О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1973

517.2
Л 15
УДК 517

Краевые задачи математической физики, О. А. Ладыженская, Главная редакция физико-математической литературы, Изд-во «Наука», 1973.

Книга является несколько расширенным изложением лекций, читаемых автором в течение двадцати с лишним лет студентам IV курса математико-механического и физического факультетов ЛГУ. В ней рассмотрены основные краевые задачи для линейных уравнений второго порядка эллиптического, параболического и гиперболического типов и типа Шредингера, а также для некоторых классов систем таких уравнений. Коэффициенты уравнений зависят от точки области, в которой находятся решения, причем область может иметь произвольную форму. Исследования ведутся в классах обобщенных решений.

Книга рассчитана на студентов старших курсов университетов и технических вузов и на математиков разных специальностей, желающих познакомиться с одним из главных отделов теории уравнений в частных производных — решением и исследованием краевых задач (стационарных и нестационарных). Она будет полезна также вычислителям и инженерам, которые найдут в ней изложение различных приближенных методов решения краевых задач.

Библ. 95 назв.

Л $\frac{0223-1850}{042\,(02)\text{-}73}$ 13-73

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

Список обозначений 23

Глава I. **Вспомогательные предложения** 29

§ 1. Нормированные пространства и пространства Гильберта 29

§ 2. Общие сведения о линейных функционалах и линейных ограниченных операторах в гильбертовых пространствах 34

§ 3. О неограниченных операторах 39

§ 4. Обобщенные производные и усреднения 45

§ 5. Определение пространств $W_m^l(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$ 54

§ 6. Пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ и их основные свойства 61

§ 7. Мультипликативные неравенства для элементов пространств $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ и $W_m^1(\Omega)$ 77

§ 8. Теоремы вложения для пространств $\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$ и $W_m^l(\Omega)$ 83

Глава II. **Уравнения эллиптического типа** 88

§ 1. Постановка краевых задач. Описание основного материала, излагаемого в этой главе 88

§ 2. Обобщенные решения из $W_2^1(\Omega)$. Первое (энергетическое) неравенство 91

§ 3. Исследование разрешимости задачи Дирихле в пространстве $W_2^l(\Omega)$ (три теоремы Фредгольма) 96

§ 4. Теоремы разложения по собственным функциям симметрических операторов 107

§ 5. Вторая и третья краевые задачи 112

§ 6. Второе основное неравенство для эллиптических операторов 116

§ 7. Разрешимость задачи Дирихле в пространстве $W_2^2(\Omega)$ 125

§ 8. Приближенные методы решения краевых задач . . . 134

Глава III. **Уравнения параболического типа** 146

§ 1. Постановка начально-краевых задач и задачи Коши 147

§ 2. Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности 153

§ 3. Первая начально-краевая задача для параболических уравнений общего вида 165
§ 4. Другие краевые задачи, метод Фурье и Лапласа, второе основное неравенство 171
§ 5. Метод Роте 189

Глава IV. **Уравнения гиперболического типа** 196
§ 1. Общие сведения о гиперболических уравнениях. Постановка основных задач 196
§ 2. Энергетическое неравенство. Конечность скорости распространения возмущений. Теорема единственности для решений из W_2^2 201
§ 3. Первая начально-краевая задача. Разрешимость в $W_2^1(Q_T)$ 209
§ 4. Об исследовании гладкости обобщенных решений . . 216
§ 5. О других начально-краевых задачах 225
§ 6. Функциональный метод решения начально-краевых задач 227
§ 7. Метод Фурье и Лапласа 234

Глава V. **Разные обобщения** 243
§ 1. Эллиптические уравнения произвольного порядка и сильно эллиптические системы 243
§ 2. Сильно параболические и сильно гиперболические системы 254
§ 3. Уравнения типа Шредингера и близкие к ним уравнения 258
§ 4. О задачах дифракции 260

Глава VI. **Метод конечных разностей** 268
§ 1. Общее описание метода конечных разностей и некоторые принципы построения сходящихся разностных схем 268
§ 2. Основные разностные операторы и их свойства . . . 278
§ 3. Восполнения сеточных функций. Простейшие теоремы вложения 284
§ 4. Общие теоремы вложения 294
§ 5. Основы конечно-разностного метода Фурье 302
§ 6. Простейшие уравнения 309
§ 7. Задача Дирихле для общих эллиптических уравнений 2-го порядка 338
§ 8. Задача Неймана и третья краевая задача для эллиптических уравнений 345
§ 9. Уравнения параболического типа 352
§ 10. Уравнения гиперболического типа 367
§ 11. Сильная сходимость, системы, задачи дифракции . . 385
§ 12. Аппроксимационные методы 395

Литература 402

ВВЕДЕНИЕ

Данная книга является изложением курса лекций, читаемых мною с 1949 г. в Ленинградском университете студентам IV курса математико-механического и физического факультетов, специализирующимся в областях математической физики и дифференциальных уравнений с частными производными.

Содержание этих лекций варьировалось в связи с моим собственным пониманием предмета. Однако центральная идея, определявшая весь стиль лекций, была четко сформулирована с самого начала. Она состоит в замене классических постановок краевых задач обобщенными, причем обобщенная постановка не единственна: она определяется указанием функционального пространства, в котором предполагается найти решение. Идея введения обобщенных решений начала проникать в математическую физику с 20-х годов. К тому имелось два различных источника. Первый — это двумерные вариационные задачи. При их исследовании столкнулись с необходимостью расширить класс функций, среди которым ищется минимум, и допустить к сравнению наряду с непрерывно дифференцируемыми функциями непрерывные функции, обладающие так называемыми обобщенными производными (классы Тонелли). На этом пути пришли к пересмотру одного из кардинальных понятий анализа — понятия частной производной. Был предложен ряд различных обобщений (см. работу **[9]** 1920 г. Г. Эванса, работы **[27]** Тонелли, работу **[28]** Н. Винера, работу **[21$_1$]** Ч. Морри и др. *)), в том числе и то определение обобщенной производной, которое нашло

*) Жирным шрифтом даны ссылки на иностранную литературу, а светлым — на русскую.

в дальнейшем всеобщее признание и которым мы будем пользоваться в данной книге (см. § 4 гл. I). Вторым источником возникновения обобщенных решений явились нестационарные задачи и прежде всего волновое уравнение $u_{tt}=c^2\Delta u$ и уравнения гидродинамики. Для тех и других давно вводились определенные разрывные решения: для первых — плоские и сферические волны с сильным разрывом на фронте, движущемся со скоростью c, для вторых — решения, описывающие ударные волны. В 20-х годах пытались понять, какие разрывные решения следует считать «допустимыми». В нашей стране эти вопросы были подняты А. А. Фридманом и изучались им и его учениками (И. А. Кибелем, Н. Е. Кочиным и др.) как вопросы о кинематических и динамических условиях совместности. На этом пути было понято, что «допустимыми» решениями линейного уравнения $\mathscr{L}u=f$ (или системы) надо считать те, которые удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int u\mathscr{L}^*\eta\,dx=\int f\eta\,dx \tag{1}$$

при любой достаточно гладкой функции $\eta(x)$ с компактным носителем (в (1) $\mathscr{L}^*$ есть дифференциальный оператор, сопряженный к $\mathscr{L}$ в смысле Лагранжа). Тождество (1) встречается также в работе [28] 1926 г. Н. Винера, относящейся к одномерному гиперболическому уравнению.

Тридцатые годы привели к дальнейшему развитию указанных тенденций. В работе [12] 1934 г. К. О. Фридрихса, посвященной нахождению минимума квадратичного функционала

$$J(u)=\int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}+au^2+2uf\right)dx \tag{2}$$

при граничном условии $u|_{\partial\Omega}=0$ и условии эллиптичности $a_{ij}\xi_i\xi_j>\nu\sum\limits_i\xi_i^2$, $\nu>0$, рассмотрения ведутся в классе функций, который впоследствии стали обозначать через $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$; элементы $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ не являются непрерывными функциями, но имеют так называемые обобщенные производные первого порядка, суммируемые по Ω, как и сама функция u, со второй степенью. В этом классе функций, являющемся полным гильбертовым пространством, сравнительно легко находится функция $u(x)$, реализующая $\inf J(u)$, если $a(x) \geqslant 0$, $f \in L_2(\Omega)$ и коэффициенты a_{ij} и a — ограниченные на Ω функции. На ней первая вариация J обращается в нуль, т. е.

$$\delta J(u) = 2 \int_\Omega \left(a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} + au\eta + f\eta\right) dx = 0 \tag{3}$$

при $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, причем такая функция $u(x)$ единственна.

Это решение $u(x)$ вариационной задачи находится непосредственно с помощью так называемых прямых методов вариационного исчисления, ведущих свое начало от работ Гильберта. При этом не используется никакая информация о разрешимости задачи Дирихле

$$\mathscr{L}u = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} u_{x_j}\right) - au = f, \qquad u|_S = 0, \tag{4}$$

в которой $\mathscr{L}u = f$ есть уравнение Эйлера для функционала $J(u)$. Напротив, вариационная задача привлекается для исследования задачи (4) (в данной части исследования a_{ij} считаются гладкими функциями). Фридрихс доказывает, что если дифференциальный оператор $\mathscr{L}$ рассмотреть как неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ с первоначальной областью определения $\mathscr{D}(\mathscr{L})$, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций, равных нулю на $\partial\Omega$ ($\mathscr{L}$, как легко проверить, симметричен на $\mathscr{D}(\mathscr{L})$), а затем присоединить к $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ решения $u(x)$ описанных вариационных задач для всех f из $L_2(\Omega)$ и условиться считать $\bar{\mathscr{L}}u = f$, то получается самосопряженное расширение $\bar{\mathscr{L}}$ оператора $\mathscr{L}$. Впоследствии такое расширение $\mathscr{L}$ стали называть жестким расширением или расширением по Фридрихсу, а функции $u(x)$, реализующие $\inf J(u)$ на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, — обобщенными решениями задачи (4) из класса $W_2^1(\Omega)$. Вопрос о том, имеют ли такие обобщенные решения производные второго порядка и, тем самым, удовлетворяют ли они уравнению $\mathscr{L}u = f$, оставался в то время открытым.

Другой круг идей и методов был привлечен к исследованию разрывных решений нестационарных уравнений. С. Л. Соболев кладет в основу определения обобщенных решений $u(x)$ тождество (1), считая $u(x)$ суммируемой функцией. Он доказывает для дифференциальных операторов $\mathscr{L}$ с постоянными коэффициентами, что такие решения суть пределы в L_1 классических решений уравнений $\mathscr{L}u = f$ (точнее, им были рассмотрены уравнения $u_{tt} - c^2\ \Delta u = 0$, $\Delta u = 0$ и $u_t - \Delta u = 0$). В соответствии с этим он приходит к другому определению обобщенного решения уравнения $\mathscr{L}u = f$, как пределу (в том или ином смысле) классических решений таких уравнений, и с этим определением работает. На таком пути С. Л. Соболев получает обобщенные решения задачи Коши для гиперболических уравнений 2-го порядка с достаточно гладкими коэффициентами и однородными начальными условиями, но с весьма «плохими» свободными членами, причем выходит за классы функций точки, вводя обобщенные решения как функционалы над определенным множеством достаточно гладких функций ([23₄], 1936 г.).

При исследовании всех перечисленных вопросов пришли к необходимости исследовать более подробно различные классы функций, обладающих теми или иными обобщенными производными. В 30-е годы наиболее полному анализу подверглись пространства $W_p^l(\Omega)$, состоящие из функций $u(x)$, обладающих обобщенными производными до порядка l включительно, суммируемыми вместе с $u(x)$ по Ω со степенью p. С. Л. Соболевым и его учеником В. И. Кондрашовым были получены наиболее полные по тому времени результаты о пространствах $W_p^l(\Omega)$. Им предшествовали результаты Ф. Реллиха по компактности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и ряд неравенств (неравенства Пуанкаре и др.), которые в современной терминологии являются различными теоремами вложения. Весь этот комплекс аналитических фактов явился необходимой основой для дальнейшего формирования новых подходов к изучению краевых задач.

В 30-х годах выход за рамки классических решений краевых задач можно видеть также в работе [19] Ж. Лерэ по нестационарным задачам гидродинамики для вязких несжимаемых жидкостей и в работах [8_{1-4}] Н. М. Гюнтера по задаче Дирихле для уравнения $\Delta u = f$ и начально-краевой задаче для уравнения колебания неоднородной струны. Н. М. Гюнтер ведет активную пропаганду за отказ от классических постановок этих задач и за переход к обобщенным решениям, более тесно отражающим физическую сущность явлений, описываемых дифференциальными уравнениями. Им были введены и исследованы обобщенные решения задачи Дирихле для уравнений $\Delta u = f$, являющиеся функционалами над пространством $C(\Omega)$. Другой класс обобщенных решений он ввел при изучении начально-краевых задач для уравнения колебаний струны.

(Отметим здесь же, что в данной книге мы работаем только с обобщенными решениями, являющимися функциями точки. Работы, в которых рассматриваются обобщенные решения в виде функционалов над классами гладких функций, не найдут отражения ни в основном тексте книги, ни в данном введении. Большинство из них касается или задачи Коши или общей теории уравнений во всем пространстве. В основном в них изучаются уравнения с постоянными коэффициентами или коэффициентами из каких-либо специальных классов. Собственно теория краевых задач в этом круге работ изучена мало. Широкий интерес к обобщенным решениям— функционалам начался с момента выхода в свет книги [26] Л. Шварца. Она заложила фундамент многочисленным исследованиям, из которых упомянем монографии И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [6] и L. Hörmander'а [17]).

В конце 40-х годов мною было предложено определять обобщенные решения краевых и начально-краевых задач для различных типов уравнений (эллиптических, параболических и гиперболических) с помощью интегральных тождеств, заменяющих собою уравнение, а иногда и часть начальных и граничных условий. Более того, была отмечена важность того, что для каждой задачи можно вводить различные классы обобщенных решений, определяемые тем функциональным пространством W, к которому должно принадлежать искомое обобщенное решение. В соответствии с указанием пространства W должны быть переформулированы все требования задачи. Выбор же пространства W находится в распоряжении исследователя и может быть использован им в зависимости от преследуемых целей. Единственное требование, которому надо при этом удовлетворить, — это требование «допустимости» вводимого расширения понятия решения задачи, состоящее в том, чтобы в классе W сохранялась теорема единственности (если она соответствует духу задачи и имеет место в классе классических решений). Кроме этого, должна быть естественная подчиненность классов обобщенных решений: решения из более широкого класса W являются обобщенными решениями из более узкого функционального класса W.

Таким образом, определение обобщенного решения задачи было отъединено от какого-либо способа его получения (как это было раньше в работах К. Фридрихса и С. Л. Соболева) и тем более от каких-либо аналитических его представлений (как это было в работах Н. М. Гюнтера и Ж. Лерэ). Более того, для определенных классов обобщенных решений классических краевых и начально-краевых задач (так называемых обобщенных решений с конечной энергетической нормой) были доказаны теоремы единственности, не опирающиеся на умение решать данную или сопряженную задачу в классе гладких функций и использующие лишь свойства исследуемых уравнений, вытекающие из их определения. Для эллиптических уравнений такие теоремы единственности выводятся из хорошо известных фактов. Для нестационарных же уравнений установленные мною теоремы единственности (см. гл. III [12_2]) базируются не на известных ранее энергетических неравенствах (установленных для уравнений с переменными коэффициентами в работах К. Фридрихса, Г. Леви и Ю. Шаудера), а на иных неравенствах, названных впоследствии Л. Гордингом дуальными. Несколько позже (в 1954 году, см. [12_6]) удалось доказать для нестационарных задач теоремы единственности в классе обобщенных решений из $L_2(Q_T)$ (т. е. решений, не имеющих даже обобщенных производных), из которых теоремы существования вытекают «почти даром», примерно так же, как в теории линейных алгебраических систем.

Первоначально существование допустимых обобщенных решений было установлено мною с помощью метода конечных разностей. Он же позволил исследовать затем и увеличение гладкости этих обобщенных решений в зависимости от увеличения гладкости данных задачи. Вся описанная программа была реализована в книге [12_2] (1953 г.), посвященной в основном наиболее трудным и наименее исследованным в то время начально-краевым задачам для гиперболических уравнений. В годы ее написания (1949—51) в моих лекциях основное место занимал метод конечных разностей, с помощью которого доказывалась разрешимость всех основных краевых и начально-краевых задач для уравнений (и определенных классов систем) эллиптического, параболического и гиперболического типов.

Кроме него для уравнений эллиптического типа был развит метод доказательства фредгольмовой разрешимости основных краевых задач, ведущий свое начало от упомянутой выше работы [12] К. Фридрихса. Но, в отличие от [12], я рассматриваю случай общего несамосопряженного уравнения, уже не являющегося уравнением Эйлера для какого-либо функционала. Близкие результаты, но в иной форме, были получены также М. И. Вишиком и С. Г. Михлиным, причем М. И. Вишик рассмотрел случай и так называемых сильно эллиптических систем.

Предложенный мною метод (он описан в §§ 2—5 гл. II) имеет, как мне кажется, ряд преимуществ, во многом обусловленных самой формой трактовки обобщенных решений с помощью интегральных тождеств. Именно такая его форма обеспечила его применимость и в более трудных задачах, например, в стационарных линейных и нелинейных задачах гидродинамики для вязких несжимаемых жидкостей ([12_{12}]), в задачах нелинейной теории оболочек ([5]) и многих других.

Далее, для эллиптических операторов 2-го порядка мною было установлено так называемое второе основное неравенство (см. §§ 6, 7 гл. II *)), позволившее дать ответ на один из важных вопросов, возникших на стыке функционального анализа и теории дифференциальных уравнений, а именно, на вопрос, из чего состоит область определения замыкания эллиптического оператора $\mathscr{L}$ как неограниченного оператора в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$, определенного первоначально на гладких функциях, удовлетворяющих какому-либо однородному краевому условию. Этот вопрос был поставлен И. М. Гельфандом в 1944 г. на его известном семинаре, где была намечена программа изучения краевых задач для эллиптических уравнений с точки зрения функционального анализа. Из второго основного неравенства следует, в частности, что для расширения $\bar{\mathscr{L}}$, построенного К. Фридрихсом, область определения $\mathscr{D}(\bar{\mathscr{L}})$ есть все пространство $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, если только граница области и коэффициенты $\mathscr{L}$ обладают некоторой гладкостью. Тем самым, решения вариационных задач для $J(u)$ имеют обобщенные производные второго порядка и удовлетворяют уравнению (4) для почти всех x из Ω.

Второе основное неравенство является частным случаем более общих неравенств, установленных мною при обосновании метода Фурье для гиперболических уравнений. В полном виде они опубликованы во второй главе [12_2]. Здесь я ограничилась изложением лишь простейшего из них (§ 6 гл. II). Позже, в 1955 г., мне пришел в голову весьма простой способ исследования разрешимости задачи Дирихле для эллиптических уравнений, основанный на этом неравенстве ([12_9]). Это способ продолжения по параметру, соединяющему данный эллиптический оператор с каким-либо простейшим обратимым эллиптическим оператором, например, оператором Лапласа (он изложен в § 7 гл. II). Однако несколько позже я убедилась, что «открыла Америку». Оказалось, что такой же способ был предложен Ю. Шаудером в 1934 г. ([25]) при исследовании разрешимости задачи Дирихле в пространстве Гёльдера $H^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Эта замечательная

*) В замечании 6.2 гл. II указаны работы других авторов, относящиеся к этому же неравенству.

работа была не известна в нашей стране и стала оказывать влияние на отечественных математиков лишь со второй половины 50-х годов. Из нее нашла широкое применение (у нас и за границей) идея сведения сложной задачи к модельным, простейшим задачам для уравнений с постоянными («замороженными») коэффициентами во всем пространстве или полупространстве. Из таких задач «склеивается» («сшивается») исследуемая задача. Работа Ю. Шаудера не включена в данную книгу ввиду ее большой технической сложности (см. о ней §§ 2, 3 [12_{13}]).

Помимо перечисленных выше методов в лекциях и здесь излагается метод Галеркина, с помощью которого сравнительно просто доказывается существование обобщенных решений из W_2^1. Для эллиптических уравнений ему было посвящено довольно много работ. Для общих уравнений этого типа его сходимость в $W_2^1(\Omega)$ доказана С. Г. Михлиным (см. [15]). Для нестационарных задач метод Галеркина был использован сначала для построения классических решений (что существенно усложняло дело) уравнений с одной пространственной переменной ([10], [14]). Затем в работе [16] 1951 г. Е. Хопфа с его помощью было найдено слабое решение начально-краевой задачи для общих нестационарных нелинейных уравнений Навье — Стокса. Эта интересная работа так же, как и работа Ю. Шаудера, была «открыта» с большим опозданием.

Для линейных уравнений параболического и гиперболического типов метод Галеркина в его классической форме позволяет весьма просто доказывать существование обобщенных решений в классе функций, несколько более широком, чем «решения с конечной энергетической нормой». Такие решения были введены мною и для них была доказана теорема единственности. Я излагаю этот метод в лекциях и здесь применительно к уравнениям всех трех классических типов, причем привожу некоторые его варианты, позволяющие доказывать существование и более гладких решений и дающие более хорошую сходимость, чем обычный метод Галеркина. Для уравнений параболического типа я комбинирую метод Галеркина с другим, «функциональным» методом, что позволяет доказать однозначную разрешимость в классе «обобщенных решений с конечной энергетической нормой» при минимальных предположениях о гладкости всех данных задачи. Остановимся подробнее на упомянутом «функциональном» методе доказательства теорем существования. Таким (не очень удачным) названием я наделяю методы, не использующие никакие аналитические конструкции для построения решений (т. е. ни точные формулы, ни интегральные уравнения, ни какие-либо аппроксимации), а опирающиеся лишь на те или иные теоремы или рассуждения функционального анализа.

Для уравнений эллиптического типа таким методом является метод, упомянутый выше в связи с фредгольмовой разрешимостью задачи Дирихле и излагаемый в §§ 2—5 гл. II. Он существенно опирается на положительность основной квадратичной формы, т. е. на свойство эллиптичности уравнения, и считалось, что рассуждения подобного рода невозможны для уравнений других типов, особенно гиперболических, которым соответствует индефинитная метрика. Тем не менее удалось показать, что однозначная разрешимость начально-краевых задач может быть получена на основе следующей наивной идеи. Запишем задачу в виде операторного уравнения $Au = f$, где оператор A действует в гильбертовом пространстве H (у нас это — пространство $L_2(Q_T)$). Начальные и граничные условия считаем сведенными к однородным. Оператор A есть неограниченный линейный оператор. Возьмем в качестве области его определения $\mathscr{D}(A)$ все не очень плохие функции, подчиняющиеся однородным граничному и начальному условиям, и попробуем доказать «в лоб», что область $\mathscr{R}(A)$ его значений плотна в H. Это означает, что тождество

$$(Av, \mathscr{F}) = 0, \qquad \forall v \in \mathscr{D}(A), \tag{5}$$

гарантирует обращение в нуль элемента $\mathscr{F} \in H$. С точки зрения функционального анализа тождество (5) означает, что $\mathscr{F} \in \mathscr{D}(A^*)$ и $A^*\mathscr{F} = 0$. В моей терминологии (5) означает, что $\mathscr{F}$ есть обобщенное решение из H задачи, сопряженной к исследуемой. Но такая задача является задачей того же типа, что и исходная, и следовательно, доказательство обращения $\mathscr{F}$ в нуль есть не что иное, как доказательство теоремы единственности для задачи рассматриваемого типа в классе обобщенных решений из H.

Если удается доказать эту теорему непосредственно, то из нее теорема существования следует весьма просто, ибо во всех изучаемых задачах оператор A допускает замыкание $\bar{A}$ и на $\mathscr{R}(\bar{A})$ существует ограниченный обратный оператор $\bar{A}^{-1}$, а потому уравнение $\bar{A}u=f$ будет иметь единственное решение из $\mathscr{D}(\bar{A})$ для всех f из H. Во всей описанной схеме есть одно нетривиальное место — доказательство теоремы единственности обобщенных решений из H (т. е. из $L_2(Q_T)$). Из нее разрешимость получается легко. Такие теоремы единственности, а вместе с ними и теоремы существования, были доказаны мною в 1953 г. и опубликованы кратко в заметке [12_6]. Они не использовали, по существу, того, что A есть дифференциальный оператор, и оказались применимыми для широких классов операторных уравнений

$$S_1(t)\frac{d^2u}{dt^2}+S_2(t)\frac{du}{dt}+S_3(t)u=f(t), \tag{6}$$

где $S_i(t)$ — неограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, зависящие от параметра t и обладающие некоторыми общими свойствами. Многие начальные-краевые задачи и задачу Коши для нестационарных дифференциальных уравнений и систем разных типов оказалось возможным рассмотреть как частные случаи задачи Коши для уравнений вида (6), допускающих только что описанный путь исследования [$12_{7,8}$]. Другие методы разрешимости задачи Коши для уравнений (6) были предложены М. И. Вишиком [4_2]. Он провел для них метод Галеркина, а для уравнений первого порядка дал еще функциональный метод, идейно близкий (но более сложно оформляемый) к функциональному методу, с помощью которого были исследованы уравнения эллиптического типа и который упоминался выше. М. И. Вишик работает в том классе обобщенных решений, который был введен мною в работах первого периода [12_2] и для которых была доказана теорема единственности (это класс решений, которые в книге [12_2] я называю классом обобщенных решений; он несколько шире класса решений с конечной энергетической нормой, но существенно у́же класса «обобщенных решений из $L_2(Q_T)$»). Описанные здесь результаты по нестационарным задачам, в том числе по задаче Коши для уравнений вида (6), изложены довольно подробно в обзорной статье [4_3]. Они были продолжены многими математиками, в том числе Ж. Лионсом, С. Г. Крейном, М. А. Красносельским и П. Е. Соболевским (см. [**20**], [24], [11] и др.). Другой метод, имеющий своим источником теорию полугрупп, был развит Т. Като для исследования задачи Коши для уравнений (6) первого порядка ([**18**]). Эта работа также была продолжена рядом авторов и ее развитие нашло применение в задачах математической физики (см. [25], [11] и др.).

В период написания работ [12_{6-8}] я рассказывала на лекциях их содержание. Но это потребовало изложения основных фактов из теории дифференцирования и интегрирования функций $u(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве и доказательства ряда предложений о неограниченных билинейных формах. Здесь, в книге, я ограничилась изложением описанного выше функционального метода на примерах уравнения теплопроводности и волнового уравнения, причем результаты, получаемые на таком пути по уравнению теплопроводности, используются затем для получения более тонких результатов по общим параболическим уравнениям.

Из сказанного видно, что в разные периоды предпочтение отдавалось то одним, то другим методам исследования. Неизменным оставался лишь основной объект изучения — краевые задачи (первая, вторая и третья) для линейных уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов и типа Шредингера с переменными коэффициентами в произвольных областях изменения пространственных переменных (лежащих в евклидовом пространстве R_n) и основной подход к их исследованию — рассматривать не классические, а обобщенные решения этих задач. Вопрос о том, когда обобщенные решения *) обладают той или иной гладкостью, затрагивался лишь частично, а именно, выяснялось, когда об. решения имеют обобщенные производ-

*) Далее будем для краткости писать «об. решения».

ные, входящие в уравнения, и удовлетворяют, тем самым, уравнениям почти всюду. Более подробный анализ обобщенных решений, в частности, выяснение того, когда они становятся классическими, в лекциях не излагался ввиду его сравнительной технической громоздкости. Опишем теперь в общих чертах тот вариант лекций, который дается в настоящей книге.

Книга содержит шесть глав. Первая глава имеет вспомогательный характер. В ней мы напоминаем о тех предложениях из теории гильбертовых пространств и тех конкретных функциональных пространствах, которые используются в дальнейшем. Особое внимание уделено одному из центральных понятий неклассического анализа: понятию обобщенной производной и описанию свойств таких производных и функциональным пространствам $W_2^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, занимающим главное место в книге. Для последних приведены доказательства важных критериев сильной компактности семейств функций $\{u_n(x)\}$, заданных в области Ω, в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\partial\Omega)$. Предварительно обсуждается поведение элементов $W_2^1(\Omega)$ на поверхностях размерности $n-1$ (n — размерность евклидова пространства R_n, в котором находится область Ω.) В §§ 7 и 8 приведены для справок основные мультипликативные неравенства. С их помощью результаты, излагаемые в книге для уравнений с ограниченными коэффициентами, без большого труда обобщаются на случай, когда коэффициенты младших членов уравнений суть неограниченные функции, суммируемые по Ω с некоторыми степенями. Такого типа обобщения оказались важными для исследования нелинейных уравнений. Гл. I не претендует на полное изложение всех затронутых в ней вопросов. Доказательства приведены лишь для тех предложений, которые используются в основном тексте книги. Однако она может служить путеводителем к тому, что должен понять и освоить человек, желающий разобраться в современной теории краевых задач.

Гл. II посвящена уравнениям 2-го порядка эллиптического типа. В §§ 2, 3, 5 доказывается фредгольмова разрешимость краевых задач для таких уравнений в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Обобщенные решения, принадлежащие пространству $W_2^1(\Omega)$, имеют конечную энергетическую норму и коротко называются «энергетическими». В §§ 6 и 7 выясняется, когда эти решения принадлежат пространству $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяют уравнению почти всюду. В § 8 излагаются приближенные методы решения: метод Галеркина (в его классической и модернизированной форме), а также метод Ритца и метод наименьших квадратов, как его частные случаи. В §§ 4 и 7 исследуются спектральные задачи и вопрос о сходимости рядов Фурье по собственным функциям этих задач. Другой приближенный метод решения краевых задач — метод конечных разностей — подробно анализируется в гл. VI, посвященной уравнениям всех типов.

В гл. III изучаются начально-краевые задачи для уравнений 2-го порядка параболического типа. Задача Коши исследуется лишь постольку, поскольку она может быть рассмотрена как частный случай таких задач. Для них устанавливается однозначная разрешимость в классе «энергетических решений» (в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$). Чтобы сделать это при минимальных возможных предположениях о коэффициентах, приходится по ходу дела вводить и исследовать об. решения из других функциональных классов.

Я решила провести читателя по этому извилистому пути не столько из желания максимально снизить все требования на данные задачи, сколько из намерения проиллюстрировать различные классы об. решений и методику работы с ними. Можно было бы ограничиться любым из вводимых мною классов и в нем доказать однозначную разрешимость задач. В гл. III изложены метод Галеркина, функциональный метод, метод преобразования Лапласа, метод Фурье, метод Ротэ. Как сказано выше, метод конечных разностей излагается в гл. VI. Экономя место, я не затронула метод продолжения по параметру. Он имеет две формы. Одна из них изложена в § 7 гл. II применительно к эллиптическим уравнениям. Для уравнений параболического типа она, по существу, ничем не отличается, надо только данное уравнение соединить параметром с уравнением теплопроводности (или с каким-либо другим подходящим параболическим уравнением). Ее обоснование базируется на «втором основном неравенстве», которое имеет место и для параболических уравнений (о нем см. [12_{6-8}] и § 6 гл. III [12_{14}]). Другая конструкция метода продолжения по параметру основывается только на первом (энергетическом) неравенстве. В ней параметром соединяются билинейные формы, соответствующие оператору данной и вспомогательной задач. Она также возможна для обоих типов уравнений: эллиптических и параболических (см. об этом, например, [12_8] и [4_3]).

Гл. IV посвящена уравнениям гиперболического типа. Сначала эти уравнения рассматриваются во всем пространстве и для них доказывается «энергетическое неравенство». Из него следует: 1) характеристическое свойство гиперболических уравнений: конечность скорости распространения возмущений, описываемых этим уравнением, и 2) теорема единственности для задачи Коши в классе обобщенных решений из $W_2^2((x, t))$. Все эти факты были известны давно (для уравнений общего вида см. работы Ж. Адамара, Г. Леви, К. О. Фридрихса, Ю. Шаудера, С. Л. Соболева; для систем — работы И. Г. Петровского, Ж. Лерэ, Л. Гординга; для частных классов уравнений они были установлены еще в XIX в.), только они доказывались для классических решений. Переход к об. решениям из $W_2^2((x, t))$ не вызывает каких-либо затруднений. Благодаря 1) и 2) задачу Коши можно рассмотреть как частный случай начально-краевой задачи с первым краевым условием. В дальнейшем исследуется именно эта и другие начально-краевые задачи, а задача Коши отдельно не рассматривается (только в гл. VI для нее строится конечно-разностная схема, не связанная ни с какими граничными условиями). Для них доказывается однозначная разрешимость в классе об. решений из $W_2^1(Q_T)$. Решение $u(x, t)$ получено как предел галеркинских приближений $u^N(x, t)$.

Сходимость u^N к u легко выводится с помощью «энергетического неравенства». Напротив, для доказательства теоремы единственности в этом классе потребовались новые соображения, отличные от тех, которые были развиты ранее для доказательств теорем единственности в задаче Коши (мы имеем в виду метод Герглотца и доказательство, основанное на энергетическом неравенстве). Приводимый в тексте вывод (он взят из книги [12_2]) основан на априорной оценке об. решений из $W_2^1(Q_T)$, отличной от энергетического неравенства. Это и подобные ему неравенства Л. Гординг назвал «дуальными» (т. е. двойственными по отношению к энергетическим и его следствиям). Еще одно такое «дуальное» неравенство было найдено нами при доказательстве теоремы единственности в более широком классе об. решений — в классе $L_2(Q_T)$ (см. [12_{6-8}]). Как объяснено в первой половине введения, из такой теоремы единственности разрешимость задачи извлекается весьма просто, причем разрешимость в классе «энергетических» решений. Однако, экономя место, я изложила этот путь исследования начально-краевых задач лишь на примере волнового уравнения (см. § 6), причем оба «дуальные» неравенства проводятся лишь для нулевых начальных и граничных условий и ненулевого свободного члена (только этот случай и нужен для доказательства теорем единственности).

В § 4 описано, как исследуется увеличение гладкости об. решений из $W_2^1(Q_T)$ в связи с увеличением гладкости данных задачи и увеличением порядка их согласования. Выяснено, когда такие решения принадлежат «энергетическому» классу и когда они имеют производные, входящие в уравнение. Во всей главе я подробно рассматриваю первое краевое условие, для остальных даю необходимые указания (см. § 5). В § 7 описаны метод преобразования Лапласа и метод Фурье. Для последнего исследована сходимость в пространствах $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$. Более детальный анализ этих методов был дан в моей первой книге [12_2]. Здесь излагается лишь небольшая часть, относящаяся к методу Фурье. При чтении [12_2] надо учесть, что со времени ее выхода в свет прошло двадцать лет, в течение которых были найдены менее ограничительные условия на гладкость области и коэффициентов, гарантирующие ту или иную гладкость собственных функций и решений эллиптических уравнений. Эти улучшения приводят и к соответствующим ослаблениям условий глав II и IV книги [12_2], касающихся гладкости коэффициентов уравнений и области.

В гл. V рассказывается о других задачах, которые могут быть исследованы методами, изложенными в главах II—IV. К ним относятся некоторые краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений любого порядка, а также для сильно эллиптических, сильно параболических и сильно гиперболических систем. Их частными случаями являются бигармоническое уравнение и система уравнений теории упругости. Близкой к эллиптическому случаю является линеаризованная система уравнений Навье — Стокса для стационарных течений вязких несжимаемых жидкостей. Она исследуется, по существу, так же, как одно эллиптическое уравнение в § 3 гл. II. Необходимые для этого указания даны в § 1. В § 3 рассматриваются уравнения типа Шредингера (в их абстрактной форме). Отмечается принадлежность системы уравнений Максвелла к этому типу (при правильном учете всех требований электродинамики). В последнем, четвертом, параграфе показывается, как задачи дифракции для уравнений разных типов вкладываются в задачи на определение об. решений из классов W_2^1 обычных краевых задач, рассмотренных в главах II—IV.

Последняя, самая объемистая, глава книги (гл. VI) отдана методу конечных разностей. В ней рассмотрены те же задачи, что и в главах II—IV. Упор сделан на построение сходящихся разностных схем и доказательство их устойчивости в метриках, соответствующих энергетическим. При исследовании метода конечных разностей я не использую никакой информации о точном решении задачи (даже факта его существования) и, напротив, могу доказать с его помощью теоремы существования и провести довольно полные качественные исследования этих решений и сходящихся к ним приближенных решений. Будучи лимитирована местом и временем, я не провожу этих подробных качественных исследований, а о доказательстве теорем существования говорю довольно сжато. Принципиально метод конечных разностей весьма прост. Он сводит все проблемы к решению конечных линейных алгебраических систем и их анализу. Впервые он был использован для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и известен в математике как метод ломаных Эйлера. Его применения и исследования для уравнений в частных производных начались лишь в нашем веке. В последние два десятилетия роль метода конечных разностей возросла в связи с появлением быстродействующих вычислительных машин, и в настоящее время он занял первое место среди других приближенных методов решения краевых задач. Гл. VI начинается с введения, в котором разъясняется, какими я руководствовалась соображениями при построении сходящихся разностных схем. В нем же описано и основное содержание главы.

Предлагаемая книга имеет мало общего с учебниками по теории дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе и с такими замечательными курсами, как II и IV тома «Курса высшей математики» В. И. Смирнова и «Лекции об уравнениях в частных производных» И. Г. Петровского. В них излагаются, в основном, классические методы исследования применительно к краевым задачам для простейших уравнений. В известной, богатой содержанием книге «Методы математической физики» Д. Гильберта и Р. Куранта, том II (в ее первом и втором издании), рассмотрен ряд задач для уравнений с переменными коэффициентами. Но и она отражает, в основном, то, что было сделано к моменту написания ее первого издания (т. е. к 1937 г.).

Имеется несколько монографий ([23$_1$], [12$_{2,13,14}$], [11], [20], [11], [15], [29] и др.), но они вряд ли могут быть рекомендованы как учебные пособия студентам-четверокурсникам или как книги, из которых математики разных специальностей и инженеры могут получить общее представление о краевых задачах математической физики.

Данной книгой я рассчитываю восполнить пробел, имеющийся в учебной литературе по уравнениям в частных производных. Она базируется на результатах, установленных в конце 40-х и 50-х годов, и содержит изложение точек зрений и методов, которые успешно применяются и развиваются и в настоящее время. Почва к этим исследованиям и аппарат к ним были подготовлены в 20-х и 30-х годах нашего столетия.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Приведем ряд обозначений, используемых в книге.

R_n — евклидово пространство размерности n.

$x=(x_1, \ldots, x_n)$ — точка R_n.

Ω — область в R_n, в подавляющем числе случаев ограниченная, S, $\partial\Omega$ — граница области Ω, $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$. Ω' — всюду ограниченная подобласть Ω.

$Q_T=\{(x, t): x\in\Omega, t\in(0, T)\}$ — цилиндр в R_{n+1}.

$S_T=\{(x, t): x\in\partial\Omega, t\in(0, T)\}$ — боковая поверхность Q_T.

$\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к $\partial\Omega$, направленной вне Ω.

Символы u_{x_i} и $u_{x_ix_j}$ — всюду, кроме гл. VI, обозначают производные (классические и обобщенные) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}$.

$$u_x=\left(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}\right);\quad u^2_{x_i}=\left(u_{x_i}\right)^2;\quad u^2_x=\sum_{i=1}^{n}u^2_{x_i};\quad |u_x|=\sqrt{u^2_x};$$

$$u_xv_x=\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}v_{x_i};\quad u_{xx}=\left(u_{x_ix_j}\right),\quad i, j=1, \ldots, n;\quad u^2_{x_ix_j}=\left(u_{x_ix_j}\right)^2;$$

$$u^2_{xx}=\sum_{i, j=1}^{n}u^2_{x_ix_j};\quad |u_{xx}|=\sqrt{u^2_{xx}};\quad u_{xx}v_{xx}=\sum_{i, j=1}^{n}u_{x_ix_j}v_{x_ix_j}.$$

Перечислим основные из функциональных пространств, встречающихся в книге.

$L_p(\Omega)$, $p\geqslant 1$, — банахово пространство (т. е. полное линейное нормированное пространство), состоящее из всех определенных и измеримых (по Лебегу) на Ω функций, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{p,\Omega}=\left(\int_{\Omega}|u|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Часто норму в $L_2(\Omega)$ обозначаем коротко $\|\cdot\|$, а скалярное произведение как $(\ ,\ )$. Кроме того: $\|u_x\|=\|u_x\|_{2,\Omega}\equiv\left(\int_{\Omega}u^2_x\,dx\right)^{1/2}$, а $\|u_{xx}\|\equiv\|u_{xx}\|_{2,\Omega}\equiv\left(\int_{\Omega}u^2_{xx}\,dx\right)^{1/2}$.

Пространства $W_m^l(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$ определены в § 5 гл. I. В частности, гильбертово пространство $W_2^1(\Omega)$ состоит из элементов $L_2(\Omega)$, имеющих квадратично суммируемые по Ω об. (т. е. обобщенные) производные первого порядка. Скалярное произведение в нем определяется равенством

$$(u, v)_{2,\Omega}^{(1)} = \int_\Omega (uv + u_x v_x)\, dx,$$

а норма

$$\| u \|_{2,\Omega}^{(1)} = \sqrt{(u, u)_{2,\Omega}^{(1)}}.$$

$\dot{C}^\infty(\Omega)$ — совокупность бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω.

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — подпространство (как всюду, замкнутое) пространства $W_2^1(\Omega)$, плотным множеством в котором является $\dot{C}^\infty(\Omega)$, (или, что то же, все гладкие, финитные в Ω функции).

$W_2^2(\Omega)$ — гильбертово пространство, состоящее из всех элементов $L_2(\Omega)$, имеющих об. производные первого и второго порядков из $L_2(\Omega)$. Скалярное произведение в нем определяется равенством

$$(u, v)_{2,\Omega}^{(2)} = \int_\Omega (uv + u_x v_x + u_{xx} v_{xx})\, dx,$$

а норма обозначается так: $\| \cdot \|_{2,\Omega}^{(2)}$.

$W_{2,0}^2(\Omega)$ — подпространство $W_2^2(\Omega)$, плотным множеством в котором являются все дважды непрерывно дифференцируемые в $\overline{\Omega}$ функции, равные нулю на $\partial\Omega$.

Для цилиндра Q_T введены следующие пространства:

$W_{2,0}^1(Q_T)$ — подпространство пространства $W_2^1(Q_T)$, плотным множеством в котором являются гладкие функции, равные нулю вблизи S_T. $\widehat{W}{}_{2,0}^1(Q_T)$ — подпространство $W_{2,0}^1(Q_T)$, элементы которого обращаются в нуль при $t = T$ (в теореме 6.3 гл. I доказано, что следы элементов $W_{2,0}^1(Q_T)$ определены на каждом сечении Ω_{t_1} цилиндра Q_T плоскостью $t = t_1 \in [0, T]$, как функции из $L_2(\Omega_{t_1})$, и меняются непрерывно по t в норме $L_2(\Omega)$ с изменением $t \in [0, T]$).

$W_2^{1,0}(Q_T)$ — гильбертово пространство, состоящее из элементов $u(x, t)$ пространства $L_2(Q_T)$, имеющих квадратично суммируемые по Q_T об. производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Скалярное произведение и норма в нем определяются равенствами:

$$(u, v)_{2, Q_T}^{(1,0)} = \int\limits_{Q_T} (uv + u_x v_x)\, dx\, dt, \quad \| u \|_{2, Q_T}^{(1,0)} = \sqrt{(u, u)_{2, Q_T}^{(1,0)}}.$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ — подпространство $W_2^{1,0}(Q_T)$, плотным множеством в котором являются гладкие функции, равные нулю вблизи S_T.

$W_2^{2,1}(Q_T)$ — гильбертово пространство, состоящее из всех элементов $L_2(Q_T)$, имеющих об. производные u_t, u_{x_i} и $u_{x_i x_j}$ из $L_2(Q_T)$. Скалярное произведение в нем определено равенством

$$(u, v)_{2, Q_T}^{(2,1)} = \int\limits_{Q_T} (uv + u_x v_x + u_t v_t + u_{xx} v_{xx})\, dx\, dt,$$

а норма обозначается так: $\| \cdot \|_{2, Q_T}^{(2,1)}$.

$W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ — подпространство $W_2^{2,1}(Q_T)$, являющееся пересечением $W_2^{2,1}(Q_T)$ с $W_{2,0}^{1}(Q_T)$.

$W_2^{\Delta,1}(Q_T)$ — гильбертово пространство, состоящее из элементов $W_2^1(Q_T)$, имеющих об. производные $u_{x_i x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, квадратично суммируемые по $Q'_T = \Omega' \times (0, T)$, где Ω' — любая строго внутренняя подобласть области Ω, и имеющих $\Delta u \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ из $L_2(Q_T)$. Скалярное произведение в нем таково:

$$(u, v)_{2, Q_T}^{\Delta, 1} = \int\limits_{Q_T} (uv + u_x v_x + u_t v_t + \Delta u \cdot \Delta v)\, dx\, dt.$$

$W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$ — подпространство $W_2^{\Delta,1}(Q_T)$, равное пересечению $W_2^{\Delta,1}(Q_T)$ с $W_{2,0}^1(Q_T)$. Следы элементов $u(x, t)$ из $W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$ (и тем более из $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$) определены на всех сечениях $\Omega_t, t \in [0, T]$, как элементы $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и непрерывно зависят от $t \in [0, T]$ в норме $W_2^1(\Omega)$. Если граница дважды непрерывно дифференцируема (т. е. $\partial\Omega \subset C^2$), то $W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$ совпадает с $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ (см. гл. II).

$V_2(Q_T)$ — банахово пространство, состоящее из элементов $W_2^{1,0}(Q_T)$, имеющих конечную норму

$$| u |_{Q_T} = \operatorname*{vrai\,max}_{0 \leqslant t \leqslant T} \| u(x, t) \|_{2, \Omega} + \| u_x \|_{2, Q_T}.$$

где

$$\| u_x \|_{2, Q_T} \equiv \left(\int_{Q_T} u_x^2 \, dx \, dt \right)^{1/2}.$$

$\overset{\circ}{V}_2 (Q_T) = V_2 (Q_T) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0} (Q_T)$ — подпространство $V_2 (Q_T)$.

$V_2^{1,0} (Q_T)$ — подпространство $V_2(Q_T)$, элементы которого имеют на сечениях Ω_t следы из $L_2(\Omega)$ при всех $t \in [0, T]$, непрерывно меняющиеся с $t \in [0, T]$ в норме $L_2(\Omega)$.

$\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0} (Q_T) = V_2^{1,0} (Q_T) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0} (Q_T)$ — подпространство $V_2^{1,0} (Q_T)$. В нем плотны гладкие функции, равные нулю вблизи S_T.

$C^l(\overline{\Omega})$ — совокупность непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций, имеющих производные до порядка l включительно, непрерывные в $\overline{\Omega}$ (см. по этому поводу начало § 4 гл. I).

Обозначения, использованные в гл. VI

В этой главе частные производные обозначаются символами $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j}, \ldots$, символы же $u_{x_i}, u_{\bar{x}_i}, u_{x_i x_j}, \ldots$ использованы для обозначения разностных отношений, а именно:

$u_{x_i}(x) = \frac{1}{h_i} [u(x_1, \ldots, x_i + h_i, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)]$ — правое разностное отношение, причем $h_i > 0$,

$u_{\bar{x}_i}(x) = \frac{1}{h_i} [u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_i - h_i, \ldots, x_n)]$ — левое разностное отношение,

$u_{x_i x_j}(x) = (u_{x_j}(x))_{x_i} = (u_{x_i}(x))_{x_j}$ и т. д.

Пространство R_n разбивается на элементарные ячейки (клетки) $\omega_{(kh)} = \{x : k_i h_i < x_i < (k_i + 1) h_i, \ i = 1, \ldots, n\}$, где k_i — целые числа, а $h_i > 0$, $\overline{\Omega}_h = \bigcup_{\bar{\omega}_{(kh)} \subset \overline{\Omega}} \bar{\omega}_{(kh)} \subset \overline{\Omega}$. Этот же символ $\overline{\Omega}_h$ употребляется для обозначения совокупности вершин $(kh) \equiv (k_1 h_1, \ldots, k_n h_n)$ решетки, принадлежащих замкнутой области $\overline{\Omega}_h$. Граница замкнутой области $\overline{\Omega}_h$ обозначается через S_h, а $\overline{\Omega}_h \setminus S_h = \Omega_h$ есть множество внутренних точек $\overline{\Omega}_h$. Символы S_h и Ω_h употребляются и для обозначения совокупности вершин (kh), принадлежащих множествам S_h и Ω_h соответственно.

$\overline{\Omega}{}_h^*$ — совокупность вершин ячеек $\bar{\omega}_{(kh)}$, имеющих с Ω непустое пересечение, а также замкнутая область, состоящая из точек этих ячеек $\bar{\omega}_{(kh)}$.

В соответствии с вышесказанным, Ω_h^* есть $\overline{\Omega}{}_h^* \setminus S_h^*$. Ясно, что $\overline{\Omega}_h \subset \overline{\Omega}{}_h^*$ и $\Omega_h \subset \Omega_h^*$.

Ω_h^+ — совокупность вершин (kh) ячеек $\omega_{(kh)}$, принадлежащих Ω (т. е. от каждой ячейки $\omega_{(kh)}$ берется одна ее вершина с координатами (kh)). Ясно, что $\Omega_h^+ \subset \overline{\Omega}_h$.

$\Omega_h^{*+} \equiv (\Omega_h^*)^+$ определяется для Ω_h^* так же, как Ω_h^+ для Ω_h.

Для функций u_h, заданных на сетках, вводятся следующие нормы:

$$\| u_h \|_{m,\,\overline{\Omega}_h} = \Big(\Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} | u_h |^m\Big)^{1/m}, \quad \text{где} \quad \Delta_h = h_1 \ldots h_n,$$

$$\| u_{x_i} \|_{m,\,\overline{\omega}_{(kh)}} = \Big(\Delta_h \sum_{\omega_{(kh)}^{(i)}} | u_{x_i} |^m\Big)^{1/m},$$

где символ $\sum\limits_{\omega_{(kh)}^{(i)}}$ означает суммирование по вершинам ячейки $\omega_{(kh)}$, принадлежащим грани $x_i = k_i h_i$,

$$\| u_x \|_{m,\,\overline{\omega}_{(kh)}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \| u_{x_i} \|^m_{m,\,\overline{\omega}_{(kh)}}\Big)^{1/m},$$

$$\| u_{x_i} \|_{m,\,\overline{\Omega}_h} = \Big(\sum_{\overline{\omega}_{(kh)} \subset \overline{\Omega}_h} \| u_{x_i} \|^m_{m,\,\overline{\omega}_{(kh)}}\Big)^{1/m},$$

$$\| u_x \|_{m,\,\overline{\Omega}_h} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \| u_{x_i} \|^m_{m,\,\overline{\Omega}_h}\Big)^{1/m},$$

$$\| u_h \|^{(1)}_{m,\,\overline{\Omega}_h} = \Big[\| u_h \|^m_{m,\,\overline{\Omega}_h} + \| u_x \|^m_{m,\,\overline{\Omega}_h}\Big]^{1/m}.$$

Величины $\| u_h \|_{m,\,\overline{\Omega}_h}$ и $\| u_h \|^{(1)}_{m,\,\overline{\Omega}_h}$ называются нормами пространств $L_m(\overline{\Omega}_h)$ и $W_m^1(\overline{\Omega}_h)$ сеточных функций u_h, определенных на $\overline{\Omega}$.

Для случая функций u_h, равных нулю на S_h, мы употребляем другие нормы, эквивалентные только что определенным. А именно:

$$\| u_x \|_{m,\,\overline{\Omega}_h} = \Big[\Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} | u_x |^m\Big]^{1/m}$$

и

$$\| u_h \|^{(1)}_{m,\,\overline{\Omega}_h} = \Big[\| u_h \|^m_{m,\,\overline{\Omega}_h} + \| u_x \|^m_{m,\,\overline{\Omega}_h}\Big]^{1/m},$$

причем u_h считаем доопределенной нулем на точках сетки, не принадлежащих $\overline{\Omega}_h$. Для таких функций

$$\| u_h \|_{m,\,\overline{\Omega}_h} = \| u_h \|_{m,\,\Omega_h^+} = \| u_h \|_{m,\,\Omega_h}.$$

Символ $|u_x|$ означает $\sqrt{u_x^2}$, а $u_x^2 = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2$, причем $u_{x_i}^2 = (u_{x_i})^2$. Аналогично $u_{x_i x_j}^2$ есть $(u_{x_i x_j})^2$. При написании разностных отношений u_{x_i}, $u_{x_i x_j}$, ... для сеточной функции u_h индекс «h» опускается.

В начале § 3 гл. VI введено несколько интерполяций сеточной функции u_h, заданной на $\overline{\Omega}_h$, а именно:

$\tilde{u}_h(x) \equiv \tilde{u}_h$ — кусочно-постоянная функция, равная для $x \in \omega_{(kh)}$ значению u_h в вершине (kh);

$u'_h(x) \equiv u'_h$ — непрерывная, кусочно-гладкая, полилинейная на каждом $\omega_{(kh)}$ функция x, равная u_h во всех $(kh) \in \overline{\Omega}_h$;

$u_{(m)}(x) \equiv u_{(m)}$ — в пределах каждой ячейки $\omega_{(kh)}$ она постоянна по x_m, а на грани $x_m = k_m h_m$ интерполирована по принципу $(\ )'_h$, описанному в предыдущем предложении.

Символ $\widetilde{(u_{x_i})}(x) \equiv \tilde{u}_{x_i}$ означает интерполяцию первого вида сеточной функции u_{x_i}, являющейся разностным отношением для сеточной функции u_h.

В нестационарных задачах временная переменная t играет особую роль. В них шаг по t вместо h_{n+1} обозначается через τ и символ u_h, $h = (h_1, \ldots, h_{n+1})$, заменен на u_Δ.

Во всей книге предполагается, что коэффициенты a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, уравнений при производных второго порядка образуют симметрическую матрицу, т. е. что $a_{ij} = a_{ji}$.

ГЛАВА I

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Эта глава имеет вспомогательный характер. В ней мы изложим ряд понятий и предложений функционального анализа, которые используются в основном тексте при исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений. Эти факты будут приведены без доказательства.

Кроме этого, мы введем ряд конкретных функциональных пространств и опишем интересующие нас свойства этих пространств. Для некоторых предложений будут даны полные доказательства или будут описаны основные этапы, по которым читатель сможет восстановить полные доказательства.

На протяжении всей книги мы используем меру Лебега и интеграл Лебега. Для чтения данной книги читатель должен быть знаком с основами теории функций действительного переменного и функционального анализа ([1], [13_2], [22_2], [23_1], [23]).

§ 1. Нормированные пространства и пространства Гильберта

Множество E абстрактных элементов называется *вещественным* (*комплексным*) *линейным нормированным пространством*, если:

1) E — линейная система с умножением на вещественные (соответственно — комплексные) числа;

2) каждому элементу u системы E ставится в соответствие вещественное число (которое называется

нормой этого элемента и обозначается $\|u\|$), удовлетворяющее следующим аксиомам:

a) $\|u\| \geqslant 0$, причем $\|u\| = 0$ только для нулевого элемента,

b) $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ — неравенство треугольника,

c) $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$.

В таком пространстве вводится естественная метрика: расстояние $\rho(u, v)$ между элементами u и v определяется равенством $\rho(u, v) = \|u - v\|$. Сходимость последовательности $\{u_n\}$ элементов E к $u \in E$ в норме E (иначе говоря — сильная сходимость в E) определяется тем, что $\|u_n - u\| \to 0$ при $n \to \infty$. Кратко это обозначается так: $u_n \to u$.

Говорят, что совокупность элементов $E' \subset E$ *всюду плотна* в E, если любой элемент E может быть получен как предел в норме E элементов из E'.

Если в E имеется счетное, всюду плотное множество элементов, то пространство E называется *сепарабельным*.

Если для любой последовательности $\{u_n\}$, сходящейся в себе, т. е. такой, что $\|u_p - u_q\| \to 0$ при $p, q \to \infty$, существует в E предельный элемент, то пространство E называется *полным*. Полное линейное нормированное пространство принято называть *пространством типа B* или *банаховым пространством*. Все рассмотренные ниже пространства будут полными и сепарабельными.

В основном мы будем иметь дело с частным случаем банаховых пространств — пространствами Гильберта. В вещественном гильбертовом пространстве H для любой пары элементов u и v определено скалярное произведение (u, v) — вещественное число, удовлетворяющее следующим аксиомам:

a) $(u, v) = (v, u)$;

b) $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$;

c) $(\lambda u, v) = \lambda (u, v)$;

d) $(u, u) \geqslant 0$, причем $(u, u) = 0$ только для нулевого элемента: $u = 0$.

В комплексном гильбертовом пространстве скалярное произведение (u, v) есть комплексное число, удовлетворяющее аксиомам b) — d) и аксиоме a′) $(u, v) = \overline{(v, u)}$ вместо аксиомы a).

В качестве нормы элемента u берется число $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Мы в определение гильбертова пространства включим требование его полноты и сепарабельности.

Для любых двух элементов u и v из H имеет место неравенство Коши — Буняковского — Шварца

$$|(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|,$$

которое впоследствии мы будем называть короче — неравенством Коши.

В пространстве H, кроме сходимости по норме (сильной сходимости), мы будем рассматривать слабую сходимость. Последовательность $\{u_n\}$ называется слабо сходящейся в H к элементу u, если $(u_n - u, v) \to 0$ при $n \to \infty$ для $\forall v \in H$ *). Кратко это обозначается так: $u_n \rightharpoonup u$. Нетрудно понять, что если нормы $\{u_n\}$ равномерно ограничены, то для доказательства слабой сходимости $\{u_n\}$ к u достаточно убедиться, что $(u_n - u, v) \to 0$ при $n \to \infty$ только для какого-либо всюду плотного в H множества v. Последовательность $\{u_n\}$ не может слабо (и, тем более, сильно) сходиться к двум разным элементам H. Если $\{u_n\}$ сходится к u в норме H, то она сходится к u и слабо. Обратное утверждение неверно. Однако, если кроме слабой сходимости $\{u_n\}$ к u известно еще, что $\|u_n\| \to \|u\|$, то $\{u_n\}$ сходится к u сильно. В дальнейшем мы часто будем использовать следующее предложение:

Теорема 1.1. *Если последовательность $\{u_n\}$ сходится к u слабо в H, то*

$$\|u\| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|u_n\| \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \|u_n\|,$$

причем правая часть этого неравенства конечна.

Гильбертово пространство (напомним еще раз, что мы по определению считаем такие пространства полными), а также любое его замкнутое подпространство, полно и в отношении слабой сходимости.

Множество M, расположенное в банаховом пространстве B, называется *компактным в B*, если всякая бесконечная последовательность элементов из M содержит сходящуюся в себе подпоследовательность. Если пределы всех таких подпоследовательностей принадлежат

*) Символ $\forall$ означает «любой».

M, то M называется *компактным в себе*. В гильбертовом пространстве H аналогично вводятся понятия слабой компактности и слабой компактности в себе. Имеет место следующий признак слабой компактности в H:

Теорема 1.2. *Замкнутое ограниченное множество в H слабо компактно в себе.*

Приведем два примера вещественных пространств B и H. Совокупность всех вещественно-значных измеримых функций $u(x)$, определенных на области Ω евклидова пространства R_n и имеющих конечный интеграл

$$\|u\|_{p,\Omega} \equiv \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{1.1}$$

с каким-либо фиксированным $p \geqslant 1$, образует (полное) сепарабельное пространство Банаха, если норму в ней определить равенством (1.1). Для этого пространства принято обозначение $L_p(\Omega)$. Строго говоря, под элементом $L_p(\Omega)$ надо понимать не какую-либо функцию $u(x)$, обладающую указанными свойствами, а класс функций, эквивалентных ей на Ω (т. е. совпадающих с ней почти всюду на Ω). Тем не менее, для краткости мы будем говорить об элементах $L_p(\Omega)$ как о функциях, определенных на Ω.

В качестве всюду плотного в $L_p(\Omega)$ множества могут быть взяты, например: a) все бесконечно дифференцируемые функции, или все полиномы или даже только полиномы с рациональными коэффициентами; b) все бесконечно дифференцируемые функции, равные нулю вблизи границы Ω *).

Пространство $L_2(\Omega)$ есть вещественное пространство Гильберта, если в нем ввести скалярное произведение с помощью равенства

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x) \, dx.$$

*) Под выражением «функция $u(x)$ равна нулю вблизи границы Ω» подразумевается, что для нее существует число $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: во всех точках Ω, отстоящих от границы Ω на расстояние, не большее δ, функция равна нулю. Иногда мы в этом же случае будем говорить так: функция равна нулю в пограничной полосе ширины δ.

Почти во всей книге мы будем иметь дело с вещественными пространствами B и H. Исключение составляют §§ 3, 4, 5, 7 гл. II и § 2 данной главы, в которых используются комплексные гильбертовы пространства, в том числе комплексное пространство $L_2(\Omega)$. Элементами последнего являются комплекснозначные функции $u(x) = u_1(x) + iu_2(x)$, а скалярное произведение определяется равенством

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\,\bar{v}(x)\,dx.$$

Приведем ряд алгебраических и функциональных неравенств, которые мы будем неоднократно использовать на протяжении всей книги.

1) Неравенство Коши

$$\left|\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\eta_j\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j}\,\sqrt{\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j}, \tag{1.2}$$

справедливое для любой неотрицательной квадратичной формы $a_{ij}\xi_i\xi_j$ с $a_{ij} = a_{ji}$ и произвольных вещественных $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$.

2) «Неравенство Коши с ε»:

$$|ab| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2, \tag{1.3}$$

справедливое при $\forall\varepsilon > 0$ и произвольных a и b.

Из функциональных неравенств нам потребуются неравенства, являющиеся конкретизацией неравенства треугольника и неравенства Коши.

Для пространства $L_2(\Omega)$ они имеют вид:

$$\left(\int_\Omega (u+v)^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_\Omega u^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega v^2\,dx\right)^{1/2}$$

и

$$\left|\int_\Omega uv\,dx\right| \leqslant \left(\int_\Omega u^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega v^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{1.4}$$

Для пространства $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$, состоящего из вектор-функций $\boldsymbol{u}=(u_1,\ldots,u_N)$ с $u_i\in L_2(\Omega)$, неравенство Коши имеет вид

$$\left|\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N u_i v_i\,dx\right| \leqslant \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N u_i^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N v_i^2\,dx\right)^{1/2}. \quad (1.5)$$

Левая часть в (1.5) есть модуль скалярного произведения $\boldsymbol{u}$ на $\boldsymbol{v}$, а правая — произведение нормы $\boldsymbol{u}$ на норму $\boldsymbol{v}$. Обобщением неравенства (1.4) является неравенство Гёльдера

$$\left|\int\limits_\Omega uv\,dx\right| \leqslant \left(\int\limits_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_\Omega |v|^{p'}\,dx\right)^{1/p'}, \quad (1.6)$$

справедливое для любых $u\in L_p(\Omega)$, $v\in L_{p'}(\Omega)$ и $\forall\, p\geqslant 1$ (p' всюду означает показатель, сопряженный p, т. е. $p'=\frac{p}{p-1}$). При $p=1$ показатель $p'=\infty$, и под $\|v\|_{p',\Omega}$ в этом случае надо понимать $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega |v|$. Дискретным аналогом (1.6) является неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^N a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^N |b_i|^{p'}\right)^{1/p'}. \quad (1.7)$$

С помощью (1.6) легко выводится неравенство треугольника для элементов $L_p(\Omega)$:

$$\|u+v\|_{p,\Omega} \leqslant \|u\|_{p,\Omega} + \|v\|_{p,\Omega}, \qquad p\geqslant 1. \quad (1.8)$$

§ 2. Общие сведения о линейных функционалах и линейных ограниченных операторах в гильбертовых пространствах

Линейным функционалом l на H (комплексном или вещественном) называется линейная, непрерывная числовая функция $l(u)$, определенная для $\forall u\in H$. Линейность l (или дистрибутивность) означает, что для любых элементов u_1 и u_2 из H и любых чисел λ и μ

$$l(\lambda u_1+\mu u_2)=\lambda l(u_1)+\mu l(u_2). \quad (2.1_1)$$

Непрерывность же $l(u)$ означает, что $l(u_n) \to l(u)$, если $u_n \to u$. Доказано, что для $l(u)$, удовлетворяющих свойству (2.1_1), непрерывность эквивалентна ограниченности $l(u)$ на поверхности единичной сферы $S_1 \equiv \{u\colon \|u\| = 1\}$ или, что то же, неравенству

$$|l(u)| \leqslant c\|u\| \quad \text{для} \quad \forall u \in H. \tag{2.1$_2$}$$

Теорема Ф. Рисса утверждает, что линейный функционал l на H может быть представлен в виде скалярного произведения

$$l(u) = (u, v),$$

причем элемент v определяется по $l(u)$ единственным образом. Величину $\|v\|$ называют *нормой* $\|l\|$ линейного функционала l. Очевидно, что $\|l\| = \sup\limits_{u \in H} \dfrac{|l(u)|}{\|u\|}$ и является наименьшей из всех возможных постоянных c, для которых верно (2.1_2). Перейдем теперь к линейным операторам в H. Оператор A, определенный на некотором множестве $\mathscr{D}(A)$ пространства H, сопоставляет каждому элементу u из $\mathscr{D}(A)$ некоторый элемент v из H, и это принято записывать так: $v = Au$ или $v = A(u)$. Если на $\mathscr{D}(A)$ справедливо равенство

$$A(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda A(u_1) + \mu A(u_2),$$

то говорят, что A линеен (при этом предполагается, что $\mathscr{D}(A)$ — линейное множество). Если при этом существует постоянная c, такая, что для всех u из $\mathscr{D}(A)$

$$\|Au\| \leqslant c\|u\|, \tag{2.2}$$

то A называется ограниченным оператором на $\mathscr{D}(A)$. Такой оператор может быть непрерывным образом распространен на замыкание $\overline{\mathscr{D}(A)}$ в H (которое, очевидно, будет замкнутым подпространством H), причем (2.2) будет верно для $\forall u$ из $\overline{\mathscr{D}(A)}$. Такой оператор можно распространить (разными способами, если $\overline{\mathscr{D}(A)} \subset H$) на все H с сохранением неравенства (2.2). У нас встретятся различные ограниченные операторы, и они будут определены на всем H. Наименьшая c, для которой неравенство (2.2) имеет место для всех u из H, называется нормой $\|A\|$ оператора A, так что

$$\|A\| = \sup_{u \in H} \frac{\|Au\|}{\|u\|}.$$

Нас будут интересовать два класса ограниченных линейных операторов. Один — это класс *самосопряженных* операторов: оператор A называется *самосопряженным*, если

$$(Au, v) = (u, Av), \qquad \forall u, v \in H. \tag{2.3}$$

Спектр такого оператора A вещественен и располагается на отрезке $[-\|A\|, \|A\|]$. Другой класс — это класс вполне непрерывных операторов. Оператор A называется *вполне непрерывным*, если он любое ограниченное множество переводит в компактное. Спектр такого оператора A состоит из точки нуль и не более чем счетного набора собственных значений, который может иметь точку накопления лишь в нуле. Каждое из этих собственных значений, кроме разве что точки нуль, имеет конечную кратность. Ввиду этого собственные значения A могут быть занумерованы в порядке убывания их модуля: $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots$, причем на каждой окружности вида $|\lambda| = |\lambda_k|$ может лежать лишь конечное число λ_m. Точка нуль может быть собственным значением бесконечной кратности.

Если оператор A самосопряжен и вполне непрерывен, то его спектр вещественен и дискретен с единственной точкой накопления в нуле. Все собственные значения, кроме, может быть, нуля, имеют конечную кратность. Их можно расположить в порядке убывания их модулей: $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots$, причем $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$ (здесь каждое собственное значение, кроме нуля, повторяется в ряду собственных значений столько раз, какова его кратность). Соответствующие им собственные элементы $\{u_k\}$ (т. е. решения уравнений $Au_k = \lambda_k u_k$) можно выбрать так, чтобы они были взаимно ортогональны и нормированы. Натянутое на них замкнутое подпространство $\mathscr{L}$ совпадает с H, если $\lambda = 0$ не есть точка дискретного спектра (т. е. если уравнение $Au = 0$ имеет только тривиальное решение: $u = 0$). В противном случае ортогональное дополнение к $\mathscr{L}$ в H будет являться собственным подпространством H, отвечающим $\lambda=0$. Обозначим $H\ominus\mathscr{L}=N$ и пусть $\{v_k\}$ — ортонормированный базис в N. Тогда любой элемент $u\in H$ можно представить в виде суммы двух рядов $u=\sum_{k=1}(u, u_k)u_k+\sum_{k=1}(u, v_k)v_k$, каждый из которых может содержать конечное или бесконечное число слагаемых. Имеют место равенства:

$$\|u\|^2=\sum_{k=1}(u, u_k)^2+\sum_{k=1}(u, v_k)^2,$$

$$Au=\sum_{k=1}\lambda_k(u, u_k)u_k \quad \text{и} \quad \|Au\|^2=\sum_{k=1}\lambda_k^2(u, u_k)^2.$$

Вернемся теперь к общим вполне непрерывным операторам A и сформулируем известные результаты, касающиеся разрешимости уравнений вида

$$u-\lambda Au=v, \tag{2.4}$$

где v — заданный элемент H, а λ — комплексный параметр.

Для них имеет место фредгольмова разрешимость, т. е. для уравнений (2.4) справедливы три теоремы Фредгольма:

1) если однородное уравнение (2.4), т. е. уравнение

$$u-\lambda Au=0, \tag{2.5}$$

имеет только тривиальное решение, то уравнение (2.4) однозначно разрешимо при любом $v\in H$. (Иначе говоря, эта теорема утверждает, что для (2.4) из теоремы единственности следует теорема существования.)

2) Однородное уравнение (2.5) может иметь нетривиальные (т. е. отличные от нуля) решения не более чем для счетного числа значений $\{\lambda_k\}$, каждое из которых имеет конечную кратность. Множество $\{\lambda_k\}$ не может иметь точку сгущения λ_0 с $|\lambda_0|<\infty$. Эти исключительные значения $\{\lambda_k\}$ называются характеристическими для A. Для сопряженного оператора A^* характеристическими числами являются числа $\{\bar\lambda_k\}$, т. е. уравнение

$$u-\lambda A^*u=0 \tag{2.6}$$

имеет нетривиальное решение только для $\lambda=\bar\lambda_k$, при этом кратность $\bar\lambda_k$ для A^* та же, что кратность λ_k для A.

3) Уравнение (2.4) при λ, равном какому-либо характеристическому значению λ_k, разрешимо для тех и только тех v, которые ортогональны всем решениям уравнения (2.6), отвечающим $\lambda = \bar{\lambda}_k$.

Если эти условия ортогональности выполнены, то уравнение (2.4) имеет бесконечно много решений. Все они могут быть записаны в виде $u = u_0 + \sum_{j=m}^{m+p} c_j u_j$, где u_0 — какое-либо решение уравнения (2.4) с $\lambda = \lambda_k$, c_j — произвольные постоянные, а u_j, $j = m, \ldots, m+p$, — все линейно независимые решения (2.5) при $\lambda = \lambda_k$.

Такая разрешимость имеет место, например, для линейных алгебраических систем, в которых u и v суть векторы с n компонентами, а A — квадратная матрица с n^2 элементами. Это же справедливо для интегральных операторов A с не слишком плохим ядром.

В гл. II будет доказано, что такая же разрешимость имеет место и для основных краевых задач для эллиптических уравнений с ограниченными коэффициентами в ограниченной области. Это не очевидно, ибо в этих задачах приходится иметь дело с неограниченными операторами. Однако они могут быть сведены к уравнениям вида (2.4) с вполне непрерывным оператором A.

Напомним еще один хорошо известный факт, касающийся разрешимости уравнения (2.4) с произвольным ограниченным оператором A. Именно, такое уравнение однозначно разрешимо при $\forall v \in H$ для λ с $|\lambda| < \frac{1}{\|A\|}$ и его решение представимо в виде ряда $u = v + \lambda A v + \lambda^2 A^2 v + \ldots$, сходящегося в H, причем $\|u\| \leqslant \frac{1}{1 - |\lambda| \|A\|} \|v\|$.

В этом параграфе мы сформулировали различные предложения об ограниченных операторах в комплексном гильбертовом пространстве H. Они же верны и для вещественных пространств H. Однако при исследовании спектров несимметричных операторов A, действующих в вещественном H, естественно выйти в более широкое комплексное пространство, ибо для таких A спектр может иметь и комплексные собственные (а тем самым и характеристические) значения.

§ 3. О неограниченных операторах

Напомним некоторые факты о неограниченных линейных операторах A в H. Такие операторы определены не на всех элементах u из H. Множество, на котором определен A, называется областью определения A и обозначается через $\mathscr{D}(A)$. Это множество — линейное, и для $\forall u, v$ из $\mathscr{D}(A)$ и $\forall$ чисел λ, μ должно выполняться равенство

$$A(\lambda u+\mu v)=\lambda Au+\mu Av.$$

В отличие от ограниченных операторов, для неограниченного оператора A не существует постоянной c, при которой выполняется неравенство (2.2) для всех u из $\mathscr{D}(A)$. Мы будем рассматривать лишь такие случаи, когда $\mathscr{D}(A)$ плотно в H. Множество значений A будем обозначать через $\mathscr{R}(A)$, так что $A(\mathscr{D}(A))=\mathscr{R}(A)$.

Нас будут интересовать неограниченные операторы, порождаемые дифференциальными выражениями. Каждому такому выражению сопоставляются различные операторы, определяемые указанием их области определения. В качестве примера, рассмотрим дифференциальное выражение $\mathscr{L}u(x)=\frac{d^2u(x)}{dx^2}$ на отрезке $x\in[0,1]$, взяв за H вещественное функциональное пространство $L_2(0,1)$. Ему можно сопоставить оператор A, определенный на всех бесконечно дифференцируемых функциях $u(x)$ с носителем в $(0, 1)$. На $u(x)$ из $\mathscr{D}(A)$ оператор A вычисляется так: $Au=\mathscr{L}u=\frac{d^2u(x)}{dx^2}$. Легко видеть, что A на $\mathscr{D}(A)$ неограничен. Этому же выражению $\mathscr{L}u$ можно сопоставить другой неограниченный оператор $\tilde{A}$, областью определения которого являются все бесконечно дифференцируемые на $(0, 1)$ функции. На них $\tilde{A}$ вычисляется так же, как A на $\mathscr{D}(A)$, а именно: $\tilde{A}u=\frac{d^2u(x)}{dx^2}$. Между A и $\tilde{A}$ есть естественная упорядоченность: $\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{D}(\tilde{A})$ и $Au=\tilde{A}u$ для $u\in\mathscr{D}(A)$. В такой ситуации говорят, что оператор $\tilde{A}$ есть *расширение* оператора A. Понятно, что область определения для $\mathscr{L}$ можно выбрать бесчисленным множеством способов, и каждый раз мы придем к другому неограниченному оператору, вообще говоря, с другими свойствами. Операторы A и $\tilde{A}$, описанные выше, имеют существенно различные свойства. Например, для оператора A справедливо соотношение

$$(Au, v) \equiv \int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2} v\, dx = (u, Av), \tag{3.1}$$

что легко проверяется простым интегрированием по частям (в (3.1) $u(x)$ и $v(x)$ — произвольные элементы из $\mathscr{D}(A)$). Для оператора же $\tilde{A}$ это свойство не имеет места, ибо

$$(Au, v) = (u, Av) + \frac{du}{dx} v \Big|_{x=0}^{x=1} - u \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} \tag{3.2}$$

и сумма последних двух членов правой части не равна нулю для всех $u(x)$ и $v(x)$ из $\mathscr{D}(\tilde{A})$. Свойство (3.1) гарантирует симметричность оператора A, оператор же $\tilde{A}$ несимметричен. Как известно из общей теории операторов, симметричные операторы обладают целым рядом красивых свойств. Теория симметричных операторов хорошо разработана и может быть использована для изучения определенных классов дифференциальных операторов. Одним из важных понятий в ней является понятие самосопряженного оператора.

Оператор A называется *самосопряженным*, если он симметричен, т. е. если

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \text{для} \quad \forall u, v \in \mathscr{D}(A), \tag{3.3}$$

и если из тождества

$$(Au, v) = (u, w), \tag{3.4}$$

в котором v и w фиксированы, а u — любой элемент из $\mathscr{D}(A)$, следует, что $v \in \mathscr{D}(A)$ и $w = Av$. Иначе говоря, A самосопряжен, если сопряженный ему оператор A^* имеет ту же область определения $\mathscr{D}(A)$ и $A = A^*$ на $\mathscr{D}(A)$. Тождество (3.4) определяет область определения A^* и его значения на ней, а именно: те v, для которых существует w, удовлетворяющее (3.4) при $\forall u \in \mathscr{D}(A)$, составляют $\mathscr{D}(A^*)$ и A^*v полагается равным w. В большинстве случаев для операторов A, порожденных дифференциальным выражением, легко проверяется справедливость (или несправедливость) тождества (3.3) (это делается с помощью интегрирования по частям). Значительно сложнее эффективно описать для них область $\mathscr{D}(A^*)$ и выяснить, совпадает ли она с $\mathscr{D}(A)$ или нет. Для дифференциальных выражений, содержащих частные производные, это делается тем или иным «обходным» путем, чаще всего с привлечением обратных операторов, которые оказываются ограниченными. Для ограниченных же операторов A, определенных на всем H, сопряженность есть следствие их симметричности. Именно такие «обходные» пути используются для изучения эллиптических дифференциальных уравнений при том или ином граничном условии.

Вернемся к примеру дифференциального оператора $\mathscr{L}u = \frac{d^2u}{dx^2}$. Мы уже выяснили выше, что соответствующий ему оператор A симметричен. Однако нетрудно увидеть, что он не является самосопряженным. Действительно, для него равенство (3.3) имеет место не только для u и v из $\mathscr{D}(A)$, но, например, для $u \in \mathscr{D}(A)$ и $v \in \mathscr{D}(\tilde{A})$. Это показывает, что $\mathscr{D}(A^*)$ шире $\mathscr{D}(A)$. Возникает тогда естественный вопрос: нельзя ли расширить A до самосопряженного? Оказывается, это можно сделать, причем бесконечным числом способов. Первый шаг к такому расширению дает общая теория операторов — это процедура замыкания оператора. Она состоит в следующем: пусть A (A сейчас не предполагается симметричным) определен на плотном множестве $\mathscr{D}(A)$ пространства H. Присоединим к нему все элементы u, являющиеся пределами таких последовательностей $\{u_n\}$ элементов из $\mathscr{D}(A)$, для которых $\{Au_n\}$ сходятся к какому-либо элементу v. По определению полагается $v = \bar{A}u$, где символ $\bar{A}$ означает замыкание оператора A. Множество $\mathscr{D}(A)$, пополненное всеми такими элементами u, составляет $\mathscr{D}(\bar{A})$ — область определения $\bar{A}$. Однако эта процедура не всегда приводит к линейному оператору $\bar{A}$, в определении которого содержится требование его однозначной определенности на $\mathscr{D}(\bar{A})$, что эквивалентно требованию, чтобы он на нулевом элементе имел значение 0. Действительно, при описанной выше процедуре мы можем столкнуться с таким случаем, когда u_n сходятся к $u = 0$, а Au_n сходятся к

$v \neq 0$. Если это имеет место, то, по вышесказанному, мы должны были бы положить $\bar{A}0$ равным $v \neq 0$ и тем самый прийти к оператору $\bar{A}$, не удовлетворяющему условию линейности. Примеры показывают, что описанная ситуация возможна для некоторых неограниченных операторов и, следовательно, не любой неограниченный оператор допускает замыкание.

Нетрудно доказать, что для возможности замыкания оператора A необходимо и достаточно, чтобы область определения сопряженного оператора A^* была плотна в H. Для операторов, определяемых дифференциальными выражениями с «не слишком плохими» коэффициентами, этот критерий легко проверяется, так что такие операторы допускают замыкание.

В частности, оператор A, определенный нами выше по $\mathcal{L}u = \frac{d^2u}{dx^2}$, допускает замыкание. Но возникает вопрос: как выглядит это замыкание $\bar{A}$ для A, т. е. какие функции при этом присоединяются к $\mathcal{D}(A)$ и как вычисляется на них оператор $\bar{A}$? Оказывается, ответить уже на этот вопрос непросто, особенно когда речь идет о дифференциальных выражениях с частными производными. Его решение потребовало расширения понятия производной и введения так называемых «обобщенных производных». В следующем параграфе мы остановимся на этом понятии более подробно, ввиду его кардинальной важности для всех разбираемых в книге задач. Здесь же сформулируем лишь окончательный результат, относящийся к оператору $\mathcal{L}u = \frac{d^2u}{dx^2}$: замыкание A приводит к пополнению $\mathcal{D}(A)$ всеми непрерывно дифференцируемыми функциями $u(x)$, равными нулю в точках $x = 0$ и $x = 1$, у которых первые производные $\frac{du}{dx}$ суть абсолютно непрерывные функции, равные нулю в тех же граничных точках Кроме того, производные от $\frac{du}{dx}$, существующие почти всюду, должны быть элементами $L_2(0, 1)$. За этими производными мы сохраним прежнее обозначение $\frac{d^2u}{dx^2}$, но будем помнить, что они определены лишь как элементы $L_2(0, 1)$. В дальнейшем только что описанный класс функций $\mathscr{D}(\bar{A})$ мы будем обозначать через $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0, 1)$ и о его элементах говорить, что они имеют обобщенные производные из $L_2(0, 1)$ до второго порядка включительно. Нолик наверху указывает, что его элементы обращаются в нуль на границе интервала вместе со своими первыми производными. На $\mathscr{D}(\bar{A}) = \overset{\circ}{W}{}_2^2(0, 1)$ оператор $\bar{A}$ определен как оператор вычисления «обобщенной» производной второго порядка.

Легко понять, что процедура замыкания симметричного оператора A (напомним, что мы с самого начала условились считать $\mathscr{D}(A)$ плотной в H, и потому такие операторы допускают замыкание) приводит к симметричному оператору $\bar{A}$. Однако это расширение может оказаться «недостаточным», т. е. $\bar{A}$ может оказаться несамосопряженным на $\mathscr{D}(\bar{A})$. Так оно и есть в случае оператора $\bar{A}u = \mathscr{L}u = \frac{d^2u}{dx^2}$ на $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0, 1)$. В общей теории симметрических операторов разработаны абстрактные схемы дальнейшего расширения оператора с сохранением его симметричности, в том числе и построения самосопряженных расширений. Однако их реализация для дифференциальных операторов с частными производными весьма непрозрачна, ибо оказывается, что «дефектное подпространство», на которое надо расширить $\mathscr{D}(\bar{A})$, — бесконечномерное. Ввиду этого при исследовании задач, связанных с такими операторами, эти общие конструкции теории операторов предпочитают не использовать. Мы также не будем прибегать к ним в нашей книге и изберем другие способы, выработанные в теории краевых задач. Для дифференциальных же операторов (симметричных) с одной независимой переменной общая теория дает возможность просто и эффективно описать все возможные их самосопряженные расширения, но мы не будем это здесь напоминать, ибо такие операторы не являются предметом данной книги (их теория подробно изложена в ряде монографий). Приведем лишь несколько таких расширений для оператора $\bar{A}u = \frac{d^2u}{dx^2}$ на $\mathscr{D}(\bar{A}) = \overset{\circ}{W}{}_2^2(0, 1)$.

Первое из них имеет вид $\hat{A}u = \frac{d^2u}{dx^2}$, где $\hat{A}$ рассматривается на всех функциях из $W_2^2(0, 1)$, равных нулю на концах интервала. Здесь через $W_2^2(0, 1)$ обозначена совокупность всех функций, имеющих обобщенные производные до второго порядка включительно, квадратично суммируемые на $[0,1]$ (элементы $u(x) \in W_2^2(0, 1)$ суть непрерывно дифференцируемые функции, имеющие абсолютно непрерывные производные $\frac{du(x)}{dx}$; эти же последние имеют почти всюду производную как элемент $L_2(0,1)$). Такое расширение $\hat{A}$ связано с первой краевой задачей для $\mathscr{L}u$ — задачей определения решения $u(x)$ уравнения

$$\mathscr{L}u \equiv \frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \tag{3.5}$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{3.6}$$

Оказывается, эта задача имеет единственное решение $u(x)$ из $\mathscr{D}(\hat{A})$ при любой f из $L_2(0,1)$, что эквивалентно однозначной разрешимости уравнения $\hat{A}u = f$ при $\forall f \in L_2(0,1)$. Итак, задаче (3.5), (3.6) соответствует расширение $\hat{A}$ нашего исходного оператора A. Если бы мы не расширили оператор A, то мы не имели бы такой красивой теоремы разрешимости: уравнение $Au = f$ не имеет решения в $\mathscr{D}(A)$ для любой f из $L_2(0,1)$.

Другие краевые задачи для уравнения (3.5) требуют других расширений A. Например, если к (3.5) присоединить условия

$$u(0) = 0, \quad \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = 0, \tag{3.7}$$

то A надо расширить как оператор двукратного обобщенного дифференцирования на функциях из $W_2^2(0, 1)$, удовлетворяющих условиям (3.7). Такое расширение $\hat{\hat{A}}$ тоже является самосопряженным и приводит к уравнению $\hat{\hat{A}}u = f$, однозначно разрешимому в $\mathscr{D}(\hat{\hat{A}})$ для $\forall f \in L_2(0,1)$.

В данном параграфе мы напомнили те понятия из теории неограниченных операторов, которые будут использованы в дальнейшем. Никаких специальных теорем о разрешимости каких-либо классов уравнений с неограниченными операторами, а также способов расширения неограниченных операторов мы привлекать не будем.

Теперь мы перейдем к описанию используемых в дальнейшем конкретных функциональных пространств.

§ 4. Обобщенные производные и усреднения

В § 3 мы уже столкнулись с необходимостью введения обобщенного дифференцирования. Сделать это можно разными эквивалентными способами*). Мы выбираем один из них, который нам кажется наиболее удобным для целей данной книги.

Известно, что для любых двух бесконечно дифференцируемых в области $\Omega \subset R_n$ функций $u(x)$ и $v(x)$, из которых вторая равна нулю в пограничной полоске (т. е. $v \in \dot{C}^\infty(\Omega)$), справедливо равенство

$$\int_\Omega \left[u \frac{\partial^k v}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + (-1)^{k+1} v \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right] dx = 0,$$

которое получается с помощью k-кратного интегрирования по частям. Оно является основным аналитическим соотношением в теории краевых задач, и его мы сохраним для вводимых ниже обобщенных производных. Именно, назовем функцию $\omega_{k_1 \ldots k_n}$, суммируемую по любой строго внутренней подобласти Ω' области Ω**), *обобщенной производной вида* $\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ функции $u(x)$, суммируемой по таким же $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, если при $\forall v \in \dot{C}^\infty(\Omega)$ имеет место тождество

$$\int_\Omega \left[u \frac{\partial^k v}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + (-1)^{k+1} v \omega_{k_1 \ldots k_n} \right] dx = 0. \qquad (4.1)$$

---

*) Укажем, что не все обобщения классического дифференцирования, предлагавшиеся с десятых годов этого века, эквивалентны между собой. Мы выбираем из них то, которое отвечает запросам функционального анализа и теории краевых задач. Но и это обобщение можно ввести разными способами, которые, однако, приводят к одному и тому же расширению.

**) Это коротко будет записываться так: $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, причем Ω' считается ограниченной областью.

Функцию $\omega_{k_1 \ldots k_n}$ будем обозначать так: $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$.

Это не вызовет недоразумений, ибо классическая производная $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ для k раз непрерывно дифференцируемой в Ω функции u *) удовлетворяет тождеству (4.1). Ясно, что введенное нами понятие есть расширение понятия (классической) непрерывной частной производной вида $\dfrac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$. Обобщенные производные (об. пр.) сохраняют много (но не все!) свойств обычных (классических) производных. Так, например, если u_1 и u_2 имеют об. пр. вида $\dfrac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ в Ω, то и сумма $c_1u_1 + c_2u_2$ имеет такую же об. пр. в Ω и

$$\frac{\partial^k (c_1u_1 + c_2u_2)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = c_1 \frac{\partial^k u_1}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + c_2 \frac{\partial^k u_2}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}.$$

Если v есть об. пр. вида $\dfrac{\partial^l}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}}$ от u, а ω есть об. пр. вида $\dfrac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ от v в области Ω, то ω есть об. пр. от u вида $\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x_1^{k_1+l_1} \ldots \partial x_n^{k_n+l_n}}$.

Из определения об. пр. $\dfrac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ видно, что она не зависит от порядка дифференцирования. Что касается правила дифференцирования произведения

$$\frac{\partial (u_1u_2)}{\partial x_i} = u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_i},$$

то для его сохранения надо потребовать, чтобы u_k и $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}$, $k = 1, 2$, квадратично суммировались по $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$. Ана-

*) Так мы будем называть функции $u(x)$, которые имеют все частные производные до порядка k *включительно*.

логичные требования надо налагать на u_k и их об. пр. при вычислении об. пр. любого вида.

Однако об. пр. сохраняют не все свойства классических и работа с ними требует некоторой осторожности. Так, например, из существования об. пр. у $u(x)$ вида $\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$ не следует существование подчиненных производных более низкого порядка. Однако, если $u(x)$ имеет об. пр. k-го порядка всех видов и если p-е степени $(p > 1)$ модулей u и этих производных суммируемы по $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$, то u имеет все об. пр. порядка ниже k, также принадлежащие $L_p(\Omega')$ (и даже $L_q(\Omega')$ с некоторым $q = q(n, p, k) > p$) (см. [23$_1$] или [22$_2$]).

Другим важным отличием об. пр. от классических является то, что они определяются с точностью до множества меры нуль и «привязаны» к области Ω, иначе говоря, они имеют «интегральный характер». Это видно из самого определения об. пр. На каждую из них мы должны смотреть как на элемент $L_p(\Omega)$ (или $L_p(\Omega')$, $\forall \overline{\Omega}' \subset \subset \Omega$) с каким-либо $p \geqslant 1$ К области Ω они «привязаны» таким образом: если u имеет об. пр. $\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$ в области Ω, то она имеет ее и в $\forall \Omega' \subset \Omega$. Однако если область Ω разбита на три части: две непересекающиеся подобласти Ω_1 и Ω_2 и множество Γ, их разделяющее, то из существования у $u(x)$ об. пр. $\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$ в каждой из Ω_i, $i = 1, 2$, вообще говоря, не следует существование у $u(x)$ об. пр. $\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$ во всей области Ω. Это можно видеть на примере функции $u(x)$, определенной на отрезке $x \in [0, 1]$, всюду бесконечно дифференцируемой, кроме точки $x = {}^1/_2$, в которой она имеет разрыв первого рода. Такая функция не имеет на $[0, 1]$ даже об. пр. первого порядка (несмотря на то, что она имеет классическую производную всюду, кроме точки $x = {}^1/_2$). Это проверяется непосредственно, исходя из определения. На любом же интервале, не содержащем точки $x = {}^1/_2$, эта функция имеет об. пр. любого порядка.

Однако этот пример не должен породить мнение, что для существования об. пр. необходимо, чтобы функция $u(x)$ была непрерывной. Во-первых, как сказано выше, функцию $u(x)$, имеющую какие-либо об. пр. в Ω, можно произвольно изменить на множестве меры нуль. Во-вторых, легко привести примеры функций, имеющих об. пр., которые никаким переопределением на множествах меры нуль не сделать непрерывными в Ω. Так, функция $u(x) = 1/|x|^{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, в круге $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant 1$ имеет об. пр. первого порядка, равные $\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\varepsilon \frac{x_i}{|x|^{2+\varepsilon}}$ (для этого надо проверить справедливость соответствующего тождества типа (4.1)). Но такую функцию нельзя сделать непрерывной (и даже ограниченной) с помощью ее переопределения на множестве меры нуль.

Вопросы о том, какой гладкости можно добиться у функции $u(x)$, имеющей те или иные об. пр., суммируемые по Ω с теми или иными степенями, переопределяя ее на множестве меры нуль, составляют предмет исследования следующего параграфа (предложения этого типа носят название теорем вложения). Ответ зависит от размерности пространства x, порядка об. пр. и степеней их суммируемости.

В этом же параграфе мы опишем еще ряд более простых свойств об. пр. Начнем со связей, которые имеются между обобщенной дифференцируемостью и абсолютной непрерывностью функции. Если u зависит от одной переменной $x \in [0, l]$ и является абсолютно непрерывной на $[0, l]$, то, как известно (см., например, [22₂] или [28₁]), $u(x)$ имеет почти всюду производную $\frac{du}{dx}$ в обычном смысле, суммируемую на $[0, l]$, причем функция $u(x)$ однозначно восстанавливается по этой производной с помощью формулы Ньютона — Лейбница:

$$u(x) = u(x_1) + \int_{x_1}^{x} \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad x_1, x_2 \in [0, l]. \qquad (4.2)$$

Нетрудно проверить, что так определенная функция $\frac{du}{dx}$ является об. пр. функции $u(x)$ на $[0, l]$. Верно следующее (обратное) утверждение: если $u(x)$ принадлежит $L_1(0, l)$ и имеет на $(0, l)$ об. пр. $\frac{du}{dx}$, принадлежащую $L_1(0, l)$, то $u(x)$ эквивалентна абсолютно непрерывной на $[0, l]$ функции (мы будем обозначать ее также через $u(x)$), для которой справедливо равенство (4.2), где в качестве $\frac{du}{dx}$ взята об. пр. $\frac{du}{dx}$.

Этот факт мы условимся формулировать короче, говоря, что если $u \in W_1^1(0, l)$, то $u(x)$ является абсолютно непрерывной функцией на $[0, l]$.

Таким образом, здесь и в дальнейшем, говоря о тех или иных свойствах функции $u(x)$ из $L_p(\Omega)$, мы будем иметь в виду существование по крайней мере одной функции, эквивалентной $u(x)$ на Ω, для которой это свойство выполнено. С этим отождествлением всех эквивалентных друг другу (на Ω) функций связана и принятая система обозначений, использующая один и тот же символ $u(x)$ как для конкретного представителя, так и для всего класса функций, эквивалентных u на Ω. В этом духе надо понимать, в частности, все дальнейшие утверждения данного параграфа и § 5 по теоремам вложения.

Рассмотрим теперь функцию $u(x)$, зависящую от нескольких переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Пусть она принадлежит $L_1(\Omega)$ и имеет об. пр. $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L_1(\Omega)$. Тогда, оказывается, она абсолютно непрерывна по x_1 при почти всех значениях $x_1' \equiv (x_2, \ldots, x_n)$. Точнее, если Ω_1' есть ортогональная проекция области Ω на координатную гиперплоскость $x_1 = 0$, то для почти всех значений x_1' из Ω_1' $u(x_1, x_1')$, как функция x_1, абсолютно непрерывна на замыкании любого интервала, принадлежащего Ω.

Если Ω принадлежит цилиндр $\tilde{\Omega}$ вида $\tilde{\Omega} = \{x : x_1 \in (l_1, l_2), \ x_1' \in \tilde{\Omega}_1'\}$, где $\tilde{\Omega}_1'$ есть какое-либо измеримое множество из Ω_1', то для почти всех x_1' из $\tilde{\Omega}_1'$ справедливо равенство

$$u(x_1, x_1') = u(l_1, x_1') + \int_{l_1}^{x_1} \frac{du(\tau, x_1')}{d\tau} d\tau \qquad (4.3)$$

при $\forall x_1 \in [l_1, l_2]$ и это равенство можно проинтегрировать по $x_1' \in \tilde{\Omega}_1'$ и результат записать в виде

$$\int\limits_{\tilde{\Omega}_1'} u(x_1, x_1')\,dx_1' = \int\limits_{\tilde{\Omega}_1'} u(l_1, x_1')\,dx_1' + \int\limits_{l_1}^{x_1} \int\limits_{\tilde{\Omega}_1'} \frac{du(\tau, x_1')}{d\tau}\,dx_1'\,d\tau \qquad (4.4)$$

(использовав теорему Фубини).

Все сказанное относится не только к x_1, но и к любому координатному направлению. Предположим теперь, что функция $u(x)$ принадлежит $L_1(\Omega)$ и имеет все об. пр. $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, первого порядка, которые тоже принадлежат $L_1(\Omega)$. Предположим, далее, что в $\overline{\Omega}$ можно сделать невырожденную замену координат x на y, такую, что $y = y(x)$ суть непрерывные в $\overline{\Omega}$ функции имеющие ограниченные об. пр. $\frac{\partial y_i(x)}{\partial x_k}$, якобиан $\left|\frac{\partial y(x)}{\partial x}\right| \geqslant c > 0$ в $\overline{\Omega}$, и что обратные функции $x = x(y)$ имеют такие же свойства, как и $y(x)$. Тогда функция $\tilde{u}(y) = u(x(y))$ будет принадлежать $L_1(\tilde{\Omega})$, где $\tilde{\Omega}$ есть область изменения y, и будет иметь об. пр. $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k}$ из $L_1(\tilde{\Omega})$, которые выражаются через об. пр. $\frac{\partial u}{\partial x_l}$ по обычным формулам: $\frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial y_k} = \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\right|_{x = x(y)} \cdot \frac{\partial x_l(y)}{\partial y_k}$.

Весьма полезной для наших целей является операция усреднения с каким-либо ядром, точнее, с семейством ядер $\theta(x, y, \rho)$, зависящим от параметра ρ (непрерывного или дискретного), стремящимся к нулю. Обычно считают, что $\theta(x, y, \rho) = 0$ при $|x - y| \geqslant c\rho$. Мы тоже будем предполагать, что это условие выполнено. Кроме этого, непременным условием является условие нормировки θ:

$$\int\limits_{R_n} \theta(x, y, \rho)\,dy = \int\limits_{|x-y| \leqslant c\rho} \theta(x, y, \rho)\,dy = 1. \qquad (4.5)$$

Под усреднением произвольной функции $u(x)$, которую пока мы будем считать определенной для всех

$x \in R_n$, с ядром $\theta(x, y, \rho)$ понимается функция

$$u_\rho(x) = \int_{R_n} \theta(x, y, \rho) u(y) dy. \tag{4.6}$$

Для широких классов ядер θ и функций u усреднения u_ρ сходятся к u при $\rho \to 0$. Ниже мы уточним это высказывание. Целью операции усреднения является получение семейства функций, обладающих нужной гладкостью и аппроксимирующих усредняемую функцию. Насколько мне известно, впервые одна операция такого типа была широко использована В. А. Стекловым при исследовании ряда вопросов из теории дифференциальных уравнений и теории рядов. Он использовал ядро вида

$$\theta(x, u, \rho) = \frac{1}{\varkappa_n \rho^n} \theta\left(\frac{x-y}{\rho}\right) \tag{4.7}$$

с $\theta(x)$, равной единице для x, лежащих в кубе $\{x\colon |x_i| \leqslant {}^1/_2\}$, и нулю вне этого куба, и $\varkappa_n = 1$. Для этого ядра (4.6) можно записать так:

$$u_h(x) = \frac{1}{h^n} \int\limits_{x_1 - \frac{h}{2}}^{x_1 + \frac{h}{2}} \cdots \int\limits_{x_n - \frac{h}{2}}^{x_n + \frac{h}{2}} u(y)\, dy. \tag{4.8}$$

Если $u(x)$ есть локально суммируемая функция, то $u_h(x)$ будет непрерывной функцией x и при $h \to 0$ будет сходиться к $u(x)$ почти всюду и в нормах $L_1(\Omega')$. Кроме того, $u_h(x)$ имеет об. пр. по x_i первого порядка. Более общо: если $u(x) \in L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, и $u(x)$ продолжено, например, нулем вне области Ω, то $u_h(x)$ суть непрерывные в $\overline{\Omega}$ функции, имеющие об. пр. первого порядка из $L_p(\Omega)$. Усреднения $u_h(x)$ сходятся к $u(x)$ почти всюду в Ω и в норме $L_p(\Omega)$. Ясно, что лучшей сходимости не может быть для произвольного элемента $u(x)$ из $L_p(\Omega)$.

Часто приходится использовать усреднения с достаточно гладкими или даже бесконечно дифференцируемыми ядрами, в частности, с ядром вида (4.7), где

$$\theta(x) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{|x|^2}{|x|^2 - 1}\right\} & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

а $\varkappa_n = \int\limits_{|x|<1} \exp\left\{\frac{|x|^2}{|x|^2-1}\right\} dx$. Для таких ядер усреднения будут достаточно гладкими (соответственно, бесконечно дифференцируемыми) функциями. Характер же сходимости их к усредняемой функции зависит от свойств этой функции, а именно: для них справедливо то же, что было сказано выше о стекловских усреднениях.

Для усреднений u_ρ с достаточно гладкими ядрами вида (4.7) имеет место такое полезное свойство: если $u(x)$ имеет об. пр. $\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$, то $\frac{\partial^k u_\rho}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \left(\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right)_\rho$, т. е. операции дифференцирования и такого усреднения перестановочны. Отсюда и из сказанного выше о сходимости $u_\rho(x)$ к $u(x)$ следует, что если $u(x)$ и $\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ суть элементы $L_p(\Omega)$, то для $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$ усреднения u_ρ и их производные вида $\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ при $\rho \to 0$ сходятся в $L_p(\Omega')$ (и почти всюду) к u и ее производной того же вида, соответственно. При формулировке этого результата мы предполагали, что $u(x)$ определена только на Ω. Тогда усреднения $u_\rho(x)$ определены не для всех x из Ω, а только для $x \in \Omega$, отстоящих от $\partial\Omega$ на расстояние, не меньшее радиуса носителя ядра $\theta(x, y, \rho)$. Мы в дальнейшем будем использовать только стекловские усреднения (4.8) и усреднения вида

$$u_\rho(x) = \frac{1}{\varkappa_n \rho^n} \int\limits_{|x-y| \leqslant \rho} \theta\left(\frac{|x-y|}{\rho}\right) u(y)\, dy, \tag{4.9}$$

в которых $\theta(\tau)$ есть неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция $\tau \geqslant 0$, равная нулю для $\tau \geqslant 1$ и нормированная так: $\int\limits_0^1 \theta(\tau)\tau^{n-1} d\tau = 1$, а $\varkappa_n$ есть площадь поверхности единичной сферы. Усреднения $u_\rho(x)$ определяются равенством (4.9) для функций, заданных на Ω, лишь для области $\Omega_\rho \subset \Omega$, отстоящей от $\partial\Omega$ на расстояние ρ. Чтобы определить $u_\rho(x)$ для $x \in \Omega - \Omega_\rho$, надо каким-либо способом продолжить функцию $u(x)$ на полосу ширины ρ, окружающую Ω. Выше мы это делали для функций $u(x) \in L_p(\Omega)$, полагая $u(x) = 0$ вне Ω. Такое продолжение приводило снова к функции (которую мы по-прежнему будем обозначать через $u(x)$), p-я степень модуля которой суммировалась по $\forall\tilde{\Omega} \supset \Omega$, т. е. мы при таком продолжении не вышли из пространств L_p. Это позволило нам получить для $u(x) \in L_p(\Omega)$ гладкую аппроксимацию $u_\rho(x)$, определенную на Ω и сходящуюся к $u(x)$ в норме $L_p(\Omega)$. Лучшей же сходимости для $u(x)$ из $L_p(\Omega)$, вообще говоря, быть и не может.

Однако если $u(x)$ обладает лучшими свойствами, например, является непрерывной в $\overline{\Omega}$ функцией, то для нее желательно иметь такую последовательность гладких функций, которая аппроксимировала бы ее равномерно на $\overline{\Omega}$ (т. е. в норме $C(\overline{\Omega})$). Для этого $u(x)$ надо продолжить вне $\overline{\Omega}$ так, чтобы она оставалась непрерывной, тогда усреднения, вычисленные по этому продолжению $u(x)$, и выдадут желаемую аппроксимацию. Если же продолжение $u(x)$ с $\overline{\Omega}$ не удовлетворяет этому свойству, то в точках разрыва $u(x)$ нарушается равномерность аппроксимации.

Аналогично обстоит дело в том случае, если $u(x)$ имеет в Ω какие-либо производные. Если мы хотим построить, пользуясь операцией усреднения, приближающую $u(x)$ последовательность гладких функций u_ρ так, чтобы их производные аппроксимировали в $L_p(\Omega)$ соответствующие производные $u(x)$, то для этого надо предварительно продолжить $u(x)$ на некоторую окрестность Ω с сохранением ее свойств гладкости. Так, например, если $u(x)$ и $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ принадлежат $L_p(\Omega)$, то $u(x)$ надо продолжить на какую-либо область $\tilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}$ так, чтобы само продолжение и его производная указанного вида попали в $L_p(\tilde{\Omega})$. Если это сделано, то усреднения u_ρ, построенные по формуле (4.9) (или (4.6)) с θ вида (4.7) для всех достаточно малых ρ, будут гладкими функциями, которые сходятся вместе с $\dfrac{\partial^k u_\rho}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \left(\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right)_\rho$ к $u(x)$ и $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ соответственно, в норме $L_p(\Omega)$.

Приведем в конце этого параграфа один полезный и просто формулируемый критерий существования у функции $u(x)$ об. частных производных.

Теорема 4.1. *Если к данной суммируемой на Ω функции $u(x)$ можно приблизиться с помощью последовательности k раз непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций $u_s(x)$, $s = 1, 2, \ldots$, в том смысле, что для всякой функции $v(x) \in \dot{C}^\infty(\Omega)$*

$$\lim_{s\to\infty} \int_\Omega (u_s - u)\, v\, dx \to 0,$$

и если, кроме того, $\left\| \dfrac{\partial^k u_s}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\|_{p,\Omega} \leqslant c$, то функция u имеет об. пр. $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ и $\left\| \dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\|_{p,\Omega} \leqslant c$, $p \geqslant 1$.

Теорема остается в силе, если $u_s \in L_p(\Omega)$ и обладают не непрерывными, а об. пр. указанного вида.

Результаты, перечисленные в этом параграфе, сравнительно просто выводятся из самого определения об. пр. и некоторых основных фактов теории функций действительного переменного, касающихся измеримых и абсолютно непрерывных функций. Их доказательство можно найти, например, в книгах [23_1] и [22_2].

§ 5. Определение пространств $W_m^l(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$

Условимся говорить, что непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $u(x)$ имеет непрерывную в $\overline{\Omega}$ производную какого-либо вида, если эта производная, определенная обычным образом для точек Ω, продолжается по непрерывности на

$\bar{\Omega}$ *). Рассмотрим совокупность $C^l(\bar{\Omega})$ всех функций $u(x)$, имеющих в $\bar{\Omega}$ непрерывные производные по $x_1, \ldots, x_n$ до порядка l включительно, и введем в $C^l(\bar{\Omega})$ норму

$$\| u \|_{m,\Omega}^{(l)} = \left\{ \int_\Omega \sum_{k=0}^{l} \sum_{(k)} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right|^m dx \right\}^{1/m}, \quad (5.1)$$

в которой $m \geqslant 1$, а $\sum\limits_{(k)}$ есть суммирование всех возможных производных порядка k. Замыкание этого множества по указанной норме *назовем пространством* $\tilde{W}_m^l(\Omega)$, а функции $u(x)$, принадлежащие этому замыканию, его элементами.

Теорема 5.1. *Пространство $\tilde{W}_m^l(\Omega)$ является сепарабельным пространством типа B (причем в силу самого построения — полным). Все элементы $\tilde{W}_m^l(\Omega)$ имеют об. производные в Ω до порядка l (включительно), суммируемые по Ω со степенью m.*

Пространство $\tilde{W}_2^l(\Omega)$ является гильбертовым; скалярное произведение в нем определяется равенством:

$$(u, v)_{2,\Omega}^{(l)} = \int_\Omega \sum_{k=0}^{l} \sum_{(k)} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \frac{\partial^k v}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} dx. \quad (5.2)$$

---

*) Утверждение «непрерывная в Ω функция $v(x)$ продолжается по непрерывности на $\bar{\Omega}$» само нуждается в уточнении. Можно под этим понимать следующее: $v(x)$ доопределяется на $\partial\Omega$ так, что $v(x)$ становится однозначной непрерывной функцией на замкнутом множестве $\bar{\Omega}$ пространства R_n, расстояние между точками которого измеряется как обычное расстояние между точками в R_n. Но можно придерживаться и другого понимания того же утверждения, при котором v доопределяется на $\partial\Omega$ не как однозначная функция. Расстояние между точками x и x' области Ω определяется в этом случае как минимум длин кусочно-гладких кривых, соединяющих x и x' и лежащих в Ω. Если $\{x_m\}$, $m = 1, 2, \ldots, x_m \in \Omega$, есть последовательность Коши в смысле так определенного расстояния и x' — предельная для нее точка, то $\{v(x_m)\}$ должны сходиться к некоторому числу, которое и назначается как $v(x')$. Например, для области Ω, которая есть куб K с выброшенным из него куском Γ какой-либо гиперплоскости, эти два толкования приводят к разным понятиям непрерывности на $\bar{\Omega} = (\overline{K - \Gamma})$. Тем не менее, излагаемое ниже справедливо при обоих толкованиях непрерывности $u(x)$ и ее производных на замыкании $\bar{\Omega}$.

Ввиду этого для $\widetilde{W}_2^{(l)}(\Omega)$ справедливы теоремы 1.1 и 1.2 § 1 и предложения §§ 2 и 3.

Обозначим через $W_m^l(\Omega)$ *множество всех элементов* $u(x)$ *из* $L_m(\Omega)$, *имеющих об. пр. до порядка* l *(включительно) из* $L_m(\Omega)$. *Если ввести в нем норму равенством* (5.1), *то мы получим (полное) сепарабельное пространство типа* B *). Оно, вообще говоря, шире, чем $\widetilde{W}_m^l(\Omega)$. Однако для областей Ω с «не слишком плохой границей $\partial\Omega$» $W_m^l(\Omega)$ совпадает с $\widetilde{W}_m^l(\Omega)$. Это имеет место, например, для звездных областей Ω (область Ω называется звездной, если уравнение $\partial\Omega$ можно задать с помощью непрерывной положительной функции $f(\theta)$ точки θ единичной сферы в виде $x = x^0 + f(\theta)n_\theta$, где n_θ — единичный вектор, соответствующий точке θ). Действительно, пусть $u(x) \in W_m^l(\Omega)$. Построим функции $u^\lambda(x) = u(x/\lambda)$, $1 \leqslant \lambda \leqslant 1 + \varepsilon$, считая x^0 совпадающей с началом координат. Легко видеть, что $u^\lambda(x) \in W_m^l(\Omega_\lambda)$, где Ω_λ есть область, полученная подобным растяжением области Ω в λ раз, и $u^\lambda(x)$ сходятся к $u(x)$ в норме $W_m^l(\Omega)$ при $\lambda \to 1$. Построим для $\forall u^\lambda(x)$ усреднения $u_\rho^\lambda(x)$ вида (4.9) с $\rho < d(\lambda - 1)$, где d есть расстояние $\partial\Omega$ до точки 0. Из сказанного в § 4 следует, что $u_\rho^\lambda(x)$ сходятся в норме $W_m^l(\Omega)$ к $u^\lambda(x)$ при $\rho \to 0$. А тогда ясно, что можно так выбрать $\rho = \rho(\lambda)$, что при $\lambda \to 1$ функции $u_{\rho(\lambda)}^\lambda(x)$ (а они бесконечно дифференцируемы в $\overline{\Omega}$) аппроксимируют $u(x)$ в норме $W_m^l(\Omega)$. Но это и значит, что $u(x) \in \widetilde{W}_m^l(\Omega)$ и потому $W_m^l(\Omega) = \widetilde{W}_m^l(\Omega)$.

Это совпадение $W_m^l(\Omega)$ с $\widetilde{W}_m^l(\Omega)$ имеет место также и для областей Ω, C^l-диффеоморфных звездным областям (область Ω C^l-диффеоморфна области $\widetilde{\Omega}$, если функции $y = y(x)$, задающие этот диффеоморфизм, принадлежат $C^l(\overline{\Omega})$; обратные им функции $x = x(y)$ также должны принадлежать $C^l(\overline{\widetilde{\Omega}})$).

---

*) Доказательство сепарабельности $W_m^l(\Omega)$ имеется в [22₂].

Для дальнейшего нам будет полезен следующий простой факт, который мы выделим для удобства ссылок в виде замечания.

Замечание 5.1. Пусть функция $u(x) \in L_m(\Omega)$ и имеет об. пр. u_{x_1}, из $L_p(\Omega)$ в области «вида цоколя», т. е. в $\Omega = \{x\colon -\delta < x_1 < f(x_1'),\ \ x_1' = (x_2, \ldots, x_n) \in D\}$, где D — произвольная область на гиперплоскости $x_1 = 0$, δ-какое-либо положительное число, а $f(x_1')$ — непрерывная на $\overline{D}$ функция, удовлетворяющая неравенству: $f(x_1') \geqslant \delta$. Тогда $u(x)$ можно аппроксимировать гладкими в $\overline{\Omega}$ функциями $u_k(x)$ так, что $u_k \to u$ в норме $L_m(\Omega)$, а $u_{kx_1}(x) \to u_{x_1}$ в норме $L_p(\Omega)$. Функции $u_k(x)$ строятся примерно так же, как выше для звездных областей. А именно, положим $u^\lambda(x_1, x_1') = u\left(\frac{x_1}{\lambda}, x_1'\right)$ для $x_1' \in D$ и $u^\lambda(x_1, x_1') = 0$ для $x_1' \,\overline{\in}\, D$, где $\lambda \in [1, 1+\varepsilon]$. Функция $u^\lambda(x)$ определена в области $\widetilde{\Omega}_\lambda = \{x\colon -\lambda\delta < x_1 < \lambda f(x_1'),\ x_1' \in D\} \cup \cup \{x\colon -\infty < x_1 < \infty,\ x_1' \,\overline{\in}\, D\}$, содержащей в себе $\overline{\Omega}$, причем $u^\lambda \in L_m(\widetilde{\Omega}_\lambda)$, а $u^\lambda_{x_1} \in L_p(\widetilde{\Omega}_\lambda)$. Усреднения для $u^\lambda(x)$ вида (4.9) определены при $\rho < \delta(\lambda - 1)$ и являются гладкими в $\overline{\Omega}$ функциями. Легко убедиться, что при $\lambda \to 1$ и подходящем выборе $\rho = \rho(\lambda) \to 0$ они сходятся к u указанным выше образом.

При доказательстве одной из центральных теорем следующего параграфа (теоремы 6.2) нам придется продолжать элементы $W_m^1(\Omega)$ с ограниченной области Ω на более широкую область $\widetilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}$ так, чтобы они стали элементами $W_m^1(\widetilde{\Omega})$ и чтобы выполнялись неравенства

$$\|u\|_{m,\widetilde{\Omega}} \leqslant c_m(\Omega, \widetilde{\Omega}) \|u\|_{m,\Omega} \tag{5.3}$$

и

$$\|u_x\|_{m,\widetilde{\Omega}} \leqslant c'_m(\Omega, \widetilde{\Omega}) \|u\|^{(1)}_{m,\Omega}, \tag{5.4}$$

с постоянными, не зависящими от $u(x) \in W_m^1(\Omega)$. (Здесь и ниже, если речь идет о каком-то одном способе продолжения элементов $W_m^1(\Omega)$, мы обычно сохраняем за продолжением тот же символ $u(x)$, что и за первоначальным элементом $u(x)$. Далее, условимся, говоря коротко о продолжениях, иметь в виду, если не оговорено противное, что каждое такое продолжение обладает указанными свойствами.) Если возможно хотя бы одно такое продолжение на $\tilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}$, то по нему легко построить неограниченно много других, в том числе и таких, при которых продолженные элементы равны нулю вблизи $\partial\tilde{\Omega}$ и вне $\tilde{\Omega}$. Пусть исходное продолжение функции $u(x)$ на $\tilde{\Omega}$ обозначено через $\tilde{u}(x)$. Возьмем какую-либо гладкую (или кусочно-гладкую) функцию $\zeta(x)$, равную 1 на Ω и нулю вблизи $\partial\tilde{\Omega}$ и вне $\tilde{\Omega}$. Тогда функция $u(x)$, равная $\tilde{u}(x)\zeta(x)$ для $x \in \tilde{\Omega}$ и нулю вне $\tilde{\Omega}$, будет желаемым продолжением u на все R_n. Для целей данной книги нам достаточно иметь какое-нибудь одно продолжение указанного вида.

Укажем ряд областей Ω, для которых возможно нужное нам продолжение и которые используются в дальнейшем. Это легко сделать для шара K_R, положив функцию $u(x)$ в точке $x_0 \overline{\in} K_R$ равной функции $u(x)$ в точке $\tilde{x}_0$, инверсно-сопряженной к x_0 по отношению к шару K_R. Для гладких $u(x)$ ясно, что это продолжение дает кусочно-гладкие функции, и эти функции принадлежат $W_m^1(\tilde{\Omega})$ для любой ограниченной области $\tilde{\Omega} \supset \overline{K}_R$ и удовлетворяют неравенствам (5.3) и (5.4). Любой же элемент $u(x)$ из $W_m^1(\Omega)$ для $\Omega = K_R$ аппроксимируется в норме $W_m^1(\Omega)$ гладкими в $\overline{\Omega}$ функциями $u_k(x)$. Продолжая каждую из $u_k(x)$ указанным способом и используя (5.3) и (5.4) для $u_k - u_l$, убедимся, что функция $u(x)$, являющаяся пределом $u_k(x)$ в норме $W_m^1(\tilde{\Omega})$, будет желаемым продолжением $u(x)$ с Ω на $\tilde{\Omega}$. Это продолжение строится по $u(x)$ так же, как и для гладких функций.

Другой пример того, когда возможно обсуждаемое продолжение, получается из первого с помощью гомеоморфизма $y = y(x)$, с функциями $y = y(x)$, обладающими ограниченными об. пр. первого порядка. Как отмечено в § 4, гомеоморфизм $y = y(x)$, отображающий область Ω_x изменения x на область Ω_y изменения y и такой, что функции $y = y(x)$ и им обратные функции $x = x(y)$ обладают ограниченными об. пр. первого порядка (назовем такое преобразование *регулярным*), устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами $u(x)$ пространства $W_m^1(\Omega_x)$ и элементами $\tilde{u}(y) = u(x(y))$ пространства $W_m^1(\Omega_y)$, причем нормы $\|u\|_{m,\Omega_x}^{(1)}$ и $\|\tilde{u}\|_{m,\Omega_y}^{(1)}$ оцениваются одна через другую с постоянными, не зависящими от u и $\tilde{u}$. Благодаря этому, если шар $K_{R_1} = \{y: |y| < R_1\}$ переходит при «регулярном» преобразовании $x = x(y)$ в область $\tilde{\Omega}$ изменения x, то пространство $W_m^1(K_R)$ функций $\tilde{u}(y)$, где $K_R = \{y: |y| < R < R_1\}$, порождает пространство $W_m^1(\Omega)$ функций $u(x) = \tilde{u}(y(x))$, где $\overline{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$, и элементы этого пространства $u(x)$ допускают продолжение на $\tilde{\Omega}$, удовлетворяющее требованиям (5.3) и (5.4).

Так как шар K_R можно «регулярно» преобразовать в параллелепипед Π_l, причем так, чтобы несколько больший шар K_{R_1} «регулярно» преобразовался в некоторую окрестность $\tilde{\Pi}_l$ параллелепипеда Π_l, то только что проведенное рассуждение доказывает возможность продолжения с Π_l. Впрочем, желаемое продолжение с Π_l можно сделать и иначе — с помощью зеркального отражения от граней, так что гладкая в $\overline{\Pi}_l$ функция продолжится в виде непрерывной и кусочно-гладкой функции на все R_n.

Если область Ω допускает продолжение элементов $W_m^1(\Omega)$, то для нее $W_m^1(\Omega) = \tilde{W}_m^1(\Omega)$ (это верно и для $W_m^l(\Omega)$ с $\forall l$, если для продолжений имеют место неравенства типа (5.3), (5.4) для всех норм $\|\cdot\|_{m,\Omega}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, l$). Действительно, возьмем произвольный элемент $u(x) \in W_m^1(\Omega)$ и его продолжение $u(x)$ до элемента $\tilde{W}_m^1(\Omega)$ и усредним последнее в соответствии с формулой (4.9). В результате получим гладкие функции $u_\rho(x)$, которые при $\rho \to 0$ стремятся к $u(x)$ в норме $W_m^1(\Omega)$.

В книге [21_2] указан широкий класс областей Ω, допускающих указанное продолжение элементов $W_m^l(\Omega)$. Это так называемые «строго липшицевы области» (см. стр. 74, лемму Кальдерона и Зигмунда). К ним принадлежат, например, области с гладкой границей.

Введем подпространства пространств $W_m^l(\Omega)$, играющие важную роль при изучении краевых задач. Они получаются замыканием множества $\dot{C}^{(\infty)}(\Omega)$ в норме $W_m^l(\Omega)$ и обозначаются символом $\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$ *). При $l \geqslant 1$ $\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$ является собственным подпространством $W_m^l(\Omega)$. Используя операцию усреднения, легко проверить, что функции из $\dot{C}^l(\Omega)$ и даже из $\dot{W}_m^l(\Omega)$ входят в $\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$. Кроме этого, полезно иметь в виду, что если функцию $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$ продолжить нулем на все R_n, то получается функция, принадлежащая $\overset{\circ}{W}{}_m^l(\tilde{\Omega})$ для $\forall\tilde{\Omega} \supset \Omega$. Как будет объяснено ниже, элементы $\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$ на границе Ω равны нулю вместе со своими производными до порядка $l-1$ включительно.

Отметим одно важное и используемое в дальнейшем свойство слабой сходимости в $W_2^l(\Omega)$ (а также в любом его замкнутом подпространстве). Слабая сходимость в $W_2^l(\Omega)$ какой-либо подпоследовательности $\{u_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$ (как в любом гильбертовом пространстве), определяется как сходимость проекций $\{(u_m, \eta)_{2,\Omega}^{(l)}\}$ на любом элементе η пространства. Предельный элемент u имеет в качестве своих проекций $(u, \eta)_{2,\Omega}^{(l)}$ пределы числовых последовательностей $\{(u_m, \eta)_{2,\Omega}^{(l)}\}$. Необходимым и достаточным условием слабой компактности последовательности $\{u_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, является равномерная ограниченность норм $\| u_m \|_{2,\Omega}^{(l)}$.

Покажем, что слабая сходимость $\{u_m\}$ в пространстве $W_2^l(\Omega)$ (равно как и в любом его замкнутом подпространстве) эквивалентна слабой сходимости в $L_2(\Omega)$ самих функций $\{u_m\}$ и всех их об. производных $\{D^{(k)}u_m\}$ до порядка l включительно к предельной функции u и ее производным $D^{(k)}u$ соответственно. То, что из слабой схо-

---

*) Напомним, что точка над $C^l(\Omega)$ или над $W_m^l(\Omega)$ означает, что из этих совокупностей берутся лишь те функции, которые имеют компактный носитель, лежащий в Ω.

димости $\{D^{(k)}u_m\}$, $|k|=0, \ldots, l$, в $L_2(\Omega)$ к $D^{(k)}u$, $|k|=0, \ldots, l$, соответственно следует слабая сходимость в пространстве $W_2^l(\Omega)$ $\{u_m\}$ к u, очевидно. Обратное же утверждение доказывается так. Из слабой сходимости в $W_2^l(\Omega)$ $\{u_m\}$ к u следует равномерная ограниченность норм $\|D^{(k)}u_m\|_{2,\Omega}$, $|k|=0, \ldots, l$, $m=1, 2, \ldots$, а это гарантирует слабую компактность последовательностей $\{D^{(k)}u_m\}$, $|k|=0, \ldots, l$, $m=1, 2, \ldots$, в $L_2(\Omega)$.

Если функции $v^{(k)}$, $|k|=0, \ldots, l$, являются слабыми пределами в $L_2(\Omega)$ для каких-либо подпоследовательностей, выделенных из $\{D^{(k)}u_m\}$, $|k|=0, \ldots, l$, $m=1, 2, \ldots$, то согласно свойствам об. производных каждое $v^{(k)}$ есть $D^{(k)}v$ от функции v, являющейся слабым пределом в $L_2(\Omega)$ подпоследовательности, выделенной из $\{u_m\}$, $m=1, 2, \ldots$, и, следовательно, v есть слабый предел в пространстве $W_2^l(\Omega)$ для взятой нами подпоследовательности из $\{u_m\}$, $m=1, 2, \ldots$. Но по условию слабым пределом $\{u_m\}$, $m=1, 2, \ldots$, в пространстве $W_2^l(\Omega)$ является функция u. В силу его единственности $v=u$. Из всего сказанного вытекает, что каждая из последовательностей $\{D^{(k)}u_m\}$, $m=1, 2, \ldots$, сходится слабо в $L_2(\Omega)$ к $D^{(k)}u$ соответственно.

Наконец, напомним, что любое замкнутое подпространство гильбертова пространства замкнуто и в отношении слабой сходимости. В частности, из слабой сходимости в $W_2^l(\Omega)$ последовательности $\{u_m\}$, $m=1, 2, \ldots$, элементов $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ следует, что предельный элемент для нее принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$.

§ 6. Пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ и их основные свойства

Гильбертово пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ играет основную роль при изучении первой краевой задачи для уравнений 2-го порядка различных типов, а пространство $W_2^1(\Omega)$ — при изучении других краевых задач классического типа. Скалярное произведение в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и в $W_2^1(\Omega)$

было определено равенством

$$(u, v)^{(1)}_{2, \Omega} = \int_\Omega (uv + u_x v_x)\, dx\, ^{*)}. \tag{6.1}$$

Будем считать Ω ограниченной областью R_n. Покажем, что в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ можно ввести новое скалярное произведение

$$[u, v] = \int_\Omega u_x v_x\, dx, \tag{6.2}$$

порождающее норму, эквивалентную исходной. Для этого убедимся в справедливости для $\forall u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ неравенства

$$\int_\Omega u^2\, dx \leqslant c^2_\Omega \int_\Omega u^2_x\, dx\, ^{*)} \tag{6.3}$$

(неравенства Пуанкаре — Фридрихса) с постоянной c_Ω, зависящей лишь от области Ω. Неравенство (6.3) достаточно доказать лишь для $u(x)$ из $\dot{C}^\infty(\Omega)$, ибо отсюда неравенство (6.3) для $\forall u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ получается «простым замыканием в норме $W^1_2(\Omega)$». Поясним, что под этим понимается. Пусть $u(x)$ есть какой-либо элемент $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Аппроксимируем его в норме $W^1_2(\Omega)$ функциями $\{u^{(m)}\}$, $m = 1, 2, \ldots$ из $\dot{C}^\infty(\Omega)$. Пусть (6.3) для $u^{(m)}$ доказано. Тогда, взяв (6.3) для $u^{(m)}$ и перейдя в нем к пределу по $m \to \infty$ (в норме $W^1_2(\Omega)$), придем к (6.3) для $u(x)$. Эта процедура и называется кратко «замыканием (6.3) в норме $W^1_2(\Omega)$». Мы ее часто будем использовать при доказательстве неравенств вида

$$\| u \|_{B_1} \leqslant c \| u \|_{B_2} \tag{6.4}$$

для $\forall u \in B_2$, где B_i — два банахова пространства. Именно, сначала (6.4) будет доказываться для какого-либо

---

*) Здесь и далее $u_x v_x = \sum_{k=1}^n u_{x_k} v_{x_k}$, $u^2_x = \sum_{i=1}^n u^2_{x_i}$ и по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n, если не оговорено противное.

плотного в B_2 множества $\mathfrak{M}$ элементов (обычно гладких функций), а потом замыкаться в норме B_2 Но вернемся к доказательству (6.3) для $u(x) \in \dot{C}^\infty(\Omega)$. Заключим Ω в какой-либо параллелепипед Π и будем считать без ограничения общности, что $\Pi = \{x : 0 < x_i < l_i\}$. Как будет видно из доказательства, параллелепипед Π выгоднее всего выбрать так, чтобы одна из его сторон имела наименьшую возможную длину. Пусть это будет l_1. Представим $u(x)$ в виде

$$u(x_1, x_1') = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(y_1, x_1')}{\partial y_1} dy_1, \tag{6.5}$$

$x_1' = (x_2, \ldots, x_n) \in \Pi_1 = \{x_1' : 0 < x_i < l_i, \quad i = 2, \ldots, n\}$, считая $u(x) = 0$ для $x \overline{\in} \Omega$. Возведем обе части этого равенства в квадрат, результат проинтегрируем по Π и правую часть оценим по неравенству Коши. Это даст неравенство

$$\int_\Pi u^2(x)\,dx = \int_0^{l_1} dx_1 \int_{\Pi_1} \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial u(y_1, x_1')}{\partial y_1} dy_1 \right)^2 dx_1' \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{l_1} dx_1 \int_{\Pi_1} \left[x_1 \int_0^{l_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 dy_1 \right] dx_1' = \frac{l_1^2}{2} \int_\Pi \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx,$$

из которого ясно, что (6.3) справедливо с $c_\Omega^2 = l_1^2/2$. Из него следует эквивалентность норм $[u, u]^{1/2}$ и $\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}$, соответствующих (6.2) и (6.1).

В неравенстве (6.3) постоянную c_Ω можно взять также в виде $c^2 |\Omega|^{2/n}$, где $|\Omega| = \operatorname{mes} \Omega$, а c — абсолютная постоянная, зависящая лишь от n, т. е. для $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{2,\Omega} \leqslant c |\Omega|^{1/n} \|u_x\|_{2,\Omega}. \tag{6.6}$$

Доказательство этого факта несколько сложнее, и так как без него «можно обойтись», мы отнесем его к § 7, в котором излагаются разные красивые предложения, не используемые в основном тексте книги.

Перейдем теперь к доказательству наиболее важной теоремы о пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Теорема 6.1 (теорема Ф. Реллиха). *Ограниченное множество в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ компактно в $L_2(\Omega)$* *).

Это утверждение принято формулировать еще так: $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *вкладывается в* $L_2(\Omega)$ *компактно*. Известно несколько способов его доказательства. Приведем один из них.

Продолжим все элементы $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ нулем вне Ω и рассмотрим их на параллелепипеде $\Pi = \{x : 0 < x_i < l_i\}$, считая $\Omega \subset \Pi$. Как отмечено в конце § 5, при таком продолжении мы получаем элементы $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Pi)$, нормы которых $\|\cdot\|_{2,\Pi}$ и $\|\cdot\|_{2,\Pi}^{(1)}$ совпадают с $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ и $\|\cdot\|_{2,\Omega}^{(1)}$ соответственно. Разобьем Π на элементарные параллелепипеды ω_i со сторонами l_k/N, $k = 1, \ldots, n$, и гранями, параллельными координатным плоскостям. Для любой функции $u(x)$ из $W_2^1(\omega_i)$ справедливо неравенство Пуанкаре:

$$\int_{\omega_i} u^2\,dx \leqslant \frac{1}{|\omega_i|}\left(\int_{\omega_i} u\,dx\right)^2 + \frac{n}{2}\int_{\omega_i}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{l_k}{N}\right)^2 u_{x_k}^2\,dx \tag{6.7}$$

(его доказательство мы приведем ниже). Из него следует

$$\int_{\Omega} u^2\,dx = \int_{\Pi} u^2\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{N^n}\frac{1}{|\omega_i|}\left(\int_{\omega_i} u\,dx\right)^2 + \frac{n}{2N^2}\int_{\Omega} l_k^2 u_{x_k}^2\,dx. \tag{6.8}$$

Пусть $\|u^{(m)}\|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant c$. В силу теоремы 1.2 множество $\{u^{(m)}\}$ слабо компактно $L_2(\Omega)$. Предположим, не ограничивая общности, что вся последовательность $\{u^{(m)}\}$ слабо сходится в $L_2(\Omega)$. Тогда для любых $u^{(p)}$ и $u^{(q)}$ неравенство (6.8) дает оценку

$$\|u^{(p)} - u^{(q)}\|_{2,\Omega}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{N^n}\frac{1}{|\omega_i|}\left[\int_{\omega_i}(u^{(p)} - u^{(q)})\,dx\right]^2 + \frac{n}{2N^2} l_k^2 \|u_{x_k}^{(p)} - u_{x_k}^{(q)}\|_{2,\Omega}^2. \tag{6.9}$$

*) Еще раз напомним, что в этом параграфе мы считаем Ω ограниченной областью.

Последнее слагаемое в правой части (6.9) может быть сделано сколь угодно малым сразу для всех p и q за счет выбора малого $|\omega_i|$ (т. е. большого N), а первое будет стремиться к нулю при p и $q\to\infty$ и фиксированном разбиении П за счет слабой сходимости $\{u^{(m)}\}$ в $L_2(\Pi)$. Тем самым $\|u^{(p)}-u^{(q)}\|_{2,\Omega}\to 0$ при p и $q\to\infty$, т. е. $\{u^{(m)}\}$ сходится в $L_2(\Pi)$. Теорема доказана.

Для элементов $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедлива центральная формула теории краевых задач — формула интегрирования по частям, причем для них она имеет особенно простой вид и справедлива при любой области Ω. Именно, для $\forall u(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $\forall v(x)\in W_2^1(\Omega)$

$$\int_\Omega u_{x_i} v\,dx = -\int_\Omega u v_{x_i}\,dx, \qquad i=1,\ \ldots,\ n. \tag{6.10}$$

Справедливо и несколько более общее предложение: формула

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx = 0 \tag{6.11}$$

для любой функции w из $L_1(\Omega)$, имеющей об. пр. $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ из $L_1(\Omega)$, которую можно аппроксимировать функциями $\{w^{(m)}\}$, $m=1,2,\ldots$ из $\dot{C}^\infty(\Omega)$ в следующем смысле: $w^{(m)}\to w$ в $L_1(\Omega)$ и $\frac{\partial w^{(m)}}{\partial x_i}\to\frac{\partial w}{\partial x_i}$ в $L_1(\Omega)$. Действительно, для $w^{(m)}$ соотношение (6.11) верно. Переходя в нем к пределу по $m\to\infty$, получим (6.11) для функции w. Если $w\in L_1(\Omega)$, обращается в нуль вблизи $\partial\Omega$ и имеет $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ из $L_1(\Omega)$, то ее можно аппроксимировать указанным образом функциями $w^{(m)}$ из $\dot{C}^\infty(\Omega)$ (в качестве $w^{(m)}$ можно взять усреднения w типа (4.9)) и потому для нее формула (6.11) справедлива. Если u и $v\in L_2(\Omega)$ и имеют об. пр. $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ из $L_2(\Omega)$ (i фиксировано) и если к u можно приблизиться функциями $u^{(m)}$ из $\dot{C}^\infty(\Omega)$ так, что $u^{(m)}$ и $\frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_i}$ сходятся к u и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ в норме $L_2(\Omega)$, то для

u и v имеет место соотношение (6.10) при взятом i. Действительно, функции $w^{(m)} = u^{(m)}v$ принадлежат $L_1(\Omega)$, обращаются в нуль вблизи $\partial\Omega$ и имеют об. пр. $\frac{\partial w^{(m)}}{\partial x_i} = u^{(m)} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_i} v$ из $L_1(\Omega)$. Следовательно, для них справедлива формула (6.11). Переходя в ней к пределу по $m \to \infty$ (а это возможно), получим (6.11) для w или, что то же, (6.10) для u и v и взятого i. Так как $\forall u$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ может быть аппроксимирована в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциями из $\dot{C}^\infty(\Omega)$, то для нее и $\forall v \in W_2^1(\Omega)$ будет верно соотношение (6.10) при всех $i = 1, \ldots, n$.

Замечание 6.1. Как описано в § 4, функции w из $L_1(\Omega)$ с w_{x_i} из $L_1(\Omega)$ для почти всех прямых, параллельных оси x_i и пересекающих Ω, абсолютно непрерывны по x_i на каждом интервале, лежащем на этих прямых и принадлежащем Ω. Более того, они могут быть доопределены по непрерывности на концы этих интервалов. Если функция w такова, что такое доопределение дает нулевое значение w на всех концах интервалов, то формула (6.11) для w справедлива. Во второй части данного параграфа мы определим «следы элементов $W_2^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$» способом, отличным от только что описанного. Это будет сделано для $\partial\Omega$, обладающих некоторой гладкостью, причем следы окажутся однозначно определенными функциями на $\partial\Omega$ (точнее, элементами $L_2(\partial\Omega)$). Указанный же здесь способ доопределения w на $\partial\Omega$ (пригодный для любой области Ω) приводит, вообще говоря, к многозначной функции w на $\partial\Omega$ (что вызвано возможностью подходить к точкам границы с разных сторон).

Приведем доказательство неравенства (6.7) или, что то же, неравенства

$$\int_{\Pi_l} u^2\,dx \leqslant \frac{1}{|\Pi_l|}\left(\int_{\Pi_l} u\,dx\right)^2 + \frac{n}{2}\int_{\Pi_l} \sum_{k=1}^n l_k^2 u_{x_k}^2\,dx, \qquad (6.7')$$

в котором $\Pi_l = \{x\colon 0 < x_i < l_i\}$. Его достаточно проверить лишь для гладких функций $u(x)$, ибо такие функции плотны в $W_2^1(\Pi_l)$. Итак, пусть $u(x) \in C^1(\overline{\Pi}_l)$. Перейдем в (6.7′) к новым координатам $y_i = x_i/l_i$, $i = 1, \ldots, n$. Это после умножения на $(l_1 \ldots l_n)^{-1}$ даст эквивалентное неравенство

$$\int_{\Pi_1} \tilde{u}^2\, dy \leqslant \left(\int_{\Pi_1} \tilde{u}\, dy\right)^2 + \frac{n}{2} \int_{\Pi_1} \tilde{u}_y^2\, dy \tag{6.7″}$$

для функции $\tilde{u}(y) = u(l_1 y_1, \ldots, l_n y_n)$ в кубе $\Pi_1 = \{y\colon 0 < y_i < 1\}$. Для доказательства же (6.7″) возьмем произвольные две точки $y = (y_1, \ldots, y_n)$ и $y' = (y_1', \ldots, y_n')$ и цепочку точек $y^{(1)} = (y_1', y_2, \ldots, y_n)$, $y^{(2)} = (y_1', y_2', y_3, \ldots, y_n)$, $\ldots$, $y^{(n)} = y'$. В силу теоремы Ньютона — Лейбница

$$\tilde{u}(y') - \tilde{u}(y) = \int_{y}^{y^{(1)}} \tilde{u}_{\tau_1}(\tau_1, y_2, \ldots, y_n)\, d\tau_1 + \\ + \int_{y^{(1)}}^{y^{(2)}} \tilde{u}_{\tau_2}(y_1', \tau_2, y_3, \ldots, y_n)\, d\tau_2 + \ldots \\ \ldots + \int_{y^{(n-1)}}^{y^{(n)}} \tilde{u}_{\tau_n}(y_1', y_2', \ldots, \tau_n)\, d\tau_n.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат и оценим правую часть, используя неравенство Коши, следующим образом:

$$\tilde{u}^2(y') - 2\tilde{u}(y')\tilde{u}(y) + \tilde{u}^2(y) \leqslant \\ \leqslant n\left(\int_0^1 \tilde{u}_{\tau_1}^2\, d\tau_1 + \ldots + \int_0^1 \tilde{u}_{\tau_n}^2\, d\tau_n\right). \tag{6.12}$$

Проинтегрировав (6.12) по $y \in \Pi_1$ и $y' \in \Pi_1$, получим неравенство

$$2\int_{\Pi_1} \tilde{u}^2(y)\, dy - 2\left(\int_{\Pi_1} \tilde{u}(y)\, dy\right)^2 \leqslant n \int_{\Pi_1} \sum_{k=1}^{n} \tilde{u}_{y_k}^2\, dy,$$

совпадающее с (6.7″).

Обратимся теперь к пространствам $W_2^1(\Omega)$ для различных областей Ω. Начнем с простейшего случая, когда Ω есть параллелепипед $\Pi_l=\{x: 0<x_i<l_i\}$. Для него имеет место компактность вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Это видно из доказательства теоремы 6.1, в котором принадлежность $u^{(m)}$ к $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ была использована лишь в самом начале вывода для возможности такого продолжения $u^{(m)}(x)$ на Π_l, при котором эти функции сохраняют об. пр. первого порядка и имеют равномерно ограниченные нормы $\|\cdot\|_{2,\Pi_l}^{(1)}$. В данном случае функции $u^{(m)}(x)$ обладают этими свойствами по условию, и к ним непосредственно применимы все дальнейшие рассуждения из доказательства теоремы 6.1.

Пусть теперь область Ω допускает продолжение элементов $W_2^1(\Omega)$ на какую-либо более широкую область $\tilde{\Omega}\supset\bar{\Omega}$ в том смысле, как это описано в конце § 5 (см. (5.3) и (5.4)). Тогда такого же типа продолжение возможно и на параллелепипед $\Pi_l\supset\bar{\Omega}$ с выполнением неравенств (5.3) и (5.4) с $m=2$ и $\tilde{\Omega}=\Pi_l$. Отсюда же и из компактности вложения $W_2^1(\Pi_l)$ в $L_2(\Pi_l)$ следует компактность вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Далее, легко понять, что это свойство сохраняется и для областей Ω, для которых $\bar{\Omega}$ может быть представлена в виде $\bigcup_{i=1}^{N}\bar{\Omega}_i$, где Ω_i суть подобласти Ω, допускающие продолжение элементов $W_2^1(\Omega_i)$. Итак, доказана теорема

Теорема 6.2. *Если $\bar{\Omega}$ можно представить в виде $\bigcup_{i=1}^{N}\bar{\Omega}_i$, где Ω_i — подобласти Ω, допускающие продолжение элементов $W_2^1(\Omega_i)$, то любое ограниченное множество в $W_2^1(\Omega)$ компактно в $L_2(\Omega)$* *).

Займемся теперь вопросом о следах элементов $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ на поверхностях размерности $n-1$. Возьмем

*) Условия теоремы 6.2 выполняются, например, для областей с гладкой границей.

сначала гладкую функцию $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ и множество Γ, являющееся областью на какой-либо гиперплоскости. Пусть ради удобства записи Γ есть область изменения $x_1'=(x_2, \ldots, x_n)$, лежащая на плоскости $x_1=0$, и пусть цилиндр $Q_\delta \equiv Q_\delta(\Gamma)=\{x\colon\ 0<x_1<\delta,\ x_1'\in\Gamma\}$ тоже принадлежит Ω. В силу формулы Ньютона — Лейбница для любой $u\in C(\overline{Q}_\delta)$, имеющей непрерывную в $\overline{Q}_\delta$ производную $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, справедливо равенство:

$$u(x_1, x_1') - u(0, x_1') = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\tau, x_1')}{\partial \tau}\, d\tau. \tag{6.13}$$

Возведем обе части (6.13) в квадрат, проинтегрируем по Γ и правую часть оценим, используя неравенство Коши, так:

$$\|u(x_1, x_1') - u(0, x_1')\|_{2,\Gamma}^2 = \\ = \int_\Gamma \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial \tau}\, d\tau\right)^2 dx_1' \leqslant x_1 \int_0^{x_1}\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx. \tag{6.14}$$

Выведем еще одно следствие из представления (6.13). Для этого перенесем первое слагаемое из левой части (6.13) в правую, полученное равенство возведем в квадрат и проинтегрируем по $Q_\delta(\Gamma)$. После этого разделим его на δ и правую часть оценим сверху следующим образом:

$$\int_\Gamma u^2(0, x_1')\, dx_1' = \frac{1}{\delta}\int_{Q_\delta(\Gamma)} \left[-u(x) + \int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial \tau}\, d\tau\right]^2 dx \leqslant \\ \leqslant \frac{2}{\delta}\int_{Q_\delta(\Gamma)} u^2\, dx + \frac{2}{\delta}\int_\Gamma dx_1' \int_0^\delta \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial \tau}\, d\tau\right)^2 dx_1 \leqslant \\ \leqslant \frac{2}{\delta}\int_{Q_\delta(\Gamma)} u^2\, dx + \frac{2}{\delta}\int_\Gamma dx_1' \int_0^\delta x_1 \int_0^\delta \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau\, dx_1 = \\ = \frac{2}{\delta}\int_{Q_\delta(\Gamma)} u^2(x)\, dx + \delta \int_{Q_\delta(\Gamma)} u_{x_1}^2\, dx. \tag{6.15}$$

Неравенства (6.14), (6.15), выведенные нами для «хороших» $u(x)$, остаются справедливыми и для любой $u(x) \in L_2(Q_\delta)$, имеющей $u_{x_1} \in L_2(Q_\delta)$. Для такой $u(x)$ можно построить (замечание 5.1) последовательность гладких функций $\{u^{(m)}(x)\}$, которые сходятся в $L_2(Q_\delta)$ к $u(x)$ и для которых $u_{x_1}^{(m)}$ также сходятся в $L_2(Q_\delta)$ к u_{x_1}. Отсюда и из неравенства (6.15) следует, что $u^{(m)}(x)$ будут сходиться в $L_2(\Gamma)$. Функцию, определяемую на Γ как предел $u^{(m)}(x)$ в $L_2(\Gamma)$, естественно считать следом $u(x)$ на Γ. Из (6.14) видно, что такие же следы $u(x)$ имеет на всех сечениях Q_δ плоскостями $x_1 = x_1^0$, $x_1^0 \in [0, \delta]$. Переходя в (6.14) и (6.15), выписанных для $u^{(m)}$, к пределу по $m \to \infty$, убедимся, что эти соотношения сохраняются и для предельной функции $u(x)$ (и, тем более, для $\forall u \in W_2^1(\Omega)$). В силу (6.14) следы $u(x_1, x_1')$ на сечениях Q_δ указанными выше плоскостями являются элементами $L_2(\Gamma)$, непрерывно зависящими от параметра $x_1 \in [0, \delta]$.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 6.3. *Для любой функции $u(x) \in L_2(Q_\delta)$, имеющей $u_{x_1} \in L_2(Q_\delta)$, существует на любом сечении Q_δ плоскостью $x_1 = x_1^0$, $x_1^0 \in [0, \delta]$, след, как элемент $L_2(\Gamma)$, причем этот след непрерывно зависит от $x_1^0 \in [0, \delta]$ в норме пространства $L_2(\Gamma)$. Для $u(x)$ справедливы соотношения* (6.14), (6.15).

Это утверждение принято формулировать кратко как ограниченную вложимость $W_2^1(Q_\delta)$ в $L_2(\Gamma)$.

Поясним, как надо понимать теорему 6.3 и аналогичные «теоремы вложения», формулируемые ниже. Пусть $u(x)$ есть произвольный элемент, удовлетворяющий условиям теоремы. Тогда, согласно теореме 6.3, существует такой представитель этого элемента (т. е. такая функция, эквивалентная $u(x)$ на $\bar{Q}_\delta(\Gamma)$), для которого верны ее утверждения. Из доказательства виден способ нахождения такого представителя для $u(x)$: надо взять какую-либо последовательность $u^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, из $C^1(\bar{Q}_\delta(\Gamma))$, сходящуюся к $u(x)$ указанным выше образом, и назначить следом $u(x)$ на $\forall$ сечении $\bar{Q}_\delta$ плоскостью $x_1 = x_1^0$ предел в норме $L_2(\Gamma)$ последовательности $\{u^{(m)}(x_1^0, x_1')\}$.

Замечание 6.2. Нетрудно видеть, что след элемента $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$, определенный на Γ как элемент $L_2(\Gamma)$, не зависит от выбора последовательности гладких функций $\{u^{(m)}\}$, аппроксимирующих $u(x)$. Этот след меняется непрерывно как элемент $L_2(\Gamma)$ при сдвиге Γ не только в направлении x_1, но и в любом другом направлении, лишь бы сдвигаемое сечение не выходило из Ω.

Докажем теперь, что $W_2^1(\Omega)$ вкладывается в $L_2(\Gamma)$ не только ограниченно, но и компактно.

Теорема 6.4. *Пусть область Ω содержит цилиндр $Q_\delta(\Gamma)$ такого же типа, как и в теореме 6.3, и пусть для $Q_\delta(\Gamma)$ или какой-либо области $\Omega' \subseteq \Omega$, содержащей этот цилиндр, справедливо утверждение теоремы 6.2. Тогда из любой ограниченной в норме $W_2^1(\Omega)$ последовательности $\{u^m\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в $L_2(\Gamma)$ равномерно относительно $x_1^0 \in [0, \delta]$.*

Действительно, пусть $\| u^{(m)} \|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant c$. По теореме 6.2 $\{u^{(m)}\}$ компактно в $L_2(Q_\delta(\Gamma))$. Предположим, не ограничивая общности, что вся последовательность $\{u^{(m)}\}$ сходится к $u(x)$ в $L_2(Q_\delta(\Gamma))$. Рассмотрим неравенство (6.15) для разностей $u^{(p)} - u^{(q)}$ и $\delta_1 \leqslant \delta$. Правая часть его может быть сделана сколь угодно малой при достаточно больших p и q, ибо, выбрав сначала δ_1 в (6.15) столь малым, чтобы $\delta_1 \| u_{x_1}^{(p)} - u_{x_1}^{(q)} \|_{2, Q_\delta(\Gamma)}$ оказалось меньшим $\varepsilon/2$ для всех p и q, мы можем указать затем такое N_ε, что при p и $q \geqslant N_\varepsilon$ первое слагаемое будет меньше $\varepsilon/2$. Тем самым $\| u^{(p)} - u^{(q)} \|_{2,\Gamma}^2$ будет меньше ε при p и $q \geqslant N_\varepsilon$.

Такая же оценка $\| u^{(p)}(x_1, x_1') - u^{(q)}(x_1, x_1') \|_{2,\Gamma}$ имеет место для всех x_1 из $[0, \delta]$, если учесть, что в левой части неравенства (6.15) вместо $\int\limits_\Gamma u^2(0, x_1')\, dx_1'$ можно поставить $\int\limits_\Gamma u^2(x_1, x_1')\, dx_1'$ с $\forall x_1 \in [0, \delta]$, ч. т. д.

Обозначим через $W_{2,0}^1(Q_\delta)$, где $Q_\delta = \{x \colon x_1 \in (0, \delta), x_1' \in \Gamma\}$, замкнутое подпространство пространства $W_2^1(Q_\delta)$, плотным множеством в котором являются бесконечно дифференцируемые функции, носитель которых не пересекается с боковой поверхностью $S_\delta=\{x\colon x_1\in(0,\delta),\ x_1'\in\partial\Gamma\}$ цилиндра Q_δ. (Как будет видно из последующего, $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,0}(Q_\delta)$ состоит, грубо говоря, из элементов $W_2^1(Q_\delta)$, обращающихся в нуль на S_δ). Если $\forall u(x)\in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,0}(Q_\delta)$ продолжить нулем для $x_1\in(0,\delta)$, $x_1'\,\overline{\in}\,\Gamma$, то получим элемент $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,0}(\tilde Q_\delta)$, $\tilde Q_\delta=\{x\colon x_1\in(0,\delta),\ x_1'\in\tilde\Omega\}$ при $\forall\tilde\Omega\supset\Omega$, причем его норма в $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,0}(\tilde Q_\delta)$ равна $\|u\|^{(1)}_{2,Q_\delta}$. Из теорем 6.2 и 6.4 вытекает

Следствие 6.1. Пусть элементы последовательности $\{u^{(m)}\}$ принадлежат $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,0}(Q_\delta)$ и их нормы $\|u^{(m)}\|^{(1)}_{2,Q_\delta}$ равномерно ограничены. Тогда из $\{u^{(m)}\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится сильно в $L_2(Q_\delta)$ и сильно в $L_2(\Gamma)$ равномерно относительно $x_1\in[0,\delta]$ (никаких ограничений на область Γ, кроме ее ограниченности, при этом не накладывается).

Все предложения, установленные нами для плоских кусков Γ, переносятся и на случай, когда Γ есть область на гладкой гиперповерхности, в том числе и на гладкой части границы Ω. Пусть Γ однозначно проектируется на гиперплоскость (без ограничения общности можем считать, что это есть плоскость $x_1=0$) в виде области $\Gamma^{(1)}$, так что Γ имеет явное уравнение $x_1=f(x_1')$, $x_1'\in\Gamma^{(1)}$, и $f\in C^1(\overline{\Gamma}{}^{(1)})$, и пусть «криволинейный цилиндр» $Q_\delta(\Gamma)=\{x\colon f(x_1')<x_1<f(x_1')+\delta,\ x_1'\in\Gamma^{(1)}\}$ принадлежит Ω. Введем в $Q_\delta(\Gamma)$ новые координаты: $y_1=x_1-f(x_1')$, $y_k=x_k$, $k=2,\ldots,n$. Функция $\tilde u(y)=u(x(y))$ будет элементом $W_2^1(\tilde Q_\delta)$, где $\tilde Q_\delta=\{y\colon 0<y_1<\delta,\ x_1'\in\Gamma^{(1)}\}$, и потому для нее справедливы неравенства (6.14) и (6.15), записанные в координатах y. Из них, возвращаясь к старым координатам x, выведем неравенства

$$\int_\Gamma [u(x+le_1)-u(x)]^2\,ds\equiv\|u(x+le_1)-u(x)\|^2_{2,\Gamma}\leqslant$$
$$\leqslant cl\int_{Q_l(\Gamma)} u_x^2\,dx,\quad 0\leqslant l\leqslant\delta,\tag{6.16}$$

и

$$\|u(x)\|^2_{2,\Gamma}\leqslant c\left[\frac{1}{\delta}\|u(x)\|^2_{2,Q_\delta(\Gamma)}+\delta\|u_x(x)\|^2_{2,Q_\delta(\Gamma)}\right].\tag{6.17}$$

в которых $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, а постоянная c определяется первыми производными функции $f(x_1')$. В формулах (6.16), (6.17) сдвиг Γ и аргументов у $u(x)$ взят в направлении одной из координатных осей. С таким же успехом это можно сделать и по другим некасательным к Γ путям, вводя вместо x те или иные невырожденные координаты y с ограниченными якобианами $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|$ и $\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|$. Например, в (6.16) можно считать, что e_1 есть единичный вектор нормали к Γ в точке x, а $Q_l(\Gamma)$ — «криволинейный цилиндр», образованный отрезками этих нормалей длины l, выходящими из точек Γ.

Если $u \in W_2^1(\Omega)$ и граница $\partial\Omega$ (или ее часть Γ) есть гладкая поверхность, то, имея в виду наличие для $u(x)$ неравенств типа (6.16), (6.17), говорят, что ее граничные значения (т. е. след) на $\partial\Omega$ (на Γ) дают элемент $L_2(\partial\Omega)$ $(L_2(\Gamma))$ и «принимаются в среднем квадратичном». Это же имеет место и для Ω с «кусочно-гладкими границами $\partial\Omega$», т. е. такими, которые можно разбить на конечное число кусков $\overline{\Gamma}_i$, удовлетворяющих требованиям, гарантирующим для них справедливость неравенств вида (6.16) и (6.17) (эти достаточные условия на Γ_i сформулированы выше). В частности, для таких Ω справедливы неравенства

$$\| u(x - l\boldsymbol{n}) - u(x)\|_{2,\,\partial\Omega}^2 \leqslant cl \int_{\Omega_l} u_x^2\,dx, \quad 0 \leqslant l \leqslant \delta, \tag{6.18}$$

$$\| u\|_{2,\,\partial\Omega}^2 \leqslant c\left[\frac{1}{\delta}\| u\|_{2,\,\Omega_\delta}^2 + \delta\| u_x\|_{2,\,\Omega_\delta}^2\right], \tag{6.19}$$

в которых Ω_δ есть множество точек области, удаленных от $\partial\Omega$ на расстояние, не превышающее δ (такое множество принято называть «пограничной полосой ширины δ»), δ — достаточно малое число, а $\boldsymbol{n}$ — единичная (всюду внешняя по отношению к Ω) нормаль к $\partial\Omega$. Таким образом мы установили следующее обобщение теоремы 6.3.

Т е о р е м а 6.5. *Для элементов $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ определены следы на областях Γ гладких гиперповерхностей как элементы $L_2(\Gamma)$, и они непрерывно меняются (как* *элементы* $L_2(\Gamma)$) *при сдвиге* Γ *). *Для них справедливы неравенства вида* (6.16), (6.17). *Если* $\partial\Omega$ (*или ее часть* Γ) *есть гладкая* (*или кусочно-гладкая*) *поверхность, то на ней определяются следы* $u(x)$, *как элементы* $L_2(\partial\Omega)$ (*соответственно* $L_2(\Gamma)$), *и для них справедливы неравенства* (6.18), (6.19) (*соответственно* (6.16), (6.17)).

Теорема 6.4 также обобщается на криволинейные куски Γ, в частности, справедлива

Теорема 6.6. *Если область* Ω *имеет гладкую границу* $\partial\Omega$, *то ограниченное множество из* $W_2^1(\Omega)$ *компактно в* $L_2(\partial\Omega)$. *Это утверждение о компактности верно и для областей* Ω *с «кусочно-гладкими границами»* $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \bar{\Gamma}_i$, *если для каждого из кусков* Γ_i *можно построить цилиндр типа* $Q_\delta(\Gamma_i) \subset \Omega$, *для которого имеют место неравенства* (6.16), (6.17) *и компактность вложения* $W_2^1(\Omega)$ *в* $L_2(Q_\delta(\Gamma_i))$.

Замечание 6.3. Для элементов $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ гладкость границы области Ω не играет роли при выводе неравенств (6.16) и (6.17), ибо каждую из этих функций можно продолжить нулем вне Ω и считать, например, элементом $\overset{\circ}{W}{}_2^1(K)$, где K — шар, заключающий в себе $\bar{\Omega}$. Благодаря этому множество элементов $\{u\}$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, продолженных нулем вне Ω, будет компактным в $L_2(\Gamma)$, где Γ есть пересечение какой-либо гладкой гиперповерхности с произвольным шаром K_R, $R < \infty$. Относительно элементов $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ принято говорить, что они принимают нулевые граничные значения. Это надо понимать так: если Γ есть гладкий кусок границы, для которого $Q_\delta(\Gamma) \subset \Omega$, то для $u(x) \in \dot{C}^\infty(\Omega)$ неравенство (6.18) превращается в неравенство

$$\|u(x - ln)\|_{2,\Gamma}^2 = \int_\Gamma u^2(x - ln)\,ds \leqslant cl \int_{Q_l(\Gamma)} u_x^2\,dx,\quad 0 \leqslant l \leqslant \delta. \tag{6.20}$$

---

*) Имеется в виду сдвиг, описанный при выводе неравенства (6.16) или неравенства вида (6.18).

По замыканию в норме $W_2^1(Q_l(\Gamma))$ оно остается справедливым и для $\forall u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Из него видно, что при $l \to 0$ $\| u(x - ln) \|_{2,\Gamma} \to 0$. Если же $\partial\Omega$ содержит такие части $\hat{\Gamma}$, для которых поверхностные интегралы $\int\limits_{\hat{\Gamma}} u^2(x - ln)\, ds$ (понимаемые в обычном смысле) не существуют, то около таких $\hat{\Gamma}$ поведение $u(x)$ можно охарактеризовать, например, так: взять любую область Γ на какой-нибудь гладкой гиперповерхности, не имеющую общих точек с Ω, но содержащую часть точек $\hat{\Gamma}$. Для нее будет справедливо (6.20), если считать $u(x)$ доопределенной нулем вне Ω.

Представляет естественный интерес обратный вопрос: пусть $u(x)$ принадлежит $W_2^1(\Omega)$ и принимает «в среднем квадратичном» нулевые граничные значения. Будет ли тогда $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$? Ответ положителен, например, для строго липшицевых областей Ω и областей Ω с гладкой границей. Однако мы не будем доказывать этого, ибо основной материал книги изложен так, что для его формулировки и доказательства нет надобности проводить подобные кропотливые рассмотрения (о них см. [23₁]).

Обратимся теперь к формуле интегрирования по частям

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx = -\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} uv \cos nx_i\, ds. \qquad (6.21)$$

В ней n (как и везде в книге) есть внешняя по отношению к Ω единичная нормаль к $\partial\Omega$, а ds — инфинитезимальный элемент площади поверхности $\partial\Omega$. Хорошо известно, что (6.21) справедлива для гладких поверхностей $\partial\Omega$ и непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций u и v, имеющих непрерывные в $\overline{\Omega}$ производные u_{x_i} и v_{x_i}. Отсюда и из доказанных в этом параграфе свойств следов элементов $W_2^1(\Omega)$ следует, что (6.21) сохраняется (для всех $i = 1, 2, \ldots, n$) и для функций $u(x)$ и $v(x)$, принадлежащих $W_2^1(\Omega)$, если $\partial\Omega$ — гладкая поверхность (для проверки этого надо аппроксимировать u и v гладкими в $\overline{\Omega}$

функциями $\{u^{(m)}\}$ и $\{v^{(m)}\}$, записать (6.21) для $u^{(m)}$ и $v^{(m)}$ и перейти к пределу по m). (Заметим, что для гладких $\partial\Omega$ $\tilde{W}_2^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$.) Формула (6.21) имеет место для указанных гладких u и v и в областях Ω, для которых $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, а области Ω_i имеют гладкую границу (Ω_1 и Ω_2 могут пересекаться). Для доказательства этого надо убедиться, что (6.21) справедлива для пересечения $\Omega_1 \cap \Omega_2$, после чего представить интеграл $\int\limits_\Omega \ldots$ в виде $\int\limits_{\Omega_1} + \int\limits_{\Omega_2} - \int\limits_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$, к каждому из них применить формулу (6.21) и учесть, что интегралы по тем частям границ Ω_1 и Ω_2, которые не принадлежат $\partial\Omega$, сократятся. Формула (6.21) верна и для Ω, покрытых не двумя, а любым конечным числом областей $\Omega_i \subset \Omega$ с гладкими границами. Для таких областей формула (6.21) верна не только для гладких u и v, но и для $\forall u$ и v, принадлежащих $W_2^1(\Omega)$, что проверяется опять-таки с помощью аппроксимации в нормах $W_2^1(\Omega_i)$ u и v гладкими функциями. Вместо областей Ω_i с гладкими границами можно взять различного вида многогранники.

Нам понадобится еще формула (6.21) для областей Ω типа цилиндра: $\Omega = \{x: 0 < x_1 < l_1,\ x_1' \subset \Gamma\}$, где Γ — $(n-1)$-мерная область на гиперплоскости $x_1 = 0$, и функций u и v из $L_2(\Omega)$, имеющих об. производные u_{x_1} и v_{x_1} из $L_2(\Omega)$ (формула (6.21) берется в этом случае для $i = 1$). Для u и v из $C^1(\overline{\Omega})$ соотношение (6.21) с $i = 1$ в такой Ω справедливо. Функции же u и v из $L_2(\Omega)$ с u_{x_1} и v_{x_1} из $L_2(\Omega)$ можно аппроксимировать гладкими функциями $u^{(m)}$ и $v^{(m)}$ так, чтобы $u^{(m)}$ и $v^{(m)}$, $u_{x_1}^{(m)}$ и $v_{x_1}^{(m)}$ сходились к u, v, u_{x_1} и v_{x_1} в $L_2(\Omega)$ соответственно (см. об этом замечание 5.1). Далее, надо взять формулу (6.21) (с $i = 1$) для $u^{(m)}$ и $v^{(m)}$ и устремить в ней m к ∞. В силу изложенного выше предельные переходы выполнимы в каждом члене, и они приводят к формуле (6.21) для u и v, а именно

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} v\, dx = -\int\limits_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_1} dx + \int\limits_\Gamma uv\, dx_1' \Big|_{x_1=0}^{x_1=l_1}. \tag{6.22}$$

Мы не будем описывать более сложные ситуации, при которых справедлива формула (6.21), а отошлем к специальной литературе ([21₂] и др.).

Приведем, наконец, еще одну формулу, из которой выведем используемое в дальнейшем неравенство, а именно:

$$\int_{\partial\Omega} |u|\,ds \leqslant c \int_{\Omega} (|u_x| + |u|)\,dx. \tag{6.23}$$

Она справедлива для $\forall u(x) \in W_1^1(\Omega)$ и области Ω с «кусочно-гладкой границей». Для доказательства этого надо покрыть $\partial\Omega$ конечным числом замкнутых областей Γ_i и на каждом из Γ_i построить «криволинейный цилиндр» $Q_\delta(\Gamma)$ того же типа, что и в неравенстве (6.17); далее, для $Q_\delta(\Gamma)$ — убедиться в справедливости неравенства типа (6.17), но с нормой L_1 вместо L_2, точнее, неравенства

$$\|u\|_{1,\Gamma_i} \leqslant c\left[\frac{1}{\delta}\|u\|_{1,Q_\delta(\Gamma_i)} + \|u_x\|_{1,Q_\delta(\Gamma_i)}\right],$$

которое выводится так же, как и (6.17), с помощью формулы Ньютона — Лейбница (см. (6.13)). Суммируя эти неравенства по всем i, придем к (6.23).

Применим теперь неравенство (6.23) к функции $u(x) = v^2(x)$, где $v(x)$ есть элемент $W_2^1(\Omega)$ (легко видеть, что $u \in W_1^1(\Omega)$), и продолжим его следующим образом:

$$\int_{\partial\Omega} v^2\,ds \leqslant c_1 \int_{\Omega} (|v|\cdot|v_x| + v^2)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \int_{\Omega}\left[\frac{\varepsilon}{c_1}v_x^2 + \left(\frac{c_1}{4\varepsilon}+1\right)v^2\right]dx \equiv \int_{\Omega}\left(\varepsilon v_x^2 + c_\varepsilon v^2\right)dx. \tag{6.24}$$

При этом мы воспользуемся неравенством (1.3) с произвольным $\varepsilon > 0$.

§ 7. Мультипликативные неравенства для элементов пространств $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ и $W_m^1(\Omega)$

Содержание этого параграфа не используется в основном тексте книги и приводится как справочный материал для более полной характеристики пространств $W_m^l(\Omega)$. Начнем с наиболее простого из них — с пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$, $m \geqslant 1$. Для него справедлива следующая теорема:

Теорема 7.1. *Для* $\forall u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$, $m \geqslant 1$, *где* Ω — *любая (не обязательно ограниченная*)) область* R_n, $n \geqslant 2$, *и* $\forall r \geqslant 1$ *справедливы следующие мультипликативные неравенства:*

$$\| u \|_{p,\,\Omega} \leqslant \beta \| u_x \|^{\alpha}_{m,\,\Omega} \| u \|^{1-\alpha}_{r,\,\Omega}, \tag{7.1}$$

в которых

$$\alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\bar m}\right)^{-1}, \qquad \bar m = \frac{nm}{n - m}, \tag{7.2}$$

и

1) *при* $m < n$ *число* p *может быть любым из* $[r, \bar m]$, *если* $r \leqslant \bar m$, *и любым из* $[\bar m, r]$, *если* $r \geqslant \bar m$, *а* $\beta = \left(\frac{n-1}{n}\bar m\right)^{\alpha}$; *при изменении* p *между* r *и* $\bar m$ *число* α *меняется между* 0 *и* 1, *включая оба конца; при* $r = p = \bar m$ *в качестве* α *можно взять любое число из* $[0, 1]$;

2) *при* $m \geqslant n$ *число* p *может быть любым из* $[r, \infty)$, а $\beta = \max\left\{\frac{n-1}{n}p;\ 1 + \frac{m-1}{m}r\right\}^{\alpha}$. *При изменении* p *от* r *до* ∞ *число* α *меняется от* 0 *до* $\frac{nm}{nm + r(m-n)}$, *причем правый конец исключается;*

3) *если* $m > n$, *то* (7.1) *справедливо и при* $p = \infty$ *с некоторым* $\beta < \infty$ *(при этом* $\alpha = \frac{nm}{nm + r(m-n)}$*).*

Доказательство теоремы 7.1 можно прочесть, например, в [12_{14}], стр. 79—84. Ее разные частные случаи были установлены независимо В. П. Ильиным, E. Gagliardo и мною. В дальнейшем были даны другие способы доказательства неравенств такого типа (L. Nirenberg, К. К. Головкин).

---

*) Для неограниченной области Ω пространство $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ определяется как замыкание в норме $W^1_m(\Omega)$ множества $\dot C^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, лежащим в Ω.

Теорема 7.1 содержательна, если известно, что $\|u\|_{r,\Omega} < \infty$. Важной особенностью неравенства (7.1) является его «безразмерность» — постоянная β в нем не зависит от Ω. То, что β не меняется при преобразовании подобия: $x \to \lambda x$ $(\lambda > 0)$, легко проверяется непосредственно. Обе части неравенства (7.1) при этом умножаются на $\lambda^{n/p}$ (это гарантирует соотношение (7.2)). Кроме того, (7.1), как и все теоремы вложения, обладает свойством однородности: не меняется при умножении $u(x)$ на постоянную. Под выражением $\|u\|_{\infty,\Omega}$ понимается $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u(x)|$, совпадающий для непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций с $\max\limits_{\Omega}|u(x)|$. В случае 3) (при $m > n$) элементы $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ эквивалентны непрерывным на $\overline{\Omega}$ функциям. Действительно, $\forall u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ можно аппроксимировать в норме $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ непрерывными на $\overline{\Omega}$ функциями $u^{(q)}(x)$ (например, средними). Применяя неравенство (7.1) с $r = m$ к разностям $u^{(q)}(x) - u^{(s)}(x)$, убеждаемся, что они сходятся равномерно на $\overline{\Omega}$, и потому предельная для $u^{(q)}(x)$ функция будет непрерывной.

Замечание 7.1. Как показывают примеры, максимальный показатель $p = \tilde{m}$ при $r \leqslant \tilde{m}$, гарантируемый п. 1) теоремы 7.1, предèлен, т. е. не может быть увеличен для всех $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$. Имея это в виду, говорят, что этот результат точен. Точны и другие утверждения п. 1). В случае $m = n$ результат тоже точен: в неравенстве (7.1) нельзя взять $p = \infty$. Однако для $m = n$ и $m > n$ установлены факты более сильные, чем в пунктах 2) и 3). А именно, при $m = n$ для элементов $u(x)$ конечен интеграл $\int\limits_{\Omega} \exp\{\gamma |u(x)|\}\,dx$ с некоторой постоянной $\gamma > 0$, и он может быть мажорирован $c\|u_x\|_{m,\Omega}$. Элементы же $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ при $m > n$ непрерывны на $\overline{\Omega}$ в смысле Гельдера с показателем $\alpha = (m-n)/m$.

Для случая $n = 1$ тоже можно написать мультипликативные неравенства, но в этом обычно нет необходимости, ибо достаточно полная информация (равно как и мультипликативные неравенства) элементарно выводится с помощью формулы Ньютона — Лейбница. А именно, представим $u(x)$ в виде

$$u(x)=\int_0^x \frac{du}{d\tau}\,d\tau, \qquad u(0)=0, \qquad x\in[0,l]. \tag{7.3}$$

Из (7.3) следует, например, ограниченность $u(x)$:

$$\max_{x\in[0,l]}|u(x)|\leqslant\int_0^l\left|\frac{du}{d\tau}\right|d\tau \tag{7.4$_1$}$$

при $m\geqslant 1$ и непрерывность в смысле Гельдера:

$$|u(x)-u(x')|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int_{x'}^x \frac{du}{d\tau}\,d\tau\right|\leqslant|x-x'|^{1/m'}\left|\int_{x'}^x\left|\frac{du}{d\tau}\right|^m d\tau\right|^{1/m} \tag{7.4$_2$}$$

при $m>1$. Из (7.4$_1$) и (7.4$_2$) при $l<\infty$ следует компактность любого ограниченного множества элементов из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(0,l)$, $m>1$ в $C([0,l])$ (теорема Арцела).

Из теоремы 7.1 и теоремы 6.1 следует компактность вложения $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ в $L_{\tilde p}(\Omega)$ с любым $\tilde p$, меньшим максимального возможного в (7.1), если Ω — ограниченная область. Для доказательства этого надо рассмотреть отдельно два случая: 1) $m\geqslant 2$ и 2) $m\in(1,2)$. Пусть $\|u^{(q)}\|^{(1)}_{m,\Omega}\leqslant c$, $q=1,2,\ldots$ и $m\geqslant 2$. В силу теоремы Ф. Реллиха $\{u^{(q)}\}$ компактно в $L_2(\Omega)$. Выберем из $\{u^{(q)}\}$ сходящуюся в $L_2(\Omega)$ подпоследовательность $\{u^{(q_k)}\}$ и применим к разностям ее элементов $u^{(q_k)}-u^{(q_{k+l})}$ неравенство (7.1) с $r=2$, взяв $p=\tilde p$ меньшим $\bar m$ для $m<n$, произвольным конечным при $m=n$ и ∞ при $m>n$. Для таких r и $\tilde p$ показатель $\alpha<1$, и потому из (7.1) будет следовать стремление $\left\|u^{(q_k)}-u^{(q_{k+l})}\right\|_{\tilde p,\Omega}$ к нулю при k и $l\to\infty$. Тем самым компактность $\{u^{(q)}\}$ в $L_{\tilde p}(\Omega)$ доказана.

В случае $m\in(1,2)$ и $n\geqslant 2$ надо рассуждать несколько иначе: сначала доказать компактность вложения $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ в $L_m(\Omega)$, а затем, используя неравенство (7.1) с $r=m$, убедиться в компактности вложения $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ в $L_{\tilde p}(\Omega)$ с $\forall\,\tilde p<\bar m$. Доказательство же компактности вложения

$\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ в $L_m(\Omega)$ аналогично данному выше доказательству теоремы 6.1, надо только вместо неравенства (6.7′) привлечь неравенство

$$\int_{\Pi_l} |u|^m dx \leqslant \frac{c}{|\Pi_l|^{m-1}} \left(\int_{\Pi_l} u\, dx \right)^m + c \int_{\Pi_l} \sum_{k=1}^n l_k^m |u_{x_k}|^m dx,$$

в котором $\Pi_l = \{x\colon\ 0 < x_i < l_i\}$. Оно выводится так: вместо x_i введем переменные $y_i = x_i l_i^{-1}$, так что Π_l преобразуется в $\Pi_1 = \{y\colon 0 < y_i < 1\}$, а $u(x) = \tilde u(y)$. Возьмем y и y' из Π_1 и представим $|\tilde u(y')|$ в виде $|\tilde u(y')| = \left| \int_{\Pi_1} [\tilde u(y') - \tilde u(y)]\, dy + \int_{\Pi_1} \tilde u(y)\, dy \right|$. Возведя обе части этого неравенства в степень m и проинтегрировав их по $y' \in \Pi_1$, оценим правую часть с помощью неравенства $|a+b|^m \leqslant 2^{m-1}(|a|^m + |b|^m)$ и воспользуемся для $\tilde u(y') - \tilde u(y)$ представлением, данным на стр. 67. Первый член правой части оценим согласно неравенству

$$\left| \int_\Omega \sum_{i=1}^N f_i(x)\, dx \right|^m \leqslant N^{m-1} |\Omega|^{m-1} \int_\Omega \sum_{i=1}^N |f_i|^m dx$$

и учтем, что все интервалы интегрирования не превосходят 1. Это приведет к желаемой мажоранте для $\int_{\Pi_1} |\tilde u(y')|^m dy'$.

Подытожим полученные результаты:

Теорема 7.2. *Ограниченное множество из* $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$, $m \geqslant 1$, *компактно в* $L_{\tilde p}(\Omega)$ *с* $\tilde p < \overline{m}$ *для* $m < n$ *и с любым конечным* $\tilde p$ *для* $m = n$. *Для* $m > n$ *оно компактно в* $C(\overline\Omega)$. *Область* Ω *при этом считается ограниченной.*

Перейдем к пространствам $W_m^1(\Omega)$. Рассмотрим сначала такие области Ω, для которых элементы $u(x)$ из $W_m^1(\Omega)$ можно распространить на более широкую область $\tilde\Omega \supset \overline\Omega$ так, что $u(x)$ будет элементом $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\tilde\Omega)$ и

$$\|u\|_{r,\tilde\Omega} \leqslant c_r(\Omega, \tilde\Omega) \|u\|_{r,\Omega}, \tag{7.5}$$

$$\|u_x\|_{m,\tilde\Omega} \leqslant c'_m(\Omega, \tilde\Omega) \|u\|_{m,\Omega}^{(1)} \tag{7.6}$$

для всех r, для которых конечна $\|u\|_{r,\Omega}$. Постоянные c_r и c'_m в этих неравенствах не должны зависеть от $u(x)$. Области Ω, указанные в конце § 5, для которых возможно распространение с $r=m$ в (7.5), допускают распространение и для $\forall r$, причем способ распространения тот же, что и для $r=m$. Применяя теорему 7.1 к $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\tilde{\Omega})$ и используя (7.5) и (7.6), придем для ограничений $u(x)$ на Ω к неравенствам

$$\|u\|_{p,\Omega} \leqslant \beta c_{p,r,m}(\Omega)\left(\|u\|^{(1)}_{m,\Omega}\right)^{\alpha}\|u\|^{1-\alpha}_{r,\Omega}\,*) \tag{7.7}$$

с теми же параметрами, что и в (7.1). Если $\overline{\Omega}$ может быть представлена в виде $\bigcup\limits_{i=1}^{N}\overline{\Omega}_i$ (области Ω_i, $i=1,\ldots$ $\ldots, N$, могут иметь непустые пересечения), в которой Ω_i допускают указанное распространение элементов $W^1_2(\Omega_i)$, то для нее также справедливы неравенства (7.7). Действительно, записав (7.7) для каждой из Ω_i, возведем их в степень p и сложим по i от 1 до N, после чего полученное неравенство возведем в степень $1/p$. Это даст неравенство, в левой части которого будет стоять $\|u\|_{p,\Omega}$. Правую же часть его увеличим, заменив во всех слагаемых интегралы по Ω_i такими же интегралами по Ω. В результате придем к неравенству (7.7) с некоторой постоянной $c_{p,r,m}(\Omega)$.

Совершенно так же устанавливается справедливость теоремы 7.2 для $W^1_m(\Omega)$ с такими же Ω, что и для (7.7). Итак, доказана

Теорема 7.3. *Пусть* $\overline{\Omega}=\bigcup\limits_{i=1}^{N}\overline{\Omega}_i$ (Ω_i, $i=1,\ldots,N$, *могут пересекаться*), *где* Ω_i *суть области, допускающие продолжение элементов* $W^1_m(\Omega)$, *удовлетворяющее условиям* (7.5), (7.6). *Тогда для* $\forall u(x)\in W^1_m(\Omega)$ *справедливы неравенства* (7.7) *с теми же параметрами* m, r, p *и* α,

*) Если в (7.6) и (7.7) считать, что норма $\|u\|^{(1)}_{m,\Omega}$ определена равенством $\left[|\Omega|^{-m/n}\int\limits_{\Omega}|u|^m\,dx+\int\limits_{\Omega}|u_x|^m\,dx\right]^{1/m}$, то постоянные в этих неравенствах не меняются при преобразовании подобия для независимых переменных x.

что и в теореме 7.1. *Для пространства* $W_m^1(\Omega)$ *сохраняются утверждения теоремы* 7.2 *о компактной вложимости в* $L_{\bar{p}}(\Omega)$ *для ограниченных* Ω.

В заключение данного параграфа выведем из (7.1) неравенство (6.6). Возьмем в (7.1) $m=2$, $r=1$, а $p=2$ и оценим последний множитель в нем с помощью неравенства Коши так:

$$\|u\|_{2,\Omega}\leqslant\beta\|u_x\|_{2,\Omega}^{n/(n+2)}\|u\|_{1,\Omega}^{2/(n+2)}\leqslant\beta\|u_x\|_{2,\Omega}^{n/(n+2)}|\Omega|^{1/(n+2)}\|u\|_{2,\Omega}^{2/(2+n)}.$$

Сократив обе части на $\|u\|_{2,\Omega}^{2/(n+2)}$ и возведя полученное неравенство в степень $(n+2)/n$, получим неравенство (6.6):

$$\|u\|_{2,\Omega}\leqslant\beta^{(n+2)/n}|\Omega|^{1/n}\|u_x\|_{2,\Omega}. \tag{7.8}$$

§ 8. Теоремы вложения для пространств $\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$ и $W_m^l(\Omega)$

Из теоремы 7.1 можно получить разнообразные мультипликативные неравенства для элементов $u\in\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$, оценивающие норму любой производной D^ku с $k<l$ через произведение норм D^lu и D^pu с $\forall p\leqslant k$, причем эти нормы берутся в разных L_{p_l}. Выведем наиболее употребительные неравенства, указывающие наивысшие степени, с которыми суммируются D^ku. Производные $D^{l-1}u$ можно рассмотреть как элементы $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ и применить к ним неравенства (7.1). Из неравенства (7.1) с $r=m$ и $\alpha=1$ (если $m<n$) заключим, что $D^{l-1}u\in L_{m_1}(\Omega)$ с m_1, определяемым из равенства $\frac{1}{m_1}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$. Следовательно, $D^{l-2}u\in\overset{\circ}{W}{}_{m_1}^1(\Omega)$. Если $m_1<n$, то, снова применяя к $D^{l-2}u$ неравенство (7.1) с $m=m_1$, $r=m_1$, и $\alpha=1$, убедимся, что $D^{l-2}u\in L_{m_2}(\Omega)$, где $\frac{1}{m_2}=\frac{1}{m_1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{m}-\frac{2}{n}$. Продолжая это рассуждение, мы придем или к неравенству

$$\|u\|_{p,\Omega}\leqslant c\|D^lu\|_{m,\Omega} \tag{8.1}$$

с $\frac{1}{p}=\frac{1}{m_l}=\frac{1}{m}-\frac{l}{n}$, т. е. с $p=\frac{nm}{n-lm}$, если $lm<n$,

или к неравенству (8.1) с любым $p < \infty$, если $lm = n$, или к неравенству

$$\max_{\Omega} |u| \leqslant c \| D^l u \|_{m, \Omega}, \tag{8.2}$$

если $lm > n$. Постоянные в (8.1) и (8.2) определяются n и числовыми параметрами, в них входящими. Мы не будем приводить другие следствия, а перейдем к пространствам $W^l_m(\Omega)$. Для их элементов $u(x)$ вместо неравенств (8.1) и (8.2) устанавливаются неравенства

$$\| u \|_{p, \Omega} \leqslant c \| u \|^{(l)}_{m, \Omega} \tag{8.3}$$

с теми же параметрами, что и в (8.1), и неравенство

$$\max_{\Omega} |u| \leqslant c \| u \|^{(l)}_{m, \Omega} \tag{8.4}$$

при $lm > n$. Предположения относительно Ω такие же, как в теореме 7.3 (т. е. они не усиливаются при возрастании $l \geqslant 1$). Частные случаи неравенств (8.3) и (8.4) встречаются в работах разных авторов (например, в работах А. Пуанкарэ, Ж. Лере и др.).

В общей форме они были доказаны С. Л. Соболевым ([23_1], [22_2]) и сформулированы как теоремы «об ограниченной вложимости пространств $W^l_m(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ или в $C(\overline{\Omega})$» соответственно (С. Л. Соболев предполагал $m > 1$). Его учеником В. И. Кондрашовым была доказана компактность вложения $W^l_m(\Omega)$ в $L_{\tilde{p}}(\Omega)$ с $\forall \tilde{p} < p = \frac{nm}{n - lm}$ при $lm < n$ и с $\forall \tilde{p} < \infty$ при $lm = n$; при $lm > n$ $W^l_m(\Omega)$ вкладывается компактно в $C(\overline{\Omega})$. Этот факт можно вывести из теоремы 7.3 о компактности вложения $W^1_m(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, применяя ее к самим элементам $u(x)$ из $W^l_m(\Omega)$ и их производным $D^k u$, $k < l$, так, как это сделано при доказательстве (8.1).

Кроме неравенств (8.3), (8.4), С. Л. Соболевым были установлены и более общие и тонкие факты об ограниченной вложимости $W^l_m(\Omega)$ в $L_q(\Gamma_s)$, где Γ_s — кусок достаточно гладкого многообразия (точнее: $\Gamma_s \in C^l$) размерности s, лежащий в Ω. Параметры n, l, m, q и s

связаны между собою следующими условиями:

$$m > 1, \quad lm < n, \quad s > n - lm, \quad q \leqslant \frac{ms}{n - lm}\,^{*)}, \tag{8.5}$$

при $lm = n$ число $q < \infty$.

Это предложение утверждает, что для элементов $u(x)$ из $W_m^l(\Omega)$ можно определить следы на Γ_s и

$$\| u \|_{q, \Gamma_s} \leqslant c(\Gamma_s) \| u \|_{m, \Omega}^{(l)}. \tag{8.6}$$

Эти следы непрерывно меняются (как элементы $L_q(\Gamma_s)$) при непрерывном сдвиге Γ_s. В случае $lm > n$, как указано выше, $W_m^l(\Omega)$ вкладывается в $C(\overline{\Omega})$, так что для его элементов определены следы во всех точках $\overline{\Omega}$ — «многообразиях Γ_s нулевой размерности».

Для показателей $\tilde{q}$, меньших $q = \dfrac{ms}{n - lm}$, имеет место компактность вложения $W_m^l(\Omega)$ в $L_{\tilde{q}}(\Gamma_s)$. Существует несколько разных способов доказательства перечисленных теорем С. Л. Соболева. Сам С. Л. Соболев исходит из некоторого интегрального представления элементов $u(x)$ из $W_m^l(\Omega)$, выражающего $u(x)$ в виде суммы полинома степени $l - 1$ и интеграла, в который входят лишь производные $D^l u$. Это представление возможно для областей Ω, звездных относительно какого-либо шара $\overline{K}_R \subset \Omega$ (заметим, что для таких областей $\widetilde{W}_m^l(\Omega) = W_m^l(\Omega)$). Все утверждения доказываются сначала для таких Ω. Из этого же делается вывод об их справедливости и для конечной суммы областей этого вида.

Отметим еще один важный вопрос, касающийся пространств $W_m^l(\Omega)$ и рассмотренный С. Л. Соболевым. Это вопрос об эквивалентных нормировках пространств $W_m^l(\Omega)$. В § 6 мы коснулись его для пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$, доказав неравенства Пуанкаре (6.3) и (6.7′). Из первого следует эквивалентность исходной нормы в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ норме $\| u_x \|_{2, \Omega}$. Второе гарантирует эквивалентность в $W_2^1(\Omega)$ нормы $\| u \|_{2, \Omega}^{(1)}$ и нормы, определяемой

*) Случай равенства был изучен В. П. Ильиным.

равенством

$$|u| \equiv \left[\left(\int_\Omega u\,dx\right)^2 + \int_\Omega u_x^2\,dx\right]^{1/2}. \tag{8.7}$$

Этот факт справедлив не только для параллелепипедов, как это было доказано в § 6, но и для широкого класса областей. В пространствах $\overset{\circ}{W}{}^l_m(\Omega)$, как и в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, норму можно определить особенно простым и удобным способом:

$$\left(\int_\Omega \sum_{(l)} |D^l u|^m\,dx\right)^{1/m} \approx \|u\|^{(l)}_{m,\,\Omega} \tag{8.8}$$

$\left(\sum\limits_{(l)}\right.$ — суммирование по всем производным порядка $\left. l\right)$. Более того, это справедливо и для подпространств пространства $W^l_m(\Omega)$, более широких, чем $\overset{\circ}{W}{}^l_m(\Omega)$, а именно таких, которые получаются замыканием в норме $W^l_m(\Omega)$ множества элементов $W^l_m(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности какого-либо участка Γ_{n-1} границы $\partial\Omega$, являющегося замыканием области на $\partial\Omega$. В книге [23₁] С. Л. Соболёва указан широкий класс норм, эквивалентных норме $\|u\|^{(l)}_{m,\,\Omega}$ для пространств $W^l_m(\Omega)$.

Укажем, наконец, еще на одну проблему, связанную с пространствами $W^1_m(\Omega)$ и их использованием в теории краевых задач. Это проблема «ограниченного продолжения» функций $u(s)$ с границы $\partial\Omega$ области Ω на всю область Ω. Она является обратной к вопросу о следах элементов $W^1_m(\Omega)$ на границе $\partial\Omega$. Как сказано выше (см. (8.6)), следы элементов $W^1_m(\Omega)$ при $m > 1$ и $m < n$ являются элементами $L_q(\partial\Omega)$, $q = \frac{(n-1)\,m}{n-m}$. Примеры показывают, что этот показатель q нельзя увеличить для всего $W^1_m(\Omega)$. Спрашивается, является ли эта характеристика следов «точной», т. е. нельзя ли любую функцию $u(s)$, заданную на $\partial\Omega$ и принадлежащую $L_q(\partial\Omega)$, $q = \frac{(n-1)\,m}{n-m}$, продолжить на Ω так, чтобы она стала элементом $u(x) \in W_m^1(\Omega)$ и чтобы неравенство

$$\| u \|_{m,\Omega}^{(1)} \leqslant c \| u \|_{q,\partial\Omega}$$

имело место с постоянной c, не зависящей от u?

Оказывается, нельзя. Для решения этой проблемы пришлось найти другие, более тонкие характеристики следов элементов $W_m^1(\Omega)$. Они выражаются в терминах пространств функций, имеющих об. производные дробного порядка. Чтобы избежать изложения теории этих пространств и решения поставленного вопроса о продолжении функций с $\partial\Omega$, мы в данной книге избрали такой путь: вместо того чтобы задавать, например, в задаче Дирихле граничные условия для искомой функции $u(x)$ в обычной форме:

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(s)$$

с указанием свойств гладкости $\varphi(s)$ на $\partial\Omega$, требуем, чтобы $u(x) - \varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, где $\varphi(x)$ — заданный элемент $W_2^1(\Omega)$. Эта форма задания граничного условия позволяет отделить проблему продолжения $\varphi(s)$ на Ω от исследования интересующих нас здесь проблем разрешимости краевых задач. От полученных в таком виде результатов по краевым задачам переход к их переформулировке на обычную форму задания граничных условий делается простой ссылкой на соответствующие результаты по проблеме продолжения.

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Постановка краевых задач. Описание основного материала, излагаемого в этой главе

В данной главе мы рассматриваем линейные уравнения второго порядка

$$\mathscr{L}u = \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,u_{x_j} + a_i(x)\,u(x)\right) + \\ + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,u_{x_i} + a(x)\,u = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}, \qquad (1.1)$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x),$$

удовлетворяющие условию равномерной эллиптичности в ограниченной области Ω евклидова пространства R_n. Равномерная эллиптичность (1.1) в Ω означает выполнение неравенств

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \xi^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \qquad (1.2)$$

с какими-либо положительными постоянными ν и μ при $\forall x \in \bar{\Omega}$ и любых вещественных параметрах $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Левое из неравенств (1.2) выражает требование эллиптичности, правое—ограниченность коэффициентов $a_{ij}(x)$. Остальные коэффициенты уравнения (1.1) — a_i, b_i и a — мы также будем считать ограниченными функциями в Ω, хотя приводимые ниже результаты остаются справедливыми при более общих предположениях: принадлежности этих коэффициентов к $L_{p_k}(\Omega)$ с некоторыми

p_k, зависящими от n (подробнее об этом см. [12₁₃]). Все функции, рассматриваемые в книге, являются измеримыми (по Лебегу) функциями. Это свойство предполагается выполненным всюду и специально в дальнейшем не оговаривается. Во многих параграфах функции a_{ij}, a_i и f_i не обязаны иметь производные (даже обобщенные). Как понимать в этом случае уравнение (1.1), будет объяснено в следующем параграфе. В тех случаях, когда a_{ij}, a_i и f_i имеют обобщенные производные, уравнение (1.1) может быть записано в традиционной форме:

$$\mathscr{L}u = a_{ij}u_{x_i x_j} + \tilde{a}_i u_{x_i} + \tilde{a}u = \mathscr{F}. \tag{1.1'}$$

Для уравнений (1.1) (или (1.1′)) мы рассмотрим следующие три краевые задачи: 1) задачу Дирихле (первую краевую задачу), состоящую в нахождении функции $u(x)$, удовлетворяющей в области Ω уравнению (1.1) (или (1.1′)) и на границе S области Ω краевому условию

$$u|_S = \varphi(s); \tag{1.3}$$

2) задачу Неймана (вторую краевую задачу), в которой ищется решение $u(x)$ уравнения (1.1) (или (1.1′)), удовлетворяющее краевому условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_S = \varphi(s), \tag{1.4}$$

где $\frac{\partial u}{\partial N} \equiv a_{ij}u_{x_j}\cos nx_i$, а n — единичная нормаль к S (направленная, как всегда, вне Ω) и 3) третью краевую задачу, в которой краевое условие имеет вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(s)\,u\right|_S = \varphi(s). \tag{1.5}$$

Во всех этих задачах функция $\varphi(s)$, равно как Ω, σ, f, f_i и коэффициенты уравнений, считаются известными. Подлежит определению лишь функция $u(x)$. Все перечисленные задачи могут быть сведены к задачам с однородными краевыми условиями, т. е. к таким, в которых $\varphi(s) \equiv 0$. Действительно, если вместо функции $u(x)$ ввести новую неизвестную функцию $v(x) = u(x) - \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ есть произвольная функция, удовлетворяющая лишь взятому краевому условию (т. е. (1.3), (1.4) или (1.5)), то исходная задача сведется к такой же задаче для функции $v(x)$, но с однородным краевым условием. Уравнение для $v(x)$

$$\mathscr{L}v = \mathscr{F} + \frac{\partial \mathscr{F}_i}{\partial x_i} \tag{1.6}$$

отличается от (1.1) лишь свободными членами (правой частью), а именно, в (1.6)

$$\mathscr{F} = f - b_i \Phi_{x_i} - a\Phi, \qquad \mathscr{F}_i = f_i - a_{ij}\Phi_{x_j} - a_i\Phi. \tag{1.7}$$

Мы будем считать всюду, что такое преобразование задач уже сделано, т. е. искомая функция $u(x)$ удовлетворяет однородному краевому условию. Из результатов по таким задачам и известных результатов по продолжимости функций с границы области на всю область (об этом см. [21$_2$] и др.) вытекают соответствующие заключения о разрешимости этих задач, когда краевое условие неоднородно.

В §§ 2, 3, 5 исследуется разрешимость перечисленных краевых задач в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Именно в пространстве $W_2^1(\Omega)$ удается сравнительно просто свести эти задачи к уравнениям с вполне непрерывными операторами и доказать их фредгольмову разрешимость.

Об этих обобщенных решениях (об. решениях) $u(x)$ мы знаем лишь, что они являются элементами $W_2^1(\Omega)$. Примеры показывают, что при тех минимальных предположениях о данных в задачах функциях и Ω, при которых доказывается их разрешимость, эти решения действительно не имеют производных второго порядка (даже обобщенных) и удовлетворяют условиям задач в некотором обобщенном смысле. Далее выясняется, что при небольшом улучшении коэффициентов и свободных членов уравнения (1.1), а также при некотором увеличении гладкости границы S все об. решения $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ принадлежат $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяют уравнению (1.1) в обычном смысле (для почти всех $x \in \Omega$). Это сделано в §§ 6, 7 для первой краевой задачи. Аналогичные факты имеют место и в других краевых задачах. Более того, можно показать, что безотносительно к краевому условию любое об. решение $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ уравнения (1.1) фактически принадлежит $W_2^2(\Omega')$, $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, если коэффициенты и свободные члены уравнения (1.1) «не слишком плохи» — удовлетворяют условиям, указанным в § 6. Все эти свойства об. решений уравнений (1.1) выводятся на базе так называемого второго основного неравенства (см. § 6) и его следствий. Можно было бы показать, используя обобщения этого неравенства, дальнейшее увеличение гладкости всех решений $u(x)$ уравнений (1.1) при соответствующем увеличении гладкости входящих в (1.1) функций. Мы этого не делаем ввиду сравнительной громоздкости подобного анализа (особенно вблизи границы). Укажем лишь, что вопрос этот всесторонне исследован и окончательные ответы получены в терминах пространств $W_p^l(\Omega)$ и пространств Гельдера $H^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$ (см. [12_{13}]). При этом между об. решениями краевых задач из различных функциональных классов имеется такое естественное соподчинение: если $u(x)$ есть об. решение задачи из класса $\mathfrak{M}$, то оно есть об. решение этой задачи из любого более широкого класса $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}$.

В § 8 изложены некоторые приближенные методы нахождения решений краевых задач, а именно: метод Галеркина в его первоначальном и модернизированном виде. Показано, что метод Ритца и метод наименьших квадратов являются его частными случаями. В гл. VI дается другой метод нахождения приближенных решений краевых задач — метод конечных разностей (§ 7), и выясняется его связь с методом Галеркина (§ 12). В §§ 4 и 7 доказываются теоремы разложения в ряды по собственным функциям симметрических эллиптических операторов (о более полных результатах см. [12_2]).

§ 2. Обобщенные решения из $W_2^1(\Omega)$. Первое (энергетическое) неравенство

В данном и следующем параграфах мы займемся исследованием разрешимости первой краевой задачи (иначе — задачи Дирихле)

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j} + a_i u) + b_i u_{x_i} + au = f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \tag{2.1}$$

$$u|_S = 0 \tag{2.2}$$

в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Предположим, что уравнение (2.1) эллиптично и его коэффициенты — измеримые ограниченные функции, т. е.

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu,\ \mu = \text{const} > 0, \qquad a_{ij} = a_{ji}, \tag{2.3}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \leqslant \mu_1, \quad \sqrt{\sum_i (a_i - b_i)^2} \leqslant \mu_2, \tag{2.4}$$
$$\mu_3 \leqslant a(x) \leqslant \mu_4.$$

Функции f и f_i, образующие свободный член уравнения (2.1), будем считать квадратично суммируемыми по Ω, т. е.

$$\|f\|_{2,\Omega} < \infty, \quad \|\boldsymbol{f}\|_{2,\Omega} \equiv \left\| \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2} \right\|_{2,\Omega} < \infty. \tag{2.5}$$

Назовем *обобщенным решением из* $W_2^1(\Omega)$ *уравнения* (2.1) функцию $u(x)$, принадлежащую $W_2^1(\Omega)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\mathscr{L}(u, \eta) \equiv \int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + a_i u\eta_{x_i} - b_i u_{x_i}\eta - au\eta\right) dx =$$
$$= \int_\Omega \left(-f\eta + f_i\eta_{x_i}\right) dx \tag{2.6}$$

при $\forall \eta(x) \in \dot{C}^\infty(\Omega)$.

Легко видеть, что это определение в рассматриваемой ситуации имеет смысл: все входящие в (2.6) интегралы конечны.

Тождество (2.6) получено формально из тождества

$$-\int_\Omega \left(\mathscr{L}u - f - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)\eta\, dx = 0, \qquad \eta \in \dot{C}^\infty(\Omega) \tag{2.6'}$$

с помощью однократного интегрирования по частям в членах $-\left(a_{ij}u_{x_j} + a_i u\right)_{x_i}\eta$ и $f_{ix_i}\eta$. Если коэффициенты a_{ij}, a_i имеют ограниченные об. производные первого порядка, $f_i(x)$ имеют об. производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ из $L_2(\Omega)$, а $u(x)$ принадлежит $W_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega')$, $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$, и почти всюду в Ω удовлетворяет уравнению (2.1), то тождество (2.6') следует из (2.1), а (2.6) — из (2.6′). Таким образом, при указанных условиях $u(x)$ является об. решением уравнения из $W_2^1(\Omega)$. Верно и обратное: при тех же условиях на a_{ij}, a_i и f_i любое об. решение $u(x)$ уравнения (2.1) из $W_2^1(\Omega)$, принадлежащее $W_2^2(\Omega')$, $\forall\overline{\Omega}'\subset\Omega$, удовлетворяет уравнению (2.1) для почти всех x из Ω. Действительно, из (2.6) следует (2.6′) при $\forall\eta\in\dot{C}^\infty(\Omega)$, а из (2.6′) следует справедливость равенства (2.6) для почти всех x из Ω, ибо $\mathscr{L}u-f-\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\in L_2(\Omega')$, $\forall\overline{\Omega}'\subset\Omega$, и $\dot{C}^\infty(\Omega')$ плотно в $L_2(\Omega')$. Благодаря этим (прямому и обратному) утверждениям можно сказать, что при дифференцируемых a_{ij}, a_i и f_i уравнение (2.1) и тождество (2.6) несут одинаковую информацию относительно $u(x)$. Однако тождество (2.6) имеет смысл и тогда, когда a_{ij}, a_i и f_i недифференцируемы, а относительно $u(x)$ известна лишь его принадлежность к $W_2^1(\Omega)$. Поэтому данное нами определение действительно является расширением общепринятого понятия решения уравнения (2.1). Мы покажем, что такое расширение понятия решения допустимо для всех основных краевых задач для уравнения (2.1), т. е. докажем, что для него сохраняются основные свойства этих задач — их фредгольмова разрешимость.

Назовем *обобщенным решением из* $W_2^1(\Omega)$ *задачи* (2.1), (2.2) (сокращенно об. решением) функцию $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую тождеству (2.6) при любой $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Получим для таких решений $u(x)$ первое основное неравенство.

Для этого рассмотрим квадратичную форму $\mathscr{L}(u,u)$. В силу (2.3), (2.4) и неравенства Коши § 1 гл. I

$$\mathscr{L}(u,u)=\int_\Omega\left[a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}+(a_i-b_i)\,u_{x_i}u-au^2\right]dx\geqslant$$
$$\geqslant\int_\Omega\left[\nu u_x^2-\mu_4u^2\right]dx-\mu_2\|u\|\cdot\|u_x\|\geqslant$$
$$\geqslant(\nu-\varepsilon_1)\|u_x\|^2-\left(\mu_4+\frac{\mu_2^2}{4\varepsilon_1}\right)\|u\|^2\quad\text{при}\quad\forall\varepsilon_1>0.\qquad(2.7)$$

Здесь и далее символ $\|u\|$ используется для обозначения нормы в $L_2(\Omega)$, а (u, v) — скалярного произведения в $L_2(\Omega)$. При $\varepsilon_1 = \nu/2$ из (2.7) следует

$$\mathscr{L}(u, u) \geqslant \frac{\nu}{2} \| u_x \|^2 - \left(\mu_4 + \frac{\mu_2^2}{2\nu}\right) \| u \|^2. \tag{2.8}$$

Правая часть (2.7) благодаря неравенству (6.3) гл. I не меньше выражения $\left[(\nu - \varepsilon_1)\, c_\Omega^{-2} - \mu_4 - \frac{\mu_2^2}{4\varepsilon_1}\right] \| u \|^2$, взятого при $\forall \varepsilon_1 \in (0, \nu]$, и потому

$$\mathscr{L}(u, u) \geqslant \delta_1 \| u \|^2, \tag{2.9}$$

где

$$\delta_1 = \max_{0 < \varepsilon_1 \leqslant \nu} \left[(\nu - \varepsilon_1)\, c_\Omega^{-2} - \mu_4 - \frac{\mu_2^2}{4\varepsilon_1}\right]. \tag{2.10}$$

Если $\delta_1 > 0$, то, используя (2.8) и (2.9), можно оценить $\| u_x \|^2$ через $\mathscr{L}(u, u)$, а именно:

$$\frac{\nu}{2} \| u_x \|^2 \leqslant \mathscr{L}(u, u) \left[1 + \delta_1^{-1} \max\left\{0;\ \mu_4 + \frac{\mu_2^2}{2\nu}\right\}\right]$$

или, несколько иначе,

$$\delta_2 \| u_x \|^2 \leqslant \mathscr{L}(u, u), \tag{2.11}$$

где

$$\delta_2 = \frac{\nu}{2} \left[1 + \delta_1^{-1} \max\left\{0; \mu_4 + \frac{\mu_2^2}{2\nu}\right\}\right]^{-1} > 0. \tag{2.12}$$

Пусть $u(x)$ есть об. решение из $W_2^1(\Omega)$ задачи (2.1), (2.2). Для него из (2.6) следует неравенство

$$\mathscr{L}(u, u) = -(f, u) + \left(f_i, u_{x_i}\right) \leqslant \| f \| \cdot \| u \| + \| \mathbf{f} \| \| u_x \| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_2 \| u \|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \| f \|^2 + \varepsilon_3 \| u_x \|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_3} \| \mathbf{f} \|^2, \quad \forall \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0, \tag{2.13}$$

которое вместе с (2.7) приводит к *первому основному неравенству* (иначе — *энергетическому неравенству*):

$$(\nu - \varepsilon_1 - \varepsilon_3) \| u_x \|^2 \leqslant \frac{1}{4\varepsilon_2} \| f \|^2 +$$
$$+ \frac{1}{4\varepsilon_3} \| \mathbf{f} \|^2 + \left(\mu_4 + \frac{\mu_2^2}{4\varepsilon_1} + \varepsilon_2\right) \| u \|^2. \tag{2.14}$$

с $\forall \varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. При $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 < \nu$ оно дает оценку $\|u_x\|$ через $\|u\|$, $\|f\|$ и $\|\mathbf{f}\|$. В частности, при $\varepsilon_1 = \nu/4$, $\varepsilon_3 = \nu/4$ неравенство (2.14) принимает вид

$$\|u_x\|^2 \leqslant \frac{1}{2\nu\varepsilon_2}\|f\|^2 + \frac{2}{\nu^2}\|\mathbf{f}\|^2 + \frac{2}{\nu}\left(\mu_4 + \frac{\mu_2^2}{\nu} + \varepsilon_2\right)\|u\|^2 \quad (2.15)$$

с $\forall \varepsilon_2 > 0$. Примечательной особенностью неравенств (2.14), (2.15) является то, что они позволяют для решений $u(x)$ задачи (2.1), (2.2) оценивать «старшую норму» $\|u_x\|$ через «младшую» — $\|u\|$ и известные в задаче величины. Особенный интерес представляют те случаи, когда в (2.14) можно отбросить последний член (с $\|u\|^2$). Это возможно, например, когда $\delta_1 > 0$. Действительно, в этом случае имеют место неравенства (2.9) и (2.11) с $\delta_i > 0$, $i = 1, 2$. Из (2.11) в силу (2.13) и (6.3) гл. I следует

$$\delta_2\|u_x\|^2 \leqslant \mathscr{L}(u, u) \leqslant (\varepsilon_2 c_\Omega^2 + \varepsilon_3)\|u_x\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2}\|f\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_3}\|\mathbf{f}\|^2, \quad (2.16)$$

откуда при $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 c_\Omega^2 = \delta_2/4$ получим желаемую априорную оценку

$$\|u_x\|^2 \leqslant \frac{2}{\delta_2^2}\left[c_\Omega^2\|f\|^2 + \|\mathbf{f}\|^2\right]. \quad (2.17)$$

Из нее видно, что при $f = \mathbf{f} = 0$ решение $u(x)$ обязано равняться нулю, и, следовательно, задача (2.1), (2.2) при условии $\delta_1 > 0$ может иметь не более одного обобщенного решения из $W_2^1(\Omega)$. Действительно, если u' и u'' суть два ее об. решения, то ввиду линейности задачи (2.1), (2.2) разность $u = u' - u''$ будет об. решением той же задачи с $f = \mathbf{f} = 0$, и потому для нее справедлива оценка (2.17) с нулем вместо правой части. Из нее и $u|_S = 0$ следует совпадение u' с u''. Итак, доказана такая теорема единственности:

Теорема 2.1. *Задача* (2.1), (2.2) *может иметь не более одного об. решения из* $W_2^1(\Omega)$, *если выполнены условия* (2.3)—(2.5) *и если* $\delta_1 > 0$.

Условие $\delta_1 > 0$ выполняется для уравнения (2.1) с коэффициентами, удовлетворяющими неравенствам

(2.2)—(2.5), если постоянная c_Ω «достаточно мала» или если верхняя граница μ_4 коэффициента $a(x)$ есть «достаточно большое» по модулю отрицательное число. Последнее заведомо будет иметь место для уравнения

$$\mathscr{L}u - \lambda u = f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

при всех «достаточно больших» числах λ. Выражения «достаточно малое» и «достаточно большое» уточняются условием $\delta_1 > 0$, где δ_1 определено (2.10).

§ 3. Исследование разрешимости задачи Дирихле в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (три теоремы Фредгольма)

Покажем, что задача (2.1), (2.2) является фредгольмово разрешимой в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Для этого введем в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ новое скалярное произведение

$$[u,\ v] = \int_\Omega a_{ij} u_{x_i} v_{x_j}\, dx. \tag{3.1}$$

В силу предположения (2.3) и неравенства (6.3) гл. I норма $\|u\|_1 \equiv \sqrt{[u,\ u]}$ эквивалентна норме $\|u_x\|$ и исходной норме $\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}$ пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Запишем (2.6) в виде

$$[u,\ \eta] + l(u,\ \eta) = -(f,\ \eta) + \left(f_i,\ \eta_{x_i}\right), \tag{3.2}$$

где

$$l(u,\ \eta) \equiv \int_\Omega \left(a_i u \eta_{x_i} - b_i u_{x_i} \eta - a u \eta\right) dx. \tag{3.3}$$

В силу предположений (2.4)

$$|l(u,\ \eta)| \leqslant \mu_1 \|u\| \cdot \|\eta_x\| + \mu_1 \|u_x\| \cdot \|\eta\| + \max(|\mu_3|;\ |\mu_4|) \|u\| \|\eta\| \leqslant c \|u\|_1 \cdot \|\eta\|_1, \tag{3.4}$$

т. е. $l(u, \eta)$ при произвольно фиксированном элементе $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ есть линейный функционал над η в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. По теореме Ф. Рисса (см. § 2 гл. I) $l(u, \eta)$

однозначно представим в виде скалярного произведения

$$l(u,\ \eta)=[Au,\ \eta], \qquad \forall\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{3.5}$$

причем A есть ограниченный линейный оператор в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ с нормой, не превосходящей c из (3.4). Сумма $-(f,\eta)+$ $+(f_i,\eta_{x_i})$ также определяет линейный функционал в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ над η, и в силу теоремы Рисса существует единственный элемент $F\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, для которого

$$-(f,\ \eta)+\left(f_i,\ \eta_{x_i}\right)=[F,\ \eta] \quad \text{при} \quad \forall\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Благодаря (3.5) и (3.6) тождество (3.2) эквивалентно тождеству

$$[u,\ \eta]+[Au,\ \eta]=[F,\ \eta]. \tag{3.7}$$

Так как (3.7) имеет место при $\forall\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то (3.7) эквивалентно операторному уравнению

$$u+Au=F \tag{3.8}$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Покажем, что A есть вполне непрерывный оператор в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Для этого убедимся, что любая слабо сходящаяся в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ последовательность $\{u_k\}$, $k=1,2,\ldots$, преобразуется оператором A в сильно сходящуюся последовательность $\{Au_k\}$. Ввиду ограниченности оператора A последовательность $\{Au_k\}$ слабо сходится к Au, где $u(x)$ есть слабый предел $\{u_k\}$. Кроме того, ввиду компактности оператора вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ (теорема 6.1 гл. I) последовательности $\{u_k\}$ и $\{Au_k\}$ сходятся сильно в $L_2(\Omega)$ к u и Au соответственно. Пользуясь определением (3.5) оператора A и неравенствами (3.4), оценим

$$\begin{aligned}
[A(u_k-u_m),\ A(u_k-u_m)]&=l(u_k-u_m,\ A(u_k-u_m))\leqslant\\
&\leqslant\mu_1\|u_k-u_m\|\cdot\|(Au_k)_x-(Au_m)_x\|+\\
&+\mu_1\|u_{kx}-u_{mx}\|\cdot\|Au_k-Au_m\|+\\
&+\max(|\mu_3|;\ |\mu_4|)\|u_k-u_m\|\|Au_k-Au_m\|.
\end{aligned}$$

Отсюда ясно, что при $k, m \to \infty$ правая часть стремится к нулю, и, следовательно, $\{Au_k\}$ действительно есть сильно сходящаяся в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ последовательность. Итак, полная непрерывность оператора A доказана. Ввиду этого для уравнения (3.8) справедлива первая теорема Фредгольма: разрешимость уравнения (3.8) при $\forall F \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ есть следствие теоремы единственности для него. Ввиду эквивалентности уравнения (3.8) тождеству (2.6) с $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ мы можем сформулировать эту теорему Фредгольма в виде:

Теорема 3.1 (первая теорема Фредгольма). *Если задача* (2.1), (2.2) *не может иметь более одного об. решения из* $W_2^1(\Omega)$, *то она действительно разрешима в* $W_2^1(\Omega)$ *при любых* f *и* $\mathbf{f}$ *из* $L_2(\Omega)$.

Достаточные условия единственности, а, следовательно, и разрешимости для задачи (2.1), (2.2) даются теоремой 2.1. Однако они далеко не охватывают всех возможных случаев. Чтобы разобраться полностью в этом вопросе, рассмотрим не отдельно взятое уравнение (2.1), а семейство уравнений

$$\mathscr{L}u = \lambda u + f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \tag{3.9}$$

с комплексным параметром λ. Коэффициенты $\mathscr{L}$ попрежнему возьмем вещественными, однако решение $u(x)$ уравнения (3.9) будет, вообще говоря, комплекснозначной функцией: $u(x) = u'(x) + iu''(x)$. Ввиду этого введем комплексные пространства $L_2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, сохраняя за ними те же обозначения, что и для вещественных. Элементами этих пространств являются комплекснозначные функции переменной $x \in \Omega$, а скалярные произведения в них определяются равенствами:

$$(u, v) = \int_\Omega u\bar{v}\,dx, \qquad (u, v)_{2,\Omega}^{(1)} = \int_\Omega (u\bar{v} + u_x\bar{v}_x)\,dx$$

соответственно.

Обобщенное решение задачи (3.9), (2.2) *из* $W_2^1(\Omega)$ определим, в соответствии с вышесказанным, как элемент

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющий тождеству

$$\mathscr{L}(u,\ \bar\eta) \equiv \int\limits_\Omega \left(a_{ij}u_{x_i}\bar\eta_{x_j} + a_i u\bar\eta_{x_i} - b_i u_{x_i}\bar\eta - au\bar\eta\right) dx =$$

$$= -\lambda \int\limits_\Omega u\bar\eta\, dx + \int\limits_\Omega \left(-f\bar\eta + f_i\bar\eta_{x_i}\right) dx \qquad (3.10)$$

при $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Для его нахождения преобразуем (3.10) к уравнению, аналогичному (3.8). Для этого введем в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ новое скалярное произведение

$$[u,\ v] = \int\limits_\Omega a_{ij}u_{x_i}\bar v_{x_j}\, dx,$$

которое, как и в вещественном случае, порождает в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ норму $\|u\|_1 = \sqrt{[u,\ u]}$, эквивалентную старой: $\|u\|_{2,\Omega}^{(1)} = \sqrt{(u,\ u)_{2,\Omega}^{(1)}}$. Далее рассуждаем так же, как и выше, в случае вещественного $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. В результате придем к функциональному уравнению

$$u + Au = \lambda Bu + F \qquad (3.11)$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. В нем операторы A и B определяются на всем $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ их квадратичными формами:

$$[Au,\ \eta] = \int\limits_\Omega \left(a_i u\bar\eta_{x_i} - b_i u_{x_i}\bar\eta - au\bar\eta\right) dx, \qquad (3.12)$$

$$[Bu,\ \eta] = -\int\limits_\Omega u\bar\eta\, dx, \qquad (3.13)$$

а элемент F — тождеством

$$[F,\ \eta] = \int\limits_\Omega \left(-f\bar\eta + f_i\bar\eta_{x_i}\right) dx. \qquad (3.14)$$

Соотношения (3.12)—(3.14) выполняются при $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Так же, как и выше, доказывается, что операторы A и B линейны и вполне непрерывны. Более того, оператор B симметричен (а, следовательно, и самосопряжен) и отрицателен, т. е.

$$[Bu, \eta] = [u, B\eta] \quad \text{при} \quad \forall u, \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

и

$$[Bu, u] < 0 \quad \text{при} \quad u \not\equiv 0.$$

Оба эти свойства непосредственно следуют из тождества (3.13), определяющего оператор B. Ввиду этого оператор B имеет на области $\mathscr{R}(B)$ своих значений обратный (но, вообще говоря, неограниченный). Представим уравнение (3.11) в виде

$$u + Au - \lambda_0 Bu = (\lambda - \lambda_0) Bu + F \tag{3.15}$$

и убедимся, что при достаточно большом вещественном λ_0 оператор $(E + A - \lambda_0 B) \equiv \mathscr{D}$ имеет ограниченный обратный. Обозначим для этого $\mathscr{D}v \equiv w$. В соответствии с (3.12)—(3.14) это равенство эквивалентно тождеству (3.10) с $u = v$, $\lambda = \lambda_0$, $f = w$ и $f_i = 0$. Из этого тождества с $\eta = v$ в силу неравенства (2.8) (для комплексных v неравенство (2.8), как легко понять, имеет вид

$$\mathscr{L}(v, \bar{v}) \geqslant \frac{\nu}{2} \| v_x \|^2 - \left(\mu_4 + \frac{\mu_2^2}{2\nu}\right) \| v \|^2, \text{ где } \| v \|^2 = \int_\Omega | v |^2 dx,$$

а $\| v_x \|^2 = \int_\Omega | v_x |^2 dx$), выведем неравенство

$$[w, v] = [(E + A - \lambda_0 B) v, v] =$$
$$= \mathscr{L}(v, \bar{v}) + \lambda_0 \| v \|^2 \geqslant \frac{\nu}{2} \| v_x \|^2 + \left(\lambda_0 - \mu_4 - \frac{\mu_2^2}{2\nu}\right) \| v \|^2. \tag{3.16}$$

При $\lambda_0 \geqslant \mu_4 + \dfrac{\mu_2^2}{2\nu}$ из (3.16) следует:

$$\| v \|_1 \leqslant c \| w \|_1 = c \| \mathscr{D} v \|_1, \tag{3.17}$$

т. е. оператор $\mathscr{D}$ при таком λ_0 действительно имеет ограниченный обратный. Возьмем, например, $\lambda_0 = \mu_4 + \dfrac{\mu_2^2}{2\nu}$ и перепишем уравнение (3.15) в виде

$$u = (\lambda - \lambda_0) \mathscr{D}^{-1} Bu + \mathscr{D}^{-1} F. \tag{3.18}$$

Оператор $\mathscr{D}^{-1}B$, как произведение ограниченного на вполне непрерывный, является вполне непрерывным оператором. Ввиду этого для уравнения (3.18) справедливы три теоремы Фредгольма. Первая утверждает, что из теоремы единственности следует теорема существования при любом свободном члене. Ввиду эквивалентности уравнения (3.18) тождеству (3.10) с $\forall\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ эта теорема гарантирует существование обобщенного решения $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ задачи (3.9), (2.2) при $\forall f$, f из $L_2(\Omega)$, если известно, что эта задача не может иметь двух различных решений из $W_2^1(\Omega)$. Переходим к следующей теореме Фредгольма. Она утверждает, что теорема единственности для уравнения (3.18) нарушается только для некоторого не более чем счетного множества значений λ с единственной возможной точкой накопления в бесконечности. Эти исключительные значения λ называются спектральными для задачи (3.9), (2.2). Обозначим их через $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, причем пусть $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$ Каждому такому λ соответствует по крайней мере одно нетривиальное (т. е. отличное от тождественного нуля) решение $u(x)$ однородной задачи

$$u = (\lambda - \lambda_0)\mathscr{D}^{-1}Bu \tag{3.19}$$

или, что то же, $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющее тождеству

$$\mathscr{L}(u, \bar{\eta}) = -\lambda(u, \eta) \tag{3.20}$$

при $\forall\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Вторая теорема Фредгольма утверждает также, что каждое спектральное значение λ_k имеет конечную кратность*) и сопряженное к нему число $\bar{\lambda}_k$ является спектральным для уравнения, сопряженного к (3.19), т. е. уравнения

$$v = (\lambda - \lambda_0)B\mathscr{D}^{*-1}v, \;**) \tag{3.21}$$

*) Кратностью λ_k называется размерность собственного подпространства, соответствующего этому λ_k, иначе говоря: число линейно независимых решений уравнения (3.19) при $\lambda = \lambda_k$.

**) Напомним, что $B^* = B$, а $(\mathscr{D}^{-1})^* = (\mathscr{D}^*)^{-1}$, и потому $(\mathscr{D}^{-1}B)^* = B\mathscr{D}^{*-1}$.

причем кратность $\bar{\lambda}_k$ для (3.21) равна кратности λ_k для (3.19). Для $w = \mathscr{D}^{*-1}v$ соотношение (3.21) дает уравнение

$$\mathscr{D}^* w = (\lambda - \lambda_0) Bw, \qquad (3.22)$$

которое благодаря (3.12)—(3.14) и определению [,] эквивалентно тождеству

$$\mathscr{L}^*(w, \bar{\eta}) \equiv \int_\Omega \left(a_{ij} w_{x_i} \bar{\eta}_{x_j} + a_i w_{x_i} \bar{\eta} - b_i w \bar{\eta}_{x_i} - aw\bar{\eta}\right) dx =$$

$$= -\lambda \int_\Omega w\bar{\eta}\, dx \quad \text{при} \quad \forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \qquad (3.23)$$

Тождество (3.20) выражает тот факт, что $u(x)$ есть *обобщенная собственная функция* из $W_2^1(\Omega)$ задачи

$$\mathscr{L}u = \lambda u, \qquad u|_S = 0, \qquad (3.24)$$

а λ — соответствующее ей спектральное (или собственное) значение. Тождество же (3.23) определяет собственную функцию $w(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ задачи

$$\mathscr{L}^* w \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} w_{x_j} - b_i w\right) - a_i w_{x_i} + aw = \lambda w, \quad w|_S = 0, \qquad (3.25)$$

сопряженной к задаче (3.24). Вторая теорема Фредгольма для уравнения (3.19) гарантирует, что задача (3.24) имеет нетривиальные решения $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ только для значений $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, и каждое λ_k имеет конечную кратность, а задача (3.25) имеет нетривиальные решения w из $W_2^1(\Omega)$ только для значений $\{\bar{\lambda}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, и каждое $\bar{\lambda}_k$ имеет ту же кратность, что и λ_k. Кроме этого, ввиду вещественности коэффициентов $\mathscr{L}$, легко видеть, что если λ_k есть спектральное значение для задачи (3.24), а $u_k(x)$ — одна из соответствующих ему собственных функций, то $\bar{\lambda}_k$ и $\bar{u}_k(x)$ суть решения той же задачи (3.24), так что в данной ситуации спектральные множества $\{\lambda_k\}$ и $\{\bar{\lambda}_k\}$ задач (3.24) и (3.25) совпадают.

Переходим к третьей теореме Фредгольма. Для уравнения (3.18) она дает необходимые и достаточные условия разрешимости для спектральных значений λ. А именно, если $\lambda = \lambda_k$, то задача (3.18) разрешима для тех и только тех свободных членов $\mathscr{D}^{-1}F$, которые ортогональны ко всем решениям v_k задачи (3.21), соответствующим $\lambda = \bar{\lambda}_k$, т. е. для $\mathscr{D}^{-1}F$, удовлетворяющих условиям

$$[\mathscr{D}^{-1}F,\ v_k] = 0. \tag{3.26}$$

Покажем, что условия (3.26) эквивалентны условиям

$$\int\limits_{\Omega} \left(-f\bar{w}_k + f_i\bar{w}_{kx_i}\right) dx = 0, \tag{3.27}$$

где $w_k = \mathscr{D}^{*-1}v_k$ есть любое из об. решений задачи (3.25) с $\lambda = \bar{\lambda}_k$ (при $f_i \equiv 0$ (3.27) выражает факт ортогональности $f(x)$ в $L_2(\Omega)$ ко всем решениям задачи (3.25) с $\lambda = \bar{\lambda}_k$).

Действительно, в силу (3.14)

$$0 = [\mathscr{D}^{-1}F,\ v_k] = [F,\ \mathscr{D}^{*-1}v_k] = [F,\ w_k] = \\ = \int\limits_{\Omega} \left(-f\bar{w}_k + f_i\bar{w}_{kx_i}\right) dx,$$

т. е. (3.27) эквивалентно (3.26). Итак, мы доказали все три теоремы Фредгольма, т. е. следующую теорему:

Теорема 3.2. *Задача* (3.9), (2.2) *однозначно разрешима в пространстве $W_2^1(\Omega)$ при любых f и $f_i \in L_2(\Omega)$ для всех $\lambda = \lambda' + i\lambda''$, кроме не более чем счетного множества $\{\lambda_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, значений λ, образующего спектр задачи* (3.9), (2.2). *Каждое λ_k имеет конечную кратность, и единственной предельной для $\{\lambda_k\}$ точкой может быть $\lambda = \infty$. Наряду с λ_k в спектр задачи* (3.9), (2.2) *входит и $\bar{\lambda}_k$. Это же множество $\{\bar{\lambda}_k\}$ образует и спектр задачи* (3.25), *сопряженной однородной задаче* (3.9), (2.2), *т. е. задаче* (3.24). *Кратности λ_k и $\bar{\lambda}_k$ для задач* (3.24) *и* (3.25) *совпадают. Для разрешимости задачи* (3.9), (2.2) *при $\lambda = \lambda_k$ необходимо и достаточно, чтобы f и f_i удовлетворяли условиям* (3.27), *где w_k есть любое из об. решений задачи* (3.25) *с $\lambda = \bar{\lambda}_k$. Решение задачи* (3.9), (2.2) *в данном случае неединственно. Ее общее решение есть* *сумма какого-либо частного решения и* $\sum_{m=1}^{N_k} c_m v_k^{(m)}(x)$, *где* c_m *суть произвольные константы, а* $v_k^{(m)}(x)$ — *собственные функции задачи* (3.24), *отвечающие* $\lambda = \lambda_k$.

Если λ не есть точка спектра задачи (3.9), (2.2), то уравнение (3.18) однозначно разрешимо в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при $\forall \mathscr{D}^{-1}F$, и оператор $\mathscr{E} \equiv E - (\lambda - \lambda_0)\mathscr{D}^{-1}B$ (согласно теории линейных уравнений вида (3.18) с вполне непрерывным оператором $\mathscr{D}^{-1}B$) имеет в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ ограниченный обратный $\mathscr{E}^{-1}$. Следовательно,

$$\|u\|_1 = \|\mathscr{E}^{-1}\mathscr{D}^{-1}F\|_1 \leqslant c_\lambda \|\mathscr{D}^{-1}F\|_1, \tag{3.28}$$

где c_λ есть норма $\mathscr{E}^{-1}$ (как оператора в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$). Оператор $\mathscr{D}$ также имеет ограниченный обратный в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, причем для нормы $\mathscr{D}^{-1}$ известна мажоранта c, явно выражаемая через известные нам величины (см. (3.17)). Итак,

$$\|u\|_1 \leqslant c c_\lambda \|F\|_1. \tag{3.29}$$

Наконец, вспоминая связь F с f и f_i (см. (3.14)), оценим $\|F\|_1$ через $\|f\|$ и $\|\mathbf{f}\|$:

$$\|F\|_1 \leqslant c_2 (\|f\| + \|\mathbf{f}\|), \tag{3.30}$$

где c_2 зависит только от Ω. Из (3.29), (3.30) следует оценка решения $u(x)$ задачи (3.9), (2.2) через свободные члены уравнения (3.9):

$$\|u\|_1 \leqslant c c_\lambda c_2 (\|f\| + \|\mathbf{f}\|). \tag{3.31}$$

В этом неравенстве нам фактически не известна постоянная c_λ. Ее конечность гарантирована упомянутой выше теорией уравнений с вполне непрерывными операторами. Но выразить ее явно через какие-либо характеристики известных нам величин и число λ в общем случае невозможно. Она зависит от близости λ к спектру $\sum_\lambda \equiv \{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ задачи (3.9), (2.2). Вычисление собственных значений λ_k также является весьма трудной задачей. Ввиду этого представляют интерес различные утверждения, касающиеся расположения спектра. Одно такое утверждение доказывается просто. А именно, спектр $\sum_\lambda$ расположен в параболе вида $-\lambda' = c + (\lambda'')^2$ на плоскости $\lambda = \lambda' + i\lambda''$. Постоянная c вычисляется по константам ν, μ и μ_i из условий (2.3), (2.4). Для доказательства этого надо в (3.10) положить $\eta = u$ и из полученного соотношения получить оценку $\|u\|_1$ через $\|f\|$ и $\|\mathbf{f}\|$, считая λ лежащим вне указанной параболы. Наличие такой оценки и укажет, что для λ вне параболы имеет место теорема единственности, т. е. что такие значения λ не принадлежат $\sum_\lambda$. Значительно более трудные рассмотрения потребовались для получения асимптотики собственных значений λ_k в зависимости от номера k. Это было сделано Т. Карлеманом (см. [22$_1$], стр. 710). В частности, им было показано, что $\sum_\lambda$ состоит из бесконечного числа собственных значений.

Замечание 3.1. Как было отмечено в § 1, все результаты, доказываемые нами в данной главе, сохраняются для уравнений (2.1) с неограниченными коэффициентами a_i, b_i, a, суммируемыми с некоторыми степенями. Так, например, утверждения теорем 3.1 и 3.2 справедливы, если a_i и b_i принадлежат $L_{q_i}(\Omega)$ с $q_i > n$, $a \in L_q(\Omega)$ с $q > n/2$, а $f \in L_q(\Omega)$ с $q > 1$ при $n=2$ и с $q \geqslant 2n/(n+2)$ при $n \geqslant 3$ (см. [12$_{13}$]).

Замечание 3.2. Во всех главах, если не оговорено противное, мы считаем Ω ограниченной областью пространства R_n. Однако часть результатов распространяется без большого труда на случай неограниченных областей. Например, задача (3.9), (2.2) однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при любой области Ω и любых f и f_i из $L_2(\Omega)$, если λ лежит вне параболы вида $-\lambda' = c + (\lambda'')^2$. Постоянная c легко подсчитывается по константам ν, μ и μ_i из условий (2.3), (2.4). Для таких λ устанавливается сначала априорная оценка

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant c(\|f\| + \|\mathbf{f}\|) \tag{3.32}$$

с постоянной c, не зависящей от Ω. Разрешимость же доказывается так: берется последовательность ограниченных расширяющихся областей Ω_m, $m=1, 2, \ldots$, исчерпывающая в пределе область Ω. Для всех этих областей справедлива априорная оценка (3.32) для любого возможного решения $u_m(x)$ задачи (3.9), (2.2) в области Ω_m. Существование же таких решений u_m из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_m)$ гарантировано теоремой 3.1. Продолжим $u_m(x)$ нулем вне Ω_m на всю область и сохраним за этим продолжением то же обозначение $u_m(x)$.

Все $u_m(x)$ будут элементами $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и для них, благодаря (3.32), будут равномерно ограничены нормы $\|u_m\|_{2,\Omega}^{(1)}$. Выберем из $\{u_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, подпоследовательность $\{u_{m_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящуюся вместе с производными $\left\{\frac{\partial u_{m_k}}{\partial x_i}\right\}$ слабо в $L_2(\Omega)$ к некоторой функции $u(x)$ и ее производным $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ соответственно. Эта функция $u(x)$ и будет искомым об. решением из $W_2^1(\Omega)$ задачи (3.9), (2.2) в области Ω. Действительно, функции $u_m(x)$ удовлетворяют интегральным тождествам вида (3.10) в областях Ω_m с $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_m)$. Эти тождества можно переписать в виде

$$\mathscr{L}(u_m, \bar{\eta}) = -\lambda(u_m, \eta) + \int_\Omega \left(-f\bar{\eta} + f_i\bar{\eta}_{x_i}\right) dx, \quad (3.33)$$

считая, что все интегрирования проводятся по области Ω, а функции u_m и η равны нулю вне Ω_m. Фиксируем в равенстве (3.33) какое-либо $\eta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и равное нулю вне Ω_m, и перейдем в нем к пределу по выбранной выше подпоследовательности $\{m_k\}$, считая $m_k \geqslant m$. В пределе мы получим равенство (3.10) для u с взятой нами функцией $\eta(x)$. Но указанные $\eta(x)$ образуют плотное множество в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Поэтому $u(x)$ будет удовлетворять тождеству (3.10) с $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тем самым доказано, что $u(x)$ есть об. решение задачи (3.9), (2.2) в области Ω. В силу теоремы единственности, гарантированной оценкой (3.32), вся последовательность $\{u_m\}$ будет сходиться указанным образом к решению $u(x)$.

§ 4. Теоремы разложения по собственным функциям симметрических операторов

Рассмотрим симметрические эллиптические операторы $\mathscr{L}$, т. е. такие, для которых $\mathscr{L}^* = \mathscr{L}$. Из сравнения (2.1) и (3.25) видим, что в этом случае $a_i = -b_i$ и

$$\mathscr{L}u = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j} + a_i u) - a_i u_{x_i} + au. \tag{4.1}$$

Покажем, что для таких $\mathscr{L}$ спектр $\{\lambda_k\}$ и собственные функции $\{u_k(x)\}$ вещественны, причем $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$, а $\{u_k(x)\}$ образуют базис в вещественных пространствах $L_2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Для этого введем в комплексном пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ новое скалярное произведение

$$[u, v] = \int_\Omega (a_{ij}u_{x_i}\bar{v}_{x_j} + a_i(u_{x_i}\bar{v} + u\bar{v}_{x_i}) + (\lambda_0 - a)u\bar{v})\,dx \equiv$$
$$\equiv \mathscr{L}(u, \bar{v}) + \lambda_0(u, v), \tag{4.2}$$

считая λ_0 «достаточно большим», а именно таким, чтобы

$$\mu_1^2 < \nu(\lambda_0 - \mu_4) \tag{4.3}$$

(см. (2.3) и (2.4)). При выполнении этого условия

$$[u, u] \geqslant \nu\|u_x\|^2 - 2\mu_1\|u_x\|\cdot\|u\| + (\lambda_0 - \mu_4)\|u\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \nu_1(\|u_x\|^2 + \|u\|^2), \quad \nu_1 = \mathrm{const} > 0, \tag{4.4}$$

что совместно с условиями (2.3), (2.4) дает эквивалентность нормы $\|u\|_1 = \sqrt{[u, u]}$ и старой нормы $\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Скалярное произведение (4.2) отличается от введенного в § 3, но мы использовали для него то же обозначение [,], что и в § 3.

Рассмотрим спектральную задачу

$$\mathscr{L}u = \lambda u, \qquad u|_S = 0. \tag{4.5}$$

Ее обобщенные решения из $W_2^1(\Omega)$ суть элементы $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющие тождеству $\mathscr{L}(u, \bar{\eta}) = -\lambda(u, \eta)$, или, что то же, тождеству

$$[u, \eta] = (\lambda_0 - \lambda)(u, \eta) \tag{4.6}$$

при $\forall\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Введем, аналогично (3.13), оператор B с помощью тождества

$$[Bu, \eta] = -(u, \eta), \qquad \forall\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{4.7}$$

Как и выше, в § 3, доказывается, что оператор B вполне непрерывен и симметричен, (а следовательно, самосопряжен) и отрицателен. Обратный ему оператор B^{-1} определен на $\mathscr{R}(B)$ (заметим, что он отличается от оператора B из § 3, ибо скалярное произведение (4.2) отлично от скалярного произведения [,] § 3). Ввиду (4.7) тождество (4.6) эквивалентно уравнению

$$u = (\lambda - \lambda_0)\, Bu, \tag{4.8}$$

а (4.8) — уравнению

$$Bu = \mu u, \qquad \text{где} \qquad \mu = (\lambda - \lambda_0)^{-1}. \tag{4.9}$$

Из общей теории самосопряженных вполне непрерывных операторов следует, что спектр B вещественен, отрицателен, собственные числа μ_k, $k = 1, 2, \ldots$, можно считать занумерованными в порядке убывания их модулей, причем с учетом их кратности *). Единственной предельной для $\{\mu_k\}$ точкой может быть $\mu = 0$. Соответственные $\{\mu_k\}$ функции $\{u_k(x)\}$ можно считать вещественными и взаимно ортогональными, так что

$$[u_k, u_l] = 0 \qquad \text{при} \qquad k \neq l \text{ **)}. \tag{4.10}$$

При $\mu = 0$ уравнение (4.9) имеет только нулевое решение: $u \equiv 0$, ибо, как видно из (4.7), из $Bu = 0$ следует, что $u = 0$. Ввиду всего сказанного, $\{u_k\}$ составляют базис в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (см. § 2 гл. I). Так как $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — бесконечномерное пространство, то элементов базиса $\{u_k\}$ — бесконечное число, а так как к тому же каждое собственное число имеет конечную кратность, то различ-

---

*) Т. е. если спектральное значение m — кратно, то оно повторяется в последовательности $\{\mu_k\}$ m раз.

**) Функции u_k и u_l, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны в силу общей теории, функции же, соответствующие одному и тому же собственному значению, мы ортогонализируем сами (это возможно, ибо их произвольные линейные комбинации являются собственными функциями для того же λ).

ных собственных значений — также бесконечно много и $\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0$. Далее, любой элемент F из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ разлагается в ряд Фурье по элементам базиса $\{u_k\}$, т. е. в ряд

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[F, u_k]}{[u_k, u_k]} u_k(x), \tag{4.11}$$

сходящийся в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Напомним, что сходимость в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ означает сходимость в $L_2(\Omega)$ самого ряда (4.11), а также рядов, полученных его (однократным) почленным дифференцированием по любому x_i, $i = 1, \ldots, n$. Такая сходимость ряда (4.11) весьма примечательна, тем более что ряды, получаемые в результате его почленного дифференцирования по x_i, вообще говоря, не ортогональны в $L_2(\Omega)$. Сам же ряд (4.11) является ортогональным в $L_2(\Omega)$, ибо из (4.7), (4.9) и (4.10) следует

$$\mu_k [u_k, u_l] = [Bu_k, u_l] = -(u_k, u_l) = 0 \quad \text{при} \quad k \neq l. \tag{4.12}$$

Нормируем собственные функции $u_k(x)$ так: $\|u_k\| = 1$, тогда

$$(u_k, u_l) = \delta_k^l = -(\lambda_k - \lambda_0)^{-1} [u_k, u_l], \tag{4.13}$$

где $\lambda_k = \lambda_0 + \mu_k^{-1}$ — собственные значения задачи (4.5), а ряд (4.11) может быть записан в виде

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (F, u_k) u_k(x). \tag{4.14}$$

Так как $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ составляет плотное множество в $L_2(\Omega)$, а $\{u_k\}$, будучи базисом в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, ортонормирован в $L_2(\Omega)$, то разложение (4.14) имеет место не только для $F \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, но и для любого элемента F из $L_2(\Omega)$, причем ряд (4.14) сходится к F в норме $L_2(\Omega)$. Подытожим установленные в этом параграфе результаты в виде теоремы:

Теорема 4.1. *Пусть для оператора* $\mathscr{L}$ *вида* (4.1), *заданного в ограниченной области* Ω, *выполнены предположения* (2.3), (2.4). *Тогда спектральная задача* (4.5) *для него в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *имеет счетное множество решений:* $\lambda = \lambda_k$, $u = u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ *Собственные значения* λ_k, *за исключением, может быть, нескольких первых, отрицательны и* $\lambda_k \to -\infty$ *при* $k \to \infty$. *Собственные функции* $\{u_k(x)\}$ *образуют базис в* $L_2(\Omega)$ *и в* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, *ортонормированный в* $L_2(\Omega)$ *и ортогональный в смысле скалярного произведения* (4.2) (*см.* (4.13)).

Ниже, в § 7, мы покажем, что разложения (4.14) по собственным функциям $\{u_k\}$ тонко «улавливают» и дальнейшее улучшение дифференциальных свойств разлагаемой функции $F(x)$, сходясь точно в том функциональном пространстве $W_2^l(\Omega)$ (точнее, некотором его подпространстве), к которому принадлежат $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, и $F(x)$.

Из общей теории для самосопряженных вполне непрерывных операторов B известно, что собственные функции и собственные значения задачи (4.9) могут быть получены как решения нижеследующих вариационных задач. Первое, наименьшее (левое) собственное значение μ_1 (напомним, что оно, как и все остальные μ_k, отрицательно) находится как $\inf [Bu, u]$ среди всех элементов $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию $[u, u] = 1$, или, что то же, как инфимум $J(u) \equiv \frac{[Bu, u]}{[u, u]}$ во всем $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Собственная функция $u_1(x)$ реализует этот инфимум. Пространства $L_2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ здесь и ниже можно брать вещественными. Следующее собственное значение μ_2 есть $\inf J(u)$ на всех функциях u из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию: $[u, u_1] = 0$. Реализуется этот инфимум на одной (или нескольких) собственных функциях. Берем в качестве решения одну из этих функций: $u_2(x)$. Следующее μ_3 (оно может совпасть по величине с μ_2) есть $\inf J(u)$ на множестве всех элементов $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, ортогональных в смысле [,] к $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Продолжая этот процесс дальше, найдем все μ_k, $k = 1, 2, \ldots$, и $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$

Р. Курант установил так называемый минимаксимальный принцип определения $\{\mu_k\}$ и $\{u_k(x)\}$, позволяющий находить μ_m и $u_m(x)$ без предварительного определения μ_k и $u_k(x)$ для $k=1, 2, \ldots, m-1$ (см. [7$_3$], Bd. 1). А именно, он доказал, что

$$\mu_m = \sup_{\mathfrak{M}_{m-1}} \inf_{\substack{[u, v]=0 \\ v \in \mathfrak{M}_{m-1}}} \frac{[Bu, u]}{[u, u]}, \tag{4.15}$$

где $\mathfrak{M}_{m-1}$ есть любое $(m-1)$-мерное подпространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Вспоминая определение (4.7) оператора B, видим, что $J(u) = -\frac{(u, u)}{[u, u]}$, и потому функция $u_1(x)$, реализующая $\inf J(u)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, реализует и $\inf \frac{[u, u]}{(u, u)} = -\frac{1}{\mu_1}$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Так как $[u, u] = \mathscr{L}(u, u) + \lambda_0 (u, u)$, то $u_1(x)$ дает также $\inf \mathscr{L}(u, u) \equiv \inf \int_\Omega [a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + 2a_i u_{x_i} u - au^2]\, dx$ при условии $\int_\Omega u^2 dx = 1$. (Как сказано выше, пространства $L_2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и соответствующие им скалярные произведения берем вещественными. Это возможно из-за вещественности μ_k и $u_k(x)$, известной заранее). Нетрудно подсчитать, что $\inf \mathscr{L}(u, u)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при условии $\|u\| = 1$ равен $-\frac{1}{\mu_1} - \lambda_0$, т. е. $-\lambda_1$, так что $u_1(x)$ и λ_1 удовлетворяют равенству

$$\inf \mathscr{L}(u, u) = \mathscr{L}(u_1, u_1) = -\lambda_1, \tag{4.16}$$

где inf берется по всем вещественным $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ с $\|u\| = 1$.

Функция $u_2(x)$, согласно вышесказанному, ищется среди элементов $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию $[u_1, u] = 0$. Но в силу (4.6) $[u_1, u] = (\lambda_0 - \lambda_1)(u_1, u)$, причем $\lambda_0 - \lambda_1 \neq 0$, поэтому требование $[u_1, u] = 0$ эквивалентно требованию $(u_1, u) = 0$, и u_2, λ_2 находится как решения задачи:

$$\inf \mathscr{L}(u, u) = \mathscr{L}(u_2, u_2) = -\lambda_2, \tag{4.17}$$

где inf берется по всем $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ с $\|u\|=1$ и $(u_1, u) = 0$. Так последовательно находятся все λ_k, $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ Принцип (4.15) для λ_m и $u_m(x)$ дает следующее: $-\lambda_m$ есть $\sup \inf \mathscr{L}(u, u)$, где inf берется по всем u с $\|u\| = 1$ и $(u, v) = 0$, где v пробегает какое-либо $(m-1)$-мерное подпространство $\mathfrak{M}_{m-1}$ пространства $L_2(\Omega)$, а затем ищется sup по всем подпространствам $\mathfrak{M}_{m-1}$. Реализуется этот $\sup \inf \mathscr{L}(u, u)$ на собственной функции u_m.

§ 5. Вторая и третья краевые задачи

Рассмотрим задачу нахождения решений уравнения

$$\mathscr{L}u \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j}) + b_i u_{x_i} + au = \lambda u + f, \tag{5.1}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u \,|_S = 0, \tag{5.2}$$

где $\sigma = \sigma(s)$ — заданная функция на S, $\frac{\partial u}{\partial N} = a_{ij}u_{x_j}\cos \boldsymbol{n}x_i$ — так называемая производная по конормали, а $\boldsymbol{n}$ — нормаль к S, внешняя по отношению к Ω. Пусть выполнены условия (2.3)—(2.5), $|\sigma(s)| \leqslant \mu_5$, а S — кусочно-гладкая (точнее, S должна быть такой, чтобы элементы пространства $W_2^1(\Omega)$ имели следы на S из $L_2(S)$ и для них была верна формула интегрирования по частям и теорема о компактности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и в $L_2(S)$. Достаточные условия для этого даны в § 6 гл. I). Выясним сначала, чтó естественно понимать под обобщенным решением задачи (5.1), (5.2) в пространстве $W_2^1(\Omega)$, причем λ и $u(x)$ будем считать комплекснозначными. Ясно, что произвольный элемент $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ не может удовлетворять ни уравнению, ни краевому условию в форме (5.1) и (5.2) (ибо он может не иметь обобщенных производных второго порядка в Ω, а его производные первого порядка могут быть не определены на S). Поэтому то и другое надо «погрузить» в интегральное тождество. Для этого, пока формально, умножим (5.1) на произвольную функцию — $\overline{\eta(x)}$ из $W_2^1(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω. После этого проведем в первом члене интегрирование по частям и учтем условие (5.2). Это приведет нас к тождеству

$$\int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_i}\bar\eta_{x_j} - b_i u_{x_i}\bar\eta + (\lambda - a)\,u\bar\eta\right) dx + \\ + \int_S \sigma u\bar\eta\, ds = -\int_\Omega f\bar\eta\, dx, \tag{5.3}$$

справедливому при $\forall\eta \in W_2^1(\Omega)$. Соотношение (5.3) имеет смысл для $\forall u(x)$ и $\eta(x)$ из $W_2^1(\Omega)$, ибо согласно результатам о таких функциях u и η, изложенным в § 6 гл. I, можно говорить, что они принимают на S свои граничные значения $u(s)$ и $\eta(s)$, причем эти значения суть элементы $L_2(S)$. Итак, если функция $u(x)$ и коэффициенты $\mathscr{L}$ — достаточно гладкие и $u(x)$ есть хорошее решение задачи (5.1), (5.2), то она удовлетворяет тождеству (5.3) при $\forall\eta \in W_2^1(\Omega)$. Обратно: из такого тождества следует и (5.1), и (5.2). Для этого надо (5.3) преобразовать к виду

$$-\int_\Omega \mathscr{L}u\cdot\bar\eta\, dx + \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\right)\bar\eta\, ds = -\int_\Omega f\bar\eta\, dx$$

и воспользоваться достаточным произволом в выборе $\eta(x)$.

Назовем *обобщенным решением из* $W_2^1(\Omega)$ *задачи* (5.1), (5.2) функцию $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую тождеству (5.3) при $\forall\eta \in W_2^1(\Omega)$. Роль основного функционального пространства в этой задаче будет играть $W_2^1(\Omega)$ (а не $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, как в задаче Дирихле). Введем в нем новое скалярное произведение

$$[u, v] = \int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_i}\bar v_{x_j} + u\bar v\right) dx. \tag{5.4}$$

Тождество (5.3) можно преобразовать к виду

$$[u, \eta] + [Au, \eta] - \lambda[Bu, \eta] + [Cu, \eta] = [F, \eta], \tag{5.5}$$

где операторы A, B и C определяются своими билинейными формами:

$$[Au, \eta] = \int_\Omega \left(-b_i u_{x_i} \bar{\eta} - (a+1) u \bar{\eta}\right) dx,$$

$$[Bu, \eta] = -\int_\Omega u \bar{\eta}\, dx, \quad [Cu, \eta] = \int_S \sigma u \bar{\eta}\, ds,$$

а

$$[F, \eta] = -\int_\Omega f \bar{\eta}\, dx.$$

Так же, как и в § 3, доказывается, что операторы A, B, C вполне непрерывны в $W_2^1(\Omega)$, причем полная непрерывность C есть следствие компактности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(S)$. Для последнего требуется некоторая регулярность S.

Дальнейшее исследование уравнения

$$u + Au - \lambda Bu + Cu = F \tag{5.6}$$

и задачи (5.1), (5.2) проводится вполне аналогично тому, как это сделано в § 3 для задачи Дирихле, и приводит к трем теоремам Фредгольма (т. е. к теореме 3.2) для задачи (5.1), (5.2). Мы не будем переписывать все эти рассуждения и выводы, а только отметим, что сопряженная к (5.1), (5.2) задача имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}^* v \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij} v_{x_j}) - (b_i v)_{x_i} + av = \lambda v + \tilde{f}, \\ \frac{\partial v}{\partial N} + (\sigma - b_i \cos n x_i)\, v\,|_S = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

что усматривается из тождества

$$\int_\Omega \bar{v} \mathscr{L} u\, dx =$$
$$= \int_\Omega u \mathscr{L}^* \bar{v}\, dx + \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial N}\bar{v} - u\frac{\partial \bar{v}}{\partial N} + b_i \cos(n x_i)\, u \bar{v}\right) ds, \tag{5.8}$$

справедливого для любых u и v из $W_2^2(\Omega)$, если помимо (2.3)—(2.5) производные $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial b_i}{\partial x_i}$ существуют и ограничены.

Об. решение $v(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ задачи (5.7) определяется как элемент $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющий тождеству

$$\int_\Omega (a_{ij}v_{x_j}\bar{\eta}_{x_i} - b_i v\bar{\eta}_{x_i} + (\lambda - a)v\bar{\eta})\,dx + \int_S \sigma v\bar{\eta}\,ds = \\ = -\int_\Omega \bar{f}\bar{\eta}\,dx \quad \text{при} \quad \forall\eta \in W_2^1(\Omega).$$

При $b_i \equiv 0$ дифференциальный оператор $\mathscr{L}u$ симметричен, т. е. $\mathscr{L}^*u = \mathscr{L}u$. В этом случае собственные числа λ_k и собственные функции u_k задачи

$$\mathscr{L}u = \lambda u, \qquad \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\Big|_S = 0 \tag{5.9}$$

вещественны. Для них справедливы утверждения, аналогичные тем, которые были доказаны в § 4 для первого краевого условия. Так, система всех собственных функций $\{u_k\}$ составляет базис в пространствах $L_2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$, причем их можно выбрать таким образом, что

$$(u_k, u_l) = \delta_k^l, \tag{5.10}$$

а

$$\mathscr{L}(u_k, u_l) + \int_S \sigma u_k u_l\,ds = -\lambda_k \delta_k^l. \tag{5.11}$$

Любая функция $u(x)$ из $L_2(\Omega)$ разлагается в ряд Фурье

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k)\,u_k(x), \tag{5.12}$$

сходящийся в норме $L_2(\Omega)$. Если же $u(x) \in W_2^1(\Omega)$, то ряд (5.12) сходится к ней в норме $W_2^1(\Omega)$; иначе говоря, ряд (5.12) и ряды, полученные его почленным дифференцированием по любому x_i, сходятся в $L_2(\Omega)$ к u и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ соответственно.

Замечание 5.1. Аналогично задаче (5.1), (5.2) рассматриваются задачи для уравнения (5.1) со смешанными краевыми условиями вида

$$u|_{S_1}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial N}+\sigma u\Big|_{S_2}=0, \tag{5.13}$$

где $S_1\cup S_2=S$. Их *об. решения из класса* $W_2^1(\Omega)$ определяются как элементы $W_{2,0}^1(\Omega)$, удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_i}\bar{\eta}_{x_j}-b_iu_{x_i}\bar{\eta}+(\lambda-a)u\bar{\eta}\right)dx+\int_{S_2}\sigma u\bar{\eta}\,ds = -\int_\Omega f\bar{\eta}\,dx \tag{5.14}$$

при $\forall\eta\in W_{2,0}^1(\Omega)$. Здесь $W_{2,0}^1(\Omega)$ есть подпространство пространства $W_2^1(\Omega)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\bar{\Omega})$, равных нулю вблизи S_1. Для элементов $u(x)\in W_{2,0}^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_\Omega u^2\,dx\leqslant c_{\Omega,S_1}\int_\Omega u_x^2\,dx \tag{5.15}$$

с постоянной c_{Ω,S_1}, зависящей только от Ω и S_1 (при этом «площадь» куска S_1 поверхности S должна быть положительной).

§ 6. Второе основное неравенство для эллиптических операторов

В предыдущих параграфах мы выяснили, как обстоит дело с разрешимостью основных краевых задач для уравнений (2.1) в пространстве $W_2^1(\Omega)$, где Ω — ограниченная область. В данном и следующем параграфах мы покажем, что все обобщенные решения из $W_2^1(\Omega)$ задачи Дирихле будут элементами $W_2^2(\Omega)$, если только известные в ней функции и граница S обладают некоторой гладкостью (большей, чем это требовалось в §§ 2—5). Это же верно и для других краевых задач. Именно, относительно коэффициентов $\mathscr{L}$, помимо (2.3), (2.4), предположим, что они имеют ограниченные на Ω производные $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$, а относительно свободного члена — что f и $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ суть элементы $L_2(\Omega)$. Ввиду этого вместо (2.1) достаточно рассмотреть уравнения вида

$$\mathscr{L}u \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j}) + a_i u_{x_i} + au = f, \tag{6.1}$$

переобозначив $f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ через f, а $\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i u) + b_i u_{x_i} + au$ через $a_i u_{x_i} + au$. Итак, пусть для $\mathscr{L}$ вида (6.1) выполнены условия (2.3), (2.4) и

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right| \leqslant \mu_5, \tag{6.2}$$

а

$$\| f \| < \infty. \tag{6.3}$$

Границу S области предположим дважды непрерывно дифференцируемой (короче: $S \in C^2$). Покажем, что при выполнении этих условий относительно (6.1) и S для любой функции $u(x)$ из $C^2(\overline{\Omega})$, равной нулю на S, справедливо неравенство

$$\| u_{xx} \|^2 \leqslant \frac{2}{\nu^2} \| \mathscr{L}u \|^2 + c\left(\| u \|_{2,\Omega}^{(1)}\right)^2 \tag{6.4}$$

с постоянной c, определяемой постоянными μ_i из условий (2.3), (2.4), (6.2) и S *). В частности, для $\mathscr{L} = \Delta$ в выпуклой области Ω неравенство (6.4) имеет вид

$$\| u_{xx} \| \leqslant \| \Delta u \|. \tag{6.5}$$

Неравенства (6.4), (6.5) весьма примечательны и неожиданны, что видно уже из (6.5): оказалось, что сумма $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ оценивает каждое слагаемое отдельно, если

*) Коэффициент $2/\nu^2$ можно заменить на $(1+\varepsilon)/\nu^2$ с $\forall \varepsilon > 0$, но при этом постоянную c надо заменить на соответствующую постоянную c_ε.

в качестве нормы взять норму $L_2(\Omega)$ и это — для произвольной функции $u(x)$ из $C^2(\overline{\Omega})$, равной нулю на S! Если же взять какую-либо точку $x_0 \in \Omega$, то ясно, что в ней $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right|$ нельзя оценить через $|\Delta u|$. Если (6.4) верно для $\forall u \in C^2(\overline{\Omega})$ и $u|_S = 0$, то оно верно и для замыкания этого множества в норме $W_2^2(\Omega)$, которое мы обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_{2,0}^2(\Omega)$. Действительно, для $\forall u(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$ есть последовательность $\{u_m\}$, $u_m \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$, $u_m|_S = 0$, сходящаяся к $u(x)$ в норме $W_2^2(\Omega)$. Для каждой из u_m неравенство (6.4) справедливо, причем c не зависит от m. Переходя в нем к пределу по $m \to \infty$, получим, как нетрудно видеть, неравенство (6.4) для $u(x)$ (эта процедура коротко называется «замыканием неравенства (6.4) в норме $W_2^2(\Omega)$»).

Как видно из (2.15), для $\forall u(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u_x\|^2 \leqslant \frac{1}{2\nu\varepsilon_2}\|\mathscr{L}u\|^2 + c_{\varepsilon_2}\|u\|^2, \tag{6.6}$$

где $c_{\varepsilon_2} = \frac{2}{\nu}\left|\mu_4 + \frac{\mu_2^2}{\nu} + \varepsilon_2\right|$, а $\varepsilon_2 > 0$ (ибо $u(x)$ есть обобщ. решение из $W_2^1(\Omega)$ задачи $\mathscr{L}u = f$, $u|_S = 0$, с $f(x)$, равной $\mathscr{L}u(x) \in L_2(\Omega)$). Прибавим к обеим частям (6.4) сумму $\|u_x\|^2 + \|u\|^2$ и в правой части полученного неравенства заменим $\|u_x\|^2$ мажорантой из (6.6) и приведем подобные члены. Затем извлечем из обеих частей результирующего неравенства квадратный корень и воспользуемся для оценки правой части неравенством $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$, справедливым для любых неотрицательных чисел a и b. Это при $\varepsilon_2 = \frac{\nu(c+1)}{4}$ приведет нас ко *второму основному неравенству* для эллиптических операторов

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant \frac{2}{\nu}\|\mathscr{L}u\| + c_2\|u\|, \tag{6.7}$$

где $c_2 = \sqrt{(c+1)(c_1+1)}$, а $c_1 = c_{\varepsilon_2}$ при $\varepsilon_2 = \frac{\nu(c+1)}{4}$. Оно справедливо для $\forall u \in W_{2,0}^2(\Omega)$. В тех случаях, когда $\mathscr{L}(u, u) \geqslant \delta_1 \|u\|^2$, $\delta_1 = \mathrm{const} > 0$, последний член $\|u\|$ в (6.7) можно оценить через $\|\mathscr{L}u\|$ и вместо (6.7) получить неравенство

$$\|u\|^{(2)}_{2, \Omega} \leqslant c_3 \|\mathscr{L}u\|, \tag{6.8}$$

где $c_3 = \frac{2}{\nu} + c_2\delta_1^{-1}$. Действительно,

$$|\mathscr{L}(u, u)| = |(\mathscr{L}u, u)| \leqslant \|\mathscr{L}u\| \cdot \|u\|$$

и потому из нашего предположения следует $\delta_1\|u\| \leqslant \leqslant \|\mathscr{L}u\|$, а отсюда и (6.7) вытекает (6.8). Неравенство (6.8) имеет место, например, при выполнении условия

$$\max_{\varepsilon_1 \in (0, \nu]} \left[(\nu - \varepsilon_1) c_\Omega^{-2} - \left(\mu_4 + \frac{\mu_2^2}{4\varepsilon_1}\right)\right] \equiv \delta_1 > 0 \tag{6.9}$$

(см. (2.9), (2.10)). В общем же случае неравенство (6.8) имеет место тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$ не есть точка спектра оператора $\mathscr{L}$, ибо только в этом случае справедливо неравенство $\|u\| \leqslant c\|\mathscr{L}u\|$ (см. (3.31)), а потому и (6.8). Для решений уравнения (6.1), равных нулю на S, неравенства (6.7) и (6.8) дают априорную оценку нормы $\|u\|^{(2)}_{2, \Omega}$ через $\|\mathscr{L}u\| = \|f\|$ и $\|u\|$.

Переходим к доказательству (6.4) для $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u|_S = 0$. Для этого рассмотрим интеграл $\int\limits_\Omega (\mathscr{L}u)^2 dx$ и оценим его снизу следующим образом:

$$\int\limits_\Omega (\mathscr{L}u)^2 dx = \int\limits_\Omega \left[(a_{ij}u_{x_ix_j})^2 + 2a_{ij}u_{x_ix_j}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} u_{x_j} + a_i u_{x_i} + au\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} u_{x_j} + a_i u_{x_i} + au\right)^2\right] dx \geqslant (1 - \varepsilon) \int\limits_\Omega (a_{ij}u_{x_ix_j})^2 dx +$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} u_{x_j} + a_i u_{x_i} + au\right)^2 dx \geqslant$$
$$\geqslant (1 - \varepsilon) \int\limits_\Omega (a_{ij}u_{x_ix_j})^2 dx - c_1\left(-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \int\limits_\Omega (u_x^2 + u^2)\, dx$$
$$\text{при} \quad \forall \varepsilon \in (0, 1). \tag{6.10}$$

Далее, с помощью двукратного интегрирования по частям преобразуем $\int\limits_\Omega (a_{ij}u_{x_ix_j})^2\,dx$ так:

$$\int\limits_\Omega a_{ij}u_{x_ix_j}a_{kl}u_{x_kx_l}\,dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big[a_{ij}u_{x_ix_k}a_{kl}u_{x_jx_l} - \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}a_{kl})\,u_{x_i}u_{x_kx_l} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ij}a_{kl})\,u_{x_i}u_{x_jx_l}\Big]dx + \int\limits_S I(s)\,ds\,^{*)} \geqslant \int\limits_\Omega I_1(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_S I(s)\,ds - c_2\int\limits_\Omega \left(\varepsilon_1 u_{xx}^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}u_x^2\right)dx \qquad (6.11)$$

$$\text{при}\quad \forall \varepsilon_1 \in (0,\ 1).$$

Постоянная c_2 так же, как и c_1, определяется μ_i из условий (2.3), (2.4), (6.2), а

$$I_1(x) \equiv a_{ij}(x)\,a_{kl}(x)\,u_{x_ix_k}u_{x_jx_l},$$

$$I(s) \equiv a_{ij}a_{kl}u_{x_i}\big[u_{x_kx_l}\cos(n,\ x_j) - u_{x_jx_l}\cos(n,\ x_k)\big]\Big|_{x\in S}.$$

Нетрудно видеть, что

$$I_1(x) \geqslant \nu^2 u_{xx}^2. \qquad (6.12)$$

Действительно, зафиксируем произвольную точку $x^0 \in \Omega$ и введем в ее окрестности новые декартовы координаты: $y_k = \alpha_{kl}(x_l - x_l^0)$. Ортогональную матрицу (α_{kl}) выберем так, чтобы она приводила квадратичную форму $a_{ij}(x^0)\,\xi_i\xi_j$ к диагональному виду, т. е. чтобы $a_{ij}(x^0)\,\alpha_{ki}\alpha_{lj} = \lambda_k(x^0)\,\delta_k^l$,

---

*) Для возможности первого интегрирования по частям $u(x)$ должна иметь производные третьего порядка, однако написанное нами равенство, полученное в результате двукратного интегрирования по частям, содержит от $u(x)$ лишь производные второго порядка и оно справедливо для $\forall\, u(x)$ из $C^2(\overline{\Omega})$. Чтобы убедиться в этом, надо продолжить $u(x)$ с Ω на более широкую область Ω_1 так, чтобы $u(x) \in C^2(\Omega_1)$, и взять усреднения $u_\rho(x)$ с гладким ядром. Для u_ρ интересующее нас равенство верно и в нем можно перейти к пределу по $\rho \to 0$. В результате приходим к нему же для самой функции $u(x)$.

где $\lambda_k(x)$, $k=1, \ldots, n$, — собственные числа формы $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$. Тогда, учитывая условие (2.3), получим

$$I_1(x^0)=\sum_{s,\,t=1}^{n} \lambda_s(x^0)\,\lambda_t(x^0)\,u^2_{y_s y_t}(x^0) \geqslant \nu^2 u^2_{yy}.$$

Но $u^2_{yy}(x^0)=u^2_{xx}(x^0)$, и потому (6.12) справедливо. Из (6.10), (6.11) и (6.12) выведем неравенство

$$\int_\Omega (\mathscr{L}u)^2\,dx \geqslant (1-\varepsilon)\left[\nu^2\|u_{xx}\|^2+\int_S I\,ds-c_2\varepsilon_1\|u_{xx}\|^2-\right.$$
$$\left.-\frac{c_2}{\varepsilon_1}\|u_x\|^2\right]-c_1\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2,$$

из которого следует

$$(1-\varepsilon)(\nu^2-\varepsilon_1 c_2)\int_\Omega u^2_{xx}\,dx \leqslant \int_\Omega (\mathscr{L}u)^2\,dx-(1-\varepsilon)\int_S I(s)\,ds+$$
$$+\left[c_1\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+\frac{c_2}{\varepsilon_1}(1-\varepsilon)\right]\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2. \quad (6.13)$$

При $\varepsilon=\frac{1}{7}$ и $\varepsilon_1=\frac{\nu^2}{8c_2}$ (6.13) примет вид:

$$\frac{3\nu^2}{4}\int_\Omega u^2_{xx}\,dx \leqslant \int_\Omega (\mathscr{L}u)^2\,dx-\frac{6}{7}\int_S I(s)\,ds+c_3\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2. \quad (6.14)$$

От неравенства (6.14) самого по себе мало пользы, ибо в его правую часть входит интеграл по S, содержащий вторые производные от $u(x)$. Однако, оказывается (и это есть «изюминка» всего вывода), что если воспользоваться граничным условием $u|_S=0$, то $I(s)$ преобразуется к виду, содержащему лишь производные первого порядка от $u(x)$. Чтобы доказать это, рассмотрим произвольную точку x^0 поверхности S и введем в ней местные декартовы координаты $y_1, \ldots, y_n$: $y_k=c_{kl}(x_l-x^0_l)$, т. е. такие, что ось y_n направлена по внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к S в точке x^0 и матрица (c_{kl}) ортогональна. Пусть $y_n=$ $=\omega(y_1, \ldots, y_{n-1})$ есть уравнение поверхности S в окрестности начала координат $y=(0, \ldots, 0)$. По условию

$\omega(y_1,\ldots,y_{n-1}) \in C^2$. В силу ортогональности матрицы (c_{kl}) имеем: $x_l - x_l^0 = c_{kl}y_k$, $l = 1, \ldots, n$, и потому $\cos(n, x_l) = c_{nl}$, $l = 1, \ldots, n$. Рассмотрим выражение $I(s)$ в точке x^0 и перейдем в нем к координатам y:

$$I(x^0) = a_{ij}a_{kl}c_{mi}\frac{\partial u}{\partial y_m}c_{pk}c_{ql}\frac{\partial^2 u}{\partial y_p\,\partial y_q}c_{nj} -$$

$$- a_{ij}a_{kl}c_{mi}\frac{\partial u}{\partial y_m}c_{pj}c_{ql}\frac{\partial^2 u}{\partial y_p\,\partial y_q}c_{nk} \equiv$$

$$\equiv (b_{nm}b_{pq} - b_{mp}b_{qn})\frac{\partial u}{\partial y_m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_p\,\partial y_q}, \qquad (6.15)$$

где

$$b_{pq} = a_{kl}c_{pk}c_{ql}, \qquad p,\ q = 1, \ldots, n.$$

Воспользуемся теперь граничным условием $u|_S = 0$. Вблизи точки x^0 с координатами $y_1 = \ldots = y_n = 0$ это условие имеет вид

$$u(y_1, \ldots, y_{n-1}, \omega(y_1, \ldots, y_{n-1})) = 0,$$

причем оно выполняется тождественно по $y_1, \ldots, y_{n-1}$ вблизи x^0. Продифференцируем это тождество по y_i и y_j, $i, j = 1,\ldots,n-1$, учитывая, что в точке x^0: $\omega_{y_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$. В точке x^0 это даст:

$$\frac{\partial u}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y_i\,\partial y_j} = -\frac{\partial u}{\partial y_n}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y_i\,\partial y_j} \equiv -\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y_i\,\partial y_j}, \qquad (6.16)$$

$i, j = 1, \ldots, n-1$. Благодаря $u_{y_i}(x^0) = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, $I(s)$ в точке x^0 преобразуется к виду

$$I(x^0) = (b_{nn}b_{pq} - b_{np}b_{qn})\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y_p\,\partial y_q}. \qquad (6.17)$$

При $p = n$ и произвольном q, а также при $q = n$ и произвольном p члены, стоящие в круглой скобке (6.17), взаимно сокращаются, что вместе с (6.16) приводит к равенству

$$I(x^0) = -\sum_{p,\,q=1}^{n-1}(b_{nn}b_{pq} - b_{np}b_{qn})\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2\frac{\partial^2 \omega}{\partial y_p\,\partial y_q}. \qquad (6.18)$$

Будем считать, что координаты $y_1, \ldots, y_{n-1}$ в касательной плоскости к S в точке x^0 выбраны так, что все смешанные производные $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y_p \, \partial y_q}$, $p, q = 1, \ldots, n-1$, в точке x^0 равны нулю (этого, очевидно, всегда можно добиться за счет ортогонального преобразования координат $y_1, \ldots$ $\ldots, y_{n-1}$). Тогда

$$I(x^0) = -\sum_{p=1}^{n-1} (b_{nn} b_{pp} - b_{np}^2) \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_p^2}. \tag{6.19}$$

Пусть

$$\left.\frac{\partial^2 \omega}{\partial y_p^2}\right|_{x^0} \leqslant K, \qquad p = 1, \ldots, n-1, \tag{6.20}$$

где $K \geqslant 0$; тогда

$$-I(x^0) \leqslant \mu^2 (n-1) K \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2, \tag{6.21}$$

ибо матрица (b_{ij}), будучи связанной с матрицей (a_{ij}) преобразованием подобия, осуществляемым ортогональной матрицей (c_{ij}), сама является положительно определенной и удовлетворяющей неравенствам (2.3), из которых следует $0 < b_{nn} b_{pp} - b_{np}^2 \leqslant \mu^2$. Для выпуклых областей Ω производные $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y_p^2} \leqslant 0$, так что в качестве K можно взять нуль. Итак, для произвольных Ω из (6.14) и (6.21) следует

$$\frac{3\nu^2}{4} \int_\Omega u_{xx}^2 \, dx \leqslant \int_\Omega (\mathscr{L} u)^2 \, dx + \\ + \frac{6}{7} \mu^2 (n-1) K \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 ds + c_3 (\| u \|_{2, \Omega}^{(1)})^2, \tag{6.22}$$

а для выпуклых Ω

$$\frac{3\nu^2}{4} \int_\Omega u_{xx}^2 \, dx \leqslant \int_\Omega (\mathscr{L} u)^2 \, dx + c_3 (\| u \|_{2, \Omega}^{(1)})^2. \tag{6.23}$$

Интеграл $\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 ds$ благодаря (6.23) и (1.3) из гл. I может быть оценен так:

$$\int\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 ds = \int\limits_S u_x^2\, ds \leqslant c_4 \int\limits_\Omega (u_x^2 + |\nabla u_x^2|)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \int\limits_\Omega (u_x^2 + 2|u_x|\,|u_{xx}|)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \int\limits_\Omega \left[\varepsilon u_{xx}^2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) u_x^2\right] dx \quad \text{с} \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{6.24}$$

Из (6.23) и (6.24) с $\varepsilon = \frac{\nu^2}{4}\left[\frac{6}{7}\mu^2(n-1)c_4 K\right]^{-1}$ следует

$$\frac{\nu^2}{2} \int\limits_\Omega u_{xx}^2\, dx \leqslant \int\limits_\Omega (\mathscr{L}u)^2\, dx + c_5 (\| u \|_{2,\Omega}^{(1)})^2, \tag{6.25}$$

т. е. неравенство (6.4).

Справедливость (6.5) для выпуклых областей следует из равенства (6.11), имеющего для $\mathscr{L} = \Delta$ вид

$$\int\limits_\Omega (\Delta u)^2\, dx = \int\limits_\Omega u_{xx}^2\, dx + \int\limits_S I(s)\, ds, \tag{6.26}$$

$I(s) = -\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \sum\limits_{p=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_p^2}$ и того, что для выпуклых областей $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y_p^2} \leqslant 0$, т. е. $I(s) \geqslant 0$. Кроме того, в силу (6.3) гл. I для $u \in C^2(\overline{\Omega})$ и $u|_S = 0$ справедливы соотношения

$$\int\limits_\Omega u_x^2\, dx = -\int\limits_\Omega u\, \Delta u\, dx \leqslant \| u \| \cdot \| \Delta u \| \leqslant c_\Omega \| \Delta u \| \, \| u_x \|,$$

которые вместе с (6.3) гл. I дают

$$\| u \|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant c_\Omega \sqrt{1 + c_\Omega^2}\, \| \Delta u \|. \tag{6.27}$$

Из (6.26) и (6.27) для выпуклых Ω получаем

$$\| u \|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant [1 + c_\Omega^2 (1 + c_\Omega^2)]^{1/2} \| \Delta u \|, \tag{6.28}$$

а для произвольных Ω с S из C^2 из (6.25) и (6.27) следует

$$\| u \|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant c \| \Delta u \|, \tag{6.29}$$

где постоянная c определяется не только грубыми характеристиками Ω (как постоянная c_Ω), но и свойствами гладкости S.

Замечание 6.1. Из приведенного вывода неравенства (6.7) видно, что предположение о принадлежности S к классу C^2 можно ослабить. Для сохранения (6.7) достаточно знать, что граница S — кусочно-гладкая, и неравенство (6.20) выполняется для всех точек S, кроме точек, лежащих на «изломах» поверхности S (такие точки составляют на S множество $(n-1)$-меры нуль и не влияют на величину интеграла $\int\limits_S I(s)\,ds$). Такие условия выполнены, например, для любых многогранников. Другим примером областей Ω, для которых справедливо неравенство (6.7), являются произвольные выпуклые области. Для них в качестве K в (6.20) можно взять 0.

Замечание 6.2. Неравенство (6.7) было доказано мною в работах [$12_{2,3,4}$]. Более того, оно является простейшим частным случаем неравенств, установленных в этих работах. В [$12_{2,3,4}$] аналогичные неравенства доказаны не только при первом краевом условии, но и при любом краевом условии вида

$$\frac{\partial u}{\partial l}+\sigma u\Big|_S=0,$$

где $\frac{\partial}{\partial l}$ есть дифференцирование по направлениям, некасательным к S. Независимо от меня и другим способом неравенство (6.7) было доказано Р. Каччиополи для $S\in C^2$ ([5]). Как выяснилось впоследствии, неравенство (6.7), когда $n=2$, а Ω есть круг, имелось в работе [2_1] С. Н. Бернштейна (см. [2_2]). В этом случае неравенство (6.7) для оператора $\mathscr{L}u$ выводится из того же неравенства для оператора Лапласа.

§ 7. Разрешимость задачи Дирихле в пространстве $W_2^2(\Omega)$

Целью данного параграфа является доказательство того, что если для уравнения (6.1) выполнены условия (2.3), (2.4), (6.2) и (6.3), и граница S — достаточно хорошая, то любое об. решение из $W_2^1(\Omega)$ уравнения (6.1) является элементом $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$. Предположим, что $\mathscr{L}$ и S удовлетворяют условиям, при которых выведено в § 6 второе основное неравенство. Тогда при достаточно большом λ_0 для $\mathscr{L}_1 \equiv \mathscr{L} - \lambda_0 E$ будет справедливо неравенство

$$\mathscr{L}_1(u, u) \geqslant \delta_1 \| u \|^2, \qquad \delta_1 = \mathrm{const} > 0, \tag{7.1}$$

для $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$. Из (7.1) и (6.7), как показано в § 6, следует (6.8), т. е.

$$\| u \|^{(2)}_{2,\Omega} \leqslant c \| \mathscr{L}_1 u \|, \tag{7.2}$$

где $u(x)$ — произвольный элемент $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$. Докажем справедливость следующего предложения:

Теорема 7.1. *Пусть для $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_0$, имеющего тот же вид, что и $\mathscr{L}$, справедливы условия* (2.3), (2.4), (6.2) *и* (7.1), *а граница S удовлетворяет условиям, при которых справедливо второе основное неравенство. Пусть, далее, задача*

$$\mathscr{L}_0 u = f, \qquad u|_S = 0 \tag{7.3}$$

имеет решения $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$ для какого-либо плотного в $L_2(\Omega)$ множества $\mathfrak{M}$ элементов $f(x)$.

Тогда задача

$$\mathscr{L}_\tau u = f, \qquad u|_S = 0, \quad \text{где} \quad \mathscr{L}_\tau = \mathscr{L}_0 + \tau(\mathscr{L}_1 - \mathscr{L}_0), \tag{7.4}$$

однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$ для $\forall f \in L_2(\Omega)$ при $\forall \tau \in [0, 1]$.

Из условий теоремы следует, что для $\mathscr{L}_0$ справедливы неравенства (7.1) и (7.2), т. е.

$$\mathscr{L}_0(u, u) \geqslant \delta_1 \| u \|^2, \qquad \delta_1 > 0, \tag{7.5}$$

и

$$\| u \|^{(2)}_{2,\Omega} \leqslant c \| \mathscr{L}_0 u \| \tag{7.6}$$

для $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$. Благодаря (7.6) задача (7.3) однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$ для $\forall f \in L_2(\Omega)$. Действительно, для f из $\mathfrak{M}$ разрешимость дана одним из условий теоремы, а единственность следует из (7.6). Если же $f \in L_2(\Omega)$, но $f \,\overline{\in}\, \mathfrak{M}$, то возьмем последовательность f_m, $m = 1, 2, \ldots$, из $\mathfrak{M}$, сходящуюся к f в норме $L_2(\Omega)$. Для каждого из f_m существует решение u_m задачи (7.3) с $f = f_m$, принадлежащее $W_{2,0}^2(\Omega)$. В силу линейности задачи разность $u_k - u_m$ есть решение задачи (7.3) с $f = f_k - f_m$. Для нее верно неравенство (7.6), т. е.

$$\| u_k - u_m \|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant c \| f_k - f_m \|,$$

из которого следует, что u_k сходятся в $W_2^2(\Omega)$ к некоторому элементу $u \in W_{2,0}^2(\Omega)$. В силу ограниченности коэффициентов $\mathscr{L}_0$, функции $\mathscr{L}_0 u_k$ сходятся в $L_2(\Omega)$ к $\mathscr{L}_0 u$, т. е. $\mathscr{L}_0 u = f$. Итак, мы убедились, что для $\forall f$ из $L_2(\Omega)$ задача (7.3) имеет решение u из $W_{2,0}^2(\Omega)$. Из (7.6) следует его единственность в пространстве $W_{2,0}^2(\Omega)$. Тем самым мы доказали, что оператор $\mathscr{L}_0$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между полными пространствами $W_{2,0}^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим теперь семейство операторов

$$\mathscr{L}_\tau = \mathscr{L}_0 + \tau(\mathscr{L}_1 - \mathscr{L}_0), \qquad \tau \in [0, 1].$$

Очевидно, $\mathscr{L}_\tau$ при $\tau = 0$ совпадает с $\mathscr{L}_0$, а при $\tau = 1$ — с $\mathscr{L}_1$. Покажем, что $\mathscr{L}_\tau$ при $\forall \tau$ из $[0, 1]$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $W_{2,0}^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$. Так как оператор $\mathscr{L}_0$ обладает этим свойством, то задача

$$\mathscr{L}_\tau u = f, \qquad u|_S = 0 \tag{7.7}$$

эквивалентна задаче

$$\left[E + \tau \mathscr{L}_0^{-1}(\mathscr{L}_1 - \mathscr{L}_0)\right] u = \mathscr{L}_0^{-1} f \tag{7.8}$$

в пространстве $W_{2,0}^2(\Omega)$. Оператор $\mathscr{L}_0^{-1}(\mathscr{L}_1 - \mathscr{L}_0)$ является ограниченным в $W_{2,0}^2(\Omega)$, ибо в силу ограниченности коэффициентов $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_0$ и неравенства (7.6)

$$\| \mathscr{L}_0^{-1}(\mathscr{L}_1 - \mathscr{L}_0) u \|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant c \| (\mathscr{L}_1 - \mathscr{L}_0) u \| \leqslant c_1 \| u \|_{2,\Omega}^{(2)}, \tag{7.9}$$

т. е. норма $\| \mathscr{L}_0^{-1}(\mathscr{L}_1 - \mathscr{L}_0) \|^{(2)}$ в пространстве $W_{2,0}^2(\Omega)$ не превосходит c_1. Благодаря этому уравнение (7.8) однозначно разрешимо при $\forall \tau < 1/c_1$ (см. § 2 гл. I), т. е. операторы $\mathscr{L}_\tau$ при $\tau < 1/c_1$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между $W^2_{2,0}(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$. Если число $1/c_1 \leqslant 1$, то возьмем $\tau_1 = 1/2c_1$ и применим к (7.7) оператор $\mathscr{L}^{-1}_{\tau_1}$. Это в силу $\mathscr{L}_\tau = \mathscr{L}_{\tau_1} + (\tau - \tau_1)(\mathscr{L}_1 - \mathscr{L}_0)$ дает уравнение

$$[E + (\tau - \tau_1)\mathscr{L}^{-1}_{\tau_1}(\mathscr{L}_1 - \mathscr{L}_0)]\,u = \mathscr{L}^{-1}_{\tau_1} f, \tag{7.10}$$

эквивалентное задаче (7.7). Для исследования разрешимости (7.10) оценим норму оператора $\mathscr{L}^{-1}_{\tau_1}(\mathscr{L}_1 - \mathscr{L}_0)$ в пространстве $W^2_{2,0}(\Omega)$. Для этого заметим, что из (7.1) для $\mathscr{L}_0$ и $\mathscr{L}_1$ следует неравенство

$$\mathscr{L}_\tau(u, u) = (1 - \tau)\mathscr{L}_0(u, u) + \tau\mathscr{L}_1(u, u) \geqslant \delta_1 \| u \|^2, \tag{7.11}$$

а из условий (2.3), (2.4) и (6.2) для $\mathscr{L}_0$ и $\mathscr{L}_1$ — выполнение таких же условий с теми же постоянными для всех $\mathscr{L}_\tau$, $\tau \in [0, 1]$. Благодаря этому для $\forall u \in W^2_{2,0}(\Omega)$ и всех операторов $\mathscr{L}_\tau$, $\tau \in [0, 1]$, справедливо неравенство (7.6), т. е.

$$\| u \|^{(2)}_{2,\Omega} \leqslant c \| \mathscr{L}_\tau u \| \tag{7.12}$$

с той же постоянной c, что и в (7.6).

Из (7.11) и (7.12), как показано в (7.9), следует оценка нормы $\| \mathscr{L}^{-1}_\tau(\mathscr{L}_1 - \mathscr{L}_0) \|^{(2)} \leqslant c_1$, если $\mathscr{L}^{-1}_\tau$ существует. Возвращаясь к (7.10), заключаем, что уравнение (7.10) однозначно разрешимо для $\tau - \tau_1 < 1/c_1$, в частности, для $\tau = 2\tau_1$, если $2\tau_1 \leqslant 1$. Тем самым показано существование обратного оператора к $\mathscr{L}_{2\tau_1}$. Продолжая этот процесс, мы за конечное число шагов убедимся в существовании $\mathscr{L}^{-1}_\tau$ для $\forall \tau \in [0, 1]$. Теорема 7.1 доказана.

Для ее применения надо иметь разрешимость в $W^2_{2,0}(\Omega)$ задачи (7.3) для какого-либо оператора $\mathscr{L}_0$, обладающего свойствами, требуемыми теоремой 7.1. Если Ω есть шар K_ρ, или шаровой слой $K_{\rho,\rho_1} = \{x: \rho \leqslant |x| \leqslant \rho_1\}$, или параллелепипед Π, то в качестве $\mathscr{L}_0$ можно взять оператор Лапласа. Действительно, для этих областей (а также для многих других) известна полная система собственных функций $\{u_k(x)\}$ оператора Лапласа при первом краевом условии, причем $u_k(x)$ суть бесконечно дифференцируемые в $\overline{\Omega}$ функции. Благодаря этому решением задачи

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{N} c_k u_k(x), \qquad u|_S = 0$$

при произвольных числах c_k и $\forall N \geqslant 1$ является

$$u = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{\lambda_k} u_k(x) \in \overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega),$$

где $\Delta u_k = \lambda_k u_k$, $u_k|_S = 0$, причем суммы $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k u_k(x)$ плотны в $L_2(\Omega)$. Все остальные условия теоремы 7.1 для $\mathscr{L}_0 = \Delta$ также, очевидно, выполнены, надо только в качестве ν и μ_i для $\mathscr{L}_0$ и $\mathscr{L}_1$ взять подходящие постоянные. Следовательно, в указанных областях в качестве $\mathscr{L}_0$ можно взять Δ. Аналогичное рассуждение верно и для областей, которые могут быть невырожденным преобразованием переменных $y = y(x)$ с $y(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ преобразованы в одну из областей указанного вида *). Действительно, переходя к переменным y в уравнении $\mathscr{L}u - \lambda_0 u = f$, мы приходим к уравнению $\tilde{\mathscr{L}}u - \lambda_0 u = f$, где $\tilde{\mathscr{L}}u \equiv \frac{\partial}{\partial y_i}(b_{ij} u_{y_j}) + b_i u_{y_i} + bu$, $\quad b_{ij} = a_{kl} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_l}$, $b_i = a_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k} - a_{lj} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_l}\right)$, $b = a$, в области $\tilde{\Omega}$ изменения y. Коэффициенты $\tilde{\mathscr{L}}$ удовлетворяют условиям вида (2.3), (2.4), (6.2). Благодаря этому для $\tilde{\mathscr{L}}_1 \equiv \tilde{\mathscr{L}} - \lambda_0 E$ с достаточно большим λ_0 будут справедливы неравенства (7.1), (7.2) (вообще говоря, с другими постоянными), а потому и теорема 7.1. В качестве $\tilde{\mathscr{L}}_0$ можно взять оператор $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} - \lambda_0 E$. Тогда теорема 7.1 гарантирует однозначную разрешимость в $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\tilde{\Omega})$ задачи

$$(\tilde{\mathscr{L}} - \lambda_0 E)\, u = f, \qquad u|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0. \tag{7.13}$$

*) Т. е. функция $y = y(x)$ должна давать диффеоморфное отображение $\overline{\Omega}$ на $\overline{\tilde{\Omega}}$, $y(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ и якобианы $\frac{\partial(y)}{\partial(x)}$ и $\frac{\partial(x)}{\partial(y)}$ должны быть строго положительными.

Возвращаясь к переменным x, убеждаемся, что задача

$$(\mathscr{L} - \lambda_0 E) u = f, \qquad u|_S = 0 \tag{7.14}$$

однозначно разрешима в $W^2_{2,0}(\Omega)$. Итак, доказана

Теорема 7.2. *Если коэффициенты* $\mathscr{L}$ *из* (6.1) *удовлетворяют условиям* (2.3), (2.4) *и* (6.2), $f \in L_2(\Omega)$, *а область* Ω *есть шар, или шаровой слой, или параллелепипед, или может быть преобразована в одну из этих областей с помощью регулярного преобразования* $y = y(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, *то задача* (7.14) *однозначно разрешима в* $W^2_{2,0}(\Omega)$ *для достаточно больших* λ_0.

Возьмем теперь произвольное обобщенное решение $u(x)$ из $W^1_2(\Omega)$ задачи

$$(\mathscr{L} - \lambda E) u = f, \qquad u|_S = 0 \tag{7.15}$$

с $f \in L_2(\Omega)$. Его можно рассмотреть как обобщенное решение из $W^1_2(\Omega)$ задачи (7.14) со свободным членом, равным $f + (\lambda - \lambda_0) u \in L_2(\Omega)$. В силу теорем 7.2 и 2.1 эта задача разрешима в $W^2_{2,0}(\Omega)$ и для нее имеет место теорема единственности в классе $W^1_2(\Omega)$. Следовательно, взятое нами $u(x)$ будет принадлежать $W^2_{2,0}(\Omega)$. Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 7.3. *Если для* $\mathscr{L}$, f *и* Ω *выполнены условия теоремы* 7.2, *то любое обобщенное решение из* $W^1_2(\Omega)$ *задачи* (7.15) *является элементом* $W^2_{2,0}(\Omega)$.

Из этой теоремы и результатов § 3 о фредгольмовой разрешимости задачи

$$\mathscr{L} u = \lambda u + f, \qquad u|_S = 0 \tag{7.16}$$

в пространстве $W^1_2(\Omega)$ следует, что при выполнении условий теоремы 7.3 эта задача фредгольмово разрешима и в пространстве $W^2_{2,0}(\Omega)$. Спектр ее $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, не зависит от пространства, в котором мы ее рассматриваем. Если λ отлично от λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, то оператор $\mathscr{L} - \lambda E$ имеет ограниченный обратный, что в условиях теоремы 7.3 гарантирует наличие оценки

$$\| u |^{(2)}_{2,\Omega} \leqslant c_\lambda \| (\mathscr{L} - \lambda E) u \|. \tag{7.17}$$

Постоянную c_λ в общем случае мы не можем выписать явно через коэффициенты $\mathscr{L} - \lambda E$ и S, как это было сделано в § 6 в случае (6.9), однако ее существование гарантировано теоремами Фредгольма.

Замечание 7.1. Теорема 7.3 показывает, что увеличение «гладкости» коэффициентов $\mathscr{L}$, f и S гарантирует увеличение гладкости всех обобщенных решений из $W_2^1(\Omega)$ уравнений (7.15) *). Можно показать, что это улучшение свойств решений имеет локальный характер. Именно, если коэффициенты $\mathscr{L}$ и f удовлетворяют условиям теоремы 7.2 лишь в какой-либо подобласти Ω_1 области Ω, то $\forall$ об. р. $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ уравнения (7.15) будет элементом $W_2^2(\Omega_1')$ для $\forall \overline{\Omega}_1' \subset \Omega_1$. Если же Ω_1 примыкает к границе Ω по куску $S_1 \subset S$, и $\mathscr{L}$, f и Ω_1 удовлетворяют условиям теоремы 7.2, то $\forall$ об. р. $u \in W_2^1(\Omega)$ будет элементом $W_2^2(\tilde{\Omega}_1)$ для $\forall \tilde{\Omega}_1 \subset \Omega_1$, отстоящей от части границы Ω_1, не принадлежащей S, на положительное расстояние. Из этих результатов следует, что теоремы 7.2 и 7.3 справедливы для более широкого класса областей Ω, а именно, для областей, которые можно представить в виде суммы $\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i$ областей Ω_i, для каждой из которых есть такая ε-окрестность $\Omega_i^\varepsilon \supset \Omega_i$, что пересечение $\Omega_i^\varepsilon \cap \Omega$ удовлетворяет требованиям теоремы 7.2. *Этому условию, в частности, удовлетворяют области Ω с дважды непрерывно дифференцируемой границей.*

С другой стороны, примеры показывают, что теоремы 7.2 и 7.3 не верны для областей, границы которых имеют «изломы с внутренним двугранным углом, большим π».

Так, для плоской области $\Omega = \{x = \rho e^{i\theta},\ 0 < \rho < 1,\ 0 < \theta < \pi + \varepsilon\}$ с $\varepsilon > 0$ задача $\Delta u = f$, $u|_S = 0$, $f \in L_2(\Omega)$ имеет об. решения из $W_2^1(\Omega)$, не принадлежащие $W_2^2(\Omega)$, и это несмотря на то, что для такой области справедливо второе основное неравенство.

*) Напомним, что в силу замечания 3.1 § 3 гл. II результаты §§ 2 и 3 справедливы для $f \in L_{2\hat{n}/(\hat{n}+2)}(\Omega)$, где $\hat{n} = n$ при $n > 2$ и $\hat{n} = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, при $n = 2$.

Локальный характер увеличения гладкости об. решений уравнений (7.15) обусловлен тем, что помимо оценок вида (6.4) имеют место «локальные оценки» вида

$$\int_{\Omega} u_{xx}^2 \zeta^2 \, dx \leqslant \frac{2}{\nu^2} \int_{\Omega} (\mathscr{L}u)^2 \zeta^2 \, dx + c(|\zeta|, |\zeta_x|)(\|u\|_{2,\Omega}^{(1)})^2,$$

справедливые для $\forall u(x) \in W_2^2(\Omega)$ и $\forall$ гладкой функции $\zeta(x)$ с носителем в Ω, и аналогичные оценки для $u(x)$ из $C^2(\bar{\Omega}_1)$ в областях Ω_1, примыкающих к какому-либо гладкому куску S_1 границы $\partial\Omega$. Во втором случае $u(x)$ должна обращаться в нуль на S_1, но зато носитель $\zeta(x)$ может пересекать границу Ω_1 так, что это пересечение принадлежит S_1. В первом случае гладкость границы не нужна. Эти неравенства выводятся из рассмотрений интеграла $\int_{\Omega} (\mathscr{L}u)^2 \zeta^2 \, dx$, аналогичных проведенным выше.

Доказательства изложенных здесь фактов и ссылки на исследования по задаче Дирихле в плоских областях с границей, имеющей внутренние углы, большие π, даны в книге [12_{13}].

Замечание 7.2. Теоремы 7.2 и 7.3, равно как и неравенство (7.17), остаются справедливыми и для комплексных λ, $u(x)$ и $f(x)$.

Если оператор $\mathscr{L}$ является симметричным, т. е. если $\mathscr{L}u$ имеет вид (4.1) или, что то же, вид

$$\mathscr{L}u = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij} u_{x_j}) + au, \tag{7.18}$$

и для него и Ω выполнены условия теоремы 7.2, то собственные функции задачи

$$\mathscr{L}u = \lambda u, \qquad u|_S = 0 \tag{7.19}$$

являются элементами $\overset{\circ}{W}{}_{2,0}^2(\Omega)$. Более того, любая функция f из $W_{2,0}^2(\Omega)$ раскладывается по ним в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k) u_k(x), \tag{7.20}$$

сходящийся к $f(x)$ в норме $W_2^2(\Omega)$ (иными словами, ряд (7.20) и ряды, полученные его почленным дифференцированием по x_i один или два раза, сходятся в $L_2(\Omega)$ *)). Действительно, сходимость ряда (7.20) к f в норме $W_2^1(\Omega)$ была доказана в § 4. Нам остается доказать его сходимость в себе в норме $W_2^2(\Omega)$. В силу неравенства (6.8), справедливого для оператора $\mathscr{L} - \lambda_0 E$ с $\lambda_0 \geqslant \max\limits_x a(x)$, норма $\|\cdot\|_{2,\Omega}^{(2)}$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_{2,0}^{2}(\Omega)$ эквивалентна норме

$$\|u\|_2 \equiv \|\mathscr{L}u - \lambda_0 u\|.$$

Норме $\|u\|_2$ соответствует скалярное произведение $\{u, v\}_2 \equiv (\mathscr{L}u - \lambda_0 u, \mathscr{L}v - \lambda_0 v)$. Собственные функции u_k задачи (7.19) ортогональны относительно этого скалярного произведения, ибо

$$\{u_k, u_l\} = (\lambda_k - \lambda_0)(\lambda_l - \lambda_0)(u_k, u_l) = (\lambda_k - \lambda_0)^2 \delta_k^l.$$

В силу этого

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k) u_k \right\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k)^2 (\lambda_k - \lambda_0)^2. \qquad (7.21)$$

Для доказательства сходимости ряда (7.20) в норме $W_{2,0}^2(\Omega)$ достаточно убедиться в сходимости числового ряда (7.21). Для этого представим (f, u_k) в виде

$$(f, u_k) = \frac{1}{\lambda_k}(f, \mathscr{L}u_k) = \frac{1}{\lambda_k}(\mathscr{L}f, u_k) \equiv \frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \qquad (7.22)$$

если $\lambda_k \neq 0$. Это возможно, ибо f и u_k принадлежат $W_{2,0}^2(\Omega)$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ сходится и равен $\|\mathscr{L}f\|^2$. Но тогда сходится и ряд (7.21), если учесть, что собственному числу $\lambda = 0$ может отвечать лишь конечное число собственных функций u_k. Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 7.4. *Если коэффициенты $\mathscr{L}$ и Ω удовлетворяют условиям теоремы 7.2, то любая функция $f \in W_{2,0}^2(\Omega)$ раскладывается в ряд* (7.20), *сходящийся к ней в норме* $W_{2,0}^2(\Omega)$.

---

*) Заметим, что ряды, полученные в результате дифференцирований ряда (7.20), уже не ортогональны в $L_2(\Omega)$!

Замечание 7.3. Результаты данного параграфа, изложенные применительно к задаче Дирихле, установлены и для других «регулярных» краевых условий. Более того, они обобщены на пространства $W_p^l(\Omega)$ и $H^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$, причем не только для уравнений второго порядка, но и для широкого класса систем, эллиптических в смысле И. Г. Петровского и Даглиса — Ниренберга.

§ 8. Приближенные методы решения краевых задач

1. Метод Галеркина. Решения краевых задач для эллиптических уравнений могут быть найдены как пределы приближенных решений, вычисляемых по методу Галеркина.

Классическая форма метода Галеркина для задачи (2.1), (2.2) следующая. В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ берется какая-нибудь фундаментальная система $\{\varphi_k(x)\}$ из линейно независимых функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (т. е. функции φ_k, $k=1, \ldots, N$, линейно независимы при $\forall N < \infty$). Приближенное решение u^N ищется в виде $u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x)$, а постоянные c_k^N определяются из условий

$$(\mathscr{L}u^N, \varphi_l) = \left(f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \varphi_l\right), \quad l=1, \ldots, N. \tag{8.1}$$

Равенства (8.1) представляют собою систему N линейных относительно c_k^N, $k=1, \ldots, N$, алгебраических уравнений. Если для задачи (2.1), (2.2) справедлива теорема единственности, то система (8.1) при достаточно большом N оказывается однозначно разрешимой и ее решения u^N стремятся в норме $W_2^1(\Omega)$ к решению задачи (2.1), (2.2). Сходимости в более сильной норме (в частности, сходимости невязки $\mathscr{L}u^N - f - \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}$ в $L_2(\Omega)$ к нулю), вообще говоря, нет даже при условиях § 7. Доказательство этих фактов дано в [15]. Мы дадим здесь обоснование метода Галеркина в предположении

$$\mathscr{L}(u, u) \geqslant \nu_1 \left(\| u \|_{2,\Omega}^{(1)}\right)^2, \quad \nu_1 = \mathrm{const} > 0, \tag{8.2}$$

более жестком, чем предположение о единственности решения задачи. В этом случае рассуждения весьма просты, причем системы для c_k^N однозначно разрешимы при всех N. Итак, пусть выполнены предположения (2.3)—(2.5) и (8.2). Область же Ω может быть произвольной, в том числе и неограниченной. Искомое об. р. $u(x)$ задачи (2.1), (2.2) должно удовлетворять тождеству (2.6), т. е.

$$\mathscr{L}(u, \eta) = -(f, \eta) + (f_i, \eta_{x_i}) \tag{8.3}$$

при $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Приближенные решения ищем в виде $u^N = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x)$, где $\{\varphi_k(x)\}$ есть фундаментальная система в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Коэффициенты c_k^N определяем как решения линейной алгебраической системы

$$\mathscr{L}(u^N, \varphi_l) = -(f, \varphi_l) + (f_i, \varphi_{lx_i}), \quad l = 1, \ldots, N. \tag{8.4}$$

Соотношения (8.4) совпадают с (8.1), если $\varphi_k \in W_{2,0}^2(\Omega)$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$ и коэффициенты $\mathscr{L}$ удовлетворяют условиям § 6. Система (8.4) разрешима при любых f и f_i, ибо для нее имеет место теорема единственности. Действительно, если бы u^N было решением однородной системы (8.4), то, умножая каждое уравнение на свое c_l^N и складывая по l от $l = 1$ до $l = N$, мы пришли бы к соотношению $\mathscr{L}(u^N, u^N) = 0$, из которого в силу (8.2) следовало бы, что $u^N \equiv 0$, т. е. все c_k^N, $k = 1, \ldots, N$, равны нулю. Итак, система (8.4) однозначно определяет u^N. Умножим каждое из (8.4) на c_l^N и сложим по l от $l = 1$ до $l = N$. Это даст равенство

$$\mathscr{L}(u^N, u^N) = -(f, u^N) + (f_i, u_{x_i}^N),$$

из которого в силу (8.2) следует неравенство

$$\nu_1 (\| u^N \|_{2,\Omega}^{(1)})^2 \leqslant \| f \| \| u^N \| + \| \mathbf{f} \| \| u_x^N \|,$$

гарантирующее оценку

$$\nu_1 \| u^N \|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant (\| f \| + \| \mathbf{f} \|). \tag{8.5}$$

Обозначим через H_N подпространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, состоящее из элементов $\sum_{k=1}^{N} d_k\varphi_k(x)$ с произвольными d_k. Благодаря (8.4) u^N удовлетворяет тождеству

$$\mathscr{L}(u^N, \eta) = -(f, \eta) + (f_i, \eta_{x_i}) \tag{8.6}$$

с $\forall\eta \in H_N$. Равномерная ограниченность норм $\|u^N\|_{2,\Omega}^{(1)}$ в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ дает возможность выбрать подпоследовательность u^{N_k}, $k = 1, 2, \ldots$, слабо сходящуюся в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ к некоторому элементу $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *). Нетрудно убедиться, что u есть решение задачи (2.1), (2.2). Действительно, в (8.6) можно перейти к пределу по выбранной подпоследовательности N_k, $k = k_0$, $k_0 + 1, \ldots$, при закрепленном η из $H_{N_{k_0}}$ и получить в пределе

$$\mathscr{L}(u, \eta) = -(f, \eta) + (f_i, \eta_{x_i}) \tag{8.7}$$

для $\forall\eta \in H_{N_{k_0}}$. Индекс k_0 здесь произволен, так что (8.7), справедливо при $\forall\eta$ из $\bigcup_{N=1}^{\infty} H_N$, т. е. при $\forall\eta$ вида $\sum_{k=1}^{N} d_k\varphi_k(x)$ с любым N. Но такие η плотны в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (ибо по условию $\{\varphi_k\}$ есть фундаментальная система в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$). Поэтому функция $u(x)$ будет удовлетворять (8.7) при $\forall\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и, следовательно, будет об. решением задачи (2.1), (2.2). Выбирая из $\{u^N\}$, $N = 1, 2, \ldots$, любую другую подпоследовательность, сходящуюся в том же смысле, что и $\{u^{N_k}\}$, мы опять в качестве предельной функции получим об. решение задачи (2.1),

---

*) Согласно доказанному в § 5 гл. I, слабая сходимость в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $\{u^{N_k}\}$ к u означает, что $\{u^{N_k}\}$ и $\{u_{x_i}^{N_k}\}$ сходятся слабо в $L_2(\Omega)$ к u и u_{x_i} соответственно. Из теоремы же Реллиха следует, что $\{u^{N_k}\}$ сходятся к $u(x)$ сильно в $L_2(\Omega)$.

(2.2), а так как оно единственно, то это означает, что множество $\{u^N\}$, $N=1, 2, \ldots$, имеет единственную предельную (в смысле слабой топологии в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$) точку $u(x)$. Это же в силу слабой компактности множества $\{u^N\}$, $N=1, 2, \ldots$, в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ приводит к заключению, что вся последовательность u^N, $N=1, 2, \ldots$, слабо в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ сходится к $u(x)$.

Можно показать, что u^N сходятся при $N\to\infty$ к u сильно в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Для этого возьмем последовательность u_N, $N=1, 2, \ldots$, такую, что $u_N \in H_N$ и $\| u-u_N\|_{2,\Omega}^{(1)} \to 0$ при $N\to\infty$, и вычтем из (8.7) равенство (8.6), положив в них $\eta = u_N - u^N$. Результат представим в виде

$$\mathscr{L}(u-u^N, u-u^N) = \mathscr{L}(u-u^N, u-u_N). \tag{8.8}$$

Так как u^N сходится к u слабо в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а u_N сходится к u сильно в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то правая часть (8.8) при $N\to\infty$ стремится к нулю. Это же вместе с (8.2) гарантирует сильную сходимость u^N к u в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Сформулируем доказанное в виде теоремы:

Теорема 8.1. *Если выполнены условия* (2.3)—(2.5) *и* (8.2), *то галеркинские приближения u^N вычисляются при всех N однозначно из системы* (8.4), *для них верна оценка* (8.5), *и при $N\to\infty$ они сходятся в норме $W_2^1(\Omega)$ к решению задачи* (2.1), (2.2). *Область Ω может быть и неограниченной.*

Предположим, что для $\mathscr{L}$, f и Ω выполнены условия теоремы 7.2, и оператор $\mathscr{L}$ вида (6.1) устанавливает взаимно однозначное соответствие между $W_{2,0}^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$, так что

$$\| u\|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant c\, \| \mathscr{L}u\| \tag{8.9}$$

для $\forall u \in W_{2,0}^2(\Omega)$. В этом случае можно так изменить процедуру вычисления приближенных решений u^N, что u^N будут сходиться к решению задачи в норме $W_2^2(\Omega)$, и тем самым невязка в уравнении, т. е. $\mathscr{L}u^N - f$, будет стремиться к нулю в норме $L_2(\Omega)$. Именно, возьмем в $W_{2,0}^2(\Omega)$ фундаментальную систему $\{\psi_k(x)\}$. Тогда функции $\{\varphi_k = \mathscr{L}\psi_k\}$ образуют фундаментальную систему в $L_2(\Omega)$. Действительно, если f есть какой-либо элемент $L_2(\Omega)$, то $\mathscr{L}^{-1}f \equiv v$, как решение задачи $\mathscr{L}v = f$, $v|_S = 0$, существует и принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$. По условию v есть предел в $W^2_{2,0}(\Omega)$ элементов вида $v_N = \sum_{k=1}^{N} b_k^N \psi_k(x)$, но тогда $\mathscr{L}v_N = \sum_{k=1}^{N} b_k^N \varphi_k(x)$ принадлежат $L_2(\Omega)$ и сходятся в $L_2(\Omega)$ к $\mathscr{L}v = f$, т. е. f принадлежит к замыканию в $L_2(\Omega)$ конечномерных подпространств, натянутых на функции $\{\varphi_k\}$. Приближенные решения задачи (6.1), (2.2) будем искать в виде $u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \psi_k(x)$ из системы уравнений

$$(\mathscr{L}u^N, \mathscr{L}\psi_l) = (f, \mathscr{L}\psi_l), \quad l = 1, \ldots, N. \tag{8.10}$$

При каждом N эта система однозначно разрешима и для ее решений справедливы соотношения

$$\| \mathscr{L}u^N \|^2 = (f, \mathscr{L}u^N) \leqslant \| f \| \| \mathscr{L}u^N \|, \tag{8.11}$$

которые вместе с (8.9) дают оценку

$$\| u^N \|^{(2)}_{2,\Omega} \leqslant c \| f \|. \tag{8.11'}$$

Равенство (8.11) получается в результате умножения каждого из уравнений (8.10) на свое c_l^N и сложения всех этих равенств по l от $l = 1$ до $l = N$. Аналогично из (8.10) получается тождество

$$(\mathscr{L}u^N, \mathscr{L}\eta) = (f, \mathscr{L}\eta) \tag{8.12}$$

для $\forall \eta \in \mathscr{H}_N$, где $\mathscr{H}_N$ — линейная оболочка, натянутая на элементы $\psi_1, \ldots, \psi_N$. Слабая сходимость u^N в $W_2^2(\Omega)$ к решению задачи доказывается на основе (8.11') так же, как это было сделано выше в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ на базе оценки (8.5). Для доказательства сильной сходимости в $W_2^2(\Omega)$ u^N к u надо из тождества (8.12) для u вычесть тождество (8.12) для u^N, взяв $\eta = u_N - u^N$, где u_N, $N = 1, 2, \ldots,$ — последовательность элементов, аппроксимирующих u в норме $W_2^2(\Omega)$ и таких, что $u_N \in \mathscr{H}_N$. Это даст соотношение

$$(\mathscr{L}(u-u^N), \mathscr{L}(u_N-u^N))=0,$$

из которого следует

$$(\mathscr{L}(u-u^N), \mathscr{L}(u-u^N))=(\mathscr{L}(u-u^N), \mathscr{L}(u-u_N))\leqslant \leqslant \|\mathscr{L}(u-u^N)\|\,\|\mathscr{L}(u-u_N)\|.$$

Из этого же неравенства, условия (8.9) и сходимости u_N к u в норме $W_2^2(\Omega)$ заключаем, что и u^N сходятся к u в норме $W_2^2(\Omega)$. Итак, доказана теорема:

Теорема 8.2. *Если относительно f, $\mathscr{L}$ и Ω выполнены условия теоремы 7.2 и условие* (8.9), *то приближения $u^N=\sum_{k=1}^{N} c_k^N\psi_k(x)$ однозначно определяются из* (8.10) *и сходятся к решению $u(x)$ задачи* (2.1), (2.2) *в норме $W_2^2(\Omega)$. В качестве $\{\psi_k(x)\}$ надо взять какую-либо фундаментальную систему в пространстве $W_{2,0}^2(\Omega)$.*

Сходимости приближенных решений u^N к точному в норме $W_2^2(\Omega)$, а тем самым, и сходимости невязок $\mathscr{L}u^N-f$ к нулю в норме $L_2(\Omega)$, можно добиться также с помощью следующей модернизации метода Галеркина. Пусть для $\mathscr{L}$ выполнено условие (8.2). Возьмем какую-либо фундаментальную систему $\{\psi_k(x)\}$ в пространстве $W_{2,0}^2(\Omega)$ и произвольный эллиптический оператор

$$\mathscr{M}u=(b_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i}+b_i(x)u_{x_i}+b(x)u \tag{8.13}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условиям

$$\nu_2\xi^2\leqslant b_{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\mu_2\xi^2,\quad \nu_2>0;\quad \left|\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}\right|,\quad \sqrt{\sum_i b_i^2},\quad |b|\leqslant\mu_2. \tag{8.14}$$

Приближенные решения u^N будем искать в виде $u^N=\sum_{k=1}^{N} c_k^N\psi_k(x)$ из системы уравнений

$$(\mathscr{L}u^N, \mathscr{M}\psi_l-\lambda_0\psi_l)=(f, \mathscr{M}\psi_l-\lambda_0\psi_l),\quad l=1,\ldots,N. \tag{8.15}$$

Число λ_0 должно быть достаточно большим (насколько большим, будет указано ниже). Для доказательства однозначной разрешимости системы (8.15) и равномерной ограниченности норм $\| u^N \|_{2,\Omega}^{(2)}$ умножим каждое из уравнений (8.15) на свое c_l^N и сложим по l от 1 до N. В результате получим

$$(\mathscr{L}u^N, \mathscr{M}u^N - \lambda_0 u^N) = (f, \mathscr{M}u^N - \lambda_0 u^N). \qquad (8.16)$$

Оказывается, для $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}_{2,0}^2(\Omega)$ и любых эллиптических операторов $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$, удовлетворяющих лишь условиям вида (8.14), справедливо неравенство

$$(\mathscr{L}u, \mathscr{M}u) \geqslant \nu_3 \| u_{xx} \|^2 - \mu_3 (\| u \|_{2,\Omega}^{(1)})^2, \qquad \nu_3 > 0. \qquad (8.17)$$

Доказывается неравенство (8.17) так же, как это сделано выше в § 6 для случая $\mathscr{L} = \mathscr{M}$ (т. е. начинаем с интеграла $\int\limits_\Omega \mathscr{L}u \cdot \mathscr{M}u \, dx$ и преобразуем его в соответствии с (6.10). Далее проводим преобразования и оценки, аналогичные (6.11)—(6.25). При этом надо воспользоваться возможностью одновременного приведения двух положительных квадратичных форм к диагональному виду). Из (8.17) и предположения (8.2) следует

$$(\mathscr{L}u, \mathscr{M}u - \lambda_0 u) \geqslant \nu_3 \| u_{xx} \|^2 + (\lambda_0 \nu_1 - \mu_3)(\| u \|_{2,\Omega}^{(1)})^2. \qquad (8.18)$$

Выберем λ_0 так, чтобы $\lambda_0\nu_1 - \mu_3 > 0$ (можно допустить и знак равенства: $\lambda_0\nu_1 - \mu_3 = 0$). Тогда для $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}_{2,0}^2(\Omega)$ будем иметь оценку

$$(\mathscr{L}u, \mathscr{M}u - \lambda_0 u) \geqslant \nu_4 (\| u \|_{2,\Omega}^{(2)})^2, \qquad \nu_4 > 0. \qquad (8.19)$$

Благодаря ей из (8.16) легко выводится оценка

$$\| u^N \|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant c \| f \| \qquad (8.20)$$

с постоянной c, не зависящей от N. Она гарантирует однозначную разрешимость алгебраических систем (8.15) и слабую сходимость в $L_2(\Omega)$ u^N, $u_{x_i}^N$ и $u_{x_i x_j}^N$ к u, u_{x_i} и $u_{x_i x_j}$. Дополнительное рассуждение, аналогичное проведенному выше для случая $\mathscr{M} = \mathscr{L}$, приводит к заключению о сильной сходимости u^N к u в норме $\overset{\circ}{W}{}_{2,0}^2(\Omega)$.

Возможны еще другие модернизации метода Галеркина, приводящие к более хорошей сходимости u^N к u (см. [12_{11}]).

Замечание 8.1. Заметим, что в случае, когда $\{\psi_l\}$ являются собственными функциями задачи $\mathscr{M}\psi=\lambda\psi$, $\psi|_S=0$, система (8.15) эквивалентна системе (8.4) (в которой φ_l заменены на ψ_l). Следовательно, при таком выборе фундаментальной системы $\{\psi_l\}$ первоначальная форма метода Галеркина совпадает с модернизированной и приводит к решениям u^N, сходящимся к u в норме $W_2^2(\Omega)$.

Одни из первых обобщений метода Галеркина были предложены Г. И. Петровым в работе [17] 1940 г., в которой рассматривается краевая (и спектральная) задача для одного обыкновенного дифференциального уравнения $\mathscr{L}u=f$ четвертого порядка (уравнения Орра — Зоммерфельда). В первом из них приближенное решение u^N ищется в виде $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k^N\varphi_k(x)$, где $\varphi_k(x)$, $k=1,2,\ldots,$ — какие-либо гладкие функции, удовлетворяющие поставленным граничным условиям, а коэффициенты c_k^N определяются из системы уравнений $(\mathscr{L}u^N-f,\psi_l)=0$, $l=1,\ldots,N$, в которой $\{\psi_l\}$, $l=1,2,\ldots,$ есть какой-либо базис в L_2. Второе обобщение напоминает обобщение вида (8.15).

Замечание 8.2. В § 12 гл. VI мы еще раз вернемся к методу Галеркина и установим его связи с методом конечных разностей и другими проекционными методами.

Мы изложили метод Галеркина применительно к первому краевому условию. Если вместо него искомое решение $u(x)$ подчинено краевому условию (5.2), то в описанную выше схему надо внести некоторые изменения. Напомним, что об. решение $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ задачи

$$\mathscr{L}u\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}u_{x_j}\right)+b_iu_{x_i}+au=f,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial N}+\sigma u\right|_S=0 \quad (8.21)$$

определяется как элемент $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\mathscr{L}(u,\eta)+\int\limits_S \sigma u\eta\,ds=-(f,\eta) \qquad (8.22)$$

при $\forall \eta \in W_2^1(\Omega)$. Здесь

$$\mathscr{L}(u, \eta) = \int_\Omega \left(a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} - b_i u_{x_i} \eta - a u \eta\right) dx.$$

Возьмем какую-либо фундаментальную систему $\{\varphi_k(x)\}$ в пространстве $W_2^1(\Omega)$ и будем искать приближенные решения u^N в виде $\sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x)$ из равенств

$$\mathscr{L}(u^N, \varphi_l) + \int_S \sigma u^N \varphi_l \, ds = -(f, \varphi_l), \quad l = 1, \ldots, N. \tag{8.23}$$

Эти последние являются системой N линейных алгебраических уравнений относительно N неизвестных чисел c_k^N, $k = 1, \ldots, N$. Ее однозначная разрешимость и равномерные оценки норм $\| u^N \|_{2, \Omega}^{(1)}$ выводятся из соотношения

$$\mathscr{L}(u^N, u^N) + \int_S \sigma (u^N)^2 \, ds = -(f, u^N), \tag{8.24}$$

являющегося суммой равенств (8.23), умноженных на соответствующие c_l^N. Если $\mathscr{L}$, σ и Ω таковы, что для $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\mathscr{L}(u, u) + \int_S \sigma u^2 \, ds \geqslant \nu_1 \left(\| u \|_{2, \Omega}^{(1)}\right)^2, \quad \nu_1 > 0, \tag{8.25}$$

то из (8.24) следует

$$\| u^N \|_{2, \Omega}^{(1)} \leqslant \frac{1}{\nu_1} \| f \|.$$

Рассуждая далее так же, как и в начале параграфа, придем к заключению, что u^N сходятся в норме $W_2^1(\Omega)$ к $u(x)$. О модернизациях метода Галеркина для задачи (8.21), гарантирующих сходимость u^N к u в норме $W_2^2(\Omega)$, мы говорить здесь не будем, поскольку для краевых условий третьего рода мы не вывели второе основное неравенство.

2. Метод Ритца. Для симметрических операторов

$$\mathscr{L}u \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} u_{x_j} + a_i u\right) - a_i u_{x_i} + a u \tag{8.26}$$

интегральное тождество

$$\mathscr{L}(u, \eta) = \int_\Omega (a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + a_i u\eta_{x_i} + a_i u_{x_i}\eta - au\eta)\,dx =$$
$$= \int_\Omega (-f\eta + f_i\eta_{x_i})\,dx, \qquad \forall\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{8.27}$$

лежащее в основе определения обобщенного решения задачи (2.1), (2.2) из $W_2^1(\Omega)$, есть не что иное, как равенство нулю первой вариации квадратичного функционала

$$J(u) = \int_\Omega (a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + 2a_i u u_{x_i} - au^2 + 2fu - 2f_i u_{x_i})\,dx,$$

рассматриваемого на всех элементах $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Функция η в (8.27) играет роль допустимой вариации u. Если функция $u(x)$ дает наименьшее значение функционалу $J(u)$ на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то, как известно, $\delta J\,(u;\,\delta u) = 0$ для $\forall \delta u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, т. е. u удовлетворяет тождеству (8.27) при $\forall\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. На этом основан метод Ритца, позволяющий строить минимизирующую последовательность u^N, $N = 1, 2, \ldots$, для функционала $J(u)$, т. е. последовательность, на которой $J(u^N)$ стремятся к $\inf J(u)$. При некоторых предположениях о $\mathscr{L}$, f и f_i функции u^N сходятся в норме $W_2^1(\Omega)$ к функции $u(x)$, реализующей $\inf J(u)$.

Пусть a_{ij}, a_i и a — ограниченные функции и

$$\mathscr{L}(u, u) \geqslant \nu_1(\|u\|_{2,\Omega}^{(1)})^2, \qquad \nu_1 > 0, \tag{8.28}$$

при любых $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. При этих условиях, как легко видеть, задача

$$\mathscr{L}u = f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \qquad u|_S = 0 \tag{8.29}$$

не может иметь двух различных обобщенных решений из $W_2^1(\Omega)$, а функционал $J(u)$ полуограничен снизу на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, ибо для $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$J(u) \geqslant \nu_1(\|u\|_{2,\Omega}^{(1)})^2 - 2\|f\|\,\|u\| - 2\|\mathbf{f}\|\,\|u_x\| \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{1}{\nu_1}(\|f\|^2 + \|\mathbf{f}\|^2). \tag{8.30}$$

Ввиду последнего $\inf J(u) > -\infty$ и существует минимизирующая последовательность u^N, $N = 1, 2, \ldots$ Ее, оказывается, можно строить так: взять фундаментальную в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ последовательность $\{\varphi_k(x)\}$ и соответствующую ей последовательность расширяющихся пространств H_N, $N = 1, 2, \ldots$ (так что H_N есть линейная оболочка, натянутая на $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$). Функционал $J(u)$ на H_N есть квадратичная форма от коэффициентов произвольного элемента $u^N = \sum_{k=1}^{N} d_k\varphi_k$ из H_N. Эта форма, рассмотренная как функция второй степени от переменных $d_1, \ldots, d_N$ в евклидовом пространстве R_N, в силу полуограниченности (8.30) принимает свое наименьшее значение в некоторой точке $d_1^0, \ldots, d_N^0$. В этой точке должны выполняться равенства $\frac{\partial}{\partial d_l} J\left(\sum_{k=1}^{N} d_k\varphi_k\right) = 0, \quad l = 1, \ldots, N,$ которые, как нетрудно видеть, могут быть записаны так:

$$\mathscr{L}(u^N, \varphi_l) = -(f, \varphi_l) + (f_i, \varphi_{lx_i}), \quad l = 1, \ldots, N, \tag{8.31}$$

где $u^N = \sum_{k=1}^{N} d_k^0\varphi_k(x)$ — функция, реализующая $\inf J(u)$ на H_N. Система (8.31), служащая для определения $d_1^0, \ldots, d_N^0$, совпадает с соотношениями (8.4), определяющими галеркинские приближения.

Это позволяет привлечь теорему 8.1, гарантирующую сходимость u^N к решению u задачи (8.29). Следует заметить, что метод Ритца был сформулирован много раньше метода Галеркина, так что можно сказать, что метод Галеркина есть обобщение метода Ритца на случай несимметрических операторов $\mathscr{L}$.

3. **Метод наименьших квадратов.** Рассмотрим задачу

$$\mathscr{L}u = f, \quad u|_S = 0, \tag{8.32}$$

при условиях теоремы 7.2, и пусть $\lambda = 0$ не есть точка спектра этой задачи. Тогда для $\forall v \in W_{2,0}^2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|v\|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant c\|\mathscr{L}v\| \tag{8.33}$$

и задача (8.32) однозначно разрешима в $W_{2,0}^2(\Omega)$ при $\forall f \in L_2(\Omega)$. В соответствии с методом наименьших квадратов задача (8.32) заменяется вариационной задачей на разыскание infimum'а функционала

$$J(v) = \int_\Omega (\mathscr{L}v - f)^2\, dx \tag{8.34}$$

на $W_{2,0}^2(\Omega)$. Ясно, что на решении $u \in W_{2,0}^2(\Omega)$ задачи (8.32) функционал $J(v)$ принимает свое наименьшее значение: $J(u) = 0$. Из (8.33) следует, что обе задачи имеют единственное в $W_{2,0}^2(\Omega)$ решение $u(x)$. Первая вариация функционала J имеет вид

$$\delta J(v,\ \eta) = 2\int_\Omega (\mathscr{L}v - f)\,\mathscr{L}\eta\, dx. \tag{8.35}$$

На решении $u(x)$

$$\delta J(u,\ \eta) = 2\int_\Omega (\mathscr{L}u - f)\,\mathscr{L}\eta\, dx = 0 \tag{8.36}$$

при $\forall \eta \in W_{2,0}^2(\Omega)$. Для решения вариационной задачи вводится фундаментальная система $\{\psi_k(x)\}$ в пространстве $W_{2,0}^2(\Omega)$ и берутся конечномерные подпространства $\mathscr{H}_N$, $N = 1, 2, \ldots$, имеющие базисом функции $\{\psi_1, \ldots, \psi_N\}$. Приближенное решение u^N ищется как элемент $\mathscr{H}_N$, на котором реализуется $\inf\limits_{v \in \mathscr{H}_N} J(v)$. Легко видеть, что эта задача однозначно разрешима, и ее решение $u^N = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k^N \psi_k$ определяется из условий

$$\delta J(u^N,\ \eta) = 0, \qquad \forall \eta \in \mathscr{H}_N, \tag{8.37}$$

или, что то же, из системы линейных алгебраических уравнений

$$(\mathscr{L}u^N - f,\ \mathscr{L}\psi_l) = 0, \qquad l = 1,\ \ldots,\ N. \tag{8.38}$$

Но эта система совпадает с системой (8.10), и тем самым приближенные решения u^N совпадают с приближенными решениями u^N одного из вариантов модернизированного метода Галеркина, рассмотренных выше. Там было доказано, что u^N сходятся к решению u в норме $W_2^2(\Omega)$.

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В данной главе мы рассматриваем параболические уравнения второго порядка. Для них будет доказана однозначная разрешимость начально-краевых задач в областях $Q_T = \{(x, t): x \in \Omega,\ t \in (0, T)\}$ при первом, втором и третьем краевых условиях. Область Ω считаем ограниченной, хотя все результаты справедливы и для произвольной неограниченной области Ω. Более того, методы решения, излагаемые для ограниченных Ω, применимы и для неограниченных Ω (в том числе для $\Omega = R_n$), но нуждаются в небольших видоизменениях, о которых мы скажем в замечаниях.

В основном проводится подробное исследование первой краевой задачи. Для нее доказывается однозначная разрешимость в функциональных пространствах $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ и $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ при различных предположениях о данных задачи. Все теоремы §§ 2 и 3 увязаны своеобразным образом друг с другом. Это позволило максимально снизить ограничения на данные задачи (заметим, что предположения об ограниченности коэффициентов a_i, b_i и a младших членов можно заменить условиями их принадлежности пространствам вида $L_{q_i, r_i}(Q_T)$. Это снижение требований возможно в рамках избранного здесь способа исследования и приводит к тем же результатам об однозначной разрешимости. Однако такого рода обобщения мы не излагаем в данной книге, ибо не хотим, чтобы чисто технические усложнения, преодолеваемые использованием теорем вложения §§ 7 и 8 гл. I, затемнили основной ход мысли). Однако, если на коэффициенты уравнения наложить ограничения, несколько бо́льшие, чем в теореме 3.2, то однозначная разрешимость всех начально-краевых задач в пространстве $W_2^{1,0}(Q_T)$ может быть доказана совсем просто — так, как описано в п. 1 § 4. В том же § 4 и в § 5 мы даем краткое описание других методов решения начально-краевых задач, не касаясь, впрочем, традиционных методов исследования, основанных на теории потенциала и сводящих всю проблему к интегральным уравнениям вольтерровского типа. Они для уравнений с переменными коэффициентами весьма громоздки (см. [22$_1$], стр. 732—737, [29], [11] и специальную литературу). Оставлены в стороне и многочисленные результаты по разрешимости начально-краевых задач в других функциональных пространствах: пространствах $W_p^{2l,l}(Q_T)$ и $H^{2l+2\alpha,\,l+\alpha}(\overline{Q}_T)$ (см. [12$_{14}$] и др.). Они базируются на значительно более сложных аналитических оценках и специальных представлениях решений параболических уравнений. Часть из них (оценки в $H^{2l+2\alpha,\,l+\alpha}(\overline{Q}_T)$) опирается на так называемый принцип максимума и его обобщения. Не изучается специально и задача Коши. Она для параболических уравнений имеет ряд специфических особенностей, связанных с тем, что в ней можно допускать весьма сильный рост начальных данных и решений при $|x|\to\infty$ (см. об этом, например, в [6] и [29]).

В гл. VI мы возвращаемся к параболическим уравнениям и описываем для них еще один метод их исследования и решения — метод конечных разностей.

§ 1. Постановка начально-краевых задач и задачи Коши

Как известно, уравнение

$$\mathcal{M}u \equiv \sum_{i,\,j=1}^{n+1} a_{ij}(x)\,u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n+1} a_i u_{x_i} + au = f \qquad (1.1)$$

называется параболическим в точке x^0, если оно в новых координатах $y_i = \alpha_{ij}(x_j - x_j^0)$, $i, j = 1, \ldots, n+1$, где (α_{ij}) — ортогональная матрица, приводящая матрицу

$(a_{ij}(x^0))$ к диагональному виду (т. е. $a_{ij}(x^0)\alpha_{ki}\alpha_{lj} = \lambda_k(x^0)\delta_k^l$), приобретает в точке x^0 вид

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k(x^0)\, u_{y_k y_k} + \sum_{k=1}^{n+1} b_k(x^0)\, u_{y_k} + b(x^0)\, u = f(x^0), \qquad (1.2)$$

в котором одно из $\lambda_k(x^0)$ (пусть $\lambda_{n+1}(x^0)$) равно нулю, остальные $\lambda_k(x^0)$ имеют одинаковые знаки и $b_{n+1}(x^0) \neq 0$.

Поделив (1.2) на $b_{n+1}(x^0)$, приходим к уравнению вида

$$u_{y_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \mu_k(x^0)\, u_{y_k y_k} + \sum_{k=1}^{n} \tilde{b}_k(x^0)\, u_{y_k} + \tilde{b}u = \tilde{f}. \qquad (1.3)$$

Если $\mu_k(x^0) < 0$, $k = 1, \ldots, n$, то уравнение (1.3) имеет «стандартный» вид; если же $\mu_k(x^0) > 0$, то, меняя направление оси y_{n+1} и умножая (1.3) на (-1), мы снова приходим к уравнению «стандартного» вида. Если уравнение (1.1) параболично во всех точках x какой-либо области, то говорят, что оно параболично в этой области. Если коэффициенты $\mathscr{M}$ — гладкие функции и уравнение (1.1) параболично в области, то в окрестности (вообще говоря, малой) любой точки этой области его можно невырожденной заменой переменных привести к виду

$$u_{y_{n+1}} - \sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij} u_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{y_i} + bu = \tilde{f}, \qquad (1.4)$$

причем форма $\sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\xi_j$ будет положительно определенной. Переменная y_{n+1} играет исключительную роль. При описании тепловых (и ряда других) явлений эта переменная есть не что иное, как время. В соответствии с этим обозначим ее через t. Остальные переменные $y_1, \ldots, y_n$ в физических задачах описывают положение точки в пространстве. Мы будем рассматривать параболические уравнения, уже приведенные к виду (1.4). Более того, нам удобнее начать изучение параболических уравнений с уравнений вида

$$\mathcal{M}u \equiv u_t - \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\ t)\,u_{x_j} + a_i(x,\ t)\,u\right) + \\ + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,\ t)\,u_{x_i} + a(x,\ t)\,u = f(x,\ t) + \frac{\partial f_i(x,\ t)}{\partial x_i}. \quad (1.5)$$

При дифференцируемых a_{ij}, a_i и f_i уравнение (1.5) элементарно преобразуется к уравнению вида (1.4), и, наоборот, при дифференцируемых b_{ij} уравнение (1.4) может быть записано в форме (1.5). Мы начнем с изучения уравнений (1.5), коэффициенты которых и возмущающие силы f_i, вообще говоря, недифференцируемы.

Частным случаем уравнений (1.5) является уравнение теплопроводности

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x,\ t), \quad (1.6)$$

описывающее распространение тепла в какой-либо части пространства $(x) \in R_n$. Для уравнений (1.5) основными являются:

1) Задача Коши, в которой ищется функция $u(x, t)$, удовлетворяющая при $x \in R_n$ и $t > 0$ уравнению (1.5), а при $t = 0$ — начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \quad (1.7)$$

2) Первая начально-краевая (сокращенно: н. к.) задача. В ней уравнение (1.5) считается заданным для $(x, t) \in \bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$, где Ω — какая-либо область в пространстве R_n. Подлежит определению функция u, удовлетворяющая уравнению (1.5), начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in \Omega, \quad (1.8)$$

и для $\forall t \in [0, T]$ — граничному (краевому) условию

$$u|_{x \in \partial\Omega} = \psi(s,\ t). \quad (1.9)$$

В пространстве R_{n+1} область Q_T естественно назвать цилиндром, $S_T = S \times [0, T]$ — его боковой поверхностью, а $\{(x, t):\ x \in \Omega,\ \ t = 0\}$ — нижним основанием. В этих терминах первая начально-краевая задача состоит в определении решения уравнения (1.5) в цилиндре Q_T, обращающегося в заданные функции φ и ψ на нижнем основании Q_T и его боковой поверхности S_T. Рассматривают и более общий случай, когда область изменения Ω_t переменной x меняется со временем. В этом случае $Q_T = \{(x, t)\colon x \in \Omega_t,\ t \in [0, T]\}$ не будет цилиндром (во всяком случае «прямым» цилиндром). Однако если «боковая поверхность» S_T — гладкая и «скорость» изменения точек границы $\partial\Omega_t$ конечна, то заменой переменных ее можно преобразовать в боковую поверхность прямого цилиндра (во всяком случае, для малых T) и свести задачу к задаче с неизменной границей $\partial\Omega$.

3) Вторая и третья начально-краевые задачи отличаются от первой лишь условием (1.9), которое для уравнения (1.5) с $a_i \equiv 0$ заменяется или вторым краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_{S_T} \equiv a_{ij}u_{x_j}\cos(n, x_i)\bigg|_{S_T} = \chi(s, t), \tag{1.10}$$

или третьим

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\bigg|_{S_T} = \chi(s, t) \tag{1.11}$$

соответственно.

Мы рассмотрим подробно первую н. к. задачу в ограниченной области Ω. Вторая и третья рассматриваются аналогично. Предположение об ограниченности области Ω накладывается нами лишь ради некоторых удобств. От него сравнительно легко избавиться, причем результаты для ограниченных и неограниченных областей одни и те же.

Целью данного раздела лекций является доказательство того, что перечисленные задачи всегда однозначно разрешимы, если их данные не слишком плохи. Так же, как и в главе II, мы введем различные классы обобщенных решений. Проще всего разрешимость доказывается в гильбертовом пространстве $W_2^{1,0}(Q_T)$. Скалярное произведение в нем определяется равенством

$$(u, v)_{2, Q_T}^{(1, 0)} \equiv \int_{Q_T} (uv + u_x v_x)\, dx\, dt. \tag{1.12}$$

$W_2^{1,0}(Q_T)$ состоит из всех элементов $u \in L_2(Q_T)$, имеющих обобщенные производные u_{x_i} из $L_2(Q_T)$. Норму в $W_2^{1,0}(Q_T)$ обозначим через $\|\cdot\|_{2,Q_T}^{(1,0)}$. Через $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ обозначим подпространство $W_2^{1,0}(Q_T)$, являющееся замыканием в норме $\|\cdot\|_{2,Q_T}^{(1,0)}$ множества гладких функций, равных нулю вблизи S_T. $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ является собственным подпространством $W_2^{1,0}(Q_T)$, что видно хотя бы из формулы интегрирования по частям

$$\int_{Q_T} u_{x_i} v\,dx\,dt = -\int_{Q_T} u v_{x_i}\,dx\,dt, \tag{1.13}$$

справедливой для произвольной гладкой v и произвольной гладкой u, равной нулю вблизи S_T. Действительно, по замыканию в норме $W_2^{1,0}(Q_T)$ равенство (1.13) остается справедливым для $\forall v \in W_2^{1,0}(Q_T)$ и $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Если же ни u, ни v не равны нулю на S_T, то для них (1.13), вообще говоря, неверно, так что во всем пространстве $W_2^{1,0}(Q_T)$ формула (1.13) не имеет места. Это же рассуждение показывает, что элементы $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ в определенном смысле обращаются в нуль на S_T. Если граница S — гладкая, то теорема вложения 6.5 гл. I (см. замечание 6.3) гарантирует стремление к нулю интеграла $\int_{S'_T} u^2\,ds\,dt$ при $S'_T \equiv \partial\Omega' \times [0, T] \to S_T$.

С параболическими уравнениями вида (1.5) теснее всего связана «энергетическая» норма, определяемая равенством

$$|u|_{Q_T} \equiv \underset{0\leqslant t\leqslant T}{\operatorname{vrai\,max}} \|u(x, t)\|_{2,\Omega} + \|u_x\|_{2,Q_T}. \tag{1.14}$$

В следующем параграфе мы поясним это, показав, что из основного соотношения «баланса энергии» следует априорная оценка нормы $|u|_{Q_T}$ решений начально-краевых задач через данные задачи. Здесь же определим банаховы пространства, норма в которых определяется равенством (1.14). Наиболее широкое из них $V_2(Q_T)$ состоит из всех элементов $W_2^{1,0}(Q_T)$, имеющих конечную норму $|\cdot|_{Q_T}$. Его подпространство $\overset{\circ}{V}_2(Q_T)$ состоит из элементов $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, имеющих конечную норму $|\cdot|_{Q_T}$.

Другим подпространством $V_2(Q_T)$ является $V_2^{1,0}(Q_T)$, состоящее из всех элементов $u \in V_2(Q_T)$, сильно непрерывных по t в норме $L_2(\Omega)$, т. е. таких, что $\| u(x, t+\Delta t) - u(x, t)\|_{2,\Omega} \to 0$ при $\Delta t \to 0$ равномерно на отрезке $[0, T]$. Наконец, $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ есть пересечение $V_2^{1,0}(Q_T)$ с $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Во второй половине параграфа 3 мы докажем, что любое обобщенное решение уравнения (1.5) из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ (при тех предположениях, при которых установлено его существование в начале § 3) фактически принадлежит $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ и для него справедливо соотношение баланса энергии. Это позволит доказать теорему единственности для первой начально-краевой задачи в пространстве $W_2^{1,0}(Q_T)$ при тех же предположениях о коэффициентах уравнения (1.5), при которых имеют место соотношения энергетического баланса и теорема существования об. решений из $W_2^{1,0}(Q_T)$. Чтобы осуществить намеченную программу, сначала подробно исследуем уравнение теплопроводности.

В заключение параграфа докажем известную лемму, которая используется при получении априорных оценок решений различных нестационарных задач.

Лемма 1.1. *Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из $[0, T]$ неравенству*

$$\frac{dy(t)}{dt} \leqslant c_1(t)\, y(t) + c_2(t), \tag{1.15}$$

где $c_i(t)$ — суммируемые на $[0, T]$ неотрицательные функции. Тогда

$$y(t) \leqslant \exp\left\{\int_0^t c_1(\tau)\, d\tau\right\} \cdot \left[y(0) + \int_0^t c_2(\xi) \exp\left(-\int_0^\xi c_1(\tau)\, d\tau\right) d\xi\right] \leqslant \exp\left\{\int_0^t c_1(\tau)\, d\tau\right\}\left[y(0) + \int_0^t c_2(\tau)\, d\tau\right]. \tag{1.16}$$

Действительно, если (1.15) умножить на

$$\exp\left\{-\int_0^t c_1(\tau)\,d\tau\right\},$$

результат записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left[y\exp\left(-\int_0^t c_1(\tau)\,d\tau\right)\right]\leqslant c_2(t)\exp\left(-\int_0^t c_1(\tau)\,d\tau\right)$$

и проинтегрировать от 0 до t, то из полученного неравенства очевидным образом следует (1.16).

§ 2. Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности

Рассмотрим для уравнения

$$\mathscr{M}_0 u \equiv u_t - \Delta u = f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \tag{2.1}$$

задачу нахождения его решения $u(x, t)$ в ограниченной области $Q_T = \Omega \times (0, T)$, удовлетворяющего начальному

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{2.2}$$

и краевому

$$u|_{S_T} = 0 \tag{2.3}$$

условиям. Для задачи (2.1)—(2.3) введем и исследуем несколько классов обобщенных решений. Начнем с наиболее узкого из них (т. е. с наиболее гладких об. решений). Для S из C^2 об. решения этого класса суть элементы гильбертова пространства $W_2^{2,1}(Q_T)$, скалярное произведение в котором определяется равенством

$$(u, v)^{(2,1)}_{2,Q_T} \equiv \int_{Q_T} (uv + u_t v_t + u_x v_x + u_{xx} v_{xx})\,dx\,dt\,^{*}). \tag{2.4}$$

---

*) Здесь, как и всюду, $u_x v_x \equiv \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} v_{x_i}$, $u_x^2 = u_x u_x$, $u_{xx} v_{xx} = \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j} v_{x_i x_j}$, $u_{xx}^2 = u_{xx} u_{xx}$.

Точнее, *об. решение задачи (2.1)—(2.3) из этого класса* принадлежит подпространству $W_{2,0}^{2,1}(Q_T) \equiv W_2^{2,1}(Q_T) \cap \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$. При негладких границах S для этих об. решений об. производные u_{xx}, вообще говоря, не будут квадратично суммируемы по Q_T, однако для них будет определен оператор Лапласа Δ и Δu будет элементом $L_2(Q_T)$.

В соответствии с этим введем гильбертово пространство $W_2^{\Delta,1}(Q_T)$, элементы которого $u(x, t)$ принадлежат $L_2(Q_T)$ вместе с u_t, имеют в Q_T об. производные u_x и u_{xx} и конечную норму

$$\left(\int\limits_{Q_T} \left[u^2 + u_t^2 + u_x^2 + (\Delta u)^2\right] dx\,dt\right)^{1/2}. \tag{2.5}$$

Скалярное произведение в $W_2^{\Delta,1}(Q_T)$ определяется равенством

$$\int\limits_{Q_T} (uv + u_t v_t + u_x v_x + \Delta u\,\Delta v)\,dx\,dt. \tag{2.6}$$

Нас будет интересовать лишь подпространство $W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T) \equiv W_2^{\Delta,1}(Q_T) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$. В нем вместо (2.5) удобнее взять эквивалентную норму

$$\|u\|_{2,Q_T}^{(\Delta,1)} = \left(\int\limits_{Q_T} \left[u_t^2 + (\Delta u)^2\right] dx\,dt\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

и соответствующее скалярное произведение

$$(u, v)_{2,Q_T}^{(\Delta,1)} = \int\limits_{Q_T} (u_t v_t + \Delta u\,\Delta v)\,dx\,dt. \tag{2.8}$$

Для $S \in C^2$ пространство $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ совпадает с $W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$ (это следует из результатов §§ 6 и 7 гл. II). Мы будем исследовать задачу (2.1)—(2.3) в основном для произвольной ограниченной области Ω.

Пусть сначала свободный член $f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \equiv F \in L_2(Q_T)$.

Под *об. решением задачи* (2.1)—(2.3) *в пространстве* $W_2^{\Delta,1}(Q_T)$ естественно понимать элемент u пространства $W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$, удовлетворяющий почти всюду в Q_T уравнению (2.1) и равный $\varphi(x)$ при $t=0$. Последнее можно понимать как стремление к нулю $\|u(x, t)-\varphi(x)\|_{2,\Omega}\to 0$ при $t\to 0$. Это имеет смысл для элементов $W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$, ибо они определены для $\forall t\in[0, T]$ как элементы $L_2(\Omega)$ (и даже, как мы увидим ниже, как элементы $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$) и непрерывны в норме $L_2(\Omega)$ (и даже в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$) по t. Задачу (2.1) — (2.3) с $f+\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=F$ переформулируем как задачу решения операторного уравнения

$$Au=\{F;\ \varphi\}, \tag{2.9}$$

где A есть оператор, сопоставляющий $u(x, t)$ пару элементов $\mathscr{M}_0u$ и $u(x, 0)$, так что

$$Au=\{\mathscr{M}_0u;\ u(x, 0)\}. \tag{2.10}$$

Оператор A рассмотрим как неограниченный оператор, действующий из пространства $L_2(Q_T)$ в гильбертово пространство $\mathscr{W}$, являющееся прямым произведением пространств $L_2(Q_T)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Элементами $\mathscr{W}$ являются пары $\{f(x, t);\ \psi(x)\}$ с $f\in L_2(Q_T)$, $\psi\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а скалярное произведение определяется равенством

$$(\{f', \psi'\}, \{f'', \psi''\})_{\mathscr{W}}=\int_{Q_T} f'f''\,dx\,dt+\int_{\Omega}\psi'_x\psi''_x\,dx. \tag{2.11}$$

В качестве области определения $\mathscr{D}(A)$ оператора A возьмем элементы вида $\psi(x)+\int_0^t\chi(x, \tau)\,d\tau$, где $\psi\in\mathscr{D}(\Delta)$, $\chi(x, t)\in\mathscr{D}(\Delta)$ для почти всех t из $[0, T]$ (сокращенно: п. в. t) и $\Delta\chi\in L_2(Q_T)$. Здесь под $\mathscr{D}(\Delta)$ понимается совокупность об. решений из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ задачи

$$\Delta u=f(x),\qquad u|_S=0, \tag{2.12}$$

когда f пробегает все $L_2(\Omega)$. Из результатов гл. II следуют такие факты: если в (2.12) $f=\hat{f}(x, t)\in L_2(Q_T)$, то решение $\hat{u}(x, t)$ задачи (2.12) принадлежит вместе с $\hat{u}_x$ к $L_2(Q_T)$, производные $\hat{u}_{xx}$ существуют и квадратично суммируются по $Q'_T=\Omega'\times(0, T)$, $\forall\overline{\Omega}'\subset\Omega$, для $\hat{u}$ и $\forall v\in W_2^{1,0}(Q_T)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{Q_T}\Delta\hat{u}\cdot v\,dx\,dt=-\int\limits_{Q_T}\hat{u}_x v_x\,dx\,dt, \tag{2.13}$$

уравнение $\Delta\hat{u}=\sum\limits_{i=1}^{n}\hat{u}_{x_ix_i}=\hat{f}$ удовлетворяется для п. в. $(x, t)\in Q_T$.

Кроме того, функции $f=\int\limits_0^t\hat{f}(x, \tau)\,d\tau$ соответствует решение $u(x, t)$ задачи (2.12), равное $\int\limits_0^t\hat{u}(x, \tau)\,d\tau$ $\Bigl($так что $\Delta u(x, t)=\Delta\int\limits_0^t\hat{u}(x, \tau)\,d\tau=\int\limits_0^t\Delta u(x, \tau)\,d\tau=\int\limits_0^t\hat{f}(x, \tau)\,d\tau\Bigr)$, причем $u(x, t)$ будет элементом $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, непрерывно зависящим от t (в норме этого пространства).

Ввиду этого, элементы $v(x, t)=\psi(x)+\int\limits_0^t\chi(x, \tau)\,d\tau$, составляющие $\mathscr{D}(A)$, при $\forall t\in[0, T]$ принадлежат $\mathscr{D}(\Delta)$, $\Delta v=\Delta\psi+\int\limits_0^t\Delta\chi\,d\tau$ и $v_x=\psi_x+\int\limits_0^t\chi_x\,d\tau$ суть элементы $L_2(\Omega)$, непрерывно зависящие от t, и $v_{xt}\in L_2(Q_T)$. Оператор A на $v(x, t)$ вычисляется так:

$$Av=\left\{\chi-\Delta\psi-\int\limits_0^t\Delta\chi\,d\tau;\ \psi\right\}. \tag{2.14}$$

Легко видеть, что множество $\mathscr{D}(A)$ плотно в $L_2(Q_T)$.

Докажем, что A допускает замыкание. Для этого надо или в соответствии с известной теоремой теории неограниченных операторов показать, что сопряженный к A оператор определен на плотном множестве, или проверить непосредственно следующее: если $v_m\in\mathscr{D}(A)$, $m=1, 2, \ldots$, $v_m\to 0$ в норме $L_2(Q_T)$ и $Av_m\equiv\{f_m, \varphi_m\}\to\to\{f, \varphi\}$ в норме $\mathscr{W}$, то $f\equiv\varphi\equiv 0$. Убедимся в справедливости последнего утверждения. Для этого возьмем произвольную достаточно гладкую функцию $\eta(x, t)$, равную нулю на S_T и при $t = T$, и соответствующий ей интеграл $\int\limits_{Q_T} \mathcal{M}_0 v_m \eta \, dx\, dt$. Преобразуем его с помощью интегрирования по частям так:

$$\int\limits_{Q_T} \mathcal{M}_0 v_m \eta \, dx\, dt = \int\limits_{Q_T} v_m \mathcal{M}_0^* \eta \, dx\, dt - \int\limits_{\Omega} v_m \eta \, dx \Big|^{t=0}.$$

В этом равенстве можно перейти к пределу по $m \to \infty$. В результате получим

$$\int\limits_{Q_T} f\eta \, dx\, dt = -\int\limits_{\Omega} \varphi\eta(x, 0)\, dx$$

для любой $\eta(x, t)$, обладающей указанными выше свойствами. Отсюда известным способом выводится тождественное равенство нулю функций f и φ. Итак, оператор A допускает замыкание: $\bar{A}$. Для описания области определения $\mathcal{D}(\bar{A})$ и вычисления $\bar{A}$ на элементах $\mathcal{D}(\bar{A})$ докажем, что для $\mathcal{M}_0$ справедливо равенство

$$\| v_x(x, t)\|^2_{2, \Omega} + \int\limits_{Q_t} \left(v_t^2 + (\Delta v)^2\right) dx\, dt = \\ = \| v_x(x, 0)\|^2_{2, \Omega} + \int\limits_{Q_t} (\mathcal{M}_0 v)^2 \, dx\, dt. \qquad (2.15)$$

В нем $v(x, t)$ есть произвольный элемент $\mathcal{D}(A)$, а t — любое из $[0, T]$. Отметим, что для общих параболических операторов имеет место равенство, соответствующее (2.15), из которого выводится так называемое «второе основное неравенство», аналогичное «второму основному неравенству» для эллиптических операторов (см. о нем п. 4 § 4).

Справедливость (2.15) видна из соотношения

$$\int\limits_{Q_t} (\mathcal{M}_0 v)^2 \, dx\, dt = \int\limits_{Q_t} \left[v_t^2 + (\Delta v)^2 + \frac{\partial v_x^2}{\partial t} \right] dx\, dt = \\ = \int\limits_{Q_t} \left[v_t^2 + (\Delta v)^2 \right] dx\, dt + \int\limits_{\Omega} v_x^2 \, dx \Big|_{t=0}^{t=t}.$$

Из (2.15) видно, что сходимость Av_m ($v_m \in \mathscr{D}(A)$) в $\mathscr{W}$ влечет сходимость v_m в нормах $W_2^{\Delta,1}(Q_T)$ и $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\cdot\|_{2,\Omega}^{(1)}$. Это доказывает, что элементы области определения $\mathscr{D}(\bar{A})$ замыкания $\bar{A}$ оператора A «немногим хуже» элементов $\mathscr{D}(A)$, а именно: они принадлежат $W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$, непрерывно зависят от t в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и для них справедливо равенство (2.15). Оператор $\bar{A}$ на них определен тем же равенством (2.10), т. е.

$$\bar{A}v = \{\mathscr{M}_0 v;\ v(x, 0)\}. \tag{2.16}$$

Наконец, из (2.15) следует, что процедура замыкания A сводится к замыканию области значений $\mathscr{R}(A)$ в $\mathscr{W}$, так что $\overline{\mathscr{R}(A)} = \mathscr{R}(\bar{A})$ и на $\mathscr{R}(\bar{A})$ существует ограниченный обратный оператор $\bar{A}^{-1}$. Если мы докажем, что к $\mathscr{R}(A)$ в $\mathscr{W}$ нет ортогонального дополнения, то из только что сказанного об $\bar{A}$ будет следовать, что $\bar{A}^{-1}$ определен на всем $\mathscr{W}$, т. е. уравнение (2.9), точнее,

$$\bar{A}u = \{F;\ \varphi\}, \tag{2.17}$$

однозначно разрешимо при $\forall \{F; \varphi\} \in \mathscr{W}$. Тем самым будет доказана

Теорема 2.1. *Для любой ограниченной области* Ω *задача* (2.1)—(2.3) *однозначно разрешима в* $W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$, *если* $F \equiv f + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} \in L_2(Q_T)$, *а* $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. *Решение* $u(x, t)$ *непрерывно зависит от* t *в норме* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Итак, нам осталось доказать, что в $\mathscr{W}$ к $\mathscr{R}(A)$ нет ортогонального дополнения, т. е. доказать, что из тождества

$$\int\limits_{Q_T} w(v_t - \Delta v)\,dx\,dt + \int\limits_{\Omega} \psi_x v_x(x, 0)\,dx = 0, \tag{2.18}$$

где v — произвольный элемент $\mathscr{D}(A)$, а $\{w; \psi\} \in \mathscr{W}$, следует: $w \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$. Для этого возьмем $v(x, t)$ равной $\int\limits_{t_1}^{t} \Delta^{-1} w(x, \tau)\,d\tau$ при $t \geqslant t_1$ и нулю при $t < t_1$, где t_1 — какое-либо из $[0, T]$. Легко видеть, что такое v принадлежит области $\mathscr{D}(A)$. Подставив его в (2.18), получим

$\int_{t_1}^{T}\int_{\Omega} \Delta v_t (v_t - \Delta v)\, dx\, dt = 0$, откуда следует

$$-\int_{t_1}^{T}\int_{\Omega} v_{xt}^2\, dx\, dt - \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\Delta v)^2\, dx \Big|_{t=t_1}^{t=T} = 0. \qquad (2.19)$$

Так как $\Delta v|_{t=t_1} = 0$ и t_1 произвольно, то из (2.19) заключаем, что $v_{xt} \equiv 0$ и $\Delta v \equiv 0$, а потому и $w = \Delta v_t \equiv 0$. В силу этого тождество (2.18) примет вид

$$\int_{\Omega} \psi_x v_x (x, 0)\, dx = 0 \qquad (2.20)$$

для любой $v(x, 0)$ из $\mathscr{D}(\Delta)$. Так как $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$, а $\mathscr{D}(\Delta)$ плотно в $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$, из (2.20) следует $\psi \equiv 0$. Итак, доказано, что $w = \psi \equiv 0$, т. е. $\overline{\mathscr{R}(A)} = \mathscr{W}$. Теорема 2.1 доказана. Одновременно с нею доказана, по существу, теорема единственности для задачи (2.1)—(2.3) *в классе обобщенных решений из* $L_2(Q_T)$. Таким решением назовем элемент $u(x, t) \in L_2(Q_T)$, удовлетворяющий тождеству

$$\int_{Q_T} u\left(\eta_t + \Delta\eta\right) dx\, dt + \int_{\Omega} \varphi\eta(x, 0)\, dx = \int_{Q_T} \left(-f\eta + f_i \eta_{x_i}\right) dx\, dt \qquad (2.21)$$

при $\forall \eta \in W_{2,0}^{\Delta, l}(Q_T)$, равной нулю при $t = T$.

Если u есть об. решение из $L_2(Q_T)$ задачи (2.1)—(2.3) с $f = f_i = \varphi \equiv 0$, т. е. если для u верно тождество (2.21) с $f = f_i = \varphi = 0$, то из этого тождества следует, что $u \equiv 0$. Действительно, это тождество заменой t на $-t$ преобразуется в тождество вида (2.18) с $\psi \equiv 0$. Роль w при этом играет u, а v — функция η, причем множество η в (2.21) даже шире, чем v в (2.18). Ввиду этого и выведенного из (2.18) заключения о равенстве нулю w следует, что $u \equiv 0$, если φ, f и f_i в (2.21) равны нулю. Тем самым доказана

Теорема 2.2. *Задача* (2.1)—(2.3) *не может иметь более одного обобщенного решения из* $L_2(Q_T)$.

Замечание 2.1. Если $S \in C^2$, то по доказанному в §§ 6, 7 гл. II из принадлежности Δu к $L_2(\Omega)$ и u к $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ следует, что $u \in W_{2,0}^2(\Omega)$. Тем самым при $S \in C^2$ пространство $W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$ совпадает с $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, и теорема 2.1 гарантирует разрешимость задачи (2.1) — (2.3) в $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$.

Замечание 2.2. Любой элемент $u(x,t)$ пространства $W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при $\forall t \in [0,T]$ и непрерывно зависит от t в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Кроме того, $\| u_x(x,t)\|_{2,\Omega}^2$ является абсолютно непрерывной функцией t на $[0,T]$ и

$$\| u_x(x,t)\|_{2,\Omega}^2 = \| u_x(x,0)\|_{2,\Omega}^2 - 2\int_0^t (u_\tau(x,\tau), \Delta u(x,\tau))\, d\tau.$$

Действительно, эти факты имеют место для достаточно гладких функций $u(x,t)$, равных нулю вблизи S_T, и совокупность $\mathfrak{M}$ всех таких функций плотна в пространстве $W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$. Они, очевидно, сохраняются и для замыкания $\mathfrak{M}$ в банаховой норме

$$\| u \|_{W_T} \equiv \left[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| u_x(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^T \int_\Omega \left(u_t^2 + (\Delta u)^2\right) dx\, dt \right]^{1/2}.$$

Но эта норма эквивалентна на $\mathfrak{M}$ норме $\|\cdot\|_{2,Q_T}^{(\Delta,1)}$, ибо для $\forall u \in \mathfrak{M}$ и любой гладкой функции $\zeta(t)$

$$\left| \| u_x(x,t)\zeta(t)\|_{2,\Omega}^2 - \| u_x(x,t_1)\zeta(t_1)\|_{2,\Omega}^2 \right| =$$

$$= \left| \int_{t_1}^t \frac{d}{d\tau} \| u_x(x,\tau)\zeta(\tau)\|_{2,\Omega}^2\, d\tau \right| =$$

$$= 2\left| \int_{t_1}^t \int_\Omega \left(-\Delta u \cdot u_\tau \zeta^2 + u_x^2 \zeta\zeta'\right) dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\max|\zeta|^2 + \max|\zeta'|^2\right) \int_{t_1}^t \int_\Omega \left[u_\tau^2 + (\Delta u)^2\right] dx\, dt,$$

откуда следует, что

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| u_x(x, t) \|_{2, \Omega} \leqslant c \| u \|_{2, Q_T}^{(\Delta, 1)}.$$

Рассмотрим теперь задачу (2.1)—(2.3) для $\varphi \in L_2(\Omega)$, $f_i \in L_2(Q_T)$ и $f \in L_{2,1}(Q_T)$. Пространство $L_{q,r}(Q_T)$ состоит из всех элементов $L_1(Q_T)$ с конечной нормой

$$\| u \|_{q, r, Q_T} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega | u |^q dx \right)^{r/q} dt \right)^{1/r}.$$

Покажем, что в этом случае решения принадлежат пространству $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ и для них справедливо энергетическое соотношение (уравнение энергетического баланса):

$$\frac{1}{2} \| u(x, t) \|_{2, \Omega}^2 + \| u_x \|_{2, Q_t}^2 = \int_{Q_t} (fu - f_i u_{x_i})\, dx\, dt + \frac{1}{2} \| u(x, 0) \|_{2, \Omega}^2 \tag{2.22}$$

при $\forall t \in [0, T]$. Такие решения назовем *обобщенными решениями задачи* (2.1)—(2.3) *из класса* $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ или, что то же, *об. решениями из энергетического класса*. Уравнению (2.1) и начальному условию (2.2) они удовлетворяют в смысле интегрального тождества

$$\int_\Omega u(x, t)\eta(x, t)\, dx - \int_\Omega \varphi\eta(x, 0)\, dx + \int_{Q_t} (-u\eta_t + u_x\eta_x)\, dx\, dt = \int_{Q_t} (f\eta - f_i\eta_{x_i})\, dx\, dt, \tag{2.23}$$

которое должно выполняться для $\forall t \in [0, T]$ при $\forall \eta \in W_{2,0}^1(Q_T)$. Удовлетворение же граничному условию содержится в том, что $u \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Пространство $W_{2,0}^1(Q_T)$ состоит из всех элементов $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, имеющих v_t из $L_2(Q_T)$. Скалярное произведение в нем определяется равенством $(u, v)_{2, Q_T}^{(1,1)} = \int_{Q_T} (uv + u_t v_t + u_x v_x)\, dx\, dt$, а норму обозначим через $\| \cdot \|_{2, Q_T}^{(1,1)}$.

Тождество (2.23) формально получается с помощью интегрирования по частям в соотношении

$$\int_{Q_t} \mathcal{M}_0 u \cdot \eta \, dx \, dt = \int_{Q_t} \left(f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \eta \, dx \, dt \tag{2.24}$$

и учета условия (2.2) и принадлежности η к $W_{2,0}^1(Q_T)$. Энергетическое же равенство (2.22) получается из равенства

$$\int_{Q_t} \mathcal{M}_0 u \cdot u \, dx \, dt = \int_{Q_t} \left(f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) u \, dx \, dt \tag{2.25}$$

с помощью интегрирования по частям и учета обращения u в нуль на S_T. Однако соотношения (2.24) и (2.25) предполагают наличие у u производной u_t и Δu из $L_2(Q_T)$, тогда как (2.23) и (2.22) имеют смысл для любого элемента $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Следовательно, введенное нами определение об. решения задачи (2.1)—(2.3) из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ является расширением понятия об. решения этой задачи из $W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$ и, как легко видеть, сужением понятия об. решения из $L_2(Q_T)$. В этом определении есть одна особенность, отличающая его от определений обобщенных решений, введенных нами выше в гл. II и настоящей главе. Именно, из него непосредственно не видно, что если u' есть об. решение из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (2.1)—(2.3) с $\varphi = \varphi'$, $f = f'$ и $f_i = f_i'$, а u'' — такое же решение с $\varphi = \varphi''$, $f = f''$, $f_i = f_i''$, то $u' + u''$ есть об. решение из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (2.1)—(2.3), отвечающее $\varphi = \varphi' + \varphi''$, $f = f' + f''$ и $f_i = f_i' + f_i''$. Причиной тому является нелинейность соотношения (2.22), благодаря которой только из (2.22) для u' и u'' не следует (2.22) для $u' + u''$. Однако нижеследующие рассуждения и теорема 2.1 позволяют доказать, что (2.22) справедливо и для $u' + u''$. Труд, затраченный на доказательство этого факта, с лихвой окупится в следующем параграфе, где исследуются уравнения с переменными коэффициентами и где соотношение (2.22) будет существенно использовано.

Из (2.22) можно вывести априорную оценку для «энергетической» нормы решения, т. е. нормы $|u|_{Q_T}$. Для этого правую часть (2.22) мажорируем величиной
$$\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|u(x,\tau)\|_{2,\Omega}\|f\|_{2,1,Q_t}+\|\boldsymbol{f}\|_{2,Q_t}\|u_x\|_{2,Q_t}+\frac{1}{2}\|u(x,0)\|^2_{2,\Omega},$$
где $\boldsymbol{f}=(f_1,\ldots,f_n)$, а $\|\boldsymbol{f}\|_{2,Q_t}=\left(\int\limits_{Q_t}\sum_{i=1}^n f_i^2\,dx\,dt\right)^{1/2}$, и выведем из (2.22) два следствия:
$$\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|u\|^2_{2,\Omega}\leqslant 2\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|u\|_{2,\Omega}\|f\|_{2,1,Q_t}+ \\ +2\|\boldsymbol{f}\|_{2,Q_t}\|u_x\|_{2,Q_t}+\|u(x,0)\|^2_{2,\Omega},\quad (2.26)$$
$$\|u_x\|^2_{2,Q_t}\leqslant\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|u\|_{2,\Omega}\|f\|_{2,1,Q_t}+ \\ +\|\boldsymbol{f}\|_{2,Q_t}\|u_x\|_{2,Q_t}+\frac{1}{2}\|u(x,0)\|^2_{2,\Omega}.\quad (2.27)$$

Извлечем из обеих частей (2.26) и (2.27) квадратный корень и результаты сложим. После этого в правой части $\max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|u\|_{2,\Omega}$, $\|u_x\|_{2,Q_t}$ и $\|u(x,0)\|_{2,\Omega}$ заменим на бóльшую величину $|u|_{Q_t}$ и полученное неравенство сократим на $|u|^{1/2}_{Q_t}$. Возводя это неравенство в квадрат, придем к желаемой оценке
$$|u|_{Q_t}\leqslant(1+\sqrt{2})^2\left(\|f\|_{2,1,Q_t}+\|\boldsymbol{f}\|_{2,Q_t}+\frac{1}{2}\|u(x,0\|_{2,\Omega}\right).\quad (2.28)$$

Докажем теперь следующую теорему существования:

Теорема 2.3. *Задача* (2.1) — (2.3) *имеет об. решение из* $\overset{\circ}{V}{}^{1,0}_2(Q_T)$ *при* $\varphi\in L_2(\Omega)$, $f\in L_{2,1}(Q_T)$, $f_i\in L_2(Q_T)$.

Единственность в $\overset{\circ}{V}{}^{1,0}_2(Q_T)$ есть следствие теоремы 2.2. Для доказательства же существования аппроксимируем φ в $L_2(\Omega)$ функциями φ_m, $m=1,2,\ldots$, из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, f в $L_{2,1}(Q_T)$ функциями f_m, $m=1,2,\ldots$, из $L_2(Q_T)$ и f_i в $L_2(Q_T)$ функциями f_{im}, $m=1,2,\ldots$, из $W^{1,0}_2(Q_T)$. В силу теоремы 2.1 задача (2.1) — (2.3) имеет решение u_m

из $W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$, соответствующее φ_m и $F_m = f_m + \frac{\partial f_{im}}{\partial x_i}$. Разности $u_m - u_p$ суть решения из $W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$ задачи (2.1) — (2.3), отвечающие $\varphi_m - \varphi_p$ и $F_m - F_p$. Для них справедливо (2.22), а потому и оценка (2.28), т. е.

$$|u_m - u_p|_{Q_t} \leqslant (1 + \sqrt{2})^2 \Big[\| f_m - f_p \|_{2,1,Q_t} + \| \mathbf{f}_m - \mathbf{f}_p \|_{2,Q_t} + \\ + \frac{1}{2} \| u_m(x, 0) - u_p(x, 0) \|_{2,\Omega}\Big].$$

Она показывает, что $\{u_m\}$ сходятся в норме $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$. В силу полноты пространства $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ предельная для них функция u будет элементом $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Кроме того, для u будет справедливо соотношение (2.22) и тождество (2.23), которые получаются из этих же соотношений для u_m в результате предельного перехода по $m \to \infty$. Теорема 2.3 доказана.

Замечание 2.3. Оказывается, об. решения, гарантированные теоремой 2.3, имеют производную по t порядка 1/2. Как понимать это утверждение и как его доказывать, — см. [12_{14}].

Замечание 2.4. Оператор B, сопоставляющий вектор-функции $\{f;\ f_i;\ \varphi\}$ из $L_{2,1}(Q_T) \times L_2(Q_T) \times L_2(\Omega)$ об. решение $u(x, t)$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (2.1) — (2.3), является линейным. Действительно, если $\tilde{u} = B(\{\tilde{f};\ \tilde{f}_i,\ \tilde{\varphi}\})$, а $\tilde{\tilde{u}} = B(\{\tilde{\tilde{f}};\ \tilde{\tilde{f}}_i;\ \tilde{\tilde{\varphi}}\})$, то $u = \tilde{u} + \tilde{\tilde{u}}$ есть об. решение из $L_2(Q_T)$ задачи (2.1) — (2.3), соответствующее $\{\tilde{f} + \tilde{\tilde{f}};\ \tilde{f}_i + \tilde{\tilde{f}}_i;\ \tilde{\varphi} + \tilde{\tilde{\varphi}}\}$. Но, с другой стороны, эта последняя задача в силу теоремы 2.3 имеет об. решение v из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$, а в силу теоремы 2.2 v должно совпасть с $u = \tilde{u} + \tilde{\tilde{u}}$, т. е. $u = v = B(\{\tilde{f} + \tilde{\tilde{f}};\ \tilde{f}_i + \tilde{\tilde{f}}_i;\ \tilde{\varphi} + \tilde{\tilde{\varphi}}\})$. Тем самым показано, что множество об. решений из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (2.1) — (2.3), соответствующих всевозможным $\{f;\ f_i;\ \varphi\}$ из $L_{2,1}(Q_T) \times L_2(Q_T) \times L_2(\Omega)$, линейно, несмотря на нелинейность соотношения (2.22), которому должны удовлетворять такие решения. Причина в том, что (2.22) следует из тождества (2.23) и даже из тождества (2.21).

§ 3. Первая начально-краевая задача для параболических уравнений общего вида

В этом параграфе мы исследуем задачу

$$\mathscr{M}u \equiv u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\, u_{x_j} + a_i(x, t)\, u\right) + \\ + b_i(x, t)\, u_{x_i} + a(x, t)\, u = f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \tag{3.1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u|_{S_T} = 0 \tag{3.2}$$

для ограниченной области Ω при условиях: $a_{ij} = a_{ji}$,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}, \qquad |a| \leqslant \mu, \tag{3.3}$$

$$\varphi \in L_2(\Omega), \quad f \in L_{2,1}(Q_T), \quad f_i \in L_2(Q_T), \tag{3.4}$$

и условии равномерной параболичности

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, t)\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu, \mu = \text{const} > 0. \tag{3.5}$$

Сначала докажем, что эта задача имеет обобщенное решение из пространства $W_2^{1,0}(Q_T)$. Это можно сделать многими способами. Мы используем для этого метод Галеркина. Затем, используя теоремы 2.2 и 2.3, покажем, что каждое такое решение фактически принадлежит $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ и для него справедливо уравнение энергетического баланса. Наконец, из этих фактов извлечем теорему единственности для задачи (3.1), (3.2) в классе об. решений из $W_2^{1,0}(Q_T)$.

Уравнение энергетического баланса для задачи (3.1), (3.2) имеет вид

$$\frac{1}{2}\|u(x, t)\|^2_{2,\Omega} + \int_{Q_t} \left(a_{ij}u_{x_j}u_{x_i} + a_i u u_{x_i} + b_i u_{x_i} u + a u^2\right) dx\, dt = \\ = \frac{1}{2}\|u(x, 0)\|^2_{2,\Omega} + \int_{Q_t} \left(f u - f_i u_{x_i}\right) dx\, dt. \tag{3.6}$$

Формально оно получается с помощью интегрирования по частям в равенстве

$$\int\limits_{Q_t} \mathcal{M}u \cdot u\,dx\,dt = \int\limits_{Q_t} \left(f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) u\,dx\,dt \tag{3.7}$$

с учетом краевого условия $u|_{S_T} = 0$.

Из (3.6) можно вывести оценку $|u|_{Q_T}$ аналогично тому, как из (2.22) была выведена оценка (2.28). Действительно, из (3.6) в силу (3.3)—(3.5) следуют неравенства

$$\frac{1}{2}\|u(x, t)\|^2_{2,\Omega} + \nu\|u_x\|^2_{2,Q_t} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|u(x, 0)\|^2_{2,\Omega} + 2\mu\|u\|_{2,Q_t}\|u_x\|_{2,Q_t} + \mu\|u\|^2_{2,Q_t} +$$
$$+ \|f\|_{2,1,Q_t} \max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|u(x, \tau)\|_{2,\Omega} + \|\mathbf{f}\|_{2,Q_t}\|u_x\|_{2,Q_t} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|u(x, 0)\|^2_{2,\Omega} + \frac{\nu}{2}\|u_x\|^2_{2,Q_t} + \frac{2\mu^2}{\nu}\|u\|^2_{2,Q_t} + \mu\|u\|^2_{2,Q_t} +$$
$$+ \|f\|_{2,1,Q_t} \max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|u(x, \tau)\| + \|f\|_{2,Q_t}\|u_x\|_{2,Q_t}. \tag{3.8}$$

Приведем подобные члены, затем умножим обе части неравенства на 2 и величину $\|u\|^2_{2,Q_t}$ заменим на $ty^2(t)$, где $y(t) \equiv \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|u(x, \tau)\|_{2,\Omega}$, а $\|u(x, 0)\|^2_{2,\Omega}$ — на $y(t)\|u(x, 0)\|_{2,\Omega}$. Это даст неравенство

$$\|u(x, t)\|^2_{2,\Omega} + \nu\|u_x\|^2_{2,Q_t} \leqslant y(t)\|u(x, 0)\|_{2,\Omega} + cty^2(t) +$$
$$+ 2y(t)\|f\|_{2,1,Q_t} + 2\|\mathbf{f}\|_{2,Q_t}\|u_x\|_{2,Q_t}, \tag{3.9}$$

где $c = 2\left(\frac{2\mu^2}{\nu} + \mu\right)$. Из него следуют два неравенства

$$y^2(t) \leqslant y(t)\|u(x, 0)\|_{2,\Omega} + cty^2(t) + 2y(t)\|f\|_{2,1,Q_t} +$$
$$+ 2\|\mathbf{f}\|_{2,Q_t}\|u_x\|_{2,Q_t} \equiv j(t) \tag{3.10}$$

и

$$\|u_x\|^2_{2,Q_t} \leqslant \nu^{-1}j(t). \tag{3.11}$$

Извлечем из обеих частей (3.10) и (3.11) корень квадратный, полученные неравенства сложим и правую часть мажорируем следующим образом:

$$|u|_{Q_t} \equiv y(t) + \|u_x\|_{2,Q_t} \leqslant (1+\nu^{-1/2})\, j^{1/2}(t) \leqslant$$
$$\leqslant (1+\nu^{-1/2})\sqrt{ct}\,|u|_{Q_t} + (1+\nu^{-1/2})\,|u|_{Q_t}^{1/2} \times$$
$$\times \left[\|u(x,0)\|_{2,\Omega} + 2\|f\|_{2,1,Q_t} + 2\|\boldsymbol{f}\|_{2,Q_t}\right]^{1/2}.$$

Для

$$t < t_1 \equiv c^{-1}(1+\nu^{-1/2})^{-2}, \qquad c = 2\left(\frac{2\mu^2}{\nu} + \mu\right), \tag{3.12}$$

отсюда получим оценку $|u|_{Q_t}$:

$$|u|_{Q_t} \leqslant \left[1-(1+\nu^{-1/2})\sqrt{ct}\right]^{-2}(1+\nu^{-1/2})^2 \times$$
$$\times \left[\|u(x,0)\|_{2,\Omega} + 2\|f\|_{2,1,Q_t} + 2\|\boldsymbol{f}\|_{2,Q_t}\right]. \tag{3.13}$$

Разобьем отрезок $[0,T]$ на интервалы $\Delta_1 = [0, {}^1\!/_2 t_1]$, $\Delta_2 = [{}^1\!/_2 t_1, t_1]$, ..., Δ_N длины, не большей ${}^1\!/_2 t_1$; для каждого из них справедлива оценка вида (3.13). Из них, учтя $\|u(x,t)\|_{2,\Omega} \leqslant |u|_{Q_t}$, выведем интересующее нас энергетическое неравенство

$$|u|_{Q_t} \leqslant c(t)\left[\|u(x,0)\|_{2,\Omega} + 2\|f\|_{2,1,Q_t} + 2\|\boldsymbol{f}\|_{2,Q_t}\right] \equiv$$
$$\equiv c(t)\mathcal{F}(t), \tag{3.14}$$

справедливое для любого t из $[0,T]$. Функция $c(t)$ определяется величиной T и постоянными ν и μ из (3.3) и (3.5).

Определим теперь *обобщенное решение* $u(x,t)$ *задачи* (3.1), (3.2) *из пространства* $W_2^{1,0}(Q_T)$ (или, что то же, из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$) как элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющий тождеству

$$\mathcal{M}(u,\eta) \equiv \int\limits_{Q_T} (-u\eta_t + a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + a_i u\eta_{x_i} + b_i u_{x_i}\eta + au\eta)\,dx\,dt =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \varphi\eta(x,0)\,dx + \int\limits_{Q_T} (f\eta - f_i\eta_{x_i})\,dx\,dt \tag{3.15}$$

при $\forall\eta \in W^1_{2,0}(Q_T)$, равной нулю при $t=T$. Ясно, что множество таких решений линейно. Для доказательства разрешимости задачи (3.1), (3.2) в $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_2(Q_T)$ возьмем фундаментальную систему $\{\varphi_k(x)\}$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и будем считать ее, ради удобства, ортонормированной в $L_2(\Omega)$. Будем искать приближенные решения $u^N(x, t)$ в виде $u^N(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k^N(t)\varphi_k(x)$ из системы соотношений *)

$$\left(u_t^N(x, t), \varphi_l(x)\right) + \left(a_{ij}u^N_{x_j} + a_i u^N, \varphi_{lx_i}\right) + \left(b_i u^N_{x_i} + au^N, \varphi_l\right) = \\ = \left(f, \varphi_l\right) - \left(f_i, \varphi_{lx_i}\right), \quad l = 1, \ldots, N, \tag{3.16}$$

и равенств

$$c_l^N(0) = (\varphi, \varphi_l). \tag{3.17}$$

Соотношение (3.16) есть не что иное, как система N линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $c_l(t) \equiv c_l^N(t)$, $l = 1, \ldots, N$. Ее главные члены имеют вид $\frac{dc_l(t)}{dt}$, коэффициенты при $c_k(t)$ суть ограниченные функции t, а свободные члены являются суммируемыми на $(0, T)$ функциями. По известной теореме о разрешимости таких систем заключаем, что (3.16), (3.17) однозначно определяют абсолютно непрерывные на $[0, T]$ функции $c_l^N(t)$. Получим для u^N оценки, не зависящие от N. Для этого умножим каждое из (3.16) на свое c_l, просуммируем по l от $l = 1$ до $l = N$ и проинтегрируем по t от 0 до $t \leqslant T$. В результате придем к (3.6) для $u = u^N$. Из (3.6), как было доказано выше, следует неравенство (3.14) с $\mathcal{F}(t) = 2\|f\|_{2,1,Q_t} + 2\|\mathbf{f}\|_{2,Q_t} + \|u^N(x, 0)\|_{2,\Omega}$. Но $\|u^N(x, 0)\|_{2,\Omega} \leqslant \|\varphi(x)\|_{2,\Omega}$, поэтому для u^N имеем оценку

$$|u^N|_{Q_T} \leqslant c_1 \tag{3.18}$$

---

*) Эти соотношения есть не что иное, как равенства

$$\left(\mathcal{M}u^N - f - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \varphi_l\right) = 0, \quad l = 1, \ldots, N,$$

преобразованные к форме, соответствующей выбранным нами пространствам.

с постоянной c_1, не зависящей от N. Благодаря (3.18) из последовательности $\{u^N\}$, $N = 1, 2, \ldots$, можно выделить подпоследовательность $\{u^{N_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, слабо сходящуюся в $L_2(Q_T)$ вместе с производными $u_x^{N_k}$ к некоторому элементу $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ *). Этот элемент $u(x, t)$ есть желаемое об. решение задачи (3.1), (3.2). Действительно, умножим (3.16) на произвольную абсолютно непрерывную функцию $d_l(t)$ с $d_l'(t)$ из $L_2(0, T)$ и $d_l(T) = 0$, сложим полученные равенства по всем l от 1 до N и результат проинтегрируем по t от 0 до T. Затем в первом члене проведем интегрирование по частям по t. Это дает тождество

$$\mathcal{M}(u^N, \Phi) = \int\limits_{\Omega} u^N \Phi \big|_{t=0} dx + \int\limits_{Q_T} (f\Phi - f_i \Phi_{x_i})\, dx\, dt \qquad (3.19)$$

вида (3.15), в котором $\Phi = \sum\limits_{l=1}^{N} d_l(t) \varphi_l(x)$. Обозначим через $\mathfrak{M}_N$ множество всех таких Φ с указанными выше свойствами функций $d_l(t)$. Совокупность $\bigcup\limits_{p=1}^{\infty} \mathfrak{M}_p$ плотна в подпространстве $\widehat{W}{}_{2,0}^1(Q_T)$ пространства $W_{2,0}^1(Q_T)$, состоящем из тех элементов $W_{2,0}^1(Q_T)$, которые равны нулю при $t = T$ (доказать самостоятельно). При фиксированном Φ из $\mathfrak{M}_p$ в (3.19) можно перейти к пределу по выбранной выше подпоследовательности N_k, начиная с $N_k \geqslant p$. В результате получим (3.15) для u с $\eta = \Phi \in \mathfrak{M}_p$. Но так как $\bigcup\limits_{p=1}^{\infty} \mathfrak{M}_p$ плотно в $\widehat{W}{}_{2,0}^1(Q_T)$, то (3.15), как нетрудно проверить, будет справедливым при $\forall \eta$ из $\widehat{W}{}_{2,0}^1(Q_T)$, т. е. $u(x, t)$ действительно есть об. решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (3.1), (3.2).

---

*) В результате последующих рассуждений мы увидим, что вся последовательность $\{u^N\}$ сходится к u.

Тем самым доказана

Теорема 3.1. *Задача* (3.1), (3.2) *имеет по крайней мере одно об. решение из* $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, *если выполнены предположения* (3.3) — (3.5).

Переходим теперь к исследованию этого решения $u(x,t)$. Для этого рассмотрим его как об. решение из $L_2(Q_T)$ задачи (2.1)—(2.3) с f, равным $f-b_iu_{x_i}-au\equiv\tilde{f}$, и f_i, равными $f_i+a_{ij}u_{x_j}+a_iu-u_{x_i}\equiv\tilde{f}_i$, взятыми из уравнения (3.1). Это возможно, ибо $\tilde{f}\in L_{2,1}(Q_T)$, $\tilde{f}_i\in L_2(Q_T)$ и (3.15) может быть преобразовано к виду (2.21) для $\eta\in W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$, $\eta(x,T)=0$. Но тогда из теорем 2.2 и 2.3 следует, что $u(x,t)$ будет об. решением задачи (2.1)—(2.3) из $V_2^{1,0}(Q_T)$, так что оно есть элемент $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ и для него справедливы соотношения (2.22) и (2.23), в которых f надо заменить на $\tilde{f}$, а f_i на $\tilde{f}_i$.

Соотношение (2.22) может быть переписано в виде (3.6), а тождество (2.23) — в виде

$$\int_\Omega u(x,t)\,\eta(x,t)\,dx-\int_\Omega \varphi\eta(x,0)\,dx+$$
$$+\int_{Q_t}\left(-u\eta_t+a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i}+a_iu\eta_{x_i}+b_iu_{x_i}\eta+au\eta\right)dx\,dt=$$
$$=\int_{Q_t}\left(f\eta-f_i\eta_{x_i}\right)dx\,dt, \quad (3.20)$$

в котором η есть произвольный элемент $W_{2,0}^1(Q_T)$ и t — любое из $[0,T]$. Мы доказали, что $\forall$ об. решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (3.1), (3.2) есть ее *об. решение задачи* (3.1), (3.2) *из* $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Такие решения для задачи (3.1), (3.2) (в соответствии с § 1) мы определяем как элементы $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$, для которых справедливо тождество (3.20) и энергетическое соотношение (3.6). Покажем, что задача (3.1), (3.2) не может иметь двух различных решений этого класса. Действительно, если бы она имела два таких решения u' и u'', то их разность $u=u'-u''$ была бы об. решением задачи (3.1), (3.2) из класса

$\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, соответствующим нулевому начальному условию и нулевому свободному члену. По только что доказанному u фактически будет об. решением этой задачи из класса $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$, и потому для u будет справедливо соотношение (3.6), в правой части которого стоит нуль. Но из такого соотношения следует оценка (3.14) с правой частью, равной нулю. Следовательно, $u(x, t)$ будет равна нулю. Совпадение u' и u'' доказано.

Из этих же рассуждений относительно любых двух об. решений u' и u'' из класса $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (3.1), (3.2) с различными f, f_i и φ следует, что оператор B, сопоставляющий $\{f;\ f_i;\ \varphi\}$ об. решение $u(x, t)$ из класса $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$, является линейным, и уравнение энергетического баланса (3.6) есть следствие тождества (3.20) (при тех предположениях о коэффициентах $\mathcal{M}$ и функциях f, f_i и φ, которые указаны в теореме 3.1).

Таким образом, нами доказана следующая теорема:

Теорема 3.2. *Задача* (3.1), (3.2) *однозначно разрешима в классе* $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ *при любых* $f \in L_{2,1}(Q_T)$, $f_i \in L_2(Q_T)$ *и* $\varphi \in L_2(\Omega)$, *если выполнены предположения* (3.3), (3.5).

§ 4. Другие краевые задачи, метод Фурье и Лапласа, второе основное неравенство

1. О неограниченных областях Ω. Ограниченность области Ω в §§ 2 и 3 была использована, по существу, лишь там, где мы описывали область $\mathscr{D}(\Delta)$ определения оператора Δ (см. § 2, (2.12)). Для неограниченной области Ω надо вместо оператора Δ взять оператор $\Delta - E$. Для $\Delta - E$ область определения $\mathscr{D}(\Delta - E)$ будет состоять из об. решений задачи

$$\Delta u - u = f, \qquad u|_S = 0, \tag{2.12'}$$

когда f пробегает всё $L_2(\Omega)$. Эти решения u будут элементами $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если граница области Ω — достаточно «хорошая», то u будут принадлежать $W_{2,0}^2(\Omega)$. Это доказывается так же, как и для ограниченной области Ω в §§ 6, 7 гл. II. В качестве оператора $\mathcal{M}_0 u$ лучше взять

$\mathcal{M}_0 u = u_t - \Delta u + u$ и для него провести все доказательства, помня, что для неограниченной Ω норма в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ не эквивалентна $\|u_x\|_{2,\Omega}$. Все оценки, рассуждения и результаты § 3 сохраняются и для неограниченных областей Ω.

2. Вторая и третья краевые задачи. Эти задачи состоят в нахождении решения уравнения

$$\hat{\mathcal{M}} u \equiv u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x, t)) + \\ + b_i(x, t) u_{x_i} + a(x, t) u = f(x, t), \tag{4.1}$$

удовлетворяющего условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(s, t) u\right|_{S_T} = 0. \tag{4.2}$$

Для них определим сначала об. решения из пространства $W_2^{1,0}(Q_T)$. Напомним, что это пространство состоит из функций $u(x, t)$, имеющих конечную норму

$$\| v \|_{2, Q_T}^{(1, 0)} = \left(\int_{Q_T} (v^2 + v_x^2)\, dx\, dt \right)^{1/2}.$$

Скалярное произведение в $W_2^{1,0}(Q_T)$ определяется равенством

$$(v, w)_{2, Q_T}^{(1, 0)} = \int_{Q_T} (vw + v_x w_x)\, dx\, dt.$$

Об. решением задачи (4.1), (4.2) *из* $W_2^{1,0}(Q_T)$ назовем функцию $u(x, t)$, принадлежащую $W_2^{1,0}(Q_T)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\hat{\mathcal{M}}(u, \eta) \equiv \int_{Q_T} (-u\eta_t + a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} + b_i u_{x_i} \eta + a u \eta)\, dx\, dt + \\ + \int_{S_T} \sigma u \eta\, ds\, dt = \int_{\Omega} \varphi \eta(x, 0)\, dx + \int_{Q_T} f \eta\, dx\, dt \tag{4.3}$$

при $\forall \eta \in W_2^1(Q_T)$, равном нулю при $t = T$.

Существование по крайней мере одного такого решения можно доказать, например, с помощью метода Галеркина так же, как это сделано во второй половине § 3 для первого краевого условия. Надо только функции $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, выбрать так, чтобы они образовывали фундаментальную систему в $W_2^1(\Omega)$, и считать, что граница Ω — не слишком плохая (такая, как в § 5 гл. II). Энергетическая оценка для решений задачи (4.1), (4.2) имеет тот же вид (3.14), что и для задачи (3.1), (3.2). Она выводится из уравнения энергетического баланса, которое отличается от (3.6) лишь наличием одного (несущественного для оценок) члена: $\int\limits_{S_t} \sigma u^2\,ds\,dt$. Это уравнение получается из равенства

$$\int\limits_{Q_t} \hat{\mathscr{M}} u \cdot u\,dx\,dt = \int\limits_{Q_t} fu\,dx\,dt$$

с помощью интегрирования по частям и учета условий (4.2) и имеет вид

$$\frac{1}{2}\| u(x, t)\|^2_{2,\Omega} + \int\limits_{Q_t} \left(a_{ij}u_{x_j}u_{x_i} + b_i u_{x_i} u + au^2\right) dx\,dt + \\ + \int\limits_{S_t} \sigma u^2\,ds\,dt = \frac{1}{2}\| u(x, 0)\|^2_{2,\Omega} + \int\limits_{Q_t} fu\,dx\,dt. \quad (4.4)$$

Из (4.4) оценка (3.14) выводится так же, как и из (3.6). Если $\sigma \geqslant 0$, то член $j_1(t) \equiv \int\limits_{S_t} \sigma u^2\,ds\,dt$ можно просто выбросить из (4.4) и получить неравенство, из которого следует (3.14). В противном случае $|j_1(t)|$ надо оценить так:

$$|j_1(t)| \leqslant c \int\limits_{S_t} u^2\,ds\,dt \leqslant c_2 \int\limits_{Q_t} \left(\varepsilon u_x^2 + \frac{1}{\varepsilon} u^2\right) dx\,dt, \\ \forall \varepsilon \in (0, 1]. \quad (4.5)$$

При этом мы предположили, что $|\sigma| \leqslant c$, и воспользовались неравенством (6.24) гл. I. Весь дальнейший вывод (3.14) из (4.4) совпадает с тем, который был проведен в § 3. Итак, мы можем считать доказанным, что для $u(x, t)$, удовлетворяющих равенству (4.4) при $\forall t \in [0, T]$, справедлива оценка вида (3.14). На ее основе существование по крайней мере одного об. решения из $W_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (4.1), (4.2) доказывается так же, как в § 3 для задачи (3.1), (3.2).

Далее, можно поступать двояко: или доказать «в лоб» теорему единственности в классе таких об. решений, следуя первому из предложенных мною способов доказательства теорем единственности для нестационарных задач (см. [12_2], гл. III), или провести более длинное рассуждение с привлечением уравнения теплопроводности, аналогичное рассуждениям §§ 2 и 3. На первом, более коротком пути надо предположить существование у a_{ij}, b_i и σ ограниченных производных по t. На втором же пути никаких новых ограничений на данные задачи не требуется. Опишем несколько подробнее эти способы.

Пусть задача (4.1), (4.2) имеет два об. решения из класса $W_2^{1,0}(Q_T)$. Тогда их разность $u(x,t)$ принадлежит $W_2^{1,0}(Q_T)$ и удовлетворяет тождеству

$$\hat{\mathscr{M}}(u, \eta) = 0 \tag{4.6}$$

при $\forall\eta \in W_2^1(Q_T)$, равной нулю при $t = T$. Возьмем в качестве $\eta(x, t)$ функцию

$$\eta(x, t) = \begin{cases} 0, & t \in [b, T], \\ \int\limits_b^t u(x, \tau)\, d\tau, & t \in [0, b], \end{cases} \tag{4.7}$$

где b — произвольно фиксированное число из промежутка $[0, T]$.

Нетрудно проверить, что она является допустимой для (4.6). Подставим (4.7) в (4.6) и результат запишем в виде

$$\int\limits_0^b \int\limits_\Omega \left(-\eta_t^2 + a_{ij}\eta_{tx_j}\eta_{x_i} + b_i\eta_{tx_i}\eta + a\eta_t\eta\right) dx\, dt + \\ + \int\limits_{S_b} \sigma\eta_t\eta\, ds\, dt = 0, \tag{4.8}$$

что возможно, ибо при $t \in (0, b)$ $u = \eta_t$. Запишем $a_{ij}\eta_{tx_j}\eta_{x_i}$ в виде $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_{ij}\eta_{x_j}\eta_{x_i}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\eta_{x_j}\eta_{x_i}$, а $\sigma\eta_t\eta$ — в виде

$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\eta^2)-\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\eta^2$, и проведем во втором, третьем и последнем членах (4.8) интегрирование по частям следующим образом:

$$\int_0^b\int_\Omega\left(-\eta_t^2-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\eta_{x_j}\eta_{x_i}-b_i\eta_{x_i}\eta_t-\frac{\partial b_i}{\partial t}\eta_{x_i}\eta+a\eta_t\eta\right)dx\,dt+$$
$$+\int_\Omega\left(\frac{1}{2}a_{ij}\eta_{x_j}\eta_{x_i}+b_i\eta_{x_i}\eta\right)dx\Big|_{t=0}^{t=b}+\int_{S_b}-\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\eta^2\,ds\,dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_S\sigma\eta^2\,ds\Big|_{t=0}^{t=b}=0. \qquad (4.9)$$

Воспользуемся теперь нашими предположениями о коэффициентах $\widehat{\mathcal{M}}$ и функции σ, а также учтем, что $\int_\Omega\ldots dx$ в (4.9) при $t=b$ равен нулю в силу выбора (4 7) функции η. Благодаря этому из равенства (4.9), взятого с измененными знаками, выведем неравенство

$$\frac{1}{2}\nu\int_\Omega\eta_x^2(x,\,0)\,dx+\int_{Q_b}\eta_t^2\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant c\int_{Q_b}\left[\varepsilon_1\eta_t^2+\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\eta_x^2+\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\eta^2\right]dx\,dt+$$
$$+c\int_\Omega\left(\varepsilon_2\eta_x^2(x,\,0)+\frac{1}{\varepsilon_2}\eta^2(x,\,0)\right)dx+$$
$$+c\int_{S_b}\eta^2\,ds\,dt+c\int_S\eta^2(s,\,0)\,ds, \qquad (4.10)$$

в котором ε_i — произвольные положительные числа, а постоянная c определяется мажорантами коэффициентов $\widehat{\mathcal{M}}$, σ и их производных по t. Интегралы по S_b и S оценим, используя неравенство (6.24), гл. I, так:

$$\int_S\eta^2(s,\,0)\,ds\leqslant c_1\int_\Omega\left[\left(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\eta^2(x,0)+\varepsilon_3\eta_x^2(x,0)\right]dx, \qquad (4.11)$$

$$\int_{S_b} \eta^2(s, t)\,ds\,dt \leqslant c_1 \int_{Q_b} \left[\left(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\eta^2 + \varepsilon_3\eta_x^2\right] dx\,dt. \tag{4.12}$$

Кроме того, из (4.7) или, что то же, из представления

$$\eta(x, t) = \int_b^t \eta_t(x, \tau)\,d\tau, \qquad t \in [0, b],$$

следуют неравенства

$$\left.\begin{aligned} \eta^2(x, t) &\leqslant b \int_0^b \eta_t^2(x, \tau)\,d\tau, \\ \int_\Omega \eta^2(x, 0)\,dx &\leqslant b \int_{Q_b} \eta_t^2\,dx\,dt, \\ \int_{Q_b} \eta^2\,dx\,dt &\leqslant b^2 \int_{Q_b} \eta_t^2\,dx\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Подставим (4.11) и (4.12) в (4.10), затем приведем подобные члены, перенеся $\eta_x^2(x, 0)$ и η_t^2 налево, и выберем ε_i столь малыми, чтобы коэффициенты при $\eta_x^2(x, 0)$ и η_t^2 оказались равными $\nu/4$ и $1/2$ соответственно. После этого воспользуемся неравенствами (4.13) для изгнания членов $\eta^2(x,0)$ и η^2 из правой части полученного неравенства. В результате придем к неравенству

$$\frac{\nu}{4}\int_\Omega \eta_x^2(x, 0)\,dx + \frac{1}{2}\int_{Q_b} \eta_t^2\,dx\,dt \leqslant c_2 \int_{Q_b} (\eta_x^2 + b\eta_t^2)\,dx\,dt. \tag{4.14}$$

Будем считать b столь малым, что

$$c_2 b \leqslant 1/4. \tag{4.15}$$

При таких b из (4.14) следует

$$\int_\Omega \eta_x^2(x, 0)\,dx + \frac{1}{\nu}\int_{Q_b} \eta_t^2\,dx\,dt \leqslant c_3 \int_{Q_b} \eta_x^2\,dx\,dt. \tag{4.16}$$

Воспользуемся теперь произволом в выборе числа b и укажем явно, что взятая нами функция $\eta(x, t)$ зависит от b. Для этого введем обозначение

$$\int_0^t u(x, \tau)\, d\tau = y(x, t).$$

Тогда $\eta(x, t)$ для $t \in [0, b]$ есть $y(x, t) - y(x, b)$. Подставим это выражение для η в (4.16), отбросив пока второй член из (4.16), и затем мажорируем правую часть полученного неравенства следующим образом:

$$\int_\Omega y_x^2(x, b)\, dx \leqslant c_3 \int_{Q_b} [y_x(x, t) - y_x(x, b)]^2\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant 2c_3 \int_{Q_b} [y_x^2(x, t) + y_x^2(x, b)]\, dx\, dt =$$
$$= 2c_3 b \int_\Omega y_x^2(x, b)\, dx + 2c_3 \int_{Q_b} y_x^2(x, t)\, dx\, dt. \qquad (4.17)$$

При

$$b \leqslant 1/(4c_3) \qquad (4.18)$$

из (4.17) получаем неравенство

$$\int_\Omega y_x^2(x, b)\, dx \leqslant 4c_3 \int_{Q_b} y_x^2(x, t)\, dx\, dt. \qquad (4.19)$$

Оно верно при всех $b \in [0, b_1]$, где $b_1 = \min\left\{\frac{1}{4c_2}; \frac{1}{4c_3}\right\}$. Так как $y(x, 0) = 0$, а потому и $y_x(x, 0) \equiv 0$, то из (4.19) следует, что $y_x(x, b) \equiv 0$ для $b \in [0, b_1]$ (см. лемму 1.1). Но тогда и $\eta_x(x, t) = y_x(x, t) - y_x(x, b) \equiv 0$ для $t \in [0, b_1]$. Отсюда и из неравенства (4.16) заключаем, что и $\eta_t(x, t) = u(x, t) \equiv 0$ для $t \in [0, b_1]$. Тем самым мы доказали совпадение двух решений u' и u'' на цилиндре $Q_{b_1} = \Omega \times [0, b_1]$. Повторяя это рассуждение для цилиндров $\Omega \times [b_1, 2b_1]$, $\Omega \times [2b_1, 3b_1]$ и т. д., мы исчерпаем весь цилиндр Q_T, доказав желаемую теорему единственности.

Итак, доказана следующая теорема:

Теорема 4.1. *Пусть коэффициенты уравнения* (4.1) *удовлетворяют условиям*

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, t)\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu = \text{const} > 0, \qquad |b_i|, \, |a| \leqslant \mu_1, \tag{4.20}$$

и $|\sigma| \leqslant \mu_1$. *Тогда задача* (4.1), (4.2) *имеет по крайней мере одно об. решение из класса* $W_2^{1,0}(Q_T)$, *если* $\varphi \in L_2(\Omega)$, *а* $f \in L_{2,1}(Q_T)$. *Если дополнительно выполняются условия*

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right|, \qquad \left|\frac{\partial b_i}{\partial t}\right|, \qquad \left|\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right| \leqslant \mu_2, \tag{4.21}$$

то имеет место теорема единственности для об. решений задачи (4.1), (4.2) *из класса* $W_2^{1,0}(Q_T)$. *Граница* Ω *должна удовлетворять тем же требованиям, что и в* § 5 *гл.* II.

Для первого краевого условия аналогичная теорема может быть доказана так же, как мы только что доказали теорему 4.1. Однако она грубее теоремы 3.2, в которой не требуется существования производных у коэффициентов уравнения. Ограничения (4.21) можно снять и для краевых условий (4.2). Для этого надо провести рассуждения, подобные рассуждениям §§ 2 и 3. Опишем их в общих чертах, не вдаваясь в детали и предполагая, что $\sigma(s, t)$ не зависит от t.

Сначала надо рассмотреть вспомогательную задачу

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{\mathscr{M}}_0 u \equiv u_t - \Delta u = f(x, t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x_i}, \\ &u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u + f_i \cos(\boldsymbol{n}, x_i)\right)\right|_{S_T} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

считая $\varphi \in W_2^1(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$, а $f_i \in W_2^{1,0}(Q_T)$, и для нее доказать теоремы типа 2.1 и 2.2 (назовем их теоремами 4.2 и 4.3), используя те же приемы, что и в § 2. Затем ввести об. решения задачи (4.22), принадлежащие пространству $V_2^{1,0}(Q_T)$, которое отличается от $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ лишь тем, что его элементы не обращаются в нуль на S_T.

Такие решения $u(x,t)$ являются элементами $V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющими тождеству

$$\int_\Omega u(x, t)\eta(x, t)\,dx - \int_\Omega \varphi\eta(x, 0) + \int_{Q_t} (-u\eta_t + u_{x_i}\eta_{x_i})\,dx\,dt + \\ + \int_{S_t} \sigma u\eta\,ds\,dt = \int_{Q_t} (f\eta - f_i\eta_{x_i})\,dx\,dt \qquad (4.23)$$

при $\forall t \in [0, T]$ и $\forall \eta \in W_2^1(Q_T)$ и энергетическому соотношению

$$\frac{1}{2}\| u(x, t)\|_{2,\Omega}^2 + \| u_x \|_{2,Q_t}^2 + \int_{S_t} \sigma u^2\,ds\,dt = \\ = \int_{Q_t} (fu - f_i u_{x_i})\,dx\,dt + \frac{1}{2}\| u(x, 0)\|_{2,\Omega}^2, \quad t \in [0, T]. \qquad (4.24)$$

С помощью теоремы 4.2 доказывается существование таких решений при любых $\varphi \in L_2(\Omega)$, $f \in L_{2,1}(Q_T)$ и $f_i \in L_2(Q_T)$. После этого можно перейти к общей задаче (4.1), (4.2). Для нее мы уже знаем существование по крайней мере одного об. решения $u(x,t)$ из $W_2^{1,0}(Q_T)$ (см. теорему 4.1). Это решение удовлетворяет тождеству (4.3), которое можно записать в виде

$$\int_{Q_T} (-u\eta_t + u_{x_i}\eta_{x_i})\,dx\,dt + \int_{S_t} \sigma u\eta\,ds\,dt = \\ = \int_\Omega \varphi\eta(x, 0)\,dx + \int_{Q_T} (\mathcal{F}\eta - f_i\eta_{x_i})\,dx\,dt, \qquad (4.25)$$

где $\mathcal{F} = f - b_i u_{x_i} - au \in L_{2,1}(Q_T)$ и $f_i = a_{ij}u_{x_j} - u_{x_i} \in L_2(Q_T)$, а $\eta \in W_2^1(Q_T)$ и $\eta(x, T) = 0$. Благодаря этому функцию $u(x,t)$ можно объявить об. решением из $L_2(Q_T)$ задачи (4.22) с только что указанными свободными членами $\mathcal{F}$ и f_i. Но, с другой стороны, задача (4.22) имеет об. решение $v(x,t)$ из класса $V_2^{1,0}(Q_T)$, и в силу теоремы 4.3 оно должно совпасть с $u(x,t)$. Поэтому $u(x,t) \in \in V_2^{1,0}(Q_T)$ и для него справедливы соотношения (4.23) и (4.24), которые, если в них подставить выражения для $\mathcal{F}=f-b_i u_{x_i}-au$ и $f_i=a_{ij}u_{x_j}-u_{x_i}$, приобретают вид

$$\int_{\Omega} u(x,t)\eta(x,t)\,dx-\int_{\Omega}\varphi\eta(x,0)\,dx+\\+\int_{Q_t}\left(-u\eta_t+a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i}+b_i u_{x_i}\eta+au\eta\right)dx\,dt+\\+\int_{S_t}\sigma u\eta\,ds\,dt=\int_{Q_t} f\eta\,dx\,dt \tag{4.26}$$

и (4.4) соответственно.

Если бы задача (4.1), (4.2) имела два об. решения $u'(x,t)$ и $u''(x,t)$ из $W_2^{1,0}(Q_T)$, то их разность $u(x,t)$ была бы об. решением из $W_2^{1,0}(Q_T)$ той же задачи, но с $f\equiv 0$ и $\varphi\equiv 0$. Из только что доказанного следует, что u принадлежит $V_2^{1,0}(Q_T)$ и удовлетворяет (4.4) с $f\equiv\equiv\varphi\equiv 0$. Но из (4.4) вытекает, как указано выше, неравенство (3.14), в котором правая часть будет равна нулю. Тем самым и $u(x,t)$ будет равно нулю, т. е. u' и u'' совпадают. Таким образом доказывается, что любое об. решение задачи (4.1), (4.2) из $W_2^{1,0}(Q_T)$ фактически является ее об. решением из $V_2^{1,0}(Q_T)$ и в этих классах справедлива теорема единственности. При этом мы обошлись без ограничений (4.21), правда, предположив, что σ не зависит от t.

3. О методе Фурье и методе преобразования Лапласа. Для параболических уравнений

$$u_t-\mathcal{L}u=f \tag{4.27}$$

с симметрическим оператором $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}u=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)u_{x_j}+a_i(x)u\right)-a_i(x)u_{x_i}-a(x)u, \tag{4.28}$$

коэффициенты которого не зависят от t, начально-краевые задачи при любом из условий (1.9)—(1.11) (в (1.11) σ не должна зависеть от t) могут быть решены с помощью метода Фурье. Сделаем это применительно к задаче

$$u_t-\mathcal{L}u=0, \tag{4.29}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\qquad u|_{S_t}=0, \tag{4.30}$$

считая Ω ограниченной областью. Изложим пока формальную сторону метода в его классической форме (т. е. считая коэффициенты a_{ij}, a_i дифференцируемыми и решения удовлетворяющими уравнению в обычной форме). Найдем все решения уравнения (4.29) вида $u = T(t)X(x)$, удовлетворяющие при $\forall t \geqslant 0$ краевому условию $u|_{S_t} = 0$. Последнее, очевидно, есть условие на X: $X|_S = 0$. Подставим $u = TX$ в (4.29) и поделим обе части уравнения на TX. Это даст равенство

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\mathscr{L}X(x)}{X(x)},$$

из которого следует, что левая и правая части должны равняться постоянной, т. е.

$$\mathscr{L}X = \lambda X, \qquad X|_S = 0, \tag{4.31}$$

и

$$T' = \lambda T, \tag{4.32}$$

где $\lambda = \mathrm{const}$. Задача (4.31) есть спектральная задача, изученная нами в § 4 гл. II (см. также § 7 гл. II). Все ее линейно независимые решения можно расположить в виде последовательности $\{u_k(x)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, ортонормированной в $L_2(\Omega)$, причем соответствующие им $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, вещественны, расположены в порядке убывания и $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$. Собственные функции $\{u_k(x)\}$ взаимно ортогональны также в следующих смыслах:

$$[u_k, u_l] \equiv \mathscr{L}(u_k, u_l) + \lambda_0(u_k, u_l) \equiv$$

$$\equiv \int\limits_\Omega [a_{ij}u_{kx_j}u_{lx_i} + a_i u_k u_{lx_i} + a_i u_{kx_i}u_l + (a + \lambda_0)\,u_k u_l]\,dx =$$

$$= (\lambda_0 - \lambda_k)\,\delta_k^l \tag{4.33}$$

и

$$\{u_k, u_l\} \equiv ((\mathscr{L} - \lambda_0)\,u_k, (\mathscr{L} - \lambda_0)\,u_l) = (\lambda_0 - \lambda_k)^2\,\delta_k^l, \tag{4.34}$$

где λ_0 выбрано так, что $\lambda_1 < \lambda_0$ (а потому и $\lambda_k < \lambda_0$, $k = 2, 3, \ldots$). Если коэффициенты $\mathscr{L}$ удовлетворяют условиям (3.3), (3.5), то норма $[u, u]^{1/2}$ эквивалентна норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если к тому же для коэффициентов $\mathscr{L}$ и области Ω выполнены условия теоремы 7.2 гл. II, то норма $\{u, u\}^{1/2}$ эквивалентна норме пространства $W^2_{2,0}(\Omega)$. В первом случае (при выполнении лишь условий (3.3) и (3.5)) $u_k(x)$ суть элементы $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, и для них имеет смысл говорить лишь об ортогональности в $L_2(\Omega)$ и в виде (4.33). Во втором случае $u_k(x) \in W^2_{2,0}(\Omega)$ и для них верно также и (4.34).

Если в качестве решения задачи (4.31) взять $X = u_k(x)$, то соответствующее ему решение $T(t)$ уравнения (4.32) имеет вид $T_k(t) = a_k e^{\lambda_k t}$ с произвольной постоянной a_k. Рассмотрим ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k t} u_k(x). \tag{4.35}$$

Сумма любого из его конечных отрезков есть решение уравнения (4.29) (вообще говоря, обобщенное), удовлетворяющее граничному условию из (4.30). Чтобы удовлетворить начальному условию (хотя бы формально, не обращая внимания на сходимости), надо взять весь ряд (4.35). Его коэффициенты определятся из равенства

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x),$$

а именно:

$$a_k = (\varphi, u_k). \tag{4.36}$$

Наша задача состоит в исследовании характера сходимости ряда (4.35) при разных предположениях об известных величинах. Это легко сделать, опираясь на указанные ортогональности и на то, что $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$. Подсчитаем следующие нормы ряда (4.35), полагая для удобства записи, что среди $\{\lambda_k\}$ нет $\lambda_{k_1} = 0$:

$$\| u(x, t) \|^2_{2,\Omega} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 e^{2\lambda_k t}, \tag{4.37}$$

$$[u(x, t), u(x, t)] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 (\lambda_0 - \lambda_k) e^{2\lambda_k t}, \tag{4.38}$$

$$\int_0^t [u(x, t), u(x, t)]\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \frac{\lambda_0 - \lambda_k}{-2\lambda_k} \left(1 - e^{2\lambda_k t}\right), \tag{4.39}$$

$$\{u(x, t), u(x, t)\} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 (\lambda_0 - \lambda_k)^2 e^{2\lambda_k t}, \tag{4.40}$$

$$\| u_t(x, t) \|_{2, \Omega}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \lambda_k^2 e^{2\lambda_k t}, \tag{4.41}$$

$$\int_0^t \{u(x, t), u(x, t)\}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \frac{(\lambda_0 - \lambda_k)^2}{-2\lambda_k} \left(1 - e^{2\lambda_k t}\right), \tag{4.42}$$

$$\int_0^t \| u_t(x, t) \|_{2, \Omega}^2\, dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \lambda_k \left(e^{2\lambda_k t} - 1\right). \tag{4.43}$$

Если выполнены лишь условия (3.3), (3.5) и $\varphi \in L_2(\Omega)$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \|\varphi\|_{2, \Omega}^2$, и ряды, стоящие в правых частях (4.37) и (4.39), сходятся, причем равномерно относительно $t \in [0, T]$. Благодаря этому сумма $u(x, t)$ ряда (4.35) является об. решением задачи (4.29), (4.30) из пространства $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ с $\forall T$. Действительно, из указанной сходимости следует принадлежность $u(x, t)$ к $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Далее надо проверить, что $u(x, t)$ удовлетворяет соответствующему интегральному тождеству (см. (3.20)). Но это легко сделать, исходя из того, что суммы $u^N(x, t)$ N первых членов ряда (4.35) удовлетворяют этому тождеству с начальной функцией $\varphi_N(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k u_k(x)$, и в нем можно перейти к пределу по $N \to \infty$. Наконец, справедливость для $u(x, t)$ уравнения энергетического баланса (см. (3.6)) следует из его справедливости для всех $u^N(x, t)$ и сохранении его после перехода к пределу ($N \to \infty$). Итак, мы доказали для задачи (4.29), (4.30) теорему существования ее об. решения $u(x, t)$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ и его представимость суммой ряда (4.35), сходящегося в норме $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ при $\forall T$. Об этом решении можно сказать дополнительно, что оно есть элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при $\forall t > 0$ и непрерывно зависит от t в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Это видно из равенства (4.38) и оценок $0 \leqslant (\lambda_0 - \lambda_k) e^{2\lambda_k t} \leqslant c(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, где $c(t) = \sup\limits_{-\infty < \lambda \leqslant \lambda_0} (\lambda_0 - \lambda) e^{2\lambda t}$ есть ограниченная на любом отрезке $[\varepsilon \leqslant t \leqslant T]$, $\varepsilon > 0$, функция t. Более того, аналогичные подсчеты и оценки показывают, что ряд (4.35) можно дифференцировать почленно по t любое число раз, и получаемые при этом ряды сходятся в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при $t > 0$ равномерно по t на любом отрезке $[\varepsilon \leqslant t \leqslant T]$, $\varepsilon > 0$.

Если помимо (3.3), (3.5) выполняются предположения теоремы 7.2 гл. II, то можно воспользоваться соотношениями (4.34) и (4.40)—(4.43). Они гарантируют сходимость ряда (4.35) и рядов, полученных его почленным дифференцированием по t любое число раз, в норме $W_{2,0}^2(\Omega)$ при $\forall t > 0$, равномерную по $t \in [\varepsilon, T]$, $\forall \varepsilon > 0$. Если при этом от $\varphi(x)$ потребовать большего, например, $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то, как показано в § 4 гл. II, числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 (\lambda_0 - \lambda_k)$ сходится. Отсюда и (4.38) следует сходимость ряда (4.35) при всех $t \geqslant 0$, равномерная для $t \in [0, T]$. Кроме того, из (4.42) и (4.43) следует сходимость ряда в нормах, соответствующих левым частям этих соотношений. Для $\varphi(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$ сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 (\lambda_0 - \lambda_k)^2$, что влечет соответствующие сходимости ряда (4.35). Каждая из этих сходимостей гарантирует принадлежность суммы ряда к соответствующему функциональному пространству.

Перечисленные нами результаты по сходимости ряда (4.35) улавливают одно специфическое свойство уравнений параболического типа, о котором мы не говорили в предыдущих параграфах. Это свойство называется свойством «мгновенного сглаживания». Оно состоит в том, что решения $u(x, t)$ параболических уравнений при $t > 0$ «лучше», чем при $t = 0$ («лучше» в смысле гладкости). «Насколько» они улучшаются, зависит от гладкости коэффициентов уравнения и свободного члена. В данном случае свободный член равен тождественно нулю (т. е.

является бесконечно дифференцируемой функцией), а коэффициенты уравнения не зависят от t (т. е. являются бесконечно дифференцируемыми функциями t). Это обусловило неограниченную дифференцируемость $u(x,t)$ по t при $t>0$ даже для $\varphi(x)=u(x,0)\in L_2(\Omega)$. Влияние гладкости коэффициентов $\mathscr{L}$ по x было уловлено выше в нормах пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $W_{2,0}^2(\Omega)$.

Для параболических уравнений верен также «принцип локальности», аналогичный «принципу локальности» для эллиптических уравнений. Но мы его определять и доказывать здесь не будем.

Для неоднородных уравнений (4.27), где $\mathscr{L}u$ имеет тот же вид (4.28), решения задачи (4.27), (4.30) могут быть представлены в виде ряда

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{\lambda_k t}u_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t f_k(\tau)\,e^{\lambda_k(t-\tau)}\,d\tau u_k(x), \tag{4.44}$$

где $a_k=(\varphi,u_k)$, а $f_k(t)=(f(x,t),u_k(x))$. Легко проверить, что он формально удовлетворяет всем условиям задачи. Его сходимость исследуется так же, как и сходимость ряда (4.35). Предоставим читателю самостоятельно сделать соответствующие выводы.

Перейдем к описанию схемы метода преобразования Лапласа. Он применим к уравнениям общего вида (3.1), если их коэффициенты не зависят от t. Будем предполагать это условие выполненным. Запишем уравнение (3.1) так:

$$\mathscr{M}u=u_t-\mathscr{L}u=\mathscr{F}(x,\ t), \tag{4.45}$$

где $\mathscr{L}u=\left(a_{ij}(x)u_{x_j}+a_i(x)u\right)_{x_i}-b_i(x)u_{x_i}-a(x)u$, а $\mathscr{F}(x,\ t)=f(x,\ t)+\dfrac{\partial f_i(x,\ t)}{\partial x_i}$. Обозначим преобразования Лапласа по t функций $u(x,\ t)$ и $\mathscr{F}(x,\ t)$ через $v(x,\ \lambda)$ и $\hat{\mathscr{F}}(x,\ \lambda)$, т. е.

$$v(x,\ \lambda)=\int_0^{\infty}u(x,\ t)\,e^{-\lambda t}\,dt,\qquad \hat{\mathscr{F}}(x,\ \lambda)=\int_0^{\infty}\mathscr{F}(x,\ t)\,e^{-\lambda t}\,dt.$$

Не обращая пока внимания на сходимость введенных и появляющихся ниже интегралов, выполним формально следующие преобразования:

$$\int_0^\infty u_t e^{-\lambda t}\,dt = \lambda \int_0^\infty u e^{-\lambda t}\,dt - u(x,\,0) = \lambda v(x,\,\lambda) - u(x,\,0);$$

$$\int_0^\infty \mathscr{L} u e^{-\lambda t}\,dt = \mathscr{L} v(x,\,\lambda).$$

Ввиду этого, если (4.45) умножить на $e^{-\lambda t}$, проинтегрировать по t от 0 до ∞ и учесть начальное условие (4.30), то результат можно записать в виде

$$\mathscr{L} v = \lambda v - (\hat{\mathscr{F}}(x,\,\lambda) + \varphi(x)). \tag{4.46}$$

К этому уравнению надо присоединить граничное условие

$$v|_S = 0, \tag{4.47}$$

получаемое из условия $u|_S = 0$. Если задача (4.46), (4.47) однозначно разрешима для λ из какой-либо полуплоскости вида $\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda_0$, и решение $v(x,\lambda)$ достаточно быстро убывает при $\operatorname{Im}\lambda \to \pm\infty$, то его обратное преобразование Лапласа

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} v(x,\,\lambda)\, e^{\lambda t}\,d\lambda, \qquad \lambda_1 \geqslant \lambda_0, \tag{4.48}$$

даст решение задачи (4.45), (4.30).

Используя результаты гл. II и проводя необходимые оценки норм в $L_2(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $W_{2,0}^2(\Omega)$ решения $v(x,\lambda)$ через λ и известные величины, нетрудно доказать, что такой путь решения задачи (4.45), (4.30) всегда возможен. Мы не будем приводить здесь все эти рассуждения, равно как и окончательные результаты (которые в основном совпадают с полученными выше). При желании читатель это может сделать самостоятельно, обратясь к [12_2], где рассмотрен более сложный случай гиперболических уравнений и даны общие указания относительно параболических уравнений.

4. О «втором основном неравенстве». Для параболических операторов $\mathscr{M}$ общего вида (3.1) справедливо неравенство, аналогичное «второму основному неравенству», доказанному в § 6 гл. II, если граница S области Ω и коэффициенты $\mathscr{M}$ обладают некоторой гладкостью. Коэффициенты $\mathscr{M}$, помимо условий (3.3)—(3.5), должны удовлетворять требованиям

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right|, \quad \left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right| \leqslant \mu_1 \tag{4.49}$$

и $\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right| \leqslant \mu_1$. В силу последнего неравенства $\mathscr{M}u$ может быть записано короче:

$$\mathscr{M}u = u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\, u_{x_j}\right) + \hat{a}_i(x, t)\, u_{x_i} + \hat{a}(x, t) \equiv u_t - \mathscr{L}u,$$

причем $|\hat{a}_i, \hat{a}| \leqslant \mu_2$. Условия на S те же, что в § 6 гл. II. Как доказано в § 6, для любой функции $u \in W^2_{2,0}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\left(\|u\|^{(2)}_{2,\Omega}\right)^2 \leqslant c\,\|\mathscr{L}u\|^2_{2,\Omega} + c_1\|u\|^2_{2,\Omega}, \tag{4.50}$$

постоянные в котором определяются ν и μ из (3.5), μ_1, μ_2 и S. Возьмем интеграл $\int\limits_{Q_t} (\mathscr{M}u)^2\, dx\, dt$ для произвольной «достаточно гладкой» функции $u(x, t)$, равной нулю на S_t, и преобразуем его следующим образом:

$$\int\limits_{Q_t} (\mathscr{M}u)^2\, dx\, dt = \int\limits_{Q_t} \left[u_t^2 - 2u_t\mathscr{L}u + (\mathscr{L}u)^2\right] dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{Q_t} \left[u_t^2 + 2a_{ij}u_{tx_i}u_{x_j} + 2u_t\left(\hat{a}_iu_{x_i} + \hat{a}u\right) + (\mathscr{L}u)^2\right] dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{\Omega} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\, dx\,\Big|_{t=0}^{t=t} + \int\limits_{Q_t}\Big[u_t^2 + (\mathscr{L}u)^2 - \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}u_{x_i}u_{x_j} + 2u_t\left(\hat{a}_iu_{x_i} + \hat{a}u\right)\Big]\, dx\, dt. \tag{4.51}$$

Отсюда в силу наших предположений о коэффициентах $\mathscr{L}$ и неравенства Коши (1.3) гл. I выведем такое неравенство:

$$\int_{\Omega} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dx\Big|_{t=t}+\int_{Q_t}\left[u_t^2+(\mathscr{L}u)^2\right]dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\int_{\Omega} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dx\Big|_{t=0}+c_2\int_{Q_t}\left[u_x^2+\varepsilon u_t^2+\frac{1}{\varepsilon}\left(u_x^2+u^2\right)\right]dx\,dt+$$
$$+\int_{Q_t}(\mathscr{M}u)^2\,dx\,dt \tag{4.52}$$

с $\forall\varepsilon>0$. Заменим $\int_{Q_t}(\mathscr{L}u)^2\,dx\,dt$ и $\int_{\Omega} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dx\Big|_{t=t}$ меньшими величинами в соответствии с (4.50) и (3.5). После этого соберем подобные члены, считая $\varepsilon=\frac{1}{2c_2}$:

$$\nu\int_{\Omega} u_x^2(x,\,t)\,dx+\int_{Q_t}\left(\frac{1}{2}u_t^2+c^{-1}u_{xx}^2\right)dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\mu\int_{\Omega} u_x^2(x,\,0)\,dx+c_3\int_{Q_t}\left(u_x^2+u^2\right)dx\,dt+\int_{Q_t}(\mathscr{M}u)^2\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\mu\int_{\Omega} u_x^2(x,\,0)\,dx+c_4\int_{Q_t}u_x^2\,dx\,dt+\int_{Q_t}(\mathscr{M}u)^2\,dx\,dt. \tag{4.53}$$

При этом мы учли неравенство (6.3) гл. I. Если отбросить второй член из левой части (4.53), то из полученного неравенства выводится оценка

$$\int_{\Omega} u_x^2(x,\,t)\,dx\leqslant c_5(t)\left[\mu\int_{\Omega} u_x^2(x,\,0)\,dx+\int_{Q_t}(\mathscr{M}u)^2\,dx\,dt\right], \tag{4.54}$$

в которой $c_5(t)=\nu^{-1}\exp(c_4\nu^{-1}t)$ (см. в связи с этим лемму 1.1). Подставив ее в (4.53), придем к неравенству

$$\nu\int_{\Omega} u_x^2(x,\,t)\,dx+\int_{Q_t}\left(\frac{1}{2}u_t^2+c^{-1}u_{xx}^2\right)dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant c_6(t)\left[\mu\int_{\Omega} u_x^2(x,\,0)\,dx+\int_{Q_t}(\mathscr{M}u)^2\,dx\,dt\right], \tag{4.55}$$

где $c_6(t) = 1 + c_4 \int\limits_0^t c_5(\tau)\, d\tau$. Из него в силу (4.54) и неравенства (6.3) гл. I следует желаемое неравенство:

$$\nu \int\limits_\Omega u_x^2(x,\ t)\, dx + \int\limits_{Q_t} \left[\frac{1}{2} u_t^2 + c^{-1}\left(u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2\right)\right] dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant c_7(t) \left[\mu \int\limits_\Omega u_x^2(x,\ 0)\, dx + \int\limits_{Q_t} (\mathscr{M} u)^2\, dx\, dt\right], \qquad (4.56)$$

в котором $c_7(t)$ имеет тот же рост по t, что и $c_6(t)$. Его мы и называем «вторым основным неравенством» («первым» считается энергетическое — (3.14)). Из проведенного доказательства видно, что мы использовали следующую «гладкость» $u(x, t)$: u, u_{x_i}, $u_{x_i x_j}$, u_t и $u_{t x_i}$ суть элементы $L_2(Q_T)$. От предположения о существовании производных $u_{t x_i}$ можно было бы избавиться, но это требует некоторых рассуждений. Существенно было использовано то, что $u(x, t)$ удовлетворяет граничному условию: $u|_{S_t} = 0$. Его можно было бы заменить любым условием вида: $\left.\frac{\partial u}{\partial l} + \sigma u\right|_{S_t} = 0$, где $\frac{\partial u}{\partial l}$ есть производная по направлению, некасательному к S и гладко меняющемуся при перемещении по S (от S при этом надо потребовать принадлежность к классу C^2).

§ 5. Метод Роте

Для доказательства теорем существования и фактического определения решений начально-краевых задач можно использовать метод Роте, сводящий, по существу, эти проблемы к краевым задачам для уравнений эллиптического типа. Этот метод был предложен в 1930 г. немецким математиком Е. Роте [24] и был обоснован им применительно к одномерному параболическому уравнению. Это обоснование дано им, естественно, в рамках классической разрешимости при условии достаточной (но не слишком завышенной) гладкости всех данных задачи.

Дальнейшие результаты по разрешимости краевых задач для многомерных эллиптических уравнений позволили без особых затруднений перенести результаты Роте и на случай параболических уравнений общего вида при любом $n \geqslant 1$ (см. об этом § 16 гл. III [12₁₄]). Это сделано в различных классах обобщенных и гладких решений.

Мы приведем здесь обоснование метода Роте в том классе об. решений, в котором все рассуждения особенно просты, а именно, в классе об. решений из $W_2^{1,0}(Q_T)$. Рассмотрим задачу (3.1), (3.2) и будем считать в ней лишь ради экономии места, что $a_i = f_i = 0$. Итак, будем искать решение $u(x, t)$ задачи

$$\mathscr{M}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \mathscr{L}u = f, \tag{5.1}$$

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u\,|_{S_T} = 0, \tag{5.2}$$

где $\mathscr{L}u \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) - b_i\dfrac{\partial u}{\partial x_i} - au$, считая выполненными условия (3.3) — (3.5). Рассечем цилиндр $Q_T = \Omega \times (0, T)$ плоскостями $t = k\tau$, $k = 0, 1, \ldots, N$, $\tau = T/N$, и обозначим через Ω_k сечение Q_T плоскостью $t = k\tau$.

Введем для $k = 1, \ldots, N$ функции

$$\left.\begin{aligned}
a_{ij}^{\tau}(k) &\equiv a_{ij}^{\tau}(x, k) = \frac{1}{\tau}\int_{(k-1)\tau}^{k\tau} a_{ij}(x, t)\,dt,\\
b_i^{\tau}(k) &\equiv b_i^{\tau}(x, k) = \frac{1}{\tau}\int_{(k-1)\tau}^{k\tau} b_i(x, t)\,dt,\\
a^{\tau}(k) &\equiv a^{\tau}(x, k) = \frac{1}{\tau}\int_{(k-1)\tau}^{k\tau} a(x, t)\,dt,\\
f^{\tau}(k) &\equiv f^{\tau}(x, k) = \frac{1}{\tau}\int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x, t)\,dt.
\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Они определены для всех $k \leqslant N$ для почти всех x из Ω, причем $f^{\tau}(x, k) \in L_2(\Omega)$, а остальные функции ограничены на Ω. Уравнение (5.1) заменим дифференциально разностным

$$\mathscr{M}^\tau u \equiv u_{\bar t}(k) - \mathscr{L}^\tau u(k) = f^\tau(k), \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{5.4}$$

где

$$u(k) \equiv u(x, k),$$

$$\mathscr{L}^\tau u(k) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^\tau(k)\frac{\partial u(k)}{\partial x_j}\right) - b_i^\tau(k)\frac{\partial u(k)}{\partial x_i} - a^\tau(k)u(k),$$

а

$$u_{\bar t}(k) \equiv u_{\bar t}(x, k) = \frac{1}{\tau}[u(k) - u(k-1)]. \tag{5.5}$$

Функции $u(k)$ будем определять как решения уравнений (5.4), удовлетворяющие условиям

$$u(0) = \varphi(x), \qquad u(k)|_S = 0, \qquad k = 1, \ldots, N. \tag{5.6}$$

При всех достаточно малых τ ($\tau \leqslant \tau_0$) $u(k)$ определяются однозначно как элементы $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (см. § 3 гл. II)*). Они при $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega u_{\bar t}(k)\eta(x)\,dx + \mathscr{L}^\tau(u(k), \eta(x)) = (f^\tau(k), \eta(x)), \tag{5.7}$$

в котором

$$\mathscr{L}^\tau(u(k), \eta(x)) \equiv \int\limits_\Omega \left[a_{ij}^\tau(k)\frac{\partial u(k)}{\partial x_j}\frac{\partial \eta(x)}{\partial x_i} + \right.$$
$$\left. + b_i^\tau(k)\frac{\partial u(k)}{\partial x_i}\eta(x) + a^\tau(k)u(k)\eta(x)\right]dx. \tag{5.8}$$

Получим для $u(k)$ априорную оценку, не зависящую от шага τ. Для этого возьмем в (5.7) $\eta(x) = 2\tau u(k)$ и воспользуемся соотношением

$$2\tau u_{\bar t}(k)u(k) = u^2(k) - u^2(k-1) + \tau^2 u_{\bar t}^2(k) \tag{5.9}$$

и неравенствами (3.3) и (3 5), которые остаются справедливыми и для усреднений (5.3) коэффициентов $\mathscr{L}$. Это

*) Как видно из (5.10), это будет при $\tau < 1/c$.

гарантирует справедливость следующих неравенств:

$$\|u\|^2_{2,\Omega_k}-\|u\|^2_{2,\Omega_{k-1}}+\tau^2\|u_{\bar t}\|^2_{2,\Omega_k}+2\nu\tau\|u_x\|^2_{2,\Omega_k}\leqslant$$

$$\leqslant -2\tau\int\limits_{\Omega_k}\left(b_i^\tau u_{x_i}u+a^\tau u^2\right)dx+2\tau\int\limits_{\Omega_k}f^\tau u\,dx\leqslant$$

$$\leqslant 2\mu\tau\left(\|u_x\|_{2,\Omega_k}\|u\|_{2,\Omega_k}+\|u\|^2_{2,\Omega_k}\right)+2\tau\|f^\tau\|_{2,\Omega_k}\|u\|_{2,\Omega_k}\leqslant$$

$$\leqslant \nu\tau\|u_x\|^2_{2,\Omega_k}+\left(\frac{\mu^2}{\nu}+2\mu\right)\tau\|u\|^2_{2,\Omega_k}+2\tau\|f^\tau\|_{2,\Omega_k}\|u\|_{2,\Omega_k},$$

откуда для $k=1,\ldots,N$

$$\|u\|^2_{2,\Omega_k}-\|u\|^2_{2,\Omega_{k-1}}+\tau^2\|u_{\bar t}\|^2_{2,\Omega_k}+\nu\tau\|u_x\|^2_{2,\Omega_k}\leqslant$$

$$\leqslant c\tau\|u\|^2_{2,\Omega_k}+2\tau\|f^\tau\|_{2,\Omega_k}\|u\|_{2,\Omega_k}, \tag{5.10}$$

где $c=\frac{\mu^2}{\nu}+2\mu$. Отбросим из левой части (5.10) третий и четвертый члены и поделим обе части полученного неравенства на $\|u\|_{2,\Omega_k}+\|u\|_{2,\Omega_{k-1}}$, если эта сумма >0. В результате, заменив в правой части выражение $\|u\|_{2,\Omega_k}\left(\|u\|_{2,\Omega_k}+\|u\|_{2,\Omega_{k-1}}\right)^{-1}$ единицей, придем к неравенству

$$\|u\|_{2,\Omega_k}\leqslant(1-c\tau)^{-1}\|u\|_{2,\Omega_{k-1}}+2\tau(1-c\tau)^{-1}\|f^\tau\|_{2,\Omega_k} \tag{5.11}$$

для $\tau\leqslant(2c)^{-1}$. Оно верно, очевидно, и для тех k, для которых $\|u\|_{2,\Omega_k}+\|u\|_{2,\Omega_{k-1}}=0$. Из (5.11), как нетрудно проверить, следует

$$\|u\|_{2,\Omega_k}\leqslant(1-c\tau)^{-k}\|u\|_{2,\Omega_0}+2\tau\sum_{s=1}^{k}(1-c\tau)^{-k+s-1}\|f^\tau\|_{2,\Omega_s}\leqslant$$

$$\leqslant(1-c\tau)^{-k}\left[\|u\|_{2,\Omega_0}+2\tau\sum_{s=1}^{k}\|f^\tau\|_{2,\Omega_s}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{\frac{c\tau}{1-c\tau}k\right\}[\ldots]\leqslant e^{2cT}\left[\|\varphi\|_{2,\Omega_0}+2\|f^\tau\|_{2,1,\Omega_k}\right], \tag{5.12}$$

где

$$\|f^\tau\|_{2,\,1,\,Q_k} = \tau \sum_{s=1}^{k} \|f^\tau\|_{2,\,\Omega_s} \tag{5.13}$$

(при этом мы воспользуемся тем, что $c\tau \leqslant 1/2$).

Просуммируем теперь неравенства (5.10) от $k = 1$ до $k = m \leqslant N$ и воспользуемся оценкой (5.12). Это даст

$$\|u\|^2_{2,\,\Omega_m} + \nu\tau \sum_{k=1}^{m} \|u_x\|^2_{2,\,\Omega_k} + \tau^2 \sum_{k=1}^{m} \|u_{\bar t}\|^2_{2,\,\Omega_k} \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \left[\|\varphi\|^2_{2,\,\Omega} + \|f^\tau\|^2_{2,\,1,\,Q_m}\right], \tag{5.14}$$

$m = 1, \ldots, N$, где c_1 зависит только от ν, μ и T. Неравенства (5.12), (5.14) дают нам оценку для $u(k)$, с помощью которой можно оправдать сходимость метода Роте при $\tau \to 0$. Величины $\|f^\tau\|_{2,\,1,\,Q_m}$ не превосходят $\|f\|_{2,\,1,\,Q_m}$. Введем кусочно-постоянные интерполяции по t для $u(k)$ и всех остальных функций, вошедших в наши рассмотрения. Именно, будем обозначать через $\tilde u^\tau(x, t)$ функцию, равную функции $u(x, k\tau)$ при $t \in ((k-1)\tau, k\tau]$. Очевидно, что $\tilde u^\tau(x, t)$ будут элементами $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ и для них, в силу (5.14), справедлива оценка

$$\|\tilde u^\tau\|_{2,\,Q_T} + \|\tilde u^\tau_x\|_{2,\,Q_T} \leqslant c_2 \tag{5.15}$$

с постоянной c_2, не зависящей от τ. Устремим теперь N к бесконечности. Благодаря (5.15) из множества $\{\tilde u^\tau\}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся в $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ к некоторому элементу $u(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Убедимся, что $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (3.15), т. е. является обобщенным решением из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (5.1), (5.2). Тождество (3.15) достаточно установить лишь для гладких $\eta(x, t)$, равных нулю на S_T и при $t = T$. Пусть $\eta(x, t) \in C^1(Q_{T+\tau})$ и равна нулю на S_T и при $t \in [T, T+\tau]$. Построим по ней функции $\eta(k) = \eta(x, k)$, $\tilde\eta^\tau(x, t)$ и $\widetilde{(\eta_t)}^\tau$, где $\eta_t(k) = \tau^{-1}[\eta(k+1) - \eta(k)]$. Легко проверить, что $\tilde\eta^\tau$, $\frac{\partial \tilde\eta^\tau}{\partial x_i}$

и $\tilde{\eta}_t^\tau \equiv \widetilde{(\eta_t)}^\tau$ равномерно сходятся в $\bar{Q}_T$ к η, $\frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ соответственно, причем $\tilde{\eta}^\tau(x, t)$ равна нулю для $t \in [T, T+\tau]$. Возьмем в (5.7) $\eta = \tau\eta(x, k)$ и просуммируем (5.7) по k от 1 до N. Результат можно преобразовать к виду

$$-\tau \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega u(k)\,\eta_t(k)\,dx - \int_\Omega \varphi\eta(1)\,dx + \\ + \tau \sum_{k=1}^{N} \mathscr{L}^\tau(u(k),\ \eta(k)) = \tau \sum_{k=1}^{N} \left(f^\tau(k),\ \eta(k)\right), \quad (5.16)$$

если воспользоваться формулой «суммирования по частям»

$$\tau \sum_{k=1}^{N} u_{\bar{t}}(k)\,\eta(k) = -\tau \sum_{k=1}^{N} u(k)\,\eta_t(k) - u(0)\,\eta(1)\ ^{*)} \quad (5.17)$$

и учесть, что $\eta(N) = \eta(N+1) = 0$. Равенство (5.16) запишем в интегральном виде:

$$-\int_{Q_T} \tilde{u}^\tau \tilde{\eta}_t^\tau\,dx\,dt + \\ + \int_0^T \int_\Omega \left(a_{ij} \frac{\partial \tilde{u}^\tau}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\eta}^\tau}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial \tilde{u}^\tau}{\partial x_i} \tilde{\eta}^\tau + a\tilde{u}^\tau \tilde{\eta}^\tau\right) dx\,dt - \\ - \int_\Omega \varphi\eta(1)\,dx = \int_0^T \int_\Omega f \tilde{\eta}^\tau dx\,dt. \quad (5.18)$$

В (5.18) можно перейти к пределу по выбранной выше подпоследовательности. В результате, как нетрудно проверить, получим тождество (3.15). Тем самым доказано, что предельная функция $u(x, t)$ действительно есть об. решение задачи (5.1), (5.2) из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$. В силу теоремы единственности (теорема 3.2)

*) Соотношение (5.17) легко проверяется непосредственно.

и оценки (5.15) вся последовательность $\{\tilde{u}^\tau\}$ сходится слабо в $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ к $u(x, t)$. Итак, доказана

Теорема 5.1. *При выполнении условий* (3.3)—(3.5) *решение задачи* (5.1), (5.2) *есть предел функций* $\{\tilde{u}^\tau\}$, *вычисляемых из соотношений* (5.4), (5.6).

Обосновав метод Роте, мы по пути доказали и теорему существования решения $u(x, t)$ задачи (5.1), (5.2) в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Зная несколько бо́льшую информацию о $u(x, t)$, нетрудно доказать и сильную сходимость $\tilde{u}^\tau$ к u в $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ и даже в $V_2(Q_T)$.

Методом Роте можно решать и другие начально-краевые задачи (задачи (4.1), (4.2)). В них к эллиптическим уравнениям (5.4) добавляется второе или третье краевое условие. Однозначная разрешимость таких задач в $W_2^1(\Omega)$ установлена в § 5 гл. II. На основе этих результатов разрешимость задач (4.1), (4.2) в $W_2^{1,0}(Q_T)$ доказывается так же, как мы только что сделали для задачи (5.1), (5.2).

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Общие сведения о гиперболических уравнениях. Постановка основных задач

Напомним необходимые нам сведения из общей теории гиперболических уравнений. Уравнение

$$\sum_{i,\, j=1}^{n+1} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n+1} a_i(x)\, u_{x_i} + au = f(x) \qquad (1.1)$$

называется гиперболическим в точке x^0, если все собственные значения квадратичной формы $\sum\limits_{i,\, j}^{n+1} a_{ij}(x^0)\, \xi_i \xi_j$ не равны нулю и одно из них имеет знак, отличный от знака остальных (как всюду, $a_{ij} = a_{ji}$). В точке x^0 такое уравнение может быть преобразовано к виду

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(x^0)\, u_{y_i y_i} + \sum_{i=1}^{n+1} b_i(x^0)\, u_{y_i} + b(x^0)\, u = f(x^0), \qquad (1.2)$$

где $\lambda_{n+1}(x^0) > 0$, а $\lambda_i(x^0) < 0$, $i = 1, \ldots, n$, с помощью замены переменных $y = y(x)$ (в качестве y можно взять ортогональную систему координат с началом в точке x^0, тогда $\lambda_i(x^0)$ будут собственными значениями формы $\sum\limits_{i,\, j=1}^{n+1} a_{ij}(x^0)\xi_i\xi_j$). Если уравнение (1.1) гиперболично во всех точках некоторой области $\mathscr{D} \subset R_{n+1}$, то говорят, что оно гиперболично в области $\mathscr{D}$. Приведение таких уравнений к виду (1.2) в области в общем случае невозможно, если $n + 1 > 2$, причем невозможно даже локально (т. е. в малой окрестности точки $x^0 \in \mathscr{D}$).

Вместо (1.2) уравнение (1.1) допускает преобразование к виду

$$u_{y_{n+1}y_{n+1}}-\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(y)\,u_{y_iy_j}+\sum_{i=1}^{n+1} b_i(y)\,u_{y_i}+b(y)\,u=\tilde{f}(y), \tag{1.3}$$

в котором форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(y)\,\xi_i\xi_j$ положительно определена. Такое преобразование достигается специальным выбором переменных $y=y(x)$ причем, вообще говоря, в малой окрестности точки $x\in\mathscr{D}$. Более простой заменой переменных $y=y(x)$ уравнение (1.1) может быть преобразовано к виду

$$u_{y_{n+1}y_{n+1}}+\sum_{i=1}^{n} b_{i,n+1}u_{y_iy_{n+1}}-\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(y)\,u_{y_iy_j}+\sum_{i=1}^{n+1} b_i(y)\,u_{y_i}+b(y)\,u=\tilde{f}(y), \tag{1.3$'$}$$

в котором форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\xi_j$ положительно определена. Но и это преобразование не всегда выполнимо в произвольной области $\mathscr{D}$. Мы будем изучать уравнения, приведенные к виду (1.3). Типичным представителем таких уравнений является волновое уравнение

$$u_{tt}-c^2\,\Delta u=f. \tag{1.4}$$

Методы, которые будут изложены в данной главе, применимы и к уравнениям (1.3′): члены $\sum\limits_{i=1}^{n} b_{i,n+1}u_{y_iy_{n+1}}$, входящие в (1.3′), не оказывают существенного влияния ни на ход рассуждений, ни на окончательные результаты. Класс уравнений (1.3) достаточно широк. Он охватывает все уравнения второго порядка гиперболического типа, встречающиеся в задачах механики и физики. Переменную y_{n+1} называют временем и обозначают через t, переменные же $y_1, \ldots, y_n$ называют пространственными и чаще всего обозначают через $x_1, \ldots, x_n$. Итак, нашим объектом изучения будут уравнения вида

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{n+1} a_i(x, t) u_{x_i} + a(x, t) u = f(x, t), \qquad (1.5)$$

в которых форма $a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j$ положительно определена, а $u_{x_{n+1}} \equiv u_t$. В пространстве R_{n+1} переменных (x, t) по отношению к уравнению (1.5) выделяют три типа гладких поверхностей: *пространственно ориентированные*, *временным образом ориентированные* и *характеристические*. Пусть поверхность задана уравнением $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$. Она называется пространственно ориентированной, если на ней выполняется условие

$$\omega(\mathcal{F}_x) \equiv \mathcal{F}^2_{x_{n+1}} - a_{ij}(x, t)\mathcal{F}_{x_i}\mathcal{F}_{x_j} > 0. \qquad (1.6)$$

Поверхность называется характеристической, если она удовлетворяет уравнению

$$\omega(\mathcal{F}_x) = 0. \qquad (1.7)$$

На поверхностях временно́й ориентации должно быть выполнено условие

$$\omega(\mathcal{F}_x) < 0.$$

Плоскости $\mathcal{F} \equiv t - c = 0$, очевидно, ориентированы пространственным образом, а цилиндрические поверхности, образованные «вертикальными» прямыми (считаем, что ось $t = x_{n+1}$ направлена «вверх»), т. е. прямыми $(x, t) = \{x_i = x_i^0,\ i = 1, \ldots, n,\ t \in (-\infty, \infty)\}$, ориентированы временны́м образом. Обе полости конусов

$$(t - t^0)^2 = c^{-2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2$$

являются характеристическими поверхностями для уравнения (1.4).

Сформулируем теперь для уравнения (1.5) задачу Коши. Наиболее часто встречающийся в математической физике вариант этой задачи состоит в определении решения $u(x, t)$ уравнения (1.5) при $t \in [t_0, T]$ и $x \in R_n$, удовлетворяющего условиям Коши:

$$u|_{t=t_0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=t_0} = \psi(x). \tag{1.8}$$

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, задающие начальные условия, не зависят друг от друга и от уравнения (1.5). Заменяя переменную t на $\tau = t - t_0$, мы всегда можем добиться того, чтобы начальным моментом времени был $\tau = 0$. Кроме того, заменяя t на $\tau = -t$, мы не нарушим перечисленных выше свойств, так что задачи о разыскании решений для $T > t_0$ и для $t \in [T, t_0]$, $T < t_0$, однотипны. Нетрудно проверить, что с помощью условий (1.8) и уравнения (1.5) можно вычислить все производные от искомого решения при $t = t_0$, если только они существуют и если коэффициенты уравнения (1.5), f, φ и ψ бесконечно дифференцируемы. Это обстоятельство является проверкой непротиворечивости условий (1.8) уравнению (1.5), а также указанием на то, что этих условий, по-видимому, и достаточно.

Задача Коши в ее общей постановке ставится так: начальные условия (1.8) задаются не на плоскости $t = t_0$, а на какой-либо пространственно ориентированной поверхности $\mathcal{F}$, разделяющей все пространство R_{n+1} на две части. В одной из этих частей надо найти решение уравнения (1.5), удовлетворяющее на $\mathcal{F}$ условиям

$$u|_{\mathcal{F}} = \varphi, \qquad u_t|_{\mathcal{F}} = \psi. \tag{1.9}$$

Мы ограничимся исследованием задачи (1.5), (1.8). Общий случай сводится заменой переменных к задаче (1.8) для уравнений вида (1.3′) и исследуется аналогично задаче (1.5), (1.8).

Более трудными, но и более часто встречающимися в приложениях задачами, являются начально-краевые задачи. В них решение $u(x, t)$ уравнения (1.5) ищется в какой-либо области $\Omega \subset R_n$ изменения x при $t \in [t_0, T]$. Это решение при $x \in \Omega$ и $t = t_0$ должно удовлетворять начальным условиям (1.8), а при $t \in [t_0, T]$ одному из краевых условий:

$$u|_{S_T}=\chi(s,\ t), \tag{1.10}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial N}+\sigma(s,\ t)\,u\Big|_{S_T}=\chi(s,\ t), \tag{1.11}$$

где $S_T = S\times[t_0, T]$, $S=\partial\Omega$, $\sigma(s,t)$ и $\chi(s,t)$ — заданные функции, а $\frac{\partial u}{\partial N}=a_{ij}u_{x_j}\cos(\boldsymbol{n},\ x_i)$, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к S *). В общей постановке эти задачи формулируются так: в пространстве R_{n+1} задана область $\tilde{Q}_T$, гомеоморфная цилиндру $Q_T=\{(x,t): x\in\Omega,\ t\in(t_0,T)\}$. Ее нижнее и верхнее основания, соответствующие нижнему и верхнему основанию Q_T, лежат на пространственно ориентированных поверхностях, а боковая поверхность, соответствующая S_T, ориентирована временны́м образом. В $\tilde{Q}_T$ ищется решение уравнения (1.5), удовлетворяющее на нижнем основании начальным условиям (1.9), а на боковой поверхности — условию (1.10) или (1.11). Если $\tilde{Q}_T$ может быть преобразована в Q_T с помощью достаточно гладкой замены переменных, то эта задача сводится к соответствующей задаче в цилиндре Q_T для уравнения (1.3′), которая рассматривается так же, как и для уравнения (1.5).

Мы уделим основное внимание задаче (1.5), (1.8), (1.10) в Q_T, причем граничное условие (1.10) будем считать сведенным к однородному. Задача (1.5), (1.8), (1.11) рассматривается аналогично. Решив задачу (1.5), (1.8), (1.10) для ограниченной области Ω, мы тем самым докажем разрешимость задачи Коши и задачи (1.5), (1.8), (1.10) для неограниченных областей Ω. Это связано с весьма важным (характеристическим) свойством уравнений (1.5): конечностью скорости распространения возмущений, позволяющей решать указанные задачи «по частям», разбивая исследуемую область на ограниченные подобласти специального вида. С доказательства этих фактов мы и начнем следующий параграф.

---

*) В этой главе, как и в остальных, $\boldsymbol{n}$ направлена вне Ω.

§ 2. Энергетическое неравенство. Конечность скорости распространения возмущений. Теорема единственности для решений из $\overset{\circ}{W}{}_2^2$

Пусть в полосе $\overset{+}{\Pi}_T = \{(x, t): x \in R_n,\ t \in [0, T]\}$ задано уравнение

$$\mathscr{L}u \equiv u_{tt} - \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x, t)\, u_{x_j}) + \\ + \sum_{i=1}^{n+1} a_i(x, t)\, u_{x_i} + a(x, t)\, u = f(x, t) \qquad (2.1)$$

(здесь, как и выше, для удобства записи u_t в сумме $\sum_{i=1}^{n+1} a_i u_{x_i}$ обозначено через $u_{x_{n+1}}$) и для него выполнены условия:

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, t)\, \xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu > 0, \qquad (2.2)$$

и

$$\left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t},\ a_i,\ a \right| \leqslant \mu_1 \qquad (2.3)$$

в полосе $(x, t) \in \overset{+}{\Pi}_T$, а $f \in L_{2,1}(Q_T)$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где Ω есть произвольная ограниченная область R_n *).

Предположим, что $u \in W_2^2(Q_T)$ для $\forall \Omega$. Возьмем в $\overset{+}{\Pi}_T$ ограниченную область $\mathscr{D}_\tau$, $\tau \leqslant T$, гомеоморфную цилиндру $K_1 \times (0, \tau) = \{(x, t): |x| \leqslant 1,\ t \in (0, \tau)\}$ и обладающую следующими свойствами: ее нижнее основание (т. е. то, которое соответствует нижнему основанию $K_1 \times (0, \tau)$) лежит в плоскости $t = 0$, верхнее — в плоскости $t = \tau$, а боковая поверхность во всех точках ориентирована

*) Вместо $\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right| \leqslant \mu_1$ достаточно потребовать локальную ограниченность $\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right|$ и $\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \xi_i\xi_j \leqslant \mu_2\xi^2$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ здесь и в (2.2) суть произвольные вещественные числа.

пространственно-характеристическим образом и нормаль к ней $n=(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$, направленная вне $\mathscr{D}_\tau$, образует с осью t острый угол. Такую область $\mathscr{D}_\tau$ естественно назвать «конусом», сужающимся вверх (т. е. в направлении оси t). Условия на боковую поверхность S_τ «конуса» $\mathscr{D}_\tau$ имеют вид:

$$\omega(n)=\alpha_{n+1}^2-a_{ij}\alpha_i\alpha_j \geqslant 0 \tag{2.4}$$

и

$$\alpha_{n+1}=\cos(n, t)>0, \tag{2.5}$$

причем считаем S_τ гладкой поверхностью. В остальном область $\mathscr{D}_\tau$ произвольна.

Обозначим через $\mathscr{D}_t$ и S_t пересечения $\mathscr{D}_\tau$ и S_τ соответственно с полосой $\overset{+}{\Pi}_t$, $t\leqslant\tau$, а через Ω_{t_1} — сечение $\mathscr{D}_\tau$ плоскостью $t=t_1$. Умножим уравнение (2.1) на $2u_t$ и результат проинтегрируем по $\mathscr{D}_t$, $t\leqslant\tau$:

$$2\int\limits_{\mathscr{D}_t}\mathscr{L}u\cdot u_t\,dx\,dt=2\int\limits_{\mathscr{D}_t}f\cdot u_t\,dx\,dt. \tag{2.6}$$

Левую часть (2.6) преобразуем с помощью интегрирования по частям следующим образом:

$$\begin{aligned}
2\int\limits_{\mathscr{D}_t}\mathscr{L}u\cdot u_t\,dx\,dt&= \\
=\int\limits_{\mathscr{D}_t}&\left(\frac{\partial u_t^2}{\partial t}+2a_{ij}u_{x_j}u_{tx_i}+2a_iu_{x_i}u_t+2auu_t\right)dx\,dt- \\
&-\int\limits_{S_t}2a_{ij}u_{x_j}u_t\alpha_i\,ds=\int\limits_{\Omega_t}\left(u_t^2+a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\right)dx\Big|_{t=0}^{t=t}+ \\
&+\int\limits_{\mathscr{D}_t}\left(-\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}u_{x_i}u_{x_j}+2a_iu_{x_i}u_t+2auu_t\right)dx\,dt+ \\
&+\int\limits_{S_t}\left[\left(u_t^2+a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\right)\alpha_{n+1}-2a_{ij}u_{x_j}u_t\alpha_i\right]ds
\end{aligned} \tag{2.7}$$

и запишем соотношение (2.6) в виде

$$y(t)+\int\limits_{S_t} j\,ds=y(0)+$$
$$+\int\limits_{\mathscr{D}_t}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}u_{x_i}u_{x_j}-2a_iu_{x_i}u_t-2auu_t+2fu_t\right)dx\,dt, \tag{2.8}$$

где

$$y(t)=\int\limits_{\Omega_t}\left(u_t^2+a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\right)dx, \tag{2.9}$$

а через j обозначено выражение, стоящее в (2.7) под знаком интеграла $\int\limits_{S_t}\ldots ds$. В силу выбора области $\mathscr{D}_\tau$ величина $j|_{S_\tau}\geqslant 0$, ибо j можно представить в виде

$$j=\alpha_{n+1}^{-1}\left[a_{ij}\left(u_{x_i}\alpha_{n+1}-u_t\alpha_i\right)\left(u_{x_j}\alpha_{n+1}-u_t\alpha_j\right)+\right.$$
$$\left.+u_t^2\left(\alpha_{n+1}^2-a_{ij}\alpha_i\alpha_j\right)\right]$$

и воспользоваться предположениями (2.2), (2.4), (2.5). Отбросим из левой части (2.8) интеграл $\int\limits_{S_t} j\,ds$, а интеграл $\int\limits_{\mathscr{D}_t}\ldots dx\,dt$, стоящий в правой части (2.8), мажорируем более простым, используя условия (2.2) и (2.3). Это приведет нас к неравенству

$$y(t)\leqslant y(0)+c\int\limits_0^t y(t)\,dt+c_1\int\limits_{\mathscr{D}_t}u^2\,dx\,dt+$$
$$+2\int\limits_0^t\|f\|_{2,\Omega_t}y^{1/2}(t)\,dt, \tag{2.10}$$

постоянные в котором определяются постоянными ν и μ_1 из условий (2.2), (2.3). Оценим интеграл от $u^2(x,t)$ через интегралы от $u^2(x,0)$ и $y(t)$, исходя из равенства

$$u(x,t)=u(x,0)+\int\limits_0^t u_\xi(x,\xi)\,d\xi. \tag{2.11}$$

Возведем обе части (2.11) в квадрат и проинтегрируем по Ω_t, а затем в правой части проведем нижеследующие оценки:

$$\int\limits_{\Omega_t} u^2(x, t)\,dx \leqslant 2\int\limits_{\Omega_t} u^2(x, 0)\,dx + 2\int\limits_{\Omega_t}\left(\int\limits_0^t u_t(x, t)\,dt\right)^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_{\Omega_0} u^2(x, 0)\,dx + 2t\int\limits_{\mathscr{D}_t} u_t^2\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_{\Omega_0} u^2(x, 0)\,dx + 2t\int\limits_0^t y(t)\,dt. \qquad (2.12)$$

Сложим это неравенство с (2.10) и, несколько завышая правую часть полученного неравенства, результат напишем в виде

$$z(t) \equiv \int\limits_{\Omega_t}\left(u^2 + u_t^2 + a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\right)dx \leqslant$$
$$\leqslant 2z(0) + (c + c_1 + 2t)\int\limits_0^t z(t)\,dt + 2\int\limits_0^t \|f\|_{2,\,\Omega_t} z^{1/2}(t)\,dt. \quad (2.13)$$

Обозначим $\max\limits_{0\leqslant\xi\leqslant t} z(\xi) = \hat{z}(t)$. Ясно, что из (2.13) следует неравенство

$$\hat{z}(t) \leqslant 2z(0) + (c + c_1 + 2t)\,t\hat{z}(t) + 2\|f\|_{2,\,1,\,\mathscr{D}_t}\hat{z}^{1/2}(t),$$

из которого при $t \leqslant \min(t_1, \tau)$, где $t_1 > 0$ определено равенством $(c + c_1 + 2t_1)t_1 = 1/2$, получим

$$\hat{z}^{1/2}(t) \leqslant 4z^{1/2}(0) + 4\|f\|_{2,\,1,\,\mathscr{D}_t}. \qquad (2.14)$$

Если $t_1 < \tau$, то, беря в качестве начального момента $t = t_1$, мы в силу проведенных рассуждений можем утверждать справедливость неравенства

$$\hat{z}^{1/2}(t) \leqslant 4z^{1/2}(t_1) + 4\|f\|_{2,\,1,\,\mathscr{D}_{t_1,\,t}} \qquad (2.14')$$

для $t \leqslant \min\{2t_1; \tau\}$. В (2.14′) $\mathscr{D}_{t_1,\,t}$ есть часть $\mathscr{D}_t$, расположенная между плоскостями $t = t_1$ и $t = t > t_1$.

Неравенство (2.14′) справедливо для любых t_1 и $t \geqslant t_1$ из $[0, \tau]$, лишь бы $t - t_1$ удовлетворяло условию

$(c+c_1+2(t-t_1))(t-t_1) \leqslant 1/2$. Благодаря этому для $\forall t \in [0, \tau]$

$$z^{1/2}(t) \equiv \max_{0 \leqslant \xi \leqslant t} \left(\int_{\Omega_\xi} \left(u^2 + u_t^2 + a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right) dx \right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant c_2(t) z^{1/2}(0) + c_3(t) \| f \|_{2,1,\mathscr{D}_t}, \qquad (2.15)$$

где $c_2(t)$ и $c_3(t)$ определяются постоянными ν и μ_1 из (2.2), (2.3) и величиной t. Это и есть энергетическое неравенство, позволяющее оценить энергетическую норму решения $u(x,t)$ через начальные данные Коши и силу $f(x,t)$. Для волнового уравнения

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \qquad (2.16)$$

неравенство (2.10), из которого было получено (2.15), имеет вид

$$\int_{\Omega_t} \left(u_t^2 + c^2 u_x^2 \right) dx \leqslant \int_{\Omega_0} \left(u_t^2 + c^2 u_x^2 \right) \Big|_{t=0} dx, \qquad (2.17)$$

причем в качестве $\mathscr{D}_\tau$ можно взять, например, нижнюю половину любого характеристического конуса $\{(x,t) \in R_{n+1}: |x - x_0| \leqslant c(\tau - t),\ 0 \leqslant t \leqslant \tau\}$ *). Из (2.17) и (2.12) следует оценка для $\int_{\Omega_t} \left(u^2 + u_t^2 + c^2 u_x^2 \right) dx$.

Вернемся к общему случаю уравнения (2.1) и соответствующего ему неравенства (2.15), дающего априорную оценку для любого решения $u(x,t) \in W_2^2(\mathscr{D}_\tau)$. Сделаем из него два заключения. Первое — теорема единственности для задачи Коши:

Т е о р е м а 2.1. *Если для уравнения* (2.1) *выполнены условия* (2.2), (2.3), *то задача Коши*

$$\mathscr{L}u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(x) \qquad (2.18)$$

---

*) Если производные $u(x,t)$ достаточно быстро убывают при $|x| \to \infty$, то в качестве $\mathscr{D}_\tau$ можно взять и полосу $\{(x,t) \in R_{n+1},\ 0 \leqslant t \leqslant \tau\}$. Для нее неравенство (2.17) примет вид равенства $\int_{t=t_1} \left(u_t^2 + c^2 u_x^2 \right) dx = \int_{t=0} \left(u_t^2 + c^2 u_x^2 \right) dx$, выражающего закон сохранения энергии. Отсюда взято название «энергетическое» для неравенств (2.17) и (2.15).

для него в $\overset{+}{\Pi}_T$ не может иметь более одного решения в классе функций, локально квадратично суммируемых по $(x, t) \in \overset{+}{\Pi}_T$ вместе со своими производными первого и второго порядка.

Действительно, если u' и u'' суть два решения задачи (2.18), обладающих указанными в теореме свойствами, то их разность $u = u' - u''$ есть решение однородной задачи: $\mathscr{L}u = 0$, $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = 0$. Применив к нему оценку (2.15), видим, что $z(t)$ для него равно нулю, т. е. $u \equiv 0$. Это верно для любой области типа $\mathscr{D}_\tau$, $\tau \leqslant T$, а, следовательно, и для всей полосы $\overset{+}{\Pi}_T$. Более того, из (2.15) следует и более сильное заключение: u' и u'' совпадают в области типа $\mathscr{D}_\tau$, если начальные значения для u' и u'' и соответствующие им свободные члены в уравнении (2.1) совпадают лишь на нижнем основании $\mathscr{D}_\tau$ и в самой области $\mathscr{D}_\tau$ соответственно, а их поведение вне $\mathscr{D}_\tau$ безразлично.

Это обстоятельство связано с другим свойством уравнений гиперболического типа, выражающим тот факт, что возмущения, описываемые такими уравнениями, распространяются с конечной скоростью. Поясним это. Предположим, что начальные возмущения, т. е. функции φ и ψ, отличны от нуля лишь в какой-либо ограниченной области $\widehat{\Omega}$ пространства x, а $f \equiv 0$. Тогда отвечающее им решение $u(x, t)$ (мы предполагаем, что оно существует в $\overset{+}{\Pi}_T$) при $\forall t \in [0, T]$ будет равно нулю всюду, кроме $x \in \widehat{\Omega}(t)$ — «$\sqrt{\mu}t$ окрестности» области $\widehat{\Omega}$ (т. е. совокупности точек $\widehat{\Omega}$ и всех точек x, отстоящих от $\widehat{\Omega}$ на расстояние, меньшее или равное $\sqrt{\mu}t$). Действительно, если точка $\tilde{x}$ отстоит от $\widehat{\Omega}(\tau)$ на положительное расстояние d, то для точки $(\tilde{x}, \tau)$ можно построить область типа $\mathscr{D}_\tau$, нижнее основание которой не пересекается с $\widehat{\Omega}$, а верхнее (при $t = \tau$) содержит точку $(\tilde{x}, \tau)$. В качестве $\mathscr{D}_\tau$ можно взять сферический усеченный конус с осью, лежащей на прямой $\{(x, t)\colon x = \tilde{x}\}$, с верхним основанием $\{(x, t)\colon |x - \tilde{x}| < d,\ t = \tau\}$ и с нижним основанием $\{(x, t)\colon |x - \tilde{x}| < d + \sqrt{\mu}\tau,\ t = 0\}$.

Если применить теперь неравенство (2.15) к нашему решению и этой области $\mathscr{D}_\tau$, то в силу $f \equiv 0$ и $z(0) = 0$ получим, что $u = 0$ в $\mathscr{D}_\tau$, а потому и при $x = \tilde{x}$, $t \in$ $\in [0, \tau]$.

Итак, мы показали, что начальное возмущение, сосредоточенное в области $\hat{\Omega}$, распространится за время τ не больше чем на расстояние $\sqrt{\mu}\,\tau$ от области $\hat{\Omega}$. Но это и означает, что возмущение, описываемое решением $u(x, t)$ уравнения (2.1) с $f \equiv 0$, распространяется с конечной скоростью, причем эта скорость не превосходит $\sqrt{\mu}$ из условия (2.2). Также распространяется и возмущение, обусловленное наличием силы $f(x, t)$. Для уравнений (2.16) это рассуждение показывает, что скорость распространения возмущения не превосходит c. С другой стороны, формула Пуассона, выражающая решение задачи Коши для уравнения (2.16), показывает, что скорость распространения возмущения для него равна c. Это показывает точность сделанного нами вывода из неравенства (2.15) для всего семейства гиперболических уравнений (2.1). Сформулируем доказанное в виде теоремы:

Т е о р е м а 2.2. *Гиперболические уравнения* (2.1) *описывают распространение возмущений, скорость которых не превосходит* $\sqrt{\mu}$ *из условия* (2.2).

Благодаря свойствам, установленным в теоремах 2.1 и 2.2, решение $u(x, t)$ задачи Коши (2.18) в полосе $\overset{+}{\Pi}_T$ можно находить «по частям», разбивая $\overset{+}{\Pi}_T$ на конечные области типа $\mathscr{D}_\tau$. Если, положим, нас интересует $u(x, t)$ для (x, t), принадлежащих какой-либо ограниченной области $Q \in \overset{+}{\Pi}_T$, то нет необходимости (в отличие от эллиптических и параболических уравнений) находить $u(x, t)$ во всей $\overset{+}{\Pi}_T$. Достаточно Q заключить в ограниченную область типа $\mathscr{D}_\tau \in \overset{+}{\Pi}_T$ с основанием на плоскости $t = 0$ и определить $u(x, t)$ лишь в $\mathscr{D}_\tau$. Более того, $\mathscr{D}_\tau$ можно, в свою очередь, заключить в цилиндр $Q_\tau =$ $= \{\Omega \times [0 \leqslant t \leqslant \tau]\}$, нижнее основание которого содержит в качестве своей внутренней подобласти нижнее основание $\mathscr{D}_\tau$, и затем вместо задачи (2.18) решать первую начально-краевую задачу

$$\mathscr{L}u=f, \quad u|_{t=0}=\tilde{\varphi}(x), \quad u_t|_{t=0}=\tilde{\psi}(x), \quad u|_{S_\tau}=0 \tag{2.19}$$

с функциями $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$, совпадающими с $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на нижнем основании $\mathscr{D}_\tau$ и равными нулю вблизи $\partial\Omega$. В силу теоремы 2.1 решение задачи (2.19) будет совпадать в $\mathscr{D}_\tau$ (а тем самым и в Q) с искомым решением задачи (2.18). Этот путь решения задачи (2.18) не всегда является наилучшим, особенно если речь идет о фактическом вычислении $u(x, t)$. Для простейших уравнений гиперболического типа, например, для уравнений (1.4), имеются сравнительно простые формулы, определяющие решение $u(x, t)$ задачи Коши по f, φ и ψ (для однородного уравнения (1.4) — формула Пуассона, а для неоднородного — формула Пуассона — Кирхгофа).

Нет никакой необходимости привлекать начально-краевую задачу и при решении задачи Коши методом конечных разностей, который мы излагаем в гл. VI. Кроме того, задача Коши допускает и другие «классические» методы исследования, в том числе метод аналитической аппроксимации (см. известные работы Ю. Шаудера [25_2], И. Г. Петровского [18_1] и др.) и далеко идущие обобщения теории потенциалов, сводящие задачу к исследованию интегральных уравнений (см. знаменитые исследования задачи Коши Ж. Адамара [7_3], «обобщенный метод Кирхгофа», предложенный С. Л. Соболевым [23_4], и др.).

Задача Коши исследована не только для одного гиперболического уравнения, но и для уравнений и систем гиперболического типа любого порядка (см. работы Р. Куранта, К. Фридрихса, Г. Леви, И. Г. Петровского, Ж. Лерэ, Л. Гординга и др.).

Однако для одного гиперболического уравнения второго порядка вида (2.1) выбранный нами путь доказательства однозначной разрешимости задачи Коши, как частного случая первой начально-краевой задачи, имеет несомненные преимущества (хотя бы методического характера).

§ 3. Первая начально-краевая задача. Разрешимость в $W_2^1(Q_T)$

В данном параграфе мы исследуем разрешимость первой начально-краевой задачи для уравнений (2.1), т. е. задачи нахождения функции $u(x, t)$ в $Q_T = \Omega \times \times (0, T)$, где Ω — произвольная ограниченная область в R_n, удовлетворяющей требованиям:

$$\mathscr{L}u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad u|_{S_T} = 0. \tag{3.1}$$

Как и всюду, мы считаем граничное условие сведенным к однородному. Пусть

$$f \in L_{2,1}(Q_T), \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad \psi \in L_2(\Omega), \tag{3.2}$$

и для $\mathscr{L}$ выполнены условия (2.2), (2.3). Покажем, что для решений $u(x, t) \in W_2^2(Q_T)$ задачи (3.1) в предположениях теоремы 2.1 можно дать априорную оценку типа (2.15), а именно

$$z^{1/2}(t) = \left(\int_{\Omega_t} \left(u^2 + u_t^2 + a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\right) dx \right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant c_2(t)\, z^{1/2}(0) + c_3(t) \| f \|_{2,1,Q_t}, \tag{3.3}$$

$t \in [0, T]$, с теми же функциями $c_2(t)$ и $c_3(t)$, что и в неравенстве (2.15). В данном параграфе Ω_{t_1} есть сечение цилиндра Q_T плоскостью $t = t_1$. Для доказательства (3.3) рассмотрим равенство

$$2 \int_{Q_t} \mathscr{L}u \cdot u_t \, dx\, dt = 2 \int_{Q_t} f u_t \, dx\, dt.$$

Из него так же, как и в § 2 из (2.6), получим (2.8) с той разницей, что интеграл по S_t обратится в силу условия $u|_{S_T} = 0$ в нуль *). Все дальнейшие выводы § 2 из (2.8) сохраняют свою силу и приводят к (3.3).

Из (3.3) следует теорема единственности для решений задачи (3.1) из пространства $W_2^2(Q_T)$. Однако мы

---

*) При плохой границе Ω обращение u и u_t в нуль понимается в том смысле, что u и u_t принадлежат пространству $W_{2,0}^1(Q_T)$, определяемому ниже.

хотим установить более сильную теорему единственности для обобщенных решений из $W_2^1(Q_T)$. Это вызвано тем, что именно в этом классе легче всего доказать разрешимость задачи (3.1). В соответствии с подходом к краевым задачам, описанным в гл. II и III, назовем *обобщенным решением из пространства* $W_2^1(Q_T)$ *задачи* (3.1) функцию $u(x, t)$, принадлежащую $W_{2,0}^1(Q_T)$, равную $\varphi(x)$ при $t=0$ и удовлетворяющую тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (-u_t\eta_t + a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + a_i u_{x_i}\eta + au\eta)\,dx\,dt - \\ - \int\limits_{\Omega} \psi\eta(x, 0)\,dx = \int\limits_{Q_T} f\eta\,dx\,dt \qquad (3.4)$$

при $\forall\eta \in \widehat{W}_{2,0}^1(Q_T)$. Здесь под $W_{2,0}^1(Q_T)$ понимается замыкание в норме $W_2^1(Q_T)$ множества всех гладких в $\overline{Q}_T$ функций, равных нулю вблизи S_T, а $\widehat{W}_{2,0}^1(Q_T)$ состоит из элементов $W_{2,0}^1(Q_T)$, равных нулю при $t=T$.

То, что такое определение имеет смысл и действительно является расширением понятия классического решения, проверяется так же, как это было сделано в гл. II. Надо при этом вспомнить свойства элементов $W_2^1(Q_T)$ и $W_{2,0}^1(Q_T)$, перечисленные в гл. I (см. § 6), в частности, то, что они определены на каждом сечении Ω_t как элементы $L_2(\Omega)$ и непрерывны по t в норме $L_2(\Omega)$. Докажем теорему:

Т е о р е м а 3.1. *Пусть коэффициенты* $\mathscr{L}$, *помимо* (2.2), *удовлетворяют условиям*

$$\max_{Q_T}\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, a_i, a\right| \leqslant \mu_1. \qquad (3.5)$$

Тогда задача (3.1) *может иметь не более одного об. решения из* $W_2^1(Q_T)$. *Вместо* $\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right| \leqslant \mu_1$ *можно потребовать* $\left|\frac{\partial a_i}{\partial t}\right| \leqslant \mu_1$.

Пусть задача (3.1) имеет два обобщенных решения u' и u'' из $W_2^1(Q_T)$. Тогда их разность $u = u' - u'' \in$

$\in W^1_{2,0}(Q_T)$, удовлетворяет тождеству (3.4) с $f=\psi=0$ и при $t=0$ обращается в нуль. Возьмем в этом тождестве

$$\eta(x, t)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad b\leqslant t\leqslant T, \\ \int\limits_b^t u(x, \tau)\,d\tau & \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant b. \end{cases} \tag{3.6}$$

Нетрудно показать, используя определение об. производных, что $\eta(x,t)$ принадлежит классу $\widehat{W}^1_{2,0}(Q_T)$ и имеет в $Q_b=\Omega\times(0,b)$ обобщенные производные $\eta_{tx}=u_x$, суммируемые со второй степенью по Q_b. Кроме того, η, η_x и u являются элементами $L_2(\Omega)$, непрерывно зависящими от $t\in[0,T]$. Подставим η из (3.6) в (3.4) с $f=\psi=0$ и выразим u, u_t и u_x через η и ее производные. Это даст после изменения знака в (3.4)

$$\int\limits_{Q_b}[\eta_t\eta_{tt}-a_{ij}\eta_{tx_j}\eta_{x_i}-a_i\eta_{tx_i}\eta-a\eta_t\eta]\,dx\,dt=0. \tag{3.7}$$

Интегрируя первые три члена и учитывая $\eta_t|_{t=0}=u|_{t=0}=0$ и $\eta_x|_{t=b}=0$, получим соотношение

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega\left[\eta_t^2(x, b)+a_{ij}\eta_{x_i}\eta_{x_j}\big|_{t=0}\right]dx=$$
$$=-\int\limits_{Q_b}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\eta_{x_i}\eta_{x_j}+a_i\eta_t\eta_{x_i}+\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i}-a\right)\eta_t\eta\right]dx\,dt,$$

из которого в силу (3.5) следует

$$\int\limits_\Omega\left[\eta_t^2(x, b)+a_{ij}\eta_{x_i}\eta_{x_j}\big|_{t=0}\right]dx\leqslant c\int\limits_{Q_b}(\eta_x^2+\eta_t^2+\eta^2)\,dx\,dt, \tag{3.8}$$

где c зависит только от μ_1. Введем функции $v_i(x,t)=$ $=\int\limits_t^0 u_{x_i}(x, \tau)\,d\tau$. В силу (3.6) $\eta_{x_i}=\int\limits_b^t u_{x_i}(x,\tau)\,d\tau=v_i(x,b)-$ $-v_i(x, t)$, $t\leqslant b$. Кроме того, для почти всех $x\in\Omega$

$$\int\limits_0^b\eta^2\,dt=\int\limits_0^b\left(\int\limits_b^t u\,d\tau\right)^2dt\leqslant\int\limits_0^b(b-t)\int\limits_t^b u^2\,d\tau\,dt\leqslant b^2\int\limits_0^b u^2\,d\tau.$$

Ввиду этого из (3.8) следует неравенство

$$\int_{\Omega} [u^2(x, b) + a_{ij}(x, 0)\, v_i(x, b)\, v_j(x, b)]\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c \int_{Q_b} \left[\sum_{i=1}^{n} (v_i(x, b) - v_i(x, t))^2 + (1 + b^2)\, u^2\right] dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2cb \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} v_i^2(x, b)\, dx + c \int_{Q_b} \left[2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + (1+b^2)\, u^2\right] dx\, dt, \quad (3.9)$$

из которого, в свою очередь, используя условие (2.2), получим

$$\int_{\Omega} u^2(x, b)\, dx + (\nu - 2bc) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} v_i^2(x, b)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int_{Q_b} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 + u^2\right) dx\, dt, \quad (3.10)$$

где $c_1 = c(2 + b^2)$. Воспользуемся теперь произволом в выборе b. Для $b \in \left[0, \frac{\nu}{4c}\right]$ коэффициент $\nu - 2bc \geqslant \frac{\nu}{2}$, а $u(x, b)$ и $v_i(x, b)$ при $b = 0$ равны нулю. Это в силу леммы 1.1 гл. III гарантирует, что из (3.10) следует $u(x, b) = 0$ и $v_i(x, b) = 0$ при $b \in \left[0, \frac{\nu}{4c}\right]$.

Повторяя рассуждение для $t \in \left[\frac{\nu}{4c}, \frac{\nu}{2c}\right]$, убедимся, что $u(x, t) = 0$ на этом промежутке. И так в конечное число шагов докажем обращение $u(x, t)$ в нуль для всех $t \in [0, T]$. Если условие $\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right| \leqslant \mu_1$ заменить условием $\left|\frac{\partial a_i}{\partial t}\right| \leqslant \mu_1$, то член $j \equiv \int_{Q_b} - a_i \eta_{tx_i} \eta\, dx\, dt$ в (3.7) надо преобразовать так:

$$j \equiv \int_{Q_b} (a_i \eta_{x_i} \eta_t + a_{it} \eta_{x_i} \eta)\, dx\, dt + \int_{\Omega} a_i \eta_{x_i} \eta \Big|_{t=0} dx.$$

Кроме того, прибавим к обеим частям (3.7) слагаемое

$$\int_{\Omega} \lambda \eta^2(x, 0)\, dx = -\int_{Q_b} 2\lambda \eta_t \eta \, dx\, dt,$$

в котором постоянная λ выбрана так, чтобы при любых η и η_{x_i} выполнялось неравенство

$$a_{ij}\eta_{x_i}\eta_{x_j} + a_i\eta_{x_i}\eta + \lambda\eta^2 \geqslant \nu_1(\eta_x^2 + \eta^2), \qquad \nu_1 > 0.$$

Это приведет к неравенству

$$\int_{\Omega} [\eta_t^2(x, b) + \nu_1\eta_x^2(x, 0) + \nu_1\eta^2(x, 0)]\, dx \leqslant \leqslant c\int_{Q_b} (\eta_x^2 + \eta_t^2 + \eta^2)\, dx\, dt$$

типа (3.8). Из него же, как показано выше, следует $u(x, t) \equiv 0$.

Перейдем теперь к теореме существования:

Теорема 3.2. *Пусть коэффициенты* $\mathcal{L}$ *удовлетворяют условиям* (2.2) *и*

$$\max_{Q_T} \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t},\ a_i,\ a \right| \leqslant \mu_1. \tag{3.11}$$

Тогда задача (3.1) *имеет обобщенное решение из* $W_2^1(Q_T)$ *для* $f \in L_{2,1}(Q_T)$, $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *и* $\psi \in L_2(\Omega)$.

Для доказательства воспользуемся методом Галеркина. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ есть фундаментальная система в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_k^l$. Приближенное решение $u^N(x, t)$ ищем в виде $u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\varphi_k(x)$ из соотношений

$$\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2},\ \varphi_l\right) + \int_{\Omega} \left(a_{ij}u_{x_j}^N\varphi_{lx_i} + a_iu_{x_i}^N\varphi_l + au^N\varphi_l\right) dx = (f, \varphi_l), \quad l = 1, \ldots, N, \tag{3.12}$$

и

$$\frac{d}{dt}c_k^N(t)\Big|_{t=0} = (\psi, \varphi_k), \qquad c_k^N(0) = \alpha_k^N, \tag{3.13}$$

где α_k^N суть коэффициенты сумм $\varphi^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^N \varphi_k(x)$, аппроксимирующих при $N \to \infty$ функцию $\varphi(x)$ в норме $W_2^1(\Omega)$. Равенства (3.12) являются системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по t для неизвестных $c_k^N(t)$, $k = 1, \ldots, N$, разрешенной относительно $\frac{d^2 c_k^N}{dt^2}$. Коэффициенты ее суть ограниченные функции, а свободные члены $f_l \equiv (f(x, t), \varphi_l(x)) \in L_1(0, T)$. Эта система однозначно разрешима при начальных данных (3.13), причем $\frac{d^2 c_k^N}{dt^2} \in L_1(0, T)$. Для u^N справедлива оценка (3.3). Действительно, умножая каждое из равенств (3.12) на свое $\frac{d}{dt} c_l^N(t)$ и суммируя по l от 0 до N, придем к равенству

$$\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}, \frac{\partial u^N}{\partial t}\right) + \int_\Omega \left(a_{ij} u_{x_j}^N u_{tx_i}^N + a_i u_{x_i}^N u_t^N + a u^N u_t^N\right) dx = (f, u_t^N),$$

из которого и было выведено неравенство (3.3) (см. § 2). Правая часть (3.3) для u^N мажорируется постоянной, не зависящей от N и $t \in [0, T]$, так что

$$\int_{\Omega_t} \left[(u^N)^2 + (u_x^N)^2 + (u_t^N)^2\right] dx \leqslant c, \qquad t \in [0, T], \tag{3.14}$$

и тем более

$$\| u^N \|_{2, Q_T}^{(1)} \leqslant c_1. \tag{3.15}$$

Благодаря (3.15) из последовательности $\{u^N\}$, $N = 1, 2, \ldots$, можно выбрать подпоследовательность (за которой мы сохраним то же обозначение), сходящуюся слабо в $W_2^1(Q_T)$ *) и равномерно по $t \in [0, T]$ в норме $L_2(\Omega)$ к некоторому элементу $u \in \overset{\circ}{W}{}_{2,0}^1(Q_T)$ (см. § 1 и § 6 гл. I). Покажем, что $u(x, t)$ есть обобщенное решение задачи (3.1). Начальное условие $u|_{t=0} = \varphi(x)$

*) Т. е. u^N, u_t^N и $u_{x_i}^N$ сходятся слабо в $L_2(Q_T)$.

будет выполнено в силу только что отмеченной сходимости $u^N(x, t)$ к $u(x, t)$ в $L_2(\Omega)$ и того, что $u^N(x, 0) \to \varphi(x)$ в $L_2(\Omega)$. Для доказательства же справедливости тождества (3.4) для $u(x, t)$ поступаем так же, как в § 3 гл. III. А именно, умножим каждое из соотношений (3.12) на свою функцию $d_l(t) \in W_2^1(0, T)$, $d_l(T) = 0$, полученные равенства просуммируем по всем l от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до T. После этого в первом члене проведем интегрирование по частям, перенося $\frac{\partial}{\partial t}$ с u^N на $\eta \equiv \sum_{l=1}^{N} d_l(t)\varphi_l(x)$. Это даст тождество

$$\int_{Q_T} \left(-u_t^N \eta_t + a_{ij} u_{x_j}^N \eta_{x_i} + a_i u_{x_i}^N \eta + a u^N \eta\right) dx\,dt - \\ - \int_{\Omega} u_t^N \eta \Big|_{t=0} dx = \int_{Q_T} f\eta\, dx\,dt, \qquad (3.16)$$

справедливое при $\forall \eta$ вида $\sum_{l=1}^{N} d_l(t)\varphi_l(x)$. Совокупность таких η обозначим через $\mathfrak{M}_N$. В (3.16) можно перейти к пределу по выбранной выше подпоследовательности при закрепленном η из какого-либо $\mathfrak{M}_{N_l}$. Это приведет к тождеству (3.4) для предельной функции u при $\forall \eta \in \mathfrak{M}_{N_l}$. Но $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{M}_N$ плотно в $\widehat{W}_{2,0}^1(Q_T)$, а $u \in W_{2,0}^1(Q_T)$, следовательно, (3.4) будет выполняться для $u(x, t)$ при $\forall \eta \in \widehat{W}_{2,0}^1(Q_T)$.

Итак, мы доказали, что предельная функция $u(x, t)$ есть обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ задачи (3.1). Если вместо (3.11) выполнены несколько более сильные условия теоремы 3.1 (так что для задачи (3.1) будет справедлива теорема единственности 3.1), то нетрудно понять, что вся последовательность $\{u^N\}$, $N = 1, 2, \ldots$, будет сходиться к u слабо в $W_2^1(Q_T)$.

Для полученного нами решения $u(x, t)$ справедливо неравенство (3.15), или, что то же, неравенство

$$\|u\|_{2, Q_T}^{(1)} \leqslant c(T)\left(\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|\psi\|_{2,\Omega} + \|f\|_{2,1,Q_T}\right). \qquad (3.17)$$

§ 4. Об исследовании гладкости обобщенных решений

В § 3 мы установили существование обобщенных решений задачи (3.1) из $W_2^1(Q_T)$. Покажем, что при несколько более сильных предположениях о данных задачи они принадлежат $W_2^2(Q_T)$. Именно, пусть помимо условий (2.2) и (2.3) в $Q_T = \Omega \times (0, T)$ коэффициенты уравнения (2.1) удовлетворяют условиям

$$|a_{ijt}, a_{it}, a_t, a_{ijx}| \leqslant \mu_2, \tag{4.1}$$

свободный член f имеет производную f_t и

$$f_t \in L_{2,1}(Q_T), \tag{4.2}$$

а начальные функции обладают свойствами

$$\varphi \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad \psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{4.3}$$

Тогда справедлива теорема:

Теорема 4.1. *При выполнении условий* (2.2), (2.3), (4.1)—(4.3) *обобщенное решение* $u(x, t)$ *из* $W_2^1(Q_T)$ *задачи* (3.1) *имеет производные* u_{tt} *и* u_{tx_i} *из* $L_2(Q_T)$ *и* $\| u(x, t) - \psi \|_{2,\Omega} \to 0$ *при* $t \to +0$.

Мы докажем существование у задачи (3.1) обобщенного решения, имеющего свойства, указанные в теореме 4.1. В силу теоремы единственности (теоремы 3.1) оно совпадает с об. решением из $W_2^1(Q_T)$, гарантированным теоремой 3.2. Для доказательства существования такого решения снова воспользуемся методом Галеркина, взяв в качестве базиса $\{\varphi_k(x)\}$ фундаментальную систему в $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, ортонормированную в $L_2(\Omega)$. Приближенное решение $u^N(x, t)$ ищем в виде $u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\,\varphi_k(x)$ из соотношений (3.12) и начальных условий

$$c_k^N(0) = \alpha_k^N, \qquad \left.\frac{dc_k^N}{dt}\right|_{t=0} = \beta_k^N, \tag{4.4}$$

где α_k^N и β_k^N подбираются так, чтобы суммы $\varphi^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^N \varphi_k(x)$ и $\psi^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k^N \varphi_k(x)$ аппроксимировали

$\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в нормах пространств $W_2^2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ соответственно. Для так построенных $u^N(x,t)$ нормы $\|u^N(x,0)\|_{2,\Omega}^{(2)}$ и $\|u_t^N(x,0)\|_{2,\Omega}^{(1)}$ ограничены равномерно по N. В силу этого и предположений теоремы 4.1 из (3.12) следует, что $\|u_{tt}^N(x,0)\|_{2,\Omega}$ также ограничены равномерно по N. Это нетрудно проверить, умножив каждое из (3.12) на $\frac{d^2c_l^N}{dt^2}$ и сложив по l от 1 до N. Коэффициенты $c_l^N(t)$, однозначно определяемые (3.12), (4.4), имеют производные по t до третьего порядка включительно (что нетрудно проверить, используя условия теоремы). Продифференцируем (3.12) по t, затем умножим на $\frac{d^2c_l^N}{dt^2}$ и просуммируем по l от 1 до N. В результате получим равенство

$$(u_{ttt}^N, u_{tt}^N)+\int_\Omega \left(a_{ij}u_{tx_j}^N u_{ttx_i}^N + a_{ijt}u_{x_j}^N u_{ttx_i}^N + a_i u_{tx_i}^N u_{tt}^N + \right.$$
$$\left. + a_{it}u_{x_i}^N u_{tt}^N + a u_t^N u_{tt}^N + a_t u^N u_{tt}^N\right) dx = (f_t, u_{tt}^N). \tag{4.5}$$

Представим первые три члена в виде:

$$(u_{ttt}^N, u_{tt}^N)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}^N\|^2;$$

$$\left(a_{ij}u_{tx_j}^N u_{ttx_i}^N\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(a_{ij}u_{txj}^N, u_{txi}^N\right)-\frac{1}{2}\left(a_{ijt}u_{tx_j}^N, u_{tx_i}^N\right),$$

$$\left(a_{ijt}u_{x_j}^N, u_{ttx_i}^N\right)=\frac{d}{dt}\left(a_{ijt}u_{x_j}^N, u_{tx_i}^N\right)-\left(a_{ijtt}u_{x_j}^N + a_{ijt}u_{tx_j}^N, u_{tx_i}^N\right),$$

и, подставив их в (4.5), проинтегрируем (4.5) по t от 0 до t. Это дает соотношение

$$\frac{1}{2}\left[\|u_{tt}^N\|^2+\left(a_{ij}u_{tx_j}^N, u_{tx_i}^N\right)\right]\Big|_{t=0}^{t=t}+\left(a_{ijt}u_{x_j}^N, u_{tx_i}^N\right)\Big|_{t=0}^{t=t}=$$
$$=\int_0^t\left[\frac{1}{2}\left(a_{ijt}u_{tx_j}^N, u_{tx_i}^N\right)+\left(a_{ijtt}u_{x_j}^N + a_{ijt}u_{tx_j}^N, u_{tx_i}^N\right)-\right.$$
$$\left.-\left(a_i u_{tx_i}^N + a_{it}u_{x_i}^N + a u_t^N + a_t u^N - f_t, u_{tt}^N\right)\right]dt, \tag{4.6}$$

первый член которого имеет тот же вид для функции $v \equiv u_t$, что и первый член левой части (2.8) для функции u. Из (4.6) с помощью энергетического неравенства (3.14) выводится неравенство

$$\|u_{tt}^N\|_{2,\Omega_t}^2 + \|u_{tx}^N\|_{2,\Omega_t}^2 \leqslant c, \quad t \in [0, T], \tag{4.7}$$

и тем более неравенство

$$\|u_{tt}^N\|_{2,Q_T} + \|u_{tx}^N\|_{2,Q_T} \leqslant c \tag{4.8}$$

с постоянной c, не зависящей от N. Этот вывод аналогичен выводу энергетического неравенства (2.15) из соотношения (2.8), причем он даже несколько проще, ибо в (4.6) не входят интегралы по боковой поверхности. Правда, в (4.6) есть «лишний» по сравнению с (2.8) член $j \equiv \left(a_{ijt}u_{x_j}^N, u_{tx_i}^N\right)$. Его надо оценить так: $|j| \leqslant \varepsilon\|u_{tx}^N\| + c_\varepsilon\|u_x^N\|$, взяв $\varepsilon = \nu/4$ и затем воспользоваться уже имеющейся оценкой (3.14). При написании мажоранты c в (4.7) мы учли, что левая часть (4.7) при $t = 0$ мажорируется постоянной, не зависящей от N. Оценка (4.8) вместе с оценкой (3.15) позволяет выполнить предельный переход по $N \to \infty$ и заключить, что некоторая подпоследовательность $\{u^{N_k}\}$ сходится в $L_2(Q_T)$ вместе с производными первого порядка и производными $u_{tt}^{N_k}$, $u_{tx_i}^{N_k}$ к искомому решению $u(x, t)$ задачи, обладающему свойствами, указанными в теореме. В силу теоремы единственности (теоремы 3.1) на самом деле вся последовательность $\{u^N\}$ сходится к этому решению. Для $u(x, t)$ (в силу (4.8)) справедливо неравенство

$$\|u_{tt}\|_{2,Q_T} + \|u_{tx}\|_{2,Q_T} \leqslant$$
$$\leqslant c(T)\left[\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(2)} + \|\psi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|f\|_{2,1,Q_T} + \|f_t\|_{2,1,Q_T}\right], \tag{4.9}$$

а также неравенство (3.17).

Следствие 4.1. Если к условиям теоремы 4.1 добавить предположение, что $\partial\Omega \in C^2$, то решение $u(x, t)$ задачи (3.1) имеет производные $u_{x_ix_j}$ из $L_2(Q_T)$, так что $u \in W_2^2(Q_T)$. Если же границу Ω не предполагать гладкой, то производные $u_{x_ix_j}$ квадратично суммируемы по $\forall Q'_T = \Omega' \times (0, T)$ с $\forall \bar{\Omega}' \subset \Omega$. Такое решение удовлетворяет уравнению (2.1) для почти всех $(x, t) \in Q_T$.

Действительно, решение $u(x, t)$, гарантированное теоремой 4.1, удовлетворяет уравнению $\mathscr{L}u = f$ в форме (3.4), а также и в форме

$$\int\limits_{Q_T} \left(u_{tt}\eta + a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + a_iu_{x_i}\eta + au\eta\right) dx\,dt = \int\limits_{Q_T} f\eta\,dx\,dt, \tag{4.10}$$

где η есть произвольный элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ (это пространство определено в § 1 гл. III). Тождество (4.10) можно вывести из (3.4), а также и независимо, используя то, что для u^N (4.10) имеет место при $\forall \eta(x, t)$ вида $\sum\limits_{l=1}^{N} d_l(t)\,\varphi_l(x)$, $d_l(t) \in L_2(0, T)$.

Возьмем в (4.10) $\eta(x, t) = \chi(t)\Phi(x)$, где $\chi(t)$ — произвольный элемент $L_2(0, T)$, а $\Phi(x)$ — произвольный элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и запишем интегралы $\int\limits_{Q_T} \ldots dx\,dt$ как повторные интегралы вида $\int\limits_0^T \chi(t)\left(\int\limits_{\Omega} \ldots dx\right)dt$. В силу достаточного произвола в выборе $\chi(t)$ из (4.10) будет следовать, что для почти всех t из $[0, T]$ («хороших t») выполняется тождество

$$\int\limits_{\Omega_t} \left(a_{ij}u_{x_j}\Phi_{x_i} + a_iu_{x_i}\Phi + au\Phi\right) dx = \int\limits_{\Omega_t} (-u_{tt} + f)\,\Phi\,dx. \tag{4.11}$$

Но это тождество означает, что $u(x, t)$ при таком «хорошем t» есть обобщенное решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ для соответствующего эллиптического уравнения со свободным членом $-u_{tt} + f$. В силу теоремы 7.3 и замечания 7.1 гл. II это решение фактически имеет производные $u_{x_ix_j}$, причем в случае $\partial\Omega \in C^2$ $u_{x_ix_j} \in L_2(\Omega_t)$, а в случае произвольной Ω $u_{x_ix_j} \in L_2(\Omega')$ для $\forall \bar{\Omega}' \subset \Omega$. Более того, оно удовлетворяет уравнению в обычной форме, т. е. в форме (2.1). Из (2.1) и (3.17), (4.9) следует, что $\|u_{xx}\|_{2,Q_T}$ (соответственно $\|u_{xx}\|_{2,Q'_T}$) мажорируется теми нормами φ, ψ, f, которые входят в (3.17) и (4.9).

Следствие 4.2. Пусть коэффициенты $\mathscr{L}$ удовлетворяют в полосе $\overset{+}{\Pi}_T=\{(x,t)\colon x\in R_n,\ t\in[0,T]\}$ условиям (2.2), (2.3) и (4.1), функции $f(x,t)$ и $f_t(x,t)$ принадлежат $L_{2,1}(Q_T^R)$, $\varphi(x)\in W_2^2(K_R)$, а $\psi\in W_2^1(K_R)$, где $\overline{Q}_T^R=\{(x,t)\colon x\in\overline{K}_R,\ t\in[0,T]\}$, $\overline{K}_R=\{x\colon |x|\leqslant R\}$ и R — произвольное положительное число. Тогда задача Коши (2.18) имеет единственное решение $u(x,t)$, принадлежащее $W_2^2(Q_T^R)$ при $\forall R>0$.

Это следствие вытекает из следствия 4.1 и результатов § 2. Постоянные ν^{-1}, μ и μ_i в неравенствах (2.2), (2.3) и (4.1) могут неограниченно расти вместе с радиусом R области Q_T^R, в которой берутся аргументы (x,t) коэффициентов $\mathscr{L}$ в этих неравенствах. Надо только предположить, что области типа $\mathscr{D}_\tau$ (см. § 2) существуют и в совокупности исчерпывают всю полосу $\overset{+}{\Pi}_T$ (это накладывает ограничение на зависимость μ из (2.1) от R).

Итак, мы показали, как можно доказать существование у об. решения задачи (3.1) производных второго порядка, если известна соответствующая гладкость данных задачи и нужный порядок согласования начальных и граничных условий и уравнения. В случае теоремы 3.2 выполнялось условие согласования нулевого порядка, что выражалось в требовании равенства нулю $\varphi(x)$ на S — условие $\varphi(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Это находится в соответствии с тем, что в силу граничного условия u на S_T равно нулю. Следующий порядок согласования учитывает обращение в нуль u_t на $S\times\{0\}\equiv S_0$, что было выражено нами требованием: $\psi(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Во втором порядке согласования речь идет о непротиворечивости на множестве S_0 граничного условия, начальных условий и самого уравнения (2.1). Именно, из граничных условий вытекает, что $u_{tt}|_{S_T}=0$; с другой стороны, u_{tt} на нижнем основании, в том числе и на S_0, определяется из уравнения (2.1) и начальных данных, так что надо требовать обращение в нуль на S_0 выражения

$$(a_{ij}\varphi_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_{x_i} - a_{n+1}\psi - a\varphi + f\,|_{S_0} = u_{tt}\,|_{S_0} = 0.$$

Все следующие порядки согласования приводят к соответствующим требованиям на данные задачи, вызванным обращением в нуль на S_T производных $D_t^m u$. Аналогично исследуется дальнейшее увеличение гладкости решения задачи (3.1) в зависимости от увеличения гладкости данных задачи и порядка согласования. Общий план этого таков: сначала доказывается повышение гладкости по t, а потом по x_i (для чего привлекаются соответствующие результаты об эллиптических уравнениях). Мы не будем приводить получаемые на этом пути результаты (см. об этом гл. III [12₂]). Вместо этого исследуем другой класс об. решений задачи (3.1), который естественно назвать «энергетическим». Он несколько уже класса об. решений из $W_2^1(Q_T)$, но шире класса об. решений из теоремы 4.1. Этот класс интересен ввиду двух фактов. Во-первых, именно в нем удается установить специфическое свойство гиперболических уравнений: доказать, что решение $u(x, t)$ имеет ровно те же дифференциальные свойства, которые предполагаются выполненными в начальный момент времени (напомним, что для гиперболических уравнений направление оси времени безразлично: все задачи одинаково решаются как в сторону возрастания t, так и в сторону убывания). Иначе говоря, в терминах этого класса мы получаем «продолжаемые начальные условия». Этим свойством обладает не только этот класс об. решений; «продолжаемые начальные условия» могут быть выражены в терминах всей шкалы пространств $W_2^l(\Omega)$ (т. е. в требованиях $u(x, 0) \in W_2^l(\Omega)$, $u_t(x, 0) \in W_2^{l-1}(\Omega)$ плюс соответственные условия об обращении $u(x, 0)$ и $u_t(x, 0)$ в нуль на S). Однако энергетический класс об. решений является в определенном смысле главным среди остальных, что связано со вторым его свойством, имеющим непосредственное отношение к закону «сохранения энергии». Мы поставили кавычки, ибо в общем случае, описываемом уравнением (2.1), энергия системы не сохраняется: в систему входят внешняя сила $f(x, t)$ и диссипативные члены $a_i u_{x_i}$. Более того, мы считали, что и характеристики среды могут меняться со временем (коэффициенты в (2.1) могли зависеть от t). Но если $f \equiv 0$, $a_i \equiv 0$ и коэффициенты не зависят от t, то энергия системы, выражаемая интегралом

$$j(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \left(u_t^2 + a_{i,j} u_{x_i} u_{x_j} + a u^2\right) dx, \tag{4.12}$$

не зависит от t.

Ввиду этого естественно назвать *об. решением задачи* (3.1) *из энергетического класса* функцию $u(x, t)$, принадлежащую $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при $\forall t \in [0, T]$ и непрерывно меняющуюся в зависимости от t в норме $W_2^1(\Omega)$; кроме этого, ее производная u_t должна существовать как элемент $L_2(\Omega)$ при $\forall t \in [0, T]$ и непрерывно меняться по t в норме $L_2(\Omega)$. Начальные условия должны приниматься по непрерывности в пространствах $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно, а уравнение — удовлетворяться или в смысле тождества (3.4), или (что то же) в смысле тождества

$$\int_{\Omega_t} u_t \eta \, dx + \int_{Q_t} \left(-u_t \eta_t + a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} + a_i u_{x_i} \eta + a u \eta\right) dx\, dt - \\ - \int_{\Omega_0} \psi \eta \, dx = \int_{Q_t} f \eta \, dx\, dt, \quad \forall t \in [0, T], \tag{4.13}$$

где η — произвольный элемент $W_{2,0}^1(Q_T)$. Наконец, для них должно быть выполнено энергетическое соотношение (являющееся для общего случая уравнения (2.1) эквивалентом закона сохранения энергии)

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \left(u_t^2 + a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\right) dx \Big|_{t=0}^{t=t} + \\ + \int_{Q_t} \left(-\frac{1}{2} a_{ijt} u_{x_i} u_{x_j} + a_i u_{x_i} u_t + a u u_t\right) dx\, dt = \\ = \int_{Q_t} f u_t \, dx\, dt, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4.14}$$

Из этого равенства выводится «энергетическая оценка»

$$\int\limits_{\Omega_t} (u^2+u_t^2+u_x^2)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c(t)\left[\int\limits_{\Omega_0} (u^2+u_t^2+u_x^2)\,dx + \int\limits_0^t \|f\|_{2,\Omega_t}\,dt\right]. \qquad (4.15)$$

Делается это аналогично тому, как из (2.7) было получено неравенство (2.15). Непрерывная функция $c(t)$, вообще говоря, монотонно растет с увеличением t и определяется лишь постоянными из условий теоремы 3.2.

Легко понять, что об. решения, гарантированные теоремой 4.1, являются об. решениями этого класса (для проверки этого надо лишь вывести (4.14) из (4.10). Для этого надо взять в (4.10) в качестве $\eta(x,t)$ функцию, равную нулю при $t\in[t_1,T]$ и равную $u_t(x,t)$ при $t\in[0,t_1]$. Это приведет к равенству, из которого (4.14) получается в результате преобразований главных членов, аналогичных преобразованию, выполненному в (2.7)). Обобщенные же решения из энергетического класса являются об. решениями из $W_2^1(Q_T)$. Существование об. решений задачи (3.1) из энергетического класса можно доказать при предположениях несколько более сильных, чем предположения теоремы 3.2, но более слабых, чем предположения теоремы 4.1.

Теорема 4.2. *Пусть коэффициенты уравнения из* (3.1) *удовлетворяют условиям* (2.2), (2.3) *и*

$$|a_{ijtt}, a_{ijx}| \leqslant \mu_2, \qquad (4.16)$$

и пусть

$$\varphi\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad \psi\in L_2(\Omega), \quad f\in L_{2,1}(Q_T). \qquad (4.17)$$

Тогда задача (3.1) *имеет об. решение из энергетического класса, и в этом классе об. решений справедлива теорема единственности.*

Теорема 3.2 гарантирует существование по крайней мере одного об. решения $u(x,t)$ задачи (3.1) из класса $W_2^1(Q_T)$. Обозначим вычисленное с его помощью выражение $-a_i u_{x_i} - au + f$ через $\mathcal{F}(x, t)$ (очевидно, что $\mathcal{F} \in L_{2,1}(Q_T)$) и перепишем уравнение $\mathcal{L}u = f$ в виде

$$\mathcal{L}_0 u \equiv u_{tt} - \left(a_{ij} u_{x_j}\right)_{x_i} = \mathcal{F}(x, t). \tag{4.18}$$

Наша функция $u(x, t)$ есть об. решение из класса $W_2^1(Q_T)$ для уравнения (4.18) и начально-краевых условий

$$u|_{t=0} = \varphi, \qquad u_t|_{t=0} = \psi, \qquad u|_{S_T} = 0, \tag{4.19}$$

причем в силу теоремы 3.1 оно единственно для задачи (4.18), (4.19) в классе об. решений из $W_2^1(Q_T)$. Покажем, что оно обладает свойствами, указанными в теореме 4.2. Для этого аппроксимируем $\mathcal{F}$, φ и ψ функциями $\mathcal{F}^{(m)}$, $\varphi^{(m)}$ и $\psi^{(m)}$, удовлетворяющими условиям теоремы 4.1, в нормах $L_{2,1}(Q_T)$, $W_2^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно. В силу теоремы 4.1 им однозначно соответствуют решения $u^{(m)}(x, t)$ задачи (4.18), (4.19), в которых вместо $\mathcal{F}$, φ и ψ поставлены $\mathcal{F}^{(m)}$, $\varphi^{(m)}$ и $\psi^{(m)}$. Для $u^{(m)}$ справедливы энергетические соотношения, которые для уравнения (4.18) имеют вид

$$\frac{1}{2}\|u_t^{(m)}\|_{2,\Omega_t}^2 + \frac{1}{2}\left(a_{ij}u_{x_j}^{(m)}, u_{x_i}^{(m)}\right)_{\Omega_t} - \frac{1}{2}\int_0^t \left(a_{ijt}u_{x_j}^{(m)}, u_{x_i}^{(m)}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\|u_t^{(m)}\|_{2,\Omega_0}^2 + \frac{1}{2}\left(a_{ij}u_{x_j}^{(m)}, u_{x_i}^{(m)}\right)_{\Omega_0} + \int_0^t \left(\mathcal{F}^{(m)}, u_t^{(m)}\right) dt. \tag{4.20}$$

Разности $u^{m,p} = u^{(m)}(x, t) - u^{(p)}(x, t)$ суть решения той же задачи (4.18), (4.19), но с $\mathcal{F}$, φ, ψ, замененными на $\mathcal{F}^{m,p} = \mathcal{F}^{(m)} - \mathcal{F}^{(p)}$, $\varphi^{m,p} = \varphi^{(m)} - \varphi^{(p)}$, $\psi^{m,p} = \psi^{(m)} - \psi^{(p)}$. Для них также справедливы соотношения вида (4.20).

Из этих соотношений легко получить оценку

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T}\left(\|u_t^{m,p}\|_{2,\Omega_t}^2 + \|u_x^{m,p}\|_{2,\Omega_t}^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant c\left[\|u_t^{m,p}\|_{2,\Omega_0}^2 + \|u_x^{m,p}\|_{2,\Omega_0}^2 + \|\mathcal{F}^{m,p}\|_{2,1,Q_T}^2\right] \tag{4.21}$$

с постоянной c, не зависящей от m и p. Из нее следует сходимость $u^m(x, t)$ к некоторой функции $v(x, t)$ в норме, определяемой левой частью (4.21). Нетрудно проверить, что эта функция есть об. решение задачи (4.18), (4.19) из энергетического класса. В частности, для нее справедливо соотношение вида (4.20). Но, с другой стороны, мы знаем, что задача (4.18), (4.19) имеет об. решение $u(x,t)$ из класса $W_2^1(Q_T)$. В силу теоремы 3.1 оно совпадает с $v(x,t)$ и потому обладает теми свойствами гладкости, которые требуются теоремой 4.2. Если вспомнить теперь выражение для $\mathscr{F}(x,t)$, то из всего сказанного легко понять, что $u(x,t)$ является об. решением задачи (3.1) из энергетического класса. Осталось доказать последнее утверждение теоремы 4.2 — теорему единственности. Она не вытекает из теоремы 3.1, так как теперь мы не предполагаем существования производных a_{it}. Пусть задача (3.1) имеет два решения u' и u'' из энергетического класса. Тогда их разность $v(x,t)$ может быть рассмотрена как об. решение из класса $W_2^1(Q_T)$ задачи (4.18), (4.19) с $\mathscr{F}=-a_iv_{x_i}-av$, $\varphi=0$ и $\psi=0$. Но каждое такое решение, как установлено выше при доказательстве первой части теоремы, является и об. решением задачи из энергетического класса. В частности, для него справедливо энергетическое соотношение вида (4.20), т. е.

$$\|v_t\|^2_{2,\Omega_t}+(a_{ij}v_{x_j},\,v_{x_i})_{\Omega_t}-\int_0^t(a_{ijt}v_{x_j},\,v_{x_i})\,dt=$$
$$=2\int_0^t(-a_iv_{x_i}-av,\,v_t)\,dt. \qquad (4.22)$$

При его написании мы учли выражения для $\mathscr{F}$, φ и ψ. Но (4.22) совпадает с (4.14), в котором f, $u(x,0)$ и $u_t(x,0)$ положены равными нулю, а из (4.14) следует (4.15), поэтому $v\equiv 0$, т. е. u' и u'' совпадают. Теорема 4.2 доказана.

§ 5. О других начально-краевых задачах

Начально-краевые задачи

$$\mathscr{L}u=f,\quad u|_{t=0}=\varphi,\quad u_t|_{t=0}=\psi,\quad \frac{\partial u}{\partial N}+\sigma u|_{S_T}=0, \qquad (5.1)$$

где $\frac{\partial u}{\partial N}=a_{ij}u_{x_j}\cos nx_i$, могут быть решены, как и задача (3.1), методом Галеркина. Единственное отличие в построении аппроксимаций $u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\varphi_k(x)$ состоит в том, что на этот раз функции $\{\varphi_k(x)\}$ должны образовывать базис в $W_2^1(\Omega)$, а не в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Вся остальная часть, касающаяся вычисления u^N и доказательства сходимости u^N к u, аналогична § 3. Так же доказывается и теорема единственности обобщенного решения задачи (5.1) в классе $W_2^1(Q_T)$.

Обобщенное же решение $u(x, t)$ *задачи* (5.1) *из пространства* $W_2^1(Q_T)$ определяется как элемент $W_2^1(Q_T)$, равный $\varphi(x)$ при $t = 0$ и удовлетворяющий тождеству

$$\int_{Q_T} (-u_t\eta_t + a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + a_i u_{x_i}\eta + au\eta)\,dx\,dt + \\ + \int_{S_T} \sigma u\eta\,dx\,dt - \int_{\Omega} \psi\eta(x, 0)\,dx = \int_{Q_T} f\eta\,dx\,dt \tag{5.2}$$

при любой функции $\eta(x, t)$ из $W_2^1(Q_T)$, равной нулю при $t = T$. Если $\sigma \not\equiv 0$, то от границы Ω надо потребовать некоторой регулярности (такой же, как в § 5 гл. II).

Подытожим сказанное в виде теоремы:

Теорема 5.1. *Пусть для коэффициентов* $\mathcal{L}$ *выполнены условия* (2.2) *и* (2.3) *в* Q_T, *а функция* $\sigma(s, t)$ *в краевом условии ограничена вместе со своей производной* σ_t. *Тогда задача* (5.1) *имеет обобщенное решение* $u(x, t)$ *из* $W_2^1(Q_T)$ *для любых* f *из* $L_{2,1}(Q_T)$, φ *из* $W_2^1(\Omega)$ *и* ψ *из* $L_2(\Omega)$. *Если помимо перечисленных условий* a_i *имеют ограниченные в* Q_T *производные* $\frac{\partial a_i}{\partial t}$ или $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$, *то для задачи* (5.1) *имеет место теорема единственности в классе обобщенных решений из* $W_2^1(Q_T)$.

Указание к доказательству теоремы 5.1. При выводе энергетического неравенства и доказательстве теоремы единственности имеется интеграл $\int_{S_t} \sigma u u_t\,ds\,dt$. Его сначала надо преобразовать к виду

$$\int_{S_t} \sigma u u_t\,ds\,dt = -\frac{1}{2}\int_{S_t} \sigma_t u^2\,ds\,dt + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_t} \sigma u^2\,ds\,\Big|_{t=0}^{t=t},$$

а затем для оценки $\int\limits_{\partial\Omega_t} u^2\,ds$ использовать неравенства

$$\int\limits_{\partial\Omega_t} u^2\,ds \leqslant \int\limits_{\Omega_t} \left(\varepsilon u_x^2 + c_\varepsilon u^2\right) dx \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} u_x^2\,dx + 2c_\varepsilon \int\limits_{\Omega_0} u^2\,dx + 2c_\varepsilon t \int\limits_{Q_t} u_t^2\,dx\,dt, \qquad (5.3)$$

в которых в качестве ε можно взять любое положительное число (см. (6.24) гл. I и (2.12) гл. IV).

§ 6. Функциональный метод решения начально-краевых задач

Для фактического нахождения решений задач (3.1) и (5.1) с $\mathscr{L}$ общего вида можно использовать метод конечных разностей. Он будет изложен в гл. VI. Здесь мы опишем функциональный метод решения задачи (3.1), аналогичный методу § 2 гл. III. Он основан на доказательстве теоремы единственности для обобщенных решений из класса $L_2(Q_T)$, из которой «почти даром» следует теорема существования об. решений из энергетического класса. Этот метод, данный нами в 1954 г. (см. [$12_{6,7,8}$]), применим не только к широким классам дифференциальных уравнений любого порядка и систем гиперболического типа, но и к задаче Коши для операторных уравнений вида

$$\frac{d^2(S_1(t)\,u)}{dt^2} + \frac{d(S_2(t)\,u)}{dt} + S_3(t)\,u = f(t),$$
$$u|_{t=0} = \varphi, \qquad u_t|_{t=0} = \psi, \qquad (6.1)$$

где $S_i(t)$ суть неограниченные операторы в гильбертовом пространстве H, зависящие от параметра t; $u(t)$ и $f(t)$ суть элементы H, зависящие от t, а φ и ψ — элементы H. При определенных условиях на $S_i(t)$, обеспечивающих гиперболичность задачи (6.1) и гладкую зависимость $S_i(t)$ от t, доказана однозначная разрешимость задачи (6.1) (см. [12_7]). Условия на $S_i(t)$ таковы, что задача Коши и первая начально-краевая задача для гиперболических уравнений (2.1) и так называемых сильно гиперболических систем (к ним, например, относится нестационарная система уравнений теории упругости) оказываются частными случаями задачи (6.1) и, следовательно, их однозначная разрешимость вытекает из однозначной разрешимости абстрактной задачи Коши (6.1), установленной в работе [12_7] (см. по этому поводу работу [12_8], в которой сделаны эти выводы из результатов работы [12_7]). Аналогичный метод дан нами и для нестационарных уравнений других типов: параболического, типа Шредингера, линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса (см. [$12_{7,8}$]). Он позволил исследовать начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла ([3]) и ряда других систем механики ([10], [27] и др.).

Проиллюстрируем этот метод на примере первой начально-краевой задачи для волнового уравнения

$$\mathscr{L}u \equiv u_{tt} - \Delta u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi, \quad u|_{S_T} = 0, \tag{6.2}$$

в $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где Ω — ограниченная область, считая $f \in L_2(Q_T)$. Пусть граница Ω обладает свойствами, описанными в теореме 7.2 гл. II и гарантирующими однозначную разрешимость в $W_2^2(\Omega)$ задачи

$$\Delta u = \chi(x), \qquad u|_S = 0 \tag{6.3}$$

при $\forall \chi \in L_2(\Omega)$ *). Запишем задачу (6.2) в виде операторного уравнения

$$Au = \{f;\ \varphi;\ \psi\}, \tag{6.4}$$

где A есть неограниченный линейный оператор в пространстве $L_2(Q_T)$, сопоставляющий каждой функции

*) Собственно, для уравнения (6.2), а также для гиперболических уравнений, у которых коэффициенты a_{ij} при производных $u_{x_i x_j}$ не зависят от t, это условие о разрешимости в $W_2^2(\Omega)$ задачи Дирихле $\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij} u_{x_j}) = \chi$, $u|_S = 0$ можно отбросить и работать в пространстве $W_2^1(\Omega)$, считая Ω произвольной областью. Однако, если коэффициенты a_{ij} зависят от t, то нам приходится иметь дело с пространством $W_2^2(\Omega)$, чтобы быть уверенными, что решения указанной задачи Дирихле, когда χ пробегает все $L_2(\Omega)$, заполняют некоторое подмножество $L_2(\Omega)$, не зависящее от t (т. е. не зависящее от коэффициентов $a_{ij}(x, t)$).

$u(x, t)$ из области своего определения $\mathscr{D}(A)$ элемент $\{\mathscr{L}u(x, t);\ u(x, 0);\ u_t(x, 0)\}$ гильбертова пространства $\mathscr{W} = L_2(Q_T) \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Скалярное произведение в $\mathscr{W}$ определим так:

$$(\{f_1;\ \varphi_1;\ \psi_1\},\ \{f_2;\ \varphi_2;\ \psi_2\})_{\mathscr{W}} = \\ = (f_1, f_2)_{2, Q_T} + (\varphi_1, \varphi_2)_{2,\Omega}^{(1)} + (\psi_1, \psi_2)_{2, \Omega},$$

а норму в $\mathscr{W}$ обозначим через $\|\cdot\|_{\mathscr{W}}$.

В качестве $\mathscr{D}(A)$ возьмем $W_{2,0}^2(Q_T)$ — совокупность элементов $W_2^2(Q_T)$, равных нулю на боковой поверхности S_T. Целью дальнейших рассуждений является доказательство того, что оператор A допускает замыкание $\bar{A}$, оператор $\bar{A}$ имеет обратный и множество значений оператора $\bar{A}$ совпадает со всем $\mathscr{W}$. Функция $u = \bar{A}^{-1}\{f;\ \varphi;\ \psi\}$ будет обобщенным решением задачи (6.2). Возможность замыкания A доказывается так же, как в § 2 гл. III. Для доказательства остальных фактов, а также для описания оператора $\bar{A}^{-1}$, вспомним энергетическое неравенство (3.3). Применительно к волновому оператору из (6.2) его можно, несколько огрубляя, записать в виде:

$$|u|_{Q_T} \equiv \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left(\int_{\Omega} (u_t^2 + u_x^2 + u^2)\, dx \right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant c \left[(\|u(x, 0)\|_{2,\Omega}^{(1)})^2 + \|u_t(x, 0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\mathscr{L}u\|_{2, Q_T}^2 \right]^{1/2}. \quad (6.5)$$

Оно справедливо для $\forall u$ из $\mathscr{D}(A)$. Благодаря ему из сходимости $Au_m = \{f_m;\ \varphi_m;\ \psi_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, $u_m \in \mathscr{D}(A)$, в норме $\mathscr{W}$ к некоторому элементу $\{f;\ \varphi;\ \psi\} \in \mathscr{W}$ следует сходимость самих функций u_m в норме $|\cdot|_{Q_T}$ из (6.5) (и тем более в норме $L_2(Q_T)$) к некоторому элементу $u(x, t)$ пространства $L_2(Q_T)$. Это означает, что $\bar{A}$ имеет ограниченный обратный и область значений $\mathscr{R}(\bar{A})$ есть замкнутое подпространство пространства $\mathscr{W}$. Предельный элемент $u(x, t)$ присоединяется, по определению, к $\mathscr{D}(A)$ и $\bar{A}u$ полагается равным $\{f;\ \varphi;\ \psi\}$. Так строится $\mathscr{D}(\bar{A})$. Из (6.5) также следует, что для u из $\mathscr{D}(\bar{A})$ конечна норма $|u|_{Q_T}$, $u(x, t)$ непрерывна по $t \in [0, T]$ в норме $\left(\int\limits_{\Omega}(u_t^2+u_x^2+u^2)\,dx\right)^{1/2}$ и $u\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при $\forall t\in$ $\in[0,\ T]$.

Однако производных второго порядка присоединенные к $\mathscr{D}(A)$ элементы $\mathscr{D}(\bar{A})$ могут не иметь, и потому нельзя утверждать, что для всех элементов u из $\mathscr{D}(\bar{A})$ элемент $\bar{A}u=\{\mathscr{L}u;\ u(x,\ 0);\ u_t(x,\ 0)\}$. Чтобы понять, как «вычисляется» $\bar{A}$ на $u\in\mathscr{D}(\bar{A})$, заменим равенство (6.4) для u из $\mathscr{D}(A)$ эквивалентными ему требованиями:

1) $u(x,\ 0)=\varphi$ и 2) $u(x,\ t)$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Omega}u_t(x,\ t)\,\eta(x,\ t)\,dx+\int\limits_{Q_t}(-u_t\eta_t+u_x\eta_x)\,dx\,dt-\\-\int\limits_{\Omega}\psi\eta(x,\ 0)\,dx=\int\limits_{Q_t}f\eta\,dx\,dt \tag{6.6}$$

при любой $\eta\in W_{2,0}^1(Q_T)$ (т. е. $\eta\in W_2^1(Q_T)$ и $\eta|_{S_T}=0$). Эти требования 1) и 2) сохраняют свой вид и для $u\in\mathscr{D}(\bar{A})$. Действительно, если $u_m\in\mathscr{D}(A)$ и $Au_m=$ $=\{f_m;\ \varphi_m;\ \psi_m\}$ сходятся в норме $\mathscr{W}$ к $\{f;\ \varphi;\ \psi\}$, то, как указано выше, u_m сходятся к u в норме $|\cdot|_{Q_T}$, и потому в тождестве (6.6), записанном для $u=u_m$, $f=f_m$, $\psi=\psi_m$, можно перейти к пределу по $m\to\infty$. В результате получим (6.6) для предельных функций u, f и ψ. Равенство $u(x,\ 0)=\varphi(x)$ тоже будет иметь место для предельных функций u и φ.

Итак, мы показали, что если $u\in\mathscr{D}(\bar{A})$ и

$$\bar{A}u=\{f;\ \varphi;\ \psi\}, \tag{6.7}$$

то для u, f, φ и ψ верны соотношения 1) и 2).

Докажем теперь, что $\mathscr{R}(\bar{A})=\mathscr{W}$. Так как $\mathscr{R}(\bar{A})=$ $=\overline{\mathscr{R}(A)}$, т. е. $\mathscr{R}(\bar{A})$ есть замкнутое подпространство $\mathscr{W}$, то несовпадение $\mathscr{R}(\bar{A})$ с $\mathscr{W}$ означает, что существует элемент $\{\tilde{f};\ \tilde{\varphi};\ \tilde{\psi}\}$ в $\mathscr{W}$, ортогональный всем элементам из $\mathscr{R}(A)$, т. е. такой, что

$$\int\limits_{Q_T}\tilde{f}\mathscr{L}v\,dx\,dt+\int\limits_{\Omega}\tilde{\varphi}_x v_x(x,\ 0)\,dx+\int\limits_{\Omega}\tilde{\psi}v_t(x,\ 0)\,dx=0 \tag{6.8}$$

для $\forall v \in \mathscr{D}(A)$. Покажем, что из (6.8) следует тождественное обращение $\tilde{f}$, $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ в нуль. Для этого возьмем в (6.8) в качестве v функцию $v(x, t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и $v(x, t) = \int\limits_{t_1}^{t} d\xi \int\limits_{t_1}^{\xi} \varphi(x, \eta)\, d\eta$, $t \in [t_1, T]$, где $\varphi(x, t)$ есть решение задачи

$$\Delta\varphi(x, t) = \int\limits_{T}^{t} \tilde{f}(x, \tau)\, d\tau, \quad \varphi|_S = 0, \quad t \in [t_1, T]. \qquad (6.9)$$

Нетрудно видеть, что такое v принадлежит $\mathscr{D}(A)$. Подставим его в (6.8), и v и $\tilde{f}$ выразим через φ. Это даст соотношение

$$\int\limits_{t_1}^{T} \int\limits_{\Omega} \Delta\varphi_t \left(\varphi - \int\limits_{t_1}^{t} d\xi \int\limits_{t_1}^{\xi} \Delta\varphi(x, \eta)\, d\eta\right) dx\, dt = 0,$$

из которого с помощью интегрирования по частям и учета $\varphi|_S = 0$ и $\varphi|_{t=T} = 0$ получим

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \varphi_x^2(x, t_1)\, dx + \int\limits_{t_1}^{T} \int\limits_{\Omega} \Delta\varphi \int\limits_{t_1}^{t} \Delta\varphi(x, \eta)\, d\eta\, dx\, dt = 0,$$

а отсюда

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \varphi_x^2(x, t_1)\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{t_1}^{T} \Delta\varphi(x, \eta)\, d\eta\right)^2 dx = 0. \qquad (6.10)$$

Ввиду произвола $t_1 \in [0, T]$ из (6.10) заключаем, что $\varphi \equiv 0$, а потому и $\tilde{f} \equiv 0$. Благодаря этому соотношение (6.8) приобретает вид

$$\int\limits_{\Omega} \tilde{\varphi}_x v_x(x, 0)\, dx + \int\limits_{\Omega} \tilde{\psi} v_t(x, 0)\, dx = 0. \qquad (6.11)$$

Так как (6.11) верно при $\forall v \in \mathscr{D}(A)$, т. е. $\forall v$ из $W_{2,0}^2(Q_T)$, то легко понять, что из (6.11) следует: $\tilde{\varphi} \equiv 0$ и $\tilde{\psi} \equiv 0$. Итак, мы доказали, что $\mathscr{R}(\bar{A})$ есть все $\mathscr{W}$, т. е. уравнение (6.7) имеет решение $u \in \mathscr{D}(\bar{A})$ для

$\forall\{f;\ \varphi;\ \psi\}\in\mathscr{W}$. Оно единственно в классе $\mathscr{D}(\bar{A})$. Для него справедлива оценка (6.5), т. е.

$$|u|_{Q_T}\leqslant c\left[\left(\|\varphi\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2+\|\psi\|^2_{2,\Omega}+\|f\|^2_{2,Q_T}\right]^{1/2},\qquad(6.12)$$

и энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_t}\left(u_t^2+u_x^2\right)dx\,\Big|_{t=0}^{t=t}=\int\limits_{Q_t}fu_t\,dx\,dt.$$

Действительно, (6.5) и последнее равенство справедливы для любого $u(x,\ t)$ из $\mathscr{D}(A)$, а тогда «по замыканию в норме $|\cdot|_{Q_T}$» они будут выполняться и для $\forall u\in\mathscr{D}(\bar{A})$.

Из всего сказанного о функциях из $\mathscr{D}(\bar{A})$ следует, что $u=\bar{A}^{-1}\{f;\ \varphi;\ \psi\}$ является об. решением задачи (6.2) из энергетического класса. Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема 6.1. *Задача* (6.2) *имеет единственное обобщенное решение из энергетического класса при* $\forall f\in L_2(Q_T)$, $\varphi\in\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $\psi\in L_2(\Omega)$.

Из рассуждений данного параграфа следует, что единственность решения задачи (6.2) имеет место в $\mathscr{D}(\bar{A})$. Однако в силу теоремы 2.1 она сохраняется и в классе $W_2^1(Q_T)$. Более того, в процессе доказательства теоремы 6.1 мы фактически доказали теорему единственности для (6.2) в классе обобщенных решений из $L_2(Q_T)$. *Обобщенным решением задачи* (6.2) *из пространства* $L_2(Q_T)$ назовем функцию $u(x,t)\in L_2(Q_T)$ и удовлетворяющую тождеству

$$\int\limits_{Q_T}u\,(\eta_{tt}-\Delta\eta)\,dx\,dt-\int\limits_{\Omega}\psi\eta(x,\ 0)\,dx+\\+\int\limits_{\Omega}\varphi\eta_t(x,\ 0)\,dx=\int\limits_{Q_T}f\eta\,dx\,dt\qquad(6.13)$$

при $\forall\eta\in W^2_{2,0}(Q_T)$ и $\eta|_{t=T}=0$, $\eta_t|_{t=T}=0$.

Теорема 6.2. *Для задачи* (6.2) *справедлива теорема единственности в классе обобщенных решений из* $L_2(Q_T)$.

Действительно, пусть $u\in L_2(Q_T)$ и удовлетворяет тождеству (6.13) с $\varphi=\psi=f=0$. Заменим в нем переменную t на $T-\tau$. Тогда (6.13) примет вид

$$\int_{Q_T} u(\eta_{\tau\tau}-\Delta\eta)\,dx\,d\tau=0, \quad Q_T=\{(x,\tau)\colon\ x\in\Omega,\ \tau\in(0,T)\}, \tag{6.14}$$

где $\eta\in W^2_{2,0}(Q_T)$, $\eta|_{\tau=0}=0$, $\eta_\tau|_{\tau=0}=0$. Но (6.14) несет ту же информацию, что и (6.8) при $\tilde\varphi=\tilde\psi=0$. А из такого тождества нами было выведено заключение о равенстве $\tilde f$ нулю, так что из (6.14) следует $u\equiv 0$. Теорема 6.2 доказана. Используя (3.3) для уравнения из (6.2), легко показать, что утверждение теоремы 6.1 верно и для $\forall f\in L_{2,1}(Q_T)$.

Теоремы 6.1 и 6.2, как сказано в начале этого параграфа, справедливы и для уравнений (2.1) общего вида.

Примечательной особенностью рассуждений данного параграфа является то, что мы вывели теорему существования задачи (6.2) из теоремы единственности для сопряженной задачи (рассуждение, связанное с доказательством отсутствия ортогонального дополнения в $\mathscr{W}$ к $\mathscr{R}(A)$, и есть теорема единственности в $L_2(Q_T)$ для задачи, сопряженной к задаче (6.2)). Сам по себе этот факт почти тривиален и одинаково формулируется как в конечномерном эвклидовом пространстве для линейных алгебраических систем, так и в бесконечномерных пространствах для уравнений $Au=f$ с ограниченным и неограниченным линейным оператором A. Нетривиальная же часть рассуждения состоит в том, что нам удалось «в лоб» доказать теорему единственности для сопряженной задачи в классе обобщенных решений из $L_2(Q_T)$ (заметим, что задача (6.2) и формально сопряженная ей задача

$$\mathscr{L}^*u=f,\quad u|_{t=T}=\varphi;\quad u_t|_{t=T}=\psi,\quad u|_{S_T}=0, \tag{6.2'}$$

для случая волнового уравнения просто совпадают, если в (6.2′) заменить t на $T-\tau$, а для общих уравнений (2.1) однотипны: отличаются друг от друга младшими, несущественными членами).

Из такой же теоремы единственности теоремы существования выводятся без каких-либо аналитических представлений для искомых решений и даже без построения каких-либо их аппроксимаций. Такие методы доказательства теорем существования мы называем «функциональными». Их схема типична для рассуждений, проводимых в функциональном анализе.

§ 7. Метод Фурье и Лапласа

Начально-краевые задачи (и задачу Коши) для уравнений (2.1) с коэффициентами, не зависящими от t, можно с помощью преобразования Лапласа по t свести к решению соответствующих краевых задач для эллиптических уравнений с параметром. Делается это так. Пусть $u(x, t)$ есть решение задачи (3.1), причем коэффициенты $\mathscr{L}$ ($\mathscr{L}u$ выписано в (2.1)) не зависят от t. Умножим уравнение $\mathscr{L}u = f$ на $e^{-\lambda t}$, и результат проинтегрируем по t от нуля до ∞. Если $u(x, t)$ и ее производные, входящие в $\mathscr{L}$, возрастают при $t \to \infty$ медленнее, чем $e^{\operatorname{Re}\lambda t}$, то все интегралы сходятся. Введем обозначения:

$$\int_0^\infty u(x, t)\, e^{-\lambda t}\, dt = v(x, \lambda), \qquad \int_0^\infty f(x, t)\, e^{-\lambda t}\, dt = \mathscr{F}(x, \lambda).$$

Тогда

$$\int_0^\infty u_{x_i}(\qquad\qquad \int_0^\infty u_{x_i x_j} e^{-\lambda t}\, dt = v_{x_i x_j},$$

а

$$\int_0^\infty u_{tt} e^{-\lambda t}\, dt = \lambda^2 \int_0^\infty u e^{-\lambda t}\, dt - (u_t + \lambda u)\,|_{t=0} = \lambda^2 v - \psi - \lambda\varphi,$$

и потому $\int_0^\infty \mathscr{L}u e^{-\lambda t}\, dt = \int_0^\infty f e^{-\lambda t}\, dt$ дает уравнение

$$\mathscr{L}_0 v = \lambda^2 v - (\psi(x) + \lambda\varphi(x) + \mathscr{F}(x, \lambda)), \tag{7.1}$$

где $\mathscr{L}_0 v = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\, v_{x_j}) - a_i(x)\, v_{x_i} - a(x)\, v$ — эллиптическая часть оператора $\mathscr{L}$ из (2.1). Краевое условие из (3.1) для $u(x, t)$ дает краевое условие для v:

$$v|_S = 0. \tag{7.2}$$

Таким образом, задача (3.1) сведена к задаче (7.1), (7.2). Задача (7.1), (7.2) однозначно разрешима в полуплоскости $\lambda_1 \equiv \operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda_1^0$ при достаточно большом λ_1^0 (см. гл. II), ее решение аналитически зависит от λ и оно стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$ в норме того или иного пространства. Чтобы добиться лучшего убывания v по λ, надо задачу (3.1) предварительно свести к задаче с однородными начальными условиями (или даже к такой, в которой $\varphi = \psi = 0$ и $\left.\dfrac{\partial^l f}{\partial t^l}\right|_{t=0} = 0$, $l = 0, 1, \ldots, N$).

По функции $v(x, \lambda)$ решение задачи (3.1) восстанавливается по формуле обратного преобразования Лапласа:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} v(x, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda, \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_1^0. \tag{7.3}$$

Оправдание этой схемы в классе классических решений дано в моей первой книге [12₂] (гл. IV)*). На базе доказанной там разрешимости задачи (7.1), (7.2) в классе $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и оценок норм $\|v\|_{2,\Omega}$ и $\|v\|_{2,\Omega}^{(1)}$ ее решений дается оправдание метода Лапласа в классе обобщенных решений из энергетического класса (см. [12₂], стр. 273). Если привлечь для задачи (7.1), (7.2) результаты §§ 6, 7 гл. II по разрешимости ее в $W_2^2(\Omega)$, то нетрудно получить соответствующие результаты о разрешимости задачи (3.1) в пространстве $W_2^2(Q_T)$. Более полные результаты по эллиптическим уравнениям, изложенные в книге [12₁₃], позволяют аналогично получить соответствующие

*) Надо при этом принять во внимание, что в годы, когда писалась эта книга (1950—51), еще не были получены нами результаты, изложенные частично в §§ 6, 7 гл. II. Единственным методом исследования гладкости обобщенных решений в то время был метод конечных разностей, который и занимает в книге центральное место. Вопросам снижения предположений о гладкости входящих в задачи функций и границы области Ω не уделялось особое внимание: основные результаты книги были новы и для сколь угодно гладких данных.

результаты по разрешимости задачи (3.1) в других функциональных пространствах.

Перейдем теперь к методу Фурье. Его полное исследование во всех пространствах $W_2^l(\Omega)$, $l=1, 2, \ldots$, при всех трех краевых классических условиях было дано мною в книге [12₂]. Здесь мы изложим его для случая первого краевого условия при $l = 1$ и $l = 2$. Метод Фурье применим к уравнениям вида

$$\mathscr{L}u \equiv u_{tt} - \mathscr{L}_0 u = f(x,\ t), \tag{7.4}$$

где $\mathscr{L}_0 u = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x) u_{x_j}) + a(x) u$. Пусть ради удобства дальнейшей записи $a(x) \leqslant 0$. (Если $a(x)$ не удовлетворяет этому условию, то несколько первых собственных значений, отвечающих оператору $\mathscr{L}_0$, могут оказаться положительными или равными нулю. Отвечающие им частные решения уравнений вида (7.4) будут иметь форму, отличную от формы решений, соответствующих отрицательным собственным значениям. Однако это не вносит никаких изменений в проводимые ниже рассуждения, касающиеся сходимости бесконечных рядов, образующих решение задачи (3.1): наличие нескольких первых слагаемых в этих рядах, имеющих другой вид, не влияет на характер сходимости этих рядов.)

Начнем с исследования однородной задачи

$$\begin{gathered} \mathscr{L}u \equiv u_{tt} - \mathscr{L}_0 u = 0, \\ u\,|_{S_T} = 0, \quad u\,|_{t=0} = \varphi, \quad u_t\,|_{t=0} = \psi. \end{gathered} \tag{7.5}$$

Уравнение из (7.5) имеет частные решения вида $u = T(t)X(x)$. Подставив такое u в уравнение (7.5) и поделив обе части уравнения на $u = TX$, получим

$$\frac{T''}{T} - \frac{\mathscr{L}_0 X}{X} = 0,$$

откуда ясно, что $\frac{\mathscr{L}_0 X}{X}$ и $\frac{T''}{T}$ должны равняться константе, т. е.

$$\mathscr{L}_0 X = \lambda X \tag{7.6}$$

и

$$T'' = \lambda T, \tag{7.7}$$

где $\lambda = \mathrm{const}$. Возьмем только те решения $u = TX$, которые удовлетворяют при всех $t \geqslant 0$ граничному условию, поставленному в исследуемой задаче, т. е. в данном случае условию

$$X|_S = 0. \tag{7.8}$$

Задача (7.6), (7.8) есть спектральная задача, исследованная выше, в §§ 4, 7 гл. II. Она имеет нетривиальные решения $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ лишь при $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, образующих спектр задачи. Пусть система всех линейно независимых собственных функций $\{\varphi_k(x)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ ортонормирована в $L_2(\Omega)$, так что

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_k^l. \tag{7.9}$$

Тогда

$$[\varphi_k, \varphi_l] \equiv \int\limits_\Omega (a_{ij}\varphi_{kx_j}\varphi_{lx_i} + a\varphi_k\varphi_l)\, dx = -\lambda_k\delta_k^l. \tag{7.10}$$

В силу предположения $a(x) \leqslant 0$ все собственные значения отрицательны. Нам удобно ввести обозначение: $\lambda_k = -\mu_k^2$, $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2, \ldots$ Числа $\mu_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Возвратимся к уравнению (7.7). Его общее решение T_k при $\lambda = -\mu_k^2$ равно $a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t$ с произвольными постоянными a_k и b_k.

Ввиду этого ряд

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t)\, \varphi_k(x) \tag{7.11}$$

формально удовлетворяет уравнению (7.5) и граничному условию $u|_{S_T} = 0$ при любых числах a_k и b_k. Эти постоянные однозначно вычисляются из начальных условий (3.1). А именно,

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x) = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k b_k \varphi_k(x) = \psi(x),$$

откуда в силу (7.9)

$$a_k = (\varphi, \varphi_k), \qquad b_k = \mu_k^{-1}(\psi, \varphi_k). \tag{7.12}$$

Обоснование метода Фурье состоит в исследовании того, когда ряд (7.11) с a_k и b_k из (7.12) сходится в норме того или иного функционального пространства и в каком смысле сумму этого ряда можно считать решением задачи (7.5). Справедлива следующая теорема:

Теорема 7.1. *Пусть Ω есть произвольная ограниченная область, для $\mathscr{L}$ выполнены условия* (2.2) *и* $0 \geqslant a(x) \geqslant C$, *а* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *суть элементы пространств* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *и* $L_2(\Omega)$ *соответственно. Тогда ряд* (7.11) *с* a_k *и* b_k *из* (7.12) *и ряды, полученные его однократным почленным дифференцированием по любому из* x_i *или* t, *сходятся в норме* $L_2(\Omega)$ *равномерно по* $t \in [0, \infty)$. *Сумма ряда есть обобщенное решение задачи* (7.5) *из энергетического класса.*

Если коэффициенты $\mathscr{L}$ *из* (7.5) *и область* Ω *удовлетворяют условиям теоремы* 7.2 *гл.* II, $a(x) \leqslant 0$, $\varphi \in W_{2,0}^2(\Omega)$, *а* $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, *то ряд* (7.11) *с* a_k *и* b_k *из* (7.12) *допускает двукратное почленное дифференцирование по* x_i *и* t *и все ряды сходятся в* $L_2(\Omega)$ *равномерно по* $t \in [0, \infty)$. *Сумма ряда есть об. решение задачи* (7.5) *из класса* $W_2^2(Q_T)$, *причем она удовлетворяет уравнению при* $\forall t$ *для почти всех точек* x *из* Ω.

Теорема 7.1 легко выводится из теоремы 4.1 и теоремы 7.4 гл. II. Действительно, в силу предположения $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ ряд для $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ сходится в норме $W_2^1(\Omega)$ и $\|\varphi\|_{2,\Omega}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, а $[\varphi, \varphi] = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 a_k^2$. Ряд для $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k b_k \varphi_k(x)$ сходится в $L_2(\Omega)$ и $\|\psi\|_{2,\Omega}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 b_k^2$, ибо $\psi(x) \in L_2(\Omega)$. Поэтому ряд (7.11) сходится так, как сформулировано в первой части теоремы, причем для суммы его справедливы соотношения

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t)^2 \leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty,$$

$$[u, u] = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 (a_k^2 + b_k^2) < \infty,$$

$$\|u_t\|^2_{2,\Omega}=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2(-a_k\sin\mu_k t+b_k\cos\mu_k t)^2\leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2(a_k^2+b_k^2)<\infty.$$

При выполнении условий второй части теоремы 7.1 собственные функции $\varphi_k(x)$ принадлежат $W^2_{2,0}(\Omega)$ и образуют базис в $W^2_{2,0}(\Omega)$, причем

$$\{\varphi_k,\ \varphi_l\}\equiv(\mathscr{L}_0\varphi_k,\ \mathscr{L}_0\varphi_l)=\lambda_k^2\delta_k^l=\mu_k^4\delta_k^l. \tag{7.13}$$

Напомним, что обычная норма в $W^2_{2,0}(\Omega)$ эквивалентна норме $|u|_2=\{u,\ u\}^{1/2}$. Норма же $|\cdot|_2$ для ряда (7.11) легко подсчитывается, исходя из (7.13), а именно:

$$|u|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^4(a_k\cos\mu_k t+b_k\sin\mu_k t)^2\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^4(a_k^2+b_k^2). \tag{7.14}$$

Этим же числовым рядом $j\equiv 2\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^4(a_k^2+b_k^2)$ мажорируются и величины $[u_t,\ u_t]$ и $\|u_{tt}\|^2_{2,\Omega}$. Числовой же ряд j сходится, ибо из условия $\varphi\in W^2_{2,0}(\Omega)$ следует

$$a_k=(\varphi,\ \varphi_k)=\frac{1}{\lambda_k}(\varphi,\ \mathscr{L}_0\varphi_k)=\frac{1}{\lambda_k}(\mathscr{L}_0\varphi,\ \varphi_k)$$

и $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2a_k^2=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^4a_k^2=\|\mathscr{L}_0\varphi\|^2_{2,\Omega}<\infty$, а из условия $\psi\in\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_kb_k\varphi_k(x)$ к $\psi(x)$ в норме $[\ ,\ ]^{1/2}$, причем в силу (7.10)

$$[\psi,\ \psi]=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^4b_k^2<\infty.$$

Итак, утверждения теоремы 7.1 о сходимости ряда (7.11) доказаны. То, что его сумма есть обобщенное решение задачи (7.5) из соответствующего функционального пространства, легко проверяется, исходя из определения таких решений. При выполнении условий второй части теоремы сумма ряда (7.11) удовлетворяет уравнению $\mathscr{L}u=0$ при $\forall t\geqslant 0$ для почти всех x из Ω, так что она заведомо есть об. решение задачи (7.5) из класса $W_2^2(Q_T)$. Начальные условия выполняются в первом случае в виде

$$\|u(x,\ t)-\varphi(x)\|_{2,\ \Omega}^{(1)}\to 0,\quad \|u_t(x,\ t)-\psi(x)\|_{2,\ \Omega}\to 0,$$

а во втором — в виде: $\|u(x,\ t)-\varphi(x)\|_{2,\ \Omega}^{(2)}\to 0$ и $\|u_t(x,\ t)-\psi(x)\|_{2,\ \Omega}^{(1)}\to 0$ при $t\to 0$.

Рассмотрим теперь случай неоднородного уравнения. Начальные условия можно взять однородными:

$$\mathscr{L}u\equiv u_{tt}-\mathscr{L}_0u=f(x,\ t), \tag{7.15}$$
$$u|_{S_T}=0,\qquad u|_{t=0}=0,\qquad u_t|_{t=0}=0.$$

Сумма решений задач (7.5) и (7.15), очевидно, даст решение задачи

$$\mathscr{L}u=f,\qquad u|_{S_T}=0,\qquad u|_{t=0}=\varphi,\qquad u_t|_{t=0}=\psi. \tag{7.16}$$

Пусть $f(x,\ t)\in L_2(Q_T)$. Разложим f в ряд по собственным функциям $\varphi_k(x)$

$$f(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\,\varphi_k(x),\quad f_k(t)=(f,\ \varphi_k). \tag{7.17}$$

Он, очевидно, сходится в $L_2(\Omega)$ при почти всех значениях t из $[0,\ T]$. Решения задачи (7.15) ищем в виде ряда

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\,\varphi_k(x). \tag{7.18}$$

Подставив его в уравнение $\mathscr{L}u=f$, получим для определения функций $T_k(t)$ уравнения

$$T_k''+\mu_k^2T_k=f_k(t).$$

Их решениями, удовлетворяющими при $t=0$ однородным начальным условиям, являются функции

$$T_k(t)=\frac{1}{\mu_k}\int_0^t f_k(\tau)\sin\mu_k(t-\tau)\,d\tau. \tag{7.19}$$

Итак, ряд (7.18) с $T_k(t)$ из (7.19) формально удовлетворяет всем условиям задачи (7.15). Он сходится в $W_2^1(\Omega)$ равномерно по $t \in [0, T]$ с $\forall T$, ибо

$$\left[\sum_{k=m}^{m+N} T_k\varphi_k, \sum_{k=m}^{m+N} T_k\varphi_k\right] = \sum_{k=m}^{m+N} \mu_k^2 T_k^2(t) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=m}^{m+N} \left(\int_0^t |f_k(\tau)|\,d\tau\right)^2 \leqslant T\sum_{k=m}^{m+N}\int_0^T f_k^2(\tau)\,d\tau$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T f_k^2(\tau)\,d\tau \equiv \|f\|^2_{2,\,Q_T} < \infty.$$

Кроме того, легко проверить, что сумма ряда (7.18) есть об. решение задачи (7.15) из энергетического класса. Для двукратной дифференцируемости ряда (7.18) надо обеспечить, как мы видели выше, сходимость ряда $j = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^2(t)\mu_k^4$. Если предположить, что $f(x, t)$ имеет производную f_t из $L_2(Q_T)$, то ряд j мажорируется для $\forall t \in [0, T]$ сходящимся числовым рядом, т. е. j сходится равномерно по $t \in [0, T]$. Действительно, $T_k(t)$ можно представить в виде

$$T_k(t) = \mu_k^{-2}\int_0^t f_k(\tau)\,d\cos\mu_k(t-\tau) =$$

$$= \mu_k^{-2}\left[-\int_0^t f_k'(\tau)\cos\mu_k(t-\tau)\,d\tau + f_k(t) - f_k(0)\cos\mu_k t\right] =$$

$$= \mu_k^{-2}\left[\int_0^t f_k'(\tau)\bigl(1-\cos\mu_k(t-\tau)\bigr)\,d\tau + f_k(0)\bigl(1-\cos\mu_k t\bigr)\right],$$

откуда следует

$$T_k^2(t) \leqslant 8\mu_k^{-4}\left[T\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau + f_k^2(0)\right]$$

и

$$\sum_{k=m}^{m+N} T_k^2(t)\,\mu_k^4 \leqslant 8T\sum_{k=m}^{m+N}\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau + 8\sum_{k=m}^{m+N} f_k^2(0)\to 0$$

при $m, N\to\infty$.

Тем самым доказана

Теорема 7.2. *Пусть Ω — произвольная ограниченная область, для $\mathscr{L}$ выполнены условия* (2.2) *и* $0\geqslant a(x)\geqslant c$, *а* $f\in L_2(Q_T)$. *Тогда ряд* (7.18) *с* T_k *из* (7.19) *сходится в* $W_2^1(\Omega)$ *равномерно по* $t\in[0, T]$, *и его сумма есть об. решение задачи* (7.15) *из энергетического класса. Если коэффициенты* $\mathscr{L}$ *и область* Ω *удовлетворяют условиям теоремы* 7.2 *гл.* II, $0\geqslant a(x)$, *а* f *и* f_t *принадлежат* $L_2(Q_T)$, *то ряд* (7.18) *и ряды, полученные его почленным дифференцированием один и два раза по* x_i *и* t, *сходятся в* $L_2(\Omega)$ *равномерно по* $t\in[0, T]$. *Сумма ряда есть об. решение задачи* (7.15) *из* $W_2^2(Q_T)$, *причем она удовлетворяет уравнению* (7.15) *при всех* $t\in[0, T]$ *для почти всех* x *из* Ω.

Замечание 7.1. Как сказано выше, предположение $0\geqslant a(x)$ в теоремах 7.1 и 7.2 можно отбросить. Это может повлиять лишь на вид первых членов рядов (7.11) и (7.18). Утверждения же теорем 7.1 и 7.2 о сходимости рядов не меняются.

Во второй части теоремы 7.2 условие существования у f производной f_t можно заменить, например, условием существования $f_{x_i}\in L_2(Q_T)$ и $f|_{S_T}=0$.

Аналогичная теорема установлена в [12_2] и для других краевых условий.

ГЛАВА V

РАЗНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

В этой главе мы коснемся ряда более сложных задач, которые могут быть исследованы методами, изложенными в гл. II — IV.

§ 1. Эллиптические уравнения произвольного порядка и сильно эллиптические системы

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset R_n$ систему уравнений

$$\mathscr{L}\boldsymbol{u} \equiv \sum_{|i|,|j| \leqslant m} (-1)^{|i|} \mathscr{D}^i \left(A^{(i,j)}(x) \mathscr{D}^j \boldsymbol{u}\right) = \boldsymbol{f}, \qquad (1.1)$$

в которой $\mathscr{D}^i = \dfrac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}}$, $i = (i_1, \ldots, i_s)$, $|i| = s$, $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{f}$ — векторы $(u_1, \ldots, u_N)$ и $(f_1, \ldots, f_N)$, а $A^{(i,j)}(x)$ — квадратные матрицы порядка N, причем $A^{(i,j)}(x) = A^{(j,i)}(x)$, $|i| = |j| = m$. Система (1.1) называется *сильно эллиптической в точке* $x \in \overline{\Omega}$, если для любого вектора $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N) \neq 0$ и любых чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \neq 0$ квадратичная форма

$$A(x; \xi)\zeta \cdot \zeta \equiv$$
$$\equiv \sum_{|i|,|j|=m} A^{(i,j)}(x) \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_m} \xi_{j_1} \ldots \xi_{j_m} \zeta \cdot \zeta > 0. \qquad (1.2)$$

Здесь символом $\eta \cdot \zeta$ обозначено скалярное произведение N-мерных векторов, т. е. $\sum_{i=1}^{N} \eta_i \zeta_i$. Будем считать, как и в большинстве предшествующих параграфов, все величины вещественными. Неравенство (1.2) накладывает ограничение только на симметрическую часть матриц $A^{(i,j)}$, ибо если представить каждую матрицу $A^{(i,j)}$ в виде

$$A^{(i,j)} = \widehat{A}^{(i,j)} + \widetilde{A}^{(i,j)},$$

где $\widehat{A}^{(i,j)} = \frac{1}{2} A^{(i,j)} + \frac{1}{2} A^{(i,j)*}$ — симметрическая часть $A^{(i,j)}$, а $\widetilde{A}^{(i,j)} = \frac{1}{2} A^{(i,j)} - \frac{1}{2} A^{(i,j)*}$ — кососимметрическая часть $A^{(i,j)}$ (звездочка над матрицей означает ее транспонирование), то

$$A(x, \xi)\zeta \cdot \zeta = \sum_{|i|, |j|=m} \widehat{A}^{(i,j)}(x)\, \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_m} \cdot \xi_{j_1} \ldots \xi_{j_m} \zeta \cdot \zeta \equiv$$
$$\equiv \widehat{A}(x, \xi)\zeta \cdot \zeta.$$

Уравнения, рассмотренные в гл. II, очевидно, являются частным случаем сильно эллиптических систем вида (1.1). Эллиптическое уравнение любого порядка удовлетворяет условию (1.2) и, следовательно, является сильно эллиптической системой. Напротив, класс общих эллиптических систем, выделенный И. Г. Петровским [18_2], и тем более системы, эллиптические в смысле Даглиса — Ниренберга [1], обширнее класса сильно эллиптических систем, определенного М. И. Вишиком [4_1]. Нетрудно показать, что если $A^{(i,j)}$ при $|i| = |j| = m$ не зависят от x, то из (1.2) вытекает справедливость неравенства

$$\int_\Omega \sum_{|i|, |j|=m} A^{(i,j)} \mathscr{D}^i u \mathscr{D}^j u \, dx \geqslant \nu \int_\Omega \sum_{|i|=m} (\mathscr{D}^i u)^2 \, dx, \qquad (1.3)$$
$$\nu = \mathrm{const} > 0,$$

для любой вектор-функции u, принадлежащей $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ (пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, состоящее из скалярных или векторных функций, определено в § 5 гл. I). Для этого надо $u(x)$ продолжить нулем на какой-либо куб и перейти к преобразованиям Фурье по x. Если же $A^{(i,j)}$ зависят от x и являются непрерывными функциями $x \in \overline{\Omega}$, то для любой функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} \sum_{|i|, |j|=m} A^{(i, j)}(x)\mathscr{D}^i u \cdot \mathscr{D}^j u \, dx \geqslant$$
$$\geqslant \nu \int_{\Omega} \sum_{|i|=m} (\mathscr{D}^i u)^2 \, dx - \mu_1 \int_{\Omega} u^2 \, dx \qquad (1.4)$$

с некоторыми $\nu = \text{const} > 0$ и $\mu_1 = \text{const} \geqslant 0$ (см. [$3_{1,2}$], [13]). Мы не будем приводить здесь доказательство этого факта, а положим его в основу определения сильной эллиптичности системы (1.1). Приведем краткую схему доказательства фредгольмовой разрешимости задачи Дирихле для системы (1.1). Граничные условия для нее имеют вид

$$u\Big|_S = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \ldots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}}\Big|_S = 0. \qquad (1.5)$$

Случай неоднородных граничных условий Дирихле легко сводится, как и везде, к однородному. В качестве свободного члена f можно взять любую сумму вида:

$$f(x) = f^0(x) + \sum_{1 \leqslant |i| \leqslant m} \mathscr{D}^i f^i,$$

в которой f^0 и f^i суть квадратично суммируемые по Ω функции (для f^0 и f^i с $|i| < m$ можно потребовать суммируемости со степенями $q_i \geqslant \dfrac{2n}{n + 2(m - |i|)}$ при $n > 2(m - |i|)$, $\forall q_i > 1$ при $n = 2(m - |i|)$ и $q_i = 1$ при $n < 2(m - |i|)$).

Лишь ради экономии места возьмем $f^i \equiv 0$, $1 \leqslant |i| \leqslant m$. Элементы всех матриц $A^{(i, j)}(x)$ будем считать ограниченными функциями (для $A^{(i, j)}(x)$ с $|i| + |j| < 2m$ это условие можно ослабить). Ограничимся рассмотрением задачи (1.1), (1.5) без включения комплексного параметра λ. Общий случай, т. е. задача

$$\mathscr{L} u = \lambda u + f, \qquad u\Big|_S = \ldots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}}\Big|_S = 0, \qquad (1.6)$$

где λ — комплексное число, а $u(x)$ — искомая комплекснозначная функция, рассматривается аналогично.

Обобщенное решение $u(x)$ *задачи* (1.1), (1.5) *из класса* $W_2^m(\Omega)$ есть элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\mathscr{L}(u, \eta) \equiv \int\limits_{\Omega} \sum_{|i|, |j| \leqslant m} A^{(i, j)} \mathscr{D}^j u \cdot \mathscr{D}^i \eta \, dx = \int\limits_{\Omega} f \cdot \eta \, dx \tag{1.7}$$

при $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$.

Введем в $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ новое скалярное произведение с помощью равенства

$$[u, \eta] = \int\limits_{\Omega} \hat{A}^{(i, j)} \mathscr{D}^i u \cdot \mathscr{D}^j \eta \Big|_{\substack{|i|=m \\ |j|=m}} dx + \mu_1 \int\limits_{\Omega} u \eta \, dx. \tag{1.8}$$

В силу (1.4) и неравенств

$$\| \mathscr{D}^j u \|_{2, \Omega}^2 \leqslant c_j \sum_{|i|=m} \| \mathscr{D}^i u \|_{2, \Omega}^2, \qquad 0 \leqslant |j| < m, \tag{1.9}$$

легко доказываемых для $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, норма $\| u \|_m = \sqrt{[u, u]}$ эквивалентна первоначальной норме $\| u \|_{2, \Omega}^{(m)}$ пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$. Разобьем матрицы $A^{(i, j)}$, $|i| = |j| = m$, на суммы $\hat{A}^{(i, j)} + \tilde{A}^{(i, j)}$ и перепишем (1.7) в виде

$$[u, \eta] + \int\limits_{\Omega} \sum_{|i|, |j| = m} \tilde{A}^{(i, j)} \mathscr{D}^j u \cdot \mathscr{D}^i \eta \, dx + \\ + \int\limits_{\Omega} \sum_{|i| + |j| < 2m} A^{(i, j)} \mathscr{D}^j u \cdot \mathscr{D}^i \eta \, dx = \int\limits_{\Omega} f \cdot \eta \, dx. \tag{1.10}$$

Каждый член левой части этого тождества при произвольно фиксированном элементе $u \in W_2^m(\Omega)$ есть, как легко проверить, линейный (т. е. аддитивный и ограниченный) функционал над η в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, и потому в силу теоремы Рисса может быть представлен в виде скалярного произведения [,] η на некоторый элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, зависящий от u. Правая часть (1.10) также может быть представлена в виде $[\mathcal{F}, \eta]$, где $\mathcal{F}$ есть элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, определяемый f. Итак, (1.10) может быть переписано в виде тождества

$$[u, \eta] + [\mathcal{K}u, \eta] + [Bu, \eta] = [\mathcal{F}, \eta]$$

или, что то же, в виде операторного уравнения

$$u + \mathcal{K}u + Bu = \mathcal{F} \tag{1.11}$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$. Так же, как и в § 3 гл. II, доказывается, что $\mathcal{K}$ есть ограниченный оператор в $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, а B — вполне непрерывный. Кроме того, в силу равенств $(\tilde{A}^{(i,j)})^* = -\tilde{A}^{(i,j)}$ оператор $\mathcal{K}$ является кососимметрическим:

$$[\mathcal{K}u, \eta] = [u, \mathcal{K}^*\eta] = -[u, \mathcal{K}\eta] = -[\mathcal{K}\eta, u].$$

Спектр любого кососимметрического оператора лежит на мнимой оси (ибо в комплексном пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ оператор $i\mathcal{K}$ является самосопряженным). Поэтому оператор $E + \mathcal{K}$ обратим, и оператор $(E + \mathcal{K})^{-1}$ является ограниченным оператором, определенным на всем $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$. Ввиду этого уравнение (1.11) эквивалентно уравнению

$$u + (E + \mathcal{K})^{-1} Bu = (E + \mathcal{K})^{-1} \mathcal{F}. \tag{1.12}$$

Оператор $(F + \mathcal{K})^{-1}B$, как произведение ограниченного оператора на вполне непрерывный, есть вполне непрерывный оператор. Следовательно, для уравнения (1.12) справедливы теоремы Фредгольма. В частности, из единственности следует разрешимость (1.12) при любой правой части. В силу эквивалентности (1.12) тождеству (1.7) это утверждение означает, что если для задачи (1.1), (1.5) имеет место теорема единственности в классе об. решений из $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, то задача однозначно разрешима в $W_2^m(\Omega)$ для $\forall f \in L_2(\Omega)$. Теорема единственности для (1.1), (1.5) заведомо имеет место, если матрица $A^{(0,0)}$, стоящая в (1.1) при u, удовлетворяет неравенству $(A^{(0,0)}u, u) \geqslant \nu_1(u, u)$ с достаточно большим $\nu_1 = \mathrm{const}$.

Сформулируем доказанное в виде теоремы:

Теорема 1.1. *Задача* (1.1), (1.5) *разрешима по Фредгольму, если* $f \in L_2(\Omega)$ *), *элементы матриц* $A^{(i,j)}(x)$ *суть ограниченные в* Ω *функции и выполнено условие* (1.4).

Аналогично доказывается фредгольмова разрешимость задачи (1.6) в комплексном пространстве $W_2^m(\Omega)$ при любом комплексном λ. Так же просто исследуется разрешимость в $W_2^m(\Omega)$ тех краевых задач для систем (1.1), для которых обобщенное решение в классе $W_2^m(\Omega)$ определяется тождеством вида

$$\mathscr{L}_\Omega(u, \eta) + \mathscr{L}_S(u, \eta) = \int_\Omega f \cdot \eta \, dx.$$

В нем $\mathscr{L}_\Omega(u, \eta)$ есть интеграл по Ω от суммы произведений производных u и η порядка не выше m, $\mathscr{L}_S(u, \eta)$ — интеграл по границе S от суммы произведений производных u и η порядка не выше $m-1$, а $\eta(x)$ — произвольный элемент некоторого подпространства пространства $W_2^m(\Omega)$, к которому принадлежит искомое решение $u(x)$. Однако не все краевые задачи для системы (1.1) укладываются в эту схему. Их исследование, равно как и исследование задачи (1.6) в других функциональных пространствах (например, в пространствах С. Л. Соболева $W_p^l(\Omega)$ и в пространствах Гельдера $H^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$), требует иной, более сложной техники (см. [1] и [26$_1$]). Теорема 1.1 доказана в работе М. И. Вишика [4$_1$].

Как отмечено выше, одно эллиптическое уравнение любого порядка $2m$ принадлежит к рассмотренному здесь классу систем. В частности, бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u = f$$

удовлетворяет условию (1.2), ибо для него левая часть (1.2) имеет вид $\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^2 \zeta^2$ (в данном случае ζ есть ска-

---

*) Достаточно потребовать, что $f \in L_q(\Omega)$ с $q \geqslant \frac{2n}{n+2m}$ при $n > 2m$, с $\forall q > 1$ при $n = 2m$ и с $q = 1$ при $n < 2m$.

ляр). Условию (1.2) удовлетворяют также уравнения вида $\mathcal{L}u \equiv \mathcal{M}^{(m)}(u) = f$, где $\mathcal{M}$ есть произвольный эллиптический оператор второго порядка с главной частью $a_{ij}u_{x_ix_j}$, а $\mathcal{M}^{(m)}$ — его m-я итерация, ибо для них левая часть (1.2) имеет вид $\left(\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\right)^m \zeta^2$.

Другим примером рассмотренного здесь класса систем является система уравнений теории упругости. В изотропном случае она имеет вид

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ik}(u)}{\partial x_k} = -f^i(x), \quad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{1.13}$$

где

$$\tau_{ik}(u) = 2\mu \cdot \varepsilon_{ik}(u) + \delta_i^k \lambda \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{ll}(u), \quad \varepsilon_{ik}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),$$

$u = (u_1, u_2, u_3)$, а λ и μ — положительные постоянные. Для нее левая часть неравенства (1.2) равна

$$\frac{\mu}{2} \sum_{i,\,k=1}^{3} (\xi_k\zeta_i + \xi_i\zeta_k)^2 + \lambda \left(\sum_{l=1}^{3} \xi_l\zeta_l\right)^2 =$$

$$= \mu\xi^2\zeta^2 + (\mu + \lambda)\left(\sum_{l=1}^{3} \xi_l\zeta_l\right)^2,$$

и следовательно, условие (1.2) выполняется.

Наиболее просто для системы (1.13) решается первая краевая задача, когда на S заданы смещения u. При условиях жесткого закрепления имеем: $u|_S = 0$. Интегральное тождество (1.7) для данной задачи удобно записать в виде

$$\int_\Omega \tau_{ik}(u) \cdot \varepsilon_{ik}(\eta)\,dx = \int_\Omega f\eta\,dx. \tag{1.14}$$

Оно должно выполняться при $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а об. решение $u(x)$ должно лежать в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Легко видеть, что в этом классе справедлива теорема единственности (ибо при $f \equiv 0$ и $\eta = u$ из (1.14) и $u|_S = 0$ следует $u = 0$), а потому и теорема существования при $\forall f \in L_2(\Omega)$.

Рассмотрим еще один пример, который хотя и не подходит под случай сильно эллиптических систем, но исследуется тем же методом, что и одно эллиптическое уравнение. Пусть R_3 — трехмерное эвклидово пространство и в нем ограниченная область Ω, которую ради простоты будем считать односвязной (в том смысле, что любой замкнутый путь стягивается в ней в точку). Обозначим через $\boldsymbol{u}(x)$ вектор-функцию с тремя компонентами $(u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, а через $p(x)$ — скалярную функцию. Требуется найти $\boldsymbol{u}$ и p, удовлетворяющие системе

$$\nu \Delta \boldsymbol{u} + a_i(x)\boldsymbol{u}_{x_i} = \operatorname{grad} p + \boldsymbol{f}(x), \tag{1.15$_1$}$$

уравнению несжимаемости

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \tag{1.15$_2$}$$

и граничному условию

$$\boldsymbol{u}|_S = 0. \tag{1.16}$$

В (1.15$_1$) $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ — заданные вектор-функции, причем $\boldsymbol{a}(x)$ принадлежит $W_2^1(\Omega)$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$, а $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega)$. Система (1.15$_i$) называется системой Озина, а при $\boldsymbol{a} = 0$ — системой Стокса. Обе они являются разными вариантами линеаризаций системы уравнений Навье — Стокса (в случае, когда $\boldsymbol{u}$ и p не зависят от t), описывающей движение вязких жидкостей. Функция p есть давление, $\boldsymbol{u}$ — вектор скорости, $\nu > 0$ — коэффициент кинематической вязкости, $\boldsymbol{f}$ — вектор массовых сил, а (1.16) есть условие прилипания при неподвижных стенках сосуда Ω. Давление p, по его физическому смыслу, определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Будем искать решение, для которого $\boldsymbol{u}$ есть элемент $W_2^1(\Omega)$ ($W_2^1(\Omega)$ — векторное пространство). В силу (1.16) $\boldsymbol{u}$ будет принадлежать $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Уравнение (1.15$_2$) рассмотрим как условие, выделяющее из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ подпространство, которое обозначим через $H(\Omega)$. Итак, $H(\Omega)$ есть подпространство пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, состоящее из всех вектор-функций $\boldsymbol{u}(x)$, удовлетворяющих уравнению (1.15$_2$) (последние называются соленоидальными).

Ясно, что $H(\Omega)$ есть полное пространство. Скалярное произведение в нем определим равенством

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = \int_\Omega \boldsymbol{u}_x \boldsymbol{v}_x \, dx \equiv \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} u_{ix_k} v_{ix_k} \, dx. \tag{1.17}$$

Соответствующая ему норма $|\cdot|_{H(\Omega)}$ эквивалентна норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Для того чтобы определить обобщенное решение задачи из энергетического класса, умножим (1.15_1) скалярно пока на произвольную гладкую вектор-функцию $\eta(x)$ и результат проинтегрируем по Ω:

$$\nu \int_\Omega \Delta \boldsymbol{u} \cdot \eta \, dx + \int_\Omega a_i \boldsymbol{u}_{x_i} \eta \, dx = \int_\Omega \operatorname{grad} p \cdot \eta \, dx + \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \eta \, dx. \tag{1.18}$$

Преобразуем теперь обе части равенства с помощью формулы интегрирования по частям к следующему виду:

$$\nu \int_\Omega \boldsymbol{u}_x \eta_x \, dx - \nu \int_S \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial n} \eta \, ds - \int_\Omega a_i \boldsymbol{u}_{x_i} \eta \, dx =$$
$$= \int_\Omega p \cdot \operatorname{div} \eta \, dx - \int_S p \boldsymbol{n} \cdot \eta \, ds - \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \eta \, dx. \tag{1.19}$$

Чтобы в этом соотношении пропал член $\int_S \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial n} \eta \, ds$, не имеющий смысла для произвольных элементов $\eta \in W_2^1(\Omega)$, подчиним η условию: $\eta|_S = 0$. Кроме того, если η подчинить еще второму условию: $\operatorname{div} \eta = 0$, которому должно удовлетворять искомое решение $\boldsymbol{u}$, то (1.19) примет вид

$$\nu \int_\Omega \boldsymbol{u}_x \eta_x \, dx - \int_\Omega a_i \boldsymbol{u}_{x_i} \eta \, dx = -\int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \eta \, dx. \tag{1.20}$$

В это тождество не вошла функция $p(x)$. Назовем *обобщенным решением задачи* (1.15_i)—(1.16) *из энергетического класса* вектор-функцию $\boldsymbol{u}(x)$, принадлежащую $H(\Omega)$ и удовлетворяющую тождеству (1.20) при любой $\eta \in H(\Omega)$. Проведенные нами рассуждения показывают, что достаточно гладкое решение $\boldsymbol{u}$, p задачи

(1.15_i)—(1.16) удовлетворяет тождеству (1.20). Ниже мы покажем, что тождество (1.20) однозначно определяет поле скоростей $\boldsymbol{u}(x)$. Таким образом, переход к такой обобщенной трактовке задачи позволил отделить нахождение $\boldsymbol{u}$ от нахождения давления p. Если $\boldsymbol{u}(x)$, определяемое тождеством (1.20), окажется достаточно гладкой функцией, например, элементом $W_2^2(\Omega)$ (а это будет так, если $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega)$ и $S \in C^2$), то тождество (1.20) с помощью интегрирования по частям можно преобразовать к виду

$$\int_\Omega (\nu\, \Delta \boldsymbol{u} + a_i \boldsymbol{u}_{x_i} - \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{\eta}\, dx = 0. \tag{1.21}$$

Покажем, что из этого тождества, справедливого при $\forall \boldsymbol{\eta} \in H(\Omega)$, следует, что $\nu\Delta\boldsymbol{u} + a_i \boldsymbol{u}_{x_i} - \boldsymbol{f}$ есть градиент некоторой однозначной функции, которая и есть давление $p(x)$, определяемое с точностью до произвольного слагаемого c ($c = \mathrm{const}$). Итак, пусть вектор-функция $\boldsymbol{v}(x) \in L_2(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\eta}\, dx = 0 \tag{1.22}$$

при $\forall \boldsymbol{\eta} \in H(\Omega)$. Докажем, что $\boldsymbol{v}$ есть градиентная вектор-функция. Для этого возьмем в качестве $\boldsymbol{\eta}$ функцию $\boldsymbol{\eta} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\Phi}_\rho$, где $\boldsymbol{\Phi}(x)$ — произвольная гладкая функция, равная нулю вблизи S, а $\boldsymbol{\Phi}_\rho$ — ее усреднение вида (4.9) гл. I. При ρ, меньших расстояния от носителя $\boldsymbol{\Phi}$ до S, $\boldsymbol{\eta}$ будет элементом $H(\Omega)$. Подставим ее в (1.22), и левую часть преобразуем так:

$$0 = \int_\Omega \boldsymbol{v} \operatorname{rot} \boldsymbol{\Phi}_\rho\, dx = \int_\Omega \boldsymbol{v}_\rho \operatorname{rot} \boldsymbol{\Phi}\, dx = \int_\Omega \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_\rho \boldsymbol{\Phi}\, dx. \tag{1.23}$$

При этом мы воспользовались известными свойствами операций усреднения и взятия ротора. Ввиду достаточного произвола в выборе $\boldsymbol{\Phi}$ из (1.23) следует, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}_\rho = 0$ для $x \in \overline{\Omega}'$, если $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, а ρ меньше расстояния Ω' до S. По известной теореме анализа $\boldsymbol{v}_\rho(x)$ будет градиентом некоторой гладкой функции $\varphi(x, \rho)$, причем в силу предположения об односвязности Ω функция $\varphi(x, \rho)$ является однозначной. Она определяется (с точностью до постоянного слагаемого) криволинейным интегралом: $\varphi(x, \rho) = \int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{k=1}^{3} (v_k)_\rho \, dx_k$. Зафиксируем $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ и перейдем в этом равенстве к пределу по $\rho \to 0$, считая x_0 закрепленной, а x — произвольной точкой $\bar{\Omega}'$. Так как $v_\rho(x)$ сходится к $v(x)$ в $L_2(\Omega')$, то $\varphi(x, \rho)$, как нетрудно понять, будет сходиться в $L_2(\Omega')$ к функции $\varphi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{k=1}^{3} v_k \, dx_k$, а $\frac{\partial \varphi(x, \rho)}{\partial x_k} = (v_k)_\rho$ — к $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} = v_k$. Так как Ω' есть произвольная внутренняя подобласть Ω, то равенство $v = \operatorname{grad} \varphi$ имеет место во всей области Ω. Желаемое утверждение доказано. Возвращаясь к (1.21), видим, что $\nu \Delta \boldsymbol{u} + a_i \boldsymbol{u}_{x_i} - \boldsymbol{f}$ есть градиент некоторой однозначной функции $p(x)$, которая вместе с $\boldsymbol{u}(x)$ дает решение задачи (1.15_i)—(1.16).

Итак, задача (1.15_i)—(1.16) сведена к нахождению $\boldsymbol{u}(x)$, принадлежащего $H(\Omega)$ и удовлетворяющего тождеству (1.20) при $\forall \eta \in H(\Omega)$. Этот же вопрос решается совершенно так же, как в § 3 гл. II вопрос о нахождении об. решения одного эллиптического уравнения. Тождество (1.20) сводится к операторному уравнению вида

$$\nu \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{u} = \mathscr{F} \tag{1.24}$$

в пространстве $H(\Omega)$. В нем A есть линейный вполне непрерывный оператор, определяемый тождеством

$$[A\boldsymbol{u}, \eta] = -\int\limits_{\Omega} a_i \boldsymbol{u}_{x_i} \eta \, dx, \qquad \forall \eta \in H(\Omega), \tag{1.25}$$

а $\mathscr{F}$ — элемент $H(\Omega)$, определяемый тождеством

$$[\mathscr{F}, \eta] = -(\boldsymbol{f}, \eta), \qquad \forall \eta \in H(\Omega). \tag{1.26}$$

Для разрешимости (1.24) при любом $\mathscr{F}$ из $H(\Omega)$ необходимо и достаточно (согласно первой теореме Фредгольма), чтобы однородное уравнение (1.24) имело только нулевое решение. Но такое уравнение эквивалентно тождеству

$$\nu \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{u}_x \eta_x \, dx - \int\limits_{\Omega} a_i \boldsymbol{u}_{x_i} \eta \, dx = 0, \quad \forall \eta \in H(\Omega). \tag{1.27}$$

Возьмем в нем $\eta = \boldsymbol{u}$, произведение $-a_i \boldsymbol{u}_{x_i} \boldsymbol{u}$ запишем как $\frac{1}{2} a_i \frac{\partial \boldsymbol{u}^2}{\partial x_i} \left(\boldsymbol{u}^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} u_i^2 \right)$ и интеграл от него преобразуем с помощью интегрирования по частям к виду $\frac{1}{2} \int_\Omega \boldsymbol{u}^2 \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx$, учтя (1.16). В силу предположения $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$ он равен нулю, так что (1.27) при $\eta = \boldsymbol{u}$ дает

$$\nu \int_\Omega \boldsymbol{u}_x \boldsymbol{u}_x \, dx = 0,$$

что вместе с (1.16) гарантирует тождественное равенство $\boldsymbol{u}(x)$ нулю. Таким образом, теорема единственности для (1.24) доказана, а вместе с нею доказана следующая теорема:

Теорема 1.2. *Задача* (1.15_i)—(1.16) *имеет единственное обобщенное решение из* $H(\Omega)$ *при любой* $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega)$, *если* $\boldsymbol{a} \in W_2^1(\Omega)$ *и* $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$.

Приведенное исследование задачи (1.15_i)—(1.16), взятое из $[12_{12}]$, дает пример нестандартного использования метода, изложенного в § 3 гл. II применительно к одному эллиптическому уравнению второго порядка. Нестандартность состоит в том, что часть уравнений системы (а именно — уравнение (1.15_2)) была включена в указание того подпространства основного пространства $W_2^1(\Omega)$, в котором рассматривается интегральное тождество (1.20), заменяющее собою остальные уравнения системы (уравнения (1.15_1)), и к которому тем самым принадлежит решение задачи (точнее, часть решения — функция $\boldsymbol{u}(x)$). Такой же подход оказался полезным при исследовании ряда других краевых задач математической физики, например, различных краевых задач для систем магнитной гидродинамики ($[12_{15}]$, $[26_3]$) и системы уравнений Максвелла [3].

§ 2. Сильно параболические и сильно гиперболические системы

Сильно параболическими системами мы называем системы вида

$$\boldsymbol{u}_t + \mathscr{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \tag{2.1}$$

где $\mathscr{L}$ есть сильно эллиптический оператор, описанный в § 1 (его коэффициенты могут зависеть не только от x, но и от t). Для таких систем являются корректными задача Коши, в которой вектор-функция $\boldsymbol{u}(x, t)$ задается в начальный момент времени $t = t_0$ и ищется для всех $x \in R_n$ при $t \geqslant t_0$, и различные начально-краевые задачи, в которых $\boldsymbol{u}(x, t)$ ищется в области $Q = \{(x, t) : x \in \Omega \subset R_n,\ t > t_0\}$ как решение системы (2.1), удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{u}|_{t=t_0} = \varphi$ и каким-либо граничным условиям (например, условиям Дирихле (1.5)) на поверхности $\Gamma = \{(x, t)\colon x \in \partial\Omega,\ t \geqslant t_0\}$. Задача Коши и начально-краевые задачи при граничных условиях, указанных в § 1, исследуются для них так же, как это сделано в гл. III для одного параболического уравнения второго порядка. Начально-краевые задачи для систем (2.1) при других краевых условиях требуют более сложных рассмотрений.

К настоящему времени выделены значительно более широкие, чем (2.1), классы систем, которые принято называть параболическими (в смысле И. Г. Петровского, Т. Сироты, В. А. Солонникова). Их исследование потребовало развития иной техники (см. [26₂], [29] и др.).

Сильно гиперболическими системами мы называем системы вида

$$\boldsymbol{u}_{tt} + \mathscr{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \tag{2.2}$$

где $\mathscr{L}$ есть сильно эллиптический оператор из § 1, в главной части которого отсутствует кососимметрическая часть (т. е. $\tilde{A}^{(i,j)} = 0$ для $|i| = |j| = m$) (коэффициенты $\mathscr{L}$ могут зависеть как от x, так и от t). Для них задача Коши и некоторые из начально-краевых задач (те, которые обсуждались в § 1) исследуются теми же методами, что и для одного гиперболического уравнения в гл. IV. Мы не будем приводить здесь эти исследования, ибо они вполне аналогичны изложенным в гл. IV. Частным случаем сильно гиперболических систем являются динамические уравнения теории упругости.

Неклассический подход к начально-краевым задачам и методы их исследования, изложенные в главах III и IV, позволили изучить более общие объекты: уравнения вида

$$\frac{du}{dt}+S_1(t)\,u=f(t), \tag{2.3}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}+S_2(t)\frac{du}{dt}+S_3(t)\,u=f(t) \tag{2.4}$$

и ряд их обобщений. В них $u(t)$ и $f(t)$ суть функции t со значениями в гильбертовом пространстве H, а $S_i(t)$ — линейные, вообще говоря, неограниченные, операторы в H, зависящие от параметра t. К уравнениям (2.3) и (2.4) присоединяются начальные условия Коши:

$$u\,|_{t=0}=u_0 \tag{2.5}$$

для (2.3) и

$$u\,|_{t=0}=u_0, \qquad \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0}=u_1 \tag{2.6}$$

для (2.4). Покажем, что начально-краевые задачи (и задачи Коши) для уравнений и систем вида (2.1) и (2.2) параболического и гиперболического типов могут быть рассмотрены как частные случаи задачи Коши для операторных уравнений (2.3) и (2.4) соответственно. Возьмем для определенности первое краевое условие (1.5) и будем ради большей наглядности считать коэффициенты в дифференциальном операторе $\mathscr{L}$ достаточно гладкими функциями x, t. В качестве основного гильбертова пространства H выберем пространство $L_2(\Omega)$, так что решение $\boldsymbol{u}(x,t)$ и свободный член $\boldsymbol{f}(x,t)$ будем трактовать как функции $t\geqslant 0$ со значениями из $L_2(\Omega)$. Роль оператора $S_1(t)$ в (2.3) будет играть дифференциальный оператор $\mathscr{L}$ из (2.1) (он имеет вид (1.1), но элементы $A^{(i,j)}$ могут зависеть не только от x, но и от t), определенный на всех элементах $W_2^{2m}(\Omega)$, удовлетворяющих краевым условиям (1.5). Этот оператор является неограниченным в $L_2(\Omega)$, но определенным на плотном в $L_2(\Omega)$ множестве. Если коэффициенты $\mathscr{L}$ зависят от t, то S_1 тоже зависит от t. Область же определения $S_1(t)$ в случае рассматриваемых краевых условий (1.5) не зависит от t. Итак, задача

$$\boldsymbol{u}_t+\mathscr{L}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{u}\,|_{t=0}=\boldsymbol{\varphi}(x), \quad \boldsymbol{u}\,|_{S_T}=\ldots=\left.\frac{\partial^{m-1}\boldsymbol{u}}{\partial n^{m-1}}\right|_{S_T}=0 \tag{2.7}$$

действительно есть частный случай задачи Коши (2.3), (2.5). Граничные условия ее «спрятались» в указание области определения оператора $S_1(t)$. Для задачи (2.7) оператор $S_1(t)$, определенный выше, обладает одним важным свойством: он полуограничен. Оказалось, что если в абстрактной задаче (2.3), (2.5) наложить на оператор $S_1(t)$ условие полуограниченности, то это вместе с некоторыми другими «естественными» ограничениями на $S_1(t)$ (типа гладкости по t плюс независимость от t либо области определения самого $S_1(t)$, либо какой-либо степени самосопряженной части $S_1(t)$) и достаточно для того, чтобы доказать однозначную разрешимость задачи (2.3), (2.5) в том или ином классе «обобщенных» решений. Первые результаты такого типа были установлены в работах М. И. Вишика и моих ([4_2], [$12_{6,7}$]; см. также [4_3]). Из них однозначная разрешимость задачи (2.7) следует как частный случай. В работе [24] были даны другие способы исследования задачи (2.3), (2.5), позволившие охватить ряд других краевых условий для сильно параболических систем. Другой цикл работ по исследованию задачи (2.3), (2.5) ведет свое начало от работы [18] Т. Като, в которой уравнение (2.3) рассматривается в банаховом пространстве. Это привело к доказательству разрешимости ряда начально-краевых задач для сильно параболических систем в функциональных пространствах W_p^l (см. [25] и др.). Уравнениям (2.3), (2.4) посвящены также монографии [20_1], [11].

В качестве одного из приложений результатов работ [$12_{6,7}$] по задаче (2.3), (2.5) укажем на задачу гидродинамики

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_t - \nu\,\Delta \boldsymbol{u} + a_i(x, t)\,\boldsymbol{u}_{x_i} = -\operatorname{grad} p + \boldsymbol{f}(x, t), \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{u}\,|_{t=0} = \varphi(x), \quad \boldsymbol{u}\,|_{S_T} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

для вязких несжимаемых жидкостей. Ее однозначная разрешимость выводится из этих результатов и результатов по стационарной задаче (1.15_i)—(1.16) (см. [12_{12}]).

Начально-краевые задачи для сильно гиперболических систем включаются в задачу Коши (2.4), (2.6) так же, как в параболическом случае. Их анализ подсказал те ограничения на операторы $S_2(t)$ и $S_3(t)$, при которых однозначно разрешима задача (2.4), (2.6) и которые тем не менее столь широки, что охватывают ряд начально-краевых задач (а тем самым и задачу Коши) для систем (2.2) как частные случаи. Мы не будем приводить здесь окончательные результаты по задачам (2.3)—(2.5) и (2.4), (2.6) и их обобщениям вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^k S_k(t)\,u}{dt^k}+\frac{d^{k-1}S_{k-1}(t)\,u}{dt^{k-1}}+\ldots+S_{k+1}(t)\,u=f,\\ &u\,|_{t=0}=\varphi_0,\quad \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0}=\varphi_1,\ \ldots,\ \left.\frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}}\right|_{t=0}=\varphi_{k-1}, \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

а отошлем к специальной литературе ([$12_{7,8}$], [4_2] и др.). Мы не приводим также и требований, накладываемых на $S_k(t)$ как функции t. Укажем лишь, что для этих задач были предложены разные методы исследования, причем как предположения на $S_i(t)$, так и окончательные результаты несколько отличаются друг от друга. Иногда эти отличия связаны с выбором класса обобщенных решений задачи, иногда они продиктованы желанием охватить какую-либо неисследованную начально-краевую задачу, интересующую автора, а иногда обусловлены просто избранным методом решения задачи или желанием ослабить предположения работ предшественников.

Один из методов, с помощью которого удалось исследовать разрешимость задач (2.3), (2.5) и (2.4), (2.6), а также задачу Коши для уравнений Шредингера и для ряда их обобщений, и который был первым по времени, позволившим однотипно исследовать все эти задачи, изложен в § 2 гл. III и в § 6 гл. IV применительно к уравнению теплопроводности и волновому уравнению. Он взят из заметки [12_6] (см. также [$12_{7,8}$]).

§ 3. Уравнения типа Шредингера и близкие к ним уравнения

Уравнениями типа Шредингера называются уравнения вида

$$\frac{du}{dt}+iS_1(t)\,u=f(t), \tag{3.1}$$

если $S_1(t)$ есть самосопряженный оператор, действующий в комплексном гильбертовом пространстве H. Он может зависеть от параметра t (здесь и ниже мы не приводим ограничений, накладываемых на характер зависимости $S_1(t)$ от t). Для них рассматривают задачу Коши, т. е. задачу определения решения $u(t)$ уравнения (3.1), удовлетворяющего начальному условию

$$u|_{t=0}=\varphi. \tag{3.2}$$

Решение $u(t)$ и свободный член $f(t)$ суть функции t со значениями в H, а φ есть заданный элемент H. В квантовой механике обычно $f(t)\equiv 0$. Однозначная разрешимость задачи (3.1), (3.2) в том или ином классе при соответствующих предположениях о φ, $f(t)$ и зависимости $S_1(t)$ от t доказана разными способами в работе [12_7]. Первый способ, которым это было сделано, аналогичен способу, изложенному в § 2 гл. III и в § 6 гл. IV применительно к дифференциальным уравнениям параболического и гиперболического типов. Он оказался применимым и к несколько более общим уравнениям, а именно к уравнению вида

$$S_0(t)\frac{du}{dt}+S_1(t)u+S_2(t)u=f(t), \tag{3.3}$$

где $S_0(t)$ — ограниченный, самосопряженный, положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H, $iS_1(t)$ — самосопряженный оператор с плотной в H областью определения $\mathscr{D}(S_1)$, не зависящей от t, а $S_2(t)$ — ограниченный оператор в H. Все операторы $S_i(t)$ гладко зависят от t. Задача Коши для этого случая была изучена в работе [3]. В ней же было доказано, что под этот случай подпадают различные начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла. Заметим, что абстрактная задача (3.3), (3.2) мало отличается от задачи (3.1), (3.2), ибо она сводится к задаче вида

$$\frac{dv}{dt}+\hat{S}_1(t)v+\hat{S}_2(t)v=\hat{f},\quad v|_{t=0}=v_0, \tag{3.4}$$

где $v=S_0^{1/2}(t)u$, $\hat{S}_1(t)=S_0^{-1/2}(t)S_1(t)S_0^{-1/2}(t)$, $\hat{S}_2(t)=$

$$=S_0^{-1/2}(t)S_2(t)S_0^{-1/2}(t)-\frac{dS_0^{1/2}(t)}{dt}S_0^{-1/2}(t),\quad \hat{f}(t)=S_0^{-1/2}(t)f(t).$$

В силу условий, налагаемых автором на $S_i(t)$, оператор $S_0^{1/2}$ существует и ограничен, $i\hat{S}_1(t)$ — самосопряженный оператор, а $\hat{S}_2(t)$ — ограниченный оператор. Однозначная разрешимость задачи (3.4) доказывается, по существу, так же, как и для задачи (3.1), (3.2). Однако доказательство того, что начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла удовлетворяют условиям, при которых установлена разрешимость задачи (3.3), (3.2), нетривиально и потребовало анализа этих задач, перекликающегося с кратко описанным в § 1 для задачи (1.15_i)—(1.16).

В качестве других обобщений результатов по задаче (3.1), (3.2) укажем на работы [10], [27]. Так, в работе [27], посвященной параметрическому резонансу упругих систем с распределенными параметрами, автор сталкивается с задачей Коши для уравнений вида

$$i\frac{d}{dt}(S_0 u) = (E + S_1(t))\,u, \tag{3.5}$$

где S_0 — самосопряженный вполне непрерывный оператор в H, имеющий (неограниченный) обратный, E — единичный оператор, а $S_1(t)$ — симметричный оператор, причем оператор $S_1(t)\,S_0^{-1}$ является ограниченным в H, гладко зависящим от t. Такая задача сводится к задаче типа (3.4), если вместо u ввести новую неизвестную функцию $v = S_0 u$. Действительно, v будет решением задачи

$$\frac{i\,dv}{dt} = S_0^{-1}v + S_1(t)\,S_0^{-1}v, \qquad v\,|_{t=0} = S_0 u\,|_{t=0}. \tag{3.6}$$

При ее исследовании надо иметь в виду, что начальное значение для v является «очень хорошим элементом H» — имеет вид $S_0 u$, $u \in H$, и надо доказать, что это свойство (т. е. принадлежность $v(t)$ к области значений S_0) сохранится при всех $t > 0$. Заметим, что подобные сведéния исходного уравнения к уравнению, имеющему главные члены, такие же, как в (3.1), не всегда удобны, и иногда выгоднее исследовать задачу в ее первоначальной форме, приспосабливая к ней рассуждения, лежащие в основе исследования задачи (3.1), (3.2).

§ 4. О задачах дифракции

Задачи дифракции с математической точки зрения состоят в решении краевых задач (стационарных или нестационарных) для уравнений (или систем), коэффициенты которых терпят разрывы первого рода. На поверхностях Г, где рвутся коэффициенты, ставятся так называемые условия сопряжения, выражающие непрерывность среды и равновесия сил, действующих на нее. Разрывность коэффициентов уравнения соответствует тому, что среда составлена из двух или нескольких разнородных по своим физическим характеристикам материалов. Одной из первых задач такого рода является следующая:

$$a\,\Delta u = f, \tag{4.1}$$

$$u\,|_S = 0, \tag{4.2}$$

$$[u]\,|_\Gamma = \left[a\,\frac{\partial u}{\partial n}\right]\Big|_\Gamma = 0. \tag{4.3}$$

Решение $u(x)$ ищется в области Ω с границей S. Поверхность Γ (размерности $n-1$) разделяет Ω на две области Ω_1 и Ω_2. В одной из них коэффициент a равен постоянной $a_1 > 0$, в другой — постоянной $a_2 > 0$. Символ $[u]$ в (4.3) означает разность между предельными значениями $u(x)$ на Γ, вычисленными при подходе к Γ со стороны области Ω_1 и области Ω_2. Аналогично понимается и символ $\left[a\,\frac{\partial u}{\partial n}\right]$. Первое из условий (4.3) требует непрерывности $u(x)$, второе предписывает скачок производной $\frac{\partial u}{\partial n}$, взятой по нормали n к Γ (пусть n направлена внутрь Ω_2). Задача (4.1)—(4.3) встречается, например, в дифракции электромагнитных волн.

В указанной постановке задачи этого типа существенно отличаются от обычных краевых задач (когда среда имеет гладко меняющиеся характеристики), и их исследование классическими методами (методами теории потенциала) даже в простейших задачах с кусочно-постоянными коэффициентами потребовало развития теории интегральных уравнений (в этих задачах возникают так называемые нагруженные интегральные уравнения). Еще более тяжелыми для классических методов были дифракционные задачи для уравнений гиперболического типа.

Однако анализ этих задач с точки зрения теории обобщенных решений, которой пронизана вся эта книга, показал, что они могут быть рассмотрены как частные случаи обычных краевых задач. Так, задача (4.1)—(4.3) эквивалентна задаче нахождения функции $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющей интегральному тождеству

$$\int_\Omega a u_{x_i} \eta_{x_i}\, dx = -\int_\Omega f \cdot \eta\, dx \tag{4.4}$$

при $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Такую функцию $u(x)$ естественно назвать *обобщенным решением задачи* (4.1)—(4.3). Если $u(x)$ есть классическое решение задачи (4.1)—(4.3), то, умножая (4.1) на гладкую функцию $\eta(x)$, равную нулю на S, и интегрируя по Ω, мы придем к равенству

$$\int_\Omega a\, \Delta u \eta\, dx = \int_\Omega f \cdot \eta\, dx, \tag{4.5}$$

которое в результате интегрирования по частям (его надо выполнить для каждой Ω_i отдельно и потом результаты сложить) преобразуется к виду

$$-\int_\Omega a u_{x_i} \eta_{x_i}\, dx + \int_\Gamma \left[a \frac{\partial u}{\partial n}\right] \eta\, ds = \int_\Omega f \eta\, dx. \tag{4.6}$$

Но это тождество совпадает с (4.4), если учесть второе из условий (4.3). Итак, классическое решение задачи (4.1)—(4.3) является обобщенным в смысле данного выше определения. Верно и обратное: если $u(x)$ есть об. решение задачи и если оно достаточно гладкое в каждой из областей Ω_i (например, $u \in C^2(\overline{\Omega}_i)$, $i = 1, 2$), то оно удовлетворяет всем условиям (4.1)—(4.3) в их классической форме. Действительно, для такого $u(x)$ тождество (4.4) преобразуется к виду (4.6), из которого в силу достаточного произвола в выборе $\eta(x)$ следует как уравнение (4.1), так и второе из условий (4.3). Остальные же два условия выполняются благодаря принадлежности $u(x)$ к $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и указанной гладкости $u(x)$.

Итак, мы убедились, что тождество (4.4) заключает в себе уравнение (4.1) и второе из условий (4.3). Остальные два условия задачи выражены в требовании принадлежности $u(x)$ к $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Покажем, что такое расширение допустимо и с точки зрения теоремы единственности (легко показать, что для классических решений теорема единственности имеет место). Действительно, разность двух таких возможных решений будет элементом $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющим тождеству

$$\int_\Omega a u_{x_i} \eta_{x_i} dx = 0$$

при $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Полагая $\eta = u$, убеждаемся, что $u \equiv 0$, т. е. в нашем классе обобщенных решений действительно сохраняется теорема единственности. Существование же таких решений $u(x)$ было доказано в гл. II, ибо рассматриваемая здесь задача есть весьма частный случай задачи Дирихле, исследованной в гл. II. Там же даны и приближенные способы фактического вычисления $u(x)$. В гл. VI будет изложен другой приближенный метод их нахождения — метод конечных разностей. По задачам типа (4.1)—(4.3) остается один вопрос: когда об. решения ее обладают той или иной гладкостью, в частности, когда они являются классическими? Для уравнений (и систем) эллиптического и параболического типа гладкость их решений — свойство локальное: в той части области Ω, где все данные решения гладкие, их об. решения обладают соответствующей гладкостью, в частности, там, где коэффициенты уравнения и свободный член суть бесконечно дифференцируемые функции, решения тоже являются бесконечно дифференцируемыми функциями. Более подробный анализ зависимости гладкости решения от гладкости данных задачи потребовал развития специальной техники, которой мы не касаемся в данной книге. В задачах дифракции имеется дополнительный вопрос о поведении об. решений вблизи поверхности Γ. Он исследуется в основном так же, как вопрос о поведении об. решений краевых задач вблизи границы S. Результат в общих чертах такой: вблизи гладких кусков Γ_i поверхности Γ об. решения являются гладкими функциями вплоть до Γ_i, с той и другой стороны Γ_i, и следовательно, удовлетворяют условиям сопряжения в классическом смысле. Для задачи (4.1)—(4.3) доказан, например, такой результат: если $f(x)$ принадлежит классу Гельдера

$H^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $S\in H^{2+\alpha}$, $\Gamma\in H^{2+\alpha}$ и Γ не имеет общих точек с S, то $u(x)\in C(\overline{\Omega})\cap H^{1+\alpha}(\overline{\Omega}_i)\cap H^{2+\alpha}(\Omega_i)$, $i=1,2$. Такой же результат установлен и для случая переменных коэффициентов, если они суть элементы $H^{\alpha}(\overline{\Omega}_i)$.

Описанный план исследования задач дифракции применим, например, для нижеследующих случаев. Пусть требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\mathcal{L}u\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+b_i(x)u_{x_i}+a(x)u=f(x), \tag{4.7}$$

граничному условию

$$u|_S=0 \tag{4.8}$$

и условиям сопряжения:

$$[u]_\Gamma=\left[\frac{\partial u}{\partial N}\right]_\Gamma=0. \tag{4.9}$$

Обобщенное решение этой задачи ищется как элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\mathcal{L}(u,\eta)\equiv\int_\Omega\left(a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i}-b_iu_{x_i}\eta-au\eta\right)dx=-\int_\Omega f\eta\,dx \tag{4.10}$$

при любой $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Вопрос о существовании и единственности такого решения исследован в § 3 гл. II. Если $a_{ij}(x)$ в каждой из областей Ω_l, $l=1,2$, на которые поверхность Γ разбивает область Ω, имеют об. производные $a_{ijx_k}(x)$ из $L_2(\Omega_l)$ и $f\in L_2(\Omega)$, то об. решение $u(x)$ принадлежит $W_2^2(\Omega_l')$, $l=1,2$, в $\forall\overline{\Omega}_l'\subset\Omega_l$. Если к тому же $S\in C^2$, $\Gamma\in C^2$ и S и Γ не имеют общих точек, то $u(x)\in W_2^2(\Omega_l)$, $l=1,2$. Отсюда и из теорем вложения следует, что не только $u(x)$, но и ее производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ имеют следы на Γ (эти следы суть элементы $L_2(\Gamma)$), понимаемые как пределы со стороны Ω_1 и Ω_2. Следы самой функции $u(x)$ на Γ, вычисленные как предельные значения $u(x)$ со стороны области Ω_1 и области Ω_2, совпадают друг с другом (как элементы $L_2(\Gamma)$) в силу принадлежности u к $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Следы же $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ терпят, вообще говоря, скачок при переходе через Г, но $\left[\frac{\partial u}{\partial N}\right]_\Gamma = 0$. Последнее вытекает из принадлежности $u(x)$ к $W_2^2(\Omega_l)$, $l = 1, 2$, и тождества (4.10). Из этих же свойств $u(x)$ следует и то, что в каждой из Ω_l $u(x)$ удовлетворяет уравнению (4.7), которое в Ω_l может быть переписано в виде

$$a_{ij} u_{x_i x_j} + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} + b_i\right) u_{x_j} + au = f, \quad x \in \Omega_l, \quad l = 1,\ 2.$$

Если S и Г имеют общее пересечение, то вблизи этого пересечения требуется специальный анализ $u(x)$.

Аналогично исследуется задача (4.7), (4.9) при условии $\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\,|_S = 0$ вместо условия (4.8), а также дифракционные задачи для (4.7) при несколько более общем условии сопряжения (встречающемся в задачах на определение электромагнитного поля). В последних условия (4.9) заменены требованиями

$$[u]_\Gamma = 0, \qquad \left[c\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\right]_\Gamma = 0, \quad c(x) > 0, \tag{4.11}$$

в которых c и σ — заданные гладкие функции, имеющие разрывы первого рода на Г. *Обобщенное решение* $u(x)$ *задачи* (4.7), (4.8), (4.11) определим как элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющий тождеству

$$\int_\Omega \left(a_{ij} c u_{x_j} \eta_{x_i} + a_{ij} c_{x_i} u_{x_j} \eta - b_i c u_{x_i} \eta - acu\eta\right) dx + {} \\ + \int_\Gamma [\sigma] u\eta\, ds = -\int_\Omega cf\eta\, dx \tag{4.12}$$

при $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Это тождество получено из соотношения $-\int_\Omega \mathscr{L}u \cdot c\eta\, dx = -\int_\Omega fc\eta\, dx$ с помощью формально выполненного интегрирования по частям первого члена левой части и учета условий (4.11) (а также того, что $[\eta]_\Gamma = 0$).

Доказательство разрешимости тождества (4.12) в классе $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ ничем по существу не отличается от доказательства разрешимости третьей краевой задачи, проведенного в § 5 гл. II. Для его правомерности надо наложить на поверхность Γ те же условия гладкости, что и на S в § 5 гл. II. Гладкость σ не обязательна, достаточно знать, например, что $[\sigma]$ — ограниченная на Γ функция.

Иногда условия сопряжения бывают неоднородными, т. е. в правых частях условий (4.9) или (4.11) стоят не нули, а известные функции. Такие случаи сводятся к рассмотренным с помощью введения вместо $u(x)$ новой неизвестной функции $v(x) = u(x) - \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ подбирается так, чтобы условия сопряжения для v стали однородными.

Описанный подход к исследованию задач дифракции для эллиптических уравнений применим и к дифракционным задачам для уравнений параболического и гиперболического типов. Результаты по обобщенным решениям из энергетических классов, изложенные в главах III и IV, гарантируют однозначную разрешимость этих задач (а также дифракционных задач для систем, описанных в данной главе). В гл. VI будут построены разностные схемы для различных краевых и начально-краевых задач, которые обслуживают и задачи дифракции. Включение задач дифракции в обычные краевые задачи оказалось возможным благодаря тому, что существование обобщенных решений из энергетических классов, теоремы единственности для них и различные приближенные методы, позволяющие вычислять такие решения, доказаны нами без предположения о гладкости коэффициентов уравнений. Изложенное в главах II—IV позволяет исследовать и вопрос, когда обобщенные решения этих дифракционных задач имеют в каждой из областей Ω_l обобщенные производные, входящие в уравнения, и удовлетворяют всем условиям «почти всюду» (точнее, уравнениям для почти всех x из Ω и t из $[0, T]$, а граничным условиям и условиям сопряжения — для почти всех x на S и Γ при почти всех t из $[0, T]$). Вопросы же о большей гладкости решений мы в данной книге не излагаем (см. по этому поводу [$12_{13,\,14}$] и др.). Изложенное в данном параграфе ни в коей мере не охватывает громадную литературу по задачам дифракции, посвященную детальному исследованию тех или иных свойств (чаще всего асимптотических по каким-либо параметрам или t) решений простейших уравнений для конкретных простых областей Ω. Здесь изложена лишь заметка [12_5], в которой было показано, как эти задачи включаются в хорошо разработанную уже тогда теорию обобщенных решений для обычных краевых задач, и что эта теория дает для задач дифракции.

ГЛАВА VI

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

§ 1. Общее описание метода конечных разностей и некоторые принципы построения сходящихся разностных схем

Этот метод исследования различных задач для дифференциальных уравнений состоит в их сведении к системам алгебраических уравнений, в которых неизвестными являются значения сеточных функций u_Δ в вершинах сеток Ω_Δ, и к изучению предельного перехода, когда длины сторон ячеек сеток стремятся к нулю. Он приводит к цели, если функции u_Δ в пределе дают решение поставленной задачи. Такое сведение задачи к бесконечной последовательности вспомогательных конечномерных задач, определяющих приближенные решения u_Δ, неоднозначно и неединообразно для задач различных типов. Иными словами: для каждой задачи можно построить различные сходящиеся (к ней) разностные схемы, и для задач разных типов такие схемы существенно отличаются друг от друга. Мы в данной главе рассмотрим те же краевые и начально-краевые задачи для уравнений основных типов, что и в предыдущих главах, и для каждой из них построим несколько простейших разностных схем, приводящих в пределе к решениям этих задач. Это будет сделано так, что существование последних не предполагается заранее и, напротив, устанавливается с помощью метода конечных разностей. Мы ограничимся «прямоугольными» сетками: в них ячейками являются параллелепипеды с гранями, параллельными координатным плоскостям.

Исследования краевых задач, проведенные в главах II — IV, существенно опирались на некоторые общие факты, касающиеся нескольких функциональных пространств, и прежде всего пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$. Подобно этому и в данной главе мы изложим сначала ряд общих свойств, касающихся семейств функций, заданных на сгущающихся сетках, и в том числе необходимые для всей главы теоремы вложения в разностях. Это будет сделано с помощью некоторых простейших «восполнений» сеточных функций u_Δ, сопоставляющих каждой u_Δ функции, определенные на некоторых областях, связанных с сеткой Ω_Δ. Такие восполнения, введенные в [12_2], позволяют свести различные вопросы, возникающие для сеточных функций, к соответствующим уже изученным вопросам для обычных функций, определенных в областях.

Итак, предложения, которые излагаются в §§ 1 и 2, будут использованы во всех последующих параграфах (в §§ 3, 4 даны их обобщения, которые в данной книге не используются, но весьма полезны при более детальном исследовании задач, обсуждаемых здесь, и при исследовании других задач и вопросов, связанных с методом сеток). Они имеют общее значение, не связанное со спецификой той или иной краевой задачи. С их помощью предельные переходы выполняются единообразно во всех задачах, коль скоро для приближенных решений u_Δ этих задач установлена равномерная (относительно длин ребер ячеек) ограниченность (в какой-либо норме). Если такая равномерная ограниченность имеет место для взятой разностной схемы, то говорят, что схема *устойчива* (в смысле той нормы, ограниченность которой установлена).

Об этой связи между равномерной ограниченностью семейства $\{u_\Delta\}$, вычисляемого по данной разностной схеме, и его сходимостью можно сказать: *из устойчивости схемы следует ее сходимость*. Для того чтобы предельная для $\{u_\Delta\}$ функция $u(x)$ оказалась решением рассматриваемой задачи, необходимо еще знать, что разностные уравнения схемы аппроксимируют соответствующие уравнения задачи. Это свойство схемы проверяется стандартно и, как и «теоремы вложения в разностях», вне зависимости от типа изучаемой задачи. Обычно такая проверка делается для каждого отдельно взятого члена, входящего в уравнения задачи, причем ее достаточно сделать лишь на гладких функциях. Поясним это. Пусть в уравнение входит производная $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$. Ее можно получить (для гладких функций $u(x)$), например, как предел разностных отношений

$$\frac{u(x+e_i\Delta x_i)-u(x)}{\Delta x_i}\equiv\frac{\Delta u(x)}{\Delta x_i} \quad \text{при } \Delta x_i \to 0$$

(e_i есть орт, направленный по оси x_i). В связи с этим и говорят, что $\frac{\Delta u(x)}{\Delta x_i}$ аппроксимирует $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$. Если дифференциальное уравнение имеет вид $\mathscr{L}u=\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+$ $+au=f$, то разностное уравнение $\mathscr{L}_\Delta u=\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\Delta u}{\Delta x_i}+au=f$ считается аппроксимирующим его.

Итак, проверка того, что разностные уравнения взятой схемы аппроксимируют соответствующие уравнения задачи, проводится единообразно для всех задач на основании некоторых общих положений. Так же обстоит дело и в той части исследования, которая относится ко всей процедуре предельного перехода от $\{u_\Delta\}$ к $u(x)$, если известно, что данная схема устойчива.

Однако это «если» и есть главный камень преткновения на пути исследования избранной разностной схемы. Проверка устойчивости или, что то же *), получение оценок для u_Δ, не зависящих от величины ячеек сетки, и составляет центральную часть исследования схемы. Если схема аппроксимирует задачу и устойчива, то она (по крайней мере принципиально: т. е. при точном или достаточно точном вычислении u_Δ, которое гарантируется теоретически) приведет к решению $u(x)$ исследуемой задачи. Напротив, при неустойчивости схемы можно подобрать такие данные задачи (т. е. свободный член или функции, входящие в начальные или граничные условия), для которых $\{u_\Delta\}$ будут образовывать неограни-

*) Мы имеем в виду всюду линейные задачи.

ченную последовательность и тем самым не могут дать в пределе ограниченное решение $u(x)$ задачи.

Приведенное нами описание ситуации, имеющей место в методе конечных разностей, требует уточнений, касающихся аппроксимаций, устойчивости и сходимости, т. е. указания тех пространств, в топологии которых они берутся. Здесь возможностей очень много.

В §§ 1 и 4 мы доказываем «теоремы вложения в разностях», аналогичные теоремам вложения для пространств $W_m^l(\Omega)$, изложенным в §§ 6—8 гл. I. Из них следует, какая устойчивость гарантирует какую сходимость, причем речь здесь идет не о сходимости к решению какой-то задачи, а о внутренней сходимости в множестве сеточных функций. Аппроксимацию дифференциальных уравнений и граничных условий мы берем в слабом смысле и занимаемся в основном «обобщенным решением с конечной энергетической нормой». Это позволяет охватить уравнения с разрывными коэффициентами и при этом не использовать каких-либо теорем о разрешимости исследуемых задач. Для них устанавливается слабая сходимость в «энергетических» пространствах. В § 11 на примере задачи Дирихле показано, как при таких же предположениях о данных задачи можно доказать и сильную сходимость в энергетической норме (но при этом приходится привлекать точное решение задачи).

Остановимся теперь на самом важном вопросе: как же строить сходящиеся разностные схемы? Первое, что приходит в голову, это просто заменить все уравнения задачи разностными, которые их аппроксимируют. Но, во-первых, таких аппроксимаций бесконечно много, и которой из них отдать предпочтение? Естественным казалось взять ту, которая «красивее» (проще) остальных (иначе — вычисление решений которой требует меньше всего времени), или ту, которая дает наилучшую по порядку шага аппроксимацию, вовлекающую в замену производных фиксированное (не очень большое) число соседних точек сетки. Но будут ли эти аппроксимации давать сходящиеся схемы? Оказалось, что для большого количества задач не будут (доказать это было совсем непросто, как непросто доказываются многие отрицательные утверждения). В § 6 я приведу примеры, показывающие, что самые естественные, казалось бы, схемы не приводят к цели. Но вспомним о сказанном выше, что сходимость есть следствие аппроксимации и устойчивости. Отсюда мораль: среди аппроксимирующих схем надо выбирать те, которые устойчивы. Однако в нормах каких пространств можно надеяться доказать устойчивость? Естественно, в тех, в которых устойчива сама исходная задача (устойчива относительно малых возмущений коэффициентов и других данных задачи, в том числе и области). Такие пространства известны для многих задач. Так, например, для всех хорошо поставленных задач математической физики ими являются «энергетические пространства», квадраты норм в которых выражают полную энергию системы. Ввиду этого вполне естественным было намерение построить такие разностные схемы, для которых имеется разностный аналог «энергетических оценок», гарантирующий устойчивость. Именно этому желанию я и следовала, разыскивая сходящиеся разностные схемы. Дальнейшие соображения были такие: надо проанализировать выводы энергетических оценок и составлять схемы так, чтобы для них можно было имитировать эти выводы в разностях.

Как видно из соответствующих параграфов глав II—IV, при доказательстве энергетических оценок были использованы, кроме неравенства Коши (которое одинаково как для дискретных сумм, так и для интегралов), две формулы: формула дифференцирования произведения и, главное, формула «интегрирования по частям». К сожалению, оказалось, что обе они несколько «портятся» для их разностных аналогов (см. формулы (2.2), (2.3) и (2.11) данной главы) — происходит «разъезжание» аргументов у сомножителей, и, как будет видно из дальнейшего изложения, эта-то «порча» и является аналитической причиной расходимости «на глазок» написанных схем. Избежать этих операций можно в случае эллиптических уравнений, если исходить не из самого дифференциального уравнения, а из соответствующего ему интегрального тождества, положенного выше, в гл. II, в основу определения «обобщенного решения из $W_2^1(\Omega)$» (или, что то же, решения из энергетического пространства). Если это тождество аппроксимировать сумматорным тождеством так, чтобы производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ заменялись однотипным образом разностными отношениями и, тем самым, чтобы положительно определенная форма $a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}$ заменилась снова положительно определенной формой, то нетрудно уже увидеть, что с помощью этого тождества оценка разностного аналога энергетической нормы приближенного решения u_Δ может быть получена так же, как оценка для энергетической нормы решения исходной задачи (см. § 2 гл. II). Отсюда следует такой вывод: надо исходить не из дифференциального уравнения, а из соответствующего ему интегрального тождества и искать аппроксимации не первого, а последнего. Исходя из тождества, легче понять, как аппроксимировать и краевые условия, опять-таки имея в виду основную цель: получение аналога энергетической оценки. В §§ 7, 8 мы опишем это подробно для всех трех классических краевых задач для эллиптических уравнений. При этом способе конструирования разностных схем видна и большая свобода их выбора, при которой, однако, имеет место устойчивость, а, следовательно, и сходимость. Более того, такой подход охватывает сразу и случай разрывных коэффициентов, в том числе и задачи дифракции, указывая рецепт построений разнообразных правильных аппроксимаций в окрестности разрывов коэффициентов. Наконец, с его помощью перекидывается естественный мостик между методом конечных разностей и методом Галеркина, на который помещаются различные варианты «метода конечных элементов», вошедших в моду за последние годы (см. об этом § 12).

Реализация описанной идеи по построению сходящихся разностных схем для уравнений параболического и гиперболического типов сложнее (особенно для последнего), ибо в соответствующих им интегральных тождествах главные члены не образуют положительно определенных билинейных форм и в соответствии с этим выводы энергетических оценок используют интегрирование по частям, а для гиперболических уравнений — и дифференцирование произведений. Но соотношение, из которого получается энергетическая оценка для параболических уравнений, есть сумма члена $u\frac{\partial u}{\partial t}$ и члена того же вида, что и для эллиптических уравнений. Ввиду этого для всех членов параболического уравнения, кроме первого, можно использовать любую из разностных аппроксимаций, найденных для уравнений эллиптического типа. Таким образом, остается позаботиться лишь о замене одного члена $\frac{\partial u}{\partial t}$. Этот вопрос можно исследовать предварительно на простейшем уравнении $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и полученные рецепты использовать для общего параболического уравнения.

При составлении сходящихся разностных схем для гиперболических уравнений также существенно помогает то, что замены для эллиптической его части уже изучены. Одновременно с последним выяснены и возможные аппроксимации краевых условий (ибо, как известно, постановка краевых условий диктуется эллиптической частью уравнения). Остается понять влияние члена $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Это можно сделать на простейшем уравнении гиперболического типа — волновом уравнении. На нем удается выявить возможные разностные аппроксимации для общих гиперболических уравнений второго порядка (если в последние не входят члены вида $a_{i0}\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x_i}$). Правда, зависимость в них коэффициентов от x и t привносит свои трудности, ибо в этом случае при использовании формулы (2.2) (а ее приходится привлекать) происходит расползание аргументов у сомножителей. Но с этой неприятностью можно справиться, используя то, что в формуле (2.2) сдвиг аргумента можно отдать любому из двух сомножителей, и когда одним из них является коэффициент уравнения (т. е. известная нам функция), то ему-то и надо его отдать.

Из сказанного об уравнениях параболического и гиперболического типов видно, что разыскание сходящихся разностных схем разумно начать с простейших представителей этих уравнений, т. е. уравнения теплопроводсти и волнового уравнения. Так как вопросы, касающиеся замены краевых условий, выясняются на случае эллиптических уравнений и для них мы выдали четкий план действия, то при предварительном анализе простейших уравнений параболического и гиперболического типов в качестве краевых условий можно взять те, которые исследуются наиболее просто. Такими условиями являются условия периодичности. Итак, изучение нестационарных задач мы начнем с уравнения теплопроводности и волнового уравнения при условии периодичности по пространственным переменным. Для построения сходящихся разностных схем для таких задач мною был предложен в 1947—48 гг. «разностный аналог метода Фурье» (см. [12_I]). Он позволяет не только найти сходящиеся схемы, но и исследовать, вообще говоря, любую разностную схему с точки зрения ее устойчивости (а, следовательно, и сходимости). Этим способом удалось строго доказать расходимость ряда, казалось бы, разумных разностных схем, для которых, однако, не удавалось ранее доказать сходимость. Мы излагаем его основы в § 5. В § 6 он применяется к простейшим одномерным уравнениям эллиптического, параболического и гиперболического типов. Этот метод оказывается полезным и для анализа метода переменных направлений и метода дробных шагов. Однако мы этого не делаем, излагая последний в § 8 сразу для общих параболических уравнений.

Разностный аналог метода Фурье удобен для анализа разностных схем для тех задач, решения которых представляются обычными рядами Фурье (я имею в виду классические разложения по функциям $e^{i(k,x)}$), т. е. для уравнений и систем с постоянными (или более общо — с не зависящими от пространственных переменных) коэффициентами в областях параллелепипедального типа. Его можно использовать и для исследования разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами, что мы и сделали в упомянутой выше работе [12_I] применительно к весьма общему объекту—гиперболическим системам И. Г. Петровского (линейным и даже квазилинейным!). Но лучше этого не делать. Как видно из работы [12_I], такой путь слишком громоздкий и требует излишней гладкости коэффициентов (в п. 3 гл. III работы [12_1] он проиллюстрирован для удобства чтения также и на примере одного гиперболического уравнения первого порядка). Думаю, что в большой степени из-за этой громоздкости работы [12_1] (а также ее малой доступности: в широкой печати она была опубликована лишь в виде заметки в ДАН СССР) предложенный в ней простой и красивый метод анализа разностных схем для уравнений с постоянными коэффициентами не привлек должного внимания, пока не появилась в 1951 году популярная статья [4] трех американских авторов, в которой он излагается применительно к одномерным уравнениям со ссылкой на фон Неймана как автора метода. Простота объекта и изложения (в статье нет никаких доказательств) позволила познакомиться с этим методом не только теоретикам, но и вычислителям. Появилось много статей, а в последние годы и книг, где он применяется к ряду уравнений с постоянными коэффициентами (см. [7], [14], [20], [21], [31]). Было построено и его обобщение на случай, когда пространственные переменные меняются в произвольной области ([20]). Это обобщение есть разностный аналог метода Фурье, изложенного в § 4 гл. III и в § 7 гл. IV. В нем решения разностных уравнений ищутся в виде суммы по собственным функциям разностного оператора, соответствующего эллиптической части уравнения. Однако с практической точки зрения это обобщение вряд ли полезно, ибо вычисление даже одной такой собственной функции для непрямоугольной области является обычно более трудоемкой задачей, чем решение начально-краевой задачи с помощью известных разностных схем.

Итак, я описала основные принципы, которыми полезно руководствоваться при составлении устойчивых разностных схем. В их основу положены априорные оценки решений исходной задачи в «энергетических нормах» (и их следствия). Вместо них можно было бы взять за основу оценки, получаемые из «принципа максимума» (в его расширенном толковании). Но мы этого здесь не делаем в силу нескольких причин. Одна из них — «нельзя объять необъятного», особенно в одном курсе лекций, которые и без того включают немало материала. Во-вторых, оценки такого рода имеют место для значительно более узкого круга задач, нежели энергетические. В-третьих, даже для тех задач, в которых такие оценки справедливы, далеко не всегда возможно сохранить их аналог для разностных аппроксимаций (примером этого могут служить эллиптические уравнения второго порядка, в которых имеются смешанные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}$, $i \neq j$). В-четвертых, полный анализ конечно-разностных схем, базирующийся на оценках, получаемых из принципа максимума, как правило, более громоздкий и требует бóльшей гладкости, чем тот, который будет изложен в данной главе. Но из всего сказанного не следует делать вывод, что такой анализ «хуже» избранного нами. Напротив, в тех случаях, где он возможен, он нередко дает более полную информацию о приближенных решениях и их скорости приближения к точному решению задачи. Именно такое подробное аналитическое исследование было проведено в широко известных основополагающих работах [13_1], [7_2] и [18_4], в которых были рассмотрены простейшие уравнения различных типов.

Данная глава не претендует на полное освещение всех вопросов, связанных с методом конечных разностей. Так, например, мы оставили в стороне исследование такого важного вопроса, как оценка скорости сходимости приближенных решений к точным. В работах 30-х—50-х годов они проводились для простейших эллиптических и параболических уравнений в метрике пространств $C(\overline{\Omega})$. В последнее десятилетие оценки скорости сходимости получены в энергетических метриках для различных задач при значительно более слабых предположениях о данных задач и их точных решениях (см. работы [$19_{1,2}$], [$16_{2,3}$], [9] и др.). Мы не рассматриваем также сложные разностные схемы, имеющие иногда некоторые преимущества перед простейшими. Не затронута обширная область численной реализации разностного метода. Не излагаются интересные работы F. John'а, P. Lax'а и L. Nirenberg'а по исследованию «принципа замораживания коэффициентов» (см. о нем в [12_{10}]), работы С. К. Годунова, В. С. Рябенького, А. А. Самарского и др. по исследованию устойчивости произвольных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, не являющихся разностными аппроксимациями дифференциальных уравнений, принадлежащих к одному из хорошо изученных типов. Нет ..., но тут лучше остановиться, ибо лишь одно перечисление того, чего здесь нет, заняло бы многие страницы. Однако мы надеемся, что эта глава даст внимательно изучившему ее читателю представление о методах теоретического исследования разностных схем, а также поможет ориентироваться в том огромном хозяйстве, которое возникло в связи с появлением быстродействующих вычислительных машин и использованием метода конечных разностей как одного из основных при численном решении разнообразных прикладных задач.

§ 2. Основные разностные операторы и их свойства

Разобьем евклидово пространство R_n переменной $x=(x_1, \ldots, x_n)$ плоскостями $x_i=k_ih_i$, $h_i>0$, $i=1, \ldots$ $\ldots, n$, где k_i — целые числа, на элементарные параллелепипеды (ячейки) $\omega_{(kh)}$, координаты точек которых определяются неравенствами: $k_ih_i<x_i<(k_i+1)h_i$, $i=1, \ldots$ $\ldots, n$. Вершины этих ячеек назовем точками сетки (решетки). Функции, определенные на точках сетки (точнее, на какой-либо совокупности этих точек — множестве определения функции), будем обозначать через u_h и называть их сеточными. Иногда, если это не вызовет путаницы, индекс h у них будем опускать. Для них введем разностные операции

$$u_{x_i}(x)=\frac{1}{h_i}[u(x+h_ie_i)-u(x)]$$

и

$$u_{\bar{x}_i}(x)=\frac{1}{h_i}[u(x)-u(x-h_ie_i)], \tag{2.1}$$

где e_i есть единичный вектор, направленный по оси x_i *). О первой из них говорят, что это правое разностное

*) Было бы правильнее обозначить их u_{hx_i} и $u_{h\bar{x}_i}$. Но мы всюду будем использовать более короткие обозначения (2.1).

отношение (или правая разделенная разность), о второй — левое. Во всей данной главе частные производные функций $u(x)$, заданных на областях Ω *), будут обозначаться как $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Если $u(x)$ непрерывно дифференцируема в Ω, то $u_{x_i}(x)$ и $u_{\bar{x}_i}(x)$ сходятся к $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ при $h_i \to 0$ (равномерно в $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$), иначе говоря, разностные отношения u_{x_i} и $u_{\bar{x}_i}$ аппроксимируют производную $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Ясно, что суммы $\alpha u_{x_i} + (1-\alpha) u_{\bar{x}_i}$ также аппроксимируют $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ при $\forall \alpha$. Можно написать и более сложные разделенные разности, которые сходятся при $h_i \to 0$ к $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, но мы ими пользоваться не будем. Разностные отношения $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i} = (u_{x_i})_{x_j}$, $u_{x_i \bar{x}_j} = u_{\bar{x}_j x_i}$ и $u_{\bar{x}_i \bar{x}_j}$ аппроксимируют $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}$ (если последняя существует). Аналогично определяются разностные отношения $u_{x_{i_1} \ldots x_{i_k} \bar{x}_{j_1} \ldots \bar{x}_{j_l}}$ любого порядка. Если в дифференциальном уравнении производные заменены соответствующими разностными отношениями по указанным правилам, то говорят, что полученное разностное уравнение аппроксимирует данное. Коэффициенты уравнения при этом также могут быть заменены на какие-либо функции, сходящиеся к ним при $h_i \to 0$, $i = 1, \ldots, n$. Разностное уравнение рассматривается обычно лишь на точках сетки. Принято определять также понятие порядка аппроксимации (для какой-либо производной и для всего дифференциального уравнения). Так, например, для u_{x_i} он равен единице, ибо согласно формуле конечных приращений $u_{x_i}(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} h_i \frac{\partial^2 u(\tilde{x})}{\partial x_i^2}$. Мы не будем останавливаться на этом понятии, так как в дальнейшем оно не используется. Разностные отношения (2.1) от произведения uv двух сеточных или обычных (т. е. заданных

*) Напомним, что область Ω всюду считается ограниченной.

в области) функций можно представить так:

$$(uv)_{x_i}(x) = u_{x_i}(x)\,v(x) + u(x + h_i e_i)\,v_{x_i}(x) =$$
$$= u_{x_i}(x)\,v(x) + u(x + h_i e_i)\,v_{\bar{x}_i}(x + h_i e_i), \quad (2.2)$$
$$(uv)_{\bar{x}_i}(x) = u_{\bar{x}_i}(x)\,v(x) + u(x - h_i e_i)\,v_{\bar{x}_i}(x) =$$
$$= u_{\bar{x}_i}(x)\,v(x) + u(x - h_i e_i)\,v_{x_i}(x - h_i e_i). \quad (2.3)$$

Как видим, эти формулы отличаются от формулы дифференцирования произведения. В них имеется то самое неприятное «расползание» аргументов, о котором мы говорили во введении. Благодаря им мы теряем соотношение $u\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x_i}$, весьма важное при выводе всех априорных оценок. Ни для одной из аппроксимаций $\frac{\Delta}{\Delta x_i}$ производной $\frac{\partial}{\partial x_i}$ не имеет место равенство $u\frac{\Delta u}{\Delta x_i} = \frac{1}{2}\frac{\Delta(u^2)}{\Delta x_i}$.

Разностным аналогом формулы интегрирования по частям в одномерном случае является формула

$$h\sum_{k=0}^{m-1} u_x(kh)\,v_h(kh) =$$
$$= -h\sum_{k=1}^{m} u_h(kh)\,v_{\bar{x}}(kh) + u_h(mh)\,v_h(mh) - u_h(0)\,v_h(0). \quad (2.4)$$

В ней u_h и v_h — произвольные сеточные функции, заданные на точках $x = kh$, $k = 0, \ldots, m$, а $(\ )_x$ и $(\ )_{\bar{x}}$ вычислены в соответствии с (2.1) с шагом $h_i = h$ *). Равенство (2.4) элементарно проверяется с помощью перегруппировки слагаемых (преобразования Абеля) **).

*) Первое слагаемое правой части (2.4) можно записать и так: $-h\sum_{k=0}^{m-1} u_h((k+1)h)\,v_x(kh)$, но мы предпочитаем первую форму, в которой аргументы у обоих слагаемых взяты в одной и той же точке.

**) Формула (2.4) может быть получена и как следствие очевидного равенства $h\sum_{k=0}^{m-1} w_x(kh) = w_h(mh) - w_h(0)$, если в ней взять $w_h = u_h v_h$ и воспользоваться (2.2).

В нем также есть отклонение от обычной формулы интегрирования по частям: в его левой и правой частях стоят разностные отношения различного типа. Из-за этого в разностях теряется еще одно важное равенство: $2\int\limits_0^l u\frac{\partial u}{\partial x}\,dx = u^2(l) - u^2(0)$, существенно используемое при выводе оценок. Вместо него приходится пользоваться следующими:

$$2h\sum_{k=1}^{m} u_{\bar{x}}(kh)\,u_h(kh) = u_h^2(mh) - u_h^2(0) + h\sum_{k=1}^{m} h(u_{\bar{x}}(kh))^2 \quad (2.5)$$

и

$$2h\sum_{k=0}^{m-1} u_x(kh)\,u_h(kh) = u_h^2(mh) - u_h^2(0) - h\sum_{k=0}^{m-1} h(u_x(kh))^2. \quad (2.6)$$

Они получаются суммированием элементарно проверяемых соотношений:

$$2hu_{\bar{x}}(kh)\,u_h(kh) = u_h^2(kh) - u_h^2((k-1)h) + h^2\left(u_{\bar{x}}(kh)\right)^2 \quad (2.7)$$

и

$$2hu_x(kh)\,u_h(kh) = u_h^2((k+1)h) - u_h^2(kh) - h^2\left(u_x(kh)\right)^2. \quad (2.8)$$

Складывая (2.5) и (2.6), получим такое представление разности квадратов значений $u_h(kh)$ в разных точках:

$$u_h^2(mh) - u_h^2(0) =$$
$$= h\sum_{k=1}^{m} u_{\bar{x}}(kh)\,u_h(kh) + h\sum_{k=0}^{m-1} u_x(kh)\,u_h(kh). \quad (2.9)$$

В многомерном случае формула суммирования по частям получается простым сложением равенств (2.4) по всем отрезкам, параллельным оси x_i, для которой взяты разностные отношения $(\ )_{x_i}$ и $(\ )_{\bar{x}_i}$ в (2.4), принадлежащим области определения функций u_h и v_h. Мы используем ее для одного важного случая, когда «внеинтегральные члены» отсутствуют, т. е. когда $u_h v_h$ обращается в нуль на «границе сеточной области». Поясним это.

Условимся символом $\overline{\Omega}_h$ обозначать замкнутую область, состоящую из ячеек $\overline{\omega}_h$ (или, что то же, $\overline{\omega}_{(kh)}$), принадлежащих $\overline{\Omega}$. Ее границу обозначим через S_h, а $\overline{\Omega}_h - S_h = \Omega_h$. Эти же символы Ω_h, S_h и $\overline{\Omega}_h$ будем употреблять и для указания множеств вершин (точек) сетки, принадлежащих Ω_h, S_h и $\overline{\Omega}_h$ соответственно. Точки сетки Ω_h называются «внутренними»: вместе с ними к $\overline{\Omega}_h$ принадлежат и все их «ближайшие соседи», точнее, вершины всех ячеек $\omega_{(kh)}$, одной из вершин которых является взятая точка Ω_h. Напротив, точки S_h называем граничными.

Возьмем на $\overline{\Omega}_h$ сеточную функцию w_h, равную нулю на S_h, и доопределим ее нулем вне $\overline{\Omega}_h$ (т. е. на все точки решетки из R_n). Легко проверить, что для нее справедливы равенства

$$\Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} w_{x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \Delta_h \equiv h_1 \ldots h_n. \tag{2.10}$$

Если в качестве w_h в (2.10) взять произведение $u_h v_h$ двух сеточных функций и воспользоваться формулой (2.2), то получим весьма важный частный случай многомерной формулы «суммирования по частям»:

$$\Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} u_{x_i} v_h = -\Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} u_h v_{\bar{x}_i}. \tag{2.11}$$

Напомним, что в ней $u_h v_h = 0$ вне Ω_h (можно считать, например, что (2.11) имеет место, если $u_h = 0$ вне Ω_h, а v_h произвольна). Обратим внимание на удобную запись в (2.11) — суммы слева и справа распространены на одно и то же множество $\overline{\Omega}_h$ (в отличие от общего случая, когда $u_h v_h|_{S_h} \neq 0$, — см. (2.4)). Это оказалось возможным благодаря нашему распространению функций u_h и v_h вне $\overline{\Omega}_h$. А распространение было необходимо: в обеих суммах (2.11) есть слагаемые, которые содержат значения u_h и v_h в точках, не принадлежащих $\overline{\Omega}_h$.

Формулы, похожие на (2.4) и (2.10), (2.11), можно написать и для функций u и v, заданных на области.

Так, если функция $w(x)$ определена на отрезке $[0, l]$ и суммируема на нем, то для $h < l$

$$\int_0^{l-h} w_x(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_{l-h}^{l} w(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_0^h w(x)\,dx. \qquad (2.12)$$

Отсюда и из формулы (2.2) следует для $w(x) = u(x)v(x)$

$$\int_0^{l-h} u_x v\,dx = -\int_h^l uv_{\bar{x}}\,dx + \frac{1}{h}\int_{l-h}^{l} uv\,dx - \frac{1}{h}\int_0^h uv\,dx. \qquad (2.13)$$

Если же $u(x)$ и $v(x)$ равны нулю вне $(0, l)$, то

$$\int_0^l u_x v\,dx = -\int_0^l uv_{\bar{x}}\,dx. \qquad (2.14)$$

Это же верно, если только $v(x)$ равна нулю при $x < 0$ и $x > l - h$. В многомерном случае для $u(x)$ и $v(x)$, равных нулю вне области Ω,

$$\int_\Omega u_{x_i} v\,dx = -\int_\Omega uv_{\bar{x}_i}\,dx. \qquad (2.15)$$

Формула (2.15) справедлива и тогда, когда только функция v равна нулю вне пересечения области Ω со сдвигом Ω на вектор $-h_i e_i$. В равенствах (2.12)—(2.15) $w(x)$, $u(x)$ и $v(x)$ — произвольные суммируемые функции на их областях определений.

С помощью (2.15) легко доказывается следующий факт:

Лемма 2.1. *Пусть $u(x) \in L_2(\Omega)$ и пусть ее разностные отношения $u_{x_i}(x)$ при $h_i \to 0$ сходятся слабо в $L_2(\Omega')$ для $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$ к функции $v_i(x)$ (так что $v_i \in L_2(\Omega')$ для $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$). Тогда $v_i(x)$ есть обобщенная производная $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ функции $u(x)$ в Ω.*

Заметим, что в $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ функции $u_{x_i}(x)$ определены для всех h_i, меньших расстояния от $\overline{\Omega}'$ до $\partial\Omega$. Возьмем произвольную $\Phi(x) \in \dot{C}^\infty(\Omega)$ и применим к $u(x)$ и $\Phi(x)$ формулу (2.15). Она верна для всех достаточно малых h_i.

Устремим в ней h_i к нулю. Функции $\Phi_{\bar{x}_i}(x)$ будут стремиться к $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ равномерно в $\overline{\Omega}$, и следовательно, в пределе мы придем к равенству

$$\int\limits_{\Omega} v_i \Phi \, dx = -\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx,$$

гарантирующему желаемое: $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Из данного вывода видно, что условия леммы можно ослабить, потребовав более слабую сходимость u_{x_i} к v_i. Кроме того, вместо разностных отношений $(\ )_{x_i}$ можно взять любые другие, аппроксимирующие производные $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

§ 3. Восполнения сеточных функций. Простейшие теоремы вложения

Пусть R_n разбито на ячейки $\omega_{(kh)}$ так, как описано в начале § 2. Возьмем какую-либо ограниченную область Ω и соответствующие ей множества Ω_h, $\overline{\Omega}_h$ и S_h, определенные в § 2. Для произвольной функции u_h, заданной на сетке $\overline{\Omega}_h$, построим несколько простейших интерполяций и выясним связь между ними и u_h. Первая из них — кусочно-постоянная — имеет вид:

$$\tilde{u}_h(x) = u_h \big|_{x=(kh)} \quad \text{для} \quad x \in \omega_{(kh)} \tag{3.1}$$

(напомним: $kh = (k_1 h_1, \ldots, k_n h_n)$; $\omega_{(kh)} = \{x : k_i h_i < x_i < (k_i + 1) h_i\}$). Вторая — полилинейная:

$$\begin{aligned} u'_h(x) = u_h + \sum_{r=1}^{n} u_{x_r}(x_r - k_r h_r) + \ldots \\ \ldots + \sum_{r=1}^{n} u_{x_1 \ldots x_{r-1} x_{r+1} \ldots x_n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n} (x_i - k_i h_i) + \\ + u_{x_1 \ldots x_n} \prod_{i=1}^{n} (x_i - k_i h_i) \end{aligned} \tag{3.2}$$

для $x \in \bar{\omega}_{(kh)}$. В (3.2) u_h и все разностные отношения вычислены в вершине (kh). Функция $u'_h(x)$ непрерывна в $\bar{\Omega}_h$, в пределах же одной ячейки она линейна по каждому переменному x_i. Во всех вершинах $\bar{\Omega}_h$ $u'_h(x)$ совпадает с u_h. Ясно, что $u'_h(x) \in W^1_m(\Omega_h)$, $\forall m \geqslant 1$. Третья интерполяция, точнее, n интерполяций третьего типа определяются равенствами

$$u_{(m)}(x) = u_h + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq m}} u_{x_r}(x_r - k_r h_r) + \ldots$$

$$\ldots + u_{x_1 \ldots x_{m-1} x_{m+1} \ldots x_n} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq m}}^{n} (x_r - k_r h_r) \tag{3.3}$$

для $x \in \omega_{(kh)}$; u_h и все разностные отношения вычислены в вершине (kh). Функция $u_{(m)}(x)$ в пределах $\omega_{(kh)}$ постоянна по x_m, линейна по остальным x_j и совпадает со значениями u_h в тех вершинах $\omega_{(kh)}$, которые лежат на плоскости $x_m = k_m h_m$. Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial u'_h(x)}{\partial x_m} = (u_{x_m})_{(m)}(x), \qquad x \in \omega_{(kh)}. \tag{3.4}$$

Здесь и ниже интерполяции вида (3.1) для разделенных разностей u_{x_i} сеточной функции u_h будут обозначаться $(\widetilde{u_{x_i}})(x)$ или, короче, $\tilde{u}_{x_i}$. Можно было бы для тех же целей, для которых будут использованы описанные интерполяции, ввести другие, например, вместо $u'_h(x)$ взять другое непрерывное на $\bar{\Omega}_h$ восполнение, совпадающее с u_h во всех вершинах Ω_h, линейное по всем переменным в пределах элементарных симплексов, на которые предварительно надо подразделить каждый параллелепипед $\omega_{(kh)}$. Таких интерполяций можно построить несколько в соответствии с различными возможными разбиениями $\omega_{(kh)}$ на симплексы. Но мы не будем пользоваться ими (исключение составляет § 12, где о них говорится для случая $n = 2$) из-за неудобства их аналитической записи.

Пусть положительные числа $h_1, \ldots, h_n$ пробегают какие-либо числовые последовательности, имеющие своим пределом нуль. Рассмотрим соответствующие им решетки и множества $\overline{\Omega}_h$. Допустим, что на каждой из $\overline{\Omega}_h$ определена своя функция u_h. Доопределим их нулем на все точки решетки, не принадлежащие $\overline{\Omega}_h$, и построим по этим сеточным функциям интерполяции $\tilde{u}_h(x)$, $u'_h(x)$ и $u_{(m)}(x)$. Убедимся в справедливости следующего предложения:

Л е м м а 3.1. *Пусть*

$$\Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} u_h^2 \leqslant c\ ^{*)}. \tag{3.5}$$

Тогда, если одна из последовательностей $\{\tilde{u}_h\}$, $\{u'_h\}$, $\{u_{(m)}\}$ *сходится слабо в* $L_2(\Omega)$ *к функции* $u(x)$ *при* $h_1, \ldots$ $\ldots, h_n \to 0$, *то и другие сходятся так же к* $u(x)$.

Важное замечание. Постоянная c здесь и все постоянные c и c_i, встречающиеся ниже, не зависят от шагов $h = (h_1, \ldots, h_n)$.

Во-первых, заметим, что из (3.5) следует равномерная ограниченность норм $\|\tilde{u}_h\|_{2,\Omega}$, $\|u'_h\|_{2,\Omega}$ и $\|u_{(m)}\|_{2,\Omega}$ **), и потому каждая из этих последовательностей слабо компактна в $L_2(\Omega)$. Кроме того, из этого же следует, что для доказательства интересующих нас сходимостей достаточно проверить сходимость проекций (в $L_2(\Omega)$) соответствующих функций лишь на функции $\Phi(x)$ из $\dot{C}^\infty(\Omega)$. Пусть $\int\limits_\Omega u'_h\Phi\,dx \to \int\limits_\Omega u\Phi\,dx$, докажем, что $\int\limits_\Omega \tilde{u}_h\Phi\,dx \to \int\limits_\Omega u\Phi\,dx$. Другие случаи рассматриваются аналогично. Построим по $\Phi(x)$ кусочно-постоянную функцию $\tilde{\Phi}_h(x)$, совпадающую с $\Phi(x)$ на точках решетки. Легко видеть, что $\int\limits_\Omega u'_h\tilde{\Phi}_h\,dx \to \int\limits_\Omega u\Phi\,dx$. Возьмем h_i,

---

*) Напомним, что $\Delta_h = h_1 \ldots h_n$.

**) Ибо значения функций $\tilde{u}_h(x)$, $u'_h(x)$ и $u_{(m)}(x)$ в каждой из ячеек $\omega_{(kh)}$ заключены между наибольшим и наименьшим значениями u_h в вершинах $\omega_{(kh)}$.

$i = 1, \ldots, n$, уже столь малыми, что на S_h и вне $\overline{\Omega}_h$ функция $\tilde{\Phi}_h$ равна нулю. Тогда

$$R = \int_\Omega (u'_h - \tilde{u}_h)\tilde{\Phi}_h\, dx = \sum_{(kh)} \Phi(kh) \int_{\omega_{(kh)}} (u'_h - \tilde{u}_h)\, dx,$$

где $\sum\limits_{(kh)}$ означает суммирование по всем $\omega_{(kh)} \subset \overline{\Omega}_h$. Нетрудно подсчитать далее, что

$$R = \Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} \Phi_h \left\{ u_{x_1 \ldots x_n} \frac{1}{2^n} \Delta_h + \right.$$
$$\left. + \sum_{r=1}^{n} u_{x_1 \ldots x_{r-1} x_{r+1} \ldots x_n} \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{i \neq r} h_i + \ldots + \sum_{r=1}^{n} u_{x_r} \frac{1}{2} h_r \right\},$$

где через Φ_h обозначены значения Φ в вершинах сетки.

Перенесем в каждом слагаемом скобки одно из разностных отношений с u_h на Φ_h, используя формулу (2.11). Это приведет к равенству

$$R = -\Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} \left\{ \Phi_{\bar{x}_1} u_{x_2 \ldots x_n} h_2 \ldots h_n \frac{1}{2^n} h_1 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \sum_{r=1}^{n} \Phi_{\bar{x}_r} u_h \frac{1}{2} h_r \right\}.$$

Но

$$\left(u_{x_{i_1} \ldots x_{i_s}} h_{i_1} \ldots h_{i_s}\right)^2 \Big|_{(kh)} \leqslant c_1 \sum_{\overline{\omega}_{(kh)}} u_h^2 \qquad i_1 \neq \ldots \neq i_s$$

и

$$\Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} \sum_{r=1}^{n} (\Phi_{\bar{x}_r})^2 \leqslant c_2,$$

и, следовательно, $R \to 0$ при $h_1, \ldots, h_n \to 0$. Итак, доказано, что

$$\int_\Omega \tilde{u}_h \tilde{\Phi}_h\, dx \to \int_\Omega u\Phi\, dx.$$

Поэтому и

$$\int_\Omega \tilde{u}_h \Phi\, dx = \int_\Omega \tilde{u}_h \tilde{\Phi}_h\, dx + \int_\Omega \tilde{u}_h (\Phi - \tilde{\Phi}_h)\, dx \to \int_\Omega u\Phi\, dx.$$

Лемма доказана.

Введем следующие сокращенные обозначения, которые будут использованы в дальнейшем:

$$u_{x_i}^2 \equiv \left(u_{x_i}\right)^2, \quad u_{\bar{x}_i}^2 = \left(u_{\bar{x}_i}\right)^2,$$

$$u_x^2 \equiv \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2, \quad u_{\bar{x}}^2 \equiv \sum_{i=1}^n u_{\bar{x}_i}^2, \quad \left|u_x\right| \equiv \left(u_x^2\right)^{1/2},$$

$$\| u_h \|_{m, \overline{\Omega}_h} \equiv \left(\Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} | u_h |^m\right)^{1/m}, \tag{3.6}$$

$$\left\| u_{x_i} \right\|_{m, \overline{\omega}_{(kh)}} \equiv \left(\Delta_h \sum_{\omega_{(kh)}^{(i)}} \left| u_{x_i} \right|^m\right)^{1/m}, \tag{3.7}$$

$$\| u_x \|_{m, \overline{\omega}_{(kh)}} = \left(\sum_{i=1}^n \left\| u_{x_i} \right\|_{m, \overline{\omega}_{(kh)}}^m\right)^{1/m}. \tag{3.8}$$

В (3.7) символ $\sum\limits_{\omega_{(kh)}^{(i)}}$ означает суммирование по вершинам ячейки $\omega_{(kh)}$, принадлежащим грани $x_i = k_i h_i$. Далее,

$$\left\| u_{x_i} \right\|_{m, \overline{\Omega}_h} = \left(\sum_{\overline{\omega}_{(kh)} \in \overline{\Omega}_h} \left\| u_{x_i} \right\|_{m, \overline{\omega}_{(kh)}}^m\right)^{1/m}, \tag{3.9}$$

$$\| u_x \|_{m, \overline{\Omega}_h} = \left(\sum_{i=1}^n \left\| u_{x_i} \right\|_{m, \overline{\Omega}_h}^m\right)^{1/m} \tag{3.10}$$

и

$$\| u_h \|_{m, \overline{\Omega}_h}^{(1)} = \left[\| u_h \|_{m, \overline{\Omega}_h}^m + \| u_x \|_{m, \overline{\Omega}_h}^m\right]^{1/m}. \tag{3.11}$$

Величины $\| u_h \|_{m, \overline{\Omega}_h}$ и $\| u_h \|_{m, \overline{\Omega}_h}^{(1)}$ естественно назвать нормами пространств $L_m(\overline{\Omega}_h)$ и $W_m^1(\overline{\Omega}_h)$ сеточных функций u_h, определенных на $\overline{\Omega}_h$.

В суммах (3.9) и (3.10) имеются одинаковые слагаемые — значения $\left|u_{x_i}\right|$, вычисленные в одной и той же точке сетки, но они повторяются не более чем 2^{n-1} раза. Ввиду этого вместо норм, определенных выражениями (3.9) — (3.11), можно ввести другие, им эквивалентные, в которых таких повторений нет (напомним, что число n при наших рассмотрениях мы считаем фиксированным). Мы это и сделаем в следующих параграфах. Так, например, в случае, когда функции u_h равны нулю на S_h, мы их будем считать доопределенными нулем вне $\overline{\Omega}_h$, и под величиной $\| u_x \|^2_{2, \overline{\Omega}_h}$ будем понимать сумму $\Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} u_x^2$ (соответственно $\| u_h \|^{(1)}_{2, \overline{\Omega}_h}$ считать определенной равенством $\left[\Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} (u_h^2 + u_x^2)\right]^{1/2}$). Но в данном параграфе мы, ради удобства записи, будем использовать нормы вида (3.9)—(3.11).

Предположим, что функции u_h определены на сеточных множествах $\overline{\Omega}_h^*$, состоящих из вершин ячеек $\bar\omega_{(kh)}$, имеющих с Ω непустое пересечение.

Лемма 3.2. *Пусть*

$$\| u_h \|^{(1)}_{2, \overline{\Omega}_h^*} \leqslant c.$$

Тогда, если одна из последовательностей функций $\{\tilde u_h\}$, $\{u'_h\}$ *или* $\{u_{(m)}\}$ *сходится при* $h_i \to 0$ *в* $L_2(\Omega)$ *к некоторой функции* $u(x)$, *то и две другие сходятся в* $L_2(\Omega)$ *к* $u(x)$.

Прежде всего покажем, что величина $|u'_h - u_{(m)}|$ достигает своего наибольшего значения на $\bar\omega_{(kh)}$ в одной из вершин $\omega_{(kh)}$, и это значение равно произведению $|u_{x_m}| h_m$, взятому в одной из вершин $\omega_{(kh)}$, принадлежащей плоскости $x_m = k_m h_m$. Действительно, на грани $x_m = k_m h_m$ взятой ячейки $\omega_{(kh)}$ функции u'_h и $u_{(m)}$ совпадают. Вдоль отрезка, выходящего из какой-либо точки этой границы параллельно оси x_m, функция u'_h линейна по x_m, а u_m постоянна. Поэтому

$$u'_h - u_{(m)} = \left.\frac{\partial u'_h}{\partial x_m}\right|_{x_m = k_m h_m} (x_m - k_m h_m) =$$
$$= (u_{x_m})_{(m)} \big|_{x_m = k_m h_m} (x_m - k_m h_m),$$

а

$$\max_{\bar\omega_{(kh)}} |u'_h - u_{(m)}| = h_m \max_{\substack{x_m = k_m h_m \\ k_i h_i \leqslant x_i \leqslant (k_i+1) h_i \\ i \neq m}} \left| (u_{x_m})_{(m)} \right|.$$

Но функция $(u_{x_m})_{(m)}$ на грани $x_m = k_m h_m$ линейна по всем переменным x_i, $i \neq m$, и потому принимает свое наибольшее значение в одной из вершин этой грани, где она равна просто u_{x_m}. Поэтому верно равенство

$$\max_{\bar\omega_{(kh)}} \left| u'_h - u_{(m)} \right| = h_m \max_{x_m = k_m h_m} \left| u_{x_m} \right|, \tag{3.12}$$

где max взят по вершинам $\omega_{(kh)}$, лежащим на грани $x_m = k_m h_m$.

Разберем один из случаев, указанных в лемме, ибо остальные доказываются аналогично.

Пусть

$$\int_\Omega (u'_h - u)^2\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad h_i \to 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$R = \int_\Omega (u'_h - u_{(m)})^2\, dx \leqslant \sum_{(kh)} \int_{\omega_{(kh)}} (u'_h - u_{(m)})^2\, dx, \tag{3.13}$$

где суммирование $\sum\limits_{(kh)}$ проведено по всем $\omega_{(kh)} \in \overline{\Omega}^*_h$. Используя (3.12), можно правую часть (3.13) мажорировать так:

$$R \leqslant h_m^2 \| u_{x_m} \|^2_{2,\, \overline{\Omega}^*_h} \leqslant h_m^2 c^2 \to 0$$

при $h_m \to 0$. Отсюда следует, что

$$\int_\Omega (u_{(m)} - u)^2\, dx \leqslant 2 \int_\Omega \left[(u'_h - u_{(m)})^2 + (u'_h - u)^2 \right] dx \to 0$$

при $h_1, \ldots, h_n \to 0$.

Лемма 3.3. *Пусть* $\| u_h \|^{(1)}_{2,\, \overline{\Omega}^*_h} \leqslant c$, *где* $\overline{\Omega}^*_h$ — *те же сеточные множества, что и в лемме* 3.2. *Пусть, кроме того,* $h_1 = \ldots = h_n = h \to 0$, *и граница* S *области* Ω — *гладкая. Тогда если* $\{u'_h(x)\}$ *сходятся к* $u(x)$ *в норме* $L_2(S)$, *то* $\{\tilde u_h(x)\}$ *также сходятся к* $u(x)$ *в норме* $L_2(S)$.

Доказывается эта лемма так же, как лемма 3.2, надо только учесть, что $h \int\limits_{S \cap \omega_{(kh)}} ds \leqslant ch^n$, где постоянная c не зависит от h.

Перейдем к доказательству теорем о сильной компактности семейства сеточных функций (точнее, их восполнений) в $L_2(\Omega)$. Они являются аналогами теорем 6.1, 6.2 и 6.6 Ф. Реллиха, доказанных в гл. I.

Теорема 3.1. *Пусть последовательность функций $\{u_h\}$, каждая из которых определена на своей сетке $\overline{\Omega}_h$, удовлетворяет условию*

$$j_h \equiv \Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} [u_h^2 + u_x^2] \leqslant c, \tag{3.14}$$

и пусть u_h равны нулю в граничных точках S_h и вне $\overline{\Omega}_h$. Тогда восполнения $\{u_h'(x)\}$ образуют равномерно ограниченное множество в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и, следовательно, оно сильно компактно в $L_2(\Omega)$ и слабо компактно в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Замечание 3.1. В этой теореме можно не предполагать, что ребра ячеек сеток Ω_h стремятся к нулю, хотя она применяется именно к этому случаю. Если же $h_i \to 0$, $i = 1, \ldots, n$, то из теоремы 3.1 и лемм 3.1 и 3.2 можно вывести такие заключения: пусть из $\{u_h'\}$ выбрана подпоследовательность $\{u_{h\alpha}'(x)\}$, сходящаяся к некоторой функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ сильно в норме $L_2(\Omega)$ и слабо в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда все другие восполнения $u_{h\alpha}$ также будут стремиться в $L_2(\Omega)$ к $u(x)$, а построенные по $u_{h\alpha}$ функции $\widetilde{u_{x_i}}(x)$, $(u_{x_i})_{(m)}(x)$ и $(u_{x_i})'_{h\alpha}(x)$ сходятся слабо в $L_2(\Omega)$ к $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ (для проверки последнего утверждения надо вспомнить соотношение (3.4)).

Для доказательства теоремы 3.1 достаточно убедиться, что из (3.14) следует равномерная ограниченность $\| u_h'(x) \|_{2, \Omega}^{(1)}$.

Для этого заметим, что функцию $u_h'(x)$ в параллелепипеде $\omega_{(kh)}$ можно представить в виде $\sum\limits_{\omega_{(kh)}} u_h(sh) \times \times X_s\left(\frac{x_1}{h_1}, \ldots, \frac{x_n}{h_n}\right)$, где X_s суть полиномы порядка n, а символ $\sum\limits_{\omega_{(kh)}}$ означает суммирование по всем вершинам $\omega_{(kh)}$. Из этого представления ясно, что

$$\int\limits_{\omega_{(kh)}} (u_h'(x))^2 \, dx = \Delta_h \int\limits_{\omega_{(k)}} (\hat{u}_h'(y))^2 \, dy \leqslant c\Delta_h \sum_{\omega_{(kh)}} u_h^2,$$

где $y_i = \frac{x_i}{h_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а $\hat{u}'_h(y) = u'_h(x)$. Но тогда

$$\int\limits_{\Omega_h} (u'_h(x))^2\, dx \leqslant 2^n c \Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} u_h^2. \tag{3.15}$$

Производная же $\frac{\partial u'_h(x)}{\partial x_i}$ в $\omega_{(kh)}$ есть сумма вида $\sum\limits_{\omega^{(i)}_{(kh)}} u_{x_i}(sh)\, \widetilde{X}_s\left(\frac{x_1}{h_1}, \ldots, \frac{x_n}{h_n}\right)$, где $\widetilde{X}_s$ суть полиномы степени $n-1$, а символ $\sum\limits_{\omega^{(i)}_{(kh)}}$ означает суммирование по тем вершинам $\omega_{(kh)}$, которые лежат на грани $x_i = k_i h_i$. Ввиду этого

$$\int\limits_{\omega_{(kh)}} \left(\frac{\partial u'_h}{\partial x_i}\right)^2 dx \leqslant c_1 \Delta_h \sum_{\omega^{(i)}_{(kh)}} (u_{x_i})^2, \tag{3.16}$$

и потому

$$\int\limits_{\Omega_h} \left(\frac{\partial u'_h}{\partial x_i}\right)^2 dx \leqslant c_1 \|u_{x_i}\|^2_{2,\,\overline{\Omega}_h} \quad \text{и} \quad \int\limits_{\Omega_h} \left(\frac{\partial u'_h}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant c_1 \|u_x\|^2_{2,\,\overline{\Omega}_h}. \tag{3.17}$$

Каждая из функций $u'_h(x)$ является элементом $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, равным нулю в области $\Omega \setminus \Omega_h$. Неравенства (3.15), (3.17) и предположение (3.14) гарантируют для них равномерную ограниченность норм $\|u'_h\|^{(1)}_{2,\,\Omega}$.

Итак, из условия (3.14) следует равномерная ограниченность в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ семейства $\{u'_h(x)\}$, а так как каждая из $u'_h(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, то теоремы 6.1 и 1.2 гл. I гарантируют справедливость теоремы 3.1.

Аналогично со ссылкой на следствие 6.1 гл. I устанавливается следующая теорема:

Теорема 3.2. *Пусть для цилиндра* $\overline{Q}_T = \{(x, x_0) : x \in \overline{\Omega},\ x_0 \in [0, T]\}$ *построена последовательность решеток* $\overline{Q}_{Th} = \overline{\Omega}_h \times [x_0 = k_0 h_0,\ \ h_0 = \frac{T}{N},\ \ k_0 = 0, 1, \ldots, N]$,

$\overline{\Omega}_h \subset \overline{\Omega}$, с $h_i \to 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *и на каждой из них имеется функция* u_h, *равная нулю на* S_h *и вне* Ω_h *при всех* $x_0 = k_0 h_0$, $k_0 = 0, 1, \ldots, N$. *Если*

$$\| u_h \|^{(1)}_{2, \overline{Q}_{Th}} \leqslant c,$$

то из $\{h\}$ *можно выбрать подпоследовательность* $\{h^\alpha\}$, *для которой функции* $\{u'_{h^\alpha}(x, x_0)\}$ *сходятся к некоторой функции* $u(x, x_0)$ *в норме* $L_2(Q_T)$, *в норме* $L_2(\Omega)$ *равномерно относительно* $x_0 \in [0, T]$ *и слабо в пространстве* $W_2^1(Q_T)$. *Предельная функция* $u(x, x_0)$ *есть элемент* $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,0}(Q_T)$ *).

Теорема 3.1 может быть обобщена на случай функций u_h, не равных нулю на S_h, нижеследующим образом. Пусть имеется последовательность областей $\overline{\Omega}{}^*_h$ (таких же, как в лемме 3.2), содержащих область Ω, удовлетворяющую условиям теоремы 6.2 гл. I. Пусть, далее, на сеточных множествах $\overline{\Omega}{}^*_h$ (т. е. на вершинах ячеек $\omega_{(kh)}$, принадлежащих $\overline{\Omega}{}^*_h$) определены функции u_h. Для таких функций справедлива теорема:

Теорема 3.3. *Пусть функции* $\{u_h\}$ *определены на последовательности сеточных множеств* $\overline{\Omega}{}^*_h$, *удовлетворяющих только что описанным требованиям, и пусть для них*

$$\| u_h \|^{(1)}_{2, \overline{\Omega}{}^*_h} \leqslant c. \tag{3.18}$$

Тогда семейство восполнений $\{u'_h(x)\}$ *равномерно ограничено в норме* $W_2^1(\Omega)$ *и, следовательно, компактно в* $L_2(\Omega)$.

Оно компактно и в $L_2(\partial\Omega)$, *если* $\partial\Omega$ *удовлетворяет условиям теоремы* 6.6 *гл.* I.

Утверждение теоремы следует из сравнения членов левой части (3.18) с нормами в $L_2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ для $u'_h(x)$, приведенного выше при доказательстве теоремы 3.1 (см. (3.15)—(3.17)).

---

*) Напомним, что $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,0}(Q_T)$ получено замыканием в норме $W_2^1(Q_T)$ множества гладких функций, равных нулю вблизи боковой поверхности Γ_T цилиндра Q_T. Об элементах $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,0}(Q_T)$ имеет смысл говорить, что они равны нулю на Γ_T.

Замечание 3.2. Для случаев, рассмотренных в теоремах 3.2 и 3.3, справедливы утверждения замечания 3.1.

Для сеточных функций u_h, заданных на $\overline{\Omega}_h$ и равных нулю вне Ω_h, справедливы неравенства

$$\Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} u_h^2 \leqslant \frac{l_i^2}{2} \Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} \left(u_{x_i}\right)^2, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.19}$$

где l_i есть длина i-й стороны параллелепипеда $\Pi_l \equiv \equiv \{x\colon 0 < x_i < l_i, i = 1, \ldots, n\}$, заключающего в себе Ω. Они являются разностными аналогами неравенства (6.3) гл. I и выводятся так же, как (6.3) в гл. I. Надо только вместо формулы Ньютона — Лейбница (6.5) взять ее разностный эквивалент:

$$\begin{gathered} u_h(mh_i, x_i') = h_i \sum_{k=0}^{m-1} u_{x_i}(kh_i, x_i'), \\ x_i' = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n). \end{gathered} \tag{3.20}$$

§ 4. Общие теоремы вложения

В § 3 при доказательстве теоремы 3.1 мы показали, что отношение $\left\|u_h'\right\|_{2,\,\omega_{(kh)}} \left\|u_h\right\|_{2,\,\bar{\omega}_{(kh)}}^{-1}$ *) не превосходит некоторой постоянной, не зависящей ни от u_h, ни от h_i. Оказывается, что и обратно: отношение $\left\|u_h\right\|_{2,\,\bar{\omega}_{(kh)}} \left\|u_h'\right\|_{2,\,\omega_{(kh)}}^{-1}$ ограничено сверху постоянной, не зависящей от u_h и h_i, причем оба эти факта верны не только для норм L_2, но и для любой нормы L_m, $m \geqslant 1$. Условимся такие величины $\left\|u_h'\right\|_{m,\,\omega_{(kh)}}$ и $\left\|u_h\right\|_{m,\,\bar{\omega}_{(kh)}}$ называть эквивалентными. Для доказательства эквивалентности $\left\|u_h'\right\|_{m,\,\omega_{(kh)}}$ и $\left\|u_h\right\|_{m,\,\bar{\omega}_{(kh)}}$, во-первых, заметим, что их отношения не зависят от величин $h_1, \ldots, h_n$, ибо при переходе к $y_i = x_i h_i^{-1} - k_i$ они преобразуются в $\Delta_h^{1/m}\left\|u_1'\right\|_{m,\,\omega_{(0)}}$ и $\Delta_h^{1/m}\left\|u_1\right\|_{m,\,\bar{\omega}_{(0)}}$

*) Обозначения норм для сеточных функций введены в § 3.

соответственно, где $\omega_{(0)}$ есть куб $\{y: 0 < y_i < 1\}$, подстрочный индекс «1» указывает, что u_1 есть сеточная функция, определенная в вершинах $\omega_{(0)}$, а $u_1'(y)$ — ее интерполяция на $\omega_{(0)}$, вычисленная согласно (3.2) с $h_i = 1$, $k_i = 0$. Представим $u_1'(y)$ в виде

$$u_1'(y_1, y_2) = u(0, 0)(1 - y_1)(1 - y_2) + u(1, 0)(1 - y_2)\, y_1 + \\ + u(0, 1)(1 - y_1)\, y_2 + u(1, 1)\, y_1 y_2 \, ^{*)} \qquad (4.1)$$

для случая $n = 2$ и аналогично для любого n. Из этого представления ясно, что отношение $\|u_1'\|_{m,\, \omega_{(0)}} \|u_1\|^{-1}_{m,\, \bar{\omega}_{(0)}}$ не превосходит некоторой постоянной c_m, зависящей только от m. Для доказательства же ограниченности отношения $j(u_1) = \|u_1\|_{m,\, \bar{\omega}_{(0)}} \cdot \|u_1'\|^{-1}_{m,\, \omega_{(0)}}$ на множестве всех сеточных функций u_1, заданных в вершинах $\omega_{(0)}$, заметим, что $j(u_1)$ не изменится, если это множество сузить требованием: $\|u_1\|_{m,\, \bar{\omega}_{(0)}} = 1$. Допустим, что $\sup j(u_1)$ по всем таким функциям u_1 неограничен, или, что то же, $\inf (j(u_1))^{-1} = 0$. Ввиду компактности допустимого к сравнению множества функций $\{u_1\}$ этот инфимум достигается на некоторой функции $\hat{u}_1'(y)$, так что $\|\hat{u}_1'\|_{m,\, \omega_{(0)}} = 0$. Из равенства нулю нормы в $L_m(\omega_{(0)})$ функции $\hat{u}_1'(y)$ следует тождественное обращение в нуль самой функции $\hat{u}_1'(y)$ на $\omega_{(0)}$, а отсюда и из линейной независимости функций, входящих в выражение (4.1) в качестве множителей при значениях $\hat{u}_1'(y)$ в вершинах, следует, что и сами эти значения равны нулю. Но это противоречит предположению: $\|\hat{u}_1\|_{m,\, \bar{\omega}_{(0)}} = 1$, и потому $\sup j(u_1)$ равен некоторой конечной постоянной c_m' **).

Итак, мы убедились в эквивалентности величин $\|u_h'\|_{m,\, \omega_{(kh)}}$ и $\|u_h\|_{m,\, \bar{\omega}_{(kh)}}$. Отсюда следует эквивалентность величин $\|u_h'\|_{m,\, \Omega_h}$ и $\|u_h\|_{m,\, \overline{\Omega}_h}$. Аналогично доказывается

---

*) Для справедливости (4.1) достаточно убедиться, что так определенная линейная по каждому переменному функция совпадает с заданными значениями в вершинах куба $\omega_{(0)}$.

**) Такой метод рассуждения имеется в работе [23_2]. В ней доказана теорема типа теоремы 4.1, приводимой ниже.

эквивалентность $\left\| \frac{\partial u'_h}{\partial x_i} \right\|_{m,\,\Omega_h}$ и $\| u_{x_i} \|_{m,\,\overline{\Omega}_h}$, а тем самым $\left\| \frac{\partial u'_h}{\partial x} \right\|_{m,\,\Omega_h} \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u'_h}{\partial x_i} \right\|^m_{m,\,\Omega_h} \right)^{1/m}$ и $\| u_x \|_{m,\,\overline{\Omega}_h}$. Эти факты позволяют перенести мультипликативные неравенства § 7 гл. I на сеточные функции. Так, например, пусть u_h задана на сетке $\overline{\Omega}_h$ и равна нулю на S_h. Ее восполнение $u'_h(x)$ будет элементом $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega_h)$ и потому для нее справедливо неравенство (7.1) гл. I, т. е.

$$\| u'_h \|_{p,\,\Omega_h} \leqslant \beta \left\| \frac{\partial u'_h}{\partial x} \right\|^{\alpha}_{m,\,\Omega_h} \| u'_h \|^{1-\alpha}_{r,\,\Omega_h} \tag{4.2}$$

(относительно значений параметров см. теорему 7.1 гл. I). В силу доказанной только что эквивалентности разных норм сеточной функции u_h и ее восполнения u'_h из (4.2) следует

$$\| u_h \|_{p,\,\overline{\Omega}_h} \leqslant \hat{\beta} \| u_x \|^{\alpha}_{m,\,\overline{\Omega}_h} \| u_h \|^{1-\alpha}_{r,\,\overline{\Omega}_h} \tag{4.3}$$

с теми же параметрами, что и в (4.2). Подчеркнем, что постоянная $\hat{\beta}$ определяется этими параметрами и размерностью n и не зависит ни от функции u_h, ни от сетки $\overline{\Omega}_h$ (в том числе от величин $h_1, \ldots, h_n$).

Для сеточных функций u_h, не равных нулю в «граничных точках» сетки Ω_h, также справедливы неравенства (4.2) и (4.3), ибо области вида Ω_h удовлетворяют требованиям, при которых были выведены неравенства (4.2). Однако постоянная β, которая в них войдет, вообще говоря, зависит от области Ω_h. В приложениях интересны те случаи, когда β может быть выбрана общей для всей совокупности областей Ω_h, аппроксимирующей данную область Ω. Это так, например, в следующей ситуации: пусть область Ω удовлетворяет требованиям теоремы 6.2 гл. I и на сетках $\overline{\Omega}{}^*_h$, состоящих из вершин $\overline{\omega}_{(kh)}$, имеющих с Ω непустые пересечения, взяты их восполнения $u'_h(x)$. Последние рассмотрим как элементы $W_m^1(\Omega)\cap L_r(\Omega)$ и применим к ним неравенства (7.7) гл. I, т. е.

$$\|u_h'\|_{p,\Omega}\leqslant \beta c_{p,m,r}(\Omega)\left(\|u_h'\|_{m,\Omega}^{(1)}\right)^{\alpha}\|u_h'\|_{r,\Omega}^{1-\alpha}. \tag{4.4}$$

Постоянная $c_{p,m,r}(\Omega)$ в нем определяется областью Ω (и, как всюду, параметрами p, m, r и n).

Но, как показано выше, $\|u_h\|_{p,\overline{\Omega}_h}\leqslant c\|u_h'\|_{p,\overline{\Omega}_h}\leqslant c\|u_h'\|_{p,\Omega}$, $\|u_h'\|_{k,\Omega}\leqslant\|u_h'\|_{k,\Omega_h^*}\leqslant c\|u_h\|_{k,\overline{\Omega}_h^*}$, $k=r,\ m$, и $\left\|\frac{\partial u_h'}{\partial x}\right\|_{m,\Omega}\leqslant \left\|\frac{\partial u_h'}{\partial x}\right\|_{m,\Omega_h^*}\leqslant c\|u_x\|_{m,\overline{\Omega}_h^*}$, причем постоянная c зависит лишь от p, m, r и n. Поэтому из (4.4) следуют неравенства

$$\|u_h\|_{p,\overline{\Omega}_h}\leqslant\beta_1\left(\|u_h\|_{m,\overline{\Omega}_h^*}^{(1)}\right)^{\alpha}\|u_h\|_{r,\overline{\Omega}_h^*}^{1-\alpha}, \tag{4.5}$$

постоянная β_1 в которых зависит лишь от Ω и p, m, r, n. Используя эти же свойства эквивалентности норм сеточных функций u_h и их восполнений u_h' и теорему 7.3 гл. I о компактности вложения $W_m^1(\Omega)$ в $L_{\tilde p}(\Omega)$ с $\forall\tilde p<p$, получим теорему о компактности в $L_{\tilde p}(\Omega)$ множества функций $\{u_h'\}$, для которого равномерно ограничены сеточные нормы $\|u_h\|_{m,\overline{\Omega}_h^*}^{(1)}$.

Нетрудно убедиться, что нормы других восполнений сеточных функций u_h, рассмотренных в § 3 данной главы, мажорируются такими же нормами u_h и u_h', если те и другие рассматривать на любой сумме ячеек $\omega_{(kh)}$. Справедливы также и обобщения теорем § 3 данной главы на любое $m>1$. Все сказанное позволяет работать одновременно со всеми интерполяциями u_h и быть уверенными, что на сгущающихся сетках (т. е. когда все $h_1,\ldots,h_n\to 0$) они приведут к одной и той же предельной функции в смысле сходимости не только в L_2, но и в любом L_p (с p, определяемым сформулированными выше теоремами вложения).

Введенных интерполяцией достаточно и для того, чтобы получить сеточные аналоги теорем вложения W_m^l в L_p (см. § 8 гл. I). Сформулируем две из них.

Теорема 4.1. *Пусть на последовательности сгущающихся сеток $\overline{\Omega}_h$ ($\overline{\Omega}_h \subset \overline{\Omega}$, $h_1, \ldots, h_n \to 0$) заданы функции u_h *), удовлетворяющие условию*

$$\sum_{k=0}^{l} \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{n} \Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h(i_1, \ldots, i_k)} \left(u_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}}\right)^2 \leqslant c. \qquad (4.6)$$

В (4.6) символ $\sum\limits_{\overline{\Omega}_h(i_1, \ldots, i_k)}$ означает суммирование лишь по тем точкам решетки $\overline{\Omega}_h$, для которых $u_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}}$ образовано с помощью значений u_h в вершинах $\overline{\Omega}_h$, обладающих тем свойствам, что $\overline{\omega}_{(kh)}$, через которые проходят отрезки, соединяющие эти вершины, принадлежат $\overline{\Omega}_h$.

Тогда существует подпоследовательность $\{h^\alpha\}$, для которой функции u'_{h^α} и $\left(u_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}}\right)'_{h^\alpha}$, $k = 1, 2, \ldots, l-1$, $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n$, сходятся сильно в $L_2(\Omega')$, а функции $\left(u_{i_1 \ldots i_l}\right)'_{h^\alpha}$ сходятся слабо в $L_2(\Omega')$ по любой строго внутренней подобласти Ω' области Ω к некоторым функциям u, $u_{i_1 \ldots i_k}$ и $u_{i_1 \ldots i_l}$ соответственно. Предельные функции обладают следующими свойствами:

$$u \in W_2^l(\Omega), \qquad \| u \|_{2, \Omega}^{(l)} \leqslant c_1,$$

и

$$u_{i_1 \ldots i_k} = \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant l, \ i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n.$$

Для доказательства возьмем возрастающую последовательность областей $\Omega^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots$, стремящихся при $s \to \infty$ к Ω и удовлетворяющих условию теоремы 6.2 гл. I. Для $h_1, \ldots, h_n$, меньших некоторого $\delta_s > 0$, функ-

---

*) На каждой сетке $\overline{\Omega}_h$ — одна функция u_h.

ции $(u_{i_1} \ldots {}_{i_k})'_h$, $0 \leqslant k \leqslant l$, будут определены во всей области $\Omega^{(s)}$. Из условия (4.6) следует

$$\int_{\Omega^{(s)}} \sum_{k=0}^{l} \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{n} \left[(u_{i_1} \ldots {}_{i_k})'_h\right]^2 dx \leqslant c_1, \tag{4.7}$$

где постоянная c_1 определяется лишь c и n.

На основании теоремы 1.2 гл. I существует такая подпоследовательность $h^{\alpha}(s)$, для которой функции $u'_{h^{\alpha}(s)}$ и $(u_{i_1} \ldots {}_{i_k})'_{h^{\alpha}(s)}$, $k = 1, \ldots, l$, $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n$, сходятся слабо в $L_2(\Omega^{(s)})$ к некоторым функциям $u^{(s)}$ и $u^{(s)}_{i_1} \ldots {}_{i_k}$, квадратично суммируемым по $\Omega^{(s)}$. На основании леммы 3.1 отсюда следует, что восполнения $(u_{i_1} \ldots {}_{i_k})_{(q)}$, $q = 1, \ldots, n$, $k = 0, \ldots, l$, соответствующие взятым $(u_{i_1} \ldots {}_{i_k})'_{h^{\alpha}(s)}$, также сходятся слабо в $L_2(\Omega^{(s)})$ к $u^{(s)}_{i_1} \ldots {}_{i_k}$. Поэтому можно утверждать (см. формулу (3.4) данной главы и теорему 4.1 гл. I), что функция $u^{(s)}_{i_1} \ldots {}_{i_m i_{m+1}}$ есть обобщенная производная $\dfrac{\partial u^{(s)}_{i_1} \ldots {}_{i_m}}{\partial x_{i_{m+1}}}$ в $\Omega^{(s)}$ (напомним, что ввиду перестановочности разностных отношений в $u_{x_{i_1}} \ldots {}_{x_{i_k}}$ функция $u_{i_1} \ldots {}_{i_k}$ не меняется от перестановки индексов), из чего следует, что

$$u^{(s)}_{i_1} \ldots {}_{i_k} = \frac{\partial^k u^{(s)}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \quad \text{в} \quad \Omega^{(s)}.$$

Кроме того,

$$\| u^{(s)} \|^{(l)}_{2,\, \Omega^{(s)}} \leqslant c_1.$$

Для разных $s = 1, 2, \ldots$ последовательности $\{u_{h^{\alpha}(s)}\}$ согласуем так, чтобы $\{u_{h^{\alpha}(s+1)}\}$ находились среди $\{u_{h^{\alpha}(s)}\}$. Затем из последовательностей

$$\{u_{h^{\alpha}(1)}\}, \quad \{u_{h^{\alpha}(2)}\}, \ \ldots$$

образуем диагональную, которую обозначим через $\{u_{h^{\alpha}}\}$. Обычное рассуждение приведет нас к доказательству того, что последовательности

$$\{u'_{h^\alpha}\}, \quad \left\{\left(u_{i_1 \ldots i_k}\right)'_{h^\alpha}\right\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant l, \quad i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n,$$

сходятся слабо в $L_2(\Omega')$ для $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$ к некоторой функции $u(x)$ и ее обобщенным производным, причем $u = u^{(s)}$ в $\Omega^{(s)}$ и $\|u\|^{(l)}_{2,\Omega} \leqslant c_1$. Последнее утверждение теоремы следует из только что доказанного, если учесть установленные выше связи о сходимостях различных восполнений сеточных функций и теорему 6.2 гл. I, гарантирующую сильную сходимость в $L_2(\Omega')$ для последовательности, слабо сходящейся в $W_2^1(\Omega')$ *). Теорема доказана.

Аналогично, с использованием неравенств (4.5) для произвольных сеточных функций (не равных, вообще говоря, нулю на границе Ω_h), доказывается такая теорема:

Теорема 4.2. *Пусть последовательность сеточных функций $\{u_h\}$ задана на таких же сетках, как в теореме 4.1, но пусть область Ω удовлетворяет условиям теоремы 6.2 гл. I и в неравенстве (4.6) вместо квадратов $\left(u_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}}\right)^2$ стоят $\left|u_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}}\right|^m$, $m \geqslant 1$. Тогда существует подпоследовательность $\{h^\alpha\}$, для которой функции $\{u'_{h^\alpha}\}$ сходятся к некоторой функции $u(x) \in W_m^l(\Omega)$ в нормах $L_q(\Omega')$, $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$, где $q = \frac{nm}{n - ml}$ при $ml < n$, q — любое при $ml = n$ и $q = \infty$ при $ml > n$. Функции $\left(u_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}}\right)'_{h^\alpha}(x)$, $k = 1, \ldots, l-1$, при этом сходятся к $\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}$ в нормах $L_{q_k}(\Omega')$, $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$, где $q_k = \frac{nm}{n - m(l-k)}$ при*

---

*) Действительно, из $u'_{x_i} \xrightarrow[L_2(\Omega')]{} u$ и $\left(u_{x_i}\right)'_{h^\alpha} \xrightarrow[L_2(\Omega')]{} \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, следует, что $\frac{\partial u'_{h^\alpha}}{\partial x_i} = \left(u_{x_i}\right)_{(i)} \xrightarrow[L_2(\Omega')]{} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ (см. (3.4) и лемму 3.1). Из слабой же сходимости u'_{h^α} в $W_2^1(\Omega')$ следует сильная сходимость в $L_2(\Omega')$. Аналогичные факты верны и для $\left(u_{i_1} \ldots {}_{i_k}\right)'_{h^\alpha}$ при $k \leqslant l - 1$.

$m(l-k)<n$, *q_k — любое при* $m(l-k)=n$ *и* $q=\infty$ *при* $m(l-k)>n$. *Наконец, функции* $\left(u_{x_{i_1}\ldots x_{i_l}}\right)'_{h^\alpha}(x)$ *сходятся к* $\dfrac{\partial^l u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}$ *слабо в* $L_m(\Omega')$, $\forall\overline{\Omega}'\subset\Omega$.

При доказательстве теоремы 4.2, которое проводится по тому же плану, что и доказательство теоремы 4.1, надо взять последовательность областей $\Omega^{(s)}\subset\Omega$, сходящихся к Ω, так, чтобы для них в неравенствах (4.4) (а потому и в неравенствах (8.3) гл. I) постоянные c можно было выбрать не зависящими от s.

При исследовании сходимости разностных схем и особенно при оценках их скорости сходимости полезно следующее предложение:

Лемма 4.1. *Пусть* $u(x)\in L_p(\Omega)$, $p\geqslant 1$, *и* $u(x)=0$ *вне* Ω. *Разобьем* R_n *на элементарные клетки* $\omega_{(kh)}$ *и построим по* $u(x)$ *сеточную функцию* u_h, *равную в вершине* (kh) *клетки* $\omega_{(kh)}$ *числу*

$$u_h=\Delta_h^{-1}\int\limits_{\omega_{(kh)}}u(x)\,dx,\tag{4.8}$$

а по u_h *построим интерполяцию* $\tilde u_h(x)$, *равную на* $\omega_{(kh)}$ *значению* u_h *в вершине* (kh). *Тогда*

$$\|u(x)-\tilde u_h(x)\|_{p,\,R_n}\to 0\quad\text{при}\quad (h)\to 0.$$

Замечание. Результат не изменится, если в точках S_h мы положим $u_h=0$. Тогда $\tilde u_h(x)$ будет равна нулю на S и вне Ω.

Для доказательства представим $\|\tilde u_h(x)-u(x)\|_{p,\,R_n}^{l}$ в виде

$$j_h\equiv\|\tilde u_h(x)-u(x)\|_{p,\,R_n}^{p}=\sum_{(k)}\int\limits_{\omega_{(kh)}}\left|u(x)-\Delta_h^{-1}\int\limits_{\omega_{(kh)}}u(\xi)\,d\xi\right|^p dx=\sum_{(k)}\int\limits_{\omega_{(kh)}}\left|\Delta_h^{-1}\int\limits_{\omega_{(kh)}}(u(\xi)-u(x))\,d\xi\right|^p dx$$

и воспользуемся неравенством Гельдера

$$j_h \leqslant \sum_{(k)} \Delta_h^{-1} \int_{\omega_{(kh)}} \int_{\omega_{(kh)}} |u(\xi) - u(x)|^p \, d\xi \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(k)} \Delta_h^{-1} \int_{\substack{|\eta_i| \leqslant h_i \\ i=1, \ldots, n}} d\eta \int_{\omega_{(kh)}} |u(x+\eta) - u(x)|^p \, dx \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \sum_{(k)} \max_{\substack{|\eta_i| \leqslant h_i \\ i=1, \ldots, n}} \int_{\omega_{(kh)}} |u(x+\eta) - u(x)|^p \, dx =$$

$$= 2^n \max_{\substack{|\eta_i| \leqslant h_i \\ i=1, \ldots, n}} \int_{R_n} |u(x+\eta) - u(x)|^p \, dx.$$

Так как $u(x) \in L_p(R_n)$ (заметим, что $u(x) \equiv 0$ вне ограниченной области Ω), то по известной теореме об интегральной непрерывности элементов $L_p(R_n)$ (см., например, [22₂]) правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $(h) \to 0$, ч. т. д.

Если $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то относительно сеточных функций u_h, построенных по $u(x)$ так же, как в лемме 4.1 (при этом считаем, что $u(x) \equiv 0$ вне Ω), можно доказать, что не только $\|\tilde{u}_h(x) - u(x)\|_{2, \Omega} \to 0$, но и $\left\|\tilde{u}_{x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{2, \Omega} \to 0$. Более того, если граница Ω не очень плохая, то эти свойства имеют место и для сеточной функции $\breve{u}_h$, равной u_h для точек Ω_h и равной нулю в точках S_h и вне $\bar{\Omega}_h$.

§ 5. Основы конечно-разностного метода Фурье

Рассмотрим сначала одномерный случай. Пусть отрезок $[0, l] \equiv \bar{l}$ оси x разбит на m равных частей, причем ради удобства записи будем считать m нечетным. Обозначим $\frac{l}{m} \equiv h$. Рассмотрим на сетке l_h, состоящей из m точек $x = kh$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, совокупность $\mathscr{E}_h$ всех сеточных комплекснозначных функций u_h. Каждую из них доопределим на все точки оси x с координатами $x = kh$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, так, чтобы получилась l-периодическая сеточная функция; в частности, $u_h(mh) = u_h(0)$. Совокупность всех таких функций обозначим через $\hat{\mathscr{E}}_h$. Введем в $\mathscr{E}_h$ скалярное произведение

$$(u_h, v_h)_{l_h} = h \sum_{k=0}^{m-1} u_h(kh)\,\bar{v}_h(kh). \tag{5.1}$$

Выражение (5.1) возьмем так же и за скалярное произведение в $\hat{\mathscr{E}}_h$. Рассмотрим в $\hat{\mathscr{E}}_h$ разностный оператор $\frac{\Delta}{\Delta x} = \frac{1}{2}(\ )_x + \frac{1}{2}(\ )_{\bar{x}}$, где $(\ )_x$ и $(\ )_{\bar{x}}$ по-прежнему означают правое и левое разностные отношения с шагом h.

Оператор $i\frac{\Delta}{\Delta x}$ симметричен на $\hat{\mathscr{E}}_h$, ибо из формулы (2.4) суммирования по частям и l-периодичности элементов u_h и v_h из $\hat{\mathscr{E}}_h$ следует, как нетрудно убедиться, справедливость тождества

$$\left(i\frac{\Delta u_h}{\Delta x}, v_h\right)_{l_h} = h \sum_{k=0}^{m-1} i\frac{\Delta u_h}{\Delta x}\bar{v}_h = h \sum_{k=0}^{m-1} u_h \overline{\left(i\frac{\Delta v_h}{\Delta x}\right)} = \left(u_h, i\frac{\Delta v_h}{\Delta x}\right)_{l_h}. \tag{5.2}$$

Ввиду этого собственные числа оператора $i\frac{\Delta}{\Delta x}$ на $\hat{\mathscr{E}}_h$ вещественны, а соответствующие им собственные функции ортогональны друг другу. Их должно быть m, ибо элемент $\hat{\mathscr{E}}_h$ определяется его значениями (комплексными) в m точках решетки l_h. Функции $\mu^{(k)}(x) \equiv e^{i\frac{2\pi}{l}kx}$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm\frac{m-1}{2}$ *), l-периодичны, а соответствующие им сеточные функции $\mu_h^{(k)}$ (т. е. $\mu_h^{(k)}$ равна $\mu^k(x)$ в точках $\hat{\mathscr{E}}_h$) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\Delta}{\Delta x}\mu_h^{(k)} = i\alpha_k(h)\,\mu_h^{(k)}, \tag{5.3}$$

*) В качестве k можно взять также числа $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Именно в таком виде мы их возьмем в конце данного параграфа, где число точек деления m будет четным.

где $\alpha_k(h)=\frac{m}{l}\sin\frac{2\pi k}{m}$ и, очевидно, линейно независимы. Следовательно, $\mu_h^{(k)}$, $k=0, \pm 1, \ldots, \pm\frac{m-1}{2}$, и являются искомыми собственными функциями оператора $i\frac{\Delta}{\Delta x}$ $\left(\text{или, что то же, оператора } \frac{\Delta}{\Delta x}\right)$, причем $\bar{\mu}_h^{(k)}=\mu_h^{(-k)}$ и $\alpha_{-k}(h)=-\alpha_k(h)$. В силу известных свойств корней m-й степени из 1

$$\left(\mu_h^{(k)}, \mu_h^{(p)}\right)_{l_h}=h\sum_{s=0}^{m-1} e^{i2\pi(k-p)\frac{s}{m}}=mh\delta_k^p=l\delta_k^p, \tag{5.4}$$

где δ_k^p — символ Кронекера. Любую функцию u_h из $\hat{\mathscr{E}}_h$ можно разложить в «сумму Фурье»

$$u_h=\sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} a_{(k)}\mu_h^{(k)}, \tag{5.5}$$

коэффициенты которой в силу (5.4) вычисляются как проекции u_h на $\mu_h^{(k)}$, точнее:

$$a_{(k)}=\frac{1}{l}\left(u_h, \mu_h^{(k)}\right)_{l_h}. \tag{5.6}$$

Функции $\mu_h^{(k)}$, $k=0, \pm 1, \ldots, \pm\frac{m-1}{2}$, являются также и собственными функциями операторов $(\ )_x$ и $(\ )_{\bar{x}}$ на $\hat{\mathscr{E}}_h$, причем

$$\left(\mu_h^{(k)}\right)_x=\beta_k(h)\mu_h^{(k)}, \qquad \beta_k(h)=\frac{e^{i\frac{2\pi}{l}kh}-1}{h}, \tag{5.7}$$

а

$$\left(\mu_h^{(k)}\right)_{\bar{x}}=-\bar{\beta}_k(h)\mu_h^{(k)}. \tag{5.8}$$

В силу этого $\mu_h^{(k)}$, $k=0, \pm 1, \ldots, \pm\frac{m-1}{2}$, образуют полную систему собственных функций любого разностного оператора $\mathscr{L}_h$, являющегося суммой операторов вида $a_{sr}D_h^s\bar{D}_h^r u_h$ с постоянными коэффициентами a_{sr}, если $\mathscr{L}_h$ рассматривается как оператор на $\hat{\mathscr{E}}_h$ (здесь и ниже через $D_h^s u_h$ и $\bar{D}_h^s u_h$ будем обозначать разностные отношения от u_h s-го порядка вида $u_{xx\ldots x}$ и $u_{\bar{x}\bar{x}\ldots\bar{x}}$ соответственно). Это позволяет различные вопросы (как-то: разрешимости, устойчивости, сходимости) для таких уравнений $\mathscr{L}_h u_h = f_h$ (и системы таких уравнений) на $\hat{\mathscr{E}}_h$ сводить к чисто алгебраическим.

Остановимся еще на вопросе о предельных переходах для сеточных функций, когда $h \to 0$. Из (5.5) и (5.4) следует равенство

$$\| u_h \|^2_{2,\, l_h} \doteq (u_h,\, u_h)_{l_h} = l \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} | a_{(k)} |^2, \tag{5.9}$$

являющееся разностным аналогом равенства Парсеваля. Аналогично подсчитываются

$$\| D_h^p u_h \|^2_{2,\, l_h} = l \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} | \beta_k(h) |^{2p} | a_{(k)} |^2, \tag{5.10}$$

где

$$| \beta_k(h) | = \frac{2m}{l} \sin \frac{k\pi}{m}. \tag{5.11}$$

Полезно также иметь в виду неравенства

$$\frac{2\pi}{l} | k | \varkappa \leqslant | \beta_k(h) | \leqslant \frac{2\pi}{l} | k | \tag{5.12}$$

для $k = 0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm \frac{m-1}{2}$, где $\varkappa = \min\limits_{\alpha \in (0,\, \pi/2)} \frac{\sin \alpha}{\alpha} > 0$.

Теорема 5.1. *Пусть имеется последовательность сеток $\hat{\mathscr{E}}_h$ с $h \to 0$ и соответствующих им функций $\{u_h\}$ из $\hat{\mathscr{E}}_h$, удовлетворяющих условию*

$$\sum_{p=0}^{r} \| D_h^p u_h \|^2_{2,\, l_h} \leqslant c. \tag{5.13}$$

Тогда тригонометрические полиномы

$$\hat{u}_h(x) \equiv \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} a_{(k)} \mu^{(k)}(x); \tag{5.14}$$

коэффициенты которых вычислены по формулам (5.6), *а* $\mu^{(k)}(x) = e^{i \frac{2\pi}{l} kx}$, *образуют ограниченное в* $W_2^r(\hat{l})$ *множество. В силу соотношений* (7.3), (7.4$_i$) *гл.* I *семейство* $\{\hat{u}_h(x)\}$ *компактно в* $C^{r-1}(\hat{l})$, *если* $r \geqslant 1$, *и слабо компактно в* $W_2^r(\hat{l})$.

Функции $\hat{u}_h(x)$ являются интерполяциями сеточных функций u_h, ибо, как легко видеть, они совпадают с u_h в вершинах сетки $\hat{\mathscr{E}}_h$. Теорема 5.1 может быть рассмотрена как теорема вложения для сеточных функций. Для ее доказательства надо подсчитать нормы $\| D^p \hat{u}_h \|_{2,l}$, где D^p есть производная от $\hat{u}_h$ p-го порядка.

Как легко видеть,

$$\| D^p \hat{u}_h \|_{2,l}^2 = l \left(\frac{2\pi}{l} \right)^{2p} \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} | a_{(k)} |^2 | k |^{2p}. \tag{5.15}$$

Сравнив ее с (5.10) и учтя (5.12), получим

$$\| D^p \hat{u}_h \|_{2,l}^2 \leqslant \varkappa^{-2p} \| D_h^p u_h \|_{2,l_h}^2. \tag{5.16}$$

Теорема доказана.

Для исследования уравнений с коэффициентами, зависящими от x, полезно иметь оценки скорости убывания чисел $a_{(k)}$ из (5.6) в зависимости от номера k, если известно, что u_h есть сеточная функция, совпадающая с гладкой l-периодической функцией $u(x)$ в вершинах сетки $\hat{\mathscr{E}}_h$. Эти оценки $|a_{(k)}|$ аналогичны оценкам обычных коэффициентов Фурье для $u(x)$ по системе функций $\left\{ e^{i \frac{2\pi}{l} kx} \right\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и зависят от степени гладкости $u(x)$. Они получены в работе [12₁] и использованы там для исследования разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами. Но, как сказано во введении к данной главе, здесь мы изложим разностный аналог метода Фурье лишь для уравнений с постоянными коэффициентами и потому упомянутые оценки оставим в стороне.

Функции $\mu_h^{(k)}$ удовлетворяют уравнениям (5.7), (5.8) при любых (не обязательно целых) значениях числа k. Ввиду этого они могут быть использованы и в задачах, в которых вместо условий периодичности поставлены какие-либо другие краевые условия. В этих случаях из них надо построить другое семейство, элементы которого являются линейными комбинациями $\mu_h^{(k)}$, удовлетворяющими поставленным краевым условиям. Рассмотрим один из таких случаев, используемый ниже. Пусть отрезок $[0, l] \equiv \hat{l}$ разбит, как и выше, на m равных частей длины h, и требуется решить спектральную задачу

$$-u_{x\bar{x}} = \lambda u_h, \tag{5.17}$$

$$u_h(0) = 0, \qquad u_h(l) = 0. \tag{5.18}$$

Разностное уравнение (5.17) должно выполняться во всех внутренних точках сетки $\hat{l}_h$: $x = kh$, $k = 1, \ldots, m-1$.

По аналогии с обычным методом Фурье возьмем все сеточные функции v_h, определенные на $\hat{l}_h$ и удовлетворяющие условиям (5.18), и продолжим их сначала нечетным образом на сетку $[l, 2l]_h$, а потом $2l$-периодическим образом на сетку (с шагом h), заполняющую всю ось x. Совокупность всех таких функций составляет подмножество $\hat{\hat{\mathscr{E}}}_h$ множества $\hat{\mathscr{E}}'_h$ всех $2l$-периодических сеточных функций. В качестве скалярного произведения в $\hat{\hat{\mathscr{E}}}_h$ возьмем

$$(u_h, v_h)_{l_h} = h \sum_{k=0}^{m-1} u_h(kh)\,\bar{v}_h(kh) = h \sum_{k=1}^{m-1} u_h(kh)\,\bar{v}_h(kh). \tag{5.19}$$

Оно лишь множителем 1/2 отличается от скалярного произведения в $\hat{\mathscr{E}}'_h$, равного

$$(u_h, v_h)_{(2l)_h} = h \sum_{k=0}^{2m-1} u_h(kh)\,\bar{v}_h(kh). \tag{5.20}$$

В силу (5.7), (5.8) функции $\mu_h^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, 2m-1$, равные $\mu_h^{(k)}(x) = e^{i\frac{2\pi}{2l}kx} = e^{i\frac{\pi}{l}kx}$ в вершинах сетки, составляют полный набор решений уравнения (5.17) в пространстве $\hat{\mathscr{E}}'_h$, причем λ_k, соответствующее $\mu_h^{(k)}$, равно $\lambda_k = |\beta_k(h)|^2 = \left(\frac{2m}{l}\sin\frac{k\pi}{2m}\right)^2$. Этому же значению λ_k соответствует второе $2l$-периодическое решение $\bar{\mu}_h^{(k)}$ уравнения (5.17). В качестве другой пары линейно независимых $2l$-периодических решений уравнения (5.17), соответствующих λ_k, можно взять $\operatorname{Re}\mu_h^{(k)}(x) = \cos\frac{\pi}{l}kx$ и $\operatorname{Im}\mu_h^{(k)}(x) = \sin\frac{\pi}{l}kx$. Из этих двух решений только второе входит в $\hat{\hat{\mathscr{E}}}_h$, следовательно, полным набором решений спектральной задачи (5.17), (5.18) являются функции $\chi_h^{(k)}(x) \equiv \equiv \sin\frac{\pi}{l}kx$, $k=1, \ldots, 2m-1$, отвечающие $\lambda=\lambda_k$. Но на сетке $\hat{l}_h$ с шагом h функции $\chi_h^{(2m-k)}(x)=\sin\frac{\pi}{l}(2m-k)x$ и $\chi_h^{(k)}(x)=\sin\frac{\pi}{l}kx$ отличаются лишь множителем (-1). Поэтому в качестве полного набора линейно независимых решений задачи (5.17), (5.18) можно взять функции

$$\chi_h^{(k)}(x)=\sin\frac{\pi}{l}kx, \qquad k=1, \ldots, m-1,$$

рассмотренные на точках $x=kh$, $k=0, 1, \ldots, m$. Их столько же, сколько и «внутренних точек» у решетки $\hat{l}_h$, состоящей из точек $x=sh=s\frac{l}{m}$, $s=0, 1, \ldots, m$. Собственные числа можно записать в виде

$$\lambda_k=\left(\frac{m}{l}\sin\frac{k\pi}{2m}\right)^2=\left(\frac{2}{h}\sin\frac{k\pi h}{2l}\right)^2.$$

В силу (5.4) и отмеченной выше связи скалярных произведений (5.19) и (5.20) функции $\chi_h^{(k)}$, отвечающие разным k, ортогональны друг другу в смысле (5.19). Кроме того, нетрудно подсчитать, что $\left(\chi_h^{(k)}, \chi_h^{(k)}\right)_{l_h}=\frac{l}{2}$, следовательно,

$$\left(\chi_h^{(k)}, \chi_h^{(m)}\right)_{l_h}=\frac{l}{2}\delta_k^m. \tag{5.21}$$

Кроме этой ортогональности, имеет место и такая:

$$h\sum_{s=0}^{m-1}\chi_x^{(k)}(sh)\chi_x^{(m)}(sh)\equiv\left(\chi_x^{(k)}, \chi_x^{(m)}\right)_{l_h}=\frac{l}{2}\lambda_k\delta_k^m. \tag{5.22}$$

Для доказательства (5.22) надо взять уравнение (5.17) для $u_h=\chi_h^{(k)}$, умножить его на $h\chi_h^{(m)}$ и просуммировать по точкам $x=sh$, $s=1, \ldots, m-1$. После этого левую часть преобразовать с помощью формулы суммирования по частям к виду левой части (5.22), помня, что $\chi_h^{(k)}$ и $\chi_h^{(m)}$ удовлетворяют условиям (5.18). Правая же часть в силу (5.21) равна правой части (5.22).

Произвольная функция u_h, заданная на сетке $\hat{l}_h$ и равная нулю в ее точках $x = kh$, $k = 0$, $k = m$, представима в виде «суммы Фурье»:

$$u_h = \sum_{k=1}^{m-1} a_{(k)} \chi_h^{(k)}, \tag{5.23}$$

в которой (ввиду (5.21))

$$a_{(k)} = \frac{2}{l} \left(u_h, \chi_h^{(k)}\right)_{l_h}. \tag{5.24}$$

Кроме того,

$$\left(u_h, u_h\right)_{l_h} = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{m-1} a_{(k)}^2 \tag{5.25}$$

и

$$\left(u_x, u_x\right)_{l_h} = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{m-1} a_{(k)}^2 \lambda_k. \tag{5.26}$$

Все сказанное об одномерном случае автоматически переносится на многомерный, причем периоды по разным x_i могут быть взяты разными. Делается это так же, как для обычных рядов Фурье.

§ 6. Простейшие уравнения

1. Уравнения эллиптического типа. Начнем с рассмотрения простейшей краевой задачи эллиптического типа, а именно:

$$\mathcal{L}u = -\frac{d^2u}{dx^2} + au = f \tag{6.1}$$

на отрезке $x \in [0, l] \equiv \hat{l}$ с условиями периодичности

$$u(0) = u(l), \tag{6.2}$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=l}. \tag{6.3}$$

Число a будем считать положительным, а искомую функцию $u(x)$, как почти всюду, вещественной. Положительность a гарантирует однозначную разрешимость задачи (6.1)—(6.3). Такие задачи мы не рассматривали в гл. II, но они исследуются так же, как и задача

Дирихле. К тому же решение задачи (6.1) — (6.3) можно представить обычным рядом Фурье.

Возьмем на оси x сетку с вершинами в точках $x_k = kh$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, h = \frac{l}{m}$, и будем считать m нечетным числом. Ей соответствуют пространства $\mathscr{E}_h$ и $\hat{\mathscr{E}}_h$ сеточных функций, определяемых их значениями в точках x_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ (см. о них § 5).

Для составления сходящихся разностных схем для (6.1)—(6.3) воспользуемся идеей, описанной во введении. А именно, придадим условиям задачи (6.1)—(6.3) иную форму, соответствующую определению ее «обобщенного решения с конечным интегралом энергии», т. е. об. решению из пространства W_2^1. Обозначим через $\hat{W}_2^1(\hat{l})$ подпространство пространства $W_2^1(\hat{l})$, состоящее из l-периодических элементов $W_2^1(\hat{l})$ ($\hat{W}_2^1(\hat{l})$ есть замыкание в норме $W_2^1(\hat{l})$ множества сколь угодно гладких l-периодических функций). *Об. решением задачи* (6.1)—(6.3) *из пространства* W_2^1 назовем функцию $u(x)$ из $\hat{W}_2^1(\hat{l})$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^l \left(\frac{du}{dx}\frac{d\eta}{dx} + au\eta\right)dx = \int_0^l f\eta\,dx \tag{6.4}$$

при $\forall \eta \in \hat{W}_2^1(\hat{l})$.

Тождество (6.4) поглотило в себя уравнение (6.1) и условия (6.3); условия же (6.2) вошли в указание класса $\hat{W}_2^1$, в котором следует искать функцию $u(x)$, удовлетворяющую тождеству (6.4).

Теорема единственности в этом классе об. решений сохраняется: действительно, если $f \equiv 0$, то, полагая в (6.4) $\eta = u$, убедимся, что и $u \equiv 0$.

В соответствии с упомянутым принципом построения разностных схем заменим интегралы из (6.4) суммами Римана, соответствующими разбиению $\hat{l}_h$, а производные $\frac{du}{dx}$ и $\frac{d\eta}{dx}$ — какими-нибудь однотипными разностными отношениями, их аппроксимирующими. Известные функции (в данном случае f) можно «сносить» на сетку по-разному: если они являются непрерывными функциями, то можно брать просто их значения на $\hat{l}_h$, если же они разрывны, то их надо заменять сеточными функциями, аппроксимирующими данные в требуемой метрике (точнее, аппроксимируют не сеточные функции, а какие-либо их интерполяции).

Пусть $f \in L_2(l)$. Построим по $f(x)$ сеточную функцию f_h так, чтобы ее кусочно-постоянные интерполяции $\tilde{f}_h(x)$ сходились к $f(x)$ в норме $L_2(l)$ при $h \to 0$ *). В качестве такой функции f_h можно взять, например,

$$f_h(x_k) = \frac{1}{h} \int\limits_{x_k}^{x_k+h} f(x)\,dx, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{6.5}$$

(см. конец § 4 данной главы).

Итак, заменим (6.4), например, следующим «сумматорным» тождеством:

$$h \sum_{k=0}^{m-1} u_x \eta_x + h \sum_{k=0}^{m-1} a u_h \eta_h = h \sum_{k=0}^{m-1} f_h \eta_h. \tag{6.6}$$

Тождество (6.6) должно выполняться для $\forall \eta_h \in \hat{\mathscr{E}}_h$. В него входят значения искомой сеточной функции u_h в вершинах сетки $\hat{l}_h$ (т. е. в точках $x_k = kh$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, m$). К (6.6) надо еще присоединить требование принадлежности u_h к $\hat{\mathscr{E}}_h$, т. е.

$$u_h(x_0) = u_h(x_m). \tag{6.7}$$

Из соотношений (6.6) и (6.7) мы надеемся однозначно определить u_h на $\hat{l}_h$. Они-то и задают разностную схему, подлежащую исследованию. Ее устойчивость (точнее: априорная оценка u_h) в норме, соответствующей левой части (6.6), видна сразу: положим в (6.6) $\eta_h = u_h$ и оценим правую часть с помощью неравенства Коши. Это даст:

$$h \sum_{k=0}^{m-1} u_x^2 + ah \sum_{k=0}^{m-1} u_h^2 = h \sum_{k=0}^{m-1} f_h u_h \leqslant \left(h \sum_{k=0}^{m-1} f_h^2\right)^{1/2} \left(h \sum_{k=0}^{m-1} u_h^2\right)^{1/2}. \tag{6.8}$$

---

*) Для дальнейшего достаточно знать, что $\tilde{f}_h(x)$ сходятся к $f(x)$ слабо в $L_2(l)$ при $h \to 0$.

Ввиду положительности a отсюда следует

$$\|u_h\|_{2,\,l_h} \equiv \left(h \sum_{k=0}^{m-1} u_h^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{a}\,\|f_h\|_{2,\,l_h} \tag{6.9}$$

и

$$\|u_x\|^2_{2,\,l_h} \equiv h \sum_{k=0}^{m-1} u_x^2 \leqslant \frac{1}{a}\,\|f_h\|^2_{2,\,l_h}. \tag{6.10}$$

Но

$$\|f\|^2_{2,\,l_h} = \\ = h \sum_{k=0}^{m-1} f_h^2 = h \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{h}\int\limits_{x_k}^{x_k+h} f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int\limits_0^l f^2(x)\,dx \equiv \|f\|^2_{2,\,l}. \tag{6.11}$$

Поэтому (6.9) и (6.10) действительно дают равномерные (т. е. не зависящие от h и u_h) оценки:

$$\|u_h\|_{2,\,l_h} \leqslant \frac{1}{a}\,\|f\|_{2,\,l}, \tag{6.12}$$

$$\|u_x\|_{2,\,l_h} \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}\,\|f\|_{2,\,l}. \tag{6.13}$$

Итак, наиболее трудная часть вопроса доказательства устойчивости решена. Теперь надо рассмотреть внимательнее разностную схему, содержащуюся в соотношениях (6.6) и (6.7), и убедиться, что она представляет собою систему m линейных алгебраических уравнений с m неизвестными: значениями u_h в точках сетки l_h (т. е. в точках x_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$). Для этого положим u_h в точке $x_{m+1} = (m+1)h$ равной u_h в точке $x_1 = h$ и $f_h(m) = f_h(0)$ и преобразуем первый член (6.6) с помощью формулы «суммирования по частям» (формулы (2.4)) к виду

$$-h \sum_{k=1}^{m} u_{x\bar{x}}\eta_h + u_x\eta_h \Big|_0^m, \tag{6.14}$$

затем сгруппируем все члены левой и правой частей (6.6) так, чтобы они приобрели форму $\sum\limits_{k=1}^{m} \{\cdot\}\,\eta_h$, учтя, что u_h и η_h подчинены условию (6.7) и $f_h(m) = f_h(0)$. Наконец, воспользовавшись произволом в выборе η_h

в точках x_k, $k=1, \ldots, m$, приравняем друг другу величины, стоящие в левой и правой частях при значениях η_h в одной и той же точке сетки l_h. Это, как нетрудно подсчитать, приведет к следующим соотношениям:

$$-u_{x\bar{x}}+au_h=f_h \tag{6.15}$$

и

$$u_x|_{x_0}=u_x|_{x_m}. \tag{6.16}$$

Равенства (6.15) должны выполняться в точках x_k, $k=1, \ldots, m$. В них и в (6.16) входит значение $u_h(x_{m+1})$, причем $u_h(x_{m+1})=u_h(x_1)$ следует из (6.16) и (6.7). Равенства (6.15), (6.16) и (6.7) являются системой $m+2$ линейных алгебраических уравнений с $m+2$ неизвестными: $u_h(x_k)$, $k=0, 1, \ldots, m+1$. Они являются обычной формой записи разностной схемы, эквивалентной записи (6.6), (6.7).

Если с помощью равенств (6.7) и (6.16) исключить неизвестные $u_h(x_m)$ и $u_h(x_{m+1})$, то оставшаяся система m уравнений — нераспадающаяся; она увязывает все m неизвестных $u_h(x_k)$, $k=0, 1, \ldots, m-1$. Это отвечает существу дела: значения решений $u(x)$ эллиптических задач в разных точках x области их определения связаны друг с другом.

Для доказательства однозначной разрешимости системы (6.15), (6.16), (6.7) нет необходимости вычислять ее главный определитель, ибо такая разрешимость следует из уже доказанной устойчивости. Действительно, если в этой системе положить $f_h\equiv 0$ (т. е. рассмотреть соответствующую ей однородную систему), то из априорной оценки (6.9) видно, что она имеет только нулевое решение: $u_h\equiv 0$. А это, как известно, гарантирует однозначную разрешимость системы при любых свободных членах, т. е. при $\forall f_h$. Теперь осталось сделать предельный переход по $h\to 0$ и убедиться, что в пределе получается искомое решение. Этот этап, как описано во введении к данной главе, по существу одинаков для уравнений всех типов и базируется на доказанных выше предложениях о семействах сеточных функций, равномерно ограниченных в каких-либо нормах. В нашем распоряжении оценки (6.12), (6.13). Из них следует равномерная ограниченность норм $\|\cdot\|^{(1)}_{2,(l)}$ для различных интерполяций найденных нами приближенных решений $\{u_h\}$. Воспользуемся сначала линейной интерполяцией $\{u'_h(x)\}$. Ясно, что все $u'_h(x) \in \hat{W}_2^1(\hat{l})$ и $\|u'_h(x)\|_{2,\hat{l}}^{(1)} \leqslant c$, т. е. множество $\{u'_h(x)\}$ слабо компактно в $\hat{W}_2^1(\hat{l})$.

Благодаря теоремам §§ 1 и 6 гл. I из него можно выделить сходящиеся соответствующим образом подпоследовательности, а именно: $\{u'_{h\alpha}\}$ будут сходиться сильно в $L_2(\hat{l})$ к некоторому элементу $u(x) \in \hat{W}_2^1(\hat{l})$, а $\left\{\frac{du'_{h\alpha}}{dx}\right\}$ будут иметь своим слабым пределом в $L_2(\hat{l})$ производную $\frac{du}{dx}$. Ниже мы покажем, что любой такой предельный элемент $u(x)$ для $\{u'_h\}$ является об. решением из W_2^1 задачи (6.1)—(6.3). Но задача (6.1)—(6.3) может иметь не более одного такого решения. Следовательно, множество $\{u'_h\}$ имеет лишь одну предельную точку $u(x)$, что вместе с его равномерной ограниченностью гарантирует сходимость всей последовательности $\{u'_h\}$ к $u(x)$. Итак, пусть подпоследовательность $\{u'_{h\alpha}\}$ сходится указанным образом к $u(x)$.

По доказанному в § 3 гл. VI кусочно-постоянные интерполяции $\tilde{u}_{h\alpha}(x)$ сходятся в $L_2(\hat{l})$ к той же функции $u(x)$, а $(\widetilde{u_x})_{h\alpha}$, равные всюду, кроме точек решетки, $\frac{du'_{h\alpha}}{dx}$, сходятся слабо в $L_2(\hat{l})$ к $\frac{du}{dx}$.

Запишем (6.6) в виде интегрального тождества

$$\int_0^l [(\widetilde{u_x})_h(\widetilde{\eta_x})_h + a\tilde{u}_h\tilde{\eta}_h]\,dx = \int_0^l \tilde{f}_h\tilde{\eta}_h\,dx. \tag{6.17}$$

Возьмем произвольную гладкую l-периодическую функцию $\eta(x)$. Для нее сеточная функция η_h, равная $\eta(x)$ в вершинах сетки, принадлежит $\hat{\mathscr{E}}_h$ и порождает функции $\tilde{\eta}_h(x)$ и $(\widetilde{\eta_x})_h$, равномерно сходящиеся при $h \to 0$ к $\eta(x)$ и $\frac{d\eta}{dx}$ соответственно. Взяв в (6.17) за η_h эту функцию, перейдем в (6.17) к пределу по выбранной выше подпоследовательности $\{h^\alpha\}$. В результате получим равенство (6.4) для нашей предельной функции $u(x)$ и взятой гладкой l-периодической функции $\eta(x)$. Так как такие функции $\eta(x)$ плотны в $\hat{W}_2^1(\hat{l})$ и $u(x) \in \hat{W}_2^1(\hat{l})$, то тождество (6.4) будет справедливо при $\forall \eta \in \hat{W}_2^1(\hat{l})$. Тем самым доказано, что $u(x)$ есть искомое об. решение задачи. Вместе с этим доказано, что вся последовательность $\{u'_h\}$ сходится к $u(x)$ так же, как $\{u'_{h^\alpha}\}$.

Для исследуемой задачи легко доказать более сильное утверждение: сходимость в $L_2(\hat{l})$ функций $\{(u_x)'_h\}$ и $\{(u_{xx})'_h\}$ (равно как и $\widetilde{(u_x)}_h$, $\widetilde{(u_{xx})}_h$) к $\frac{du}{dx}$ и $\frac{d^2u}{dx^2}$ соответственно. Однако в общей многомерной задаче для произвольной области Ω даже с гладкой границей последнее (т. е. сильную сходимость в $L_2(\Omega)$ каких-либо интерполяций разностных отношений $u_{x_i \bar{x}_j}$ второго порядка к $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}$) доказать не удается. Сильная же сходимость $\widetilde{(u_x)}_h = \frac{du'_h}{dx}$ в $L_2(\hat{l})$ к $\frac{du}{dx}$ проверяется сравнительно просто как для задачи (6.1)—(6.3), так и для многомерного случая. Мы это проиллюстрируем в п. 1 § 11.

Разностная схема (6.15), (6.16), (6.7) является далеко не единственной устойчивой разностной схемой, которую можно составить, исходя из описанного выше принципа, и исследовать так же, как схему (6.15), (6.16), (6.7). Мы советуем читателю убедиться в этом самостоятельно.

Покажем теперь, как исследовать схему (6.15), (6.16), (6.7) с помощью «конечных сумм Фурье», описанных в § 5. Для этого удобно сеточную функцию f_h построить по $f(x)$ иначе, используя разложение $f(x)$ в ряд Фурье по функциям $\mu^{(k)}(x) = e^{i\frac{2\pi k x}{l}}$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm \frac{m-1}{2}$. Именно, пусть f_h есть значение на сетке функции

$$\check{f}_h(x) = \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} f^{(k)} \mu^{(k)}(x), \tag{6.18}$$

где $f^{(k)} = \frac{1}{l}\int\limits_0^l f(x)\, e^{-i\frac{2\pi kx}{l}}\,dx$. Известно, что $\check{f}_h(x)$ сходятся к $f(x)$ в норме $L_2(\hat{l})$ при $h \to 0$ (т. е. при $m \to \infty$).

Решение u_h задачи (6.15), (6.16), (6.7) представим в виде

$$u_h = \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} a_{(k)} \mu_h^{(k)}, \tag{6.19}$$

где

$$a_{(k)} = \frac{1}{l}\left(u_h, \mu_h^{(k)}\right)_{l_h}. \tag{6.20}$$

Все сеточные функции $\mu_h^{(k)}$ удовлетворяют требованиям (6.7) и (6.16). Кроме того, в силу (5.7) и (5.8)

$$\left(\mu_h^{(k)}\right)_{x\bar{x}} = -\,|\beta_k(h)|^2 \mu_h^{(k)}, \tag{6.21}$$

где $|\beta_k(h)| = \frac{2}{h}\sin\frac{\pi kh}{l}$. Подставим (6.19) в (6.15) и учтем, что правая часть (6.15) имеет вид

$$f_h = \check{f}_h = \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} f^{(k)} \mu_h^{(k)} \tag{6.22}$$

и сеточные функции $\mu_h^{(k)}$ линейно независимы. Это определяет однозначно все $a_{(k)}$:

$$a_{(k)} = (a + |\beta_k(h)|^2)^{-1} f^{(k)}, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots, \pm \frac{m-1}{2}. \tag{6.23}$$

Так как $f(x)$ мы взяли вещественнозначной, то $f^{(-k)} = \bar{f}^{(k)}$, и потому $a_{(-k)} = \bar{a}_{(k)}$, т. е. u_h (равно как и вводимые ниже интерполяции $\hat{u}_h(x)$) тоже будут вещественными.

Далее, в силу (5.9)

$$\|u_h\|^2_{2,\,l_h} = l \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} (a + |\beta_k(h)|^2)^{-2}\, |f^{(k)}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l}{a^2} \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} |f^{(k)}|^2 = \frac{1}{a^2}\|\check{f}_h\|^2_{2,\,l_h} \leqslant \frac{1}{a^2}\|f\|^2_{2,\,l}, \tag{6.24}$$

$$\|u_x\|^2_{2,\,l_h} \doteq l \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} |\beta_k(h)|^2 (a + |\beta_k(h)|^2)^{-2} |f^{(k)}|^2 \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{a} \|\check{f}_h\|^2_{2,\,l_h} \leqslant \frac{1}{a} \|f\|^2_{2,\,l} \qquad (6.25)$$

и

$$\|u_{x\bar{x}}\|^2_{2,\,l_h} = \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} |\beta_k(h)|^4 (a + |\beta_k(h)|^2)^{-2} |f^{(k)}|^2 \leqslant \\ \leqslant \|\check{f}_h\|^2_{2,\,l_h} \leqslant \|f\|^2_{2,\,l}. \qquad (6.26)$$

Эти неравенства доказывают устойчивость исследуемой разностной схемы, из которой уже легко заключить о ее сходимости. В данном методе это удобно сделать, используя интерполяции

$$\hat{u}_h(x) = \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} a_{(k)} \mu^{(k)}(x). \qquad (6.27)$$

Для них из (6.24)—(6.26) следует, как показано в § 5, равномерная ограниченность норм $\|\hat{u}_h\|^{(2)}_{2,\,l} \leqslant c$. А это гарантирует равномерную сходимость $\{\hat{u}_h\}$ и $\left\{\frac{d\hat{u}_h}{dx}\right\}$ на $[0,\ l]$ к некоторой функции $u(x)$ и ее производной $\frac{du}{dx}$ и слабую сходимость $\left\{\frac{d^2\hat{u}_h}{dx^2}\right\}$ в $L_2(\hat{l})$ к $\frac{d^2u}{dx^2}$ (как и выше, сначала это устанавливается для подпоследовательностей $\{h^\alpha\}$, а затем — для всей последовательности $\left\{h = \frac{l}{m}\right\}$, $m = 2p + 1$, $p = 1,\ 2,\ \ldots$). Благодаря такой сходимости u оказывается непрерывно дифференцируемой на $[0,\ l]$ функцией, удовлетворяющей условиям периодичности (6.2) и (6.3).

Уравнению (6.1) $u(x)$ удовлетворяет почти всюду на $[0,\ l]$. В этом можно убедиться по-разному. Например, можно воспользоваться тем, что $\hat{u}_h(x)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$-(\hat{u}_h(x))_{x\bar{x}} + a\hat{u}_h(x) = \check{f}_h(x) \qquad (6.28)$$

при всех x. Второй и третий члены (6.28) сходятся в $L_2(\hat{l})$ к $au(x)$ и $f(x)$ соответственно. Следовательно,

$(\hat{u}_h(x))_{x\bar{x}}$ тоже сходится в $L_2(\hat{l})$ к некоторой функции, которая будет ни чем иным, как $\frac{d^2u}{dx^2}$.

Конечно-разностный аналог метода Фурье позволяет исследовать аналогично какие угодно другие однородные разностные схемы для задачи (6.1)—(6.3).

Точно так же с его помощью исследуются другие краевые задачи для уравнения (6.1) (и для уравнений и систем любого порядка с постоянными коэффициентами). Например, если вместо условий (6.2), (6.3) поставлено первое краевое условие:

$$u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0, \tag{6.29}$$

то для задачи (6.1), (6.29) оказывается сходящейся разностная схема, определяемая уравнениями (6.15) и краевыми условиями

$$u_h|_{x_0=0}=0, \quad u_h|_{x_m=l}=0. \tag{6.30}$$

Уравнения (6.15) должны выполняться во «внутренних» точках сетки: $x_k = kh$, $h = l/m$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, а (6.30) — в граничных.

Приближенные решения u_h, следуя конечно-разностному (к. — р.) методу Фурье, надо искать в виде

$$u_h=\sum_{k=1}^{m-1} a_{(k)}\chi_h^{(k)} \tag{6.31}$$

(где $\chi_h^{(k)}$ определены в конце § 5), подчиняя тем самым краевым условиям (6.30) каждый член суммы (6.31). Сеточные функции

$$\chi_h^{(k)}(x_s)\equiv\sin\left(\frac{\pi}{l}kx_s\right), \quad x_s=\frac{ls}{m},$$
$$s=0, 1, \ldots, m, \quad k=1, 2, \ldots, m-1,$$

образуют полную систему собственных функций разностной задачи

$$-\chi_{x\bar{x}}=\lambda\chi_h, \quad \chi_h|_{x_0=0}=\chi_h|_{x_m=l}=0. \tag{6.32}$$

Разностная схема (6.15), (6.30) обладает такими же свойствами устойчивости и сходимости, что и схема (6.15), (6.7), (6.16), исследованная выше.

Такой же анализ разностных схем можно провести и для многомерных задач, если дифференциальные уравнения имеют постоянные коэффициенты, а область изменения x есть параллелепипед. В более общих ситуациях предпочтительнее первый подход, изложенный в начале данного пункта.

2. Уравнение теплопроводности. Исследуем ряд разностных схем для уравнения теплопроводности

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{6.33}$$

в области $\bar{Q}_T = \{(x, t) : x \in [0, l] \equiv \hat{l},\ t \in [0, T]\}$ при условиях периодичности (6.2) и (6.3), которые должны выполняться при всех $t \geqslant 0$, и начальном условии

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \in L_2(\hat{l}). \tag{6.34}$$

Случай неоднородного уравнения (6.33) и других классических краевых условий рассматриваются аналогично. Для анализа разностных схем применим конечно-разностный метод Фурье (к.-р. м. Фурье). Исследования, проведенные в п. 1, указывают, какие разностные замены можно брать для эллиптической части уравнения (6.33) и граничных условий. Мы возьмем ту из них, которая рассмотрена подробно, а именно (6.15), (6.16), (6.7). Для производной же $\frac{\partial u}{\partial t}$ проанализируем разные замены и убедимся, что заключения, которые можно вывести «по здравому смыслу» из общих соображений, могут быть ошибочными. Получение же правильного ответа требует точных подсчетов. Разобьем ось x точками $x_s = sh$, где $h = \frac{l}{m}$, $s = 0, \pm 1, \ldots, m$ — нечетное число, а ось t — точками $t_s = s\tau$, где $s = 0, 1, \ldots$, а τ — какое-либо положительное число (h называется шагом по x, а τ — шагом по t). Начнем с простейшей разностной схемы, называемой *явной*. Она имеет вид:

$$u_t - u_{x\bar{x}} = 0, \tag{6.35$_1$}$$

$$u_h|_{x_0} = u_h|_{x_m}, \tag{6.35$_2$}$$

$$u_x|_{x_0} = u_x|_{x_m}, \tag{6.35$_3$}$$

$$u_h|_{t=0} = \check{\varphi}_h. \tag{6.35$_4$}$$

Равенства (6.35_2) и (6.35_3) должны выполняться при всех $t=t_s$, $s=0, 1, 2, \ldots, N=\left[\frac{T}{\tau}\right]$, уравнения (6.35_1) — для $x=x_s$, $s=1, \ldots, m$, и $t=t_s$, $s=0, 1, \ldots$ $\ldots, N$, а (6.35_4) — для $x=x_s$, $s=0, 1, \ldots, m+1$. Ясно, что уравнения (6.35_i) аппроксимируют соответствующие уравнения исследуемой задачи.

Функция $\check{\varphi}_h$ построена по $\varphi(x)$ так же, как $\check{f}_h$ по $f(x)$ в п. 1, а именно: $\check{\varphi}_h$ совпадает в узлах сетки с тригонометрическим полиномом

$$\check{\varphi}_h(x)=\sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} \varphi^{(k)}\mu^{(k)}(x), \tag{6.36}$$

в котором

$$\varphi^{(k)}=\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\, e^{-i\frac{2\pi kx}{l}}\, dx.$$

Уравнение (6.35_1) символически изображают так: $\begin{smallmatrix} & * & \\ * & * & * \end{smallmatrix}$; эти четыре крестика указывают, что уравнение (6.35_1) в точке (x_s, τ_r) связывает между собою значения u_h в четырех точках: (x_s, τ_r), (x_s-h, τ_r), (x_s+h, τ_r) и $(x_s, \tau_r+\tau)$. Легко видеть, что уравнения (6.35_i), $i=$ $=1, 2, 3, 4$, однозначно определяют u_h на сетке $Q_\Delta^+ \equiv \{(x_s, \tau_r)\colon\ s=0, 1, \ldots, m+1, r=0, 1, \ldots, N+1\}$. Устремим h и τ к нулю (точнее, m и N — к бесконечности). «Общие соображения» подсказывают, что τ должно стремиться к нулю быстрее, чем h, т. е. так, чтобы $\frac{\tau}{h}\to 0$. Действительно, в противном случае значение u_h в точке (x_s, τ_r) определяется значениями $\check{\varphi}_h(x_p)$ в точках x_p с $p=s-r, s-r+1, \ldots, s+r$, если $0\leqslant s-r<s+$ $+r\leqslant m+1$, т. е. $u_h(x_s, \tau_r)$ будет зависеть лишь от части значений начальной функции $\check{\varphi}_h$. Но это противоречит основному свойству параболических уравнений: они описывают процессы, распространяющиеся с бесконечной скоростью, т. е. их решения $u(x, t)$ в какой-либо момент $t=t_0$ в какой-либо точке $x=x_0$ зависят от значений $u(x, t)$ с $t<t_0$, взятых во всех точках x области определения $u(x, t)$, в частности, от всех значений начальной функции $u(x, 0)$. Если же τ и h стремятся к нулю так,

что $\frac{\tau}{h} \not\to 0$, то ясно, что $u_h(x_s, \tau_r)$, вычисляемая в целой области изменения (x_s, τ_r) лишь по части значений $\varphi(x)$, не может дать в пределе истинное решение $u(x, t)$, зависящее от всей функции $\varphi(x)$. Итак, «общие соображения» подсказывают необходимость требования $\frac{\tau}{h} \to 0$ при h и $\tau \to 0$. «Здравый же смысл» одобряет схему (6.35_i) даже без этого условия на τ и h. Однако, как мы увидим ниже, схема (6.35_i) является неустойчивой, если на τ/h не наложить ограничения:

$$\frac{\tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{6.37}$$

Чтобы доказать это, будем искать u_h в виде

$$u_h^r = \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} a_{(k)}^r \mu_h^{(k)}, \qquad r = 0, 1, \ldots, N+1. \tag{6.38}$$

Верхний индекс «r» указывает номер слоя по t, т. е. u_h^r есть сеточная функция u_h на слое $t = t_r$. Условиям (6.35_2) и (6.35_3) удовлетворяет каждый член суммы (6.38). Подставляя (6.38) в (6.35_1) и учитывая линейную независимость $\mu_h^{(k)}$, получим для каждого из коэффициентов $a_{(k)}^r$ свое разностное уравнение:

$$a_{(k)\,t}^r \equiv \frac{1}{\tau}\left[a_{(k)}^{r+1} - a_{(k)}^r\right] = -\left|\beta_k(h)\right|^2 a_{(k)}^r, \quad r = 0, 1, \ldots \tag{6.39}$$

К (6.39) присоединим начальное условие для $a_{(k)}^r$:

$$a_{(k)}^0 = \varphi^{(k)}, \tag{6.40}$$

которое следует из (6.35_4) и (6.36). Из (6.39) получим

$$a_{(k)}^{r+1} = \left(1 - \tau\left|\beta_k(h)\right|^2\right) a_{(k)}^r = \left(1 - \tau\left|\beta_k(h)\right|^2\right)^{r+1} a_k^0,$$

т. е. при любом $r \leqslant N + 1 = \left[\frac{T}{\tau}\right] + 1$

$$\left|a_{(k)}^r\right|^2 = \left|1 - \tau\left|\beta_k(h)\right|^2\right|^{2r} \left|\varphi^{(k)}\right|^2. \tag{6.41}$$

Модуль $|\beta_k(h)| = \left|\frac{2}{h}\sin\left(\frac{\pi k h}{l}\right)\right|$, $h = \frac{l}{m}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ $\ldots, \pm\frac{m-1}{2}$, следовательно, при $\frac{\tau}{h^2} \leqslant 1/2$, т. е. при условии (6.37),

$$|1 - \tau|\beta_k(h)|^2| = \left|1 - \frac{4\tau}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi k h}{l}\right)\right| \leqslant 1,$$

$$|a^r_{(k)}|^2 \leqslant |a^0_{(k)}|^2 = |\varphi^{(k)}|^2. \tag{6.42}$$

Это вместе с равенством (5.9) дает равномерную оценку норм

$$\|u^r_h\|^2_{2,\,l_h} = l\sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2}|a^r_{(k)}|^2 \leqslant l\sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2}|\varphi^{(k)}|^2 = \\ = \|\check{\varphi}_h\|^2_{2,\,l_h} \leqslant \|\varphi\|^2_{2,\,l} \tag{6.43}$$

при $\forall r$. Неравенство (6.43) гарантирует устойчивость схемы (6.35_i) в норме $L_2(\bar{l})$. Оно выведено при условии (6.37). Пользуясь (6.43), можно выполнить предельный переход по $h \to 0$, $\tau \to 0$, считая $\frac{\tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}$, и получить об. решение $u(x, t)$ исследуемой задачи из класса $L_2(Q_T)$. Чтобы гарантировать более хорошую сходимость приближенных решений к точному, надо дать равномерную оценку более сильных норм u_h. Это можно сделать по-разному: или усиливая ограничение (6.37) на $\frac{\tau}{h^2}$, т. е. требуя, например, выполнение условия

$$\frac{\tau}{h^2} \leqslant \frac{1-\varepsilon}{2} \tag{6.44}$$

с каким-либо фиксированным $\varepsilon \in (0, 1)$, или усиливая предположение относительно начальной функции $\varphi(x)$, требуя ее принадлежности к какому-либо $\widehat{W}^l_2$, $l \geqslant 1$.

Покажем теперь, что если условие (6.37) заменить условием

$$\frac{\tau}{h^2} = \frac{1+\varepsilon}{2} \tag{6.45}$$

с каким-либо малым $\varepsilon > 0$, то схема (6.35_i) будет неустойчивой и вычисленные по ней u_h для широкого класса начальных функций $\varphi(x)$ не будут сходиться к решению рассматриваемой задачи. Пусть, например, $\varphi^{(0)}=0$ и $|\varphi^{(k)}|=\frac{1}{|k|^{\alpha}}$ для $|k|\geqslant 1$ с каким-либо $\alpha>1$. Ясно, что $\varphi(x)$ с такими коэффициентами Фурье принадлежат $L_2(l)$ и с увеличением α становятся все более и более гладкими l-периодическими функциями. Рассмотрим поведение соответствующих им $a^r_{(p)}$ с $p=\frac{m-1}{2}$. Из (6.41) и (6.45) следует

$$|a^r_{(p)}|^2=\left|1-2(1+\varepsilon)\sin\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right)\right|^{2r}\cdot\frac{1}{p^{2\alpha}}\geqslant\frac{(1+\delta)^{2r}}{p^{2\alpha}}$$

с некоторым $\delta>0$ при всех достаточно больших p. Возьмем какое-либо $t\in(0,T)$ и $r=\left[\frac{t}{\tau}\right]=\left[t\left(\frac{1+\varepsilon}{2}h^2\right)^{-1}\right]=$ $=\left[t\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{-1}\left(\frac{2p+1}{l}\right)^2\right]$. Для него

$$\|u^r_h\|^2_{2,\,l_h}=l\sum_{k=-p}^{p}|a^r_{(k)}|^2\geqslant l\,|a^r_{(p)}|^2\geqslant$$

$$\geqslant l(1+\delta)^{2\left[t\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{-1}\left(\frac{2p+1}{l}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{p^{2\alpha}}. \qquad (6.46)$$

При $p\to\infty$ правая часть (6.46) стремится к ∞ при любом $\alpha>1$ и, следовательно, $\|u^r_h\|_{2,\,l_h}$ неограниченно возрастают, т. е. сеточные функции u_h действительно не могут дать в пределе искомое ограниченное (хотя бы в норме L_2) решение $u(x)$ исследуемой задачи.

Перейдем к исследованию других разностных схем для задачи (6.33), (6.34), (6.2), (6.3). Рассмотрим простейшую *неявную* схему. В ней аппроксимации граничных и начальных условий берутся такими же, как в явной схеме, т. е. в виде (6.35_i), $i=2, 3, 4$, а уравнение (6.35_1) заменяется уравнением

$$u_{\bar t}-u_{x\bar x}=0, \qquad (6.47)$$

которое должно выполняться в точках сетки: $x=x_s$, $s=1, 2, \ldots, m$, на слоях $t=t_r$, $r=1, 2, \ldots, \left[\frac{T}{\tau}\right]$. Ясно, что разностное уравнение (6.47) аппроксимирует уравнение (6.1). Символически эта схема обозначается так: $\cdot\,\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{}}\,\cdot$. Она называется неявной потому, что для определения ее решения u_h^r на слое $t=t_r$ $(r \geqslant 1)$, когда u_h^{r-1} уже вычислена, требуется решать алгебраическую систему, содержащую m уравнений (6.47) с m неизвестными — значениями $u_h^r(x_s)$ в точках x_s с $s = 1, 2, \ldots, m$ (значения же $u_h^r(x_0)$ и $u_h^r(x_{m+1})$ заменяются в силу (6.35$_2$) и (6.35$_3$) величинами $u_h^r(x_m)$ и $u_h^r(x_1)$). Мы покажем, что эти системы однозначно разрешимы, причем вычисление u_h^r надо вести последовательно по слоям, начиная с $r = 1$. Более того, описанная схема устойчива при любом стремлении h и τ к нулю, и, следовательно, приближенные решения u_h^r дают в пределе при h и $\tau \to 0$ искомое решение $u(x, t)$. Для доказательства этого снова будем искать u_h^r в виде (6.38). Граничные условия (6.35$_2$) и (6.35$_3$) удовлетворяются при любых $\mu_h^{(k)}$. Коэффициенты же $a_{(k)}^r$ определятся из уравнений (6.47) и начального условия, точнее, из (6.35$_4$). Действительно, подставляя (6.38) в (6.47) и используя линейную независимость функций $\mu_h^{(k)}$, получим

$$a_{(k)\bar t}^r \equiv \frac{1}{\tau}\left[a_{(k)}^r - a_{(k)}^{r-1}\right] = -\left|\beta_k(h)\right|^2 a_{(k)}^r \tag{6.48}$$

для $r = 1, 2, \ldots, \left[\frac{T}{\tau}\right]$. К (6.48) присоединим равенства (6.40). Из (6.48) имеем

$$a_{(k)}^r = \left(1 + \tau\left|\beta_k(h)\right|^2\right)^{-1} a_{(k)}^{r-1}. \tag{6.49}$$

Отсюда уже видна устойчивость исследуемой схемы в норме $L_2(\hat{l})$ при любых h и τ. Именно, в силу (5.9) и (6.49) при любом r

$$\|u_h^r\|_{2,\,l_h}^2 = l \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} \left|a_{(k)}^r\right|^2 \leqslant l \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} \left|a_{(k)}^{r-1}\right|^2 \leqslant \\ \leqslant l \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} \left|a_{(k)}^0\right|^2 = \|\check{\varphi}_h\|_{2,\,l_h}^2 \leqslant \|\varphi\|_{2,\,l}^2. \tag{6.50}$$

Можно оценить и более сильные нормы u_h^r, например,

$$\|u_x^r\|_{2,l_h}^2 = l \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} |\beta_k(h)|^2 |a_{(k)}^r|^2 =$$

$$= l \sum_{k \neq 0} |\beta_k(h)|^2 \cdot \left(1 + \tau |\beta_k(h)|^2\right)^{-2r} |a_{(k)}^0|^2, \tag{6.51}$$

откуда

$$\tau \sum_{r=0}^{[T/\tau]} \|u_x^r\|_{2,l_h}^2 = l \sum_{k \neq 0} |a_{(k)}^0|^2 |\beta_k(h)|^2 \sum_{r=1}^{[T/\tau]} \frac{\tau}{(1 + \tau |\beta_k(h)|^2)^{2r}} \leqslant$$

$$\leqslant l \sum_{k \neq 0} |a_k^0|^2 \frac{\tau |\beta_k(h)|^2 \dfrac{1}{(1 + \tau |\beta_k(h)|^2)^2}}{1 - \dfrac{1}{(1 + \tau |\beta_k(h)|^2)^2}} =$$

$$= l \sum_{k \neq 0} |a_{(k)}^0|^2 \cdot \frac{\tau |\beta_k(h)|^2}{2\tau |\beta_k(h)|^2 + \tau^2 |\beta_k(h)|^4} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l}{2} \sum_{k \neq 0} |a_{(k)}^0|^2 \leqslant \frac{1}{2} \|\check{\varphi}\|_{2,l_h}^2. \tag{6.52}$$

Неравенство (6.52) дает еще одну равномерную оценку для u_h^r. Для получения же равномерных оценок более сильных норм u_h^r надо налагать более сильные ограничения на начальную функцию $\varphi(x)$. Но это мы предоставляем читателю сделать самостоятельно. Также в качестве упражнений предлагаем исследовать разностные схемы для задачи (6.33), (6.34), (6.2), (6.3), в которых уравнение (6.33) заменяется на одно из следующих:

$$u_{\bar{t}}^r - \alpha u_{x\bar{x}}^r - (1 - \alpha) u_{x\bar{x}}^{r-1} = 0, \tag{6.53}$$

$$u_t^r - \alpha u_{x\bar{x}}^{r+1} - (1 - \alpha) u_{x\bar{x}}^r = 0, \tag{6.54}$$

$$\alpha u_{\bar{t}} + (1 - \alpha) u_t - u_{x\bar{x}} = 0, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{6.55}$$

Последнее из них увязывает три слоя, и потому для возможности вычисления с его помощью u_h^r надо к нему добавить какой-либо способ определения u_h^r на слое $t = t_1 = \tau$ (например, (6.53) или (6.54), $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$). При исследовании этой схемы придется столкнуться с решением разностных уравнений вида

$$a^{(r+1)} + \alpha a^{(r)} + \beta a^{(r-1)} = 0, \qquad r = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{6.56}$$

когда $a^{(0)}$ и $a^{(1)}$ известны, а α и β — заданные числа, причем $\beta \neq 0$. Такие уравнения называются разностными уравнениями второго порядка. Для исследования зависимости $a^{(r)}$ от номера r полезно воспользоваться известным представлением общего решения уравнений (6.56), а именно

$$a^{(r)} = c_1 y_1^r + c_2 y_2^r, \tag{6.57}$$

где c_k — постоянные, определяемые начальными условиями (т. е. $a^{(0)}$ и $a^{(1)}$), y_k — корни квадратного уравнения

$$y^2 + \alpha y + \beta = 0, \tag{6.58}$$

а y_k^r — r-я степень y_k. Проверяется это непосредственной подстановкой каждого из y_k^r в (6.56). Формула (6.57) дает общее решение (6.56), если $y_1 \neq y_2$. При $y_1 = y_2 = y$ общее решение имеет вид

$$a^{(r)} = c_1 y^r + c_2 (r+1)\, y^r. \tag{6.59}$$

Мы рассмотрели краевые условия (6.2), (6.3). Аналогично исследуются другие краевые условия, например, условие Дирихле (условие (6.29)). При условиях (6.29) решение u_h^r надо искать в виде (6.31). Выводы, полученные в данном пункте для условий периодичности, справедливы и для этих краевых условий.

3. Простейшие уравнения гиперболического типа. Начнем с уравнения первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad a = \text{const} > 0. \tag{6.60}$$

Так же, как и всюду в данной книге, неоднородность уравнения не оказывает существенного влияния ни на доказательства, ни на окончательные результаты. Рассмотрим для него задачу Коши

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x). \tag{6.61}$$

Решение задачи (6.60), (6.61) дается формулой

$$u(x,\ t)=\varphi(x-at), \tag{6.62}$$

если $\varphi(x)$ есть гладкая функция.

Прямые $x-at=\mathrm{const}$ являются характеристиками уравнения (6.60). Вдоль них происходит распространение возмущения (что отчетливо видно из формулы (6.62)).

Для взятой нами задачи, очевидно, оптимальной разностной схемой является следующая:

$$u_t+au_{\bar{x}}=0, \tag{6.63}$$

$$u_h\big|_{t=0}=\varphi_h \tag{6.64}$$

с $h=a\tau$ (как всюду в данной главе, h — это шаг по x, а τ — по t, т. е. точки сетки имеют координаты: $x=x_s=$ $=sh,\ t=t_s=s\tau,\ s=0,\ \pm 1,\ \ldots$). При использовании к.-р. м. Фурье считаем $h=\frac{l}{m}$ (m — нечетное). Сеточная функция φ_h берется равной $\varphi(x)$ в точках сетки, если $\varphi(x)$ — гладкая функция. Мы ради простоты будем считать $\varphi(x)$ гладкой. Схема (6.63), (6.64) символически обозначается так: $\begin{smallmatrix} & * \\ * & * \end{smallmatrix}$. Ее решение u_h^r, как легко видеть, дается формулой

$$u_h^r(x_s)=\varphi_h(x_s-at_r)=\varphi_h(x_{s-r}), \tag{6.65}$$

так что $u_h^r(x_s)$ равно значению решения $u(x,\ t)$ задачи (6.60), (6.61) в точке $(x_s,\ t_r)$, и, следовательно, u_h^r в пределе при $h\to 0,\ \tau\to 0$ даст $u(x,t)$, если шаги h и τ связаны равенством $h=a\tau$. Из «общих соображений» (т. е. из теории характеристик, которая в данном случае позволила явно выписать решение — формулу (6.62)) ясно, что если h и τ связать равенством $\frac{\tau}{h}=c$ и взять постоянную $c>1/a$, то решение u_h^r схемы (6.63)—(6.64) не будет сходиться при $h\to 0$ к $u(x,\ t)$ (ибо u_h в точке $(x_s,\ t_r)$ не зависит от значения $\varphi(x)$ в точке $x=x_s-at_r$, от которого зависит истинное решение $u(x,\ t)$ в точке

$(x_s, t_r))$. В силу этих же соображений не может сходиться к $u(x, t)$ и решение u_h разностной схемы

$$u_t + au_x = 0, \qquad u_h\big|_{t=0} = \varphi_h \tag{6.66}$$

при любой связи между h и τ.

Напротив, схема (6.63), (6.64) и схема

$$u_t + \frac{a}{2}\left(u_{\bar{x}} + u_x\right) = 0, \qquad u_h\big|_{t=0} = \varphi_h, \tag{6.67}$$

казалось бы, должна выдавать решения u_h, сходящиеся к $u(x, t)$ при $h \to 0$, если τ/h подчинить условию: $\frac{\tau}{h} = \mathrm{const} \leqslant \frac{1}{a}$. Однако строгий анализ, который мы сейчас проведем, приводит к другим выводам, которые невозможно предугадать исходя лишь из общих свойств решений изучаемых краевых задач. Предварительно заметим, что если коэффициент a в (6.60) отрицателен, то рассуждения, аналогичные предыдущим, бракуют схему (6.63), (6.64) (при любом τ/h) и схему (6.66) при $\frac{\tau}{h} > \frac{1}{|a|}$. Схемы же (6.66) и (6.67) кажутся хорошими, если $\frac{\tau}{h} = \mathrm{const} \leqslant \frac{1}{|a|}$.

Если коэффициент a в (6.60) зависит от (x, t) и меняет знак в рассматриваемой области (x, t), то в силу только что проведенного предварительного анализа схемы (6.63), (6.64) и (6.66) не годятся. Схема, претендующая на сходимость, должна либо учитывать изменение величины и знака $a(x, t)$ (и, следовательно, быть разной в разных областях (x, t)), либо обладать таким свойством: область зависимости $u_h^r(x_s)$ от φ_h должна содержать область зависимости истинного решения $u(x_s, t_r)$ от φ.

Последним свойством обладает схема (6.67) при любом $a = a(x, t)$, если только $\frac{\tau}{h}$ подчинить условию: $\frac{\tau}{h} \leqslant \frac{1}{\max|a(x, t)|}$.

Посмотрим теперь, что дает строгий анализ для взятых нами схем. Без ограничения общности будем считать $\varphi(x)$ периодической функцией периода l. Рассмотрим случай $a>0$ (случай $a<0$ рассматривается аналогично) и также, не ограничивая общности, положим $a=1$.

Решение $u(x, t)$ будет иметь по x тот же период l, что и $\varphi(x)$. Возьмем во всех схемах φ_h равной в узлах сетки функции

$$\check{\varphi}_h(x)=\sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2}\varphi^{(k)}\mu^{(k)}(x), \tag{6.68}$$

где $\varphi^{(k)}=\frac{1}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\,e^{-i\frac{2\pi kx}{l}}\,dx$. Решения u_h разностных схем представим в виде

$$u_h^r=\sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2}a_{(k)}^r\mu_h^{(k)},\qquad r=1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\frac{T}{\tau}\right]. \tag{6.69}$$

Это возможно, ибо мы ищем u_h, *обладающие периодом* l. Если u_h есть решение для схемы (6.63), (6.64), то, подставляя (6.69) в (6.63), (6.64) и используя (5.8), получим

$$a_{(k)\,t}^r-\bar{\beta}_k(h)\,a_{(k)}^r=0. \tag{6.70}$$

Из условия же (6.64) найдем

$$a_{(k)}^0=\varphi^{(k)}. \tag{6.71}$$

Равенства (6.70) позволяют выразить $a_{(k)}^r$ через $a_{(k)}^0$, а именно

$$a_{(k)}^{r+1}=\left(1+\tau\bar{\beta}_k(h)\right)a_{(k)}^r=\ \ldots\ =\left(1+\tau\bar{\beta}_k(h)\right)^{r+1}a_{(k)}^0, \tag{6.72}$$

где $\beta_k(h)=(e^{i\frac{2\pi}{l}kh}-1)/h$. Используя это выражение для $\beta_k(h)$, подсчитаем

$$\left|a_{(k)}^r\right|^2=\left|1+\tau\bar{\beta}_k(h)\right|^{2r}\left|a_{(k)}^0\right|^2=$$
$$=\left[1+2\frac{\tau}{h}\left(\frac{\tau}{h}-1\right)\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{l}kh\right)\right)\right]^r\left|a_{(k)}^0\right|^2. \tag{6.73}$$

Если $\frac{\tau}{h}\leqslant 1$, то $0\leqslant 1-4\frac{\tau}{h}\left(1-\frac{\tau}{h}\right)\leqslant 1$ и тем более $\left|1+2\frac{\tau}{h}\left(\frac{\tau}{h}-1\right)\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{l}kh\right)\right)\right|\leqslant 1$. Следовательно, для всех «r» и «k»

$$|a_{(k)}^r|^2 \leqslant |a_{(k)}^0|^2, \tag{6.74}$$

т. е. схема (6.63), (6.64) действительно устойчива при любых τ и h, лишь бы $\tau/h \leqslant 1$. Такой же анализ показывает, что для схемы (6.66) часть гармоник (т. е. слагаемых из суммы (6.69)) будет неограниченно расти при любой величине отношения τ/h. Проанализируем схему (6.67). Подставим (6.69) в (6.67) и воспользуемся (5.3), (5.4) (напомним, что мы положили $a = 1$). Это приведет к равенствам

$$a_{(k)\,t}^r + i\alpha_k(h)\, a_{(k)}^r = 0, \tag{6.75}$$

где $\alpha_k(h) = \frac{1}{h}\sin\left(\frac{2\pi}{l}kh\right)$. Из (6.75) и (6.71) выразим $a_{(k)}^r$ через $a_{(k)}^0$:

$$a_{(k)}^r = \left(1 - i\tau\alpha_k(h)\right) a_{(k)}^{r-1} = \left(1 - i\tau\alpha_k(h)\right)^r a_{(k)}^0. \tag{6.76}$$

Отсюда

$$|a_{(k)}^r|^2 = \left(1 + \tau^2\alpha_k^2(h)\right)^r |a_{(k)}^0|^2. \tag{6.77}$$

При k, близких к $\frac{m}{4}$, $\alpha_k(h) = \frac{1}{h}\sin\frac{2\pi k}{m} \approx \frac{1}{h}$. Для таких k выражение $\left(1 + \tau^2\alpha_k^2(h)\right)^{[t/\tau]}$ неограниченно растет при $\tau \to 0$, как бы ни фиксировать τ/h и $t > 0$. Но это и означает, что схема (6.67) является неустойчивой: вычисляемые по ней решения u_h для широкого класса начальных данных будут неограниченно расти, когда $h \to 0$, если τ/h при этом равно какой угодно постоянной. Из (6.77) нетрудно увидеть, что для устойчивости (а, следовательно, и сходимости) схемы (6.67) необходимо и достаточно, чтобы при предельном переходе по $h \to 0$ оставалось ограниченным отношение τ/h^2 — вывод, неожиданный для уравнений гиперболического типа. Достаточность условия $\tau \leqslant ch^2$ следует из того, что

$$\left(1 + \tau^2\alpha_k^2(h)\right)^{t/\tau} \leqslant \left(1 + \frac{\tau^2}{h^2}\right)^{t/\tau} \leqslant (1 + c\tau)^{t/\tau} \leqslant e^{ct}$$

при всех k, τ и h. Необходимость же его устанавливается так же, как это было сделано в п. 2 (см. (6.46)):

из предположения $\frac{\tau}{h^2} \to \infty$ выводится неограниченное возрастание $\left| a^r_{(k)} \right|$ с $k \approx m/4$, когда h и $\tau \to 0$, а $r = [t/\tau]$ (t — произвольно фиксированный момент времени ($t > 0$)).

Укажем для задачи (6.60), (6.61) схемы, сходящиеся при любом соотношении шагов h и τ. В работе [12$_1$] (из которой мы берем весь излагаемый в §§ 5 и 6 материал) доказано, что такие схемы сходятся не только для уравнений (6.60), но и для общих гиперболических систем первого порядка. Применительно к рассматриваемому здесь частному случаю они имеют вид

$$u^r_t + \frac{a}{4}\left(u^{r+1}_x + u^{r+1}_{\bar{x}}\right) + \frac{a}{4}\left(u^r_x + u^r_{\bar{x}}\right) = 0, \qquad (6.78_1)$$

$$u_h \big|_{t=0} = \check{\varphi}_h. \qquad (6.78_2)$$

Уравнение (6.78$_1$) выписано для слоя $t = t_r = r\tau$, причем $r = 0, 1, \ldots$, и должно выполняться, как всюду в данном пункте, в точках $x = x_s = sh$, $s = 0, \pm 1, \ldots$, с учетом l-периодичности $\check{\varphi}_h$ и вычисляемых u^r_h. Схема (6.78$_i$) является неявной, ибо для определения u^r_h на слое r, когда известны u^{r-1}_h, требуется решать систему алгебраических уравнений, связывающую все значения $u^r_h(x_s)$ в точках x_s с $s = 1, \ldots, m$. Для доказательства устойчивости схемы (6.78$_i$) представим u^r_h в виде (6.69). Подставив (6.69) в (6.78$_1$) и воспользовавшись (5.3), получим следующие соотношения для вычисления коэффициентов $a^r_{(k)}$:

$$a^r_{(k)\,t} + \frac{a}{2} i\alpha_k \left(a^{r+1}_{(k)} + a^r_{(k)}\right) = 0. \qquad (6.79)$$

Из них определим

$$a^{r+1}_{(k)} = \frac{1 - i\dfrac{a\alpha_k}{2}\tau}{1 + i\dfrac{a\alpha_k}{2}\tau}\, a^r_{(k)}.$$

Отсюда следует, что $\left| a^{r+1}_{(k)} \right| = \left| a^r_{(k)} \right|$ и потому $\left| a^{r+1}_{(k)} \right| = \left| a^0_{(k)} \right|$ для всех k и r. Это гарантирует независимость норм

$\|u_h^r\|_{2,\,l_h}=\left(\sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2}|a_{(k)}^r|^2\right)^{1/2}$ от слоя $\dot{r}$ и тем самым устойчивость схемы (6.78_i) в норме L_2 при любых h и τ. В схеме (6.78_i) мы сохранили важное свойство задачи (6.60), (6.61): закон сохранения энергии, который для l-периодических решений выглядит так:

$$\int_0^l u^2(x,\ t)\,dx=\int_0^l \varphi^2(x)\,dx.$$

Он следует из равенства $0=\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}\right)u\,dx=$ $=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u^2\,dx$. Кроме этого классического закона сохранения, имеют место и такие равенства

$$\int_0^l \left(D_x^m u(x,\ t)\right)^2 dx=\int_0^l \left(D_x^m\varphi(x)\right)^2 dx, \qquad (6.80)$$

где $D_x^m u$ есть производная по x порядка m (при условии, что $u(x,\ t)$ имеет эти производные и l-периодична). Они получаются из равенства $0=\int_0^l D_x^m\left(\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot$ $\cdot D_x^m u\,dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l\left(D_x^m u(x,\ t)\right)^2 dx$. Схема ($6.78_i$) сохраняет все эти равенства (точнее, их разностные аналоги).

Рассмотрим еще один пример начально-краевой задачи для уравнений гиперболического типа, а именно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad (6.81_1)$$

$$u\,|_{x=0}=u\,|_{x=\pi}=0, \qquad (6.81_2)$$

$$u\,|_{t=0}=\varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), \qquad (6.81_3)$$

в области: $\{(x,t): x\in[0,\pi],\ t\geqslant 0\}$. Пусть $\varphi(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\pi)$, а $\psi(x)\in L_2(0,\pi)$. Мы проанализируем простейшую разностную схему, введенную впервые в работе [7_2] и исследованную в ней применительно к задаче Коши. Она имеет вид

$$u_{t\bar t}-u_{x\bar x}=0, \tag{6.82$_1$}$$

$$u_h|_{x=0}=u_h|_{x=\pi}=0, \tag{6.82$_2$}$$

$$u_h\big|_{t=0}=u_h^0,\quad u_h\big|_{t=\tau}=u_h^1. \tag{6.82$_3$}$$

Ось x разбита на отрезки длины $h=\pi/m$ точками $x_s=sh$, $s=0,\ \pm 1,\ \ldots$, а ось t — на отрезки длины τ точками $t_s=s\tau$, $s=0,\ \pm 1,\ \ldots$ Уравнение (6.82$_1$) должно выполняться в точках $(x_s,\ t_r)$, $s=1,\ \ldots,\ m-1$, $r=1,\ 2,\ \ldots$, равенства (6.82$_2$) — при $x=0$ и $x=mh=\pi$ для всех t_r, $r=0,\ 1,\ \ldots$, а (6.82$_3$) — в точках x_s, $s=0,\ 1,\ \ldots,\ m$, при $t=0$ и $t=\tau$ соответственно. Сеточные функции u_h^0 и u_h^1 мы выпишем ниже. Они определяются функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Равенства (6.82$_i$), как легко видеть, однозначно определяют решение u_h в точках $(x_s,\ t_r)$, $s=0,\ 1,\ \ldots,\ m$, $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ при любых h и τ. Схема (6.82$_i$) — явная; u_h определяются последовательно по слоям $t=t_r$, начиная с $r=2$. Из теории характеристик для уравнения (6.81$_1$) следует, что сходимость для схемы (6.82$_i$) может быть лишь при условии $\frac{\tau}{h}\leqslant 1$ *). Мы покажем, что схема (6.82$_i$) действительно устойчива при $\frac{\tau}{h}\leqslant 1$, если u_h^0 и u_h^1 выбрать подходящим образом. Сделаем это, имея в виду устойчивость в энергетической метрике.

Представим искомое решение u_h в виде (5.23):

$$u_h^r=\sum_{k=1}^{m-1}a_{(k)}^r\chi_h^{(k)}, \tag{6.83$_1$}$$

---

*) Говоря о необходимости ограничений подобного рода, мы не рассматриваем предельных переходов, при которых отношения τ/h (или τ/h^2 в п. 2) могут меняться при $h\to 0$.

где

$$a^r_{(k)} = \frac{2}{\pi}\left(u^r_h,\ \chi^{(k)}_h\right)_{\pi_h}, \qquad r = 0,\ 1,\ \ldots \tag{6.83$_2$}$$

Верхний индекс «r» указывает номер слоя по t ($t = t_r$), а $\chi^{(k)}_h(x) = \sin kx$. Подставим (6.83$_1$) в (6.82$_1$) и учтем, что $\chi^{(k)}_h$, $k = 1, \ldots, m-1$, образуют полный набор линейно независимых решений спектральной задачи (5.17), (5.18). Это даст для определения коэффициентов $a^r_{(k)}$ разностные уравнения

$$a^r_{(k)\,t\bar{t}} + \lambda_k a^r_{(k)} = 0, \qquad r = 1,\ 2,\ \ldots \tag{6.84}$$

В них $\lambda_k = \left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)^2$, $\quad k = 1, 2, \ldots, m-1$, $h = \frac{\pi}{m}$. Уравнения (6.84) однозначно определяют все $a^r_{(k)}$, если известны $a^r_{(k)}$ для $r = 0$ и $r = 1$. Как указано в конце п. 2 (см. (6.56)—(6.58)), общее решение уравнения

$$a_{t\bar{t}} + \lambda a = 0 \tag{6.84$'$}$$

имеет вид

$$a^r = c_1(q_1)^r + c_2(q_2)^r, \qquad r = 0,\ 1,\ \ldots, \tag{6.85}$$

где c_j — произвольные постоянные, q_j — корни квадратного уравнения

$$q^2 - 2(1-\alpha)q + 1 = 0, \qquad \alpha = \frac{1}{2}\lambda\tau^2, \tag{6.86}$$

а $(q_j)^r$ — r-я степень q_j. Формула (6.85) дает общее решение, если $q_1 \neq q_2$. В силу предположения $\frac{\tau}{h} \leqslant 1$ числа $\alpha_k = \frac{1}{2}\lambda_k\tau^2 = 2\left(\frac{\tau}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)^2$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$, $h = \frac{\pi}{m}$ лежат в интервале $(0,\ 2)$ и потому корни $q_{1,2} = 1 - \alpha \pm i\sqrt{\alpha(2-\alpha)}$ — различные, причем $|q_{1,2}| = 1$. Представим их в виде: $q_{1,2} = e^{i\theta}$, $q_2 = e^{-i\theta}$, где $\sin\theta = \sqrt{\alpha(2-\alpha)}$, а $\cos\theta = 1 - \alpha$. Тогда общее решение (6.85) может быть записано или как сумма

$$a^r = c_1 e^{ir\theta} + c_2 e^{-ir\theta},$$

или как сумма

$$a^r = \hat{c}_1 \cos(r\theta) + \hat{c}_2 \sin(r\theta) \tag{6.87}$$

с произвольными числами $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$. В силу вещественности всех данных в задаче величин и вещественности системы $\chi_h^{(k)}$, по которой мы разлагаем искомую функцию u_h, коэффициенты $a_{(k)}$ тоже вещественны, и потому $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$ следует брать вещественными. Вернемся к уравнениям (6.84). Их общие решения запишем так:

$$a_{(k)}^r = \hat{c}_{1,k} \cos(r\theta_k) + \hat{c}_{2,k} \sin(r\theta_k), \quad r = 0, 1, \ldots, \tag{6.88}$$

где θ_k связаны с $\alpha_k = \frac{1}{2}\lambda_k\tau^2$ равенствами

$$\sin\theta_k = \sqrt{\alpha_k(2-\alpha_k)}, \quad \cos\theta_k = 1 - \alpha_k, \quad \alpha_k \in (0, 2). \tag{6.89}$$

Представление (6.83_1) перепишем в виде

$$u_h^r = \sum_{k=1}^{m-1} \left[\hat{c}_{1,k} \cos(r\theta_k) + \hat{c}_{2,k} \sin(r\theta_k)\right] \chi_h^{(k)}. \tag{6.90}$$

Коэффициенты $\hat{c}_{1,k}$ и $\hat{c}_{2,k}$ определяются однозначно через функции u_h^0 и u_h^1 из (6.82_3). Однако мы еще не указали правила, по которому u_h^0 и u_h^1 вычисляются по $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Для u_h^0 предыдущие рассмотрения подсказывают такое правило:

$$u_h^0 = \sum_{k=1}^{m-1} \varphi_{(k)} \chi_h^{(k)} \equiv \hat{\varphi}_h, \tag{6.91}$$

где

$$\varphi_{(k)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin kx \, dx. \tag{6.92}$$

В качестве же u_h^1 обычно берут сумму $\hat{\varphi}_h + \tau\hat{\psi}_h$, где $\hat{\psi}_h$ вычислено по $\psi(x)$ в соответствии с (6.91), (6.92). Однако, как показывает подсчет «разностной энергетической нормы» для u_h, она не будет равномерно (по h) ограниченной, если $\tau/h = 1$. Чтобы добиться этого, надо несколько изменить выражение для u_h^1, а именно, выбрать u_h^1 так, чтобы формула (6.90) для решения задачи (6.82$_i$) имела вид

$$u_h^r = \sum_{k=1}^{m-1}\left[\varphi_{(k)}\cos(r\theta_k) + \frac{\tau\psi_{(k)}}{2\sin\frac{\theta_k}{2}}\sin(r\theta_k)\right]\chi_h^{(k)}. \tag{6.93}$$

Из (6.93) следует, что u_h^0 соответствует (6.91), а

$$u_h^1 = \sum_{k=1}^{m-1}\left[\varphi_{(k)}\cos\theta_k + \tau\psi_{(k)}\cos\frac{\theta_k}{2}\right]\chi_h^{(k)}. \tag{6.94}$$

Отношение

$$\frac{u_h^1(x)-u_h^0(x)}{\tau} = \sum_{k=1}^{m-1}\left[-\varphi_{(k)}\frac{\alpha_k}{\tau} + \psi_{(k)}\cos\frac{\theta_k}{2}\right]\chi_h^{(k)}(x) \tag{6.95}$$

аппроксимирует $\psi(x)$ в слабой норме $L_2(0, \pi)$. Действительно, любой член суммы (6.95) с фиксированным номером «k» стремится при $h\to 0$ $\left(\text{и } \frac{\tau}{h}\leqslant 1\right)$ к $\psi_{(k)}\sin kx$, ибо $\lambda_k\to k^2$, $\frac{\alpha_k}{\tau}=\frac{1}{2}\lambda_k\tau\to 0$ и $\cos\frac{\theta_k}{2}\to 1$ и нормы $\tau^{-1}\|u_h^1(x)-u_h^0(x)\|_{2,\pi_h}$ для (6.95) ограничены равномерно по h. Для проверки последнего воспользуемся ортогональностью $\chi_h^{(k)}$ в смысле (5.23) и (5.24) и тем, что $\lambda_k\leqslant k^2$:

$$\tau^{-2}\|u_h^1-u_h^0\|_{2,\pi_h}^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left[-\varphi_{(k)}\frac{\alpha_k}{\tau}+\psi_{(k)}\cos\frac{\theta_k}{2}\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \pi\sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{1}{4}\varphi_{(k)}^2\lambda_k^2\tau^2+\psi_{(k)}^2\right] \leqslant \pi\sum_{k=1}^{m-1}\left[\varphi_{(k)}^2\lambda_k+\psi_{(k)}^2\right] =$$

$$= 2(\hat\varphi_x, \hat\varphi_x)_{\pi_h} + 2(\hat\psi_h, \hat\psi_h)_{\pi_h} \leqslant$$

$$\leqslant \pi\sum_{k=1}^{m-1}\left[\varphi_{(k)}^2 k^2+\psi_{(k)}^2\right] = 2\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\|_{2,\pi}^2 + 2\|\psi\|_{2,\pi}^2. \tag{6.96}$$

Из этих двух фактов следует слабая сходимость в $L_2(0, \pi)$ функций $\frac{u_h^1(x)-u_h^0(x)}{\tau}$ к $\psi(x)$. Функции же

$u_h^0(x)=\hat{\varphi}_h(x)$ в силу принадлежности $\varphi(x)$ к $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, \pi)$ и их построения (см. (6.91), (6.92)) сходятся к $\varphi(x)$ в норме $W_2^1(0, \pi)$, причем сеточные нормы $\left[(\hat{\varphi}_h, \hat{\varphi}_h)_{\pi_h}+(\hat{\varphi}_x, \hat{\varphi}_x)_{\pi_h}\right]^{1/2}$ для них равномерно ограничены (см. (6.96)). Благодаря этому и (6.96) равномерно ограничены «разностные энергетические нормы»

$$\left[\left(u_x^r, u_x^r\right)_{\pi_h}+\left(u_{\bar{t}}^r, u_{\bar{t}}^r\right)_{\pi_h}\right]^{1/2} \equiv j_h(r)$$

для решений u_h^r, определенных равенствами (6.93).

Действительно, благодаря (5.24) и равенствам, связывающим α_k, λ_k, θ_k и τ:

$$\left(u_x^r, u_x^r\right)_{\pi_h}=\frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{m-1}\left[\varphi_{(k)} \cos \left(r \theta_k\right)+\frac{\tau \psi_{(k)}}{2 \sin \frac{\theta_k}{2}} \sin \left(r \theta_k\right)\right]^2 \lambda_k \leqslant$$

$$\leqslant \pi \sum_{k=1}^{m-1}\left[\varphi_{(k)}^2 \lambda_k+\frac{1}{4} \lambda_k \tau^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} \psi_{(k)}^2\right]=$$

$$=\pi \sum_{k=1}^{m-1}\left[\varphi_{(k)}^2 \lambda_k+\psi_{(k)}^2\right] \qquad (6.97)$$

и

$$\left(u_{\bar{t}}^r, u_{\bar{t}}^r\right)_{\pi_h}=\frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{m-1}\left[\varphi_{(k)} \frac{\cos r \theta_k-\cos (r-1) \theta_k}{\tau}+\right.$$

$$\left.+\frac{\tau \psi_{(k)}}{2 \sin \frac{\theta_k}{2}} \frac{\sin r \theta_k-\sin (r-1) \theta_k}{\tau}\right]^2=$$

$$=\frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{m-1}\left[-\varphi_{(k)} \frac{2}{\tau} \sin \frac{\theta_k}{2} \sin \left(r-\frac{1}{2}\right) \theta_k+\psi_{(k)} \cos \left(r-\frac{1}{2}\right) \theta_k\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \pi \sum_{k=1}^{m-1}\left[\varphi_{(k)}^2 \lambda_k+\psi_{(k)}^2\right]. \qquad (6.98)$$

Из (6.97), (6.98) и (6.96) видно, что $j_h^2(r)$ не превосходит $4\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\|_{2,\pi}^2 + 4\|\psi\|_{2,\pi}^2$ для всех τ и h, если только $\frac{\tau}{h} \leqslant 1$, т. е. мы доказали устойчивость разностной схемы (6.82_i) в «энергетической норме», если $\frac{\tau}{h} \leqslant 1$ и если функции u_h^0 и u_h^1 вычислены по формулам (6.91) и (6.94). Устремляя h к нулю, нетрудно убедиться, что u_h^r в пределе дадут решение $u(x, t)$ задачи (6.81_i), имеющее конечную энергетическую норму.

Аналогично исследуются другие разностные схемы для задачи (6.81_i), например, неявные схемы, в которых разностное уравнение (6.82_1) заменено уравнением

$$u_{t\bar{t}}^r - [\gamma u^{r+1} + (1-2\gamma) u^r + \gamma u^{r-1}]_{x\bar{x}} = 0, \tag{6.99}$$

а $\gamma = \text{const} > 0$.

§ 7. Задача Дирихле для общих эллиптических уравнений 2-го порядка

Используем метод конечных разностей для решения задачи Дирихле

$$\mathscr{L}u \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(x)\,u\right) + b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)\,u = f(x) + \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}, \tag{7.1}$$

$$u|_S = 0$$

в произвольной ограниченной области $\Omega \subset R_n$. Предположим, что коэффициенты уравнения являются ограниченными (как всюду, без особых оговорок — измеримыми) функциями, удовлетворяющими условию

$$a_{ij}\xi_i\xi_j + (a_i - b_i)\,\xi_i\xi_0 - a\xi_0^2 \geqslant \nu_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \tag{7.2}$$

в котором $\nu_1 = \text{const} > 0$, а $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ — произвольные вещественные числа. Это условие можно ослабить, заменив его условиями (2.3), (2.11), (2.12) гл. II или даже условием эллиптичности и предположением об однозначной разрешимости задачи (7.1). Но мы этого делать не будем, ибо первое из указанных ослаблений читатель сможет сделать самостоятельно, а второе, напротив, требует дополнительных рассуждений, которые отвлекли бы нас от основного материала.

Относительно f и f_i предположим, что они суть элементы $L_2(\Omega)$.

Разобьем всё R_n на элементарные ячейки $\omega_{(kh)}$ плоскостями $x_k = mh_k$, $k = 1, \ldots, n$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $\ldots, h_k > 0$, и используем обозначения, введенные в §§ 2, 3 данной главы. Будем конструировать устойчивые разностные схемы для задачи (7.1), следуя принципу, описанному во вводном параграфе. За основу возьмем пространство $W_2^1(\Omega)$ и энергетическую оценку

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant c_1 (\|f\|_{2,\Omega} + \|f\|_{2,\Omega}) \tag{7.3}$$

для об. решений $u(x)$ задачи (7.1) из $W_2^1(\Omega)$. Эта оценка гарантирует устойчивость задачи (7.1) по отношению к вариациям f и f_i и, в частности, справедливость теоремы единственности для задачи (7.1) в классе об. р. из $W_2^1(\Omega)$. Напомним, что об. решение $u(x)$ задачи (7.1) из класса $W_2^1(\Omega)$ определяется как элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\mathscr{L}(u, \eta) \equiv \int_\Omega \left[\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i u \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \left(b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au \right) \eta \right] dx = \\ = \int_\Omega \left(f_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - f\eta \right) dx \tag{7.4}$$

при $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Оценка (7.3) легко выводится из (7.4), если в (7.4) взять $\eta = u$ и использовать предположение (7.2). Мы хотим построить разностную схему, для которой был бы справедлив разностный аналог неравенства (7.3).

Для этого будем исходить из тождества (7.4) и строить его аппроксимацию. Интегралы по Ω заменим суммами интегралов по элементарным ячейкам $\omega_{(kh)}$, содержащимся в Ω, и в пределах каждой ячейки u и η заменим кусочно-постоянными функциями $\tilde{u}_h$ и $\tilde{\eta}_h$, а производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ — кусочно-постоянными восполнениями каких-либо однотипных разностных отношений, их аппроксимирующих, например, u_{x_i} и η_{x_i}. Требование принадлежности u и η к $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ естественно заменить требованием, чтобы сеточные функции u_h и η_h обращались в нуль на границе области их определения, т. е. на S_h. Итак, тождество (7.4) заменим следующим:

$$\mathscr{L}_h(u_h, \eta_h) \equiv \int_{\Omega_h} \left[\left(a_{ij}\tilde{u}_{x_j} + a_i\tilde{u}_h\right)\tilde{\eta}_{x_i} - \left(b_i\tilde{u}_{x_i} + a\tilde{u}_h\right)\tilde{\eta}_h \right] dx = \\ = \int_{\Omega_h} \left(f_i\tilde{\eta}_{x_i} - f\tilde{\eta}_h\right) dx, \quad (7.5)$$

или, что то же, тождеством

$$\mathscr{L}_h(u_h, \eta_h) \equiv \Delta_h \sum_{\Omega_h^+} \left[\left(a_{ijh}u_{x_j} + a_{ih}u_h\right)\eta_{x_i} - \left(b_{ih}u_{x_i} + a_hu_h\right)\eta_h \right] = \\ = \Delta_h \sum_{\Omega_h^+} \left(f_{ih}\eta_{x_i} - f_h\eta_h\right), \quad (7.6)$$

где Ω_h^+ есть множество вершин $x = (kh)$ тех ячеек $\omega_{(kh)}$, которые принадлежат области Ω_h (напомним, что $\omega_{(kh)} = \{x\colon\ k_ih_i < x_i < (k_i + 1)h_i\}$, и мы относим каждой ячейке $\omega_{(kh)}$ только одну ее вершину: $x = (kh)$; следовательно, множество Ω_h^+ есть часть множества $\overline{\Omega}_h$). В (7.6) суммы $\Delta_h \sum \ldots$ можно распространить и на всё $\overline{\Omega}_h$, если условиться, что u_h и η_h доопределены нулями вне $\overline{\Omega}_h$ (на S_h они также равны нулю) и все остальные функции $a_{ijh}, \ldots, f_h$ тоже положены равными нулю в тех точках S_h, где они не были определены описываемым ниже способом.

В (7.6) сеточные функции a_{ijh} равны в узле $(kh) = (k_1h_1, \ldots, k_nh_n)$ усреднению $\Delta_h^{-1} \int_{\omega_{(kh)}} a_{ij}(x)\,dx$, взятому по ячейке $\omega_{(kh)}$. Это так для всех коэффициентов и свободных членов уравнения (7.1).

Взятый нами «снос» известных функций (т. е. коэффициентов и свободных членов) на сетку — далеко не единственно допустимый. Например, если они непрерывны, то для вычислений удобнее брать просто их значения в узлах сетки. Но если они разрывны, то приходится брать те или иные их усреднения. Мы будем работать для определенности с теми, которые описаны выше.

Тождество (7.6) должно выполняться для всевозможных сеточных функций η_h, определенных на $\overline{\Omega}_h$ и равных нулю на S_h и вне $\overline{\Omega}_h$. Следовательно, оно содержит столько независимых свободно варьирующихся величин, сколько «внутренних» точек решетки $\overline{\Omega}_h$, т. е. сколько вершин в $\Omega_h = \overline{\Omega}_h \setminus S_h$. Преобразуем (7.6) с помощью формулы (2.11) «суммирования по частям» к виду

$$\Delta_h \sum_{\Omega_h} \left[\left(a_{ijh} u_{x_j} + a_{ih} u_h \right)_{\bar{x}_i} + \left(b_{ih} u_{x_i} + a_h u_h \right) \right] \eta_h = \\ = \Delta_h \sum_{\Omega_h} \left(f_{ih\bar{x}_i} + f_h \right) \eta_h \qquad (7.7)$$

и воспользуемся произволом в выборе η_h в точках Ω_h. Это приведет нас к следующей системе разностных уравнений:

$$\mathscr{L}_h u_h \equiv \left(a_{ijh} u_{x_j} + a_{ih} u_h \right)_{\bar{x}_i} + b_{ih} u_{x_i} + a_h u_h = f_{ih\bar{x}_i} + f_h. \qquad (7.8)$$

Они должны удовлетворяться в точках сетки Ω_h. К ним надо присоединить граничное условие

$$u_h |_{S_h} = 0. \qquad (7.9)$$

Уравнения (7.8), (7.9) или, что то же, соотношения (7.6), (7.9), дают нам желаемую разностную схему. Они образуют линейную алгебраическую систему, содержащую столько же неизвестных (значений u_h), сколько и уравнений. Однозначная разрешимость этой системы, равно как и устойчивость схемы, следует из априорной оценки для u_h, которую мы сейчас получим. Для этого возьмем в (7.6) η_h равной u_h (что допустимо) и учтем, что, в силу предположения (7.2) и построения сеточных функций $a_{ijh}, \ldots$, в точках Ω_h^+

$$a_{ijh} u_{x_j} u_{x_i} + \left(a_{ih} - b_{ih} \right) u_{x_i} u_h - a_h u_h^2 \geqslant \nu_1 \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \equiv \nu_1 u_x^2.$$

Итак,

$$\nu_1\Delta_h \sum_{\Omega_h^+} u_x^2 \leqslant \mathscr{L}_h(u_h, u_h) = \Delta_h \sum_{\Omega_h^+} \left(f_{ih}u_{x_i} - f_h u_h\right) \leqslant$$
$$\leqslant \| f_h \|_{2, \Omega_h^+} \| u_x \|_{2, \Omega_h^+} + \| f_h \|_{2, \Omega_h^+} \| u_h \|_{2, \Omega_h^+}, \tag{7.10}$$

где $\| f_h \|_{2, \Omega_h^+} = \left[\Delta_h \sum\limits_{\Omega_h^+} \sum\limits_{i=1}^{n} f_{ih}^2\right]^{1/2}$, а $\| v_h \|_{2, \Omega_h^+} = \left[\Delta_h \sum\limits_{\Omega_h^+} v_h^2\right]^{1/2}$.

С другой стороны, для любой сеточной функции u_h, равной нулю на S_h и вне $\overline{\Omega}_h$, справедливо неравенство

$$\Delta_h \sum_{\Omega_h^+} u_h^2 \leqslant c^2 \Delta_h \sum_{\Omega_h^+} u_x^2, \tag{7.11}$$

являющееся разностным аналогом неравенства Пуанкаре — Фридрихса (см. (3.19)). Если система (7.8), (7.9) однородна, т. е. если во всех точках Ω_h правые части (7.8) равны нулю, то, как видно из (7.10) и (7.11), ей может удовлетворять только функция $u_h \equiv 0$. Иначе говоря, система (7.8), (7.9) допускает не более одного решения. Но тогда, по основной теореме линейной алгебры, эта система имеет решение u_h при любых свободных членах, т. е. при любых f_{ih} и f_h, и для u_h справедливы оценки (7.10), (7.11). Из них следует неравенство

$$\nu_1\Delta_h \sum_{\Omega_h^+} u_x^2 \leqslant \left(\| f_h \|_{2, \Omega_h^+} + c\, \| f_h \|_{2, \Omega_h^+}\right) \| u_x \|_{2, \Omega_h^+},$$

а из него — неравенство

$$\| u_x \|_{2, \Omega_h^+} \leqslant \frac{1}{\nu_1}\left(\| f_h \|_{2, \Omega_h^+} + c\, \| f_h \|_{2, \Omega_h^+}\right). \tag{7.12}$$

Из определения сеточной функции f_h и неравенства Коши следует, что

$$\| f_h \|_{2, \Omega_h^+}^2 = \Delta_h \sum_{\Omega_h^+} f_h^2 = \Delta_h \sum_{\omega_{(kh)} \in \Omega_h} \left(\frac{1}{\Delta_h} \int\limits_{\omega_{(kh)}} f\, dx\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\omega_{(kh)} \in \Omega_h} \int\limits_{\omega_{(kh)}} f^2\, dx = \int\limits_{\Omega_h} f^2\, dx \leqslant \| f \|_{2, \Omega}^2, \tag{7.13}$$

аналогично:

$$\|f_h\|^2_{2,\,\Omega_h^+} \leqslant \|f\|^2_{2,\,\Omega} = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} f_i^2\,dx. \qquad (7.14)$$

В силу этого неравенства (7.12) и (7.11) гарантируют устойчивость построенной нами разностной схемы в сеточной норме, соответствующей энергетической норме. Они являются разностным аналогом неравенства (7.3). Исходя из того же принципа аппроксимации тождества (7.4), можно построить и другие разностные схемы, обладающие устойчивостью вида (7.11), (7.12). Они отличаются от (7.5) видом замены производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ разностными отношениями и способом построения сеточных функций $a_{ijh}, \ldots, f_h$ по данным функциям $a_{ij}, \ldots, f$. Например, можно в (7.5) заменить $\tilde{u}_{x_j}$ и $\tilde{\eta}_{x_i}$ на $\tilde{u}_{\bar{x}_j}$ и $\tilde{\eta}_{\bar{x}_i}$. Будут устойчивыми также схемы, отличающиеся от (7.8) «младшими членами»; точнее, в них вместо $(a_{ih}u_h)_{\bar{x}_i}$ и $b_{ih}u_{x_i}$ стоят $(a_{ih}u_h)_{x_i}$ и $b_{ih}u_{\bar{x}_i}$ или $\alpha(a_{ih}u_h)_{\bar{x}_i} + (1-\alpha)(a_{ih}u_h)_{x_i}$ и $\alpha b_{ih}u_{x_i} + (1-\alpha)\,b_{ih}u_{\bar{x}_i}$, $\alpha \in (0, 1)$. Но для этого надо несколько изменить вид предположения (условие (7.2)), гарантирующего положительную определенность формы $\mathscr{L}(u, u)$.

Переходим теперь к доказательству сходимости схемы (7.8), (7.9), когда все h_i, $i = 1, \ldots, n$, стремятся к нулю, т. е. к доказательству того, что интерполяции решений $\{u_h\}$ систем (7.8), (7.9), описанные в § 3 данной главы, сходятся к функции $u(x)$, являющейся об. решением задачи (7.1).

При этом мы не будем использовать факт существования об. решения $u(x)$ задачи (7.1), а, напротив, докажем его, пользуясь приближенными решениями $\{u_h\}$. В соответствии с § 3 данной главы, из (7.11), (7.12) и (7.9) следует, что интерполяции $\{u'_h(x)\}$ образуют ограниченное множество в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (мы считаем при этом, что u_h равны нулю вне $\overline{\Omega}_h$). Выделим из него любую подпоследовательность $\{u'_{h^\alpha}(x)\}$, слабо сходящуюся в $L_2(\Omega)$ вместе с производными $\left\{\frac{\partial u'_{h^\alpha}}{\partial x_i}\right\}$, $i=1,\ldots,n$, к некоторой функции $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и ее производным $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ соответственно, и покажем, что такая предельная функция $u(x)$ будет об. решением из $W_2^1(\Omega)$ задачи (7.1). Так как задача (7.1) при условии (7.2) может иметь не более одного об. решения из $W_2^1(\Omega)$, то тем самым будет доказано наличие единственной предельной точки в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ для всего множества $\{u'_h(x)\}$, или, что то же, слабая сходимость в $L_2(\Omega)$ $\{u'_h(x)\}$ и $\left\{\frac{\partial u'_h}{\partial x_i}\right\}$ к $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $\frac{\partial u}{\partial u_i}$. В силу теоремы 6.1 гл. I сами функции u'_h будут сходиться к $u(x)$ сильно в $L_2(\Omega)$. Итак, надо убедиться, что предельная для $\{u'_{h^\alpha}(x)\}$ функция $u(x)$ есть об. решение задачи (7.1). Для этого используем предложения, доказанные в § 3 данной главы. Лемма 3.1 и замечание 3.1 к теореме 3.1 гарантируют для подпоследовательности $\{h^\alpha\}$ сильную сходимость в $L_2(\Omega)$ интерполяций $\{\tilde{u}_{h^\alpha}(x)\}$ к $u(x)$ и слабую сходимость в $L_2(\Omega)$ функций $\{\tilde{u}_{x_i}(x)\}$ к $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Благодаря этому в тождестве (7.5) можно сделать предельный переход по $\{h^\alpha\}$, если в качестве η_h брать значения на сетке $\overline{\Omega}_h$ произвольной, но фиксированной функции $\eta(x)$ из $\dot{C}^\infty(\Omega)$ (ибо при всех достаточно малых h_i функции η_h будут равны нулю на S_h и вне $\overline{\Omega}_h$, и при $h_i\to 0$ построенные по ним интерполяции $\tilde{\eta}_h(x)$ и $\tilde{\eta}_{x_i}(x)$ будут сходиться равномерно на $\overline{\Omega}$ к $\eta(x)$ и $\frac{\partial\eta}{\partial x_i}$). Область интегрирования Ω_h в (7.5) можно заменить на область Ω, не зависящую от h, ибо функции $\tilde{\eta}_h$ и $\tilde{\eta}_{x_i}$ равны нулю вне $\overline{\Omega}_h$. В результате предельного перехода в (7.5) по $\{h^\alpha\}$ убедимся, что предельная функция $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству (7.4) при взятой функции $\eta(x)\in\dot{C}^\infty(\Omega)$. Но отсюда следует, что $u(x)$ есть об. решение задачи (7.1) из $W_2^1(\Omega)$ (ибо η — произвольный элемент $\dot{C}^\infty(\Omega)$, а $\dot{C}^\infty(\Omega)$ плотно в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$). Итак, доказана

Теорема 7.1. *Разностная схема* (7.8), (7.9) *устойчива в энергетической норме, и интерполяции* $\{u'_h(x)\}$, *построенные по решениям* $\{u_h\}$ *систем* (7.8), (7.9), *сходятся сильно в* $L_2(\Omega)$ *к об. решению* $u(x)$ *из* $W_2^1(\Omega)$ *задачи* (7.1), *а их производные* $\left\{\frac{\partial u'_h}{\partial x_i}\right\}$ *сходятся слабо в* $L_2(\Omega)$ *к* $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=1, \ldots, n$. *При этом предполагается, что коэффициенты* (7.1) *являются ограниченными измеримыми функциями, удовлетворяющими условию* (7.2), f *и* f_i *принадлежат* $L_2(\Omega)$ *и* Ω *— ограниченная область.*

Можно было бы показать, что фактически функции $\{u'_h(x)\}$ сходятся к $u(x)$ сильно в $W_2^1(\Omega)$. Мы это сделаем в п. 1 § 11.

§ 8. Задача Неймана и третья краевая задача для эллиптических уравнений

Рассмотрим в области Ω с границей $S \equiv \partial\Omega$, удовлетворяющей условиям § 5 гл. II, краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}u \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)\,u = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(s)\,u\Big|_S = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

где $\frac{\partial u}{\partial N} = a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\boldsymbol{n}, x_i)$. Будем предполагать коэффициенты $\mathcal{L}$ и $\sigma(s)$ ограниченными функциями, а $f \in L_2(\Omega)$. Кроме того, пусть при любых вещественных $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ выполняется неравенство

$$a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j - b_i(x)\,\xi_i\xi_0 - a(x)\,\xi_0^2 \geqslant \nu_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \lambda\xi_0^2 \tag{8.2}$$

с положительными постоянными ν_1 и λ. Если $\sigma(s) \geqslant 0$, то ν_1 и λ могут быть произвольными постоянными, бо́льшими нуля. Если же $\sigma(s)$ неположительна, но ограничена на S, то λ в (8.2) должно быть достаточно большим. Эти ограничения на $\sigma(s)$ и коэффициенты $\mathscr{L}$ должны гарантировать для $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ неравенство

$$\mathscr{L}(u, u) + \int\limits_S \sigma u^2\, ds \geqslant \nu_2\left(\| u \|_{2,\Omega}^{(1)}\right)^2, \qquad \nu_2 > 0, \tag{8.3}$$

где

$$\mathscr{L}(u, \eta) \equiv \int\limits_\Omega \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \eta}{\partial x_i} - b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta - au\eta\right) dx, \tag{8.4}$$

обеспечивающее единственность решения задачи (8.1). Они, являясь более сильным требованием, чем условие однозначной разрешимости задачи (8.1), позволяют построить для задачи (8.1) такие устойчивые разностные схемы, для которых решения u_h вычисляются однозначно при любых шагах h_i.

Обобщенное решение $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ задачи (8.1), как было определено в § 5 гл. II, есть элемент $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\mathscr{L}(u, \eta) + \int\limits_S \sigma u\eta\, ds = -(f, \eta) \tag{8.5}$$

при $\forall \eta \in W_2^1(\Omega)$. Если в (8.5) взять $\eta = u$, то мы придем к соотношению

$$\mathscr{L}(u, u) + \int\limits_S \sigma u^2\, ds = -(f, u), \tag{8.6}$$

из которого в силу (8.2) следует неравенство

$$\int\limits_\Omega (\nu_1 u_x^2 + \lambda u^2)\, dx + \int\limits_S \sigma u^2\, ds \leqslant -(f, u) \leqslant \| f \|_{2,\Omega} \cdot \| u \|_{2,\Omega}. \tag{8.7}$$

Если $\sigma \geqslant 0$, то из (8.7) получим априорные оценки для решения $u(x)$:

$$\| u \|_{2,\Omega} \leqslant \frac{1}{\lambda}\| f \|_{2,\Omega} \quad \text{и} \quad \| u_x \|_{2,\Omega}^2 \leqslant \frac{1}{\lambda\nu_1}\| f \|_{2,\Omega}^2. \tag{8.8}$$

Если же $\sigma \geqslant -c$, $c > 0$, то мы получим для $u(x)$ оценку $\| u \|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant c_1 \| f \|_{2,\Omega}$, считая λ достаточно большим (см.

§ 5 гл. II). Ограничимся рассмотрением случая $\sigma \geqslant 0$. Второй случай рассматривается аналогично. Итак, пусть $\sigma \geqslant 0$, а ν_1 и λ в (8.2) больше нуля. Разобьем R_n на ячейки $\omega_{(kh)}$ плоскостями $x_i = k_i h_i$, $h_i > 0$, $k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и обозначим через $\overline{\Omega}_h^*$ совокупность ячеек $\bar{\omega}_{(kh)}$, покрывающих $\overline{\Omega}$ и имеющих с Ω непустое пересечение. Границу замкнутой области $\overline{\Omega}_h^*$ обозначим через S_h^*, а $\overline{\Omega}_h^* \setminus S_h^* = \Omega_h^*$. Эти же символы $\overline{\Omega}_h^*$, S_h^* и Ω_h^* используем и для обозначения множества вершин нашего разбиения, принадлежащих $\overline{\Omega}_h^*$, S_h^* и Ω_h^*.

Будем считать, что коэффициенты уравнения (8.1) и функция $f(x)$ продолжены с Ω на несколько более широкую область с сохранением свойств, указанных в начале параграфа. Устойчивую конечно-разностную схему будем строить, исходя из аппроксимации тождества (8.5). Интеграл по Ω заменим суммами по ячейкам $\omega_{(kh)} \subset \Omega_h^*$, функции $u(x)$ и $\eta(x)$ — кусочно постоянными интерполяциями $\tilde{u}_h(x)$ и $\tilde{\eta}_h(x)$, производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ — кусочно-постоянными функциями $\tilde{u}_{x_i}$ и $\tilde{\eta}_{x_i}$ (можно было бы взять вместо них, например, $\tilde{u}_{\bar{x}_i}$ и $\tilde{\eta}_{\bar{x}_i}$), а известные функции оставим неизменными.

Кроме этого, добавим к левой части сумматорного тождества, которым мы хотим заменить левую часть (8.5), сумму

$$J_h(u_h, \eta_h) = \Delta_h \sum_{S_h^*} \left[\theta u_h \eta_h + \sum_{i=1}^{n} \theta_i u_{x_i} \eta_{x_i} \right], \qquad (8.9)$$

в которой θ и θ_i суть функции на множестве вершин, принадлежащих S_h^*, принимающие значения, равные 0 или 1 и определяемые по правилу, которое мы объясним чуть позже. Итак, заменим (8.5) следующим тождеством:

$$\int_{\Omega_h^*} [a_{ij} \tilde{u}_{x_j} \tilde{\eta}_{x_i} - b_i \tilde{u}_{x_i} \tilde{\eta}_h - a \tilde{u}_h \tilde{\eta}_h] \, dx + \\ + \int_S \sigma \tilde{u}_h \tilde{\eta}_h \, ds + J_h(u_h, \eta_h) = - \int_{\Omega_h^*} f \tilde{\eta}_h \, dx. \qquad (8.10)$$

Его можно переписать в виде

$$\Delta_h \sum_{\Omega_h^{*+}} [a_{ijh}u_{x_j}\eta_{x_i} - b_{ih}u_{x_i}\eta_h - a_h u_h \eta_h] + \\ + \sum_{\hat{S}_h} \sigma_h u_h \eta_h + J_h(u_h, \eta_h) = -\Delta_h \sum_{\Omega_h^{*+}} f_h \eta_h, \quad (8.11)$$

где Ω_h^{*+} есть множество тех точек из $\overline{\Omega}_h^*$, которые являются вершинами с координатами (kh) для ячеек $\omega_{(kh)} \subset \overline{\Omega}_h^*$ (аналогичный символ Ω_h^+, определяемый по $\overline{\Omega}_h$, был использован в § 7; еще раз подчеркнем, что каждой ячейке $\omega_{(kh)} \subset \overline{\Omega}_h^*$ сопоставляется одна ее вершина: $x=(kh)$). Сумма $\sum_{\hat{S}_h} \sigma_h u_h \eta_h$ есть другая форма записи интеграла $\int_S \sigma \tilde{u}_h \tilde{\eta}_h \, ds$, указывающая на то, что этот интеграл зависит от значений u_h и η_h лишь на некотором множестве точек сетки, которое мы обозначили через $\hat{S}_h$; сеточные функции $a_{ijh}, \ldots, f_h$ вычислены по $a_{ij}, \ldots, f$ как средние по соответствующей ячейке $\omega_{(kh)}$, а именно: $a_{ijh}|_{x=(kh)} = \frac{1}{\Delta_h} \int_{\omega_{(kh)}} a_{ij}(x)\,dx$ и аналогично для всех остальных коэффициентов $\mathscr{L}$ и f. Сумма $\Delta_h \sum_{\Omega_h^{*+}} u_h \eta_h$ содержит значения u_h (а тем самым и η_h) не во всех точках $\overline{\Omega}_h^*$. Эти недостающие значения u_h мы и добавляем в виде суммы $\Delta_h \sum_{S_h^*} \theta u_h \eta_h$, которая содержит, как нетрудно понять, часть вершин, принадлежащих множеству S_h^*. Кроме того, сумма $\Delta_h \sum_{\Omega_h^{*+}} a_{ijh} u_{x_j} \eta_{x_i}$ из (8.11) содержит не все разностные отношения u_{x_i} (а тем самым и η_{x_i}), которые можно образовать из значений u_h на $\overline{\Omega}_h^*$. Эти недостающие нам отношения u_{x_i} мы добавляем к ней в виде членов

$\Delta_h \sum\limits_{S_h^*} \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i u_{x_i} \eta_{x_i}$. Они также образованы из значений u_h на части вершин S_h^*. Теперь все члены, входящие в тождество (8.11), описаны. Они образованы с помощью значений u_h и η_h во всех вершинах $\overline{\Omega}_h^*$. Значения η_h в этих вершинах $\overline{\Omega}_h^*$ варьируются произвольно. Если в (8.11) выписать явно все u_{x_i} и η_{x_i} в виде разностных отношений от u_h и η_h и затем представить левую и правую части (8.11) в виде

$$\sum_{\overline{\Omega}_h^*} \mathscr{L}_h(u_h) \cdot \eta_h = \sum_{\overline{\Omega}_h^*} \mathscr{F}_h(f_h)\, \eta_h, \tag{8.12}$$

то в силу независимости значений η_h в точках $\overline{\Omega}_h^*$ тождество (8.12) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\mathscr{L}_h(u_h) = \mathscr{F}_h(f_h), \qquad (kh) \in \overline{\Omega}_h^*. \tag{8.13}$$

Система (8.13) содержит столько уравнений, сколько вершин имеет сетка $\overline{\Omega}_h^*$. В нее входит столько же и неизвестных — значений u_h в вершинах $\overline{\Omega}_h^*$. Покажем, что из этой системы однозначно определяется u_h на $\overline{\Omega}_h^*$. Для этого положим в тождестве (8.11), которое эквивалентно системе (8.13), $\eta_h = u_h$ и воспользуемся тем, что из условия (8.2) следует неравенство

$$a_{ijh} u_{x_j} u_{x_i} - b_{ih} u_{x_i} u_h - a_h u_h^2 \geqslant \nu_1 u_x^2 + \lambda u_h^2. \tag{8.14}$$

Это даст такое соотношение:

$$\begin{aligned} \Delta_h \sum_{\Omega_h^{*+}} (\nu_1 u_x^2 + \lambda u_h^2) + \int_S \sigma (\tilde{u}_h)^2 \, ds + J_h(u_h, u_h) \leqslant \\ \leqslant -\Delta_h \sum_{\Omega_h^{*+}} f_h u_h \leqslant \left(\Delta_h \sum_{\Omega_h^{*+}} f_h^2 \right)^{1/2} \left(\Delta_h \sum_{\Omega_h^{*+}} u_h^2 \right)^{1/2} \equiv \\ \equiv \| f_h \|_{2,\, \Omega_h^{*+}} \| u_h \|_{2,\, \Omega_h^{*+}}. \end{aligned} \tag{8.15}$$

В силу предположения $\sigma \geqslant 0$ интеграл $\int\limits_S \sigma (\tilde{u}_h)^2 \, ds$ может быть отброшен из левой части (8.15). Если еще учесть правило составления суммы $J_h(u_h, u_h)$, то из (8.15) следует такая оценка:

$$\nu_2\left(\| u_h \|^{(1)}_{2, \bar{\Omega}^*_h}\right)^2 \leqslant \| f_h \|_{2, \Omega^*_h} + \| u_h \|_{2, \Omega^*_h} +, \tag{8.16}$$

где $\nu_2 = \min(\nu_1, \lambda, 1)$, а величина

$$\left(\| u_h \|^{(1)}_{2, \bar{\Omega}^*_h}\right)^2 = \| u_h \|^2_{2, \bar{\Omega}^*_h} + \sum_{i=1}^{n} \Delta_h \sum_{\bar{\Omega}^{*(i)}_h} u^2_{x_i} \tag{8.17}$$

эквивалентна квадрату нормы $\| u_h \|^{(1)}_{2, \bar{\Omega}^*_h}$, определенной равенством (3.11) с $m = 2$. В (8.17) символ $\sum\limits_{\bar{\Omega}^{*(i)}_h}$ означает суммирование по всем точкам $\bar{\Omega}^*_h$, в которых определено разностное отношение u_{x_i} для функции u_h, известной лишь на $\bar{\Omega}^*_h$. Добавка члена $J_h(u_h, \eta_h)$ в (8.10) вызвана желанием иметь в неравенстве (8.16) сеточную норму, эквивалентную норме, фигурирующей в условиях теоремы 3.3 данной главы. Из неравенства (8.16) следует, что если система (8.13) однородна, т. е. если $f_h \equiv 0$, то ей может удовлетворять только $u_h \equiv 0$. Но тогда по основной теореме линейной алгебры неоднородная система (8.13) однозначно разрешима при любых свободных членах, т. е. при любых f_h. Для ее решения u_h справедливо неравенство (8.16), из которого следует устойчивость построенной разностной схемы в «энергетической норме», а именно:

$$\| u_h \|_{2, \bar{\Omega}^*_h} \leqslant \frac{1}{\nu_2} \| f_h \|_{2, \Omega^*_h} + \leqslant \frac{1}{\nu_2} \| f \|_{2, \Omega^*_h} \tag{8.18}$$

и

$$\| u_h \|^{(1)}_{2, \bar{\Omega}^*_h} \leqslant \frac{1}{\nu_2} \| f_h \|_{2, \Omega^*_h} + \leqslant \frac{1}{\nu_2} \| f \|_{2, \Omega^*_h} \tag{8.19}$$

(см. (7.13)). Для проведения предельного перехода по $h_i \to 0$, $i = 1, \ldots, n$, воспользуемся теоремами вложения для сеточных функций, доказанными в § 3 данной главы. Как и выше, из последовательности $\{h\}$, стремящейся к нулю, надо выделять сначала подпоследовательности, для которых имеют место сходимости, указываемые ниже. Но затем окажется, что они нас приведут к предельной функции $u(x)$, которая будет об. решением задачи (8.1), а так как такое решение единственно, то мы сможем заключить, что вся последовательность $\{u_h\}$ будет сходиться соответствующим образом к $u(x)$. Эта часть вывода вполне аналогична проведенной в § 7, и потому мы разрешим себе некоторую вольность говорить сразу обо всей последовательности $\{u_h\}$ и ее сходимости, вместо того чтобы формально строго проводить все рассуждение на подпоследовательностях.

Итак, из оценок (8.18), (8.19) в силу теорем § 3 следует, что интерполяции $\{u'_h(x)\}$ сходятся в $L_2(\Omega)$ к некоторой функции $u(x) \in W_2^1(\Omega)$. Более того, они сходятся к $u(x)$ и на поверхности S в норме $L_2(S)$. Их производные $\left\{\frac{\partial u'_h(x)}{\partial x_i}\right\}$, $i=1, \ldots, n$, сходятся к $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ слабо в $L_2(\Omega)$. Далее, функции $\{\tilde{u}_h(x)\}$ сходятся в $L_2(\Omega)$ и в $L_2(S)$ к $u(x)$, а $\{\tilde{u}_{x_i}\}$, $i=1, \ldots, n$, сходятся слабо в $L_2(\Omega)$ к $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Наконец, учтем, что величины $\|\tilde{u}_x\|_{2, \Omega_h^*}$, $\|\tilde{u}_h\|_{2, \Omega_h^*}$, $J_h(u_h, u_h)$ ограничены некоторой постоянной c_1, не зависящей от h. Будем теперь переходить в соотношении (8.10) к пределу, взяв фиксированную гладкую функцию $\eta(x)$, определенную на какой-либо области $\tilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}$. В качестве η_h в (8.10) возьмем значения этой функции $\eta(x)$ в вершинах $\overline{\Omega}_h^*$, считая h_i уже столь малым, что область $\overline{\Omega}_h^* \subset \tilde{\Omega}$. Функции $\tilde{\eta}_h(x)$ и $\tilde{\eta}_{x_i}(x)$ будут сходиться к $\eta(x)$ и $\frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ равномерно в области $\tilde{\tilde{\Omega}}$, содержащейся в $\tilde{\Omega}$ и содержащей все $\overline{\Omega}_h^*$, начиная с некоторых $h_i^0 > 0$, $i=1, \ldots, n$. Интегралы

$$j'_h = \int_{\Omega_h^* \setminus \Omega} \left[a_{ij}\tilde{u}_{x_i}\tilde{\eta}_{x_j} - b_i\tilde{u}_{x_i}\tilde{\eta}_h - a\tilde{u}_h\tilde{\eta}_h\right] dx$$

будут стремиться к нулю при $h_i \to 0$, ибо для них верна оценка

$$|j'_h| \leqslant c\left[\|\tilde{u}_x\|_{2,\Omega_h^*\setminus\Omega} + \|\tilde{u}_h\|_{2,\Omega_h^*\setminus\Omega}\right]\times$$
$$\times\left[\|\tilde{\eta}_x\|_{2,\Omega_h^*\setminus\Omega} + \|\tilde{\eta}_h\|_{2,\Omega_h^*\setminus\Omega}\right] \leqslant$$
$$\leqslant 2cc_1\left[\|\tilde{\eta}_x\|_{2,\Omega_h^*\setminus\Omega} + \|\tilde{\eta}_h\|_{2,\Omega_h^*\setminus\Omega}\right]$$

и $\operatorname{mes}(\Omega_h^*\setminus\Omega)\to 0$. В силу таких же оценок убеждаемся, что $\int\limits_{\Omega_h^*\setminus\Omega} f\tilde{\eta}_h\,dx$ и $J_h(u_h, \eta_h)$ также стремятся к нулю при $h_i \to 0$, $i = 1, \ldots, n$. Но тогда ясно, что предельным для (8.10) тождеством будет тождество (8.5), лежащее в основе определения об. решения $u(x)$ задачи (8.1). Мы доказали его справедливость для предельной функции $u(x)$ при всех гладких $\eta(x)$. Но такие функции η плотны в $W_2^1(\Omega)$, следовательно, (8.5) выполняется при $\forall\eta \in W_2^1(\Omega)$. Обратим внимание, что при этом, равно как и при использовании теоремы вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(S)$, мы должны знать, что граничная поверхность S обладает некоторой регулярностью (которая и была оговорена в самом начале параграфа). Из проведенного анализа разностной схемы видно, что ее можно в определенных пределах варьировать (например, взять в ней вместо (8.9) $\alpha J_h(u_h, \eta_h)$ с каким-либо $\alpha > 0$). Это не изменит окончательного результата (т. е. в пределе мы получим $u(x)$), но изменит систему (8.13). Такую возможность надо иметь в виду при составлении разностной схемы для конкретного уравнения (8.1) и конкретной области.

§ 9. Уравнения параболического типа

Рассмотрим первую начально-краевую задачу

$$\mathcal{M}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}u = f(x, t), \tag{9.1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u|_{S_T} = 0, \tag{9.2}$$

где

$$\mathscr{L}u \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - b_i(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x_i} - a(x,\ t)\,u,$$

в ограниченной области $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Будем предполагать, что выполнены условия (3.3)—(3.5) гл. III. Функции a_i и f_i мы взяли равными нулю лишь ради экономии места. Для эллиптической части уравнения (9.1) и граничного условия возьмем ту разностную замену, которая подробно рассмотрена в § 7 (напомним, что она — не единственно возможная). Для производной же $\frac{\partial u}{\partial t}$ рассмотрим две замены: $u_{\bar{t}}$ и u_t. Первая из них дает неявную схему, вторая — явную. Как будет показано ниже, получаемые при этом разностные схемы будут устойчивыми, по существу при тех же соотношениях между шагами по t и по x, что и для простейшего представителя уравнений (9.1), рассмотренного в п. 2 § 6. Кроме этих двух схем, мы проанализируем еще один вариант неявной схемы для многомерных уравнений (9.1) (т. е. когда $n \geqslant 2$), в котором алгебраические системы, определяющие сеточную функцию u_h, существенно проще систем, возникающих в первой неявной схеме. Такие схемы сходятся, как и первая неявная схема, при любом соотношении шагов по x и t, однако их сходимость имеет место в более слабой норме, чем в первой.

В настоящее время имеется много вариантов разностных схем подобного типа, отличающихся друг от друга способом расщепления многомерной эллиптической части на более простые компоненты. Все они исследуются принципиально так же, как и случай, который мы рассматриваем в п. 2.

Разобьем всё эвклидово пространство R_{n+1} переменных $(x,\ t)$ плоскостями $x_i = k_i h_i$, $h_i > 0$, $k_i = 0, \pm 1, \ldots$ и $t = k_0\tau$, $\tau > 0$, $k_0 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, на параллелепипеды $Q_{(k,\ k_0)} = \omega_{(kh)} \times (k_0\tau,\ (k_0+1)\tau) = \{(x,\ t)\colon\ k_i h_i < x_i < (k_i + 1) h_i,\ k_0\tau < t < (k_0 + 1)\tau\}$, и используем обозначения Ω_h, $\overline{\Omega}_h$, Ω_h^+ и S_h, введенные ранее (см. § 7). Для обозначения функций u, заданных на сетке, будем использовать индекс Δ: u_Δ. При написании же разностных отношений для таких функций, как и выше, индекс «Δ» будем опускать, так что под u_{x_i} понимается $(u_\Delta)_{x_i}$. Кроме этого, условимся, что индекс «k» у $u_\Delta(k)$ указывает на то, что сеточная функция u_Δ берется на слое $t = t_k = k\tau$. Наконец, ради сокращения записи, мы часто вместо сеточной нормы $\| u_\Delta(k)\|_{2,\,\bar{\Omega}_h}$ будем писать просто $\|u_\Delta(k)\|$.

1. Первая неявная разностная схема. Первая неявная разностная схема имеет вид

$$\mathscr{M}_\Delta u_\Delta(k) \equiv u_{\bar{t}}(k) - \left(a_{ij\Delta}(k)\, u_{x_j}(k)\right)_{\bar{x}_i} + \\ + b_{i\Delta}(k)\, u_{x_i}(k) + a_\Delta(k)\, u(k) = f_\Delta(k), \tag{9.3}$$

$$u_\Delta(k)\big|_{S_h} = 0, \tag{9.4}$$

$$u_\Delta\big|_{t=0} = \varphi_h. \tag{9.5}$$

Разностные уравнения (9.3) должны выполняться на слоях $k = 1, 2, \ldots, N = [T/\tau]$ во «внутренних» точках сетки $\bar{\Omega}_h$, т. е. в точках Ω_h; равенства (9.4) — для $k = 0, 1, \ldots, N$; равенство (9.5) — в точках Ω_h, причем в качестве φ_h возьмем функцию $\varphi_h\big|_{(kh)} = \Delta_h^{-1} \int\limits_{\omega_{(kh)}} \varphi(x)\, dx$, $\Delta_h = h_1 \ldots h_n$. Функции $a_{ij\Delta}, \ldots, f_\Delta$ строятся по известным функциям $a_{ij}, \ldots, f$ так: $a_{ij\Delta}\big|_{x=(kh),\ t=k_0\tau} = \Delta_h^{-1}\tau^{-1} \int\limits_{(k_0-1)\tau}^{k_0\tau} \int\limits_{\omega_{(kh)}} a_{ij}(x, t)\, dx\, dt$, и аналогично для остальных. Решение u_Δ системы (9.3)—(9.5) определяется последовательно по слоям $t = t_k$, начиная с $k = 1$. Для каждого слоя приходится решать линейную алгебраическую систему, содержащую столько уравнений и неизвестных $u_\Delta(k)$, сколько точек у решетки Ω_h. Эти системы имеют тот же вид, что и в § 7. Мы покажем, что они однозначно разрешимы для всех τ, меньших некоторого $\tau_0 > 0$. Это будет следовать по существу из той же оценки, которая гарантирует устойчивость построенной схемы. Она будет иметь место при любом соотношении шагов τ и h_i. Уравнения (9.3), (9.4) эквивалентны сумматорным тождествам

$$\Delta_h \sum_{\Omega_h^+} \left[u_{\bar{t}}\eta_\Delta + a_{ij\Delta}u_{x_j}\eta_{x_i} + b_{i\Delta}u_{x_i}\eta_\Delta + a_\Delta u_\Delta \eta_\Delta\right] = \Delta_h \sum_{\Omega_h^+} f_\Delta \eta_\Delta, \tag{9.6}$$

в которых η_Δ — произвольная функция на $\bar{\Omega}_h$, равная нулю на S_h. Тождества (9.6) выполняются на всех слоях $t = t_k$, $k = 1, \ldots, N$. Для доказательства разрешимости системы (9.3), (9.4) на слое t_k возьмем однородную систему, ей соответствующую, или, что то же, тождество (9.6) на слое t_k, в котором f_Δ и $u_\Delta(k-1)$ заменены нулями ($u_\Delta(k-1)$ входит в выражение $u_{\bar{t}}(k)$). Положив в этом тождестве $\eta_\Delta = u_\Delta$, получим равенство

$$\Delta_h \sum_{\Omega_h^+} \left[\tau^{-1}u_\Delta^2 + a_{ij\Delta}u_{x_j}u_{x_i} + b_{i\Delta}u_{x_i}u_\Delta + a_\Delta u_\Delta^2\right] = 0.$$

В силу предположений (3.3)—(3.5) гл. III из него получим

$$\Delta_h \sum_{\Omega_h^+} [\tau^{-1}u_\Delta^2 + \nu u_x^2] \leqslant \mu \Delta_h \sum_{\Omega_h^+} [\,|u_x| \cdot |u_\Delta| + u_\Delta^2] \leqslant \leqslant \Delta_h \sum_{\Omega_h^+} \left[\nu u_x^2 + \left(\frac{\mu^2}{4\nu} + \mu\right) u_\Delta^2\right]. \tag{9.7}$$

Если $\tau < \left(\frac{\mu^2}{4\nu} + \mu\right)^{-1} \equiv \tau_0$, то из (9.7) следует тождественное обращение $u_\Delta(k)$ в нуль. Т. е. мы показали, что при $\tau < \tau_0$ система (9.3), (9.4) однозначно разрешима на слое t_k (где k — любое, начиная с 1) при любых $f_\Delta(k)$ и $u_\Delta(k-1)$. Докажем теперь ее устойчивость, а именно, оценку типа (5.14) гл. III. Делается это абсолютно так же, как вывод неравенств (5.10)—(5.14) в гл. III. При этом сохраняются даже все постоянные в этих неравенствах, если только в них под $\|u\|^2_{2,\Omega_k}$ понимать $\|u_\Delta(k)\|^2 \equiv \Delta_h \sum_{\bar{\Omega}_h} u_\Delta^2(k)$, а под $\|u_x\|^2_{2,\Omega_k}$ — сумму $\|u_x(k)\|^2 \equiv$

$\equiv \Delta_h \sum\limits_{\Omega_h^+} u_x^2(k)$ (в § 5 гл. III через u_{x_i} были обозначены производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, а здесь — «правые» разностные отношения; заметим, что в силу (9.4) $\sum\limits_{\Omega_h^+} u_\Delta^2(k) = \sum\limits_{\overline{\Omega}_h} u_\Delta^2(k) = \sum\limits_{\Omega_h} u_\Delta^2(k)$ и $\sum\limits_{\Omega_h^+} u_x^2(k) = \sum\limits_{\overline{\Omega}_h} u_x^2(k)$, если считать $u_\Delta(k)$ продолженной нулем вне $\overline{\Omega}_h$). Итак, для u_Δ верны оценки

$$(1 - c\tau)\| u_\Delta(k)\|^2 - \| u_\Delta(k-1)\|^2 + \|\delta u_\Delta(k-1)\|^2 + \\ + \nu\tau \| u_x(k)\|^2 \leqslant 2\tau \| f_\Delta(k)\| \, \| u_\Delta(k)\| \qquad (9.8)$$

и

$$\| u_\Delta(m)\|^2 + \nu\tau \sum_{k=1}^{m} \| u_x(k)\|^2 + \sum_{k=1}^{m} \|\delta u_\Delta(k-1)\|^2 \leqslant \\ \leqslant c_1 \left[\|\varphi_\Delta\|^2 + \| f_\Delta\|^2_{2,\,1,\,Q_m^\Delta} \right], \quad m = 1, \ldots, N, \qquad (9.9)$$

где $c = \frac{\mu^2}{\nu} + 2\mu$, $\tau < c^{-1}$, постоянная c_1 зависит только от ν, μ и T, $\delta u_\Delta(k-1) = u_\Delta(k) - u_\Delta(k-1)$, а $\| f_\Delta\|^2_{2,\,1,\,Q_m^\Delta} = \tau \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{\Omega_h^+} f_\Delta^2(k)$. Эти неравенства гарантируют устойчивость рассматриваемой разностной схемы (без каких-либо ограничений на шаги h_i и τ, кроме $\tau < c^{-1}$), ибо правая часть (9.9) не превосходит постоянной $c_2 = c_1 \left(\|\varphi\|^2_{2,\,\Omega} + \| f\|^2_{2,\,1,\,Q_T} \right)$ (см. в связи с этим выбор φ_Δ и f_Δ и (7.13)). На их основе и теоремах § 3 данной главы доказывается слабая сходимость в $W_2^{1,0}(Q_T)$ интерполяций $u'_\Delta(x, t)$ к об. решению из $W_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (9.1), (9.2). Делается это так же, как в § 7 для эллиптических уравнений, и мы предоставляем читателю сделать это самостоятельно. Дадим лишь несколько указаний. Именно, из тождеств (9.6), справедливых для слоев $t=t_k$, $k=1, \ldots, N$, следует тождество

$$\int\limits_{Q_T} \left[-\tilde{u}_\Delta \bar{\eta}_t + a_{ij}\tilde{u}_{x_j}\bar{\eta}_{x_i} + b_i\tilde{u}_{x_i}\bar{\eta}_\Delta + a\tilde{u}_\Delta\bar{\eta}_\Delta\right] dx\,dt - \\ - \int\limits_\Omega \varphi\tilde{\eta}_\Delta(0)\,dx = \int\limits_{Q_T} f\tilde{\eta}_\Delta\,dx\,dt \qquad (9.10)$$

при любой функции $\eta_\Delta(k)$, равной нулю на S_h и вне $\overline{\Omega}_h$ при всех k и равной нулю на слое $t=[T/\tau]$ и выше. Функцию $u_\Delta(k)$ также считаем доопределенной нулем вне $\overline{\Omega}_h$ при всех k (на S_h она равна нулю по условию (9.4)). Восполнения $\tilde{u}_\Delta$, $\tilde{u}_{x_j}$, $\tilde{\eta}_\Delta$ и $\tilde{\eta}_{x_i}$ оказываются равными нулю вне $\overline{\Omega}_h$ при всех k. Это дало возможность считать, что все интегрирования по x проведены по области Ω. Кусочно-постоянные интерполяции $(\tilde{\ })$ выполнены так: $\tilde{u}_\Delta(x, t) = u_{(kh,\,(k_0+1)\tau)}$ на ячейке $Q_{(k,\,k_0)}$. Предельный переход по $h_i \to 0$ и $\tau \to 0$ в (9.10) надо производить, взяв в качестве η_Δ значения в точках сетки какой-либо гладкой функции $\eta(x, t)$, равной нулю в окрестности боковой поверхности цилиндра Q_T и его верхнего основания. Таким образом, можно считать доказанной следующую теорему:

Теорема 9.1. *Пусть для задачи* (9.1), (9.2) *выполнены условия* (3.3)—(3.5) *гл.* III, $f \in L_{2,1}(Q_T)$, *а* $\varphi \in L_2(\Omega)$. *Тогда разностная схема* (9.3)—(9.5) *однозначно определяет сеточную функцию* u_Δ *при всех* $\tau < \left(\frac{\mu^2}{\nu} + 2\mu\right)^{-1}$, *и ее интерполяции* $u'_\Delta(x, t)$ *при* $h_i \to 0$ *и* $\tau \to 0$ *сходятся слабо в* $L_2(Q_T)$ *к об. решению* $u(x, t)$ *из* $W_2^{1,0}(Q_T)$ *задачи* (9.1), (9.2). *Производные* $\frac{\partial u'_\Delta}{\partial x_i}$ *сходятся слабо в* $L_2(Q_T)$ *к* $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

2. Вторая неявная схема (схема переменных направлений). Системы (9.3)—(9.5), определяющие u_Δ, содержат столько неизвестных, сколько узлов решетки в Ω_h. При $n \geqslant 2$ и малых h_i число уравнений в этих системах очень большое, причем системы не распадаются на отдельные блоки. Решение таких систем требует огромной памяти машины и много времени для их решения. Ввиду этого для частных классов уравнений (9.1) были предложены другие неявные разностные схемы, требующие решения значительно более коротких систем *) (см. [8], [22], [31], [21], [14] и др.). Они, как и схема п. 1, сходятся при любом стремлении τ и h_i к нулю, однако сама сходимость имеет «более низкое качество», чем в п. 1 (т. е. u_Δ сходятся к u в более слабой норме). Доказать это можно, по существу, так же, как в п. 1 была доказана сходимость для схемы (9.3)—(9.5). Покажем это применительно к задаче (9.1), (9.2) на приводимой ниже схеме (9.11). Возьмем описанное в начале параграфа разбиение R_{n+1} на ячейки и добавим к нему сечения $t_{k+p/n}=\left(k+\frac{p}{n}\right)\tau$, $p=1, 2, \ldots, n-1$, $k=0, 1, \ldots$ $\ldots, N-1$. Решение u_Δ будем вычислять на всех слоях $t_{k+\frac{p}{n}}$ из $[0, N\tau]$ по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau}\left[u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)-u_\Delta\left(k+\frac{p-1}{n}\right)\right]&-\\
-2\left[a_{p1\Delta}(k+1)\,u_{x_1}\left(k+\frac{1}{n}\right)\right]_{\bar{x}_p}&-\ldots\\
\ldots-2\left[a_{pp-1\Delta}(k+1)\,u_{x_{p-1}}\left(k+\frac{p-1}{n}\right)\right]_{\bar{x}_p}&-\\
-\left[a_{pp\Delta}(k+1)\,u_{x_p}\left(k+\frac{p}{n}\right)\right]_{\bar{x}_p}+b_{p\Delta}(k+1)\,u_{x_p}\left(k+\frac{p}{n}\right)&+\\
+\frac{1}{n}a_\Delta(k+1)\,u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)=\frac{1}{n}f_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right),& \qquad (9.11)
\end{aligned}$$

где $k=0, 1, \ldots, N-1$, $p=1, 2, \ldots, n$. К ней присоединяются начальное и граничное условия

$$u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\Big|_{S_h}=0, \qquad u_\Delta\big|_{t=0}=\varphi_h. \qquad (9.12)$$

---

*) Схемы подобного типа известны в литературе под названием схем переменных направлений, схем дробных шагов и расщепляющихся схем.

Уравнения (9.11) должны выполняться на указанных слоях $t_{k+\frac{p}{n}}$ для x, являющихся «внутренними узлами» решетки Ω_h (т. е. $x \in \Omega_h$). Нетрудно понять, что на каждом слое приходится решать системы, в каждой из которых неизвестные «зацеплены» лишь по одному отрезку, параллельному какой-либо координатной оси. Основная матрица таких систем трехдиагональна и сравнительно легко обращается с помощью, например, метода прогонки (его изложение дано, например, в [7]).

Для доказательства разрешимости систем (9.11), (9.12), а также для доказательства устойчивости и сходимости (в определенном смысле) исследуемого разностного процесса выведем аналог оценок (9.7)—(9.9).

Рассмотрим однородную систему, соответствующую системе (9.11) на слое $t = \left(k + \frac{p}{n}\right)\tau$. Она имеет вид

$$\frac{1}{\tau} u_\Delta\left(k + \frac{p}{n}\right) - \left[a_{pp\Delta}(k+1)\, u_{x_p}\left(k + \frac{p}{n}\right)\right]_{\bar{x}_p} +$$
$$+ b_{p\Delta}(k+1) u_{x_p}\left(k + \frac{p}{n}\right) + \frac{1}{n} a_\Delta (k+1)\, u_\Delta\left(k + \frac{p}{n}\right) = 0, \tag{9.13}$$

из которого ясно, что система (9.13) распадается на отдельные подсистемы, в каждой из которых связаны между собою лишь узлы решетки из $\overline{\Omega}_h$, лежащие на какой-либо прямой l_p, параллельной оси x_p. Умножая (9.13) на $h_p u_\Delta\left(k + \frac{p}{n}\right)$ и суммируя по всем узлам из $\overline{\Omega}_h$, лежащим на l_p, получим после элементарных преобразований

$$\tau^{-1} h_p \sum_{l_p} u_\Delta^2\left(k + \frac{p}{n}\right) + h_p \sum_{l_p}\left[a_{pp\Delta} u_{x_p}^2\left(k + \frac{p}{n}\right) + \right.$$
$$\left. + b_{p\Delta} u_{x_p}\left(k + \frac{p}{n}\right) u_\Delta\left(k + \frac{p}{n}\right) + \frac{1}{n} a_\Delta u_\Delta^2\left(k + \frac{p}{n}\right)\right] = 0. \tag{9.14}$$

При этом мы воспользовались формулой (2.4) § 2 и обращением $u_\Delta\left(k + \frac{p}{n}\right)$ в нуль во всех точках l_p, кроме тех, которые принадлежат Ω_h. Из (9.14) в силу условий

(3.3) — (3.5) гл. III следует, что $u_\Delta \equiv 0$, если $\tau < \left(\frac{\mu^2}{4\nu} + \mu\right)^{-1} \equiv \tau_0$ (см. (9.7) в п. 1 данного параграфа). Тем самым доказана однозначная разрешимость всех систем (9.11) при $\tau < \tau_0$. Для оценки их решений умножим (9.11) на $2\tau\Delta_h u_\Delta\left(k + \frac{p}{n}\right)$, просуммируем по всем узлам $\overline{\Omega}_h$ и преобразуем полученное выражение с помощью формул (5.9) гл. III и (2.11) данной главы к следующему виду:

$$\begin{aligned}
&\left\|u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2 - \left\|u_\Delta\left(k+\frac{p-1}{n}\right)\right\|^2 + \\
&\qquad + \left\|u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right) - u_\Delta\left(k+\frac{p-1}{n}\right)\right\|^2 + \\
&\qquad + 2\tau\Delta_h \sum_{\Omega_h^+}\Bigg[a_{pp\Delta}(k+1)\,u_{x_p}^2\left(k+\frac{p}{n}\right) + \\
&\qquad + 2\sum_{q=1}^{p-1} a_{pq\Delta}(k+1)\,u_{x_p}\left(k+\frac{p}{n}\right)u_{x_q}\left(k+\frac{q}{n}\right) + \\
&\qquad + b_{p\Delta}(k+1)\,u_{x_p}\left(k+\frac{p}{n}\right)u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right) + \\
&\qquad + \frac{1}{n}\,a_\Delta(k+1)\,u_\Delta^2\left(k+\frac{p}{n}\right)\Bigg] = \\
&\qquad\qquad = \frac{2\tau}{n}\,\Delta_h \sum_{\Omega_h^+} f_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right). \qquad (9.15)
\end{aligned}$$

Просуммируем равенства (9.15) по p от $p=1$ до $p=n$ и воспользуемся предположениями (3.3)—(3.5) гл. III. Это приведет к неравенствам

$$\begin{aligned}
&\|u_\Delta(k+1)\|^2 - \|u_\Delta(k)\|^2 + \sum_{p=1}^{n}\left\|u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right) - u_\Delta\left(k+\frac{p-1}{n}\right)\right\|^2 + \\
&\qquad + 2\nu\tau\sum_{p=1}^{n}\left\|u_{x_p}\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2 \leqslant \\
&\leqslant 2\mu\tau\sum_{p=1}^{n}\left[\left\|u_{x_p}\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|\cdot\left\|u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\| + \frac{1}{n}\left\|u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2\right] +
\end{aligned}$$

$$+\frac{2}{n}\tau\sum_{p=1}^{n}\left\|f_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|\left\|u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\tau\sum_{p=1}^{n}\left[\nu\left\|u_{x_p}\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2+\left(\frac{\mu^2}{\nu}+\frac{2\mu}{n}\right)\left\|u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2\right]+$$

$$+\frac{2\tau}{n}\sum_{p=1}^{n}\left\|f_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|\left\|u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|, \qquad (9.16)$$

$k=0, 1, \ldots, N-1$. Из этих неравенств выводятся нужные нам оценки, в основном так же, как в § 5 гл. III из (5.10) были выведены неравенства (5.12) и (5.14) (надо только при выводе неравенства, аналогичного (5.12), использовать наличие третьего члена в левой части (9.16)). Ради небольших упрощений предположим, что $f\in\in L_2(Q_T)$. Тогда последний член правой части (9.16) оценим по неравенству Коши, заменив

$$2\left\|f_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|\left\|u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\| \text{ на } \left\|f_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2+\left\|u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2.$$

Из (9.16) следует

$$\|u_\Delta(k+1)\|^2-\|u_\Delta(k)\|^2+\sum_{p=1}^{n}\left\|u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)-u_\Delta\left(k+\frac{p-1}{n}\right)\right\|^2\leqslant$$

$$\leqslant c\tau\sum_{p=1}^{n}\left\|u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2+\frac{\tau}{n}\sum_{p=1}^{n}\left\|f_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2, \qquad (9.17)$$

где $c=\frac{\mu^2}{\nu}+\frac{2\mu}{n}+\frac{1}{n}$.

Каждый из членов $\left\|u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2$, $p=1, \ldots, n-1$, можно оценить через слагаемые, стоящие в левой части (9.17), исходя из очевидного представления

$$u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)=\sum_{s=1}^{p}\left[u_\Delta\left(k+\frac{s}{n}\right)-u_\Delta\left(k+\frac{s-1}{n}\right)\right]+u_\Delta(k). \quad (9.18)$$

Действительно, из (9.18) следует

$$\left\| u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left[\sum_{s=1}^{p}\left\| u_\Delta\left(k+\frac{s}{n}\right)-u_\Delta\left(k+\frac{s-1}{n}\right)\right\| + \| u_\Delta(k)\|\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant (p+1)\left[\sum_{s=1}^{p}\left\| u_\Delta\left(k+\frac{s}{n}\right)-u_\Delta\left(k+\frac{s-1}{n}\right)\right\|^2 + \| u_\Delta(k)\|^2\right]. \tag{9.19}$$

Подставляя эти оценки в правую часть неравенства (9.17) и огрубляя их, получим

$$\| u_\Delta(k+1)\|^2-\| u_\Delta(k)\|^2+\sum_{p=1}^{n}\left\| u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)-u_\Delta\left(k+\frac{p-1}{n}\right)\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant c\tau\frac{n(n+3)}{2}\left[\sum_{p=1}^{n-1}\left\| u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)-u_\Delta\left(k+\frac{p-1}{n}\right)\right\|^2 + \right.$$
$$\left. + \| u_\Delta(k)\|^2\right] + \frac{\tau}{n}\sum_{p=1}^{n}\left\| f_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2. \tag{9.20}$$

Отсюда при $c\tau\frac{n(n+3)}{2}\leqslant\frac{1}{2}$ (напомним, что в данном пункте $n\geqslant 2$) получим

$$\| u_\Delta(k+1)\|^2+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\left\| u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)-u_\Delta\left(k+\frac{p-1}{n}\right)\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(1-c\tau\frac{n(n+3)}{2}\right)\| u_\Delta(k)\|^2+\frac{\tau}{n}\sum_{p=1}^{n}\left\| f_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2. \tag{9.21}$$

Отбрасывая сначала второй член левой части (9.21), получим рекуррентное соотношение для $\|u_\Delta(k)\|^2$, с помощью которого оценим $\|u_\Delta(m)\|^2$ через известные величины:

$$\| u_\Delta(m)\|^2 \leqslant c_1\left[\|\varphi_h\|^2+\tau\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{p=1}^{n}\left\| f_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2\right], \tag{9.22}$$

где c_1 определяется ν, μ, n и T (аналогичная оценка дана в § 5 гл. III — см. (5.11)—(5.12)). Из (9.21), (9.22) и (9.19) выводим аналогичную оценку и для нецелых слоев:

$$\left\|u_\Delta\left(m+\frac{p}{n}\right)\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant c_2\left[\|\varphi_h\|^2 + \tau\sum_{k=0}^{m}\sum_{p=1}^{n}\left\|f_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2\right] \equiv c_2\mathcal{F}(m+1), \quad (9.23)$$

$m=0, 1, \ldots, N-1$, $p=1, \ldots, n$. Суммируя неравенства (9.16) от $k=0$ до $k=m$ и используя (9.23), получим желаемую оценку

$$\|u_\Delta(m+1)\|^2 + \sum_{k=0}^{m}\sum_{p=1}^{n}\left\|u_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right) - u_\Delta\left(k+\frac{p-1}{n}\right)\right\|^2 +$$
$$+\nu\tau\sum_{k=0}^{m}\sum_{p=1}^{n}\left\|u_{x_p}\left(k+\frac{p}{n}\right)\right\|^2 \leqslant c_3\mathcal{F}(m+1) \quad (9.24)$$

для $m=0, 1, \ldots, N-1$ ($\mathcal{F}(m+1)$ определено в (9.23)). Правая часть (9.24) не превосходит некоторой постоянной, определяемой функциями $\varphi(x)$ и $f(x, t)$. Эта оценка дает определенную устойчивость схемы (9.11), (9.12) по отношению к изменению φ и f. С ее помощью легко доказывается слабая сходимость в $L_2(Q_{T-\delta})$, $\forall\delta>0$, кусочно-постоянных интерполяций $\tilde{u}_\Delta$ сеточных функций u_Δ, вычисляемых по схеме (9.11), (9.12), к решению $u(x, t)$ задачи (9.1), (9.2). Лучшая сходимость u_Δ к решению $u(x, t)$ доказывается так: по $u(x, t)$ строится сеточная функция $\hat{u}_\Delta$ (если $u(x, t)$ — классическое решение и коэффициенты $\mathcal{L}$ — гладкие функции, то в качестве $\hat{u}_\Delta$ можно просто взять значение $u(x, t)$ в узлах сетки), для нее записываются соотношения (9.11) с невязкими $r_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)$ в правых частях и из них вычитаются соотношения (9.11) для u_Δ. В результате для $v_\Delta = \hat{u}_\Delta - u_\Delta$ получаются соотношения (9.11), в правых частях которых вместо $\frac{1}{n}f_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)$ будет стоять невязка

$r_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right)$. Сами невязки не обязаны быть малыми, но суммы $\sum_{p=1}^{n} r_\Delta\left(k+\frac{p}{n}\right) \to 0$ при τ и $h \to 0$. Это позволяет для v_Δ получить оценку вида (9.24), правая часть которой стремится к нулю при τ и $h \to 0$. Так доказывается сходимость u_Δ к решению u в норме, соответствующей левой части (9.24). Подобное рассуждение проведено подробно для более трудной задачи в [12_{12}] (гл. VI § 9 п. 2).

3. Явная схема. Явная разностная схема для задачи (9.1), (9.2) отличается от схемы (9.3) лишь заменой $u_{\bar t}$ на u_t, а именно:

$$u_t(k)-\left(a_{ij\Delta}(k)\,u_{x_j}(k)\right)_{\bar x_i}+b_{i\Delta}(k)\,u_{x_i}(k)+a_\Delta(k)\,u_\Delta(k)=f_\Delta(k), \tag{9.25}$$

$$u_\Delta(k)\,|_{S_h}=0, \quad k=0,\,1,\,\ldots,\,N, \quad u_\Delta\,|_{t=0}=\varphi_h. \tag{9.26}$$

Пространство R_{n+1} разбивается на элементарные ячейки так же, как и в п. 1. Уравнения (9.25) должны выполняться для $t=t_k=k\tau$, $k=0,\,1,\,\ldots,\,N-1$ и $x\in\Omega_h$. Сеточные функции $a_{ij\Delta},\,\ldots,\,f_\Delta$ в данном пункте удобнее строить по $a_{ij},\,\ldots,\,f$ так:

$$a_{ij\Delta}\,|_{(kh,\,k_0\tau)}=\Delta_h^{-1}\tau^{-1}\int_{k_0\tau}^{(k_0+1)\tau}\int_{\omega(kh)} a_{ij}(x,\,t)\,dx\,dt$$

и аналогично для остальных функций. Взяв (9.25) в одной из таких точек $(x,\,t_k)$, мы определим u_Δ в точке $(x,\,t_k+\tau)$ из этого равенства, если уже известны значения u_Δ в узлах слоя $t=t_k$. Так весьма просто из (9.25), (9.26) однозначно определяется приближенное решение u_Δ.

Для того чтобы эти решения u_Δ давали в пределе решение $u(x,t)$ задачи (9.1), (9.2), надо на шаг по t наложить ограничение вида $\tau\leqslant c_i h_i^2$ с некоторыми c_i. Необходимость такого ограничения была показана в п. 2 § 6, где мы рассмотрели простейшее одномерное уравнение типа (9.1). Предположим, ради несущественных упрощений, что все h_i равны h, и покажем, что при $\tau=ch^2$ с $c<(4n\mu)^{-1}$, где число μ взято из условия (3.5) гл. III, решения $u_{\hat\Delta}$ дают в пределе (при $h \to 0$) решение $u(x,t)$ задачи (9.1), (9.2).

Итак, пусть выполнены условия (3.3)—(3.5) гл. III и $\varphi \in L_2(\Omega)$, а $f(x,t) \in L_{2,1}(Q_T)$. Выведем для решений u_Δ уравнений (9.25), (9.26) нижеследующие «энергетические» оценки. Для этого умножим (9.25) на $2\tau h^n u_\Delta(k+1)$ и результат просуммируем по всем узлам Ω_h (или, что то же, по узлам $\overline{\Omega}_h$). Далее, первые два члена левой части преобразуем с помощью формулы (5.9) гл. III и формул (2.5), (2.11) данной главы к виду

$$\|u_\Delta(k+1)\|^2 - \|u_\Delta(k)\|^2 + \|\delta u_\Delta(k)\|^2 +$$
$$+ 2\tau h^n \sum_{\Omega_h^+} [a_{ij\Delta}(k) u_{x_j}(k) u_{x_i}(k+1) + b_{i\Delta}(k) u_{x_i}(k) u_\Delta(k+1) +$$
$$+ a_\Delta(k) u_\Delta(k) u_\Delta(k+1)] = 2\tau h^n \sum_{\Omega_h^+} f_\Delta(k) u_\Delta(k+1). \quad (9.27)$$

Сумму $j_1(k) \equiv 2a_{ij\Delta}(k) u_{x_j}(k) u_{x_i}(k+1)$ представим так:

$$j_1(k) = j_1(k) \pm a_{ij\Delta}(k) u_{x_j}(k) u_{x_i}(k) \pm$$
$$\pm a_{ij\Delta}(k) u_{x_j}(k+1) \cdot u_{x_i}(k+1) = a_{ij\Delta}(k) u_{x_j}(k) u_{x_i}(k) +$$
$$+ a_{ij\Delta}(k) u_{x_j}(k+1) u_{x_i}(k+1) - a_{ij}(k) \delta u_{x_j}(k) \delta u_{x_i}(k).$$

Это выражение $j_1(k)$ подставим в (9.27) и третий член из $j_1(k)$ перенесем направо, после чего левую и правую части полученного равенства оценим снизу и сверху соответственно, используя предположения (3.3)—(3.5) гл. III, следующим образом:

$$\|u_\Delta(k+1)\|^2 - \|u_\Delta(k)\|^2 + \|\delta u_\Delta(k)\|^2 + \nu\tau(\|u_x(k)\|^2 +$$
$$+ \|u_x(k+1)\|^2) \leqslant \mu\tau(\|\delta u_x(k)\|^2 + 2\|u_x(k)\|\,\|u_\Delta(k+1)\| +$$
$$+ 2\|u_\Delta(k)\|\,\|u_\Delta(k+1)\| + 2\|f_\Delta(k)\|\,\|u_\Delta(k+1)\|). \quad (9.28)$$

Выпишем явно δu_{x_i} в произвольном узле (x, t_k) нашей решетки и оценим его модуль так:

$$|\delta u_{x_i}(x, k)| = \frac{1}{h} |\delta u_\Delta(x + he_i, k) - \delta u_\Delta(x, k)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{h}(|\delta u_\Delta(x + he_i, k)| + |\delta u_\Delta(x, k)|),$$

откуда следует:

$$\|\delta u_x(k)\|^2 \leqslant h^n \sum_{\Omega_h^+} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{h^2}(|\delta u_\Delta(x+he_i, k)|^2 + |\delta u_\Delta(x, k)|^2) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4n}{h^2}\|\delta u_\Delta(k)\|^2. \tag{9.29}$$

Эту оценку подставим в правую часть неравенства (9.28). Кроме этого, $2\mu\|u_x(k)\|\,\|u_\Delta(k+1)\|$ в (9.28) заменим большей величиной: $\frac{\nu}{2}\|u_x(k)\|^2 + \frac{2\mu^2}{\nu}\|u_\Delta(k+1)\|^2$. В результате этого и приведения подобных членов из (9.28) выведем неравенство

$$\|u_\Delta(k+1)\|^2 - \|u_\Delta(k)\|^2 + \varepsilon\|\delta u_\Delta(k)\|^2 + \frac{\nu}{2}\tau\|u_x(k)\|^2 +$$
$$+ \nu\tau\|u_x(k+1)\|^2 \leqslant \mu\tau\Big[\Big(1+\frac{2\mu}{\nu}\Big)\|u_\Delta(k+1)\|^2 + \|u_\Delta(k)\|^2 +$$
$$+ 2\|f_\Delta(k)\|\,\|u_\Delta(k+1)\|\Big], \tag{9.30}$$

в котором $\varepsilon = 1 - 4n\mu h^{-2}\tau$. Подчиним отношение $h^{-2}\tau$ условию

$$1 - 4n\mu h^{-2}\tau \equiv \varepsilon, \tag{9.31}$$

где ε — какое-либо число из $(0, 1)$, фиксированное для всего дальнейшего рассуждения. Из (9.30) известным образом (см. § 5 гл. III) выведем желаемую оценку:

$$\|u_\Delta(m)\|^2 + \nu\tau\sum_{k=0}^{m}\|u_x(k)\|^2 + \varepsilon\sum_{k=0}^{m}\|\delta u_\Delta(k)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant c\left[\|u_\Delta(0)\|^2 + \tau\Big(\sum_{k=1}^{m}\|f_\Delta(k)\|\Big)^2\right], \tag{9.32}$$

в которой c определяется ν, μ и T и не зависит ни от $u_\Delta(k)$, ни от выбора сетки. Это неравенство, указывающее на устойчивость разностной схемы и позволяющее доказать сходимость решений u_Δ разностных уравнений (9.25), (9.26) к решению задачи (9.1), (9.2), выведено при условии (9.31). Оно заставляет временны́е шаги τ брать весьма маленькими, что приводит к необходимости довольно длительного счета для определения u_Δ в какой-либо момент времени $t_1 > 0$, если h мало.

Мы не будем приводить здесь доказательство того, что интерполяции u'_Δ приближенных решений u_Δ сходятся к решению $u(x,t)$ задачи (9.1), (9.2), ибо это делается по тому же плану, что и в § 7 (см. пояснения в конце п. 1 данного параграфа).

На этом мы заканчиваем анализ разностных схем для параболических уравнений. Отметим лишь, что изложенный здесь метод исследования разностных схем применим и ко многим другим неявным схемам. С его же помощью устанавливается сходимость разностных схем для второго и третьего краевых условий, если их «эллиптическая часть» составлена так, как описано в § 8, а производная по t заменена одним из описанных здесь способов.

§ 10. Уравнения гиперболического типа

В этом параграфе мы рассмотрим задачу Коши и первую начально-краевую задачу для гиперболических уравнений вида

$$\mathscr{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x, t)\,u = f(x, t), \quad (10.1)$$

предполагая ради несущественных упрощений, что коэффициенты суть непрерывные функции (x, t). Кроме того, должны быть выполнены условия:

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \quad \nu, \mu = \mathrm{const} > 0, \quad (10.2)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}, \quad |a| \leqslant \mu_1, \quad |a_{ijt}\xi_i\eta_j| \leqslant \mu_2|\xi||\eta|, \quad (10.3)$$

где μ_1 и μ_2 — константы, а $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ — произвольные вещественные числа, и

$$f \in L_{2,1}(Q_T), \ \varphi(x) = u|_{t=0} \in W_2^1(\Omega), \quad \psi(x) = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} \in L_2(\Omega). \quad (10.4)$$

в тех областях Q_T пространства (x, t), где рассматривается задача *).

Как показано в §§ 1, 2 гл. IV, решение задачи Коши для уравнения (10.1) можно свести к решению первой начально-краевой задачи для уравнения (10.1). Однако это сведение, избавившее нас от необходимости отдельно доказывать разрешимость задачи Коши, имеет лишь методическое значение. Для фактического нахождения решения задачи Коши в общем случае оно невыгодно, ибо требует решения более трудной задачи.

В данном параграфе мы найдем отдельно решения той и другой задачи с помощью конечно-разностных приближений. Однако доказательство сходимости разностного процесса можно не проводить самостоятельно, а редуцировать к доказательству сходимости для начально-краевой задачи.

1. Задача Коши. Разобьем полупространство $R_{n+1}^{+} = \{(x, t);\ t \geqslant 0\}$ плоскостями $x_i = kh_i$, $h_i > 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $t = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, на элементарные ячейки и в их вершинах будем определять решения u_Δ разностных уравнений. Ради несущественных упрощений будем в данном параграфе считать $h_i = h$, $i = 1, \ldots, n$. Заменим дифференциальное уравнение (10.1) разностным:

$$\mathscr{L}_\Delta u_\Delta = u_{t\bar{t}} - \left(a_{ij} u_{x_j}\right)_{\bar{x}_i} + a_i u_{x_i} + a u_\Delta = f_\Delta, \qquad (10.5)$$

и потребуем, чтобы оно выполнялось во всех вершинах, лежащих в плоскостях $t = k\tau$, $k = 1, 2, \ldots$. К нему присоединим условия в вершинах сетки, лежащих на плоскостях $t = k\tau$, $k = 0, 1$, а именно

$$u_\Delta|_{t=0} = \varphi_h, \qquad u_\Delta|_{t=\tau} = \varphi_h + \tau\psi_h. \qquad (10.6)$$

Функции f_Δ, φ_h и ψ_h построены по f, φ и ψ, например, как их стекловские средние (см. § 9). Система уравнений (10.5), (10.6), как легко видеть, позволяет однозначно определить ее решение u_Δ во всех вершинах решетки,

*) Если вместо перечисленных условий коэффициенты удовлетворяют меньшим требованиям — условиям теоремы 3.2 § 3 гл. IV, то при построении разностных схем их надо усреднить так, как это сделано в §§ 7 и 9 данной главы.

при этом вычислительный процесс весьма прост и не требует решения алгебраических систем: каждое уравнение (10.5) содержит лишь одно неизвестное, причем коэффициент при нем равен τ^{-2}. Далее, из (10.5) видно, что решение u_Δ в какой-либо точке решетки $(x^0, t^0 = k\tau)$ связано с его значениями лишь в точках, которые принадлежат пирамиде влияния $Q^\Delta(x^0, t^0)$ с вершиной в (x^0, t^0) и основанием на плоскости $t = 0$. Основанием этой пирамиды $\Omega^\Delta(x^0)$ служит куб с центром в точке x^0 с длиной ребра, равной $2kh$, и с гранями, лежащими в координатных плоскостях. Вспоминая основное свойство гиперболических уравнений о конечности скорости распространения возмущений и конечности области влияния (см. §§ 1, 2 гл. IV), нетрудно понять, что для сходимости решений u_Δ уравнений (10.5), (10.6) к решению задачи Коши для (10.1) необходимо, чтобы пирамиды влияния для (10.5) с вершиной в любой точке (x^0, t^0) содержали в себе (или хотя бы их пределы при $h, \tau \to 0$ содержали в себе) область влияния для точки (x^0, t^0), определяемую уравнением (10.1)! Это условие накладывает на шаги τ и h ограничение вида $\frac{\tau}{h} \leqslant c$. Общей мажорантой для c для всех уравнений (10.1) является $\mu^{-1/2}$. Мы докажем, что если c взять меньше, чем $(2\mu n)^{-1/2}$ или $(n\nu)^{1/2}\mu^{-1}$, то схема (10.5), (10.6) будет давать решения u_Δ, сходящиеся при $h, \tau \to 0$ к решению задачи Коши.

Доказательство этих фактов основано на оценке u_Δ, являющейся разностным аналогом энергетической оценки (2.15) гл. IV. Эту оценку можно получить для u_Δ в любой «пирамиде влияния» $Q^\Delta(x^0, t^0)$ через f_Δ в ней и φ_h и ψ_h на ее основании $\Omega^\Delta(x^0)$. Однако вместо этого поступим так: положим f_Δ равной нулю вне $Q^\Delta(x^0, t^0)$, φ_h равной стекловскому среднему от $\varphi(x)\zeta(x)$, где $\zeta(x)$ — гладкая функция, равная 1 на $\Omega^\Delta(x^0)$ и в ее h-окрестности и равная нулю на некотором расстоянии от $\Omega^\Delta(x^0)$, а ψ_h — равной нулю вне $\Omega^\Delta(x^0)$. Этим измененным вне Q^Δ функциям f_Δ, φ_h и ψ_h соответствует решение $\hat{u}_\Delta$, которое на $Q^\Delta(x^0, t^0)$ совпадает с прежним u_Δ, на больших же расстояниях от $Q^\Delta(x^0, t^0)$ сеточная функция $\hat{u}_\Delta$ равна нулю. Следовательно, $\hat{u}_\Delta$ можно рассмотреть как приближенное решение начально-краевой задачи в некотором параллелепипеде $\Pi^{\Delta}(x^0, t^0)$ высоты $t^0 = k\tau$, содержащем $Q^{\Delta}(x^0, t^0)$ и таком, что на его боковой поверхности $\hat{u}_{\Delta}$ равно нулю. Именно такие $\hat{u}_{\Delta}$ возникают при решении первой начально-краевой задачи с нулевым граничным условием с помощью разностной схемы (10.5), (10.6). Для них мы получим в следующем пункте разностный аналог энергетической оценки. Тем самым нужная нам оценка будет получена и для u_{Δ} в Q^{Δ}. С ее помощью сходимость u_{Δ} к решению $u(x,t)$ задачи Коши для (10.1) доказывается так же, как это было сделано выше в §§ 7—9 для уравнений других типов.

2. Первая начально-краевая задача. Для нахождения решения $u(x,t)$ задачи

$$\mathscr{L}u = f, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad u|_{S_T} = 0 \tag{10.7}$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ используем разностную схему, аналогичную схеме, исследованной в п. 3 § 6 для уравнения струны. Она в главной своей части совпадает со схемой, взятой в п. 1 для решения задачи Коши. Пусть для (10.7) выполнены условия (10.2)—(10.4) и условие $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Используем в данном параграфе те же обозначения Ω_h, S_h, $\overline{\Omega}_h$, Ω_h^+ и $\|u_{\Delta}\|$, $\|u_x\|$, что и в §§ 7—9. Напомним, что поскольку функции $u_{\Delta}(k)$, которые войдут в наши рассмотрения, равны нулю на S_h при всех k, то сумма $\|u_{\Delta}(k)\|^2 \equiv \Delta_h \sum_{\Omega_h^+} u_{\Delta}^2(k)$ равна суммам $\Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} u_{\Delta}^2(k)$ и $\Delta_h \sum_{\Omega_h} u_{\Delta}^2(k)$, а

$$\|u_x(k)\|^2 \equiv \Delta_h \sum_{\Omega_h^+} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2(k) = \Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} u_x^2(k),$$

если условимся считать, что $u_{\Delta}(k)$ продолжены нулем вне $\overline{\Omega}_h$. Так же, как и в п. 1, будем ради несущественных упрощений в дальнейших оценках считать все $h_i = h$, $i = 1, \ldots, n$.

Построим по $\varphi(x)$ сеточные функции φ_h так, чтобы φ_h равнялась нулю на S_h и вне $\overline{\Omega}_h$ и чтобы интерполяции $\tilde{\varphi}_h(x)$ и $\tilde{\varphi}_{x_i}(x)$ сходились слабо в $L_2(\Omega)$ к $\varphi(x)$ и $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$

соответственно (в частности, чтобы $\|\varphi_h\|$ и $\|\varphi_x\|$ были равномерно ограниченными)*). Для $\psi(x)$ возьмем функции ψ_h так, чтобы ψ_h равнялись нулю на S_h и вне $\overline{\Omega}_h$ и чтобы $\tilde{\psi}_h(x)$ сходились к $\psi(x)$ слабо в $L_2(\Omega)$. Функции же f_Δ должны быть определены для $x \in \Omega_h^+$ и $t = t_k$, $k = 1, \ldots, N = \left[\frac{T}{\tau}\right]$, и при h и $\tau \to 0$ $\tilde{f}_\Delta$ должны сходиться слабо в $L_2(Q_{T-\delta})$, $\forall \delta > 0$, к $f(x, t)$ (тем самым сеточные нормы $\tau h^n \sum_{k=1}^{N} \sum_{\Omega_h^+} f_\Delta^2(k)$ должны быть равномерно ограниченными)**). В качестве ψ_h и f_Δ можно взять, например, те же сеточные функции, что и в п. 3 § 9 для φ и f соответственно.

Приближенные решения u_Δ определим как сеточные функции, удовлетворяющие разностным уравнениям (10.5) в вершинах $x_k \in \Omega_h$ на слоях t_k, $k = 1, 2, \ldots, N$. К ним добавим уравнения (10.6) в точках $x_k \in \Omega_h$ и уравнения

$$u_\Delta(k)|_{S_h} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{10.8}$$

Легко видеть, что эти уравнения определяют u_Δ однозначно, причем вычисление u_Δ не требует решения каких-либо алгебраических систем (т. е. эта схема — явная). Для u_Δ справедлива оценка

$$h^n \sum_{\Omega_h^+} \left(u_{\bar{t}}^2(m) + u_x^2(m) + u^2(m)\right) \leqslant$$

$$\leqslant ch^n \sum_{\Omega_h^+} (\psi_h^2 + \varphi_h^2 + \varphi_x^2) + c\left[\tau \sum_{k=1}^{m-1} \left(h^n \sum_{\Omega_h^+} (f_\Delta(k))^2\right)^{1/2}\right]^2, \tag{10.9}$$

в которой c определяется постоянными ν, μ, μ_1, μ_2 из условий (10.2), (10.3) и высотой T, а m — любое натуральное число, меньшее $N+2 \equiv \left[\frac{T}{\tau}\right] + 2$, если только $\frac{\tau}{h}$

*) О построении таких φ_h см. конец § 4 данной главы.

**) Как видно из дальнейшего, нам достаточно знать $f_\Delta(k)$ лишь для $x \in \Omega_h$, а $f_\Delta(k)$ в части точек S_h используется нами только для однотипности записи нормы $\|f_\Delta\|$. В точках S_h можно, например, считать, что $f_\Delta(k)$ равна нулю.

меньше $(2\mu n)^{-1/2}$ или $(n\nu)^{1/2}\mu^{-1}$. Она и есть разностный аналог энергетического неравенства, о котором говорилось выше. Из нее следует устойчивость изучаемой разностной схемы и на ее основе доказывается сходимость u_Δ к решению $u(x, t)$ задачи (10.7). Вывод (10.9) довольно сложный, и мы поясним его сначала на примере волнового оператора. Итак, пусть $u(x, t)$ есть решение задачи

$$\mathscr{L}_0 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi, \quad u|_{S_T} = 0, \tag{10.10}$$

а u_Δ есть решение соответствующих ей разностных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}_{0\Delta} u_\Delta = u_{t\bar{t}} - u_{x_i \bar{x}_i} = f_\Delta, \quad u_\Delta|_{t=0} = \varphi_h, \\ u_\Delta|_{t=\tau} = \varphi_h + \tau\psi_h, \quad u_\Delta|_{S_T^\Delta} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.11}$$

Умножим обе части первого из уравнений (10.11), взятого на слое t_k, на $\tau h^n (u_t(k) + u_{\bar{t}}(k))$, результат просуммируем по всем узлам Ω_h^+ и всем k от $k = 1$ до $k = m$ и члены с $u_{x_i \bar{x}_i}$ преобразуем с помощью формулы (2.11) «суммирования по частям», помня, что на S_h величина $u_t(k) + u_{\bar{t}}(k)$ равна нулю. Это даст равенство

$$\begin{aligned} \tau \sum_{k=1}^{m} h^n \sum_{\Omega_h^+} u_{t\bar{t}}(k) (u_t(k) + u_{\bar{t}}(k)) + \\ + \tau \sum_{k=1}^{m} h^n \sum_{\Omega_h^+} u_{x_i}(k) \left(u_{t x_i}(k) + u_{\bar{t} x_i}(k)\right) = \\ = \tau \sum_{k=1}^{m} h^n \sum_{\Omega_h^+} f_\Delta(k) (u_t(k) + u_{\bar{t}}(k)). \end{aligned} \tag{10.12}$$

Непосредственным подсчетом проверяется справедливость следующих равенств:

$$\begin{aligned} \tau \sum_{k=1}^{m} u_{t\bar{t}}(k) (u_t(k) + u_{\bar{t}}(k)) = \tau \sum_{k=1}^{m} \left(u_{\bar{t}}^2(k)\right)_t = \\ = u_{\bar{t}}^2(m+1) - u_{\bar{t}}^2(1), \end{aligned} \tag{10.13}$$

$$2\tau u_{x_i}(k) u_{\bar{t} x_i}(k) = u_x^2(k) - u_x^2(k-1) + (\delta u_x(k-1))^2, \tag{10.14}$$

где $\delta v(k)$ есть $v(k+1)-v(k)$, и

$$2\tau u_{x_i}(k)\,u_{tx_i}(k)=u_x^2(k+1)-u_x^2(k)-\left(\delta u_x(k)\right)^2\,{}^{*)}. \qquad (10.15)$$

Благодаря (10.13)—(10.15) соотношение (10.12) преобразуется в равенство

$$\begin{aligned}\left\|u_{\bar t}(m+1)\right\|^2&+\frac{1}{2}\|u_x(m+1)\|^2+\frac{1}{2}\|u_x(m)\|^2-\frac{1}{2}\|\delta u_x(m)\|^2-\\ &-\left\|u_{\bar t}(1)\right\|^2-\frac{1}{2}\|u_x(1)\|^2-\frac{1}{2}\|u_x(0)\|^2+\frac{1}{2}\|\delta u_x(0)\|^2=\\ &=\tau\sum_{k=1}^{m}h^n\sum_{\Omega_h^+}f_\Delta(k)\left(u_t(k)+u_{\bar t}(k)\right). \qquad (10.16)\end{aligned}$$

Сумму

$$j_2(m)=\frac{1}{2}\|u_x(m+1)\|^2+\frac{1}{2}\|u_x(m)\|^2-\frac{1}{2}\|\delta u_x(m)\|^2$$

представим в виде

$$\begin{aligned}j_2(m)&=h^n\sum_{\Omega_h^+}\sum_i u_{x_i}(m+1)\,u_{x_i}(m)=\\ &=h^n\sum_{\Omega_h^+}\left[u_x^2(m+1)-u_{x_i}(m+1)\,\delta u_{x_i}(m)\right],\end{aligned}$$

а $\|\delta u_x(m)\|$ оценим, вспоминая определение символов $(\ )_x$ и δ, так:

$$\begin{aligned}\|\delta u_x(m)\|&=\\ &=\left(h^n\sum_{\Omega_h^+}\sum_i\left[u_{\bar t}(x+he_i,\ m+1)-u_{\bar t}(x,\ m+1)\right]^2\right)^{1/2}\frac{\tau}{h}\leqslant\\ &\leqslant 2\sqrt{n}\,\frac{\tau}{h}\left\|u_{\bar t}(m+1)\right\|. \qquad (10.17)\end{aligned}$$

Ввиду этого

$$j_2(m)\geqslant\|u_x(m+1)\|^2-2\sqrt{n}\,\frac{\tau}{h}\left\|u_x(m+1)\right\|\cdot\left\|u_{\bar t}(m+1)\right\|. \qquad (10.18)$$

---

*) В связи с (10.14) и (10.15) см. (2.7), (2.8) данной главы.

В силу (10.18) из (10.16) следует неравенство

$$\|u_{\bar t}(m+1)\|^2+\|u_x(m+1)\|^2-2\sqrt{n}\,\frac{\tau}{h}\|u_x(m+1)\|\,\|u_{\bar t}(m+1)\|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\|u_x(1)\|^2+\frac{1}{2}\|u_x(0)\|^2-\frac{1}{2}\|\delta u_x(0)\|^2+\|u_{\bar t}(1)\|^2+$$
$$+\tau\sum_{k=1}^{m}h^n\sum_{\Omega_h^+}f_\Delta(k)\left(u_t(k)+u_{\bar t}(k)\right)\leqslant$$
$$\leqslant h^n\sum_{\Omega_h^+}u_x(1)u_x(0)+\|\psi_h\|^2+\tau\sum_{k=1}^{m}\|f_\Delta(k)\|\left(\|u_t(k)\|+\|u_{\bar t}(k)\|\right)\leqslant$$
$$\leqslant\|\varphi_x\|^2+2\sqrt{n}\,\frac{\tau}{h}\|\varphi_x\|\,\|\psi_h\|+\|\psi_h\|^2+$$
$$+2\tau\sum_{k=1}^{m}\|f_\Delta(k)\|\cdot\max_{1\leqslant k\leqslant m+1}\|u_{\bar t}(k)\|. \qquad (10.19)$$

При этих оценках мы представили $j_3(1)\equiv h^n\sum\limits_{\Omega_h^+}u_x(1)u_x(0)$ в виде $\|u_x(0)\|^2+h^n\sum\limits_{\Omega_h^+}\delta u_x(0)\cdot u_x(0)$ и последний член оценили с помощью (10.17), взяв в (10.17) $m=0$. Если τ и h подчинены условию

$$\sqrt{n}\,\frac{\tau}{h}\leqslant 1-\varepsilon \quad \text{с каким-либо} \quad \varepsilon\in(0,\,1), \qquad (10.20)$$

то из (10.19) следует неравенство

$$\|u_{\bar t}(m+1)\|^2+\|u_x(m+1)\|^2\leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon^{-1}\left(j_0+\mathcal{F}_\Delta(m)\max_{1\leqslant k\leqslant m+1}\|u_{\bar t}(k)\|\right), \qquad (10.21)$$

в котором $m\geqslant 1$,

$$j_0=\|\varphi_x\|^2+\|\psi_h\|^2, \qquad (10.22_1)$$

а

$$\mathcal{F}_\Delta(m)\equiv\|f_\Delta\|_{2,\,1,\,Q_m^\Delta}\equiv\tau\sum_{k=1}^{m}\|f_\Delta(k)\|. \qquad (10.22_2)$$

Обозначим

$$\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|u_{\bar t}(k)\| = x(m), \qquad \max_{1\leqslant k\leqslant m}\|u_x(k)\| = y(m). \tag{10.23}$$

Для $x(m)$ из (10.21) следует

$$x^2(m+1)\leqslant 2\varepsilon^{-1}[j_0+\mathscr{F}_\Delta(m)\,x(m+1)]\leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon^{-1}\left[j_0+\frac{\varepsilon}{4}x^2(m+1)+\varepsilon^{-1}\mathscr{F}^2_\Delta(m)\right],$$

откуда

$$x^2(m+1)\leqslant 4\varepsilon^{-1}\left[j_0+\varepsilon^{-1}\mathscr{F}^2_\Delta(m)\right]. \tag{10.24}$$

Из (10.24) и (10.21) получаем желаемую «энергетическую» оценку

$$\max_{1\leqslant k\leqslant m}\left[\|u_{\bar t}(k)\|^2+\|u_x(k)\|^2\right]\leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon^{-1}\left[j_0+\mathscr{F}_\Delta(m-1)\,2\varepsilon^{-1/2}\cdot\sqrt{j_0+\varepsilon^{-1}\mathscr{F}^2_\Delta(m-1)}\right]\leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon^{-1}\left(2j_0+3\varepsilon^{-1}\mathscr{F}^2_\Delta(m-1)\right). \tag{10.25}$$

Замечание 10.1. Для задачи (10.10) в случае $n=1$ устойчивость разностной схемы (10.11) имеет место при условии $\tau/h\leqslant 1$, несколько менее ограничительном, нежели условие (10.20). В этом можно убедиться, если в равенстве (10.16) соответствующим образом перегруппировать сумму первых четырех членов левой части (10.16). Но мы этого делать здесь не будем, так как такая перегруппировка приводит к цели лишь для частных классов рассматриваемых в данном параграфе уравнений.

Докажем теперь (10.9) для общего случая, т. е. для решений u_Δ системы

$$\mathscr{L}_\Delta u_\Delta(k)=f_\Delta(k), \tag{10.26}$$

$$u_\Delta|_{t=0}=\varphi_h,\quad u_\Delta|_{t=\tau}=\varphi_h+\tau\psi_h,\quad u_\Delta(k)\big|_{S_h}=0, \tag{10.27}$$

где $\mathscr{L}_\Delta$ определено в (10.5). Так же, как и в случае системы (10.11), умножим (10.26) на $\tau h^n\left(u_t(k)+u_{\bar t}(k)\right)$, результат просуммируем по всем узлам Ω_h^+ и k от $k=1$ до $k=m$ и в двух главных членах проведем преобразования вида (10.13) и (10.12):

$$\|u_{\bar{t}}(m+1)\|^2-\|u_{\bar{t}}(1)\|^2+$$

$$+\tau\sum_{k=1}^{m}h^n\sum_{\Omega_h^+}\Big[a_{ij}(k)\,u_{x_j}(k)\left(u_{tx_i}(k)+u_{\bar{t}x_i}(k)\right)+$$

$$+\left(a_i(k)\,u_{x_i}(k)+a(k)\,u_{\Delta}(k)\right)\left(u_t(k)+u_{\bar{t}}(k)\right)\Big]=$$

$$=\tau\sum_{k=1}^{m}h^n\sum_{\Omega_h^+}f_{\Delta}(k)\left(u_t(k)+u_{\bar{t}}(k)\right). \qquad (10.28)$$

Сумму

$$j_1(m)=\tau\sum_{k=1}^{m}a_{ij}(k)\,u_{x_j}(k)\left(u_{t\bar{x}_i}(k)+u_{\bar{t}x_i}(k)\right)$$

преобразуем следующим образом:

$$j_1(m)=\sum_{k=1}^{m}a_{ij}(k)\,u_{x_j}(k)\left[u_{x_i}(k+1)-u_{x_i}(k-1)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}a_{ij}(k)\,u_{x_i}(k+1)u_{x_j}(k)-\sum_{k=1}^{m}a_{ij}(k)\,u_{x_i}(k)\,u_{x_j}(k-1)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}a_{ij}(k+1)\,u_{x_i}(k+1)\,u_{x_j}(k)-\sum_{k=1}^{m}a_{ij}(k)\,u_{x_i}(k)\,u_{x_j}(k-1)-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\delta a_{ij}(k)\,u_{x_i}(k+1)\,u_{x_j}(k)=a_{ij}(m+1)\,u_{x_i}(m+1)\,u_{x_j}(m)-$$

$$-a_{ij}(1)\,u_{x_i}(1)\,u_{x_j}(0)-\sum_{k=1}^{m}\delta a_{ij}(k)\,u_{x_i}(k+1)\,u_{x_j}(k).$$

Благодаря этому равенство (10.28) примет вид

$$\|u_{\bar t}(m+1)\|^2 + h^n \sum_{\Omega_h^+} a_{ij}(m+1)\, u_{x_i}(m+1)\, u_{x_j}(m) =$$
$$= \|u_{\bar t}(1)\|^2 + h^n \sum_{\Omega_h^+} a_{ij}(1)\, u_{x_i}(1)\, u_{x_j}(0) +$$
$$+ \tau \sum_{k=1}^{m} h^n \sum_{\Omega_h^+} \Big\{ \frac{\delta a_{ij}(k)}{\tau} u_{x_i}(k+1)\, u_{x_j}(k) -$$
$$- \big[a_i(k)\, u_{x_i}(k) + a(k)\, u_\Delta(k)\big]\big[u_t(k) + u_{\bar t}(k)\big]\Big\} +$$
$$+ \tau \sum_{k=1}^{m} h^n \sum_{\Omega_h^+} f_\Delta(k)\,\big[u_t(k) + u_{\bar t}(k)\big]. \qquad (10.29)$$

Выражение

$$j_2(m) = a_{ij}(m+1)\, u_{x_i}(m+1)\, u_{x_j}(m)$$

представим в виде суммы

$$j_2(m) = a_{ij}(m+1)\, u_{x_j}(m+1)\, u_{x_i}(m+1) -$$
$$- a_{ij}(m+1)\, u_{x_j}(m+1)\, \delta u_{x_i}(m).$$

Ниже, в замечании 10.2 при выводе неравенства (10.50), нам потребуется другое представление для $j_2(m)$, а именно:

$$j_2(m) = \frac{1}{2}\big[a_{ij}(m+1)\, u_{x_i}(m+1)\, u_{x_j}(m+1) +$$
$$+ a_{ij}(m)\, u_{x_i}(m)\, u_{x_j}(m) - a_{ij}(m+1)\, \delta u_{x_i}(m)\, \delta u_{x_j}(m) +$$
$$+ \delta a_{ij}(m)\, u_{x_i}(m)\, u_{x_j}(m)\big]. \qquad (10.30)$$

Но пока вернемся к равенству (10.29). Входящие в него члены

$$j_3(m) = \tau \sum_{k=1}^{m} h^n \sum_{\Omega_h^+} \frac{\delta a_{ij}(k)}{\tau} u_{x_i}(k+1)\, u_{x_j}(k),$$

$$j_4(m) = -\tau \sum_{k=1}^{m} h^n \sum_{\Omega_h^+} \big[a_i(k)\, u_{x_i}(k) + a(k)\, u_\Delta(k)\big]\big[u_t(k) + u_{\bar t}(k)\big]$$

оценим, используя предположения (10.3), следующим образом:

$$|j_3(m)| \leqslant \mu_2\tau \sum_{k=1}^{m} h^n \sum_{\Omega_h^+} |u_x(k+1)|\,|u_x(k)| \leqslant$$

$$\leqslant \mu_2\tau \sum_{k=1}^{m} \|u_x(k+1)\|\,\|u_x(k)\|, \qquad (10.31)$$

$$|j_4(m)| \leqslant \mu_1\tau \sum_{k=1}^{m} h^n \sum_{\Omega_h^+} \left(|u_x(k)|+|u_\Delta(k)|\right)\left(|u_t(k)|+|u_{\bar t}(k)|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mu_1\tau \sum_{k=1}^{m} \left(\|u_x(k)\|+\|u_\Delta(k)\|\right)\left(\|u_t(k)\|+\|u_{\bar t}(k)\|\right),$$

а последний член в (10.30)

$$j_5(m) = \tau \sum_{k=1}^{m} h^n \sum_{\Omega_h^+} f_\Delta(k)\left[u_t(k)+u_{\bar t}(k)\right]$$

оценим так:

$$|j_5(m)| \leqslant \tau \sum_{k=1}^{m} \|f_\Delta(k)\|\left(\|u_t(k)\|+\|u_{\bar t}(k)\|\right). \qquad (10.32)$$

Наконец, оценим $h^n \sum_{\Omega_h^+} j_2(m)$ снизу, используя предположения (10.2), (10.3) и (10.17):

$$h^n \sum_{\Omega_h^+} j_2(m) \geqslant \nu\|u_x(m+1)\|^2 - \mu\|u_x(m+1)\|\,\|\delta u_x(m)\| \geqslant$$

$$\geqslant \nu\|u_x(m+1)\|^2 - 2\mu\sqrt{n}\,\frac{\tau}{h}\|u_x(m+1)\|\,\|u_{\bar t}(m+1)\|. \qquad (10.33)$$

Из (10.31)—(10.33) следует

$$\|u_{\bar t}(m+1)\|^2+\nu\|u_x(m+1)\|^2-$$
$$-2\mu\sqrt{n}\frac{\tau}{h}\|u_x(m+1)\|\|u_{\bar t}(m+1)\|\leqslant$$
$$\leqslant h^n\sum_{\Omega_h^+} j_3(0)+\tau\sum_{k=1}^{m}\left[\mu_2\|u_x(k+1)\|\|u_x(k)\|+(\mu_1\|u_x(k)\|+\right.$$
$$\left.+\mu_1\|u_\Delta(k)\|+\|f_\Delta(k)\|)(\|u_t(k)\|+\|u_{\bar t}(k)\|)\right]+\|u_{\bar t}(1)\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\mu\|u_x(1)\|\|u_x(0)\|+\tau\sum_{k=1}^{m+1}\|u_x(k)\|^2(\mu_2+\mu_1)+$$
$$+\tau\mu_1\sum_{k=1}^{m}\|u_\Delta(k)\|^2+\tau\sum_{k=1}^{m+1}2\mu_1\|u_{\bar t}(k)\|^2+$$
$$+\tau\sum_{k=1}^{m}\|f_\Delta(k)\|(\|u_t(k)\|+\|u_{\bar t}(k)\|)+\|u_{\bar t}(1)\|^2. \qquad (10.34)$$

Если τ и h подчинить условию

$$\frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\sqrt{n}\frac{\tau}{h}=1-\varepsilon, \qquad (10.35)$$

где ε — какое-либо из $(0, 1)$, то левая часть (10.34) будет не меньше, чем $\varepsilon\|u_{\bar t}(m+1)\|^2+\varepsilon\nu\|u_x(m+1)\|^2$, и потому

$$\|u_{\bar t}(m+1)\|^2+\nu\|u_x(m+1)\|^2\leqslant\varepsilon^{-1}\left[\mu(\|\varphi_x\|+\tau\|\psi_x\|)\|\varphi_x\|+\right.$$
$$+\|\psi_h\|^2+(\mu_1+\mu_2)\tau\sum_{k=1}^{m+1}\|u_x(k)\|^2+\mu_1\tau\sum_{k=1}^{m}\|u_\Delta(k)\|^2+$$
$$\left.+2\mu_1\tau\sum_{k=1}^{m+1}\|u_{\bar t}(k)\|^2+2\|f_\Delta\|_{2,1,Q_m^\Delta}\max_{1\leqslant k\leqslant m+1}\|u_{\bar t}(k)\|\right], \qquad (10.36)$$

где

$$\|f_\Delta\|_{2,1,Q_m^\Delta}=\tau\sum_{k=1}^{m}\|f_\Delta(k)\|. \qquad (10.37)$$

Из очевидного равенства

$$u_\Delta(k)=u_\Delta(0)+\tau\sum_{l=1}^{k}u_{\bar t}(l)$$

получим следующие оценки для $\|u_\Delta(k)\|$:

$$\|u_\Delta(k)\|\leqslant\|u_\Delta(0)\|+\tau\sum_{l=1}^{k}\|u_{\bar t}(l)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|u_\Delta(0)\|+\left(\tau\sum_{l=1}^{k}\|u_{\bar t}(l)\|^2\right)^{1/2}\sqrt{k\tau} \qquad (10.38)$$

и

$$\|u_\Delta(k)\|^2\leqslant 2\|u_\Delta(0)\|^2+2k\tau^2\sum_{l=1}^{k}\|u_{\bar t}(l)\|^2. \qquad (10.39)$$

Подставим (10.39) в правую часть (10.36) и оценим ее так:

$$\|u_{\bar t}(m+1)\|^2+\nu\|u_x(m+1)\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon^{-1}\Big[2\mu\|\varphi_x\|^2+2\|\psi_h\|^2+2\mu_1 m\tau\|\varphi_h\|^2+$$
$$+(\mu_1+\mu_2)\tau\sum_{k=1}^{m+1}\|u_x(k)\|^2+\left(2(m\tau)^2\mu_1+2\mu_1\right)\tau\sum_{k=1}^{m+1}\|u_{\bar t}(k)\|^2+$$
$$+2\|f_\Delta\|_{2,1,Q_m^\Delta}\max_{1\leqslant k\leqslant m+1}\|u_{\bar t}(k)\|\Big]. \qquad (10.40)$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|u_{\bar t}(k)\|=x(m),\quad \nu\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|u_x(k)\|=y(m),\\
&2\mu\|\varphi_x\|^2+2\|\psi_h\|^2+2\mu_1 m\tau\|\varphi_h\|^2=c(m),\\
&(\mu_1+\mu_2)\nu^{-1}=c_1,\quad 2(m\tau)^2\mu_1+2\mu_1=c_2(m),\\
&2\|f_\Delta\|_{2,1,Q_m^\Delta}=\mathcal{F}_\Delta(m).
\end{aligned}\right\} \qquad (10.41)$$

Так как (10.40) справедливо для любых m, начиная с $m=0$, то из (10.40) следует:

$$x^2(m+1)+y^2(m+1)\leqslant 2\varepsilon^{-1}[c(m)+c_1\tau(m+1)\,y^2(m+1)+$$
$$+c_2(m)(m+1)\tau x^2(m+1)+2\mathcal{F}_\Delta(m)\,x(m+1)]\leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon^{-1}\Big\{c(m)+c_1\tau(m+1)c_1\tau(m+1)\,y^2(m+1)+$$
$$+\Big[\frac{\varepsilon}{8}+c_2(m)\,\tau(m+1)\Big]x^2(m+1)+8\varepsilon^{-1}\mathcal{F}_\Delta^2(m)\Big\}. \quad (10.42)$$

Для m, удовлетворяющих условию

$$\max\Big\{2\varepsilon^{-1}c_1\tau(m+1);\ \ \frac{1}{4}+2\varepsilon^{-1}c_2(m)\,\tau(m+1)\Big\}\leqslant\frac{1}{2}, \quad (10.43)$$

из (10.42) получаем оценку

$$x^2(m+1)+y^2(m+1)\leqslant 4\varepsilon^{-1}\big[c(m)+8\varepsilon^{-1}\mathcal{F}_\Delta^2(m)\big], \quad (10.44)$$

а отсюда и неравенства (10.39) выводим оценку

$$x^2(m+1)+y^2(m+1)+z^2(m+1)\leqslant$$
$$\leqslant 2\|\varphi_h\|^2+[1+2(\tau(m+1))^2]\,4\varepsilon^{-1}\big[c(m)+8\varepsilon^{-1}\mathcal{F}_\Delta^2(m)\big], \quad (10.45)$$

где

$$z(m)=\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|u_\Delta(k)\|. \quad (10.46)$$

Оценка (10.45) выведена для m, удовлетворяющих условию (10.43), в котором c_1 и $c_2(m)$ зависят только от ν, μ_1, μ_2 и $m\tau$. От начальных данных φ и ψ в правую часть (10.45) входят те же самые нормы, которые стоят в левой части (10.45), т. е. от $\varphi=u|_{t=0}$ — величина $\|\varphi_h\|^2+\|\varphi_x\|^2$, а от $\psi=u_t|_{t=0}$ — величина $\|\psi_h\|$. Благодаря этому, если m_1 есть наибольшее m, для которого выполнено неравенство (10.43) и для которого, тем самым, справедлива оценка (10.45), и если $\tau(m_1+1)<T$, то уровень $t_1=m_1\tau$ можно взять за начальный и, отправляясь от него, вывести неравенство (10.45) для уровня $t_2\leqslant\min\{(2m_1+1)\tau;\ T\}$. Если t_2 окажется меньшим T, то можно от $t_2-\tau=2m_1\tau$ подняться на высоту $(m_1+1)\tau$, и так, пока не исчерпаем всего T. Ясно, что

за конечное число шагов, удовлетворяющих условию (10.43), мы исчерпаем всё T и придем к оценке

$$\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|u_{\bar t}(k)\|^2+\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|u_x(k)\|^2+\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|u_\Delta(k)\|^2\leqslant$$
$$\leqslant c(m\tau;\,\varepsilon)\left[\|\psi_h\|^2+\|\varphi_x\|^2+\|\varphi_h\|^2+\|f_\Delta\|^2_{2,1,Q_m^\Delta}\right], \quad (10.47)$$

справедливой для всех $m\leqslant\frac{T}{\tau}+1$. В ней $c(m\tau;\,\varepsilon)$ зависит только от ν, μ, μ_1, μ_2, $m\tau$ и ε из условия (10.35). Неравенство (10.47) есть разностный аналог энергетического неравенства. Оно гарантирует устойчивость рассматриваемой разностной схемы (в тех нормах, которые в него входят). С его помощью устанавливается и сходимость решений u_Δ разностных уравнений (10.5), (10.6), (10.8) к решению задачи (10.1), (10.4). Это можно сделать так же, как и в § 7 для эллиптических уравнений, причем для этого вместо (10.47) достаточно иметь неравенство:

$$\tau\sum_{k=1}^{\left[\frac{T}{\tau}\right]+1}h^n\sum_{\Omega_h^+}\left[u_{\bar t}^2(k)+u_x^2(k)+u_\Delta^2(k)\right]\leqslant$$
$$\leqslant Tc(T,\,\varepsilon)\left[\|\psi_h\|^2+\|\varphi_x\|^2+\|\varphi_h\|^2+\|f_\Delta\|^2_{2,1,Q_T^\Delta}\right], \quad (10.48)$$

являющееся следствием неравенства (10.47). Мы не будем проводить подробно это рассуждение, ибо оно ничем принципиально не отличается от соответствующих рассуждений из предыдущих параграфов. Опишем лишь основные его этапы и получаемые результаты. Из (10.48) выводится равномерная ограниченность норм в $W_2^1(Q_T)$, (а потому и слабая компактность в $W_2^1(Q_T)$) непрерывных полилинейных восполнений u'_Δ решений u_Δ систем (10.5), (10.6), (10.8) при любых h и τ, если только τ/h подчиняется условию (10.35). Далее доказывается, что если какая-либо подпоследовательность из $\{u'_\Delta\}$ слабо сходится в $W_2^1(Q_T)$ к некоторой функции $u(x,t)$, то $u(x,t)$ есть об. решение задачи (10.7) из класса $W_2^1(Q_T)$. Из этих двух фактов и теоремы единственности 3.1 (если, конечно, выполнены ее условия) следует, что вся последовательность $\{u'_\Delta\}$ сходится слабо в $W_2^1(Q_T)$ (и сильно в $L_2(Q_T)$) к решению $u(x, t)$. При этом рассуждении мы одновременно с вычислением приближенных решений задачи (10.7) доказываем и теорему существования об. решения из $W_2^1(Q_T)$.

Замечание 10.2. Оценку вида (10.47) можно получить и при несколько ином, чем (10.35), условии на τ/h, а именно при условии

$$\sqrt{2\mu n}\,\frac{\tau}{h} = 1 - \varepsilon, \tag{10.49}$$

где ε — какое-либо из (0, 1). Для этого надо оценить $h^n \sum\limits_{\Omega_h^+} j_3(m)$ снизу, исходя из представления (10.30) для $j_2(m)$, так:

$$h^n \sum_{\Omega_h^+} j_2(m) \geqslant \frac{\nu}{2}\| u_x(m+1)\|^2 + \frac{\nu}{2}\| u_x(m)\|^2 -$$
$$- \frac{\mu}{2}\| \delta u_x(m)\|^2 - \frac{\mu_2}{2}\tau\| u_x(m)\|^2 \geqslant \frac{\nu}{2}\| u_x(m+1)\|^2 +$$
$$+ \frac{\nu}{2}\| u_x(m)\|^2 - 2\mu n\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\|u_{\bar t}(m+1)\|^2 - \frac{\mu_2\tau}{2}\| u_x(m)\|^2. \tag{10.50}$$

Метод конечных разностей позволяет проследить за увеличением гладкости обобщенных решений из $W_2^1(Q_T)$ задачи (10.7) по мере увеличения гладкости всех данных задачи и увеличения порядка их согласования. Это довольно кропотливо технически, но прозрачно в идейном отношении. Такое исследование было проведено мною и изложено в книге [12_2]. Оно позволило выяснить те истинные связи, которые имеют место в задаче (10.7) между гладкостью данных и гладкостью решения. Кстати отметим, что этот путь был первым, с помощью которого удалось исследовать разрешимость задачи (10.7) в различных функциональных пространствах при разумных предположениях о данных задачи. Он же (т. е. метод конечных разностей) дает и сравнительно простой способ фактического вычисления решения на конечном интервале времени.

Он применим и для определения решений начально-краевых задач при других классических краевых условиях. Более того, без каких-либо существенных изменений с его помощью исследуются так называемые сильно гиперболические системы. Такими системами мы назвали системы вида

$$u_{tt} - \mathscr{L}u = f,$$

в которых $\mathscr{L}$ есть сильно эллиптический оператор с симметрической главной частью. К ним относится ряд важных систем математической физики, например, система динамической теории упругости. Некоторые из этих систем мы рассмотрим в § 11.

Для задачи (10.7) нами была построена и неявная разностная схема, сходящаяся при любых соотношениях между шагами по x и t. Ее частным случаем является схема (6.99) при $\gamma = 1/2$, рассмотренная в п. 3 § 6. Эта схема пригодна не только для уравнений (10.7), но и для самых общих гиперболических уравнений, содержащих члены вида $\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x_i}$. Приведем ее для задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\sum_{i=1}^{n} a_{0i}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x_i} - \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t)\,u = f(x, t), \quad (10.51)$$

$$u|_{S_T} = 0, \qquad u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \quad (10.52)$$

Введем обозначения:

$$\frac{\tilde{\Delta}^2 u}{\Delta t\, \Delta x_i} = \frac{1}{4}(u_t + u_{\bar{t}})_{x_i} + \frac{1}{4}(u_t + u_{\bar{t}})_{\bar{x}_i}$$

и

$$\frac{\tilde{\Delta}^2 u(x, t)}{\Delta x_i\, \Delta x_j} = \frac{1}{2}u_{x_i\bar{x}_j}(x,\ t+\tau) + \frac{1}{2}u_{x_i\bar{x}_j}(x,\ t-\tau).$$

Уравнение (10.51) заменяется на следующее:

$$u_{t\bar{t}} + 2\sum_{i=1}^{n} a_{0i}\frac{\tilde{\Delta}^2 u}{\Delta t\, \Delta x_i} - \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}\frac{\tilde{\Delta}^2 u}{\Delta x_i\, \Delta x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{\bar{x}_i} + a_0 u_{\dot{t}} + au = f_\Delta. \quad (10.53)$$

Оно должно выполняться для $x \in \Omega_h$ и $t = t_k$, $k = 1, \ldots$ $\ldots, N$. К нему присоединяются условия (10.27). Доказано, что эта схема устойчива (и следовательно, в пределе приводит к решению задачи (10.51), (10.52)) при любой величине отношения $\frac{\Delta t}{\Delta x_i}$ (Δx_i можно, как и всюду, брать разными). Для ее решений u_Δ справедливо неравенство вида (10.47), причем выводится оно много проще, чем неравенство (10.47) для схемы (10.26), (10.27). Заметим, что для задачи (10.51), (10.52) схема (10.26), (10.27) дает расходящийся процесс при любой величине отношения $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \text{const}$ (если, конечно, $a_{0i} \not\equiv 0$).

§ 11. Сильная сходимость, системы, задачи дифракции

1. О сильной сходимости. В данной главе при предельных переходах от решений u_Δ разностных уравнений к решениям той или иной краевой задачи мы ограничились доказательством слабой сходимости в энергетических нормах. Так, например, в § 7 для задачи Дирихле (7.1) было доказано, что интерполяции $u'_\Delta(x)$ сходятся сильно в $L_2(\Omega)$ к решению $u(x)$, а их производные $\frac{\partial u'_\Delta(x)}{\partial x_i}$ сходятся слабо в $L_2(\Omega)$ к $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Покажем, как можно при тех же предположениях о данных задачи доказать сильную сходимость в $L_2(\Omega)\, \tilde{u}_{x_i}$ к $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Делается это принципиально так же, как в методе Галеркина (см. конец § 8 гл. II). А именно, возьмем решение $u(x)$ задачи (7.1). Так как оно есть элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а $\dot{C}^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то существует последовательность функций $u^m(x)$ из $\dot{C}^\infty(\overline{\Omega})$, $m = 1, 2, \ldots,$ для которой $\|u^m - u\|_{2,\Omega} + \left\| \frac{\partial u^m}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{2,\Omega} \leqslant \frac{1}{m}$. Пусть приближенные решения u_h вычислены для сеток Ω_h с $h = (h_1, \ldots, h_n) \to$ $\to 0$. Будем ради несущественных упрощений в записи считать, что элементарные ячейки $\omega_{(kh)}$ имеют одинаковые длины ребер: $h_1 = \ldots = h_n \equiv h$, а индекс «$k$» у h использовать для обозначения номера сетки Ω_{h_k} в последовательности сгущающихся сеток $\{\Omega_{h_k}\}$, так что при $k\to\infty$ шаг сетки h_k, убывая, стремится к нулю. Для каждой функции $u^m(x)$, продолженной нулем вне Ω, сеточная функция $u^m_{h_k}$, равная ей в точках сетки с шагом h_k, при h_k, не превосходящих некоторого $h(m)$, обращается в нуль на S_{h_k} и вне $\overline{\Omega}_{h_k}$, и $\left\|u^m-\tilde{u}^m_{h_k}\right\|_{2,\Omega}+\left\|\frac{\partial u^m}{\partial x}-\tilde{u}^m_{h_k x}\right\|_{2,\Omega}\leqslant\frac{1}{m}$. В силу неравенства треугольника

$$\left\|u-\tilde{u}^m_{h_k}\right\|_{2,\Omega}+\left\|\frac{\partial u}{\partial x}-\tilde{u}^m_{h_k x}\right\|_{2,\Omega}\leqslant\frac{2}{m}\quad\text{для}\quad h_k\leqslant h(m). \tag{11.1}$$

Возьмем интегральные тождества, которым удовлетворяют $u(x)$ и u_h:

$$\mathscr{M}(u,\eta)\equiv\mathscr{L}(u,\eta)-\mathscr{F}(f_i,f,\eta)=0, \tag{11.2}$$

где

$$\mathscr{L}(u,\eta)=\int\limits_\Omega\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}-a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta-au\eta\right)dx,$$

а

$$\mathscr{F}(f_i,f,\eta)=\int\limits_\Omega\left(f_i\frac{\partial\eta}{\partial x_i}-f\eta\right)dx,$$

и

$$\mathscr{M}_h(u_h,\eta_h)\equiv\mathscr{L}_h(u_h,\eta_h)-\mathscr{F}_h(f_i,f,\eta_h)=0, \tag{11.3}$$

где

$$\mathscr{L}_h(u_h,\eta_h)=\int\limits_\Omega(a_{ij}\tilde{u}_{hx_i}\tilde{\eta}_{hx_j}-a_i\tilde{u}_{hx_i}\tilde{\eta}_h-a\tilde{u}_h\tilde{\eta}_h)dx,$$

а

$$\mathscr{F}_h(f_i,f,\eta_h)=\int\limits_\Omega(f_i\tilde{\eta}_{hx_i}-f\tilde{\eta}_h)\,dx\ ^{*)}.$$

Из (11.1)—(11.3) и наших предположений о данных задачи, указанных в § 7, следует:

$$\left|\mathscr{M}_{h_k}\left(u^m_{h_k},u^m_{h_k}\right)\right|\leqslant\frac{c}{m}\quad\text{при}\quad h_k\leqslant h(m). \tag{11.4}$$

---

*) Здесь и ниже мы пишем значок «h» у u_{hx_i}, чтобы подчеркнуть, для какого шага вычислены u_{x_i}. Выше мы его опускали.

Подсчитаем, используя (11.3) и считая $h_k \leqslant h(m)$, выражение

$$\mathscr{L}_{h_k}\left(u_{h_k} - u^m_{h_k},\ u_{h_k} - u^m_{h_k}\right) =$$
$$= \mathscr{L}_{h_k}\left(u_{h_k}, u_{h_k}\right) - \mathscr{L}_{h_k}\left(u_{h_k}, u^m_{h_k}\right) - \mathscr{L}_{h_k}\left(u^m_{h_k}, u_{h_k}\right) +$$
$$+ \mathscr{L}_{h_k}\left(u^m_{h_k}, u^m_{h_k}\right) = \mathscr{F}_{h_k}\left(f_i, f, u_{h_k}\right) - \mathscr{F}_{h_k}\left(f_i, f, u^m_{h_k}\right) +$$
$$+ \left[-\mathscr{L}_{h_k}\left(u_{h_k}, u^m_{h_k}\right) + \int_\Omega a_i\left[\tilde{u}^m_{h_k x_i}\tilde{u}_{h_k} - \tilde{u}_{h_k x_i}\tilde{u}^m_{h_k}\right] dx\right] +$$
$$+ \left[\mathscr{M}_{h_k}\left(u^m_{h_k}, u^m_{h_k}\right) + \mathscr{F}_{h_k}\left(f_i, f, u^m_{h_k}\right)\right] =$$
$$= \mathscr{F}_{h_k}\left(f_i, f, u_{h_k} - u^m_{h_k}\right) + \int_\Omega a_i\left[\tilde{u}^m_{h_k x_i}\tilde{u}_{h_k} - \tilde{u}^m_{h_k x_i}\tilde{u}^m_{h_k} +\right.$$
$$\left. + \tilde{u}^m_{h_k x_i}\tilde{u}^m_{h_k} - \tilde{u}_{h_k x_i}\tilde{u}^m_{h_k}\right] dx + \mathscr{M}_{h_k}\left(u^m_{h_k}, u^m_{h_k}\right). \qquad (11.5)$$

В силу предположения (7.2), а также (11.4) и свойств a_i, f_i и f, из (11.5) получим

$$\nu_1 \left\| \tilde{u}_{h_k x} - \tilde{u}^m_{h_k x} \right\|^2_{2, \Omega} \leqslant$$
$$\leqslant \| f \|_{2, \Omega} \cdot \left\| \tilde{u}_{h_k x} - \tilde{u}^m_{h_k x} \right\|_{2, \Omega} + \| f \|_{2, \Omega} \left\| \tilde{u}_{h_k} - \tilde{u}^m_{h_k} \right\|_{2, \Omega} +$$
$$+ c_1 \left\| \tilde{u}^m_{h_k x} \right\|_{2, \Omega} \left\| \tilde{u}_{h_k} - \tilde{u}^m_{h_k} \right\|_{2, \Omega} + c_1 \left\| u^m_{h_k x} - \tilde{u}_{h_k x} \right\|_{2, \Omega} \left\| \tilde{u}^m_{h_k} \right\|_{2, \Omega} +$$
$$+ \frac{c}{m} \leqslant c_2 \left(\left\| \tilde{u}_{h_k x} - \tilde{u}^m_{h_k x} \right\|_{2, \Omega} + \left\| \tilde{u}_{h_k} - \tilde{u}^m_{h_k} \right\|_{2, \Omega} \right) + \frac{c}{m} \leqslant$$
$$\leqslant c_3 \left\| \tilde{u}_{h_k x} - \tilde{u}^m_{h_k x} \right\|_{2, \Omega} + \frac{c}{m}. \qquad (11.6)$$

При этом мы использовали неравенство (3.19) и равномерную ограниченность $\left\| \tilde{u}^m_{h_k x} \right\|$ и $\left\| \tilde{u}^m_{h_k} \right\|$. Неравенство (11.6) выведено для всех $m = 1, 2, \ldots$ и всех $h_k \leqslant h(m)$. Из него и (11.1) видно, что $\tilde{u}_{h_k x_i}$ сходятся в $L_2(\Omega)$ к $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

2. **Сильно эллиптические системы.** Эти системы были рассмотрены в § 1 гл. V. Здесь мы ограничимся системами второго порядка

$$(\mathscr{L}u)_k \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{kl}_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right) + b^{kl}_i \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + c^{kl} u_l = f_k, \qquad (11.7)$$
$$k, l = 1, \ldots, N, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

причем предположим, что для них выполнено неравенство

$$a_{ij}^{kl}\gamma_{jl}\gamma_{ik} \geqslant \nu \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\gamma_{ik}^2, \qquad \nu = \mathrm{const} > 0, \quad a_{ij}^{kl} = a_{ji}^{kl} \tag{11.8}$$

при любых вещественных γ_{ik}. Условие (11.8) является более ограничительным, чем условие (1.4) гл. V сильной эллиптичности. Оно существенно облегчает доказательство устойчивости разностной схемы, которую мы используем для нахождения решения $u = (u_1, \ldots, u_N)$ системы (11.7), удовлетворяющего краевому условию

$$u|_S = 0. \tag{11.9}$$

Эта схема приводит к решению задачи (11.7), (11.9) и в общем случае, когда условие (11.8) заменено условием (1.4) гл. V. Однако доказательство этого факта довольно длинное, и мы его излагать здесь не будем. Напротив, распространение следующих ниже рассуждений на случай систем любого порядка $2m$ (к которым, в частности, относится общее эллиптическое уравнение порядка $2m$) не представляет труда.

Разобьем всё пространство R_n изменения x гиперплоскостями $x_i = k_i h_i$, $h_i > 0$, $k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и воспользуемся введенными выше обозначениями точечных множеств Ω_h, $\overline{\Omega}_h$, S_h, Ω_h^+. Систему (11.7) заменим системой разностных уравнений

$$\left(a_{ijh}^{kl} u_{lx_j}\right)_{\bar{x}_i} + b_{ih}^{kh} u_{lx_i} + c_h^{kl} u_{lh} = f_{kh}, \tag{11.10}$$

которая должна выполняться во всех вершинах Ω_h, а краевое условие — равенствами

$$u_{lh}|_{S_h} = 0. \tag{11.11}$$

Сеточные функции $a_{ijh}^{kl}, \ldots, f_{kh}$ построены по $a_{ij}^{kl}, \ldots, f_k$ по тому же правилу, что и в § 7. К условию (11.8) добавим предположение

$$a_{ij}^{kl}\gamma_{jl}\gamma_{ik} - b_i^{kl}\gamma_{il}\gamma_{0k} - c^{kl}\gamma_{0l}\gamma_{0k} \geqslant \nu_1 \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\gamma_{ik}^2, \quad \nu_1 > 0. \tag{11.12}$$

Неравенство (11.12) должно выполняться для всех вещественных γ_{ik}, $i=0, \ldots, n$, $k=1, \ldots, N$. Оно гарантирует теорему единственности для задачи (11.7), (11.9). Кроме того, как и всюду, коэффициенты (11.7) считаем ограниченными функциями, а $f \in L_2(\Omega)$. Покажем однозначную разрешимость системы (11.10), (11.11). Для этого умножим (11.10) на u_{kh} и результат просуммируем по k от 1 до N и по всем точкам Ω_h (или, что то же, по всем точкам $\bar{\Omega}_h$, считая u_{kh} продолженными нулем вне $\bar{\Omega}_h$). После этого воспользуемся формулой (2.11) для преобразования главных членов. Это даст равенство

$$\Delta_h \sum_{\Omega_h^+} \left[a_{ijh}^{kl} u_{lx_j} u_{kx_i} - b_{ih}^{kl} u_{lx_i} u_{kh} - c_h^{kl} u_{lh} u_{kh}\right] = -\Delta_h \sum_{\Omega_h^+} f_{kh} u_{kh}. \tag{11.13}$$

Из него и предположения (11.12) следует

$$\nu_1 \Delta_h \sum_{\Omega_h^+} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} (u_{kx_i})^2 \leqslant -\Delta_h \sum_{\Omega_h^+} f_{kh} u_{kh}. \tag{11.14}$$

Если система (11.10) однородна, т. е. $f_{kh}=0$, то, как видно из (11.14), $u_{kx_i}=0$ для всех k и i, а отсюда и (11.11) вытекает, что единственным решением u_{kh} такой системы является $u_{kh}=0$. Тем самым доказано, что система (11.10), (11.11) однозначно разрешима при любых f_{kh}. Более того, из (11.14) и неравенства (3.19), справедливого для любой функции u_{kh}, следует оценка

$$\Delta_h \sum_{\Omega_h^+} \sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{n} (u_{kx_i})^2 + (u_{kh})^2\right] \leqslant c \Delta_h \sum_{\Omega_h^+} \sum_{k=1}^{N} (f_{kh})^2 \tag{11.15}$$

с постоянной c, не зависящей от h, которая гарантирует устойчивость разностной схемы в «энергетической» норме. На ее основе сходимость u_{kh} к решению u_k задачи (11.7), (11.9) доказывается так же, как это было сделано в § 7 для случая одного уравнения

3. Уравнения теории упругости. Рассмотрим задачу о равновесии изотропного упругого тела при условиях жесткого закрепления, т. е. задачу об определении вектора $u = (u_1, u_2, u_3)$ упругих смещений, как решения системы

$$(\mathscr{L}u)_i \equiv \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ik}(u)}{\partial x_k} = -f_i(x), \quad i = 1,\ 2, 3, \tag{11.16}$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$u|_S = 0. \tag{11.17}$$

Напомним (см. § 1 гл. V), что

$$\tau_{ik}(u) = 2\mu \cdot \varepsilon_{ik}(u) + \delta_i^k \lambda \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{ll}(u), \quad \varepsilon_{ik}(u) = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \tag{11.18}$$

а λ и μ — положительные постоянные. Пусть $f \in L_2(\Omega)$, а Ω — ограниченная область R_3. Сопоставим задаче (11.16), (11.17) разностную схему

$$\sum_{k=1}^{3} \left(\tau_{ik}^h(u_h)\right)_{\bar{x}_k} = -f_{ih}, \tag{11.19}$$

в которой $\tau_{ik}^h(u_h)$ связаны с $\varepsilon_{ik}^h(u_h)$ равенствами (11.18), f_{ih} строятся по f_i так же, как в § 7, а $\varepsilon_{ik}^h(u_h) = \frac{1}{2}\left(u_{ix_k} + u_{kx_i}\right)$. Уравнения (11.19) должны выполняться во всех точках Ω_h, а в точках S_h

$$u_h|_{S_h} = 0. \tag{11.20}$$

Для доказательства однозначной разрешимости системы (11.19), (11.20) и устойчивости взятой схемы умножим (11.19) на u_{ih} и полученные равенства просуммируем по i от 1 до 3 и по всем точкам $\bar{\Omega}_h$ *). После

*) Здесь, как и во всех рассмотренных нами задачах с первым краевым условием, удобно функции u_{ih} считать доопределенными нулем вне $\bar{\Omega}_h$ и все суммы $\Delta_h \sum$ записывать как суммы по точкам $\bar{\Omega}_h$.

этого, используя формулу (2.11), преобразуем результирующее равенство к виду

$$\Delta_h \sum_{\bar{\Omega}_h} \tau_{ik}^h(u_h) u_{ix_k} = \Delta_h \sum_{\bar{\Omega}_h} f_{ih} u_{ih}. \qquad (11.21)$$

Так как τ_{ik}^h и ε_{ik}^h не меняются от перестановки индексов i и k, соотношение (11.21) можно переписать так:

$$\Delta_h \sum_{\bar{\Omega}_h} \tau_{ik}^h(u_h)\, \varepsilon_{ik}^h(u_h) = \Delta_h \sum_{\bar{\Omega}_h} f_{ih} u_{ih}. \qquad (11.22)$$

В силу положительности констант μ и λ, левая часть (11.22) неотрицательна:

$$\tau_{ik}^h(u_h)\, \varepsilon_{ik}^h(u_h) = 2\mu \sum_{i,\,k=1}^{3} (\varepsilon_{ik}^h(u_h))^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(u_h)\right)^2. \qquad (11.23)$$

Покажем, что она эквивалентна величине $\left(\| u_h \|_{2,\bar{\Omega}_h}^{(1)}\right)^2$. Для этого снова воспользуемся формулой (2.11) суммирования по частям, считая u_{kh} распространенными нулем вне $\bar{\Omega}_h$. Благодаря ей

$$\Delta_h \sum_{\bar{\Omega}_h} \varepsilon_{ik}^h(u_h)\, \varepsilon_{ik}^h(u_h) =$$

$$= \frac{1}{4} \Delta_h \sum_{\bar{\Omega}_h} \sum_{i,\,k} \left[(u_{ix_k})^2 + 2u_{ix_k} u_{kx_i} + (u_{kx_i})^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \Delta_h \sum_{\bar{\Omega}_h} \sum_{i,\,k} \left[(u_{ix_k})^2 - u_{i\bar{x}_k\bar{x}_i} u_k \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \Delta_h \sum_{\bar{\Omega}_h} \sum_{i,\,k} \left[(u_{ix_k})^2 + u_{i\bar{x}_i} u_{k\bar{x}_k} \right] \geqslant \frac{1}{2} \Delta_h \sum_{\bar{\Omega}_h} \sum_{i,\,k} (u_{ix_k})^2 \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2} \| u_x \|_{2,\bar{\Omega}_h}^2. \qquad (11.24)$$

Из (11.22)—(11.24) и (11.20) следует, что однородная система (11.19), (11.20) имеет только нулевое решение, а потому неоднородная система (11.19), (11.20) однозначно разрешима при любых f_{ih}. Кроме того, из этих же соотношений и неравенства (3.19) гл. VI вытекает оценка

$$\Delta_h \sum_{\overline{\Omega}_h} |u_h|^2 + \|u_x\|^2_{2,\overline{\Omega}_h} \leqslant c\|f\|^2_{2,\Omega_h} \leqslant c_1, \tag{11.25}$$

гарантирующая устойчивость схемы (11.19), (11.20) и позволяющая доказать, что u_h дают в пределе при $h_i \to 0$ решение u задачи (11.16), (11.17).

Другие краевые задачи для (11.16) могут быть исследованы в таком же духе. Но для них значительно сложнее вывод неравенства (11.24) (см. [30]). Рассуждения данного пункта легко обобщаются на случай анизотропных сред, причем их коэффициенты могут иметь разрывы первого рода. В частности, коэффициенты λ и μ в (11.18) могут быть произвольными положительными кусочно-постоянными функциями $x \in \overline{\Omega}$.

4. О нестационарных краевых задачах для систем параболического и гиперболического типов. Классические начально-краевые задачи для так называемых сильно параболических систем исследуются с помощью метода конечных разностей, в основном так же, как это было сделано для одного параболического уравнения в § 9. Такие системы имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathscr{L}u = f, \tag{11.26}$$

где $\mathscr{L}$ — сильно эллиптический оператор (см. § 2 гл. V).

Исследования § 10, относящиеся к одному гиперболическому уравнению второго порядка, без каких-либо принципиальных изменений обобщаются на так называемые сильно гиперболические системы. Эти системы имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathscr{L}u = f, \tag{11.27}$$

где $\mathscr{L}$ — сильно эллиптический оператор с симметрической главной частью (см. § 2 гл. V). К ним относится, например, система динамической теории упругости.

5. Уравнения типа Шредингера. Такие уравнения (или системы) имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\mathscr{L}(t)\,u + f(t), \tag{11.28}$$

где $\mathscr{L}(t)$ — семейство симметрических операторов, зависящих от параметра t, а $i=\sqrt{-1}$. Изложим лишь общий план их исследования с помощью метода конечных разностей, не конкретизируя вид оператора $\mathscr{L}$. Обозначим через H комплексное гильбертово пространство, в котором действуют $\mathscr{L}(t)$. Предположим, что при любом t (из того интервала оси t, который нас интересует) оператор $\mathscr{L}(t)$ является самосопряженным, и область его определения $\mathscr{D}(\mathscr{L})$ не зависит от t. Рассмотрим для (11.28) задачу Коши, причем ради экономии места будем считать $f\equiv 0$. Итак, пусть требуется найти при $t\geqslant 0$ функцию $u(t)$ со значениями в H, которая удовлетворяет уравнениям

$$\frac{du}{dt}=i\mathscr{L}(t)\,u,\qquad u\,|_{t=0}=\varphi. \tag{11.29}$$

Возьмем для (11.29) разностную схему

$$\frac{u_h(t+h)-u_h(t)}{h}=\frac{i}{2}\mathscr{L}(t)\,[u_h(t+h)+u_h(t)],\quad u_h(0)=\varphi_h. \tag{11.30}$$

Уравнения (11.30) должны выполняться в точках $t=t_k=kh$, $k=0,\ 1,\ \ldots$ Они однозначно определяют u_h в этих точках сетки, ибо из (11.30) имеем

$$\left(E-\frac{i}{2}\,\mathscr{L}(t_k)\right)u_h(t_{k+1})=\left(E+\frac{i}{2}\mathscr{L}(t_k)\right)u_h(t_k),\ k=0,1,\ldots,$$

и в силу самосопряженности $\mathscr{L}(t)$ оператор $E-\frac{i}{2}\mathscr{L}(t_k)$ имеет ограниченный обратный, так что

$$u_h(t_{k+1})=\left(E-\frac{i}{2}\mathscr{L}(t_k)\right)^{-1}\left(E+\frac{i}{2}\mathscr{L}(t_k)\right)u_h(t_k)\,^{*}). \tag{11.31}$$

Схема (11.30) сохраняет главное свойство уравнения (11.29): норма его решений $\|u(t)\|$ не зависит от t. Справедливость этого для $u_h(t_k)$ видна из (11.31): оператор $\left(E-\frac{i}{2}\mathscr{L}(t_k)\right)^{-1}\left(E+\frac{i}{2}\mathscr{L}(t_k)\right)\equiv A(t_k)$ является преобразованием Кэли самосопряженного оператора $\mathscr{L}(t_k)$ и потому изометричен на $\mathscr{D}(\mathscr{L})$, т. е. $(A(t_k)v,\ A(t_k)w)=(v,w)$ для $\forall v$ и w из $\mathscr{D}(\mathscr{L})$. Если $\varphi\in\mathscr{D}(\mathscr{L})$, то ра-

*) Здесь E — единичный оператор в H.

венства (11.31) определяют $u_h(t_{k+1})$ при всех $k=0, 1, \ldots$ и $u_h(t_{k+1}) \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$. Если же φ есть произвольный элемент H, то формулу (11.31) надо заменить формулой

$$u_h(t_{k+1}) = \hat{A}(t_k)\, u_h(t_k), \tag{11.32}$$

где $\hat{A}(t_k)$ есть изометрическое расширение оператора $A(t_k)$ на всё H. В любом из этих случаев мы имеем равенство

$$\| u_h(t_{k+1}) \| = \| u_h(t_k) \|, \tag{11.33}$$

которое показывает устойчивость разностной схемы (11.30) в норме H. Пользуясь этим соотношением, можно выполнить предельный переход по $h \to 0$ и доказать существование у задачи (11.29) по крайней мере одного обобщенного решения $u(t)$ из пространства $H_1 = H \times [0, T]$. Под пространством H_1 понимается гильбертово пространство, элементами которого являются функции $v(t)$ со значениями из H, определенные и измеримые на отрезке $t \in [0, T]$ и имеющие конечную норму

$$\| v \|_{H_1} = \left[\int_0^T \| v(t) \|_H^2 \, dt \right]^{1/2}.$$

При некоторых предположениях о гладкости $\mathscr{L}(t)$, как функции t, устанавливается единственность таких решений у задачи (11.29) ([$12_{7,8}$]). Делается это примерно так же, как в § 2 гл. III для параболических уравнений и в § 6 гл. IV для гиперболических уравнений. Метод конечных разностей позволяет проследить и за тем, как улучшаются свойства об. решений задачи (11.29) в связи с улучшением φ и гладкости $\mathscr{L}(t)$ по t (делается это по тому же плану, который описан в конце § 4 гл. IV). Для абстрактных уравнений (11.29), когда пространство H и оператор $\mathscr{L}(t)$ не конкретизированы, «улучшение» надо понимать как принадлежность φ к $\mathscr{D}(A)$ или к $\mathscr{D}(A^\alpha)$ с каким-либо α.

В рассмотренной нами схеме (11.30) аппроксимирована только производная по t. Вместе с нею можно аппроксимировать и $\mathscr{L}(t)$ в (11.30), но так, чтобы приближения $\mathscr{L}_h(t)$ были самосопряженными операторами в тех пространствах, в которых они определяются. Если H есть функциональное пространство с элементами $u(x)$, а $\mathscr{L}(t)$ — симметричный дифференциальный оператор, содержащий всевозможные производные по x_i и имеющий коэффициенты, зависящие от (x, t), то в качестве $\mathscr{L}_h(t)$ можно взять какие-либо симметричные разностные операторы, аппроксимирующие $\mathscr{L}(t)$ и действующие на сеточные функции, подчиненные краевым условиям, соответствующим краевым условиям задачи.

6. О задачах дифракции. В § 4 гл. V мы показали, что задачи дифракции допускают включение в класс задач, рассмотренных в главах II—IV. В частности, для их решения могут быть использованы разностные схемы, исследованные в данной главе. Надо только иметь в виду, что при наличии двух или более разных сред коэффициенты в интегральных тождествах, соответствующих таким задачам, будут иметь разрывы по крайней мере на границах раздела этих сред, и потому кусочно-постоянные интерполяции соответствующих им сеточных функций (они должны быть равномерно ограниченными функциями) будут сходиться к ним не равномерно, а лишь почти всюду. Но такой сходимости достаточно для возможности предельного перехода по $h_i \to 0$ (см. [$12_{5, 10}$] и др.).

Для отдельных классов задач дифракционного типа проведен более детальный анализ возможностей конечно-разностного метода. Так, в работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского (см. о них в [21]) построены для одномерных параболических уравнений с разрывными коэффициентами так называемые схемы повышенной точности, позволяющие добиться некоторого улучшения сходимости u_Δ к u.

§ 12. Аппроксимационные методы

Желание увязать метод Галеркина с методом конечных разностей привело к более общей концепции, включающей в себя оба эти метода как некоторые частные ее реализации. Это оказалось возможным опять-таки благодаря неклассической трактовке краевых задач, сводящей решение этих задач к определению функций, удовлетворяющих соответствующему интегральному тождеству и принадлежащих определенному функциональному пространству. Покажем, как создавалась эта более общая концепция, на примере задачи

$$\Delta u = f(x), \qquad u|_S = 0. \tag{12.1}$$

Её обобщенное решение $u(x)$ из класса $W_2^1(\Omega)$ должно быть элементом $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющим интегральному тождеству

$$[u, \eta] \equiv \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\, dx = -\int\limits_\Omega f \cdot \eta \, dx \equiv -(f, \eta) \tag{12.2}$$

при $\forall \eta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

В методе Галеркина (в его первоначальной форме, идущей от работ Галеркина) берется последовательность конечномерных пространств $\mathfrak{M}_N$ (N — размерность $\mathfrak{M}_N$), аппроксимирующих пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, в котором рассматривается тождество (12.2). Эти пространства $\mathfrak{M}_N$ являются подпространствами $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, причем $\mathfrak{M}_N \subset \mathfrak{M}_{N+1}$. В каждом из $\mathfrak{M}_N$ ищется функция u^N, удовлетворяющая тождеству (12.2), в котором $\eta(x)$ есть произвольный элемент $\mathfrak{M}_N$.

Для ее определения вводится в $\mathfrak{M}_N$ базис $\{\varphi_k\}$, $k = 1, \ldots, N$, и u^N ищется в виде $u^N(x) = \sum\limits_{k=1}^N c_k^N \varphi_k(x)$. Тождества (12.2) дают для определения коэффициентов c_k^N, $k = 1, \ldots, N$, систему N линейных алгебраических уравнений, из которых и находятся c_k^N. Из рассуждений § 8 гл. II, относящихся к исследованию метода Галеркина, легко усмотреть, что требование включения $\mathfrak{M}_N$ в $\mathfrak{M}_{N+1}$ можно отбросить. Действительно, в первой части этих рассуждений, где доказывается однозначная разрешимость систем, определяющих c_k^N, и дается оценка норм $\| u^N \|_{2,\Omega}^{(1)}$, оно не используется. Во вторую же часть, где осуществляется предельный переход по $N \to \infty$, надо внести лишь следующее видоизменение. Пусть последовательность $\{u^{N_k}\}$ сходится слабо в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ к $u(x)$ (т. е.

u^{N_k} и $\frac{\partial u^{N_k}}{\partial x_i}$ сходятся слабо в $L_2(\Omega)$ к u и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ соответственно). Возьмем произвольный элемент $\eta(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и последовательность $\{\eta^{N_k}\}$, сходящуюся к η сильно в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и такую, что $\eta^{N_k} \in \mathfrak{M}_{N_k}$ при всех k. Это возможно, ибо по предположению $\{\mathfrak{M}_{N_k}\}$ аппроксимируют $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Для пары u^{N_k} и η^{N_k} справедливо равенство (12.2). Переходя в нем к пределу по $k \to \infty$, получим (12.2) для u и η. Таким образом, мы показали, что условие: $\mathfrak{M}_N \subset \mathfrak{M}_{N+1}$ можно отбросить. В пределах же каждого $\mathfrak{M}_N$ базис $\{\varphi_k\}$, $k = 1, \dots, N$, можно выбирать произвольно: функция $u^N(x)$ от него не зависит (ибо, как легко видеть, существует лишь одна функция в $\mathfrak{M}_N$, для которой выполняется тождество (12.2) при любой η из $\mathfrak{M}_N$). Это замечание позволяет построить конечномерные аппроксимации задачи (12.1), которые естественно классифицировать как аппроксимации конечно-разностного типа. В них приближенные решения u_h определяются их значениями в вершинах сеток Ω_h, причем сами u_h вычисляются как решения линейных алгебраических систем, связывающих между собою значения u_h лишь в нескольких соседних точках. Такие аппроксимации для задачи (12.2) строятся следующим образом: берутся клеточные разбиения пространства R_n и соответствующие им сетки Ω_h (напомним, что замкнутая область $\overline{\Omega}_h \subset \overline{\Omega}$). Каждой сеточной функции η_h, определенной на вершинах $\overline{\Omega}_h$ и равной нулю на S_h, ставится в соответствие какая-либо интерполяция, принадлежащая пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Из интерполяций, определенных мною в § 3 данной главы, этим свойством обладает интерполяция $\eta_h'(x)$. Рассмотрим, для определенности, ее. В качестве $\mathfrak{M}_h$ возьмем совокупность всех таких интерполяций $\eta_h'(x)$. Размерность $\mathfrak{M}_h$ равна числу вершин, принадлежащих сетке Ω_h. Множества $\mathfrak{M}_{h(m)}$, $h(m) \to 0$, могут быть рассмотрены как конечномерные подпространства пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Они аппроксимируют $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в норме этого пространства. Действительно, в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ плотны функции из $\dot{C}^\infty(\Omega)$ и каждую функцию $\eta(x)$ из $\dot{C}^\infty(\Omega)$ можно приблизить в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциями $\eta'_h(x)$ из $\mathfrak{M}_h$, беря за η_h (при достаточно малых h) значения $\eta(x)$ в вершинах сетки $\overline{\Omega}_h$. Приближенные решения $u'_h(x)$ определяются из тождества

$$[u'_h, \eta'_h] = -\int_\Omega f\eta'_h\,dx, \tag{12.3}$$

в котором η'_h есть произвольный элемент $\mathfrak{M}_h$. В качестве базиса в $\mathfrak{M}_h$ можно взять совокупность функций, каждая из которых есть интерполяция вида $(\ )'_h$ сеточной функции, равной единице в какой-либо вершине из Ω_h и нулю в остальных вершинах $\overline{\Omega}_h$. Обозначим эти функции так: $\{\varphi'_{k,h}(x)\}$, где (kh) есть координата той вершины Ω_h, в которой сеточная функция $\varphi_{k,h}$ равна единице (в остальных вершинах $\overline{\Omega}_h$ функция $\varphi_{k,h}$ равна нулю). Сеточная функция u_h, соответствующая искомому решению $u'_h(x)$, может быть представлена как сумма $\sum\limits_{(kh)\in\Omega_h} u_h(kh)\cdot\varphi_{k,h}$, в которой через $u_h(kh)$ обозначено значение u_h в вершине $x=kh$. Если в (12.3) подставить вместо $u'_h(x)$ сумму $\sum\limits_{(kh)\in\Omega_h} u_h(kh)\varphi_{k,h}$, а в качестве $\eta'_h(x)$ взять одну из функций $\varphi'_{k_0,h}(x)$, то (12.3) после взятия всех входящих в него интегралов окажется линейной алгебраической системой, связывающей между собою значение $u_h(k_0h)$ и значения $u_h(kh)$ в тех точках (kh), которые являются вершинами ячеек $\omega_{(kh)}$, имеющими точку (k_0h) в качестве одной из своих вершин. Все эти системы (их число, очевидно, равно числу вершин сетки Ω_h) вместе с равенствами $u_h|_{S_h}=0$ определят разностную схему. Ее однозначная разрешимость, а также устойчивость и сходимость (точнее, сходимость $u'_h(x)$ к $u(x)$) вытекают из того, что сказано по поводу расширенного толкования метода Галеркина, описанного выше.

Если интерполяцию $(\ )'_h$ заменить какой-либо другой допустимой интерполяцией сеточных функций (т. е. такой, которая по сеточной функции η_h дает элемент из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$), то мы придем к другой сходящейся разностной схеме для задачи (12.1). Например, для двумерных задач (т. е. для $n=2$) удобно использовать вместо $\eta'_h(x)$ другую интерполяцию η_h. А именно, каждую из ячеек $\omega_{(kh)}$ разобьем прямой $x_2 = \frac{h_2}{h_1}(x_1 - k_1h_1) + k_2h_2$ на равные треугольники и в каждом из них интерполируем η_h линейной функцией. В результате сеточной функции η_h, равной нулю на S_h, сопоставится непрерывная, кусочно-линейная функция $\hat\eta_h(x)$, равная нулю вне Ω_h. Такие интерполяции $\hat\eta_h(x)$ принадлежат $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если использовать их вместо $\eta'_h(x)$, то (12.3) приведет к простейшей разностной схеме $u_{x_i\bar{x}_i} = f_h$, $u_h|_{S_h} = 0$. Это обстоятельство впервые было отмечено Р. Курантом [7₁]*). Н. А. Стрелковым в работе «Симплициальные распространения сеточных функций и их применения для решения задач математической физики» (Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **11**, 4 (1971), 969—981) этот результат был обобщен на случай любого $n > 2$ (т. е. построены такие кусочно-линейные симплициальные аппроксимации $\hat\eta_h(x)$, которые для задачи (12.1) приводят к разностной схеме

---

*) Более того, в [7₁] Р. Курант высказывает идеи, близкие к тем, которые описаны выше. Однако долгое время они не были известны и не находили воплощения в строго математических исследованиях. Фактически же те или иные их реализации (называемые нередко «методом конечных элементов») появлялись в различных работах инженерного типа (без каких-либо теоретических оправданий). По-видимому, первой после [7₁] работой, в которой разностные уравнения возникли как уравнения Эйлера при решении одной вариационной задачи по методу Ритца, была работа [16₁] 1963 г. Л. А. Оганесяна. В ней автор провел строгое исследование задачи Неймана для бигармонического уравнения. С этого времени начали появляться работы математиков, в которых анализируются и используются связи различных приближенных методов применительно к уравнениям эллиптического типа (см. [16₂,₃] [9], [2], [6], книгу Е. Г. Дьяконова «Разностные методы решения краевых задач», ч. I, изд-во МГУ, 1971).

$\sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i \bar{x}_i} = f_h,\ u_h \big|_{S_h} = 0$). Мы не будем приводить других реализаций описанного нами способа построения разностных схем, отметим лишь, что он применим ко всем краевым и начально-краевым задачам, рассмотренным в данной книге. В ряде работ (см. [16_{1-3}] и др.) его называют вариационно-разностным. Нам кажется, что лучше его назвать проекционно-разностным, ибо описанный способ охватывает не только те задачи, которые решаются с помощью прямых методов вариационного исчисления, но и все те задачи, к которым применим метод Галеркина в различных его вариантах.

Для уравнений с переменными коэффициентами разностные схемы, получаемые этим методом, оказываются обычно сложнее тех, которые рассмотрены в §§ 7—10. Посмотрим, чем отличаются приближения, которые строятся с помощью разностных схем §§ 7—10 (назовем эти схемы классическими), от приближений, возникающих в разных реализациях только что описанного проекционно-разностного метода. Возьмем для примера задачу (7.1) и соответствующую ей разностную схему (7.8), (7.9), или, что то же, схему, определяемую тождеством

$$\int\limits_{\Omega} \left(a_{ij} \tilde{u}_{x_j} \tilde{\eta}_{x_i} - b_i \tilde{u}_{x_i} \tilde{\eta}_h - a \tilde{u}_h \tilde{\eta}_h\right) dx = -\int\limits_{\Omega} f \tilde{\eta}_h \, dx, \tag{12.4}$$

в котором u_h есть искомая, а η_h — произвольная сеточная функция на $\overline{\Omega}_h$, удовлетворяющие условию

$$u_h |_{S_h} = 0, \qquad \eta_h |_{S_h} = 0 \tag{12.5}$$

(см. (7.5), (7.6)). Для этой задачи (7.1) одной из реализаций проекционно-разностного метода будет следующая: приближенное решение v'_h, являющееся интерполяцией вида $(\ )'_h$ сеточной функции v_h, определяется тождеством

$$\int\limits_{\Omega} \left(a_{ij} \frac{\partial v'_h}{\partial x_j} \frac{\partial \eta'_h}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial v'_h}{\partial x_i} \eta'_h - a v'_h \eta'_h\right) dx = -\int\limits_{\Omega} f \eta'_h \, dx, \tag{12.6}$$

в котором η'_h есть интерполяция вида $(\ )'_h$ от произвольной сеточной функции η_h, удовлетворяющей условию (12.5). Искомая функция v'_h также обращается в нуль на границе S_h, так что

$$v'_h\big|_{S_h}=0 \quad \text{и} \quad \eta'_h\big|_{S_h}=0. \tag{12.7}$$

Существенное отличие приближений $\tilde{u}_h$, получаемых по схеме (12.4), (12.5), от приближений v'_h, получаемых по схеме (12.6), (12.7), состоит в том, что v'_h принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, которому принадлежит решение $u(x)$ задачи (7.1), а $\tilde{u}_h$ не принадлежит ему, и, более того, $\tilde{u}_{x_i}(x)$ не являются производными от $\tilde{u}_h(x)$. Таким образом, в схеме (12.4), (12.5) мы выходим за границы пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и аппроксимируем его элементы $u(x)$ и их градиенты $\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ кусочно-постоянными функциями $\tilde{u}_h(x)$ и $\tilde{u}_x(x)=(\tilde{u}_{x_1}(x),\ldots$ $\ldots,\tilde{u}_{x_n}(x))$ так, что $\tilde{u}_h(x)$ и $\tilde{u}_x(x)$ сходятся в $L_2(\Omega)$ (сильно или слабо) к $u(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$ соответственно. (Как было отмечено в §§ 7—10, производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ можно заменять различными разностными отношениями, точнее, их кусочно-постоянными восполнениями, лишь бы была уверенность, что они действительно аппроксимируют эти производные.) Итак, метод конечных разностей в его классической форме (например, в форме (12.4), (12.5)) не включается как частный случай в метод Галеркина даже в расширенном толковании последнего, описанном в этом параграфе.

Но его исследование, приведенное в § 7, нетрудно зааксиоматизировать, переводя на язык теории операторов, и дать тем самым приближенный метод решения операторных уравнений $Au=f$ в гильбертовом (или банаховом) пространстве, отличный от того, что называется методом Галеркина для таких уравнений (см. в связи с этим работу [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Акилов Г. П. и Канторович Л. В.
Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.

2. Бернштейн С. Н.
1) Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа, Харьков, 1908.
2) Собрание сочинений, том III, Изд-во АН СССР, М., 1960.

3. Быховский Э. Б.
Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы, Вестн. ЛГУ, № 13 (1957), 50—66.

4. Вишик М. И.
1) О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Матем. сб. **29**, № 3 (1951), 615—676.
2) Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения, Матем. сб. **39**, № 1 (1956), 51—148.
Вишик М. И. и Ладыженская О. А.
3) Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений, УМН **11**, 6 (1956), 41—97.

5. Ворович И. И.
О существовании решений в нелинейной теории оболочек, Изв. АН СССР, серия матем., 19 (1955), 173—186.

6. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е.
Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений (Обобщенные функции, вып. 3), Физматгиз, М., 1958.

7. Годунов С. К. и Рябенький В. С.
Введение в теорию разностных схем, Физматгиз, М., 1962.

8. Гюнтер Н. М.
1) Sur les intégrales des Stilties et leurs applications aux problemes fondamentaux de la physique mathematique, Труды физ.-матем. института АН СССР **1** (1932), 1—494.
2) О сглаживании функций и связанных с ними задачах, Ученые записки ЛГУ, серия матем. **17** (1937), 51—78.
3) О постановке некоторых задач математической физики, Ученые записки ЛГУ, серия матем. **10** (1940), 12—26.
4) К задаче о малых колебаниях струны, Ученые записки ЛГУ, серия матем. **15** (1948), 23—74.

9. Демьянович Ю. К.
Об оценках скорости сходимости некоторых проекционных методов решения эллиптических уравнений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **8**, № 1 (1968), 79—96.

10. Дергузов В. И. и Якубович В. А.
Существование решений линейных гамильтоновых уравнений с неограниченными операторными коэффициентами, ДАН СССР **151**, № 6 (1963), 1264—1267.

11. Крейн С. Г.
Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», М., 1967.

12. Ладыженская О. А.
1) Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей, автореферат канд. дисс., ЛГУ, март 1949, Ученые записки ЛГУ, серия матем. **23** (1952), 192—246; ДАН СССР **88**, № 4 (1953), 607—610.
2) Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, М., 1953.
3) О методе Фурье для волнового уравнения, ДАН СССР **75**, № 6 (1950), 765—768.
4) О замыкании эллиптического оператора, ДАН СССР **79**, № 5 (1951), 723—725.
5) О решении общей задачи дифракции, ДАН СССР **96**, № 3 (1954), 433—436.
6) О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов, ДАН СССР 97, № 3 (1954), 395—398.
7) О решении нестационарных операторных уравнений, Матем. сб. **39**, № 4 (1956), 491—524.
8) О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики, Матем. сб. **45**, № 2 (1958), 123—158.
9) Простое доказательство разрешимости основных краевых задач и задачи о собственных значениях для эллиптических уравнений, Вестн. ЛГУ, серия матем., мех., астр., № 11 (1955), 23—29.
10) Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными, УМН 12, № 5 (1957), 123—149.
11) Об интегральных оценках, скорости сходимости приближенных методов и решениях в функционалах для линейных эллиптических операторов, Вестн. ЛГУ, № 7 (1958), 60—69.
12) Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, «Наука», М., 1970, второе издание.
Ладыженская О. А. и Уральцева Н. Н.
13) Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», М., 1973, второе издание.

Ладыженская О. А., Солонников В. А. и Уральцева Н. Н.
14) Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», М., 1967.

Ладыженская О. А. и Солонников В. А.

15) Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости, Труды МИАН СССР 59 (1960), 115—173.

13. Люстерник Л. А.

1) Проблема Дирихле, УМН, вып. VIII (1941), 115—124.

Люстерник Л. А. и Соболев В. И.

2) Элементы функционального анализа, «Наука», М., 1965.

14. Марчук Г. И.

Численные методы расчета ядерных реакторов, Атомиздат, М., 1961.

15. Михлин С. Г.

Прямые методы в математической физике, Гостехиздат, М. — Л., 1950.

16. Оганесян Л. А.

1) Численный расчет плит, сб. «Решение инженерных задач на ЭВМ», Л., ЦБТИ (1963), 84—97.

Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Самокиш Б. А.

2) Вариационно-разностные схемы в задачах электронной оптики, Труды 3-го Всесоюзного семинара по электронной оптике, Новосибирск, 1970, 163—168.

Оганесян Л. А., Руховец Л. А.

3) О вариационно-разностных схемах для линейных эллиптических уравнений 2-го порядка в двумерной области с кусочно-гладкой границей, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 8, № 1 (1968), 97—114.

17. Петров Г. И.

Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости, Прикл. матем. и мех. 4, № 3 (1940).

18. Петровский И. Г.

1) О задаче Коши для системы уравнений с частными производными, Матем. сб. 2 (1937), 815—868.

2) Об аналитичности решений уравнений с частными производными, Матем. сб. 5, № 1 (1939), 6—68.

3) Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, М., 1961.

4) Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей, УМН, вып. VIII (1941), 161—170.

19. Ривкинд В. Я.

1) Об оценках скорости сходимости однородных разностных схем для уравнений с разрывными коэффициентами и об одном приближенном методе решения задачи Дирихле, ДАН СССР 149, № 3 (1963), 1264—1267.

2) Об оценках скорости сходимости однородных разностных схем для эллиптических и параболических уравнений с разрывными коэффициентами, «Проблемы матем. анализа», вып. 1 (1966), 110—119.

20. Рябенький В. С. и Филиппов А. Ф.

Об устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат, 1956.

21. Самарский А. А.

Введение в теорию разностных схем, «Наука», М., 1971.

22. Смирнов В. И.

1) Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, М., 1958.

2) Курс высшей математики, т. V, Физматгиз, М., 1959.
23. Соболев С. Л.
1) Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.
2) Об оценках некоторых сумм для функций, заданных на сетке, Изв. АН СССР, серия матем. 4 (1940), 5—16.
3) Уравнения математической физики, М.—Л., ОГИЗ, 1947.
4) Methode nouvelle a resoudre le probleme de Cauchy pour les equations lineaires hyperboliques normales, Матем. сб. 1 (1936), 39—72.
24. Соболевский П. Е.
Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве, Труды Моск. матем. о-ва 10 (1961), 297—350.
25. Соломяк М. З.
О дифференциальных уравнениях в пространствах Банаха, Изв. высш. учебн. завед., Математика 1 (1960), 198—209.
26. Солонников В. А.
1) Об общих краевых задачах для систем эллиптических в смысле Даглиса — Ниренберга, I, Изв. АН СССР, серия матем. 28 (1964), 665—706; II, Труды МИАН СССР 92 (1966), 233—297.
2) О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида, Труды МИАН СССР 83 (1965).
3) О некоторых стационарных краевых задачах магнитной гидродинамики, Труды МИАН СССР 59 (1960), 174—187.
27. Фомин В. Н.
Параметрический резонанс упругих систем с бесконечным числом степеней свободы, I, Вестн. ЛГУ, № 13 (1965), 73—87.
28. Шилов Г. Е.
1) Математический анализ. Спец. курс, М., Физматгиз, 1959.
2) Математический анализ. Второй спец. курс, М., «Наука», 1965.
29. Эйдельман С. Д.
Параболические системы, «Наука», М., 1964.
30. Эйдус Д. М.
О смешанной задаче теории упругости, ДАН СССР 76, № 2 (1951).
31. Яненко Н. Н.
Метод дробных шагов для решения многомерных задач математической физики, «Наука», Сиб. отд., Новосибирск, 1967.

1. Agmon S., Douglis A. and Nirenberg L.
Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I, Comm. Pure Appl. Math. 12, № 4 (1959), 623—727; II, Comm. Pure Appl. Math. 17, № 1 (1964), 35—92.
2. Aubin I. P.
Behavior of the error of the approximate solutions of boundary value problems for linear elliptic equations by Galerkin's and finite difference methods. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa 21, № 4 (1967).

3. Browder F. E.
1) The Dirichlet problem for linear elliptic equations of arbitrary even order with variable coefficients, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **38** (1952), 230—235.
2) Strongly elliptic systems of differential equations, Ann. Math. Studies, № 33, Princeton, 1954, 15—51.
4. O'Brien G. G., Hyman M. A. and Kaplan S.
A study of the numerical solutions of partial differential equations, J. of Math. and Phys. **29**, № 4 (1951), 223—251.
5. Caccioppoli R
Limitazioni integrali per soluzioni di un'equazioni lineare ellitica a derivate parziali, Giorn. Mat. Battoglini **80** (1950—1951), 186—212.
6. Cea I.
Approximation variationnelle des problemes aux limites. Ann. Inst. Fourier Grenoble **14**, № 2 (1964).
7. Courant R.
1) Variational methods for the solutions of problems of equilibrium and vibrations, Bull. Amer. Math. Soc. **49**, № 1 (1943), 1—23.
Courant R., Friedrichs K. O. and Lewy H.
2) Über der partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Math. Ann. **100** (1928), 32—74.
Courant R. und Hilbert D.
3) Methoden der mathematischen Physik, Bd. 1, Berlin, 1931, Bd. 2, 1937. (Русский перевод: т. 1, М., Гостехиздат, 1934, т. 2 — 1945.)
8. Douglas J.
On the numerical integration of $u_{xx} + u_{yy} = u_t$ by implicit methods, J. Soc. Industr. Appl. Math. **3**, № 1 (1955), 42—65.
9. Evans G. C.
Fundamental points of potential theory, Rice Institute, Houston, Texas, № 7 (1920), 252—359.
10. Faedo S.
Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantativa dei problemi di propagazione, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa I (1949), 1—40.
11. Friedman A.
Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall, INC, 1964. (Русский перевод: М., «Мир», 1968.)
12. Friedrichs K. O.
Spektraltheorie halbbeschrankten Operatoren und ihre Anwendung auf Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. Part I, Math. Ann. **109** (1934), 465—487, part 2, ibid. **109** (1934), 685—713.
13. Gårding L.
Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, Math. Scand. **1** (1953), 55—72.
14. Green J. W.
An expansion method for parabolic differential operators, J. Res. Nat. Bur. Standart **51** (1953), 127—132.

15. Hille E. and Phillips R. S.
Functional Analysis and Semi-Groups. Revised Ed., Amer. Math. Soc. Publ., 31, 1957. (Русский перевод: М., ИЛ, 1962.)
16. Hopf E.
Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachrichten 4 (1950—51), 213—231.
17. Hörmander L.
Linear partial differential equations, Berlin. Springer, 1963. (Русский перевод: М., «Мир», 1965).
18. Kato T.
Integration of the equation of evolution in a Banach space, J. Math. Soc. Japan 5 (1953), 208—304.
19. Leray J.
Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois. J. Math. Pures Appl., Serie 9, 13 (1934), 331—418.
20. Lions J. L.
Equations differentielles-operationneles et problemes aux limites, Berlin, Springer, 1961.
21. Morrey C. B.
1) A class of representations of manifolds, I, Amer. J. Math. 55 (1933), 683—707; II, ibid, 56 (1934), 275—293.
2) Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1966.
22. Peacemen D. W. and Rachford H. H.
The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, J. Soc. Industr. Appl. Math. 3, № 1 (1955), 28—42.
23. Riesz F. et Sz-Nagy B.
Leçons d'analyse fonctionnelle, Budapest, 1953. (Русский перевод: М., ИЛ, 1954).
24. Rothe E.
Wärmeleitungsgleichungen mit nichtconstanten koeffizienten Math. Ann. 104 (1931), 340—362.
25. Schauder J.
1) Über lineare elliptiche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Z. 38 (1934), 257—282.
2) Hyperbolische Differentialgleichungen. Fund. Math. 24 (1935), 213—246.
26. Schwartz L.
Theorie des distributions, t. 1, Paris, Hermann, 1950; t. 2, Paris, Hermann, 1951.
27. Tonelli L.
Opera Scelte, Roma, v. 1, 1960; v. 2, 1961; v. 3, 1962; v. 4, 1963.
28. Wiener N.
The operational calculus, Math. Ann. 95 (1926), 557—584.

Ольга Александровна Ладыженская

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М., 1973 г., 408 стр.

Редакторы *А. П. Осколков*, *М. М. Горячая*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *О. А. Бутусова*

Сдано в набор 31/V 1973 г. Подписано к печати 10/XII 1973 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$, тип. № 2. Физ. печ. л. 12.75. Условн. печ. л. 21,42.. Уч.-изд. л. 21,14. Тираж 23 000 экз. Цена книги 84 коп.
Заказ № 663.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29