right)$, мы придем к эквивалентной системе

$$\begin{cases}\dot{x}=y+\varepsilon\left(x-\dfrac{x^3}{3}\right),\\ \dot{y}=-x+f(t).\end{cases}\tag{23.7}$$

Возьмем в качестве множества Ω следующую область: $x\geqslant a>0$, $y\leqslant 0$, $x+y\geqslant 0$ (рис. 27). На том участке

[1]) Здесь используется неотрицательность функции f вне Ω и очевидное неравенство $e(t)\,y\leqslant|e(t)|\cdot|y|$. Однако для получения оценки $|y|=\sqrt{2V(x,y)-2G(x)}\leqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt{V}$ необходимо еще одно предположение, а именно $G(x)\geqslant 0$. В силу условия (23.6), это будет так, но, вообще говоря, лишь для достаточно больших $|x|$. Поэтому в качестве Ω следует взять внутренность круга $x^2+y^2<R^2$, где $R\geqslant r$ выбран так, что $G(x)\geqslant 0$ при $|x|\geqslant R$. Легко видеть, что тогда функция $V(x,y)$ (в рассматриваемом примере она не зависит от времени t) будет положительной в области Ω^c. Если же на функцию $g(x)$ наложить уже много раз встречавшееся в гл. II условие $xg(x)>0$ при $x\neq 0$, то все рассуждения авторов будут справедливы буквально. — *Прим. перев.*

границы области Ω, который имеет уравнение $x+y=0$, производная в силу системы (23.7)

$$\frac{d}{dt}(x+y)=y+\varepsilon\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-x+f(t)=$$
$$=\varepsilon\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-2x+f(t)>0 \qquad (23.8)$$

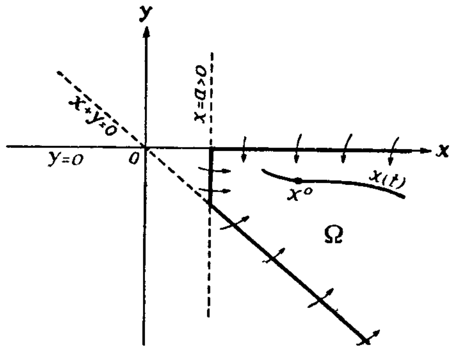


Рис. 27.

при достаточно большом a [1]). На участке $y=0$ границы области Ω имеем $(d/dt)\,y=-x+f(t)<0$ при достаточно большом a. Внутри рассматриваемой области

$$\dot{x}=y+\varepsilon\left(x-\frac{x^3}{3}\right)>y+x>0 \qquad (23.9)$$

при достаточно большом a [2]). Таким образом, при доста-

[1]) В самом деле, по предположению, $|f(t)|\leqslant \text{const}$ при $0\leqslant t<\infty$, и потому при больших $x>0$ доминирующим членом является $-\varepsilon x^3/3$, который положителен в силу $\varepsilon<0$. Неравенство (23.8) означает, что вдоль любой траектории сумма $x+y$ может только возрастать. Но тогда траектория, начинающаяся в точке $\{x^0, y^0\}$ области Ω, не может выйти из Ω через нижнюю границу, поскольку $x^0+y^0>0$. *—Прим. перев.*

[2]) В самом деле, при больших $x>0$ выражение $\varepsilon(x-x^3/3)$ стремится к $+\infty$ как x^3, т. е. может быть сделано больше x. Неравенство (23.9) показывает, что внутри области Ω вдоль любого решения координата x может только возрастать, так что решение, исходящее в момент t_0 из точки $\{x^0, y^0\}$, принадлежащей Ω, уже не может пересечь участка границы $x=a$. *—Прим. перев.*

10 Зак. 1824

точно большом a любое решение уравнения Ван-дер-Поля, начавшееся в момент $t_0 \geqslant 0$ внутри области Ω, все время остается в этой области.

Определим теперь функцию $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; ее производная

$$\dot{V} = \varepsilon\left(x - \frac{x^3}{3}\right)x + yf(t).$$

Внутри области Ω имеем $x \geqslant |y|$, и поэтому при достаточно большом a и достаточно малом c

$$\dot{V} \geqslant cx^4 \geqslant cV^2.$$

Как мы уже отмечали ранее, неравенство $\dot{v} \geqslant cv^2$ не имеет положительных неограниченно продолжаемых решений. Тем самым выполнены (при достаточно большом a) условия теоремы XIV, т. е. все решения, начинающиеся внутри области Ω, имеют конечное время определения.

Мы считали параметр ε отрицательным, тогда как обычно в уравнении Ван-дер-Поля этот параметр считается положительным. Если же $\varepsilon > 0$, то на основании только что полученного результата мы заключаем, что любое решение, начинающееся внутри области Ω, не может быть определено при всех $t \leqslant 0$, т. е. имеет *конечное отрицательное время определения*[1]).

Переходя теперь к устойчивости по Лагранжу, мы можем, аналогично теореме XIII, доказать следующий результат.

Теорема XV. *Пусть Ω и V имеют тот же смысл, что и в теореме* XIII, *и $V \to +\infty$ при $\|x\| \to +\infty$ равномерно по $t \geqslant 0$. Пусть снова $\dot{V} \leqslant G(V, t)$. Если неравенство* (23.1) *не имеет ни одного положительного неограниченного при всех $t \geqslant 0$ решения, то система* (F) *устойчива в смысле Лагранжа.*

При $G = 0$ мы получаем для автономной системы

$$\dot{x} = X(x) \tag{FA}$$

аналогичный результат.

---

[1]) В оригинале negative finite escape time. — *Прим. перев.*

При тех же предположениях относительно функции $V(x)$, *появляющейся вместо* $V(x, t)$, *т. е. если* $V \to +\infty$, *когда* $\|x\| \to +\infty$, *и* $\dot{V} < 0$ *для всех* x *из множества* Ω^c, *система* (FA) *устойчива по Лагранжу.*

Более общий случай, когда $G = k(t) L(v)$, а неравенство (23.1) не имеет положительных неограниченных при $t \geqslant 0$ решений, был уже рассмотрен выше [см. утверждение б), стр. 133].

Пример 4. Мы покажем сейчас, что уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + [a^2 + q(t)]\,x = 0, \quad a = \text{const} \neq 0, \quad p(t) \geqslant 0$$

устойчиво по Лагранжу, если $\int^{\infty} |q(t)|\,dt < \infty$. Функции $p(t)$ и $q(t)$ предполагаются непрерывными при всех $t \geqslant 0$. Перепишем данное уравнение в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -p(t)\,y - [a^2 + q(t)]\,x, \end{cases}$$

и возьмем функцию $V = y^2 + a^2x^2$. Легко подсчитать[1]), что

$$\dot{V} = -2p(t)\,y^2 - 2q(t)\,xy \leqslant 2\,|q(t)|\,|xy| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|q(t)|}{|a|}(y^2 + a^2x^2) = \frac{|q(t)|}{|a|}V.$$

Следовательно, положив $k(t) = \frac{|q(t)|}{|a|}$ и $L(v) = v$, мы придем к дифференциальному неравенству (23.2), удовлетворяющему утверждению б); теорема XV гарантирует нам в этом случае устойчивость по Лагранжу.

Пример 5. Рассмотрим уравнение (23.5), изучавшееся уже в примере 2. Без всяких дополнительных предполо-

---

[1]) Здесь используется неравенство

$$xy \leqslant \frac{1}{2a}(x^2 + a^2y^2) \quad (x > 0,\ y > 0,\ a > 0),$$

вывод которого очевиден. — *Прим. перев.*

жений о функциях $f(x, \dot{x}, t)$ и $g(x)$, но при более сильном ограничении на внешнее воздействие $e(t)$, можно доказать устойчивость по Лагранжу.

Возьмем в качестве V ту же функцию, что и в примере 2; тогда при[1]) $x^2+y^2 \geqslant r^2$ мы получаем

$$\dot{V} \leqslant \sqrt{2}\,|e(t)|\sqrt{V}.$$

Следовательно, если

$$\int_0^\infty |e(t)|\,dt < \infty, \tag{23.10}$$

то неравенство $\dot{v} \leqslant \sqrt{2}\,|e(t)|\sqrt{v}$ не имеет положительных не ограниченных при $t \geqslant 0$ решений, а потому имеет место устойчивость по Лагранжу. Приведенный результат есть небольшое обобщение теоремы Антосевича.

Условие (23.10) накладывает определенные ограничения на вынуждающую силу $e(t)$: она должна достаточно быстро убывать при $t \to \infty$. Это условие, естественно, не выполняется для периодической внешней силы, и это вполне объяснимо, поскольку сопротивление предполагается только неотрицательным. Например, уравнение $\ddot{x}+x=\cos t$ имеет неограниченные решения, и мы видим, что для ослабления ограничений на вынуждающее воздействие $e(t)$ необходимо сделать дальнейшие предположения о характере сопротивления. Эту мысль наглядно иллюстрирует следующий пример.

Пример 6. Рассмотрим уравнение Льенара

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=e(t) \tag{23.11}$$

и предположим, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют непрерывные при всех x производные, а $e(t)$ — непрерывная при всех $t \geqslant 0$. Определим функции

$$F(x)=\int_0^x f(u)\,du; \quad G(x)=\int_0^x g(u)\,du; \quad E(t)=\int_0^t e(\tau)\,d\tau. \tag{23.12}$$

---

[1]) См. примечание [1]) на стр. 136. — *Прим. перев.*

Допустим, далее, что $f(x) \geqslant c > 0$ при всех x и

$$4f(x)[F(x)-E(t)]\,g(x) \geqslant e^2(t)$$

при всех $t \geqslant 0$ и всех достаточно больших $|x|$. Мы покажем, что при этих предположениях уравнение (23.11) устойчиво по Лагранжу.

Действительно, приведем это уравнение к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)\,y + e(t) \end{cases}$$

и определим функции

$$V_1 = \frac{1}{2}[y + F(x) - E(t)]^2 + G(x),$$

$$V_2 = \frac{1}{2}y^2 + G(x).$$

Без труда получаем, что

$$\dot{V}_1 = -[F(x)-E(t)]\,g(x); \quad \dot{V}_2 = -f(x)\,y^2 + ye(t).$$

Используя сделанные предположения, мы видим, что при достаточно больших $|x|$ [1])

$$\dot{V}_1 \leqslant -\frac{e^2(t)}{4f(x)}, \quad \dot{V}_2 \leqslant \frac{e^2(t)}{4f(x)}.$$

Поэтому при $|x| \geqslant a$, где a — достаточно большое число, и при всех y имеем $\dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leqslant 0$. Предположим далее, что функции $e^2(t)$ и $|E(t)|$ остаются ограниченными для неотрицательных t. Следовательно, мы можем записать, что $\dot{V}_2 \leqslant -\lambda(y)$, где [2]) $\lambda(y) \to \infty$ при $|y| \to \infty$. Поэтому при $|x| < a$ и $|y| > b$ (b — достаточно большое число) $\dot{V}_1 + \dot{V}_2 < 0$. Мы показали, что $\dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leqslant 0$

---

[1]) Оценка для $\dot{V}_2$ справедлива при всех x, поскольку неравенство $-f(x)\,y^2 + ye(t) \leqslant \frac{e^2(t)}{4f(x)}$ приводится очевидным образом к виду $[2f(x)\,y - e(t)]^2 \geqslant 0$. — *Прим. перев.*

[2]) Если $|x(t)| \leqslant K$ при $t \geqslant 0$, то можно положить $\lambda(y) = cy^2 - K|y|$. — *Прим. ред.*

вне области (прямоугольника), определенной условиями $|x| < a$, $|y| < b$. Точно также нетрудно видеть, что $V_1 + V_2 \to \infty$ равномерно по $t \geqslant 0$ при $|x|^2 + |y|^2 \to \infty$[1]. Но тогда функция $V = V_1 + V_2$ удовлетворяет всем предположениям теоремы XV, т. е. уравнение (23.10) устойчиво по Лагранжу.

§ 24. Предельная ограниченность

Продолжая расширение метода Ляпунова по пути, проложенному Йошизавой, мы займемся сейчас обобщениями иного характера. Самым существенным здесь будет исследование *устойчивости множества* M, где M — замкнутое, а в остальном совершенно произвольное множество точек n-мерного пространства.

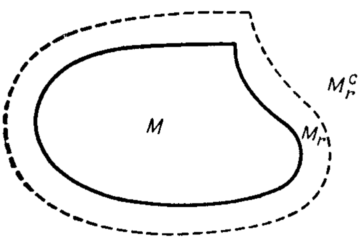


Рис. 28.

Мы обозначим через M_r, где r — некоторое положительное число, множество всех таких точек пространства, расстояние от каждой из которых до множества[2] M строго меньше r (рис. 28). Таким образом, точка x принадлежит множеству M_r только в том случае, если найдется в множестве M такая точка y, что $\|x - y\| < r$. Как и ранее, M_r^c означает множество всех тех точек пространства, которые не принадлежат множеству M_r; иначе говоря, M_r^c — дополнение множества M_r. Например, если M — шар $\|x\| \leqslant R$, то множество M_r — сферическая область $\|x\| < R + r$, а дополнение M_r^c — множество $\|x\| \geqslant R + r$.

---

[1]) Предполагается, что функция $G(x)$ удовлетворяет условию (23.6). — *Прим. ред.*

[2]) Напомним, что расстоянием от точки x до множества M называется величина $\inf d(x, y)$, где нижняя грань берется по всем точкам y множества M. Если M замкнуто, то нижняя грань всегда достигается. — *Прим. перев.*

Прежде всего мы приведем две совершенно элементарные леммы. Как и ранее, речь пойдет о неавтономной системе

$$\dot{x} = X(x, t), \quad t \geqslant 0 \tag{F}$$

Лемма 1. *Пусть $V(x, t)$ — скалярная функция, частные производные первого порядка которой непрерывны при всех x и всех $t \geqslant 0$, а M — замкнутое множество в n-мерном пространстве. Допустим, что $\dot{V}(x, t) \leqslant 0$ для всех x из M^c и всех $t \geqslant 0$ и что $V(x_1, t_1) < V(x_2, t_2)$ для всех $t_2 \geqslant t_1 \geqslant 0$ и при любом выборе x_1 в множестве M, а x_2 в множестве M_r^c при некотором r. Тогда любое решение системы* (F), *находящееся в некоторый момент $t_0 \geqslant 0$ в множестве M, никогда уже не сможет покинуть множество M_r.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ — решение системы (F), которое в момент $t_0 \geqslant 0$ находится в множестве M. Допустим, что в какой-то более поздний момент $T > t_0$ точка $x(T)$ уже принадлежит M_r^c. Рассмотрим множество таких моментов t_1, $t_0 < t_1 < T$, что решение $x(t)$ целиком проходит в множестве M^c при всех $t_1 < t \leqslant T$; пусть τ — наименьшее число, обладающее этим свойством. Но тогда точка $x(\tau)$ принадлежит множеству M и поэтому $V(x(\tau), \tau) < V(x(T), T)$. Однако это невозможно, так как $\tau \leqslant t \leqslant T$ — невозрастающая функция при $\tau \leqslant t \leqslant T$.

Эта лемма не исключает той возможности, что решение, начавшееся в множестве M, имеет конечное время определения. Если же M — ограниченное замкнутое множество, то указанная возможность исключается и каждое решение $x(t)$, начавшееся в M в некоторый момент $t_0 \geqslant 0$, остается все время в M_r. Однако множество M_r также ограничено, а потому все решения, которые в какой-либо момент времени $t_0 \geqslant 0$ находятся в M, равномерно ограничены. Иными словами, существует такое число $b > 0$, что для всех решений $x(t)$ с принадлежащей M начальной точкой $x(t_0)$, $t_0 \geqslant 0$ выполнено неравенство $\|x(t)\| < b$ при всех $t \geqslant t_0$.

Лемма 2. *Если, кроме предположений леммы* 1, *выполнены неравенства $V(x, t) \geqslant 0$ и $\dot{V}(x, t) \leqslant -\varepsilon < 0$ для всех $t \geqslant 0$ и всех x из M^c, то каждое неограни-*

ченно продолжаемое решение системы (F) *в конце концов остается внутри* M_r. *Иначе говоря, если* $x(t)$ — *неограниченно продолжаемое решение системы* (F), *то существует такой момент* T, *что* $x(t)$ *лежит в* M_r *при всех* $t \geqslant T$.

Доказательство. Поскольку $V \geqslant 0$ и $\dot{V} \leqslant -\varepsilon < 0$, ясно, что каждое неограниченно продолжаемое решение должно в конце концов войти в M. Но тогда, согласно лемме 1, оно должно все время оставаться внутри M_r.

Мы будем говорить, что система (F) *предельно ограничена*[1], если найдется число $b > 0$ и для каждого решения $x(t)$ число $T > 0$, такое, что неравенство $\|x(t)\| < b$ справедливо для всех $t \geqslant T$[2].

Теоремы XVI и XVII получаются как следствие приведенных выше двух лемм и позволяют судить о предельной ограниченности системы (F).

Теорема XVI. *Если, кроме всех предположений леммы* 2, *потребовать еще, чтобы множество* M *было ограничено, а* $V(x, t) \to \infty$ *при* $\|x\| \to \infty$ *равномерно по* $t > 0$, *то система* (F) *предельно ограничена.*

Доказательство. Так как множество M ограничено, то множество M_r также ограничено для каждого $r > 0$. Поэтому, согласно лемме 2, нам достаточно доказать, что приведенные в условии теоремы дополнительные предположения гарантируют неограниченную продолжаемость всех решений системы (F).

Как мы уже отмечали выше, если M — ограниченное множество, то все решения, начинающиеся в M, равномерно ограничены и, следовательно, неограниченно продолжаемы. Пусть начальная точка $x(t_0)$ лежит в множестве M^c. В силу наложенного на функцию $V(x, t)$ условия при $\|x\| \to \infty$, можно выбрать число R столь большим, что $V(x, t) > V(x(t_0), t_0)$ при всех $t \geqslant t_0$ и всех x из M_R^c. Если $x(t)$ все время остается вне M, то функция $V(x(t), t)$ убывает и $x(t)$ не может выйти из M_R[3]. Если же реше-

1) В оригинале ultimately bounded. — *Прим. перев.*

2) Число b не зависит от выбора решений. — *Прим. ред.*

3) Поскольку функция $V(x(t), t)$, убывает, то $V(x(t), t) \leqslant V(x(t_0), t_0)$. — *Прим. ред.*

ние $x(t)$ входит в множество M, то, по лемме 1, оно все время после этого останется в некотором множестве M_r. Следовательно, все решения ограничены и потому все они неограниченно продолжаемы.

Доказанная теорема обладает тем недостатком, что требует большого количества условий. Существует несколько простых и удобных для приложений случаев, когда теорема может быть упрощена. Простейшая формулировка теоремы получается, если функция V не зависит от t. Хотя $V(x)$ и не зависит от времени явно, производная $\dot{V}(x)$, вычисляемая в силу неавтономной системы (F), уже зависит явно и от t. При этом неравенства для $\dot{V}$ предполагаются выполненными при всех $t \geqslant 0$.

Теорема XVII. *Пусть $V(x)$ — скалярная функция, которая при всех x имеет непрерывные частные производные первого порядка, причем $V(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$. Если $\dot{V}(x) \leqslant -\varepsilon < 0$ для всех x из дополнения M^c некоторого замкнутого ограниченного множества M, то система* (F) *предельно ограничена.*

Доказательство. Нам достаточно убедиться, что в рассматриваемом случае выполнены все условия теоремы XVI (включая также условия лемм 1 и 2). Так как функция V не зависит от времени, то ее стремление к бесконечности при $\|x\| \to \infty$ можно считать равномерным по t. Ясно, кроме того, что функция $V(x)$ ограничена снизу при всех x. Поэтому мы можем, прибавив, если нужно, константу, считать, что функция $V(x)$ неотрицательна при всех x. Множество M замкнуто и ограничено; поэтому непрерывная функция $V(x)$ ограничена на этом множестве. Следовательно, существует такое достаточно большое число r, что $V(x_1) < V(x_2)$ для всех x_1 из M и всех x_2 из M_r^c. Тем самым показано, что все условия теоремы XVI выполнены, т. е. система (F) предельно ограничена.

Пример. Мы приведем теперь пример, иллюстрирующий применение этой теоремы о предельной ограниченности.

Рассмотрим уравнение Льенара (см. пример 6, § 23):

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t), \quad t \geqslant 0. \tag{24.1}$$

Допустим, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют непрерывные производные, а функция $e(t)$ непрерывна. Определим функции $F(x)$, $G(x)$, $E(t)$ по формулам (23.1) и вместо уравнения (24.1) будем изучать эквивалентную ему систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) + E(t), \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases}$$

Предположим далее, что

а) $xg(x) > 0$ при достаточно больших x;

б) функция $|E(t)|$ ограничена;

в) $g(x)F(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$.

Пусть

$$V = \frac{1}{2}[y - h(x)]^2 + G(x);$$

функцию $h(x)$ мы определим позже. Можно непосредственно подсчитать, что

$$\dot{V} = -h'(x)[y - F(x) + E(t)][y - h(x)] - \\ - g(x)[F(x) - h(x) - E(t)]. \tag{24.2}$$

В качестве ограниченного замкнутого множества M выберем прямоугольник $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ и определим функцию $h(x)$ так:

$$h(x) = \begin{cases} -c & \text{при} \quad x < -a, \\ \frac{c}{a}x & \text{при} \quad -a \leqslant x \leqslant a, \\ c & \text{при} \quad x > a, \end{cases}$$

где $c > 0$ столь велико, что выполняется неравенство

$$|E(t)| < c \quad \text{при всех} \quad t \geqslant 0$$

Функция $h(x)$, очевидно, непрерывна, но ее производная имеет разрывы при $x = -a$ и $x = a$, что, как легко видеть, несущественно.

Поскольку $h'(x) = 0$ при $|x| > a$, то при этих значениях x [см. равенство (24.2)] и всех $t \geqslant 0$

$$\dot{V} = -g(x)[F(x) - h(x) - E(t)],$$

откуда легко заключаем, что при этих значениях x и t и при достаточно большом a всегда $\dot{V} \leqslant -\varepsilon < 0$. С другой стороны, исходя из формулы (24.2) и определения функции $h(x)$, мы видим, что, при достаточно большом b, то же неравенство $\dot{V} \leqslant -\varepsilon < 0$ имеет место для $|x| \leqslant a$, $|y| > b$ и всех $t \geqslant 0$. Поэтому $\dot{V} \leqslant -\varepsilon < 0$ везде в M^c.

Наконец, $V(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$ и, согласно теореме XVII, уравнение (24.1) обладает предельной ограниченностью.

В некотором смысле более общими условиями, гарантирующими предельную ограниченность уравнения Льенара с внешним вынуждающим воздействием, являются следующие:

а) $|E(t)| \leqslant E_0$ при всех $t \geqslant 0$;

б) $\operatorname{sign} x \cdot g(x) \geqslant \alpha > 0$ при $|x| \geqslant a$;

в) $\operatorname{sign} x \cdot F(x) \geqslant F_0 > E_0$ при $|x| \geqslant a$.

Отметим, что доказательство проводится аналогично. В частности, разобранный пример показывает, что решения $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = e(t), \qquad \varepsilon > 0$$

обладают предельной ограниченностью, если $\left|\int_0^t e(\tau)\,d\tau\right|$ ограничен при $t \geqslant 0$.

§ 25. Практическая устойчивость

В настоящем параграфе мы намерены изложить несколько идей, касающихся практической устойчивости, в надежде, что их обсуждение здесь привлечет внимание к этому важному вопросу[1]). В то же самое время станет ясно, почему некоторые исследования по устойчивости не могут быть оценены как очень серьезные. К этой категории принадлежат исследования, в которых принимается во внимание только линейное приближение.

Мы уже отмечали в § 13, что устойчивость и даже асимптотическая устойчивость сами по себе не обеспечивают практической устойчивости. Необходимо знать величину области асимптотической устойчивости и, кроме того, рассмотреть условия, в которых система должна работать, требования, которые к ней предъявляются, и т. п. Только после этого можно судить, будет ли рассматриваемая система достаточно устойчива для того, чтобы выполнять свои функции, и можно ли улучшить ее устойчивость.

Согласившись, что асимптотическая устойчивость сама по себе недостаточна для практической устойчивости, мы могли бы склониться к мысли, что она, однако, всегда представляет собой необходимое условие. Это утверждение также неверно. Положение равновесия системы может быть математически неустойчиво и тем не менее система может совершать колебания в достаточной близости от этого положения равновесия, так что ее режим является вполне приемлемым. Многие авиационные и ракетные устройства ведут себя именно таким образом. (Ниже мы приведем пример системы с неустойчивым положением равновесия, которая практически устойчива.)

Имея в виду все эти идеи, перейдем к формулировке определения практической устойчивости. Как и раньше, основной нашей системой является

$$\dot{x} = X(x, t), \qquad t \geqslant 0. \tag{F}$$

Положение равновесия расположено в начале координат $X(0, t) \equiv 0$ при всех $t \geqslant 0$. Возмущенная система

$$\dot{x} = X(x, t) + p(x, t), \qquad t \geqslant 0. \tag{F*}$$

Мы выберем число δ и два множества Q и Q_0. Именно, Q — замкнутое ограниченное множество, содержа-

---

[1]) Подробнее эти вопросы рассматриваются в книге: Карачаров К. А. и Пилютик А. Г., Введение в техническую теорию устойчивости движения, Физматгиз, 1963. — *Прим. перев.*

щее начало координат, а Q_0 — подмножество множества Q [1]). Пусть $x^*(t, x^0, t_0)$ — решение возмущенной системы (F^*), удовлетворяющее условию $x^*(t_0, x^0, t_0) = x^0$. Пусть, далее, P — совокупность всех возмущений p, удовлетворяющих условию $\|p(x, t)\| < \delta$ для всех $t \geqslant 0$ и всех x.

Если для каждого возмущения p из P, каждой точки x_0 из Q_0 и каждого момента времени $t_0 \geqslant 0$ решение $x^*(t, x^0, t_0)$ остается в множестве Q при всех $t \geqslant 0$ [2]), то говорят, что начало координат обладает *практической устойчивостью*. Таким образом, решения, которые начинаются из точек множества Q_0, все время остаются в множестве Q (рис. 29).

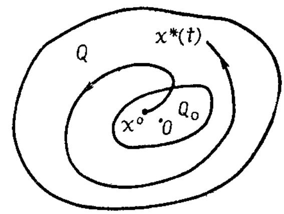


Рис. 29.

Понятие практической устойчивости включает в себя число δ и два множества Q и Q_0. Множество Q является *множеством допустимых состояний нашей системы*. Если решение $x^*(t)$ системы (F^*) в момент t находится внутри Q, то система в этот момент работает удовлетворительно. Подмножество Q_0 является совокупностью начальных положений.

Прежде чем говорить о практической устойчивости, мы должны решить:

1) как близко от положения равновесия должна работать наша система, иначе говоря, что такое множество Q;

2) какой силы будут ожидаемые возмущения, иначе говоря, какова величина числа δ;

3) какие начальные условия могут иметь место, иначе говоря, что представляет собой множество Q_0.

После того, как все эти вопросы решены, можно говорить о практической устойчивости.

Практическая устойчивость не является ни более слабым, ни более сильным понятием по сравнению с обычной

---

[1]) Также имеющее начало координат своей внутренней точкой. — *Прим. перев.*

[2]) И, следовательно, неограниченно продолжаемо. — *Прим. перев.*

устойчивостью. Положение равновесия может быть устойчивым в обычном смысле и не быть в то же самое время практически устойчивым и, наоборот, может быть практически устойчивым, не обладая одновременно устойчивостью по Ляпунову.

Практическая устойчивость означает равномерную ограниченность решений относительно множества Q_0 начальных значений и совокупности P возмущающих воздействий. Однако для практической устойчивости требуется не только, чтобы существовала ограничивающая постоянная для решений, но и чтобы эта постоянная была достаточно мала; решения, начинающиеся в множестве Q_0, все время остаются в Q. В § 14, где мы обсуждали устойчивость по отношению к постоянным возмущениям, было показано, что если начало координат асимптотически устойчиво, то по заданному множеству Q найдется такое подмножество $Q_0 \subset Q$ и такое $\delta > 0$, что относительно них положение равновесия практически устойчиво. В этой формулировке утверждается лишь существование множества Q_0 и числа $\delta > 0$, но не содержится никаких сведений о их величине, так что это может и не приводить к практической устойчивости.

Лемма 1, § 24 дает нам некоторый метод для обнаружения практической устойчивости; при этом множество M соответствует множеству Q_0, а M_r соответствует Q. Производная $\dot{V}$, подсчитываемая в силу возмущенной системы (F^*), должна быть неположительна вне Q_0 для всех возмущений p из P.

Полезно иметь в виду, что иногда практическую устойчивость желательно обеспечить только в течение конечного времени T. Определение практической устойчивости в этом случае модифицируется требованием, чтобы решение $x^*(t, x^0, t_0)$ оставалось в множестве Q при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$. Таким образом, если $V \leqslant l_0$ в Q_0 и $V \geqslant l$ вне Q, то выполнение неравенства

$$\dot{V} \leqslant \frac{l - l_0}{T}$$

в Q означает, что любое решение, начинающееся в Q_0, будет оставаться в Q в течение времени T.

По аналогии с полной устойчивостью (асимптотической устойчивостью в целом) мы можем определить сильную практическую устойчивость. Как и раньше, число δ и множества Q и Q_0 заданы. Если начало координат практически устойчиво и если, сверх того, каждое решение $x^*(t)$ системы (F^*) для каждого p из совокупности P входит в конце концов в Q и остается в нем, то мы скажем, что система (F) обладает *сильной практической устойчивостью.* Предельная ограниченность решений системы (F^*) для всех p из P — необходимое условие сильной практической устойчивости системы (F).

С некоторым видоизменением методы, развитые в предыдущем параграфе для исследования предельной ограниченности, могут быть использованы для изучения сильной практической устойчивости. Доказательство, аналогичное приведенным в § 24, позволяет нам убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема XVIII. *Пусть $V(x)$ — скалярная функция, имеющая непрерывные при всех x частные производные первого порядка, причем $V(x)\to\infty$ при $\|x\|\to\infty$. Пусть $\dot{V}_*$ означает производную этой функции в силу системы* (F^*). *Если $\dot{V}_*\leqslant-\varepsilon<0$ для всех x вне Q_0, для всех p из P и для всех $t\geqslant 0$ и если $V(x)\leqslant V(y)$ при любом выборе x из Q_0 и y вне Q, то система* (F) *обладает сильной практической устойчивостью.*

Возьмем, в частности, в этой теореме в качестве Q множество, определенное неравенством $V\leqslant l$. Тогда ни одно решение не может покинуть множество Q, и мы можем взять $Q_0=Q$.

Пример. В качестве простого примера исследования практической устойчивости мы снова рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x}+\mu(\alpha^2x^2-1)\dot{x}+\beta x=0, \tag{25.1}$$

где константы μ и β положительны. Заменой переменных x и t это уравнение можно было бы привести к нормальному виду уравнения Ван-дер-Поля (13.4).

Вблизи начала координат сопротивление отрицательно, и положение равновесия неустойчиво. Мы покажем, что соответствующим выбором параметров можно получить любой вид практической устойчивости, какой бы мы ни захотели. С другой стороны, если μ отрицательно, то положение равновесия асимптотически устойчиво, но, несмотря на это, с практической точки зрения положение равновесия может быть весьма неустойчивым. Все это справедливо при отсутствии возмущений (т. е. при $\delta=0$). Как мы увидим, в результате действия возмущений устойчивость может стать еще менее удовлетворительной.

Возмущенное уравнение имеет вид

$$\ddot{x}+\mu(\alpha^2x^2-1)\dot{x}+\beta x=p(x, \dot{x}, t),$$

где $|p(x, \dot{x}, t)|\leqslant\delta$ для всех x, $\dot{x}$, t. Ему эквивалентна система

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-\mu(\alpha^2x^2-1)y-\beta x+p(x, \dot{x}, t).\end{array}\right. \tag{25.2}$$

Определим функцию

$$V(x, y)=\frac{1}{2}[y+F(x)-h(x)]^2+\frac{1}{2}y^2+\beta x^2,$$

где

$$F(x)=\mu\left(\frac{\alpha^2x^3}{3}-x\right),$$

$$h(x)=\left\{\begin{array}{lll}2\mu x & \text{при} & |x|\leqslant a,\\ 2\mu a\operatorname{sign}x & \text{при} & |x|>a.\end{array}\right.$$

Производная этой функции в силу системы (25.2) равна

$$\begin{aligned}\dot{V}_*=-[\mu(\alpha^2x^2-1)+h'(x)]\,y^2+\\ +\{2p-h'(x)[F(x)-h(x)]\}\,y-\\ -(\beta x-p)[F(x)-h(x)].\end{aligned} \tag{25.3}$$

В качестве Q_0 возьмем прямоугольник $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant b$. Легко видеть, что для любого δ мы можем, выбирая a и b достаточно большими, получить неравенство $\dot{V}_*\leqslant-\varepsilon<0$ вне Q_0. Это показывает, что при ограниченных возмущениях $p(x, \dot{x}, t)$ система (25.2) предельно ограничена. Но мы хотели бы получить нечто большее.

Не будем стараться получить более точные оценки, хотя это и не трудно сделать. Мы хотим только показать, что для любого δ можно, выбрав соответствующим образом μ, α и β, сделать числа a и b сколь угодно малыми.

В невозмущенном случае $p=0$, а Q_0 — область, ограниченная предельным циклом. При $t\to\infty$ все решения наматываются на этот цикл, как спирали. В примере 2, § 13, мы дали некоторую оценку предельному циклу.

Возвращаясь к изучению функции $\dot{V}_*$, заметим, что $F(a)-h(a)>0$ при $a>\frac{3}{\alpha}$ и $F(a)-h(a)=0$ при $a=\frac{3}{\alpha}$, $\alpha>0$. Пусть $\lambda=F(a)-h(a)$. Выбирая $a>\frac{3}{\alpha}$, но столь близко к $\frac{3}{\alpha}$, как это нам потребуется, мы будем иметь $\lambda>0$, но сколь угодно малым. При $|x|\leqslant\frac{3}{\alpha}$ наибольшее значение функции[1] $|F(x)-h(x)|$ равно $\lambda_0=2\sqrt{3}\,\frac{\mu}{\alpha}$. Пусть $a>\frac{3}{\alpha}$ выбрано так, чтобы $\lambda=\lambda_0$[2]). При $\lambda_0\to 0$ имеем $a\to\frac{3}{\alpha}$. Тогда при $|x|>a$, поскольку $h'(x)=0$, получим[3])

$$\dot{V}_*\leqslant -8\mu y^2+2\delta y-2\sqrt{3}\left(\frac{3\beta}{\alpha}-\delta\right)\frac{\mu}{\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\delta^2}{8\mu}-2\sqrt{3}\left(\frac{3\beta}{\alpha}-\delta\right)\frac{\mu}{\alpha}.$$

---

[1]) Это наибольшее значение достигается при $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{\alpha}$. — *Прим. ред.*

[2]) Значение a определяется из равенства

$$\lambda=\mu\left(\frac{\alpha^2a^3}{3}-3a\right)=\lambda_0=\mu\left(\frac{\alpha^2x_1^3}{3}-3x_1\right).$$

Отсюда $\alpha^2\left(a^3-x_1^3\right)=9\left(a-x_1\right)$. Сокращая на $a-x_1$, получаем квадратное уравнение

$$a^2+x_1a+x_1^2-\frac{9}{\alpha^2}=0.$$

Подставляем $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{\alpha}$ (см. предыдущее примечание) и находим положительный корень $a=\frac{2\sqrt{3}}{\alpha}$. — *Прим. ред.*

[3]) При оценке величины $\dot{V}_*$ в формулу (25.3) вместо x подставляется величина a, при этом $F(x)-h(x)=\lambda_0=2\sqrt{3}\,\frac{M}{\alpha}$. В разности $\beta x-\delta$ величина $x=a$ заменяется меньшей величиной $\frac{3}{\alpha}$. — *Прим. ред.*

При $|x| \leqslant a$, поскольку $h'(x) = 2\mu$, будет [1])

$$\dot{V}_* \leqslant -\mu y^2 + \left[2\delta + 4\sqrt{3}\frac{\mu^2}{\alpha}\right]|y| + 2\sqrt{3}\frac{\delta\mu}{\alpha} + 12\frac{\beta\mu}{\alpha^2} =$$
$$= -\mu(y^2 - 2c_1|y| - c_0),$$

где

$$c_1 = \frac{\delta}{\mu} + 2\sqrt{3}\frac{\mu}{\alpha}, \quad c_0 = 2\sqrt{3}\frac{\delta}{\alpha} + 12\frac{\beta}{\alpha^2}.$$

Таким образом, $\dot{V}_* \leqslant -\varepsilon < 0$, если $|x| \leqslant a$ и $|y| \geqslant b > c_1 + \sqrt{c_1^2 + c_0}$. При $|x| > a$ мы убеждаемся, что эта же оценка для $\dot{V}_*$ справедлива, если

$$\frac{3\beta}{\alpha} > \delta + \frac{\alpha}{2\sqrt{3}\mu}\left(\frac{\delta^2}{8\mu} + \varepsilon\right).$$

Следовательно, выбирая числа α, μ и β так, чтобы отношения $\frac{\delta}{\mu}$, $\frac{\mu}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha^2}$ и $\frac{\alpha}{\beta}$ были малы [2]), мы получим неравенство $\dot{V}_* \leqslant -\varepsilon < 0$ вне прямоугольника Q_0: $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, где a и b могут быть сколь угодно малыми. Заметим, что все эти отношения действительно возможно сделать малыми одновременно.

Пусть V_0 — максимум функции $V(x, y)$ в Q_0. Ясно, что

$$V_0 = \frac{1}{2}(b + \lambda_0)^2 + \frac{1}{2}b^2 + \beta a^2.$$

Тогда Q_0 целиком содержится в множестве Q, определенном условием $V(x, y) \leqslant V_0$. Величина V_0 может быть выбрана сколь угодно малой; иначе говоря, и множество Q может быть сделано сколь угодно малым. Вне множества Q_0 справедливо неравенство $\dot{V}_* \leqslant -\varepsilon < 0$ и, следовательно, ни одно решение, начинающееся в Q, не может покидать Q и каждое решение в конце концов вхо-

[1]) При оценке $|F(x) - h(x)|$ заменяется максимальным значением $2\sqrt{3}\frac{\mu}{\alpha}$, а $|x|$ — величиной $a = \frac{2\sqrt{3}}{\alpha}$. — *Прим. ред.*

[2]) При этом можно сделать малым и отношение $\frac{\delta}{\mu} : \frac{\mu}{\alpha} = \frac{\alpha\delta}{\mu^2}$. — *Прим. ред.*

дит в Q. Таким образом, для любого δ мы можем выбрать α, μ и β так, чтобы практическая устойчивость была сколь угодно сильной.

§ 26. Вынужденные колебания; стационарные режимы

В реальных системах отыскание колебаний, которые могут быть как желательными, так и нежелательными (вредными), является важной практической проблемой. Наши средства связи собираются из цепей, порождающих устойчивые колебания. Наоборот, появление колебаний в системе регулирования или в экономической схеме может быть поводом для беспокойства. Проблемы нелинейных колебаний крайне заманчивы для математиков, они представляют собой то обширное поле деятельности в дифференциальных уравнениях, где мы наблюдаем сейчас значительный прогресс. Современная математика, в частности топология, дает нам новые методы исследования.

В настоящем параграфе мы хотим указать на довольно неожиданную связь между теорией колебаний и методом Ляпунова.

Прежде всего рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + f(t), \qquad t \geqslant 0; \tag{26.1}$$

здесь x — n-мерный вектор, A — постоянная матрица порядка n, а $f(t)$ — непрерывная периодическая n-мерная вектор-функция периода T. Для такой линейной системы имеется несколько относительно простых результатов. Известно, что если система (26.1) имеет ограниченное при $t \geqslant 0$ решение[1]), то эта же система имеет периодическое решение периода T. Далее, если матрица A устойчива (т. е. все ее собственные значения имеют отрицательные действительные части), то система (26.1) имеет единственное периодическое решение, а все остальные решения приближаются к нему при неограниченном возрастании времени. Такое периодическое решение мы будем называть *установившимися колебаниями*, или *стационарным режимом*.

[1]) В оригинале bounded in the future. — *Прим. перев.*

Наличие нелинейностей в системе дифференциальных уравнений приводит к серьезным трудностям. Рассмотрим, например, систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y, t), \\ \dot{y} = Q(x, y, t), \end{cases} \tag{26.2}$$

где P и Q — периодические по t функции периода T. Мы предположим также, что для этой системы при всех x и y выполнена теорема существования.

В 1950 г. И. Массера получил очень интересный результат. Он показал, что если все решения системы (26.2) неограниченно продолжаемы и если известно, что система имеет ограниченное решение, то эта система имеет периодическое решение периода T. Этот результат позволяет использовать утверждения § 23 и 24 для изучения колебаний. Если, скажем, удастся показать методами этих параграфов, что система (26.2) устойчива по Лагранжу или обладает предельной ограниченностью (и, следовательно, устойчива по Лагранжу), то мы можем утверждать, что она имеет периодическое решение периода T. В частности, если вернуться к примеру § 24, считая вынуждающую силу $e(t)$ периодической, то из сказанного вытекает, что уравнение Льенара имеет по крайней мере одно периодическое решение, причем период этого решения совпадает с периодом функции $e(t)$.

К сожалению, этот результат неверен для нелинейных систем выше второго порядка; на этот счет Массера привел противоречащие примеры. В случае произвольного порядка системы, когда мы уже вынуждены отказаться от использования простых топологических свойств плоскости, основные результаты теории касаются случая квазилинейных систем[1]). Имеется, однако, один общий результат, касающийся установившихся колебаний; как показал Йошизава, изучение стационарных режимов можно проводить методом Ляпунова.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = X(x, t), \qquad t \geqslant 0, \tag{FP}$$

[1]) В оригинале weakly linear systems. — *Прим. перев.*

относительно которой предполагается, что $X(x, t) \equiv \equiv X(x, t+T)$ для всех n-мерных векторов x, всех $t \geqslant 0$ и некоторого $T > 0$. Мы предполагаем также, что для системы (FP) выполнены условия, обеспечивающие существование, единственность и непрерывную зависимость решений от начальных условий. Мы скажем, что система (FP) *экстремально устойчива*[1]), если для каждой пары решений $x^1(t)$ и $x^2(t)$ системы (FP) справедливо предельное соотношение $x^1(t) - x^2(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Ла-Салль, обобщая результат Треффтца для систем с одной степенью свободы, показал, что если система (FP) экстремально устойчива и если она имеет ограниченное решение, то эта система имеет периодическое решение периода T. Это периодическое решение является единственным, и все остальные решения неограниченно приближаются к нему при $t \to \infty$. Иначе говоря, в системе (FP) имеется стационарный режим.

Связь между сформулированным только что результатом и теорией Ляпунова состоит в том, что, как показал Йошизава, экстремальную устойчивость системы (FP) можно установить с помощью введения подходящих функций Ляпунова.

Мы приведем здесь более простой специальный случай теоремы Йошизава. Предположим прежде всего, что все решения системы (FP) предельно ограничены. Таким образом, существует такое замкнутое ограниченное множество Ω, что все решения этой системы в конце концов остаются внутри этого множества. Далее, для изучения поведения пары решений естественно ввести в рассмотрение две системы

$$\dot{x} = X(x, t),$$
$$\dot{y} = X(y, t),$$

которые мы можем объединить в одну систему порядка $2n$:

$$\dot{z} = Z(z, t), \tag{26.3}$$

считая z и $Z(z, t)$ $2n$-мерными векторами:

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Z(z, t) = \begin{pmatrix} X(x, t) \\ X(y, t) \end{pmatrix}.$$

[1]) В оригинале extremely stable. — *Прим. перев.*

Пусть Ω^2 означает множество всех тех векторов

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

для которых обе „составляющие“ x и y лежат в Ω. Наконец, M — множество всех таких

$$z = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$

у которых x лежит в Ω. Например, множество M является диагональю изображенного на рис. 30 множества Ω^2. Каж-

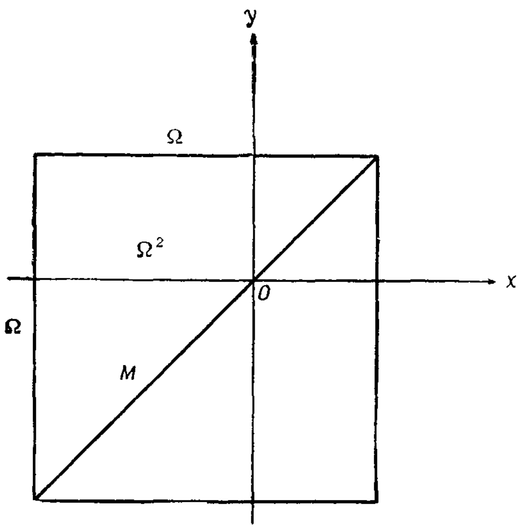


Рис. 30.

дое решение системы (26.3) остается в конце концов внутри Ω^2, и мы можем ограничить наше исследование именно этим множеством. Докажем, что каждое решение системы (26.3) приближается к множеству M при $t \to \infty$: это и будет означать экстремальную устойчивость системы (FP).

Пусть $V(z)$ — скалярная функция, имеющая внутри Ω^2 непрерывные частные производные первого порядка. Допустим сверх того, что в Ω^2

а) $V(z) = 0$ для z, принадлежащих M;
б) $V(z) > 0$ для z, не принадлежащих M;
в) $\dot{V}(z) < 0$ для z, не принадлежащих M.

[Полная производная $\dot{V}$ берется в силу системы (26.3)]. Сформулированные ограничения на функцию V означают, что эта функция является по отношению к множеству M положительно определенной, а ее производная — отрицательно определенной. Точно так же, как и во второй теореме Ляпунова об устойчивости, отсюда следует, что каждое решение системы (26.3) приближается при $t \to \infty$ к множеству M, а это в свою очередь равносильно утверждению об экстремальной устойчивости системы (FP).

Таким образом, допустив, что решения системы (FP) предельно ограничены, мы смогли доказать следующую теорему.

Теорема XIX. *При сформулированных выше предположениях система* (FP) *имеет единственное периодическое решение периода T и каждое другое ее решение неограниченно приближается при $t \to \infty$ к этому стационарному режиму.*

ЛИТЕРАТУРА

Мы приводим здесь несколько основных книг, имеющих непосредственное отношение к вопросам, затронутым в настоящей монографии [1]).

Векторы и матрицы

Halmos P., Finite dimensional vector spaces, Van Nostrand, New York, 1959.

Bellman R., Introduction to matrix analysis, McGraw-Hill, New York, 1960.

Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, Гостехиздат, М., 1953.

*Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, Физматгиз М., 1956.

Дифференциальные уравнения

Cesari L., Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations (Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete), Springer, Berlin, 1959 (в издательстве „Мир“ готовится к печати русский перевод: Чезари Л., Асимптотическое поведение и устойчивость обыкновенных дифференциальных уравнений).

Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.

Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, 1961.

Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М., 1949.

* Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, М., 1961.

* Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Физматгиз, М. 1964.

---

[1]) Книги, добавленные при переводе, отмечены звездочкой.

Теория устойчивости Ляпунова

Hahn W., Theorie und Anwendnng der direkten Methoden von Liapunov (Ergebnisse der Mathematik und inre Grenzgebiete), Springer, Berlin, 1959.

Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения (впервые опубликована в 1892 г.), Гостехиздат, М., 1950.

*Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, М., 1952.

*Четаев Н. Г., Устойчивость двнжения, изд. 2, Гостехиздат, М., 1956.

*Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, М., 1959.

Автоматическое регулирование

Летов А. М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем, изд. 2, Физматгиз, М., 1962.

*Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1951.

*Айзерман М. А., Лекции по теории автоматического регулирования, Физматгиз, М., 1958.

*Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Абсолютная устойчивость регулируемых систем, Изд-во АН СССР, М., 1963.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A = (a_{ij})$ — матрица 12

$|A|$, $\det A$ — определитель матрицы A 15

A_{ji} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} 16

$\mathcal{A} = (A_{ji})$ — матрица, составленная из алгебраических дополнений 16

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\mathcal{A}$ — обратная матрица 16

A' — транспонированная матрица 13

$A^* = PAP^{-1}$ — подобная матрица 20

δ_{ij} — символ Кроникера 15

$E = (\delta_{ij})$ — единичная матрица 14

$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ — диагональная матрица 14

$d(A, B)$ — расстояние между точками A и B 10

BU — граница открытого множества U 28

M_r — множество точек, расстояние от каждой из которых до множества M меньше r 142

$\|x\|$ — модуль (длина) вектора x 10

λ_i — характеристические корни 17

$m \times n$-матрица 12

$x \cdot y$ — скалярное произведение векторов 9

$o(\|x\|)$ 35

$\mathcal{X}(t)$ — главная матрица решений 37

$a \doteq b$ a почти равно b 128

$E^{n+1}_{x,t}$ — $n+1$-мерное пространство с координатами $x_1, \ldots, x_n$ и t 32

$S(R)$, $S(r)$ — сферические области радиуса R и r соответственно 29

S^R_r — замкнутая кольцевая область 29

$V(x)$, $W(x, t)$ — функции Ляпунова

α-предельное множество 74

ω-предельное множество (обозначается Γ^+) 73

Ω^c — дополнение множества Ω 131

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ж. Ла-Салль, С. Лефшец

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

Редактор *А. А. РЫВКИН*
Художник *В. П. Заикин.* Художественный редактор *В. И. Шаповалов.*
Технический редактор *Л. П. Кондюкова.* Корректор *Г. П. Суркова.*

Сдано в производство 22/X 1963 г. Подписано к печати 3/III 1964 г.
Бумага 84 × 108 1/32 = 2,6 бум. л., 8,6 печ. л., 7,3 уч.изд. л.
Изд. № 1/1870. Цена 71 коп. Зак. 1824.
(Темплан 1964 г. изд-ва „ИЛ", пор. № 12)

* * *

ИЗДАТЕЛЬСТВО «М И Р»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

* * *

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой «Главполиграфпрома» Государственного комитета Совета Министров СССР по печати.
Измайловский проспект, 29.