О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ
В. А. СОЛОННИКОВ
Н. Н. УРАЛЬЦЕВА

# ЛИНЕЙНЫЕ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

*Ольга Александровна Ладыженская,*
*Всеволод Алексеевич Солонников,*
*Нина Николаевна Уральцева*

Линейные и квазилинейные уравнения
параболического типа

М., 1967 г., 736 стр.

Редактор *В. С. Буслаев*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректор *С. Н. Емельянова*

Сдано в набор 3/IX 1966 г. Подписано к печати 10/I 1967 г. Бумага 84×108¹/₃₂.
Физ. печ. л. 23. Условн. печ. л. 38,64. Уч.-изд. л. 37,32. Тираж 6800 экз.
Т-01711. Цена книги 2 р. 55 к. Заказ № 336.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29

2-2-3
6-Б3-5-66

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Уравнения параболического типа встречаются во многих отделах математики и математической физики, и аспекты, в которых они исследуются, очень разнообразны. Наиболее часто (а в смежных областях почти исключительно) встречаются уравнения второго порядка. Такие уравнения (и некоторые классы систем второго порядка), линейные и квазилинейные, и составляют предмет исследования данной книги. Мы изучаем эти уравнения главным образом в направлении разрешимости для них краевых задач и анализа связей между гладкостью решений и гладкостью известных функций, входящих в задачу.

Основным условием, которое предполагается выполненным для всех рассматриваемых уравнений, является условие равномерной параболичности. Для таких уравнений удалось дать достаточно полные ответы на центральные вопросы о разрешимости указанных выше задач и установить ряд точных зависимостей свойств решений от свойств известных функций в терминах принадлежности тех и других к наиболее употребительным функциональным пространствам.

Для линейных уравнений разрешимость основных краевых задач и задачи Коши зависит лишь от гладкости функций, определяющих задачу (т. е. функций, которые считаются известными в задаче, именно: коэффициентов, свободных членов уравнений, функций, задающих начальные и граничные условия и границу той области, в которой ищется решение). Чем более гладкими будут эти известные функции, тем лучше будет решение. Напротив, если ухудшить свойства известных в задаче функций, то ухудшаются и дифференциальные свойства решений, причем это ухудшение (равно как и улучшение) имеет локальный характер (например, гладкость решений внутри их области определения диктуется только гладкостью коэффициентов и свободных членов уравнения и не зависит от гладкости границы и начальных и граничных функций). Однако нельзя ухудшать беспредельно свойства функций, определяющих задачу (например, допускать в коэффициентах особенности высокого порядка). Существует граница таких допустимых ухудшений, за пределами которой теряются уже такие свойства задач, как единственность. Подобно анализу, проведенному нами для эллиптических уравнений в книге [I], мы начинаем и здесь с нахождения этой границы, для чего строим соответствующие примеры. На этих примерах (и примерах из [$33_{12, 14, 15}$]) удалось достаточно точно очертить границы возможной теории краевых задач для уравнений с разрывными и, вообще говоря, неограниченными коэффициентами и свободными членами, которая затем и излагается в главе III.

В качестве характеристики таких «плохих» известных функций мы выбрали принадлежность их к пространствам $L_{q,r}(Q_T)$ *). Решения при этом попадают в некоторое функциональное пространство, элементы которого имеют производные по $x$ первого порядка и производные по $t$ порядка $1/2$. После этого мы прослеживаем улучшение свойств этих решений по мере улучшения дифференциальных свойств функций, определяюших уравнение или задачу.

Качественно иная ситуация имеет место для нелинейных уравнений. Для них гладкость решений и разрешимость «в целом» краевых задач и задачи Коши определяется не только гладкостью известных функций $a_{ij}(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$, образующих уравнение, но и их поведением при безграничном возрастании $u$ и $p$. В § 3 главы I мы приводим ряд примеров, выясняющих ограничения на это поведение, невыполнение которых влечет за собой неразрешимость этих задач «в целом». В последующих же главах (главы V, VI, VII) доказывается, что этих ограничений вместе с некоторой небольшой гладкостью, в основном, и достаточно для однозначной разрешимости основных краевых задач и задачи Коши для квазилинейных уравнений.

*) Для функций $u(x, t)$ пространства $L_{q,r}(Q_T)$ конечна норма

$$\|u\|_{q,r,Q_T}=\left(\int_0^T\left(\int_\Omega |u|^q\,dx\right)^{\frac{r}{q}}dt\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Общий план книги следующий: в главе I приведены основные обозначения и термины, используемые в книге, дано описание главных результатов, доказанных в ней, и изложен ряд примеров, показывающих точность этих результатов; наконец, дан краткий исторический обзор. В главе II собраны предложения, которые используются на протяжении всей книги и описывают свойства не решений каких-либо дифференциальных уравнений, а произвольных функций, принадлежащих различным функциональным пространствам или классам. К этой главе, нам кажется, лучше обращаться по мере ссылок на отдельные ее утверждения. Основной текст начинается с главы III. Она и глава IV посвящены линейным уравнениям. В главах V и VI исследуются квазилинейные уравнения. Наконец, в главе VII рассмотрены линейные и квазилинейные системы второго порядка с одинаковыми главными частями и дан обзор результатов по общим краевым задачам для линейных параболических систем, наиболее общих из рассмотренных к настоящему времени. Основное содержание каждой главы можно понять независимо от других.

Основу содержания всех глав, кроме IV и частично II и VII, составляют работы О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой. Эти главы написаны ими. Глава IV и §§ 8—10 главы VII написаны В. А. Солонниковым. Ему же принадлежат и многие результаты, изложенные в них.

Авторы весьма признательны академику В. И. Смирнову, просмотревшему рукопись всей книги и сделавшему ряд важных критических замечаний и пожеланий. Они были учтены при окончательной редакции.

Авторы приносят сердечную благодарность своим коллегам и ученикам А. Трескунову, А. Осколкову, М. Фаддееву, И. Кролю, В. Матвееву и лаборантке Л. М. Дикушиной за помощь при оформлении книги. Особенно большую и квалифицированную помощь оказал нам А. Трескунов, студент V курса Ленинградского университета, работавший с нами в течение написания книги и получивший за это время интересные результаты по линейным уравнениям (см. список литературы).

ГЛАВА I

# ВВОДНАЯ ГЛАВА

Книга посвящена в основном линейным и квазилинейным дифференциальным уравнениям в частных производных 2-го порядка параболического типа. Для них изучается разрешимость основных краевых задач и задачи Коши в различных функциональных пространствах и проводятся исследования, касающиеся зависимостей свойств гладкости решений этих уравнений от известных функций, образующих уравнения, и от свойств других известных в задачах функций. Мы начинаем с описания примеров, позволивших достаточно точно очертить контуры возможной теории этих вопросов (§ 3), и с перечисления основных результатов данной книги. К этим параграфам (§§ 3 и 4) полезно вернуться после ознакомления с главами III—VI. Им предшествуют (§ 2) описание постановок основных задач для параболических уравнений и изложение одного из основных свойств, присущих решениям параболических уравнений 2-го порядка — принципа максимума, в их классической форме. В дальнейшем и постановки задач и принцип максимума приобретают иной вид, соответствующий тому функциональному пространству, к которому принадлежат исследуемые решения. Эти видоизменения классической формы того и другого и методы, созданные для работы с ними, обусловили успех в изучении квазилинейных уравнений «в целом» и линейных уравнений с плохими коэффициентами.

Настоящая книга имеет много общего в отношении методов исследований с книгой О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой «Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа», хотя и может читаться независимо. Ввиду довольно большого числа упоминаний последней, мы снабдили ее в ссылках специальным номером — [I].

Все рассматриваемые в книге функции, аргументы и параметры вещественны. Исключение составляют §§ 4, 18 гл. III и §§ 8, 9 гл. VII, где используются преобразования Фурье или Лапласа.

## § 1. Основные обозначения и термины

### 1. Сокращенные обозначения.

$E_n$ — $n$-мерное евклидово пространство; $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная точка в нем.

$E_{n+1}$ — $(n+1)$-мерное евклидово пространство, точки в котором обозначаем $(x, t)$, где $x$ из $E_n$, а $t$ из $(-\infty, \infty)$.

$\Omega$ — область в $E_n$, т. е. произвольное открытое связное множество точек $E_n$. Во всех главах, кроме IV, $\Omega$ считается ограниченной областью, если не оговорено противное. В главе IV $\Omega$ — произвольная область.

$S$ — граница $\Omega$.

$\overline{\Omega}$ — замыкание $\Omega$, так что $\overline{\Omega}=\Omega \cup S$.

$K_\rho$ — произвольный (открытый) шар в пространстве $E_n$ радиуса $\rho$, $\varkappa_n = \operatorname{mes} K_1$, $\omega_n$ — площадь поверхности $K_1$.

$\Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega$.

$Q_T$ — цилиндр $\Omega \times (0, T)$, т. е. совокупность точек $(x, t)$ пространства $E_{n+1}$ с $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$.

$Q'$ — произвольное открытое множество в $E_{n+1}$, принадлежащее $Q_T$.

$S_T$ — боковая поверхность $Q_T$, точнее, совокупность точек $(x, t)$ пространства $E_{n+1}$ с $x \in S$, $t \in [0, T]$.

$\Gamma_T = S_T \cup \{(x, t)\colon x \in \Omega, t=0\}$.

$S_0 = \{(x, t)\colon x \in S, t=0\}$; $\Gamma_0 = \{(x, t)\colon x \in \overline{\Omega}, t=0\}$.

$Q_{t_1, t_2} = \Omega \times (t_1 < t < t_2)$.

$Q(\rho, \tau)$ — произвольный цилиндр вида $\{(x, t)\colon |x-x^0|<\rho, t_0 < t < t_0+\tau\}$.

$Q(k, \rho, \tau)$ — совокупность точек $(x, t) \in Q(\rho, \tau)$, в которых исследуемая функция $u(x, t) > k$.

$Q_{t_1}(k)$ — совокупность точек $Q_{t_1} = \Omega \times (0 < t < t_1)$, в которых $u(x, t) > k$.

$\nu$, $\mu$, $\varepsilon$, $\delta$, $\delta_k$, $\theta$, $\theta_k$, $\gamma$, $\alpha$, $\beta$ — положительные постоянные, причем $\alpha$ считаем принадлежащим интервалу $(0, 1)$.

$\nu(t)$ — положительная невозрастающая непрерывная функция, определенная при $t \geqslant 0$.

$\mu(t)$ — положительная неубывающая непрерывная функция, определенная при $t \geqslant 0$.

$\delta_i^j$ — символ Кронекера: $\delta_i^i = 1$, $\delta_i^j = 0$ при $i \neq j$.

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x^2 = |x|^2,$$

$$p = (p_1, \ldots, p_n), \quad u_x = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}), \quad |p| = \left(\sum_{i=1}^n p_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$p^2 = |p|^2, \quad |u_x| = \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$u_x^2 = |u_x|^2, \quad u_{x_i}^2 = (u_{x_i})^2,$$

$$|u_{xx}| = \left(\sum_{i, j=1}^n u_{x_i x_j}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$a(x, t, u, p) = a(x_1, \ldots, x_n, t, u, p_1, \ldots, p_n),$$

$$a(x, t, u, u_x) = a(x_1, \ldots, x_n, t, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}).$$

$\operatorname{osc}\{u(x); \Omega\}$ — колебание $u(x)$ на $\Omega$, т. е. разность между $\operatorname{vrai\,max}_\Omega u(x)$ и $\operatorname{vrai\,min}_\Omega u(x)$. Аналогично определяется $\operatorname{osc}\{u(x, t); Q_T\}$.

В уравнениях будут встречаться выражения

$$\frac{d}{dx_i}[a(x, t, u(x, t), u_x(x, t))],$$

которые означают, что при вычислении производной $\frac{d}{dx_i}$ надо учитывать вхождения $x_i$ не только в первую группу аргументов, но и в две последние, т. е. в функции $u(x, t)$ и $u_x(x, t)$, так что

$$\frac{d}{dx_i}[a(x, t, u(x, t), u_x(x, t))] = \frac{\partial a}{\partial x_i} + \frac{\partial a}{\partial u} u_{x_i} + \frac{\partial a}{\partial u_{x_k}} u_{x_k x_i}.$$

Здесь и всюду по парам одинаковых индексов подразумевается суммирование в пределах от 1 до $n$, в частности,

$$\frac{\partial a}{\partial u_{x_k}} u_{x_k x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a}{\partial u_{x_k}} u_{x_k x_i}.$$

Иногда, когда это не вызывает путаницы, знак полного дифференцирования $\frac{d}{dx_i}$ будет заменяться более распространенным знаком $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Так, например, в линейном уравнении члены $\frac{d}{dx_i}\left(a_{ij}(x, t)\, u_{x_j}(x, t)\right)$ мы обычно записываем в виде $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\, u_{x_j}(x, t)\right)$, хотя и здесь при дифференцировании надо учитывать $x_i$ в обоих аргументах: $a_{ij}(x, t)$ и $u_{x_j}(x, t)$.

$\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к $S$ в какой-либо ее точке, внешней по отношению к $\Omega$; $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ означает дифференцирование вдоль $\mathbf{n}$.

В главе VII используется также обозначение $\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{n}$; $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внутренней нормали к $S$.

Функция $u(x)$ или $u(x, t)$ называется финитной в $\Omega$ (в $Q_T$), если она отлична от нуля лишь на каком-нибудь компактном множестве, отстоящем от границы $\Omega(Q_T)$ на положительное расстояние.

Функция $\zeta(x)$ (или $\zeta(x, t)$) называется *срезающей для области* $\Omega$ (*для* $Q_T$), если она непрерывна в $\bar{\Omega}$ (в $\bar{Q}_T$), имеет кусочно-непрерывные ограниченные производные первого порядка, обращается в нуль на границе этой области (на $\Gamma_T$), и ее значения заключены между нулем и единицей.

**2. Определения основных функциональных пространств.**

$L_q(\Omega)$ — банахово пространство, состоящее из всех измеримых на $\Omega$ функций, суммируемых по $\Omega$ со степенью $q \geqslant 1$. Норма в нем определяется равенством

$$\|u\|_{q, \Omega} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Измеримость и суммируемость понимается всюду в смысле Лебега. Элементами $L_q(\Omega)$ являются классы эквивалентных между собой на $\Omega$ функций.

$L_{q,r}(Q_T)$ — банахово пространство, состоящее из всех измеримых на $Q_T$ функций с конечной нормой

$$\|u\|_{q,r,Q_T}=\left(\int_0^T\left(\int_\Omega |u(x,t)|^q\,dx\right)^{\frac{r}{q}}dt\right)^{\frac{1}{r}},$$

причем $q\geqslant 1$ и $r\geqslant 1$.

$L_{q,q}(Q_T)$ будем обозначать $L_q(Q_T)$, а норму $\|\cdot\|_{q,q,Q_T}$ — через $\|\cdot\|_{q,Q_T}$.

Обобщенные производные понимаются так, как это принято теперь в большинстве работ по дифференциальным уравнениям. Различные, но эквивалентные их определения и основные свойства читатель может найти, например, в [54, т. V] или в [$55_1$].

$W_q^l(\Omega)$ при $l$ целом — банахово пространство, состоящее из всех элементов $L_q(\Omega)$, имеющих обобщенные производные всех видов до порядка $l$ включительно, суммируемые по $\Omega$ со степенью $q$. Норма в $W_q^l(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{q,\Omega}^{(l)}=\sum_{j=0}^{l}\langle\langle u\rangle\rangle_{q,\Omega}^{(j)},\tag{1.1}$$

а

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q,\Omega}^{(j)}=\sum_{(j)}\|D_x^j u\|_{q,\Omega}.\tag{1.2}$$

Символ $D_x^j$ означает любую производную $u(x)$ по $x$ порядка $j$, а $\sum\limits_{(j)}$ означает суммирование по всевозможным производным $u$ порядка $j$. Для областей с «не слишком плохой» границей $W_q^l(\Omega)$ совпадает с замыканием в норме (1.1) множества всех бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций. Это будет, например, для областей с кусочно-гладкой границей (их определение дается ниже). Иногда вместо $W_q^l(\Omega)$ пишется $W_q^l$, особенно если область $\Omega$ подлежит дальнейшему уточнению.

$\dot{W}_q^l(\Omega)$ — множество элементов $W_q^l(\Omega)$, финитных в $\Omega$.

$\overset{\circ}{W}{}_q^l(\Omega)$ — подпространство пространства $W_q^l(\Omega)$, плотным множеством в котором является совокупность всех бесконечно дифференцируемых, финитных в $\Omega$ функций. Известно, что $\dot{W}_q^l(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}_q^l(\Omega)$.

$W_q^{2l,\,l}(Q_T)$ при $l$ целом $(q \geqslant 1)$ — банахово пространство, состоящее из элементов $L_q(Q_T)$, имеющих обобщенные производные вида $D_t^r D_x^s$ с любыми $r$ и $s$, удовлетворяющими неравенству $2r+s \leqslant 2l$. Норму в нем определяем равенством

$$\|u\|_{q,\,Q_T}^{(2l)} = \sum_{j=0}^{2l} \langle\langle u \rangle\rangle_{q,\,Q_T}^{(j)}, \tag{1.3}$$

а

$$\langle\langle u \rangle\rangle_{q,\,Q}^{(j)} = \sum_{(2r+s=j)} \| D_t^r D_x^s u \|_{q,\,Q_T}. \tag{1.4}$$

Суммирование $\sum\limits_{(2r+s=j)}$ проведено по всем неотрицательным целым $r$ и $s$, удовлетворяющим условию: $2r+s=j$.

В главах IV и VII будут использованы пространства $W_q^l(\Omega)$ и $W_q^{l,\,l/2}(S_T)$ с нецелым $l$. Пространство $W_q^l(\Omega)$ определено в § 2 главы II, пространство $W_q^{l,\,l/2}(S_T)$ — в § 3 главы II.

Кроме $W_q^{2l,\,l}(Q_T)$, у нас встретятся еще два пространства с другими соотношениями верхних индексов, а именно:

$W_2^{1,\,0}(Q_T)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,\,v)_{W_2^{1,\,0}(Q_T)} = \int_{Q_T} (uv + u_{x_k} v_{x_k})\,dx\,dt$$

и

$W_2^{1,\,1}(Q_T)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,\,v)_{W_2^{1,\,1}(Q_T)} = \int_{Q_T} (uv + u_{x_k} v_{x_k} + u_t v_t)\,dx\,dt.$$

$V_2(Q_T)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $W_2^{1,\,0}(Q_T)$, имеющих конечную норму

$$|u|_{Q_T} = \operatorname{vrai}\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(x,\,t)\|_{2,\,\Omega} + \|u_x\|_{2,\,Q_T}, \tag{1.5}$$

где здесь и ниже

$$\|u_x\|_{2,\,Q_T} = \sqrt{\int_{Q_T} u_x^2\,dx\,dt}.$$

$V_2^{1,0}(Q_T)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $V_2(Q_T)$, непрерывных по $t$ в норме $L_2(\Omega)$, с нормой

$$|u|_{Q_T} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(x, t)\|_{2,\Omega} + \|u_x\|_{2, Q_T}. \tag{1.6}$$

Непрерывность по $t$ функции $u(x, t)$ в норме $L_2(\Omega)$ означает, что $\|u(x, t+\Delta t) - u(x, t)\|_{2,\Omega} \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Пространство $V_2^{1,0}(Q_T)$ получается пополнением множества $W_2^{1,1}(Q_T)$ в норме $V_2(Q_T)$.

$V_2^{1,1/2}(Q_T)$ — подмножество элементов $u(x, t)$ пространства $V_2^{1,0}(Q_T)$, для каждого из которых

$$\int_0^{T-h} \int_\Omega h^{-1}[u(x, t+h) - u(x, t)]^2 \, dx\, dt \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Нуль сверху над $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, $\overset{\circ}{V}_2(Q_T)$, $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$, $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,1/2}(Q_T)$ означает, что берутся лишь те элементы этих пространств, которые обращаются в нуль на $S_T$.

Определим теперь пространства, состоящие из функций, непрерывных в смысле Гёльдера.

Будем говорить, что функция $u(x)$, определенная в $\overline{\Omega}$, удовлетворяет условию Гёльдера по $x$ с показателем $\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, и константой Гёльдера $\langle u \rangle_\Omega^{(\alpha)}$ в области $\overline{\Omega}$, если

$$\sup \rho^{-\alpha} \operatorname{osc}\{u;\ \Omega_\rho^i\} \equiv \langle u \rangle_\Omega^{(\alpha)} < \infty, \tag{1.7}$$

где sup взят по всем связным компонентам $\Omega_\rho^i$ всех $\Omega_\rho$ с $\rho \leqslant \rho_0$. Если граница области $\Omega$ «не слишком плохая» (например, кусочно-гладкая без двойных точек), то $\langle u \rangle_\Omega^{(\alpha)}$ можно определить и иначе, как

$$\sup_{\substack{x, x' \in \Omega \\ |x - x'| \leqslant \rho_0}} \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^\alpha} = \langle u \rangle_\Omega^{(\alpha)}. \tag{1.8}$$

Для областей с двойным куском границы, например для области $\left\{(x_1, x_2)\colon |x_1| < 1,\ |x_2| < 1 \text{ и } x_2 \neq 0 \text{ при } |x_1| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$, определения (1.7) и (1.8) неэквивалентны. В этом случае мы будем придерживаться первого из них.

Определим пространства Гёльдера $H^l(\overline{\Omega})$ и $H^{l, l/2}(\overline{Q}_T)$. В них $l$ — всегда нецелое положительное число.

$H^l(\bar\Omega)$ — банахово пространство, элементами которого являются непрерывные в $\bar\Omega$ функции $u(x)$, имеющие в $\bar\Omega$ непрерывные производные до порядка $[l]$ включительно и конечное значение величины

$$|u|_\Omega^{(l)} = \langle u\rangle_\Omega^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]} \langle u\rangle_\Omega^{(j)}, \tag{1.9}$$

где

$$\langle u\rangle_\Omega^{(0)} = |u|_\Omega^{(0)} = \max_\Omega |u|,$$

$$\langle u\rangle_\Omega^{(j)} = \sum_{(j)} |D_x^j u|_\Omega^{(0)}, \quad \langle u\rangle_\Omega^{(l)} = \sum_{([l])} \langle D_x^{[l]} u\rangle_\Omega^{(l-[l])}.$$

Равенство (1.9) определяет норму $|u|_\Omega^{(l)}$ в $H^l(\bar\Omega)$.

$H^{l,\, l/2}(\bar Q_T)$ — банахово пространство функций $u(x, t)$, непрерывных в $\bar Q_T$ вместе со всеми производными вида $D_t^r D_x^s$ при $2r+s<l$ и с конечной нормой

$$|u|_{Q_T}^{(l)} = \langle u\rangle_{Q_T}^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]} \langle u\rangle_{Q_T}^{(j)}, \tag{1.10}$$

где

$$\langle u\rangle_{Q_T}^{(0)} \equiv |u|_{Q_T}^{(0)} = \max_{Q_T} |u|,$$

$$\langle u\rangle_{Q_T}^{(j)} = \sum_{(2r+s=j)} |D_t^r D_x^s u|_{Q_T}^{(0)},$$

$$\langle u\rangle_{Q_T}^{(l)} = \langle u\rangle_{x,\,Q_T}^{(l)} + \langle u\rangle_{t,\,Q_T}^{(l/2)},$$

$$\langle u\rangle_{x,\,Q_T}^{(l)} = \sum_{(2r+s=[l])} \langle D_t^r D_x^s u\rangle_{x,\,Q_T}^{(l-[l])},$$

$$\langle u\rangle_{t,\,Q_T}^{(l/2)} = \sum_{0<l-2r-s<2} \langle D_t^r D_x^s u\rangle_{t,\,Q_T}^{\left(\frac{l-2r-s}{2}\right)};$$

$$\langle u\rangle_{x,\,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(x,\,t),\,(x',\,t)\in\bar Q_T\\ |x-x'|\leqslant\rho_0}} \frac{|u(x,t)-u(x',t)|}{|x-x'|^\alpha}, \quad 0<\alpha<1, \tag{1.11}$$

$$\langle u\rangle_{t,\,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(x,\,t),\,(x,\,t')\in\bar Q_T\\ |t-t'|\leqslant\rho_0}} \frac{|u(x,t)-u(x,t')|}{|t-t'|^\alpha}, \quad 0<\alpha<1. \tag{1.12}$$

При границах $S$ с двойными точками вместо (1.11) берем иное определение $\langle u\rangle^{(\alpha)}_{x,\,Q_T}$, аналогичное (1.2), именно

$$\langle u\rangle^{(\alpha)}_{x,\,Q_T}=\sup_{t\in[0,\,T]}\sup\rho^{-\alpha}\operatorname{osc}_x\{u(x,\,t);\,\Omega^i_\rho\}.$$

Здесь второй sup взят по всем связным компонентам $\Omega^i_\rho$ всех $\Omega_\rho$ с $\rho\leqslant\rho_0$, а

$$\operatorname{osc}_x\{u(x,\,t);\,\Omega^i_\rho\}=\operatorname*{vrai\,max}_{x\in\Omega^i_\rho}u(x,\,t)-\operatorname*{vrai\,min}_{x\in\Omega^i_\rho}u(x,\,t).$$

При $l<1$ пространства $H^l(\bar\Omega)$ и $H^{l,\,l/2}(\bar Q_T)$ будем чаще всего обозначать через $H^\alpha(\bar\Omega)$ и $H^{\alpha,\,\alpha/2}(\bar Q_T)$. Нормы, определенные нами в $H^l(\bar\Omega)$ и в $H^{l,\,l/2}(\bar Q_T)$, зависят от $\rho_0$, но при разных $\rho_0>0$ эквивалентны друг другу, и поэтому зависимость их от $\rho_0$ нигде не будет отмечаться.

Все только что описанные функциональные пространства полны.

$H^l(\Omega)$ — множество функций, принадлежащих $H^l(\bar\Omega')$ для любой замкнутой подобласти $\bar\Omega'\subset\Omega$.

$H^{l,\,l/2}(Q_T)$ — множество функций, принадлежащих $H^{l,\,l/2}(\bar Q')$ для любой замкнутой подобласти $\bar Q'\subset Q_T$.

$C(\bar\Omega)\,(C(\Omega))$ — совокупность непрерывных в $\bar\Omega$ (в $\Omega$) функций.

Аналогично определяются $C(\bar Q_T)$ и $C(Q_T)$. $C^l(\bar\Omega)\,(C^l(\Omega))$ — совокупность непрерывных в $\bar\Omega(\Omega)$ функций, имеющих непрерывные в $\bar\Omega(\Omega)$ производные до порядка $l$ включительно.

$C^{2,1}(\bar Q_T)\,(C^{2,1}(Q_T))$ — совокупность непрерывных в $\bar Q_T$ (в $Q_T$) функций, имеющих непрерывные в $\bar Q_T$ (в $Q_T$) производные $u_x$, $u_{xx}$, $u_t$.

$C^{1,\,1/2}(\bar Q_T)$ — совокупность непрерывных в $\bar Q_T$ функций, удовлетворяющих условию Липшица по $x$ и условию Гёльдера с показателем 1/2 по $t$.

$O^l(\bar\Omega)\,(l=1,\,2)$ — совокупность непрерывных в $\bar\Omega$ функций, имеющих непрерывные в $\bar\Omega$ производные до порядка $l-1$, причем производные порядка $l-1$ имеют первый дифференциал в каждой точке $\bar{\Omega}$ и производные порядка $l$ ограничены в $\bar{\Omega}$.

$O^{2,1}(\bar{Q}_T)\left(O^{2,1}(Q_T)\right)$ — совокупность непрерывных в $\bar{Q}_T$ (в $Q_T$) функций, имеющих в каждой точке $\bar{Q}_T\,(Q_T)$ производные $u_x$ и $u_t$, причем $u_x$ непрерывны по $x$ и имеют первый дифференциал по $x$ в каждой точке $\bar{Q}_T\,(Q_T)$ и функции $u_x$, $u_t$, $u_{xx}$ ограничены в $\bar{Q}_T$ (в $Q_T$).

**3. Об областях, границах и функциях, заданных на этих границах.** На протяжении всей книги мы ограничим свои рассмотрения областями, имеющими «кусочно-гладкие границы с ненулевыми внутренними углами», или, короче, «кусочно-гладкие границы». Под этим будем понимать области $\Omega$, замыкание которых можно представить в виде $\bar{\Omega}=\bar{\Omega}_1 \cup \ldots \cup \bar{\Omega}_N$, $\Omega_j \cap \Omega_l=0$, причем каждую из $\bar{\Omega}_k$ можно гомеоморфно отобразить на единичный шар или куб с помощью функций $z_l^k(x)$ $(l=1, 2, \ldots, n;\ k=1, \ldots, N)$, удовлетворяющих в $\bar{\Omega}_k$ условию Липшица и таких, что якобианы преобразований $\left|\frac{\partial(z^k)}{\partial(x)}\right|$ ограничены снизу положительной постоянной.

Будем говорить, что граница $S$ области $\Omega$ (или ее часть $S_1$) удовлетворяет условию (A), если существуют два положительных числа $a_0$ и $\theta_0$ таких, что для любого шара $K_\rho$ с центром на $S$ (на $S_1$ соответственно) радиуса $\rho \leqslant a_0$ и любой из связных компонент $\Omega_\rho^i$ пересечения $\Omega_\rho$ шара $K_\rho$ с $\Omega$ имеет место неравенство

$$\operatorname{mes}\Omega_\rho^i \leqslant (1-\theta_0)\operatorname{mes}K_\rho.$$

Пусть $x^0=\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ — какая-либо точка границы $S$ области $\Omega$. Назовем $(y_1, \ldots, y_n)$ местной декартовой системой координат с началом в точке $x^0$, если $y$ и $x$ связаны равенствами $y_l=a_{lk}\left(x_k-x_k^0\right)$, $l=1, \ldots, n$, где $a_{lk}$ — ортогональная числовая матрица, а ось $y_n$ направлена по внешней по отношению к $\Omega$ нормали к $S$ в точке $x^0$.

Будем говорить, что поверхность $S$ принадлежит классу $H^l$, $l>1$ (или $C^l$, или $O^l$, $l \geqslant 1$), если существует число $\rho>0$ такое, что пересечение $S$ с шаром $K_\rho$ радиуса $\rho$ с центром в произвольной точке $x^0 \in S$ есть связная поверхность, уравнение которой в местной системе координат $(y_1, \ldots, y_n)$ с началом в точке $x^0$ имеет вид $y_n = \omega(y_1, \ldots, y_{n-1})$, причем $\omega(y_1, \ldots, y_{n-1})$ есть функция класса $H^l$ ($C^l$ или $O^l$ соответственно) в области $\overline{D}$, являющейся проекцией $\overline{K}_\rho \cap S$ на плоскость $y_n = 0$.

Пусть на поверхности $S$ класса $H^{l_1}$, $l_1 > 1$ ($C^{l_1}$ или $O^{l_1}$) задана функция $\varphi(s)$. Будем говорить, что $\varphi(s)$ есть функция класса $H^l(S)$, $l \leqslant l_1$, если она как функция $y_1, \ldots, y_{n-1}$ есть элемент $H^l(\overline{D})$. Наибольшую из норм $|\varphi(y)|_D^{(l)}$, подсчитанных для всех точек $x^0$ поверхности $S$, берем за норму $|\varphi|_S^{(l)}$. Аналогично определяются функции классов $C^l(S)$ и $O^l(S)$.

Если $\varphi$ задана на всей $\overline{\Omega}$ и $\varphi(x) \in H^l(\overline{\Omega})$ ($C^l(\overline{\Omega})$ или $O^l(\overline{\Omega})$), то на границе $S$ области, принадлежащей классу $H^{l_1}$ ($C^{l_1}$ или $O^{l_1}$) с $l_1 \geqslant \max\{1, l\}$, она определяет функцию $\varphi(s) = \varphi(x)|_{x=s \in S}$ класса $H^l(S)$ ($C^l(S)$ или $O^l(S)$ соответственно). Верно и обратное: если $\varphi(s) \in H^l(S)$ и $S \in H^l$, $l > 1$, то $\varphi(s)$ можно продолжить на всю область $\Omega$ так, чтобы продолженная функция $\varphi(x)$ принадлежала $H^l(\overline{\Omega})$. Больше того, это продолжение можно делать для всех функций $\varphi(x)$ из $H^l(S)$ с помощью одной и той же конструкции, так что нормы $|\varphi(s)|_S^l$ и $|\varphi(x)|_\Omega^{(l)}$ будут эквивалентны. Именно такое продолжение $\varphi(s)$ на $\Omega$ мы будем подразумевать, формулируя граничные условия с помощью функции $\varphi(x)$. Аналогичные факты верны и для пространств $C^l$ и $O^l$ с $l \geqslant 1$. Однако при $l < 1$ все сказанное о функциях на $S$, принадлежащих $H^l(S)$ ($C^l(S)$ или $O^l(S)$) неверно. Из двух возможных, но разных определений нам удобнее взять то, при котором сохраняется эквивалентность норм $|\varphi(s)|_S^l$ и $|\varphi(x)|_\Omega^l$. Для этого $|\varphi(s)|_S^{(l)}$ определим следующим образом:

$$|\varphi|_S^{(l)} \equiv \max_{s \in S} |\varphi(s)| + \sup(\rho^{-\alpha} \operatorname{osc}\{\varphi(s); S_\rho^l\}), \qquad (1.13)$$

где sup взят по всем связным компонентам $S_\rho^l$ всех $K_\rho \cap S$ с $\rho \leqslant \rho_0$.

Все сказанное о поверхностях $S$ в $E_n$ и функциях $\varphi(s)$ на них естественным образом переносится на поверхности $S_T$ в $E_{n+1}$ и функции $\varphi(x, t)$, заданные на них.

## § 2. Классическая постановка задач. Принцип максимума

Линейные и квазилинейные уравнения второго порядка параболического типа целесообразно разделить на четыре группы: линейные уравнения вида

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\, u_{x_j} + a_i(x, t)\, u\right) + \\ + b_i(x, t)\, u_{x_i} + a(x, t)\, u = \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x_i} - f(x, t), \quad (2.1)$$

линейные уравнения вида

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - a_{ij}(x, t)\, u_{x_i x_j} + a_i(x, t)\, u_{x_i} + \\ + a(x, t)\, u = f(x, t), \quad (2.2)$$

квазилинейные уравнения с дивергентной главной частью

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - \frac{d}{dx_i}(a_i(x, t, u, u_x)) + a(x, t, u, u_x) = 0 \quad (2.3)$$

и квазилинейные уравнения общего вида

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - a_{ij}(x, t, u, u_x)\, u_{x_i x_j} + a(x, t, u, u_x) = 0. \quad (2.4)$$

Относительно этих уравнений предполагаем, если не оговорено противное, что они *равномерно параболичны*. Для уравнений (2.1) и (2.2) это означает выполнение условия

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, t)\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T, \quad (2.5)$$

где здесь и всюду ниже $\nu$ и $\mu$ — фиксированные положительные числа, а $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — произвольный вещественный вектор, для уравнений (2.3) и (2.4) — условий

$$\nu(|u|)\,\xi^2 \leqslant \frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial p_j}\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu(|u|)\,\xi^2 \quad (2.6)$$

и

$$\nu(|u|)\,\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, t, u, p)\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu(|u|)\,\xi^2 \quad (2.7)$$

соответственно при произвольных $u$ и $p$ и $(x, t) \in \bar{Q}_T$. Функции $\nu(\tau)$ и $\mu(\tau)$, как указано в § 1, суть какие-нибудь непрерывные функции $\tau \geqslant 0$, принимающие только положительные значения.

В случае дифференцируемых функций $a_{ij}$, $a_i$ и $f_j$ уравнение (2.1) может быть записано в форме (2.2) и, наоборот, уравнению (2.2) можно придать вид (2.1).

Наиболее распространенными для уравнений (2.1) — (2.4) являются задача Коши, состоящая в нахождении в полупространстве $\{|x| < \infty, \ t \geqslant 0\}$ функции $u(x, t)$, удовлетворяющей при $t > 0$ соответствующему уравнению, а при $t = 0$ начальному условию

$$u|_{t=0} = \psi_0(x), \tag{2.8}$$

и краевые (или, что то же самое, смешанные) задачи в цилиндрах вида $Q_T = \Omega \times (0, T)$, состоящие в нахождении в $\bar{Q}_T$ функций $u(x, t)$, удовлетворяющих в $Q_T$ соответствующему уравнению, на нижнем основании $Q_T$ — начальному условию (2.8), а на боковой поверхности $S_T$ — одному из граничных условий, например первому

$$u|_{S_T} = \psi(s, t), \tag{2.9}$$

или второму

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}} + \sigma u|_{S_T} \equiv a_{ij} u_{x_j} \cos(\mathbf{n}, x_i) + \sigma u|_{S_T} = \psi(s, t). \tag{2.10}$$

Мы ограничимся в основном этими задачами, хотя многое применимо и к краевым задачам, в которых $Q_T$ не является цилиндром.

При классической постановке задачи Коши требуется, чтобы решение во всех точках $(x, t) \in \{|x| < \infty, \ t \geqslant 0\}$ было непрерывным, во всех внутренних точках $(x, t)$, (т. е. для $|x| < \infty, \ t > 0$), имело непрерывные производные $u_t$, $u_x$ и $u_{xx}$ и удовлетворяло уравнению, а при $|x| \to \infty$ оставалось ограниченным (или, общее, не превосходило бы некоторой заданной функции). При классической постановке первой краевой задачи требуется, чтобы решение было непрерывным в $\bar{Q}_T$, имело непрерывные производные $u_t$, $u_x$, $u_{xx}$ в $Q_T$ и удовлетворяло во всех точках $Q_T$ уравнению, а при

$t=0$ и $(x, t) \in S_T$ — условиям (2.8) и (2.9). Если $\Omega$ — неограниченная область, то к этим требованиям присоединяется еще условие о поведении решения при $|x| \to \infty$. Для второй краевой задачи требуется дополнительно, чтобы производные $u_{x_i}$ существовали и были непрерывны в $Q_T \cup S_T$ (иногда это требование ослабляется до существования производных $\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}}\right|_{S_T}$ и их непрерывности при определенных подходах к $S_T$). Для нелинейных уравнений (2.3) и (2.4), кроме перечисленных только что условий, иногда требуют еще непрерывности в $\overline{Q}_T$ производных $u_x$ или даже всех производных $u_t$, $u_x$ и $u_{xx}$ (эти требования мы будем оговаривать специально).

Для всех перечисленных только что задач в их классической постановке справедливы теоремы единственности, если только известные функции, образующие уравнения, обладают некоторой гладкостью.

Доказываются они с помощью хорошо известного принципа максимума. В простейшей форме он состоит в том, что решения $u$ уравнения (2.2) с $a \equiv f \equiv 0$ принимают свои наименьшее и наибольшее значения в $\overline{Q}_T$ на границе $\Gamma_T$. В более общей форме он находит свое выражение в оценках $\max\limits_{Q_T}|u|$, даваемых ниже теоремами 2.1 — 2.3. В его основе лежит следующий факт: во внутренних точках экстремумов функции $u(x, t)$ выражения $u_t - a_{ij}u_{x_ix_j}$ или $u_t - \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{x_ix_j}$, образующие главную часть параболических операторов $\mathscr{L}u$ из (2.1) — (2.4), или оба неотрицательны или оба неположительны.

Изложим принцип максимума для уравнений (2.2) и (2.4) в той степени общности, которая нам потребуется в дальнейшем. Область $\Omega$ будем считать ограниченной, если не оговорено противное.

Теорема 2.1. *Пусть $u(x, t)$ есть классическое решение задачи* (2.2), (2.8), (2.9) *в цилиндре $Q_T$, причем коэффициенты и свободный член в* (2.2) *суть ограниченные функции и*

$$a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geqslant 0. \tag{2.11}$$

*Тогда для* $u(x, t)$ *при любом* $t_1 \in [0, T]$ *справедлива оценка*

$$\sup_{\lambda > a_0} \min\left\{0;\ \min_{\Gamma_{t_1}}(\psi e^{\lambda(t_1-t)});\ \frac{1}{\lambda - a_0}\min_{Q_{t_1}}(f e^{\lambda(t_1-t)})\right\} \leqslant$$
$$\leqslant u(x, t_1) \leqslant \inf_{\lambda > a_0} \max\left\{0;\ \max_{\Gamma_{t_1}}(\psi e^{\lambda(t_1-t)};\ \frac{1}{\lambda - a_0}\max_{Q_{t_1}}(f e^{\lambda(t_1-t)})\right\}, \tag{2.12}$$

*где число* $a_0$ *равно* $\max_{Q_{t_1}}(-a(x, t)) = -\min_{Q_{t_1}} a(x, t)$, *а* $\psi$ *на* $\Gamma_0$ *совпадает* с $\psi_0(x)$ из (2.8) *и на* $S_T$ — *с* $\psi(s, t)$ *из* (2.9).

Напомним, что через $Q_t$ мы условились обозначать цилиндр $\Omega \times (0, t)$, через $\Gamma_t$ — сумму его боковой поверхности $S_t$ и нижнего основания $\Gamma_0$.

Для доказательства (2.12) сделаем преобразование, которое будет часто встречаться в дальнейшем; именно, перейдем от функции $u(x, t)$ к новой функции $v(x, t)$, связанной с ней равенством

$$u(x, t) = v(x, t)\, e^{\lambda t}, \tag{2.13}$$

где $\lambda$ — пока произвольное число. Функция $v$, как легко видеть, удовлетворяет вследствие (2.2) уравнению

$$v_t - a_{ij} v_{x_i x_j} + a_i v_{x_i} + (a + \lambda) v = f e^{-\lambda t}. \tag{2.14}$$

Возьмем произвольное $t_1$ из $(0, T)$. Возможны три случая: или $v(x, t)$ неположительна в $\overline{Q}_{t_1}$, или наибольшее в $\overline{Q}_{t_1}$ положительное значение $v(x, t)$ принимается на $\Gamma_{t_1}$, или это наибольшее значение принимается в какой-либо точке $(x^0, t^0) \in \Omega \times (0, t_1]$. В первом случае $\max_{Q_{t_1}} v(x, t) \leqslant 0$; во втором $0 < \max_{Q_{t_1}} v(x, t) \leqslant \max_{\Gamma_{t_1}} v$; в третьем $0 < \max_{Q_{t_1}} v(x, t) \leqslant$ $\leqslant v(x^0, t^0)$, причем в точке $(x^0, t^0)$ выполнены соотношения

$$v_t \geqslant 0, \quad v_{x_i} = 0 \quad \text{и} \quad -a_{ij} v_{x_i x_j} \geqslant 0 \tag{2.15}$$

и уравнение (2.14). Последнее из соотношений (2.15) имеет место благодаря тому, что в точке максимума чистые вторые производные $\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_k}$ по любому направлению $y_k = \alpha_{kl}(x_l - x_l^0)$

($\det|\alpha_{kl}|\neq 0$) неположительны, а выражение $-a_{ij}v_{x_ix_j}$ равно $-\lambda_k v_{y_ky_k}$ при некоторой ортогональной матрице $\alpha_{kl}$, причем $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ суть характеристические числа квадратичной формы $a_{ij}\xi_i\xi_j$ (и, следовательно, по условию (2.11) неотрицательны). В силу (2.15) и уравнения (2.14) в точке $(x^0, t^0)$ имеет место неравенство

$$[a(x^0, t^0)+\lambda]\,v(x^0, t^0)\leqslant f(x^0, t^0)\,e^{-\lambda t^0}.$$

Будем считать $\lambda>\max\limits_{Q_{t_1}}[-a(x, t)]\equiv a_0$. Тогда во всех случаях справедлива оценка

$$\max_{Q_{t_1}} v(x, t)\leqslant \max\left\{0;\ \max_{\Gamma_{t_1}} v;\ \max_{Q_{t_1}}\frac{f(x, t)\,e^{-\lambda t}}{a(x, t)+\lambda}\right\}, \tag{2.16}$$

из которой следует

$$u(x, t_1)\leqslant e^{\lambda t_1}\max\left\{0;\ \max_{\Gamma_{t_1}}(ue^{-\lambda t});\ \frac{1}{\lambda-a_0}\max_{Q_{t_1}}(fe^{-\lambda t})\right\}. \tag{2.17}$$

Аналогично, рассматривая точку наименьшего неположительного значения функции $v(x, t)$, придем к оценке $u(x, t)$ снизу, указанной в неравенстве (2.12).

Справедлива и такая форма оценки $u$:

$$|u(x, t_1)|\leqslant \max_{\Gamma_{t_1}}|\psi e^{a_0(t_1-t)}|+t_1\max_{Q_{t_1}}|fe^{a_0(t_1-t)}|. \tag{2.18}$$

Следует она из того факта, что функции

$$\mu_1+\mu_2 t\pm u(x, t)\,e^{-a_0 t},$$

где

$$\mu_1=\max_{\Gamma_{t_1}}|\psi e^{-a_0 t}|,\quad \mu_2=\max_{Q_{t_1}}|fe^{-a_0 t}|,$$

неотрицательны в $Q_{t_1}$ в силу уравнений, которым они удовлетворяют.

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда при* $u|_{\Gamma_T}\leqslant 0$ *и* $f\leqslant 0$ *решение* $u(x, t)$ *неположительно в* $\overline{Q}_T$, *а при* $u|_{\Gamma_T}\geqslant 0$ *и* $f\geqslant 0$ *решение неотрицательно в* $\overline{Q}_T$. *Если же* $a(x, t)\equiv f(x, t)\equiv 0$, *то при любом* $t_1\in[0, T]$

$$\min_{\Gamma_{t_1}} u\leqslant u(x, t_1)\leqslant \max_{\Gamma_{t_1}} u. \tag{2.19}$$

Первые два утверждения следуют непосредственно из (2.12). Для доказательства же (2.19) возьмем функцию $w(x, t) = u(x, t) - u(x_0, 0)$, где $x_0$—какая-нибудь точка $S$, и, так как она удовлетворяет тому же уравнению $\mathscr{L}w = 0$, что и функция $u(x, t)$, применим к ней оценку (2.12). Это даст

$$\sup_{\lambda > 0} \min \left\{ 0; \min_{\Gamma_{t_1}} [(u - u(x_0, 0)) e^{\lambda(t_1 - t)}] \right\} \leqslant u(x, t_1) - u(x_0, 0) \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{\lambda > 0} \max \left\{ 0; \max_{\Gamma_{t_1}} [(u - u(x_0, 0)) e^{\lambda(t_1 - t)}] \right\}.$$

Но левая часть неравенства равна $\min\limits_{\Gamma_{t_1}} u - u(x_0, 0)$, а правая $\max\limits_{\Gamma_{t_1}} u - u(x_0, 0)$, и потому для $u(x, t_1)$ действительно справедливы неравенства (2.19).

Рассмотрим теперь для уравнения (2.2) краевую задачу в $Q_T$ при граничном условии

$$b_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u|_{S_T} = \psi(s, t), \tag{2.20}$$

в котором вектор $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ образует с направлением внешней нормали $\mathbf{n}$ к $S_T$ в той же точке $(x, t) \in S_T$ угол, не превосходящий $\frac{\pi}{2}$. Для нее справедливы следующие две теоремы (см. [57]).

Теорема 2.2. *Пусть $u(x, t)$ есть классическое решение задачи* (2.2), (2.8), (2.20) *в цилиндре $Q_T$ и пусть коэффициенты уравнения* (2.2) *и функции $f$, $b_i$, $b$ и $\psi$ ограничены, причем $a_{ij}$ подчиняются условию* (2.11), *а $b(x, t)|_{S_T} > 0$. Тогда для решения $u(x, t)$ при любом $t_1$ из $[0, T]$ справедливы оценки*

$$\sup_{\lambda > a_0} \min \left\{ 0; \min_{S_{t_1}} \frac{\psi e^{\lambda(t_1 - t)}}{b}; e^{\lambda t_1} \min_{\Omega} u(x, 0); \frac{1}{\lambda - a_0} \min_{Q_{t_1}} (f e^{\lambda(t_1 - t)}) \right\} \leqslant$$
$$\leqslant u(x, t_1) \leqslant \inf_{\lambda > a_0} \max \left\{ 0; \max_{S_{t_1}} \frac{\psi e^{\lambda(t_1 - t)}}{b}; \right.$$
$$\left. e^{\lambda t_1} \max_{\Omega} u(x, 0); \frac{1}{\lambda - a_0} \max_{Q_{t_1}} f e^{\lambda(t_1 - t)} \right\}, \tag{2.21}$$

*в которых $a_0$ равно $\max\limits_{Q_{t_1}} (-a(x, t))$.*

Доказывается эта теорема так же, как и теорема 2.1, т. е. берется функция $v(x, t) = u(x, t)e^{-\lambda t}$ и анализируются все возможные расположения ее положительного максимума и отрицательного минимума. Все возможные ситуации совпадают с рассмотренными в теореме 2.1. Отличие в получающихся для них оценках имеется лишь для случая, когда эти экстремумы попадают на $S_{t_1}$. Так, если $v$ принимает свое наибольшее в $\bar{Q}_{t_1}$ значение в какой-либо точке $(x^0, t^0) \in S_{t_1}$, то в этой точке $b_i v_{x_i} \geqslant 0$ $\left(\text{ибо вектор в } \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \text{ образует с внешней нормалью к } S_T \text{ в той же точке угол, не превосходящий } \frac{\pi}{2}\right)$, и потому в силу граничного условия (2.20) $v\Big|_{(x^0,\, t^0)} \leqslant \frac{\psi e^{-\lambda t}}{b}\Big|_{(x^0,\, t^0)}$. Аналогично, если точка $(x^0, t^0)$ минимума для $v$ попадает на $S_{t_1}$, то в ней $b_i v_{x_i} \leqslant 0$, и потому в силу (2.20) $v\Big|_{(x^0,\, t^0)} \geqslant \frac{\psi e^{-\lambda t}}{b}\Big|_{(x^0,\, t^0)}$.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.2, *кроме* $b|_{S_T} > 0$, *которое заменено условием* $b|_{S_T} \geqslant -b_0$, $b_0 = \text{const} \geqslant 0$, *и пусть*

$$\max |a_{ij},\ a_i| \leqslant \mu_1, \qquad a_0 = \max_{Q_T}(-a(x, t))$$

*и*

$$b_i \cos(\mathbf{n}, x_i) \equiv \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{b}) \geqslant \delta, \qquad \delta = \text{const} > 0.$$

*Тогда для* $u(x, t)$ *справедлива оценка*

$$\max_{Q_T} |u| \leqslant c_1 e^{cT} \max\left\{\max_{S_T} |\psi|;\ \max_{\Omega} |u(x, 0)|;\ \max_{Q_T} |f|\right\}, \tag{2.22}$$

*где* $c$ *и* $c_1$ — *постоянные, зависящие лишь от чисел* $b_0$, $\mu_1$, $a_0$, $\delta$ *и границы области* $\Omega$, *которая предполагается принадлежащей классу* $O^2$.

Для доказательства (2.22) введем вместо $u(x, t)$ функцию $w(x, t) = u(x, t)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — какая-либо функция класса

$C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая условиям

$$\min_{\Omega} \varphi(x) \geqslant \frac{1}{2}, \quad \varphi|_S = 1, \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_S = m,$$

где $m = \text{const} > \frac{b_0}{\delta}$. Тогда $-\frac{1}{\varphi} b_i \varphi_{x_i}\big|_{S_T} = m b_i \cos(\mathbf{n}, x_i) \geqslant$ $\geqslant \delta m > b_0$. Функция $w$, как легко видеть, удовлетворяет в $Q_T$ уравнению того же типа, что и $u(x, t)$, а на $S_T$ удовлетворяет условию

$$b_i w_{x_i} + \left(b - b_i \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi}\right) w \bigg|_{S_T} = \psi\varphi|_{S_T}$$

и, следовательно, подчиняется условиям теоремы 2.2. Ввиду этого для нее справедливы оценки типа (2.21), из которых следует оценка (2.22) для $u$.

Замечание 2.1. Как видно из доказательства теорем 2.1—2.3 и следствия 2.1, они и их утверждения (2.12), (2.21), (2.22) остаются в силе и для уравнений (2.2), коэффициенты $a_i(x, t)$ которых имеют изолированные полярности по $x$ ниже первого порядка. Последнее означает, что в особой точке $x = x^0$ произведение $a_i(x, t)(x - x^0)$ должно стремиться к нулю при $x \to x^0$.

Из теорем 2.1 — 2.3 следуют теоремы единственности для классических решений краевых задач. Именно:

Теорема 2.4. *Задачи* (2.2), (2.8), (2.9) *и* (2.2), (2.8), (2.20) *при условиях соответствующих теорем* 2.1 — 2.3 *не могут иметь более одного классического решения.*

Действительно, разность $u(x, t)$ двух возможных решений любой из этих задач удовлетворяет соответствующему однородному уравнению и однородным начальному и краевому условиям, так что для нее справедливо соответствующее неравенство (2.12), (2.21) или (2.22) с $f = \varphi_0 = \psi \equiv 0$, из которого следует, что $u \equiv 0$.

Покажем теперь, что задача Коши также не может иметь двух различных классических решений. Для этого докажем теорему.

Теорема 2.5. *Пусть функция* $u(x, t)$ *непрерывна в полосе* $\Pi_T = \{|x| < \infty, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ *и ее модуль не превосходит какого-либо числа* $M$. *Пусть при* $0 < t \leqslant T$ *она* *удовлетворяет уравнению* (2.2), *модули коэффициентов* $a_{ij}$, $a_i$ *которого не превосходят* $c$, *а* $a(x, t) \geqslant -a_0$, *где* $c$ *и* $a_0$ — *какие-либо неотрицательные постоянные. Тогда при выполнении условия* (2.11) *для* $u(x, t)$ *справедлива оценка*

$$\max_{\Pi_T} |u(x, t)| \leqslant (\max_{E_n} |u(x, 0)| + t \max_{\Pi_T} |f|)\, e^{a_0 t}. \quad (2.23)$$

Для доказательства (2.23) рассмотрим функцию

$$w(x, t) = u(x, t)\, e^{-(a_0+\varepsilon)t} - c_1 - c_2 t - \frac{M}{R^2}(x^2 + c_3 t),$$

где $c_1 = \max_{E_n} |u(x, 0)|$, $c_2 = \max_{\Pi_T} |f(x, t)|$, а $R$, $\varepsilon$ и $c_3$ — произвольные положительные числа. Подсчитаем $(\mathscr{L} + a_0 + \varepsilon) w$:

$$(\mathscr{L} + a_0 + \varepsilon) w = f e^{-(a_0+\varepsilon)t} - c_2 [1 + (a + a_0 + \varepsilon) t] - \\ - \frac{M}{R^2}\left[c_3 - 2\sum_i a_{ii} + 2a_i x_i + (a + a_0 + \varepsilon) \cdot (x^2 + c_3 t)\right] - \\ - (a + a_0 + \varepsilon) c_1.$$

Подберем число $c_3$ при фиксированном $\varepsilon > 0$ столь большим, чтобы выражение, стоящее при $\frac{M}{R^2}$, было бы неотрицательным. Тогда $(\mathscr{L} + a_0 + \varepsilon) w \leqslant f e^{-(a_0+\varepsilon)t} - c_2 \leqslant 0$. Кроме того, на боковой поверхности и нижнем основании цилиндра $Q_T(R) = \{|x| < R,\ 0 < t < T\}$ функция $w$ неположительна. Поэтому в силу следствия 2.1 $w$ неположительна во всем $Q_T(R)$. Возьмем произвольную точку $(x^0, t^0)$ из полосы $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда по доказанному $w(x^0, t^0) \leqslant 0$ при $|x^0| \leqslant R$. Устремляя в этом неравенстве $R$ к бесконечности, а затем $\varepsilon$ к нулю, получим желаемую оценку $u(x, t)$ сверху

$$u(x^0, t^0) \leqslant (c_1 + c_2 t^0)\, e^{a_0 t^0}.$$

Для оценки $u(x, t)$ снизу надо взять функцию

$$\widehat{w}(x, t) = u(x, t)\, e^{-(a_0+\varepsilon)t} + c_1 + c_2 t + \frac{M}{R^2}(x^2 + c_3 t)$$

с теми же значениями параметров, что и выше. Для нее $(\mathscr{L} + a_0 + \varepsilon)\widehat{w} \geqslant 0$, и на нижнем основании и боковой поверхности $Q_T(R)$ она неотрицательна. Поэтому $\widehat{w}(x^0, t^0) \geqslant 0$ при $|x_0| \leqslant R$, откуда, устремляя $R$ к $\infty$, а $\varepsilon$ к нулю, получим оценку (2.23) для $u(x, t)$ снизу.

Замечание 2.2. Теорема 2.5 допускает усиления и в отношении условий на коэффициенты (например, можно допустить определенный рост их при $|x| \to \infty$ или существование особенностей указанного в замечании 2.1 типа) и в отношении заменены условия: $\max\limits_{\Pi_T} |u| < \infty$ на условие $|u(x, t)| \leqslant ce^{c_1 x^2}$ с любыми $c$ и $c_1$. Мы не будем приводить здесь различные обобщения и усиления теорем 2.1—2.5, а отошлем читателя к литературе, где это имеется [7, $9_{3,4}$, 12, 21, $23_2$, 47, 67, 68; **$15_2$**, **26**, **32**, **44**, **53**, **55** и др.].

Из теоремы 2.5 следует теорема единственности для задачи Коши в ее классической постановке:

Теорема 2.6. *При условиях теоремы* 2.5 *задача Коши имеет не более одного классического решения в классе ограниченных функций.*

Ниже устанавливается результат, аналогичный теореме 2.3 в неограниченной области $\Omega$. Он касается оценки максимума модуля ограниченного решения задачи с косой производной (2.2), (2.20), (2.8). Этот результат верен и для первой краевой задачи в неограниченной области (см. [32]).

Теорема 2.7. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.3, *причем область* $\Omega$ *такова, что в ней существует функция* $\varphi(x)$, *обладающая следующими свойствами:*

$$\varphi(x) \in O^2(\overline{\Omega}), \quad \min_{\Omega} \varphi(x) \geqslant \frac{1}{2}, \quad \varphi|_S = 1, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = m,$$

*где* $m = \text{const} > \frac{b_0}{\delta}$. *Тогда для* $u(x, t)$ *справедлива оценка*

$$|u(x, t)| \leqslant c\Big(\sup_{\Omega} |\psi_0(x)| + \sup_{S_T} |\psi(x, t)| + \sup_{Q_T} |f(x, t)|\, t\Big) e^{At}, \qquad (2.24)$$

*где* $c$ *и* $A$ — *постоянные, зависящие от коэффициентов оператора* $\mathscr{L}$, $b_i$, $b$ *и от* $\varphi(x)$.

Доказательство. Функция $v(x, t) = u(x, t)\varphi(x)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\tilde{\mathscr{L}}v \equiv \mathscr{L}v - 2\varphi a_{ij}(\varphi^{-1})_{x_i} v_{x_j} + \\ + \varphi\left[a_i(\varphi^{-1})_{x_i} - a_{ij}(\varphi^{-1})_{x_i x_j}\right] v = f\varphi,$$

$$v|_{t=0} = \psi_0(x)\varphi(x),$$

$$b_i v_{x_i} + \beta v|_S = \psi\varphi|_{S_T},$$

где

$$\beta = b + \varphi b_i(\varphi^{-1})_{x_i} = b - \frac{b_i \varphi_{x_i}}{\varphi} > 0.$$

Введем еще функцию

$$w(x, t) = v(x, t)\, e^{-(\tilde{a}_0+\varepsilon)t} - c_1 - c_2 t - \frac{M}{R^2}(x^2 + c_3 t), \quad (2.25)$$

в которой постоянные $c_1$, $c_2$, $M$, $\tilde{a}_0$ определим следующим образом:

$$c_1 = \delta + \sup_{\Omega} |\psi_0(x)|\varphi(x) + \sup_{S_T} \frac{|\psi(x, t)|\varphi(x)}{\beta(x, t)}, \quad (2.26)$$

где $\delta$ — произвольная положительная постоянная,

$$c_2 = \sup_{Q_T} |f(x, t)|\varphi(x),$$

$$M = \sup_{Q_T} |v(x, t)|,$$

$$\tilde{a}_0 = \max\left\{0; -\inf_{Q_T}\left\{a(x, t) + \varphi\left[a_i(\varphi^{-1})_{x_i} - a_{ij}(\varphi^{-1})_{x_i x_j}\right]\right\}\right\}.$$

Постоянную $c_3$ при фиксированном $\varepsilon > 0$ выберем таким образом, чтобы выполнялось $(\tilde{\mathscr{L}} + \tilde{a}_0 + \varepsilon)\, w(x, t) \leqslant 0$; как было установлено при исследовании функции (2.25) в доказательстве теоремы 2.5, такой выбор $c_3$ возможен.

Пусть $\Omega_R$ — часть области $\Omega$, находящаяся в шаре $K_R$: $|x| \leqslant R$. Ее граница $S_{(R)}$ состоит из двух частей: $S_{(R)} = S^1_{(R)} + S^2_{(R)}$, где $S^1_{(R)} = S \cap K_R$, а $S^2_{(R)}$ — часть границы шара $K_R$, лежащая в $\Omega$. Покажем, что если $R$ достаточно велико, то при $x \in \Omega_R$ $w(x, t) \leqslant 0$. Действительно, из определения функции $w$ и постоянных $c_1$ и $M$, а также из неравенства $(\tilde{\mathscr{L}} + \tilde{a}_0 + \varepsilon)\, w \leqslant 0$ следует, что функция $w(x, t)$

не может достигать положительного максимума в $\Omega_R \times [0, T]$ и при $x \in S^2_{(R)}$. На $S^1_{(R)}$ функция $w(x, t)$ удовлетворяет краевому условию

$$b_i w_{x_i} + \beta w = \psi\varphi e^{-(\widetilde{a}_0+\varepsilon)t} - b_i F_{x_i} - \beta F,$$

где

$$F(x, t) = c_1 + c_2 t + \frac{M}{R^2}(x^2 + c_3 t).$$

Поэтому в точке максимума на $S^1_{(R)}$

$$\beta w \leqslant \psi\varphi e^{-(\widetilde{a}_0+\varepsilon)t} - b_i F_{x_i} - \beta F. \tag{2.27}$$

Но в силу (2.26)

$$\psi\varphi e^{-(\widetilde{a}_0+\varepsilon)t} - \beta F \leqslant \psi\varphi e^{-(\widetilde{a}_0+\varepsilon)t} - \beta c_1 - \frac{\beta M}{R^2} x^2 \leqslant -\frac{\beta M}{R^2} x^2 - \beta\delta,$$

$$|b_i F_{x_i}| \leqslant \max|b_i| \frac{2|x_i| M}{R^2}.$$

Поэтому при больших $R$ в точке максимума на $S^1_{(R)}$

$$\beta w \leqslant 0.$$

Это доказывает, что функция $w(x, t)$ вообще не имеет точек положительного максимума в $\overline{\Omega}_R \times [0, T]$. Итак,

$$w(x, t) \leqslant 0.$$

Устремляя $R \to \infty$, а $\varepsilon$ к нулю, убедимся, что всюду в $Q_T$

$$v(x, t) \leqslant (c_1 + c_2 t) e^{\widetilde{a}_0 t}.$$

Это ввиду произвольности $\delta$ дает желаемую оценку (2.24) сверху для $u(x, t)$. Аналогичным образом получается оценка снизу. Теорема 2.7 доказана.

Мы будем применять эту теорему в § 6 главы IV для задачи с косой производной в полупространстве, где функция $\varphi(x)$, существование которой требуется в условии теоремы, строится очень просто.

Теоремы 2.4 и 2.6 позволяют заключить о справедливости теоремы единственности для краевых задач и задачи Коши в их классической постановке и для нелинейных параболических уравнений. Так, например, пусть $u'(x, t)$ и

$u''(x, t)$ — два решения уравнения (2.4), в котором функции $a_{ij}(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ имеют частные производные по $u$ и $p$. Вычтем из уравнения для $u'$ уравнение для $u''$ и результат вычитания запишем сначала так:

$$(u'-u'')_t - a_{ij}(x, t, u', u'_x)(u'-u'')_{x_i x_j} -$$
$$- u''_{x_i x_j} \int_0^1 \frac{d}{d\tau} a_{ij}[x, t, \tau u' + (1-\tau) u'', \tau u'_x + (1-\tau) u''_x] d\tau +$$
$$+ \int_0^1 \frac{d}{d\tau} a[x, t, \tau u' + (1-\tau) u'', \tau u'_x + (1-\tau) u''_x] d\tau = 0,$$

а затем как линейное уравнение для $v = u' - u''$:

$$v_t - \hat{a}_{ij}(x, t) v_{x_i x_j} + b_i(x, t) v_{x_i} + c(x, t) v = 0, \quad (2.28)$$

в котором

$$\hat{a}_{ij}(x, t) = a_{ij}(x, t, u'(x, t), u'_x(x, t)),$$
$$b_k(x, t) = -u''_{x_i x_j}(x, t) \int_0^1 \frac{\partial a_{ij}[\ldots]}{\partial u_{x_k}} d\tau + \int_0^1 \frac{\partial a[\ldots]}{\partial u_{x_k}} d\tau,$$
$$c(x, t) = -u''_{x_i x_j}(x, t) \int_0^1 \frac{\partial a_{ij}[\ldots]}{\partial u} d\tau + \int_0^1 \frac{\partial a[\ldots]}{\partial u} d\tau.$$

Если коэффициенты в (2.28) ограничены в $\overline{Q}_T$ (или хотя бы удовлетворяют условиям замечания 2.1), то из однородности (2.28) и обращения $v$ в нуль на $\Gamma_T$ следует в силу теоремы 2.4 тождественное в $Q_T$ равенство $v(x, t)$ нулю, т. е. совпадение $u'$ и $u''$. Одно из достаточных условий этого дается следующей теоремой:

Теорема 2.8. *Если коэффициенты $a_{ij}$ удовлетворяют условию*

$$a_{ij}(x, t, u, p)\xi_i\xi_j \geqslant 0$$

*и $a_{ij}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ и их частные производные по $u$ и $p$ ограничены на любом компактном множестве значений своих аргументов, то первая краевая* *задача для* (2.4) *имеет не более одного решения в классе функций, принадлежащих* $C(\overline{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ *и имеющих ограниченные в* $\overline{Q}_T$ *производные по* $x$ *первого и второго порядков.*

Аналогичная теорема верна и для задачи Коши.

Теоремы 2.1—2.3 и 2.5 без труда обобщаются на квазилинейные уравнения. Приведем здесь теорему, позволяющую оценивать решения первой краевой задачи для уравнений (2.4).

Теорема 2.9. *Пусть* $u(x, t)$ *есть классическое решение уравнения* (2.4) *в* $Q_T$. *Предположим, что функции* $a_{ij}(x, t, u, p)$ *и* $a(x, t, u, p)$ *принимают конечные значения при любых конечных* $u$, $p$ *и* $(x, t) \in \overline{Q}_T$, *а при* $(x, t) \in Q_T$ *и произвольных* $u$

$$a_{ij}(x, t, u, 0)\,\xi_i\xi_j \geqslant 0 \tag{2.29}$$

*и*

$$ua(x, t, u, 0) \geqslant -b_1u^2 - b_2, \tag{2.30}$$

*где* $b_1$ *и* $b_2$ — *какие-либо неотрицательные константы. Тогда*

$$\max_{Q_T}|u(x, t)| \leqslant \inf_{\lambda > b_1} e^{\lambda T}\left[\max_{\Gamma_T}|u|,\ \sqrt{\frac{b_2}{\lambda - b_1}}\right]. \tag{2.31}$$

*Если вместо* (2.30) *выполнено условие*

$$ua(x, t, u, 0) \geqslant -\Phi(|u|)\,|u| - b_2, \tag{2.32}$$

*где* $b_2 \geqslant 0$, *а* $\Phi(\tau)$ — *неубывающая положительная функция* $\tau \geqslant 0$, *удовлетворяющая условию*

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} = \infty, \tag{2.33}$$

*то для* $u(x, t)$ *справедлива оценка*

$$\max_{Q_T}|u(x, t)| \leqslant \inf_{\lambda > 1} \varphi(\xi), \tag{2.34}$$

$$\xi = e^{\lambda T}\max\left\{1;\ \varphi^{-1}\left(\frac{b_2}{(\lambda - 1)\,\Phi(0)}\right);\ \varphi^{-1}\left(\max_{\Gamma_T}|u|\right)\right\},$$

*в которой $\varphi^{-1}(\xi)$ есть функция, обратная функции $\varphi(\xi)$, определяемой равенством*

$$\int_0^{\varphi(\xi)} \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} = \ln \xi. \tag{2.35}$$

Доказательство первого утверждения теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1. По существу, так же доказывается и второе утверждение. Именно, введем функцию $v$, связанную с $u$ равенством $u = \varphi(v)$. Из (2.4) получим соотношение для $v$

$$v_t - a_{ij}(x, t, u, u_x)\left(v_{x_i x_j} + \frac{\varphi''}{\varphi'} v_{x_i} v_{x_j}\right) + \\ + \frac{1}{\varphi'} a(x, t, u, u_x) = 0. \tag{2.36}$$

Из (2.36) для функции $\hat{v} = ve^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, следует равенство

$$\hat{v}_t - a_{ij}(x, t, u, u_x)\left(\hat{v}_{x_i x_j} + \frac{\varphi''}{\varphi'} \hat{v}_{x_i} \hat{v}_{x_j} e^{\lambda t}\right) + \\ + \frac{1}{\varphi'} a(x, t, u, u_x) e^{-\lambda t} + \lambda\hat{v} = 0. \tag{2.37}$$

Если наибольшее в $\overline{Q}_T$ значение $\hat{v}$ принимается в какой-либо внутренней точке $(x_0, t_0)$ области $Q_T$ и $\hat{v}(x_0, t_0) \geqslant e^{-\lambda t_0}$, то в этой точке $\hat{v}_t = 0$, $-a_{ij}\hat{v}_{x_i x_j} \geqslant 0$, $\hat{v}_{x_i} = 0$, а следовательно, и $u_{x_i} = \varphi'(v) v_{x_i} = \varphi'(v) \hat{v}_{x_i} e^{\lambda t} = 0$, и потому на основании (2.37) в этой точке имеем

$$[a(x, t, u, 0) + \lambda\varphi'(v) v]\,|_{(x_0, t_0)} \leqslant 0. \tag{2.38}$$

Так как по предположению $\hat{v}(x_0, t_0) \geqslant e^{-\lambda t_0}$, то $v(x_0, t_0) \geqslant 1$ и потому $u(x_0, t_0) \geqslant 0$. Умножая (2.38) на $u(x_0, t_0)$ и используя (2.32), получим

$$-b_2 + [-\Phi(u) + \lambda\varphi'(v) v]\, u \leqslant 0. \tag{2.39}$$

Функция $\varphi(v)$ удовлетворяет, как легко видеть, дифференциальному уравнению $\varphi'(v) v = \Phi(\varphi)$ и условию $\varphi(1) = 0$.

При изменении $v$ от 0 до $\infty$ функция $\varphi(v)$ меняется монотонно (в силу условия (2.33)) от $-\infty$ до $+\infty$. При таком $\varphi$

неравенство (2.39) принимает вид

$$(\lambda-1)\,u\Phi(u)\leqslant b_2.$$

Это неравенство при $\lambda>1$ дает оценку $u(x_0,\ t_0)$ сверху, именно:

$$u(x_0,\ t_0)\leqslant\frac{b_2}{(\lambda-1)\,\Phi(0)}. \tag{2.40}$$

В силу связей между $u$, $v$ и $\hat{v}$ и того, что $\max\limits_{Q_T}\hat{v}(x,\ t)=\hat{v}(x_0,\ t_0)$, для любой точки $(x,\ t)\in\overline{Q}_T$ будем иметь неравенство

$$\begin{aligned}v(x,\ t)=\hat{v}(x,\ t)\,e^{\lambda t}\leqslant\hat{v}(x_0,\ t_0)\,e^{\lambda t}=\\ =v(x_0,\ t_0)\,e^{\lambda(t-t_0)}=\varphi^{-1}(u(x_0,\ t_0))\,e^{\lambda(t-t_0)}\leqslant\\ \leqslant\varphi^{-1}\left(\frac{b_2}{(\lambda-1)\,\Phi(0)}\right)e^{\lambda(t-t_0)}\leqslant\varphi^{-1}\left(\frac{b_2}{(\lambda-1)\,\Phi(0)}\right)e^{\lambda T}.\end{aligned}$$

Это неравенство в сочетании с двумя другими возможностями для $\max\limits_{Q_T}\hat{v}$ дает искомую оценку $u(x,\ t)$ сверху. Аналогичные рассуждения с функцией $-u(x,\ t)$ дают оценку $u(x,\ t)$ снизу. Теорема 2.9 доказана.

В § 7 главы V будет приведена еще одна теорема, позволяющая оценивать максимум модуля классических решений уравнений (2.3), подчиненных другим краевым условиям.

## § 3. О допустимых расширениях понятия решения

**1. О теоремах единственности.** Если коэффициенты и свободные члены уравнений (2.1) или (2.2) являются негладкими функциями, то эти уравнения в общем случае не имеют классических решений. Однако не исключена возможность, что они обладают решениями, принадлежащими классу функций $\mathfrak{M}$, более широкому, чем это требуется при классической постановке, и в то же время достаточно узкому для того, чтобы сохранить одно из основных свойств краевых задач для уравнений параболического типа — их детерминированность (т. е. теоремы единственности). В этом случае естественно расширить классические постановки задач и заменить их разысканиями решений, принадлежащих классу $\mathfrak{M}$. Мы будем считать расширение (и соответствующий ему класс $\mathfrak{M}$ обобщенных решений) *допустимым*, если для него сохраняется теорема единственности.

Выбор класса $\mathfrak{M}$ диктуется свойствами гладкости коэффициентов уравнения (т. е. суммируемостью их и их производных определенного порядка с теми или иными степенями) и других известных в задаче функций и должен быть сделан прежде всего так, чтобы всем условиям задачи можно было придать вид, имеющий смысл для любого элемента $\mathfrak{M}$ *). Это требование не определяет, вообще говоря, класс $\mathfrak{M}$ однозначно, но коль скоро выбор $\mathfrak{M}$ сделан, трансформация условий задачи проводится по определенному стандарту. Поясним это на примере задачи

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\, u_{x_j}\right) = f(x, t), \qquad (3.1_1)$$

$$u|_{t=0} = \psi_0(x), \quad u|_{S_T} = 0, \qquad (3.1_2)$$

в которой $a_{ij}$ суть недифференцируемые функции, удовлетворяющие условию (2.5), $f(x, t) \in L_2(Q_T)$, а $\psi_0(x) \in L_2(\Omega)$. Ясно, что при таких $a_{ij}$ уравнению $(3.1_1)$ надо придать иной вид, не содержащий производных от $a_{ij}$. Это делается так: уравнение $(3.1_1)$ умножается на произвольную гладкую функцию $\eta(x, t)$, затем обе части интегрируются по $Q_T$ и в членах, содержащих $a_{ij}$, проводится однократное интегрирование по частям. В результате приходим к тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \left(u_t\eta + a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i}\right) dx\, dt - \int\limits_{S_T} \frac{\partial u}{\partial N}\eta\, ds\, dt = \int\limits_{Q_T} f\eta\, dx\, dt. \qquad (3.2_1)$$

Оно, как хорошо известно, эквивалентно уравнению $(3.1_1)$, если все функции, входящие в него, достаточно гладкие. В случае же недифференцируемых $a_{ij}$ $(3.2_1)$ имеет смысл (на хороших функциях $u$ и $\eta$), а $(3.1_1)$ не имеет. Возьмем сначала в качестве $\mathfrak{M}$ все функции из $W_2^{1,1}(Q_T)$, имеющие производные $u_x$, суммируемые по любому гладкому многообразию размерности $n$. Тогда задача $(3.1_1)$, $(3.1_2)$ переформулируется, как задача определения функции $u$ из $\mathfrak{M}$, удо-

---

*) Нас интересуют здесь лишь те случаи, в которых $\mathfrak{M}$ не зависит от конкретного вида этих известных функций, точнее, расположения их особых точек.

влетворяющей условиям $(3.1_2)$ и тождеству $(3.2_1)$ при любой гладкой $\eta$. Такую функцию $u$ назовем обобщенным решением задачи $(3.1_1)$, $(3.1_2)$ из класса $\mathfrak{M}$.

Если, однако, в этом классе $\mathfrak{M}$ решения нет (или мы не в состоянии доказать, что оно в нем существует), то естественно расширить класс $\mathfrak{M}$. Так, например, взять $\mathfrak{M}=W_2^{1,1}(Q_T)$. В этом случае интеграл $\int\limits_{S_T}\frac{\partial u}{\partial N}\eta\,ds\,dt$, входящий в $(3.2_1)$, не имеет смысла для любого $u$ из $W_2^{1,1}(Q_T)$ и, чтобы избавиться от него, придется потребовать обращения $\eta$ в нуль на $S_T$. Для таких $\eta$ $(3.2_1)$ примет вид

$$\int\limits_{Q_T}\left(u_t\eta+a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i}\right)dx\,dt=\int\limits_{Q_T}f\eta\,dx\,dt, \qquad (3.2_2)$$

осмысленный для любого элемента $u$ из $W_2^{1,1}(Q_T)$. Это позволяет задачу $(3.1_1)$, $(3.1_2)$ понимать теперь как задачу на разыскание функции $u$ из $W_2^{1,1}(Q_T)$, удовлетворящей условиям $(3.1_2)$ и тождеству $(3.2_2)$ при любой гладкой $\eta$, равной нулю на $S_T$. Такие решения назовем *обобщенными решениями* задачи $(3.1_1)$, $(3.1_2)$ *из класса* $W_2^{1,1}(Q_T)$.

Если и класс $W_2^{1,1}(Q_T)$ окажется недостаточно широким, то можно отказаться от существования производной $u_t$. Но это повлечет необходимость изменения вида тождества $(3.2_2)$, ибо в него входит производная $u_t$. Более того, если в качестве $\mathfrak{M}$ взять, например, пространство $W_2^{1,0}(Q_T)$, то придется найти другую форму и начальному условию $(3.1_2)$, ибо элементы $W_2^{1,0}(Q_T)$ не обладают какой-либо (хотя бы интегральной) непрерывностью по $t$. Мы добьемся того и другого, проинтегрировав по частям первый член в $(3.2_2)$ и подставив после этого $\psi_0(x)$ вместо $u(x, 0)$. Однако в полученное при этом тождество войдет член $\int\limits_{\Omega}u(x, T)\eta(x, T)\,dx$, не имеющий смысла для любого элемента $u$ из $W_2^{1,0}(Q_T)$. Чтобы убрать его, придется ограничиться $\eta(x, t)$, равными нулю при $t=T$. Для таких $\eta(x, t)$ $(3.2_2)$ примет вид

$$\int\limits_{Q_T}\left(-u\eta_t+a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i}\right)dx\,dt-\int\limits_{\Omega}\psi_0\eta(x,\,0)\,dx=\\ =\int\limits_{Q_T}f\eta\,dx\,dt,\qquad(3.2_3)$$

имеющий смысл для любой функции $u\in W_2^{1,0}(Q_T)$. *Обобщенное решение задачи* $(3.1_1)$, $(3.1_2)$ из класса $W_2^{1,0}(Q_T)$ можно теперь определить как элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющий тождеству $(3.2_3)$ при всех гладких $\eta(x, t)$, равных нулю на $S_T$ и при $t=T$. На этот раз тождество $(3.2_3)$ вобрало в себя и уравнение и начальное условие.

Если бы мы захотели дальше расширять класс $W_2^{1,0}(Q_T)$ с тем, чтобы отказаться от существсвания производных $u_x$ у обобщенного решения $u$, то нам пришлось бы перебрасывать производные $\frac{\partial}{\partial x_j}$ с $u$ на $a_{ij}\eta_{x_i}$, что невозможно при недифференцируемых $a_{ij}$. Следовательно, коэффициенты ставят предел возможным расширениям класса обобщенных решений, что и было отмечено в предисловии. Можно было бы расширить класс $W_2^{1,0}(Q_T)$ в направлении снижения степени суммируемости производных $u_x$, т. е. заменить его иа $W_q^{1,0}(Q_T)$, $q<2$, но мы этого делать не будем.

Итак, в качестве наиболее широкого класса обобщенных решений для уравнений $(3.1_1)$ с недифференцируемыми ограниченными $a_{ij}$ возьмем класс $W_2^{1,0}(Q_T)$, элементы которого не обладают никакой гладкостью по $t$. С другой стороны, его нельзя сузить дальше класса $W_{2,\infty}^{1,1}(Q_T)$, состоящего из элементов $W_2^{1,1}(Q_T)$, имеющих ограниченную обобщенную производную по $t$, ибо для таких уравнений имеются решения $u(x, t)$ класса $W_{2,\infty}^{1,1}(Q_T)$ с разрывной производной $u_t$ (например, уравнение $u_t-a(t)\Delta u=0$ имеет решения $\varphi(t)\varphi_k(x)$, где $\varphi_k(x)$ есть собственная функция оператора Лапласа при нулевом граничном условии с собственным значением $\lambda_k$, а $\varphi(t)$ — решение уравнения $\varphi'-a\lambda_k\varphi=0$).

Классы обобщенных решений задачи $(3.1_1)$, $(3.1_2)$, указанные выше, вкладываются один в другой (предыдущий в последующий), что порождает кажущуюся неоднозначность в их определении. Так, например, обобщенное решение задачи $(3.1_1)$, $(3.1_2)$ из $W_2^{1,1}(Q_T)$ можно было бы определить как функцию из $W_2^{1,1}(Q_T)$, удовлетворяющую всем условиям задачи в форме, указанной для обобщенных решений из $W_2^{1,0}(Q_T)$ той же задачи. Но, как легко видеть, такие два определения эквивалентны, причем первое оказывается удобнее второго. Такая же несущественная неоднозначность имеется и в указании класса функций $\eta(x, t)$, входящих в тождества $(3.2_1)$ — $(3.2_3)$. Так, например, при определении обобщенного решения из $W_2^{1,1}(Q_T)$ мы потребовали, чтобы тождество $(3.2_2)$ было справедливо при любой гладкой функции $\eta(x, t)$, равной нулю на $S_T$. Вместо этого можно было бы считать $\eta(x, t)$ произвольной функцией из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Информация, которую дает $(3.2_2)$ в том и другом случае, оказывается одинаковой, ибо первое множество $\eta$ плотно во втором — в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$.

Итак, мы показали, как определение обобщенного решения задачи диктуется классом $\mathfrak{M}$, к которому оно принадлежит, и потому в дальнейшем мы иногда будем ограничиваться лишь указанием класса $\mathfrak{M}$, не приводя полного определения обобщенного решения из этого класса.

Выясним теперь, какие надо наложить ограничения на коэффициенты младших членов уравнения (2.1), чтобы для этих уравнений оказался допустимым какой-нибудь из классов между $W_2^{1,0}(Q_T)$ и $W_{2,\infty}^{1,1}(Q_T)$. Первым ориентиром для этого служат примеры, построенные нами для уравнений

$$\mathcal{M}u \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,u_{x_j} + a_i(x)\,u\right) + b_i(x)\,u_{x_i} + \\ + a(x)\,u = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} - f(x) \qquad (3.3)$$

с $a_{ij}(x)$, удовлетворяющими лишь условию равномерной эллиптичности

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \quad \nu > 0.$$

Решения $u(x)$ этих уравнений можно рассматривать как решения соответствующих им параболических уравнений $u_t + \mathcal{M}u = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - f$ вида (2.1), не зависящие от $t$. С помощью этих примеров (они подробно описаны в книге [I]) было выяснено, что естественным классом $\mathfrak{M}$ допустимых решений для (3.3) при $a_i \equiv b_i \equiv a \equiv 0$ является класс $W_2^1(\Omega)$ и что для его допустимости в общем случае младшие коэффициенты $\mathcal{M}$ должны подчиняться ограничениям

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i^2(x),\ \sum_{i=1}^{n} b_i^2(x),\ a(x) \right\|_{q,\,\Omega} < \infty, \quad q > \frac{n}{2},$$

причем случай $q = \frac{n}{2}$ является уже особым. Аналогом этих условий для уравнений (2.1) являются условия

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i^2(x, t), \sum_{i=1}^{n} b_i^2(x, t),\ a(x, t) \right\|_{q,\,\infty,\,Q_T} < \infty, \quad q > \frac{n}{2}. \tag{3.4}$$

На необходимость подобных ограничений указывают и нижеследующие примеры (все они даются для задачи Коши, что облегчает их конструкцию).

Пример 1. Как легко подсчитать, ограниченная функция $u(x, t)$, равная 0 при $t \leqslant 1$ и $e^{-\frac{x^2}{4(t-1)}}$ при $t > 1$, удовлетворяет во всех точках, кроме $(x = 0,\ t = 1)$, уравнению

$$u_t - \Delta u + n \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|^2} u_{x_i} = 0. \tag{3.5}$$

Функция $u_{(1)}(x, t) = \int_0^t u(x, \tau)\,d\tau$ имеет непрерывные производные по $x$ во всех точках, производную по $t$ всюду, кроме точки $(x = 0,\ t = 1)$, производные второго порядка по $x$ всюду, кроме луча $(x = 0,\ t \geqslant 1)$, причем производные $u_{(1)t}$ и $u_{(1)x_ix_j}$, $i \neq j$ ограничены в полуплоскости $t \geqslant 0$, а производные $u_{(1)x_ix_i}$ имеют оценку $|u_{(1)x_ix_i}(x, t)| \leqslant c\,|\ln|x||$ вблизи луча $(x = 0,\ t \geqslant 1)$. Кроме этого, функция $u_{(1)}$ как интеграл по $t$ от решения $u$ уравнения (3.5), коэффициенты которого не зависят от $t$, сама удовлетворяет уравнению (3.5) всюду, кроме точек ($x=0$, $t\geqslant 1$). Такими же свойствами обладают и функции $u_{(k)}(x, t)=\int\limits_0^t u_{(k-1)}(x, \tau)\,d\tau$, $k=2, 3, \ldots$ Все они удовлетворяют однородному уравнению (3.5), равны нулю при $t=0$ и быстро убывают при $|x|\to\infty$. Таким образом мы сталкиваемся с нарушением теоремы единственности задачи Коши для уравнений (3.5) в классе «почти классических решений». Отсюда следует, что уравнения (3.5), в которых коэффициенты $b_i(x, t)=\frac{nx_i}{|x|^2}$ при $u_{x_i}$ имеют сингулярности по $x$ первого порядка, надо исключить. Это и дает условие (3.4) (случай равенства $q=n$ мы здесь анализировать не будем). Если уравнение (3.5) переписать в виде

$$u_t-\Delta u+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{nx_i}{|x|^2}u\right)-\frac{n(n-2)}{|x|^2}u=0 \tag{3.6}$$

и идентифицировать коэффициенты $-\frac{nx_i}{|x|^2}$ и $-\frac{n(n-2)}{|x|^2}$ с коэффициентами $a_i(x, t)$ и $a(x, t)$ уравнения (2.1) соответственно, то те же функции $u_{(k)}(x, t)$ указывают на необходимость ограничений типа (3.4) и на коэффициенты $a_i$ и $a$.

Пример 2. Та же, что и в примере 1, функция $u(x, t)$ удовлетворяет и однородному уравнению

$$u_t-\Delta u-\frac{n}{2(t-1)}u=0. \tag{3.7}$$

Ее усреднения по $x$:

$$u_\rho(x, t)=\int\limits_{|x-y|\leqslant\rho}\omega_\rho(|x-y|)\,u(y, t)\,dy$$

с бесконечно дифференцируемыми ядрами $\omega_\rho(\xi)$, как нетрудно показать, непрерывны по $(x, t)$ в полуплоскости $t\geqslant 0$ вместе с их производными по $x$ любого порядка, производные $\frac{\partial u_\rho(x, t)}{\partial t}$ при $n>2$ непрерывны по $(x, t)$, а при $n=2$ имеют особенность по $t$ лишь в точке ($x=0$, $t=1$), причем она слабее любой степени $(t-1)^{-\alpha}$, $\alpha>0$. Таким образом, функции $u_\rho(x, t)$, $\rho > 0$, дают другой пример нарушения теоремы единственности задачи Коши для уравнений (2.1), причем на этот раз даже в классе классических решений (если $n > 2$). Тем самым уравнение (3.7) указывает другой случай недопустимых особенностей в коэффициентах. Эти особенности устраняются требованием

$$\|a\|_{\infty, 1, Q_T} < \infty. \tag{3.8}$$

Условия (3.4) и (3.8) служат крайними ориентирами, указывающими на разумность следующих ограничений на коэффициенты $a_i(x, t)$, $b_i(x, t)$ и $a(x, t)$ уравнений (2.1):

$$\left.\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i^2,\ \sum_{i=1}^{n} b_i^2,\ a \right\|_{q, r, Q_T} < \infty \\ \text{с}\quad & \\ &\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} \leqslant 1,\quad r \in [1, \infty)^{*)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

**2. О возможной гладкости обобщенных решений линейных уравнений.** В главе III доказывается, что ограничений (2.5) и (3.9) на коэффициенты уравнений (2.1) достаточно для того, чтобы строить для них разумную теорию обобщенных решений краевых задач и задачи Коши. В качестве допустимого класса $\mathfrak{M}$ этих решений берется пространство $V_2^{1, \frac{1}{2}}(Q_T)$, состоящее, грубо говоря, из функций, имеющих производные по $x$ первого порядка и производную по $t$ порядка 1/2. В $V_2^{1, \frac{1}{2}}(Q_T)$ имеют место теоремы единственности. Ограничения на $f_i$, $f$ и $\psi_0$, при которых получаются эти обобщенные решения, тоже вызваны существом дела и не могут быть ослаблены в терминах избранных нами пространств $L_{q,r}(Q_T)$. Так, функция $\psi_0$ должна быть

---

*) Случай $r = \infty$, $q = \frac{n}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ удобнее рассмотреть как частный случай (3.9) с $r = 1 + \frac{n}{2\varepsilon}$ и $q = \frac{n}{2} + \varepsilon$ или даже с $r = 1 + \frac{n}{\varepsilon}$, $q = \frac{n}{2} + \varepsilon$, для которых $\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} < 1$.

элементом $L_2(\Omega)$, а $f_i$ и $f$ должны подчиняться условиям

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \right\|_{1,\,1,\,Q_T}, \quad \|f\|_{q_1,\,r_1,\,Q_T} < \infty \tag{3.10}$$

с $\frac{1}{r_1} + \frac{n}{2q_1} \leqslant 1 + \frac{n}{4}$ и $r_1 \in [1, \infty]$. Граничные же значения считаем сведенными к однородным. Далее в главе III доказывается, что дифференциальные свойства обобщенных решений из $V_2^{1,\,\frac{1}{2}}(Q_T)$ улучшаются по мере увеличения гладкости коэффициентов и свободных членов уравнений, причем это улучшение, как и в случае классических решений, имеет локальный характер (т. е. гладкость решений в какой-либо подобласти $Q'$ области $\overline{Q}_T$ определяется гладкостью известных в задаче функций лишь в $\varepsilon$-окрестности этой подобласти). Установленные в ней зависимости являются точными, на что указывают нижеследующие примеры.

Пример 3. Рассмотрим при $t \geqslant 1$ функции

$$v(x,\, t) = |x|^{2\lambda} P_m(y), \tag{3.11}$$

где $P_m(y) = y^m e^{-y}$, а $y = \frac{x^2}{t-1}$ *).

Функции $P_m(y)$, когда $m > 0$, при $y \geqslant 0$ не превосходят $m^m e^{-m}$ соответственно, а $P_0(y) \leqslant 1$. Легко подсчитать, что

$$v_t = -|x|^{2\lambda} P_{m-1} y (m - y) \frac{1}{t-1},$$

$$v_{x_i} = 2P_{m-1} |x|^{2\lambda} (m + \lambda - y) \frac{x_i}{t-1},$$

$$v_{x_i x_j} = 2|x|^{2\lambda} P_{m-2} \left\{ [(m + \lambda - y)^2 - (m + \lambda)] \frac{2x_i x_j}{(t-1)^2} + \right.$$
$$\left. + (m + \lambda - y) \frac{\delta_i^j |x|^2}{(t-1)^2} \right\},$$

$$\Delta v = 2|x|^{2\lambda} P_{m-1} [2(m + \lambda - y)^2 +$$
$$+ n(m + \lambda - y) - 2(m + \lambda)] \frac{1}{t-1}$$

*) С помощью этих функций А. В. Ивановым была проанализирована точность ряда результатов работы [33₁₄] по линейным уравнениям. О его примерах и примерах, построенных ранее авторами работы [33₁₄], см. [33₁₂, ₁₄] и [I].

и что $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$v_t - \Delta v = f(x, t) \tag{3.12}$$

с $f(x, t)$, имеющей вид $\frac{|x|^{2\lambda}}{t-1} P_{m-1}(y)(c_1 + c_2 y + c_3 y^2)$. Ввиду ограниченности $P_m(y)$ при $m \geqslant 0$ функция $f(x, t)$ имеет в точке $(0, 1)$ в общем случае особенность не выше, чем

$$\frac{c(\mu)}{|x|^{2\mu - 2\lambda}(t-1)^{1-\mu}} \equiv \bar{f}_\mu(x, t)$$

с любым $\mu \geqslant 1 - m$ при произвольных $\lambda$ и $m$ и с любым $\mu \geqslant -m$ при $\lambda = -m$. Функция $\bar{f}_\mu(x, t)$ является элементом $L_{q,r}(\{|x| \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\})$ с любыми $q$ и $r$, удовлетворяющими неравенствам

$$2(\mu - \lambda) q < n \quad \text{и} \quad (1 - \mu) r < 1, \tag{3.13}$$

из которых следует, что

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} > 1 - \lambda. \tag{3.14}$$

Если $\lambda < 0$, то уравнение (3.12), как мы видим, имеет неограниченное решение $v = |x|^{2\lambda} P_m(y)$, если же $\lambda > 0$, то это решение ограничено и даже непрерывно по Гёльдеру. Оказывается, это последнее неслучайно и относится ко всем (допустимым) обобщенным решениям уравнений (2.1). Именно, в главе III доказывается, что если в уравнении (2.1) $f(x, t) \in L_{q,r}(Q_T)$ (возьмем пока $f_i \equiv 0$) с $q$ и $r$, удовлетворяющими неравенству

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} < 1, \tag{3.15}$$

и если в (3.9) $\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} < 1$, то любое обобщенное решение (2.1) непрерывно по Гёльдеру, причем показатель Гёльдера растет с увеличением разности $1 - \left(\frac{1}{r} + \frac{n}{2q}\right)$. Кроме этого, там же доказывается, что если $f$ хуже, — принадлежит $L_{q,r}(Q_T)$ с $q$ и $r$, связанными равенством

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = 1 - \lambda, \tag{3.16}$$

в котором $\lambda < 0$, — то любое обобщенное решение (2.1) принадлежит пространству $L_{q_2, r_2}(Q')$, $Q' \subset Q_T$ с $q_2$ и $r_2$, связанными равенством $\frac{1}{r_2} + \frac{n}{2q_2} = -\lambda$. Пример (3.12) показывает, что эти связи между $q_2$, $r_2$ и $q$, $r$, установленные в главе III, точные. Именно, из принадлежности $f$ к $L_{r, q}(Q_T)$ с любыми $r$ и $q$, удовлетворяющими условию (3.14), следует, что у (2.1) есть решение $v$, не принадлежащее $L_{q_2, r_2}(Q')$ с $r_2 = \infty$, $q_2 = \frac{n}{-2\lambda}$. Аналогично с помощью тех же функций $v(x, t)$ проверяется точность связей между принадлежностью к $L_{q, r}(Q_T)$ функций $f_i(x, t)$, входящих в свободный член уравнения (2.1), и принадлежностью к $L_{q_2, r_2}(Q')$ или $H^l(Q')$ решений этих уравнений, которые доказываются в главе III.

В главах III и IV исследуется и дальнейшее улучшение дифференциальных свойств обобщенных решений по мере улучшения дифференциальных свойств известных функций, входящих в уравнение, в частности, выясняется, когда они имеют ограниченные или непрерывные в смысле Гёльдера производные по $x$ и $t$. Доказанные зависимости являются точными в том же смысле, что и только что приведенные на примере (3.12) зависимости между показателями суммируемости $q$, $r$ для $f(x, t)$ и $q_2$ и $r_2$ для любого обобщенного решения.

Прослеживается это на примерах, аналогичных только что приведенным.

В главе IV доказывается однозначная разрешимость краевых задач и задачи Коши в пространствах $H^{l, \frac{l}{2}}(Q_T)$, $l > 2$, и $W_q^{2m, m}(Q_T)$, $m \geqslant 1$. Необходимость ограничений, которые при этом наложены на коэффициенты и свободные члены уравнений, видна непосредственно для случая пространств $H^{l, \frac{l}{2}}$. Они состоят лишь в том, что все члены уравнения $Lu = f$ оказываются элементами пространства $H^{l-2, \frac{l}{2}-1}(Q_T)$, когда вместо $u(x, t)$ подставлен в них любой элемент $H^{l, \frac{l}{2}}(Q_T)$. Для случая пространств $W_q^{2m, m}(Q_T)$ аналогичные им условия состоят в том, что коэффициенты $a_{ij}$ в (2.2) суть ограниченные функции, $f$ — элемент $W_q^{2m-2, m-1}(Q_T)$, а $a_i$ и $a$ принадлежат $L_{q_i, r_i}(Q_T)$ с некоторыми $q_i$ и $r_i$. Однако, как мы увидим на примере 4, требование ограниченности $a_{ij}$ недостаточно для сохранения теоремы единственности в классах $W_q^{2,1}(Q_T)$, $q < n$, и тем самым должно быть дополнено, например, требованием непрерывности $a_{ij}$.

Пример 4. Нетрудно проверить, что уравнение

$$v_t - \left(\alpha\delta_j^i + \beta \frac{x_i x_j}{x^2}\right) v_{x_i x_j} = 0 \tag{3.17}$$

имеет при $t > 1$ решение вида (3.11), если только числа $\alpha$, $\beta$, $\lambda$, $m$ и $n$ связаны между собой или равенствами

$$\lambda = -m, \quad \alpha = \frac{2m-1}{4(n-1)}, \quad \beta = \frac{n-2m}{4(n-1)}, \tag{3.18}$$

или равенствами

$$\lambda = -1, \quad \alpha = \frac{3-2m}{4(n-1)}, \quad \beta = \frac{n+2m-4}{4(n-1)}, \tag{3.19}$$

в которых $m$ — произвольно. Выберем параметр $m$ так, чтобы $\alpha$ было положительным. В этом случае уравнение (3.17) будет равномерно параболическим, так как $\alpha + \beta = \frac{1}{4}$, а решение (3.11) — обладающим особенностью порядка $|x|^{2\lambda}$ с $\lambda = -m$ или $\lambda = -1$. Возьмем первое из них: $v^{(m)}(x, t) = |x|^{-2m} P_m(y)$. Нетрудно подсчитать, что при $m = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, функции $v_1^{(m)}(x, t) = \int\limits_0^t v^{(m)}(x, \tau)\, d\tau$ являются элементами $W_q^{2,1}(\Pi)$, где $\Pi$ — полоса $\{|x| < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\}$, а $q = n - \varepsilon_1$, $0 < \varepsilon_1 \ll 1$, и удовлетворяют во всех точках $\Pi$, кроме точек $\{x = 0,\ t \geqslant 1\}$, равномерно параболическому уравнению (3.17) с ограниченными коэффициентами $a_{ij}$. Функции $v_{(1)}^{(m)}$ дают пример нарушения теоремы единственности для задачи Коши для уравнений недивергентного вида (2.2) в классах $W_q^{2,1}(\Pi)$, $q < n$. С другой стороны, как будет доказано в главе IV, при непрерывных $a_{ij}$ имеет место однозначная разрешимость задачи Коши в классах $W_q^{2,1}(\Pi)$ с любым $q > 1$ при любой правой части из $L_q(\Pi)$ и $\psi_0$, $a_i$ и $a$, удовлетворяющих некоторым (необходимым и достаточным для этого) условиям. Таким образом, пример 4 указывает, что для построения разумной теории разрешимости задачи Коши для уравнений вида (2.2) в классах $W_q^{2,1}(\Pi)$, $q > 1$, необходимо наложить на $a_{ij}$, помимо условий (2.5), какие-либо дополнительные ограничения. Мы это и делаем, считая $a_{ij}$ непрерывными.

**3. О необходимых условиях для ограниченности в целом норм Гёльдера решений квазилинейных уравнений.** Переходим теперь к анализу квазилинейных уравнений (2.3), (2.4). Для них мы в основном займемся поисками необходимых и достаточных условий однозначной разрешимости в целом краевых задач в классах $H^{2+\alpha,\, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$. Уже на примере обыкновенных дифференциальных уравнений было известно, что разрешимость в целом (т. е. разрешимость в областях произвольных размеров и произвольной формы, без предположений о малости тех или иных функций или их производных, образующих уравнения) задачи Коши и краевых задач не есть следствие только достаточной гладкости известных функций, образующих эти уравнения, а зависит еще и от характера нелинейностей этих функций. То же имеет место и для уравнений в частных производных. Однако если в случае обыкновенных дифференциальных уравнений вида $\frac{du}{dt} = f(t, u)$ с гладкой функцией $f(t, u)$ основной критерий разрешимости в целом задачи Коши состоит в том, что решение $u = u(t)$ не уходит на бесконечность за конечный промежуток времени, то для уравнений с частными производными это требование необходимо, но, вообще говоря, недостаточно, ибо решение $u(x, t)$ может «исчезнуть» за конечный промежуток времени не только благодаря уходу на бесконечность самого $u(x, t)$, но и благодаря бесконечному росту какой-нибудь его частной производной по $x$.

Благодаря результатам по линейным задачам для уравнений (2.1), (2.2) и благодаря теореме Лерэ — Шаудера о неподвижных точках вполне непрерывных преобразований вопрос о разрешимости в целом краевых задач и задачи Коши для квазилинейных уравнений (2.3), (2.4) сводится к вопросу об априорной ограниченности норм Гёльдера в $H^{1+\alpha, \frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ с каким-нибудь $\alpha > 0$ для всех возможных решений этих задач. Если эта ограниченность есть, то есть и разрешимость в целом. Один из главных результатов для уравнений (2.3) и (2.4) состоит в том, что нормы в пространстве $H^{1+\alpha, \frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ для всех возможных решений этих уравнений оцениваются через $\max\limits_{Q_T}|u|$, $\max\limits_{Q_T}|u_x|$ и известные в задачах функции, лишь бы эти последние обладали некоторой небольшой гладкостью. Единственное условие, которое накладывается при этом на уравнение (кроме условий о гладкости $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$, $a_{ij}(x, t, u, p)$ как функций своих аргументов $(x, t, u, p)$) — это условие его параболичности на исследуемом решении $u(x, t)$, т. е. выполнение неравенств (2.6) или (2.7) при $(x, t) \in \bar{Q}_T$, когда вместо $u$ подставлено $u(x, t)$, а вместо $p$ — градиент $u(x, t)$. Таким образом, этот результат гарантирует для всего класса квазилинейных параболических уравнений «неразрушаемость» решения $u(x, t)$, если его $\max\limits_{Q_T}|u(x, t)|$ и $\max\limits_{Q_T}|u_x(x, t)|$ не растут беспредельно, и сводит тем самым вопрос о разрешимости в целом начально-краевых задач к вопросу доказательства ограниченности $\max\limits_{Q_T}|u|$ и $\max\limits_{Q_T}|u_x|$. Как покажут приводимые ниже примеры, для всего класса уравнений (2.3) и (2.4) априорной ограниченности $\max\limits_{Q_T}|u_x|$ и даже $\max\limits_{Q_T}|u|$ для решений $u(x, t)$ краевых задач нет. Чтобы она имела место, необходимо наложить определенные ограничения на характер нелинейного вхождения $u$ и $p$ в функции $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ и $a_{ij}(x, t, u, p)$. Выясним их сначала для $\max\limits_{Q_T}|u|$. Если $u$ не зависит от $x$, то уравнение (2.4) приобретает вид

$$u_t + a(x_0, t, u, 0) = 0. \tag{3.20}$$

Известно (см. критерий Осгуда в [59] и в [27]), что для ограниченности всех решений $u = u(t)$ уравнений (3.20) на каком-нибудь отрезке $[0, T]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$a(x_0, t, u, 0)\, u \geqslant -\psi(|u|)\,|u| - b, \tag{3.21}$$

где $b = \mathrm{const} \geqslant 0$, а $\psi(\tau)$ — неубывающая положительная функция $\tau \geqslant 0$, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{\psi(\tau)} = \infty. \tag{3.22}$$

Нарушение (3.21), (3.22), как нетрудно видеть, приводит к возникновению у обыкновенного дифференциального уравнения (3.20) решений, не ограниченных на $[0, T]$. Выше в § 2 было доказано, что предположений (3.21), (3.22) при всех $x \in \overline{\Omega}$ (вместе с ослабленным условием параболичности) достаточно для того, чтобы любое классическое решение $u(x, t)$ уравнения (2.4) оставалось ограниченным (в § 2 это сделано для первого краевого условия; для других краевых задач это делается аналогично). Необходимость условия (3.21), (3.22) подтверждается только что приведенной ссылкой на уравнения вида (3.20). Правда, против этой апелляции к обыкновенным дифференциальным уравнениям можно выдвинуть такое возражение: если решение $u(x, t) = u(t)$ становится неограниченным при $t \to t_1$, то оно не ограничено и на боковой поверхности $S_{t_1}$; а возможен ли неограниченный рост $u = u(x, t)$, когда известно, что граничные (и начальные) значения $u(x, t)$ (они предписаны в первой краевой задаче) суть ограниченные функции? Может быть, в этом случае «выправят дело» граничное условие и эллиптическая часть. Следующий пример, построенный А. Фридманом, показывает, что это не так.

Пример 5. Предположим, что задача

$$\left.\begin{aligned} u_t - u_{xx} - u^2 = 0, \quad u|_{t=0} = \psi_0(x), \quad u|_{x=0} = \psi_1(t), \\ u|_{x=1} = \psi_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

имеет в $\overline{Q}_T = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ классическое решение $u(x, t)$ при гладких функциях $\psi_0$, $\psi_1$ и $\psi_2$, превосходящих некоторую постоянную

$$c = \frac{c_1}{c_2}, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0,$$

Легко проверить, что функция $z=\frac{c_1}{c_2-tx(1-x)}$ при $t<4c_2$ удовлетворяет неравенству

$$z_t-z_{xx}-z^2\leqslant 0,$$

если $c_1\geqslant\frac{1}{4}+8c_2$, и условию $z|_{\Gamma_T}=\frac{c_1}{c_2}$. Функция $v=(z-u)e^{-\lambda t}$ неположительна на $\Gamma_T$ и удовлетворяет при $t\in[0,\ 4c_2]$ неравенству

$$v_t-v_{xx}+(\lambda-z-u)v\leqslant 0.$$

Отсюда следует, что при достаточно большом $\lambda>0$ функция $v$ не может принимать положительного максимума в $Q_{4c_2}\setminus\Gamma_{4c_2}$. Поэтому в $Q_{4c_2}$ функция $v$ неположительна, т. е. $u\geqslant z$. Но $z\to\infty$ при $x=\frac{1}{2}$ и $t\to 4c_2$, и, следовательно, $u$ не может быть ограниченной в $Q_{4c_2}$. Так что в $Q_T$ при $T\geqslant 4c_2$ классического решения задачи (3.23) не существует. Условие (3.21), (3.22) для него не выполнено.

Займемся теперь выяснением условий, необходимых для того, чтобы $|u_x|$ оставался ограниченным для ограниченных решений уравнений (2.4). Точнее, мы хотим найти условия на функции $a_i(x,t,u,p)$, $a(x,t,u,p)$, $a_{ij}(x,t,u,p)$ (ниже мы увидим, что они касаются лишь поведения этих функций и их частных производных при $|p|\to\infty$), при которых для классических решений уравнений (2.3) (или (2.4)) можно оценить $\max\limits_{Q'}|u_x|$ в любой области $Q'\Subset Q_T$, отстоящей от $\Gamma_T$ на положительное расстояние $d$, через $\max\limits_{Q_T}|u|$ и $d$ и $\max\limits_{Q'}|u_x|$ для областей $Q'\subset Q_T$, примыкающих к какой-либо части $\Gamma'$ границы $\Gamma_T$, через $\max\limits_{Q_T}|u|$, какие-либо более сильные нормы $u$ на $\Gamma'$ и расстояние от $Q'$ до $\Gamma_T\setminus\Gamma'$. Для линейных уравнений, как показывается в главах III и IV, это лишь условия некоторой гладкости функций $a_i$, $a$, $a_{ij}$ на $\Gamma'$. В случае же нелинейных уравнений это не так. Покажем, что одним из необходимых условий является условие

$$|a(x,t,u,p)|\leqslant\mu(|u|)(|p|+1)^2, \tag{3.24}$$

где $\mu(\tau)$ — какая-нибудь монотонно возрастающая непрерывная функция $\tau\geqslant 0$. Доказывается это с помощью нижеследующего примера, построенного авторами книги [I] и проанализированного в § 2 главы I [I] в связи с выяснением тех же вопросов для эллиптических уравнений.

Пример 6. Функции $u_\delta(x)=(x+\delta)^\lambda$, $0<\delta\leqslant\frac{1}{2}$, удовлетворяют на отрезке $\overline{\Omega}=\left\{0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$ уравнениям

$$u_{xx}+c\,|u_x|^{2(1+\varepsilon)}=0 \tag{3.25}$$

с $\varepsilon=\frac{\lambda}{2(1-\lambda)}$ и $c=\lambda^{-1-2\varepsilon}(1-\lambda)$, бесконечно дифференцируемы, и при $0<\lambda<1$ их модули не превосходят 1. Коэффициент $c$ и граничные значения $u_\delta$ (и даже $\max\limits_{(0,1)}|u_\delta|$) равномерно ограничены при всех $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ и фиксированном $\lambda$ из $(0, 1)$. Тем не менее производные $\frac{du_\delta(x)}{dx}$ неограниченно растут в точке $x=0$ при $\delta\to 0$. Причина в невыполнении условия (3.24): показатель у $|u_x|$ в (3.25) больше 2.

Рассмотрим функции $u_\delta(x)$ как решения краевых задач

$$\begin{gathered} u_t-u_{xx}-c\,|u_x|^{2(1+\varepsilon)}=0, \\ u|_{t=0}=(x+\delta)^\lambda, \quad u|_{x=0}=\delta^\lambda, \quad u|_{x=1}=(1+\delta)^\lambda. \end{gathered} \tag{3.26}$$

В них функции $\psi_1(t)=\delta^{(\lambda)}$ и $\psi_2(t)=(1+\delta)^\lambda$, задающие граничные условия, бесконечно дифференцируемы, а функция $(x+\delta)^\lambda$, задающая начальное условие, ограничена. Сами решения $u_\delta$, коэффициент $c$ и функции $\psi_i(t)$ и производные $\psi_i(t)$ всех порядков равномерно ограничены при всех $\delta$ из $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, тем не менее производные $u_{\delta x}$ не ограничены равномерно в областях $\{0\leqslant x\leqslant 1,\ t_1\leqslant t\leqslant T\}$, $t_1>0$, и, следовательно, желаемое свойство для уравнений (3.26) при $\varepsilon>0$ не имеет места. Условие (3.24) исключает подобные уравнения.

В связи с только что приведенным примером может возникнуть такой вопрос: не является ли причиной неограниченного возрастания $\max|u_{\delta x}|$ при $\delta\to 0$ то, что он неограниченно растет при $t=0$? Пример, который мы приведем ниже (он построен А. Ф. Филипповым), показывает, что дело не в этом.

Пример 7. Рассмотрим в области $Q_1 = \{0 < x < 1, 0 < t < 1\}$ начально-краевую задачу

$$u_t - u_{xx} - u\,|u_x|^{\frac{2}{1-\alpha}} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} u|_{t=0} = \left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right)x, \quad u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=1} = 1 + \dfrac{1}{\alpha} + t\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right)^{1+\frac{2}{1-\alpha}} \end{array}\right\} \tag{3.27}$$

при произвольно фиксированном значении $\alpha$ из $(0, 1)$. Предположим, что в $\overline{Q}_1$ существует ее непрерывное решение $u(x, t)$, обладающее ограниченной производной $u_x$ в $\overline{Q}_1$ и непрерывными производными $u_t$, $u_x$, $u_{xx}$ внутри $Q_1$. Рассмотрим в $Q_1$ функцию

$$z(x, t) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-t} & \text{при} \quad 0 \leqslant x < 1 - t, \\ \dfrac{1}{\alpha}(x + t - 1)^{\alpha} + 1 & \text{при} \quad 1 - t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что $u \geqslant z$ на $\Gamma_1$, а в точках $Q_1$, не лежащих на прямой $x = 1 - t$,

$$z_t - z_{xx} - z\,|z_x|^{\frac{2}{1-\alpha}} \leqslant 0.$$

Поэтому

$$v_t - v_{xx} + bv_x - |u_x|^{\frac{2}{1-\alpha}} v \leqslant 0, \tag{3.28}$$

где $v = z - u$, а

$$b(x, t) = z\frac{|u_x|^{\frac{2}{1-\alpha}} - |z_x|^{\frac{2}{1-\alpha}}}{z_x - u_x}$$

— ограниченная в $\overline{Q}_1$ функция. Так как $\max\limits_{Q_1}|u_x|$ по предположению не превосходит некоторой постоянной, то из (3.28) следует, что функция $\hat{v} = ve^{-\lambda t}$ при достаточно большом $\lambda$ не может принимать своего положительного максимума в какой-нибудь внутренней точке $Q_1$, не лежащей на диагонали $x + t = 1$ (см. по этому поводу § 2). В точках же этой прямой $\hat{v}(x, t)$ не может иметь максимума в силу того, что

$$\hat{v}_x = e^{-\lambda t}(z_x - u_x)|_{x=1-t+0} = +\infty.$$

На границе $\Gamma_1$, как мы знаем, $\hat{v} \leqslant 0$, и потому всюду в $Q_1$ функция $\hat{v} \leqslant 0$, т. е. $u \geqslant z$. Но это неравенство находится в противоречии с тем, что $u(0, 1) = 0$, $\lim\limits_{x \to +0} z(x, 1) = 1$, и $u(x, t)$ непрерывна в точке $(0, 1)$.

Итак, примеры 6 и 7 показывают, что в условии (3.24) нельзя показатель 2 заменить на больший *). Если уравнение (2.3) записать в форме (2.4), т. е.

$$u_t - \frac{\partial a_i(x, t, u, u_x)}{\partial u_{x_j}} u_{x_i x_j} + A(x, t, u, u_x) = 0, \tag{3.29}$$

где

$$A(x, t, u, u_x) = -\frac{\partial a_i(x, t, u, u_x)}{\partial u} u_{x_i} - \frac{\partial a_i(x, t, u, u_x)}{\partial x_i} + \\ + a(x, t, u, u_x),$$

и учесть, что каждое из слагаемых, составляющих $A$, может отсутствовать, то условие (3.24) применительно к уравнению (3.29) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} \left[ \left| \frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial u} \right| (|p| + 1) + \left| \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right| \right] + |a(x, t, u, p)| \leqslant \\ \leqslant \mu(|u|)(|p| + 1)^2. \tag{3.30}$$

В главе V мы показываем, что предположений (3.30) вместе с условием (2.6) о равномерной параболичности достаточно для того, чтобы имели место для решений уравнений (2.3) желаемые оценки $\max|u_x|$ через $\max|u|$. Для квазилинейных уравнений общего вида (2.4) мы требуем, помимо условий (2.7) и (3.24), еще выполнения соответствующих условий для частных производных функций $a_{ij}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$

---

*) Как видно из оценок $\max|u_x|$ в главах V и VI, в условии (3.24) можно поставить справа медленно растущий множитель $\psi(|p|)$, именно такой, что $\int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{\tau\psi(|\tau|)} = \infty$.

по $x$, $u$ и $p$, именно:

$$\sum_{i,j,k=1}^{n}\left[\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}\right|(|p|+1)^3+\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\right|(|p|+1)^2+\right.$$
$$\left.+\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right|(|p|+1)^2+\left|\frac{\partial a}{\partial p_k}\right|(|p|+1)+\left|\frac{\partial a}{\partial u}\right|+\left|\frac{\partial a}{\partial x_k}\right|\right]\leqslant$$
$$\leqslant\mu(|u|)(|p|+1)^2, \qquad (3.31)$$

которые являются следствиями условий (2.7) и (3.24) в случае полиномиальной зависимости $a_{ij}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ от $x$, $u$ и $p$ при больших $|p|$. Точнее, при оценке $\max|u_x|$ через $|u|_{Q_T}^{(\alpha)}$ с каким-нибудь $\alpha > 0$ (или, общее, через $\max|u|$ и модуль непрерывности $u(x, t)$) мы накладываем ограничения (3.31) на $\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}$, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}$, $\frac{\partial a}{\partial p_k}$ и $\frac{\partial a}{\partial u}$, а предположения (3.31) о $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial a}{\partial x_k}$ даже ослабляем, заменяя их неравенством

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right|(|p|+1)^{-1}+\left|\frac{\partial a}{\partial x_k}\right|(|p|+1)^{-3}\leqslant\mu(|u|). \qquad (3.32)$$

При оценке же $\max|u_x|$ через $\max|u|$ накладываются по сравнению с только что перечисленными условиями дополнительные условия:

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{\partial a_{ij}(x, t, u, p)}{\partial u}\right|\leqslant\varepsilon(|u|)+P(|p|, |u|),\\ &\frac{\partial a(x, t, u, p)}{\partial u}\geqslant-[\varepsilon(|u|)+P(|p|, |u|)](|p|+1)^2,\end{aligned}\right\} \qquad (3.33)$$

в которых $\varepsilon(t)$ есть непрерывная, монотонно возрастающая неотрицательная функция $t\geqslant 0$, значение которой $\varepsilon\left(\max_{Q_T}|u|\right)$ достаточно мало, а $P(\tau, t)$ — непрерывная на множестве $\{\tau\geqslant 0, t\geqslant 0\}$ функция, монотонно возрастающая по $t$ и стремящаяся к нулю при $\tau\to\infty$ равномерно относительно $t$ из $[0, t_1]$, где $t_1$ — произвольное положительное число.

Итак, мы выяснили, что в общем случае для классической разрешимости в целом краевых задач для равномерно параболических уравнений (2.3), (2.4) с гладкими функциями $a_i$, $a$ и $a_{ij}$ надо накладывать ограничения (3.21), (3.22), (3.24), (3.30), (3.31). Основной целью глав V и VI является доказательство того, что этих ограничений в основном и достаточно для разрешимости краевых задач в классе гладких функций. Помимо этого, в главе V исследуются обобщенные решения для квазилинейных уравнений (2.3). В связи с этим отметим, что предположение (3.24) необходимо уже для того, чтобы имело смысл говорить об ограниченных обобщенных решениях $u(x, t)$ из $W_2^{1,0}(Q_T)$ для уравнений (2.3) с гладкими функциями $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$. Такие решения определяются как элементы $W_2^{1,0}(Q_T)$ с $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|u| < \infty$, удовлетворяющие тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \left[-u\eta_t + a_i(x, t, u, u_x)\eta_{x_i} + a(x, t, u, u_x)\eta\right] dx\,dt = 0 \tag{3.34}$$

при любой гладкой функции $\eta(x, t)$, равной нулю на границе $Q_T$. Чтобы интегралы, стоящие в левой части (3.34), были конечны на таких решениях, надо потребовать выполнения условий (2.6) и (3.24). Для правомерности теории обобщенных решений, более плохих, чем ограниченные обобщенные решения из $W_2^{1,0}$, надо на функции $a_i(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ наложить еще более жесткие ограничения, которые гарантировали бы конечность всех интегралов, входящих в (3.34) на любом таком решении. Эти ограничения мы формулируем в виде неравенств

$$\begin{gathered} |a_i(x, t, u, p)| \leqslant c(|p|^{\beta_1} + |u|^{\beta_2}) + \varphi_1(x, t), \\ |a(x, t, u, p)| \leqslant c_1(|p|^{\beta_3} + |u|^{\beta_4}) + \varphi_2(x, t), \end{gathered} \tag{3.35}$$

где $\varphi_i$ суть элементы некоторых $L_{q_i, r_i}(Q_T)$, допуская тем самым у функций $a_i$ и $a$ особенности по $x$ и $t$.

В § 2 главы V доказано (теорема 2.1), что если показатели $\beta_i$, $q_i^{-1}$, $r_i^{-1}$ не больше некоторых чисел, то любое обобщенное решение уравнения (2.3) из $W_2^{1,0}(Q_T) \cap L_{q,r}(Q_T)$ будет ограниченным. Примеры показывают, что условия теоремы 2.1 точные (показатели $\beta_i$, $q_i^{-1}$, $r_i^{-1}$ нельзя увеличить). Одним из таких примеров является пример (2.31) конца главы I книги [I], построенный нами для случая эллиптических уравнений.

Наконец, отметим, что для уравнений (2.4) обобщенные решения $u(x, t)$, о которых известно лишь, что они суть элементы $W_2^{2,1}(Q_T)$, вообще говоря, недопустимы (см. по этому поводу пример (2.23) главы I книги [I], а также пример 4 данного параграфа, в котором функцию $v$ можно рассмотреть и как решение квазилинейного уравнения

$$v_t - \left(\alpha\delta_i^j + \beta \frac{v_{x_i} v_{x_j}}{|v_x|^2}\right) v_{x_i x_j} = 0$$

с теми же значениями параметров $\alpha$ и $\beta$, что и в (3.17)).

## § 4. Основные результаты и их возможное развитие

Опишем кратко основные результаты, изложенные в данной книге.

В главе II собраны различные предложения классического и функционального анализа, используемые в книге. Некоторые из них хорошо известны и приводятся без доказательства, для других даются пояснения или доказательства. В основном (§§ 6—9) глава II посвящена изучению функций, подчиненных некоторым интегро-дифференциальным неравенствам. Особо важную роль для исследования решений параболических уравнений играют классы функций $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_2^{N_1}$, к которым, как оказалось, принадлежат решения этих уравнений и их производные. Относительно элементов $\mathfrak{A}$ доказывается их ограниченность, а относительно элементов $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_2^{N_1}$ — непрерывность по Гёльдеру. Определения этих классов несколько отличаются от данных нами ранее в работах [$33_{14,15}$], но их исследование проводится почти так же, как исследование первоначально введенных (см. в связи с этим §§ 5—8 главы II [I] и работу [$33_{18}$]).

**1. Линейные уравнения.** Главы III и IV посвящены линейным уравнениям второго порядка.

В главе IV изучаются линейные уравнения с гладкими коэффициентами в пространствах $H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$, $l > 2$, и $W_q^{2m, m}(Q_T)$, $m \geqslant 1$. Для них устанавливаются точные зависимости дифференциальных свойств решений от дифференциальных свойств свободных членов и функций, определяющих начальные и граничные условия в различных краевых задачах и задаче

Коши, и выводятся соответствующие им точные оценки. Эпитет «точный» относится к дифференциальным порядкам и означает следующее: если, например, свободный член $f(x, t)$ уравнения есть элемент $H^{l-2, \frac{l}{2}-1}(\overline{Q}_T)$, $l>2$, то относительно решения устанавливается, что оно есть элемент $H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$ и тем самым каждый член уравнения принадлежит тому же классу, что и их сумма $f(x, t)$. Таким образом, из принадлежности к $H^{l-2, \frac{l}{2}-1}(\overline{Q}_T)$ суммы выводится принадлежность к этому пространству каждого образующего ее слагаемого. Точным является и результат о зависимости гладкости решений от гладкости начальных и граничных условий. Так, в приведенном только что примере принадлежность решения $u(x, t)$ к $H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$ доказывается в случае первой краевой задачи при условии, что значения $u(x, t)$ на $\Gamma_T$ совпадают со значениями какой-нибудь функции $\psi(x, t)$ из $H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$. Точными являются и аналогичные зависимости, установленные в пространствах $W_q^{2m, m}(Q_T)$, $m \geqslant 1$, а также зависимости гладкости решений от гладкости коэффициентов дифференциальных операторов (см. по этому поводу пример 4 из § 3 главы I).

Первые точные оценки для параболических операторов, причем при различных однородных краевых условиях, были установлены О. А. Ладыженской в 1954 году [$33_{4,5,6}$] (см. также [$\mathbf{17}_3$]) в пространствах $W_2^{2m, m}(Q_T)$. Они были получены с помощью простого приема из данных ею ранее точных оценок для операторов эллиптического типа. Аналогичные оценки в $W_q^{2m, m}$ при $q \neq 2$ потребовали иной аналитической техники. Они были доказаны В. А. Солонниковым в [$58_1$] (см. также [$58_2$, $53_2$]) для однородных и неоднородных граничных условий, причем отказ от однородности граничных условий потребовал введения новых функциональных пространств с производными дробного порядка и разными дифференциальными свойствами по переменным $x$ и $t$ (по поводу последнего см. [6, $53_4$, $58_2$]).

Оценки в $H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$ для первой краевой задачи для (2.2) были доказаны К. Чилиберто [6] в случае одной пространственной переменной и Барраром [3] и А. Фридманом [15] в случае любого числа пространственных переменных. Для второй краевой задачи и задачи с косой производной это было сделано В. А. Солонниковым [$58_{3,4}$] (в [$58_{3,4}$] это доказано сразу для общих краевых задач для произвольных систем параболического типа) и Л. И. Камыниным и В. Н. Масленниковой [$28_{2,3}$].

В главе IV излагаются два разных метода доказательства однозначной разрешимости краевых задач и задачи Коши. Один из них, базирующийся на точных оценках, основан на построении регуляризатора — оператора, обращающего главную часть с замороженными коэффициентами и позволяющего свести задачу для $t \in [0, \tau_0]$ при малом $\tau_0$ к уравнению вида $(I+K)u = f$, где $I$ — единичный, а $K$ — малый по норме оператор. После этого, пользуясь оценками, улавливающими точный характер зависимости гладкости решения от гладкости всех известных функций, удается доказать разрешимость исходной задачи при $0 \leqslant t \leqslant T$ для любого конечного $T$. Этот метод позволил В. А. Солонникову ([$58_3$]) установить однозначную разрешимость весьма общих начально-краевых задач для систем, параболических по Петровскому и Сирота, а также для более широкого класса введенных им систем. Здесь этот метод излагается (с разными допустимыми упрощениями и конкретизациями) применительно к уравнениям второго порядка.

Следует отметить, что ограничения на коэффициенты уравнения, гладкость границы и известных функций в этом методе должны быть точно согласованы в зависимости от того, в каком классе функций разыскивается решение. В главе IV краевые задачи для уравнения (2.2) рассматриваются в классах $H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$ и $W_q^{2m, m}(\overline{Q}_T)$, а задача Коши — в классах $H^{l, \frac{l}{2}}(D_{n+1}^T)$ и $W_q^{2m, m}(D_{n+1}^T)\left(D_{n+1}^T = E_n \times (0, T)\right)$.

Второй метод исследования краевых задач — это классический метод теории тепловых (точнее, параболических) потенциалов, обстоятельно исследованный в случае одной пространственной переменной в работах Е. Леви и Жевре

([35], [18]). Ему посвящено много работ ([11, $47_{1-4}$, $68_{1-4}$, $53_{1,3}$, 36, 40] и др.), и он нашел отражение в книгах [54, 20, $68_1$, $58_3$, 15]. С его помощью была доказана однозначная разрешимость задачи Коши и основных краевых задач для уравнений (2.2) в их классической постановке.

Потенциалы, через которые выражаются решения этих задач, образуются с помощью фундаментального решения уравнения (2.2) с переменными коэффициентами. Для уравнений (2.2) общего вида оно впервые было построено в работах [11], в которых требовалось, чтобы коэффициенты $a_{ij}$ в (2.2) принадлежали $H^{2+\alpha,\, 1+\frac{\alpha}{2}}$. В работах [$47_{1,3}$, $68_{1,2}$] ограничения на гладкость коэффициентов снижены до условия их непрерывности по Гёльдеру, а в недавно появившейся заметке [40] требуется, чтобы они удовлетворяли более общему, чем условие Гёльдера, условию Дини. Тем самым существование фундаментального решения и классического решения задачи Коши для уравнения (2.2) получено при ограничениях, несколько меньших, чем в первом методе. Однако полученные с помощью теории потенциала результаты о разрешимости краевых задач не являются точными, что вызвано значительными аналитическими трудностями, возникающими при оценке даже первых производных потенциалов простого и двойного слоев вблизи границы.

В случае полупространства тепловые потенциалы дают возможность получить точные оценки как в нормах $H^{l,\frac{l}{2}}$, так и в нормах $W_q^{2m,\, m}$ решений краевых задач для уравнений с постоянными коэффициентами. Такие оценки (для уравнения теплопроводности), лежащие в основе первого метода исследования краевых задач, подробно излагаются в §§ 2 и 3 главы IV. Эти оценки могли бы быть выведены из общих теорем об оценках интегральных операторов, доказанных в [$14_3$] и [$58_5$] (в [$58_5$] они применены к параболическим системам). Однако эти теоремы опираются на некоторые тонкие и пока еще не очень широко известные, во всяком случае среди специалистов по дифференциальным уравнениям, предложения из теории функций. Поэтому мы из чисто методических соображений предпочли тот более привычный, но несколько длинноватый способ оценки интегральных операторов, возникающих при решении краевых задач в полупространстве, который изложен в §§ 2 и 3 главы IV.

Глава III посвящена линейным уравнениям с разрывными и, вообще говоря, неограниченными коэффициентами. В основном в ней исследуются уравнения вида (2.1) в предположении (2.5) о равномерной параболичности (2.1). Для них пришлось создать не только новые методы исследования и получения решений, но и выработать новый взгляд на само понятие решения, отказавшись от жестких классических рамок (см. по этому поводу § 2 и [$33_3$]). Такой отказ, во многом способствовавший успеху в изучении краевых задач, потребовал оправданий, прежде всего с точки зрения сохранения теорем единственности. Для уравнений эллиптического типа имелся один класс обобщенных решений — это класс обобщенных решений с порядком производных, вдвое меньшим порядка уравнения, для которого такое оправдание было ясным, для нестационарных же уравнений этот вопрос требовал изучения.

До 50-х годов имелось два способа доказательства теорем единственности. Первый, предложенный Гольмгреном, состоит в доказательстве отсутствия ортогонального дополнения к области значений оператора, сопряженного оператору исследуемой задачи, второй — в выводе априорной оценки — энергетического неравенства. И тот и другой не годились для поставленной цели. Первый потому, что для его проведения надо знать разрешимость сопряженной задачи (а она есть задача того же типа, что и исследуемая) в классе достаточно гладких функций, т. е. то, что желательно доказать как одно из последних звеньев всего исследования; второй потому, что в нем используется существование у решений задачи производных, входящих в уравнения, которыми обобщенные решения в наиболее интересных случаях не обладают.

Доказательства теорем единственности обобщенных решений для нестационарных задач, не использующие никаких сведений о разрешимости задачи (самой или ей сопряженной) в классах функций, имеющих производные, входящие в уравнения, были даны в 50-е годы. Первое из них ([$33_3$]) относилось к так называемым «обобщенным решениям с конечным интегралом энергии» (для параболических уравнений это обобщенные решения из $W_2^{1,0}(Q_T)$), последующие касались этого и некоторых других классов обобщенных решений ([$33_{4-6, 13}$, $10_{2,3,8}$, **37**]) (см. о них §§ 3 и 14 главы III).

Существование обобщенных решений было доказано сначала с помощью метода конечных разностей ([$33_3$] *)), а затем с помощью функциональных методов и метода Галёркина ([$33_{4-6,13}$, $10_{2,3}$, **37**]). Переход от классических постановок к обобщенным и связанная с этим замена пространств непрерывно дифференцируемых функций пространствами Гильберта $W_2^{l_1, l_2}(Q_T)$, а также выработанные при этом методы работы с такими решениями, весьма мало опирающиеся иа явный вид эллиптической части нестационарного оператора, позволили выйти за рамки собственно краевых задач для дифференциальных уравнений и изучить более общий объект — задачи:

$$\frac{du}{dt} + S_1(t)\,u = f(t), \qquad u(0) = u_0, \tag{4.1}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dt^2} + S_1(t)\frac{du}{dt} + S_2(t)\,u = f(t), \\ &u(0) = u_0, \quad \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = u_1, \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

в которых $u(t)$ и $f(t)$ суть функции $t$ со значениями в гильбертовом пространстве $H$, $u_0$ и $u_1$ — заданные элементы $H$, а $S_i(t)$ — заданные неограниченные операторы в $H$, зависящие от $t$ как от параметров. Это было сделано в работах [$33_{4-6}$, $10_{2,3}$] М. И. Вишика и О. А. Ладыженской (см. также их обзор [$33_{13}$]). Установленные в них теоремы об однозначной разрешимости задач (4.1), (4.2) предполагают выполнение лишь таких условий, которым удовлетворяют первая и вторая краевые задачи для параболических и гиперболических уравнений, сильно параболических и сильно гиперболических систем, уравнения Шредингера и ряд других нестационарных уравнений и систем математической физики. В дальнейшем это (абстрактное) направление получило свое развитие в работах ряда математиков ([30, 31, 56, **4**, **41** и др.]) и ему посвящена монография [**37**]. Особое место среди работ

*) Книга [$33_3$] посвящена в основном более трудному объекту — гиперболическим уравнениям, но изложенные в ней методы и идеи непосредственно применимы и к уравнениям параболического типа. Собственно параболические уравнения обсуждаются в [$33_{4-8}$] и в [$33_{13}$].

по задаче Коши для абстрактных уравнений (по задаче (4.1)) занимает работа **[30$_1$]** Т. Като, имевшая иной источник происхождения и иные приложения. Ее автор исходил из желания обобщить результаты теории полугрупп (см. [**23**, **57** и др.]) на случай инфинитезимальных операторов $S_t$, зависящих от $t$, и имел, по-видимому, перед собой в качестве лакмусовой бумажки задачу Коши для одномерного параболического уравнения в ее классической постановке. Работа **[30$_1$]** нашла свое продолжение в работах [**30**$_{2-3}$, 57$_{1,2}$ и др.].

Но вернемся к параболическим уравнениям (2.1) с разрывными коэффициентами. Для них разными методами было установлено, по существу, два результата: 1) однозначная разрешимость основных краевых задач в классах функций $W_2^{1,0}(Q_T)$ и $V_2(Q_T)$ при условии ограниченности коэффициентов уравнений (2.1) и принадлежности $\psi_0(x)$ к $L_2(\Omega)$, а $f(x, t)$ к $L_2(Q_T)$ ([33$_{3-6,13}$, **37**, 10]) и 2) однозначная разрешимость в классе $W_2^{2,1}(Q_T)$ при дополнительном условии ограниченности $a_{ijx}$ и $a_{ijt}$ и принадлежности $\psi_0$ к $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ [33$_{4-6}$] (при несколько других предположениях об $a_{ij}$ аналогичный результат был доказан в [**17**$_3$] для уравнения (2.2)). Кроме того, были даны методы ([33$_{3,13}$], позволяющие доказывать, грубо говоря, то, что повышение гладкости всех входящих в задачу функций по $x$ на единицу, а по $t$ на 1/2 повышает настолько же гладкость решения задачи.

Однако все, что было сделано по уравнениям с разрывными коэффициентами, оставляло большой пробел в отношении выявления истинных зависимостей дифференциальных свойств решений от известных в задаче функций. Так, было ясно, что решения из $W_2^{1,0}(Q_T)$ можно получить при предположениях, несколько более слабых, чем предположения об ограниченности младших коэффициентов. Но будут ли они необходимы? С другой стороны, как будет увеличиваться гладкость решений из $W_2^{1,0}(Q_T)$ при увеличении степени суммируемости свободного члена? Когда они станут ограниченными или непрерывными по Гёльдеру? и т. д. Первым и неожиданным результатом такого рода явилась теорема Нэша **[43]** о возможности оценить норму Гёльдера (всюду, кроме окрестности особой точки) для основного сингулярного решения уравнения

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\, u_{x_j}\right) = 0 \tag{4.3}$$

только через $\nu$ и $\mu$ из условия (2.5). Эта теорема и аналогичная теорема Де Джорджи ([**19**]) об эллиптических уравнениях $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\, u_{x_j}\right) = 0$ положили начало обнаружению новых связей между свойствами коэффициентов и свободных членов уравнений и их решений. Из указанного результата Нэша вытекала возможность оценить норму Гёльдера $|u|^{(\alpha)}$ для гладких решений $u(x, t)$ уравнений (2.1) в предположении, что $a_i \equiv f_i \equiv 0$, а $b_i$, $a$ и $f$ ограничены ([**43**, $32_{\mathrm{I}, 5}$, $46_3$]). Однако сложность и непрозрачность данного им доказательства не позволили существенно усилить его результаты и найти точные условия на коэффициенты и свободные члены (2.1), при которых имеется та или иная гладкость всех решений (2.1). Это было сделано на ином пути О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой ([$33_{14, 12}$]). Ими рассмотрено полное уравнение (2.1) и установлено, когда все его решения (причем не классические, а в общем случае обобщенные) принадлежат тому или иному функциональному пространству, в частности пространству Гёльдера $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}$. С помощью специально построенных примеров ([I, $33_{14, 12}$]) было показано, что налагаемые при этом на известные функции и свободные члены уравнения условия не только достаточны, но и необходимы. Эти условия выражены в терминах их принадлежности к пространствам $L_{q, \infty}(Q_T)$ с разными $q$. Работы ([$33_{3, 4, 14}$] составили основу главы III. По сравнению с ними внесено следующее обобщение: вместо пространств $L_{q, \infty}(Q_T)$ рассмотрена вся шкала пространств $L_{q, r}(Q_T)$ и в ее терминах сформулированы свойства известных, а в одном случае и искомых функций (см. в связи с этим работы [$22_6$, $22_{4, 5}$, $32_3$, $\mathbf{21}_{\mathrm{I}-3}$]).

Основное содержание главы III следующее: сначала при максимально возможно широких условиях на все данные задачи устанавливается однозначная разрешимость первой и второй краевых задач для (2.1) в классе $V_2^{1, \frac{1}{2}}(Q_T)$. Затем прослеживается шаг за шагом, как улучшаются дифференциальные свойства всех решений уравнения (2.1) по мере улучшения свойств известных функций, в частности, когда они становятся классическими. Доказательство существования проведено по методу Галёркина. Этот метод удобен как для доказательства разрешимости краевых задач, так и для фактического определения их решений. Как вычислительный метод он применялся давно в стационарных и нестационарных задачах. Обоснование его сходимости для нестационарных задач началось с работ [**12**, **20**, **26**$_2$] (см. также [10$_8$]). В §§ 14—18 описаны другие возможные методы доказательства теорем существования с указанием литературных источников. Заметим, что при проведении всех этих методов на коэффициенты уравнения налагались ограничения, более сильные, чем ограничения, сделанные в §§ 1—5 главы III.

В главе III имеется один существенный пробел — нет доказательства неравенства Гарнака (формулировка его дана в § 10 главы III). Это объясняется отчасти тем, что доказательство этого красивого неравенства пока длинно и сложно, а отчасти тем, что оно в книге нигде не используется. Для решений уравнений (4.3) оно установлено Ю. Мозером (см. [42$_2$]). Его обобщение на случай полного уравнения (2.1) дано А. В. Ивановым [22$_5$].

**2. Квазилинейные уравнения и системы.** Глава V посвящена квазилинейным параболическим уравнениям с дивергентной главной частью, т. е. уравнениям вида (2.3). Главные ее результаты — доказательство однозначной разрешимости в целом в классе гладких функций первой краевой задачи, задачи Коши и ряда задач с нелинейными краевыми условиями, причем только при таких ограничениях, которые вызваны существом дела. Им предшествует получение априорных оценок различных норм решений через известные величины, причем как внутренних (локальных), справедливых для всех решений рассматриваемых уравнений, так и тотальных во всей области $\overline{Q}_T$, учитывающих начальные и граничные условия. Часть оценок проведена для плохих (обобщенных) решений, другая — в предположении классичности решений. Можно было бы все оценки проводить лишь при небольших (необходимых) предположениях о гладкости исследуемых решений (так же, как это сделано в [I] для эллиптических уравнений). Но мы этого не стали делать отчасти потому, что не хотели загромождать и без того нелегкие выкладки, отчасти потому, что при этом пришлось бы накладывать дополнительные ограничения на образующие уравнение функции, а главное потому, что наш путь исследования квазилинейных уравнений идет от хороших решений к плохим и тем самым не нуждается в такого типа оценках. Мы сначала получаем классические решения задач, используя априорные оценки классических решений и принцип Лерэ — Шаудера, а затем, снижая предположения о гладкости данных задачи, получаем и соответствующие им более плохие решения как пределы хороших. Можно было бы идти в противоположном направлении: сначала при небольших предположениях о данных задачи установить существование плохих решений, а затем доказать улучшение их свойств при улучшении свойств данных задачи.

В главе VI исследуются квазилинейные параболические уравнения общего вида (2.4). Для всего класса этих уравнений доказывается следующий кардинальный факт: если решение $u(x, t)$ имеет $u_t$ и $u_{xx}$ из $L_2(Q_T)$, а $u_x$ ограничены и непрерывно зависят от $t$ в норме $L_2(\Omega)$ (класс таких решений обозначим через $\mathfrak{M}$) и если уравнение (2.4) параболично на этом решении, т. е. неравенство (2.7) имеет место при подстановке вместо $u$ функции $u(x, t)$, а вместо $p$ — ее производных $u_x(x, t)$, то $u_x(x, t)$ суть непрерывные по Гёльдеру функции $\left(\text{принадлежат } H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)\right)$ и их нормы $|u_x|_{Q'}^{(\alpha)}$ для любого $Q' \subset Q_T$ оцениваются только через $\max\limits_{Q_T}|u_x|$, известные параметры, характеризующие функции $a_{ij}(x, t, u, p)$,

$$\frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial u}, \quad \frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial x_j}, \quad a(x, t, u, p)$$

при $u = u(x, t)$, $p = u_x(x, t)$ и расстояние от $Q'$ до $\Gamma_T$. Соответствующий результат устанавливается и в замкнутой области. Это предложение вместе с результатами главы IV по линейным уравнениям дает возможность получить оценки всех норм $|u|_{Q_T}^{(l)}$, $l > 1$, через $\max\limits_{Q_T}|u|$ и $\max\limits_{Q_T}|u_x|$ и известные величины.

Далее в § 3 главы VI устанавливаются априорные оценки $\max\limits_{Q'}|u_x|$ и $\max\limits_{Q_T}|u_x|$ через величины, характеризующие известные функции, и более слабые нормы $u$, именно через $|u|_{Q_T}^{(\alpha)}$ с каким-либо $\alpha > 0$ или через $\max\limits_{Q_T}|u|$. Как показывают примеры § 3 главы I, это возможно сделать уже не для всего класса уравнений (2.4), а в общем случае лишь при определенных ограничениях на поведение функций $a_{ij}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ при $p \to \infty$. Оценка $\max|u_x|$ через $|u|_{Q_T}^{(\alpha)}$ проведена лишь при предположениях, необходимость которых подтверждена примерами § 3. Что касается оценки $\max|u_x|$ через $\max|u|$, то тут имеется одно условие (малость $\varepsilon$ в неравенствах (3.33)), необходимость которого не установлена *); для уравнений (2.3) оно не нужно, но для весьма близких объектов — система Хайнца из § 2 главы VII — необходимо. Заметим, что для отдельных классов уравнений (2.4), в которых функции $a_{ij}(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ имеют специальный вид, оказывается возможным оценить $\max|u_x|$ без всяких ограничений на порядки роста $a_{ij}$ и $a$ по $p$ или используя лишь часть ограничений такого рода.

Оценки $|u_x|_{Q_T}^{(\alpha)}$, полученные в §§ 2 и 3, вместе с давно известной оценкой $\max\limits_{Q_T}|u|$ и оценками в § 5 главы IV по линейным уравнениям с гладкими коэффициентами дают все необходимое для доказательства разрешимости в целом краевых задач для уравнений (2.4). Мы в главе VI, в отличие от главы V, ограничиваемся лишь первой краевой задачей. Ее разрешимость доказывается с помощью принципа Лерэ — Шаудера. Можно было бы использовать другие теоремы о разрешимости абстрактных нелинейных уравнений, например теорему Л. В. Канторовича о сходимости метода Ньютона для решения таких уравнений, если заметить, что для изучаемых задач имеет место теорема единственности.

Результаты по квазилинейным уравнениям, изложенные в главах V, VI, VII, за исключением результатов § 9 главы V и части § 5 главы VI, получены авторами [I] (см. [$33_{8,14,15}$], [I], а также [$33_{16}$] и [$33_{18}$]). Они дают ответы на вопросы о классической разрешимости в целом краевых задач и задачи

*) Когда мы говорим о необходимости такого-то условия для возможности такой-то оценки, то имеем в виду, что найдется среди всех уравнений вида (2.4) уравнение, удовлетворяющее всем условиям, кроме обсуждаемого, для которого эта оценка неверна.

Коши для квазилинейных равномерно параболических уравнений.

Исследование квазилинейных параболических уравнений началось с работ Жевре [18]. В них, а также в последующих работах [41, $68_1$, $56_3$, $15_{1,2}$] была доказана разрешимость краевых задач и задачи Коши в малом. Такая разрешимость, так же как и в случае нелинейных уравнений других типов, имеет место для всего класса квазилинейных параболических уравнений (2.4), лишь бы входящие в задачу функции были достаточно гладкие и были согласованы друг с другом (по поводу условий согласования см. § 5 главы IV и далее). Ее доказательство базируется, по существу, лишь на свойствах линейных параболических операторов и не использует каких-либо априорных оценок для решений собственно нелинейных уравнений (исключение составляет лишь хорошо известная оценка максимума модуля решений, основанная на принципе максимума). Это же имеет место и в работах Гальярдо [$17_4$], Фридмана [15], П. С. Соболевского [$56_{2,3}$], посвященных различным классам уравнений вида

$$u_t - a_{ij}(x,\ t)\, u_{x_i x_j} = a\left(x,\ t,\ u,\ u_x\right) \tag{4.4}$$

с главной линейной частью и подчиненной ей правой частью.

Собственно нелинейные оценки появились сначала в работах [6, 48, $9_{5,6}$] Чилиберто, Проди, Т. Д. Вентцель и О. А. Олейник, посвященных квазилинейным уравнениям вида

$$u_t = a_{11}(x_1,\ t,\ u)\, u_{x_1 x_1} + b(x_1,\ t,\ u)\, u_{x_1} + c(x_1,\ t,\ u) \tag{4.5}$$

и некоторым их обобщениям (см. [15, 65 и др.]). Они позволили доказать для этих уравнений разрешимость основных краевых задач в целом. Однако при получении этих оценок существенно используется как частный вид уравнения (4.5) (именно, независимость $a_{11}(x_1,\ t,\ u)$ от $u_{x_1}$ и менее чем квадратичный рост $a(x_1,\ t,\ u,\ u_x) = b(x_1,\ t,\ u)\, u_{x_1} + c(x_1,\ t,\ u)$ по $u_{x_1}$), так и наличие лишь одной пространственной переменной.

Первой работой, в которой имеются нелинейные оценки для многомерных квазилинейных уравнений, является работа [$33_8$]. В ней доказана однозначная разрешимость в целом первой краевой задачи для многомерных квазилинейных уравнений вида (4.5) при условии достаточной малости $\dfrac{\partial a_{ij}(x,t,u)}{\partial u}$.

В $[33_8]$ даны способы оценок $\max|u_x|$ для произвольных малых подобластей (локальные оценки) и для всей области определения решения $u(x, t)$ (тотальные оценки), пригодные для общих квазилинейных уравнений (2.4). Эти оценки использовались в дальнейших исследованиях по разрешимости нелинейных краевых задач как для эллиптических ($[62_1, 32_5$, I]), так и для параболических ($[9_1, 32_{1,5}, 33_{14,15}, 46_{3,6}]$) уравнений. Они и оценки типа де Джорджи и Нэша для линейных уравнений позволили установить разрешимость в целом для эллиптических уравнений вида

$$a_{ij}(x, u)\,u_{x_ix_j} + a(x, u, u_x) = 0 \tag{4.6}$$

при некоторых естественных ограничениях на $a(x, u, p)$ ($[62_1]$) и аналогично ($[32_5]$) для параболических уравнений вида

$$u_t - a_{ij}(x, t, u)\,u_{x_ix_j} + a(x, t, u, u_x) = 0 \tag{4.7}$$

при некоторых дополнительных (не вызванных существом дела) условиях на $a(x, t, u, p)$. Мы даем в § 3 главы VI вывод этих оценок в несколько измененном, по сравнению с первоначальным, варианте, при котором удалось, как и в эллиптическом случае ([I]), максимально снизить число требуемых от решения производных.

Общий случай квазилинейных уравнений потребовал получения еще других нелинейных оценок для решений $u(x, t)$ уравнений (2.3) и (2.4), именно оценок констант Гёльдера для $u(x, t)$ и $u_x(x, t)$. Эти оценки были даны в работах $[33_{14, 15}]$, причем при условиях, в определенном смысле необходимых. Они излагаются в главах II, V — VII. Из последующих работ отметим работу [63], в которой дана оценка $\max\limits_{Q_T}|u_{x_1}|$ для решений общего квазилинейного уравнения в случае одного пространственного переменного, использующая лишь необходимые предположения о поведении известных функций $a_{11}(x_1, t, u, p_1)$, $a(x, t, u, p)$ при $p\to\infty$. Мы приводим ее в § 5 главы VI.

В главе VII изучается некоторый класс линейных и квазилинейных параболических систем второго порядка. Этот класс был выделен нами по следующему принципу: если выбросить из системы все младшие члены, а старшие коэффициенты «заморозить» (т. е. взять при произвольных значениях их аргументов), то для полученной линейной системы должен выполняться принцип максимума, т. е. какая-либо норма вектор-решения $u(x, t)$ должна принимать свое наименьшее и наибольшее значения на $\Gamma_T$. Это одно из основных свойств, присущее всем параболическим уравнениям второго порядка, мы и сохранили для исследуемого в главе VII класса систем. Оказалось, что для этого класса систем справедливы те же свойства, что и для одного уравнения второго порядка, в частности классическая разрешимость в целом основных краевых задач.

Последние параграфы главы VII являются обзором того, что сделано по линейным уравнениям высоких порядков и системам параболического типа. Основное внимание уделено работам, в которых устанавливаются точные зависимости и соответствующие им точные оценки для их решений в различных функциональных пространствах.

**3. О некоторых нерешенных задачах.** Укажем теперь ряд нерешенных проблем на пути дальнейшего исследования нелинейных задач параболического типа. Для квазилинейных равномерно параболических уравнений общего вида (вида (2.4)) желательно понять, необходимо ли предположение о достаточной малости $\varepsilon(|u|)$ в неравенствах (3.33). Для уравнений вида (2.3) при $m=2$ оно излишне. Если для уравнений (2.4) оно окажется необходимым, то интересно выяснить, не будет ли оно ненужным для уравнений вида (2.3) с $a_i(x, t, u, p)$, удовлетворяющими неравенствам

$$\nu(|u|)(|p|+1)^{m-2}\xi^2 \leqslant \frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \leqslant \leqslant \mu(|u|)(|p|+1)^{m-2}\xi^2 \qquad (4.8)$$

с произвольным $m>1$. Для эллиптических уравнений

$$\frac{d}{dx_i}(a_i(x, u, u_x)) + a(x, u, u_x) = 0,$$

подчиняющихся условию (4.8), как показано в [I], $\varepsilon(|u|)$ может быть произвольным.

Второй круг вопросов связан с заменой условий (2.6) и (2.7) равномерной параболичности для (2.3) и (2.4) условиями:

$$\nu(|u|)(|p|+1)^{m_1}\xi^2 \leqslant \frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \leqslant \leqslant \mu(|u|)(|p|+1)^{m_2}\xi^2 \qquad (4.9)$$

и

$$\nu(|u|)(|p|+1)^{m_1}\xi^2 \leqslant a_{ij}(x,\ t,\ u,\ p)\xi_i\xi_j \leqslant \\ \leqslant \mu(|u|(|p|+1)^{m_2}\xi^2 \qquad (4.10)$$

с разными $m_1$ и $m_2$. Каковы условия разрешимости в целом краевых задач для таких уравнений?

Третий круг вопросов касается уравнений вида (2.3) и (2.4), для которых $a_i(x,\ t,\ u,\ p)$, $a(x,\ t,\ u,\ p)$, $a_{ij}(x,\ t,\ u,\ p)$ имеют те или иные особенности по аргументам $u$ и $p$. Такие уравнения встречаются, например, в задачах Стефана, которые в основных случаях могут быть сформулированы как обычные краевые задачи для уравнений вида (2.3) с простейшими нелинейностями в известных функциях, но с разрывами первого рода по $u$ (см. § 9 главы V). Существование обобщенных решений для задач Стефана устанавливается сравнительно просто. Классичность же этих решений, в том числе и гладкость границы раздела, исследована только в одномерном случае. Ряд других линейных задач с неизвестными границами может быть переформулирован в виде обычных краевых задач для квазилинейных уравнений вида (2.3) с разрывными по $u$ функциями $a_i(x,\ t,\ u,\ p)$ и $a(x,\ t,\ u,\ p)$. В задачах подземной гидродинамики встречаются уравнения вида (2.3) с неограниченными особенностями у функций $a_i(x,\ t,\ u,\ p)$ по $p$ в отдельных точках, а также с $a_i(x,\ t,\ u,\ p)$, для которых функция $\nu(|u|)$ в (4.8) обращается в нуль при $|u|=0$ (уравнения, допускающие вырождение, например, уравнения фильтрации, см. работы [4, 21, $26_2$, $17_{1,2}$, $50_{1,2}$]). Надо построить примеры, которые обрисовали бы контуры возможной теории краевых задач для таких уравнений.

Далее желательно исследовать общие нелинейные параболические уравнения

$$u_t = F\left(x,\ t,\ u,\ u_{x_i},\ u_{x_k x_j}\right) \qquad (4.11)$$

и прежде всего доказать следующее предложение, касающееся всего класса уравнений (4.11): если $u(x,\ t)$ есть достаточно гладкое решение уравнения (4.11) и уравнение (4.11) на этом решении параболично, то нормы Гёльдера $|u|_{Q'}^{(l)}$ для $u$ оцениваются через $\max\limits_{Q_T} |u,\ u_x,\ u_{xx},\ u_t|$ и некоторые характеристики известной функции $F(x, t, u, p_i, p_{kj})$, которая предполагается гладкой. Далее надо найти те условия на функции $F(x, t, u, p_i, p_{kj})$, при которых $\max\limits_{Q'}|u_t, u_{xx}|$ оценивается через $|u, u_x|_{Q_T}^{(\alpha)}$, $|u_x|_{Q'}^{(\alpha)}$ — через $|u|_{Q_T}^{(\alpha)}$ и $\max\limits_{Q_T}|u_x|$ и т. д.

Все перечисленные только что проблемы сформулированы нами для уравнений второго порядка. Мы думаем, что результаты и методы, изложенные в данной книге, окажутся полезными при их решении.

Следующий круг задач касается систем и уравнений высоких порядков параболического типа. Для них желательно провести исследования с той же степенью подробности, что и для уравнений второго порядка. К настоящему времени хорошо исследованы линейные задачи в случае гладких коэффициентов. Для разрывных коэффициентов известны лишь результаты, аналогичные результатам §§ 1—5 гл. III. Они касаются сильно параболических систем и доказываются так же, как и для одного уравнения 2-го порядка. По нелинейным задачам, особенно по их классической разрешимости, результатов сравнительно немного. Укажем на ряд работ (помимо упоминавшихся выше), посвященных исследованию квазилинейных уравнений и систем.

Их можно условно разбить на три группы. К одной из них отнесем работы [$10_{4,5}$, $\mathbf{4}_{2-4}$, $\mathbf{40}_{1,2}$, $\mathbf{34}_1$, $17_{1,2}$], посвященные квазилинейным уравнениям и системам любого порядка. В них устанавливаются теоремы существования обобщенных решений краевых задач. Для этого используется метод Галёркина. Начиная с работ Минти [**40**] и Браудера [**4**], появился новый момент в реализации этого метода, состоящий в выполнении слабых предельных переходов под знаком так называемых монотонных операторов. Вопросы о единственности таких решений при «естественных» ограничениях и об увеличении их гладкости при увеличении гладкости известных в задаче функций еще ожидают своего решения.

Ко второй группе можно отнести работы [$30_2$, $56_{2,3}$, $\mathbf{30}_3$ и др.], в которых исследуется задача Коши для абстрактных уравнений вида

$$\frac{du}{dt} + S(t)\,u = f(t, u), \quad u(0) = u_0,$$

где $u(t)$ есть искомая функция параметра $t \in [0, T]$ со значениями в банаховом (или гильбертовом) пространстве, $S(t)$ — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор в $H$, зависящий от $t$ как от параметра, а $f(t, u)$ — известная функция, определенная на $[0, T] \times H$ и подчиненная в том или ином смысле $S(t)$. Полученные по ее разрешимости результаты позволили доказать разрешимость первой и второй краевых задач для уравнений вида (4.4) при условии слабой нелинейности $a(x, t, u, p)$ по $u$ и $p$.

Наконец, в третью группу можно объединить работы [$8_{1,2}$, $9_{2-4}$, 13, $33_7$], в которых анализируются некоторые классы квазилинейных систем, встречающихся в механике сплошных сред, и систем, моделирующих их. Из этих трех групп работ мы даем представление лишь о первой (см. конец § 6 гл. V).

Пришлось оставить в стороне и многие другие исследования, касающиеся стабилизации решений $u(x, t)$ при $t \to \infty$, аналитичности решений по $x$ в случае аналитичности коэффициентов уравнений, поведения решений при $|x| \to \infty$ (теоремы типа Лиувилля) и при стремлении старших коэффициентов к нулю (задачи с малым параметром), анализа неклассических задач для уравнений параболического типа (например, таких, как в [34]) и др. Незатронутыми остались и вопросы, возникшие в теории вероятностей при изучении непрерывных марковских процессов (см. [19, **13**]), в том числе и исследования по вырождающимся линейным параболическим уравнениям.

Обширность и разнообразие материала, а в некоторых направлениях и определенная его незаконченность, не позволили включить их в (и без того, увы!, толстую) книгу.

ГЛАВА II

# ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В этой главе собраны предложения, касающиеся произвольных элементов ряда функциональных пространств и играющие для нас, хотя и важную, но вспомогательную роль.

В § 1 приводятся неравенства Коши и Гёльдера и ряд следствий из них. Второй параграф посвящен теоремам вложения и соответствующим им неравенствам, в том числе и некоторым мультипликативным неравенствам, для функций, зависящих одинаковым образом от всех своих аргументов $x_1, \ldots, x_n$. Из-за необходимости знать характер зависимости констант в этих мультипликативных неравенствах от всех входящих в них числовых параметров пришлось дать их аккуратный вывод. В этом же параграфе сформулированы частный случай второго основного неравенства для эллиптических операторов и теорема о продолжении функций класса $W_q^l(S)$ с $S$ на все $\Omega$. В § 3 приводятся теоремы вложения и теоремы продолжения для функций, зависящих от $x$ и от $t$, по которому они имеют другие свойства.

В § 4 доказывается ряд простых утверждений об усреднениях элементов пространств $L_q(\Omega)$, $L_{q,r}(Q_T)$ и $V_2^{1,0}(Q_T)$ и их «срезках» $u^{(k)} = \max\{u - k, 0\}$. В § 5 собраны различные предложения, используемые при доказательствах гёльдеровской непрерывности функций классов $\mathfrak{B}_2$ и исследовании других свойств гладкости и суммируемости обобщенных решений с теми или иными степенями.

Остальные параграфы (§§ 6—9) посвящены исследованию введенных нами классов функций $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_2$. Элементами этих классов являются функции, удовлетворяющие некоторым системам интегро-дифференциальных неравенств. Для них доказывается, что элементы $\mathfrak{A}$ являются ограниченными функциями (§ 6), а элементы классов $\mathfrak{B}_2$ — непрерывными по $x$

и $t$ в смысле Гёльдера (§§ 7—9). Одновременно с этим даются оценки $\max|u|$ для $u \in \mathfrak{A}$ и $\langle u\rangle^{(\alpha)}$ для $u \in \mathfrak{B}_2$, зависящие лишь от числовых параметров, входящих в определения классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_2$.

Предложения, доказанные в §§ 6—9, существенно используются в §§ 7—12 главы III и в главах V—VII, посвященных нелинейным задачам, ибо в большинстве случаев решения $u$ параболических уравнений и их производные $u_x$ принадлежат классам $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}_2$.

## § 1. Некоторые простейшие неравенства

Мы часто будем использовать несколько хорошо известных алгебраических и функциональных неравенств. Из алгебраических неравенств нам потребуются следующие:

1) неравенство Коши

$$a_{ij}\xi_i\eta_j \leqslant \sqrt{a_{ij}\xi_i\xi_j}\,\sqrt{a_{ij}\eta_i\eta_j}, \tag{1.1}$$

справедливое для любой неотрицательной квадратичной формы $a_{ij}\xi_i\xi_j$ с $a_{ij}=a_{ji}$ и любых чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\eta_1, \ldots, \eta_n$;

2) «неравенство Коши с $\varepsilon$»

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \tag{1.2}$$

справедливое при любом $\varepsilon > 0$ и произвольных $a$ и $b$;

3) более общее, чем (1.2), неравенство Юнга

$$ab \leqslant \frac{1}{m}\varepsilon^m a^m + \frac{m-1}{m}\varepsilon^{-\frac{m}{m-1}} b^{\frac{m}{m-1}}, \tag{1.3}$$

справедливое при любых положительных $a$, $b$, $\varepsilon$ и $m > 1$.

Из функциональных неравенств будут использованы следующие неравенства:

4) неравенства

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|,$$
$$|(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|,$$

первое из которых справедливо для норм любого банахова пространства, а второе — для скалярного произведения и нормы любого пространства Гильберта;

5) неравенство Коши — Буняковского — Шварца

$$\left|\int\limits_{\Omega} \sum_i u_i v_i \, dx\right| \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} \sum_i u_i^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{\Omega} \sum_i v_i^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (1.4)$$

являющееся частным случаем последнего неравенства;

6) неравенство Гёльдера

$$\left|\int\limits_{\Omega} \prod_{i=1}^{s} u_i \, dx\right| \leqslant \prod_{i=1}^{s} \left(\int\limits_{\Omega} |u_i|^{\lambda_i} \, dx\right)^{\frac{1}{\lambda_i}}, \qquad (1.5)$$

в котором $\lambda_i \geqslant 1$, $\sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i^{-1} = 1$; *);

7) следствия из неравенства Гёльдера

$$\left|\int\limits_{Q_T} u(x, t) v(x, t) \, dx \, dt\right| \leqslant \int\limits_0^T \|u\|_{q, \Omega} \cdot \|v\|_{\frac{q}{q-1}, \Omega} \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|_{q, r, Q_T} \cdot \|v\|_{\frac{q}{q-1}, \frac{r}{r-1}, Q_T}, \quad q \geqslant 1, \quad r \geqslant 1, \qquad (1.6)$$

и

$$\|uv\|_{q, r, Q_T} = \left[\int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Omega} |u|^q |v|^q \, dx\right)^{\frac{r}{q}} dt\right]^{\frac{1}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|_{\lambda q, \mu r, Q_T} \cdot \|v\|_{\lambda' q, \mu' r, Q_T}, \qquad (1.7)$$

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = 1, \quad \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} = 1; \quad \lambda, \lambda', \mu, \mu' \geqslant 1.$$

Запишем последнее в более удобной для нас форме:

$$\|uv\|_{q, r, Q_T} \leqslant \|u\|_{q_1, r_1, Q_T} \cdot \|v\|_{\frac{qq_1}{q_1-q}, \frac{rr_1}{r_1-r}, Q_T}, \quad q_1 \geqslant q, \quad r_1 \geqslant r; \qquad (1.7')$$

8) неравенство вида (1.6) для нескольких сомножителей

$$\left|\int\limits_{Q_T} \prod_{i=1}^{s} u_i(x, t) \, dx \, dt\right| \leqslant \prod_{i=1}^{s} \|u_i\|_{q_i, r_i, Q_T}, \qquad (1.8)$$

---

*) Как принято, считаем $\|u\|_{\infty, \Omega} = \operatorname*{vrai\,max}\limits_{\Omega} |u|$.

где

$$q_i \geqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{s} q_i^{-1} = 1, \quad r_i \geqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{s} r_i^{-1} = 1.$$

Неравенства (1.4) — (1.8) справедливы при произвольных $u_i(x)$, $v_i(x)$, заданных в $\Omega$, и $u(x, t)$, $v(x, t)$ и $u_i(x, t)$, заданных в $Q_T$, для которых конечны нормы, стоящие в правой части соответствующих неравенств.

Отметим следующее полезное предложение.

Лемма 1.1. *Если суммируемая в $Q_T$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет при любой $\eta(x, t)$ из $L_{q,r}(Q_T)$ неравенству*

$$\left| \int\limits_{Q_T} u\eta \, dx \, dt \right| \leqslant c \, \| \eta \|_{q, r, Q_T} \tag{1.9}$$

*с постоянной $c$, не зависящей от $\eta$, то $u(x, t)$ принадлежит сопряженному пространству $L_{q', r'}(Q_T)$, $q' = \dfrac{q}{q-1}$, $r' = \dfrac{r}{r-1}$ и $\| u \|_{q', r', Q_T} \leqslant c$. Здесь, как и выше, $r \geqslant 1$, $q \geqslant 1$.*

## § 2. Пространства $W_q^l(\Omega)$ и $H^l(\Omega)$. Теоремы вложения

В § 1 главы I были определены пространства $L_q(\Omega)$ и $W_q^l(\Omega)$ с $q \geqslant 1$ и целым $l$. Эти пространства были предметом специальных исследований (см. [$55_1$, $25_{1-3}$, $\mathbf{17}_{3,4}$, 45, $\mathbf{44}_2$, $3_{1,2}$, 6, $14_{1,2}$ и др.]). Мы приведем здесь некоторые из основных результатов этих исследований, необходимые для целей данной книги. Они касаются поведения произвольных элементов пространств $W_q^l(\Omega)$ на многообразиях размерностей $r \leqslant n$ и связей сходимостей в этих пространствах с разными $l$, $q$ и $r$.

Напомним, что норма в $L_q(\Omega)$ (всюду $q \geqslant 1$) определяется равенством

$$\| u \|_{q, \Omega} = \left( \int\limits_{\Omega} | u(x) |^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.1}$$

а норма в $W_q^l(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{q,\Omega}^{(l)} = \sum_{j=0}^{l} \langle\langle u \rangle\rangle_{q,\Omega}^{(j)} \equiv \sum_{j=0}^{l} \sum_{(j)} \| D_x^j u \|_{q,\Omega}. \tag{2.2}$$

Одной из центральных формул, которой мы будем неоднократно пользоваться, является формула интегрирования по частям

$$\int_\Omega u_{x_l} v\, dx = -\int_\Omega u v_{x_l}\, dx + \int_S uv \cos(\mathbf{n}, x_l)\, ds \tag{2.3}$$

для ограниченных областей $\Omega$. В ней $\mathbf{n}$ есть внешняя нормаль к границе $S$. Она справедлива для любых функций $u$ из $W_q^1(\Omega)$ и $v$ из $W_p^1(\Omega)$ с $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$ (точнее, для специально выбранных их представителей из классов функций, им эквивалентных на $\Omega$), если только $S$ обладает некоторой регулярностью (например, если $S$ — кусочно-гладкая). Если функция $u(x)$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ (или $v \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$), то формула (2.3) приобретает вид

$$\int_\Omega u_{x_l} v\, dx = -\int_\Omega u v_{x_l}\, dx. \tag{2.4}$$

Напомним, что $\overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ было определено как замыкание множества бесконечно дифференцируемых финитных в $\Omega$ функций в норме $W_q^1(\Omega)$. При таком определении $\overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ формула (2.4) справедлива, очевидно, при любой границе $S$ области $\Omega$. Для кусочно-гладких границ $\overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ можно определить и как совокупность всех элементов из $W_q^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на $S$, с нормой $W_q^1(\Omega)$.

Назовем оператором вложения из одного пространства $W_p^l(\Omega)$ в другое, более широкое пространство $W_q^{l_1}(S_r)$, где $S_r$ — какая-нибудь гладкая поверхность размерности $r \leqslant n$, принадлежащая $\overline{\Omega}$, или в пространство $H^{l_1}(\overline{\Omega})$, оператор, сопоставляющий каждой функции из $W_p^l(\Omega)$ ее же как элемент $W_q^{l_1}(S_r)$ или $H^{l_1}(\overline{\Omega})$. Известны различные достаточные условия, при которых такие операторы ограничены или вполне непрерывны. Одним из них является следующее:

Теорема 2.1 *). *Оператор вложения из* $W^l_p(\Omega)$ ($l$ — *целое*) *в* $L_q(S_r)$, *где* $\Omega$ — *ограниченная область в евклидовом пространстве* $n$ *измерений, а* $S_r$ — *какой-нибудь плоский* $r$-*мерный кусок, принадлежащий* $\overline{\Omega}$, *ограничен, если* $n > lp$, $r > n - lp$ *и* $q \leqslant \frac{pr}{n-lp}$, *и вполне непрерывен при* $q < \frac{pr}{n-lp}$. *При* $n = lp$ *он вполне непрерывен для любого конечного* $q$. *При* $n < lp$ *ограничен оператор вложения из* $W^l_p(\Omega)$ *в* $H^\alpha(\overline{\Omega})$ *при* $\alpha \leqslant \frac{lp-n}{p}$; *для* $\alpha < \frac{lp-n}{p}$ *этот оператор вполне непрерывен. При этом считается, что* $l \geqslant 1$, а $\alpha < 1$.

В своей основной части теорема 2.1 доказана С. Л. Соболевым и В. И. Кондрашевым (см. [$55_1$] и [54]). Дополнения к предложениям, доказанным в [$55_1$], о вложимости $W^l_p(\Omega)$ в $H^\alpha(\Omega)$ даны в работах нескольких авторов (см. [$17_6$, $44_2$, $25_1$ и др.]). В этих работах описаны ограничения, которым должна подчиняться область $\Omega$. Для областей $\Omega$ с кусочно-гладкими границами (их определение дано на стр. 18 § 1 главы I) теорема 2.1 верна.

Эта теорема гарантирует для любой функции $u(x)$ из $W^l_p(\Omega)$ справедливость неравенств

$$\|u\|_{q, S_r} \leqslant c\|u\|^{(l)}_{p, \Omega} \tag{2.5}$$

и

$$|u|^{(\alpha)}_{\Omega} \leqslant c\|u\|^{(l)}_{p, \Omega}. \tag{2.6}$$

Первое справедливо для $q \leqslant \frac{pr}{n-pl}$ при $n > pl$ и с любым конечным $q$ при $n = pl$, причем $r > n - pl$. Второе имеет место при $n < pl$ с $\alpha \leqslant \frac{pl-n}{p}$, $\alpha < 1$. Постоянные $c$ в общем случае зависят от $n$, $p$, $l$, $r$, $q$, $\Omega$, $S_r$, но не зависят от $u(x)$.

---

*) Эту и другие аналогичные теоремы о произвольном элементе $u(x)$ из $W^l_p(\Omega)$ надо понимать как существование по крайней мере одной функции, эквивалентной $u(x)$ на $\Omega$, для которой верны утверждения теорем.

Из этих неравенств легко вывести два следующих:

$$\|u\|_{q,\,\Omega}^2 \leqslant c\left(\|u_x\|_{p,\,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\,\Omega}^2\right) \tag{2.7}$$

с $q \leqslant \frac{np}{n-p}$ при $p < n$ и с любым $q$ при $p = n$ и

$$\max_{\Omega} |u|^2 \leqslant c\left(\|u_x\|_{p,\,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\,\Omega}^2\right) \tag{2.8}$$

при $p > n$.

Отметим, что для ограниченных $\Omega$ при $\tilde{p} > p$ для любой функции $u(x)$ из $L_p(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|v\|_{p,\,\Omega} \leqslant c\|v\|_{\tilde{p},\,\Omega}$$

с $c = (\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\tilde{p}}}$, что следует из неравенства Гёльдера.

Полезно следующее предложение: при фиксированной ограниченной $\Omega$ норма $\|u\|_{p,\,\Omega}^{(1)}$ эквивалентна $\|u_x\|_{p,\,\Omega} + \|u\|_{1,\,\Omega}$, а если функции $u(x)$ обращаются в нуль на какой-либо части $(n-1)$-мерной границы $\Omega$, имеющей положительную меру, то $\|u\|_{p,\,\Omega}^{(1)}$ эквивалентна $\|u_x\|_{p,\,\Omega}$.

К утверждениям теоремы 2.1 следует добавить еще следующее (см. [$55_{\rm I}$]): нормы операторов вложения равномерно ограничены для всевозможных расположений $S_r$ в $\Omega$ и операторы мало меняются при малом перемещении $S_r$ и даже при достаточно гладкой малой деформации $S_r$. Из теоремы 2.1 следуют соответствующие утверждения и для неплоских сечений $S_r$, если только они достаточно гладки (например, если $S_r \in O^l$). Действительно, распрямляя их с помощью $l$ раз ограниченно дифференцируемого преобразования независимых переменных, мы придем к случаю, описанному в теореме 2.1.

Кроме теоремы 2.1, нам понадобятся следующие более тонкие характеристики операторов вложения, выражаемые в виде так называемых мультипликативных неравенств.

Теорема 2.2. *Для любой функции* $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_m^{(1)}(\Omega)$, $m \geqslant 1$, *и числа* $r \geqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{q,\,\Omega} \leqslant \beta \|u_x\|_{m,\,\Omega}^{\alpha} \|u\|_{r,\,\Omega}^{1-\alpha}, \tag{2.9}$$

*в котором*

$$\alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} + \frac{1}{r}\right)^{-1} \tag{2.10}$$

*и*:

1) *при* $m \geqslant n = 1$ *число* $q$ *может быть любым из* $[r, \infty]$, *а* $\beta = \left(1 + \frac{m-1}{m} r\right)^{\alpha}$; *при изменении* $q$ *от* $r$ *до* $\infty$ *число* $\alpha$ *меняется от нуля до* $\frac{m}{m + r(m-1)}$, *включая оба конца*;

2) *при* $n > 1$ *и* $m < n$ *число* $q$ *может быть любым из* $\left[r, \frac{nm}{n-m}\right]$, *если* $r \leqslant \frac{nm}{n-m}$, *и любым из* $\left[\frac{nm}{n-m}, r\right]$, *если* $r \geqslant \frac{nm}{n-m}$, *а* $\beta = \left(\frac{(n-1)m}{n-m}\right)^{\alpha}$; *при изменении* $q$ *между* $r$ *и* $\frac{nm}{n-m}$ *число* $\alpha$ *меняется между* 0 *и* 1, *включая оба конца*;

3) *при* $n > 1$ *и* $m \geqslant n$ *число* $q$ *может быть любым из* $[r, \infty)$, *а* $\beta = \max\left\{q\frac{n-1}{n};\ 1 + \frac{m-1}{m} r\right\}^{\alpha}$. *При изменении* $q$ *от* $r$ *до* $\infty$ *число* $\alpha$ *меняется от нуля до* $\frac{nm}{nm + r(m-n)}$, *причем правый конец исключается* *).

Замечание 2.1. Условие обращения $u(x)$ в нуль на $S$ в теореме 2.2 можно заменить, например, условием

$$\int_{\Omega} u(x)\,dx = 0. \tag{2.11}$$

В этом случае постоянная $\beta$ в (2.9) будет зависеть от $n$, $m$, $r$, $\alpha$ и от области $\Omega$, правда, она не меняется при преобразовании подобия области $\Omega$. Граница $S$ при этом должна быть кусочно-гладкой.

Неравенства (2.9) при $m < n$ являются частным случаем более общих мультипликативных неравенств, доказанных разными способами в работах [$17_6$, $25_1$, $14_1$]. Мы выведем здесь неравенства (2.9) при любом $m \geqslant 1$ и проследим, от чего и как зависит постоянная $\beta$.

Для случая $m \geqslant n = 1$ воспользуемся неравенством

$$|u(x)|^q = |u(x)|^r \left(|u(x)|^s\right)^{\frac{q-r}{s}} \leqslant$$
$$\leqslant |u(x)|^r \left(\int_{\Omega} s\,|u(\xi)|^{s-1}\,|u_{\xi}(\xi)|\,d\xi\right)^{\frac{q-r}{s}},$$

*) Если $m > n$, то (2.9) справедливо и при $q = \infty$.

справедливым при любом $s \geqslant 1$ и $q \geqslant r$. Интеграл, стоящий справа, оценим по неравенству Гёльдера и затем обе части полученного неравенства проинтегрируем по $\Omega$. Это даст

$$\int_\Omega |u(x)|^q dx \leqslant \int_\Omega |u(x)|^r dx \left(s \|u_x\|_{m,\Omega} \|u\|^{s-1}_{\frac{m(s-1)}{m-1},\Omega}\right)^{\frac{q-r}{s}}. \quad (2.12)$$

Возьмем $s = 1 + \frac{m-1}{m} r$ и обозначим $\frac{q-r}{qs} = \alpha$. Тогда параметры $q$, $r$, $m$ и $\alpha$ оказываются связанными равенством $\alpha\left(\frac{1}{r} + \frac{m-1}{m}\right) = \frac{1}{r} - \frac{1}{q}$, которое совпадает с (2.10), а из (2.12) получаем

$$\|u\|_{q,\Omega} \leqslant \left(1 + \frac{m-1}{m} r\right)^\alpha \|u_x\|^\alpha_{m,\Omega} \|u\|^{1-\alpha}_{r,\Omega},$$

т. е. неравенство (2.9) с $\beta = \left(1 + \frac{m-1}{m} r\right)^\alpha$. Так как при изменении $q$ от $r$ до $\infty$ постоянная $\beta$ остается ограниченной, то ясно, что (2.9) верно и при $q = \infty$.

Случай $n > 1$, $m < n$ рассмотрим, следуя Л. Ниренбергу и К. К. Головкину, таким образом: сначала покажем, что для любой функции $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{\bar{p},\Omega} \leqslant c_p \|u_x\|_{p,\Omega}, \quad (2.13)$$

в котором $p$ — любое число из $[1, n)$ $\bar{p} = \frac{np}{n-p}$, а $c_p = \frac{(n-1)p}{n-p}$.

Установим его сначала для $p = 1$, т. е. проверим, что

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1},\Omega} \leqslant \prod_{i=1}^n \|u_{x_i}\|^{\frac{1}{n}}_{1,\Omega}. \quad (2.14)$$

Для $n = 2$ (2.14) справедливо, ибо

$$\int\int u^2(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 \leqslant$$
$$\leqslant \int \max_{x_2} |u(x_1, x_2)|\,dx_1 \int \max_{x_1} |u(x_1, x_2)|\,dx_2 \leqslant$$
$$\leqslant \int\int |u_{x_2}|\,dx_1\,dx_2 \int\int |u_{x_1}|\,dx_1\,dx_2.$$

Пусть оно верно для размерности $n-1\geqslant 1$. Тогда оно верно и для размерности $n$, ибо в силу неравенства Гёльдера и нашего индуктивного предположения

$$\int |u(x_1, \ldots, x_n)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$
$$\leqslant \int dx_n \left[\left(\int |u|\,dx_1 \ldots dx_{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\int |u|^{\frac{n-1}{n-2}} dx_1 \ldots dx_{n-1}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \max_{x_n}\left(\int |u|\,dx_1 \ldots dx_{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \int \prod_{i=1}^{n-1} \|u_{x_i}\|_{1,\, E_{n-1}}^{\frac{1}{n-1}}\, dx_n \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int |u_{x_n}|\,dx_1 \ldots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\int |u_{x_i}|\,dx_1 \ldots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Неравенство (2.14) доказано. Для доказательства (2.13) при $p>1$ введем новую функцию $v=u^{\frac{1}{\varkappa}}$, где $\frac{1}{\varkappa}=\bar{p}\,\frac{n-1}{n}>1$. Ясно, что

$$\|u\|_{\bar{p},\,\Omega}=\|v\|^{\varkappa}_{\frac{n}{n-1},\,\Omega}.$$

Применяя для оценки $\|v\|_{\frac{n}{n-1},\,\Omega}$ неравенство (2.14) и неравенство Гёльдера, получим

$$\|u\|_{\bar{p},\,\Omega}=\|v\|^{\varkappa}_{\frac{n}{n-1},\,\Omega} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{1,\,\Omega}^{\frac{\varkappa}{n}}=$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\left\|\frac{1}{\varkappa}\,u^{\frac{1}{\varkappa}-1}u_{x_i}\right\|_{1,\,\Omega}^{\frac{\varkappa}{n}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\varkappa} \prod_{i=1}^{n}\left(\left\|u^{\frac{1}{\varkappa}-1}\right\|_{\frac{p}{p-1},\,\Omega}\|u_{x_i}\|_{p,\,\Omega}\right)^{\frac{\varkappa}{n}} \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa^{-\varkappa}\|u\|_{\bar{p},\,\Omega}^{1-\varkappa}\|u_x\|^{\varkappa}_{p,\,\Omega},$$

откуда следует оценка (2.13).

Покажем, как с ее помощью доказать (2.9). Если $m<n$, то $\|u\|_{q,\Omega}$ при $\min\{r;\ \bar m\}\leqslant q\leqslant \max\{r;\ \bar m\}$ оценим по неравенству Гёльдера так:

$$\|u\|_{q,\Omega}\leqslant \|u\|^{\alpha}_{\bar m,\Omega}\|u\|^{1-\alpha}_{r,\Omega}, \tag{2.15}$$

где $\alpha$ — число, определяемое равенством $\dfrac{\alpha}{\bar m}+\dfrac{1-\alpha}{r}=\dfrac{1}{q}$. Очевидно, что $\alpha$ принадлежит отрезку $[0,\ 1]$, и когда $q$ меняется между $r$ и $\bar m$, число $\alpha$ меняется между 0 и 1, и наоборот. Из (2.15) и (2.13) с $p=m$ получим неравенство (2.9)

$$\|u\|_{q,\Omega}\leqslant c_m^{\alpha}\|u_x\|^{\alpha}_{m,\Omega}\|u\|^{1-\alpha}_{r,\Omega}$$

с

$$\beta=c_m^{\alpha}=\left(\frac{(n-1)\,m}{n-m}\right)^{\alpha}.$$

Осталось рассмотреть случай $m\geqslant n>1$. Пусть $r$ — какое-либо число из $[1,\ \infty)$, а $q$ — из $[r,\ \infty)$. Возьмем $p$ из $[1,\ n)$ и оценим $\|u\|_{q,\Omega}$ следующим образом:

$$\|u\|_{q,\Omega}=\|u^{\delta}u^{1-\delta}\|_{q,\Omega}\leqslant\|u\|^{\delta}_{\bar ps,\Omega}\ \|u\|^{1-\delta}_{r,\Omega}=$$
$$=\|u^s\|^{\frac{\delta}{s}}_{\bar p,\Omega}\|u\|^{1-\delta}_{r,\Omega},\qquad \delta\in[0,\ 1]. \tag{2.16}$$

Здесь числа $q$, $\bar p=\dfrac{np}{n-p}$, $s$, $\delta$ и $r$ связаны равенством $\dfrac{1}{q}=\dfrac{\delta}{\bar ps}+\dfrac{1-\delta}{r}$, причем $q\in[r,\ \bar ps]$ и $s>1$. Правую часть (2.16) оценим, используя неравенство (2.13) для функции $v=u^s$ и неравенство Гёльдера. Это даст

$$\|u\|_{q,\Omega}\leqslant c_p^{\frac{\delta}{s}}\|v_x\|^{\frac{\delta}{s}}_{p,\Omega}\|u\|^{1-\delta}_{r,\Omega}\leqslant$$
$$\leqslant(c_p)^{\frac{\delta}{s}}\ \|s|u|^{s-1}|u_x|\|^{\frac{\delta}{s}}_{p,\Omega}\|u\|^{1-\delta}_{r,\Omega}\leqslant$$
$$\leqslant(sc_p)^{\frac{\delta}{s}}\ \|u_x\|^{\frac{\delta}{s}}_{m,\Omega}\|u\|^{\frac{\delta}{s}(s-1)}_{\frac{mp}{m-p}(s-1),\Omega}\ \|u\|^{1-\delta}_{r,\Omega}. \tag{2.17}$$

Выберем $s$ так, чтобы $\frac{mp}{m-p}(s-1)=r$, т. е. возьмем $s=1+\frac{m-p}{mp}r$. Показатель $\frac{\delta}{s}$ выразим через известные нам величины с помощью равенства, связывающего $q$, $\delta$, $p$, $s$ и $r$, и равенства, определяющего $s$. Это, как нетрудно видеть, дает

$$\alpha\equiv\frac{\delta}{s}=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+\frac{1}{r}\right)^{-1}.$$

Выберем число $p$ из $[1, n)$ так, чтобы величина $s\bar{p}$, а потому и $sc_p=s\frac{n-1}{n-p}p=s\bar{p}\frac{n-1}{n}$, приняла наименьшее значение. Требование $q\in[r, s\bar{p})$ накладывает ограничение на $p$: $s\bar{p}\geqslant q$. Условие $p\geqslant 1$ влечет за собой неравенство

$$s\bar{p}=\left(1+\frac{m-p}{mp}r\right)\frac{np}{n-p}\geqslant\left(1+\frac{m-1}{m}r\right)\frac{n}{n-1}.$$

Таким образом, в допустимом диапазоне изменения $p$ наименьшее значение $s\bar{p}$ равно $\max\left\{q;\left(1+\frac{m-1}{m}r\right)\frac{n}{n-1}\right\}$. При таком значении $p$ постоянная $(sc_p)^\alpha$ в неравенстве (2.17) равна

$$\beta=\max\left\{q\frac{n-1}{n};\ 1+\frac{m-1}{m}r\right\}^\alpha,$$

и неравенство (2.17) совпадает с неравенством (2.9) для случая 3).

Теорема 2.2 доказана.

У нас будет использован ряд следствий из неравенства (2.9). Одним из них является справедливое для любой функции $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ неравенство

$$\|u\|_{\frac{2p}{p-2},\Omega}\leqslant c\,\|u_x\|_{2,\Omega}, \tag{2.18}$$

в котором $c=\beta_1\operatorname{mes}^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\Omega$,

$$\begin{aligned} &p\geqslant n \quad \text{при} \quad n\geqslant 3,\\ &p>2 \quad \text{при} \quad n=2,\\ &p\geqslant 2 \quad \text{при} \quad n=1,\end{aligned} \tag{2.19}$$

а постоянная $\beta_1=\frac{2(n-1)}{n-2}$ при $n\geqslant 3$, $\beta_1=\frac{2(p-1)}{p-2}$ при $n=2$ и $\beta_1=2$ при $n=1$. Для $u(x)$, не равных нулю на $S$, но удовлетворяющих условию (2.11), постоянная $\beta_1$ зависит от $n$, $p$ и от границы $S$. Неравенство (2.18) выводится из (2.9), если в последнем положить $m=2$, $q=\frac{2p}{p-2}$, $r<q$ и оценить $\|u\|_{r,\Omega}$ по неравенству Гёльдера:

$$\|u\|_{r,\Omega}\leqslant\|u\|_{\frac{2p}{p-2},\Omega}(\operatorname{mes}\Omega)^{\frac{1}{r}-\frac{p-2}{2p}}.$$

Будет использовано еще неравенство

$$\|u\|^2_{\frac{2p}{p-2},\Omega}\leqslant\varepsilon\|u_x\|^2_{2,\Omega}+c_\varepsilon\|u\|^2_{2,\Omega}, \tag{2.20}$$

где $p$ подчиняется ограничениям (2.19), $\varepsilon$ — произвольное положительное число, $c_\varepsilon=\frac{p-n}{p}\left(\beta_1\sqrt{\frac{n}{p\varepsilon}}\right)^{\frac{2n}{p-n}}$, а постоянная $\beta_1$ такая же, как в (2.18). Неравенство (2.20) получается из неравенства (2.9) при $m=2$, $r=2$, $q=\frac{2p}{p-2}$ и оценки его правой части по неравенству Юнга (1.3).

Для оценок интегралов по $(n-1)$-мерной границе $S$ $n$-мерной области $\Omega$ при $n\geqslant 2$ нам, кроме (2.5), понадобится следующее неравенство типа (2.9):

$$\|u\|_{q,S}\leqslant c\|u_x\|^{\alpha}_{2,\Omega}\|u\|^{1-\alpha}_{2,\Omega},\quad \alpha=\frac{n}{2}-\frac{n-1}{q}, \tag{2.21}$$

справедливое для любой функции $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ с $\int\limits_\Omega u(x)\,dx=0$. В нем $q$ — любое из $\left[\frac{2(n-1)}{n}, \frac{2(n-1)}{n-2}\right]$ при $n\geqslant 3$ и из $[1,\infty)$ при $n=2$, а постоянная $c$ зависит лишь от $n$, $q$ и поверхности $S$, которая предполагается кусочно-гладкой.

Важную роль для исследования операторов эллиптического типа играют неравенства

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega}\leqslant c\|\mathscr{L}u\|_{2,\Omega}+c_1\|u\|_{2,\Omega}, \tag{2.22}$$

справедливые для произвольной функции $u(x)$ из $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющей одному из однородных краевых условий:

$u|_S=0$ или $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}+\sigma u|_S=0$ (а $\mathbf{l}$ — заданный вектор, образующий с направлением нормали к $S$ в той же точке острый угол), и произвольного равномерно эллиптического оператора $\mathscr{L}$ вида

$$\mathscr{L}u=a_{ij}(x)u_{x_ix_j}+a_i(x)u_{x_i}+a(x)u$$

с непрерывными $a_{ij}$, с $a_i$ из $L_q(\Omega)$, $q>n$, и с $a\in L_{\frac{\hat q}{2}}(\Omega)$, где $\hat q=\max\{q;\ 4\}$. Постоянные $c$ и $c_1$ в них определяются лишь коэффициентами $\mathscr{L}$, границей $S$ (которая должна быть из класса $C^2$) и известными функциями, входящими в краевые условия.

Неравенства (2.22) полезны и при исследовании параболических операторов. Кроме них, нам понадобится также обобщение неравенства (2.22)

$$\nu\left(\|u\|_{2,\Omega}^{(2)}\right)^2\leqslant(\mathscr{L}u,\ \tilde{\mathscr{L}}u)+c_1\|u\|_{2,\Omega}^2,\quad \nu=\mathrm{const}>0,\tag{2.23}$$

точнее, его частный случай в виде

$$\frac{3}{4}\nu\|u_{xx}\|_{2,\Omega}^2\leqslant(\mathscr{L}u,\ \Delta u)+c_1\|u_x\|_{2,\Omega}^2,\tag{2.24}$$

где $\mathscr{L}u=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)u_{x_j}\right)$. Неравенство (2.23) справедливо для любой функции $u$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и любых двух эллиптических операторов $\mathscr{L}$ и $\tilde{\mathscr{L}}$ таких же, как в (2.22). Подробные доказательства и анализ неравенств (2.22), (2.24) даны в главе III книги [I].

В главах IV и VII будет использовано пространство $W_q^l(\Omega)$ с нецелым $l$. Это — банахово пространство, состоящее из элементов $W_q^{[l]}$ с конечной нормой

$$\|u\|_{q,\Omega}^{(l)}=\langle\langle u\rangle\rangle_{q,\Omega}^{(l)}+\|u\|_{q,\Omega}^{([l])},\tag{2.25}$$

где

$$\|u\|_{q,\Omega}^{[l]}=\sum_{j=0}^{[l]}\sum_{(j)}\|D_x^ju\|_{q,\Omega},$$

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q,\Omega}^{(l)}=$$

$$=\sum_{(j=[l])}\left(\int_\Omega dx\int_\Omega|D_x^ju(x)-D_y^ju(y)|^q\frac{dy}{|x-y|^{n+q(l-[l])}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Такие пространства были введены (сначала при $q=2$, а позднее при любом $q>1$ [$53_2$]) при изучении свойств функций из $W_q^l(\Omega)$ с целым $l$ на многообразиях $S_r$ размерностей $r<n$ и получении точных обратных предложений, касающихся продолжения функции с $S_r$ на все $\Omega$. Ниже приводится одна из таких теорем, в которой изучаются функции из класса $W_q^l(\Omega)$ на границе $S$ области $\Omega$. Она играет важную роль при изучении краевых задач с неоднородными граничными условиями, в особенности при получении для их решений точных оценок. Для формулировки этой теоремы нам нужно ввести классы $W_q^l$ с нецелым $l$ на криволинейной поверхности $S$. Это делается с помощью параметризации поверхности. Пусть $S_1, \ldots, S_k, \ldots$ — конечная или бесконечная (в случае бесконечной $S$) совокупность подмножеств $S$ такая, что $\bigcup\limits_k S_k = S$ и для каждой точки $x \in S$ можно найти такое $S_k$, что $x \in S_k$ и расстояние от $x$ до $S \setminus S_k$ превосходит некоторое фиксированное число $\delta$. Далее предположим, что каждое $S_k$ пересекается лишь с конечным числом других подмножеств, не превосходящим какого-либо числа $m$, и отображается на какую-либо каноническую область $\sigma$ $(n-1)$-мерного евклидова пространства, например куб, с помощью преобразования класса $H^{l'}$, $l'>l$. Пусть при отображении $S_k$ на $\sigma$ функция $u(x)$ $(x \in S_k)$ переходит в $u^{(k)}(z)$ $(z \in \sigma)$. Положим

$$\|u\|_{q,S}^{(l)} = \left\{ \sum_k \left( \|u^{(k)}(z)\|_{q,\sigma}^{(l)} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Нормы, соответствующие различным разбиениям поверхности на множества $S_k$, которые удовлетворяют указанным выше условиям, эквивалентны между собой.

Теорема 2.3 [$17_3$, $53_4$]. *Пусть $u(x) \in W_q^{(l)}(\Omega)$, где $l$ — положительное целое число и $q>1$. Если $S \in O^{(l)}$, то $u(x)|_S \in W_q^{l-\frac{1}{q}}(S)$ и имеет место неравенство $\|u\|_{q,S}^{\left(l-\frac{1}{q}\right)} \leqslant c\|u\|_{q,\Omega}^{(l)}$.*

*Обратно, всякая заданная на $S$ функция* $u(x) \in \in W_q^{l-\frac{1}{q}}(S)$ *может быть продолжена в область* $\Omega$ *так, что* $u(x) \in W_q^l(\Omega)$ *и* $\|u\|_{q,\Omega}^{(l)} \leqslant c\|u\|_{q,S}^{\left(l-\frac{1}{q}\right)}$.

Постоянные $c$ в обоих неравенствах от $u$ не зависят.

Впоследствии было выяснено, что так определенные пространства $W_q^l(\Omega)$ при $q \neq 2$ не образуют «непрерывной» шкалы по $l$. Она «рвется» на целых $l$. Для создания такой шкалы пространства $W_q^l(\Omega)$ при целых $l$ должны быть заменены пространствами $B_q^l(\Omega)$. В выпуклой области $\Omega$ норма в $B_q^l(\Omega)$ может быть определена формулой (2.25), если в правой части вместо $\langle\langle u\rangle\rangle_{q,\Omega}^{(l)\bullet}$ взять

$$\sum_{(l-1)}\left(\int_{\Omega} dx \int_{\Omega}\left|D^{l-1}u(x) - 2D^{l-1}u\left(\frac{x+y}{2}\right) + D^{l-1}u(y)\right|^q \frac{dy}{|x-y|^{n+q}}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.26}$$

## § 3. Различные пространства функций, зависящих от $x$ и $t$. Теоремы вложения

Прежде всего докажем ряд свойств функций $u(x, t)$ из пространства $V_2(Q_T)$, а тем самым и из пространства $V_2^{1,0}(Q_T) \subset V_2(Q_T)$. Пусть $u(x, t)$ есть произвольный элемент $\overset{\circ}{V}_2(Q_T)$. Для почти всех $t$ из $[0, T]$ для него верно неравенство (2.9), которое при $m = r = 2$ перепишем в виде

$$\|u(x, t)\|_{q,\Omega} \leqslant \beta \|u_x(x, t)\|_{2,\Omega}^{\alpha} \|u(x, t)\|_{2,\Omega}^{1-\alpha},$$

$$\alpha = \frac{n}{2} - \frac{n}{q}. \tag{3.1}$$

В нем $q \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right]$ для $n \geqslant 3$, $q \in [2, \infty)$ для $n = 2$ и $q \in [2, \infty]$ для $n = 1$, а $\beta$ зависит лишь от $n$ и $q$ так, как указано в теореме 2.2.

Из (3.1) имеем

$$\|u\|_{q, r, Q_T} = \left(\int_0^T \|u\|_{q, \Omega}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant \beta \left(\int_0^T \|u_x\|_{2, \Omega}^{\alpha r} dt\right)^{\frac{1}{r}} \operatorname{vrai} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(x, t)\|_{2, \Omega}^{1-\alpha}.$$

При $\alpha = \frac{2}{r}$ получим одну серию неравенств

$$\|u\|_{q, r, Q_T} \leqslant \beta \operatorname{vrai} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(x, t)\|_{2, \Omega}^{1-\frac{2}{r}} \cdot \|u_x\|_{2, Q_T}^{\frac{2}{r}}. \tag{3.2}$$

В них $\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = \frac{n}{4}$, причем

$$\left.\begin{array}{llll} r \in [2, \infty], & q \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right] & \text{при} & n > 2, \\ r \in (2, \infty], & q \in [2, \infty) & \text{при} & n = 2, \\ r \in [4, \infty], & q \in [2, \infty] & \text{при} & n = 1. \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

Оценивая правую часть (3.2) по неравенству Юнга (1.3) с $m = \frac{r}{2}$ и $\varepsilon = 1$, получим вторую серию неравенств

$$\|u\|_{q, r, Q_T} \leqslant \beta \frac{2}{r} \|u_x\|_{2, Q_T} +$$

$$+ \beta\left(1 - \frac{2}{r}\right) \operatorname{vrai} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u\|_{2, \Omega} \leqslant \beta |u|_{Q_T}. \tag{3.4}$$

В них $q$ и $r$ подчинены тем же связям (3.3), что и в (3.2). При $q = r = \frac{2(n+2)}{n}$ неравенство (3.4) имеется в работе [$42_2$].

Обозначим через $\tilde{A}_0(t)$ множество точек $x$ из $\Omega$, в которых $|u(x, t)| > 0$, а через $\tilde{Q}_0$ — множество точек $(x, t)$ из $Q_T$, в которых $|u(x, t)| > 0$. Возьмем произвольные $q \geqslant 1$ и $r \geqslant 1$ и $q_1 \in [1, q]$, $r_1 \in [1, r]$, связанные лишь одним условием: $\frac{r_1}{r} = \frac{q_1}{q}$.

Из неравенства Гёльдера (1.7′), примененного к $u(x, t)$ и характеристической функции $\chi(x, t)$ множества $\tilde{Q}_0$, имеем

$$\|u\|_{q_1, r_1, Q_T} \leqslant \|u\|_{q, r, Q_T} \|\chi\|_{\frac{qq_1}{q-q_1}, \frac{rr_1}{r-r_1}, Q_T} =$$

$$= \left( \int_0^T \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} \tilde{A}_0(t)\, dt \right)^{\frac{r-r_1}{rr_1}} \|u\|_{q, r, Q_T}. \qquad (3.5)$$

Если один из показателей, $r_1$ или $q_1$, обращается в бесконечность, то, рассуждая аналогично, получаем

$$\|u\|_{q_1, \infty, Q_T} = \operatorname{vrai} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u\|_{q_1, \Omega} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{vrai} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \operatorname{mes}^{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q}} \tilde{A}_0(t) \|u\|_{q, \infty, Q_T}, \quad q \geqslant q_1,$$

и

$$\|u\|_{\infty, r_1, Q_T} = \left( \int_0^T \operatorname{vrai} \max_{\Omega} |u(x, t)|^{r_1} dt \right)^{\frac{1}{r_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\mu}(0)^{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}} \|u\|_{\infty, r, Q_T}, \quad r \geqslant r_1.$$

Здесь

$$\tilde{\mu}(0) = \operatorname{mes} \{t \in [0, T] : \operatorname{mes} \tilde{A}_0(t) > 0\}.$$

Из неравенства (3.4) с $r$ и $q$, удовлетворяющими условиям (3.3), и неравенств (3.5) нетрудно вывести, что для любой функции $u(x, t)$ из $\overset{\circ}{V}_2(Q_T)$ при произвольных $q_1 \geqslant 1$, $r_1 \geqslant 1$, подчиняющихся условиям

$$\frac{1}{r_1} + \frac{n}{2q_1} = \frac{n}{4} + \varkappa_1 \equiv \frac{n\lambda}{4}, \qquad \lambda > 1,$$

и

$$r_1 \in \left[\frac{2}{\lambda}, \infty\right], \qquad q_1 \in \left[\frac{2}{\lambda}, \frac{2n}{\lambda(n-2)}\right] \quad \text{при} \quad n \geqslant 3,$$

$$r_1 \in \left(\frac{2}{\lambda}, \infty\right], \qquad q_1 \in \left[\frac{2}{\lambda}, \infty\right) \quad \text{при} \quad n = 2,$$

$$r_1 \in \left[\frac{4}{\lambda}, \infty\right], \qquad q_1 \in \left[\frac{2}{\lambda}, \infty\right] \quad \text{при} \quad n = 1,$$

справедливо неравенство

$$\|u\|_{q_1, r_1, Q_T} \leqslant \beta |u|_{Q_T} \tilde{\mu}(0)^{\frac{1}{r_1} \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1 + \frac{n}{4}}}. \qquad (3.6)$$

в котором

$$\tilde{\mu}(0)=\int_0^T \operatorname{mes}^{\frac{r_1}{q_1}} \tilde{A}_0(t)\,dt.$$

При $r_1=\infty$ под $\tilde{\mu}^{\frac{1}{r_1}}(0)$ мы понимаем $\operatorname{vrai}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\operatorname{mes}^{\frac{1}{q_1}}\tilde{A}_0(t)$, а при $q_1=\infty$ $\tilde{\mu}(0)=\operatorname{mes}\{t\in[0, T]:\operatorname{mes}\tilde{A}_0(t)>0\}$.

В частном случае при $q_1=r_1=2$, $\varkappa_1=\frac{1}{2}$ из (3.6) следует

$$\|u\|_{2, Q_T}\leqslant\beta\left(\operatorname{mes}\tilde{Q}_0\right)^{\frac{1}{n+2}}|u|_{Q_T}. \tag{3.7}$$

Неравенство (3.4), выведенное выше из мультипликативного неравенства (2.9), верно также для функций $u(x, t)$ из $V_2(Q_T)$, не обязательно равных нулю на $S_T$, но удовлетворяющих при всех $t\in[0, T]$ условию $\int\limits_\Omega u(x, t)\,dx=0$. Постоянная $\beta$ в (3.4) в этом случае зависит от поверхности $S$, которая предполагается кусочно-гладкой, но $\beta$ не меняется при преобразовании подобия области $\Omega$.

Предположим теперь, что $u(x, t)$ — произвольный элемент $V_2(Q_T)$. Обозначим через $u_0(t)$ среднее значение $u(x, t)$ в $\Omega$. Разность $u(x, t)-u_0(t)$ удовлетворяет условию $\int\limits_\Omega(u-u_0)\,dx=0$ при всех $t\in[0, T]$, и потому для нее справедливо неравенство (3.4). С другой стороны, очевидны оценки

$$\|u\|_{q, r, Q_T}\leqslant\|u-u_0\|_{q, r, Q_T}+\|u_0\|_{q, r, Q_T}\leqslant$$

$$\leqslant\|u-u_0\|_{q, r, Q_T}+\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|u_0(t)|T^{\frac{1}{r}}\operatorname{mes}^{\frac{1}{q}}\Omega,$$

$$|u-u_0|_{Q_T}\leqslant|u|_{Q_T}+|u_0|_{Q_T}=$$

$$=|u|_{Q_T}+\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|u_0(t)|\operatorname{mes}^{\frac{1}{2}}\Omega,$$

$$\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|u_0(t)|\leqslant\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u\|_{2,\Omega}\operatorname{mes}^{-\frac{1}{2}}\Omega\leqslant|u|_{Q_T}\operatorname{mes}^{-\frac{1}{2}}\Omega.$$

Из сказанного ясно, что для любой $u(x, t)$ из $V_2(Q_T)$ при произвольных параметрах $q$ и $r$, удовлетворяющих соотношениям (3.3), имеет место оценка

$$\|u\|_{q, r, Q_T} \leqslant c\, |u|_{Q_T},$$
$$c = 2\beta + T^{\frac{1}{r}} \operatorname{mes}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}} \Omega = 2\beta + \left(T^{\frac{n}{2}} \operatorname{mes}^{-1} \Omega\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}. \tag{3.8}$$

Постоянная $\beta$ в (3.8) определяется лишь $r$, $n$, $q$ и $S$ и не зависит от $T$ и $\operatorname{mes} \Omega$.

Неравенство (3.5) верно для любой $u(x, t)$ из $V_2(Q_T)$. Полагая в нем $r_1 = q_1 = 2$, $r = q = 2\frac{n+2}{n}$ и используя (3.8), выводим, что для произвольной функции $u(x, t)$ из $V_2(Q_T)$ справедлива оценка вида (3.7):

$$\|u\|_{2, Q_T} \leqslant c\, (\operatorname{mes} \tilde{Q}_0)^{\frac{1}{n+2}}\, |u|_{Q_T},$$
$$c = 2\beta + \left(T^{\frac{n}{2}} \operatorname{mes}^{-1} \Omega\right)^{\frac{1}{n+2}}, \tag{3.9}$$

где постоянная $\beta$ та же, что и в (3.8).

Аналогичную оценку можно вывести для нормы $\|u\|_{q, r, S_T}$, если вместо неравенства (2.9) воспользоваться неравенством (2.21) с $\alpha = \frac{2}{r}$. Именно, для произвольной $u(x, t)$ из $V_2(Q_T)$ и $q$ и $r$, удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{r} + \dfrac{n-1}{2q} = \dfrac{n}{4}, & \\ r \in [2, \infty],\ q \in \left[\dfrac{2(n-1)}{n}, \dfrac{2(n-1)}{n-2}\right] & \text{при } n \geqslant 3, \\ r \in (2, \infty],\ q \in [1, \infty) & \text{при } n = 2, \end{array}\right\} \tag{3.10}$$

из (2.21) следует оценка

$$\|u\|_{q, r, S_T} \leqslant c\, |u|_{Q_T},$$
$$c = \beta \left[1 + \left(T^{\frac{n}{2}} \operatorname{mes}^{-1} \Omega\right)^{\frac{1}{2} - \frac{n-1}{nq}}\right], \tag{3.11}$$

с постоянной $\beta$, зависящей только от $n$, $r$, $q$ и от локальных свойств поверхности $S$, которая при этом считается кусочно-гладкой.

В случае $n=1$ мы выведем оценку вида (3.11), если вместо (2.21) воспользуемся неравенством

$$u^4(s, t) \leqslant u^2(s, t)\, 2 \int_\Omega |u_x(x, t)\, u(x, t)|\, dx, \quad s \in S,$$

верном, если $u(x, t)$ обращается в нуль хотя бы в одной из точек $\Omega$. Интегрируя его по $t$, получим после элементарных оценок

$$\|u\|_{4, S_T} = \left(\int_0^T u^4(s, t)\, dt\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant |u|_{Q_T}.$$

Для произвольной функции $u(x, t)$ из $V_2(Q_T)$ отсюда следует неравенство

$$\|u\|_{4, S_T} \leqslant c\, |u|_{Q_T}, \quad c = 2 + T^{\frac{1}{4}} \operatorname{mes}^{-\frac{1}{2}} \Omega. \tag{3.12}$$

Докажем нижеследующее предложение, являющееся частным случаем более общих фактов, установленных в работах [45], [$14_2$].

Лемма 3.1. *Пусть $u(x, t)$ в $\overline{Q}_T$ удовлетворяет условию Гёльдера по $t$ с показателем $\alpha$ и константой Гёльдера $\mu_1$ и имеет производные $u_x$, которые при любом $t$ из $[0, T]$ непрерывны по Гёльдеру по переменным $x$, точнее такие, что*

$$\max_{\substack{K_\rho \\ 0 \leqslant t \leqslant T}} \operatorname{osc}_x \{u_x(x, t),\ K_\rho \cap \Omega\} \leqslant \mu_2 \rho^\beta.$$

*Предположим, что область $\Omega$ удовлетворяет условию конуса, т. е. существует фиксированный шаровой конус $\mathscr{K}$ какой-либо высоты $d$ такой, что, в какую бы точку $\overline{\Omega}$ ни поместить его вершину, сам конус можно повернуть так, что он весь попадает в $\overline{\Omega}$. Тогда производные $u_x$ удовлетворяют в $Q_T$ условию Гёльдера по $t$ с показателем $\delta = \dfrac{\alpha\beta}{1+\beta}$ и константой $\mu$, определяемой* *лишь* $\alpha$, $\beta$, $\mu_1$, $\mu_2$, $d$ *и телесным углом при вершине конуса* $\mathcal{K}$.

Для произвольных точек $x'$ и $x''$, которые можно соединить прямолинейным отрезком $[x', x'']$, принадлежащим области $\overline{\Omega}$, справедливо соотношение

$$\int_{x'}^{x''} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial l} - \frac{\partial u(x', t')}{\partial l}\right] dl \Big|_{t'}^{t''} =$$
$$= u(x'', t'') - u(x', t'') - u(x'', t') + u(x', t'). \tag{3.13}$$

В нем $\frac{\partial}{\partial l}$ означает дифференцирование вдоль отрезка $[x', x'']$. В силу условий леммы правая часть (3.13) не превосходит $2\mu_1 |t'' - t'|^\alpha$, а

$$\left|\int_{x'}^{x''} \left[\frac{\partial u(x, t')}{\partial l} - \frac{\partial u(x', t')}{\partial l}\right] dl\right| \leqslant \mu_2 |x'' - x'|^{1+\beta}.$$

Кроме того,

$$\left|\int_{x'}^{x''} \left[\frac{\partial u(x, t'')}{\partial l} - \frac{\partial u(x', t')}{\partial l}\right] dl\right| = |x'' - x'| \left|\frac{\partial u(\hat{x}, t'')}{\partial l} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial u(x', t')}{\partial l}\right| \geqslant |x'' - x'| \left[\left|\frac{\partial u(x', t'')}{\partial l} - \frac{\partial u(x', t')}{\partial l}\right| - \right.$$
$$\left. - \mu_2 |x'' - x'|^\beta\right],$$

где $\hat{x}$ — некоторая точка отрезка $[x', x'']$, лежащая между $x'$ и $x''$. На основании этих оценок из (3.13) следует неравенство

$$\left|\frac{\partial u(x', t'')}{\partial l} - \frac{\partial u(x', t')}{\partial l}\right| \leqslant 2\mu_1 \frac{|t'' - t'|^\alpha}{|x'' - x'|} + 2\mu_2 |x'' - x'|^\beta. \tag{3.14}$$

Считая $x'$ вершиной конуса $\mathcal{K}$, минимизируем правую часть (3.14) по $x''$ вдоль отрезка какого-либо луча $l$ длины $d$, принадлежащего $\mathcal{K} \in \overline{\Omega}$. Как легко подсчитать, при $|t'' - t'|^\alpha \leqslant \frac{\beta\mu_2}{\mu_1} d^{1+\beta}$ этот минимум равен

$$2\left(\beta^{\frac{1}{1+\beta}} + \beta^{-\frac{\beta}{1+\beta}}\right) \mu_1^{\frac{\beta}{1+\beta}} \mu_2^{\frac{1}{1+\beta}} |t'' - t'|^{\frac{\alpha\beta}{1+\beta}} \equiv \mu |t'' - t'|^{\frac{\alpha\beta}{1+\beta}},$$

т. е.

$$\left|\frac{\partial u(x', t'')}{\partial l} - \frac{\partial u(x', t')}{\partial l}\right| \leqslant \mu |t'' - t'|^{\frac{\alpha\beta}{1+\beta}}.$$

Так как луч $l$ можно взять произвольно направленным в $\mathscr{K}$, то отсюда следует справедливость утверждения леммы.

Сформулируем теперь ряд предложений о пространствах $W_q^{2l, l}(Q_T)$ и $H^{2l, l}(Q_T)$, используемых нами в главе IV. Их доказательства имеются в работах [$14_2$, $25_3$, $58_2$]. Определение пространств $W_q^{2l, l}(Q_T)$ при целых $l$ и пространств $H^{l, \frac{l}{2}}(Q_T)$ при нецелых $l$ дано в § 1 главы I.

Лемма 3.2. *Пусть область $\Omega$ удовлетворяет условию конуса* (см. лемму 3.1). *Тогда для всякой функции $u \in H^{l, \frac{l}{2}}(Q_T)$ имеет место неравенство*

$$\langle u\rangle_{Q_T}^{(r)} \leqslant c_1\delta^{l-r}\langle u\rangle_{Q_T}^{(l)} + c_2\delta^{-r}|u|_{Q_T}^{(0)},$$

*в котором $r$ и $\delta$ — произвольные числа из интервалов $(0, l]$ и $(0, \min\{d, \sqrt{T}\})$ соответственно, где $d$ — высота конуса, а $c_1$ и $c_2$ — постоянные, зависящие от $r$, $l$, $n$ и от угла при вершине конуса $\mathscr{K}$.*

Лемма 3.3. *Пусть $\Omega$ — такая же, как в лемме 3.2. Тогда для любой функции $u(x, t)$ из $W_q^{2l, l}(Q_T)$ с целым $l$ справедливо неравенство*

$$\|D_t^r D_x^s u\|_{p, Q_T} \leqslant c_3\delta^{2l-2r-s-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)(n+2)}\langle\langle u\rangle\rangle_{q, Q_T}^{(2l)} + \\ + c_4\delta^{-\left[2r-s+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)(n+2)\right]}\|u\|_{q, Q_T} \quad (3.15)$$

*при условиях $p \geqslant q$, $2l-2r-s-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)(n+2) \geqslant 0$. Кроме того, если $2l-2r-s-\frac{n+2}{q} > 0$, то при $0 \leqslant \lambda < 2l-2r-s-\frac{n+2}{q}$*

$$\langle D_t^r D_x^s u\rangle_{Q_T}^{(\lambda)} \leqslant c_5\delta^{2l-2r-s-\frac{n+2}{q}-\lambda}\langle\langle u\rangle\rangle_{q, Q_T}^{(2l)} + \\ + c_6\delta^{-\left(2r+s+\frac{n+2}{q}+\lambda\right)}\|u\|_{q, Q_T}$$

*(при нецелом $2l-2r-s-\frac{n+2}{q}$ это неравенство справедливо и в случае $\lambda=2l-2r-s-\frac{n+2}{q}$). Постоянная $\delta$ здесь должна удовлетворять условию*

$$0<\delta\leqslant\min\{d;\ \sqrt{T}\},$$

*а постоянные $c_3-c_6$ зависят от $l$, $r$, $s$, $n$, $q$ и от угла при вершине конуса $\mathscr{K}$* (см. лемму 3.1).

В главах IV и VII будут использованы пространства $W_q^{l,\frac{l}{2}}(\sigma_T)$ с нецелым $l$. Определим их сначала для случая, когда $\sigma_T$ — цилиндрическая область: $\sigma_T=\sigma\times(0,\ T)$, а $\sigma$ — некоторая область в $(n-1)$-мерном евклидовом пространстве $E_{n-1}$. Пространство $W_q^{l,\frac{l}{2}}(\sigma_T)$ состоит из функций с конечной нормой

$$\|u\|_{q,\sigma_T}^{(l)}=\langle\langle u\rangle\rangle_{q,\sigma_T}^{(l)}+\sum_{(0\leqslant 2r+s<l)}\|D_t^rD_x^su\|_{q,\sigma_T},\tag{3.16}$$

где

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q,\sigma_T}^{(l)}=\langle\langle u\rangle\rangle_{q,x,\sigma_T}^{(l)}+\langle\langle u\rangle\rangle_{q,t,\sigma_T}^{\left(\frac{l}{2}\right)},\tag{3.17}$$

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q,x,\sigma_T}^{(l)}=\sum_{(2r+s=[l])}\langle\langle D_t^rD_x^su\rangle\rangle_{q,x,\sigma_T}^{(l-[l])},$$

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q,t,\sigma_T}^{\left(\frac{l}{2}\right)}=\sum_{(0<l-2r-s<2)}\langle\langle D_t^rD_x^su\rangle\rangle_{q,t,\sigma_T}^{\left(\frac{l-2r-s}{2}\right)}$$

и при $0<\alpha<1$

$$\langle\langle v\rangle\rangle_{q,x,\sigma_T}^{(\alpha)}=$$

$$=\left(\int_0^T dt\int_\sigma dx\int_\sigma|v(x,\ t)-v(y,\ t)|^q\frac{dy}{|x-y|^{n-1+q\alpha}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\langle\langle v\rangle\rangle_{q,t,\sigma_T}^{(\alpha)}=$$

$$=\left(\int_\sigma dx\int_0^T dt\int_0^T|v(x,\ t)-v(x,\ t')|^q\frac{dt'}{|t-t'|^{1+q\alpha}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Наконец, определим пространства $W_q^{l, \frac{l}{2}}(S_T)$, а также $H^{l, \frac{l}{2}}(S_T)$ с нецелыми $l > 0$, элементами которых являются функции, заданные на криволинейной цилиндрической поверхности $S_T = S \times (0, T)$. Так же как и $W_q^l(S)$, эти пространства определяются с помощью параметризации поверхности $S$. Пусть $S$ разбивается на множества $S_1, \ldots, S_k$, точно такие же, какие были описаны в § 2 при определении пространств $W_q^l(S)$. Введем следующие обозначения:

$$S_T^{(k)} = S_k \times (0, T),$$

$$\sigma_T = \sigma \times (0, T)$$

($\sigma$ — каноническая область, в которую отображается каждое множество $S_k$). Пусть $u^{(k)}(z, t)$ $(z \in \sigma)$ — функция, в которую переходит функция $u(x, t)$ $(x \in S_k)$ при отображении $S_k$ на $\sigma$.

Определим пространство $W_q^{l, \frac{l}{2}}(S_T)$ как множество функций с конечной нормой

$$\| u \|_{q, S_T}^{(l)} = \left\{ \sum_k \left( \| u^{(k)}(z, t) \|_{q, \sigma_T}^{(l)} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{3.18}$$

а пространство $H^{l, \frac{l}{2}}(S_T)$ — как множество функций с конечной нормой

$$| u |_{S_T}^{(l)} = \sup_k | u^{(k)} |_{\sigma_T}^{(l)}. \tag{3.19}$$

Нормы в правых частях (3.18) и (3.19) определяются с помощью равенства (3.16) настоящей главы и (1.10) главы I. При различных способах разбиения $S$ на $S_k$ соответствующие нормы (3.18) и (3.19) получаются эквивалентными. Наконец, отметим, что при определении $H^{l, \frac{l}{2}}(S_T)$ достаточно требовать, чтобы $S_k$ отображались на $\sigma$ с помощью преобразований класса $H^l$.

Пространства $W_q^{l, \frac{l}{2}}(S_T)$ необходимы при получении точных результатов о разрешимости краевых задач для линейных параболических уравнений в классах $W_q^{2m, m}(Q_T)$. Это связано с тем, что дифференциальные свойства граничных значений функций из классов $W_q^{2m,\,m}(Q_T)$ и некоторых их производных точно описываются в терминах пространств $W_q^{l,\,\frac{l}{2}}(S_T)$ с нецелыми $l$ $\left(\text{а именно, с } l = s - \frac{1}{q}, \text{ где } s \text{ — целое число}\right)$.

Имеет место

Лемма 3.4. *Если* $u \in W_q^{2m,\,m}(Q_T)$, *то при* $2r + s < 2m - \frac{2}{q}$

$$D_t^r D_x^s u\big|_{t=0} \in W_q^{2m-2r-s-\frac{2}{q}}(\Omega) \quad \text{и} \quad \|u\|_{q,\,\Omega}^{\left(2m-2r-s-\frac{2}{q}\right)} \leqslant c\,\|u\|_{q,\,Q_T}^{(2m)}.$$

*Кроме того, при* $2r + s < 2m - \frac{1}{q}$

$$D_t^r D_x^s u\big|_{S_T} \in W_q^{2m-2r-s-\frac{1}{q},\; m-r-\frac{s}{2}-\frac{1}{2q}}(S_T)$$

*и*

$$\|u\|_{q,\,S_T}^{\left(2m-2r-s-\frac{1}{q}\right)} \leqslant c\,\|u\|_{q,\,Q_T}^{(2m)}. \tag{3.20}$$

## § 4. Об усреднениях и срезках элементов $L_q(\Omega)$, $L_{q,\,r}(Q_T)$ и $V_2^{1,\,0}(Q_T)$

Пусть $u(x)$ есть функция из $L_q(\Omega)$, $q \geqslant 1$. Через $u^{(k)}(x)$ будем обозначать функцию $u^{(k)}(x) = \max\{u(x) - k,\, 0\}$. Она, очевидно, при любом $k$ также принадлежит $L_q(\Omega)$. Легко видеть, что если $u$ и $v$ принадлежат $L_q(\Omega)$, то для почти всех $x$ из $\Omega$ выполняется неравенство

$$|u^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)| \leqslant |u(x) - v(x)|, \tag{4.1}$$

одним из следствий которого является известная

Лемма 4.1. *Если последовательность функций* $u_p(x)$ *из* $L_q(\Omega)$, $p = 1, 2, \ldots$, *сходится к функции* $u(x)$ *в норме* $L_q(\Omega)$, *то последовательность* $u_p^{(k)}(x)$ *сходится к* $u^{(k)}(x)$ *в норме* $L_q(\Omega)$.

Справедливы также следующие утверждения (см., например, [1], гл. II).

Лемма 4.2. *Если $u(x) \in L_q(\Omega)$ и имеет производную $u_{x_i} \in L_q(\Omega)$, то $u^{(k)}$ имеет производную $u^{(k)}_{x_i} \in L_q(\Omega)$; в частности, если $u(x) \in W^1_q(\Omega)$, то $u^{(k)}(x) \in W^1_q(\Omega)$. Если, кроме того, $\operatorname{vrai}\max\limits_S u \leqslant k_0$, то при $k \geqslant k_0$ функции $u^{(k)}(x)$ принадлежат $\overset{\circ}{W}{}^1_q(\Omega)$.*

Лемма 4.3. *Предположим, что функции $u(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots$ принадлежат $L_q(\Omega)$ и обладают обобщенными производными $u_{x_i}$ и $u_{px_i}$, $p = 1, 2, \ldots$, из $L_q(\Omega)$ для какого-либо $i$. Если $\|u_p - u\|_{q,\Omega} \to 0$ и $\|u_{px_i} - u_{x_i}\|_{q,\Omega} \to 0$ при $p \to \infty$, то функции $u^{(k)}_p$ и $\frac{\partial u^{(k)}_p}{\partial x_i}$ сходятся в $L_q(\Omega)$ к $u^{(k)}$ и $\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x_i}$ соответственно.*

Рассмотрим теперь функцию $u(x, t)$, принадлежащую $V_2^{1,0}(Q_T)$. Функции $u^{(k)}(x, t) = \max\{u(x, t) - k; 0\}$ при каждом $t$ из $[0, T]$ будут принадлежать $L_2(\Omega)$. В силу неравенства (4.1) имеем

$$\|u^{(k)}(x, t+\Delta t) - u^{(k)}(x, t)\|_{2,\Omega} \leqslant \|u(x, t+\Delta t) - u(x, t)\|_{2,\Omega},$$

и потому функции $u^{(k)}(x, t)$ непрерывны по $t$ как элементы $L_2(\Omega)$. Кроме того, для почти всех $t \in [0, T]$ они принадлежат $W^1_2(\Omega)$, причем $\|u^{(k)}_x(x, t)\|_{2,\Omega} \leqslant \|u_x(x, t)\|_{2,\Omega}$. Ввиду этого справедлива лемма:

Лемма 4.4. *Если $u(x, t)$ принадлежит $V_2^{1,0}(Q_T)$, то $u^{(k)}(x, t)$ также принадлежат $V_2^{1,0}(Q_T)$.*

С помощью леммы 4.3 и неравенства (4.1) легко вывести такое предложение:

Лемма 4.5. *Пусть последовательность $u_p(x, t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$, $p = 1, 2, \ldots$, сходится к $u(x, t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$ в норме $V_2^{1,0}(Q_T)$. Тогда $|u^{(k)}_p - u^{(k)}|_{Q_T} \to 0$ при $p \to \infty$.*

Отметим еще следующий простой факт.

Лемма 4.6. *Если на некотором участке $\Gamma'$ поверхности $S_T$ функция $u(x, t)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$ не превосходит $k_0$ (т. е. $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Gamma'} u \leqslant k_0$), то при $k \geqslant k_0$ функции $u^{(k)}(x, t)\zeta(x, t)$ принадлежат $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$, где $\zeta(x, t)$ — произвольная гладкая функция, равная нулю на $S_T \setminus \Gamma'$.*

*Если же $\Gamma'$ — произвольный участок поверхности $\Gamma_T$ и $\zeta(x, t)$ равна нулю на $\Gamma_T \setminus \Gamma'$, то $u^{(k)}\zeta$ при $k \geqslant k_0$ принадлежат $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ и обращаются в нуль при $t = 0$.*

Мы будем рассматривать усреднения

$$u_\rho(x) = \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} \omega_\rho(|x-y|)\, u(y)\, dy =$$
$$= \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} \rho^{-n}\omega\left(\frac{|x-y|}{\rho}\right) u(y)\, dy \tag{4.2}$$

с достаточно гладким неотрицательным усредняющим ядром $\omega(|\xi|)$, равным нулю при $|\xi| \geqslant 1$ и таким, что $\int\limits_{|\xi|\leqslant 1} \omega(\xi)\, d\xi = 1$ (см. о них [$55_1$] и [54]). Если $u(x)$ определена в области $\Omega$, то усреднение $u_\rho(x)$, очевидно, определено в любой подобласти $\Omega'$, отстоящей от границы $S$ области $\Omega$ на расстояние, не меньшее $\rho$. Пусть $u(x)$ есть элемент какого-нибудь функционального банахова пространства $B(\Omega)$. Известно, что если элементы $B(\Omega)$ непрерывны относительно сдвига в норме пространства $B(\Omega)$, то усреднения $u_\rho(x)$ при $\rho \to 0$ сходятся к $u(x)$ по норме $B(\Omega')$, где $\Omega'$ — любая внутренняя подобласть $\Omega$, ибо

$$\|u_\rho - u\|_{B(\Omega')} = \left\| \int\limits_{|z|\leqslant\rho} \omega_\rho(z)\,[u(x-z) - u(x)]\, dz \right\|_{B(\Omega')} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{|z|\leqslant\rho} \omega_\rho(z) \| u(x-z) - u(x) \|_{B(\Omega')} dz \leqslant$$
$$\leqslant \max_{|z|\leqslant\rho} \| u(x-z) - u(x) \|_{B(\Omega')} \to 0$$

при $\rho \to 0$.

В дальнейшем нам понадобятся усреднения не по всем аргументам, а по части из них. Если, например, усреднение проводится лишь по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то соответствующие ему сглаженные функции определены в областях $\Omega'$, принадлежащих $\Omega$ вместе со своим сдвигом на $\rho$ в любом направлении, лежащем в плоскости $\{x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0\}$, и если в норме $B(\Omega)$ есть непрерывность относительно такого сдвига, то усреднения будут сходиться в норме пространства $B(\Omega')$ к $u$ при $\rho \to 0$.

Так, мы будем иметь дело с функциями $u(x, t)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, определенными в цилиндре $\overline{Q}_T=\overline{\Omega}\times[0, T]$, и для них рассматривать усреднения по переменным $x$ вида

$$u_\rho(x, t)=\int\limits_{|x-y|\leqslant\rho}\omega_\rho(|x-y|)\,u(y, t)\,dy, \tag{4.3}$$

где $\omega_\rho(|\xi|)$ — такое же, как в (4.2), усредняющее ядро, и усреднения по $t$ (усреднения по Стеклову)

$$u_h(x, t)=\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h}u(x, \tau)\,d\tau. \tag{4.4}$$

Очевидно, что первые из них определены при всех достаточно малых $\rho>0$ в цилиндрах вида $\overline{Q}'_T=\overline{\Omega}'\times[0, T]$, где $\Omega'$ — какая-либо внутренняя подобласть $\Omega$, а вторые — в цилиндрах $\overline{Q}_{T-\delta}=\overline{\Omega}\times[0, T-\delta]$ при $h\leqslant\delta$. Из сказанного выше следует, что если $u(x, t)$ принадлежит некоторому $L_{q,r}(Q_T)$ с $q$ и $r\geqslant 1$, то функции (4.3) и (4.4) сходятся к $u$ в нормах $L_{q,r}(Q'_T)$ и $L_{q,r}(Q_{T-\delta})$, соответственно, при $\rho$ и $h\to 0$. Отсюда же можно заключить, что для некоторых последовательностей $\rho_k\to 0$ или $h_k\to 0$ они сходятся к $u(x, t)$ почти всюду в $Q'_T$ и $Q_{T-\delta}$, соответственно.

Предположим, что $u(x, t)$ принадлежит пространству $V_2^{1,0}(Q_T)$. Элементы этого пространства непрерывны в норме $V_2^{1,0}(Q_T)$ относительно сдвига в направлении оси $t$. Это следует из определения $V_2^{1,0}(Q_T)$ и свойств $L_2(Q_T)$. Поэтому можно утверждать, что при $h\to 0$ функции (4.4) сходятся к $u(x, t)$ в норме $V_2^{1,0}(Q_{T-\delta})$, $\delta>0$ (заметим, что $u_h\in W_2^{1,1}(Q_{T-\delta})$, $h\leqslant\delta$).

Сформулируем это в виде леммы.

Лемма 4.7. *Если $u(x,t)$ принадлежит классу $V_2^{1,0}(Q_T)$, то усреднения $u_h(x, t)$ при $h\leqslant\delta$ принадлежат классу $W_2^{1,1}(Q_{T-\delta})$, причем*

$$|u_h-u|_{Q_{T-\delta}}\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

*Если $u(x, t)\in L_{q,r}(Q_T)$, то усреднения $u_h$ сходятся к $u$ при $h\to 0$ в нормах $L_{q,r}(Q_{T-\delta})$.*

Рассмотрим теперь усреднения $u_\rho$ вида (4.3) с бесконечно дифференцируемым ядром. Имеет место следующая

Лемма 4.8. *Пусть $u(x, t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$. Тогда для произвольного цилиндра $\overline{Q}'_T = \overline{\Omega}' \times [0, T]$ и $\rho \leqslant d'$, где $d' > 0$ — расстояние $\Omega'$ до $S$, усреднения $u_\rho(x, t)$ непрерывны в $\overline{Q}'_T$, имеют непрерывные производные $D_x^l u_\rho$ любого порядка и*

$$|u_\rho - u|_{Q'_T} \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

*Если же $u \in L_{q,r}(Q_T)$, то $u_\rho$ сходятся к $u$ при $\rho \to 0$ в нормах $L_{q,r}(Q_T)$.*

Справедливость последнего утверждения отмечалась выше. Предполагая $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, оценим при фиксированном $\rho$ выражение

$$|u_\rho(x, t) - u_\rho(x', t')| = \rho^{-n} \left| \int\limits_{|x-y| \leqslant \rho} \omega\left(\frac{|x-y|}{\rho}\right) u(y, t)\, dy - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{|x'-y| \leqslant \rho} \omega\left(\frac{|x'-y|}{\rho}\right) u(y, t')\, dy \right|$$

при условии, что точка $(x', t') \in Q'_T$ стремится к $(x, t) \in Q'_T$. Оно не превосходит суммы

$$\rho^{-n} \int\limits_\Omega \left| \omega\left(\frac{|x-y|}{\rho}\right) - \omega\left(\frac{|x'-y|}{\rho}\right) \right| |u(y, t)|\, dy +$$
$$+ \rho^{-n} \int\limits_\Omega \omega\left(\frac{|x'-y|}{\rho}\right) |u(y, t) - u(y, t')|\, dy,$$

в которой первый член стремится к нулю при $x' \to x$ из-за непрерывности ядра $\omega(\xi)$, а второй стремится к нулю при $t' \to t$ в силу непрерывности функции $u(y, t)$ по $t$ как элемента $L_2(\Omega)$, поскольку

$$\rho^{-n} \int\limits_\Omega \omega\left(\frac{|x'-y|}{\rho}\right) |u(y, t) - u(y, t')|\, dy \leqslant$$
$$\leqslant c(\rho) \| u(y, t) - u(y, t') \|_{2, \Omega}.$$

Мы доказали, что $u_\rho$ непрерывны в $\overline{Q}'_T$. Точно так же ввиду бесконечной дифференцируемости ядра $\omega(\xi)$ проверяется непрерывность в $\overline{Q}'_T$ производных $D^l_x u_\rho$.

Покажем, что $u_\rho(x, t)$ сходятся при $\rho \to 0$ к $u(x, t)$ в норме $V_2^{1,0}(Q'_T)$ для $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$. Для этого в силу сказанного выше достаточно убедиться, что норма $|u(x, t) - u(x+\xi, t)|_{Q'_T}$ стремится к нулю при $|\xi| \to 0$. Для $\|u_x(x, t) - u_x(x+\xi, t)\|_{2, Q'_T}$ это верно в силу принадлежности $u_x$ к $L_2(Q_T)$. Проверим, что это же верно и для $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(x, t) - u(x+\xi, t)\|_{2, \Omega'}$.

Для любого конечного множества $t_1, \ldots, t_N \in [0, T]$ можно удовлетворить неравенству

$$\max_{k=1, \ldots, N} \|u(x, t_k) - u(x+\xi, t_k)\|_{2, \Omega'} \leqslant \varepsilon, \tag{4.5}$$

где $\varepsilon$ — произвольное положительное число, если только взять $|\xi|$ достаточно малым. С другой стороны, в силу равномерной непрерывности $u(x, t)$ по $t$ из $[0, T]$ как элемента $L_2(\Omega)$ можно утверждать, что

$$\max_{k=1, \ldots, N} \max_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \|u(x, t) - u(x, t_k)\|_{2, \Omega'} \leqslant \varepsilon, \tag{4.6}$$

если расстояния между соседними точками $t_{k-1}$ и $t_k$, $k = 1, \ldots, N$, достаточно малы.

Из (4.5) и (4.6) следует, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(x, t) - u(x+\xi, t)\|_{2, \Omega'} \leqslant 3\varepsilon.$$

Итак, доказано, что $|u(x, t) - u(x+\xi, t)|_{Q'_T} \to 0$ при $|\xi| \to 0$. Отсюда же следует справедливость утверждения леммы 4.8 о сходимости $u_\rho(x, t)$ к $u(x, t)$ в норме $V_2(Q'_T)$ при $\rho \to 0$.

Лемма 4.8 доказана.

Полезно следующее простое предложение.

Лемма 4.9. *Если* $u(x, t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$ *и* $\operatorname{vrai}\max\limits_{S_T} u \leqslant k_0$, *то при* $k \geqslant k_0$ *функции* $u_h^{(k)}(x, t) = \max\{u_h(x, t) - k;\ 0\}$ *принадлежат* $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_{T-\delta})$, $h \leqslant \delta$.

Справедливость его следует из неравенства

$$\operatorname*{vrai\,max}_{S_{T-\delta}} u_h(x, t) \leqslant \operatorname*{vrai\,max}_{S_T} u(x, t)$$

и лемм 4.6 и 4.7.

В ряде параграфов при исследовании дифференциальных свойств решений мы будем иметь дело с разностными отношениями. При этом надо иметь в виду, что для любых функций $u(x)$ и $v(x)$

$$\frac{1}{\Delta x_k} \Delta (v(x)\, u(x)) = \frac{\Delta v(x)}{\Delta x_k} u(x) + v(x + \Delta x_k) \frac{\Delta u(x)}{\Delta x_k},$$
$$x + \Delta x_k = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, \ldots x_n), \tag{4.7}$$

а для сложной функции $f(x, u(x))$

$$\frac{\Delta f(x, u(x))}{\Delta x_k} = \widehat{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x_k} + \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}, \tag{4.8}$$

где

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}} = \int\limits_0^1 \frac{\partial f\,[x(1-\tau) + (x+\Delta x_k)\,\tau,\ u(x)(1-\tau) + u(x+\Delta x_k)\,\tau]}{\partial x_k}\, d\tau,$$

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial u}} = \int\limits_0^1 \frac{\partial f\,[\ldots]}{\partial u}\, d\tau,$$

а

$$\frac{\Delta u(x)}{\Delta x_k} = \frac{1}{\Delta x_k}\,[u(x + \Delta x_k) - u(x)].$$

В дальнейшем будет использоваться формула суммирования по частям

$$\int\limits_\Omega u(x) \frac{\Delta v(x)}{\Delta x_k}\, dx = -\int\limits_\Omega \frac{\Delta u(x)}{\Delta x_k} v(x + \Delta x_k)\, dx, \tag{4.9}$$

справедливая при любых функциях $u \in L_m(\Omega)$, $v \in L_{m'}(\Omega)$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1$, из которых одна финитна в $\Omega$, при всех достаточно малых $|\Delta x_k|$.

Верно следующее утверждение.

Лемма 4.10. *Если функция $u(x)$ из $L_m(\Omega)$ имеет обобщенную производную $u_{x_k} \in L_m(\Omega)$, то для любой* *строго внутренней подобласти $\Omega'$ области $\Omega$*

$$\left\| \frac{\Delta u}{\Delta x_k} - u_{x_k} \right\|_{m,\,\Omega'} \to 0 \quad \text{при} \quad |\Delta x_k| \to 0.$$

Действительно, для почти всех $x$, $x+\Delta x_k \in \Omega$ отношение $\frac{\Delta u}{\Delta x_k}$ равно $\frac{1}{\Delta x_k} \int\limits_{x_k}^{x_k+\Delta x_k} u_\xi (x_1, \ldots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \ldots, x_n)\,d\xi$, т. е. совпадает со стекловским усреднением (см. (4.4)) производной $u_{x_k}$, а потому $\frac{\Delta u}{\Delta x_k}$ при $|\Delta x_k| \to 0$ сходятся к $u_{x_k}$ в норме $L_m(\Omega')$.

Иногда, вместо того чтобы доказывать существование у функции $u(x, t)$ обобщенной производной $u_t$ из $L_2(Q_T)$, мы будем проверять, что интегралы $\int\limits_{Q_{T-\Delta t}} \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 dx\,dt$ ограничены равномерно относительно $\Delta t$. При этом мы будем иметь в виду лемму 4.11 (см., например, [I]).

Лемма 4.11. *Пусть $u(x, t) \in L_2(Q_T)$ и пусть для всех положительных $\Delta t \leqslant h_0$ интегралы*

$$\int\limits_{Q_{T-\Delta t}} \left| \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \right|^2 dx\,dt \tag{4.10}$$

*не превосходят какой-нибудь постоянной $c$. Тогда в $Q_T$ существует обобщенная производная $u_t$ и*

$$\| u_t \|^2_{2,\,Q_T} \leqslant c.$$

Из равномерной ограниченности интегралов (4.10) следует, что для некоторой последовательности $\Delta_k t \to 0$, $k = 1, 2, \ldots$, разностные отношения $\frac{\Delta u}{\Delta_k t}$ сходятся слабо в $L_2(Q_{T-\delta})$, $\delta > 0$, к некоторой функции $w(x, t) \in L_2(Q_{T-\delta})$. Применим формулу суммирования по частям (см. (4.9))

$$\int\limits_{Q_T} \frac{\Delta u(x, t)}{\Delta t} v(x, t)\,dx\,dt = - \int\limits_{Q_T} u(x, t+\Delta t) \frac{\Delta v(x, t)}{\Delta t}\,dx\,dt$$

к $u(x, t)$ и произвольной гладкой финитной в $Q_{T-\delta}$ функции $v(x, t)$, а затем перейдем в этом равенстве к пределу по выбранной последовательности $\Delta_k t \to 0$. В результате получим равенство, из которого будет следовать, что $w(x, t) = u_t(x, t)$ в $Q_{T-\delta}$, а ввиду произвола в выборе $\delta > 0$ — и во всем $Q_T$.

Нетрудно доказать следующее предложение.

Лемма 4.12. *В подпространстве пространства* $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, *состоящем из элементов* $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, *равных нулю при* $t = T$, *плотны функции вида* $\sum_{k=1}^{N} d_k(t)\psi_k(x)$, *где* $d_k(t)$ — *произвольные гладкие функции, равные нулю при* $t = T$, *а* $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — *фундаментальная система функций в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

## § 5. Некоторые другие вспомогательные предложения

В этом параграфе мы приведем ряд важных лемм разного характера, часть из них докажем, а для остальных, доказательство которых имеется в книге [I], ограничимся точной ссылкой.

Имеет место следующее предложение.

Лемма 5.1. *Пусть в шаре* $K_\rho = \{x: |x| < \rho\}$ *определена неотрицательная функция* $u(x) \in W_1^1(K_\rho)$, *причем* $u(x) = 0$ *на каком-либо множестве* $\mathscr{E}_0$ *положительной меры. Тогда для любого измеримого множества* $\mathscr{E}$ *из* $K_\rho$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\mathscr{E}} u(x)\,\mathfrak{R}(x)\,dx \leqslant \beta_1 \frac{\rho^n}{\operatorname{mes} \mathscr{E}_0} \operatorname{mes}^{\frac{1}{n}} \mathscr{E} \int_{K_\rho} |u_x(x)|\,\mathfrak{R}(x)\,dx, \tag{5.1}$$

*в котором* $\beta_1 = (1 + n\varkappa_n)\,2^n n^{-1}$, *а* $\mathfrak{R}(x) = \mathfrak{R}(|x|)$ — *произвольная невозрастающая функция* $|x|$ *со значениями из* $[0, 1]$, *равная единице на* $\mathscr{E}_0$.

Рассмотрим случай $n \geqslant 2$. Для почти всех $x \in \mathscr{E}$ и $x' \in \mathscr{E}_0$ имеем

$$u(x) = u(x) - u(x') =$$
$$= -\int_0^{|x'-x|} \frac{du(x + r\omega)}{dr}\,dr \leqslant \int_0^{|x'-x|} |u_y(y)|\,dr,$$

где $y=x+r\omega$, а $\omega=\frac{x'-x}{|x'-x|}$ — единичный вектор с началом в точке $x$. Обе части этого неравенства умножим на $\mathfrak{N}(x)$ и справа внесем $\mathfrak{N}(x)$ под знак интеграла, заменяя его на $\mathfrak{N}(y)$. От этого неравенство не нарушится. Затем обе его части проинтегрируем по $x'\in\mathscr{E}_0$ и $x\in\mathscr{E}$. Это даст

$$\operatorname{mes}\mathscr{E}_0\int_{\mathscr{E}} u(x)\,\mathfrak{N}(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\mathscr{E}} dx \int_{\mathscr{E}_0} dx' \int_0^{|x'-x|} |u_y(y)|\,\mathfrak{N}(y)\,dr. \tag{5.2}$$

Полагая $\mathfrak{N}(y)$ равной нулю вне $K_\rho$, оценим интеграл по множеству $\mathscr{E}_0$ следующим образом:

$$\int_{\mathscr{E}_0} dx' \int_0^{|x'-x|} |u_y(y)|\,\mathfrak{N}(y)\,dr \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\substack{|x'-x|\leqslant 2\rho\\ x'\in K_\rho}} dx' \int_0^{|x'-x|} \frac{|u_y(y)|\,\mathfrak{N}(y)}{|y-x|^{n-1}}\,|y-x|^{n-1}\,d\,|y-x| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{2\rho} |x'-x|^{n-1}\,d\,|x'-x| \int d\omega \int_0^{|x'-x|} \frac{|u_y(y)|\,\mathfrak{N}(y)}{|y-x|^{n-1}}\,\times$$
$$\times\,|y-x|^{n-1}\,d\,|y-x| \leqslant \frac{(2\rho)^n}{n}\int_{K_\rho} \frac{|u_y(y)|\,\mathfrak{N}(y)}{|y-x|^{n-1}}\,dy.$$

Отсюда и из (5.2) выводим

$$\operatorname{mes}\mathscr{E}_0\int_{\mathscr{E}} u\mathfrak{N}\,dx \leqslant \frac{(2\rho)^n}{n}\int_{K_\rho} |u_y(y)|\,\mathfrak{N}(y)\,dy \max_{y\in K_\rho}\int_{\mathscr{E}} \frac{dx}{|x-y|^{n-1}}. \tag{5.3}$$

Интеграл $j=\int_{\mathscr{E}} \frac{dx}{|x-y|^{n-1}}$ для любой точки $y\in K_\rho$ не превосходит $(1+n\varkappa_n)\operatorname{mes}^{\frac{1}{n}}\mathscr{E}$. В самом деле, часть интеграла, соответствующая области интегрирования $\mathscr{E}\cap\{x\colon |x-y|\leqslant\delta\}$, не превосходит $\int\limits_{|x-y|\leqslant\delta} \frac{dx}{|x-y|^{n-1}} =$

$= n\varkappa_n\delta$. Остальная часть, очевидно, не превосходит $\delta^{1-n}\operatorname{mes}\mathscr{E}$. Возьмем $\delta = \operatorname{mes}^{\frac{1}{n}}\mathscr{E}$, тогда ясно, что $j \leqslant (1 + n\varkappa_n)\operatorname{mes}^{\frac{1}{n}}\mathscr{E}$, и потому из (5.3) следует желаемое неравенство (5.1) при $n \geqslant 2$.

В случае $n = 1$ неравенство (5.1) и даже более сильное неравенство

$$\int\limits_{\mathscr{E}} u(x)\,\mathfrak{N}(x)\,dx \leqslant \operatorname{mes}\mathscr{E}\int\limits_{K_\rho} |u_x(x)|\,\mathfrak{N}(x)\,dx \qquad (5.1')$$

выводятся непосредственно из формулы Ньютона—Лейбница:

$$u(x) = u(x) - u(x') = \int\limits_{x'}^{x} u_y(y)\,dy.$$

Относительно $\mathscr{E}_0$ при этом достаточно предположить лишь, что оно не пусто.

Мы будем использовать два следствия из леммы 5.1. Первое из них — неравенство

$$\int\limits_{K_\rho} u^2(x)\,\mathfrak{N}^2(x)\,dx \leqslant \beta_2\left(\frac{\rho^n}{\operatorname{mes}\mathscr{E}_0}\right)^2\rho^2\int\limits_{K_\rho} u_x^2(x)\,\mathfrak{N}^2(x)\,dx, \qquad (5.4)$$

$$\beta_2 = 4\beta_1^2\varkappa_n^{\frac{2}{n}},$$

справедливо для произвольной функции $u(x)$ из $W_2^1(K_\rho)$, равной нулю на множестве $\mathscr{E}_0 \subset K_\rho$ при таких же $\mathfrak{N}(x)$, что и в (5.1).

Другое следствие (5.1) — неравенство

$$(l-k)\operatorname{mes}A_{l,\rho} \leqslant \beta\frac{\rho^{n+1}}{\operatorname{mes}(K_\rho \setminus A_{k,\rho})}\int\limits_{A_{k,\rho}\setminus A_{l,\rho}} |u_x|\,dx, \qquad (5.5)$$

$$\beta = \beta_1\varkappa_n^{\frac{1}{n}}.$$

Оно верно для любой $u(x) \in W_1^1(K_\rho)$ и произвольных значений $l$ и $k$ при $l > k$. Здесь и ниже $A_{k,\rho}$ — множество точек $x$ из $K_\rho$, для которых $u(x) > k$.

Неравенство (5.4) легко выводится из неравенства (5.1), если в нем вместо $u(x)$ и $\mathfrak{R}(x)$ взять функции $u^2(x)$ и $\mathfrak{R}^2(x)$, а за множество $\mathscr{E}$ взять весь шар $K_\rho$. Для доказательства неравенства (5.5) возьмем в (5.1) в качестве $u(x)$ функцию

$$\hat{u}(x)=\begin{cases} l-k, & \text{при} \quad x\in A_{l,\rho}, \\ u(x)-k, & \text{при} \quad x\in A_{k,\rho}\setminus A_{l,\rho}, \\ 0, & \text{при} \quad x\in K_\rho\setminus A_{k,\rho}, \end{cases}$$

а в качестве множеств $\mathscr{E}_0$ и $\mathscr{E}$ $K_\rho\setminus A_{k,\rho}$ и $K_\rho$ соответственно. Функцию $\mathfrak{R}(x)$ положим равной тождественно 1. Это даст

$$\int\limits_{K_\rho} \hat{u}(x)\,dx \leqslant \beta_1 \frac{\rho^n}{\operatorname{mes}(K_\rho\setminus A_{k,\rho})} (\varkappa_n\rho^n)^{-\frac{1}{n}} \int\limits_{K_\rho} |\hat{u}_y|\,dy.$$

Из него следует неравенство (5.5), если заметить, что

$\int\limits_{K_\rho} \hat{u}(x)\,dx = \int\limits_{A_{k,\rho}} \hat{u}(x)\,dx \geqslant (l-k)\operatorname{mes} A_{l,\rho}$. Если же в качестве $\mathscr{E}$ взять множество $A_{l,\rho}$, то вместо (5.5) получим неравенство

$$(l-k)\operatorname{mes} A_{l,\rho} \leqslant \beta_1 \frac{\rho^n}{\operatorname{mes}(K_\rho\setminus A_{k,\rho})} \operatorname{mes}^{-\frac{1}{n}} A_{l,\rho} \int\limits_{A_{k,\rho}\setminus A_{l,\rho}} |u_x|\,dx, \tag{5.6}$$

установленное Де Джорджи (см. [19]).

При $n=1$ имеет место более сильное неравенство

$$\left(\frac{\operatorname{mes} A_{l,\rho}}{2\rho}\right)^{\varepsilon_1} \left(\frac{\operatorname{mes}(K_\rho\setminus A_{k,\rho})}{2\rho}\right)^{\varepsilon_2} (l-k) \leqslant \int\limits_{A_{k,\rho}\setminus A_{l,\rho}} |u_x|\,dx. \tag{5.6'}$$

Оно справедливо при произвольных положительных $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$. Неравенство (5.6′) непосредственно следует из формулы Ньютона — Лейбница.

Замечание. 5.1. Неравенства (5.1), (5.4) — (5.6) справедливы не только для шаров $K_\rho$, но и для любых областей, звездных относительно множества $\mathscr{E}_0$.

Следующие две леммы относятся к случаю $n\geqslant 2$.

Лемма 5.2. *Пусть в области $\Omega_R$ диаметра $2R$ определена неотрицательная функция $v(x)$ такая, что для любого шара $K_\rho$ с центром в $\Omega_R$ верна оценка*

$$\int\limits_{K_\rho \cap \Omega_R} v(x)\,dx \leqslant c\rho^{n-2+\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

*Тогда для любой функции $\zeta(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_R)$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\Omega_R} v(x)\zeta^2(x)\,dx \leqslant c_1 R^\alpha \int\limits_{\Omega_R} \zeta_x^2(x)\,dx \tag{5.7}$$

*с постоянной $c_1$, зависящей лишь от $c$, $\alpha$ и $n$.*

Доказательство этого предложения содержится в леммах 4.3 — 4.4 главы II книги [I]. Неравенство (5.7) верно также и для функций $\zeta(x)$, обращающихся в нуль лишь на части границы $\Omega_R$. В частности, мы будем использовать такой вариант леммы 5.2:

Лемма 5.3. *Пусть в условиях предыдущей леммы $\Omega_R = K_R \cap \Omega$, причем граница $S$ области $\Omega$ содержит плоский участок $S_1$, а шар $K_R$ не пересекается с $S \setminus S_1$. Тогда неравенство (5.7) справедливо для любой функции $\zeta(x)$ из $W_2^1(Q_R)$, равной нулю на сферической части границы $\Omega_R$. При этом постоянная $c_1$ в (5.7) зависит, как и выше, лишь от $c$, $\alpha$ и $n$.*

Действительно, рассмотрим область $\widetilde{\Omega}_R$, симметричную $\Omega_R$ относительно $S_1$, и продолжим функции $\zeta(x)$ и $v(x)$ на $\widetilde{\Omega}_R$ четным образом по отношению к $S_1$. Тогда в области $\Omega_R \cup \widetilde{\Omega}_R$ будут выполнены все условия леммы 5.2. Следовательно, будет верно неравенство (5.7) для области $\Omega_R \cup \widetilde{\Omega}_R$, а потому и для $\Omega_R$.

При $n = 1$ вместо лемм 5.2 и 5.3 будем использовать следующее предложение.

Лемма 5.3′. *Если $\Omega_R$ — отрезок длины $2R$ и $u(x)$ — неотрицательная функция из $L_1(\Omega_R)$, то для любой функции $\zeta(x)$ из $W_2^1(\Omega_R)$, равной нулю хотя бы в одной точке $x_0 \in \overline{\Omega}_R$, верно неравенство*

$$\int\limits_{\Omega_R} u(x)\zeta^2(x)\,dx \leqslant c_1 R \int\limits_{\Omega_R} \zeta_x^2(x)\,dx, \quad c_1 = 2\|u\|_{1,\Omega_R}. \tag{5.7′}$$

Неравенство (5.7′) следует из того, что для любого $x$ из $\Omega_R$

$$\zeta^2(x) = \left| \int_{x_0}^{x} \zeta_y(y)\,dy \right|^2 \leqslant 2R \int_{\Omega_R} \zeta_y^2\,dy.$$

Полезно следующее простое предложение.

Лемма 5.4. *Пусть $u(x)$ — ограниченная функция из $W^1_{2s+2}(\Omega)$, $s \geqslant 0$, а $\zeta(x)$ — гладкая функция такая, что произведение $u(x)\zeta(x)$ обращается в нуль на границе $S$ области $\Omega$. Тогда*

$$\int_\Omega |u_x|^{2s+2}\zeta^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant 16\,\mathrm{osc}^2\{u, \Omega\} \int_\Omega \left(c|u_x|^{2s-2} u_{xx}^2\zeta^2 + |u_x|^{2s}\zeta_x^2\right)dx, \qquad (5.8)$$
$$c = n^2 + s^2.$$

Чтобы убедиться в справедливости этой леммы (ср. лемму 4.5 главы II из [I]), преобразуем интеграл $\int_\Omega |u_x|^{2s+2}\zeta^2\,dx$ с помощью интегрирования по частям и проведем элементарные оценки с помощью неравенства (1.2) главы II:

$$\int_\Omega |u_x|^{2s+2}\zeta^2\,dx = \int_\Omega |u_x|^{2s} u_{x_i}u_{x_i}\zeta^2\,dx =$$
$$= -\int_\Omega [u(x)-u(x_0)]\big[\Delta u\,|u_x|^{2s}\zeta^2 + u_{x_i}2s|u_x|^{2s-2}u_{x_k x_i}u_{x_k}\zeta^2 +$$
$$+ 2u_{x_i}|u_x|^{2s}\zeta\zeta_{x_i}\big]dx \leqslant \int_\Omega \Big[\varepsilon|u_x|^{2s+2}\zeta^2 +$$
$$+ \frac{(u-u(x_0))^2}{\varepsilon}|u_x|^{2s-2}n^2u_{xx}^2\zeta^2 + \varepsilon|u_x|^{2s+2}\zeta^2 +$$
$$+ \frac{(u-u(x_0))^2}{\varepsilon}|u_x|^{2s}\zeta_x^2 + \varepsilon|u_x|^{2s+2}\zeta^2 +$$
$$+ \frac{(u-u(x_0))^2 s^2}{\varepsilon}|u_x|^{2s-2}u_{xx}^2\zeta^2\Big]dx,$$

где $x_0$ выбираем так, чтобы произведение $[u(x)-u(x_0)]\,\zeta(x)$ обращалось в нуль на $S$. Полагая $\varepsilon = \frac{1}{4}$, придем к оценке (5.8).

Хорошо известна следующая лемма.

Лемма 5.5. *Пусть абсолютно непрерывная на* $[0, T]$ *неотрицательная функция* $y(t)$ *равна нулю при* $t=0$ *и удовлетворяет для почти всех* $t$ *неравенству*

$$\frac{dy(t)}{dt} \leqslant c(t)\, y(t) + \mathcal{F}(t) \tag{5.9}$$

*с неотрицательными суммируемыми по* $[0, \tau]$ *функциями* $c(t)$ *и* $\mathcal{F}(t)$. *Тогда*

$$y(t) \leqslant \exp\left\{\int_0^t c(\tau)\, d\tau\right\} \int_0^t \mathcal{F}(\tau)\, d\tau, \tag{5.10}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \leqslant c(t) \exp\left\{\int_0^t c(\tau)\, d\tau\right\} \int_0^t \mathcal{F}(\tau)\, d\tau + \mathcal{F}(t). \tag{5.11}$$

*В частности, при* $c(t) = c$ *и неубывающей* $\mathcal{F}(t)$

$$y(t) \leqslant \frac{\mathcal{F}(t)}{c}\left(e^{ct} - 1\right), \tag{5.12}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \leqslant \mathcal{F}(t)\, e^{ct}. \tag{5.13}$$

Для доказательства этой леммы умножим обе части (5.9) на $\exp\left\{-\int_0^t c(\tau)\, d\tau\right\}$, перенесем первый член из правой части в левую и результат запишем в виде неравенства

$$\frac{d}{dt}\left[y(t) \exp\left\{-\int_0^t c(\tau)\, d\tau\right\}\right] \leqslant \mathcal{F}(t) \exp\left\{-\int_0^t c(\tau)\, d\tau\right\}.$$

Интегрируя его по $t$ от 0 до $t_1$, получим неравенство

$$y(t_1) \leqslant \int_0^{t_1} \mathcal{F}(t)\, dt \exp\left\{\int_0^{t_1} c(\tau)\, d\tau\right\}.$$

Из него и (5.9) следуют (5.10) — (5.13).

Выделим в виде отдельных лемм следующие два предложения о числовых последовательностях, связанных рекуррентными неравенствами. Первое из них взято из [1] (лемма 4.7 главы II).

Лемма 5.6. *Пусть последовательность $y_h$, $h=0$, 1, 2, ... неотрицательных чисел удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$y_{h+1} \leqslant cb^h y_h^{1+\varepsilon}, \qquad h=0, 1, \ldots, \tag{5.14}$$

*с какими-либо положительными постоянными $c$, $\varepsilon$ и $b \geqslant 1$. Тогда*

$$y_h \leqslant c^{\frac{(1+\varepsilon)^h-1}{\varepsilon}} b^{\frac{(1+\varepsilon)^h-1}{\varepsilon^2}-\frac{h}{\varepsilon}} y_0^{(1+\varepsilon)^h}. \tag{5.15}$$

*В частности, если*

$$y_0 \leqslant \theta = c^{-\frac{1}{\varepsilon}} b^{-\frac{1}{\varepsilon^2}} \quad \text{и} \quad b > 1, \tag{5.16}$$

*то*

$$y_h \leqslant \theta b^{-\frac{h}{\varepsilon}} \tag{5.17}$$

*и, следовательно, $y_h \to 0$ при $h \to \infty$.*

Доказывается это непосредственно методом индукции.

Лемма 5.7. *Пусть неотрицательные числа $y_h$ и $z_h$, $h=0, 1, 2, \ldots$, связаны системой рекуррентных неравенств*

$$\begin{aligned} y_{h+1} &\leqslant cb^h \left(y_h^{1+\delta} + z_h^{1+\varepsilon} y_h^{\delta}\right), \\ z_{h+1} &\leqslant cb^h \left(y_h + z_h^{1+\varepsilon}\right), \end{aligned} \tag{5.18}$$

*где $c$, $b$, $\varepsilon$ и $\delta$ — некоторые фиксированные положительные числа, причем $b \geqslant 1$. Тогда*

$$y_h \leqslant \lambda b^{-\frac{h}{d}}, \qquad z_h \leqslant \left(\lambda b^{-\frac{h}{d}}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}, \tag{5.19}$$

*где*

$$d = \min\left\{\delta, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\},$$

$$\lambda = \min\left\{(2c)^{-\frac{1}{\delta}} b^{-\frac{1}{\delta d}};\ (2c)^{-\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} b^{-\frac{1}{\varepsilon d}}\right\}, \tag{5.20}$$

*если только*

$$y_0 \leqslant \lambda \quad \text{и} \quad z_0 \leqslant \lambda^{\frac{1}{1+\varepsilon}}. \tag{5.21}$$

Действительно, неравенства (5.19) по условию справедливы при $h=0$. Пусть они верны для $y_h$ и $z_h$. Тогда на основании (5.18)

$$y_{h+1} \leqslant cb^h 2\left(\lambda b^{-\frac{h}{d}}\right)^{1+\delta} = 2c\lambda^{1+\delta} b^{h\left(1-\frac{1+\delta}{d}\right)},$$

$$z_{h+1} \leqslant 2c\lambda b^{h\left(1-\frac{1}{d}\right)}.$$

Но, как легко подсчитать, правые части этих неравенств не превосходят $\lambda b^{-\frac{h+1}{d}}$ и $\left(\lambda b^{-\frac{h+1}{d}}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$ соответственно, и, следовательно, (5.19) верны и для $y_{h+1}$ и $z_{h+1}$. Лемма доказана.

При доказательстве непрерывности функций по Гёльдеру весьма полезна следующая лемма.

Лемма 5.8 (аналог леммы 4.8 главы II из [I]). *Пусть функция $u(x, t)$ измерима и ограничена в некотором цилиндре $Q_{\rho_0}=Q(\rho_0, \theta_0\rho_0^2)$. Рассмотрим соосные с $Q_{\rho_0}$ и имеющие общую с $Q_{\rho_0}$ вершину цилиндры $Q_\rho = Q(\rho, \theta_0\rho^2)$ и $Q_{b\rho}$, где $b>1$ — фиксированная постоянная, и пусть при любом $\rho \leqslant b^{-1}\rho_0$ для $u(x, t)$ выполняется по крайней мере одно из соотношений:*

$$\operatorname{osc}\{u;\ Q_\rho\} \leqslant c_1\rho^\delta \tag{5.22}$$

*или*

$$\operatorname{osc}\{u;\ Q_\rho\} \leqslant \eta \operatorname{osc}\{u;\ Q_{b\rho}\} \tag{5.23}$$

*с некоторыми положительными постоянными $c_1$, $\delta \leqslant 1$ и $\eta<1$. Тогда при $\rho \leqslant \rho_0$ справедлива оценка*

$$\operatorname{osc}\{u;\ Q_\rho\} \leqslant c\rho_0^{-\alpha}\rho^\alpha, \tag{5.24}$$

*где*

$$\alpha = \min\{-\ln_b \eta;\ \delta\};\quad c = b^\alpha \max\{\omega_0;\ c_1\rho_0^\delta\};$$

$$\omega_0 = \operatorname{osc}\{u;\ Q_{\rho_0}\}.$$

Доказательство. Возьмем последовательность цилиндров $Q_{\rho_k}$, $\rho_k = b^{-k}\rho_0$, $k=0, 1, 2, \ldots$, описанного выше типа и обозначим через $\omega_k$ колебание $u(x, t)$ в $Q_{\rho_k}$. Из условий следует, что

$$\omega_k \leqslant \max\{c_1\rho_k^\delta;\ \eta\omega_{k-1}\},\qquad k=1, 2, \ldots, \tag{5.25}$$

причем

$$\omega_0 \leqslant cb^{-\alpha}.$$

Отсюда и из (5.25) для $y_k = b^{k\alpha}\omega_k$, $k = 1, 2, \ldots$, имеем оценки

$$y \leqslant \max\left\{b^{k\alpha}c_1\rho_k^\delta;\ b^{k\alpha}\eta\omega_{k-1}\right\} =$$

$$= \max\left\{c_1 b^{k(\alpha-\delta)}\rho_0^\delta;\ b^\alpha\eta y_{k-1}\right\} \leqslant \max\left\{cb^{-\alpha};\ y_{k-1}\right\} \quad (5.26)$$

и

$$y_0 = \omega_0 \leqslant cb^{-\alpha}.$$

Из них видим, что при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$y_k \leqslant cb^{-\alpha},$$

т. е.

$$\omega_k \leqslant cb^{-\alpha}b^{-k\alpha} = cb^{-\alpha}\left(\frac{\rho_k}{\rho_0}\right)^\alpha.$$

Рассмотрим теперь цилиндр $Q_\rho$ с произвольным $\rho \leqslant \rho_0$. Для некоторого $k \geqslant 1$ имеем

$$\rho_k \leqslant \rho \leqslant \rho_{k-1},$$

и поэтому

$$\operatorname{osc}\left\{u;\ Q_\rho\right\} \leqslant \operatorname{osc}\left\{u;\ Q_{\rho_{k-1}}\right\} \leqslant cb^{-\alpha}\rho_0^{-\alpha}\rho_{k-1}^\alpha \leqslant c\rho_0^{-\alpha}\rho^\alpha,$$

т. е. утверждение леммы доказано.

При получении оценок норм Гёльдера для вектор-функций мы будем использовать более общее предложение:

Лемма 5.9. *Предположим, что в цилиндре* $Q_{\rho_0} = Q(\rho_0, \theta_0\rho_0^2)$ *заданы измеримые ограниченные функции* $u^1(x, t), \ldots, u^N(x, t)$ *и* $w^1(x, t), \ldots, w^{N_1}(x, t)$, *обладающие следующими свойствами: для любой пары имеющих общую с* $Q_{\rho_0}$ *вершину и ось цилиндров* $Q_\rho = Q(\rho, \theta_0\rho^2)$ *и* $Q_{b\rho}$, *где* $b > 1$ — *фиксированная постоянная и* $b\rho \leqslant \rho_0$, *найдется функция* $w^r(x, t)$ *такая, что*

$$\operatorname{osc}\left\{w^r;\ Q_{b\rho}\right\} \geqslant \delta_1 \max_{l=1,\ldots,N} \operatorname{osc}\left\{u^l;\ Q_{b\rho}\right\}, \quad (5.27)$$

*и имеет место хотя бы одно из неравенств*

$$\operatorname{osc}\left\{w^r;\ Q_\rho\right\} \leqslant c_1\rho^\delta \quad (5.28)$$

*или*

$$\operatorname{osc}\left\{w^r;\ Q_\rho\right\} \leqslant \eta\operatorname{osc}\left\{w^r;\ Q_{b\rho}\right\}. \quad (5.29)$$

*Здесь* $b$, $\delta_1$, $c_1$, $\delta$ *и* $\eta$ — *фиксированные постоянные, причем* $\eta < 1$.

*Тогда при* $\rho \leqslant \rho_0$ *верны оценки*

$$\operatorname{osc}\{u^i;\ Q_\rho\} \leqslant c\rho_0^{-\alpha}\rho^\alpha, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5.30}$$

*где*

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{N_1}\min\{-\ln_b \eta;\ \delta\}, \\ c &= b^{\alpha(N_1+1)}\delta_1^{-1}\max\left\{c_1\rho_0^\delta;\ \omega_0 b^{\alpha N_1}\right\}, \\ \omega_0 &= \max_{l=1,\ldots,N_1} \operatorname{osc}\{w^l;\ Q_{\rho_0}\}. \end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству предыдущей леммы. Мы не будем его здесь воспроизводить, а отошлем читателя к книге [I], стр. 92—94.

Замечание 5.2. В условиях и утверждениях лемм 5.8 и 5.9 можно все цилиндры заменить их пересечениями с какой-либо фиксированной областью $Q$.

Докажем, наконец, предложение, которое позволит нам оценить $\int\limits_{Q_T} \exp\{bu^{(0)}(x, t)\}\,dx\,dt$ для обобщенных решений линейных уравнений.

Лемма 5.10. *Пусть функция* $u(x, t)$ *принадлежит* $V_2(Q_T)$, *ограничена сверху на* $S_T$ *и при всех* $k \geqslant \hat{k} = \operatorname{vrai\,max}\limits_{S_T}$ *и удовлетворяет неравенствам*

$$\|u^{(k)}\|_{Q_T} \leqslant \gamma\left[k\mu^{\frac{1+\varkappa}{r}}(k) + \mu^{\frac{1}{r}}(k)\right], \tag{5.32}$$

*где* $\mu(k) = \int\limits_0^T \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_k(t)\,dt$, $A_k(t)$ — *множество точек* $x$ *из* $\Omega$, *в которых* $u(x, t) > k$, $\gamma$ *и* $\varkappa$ — *положительные постоянные, а значения* $q$ *и* $r$ *подчиняются условиям* (3.3). *Тогда* $u^{(0)} \in L_{q_1}(Q_T)$ *с любым* $q_1 > 1$. *Более того, существуют положительные числа* $b$ *и* $B$, *определяемые* $T$, $\operatorname{mes}\Omega$, $\gamma$, $\hat{k}$, $q$, $r$ и $\varkappa$, *такие, что*

$$\int\limits_{Q_T} e^{bu^{(0)}(x, t)}\,dx\,dt \leqslant B. \tag{5.33}$$

Замечание 5.3. В условиях (3.3) $r$ может обращаться в $\infty$ при любом $n$, а $q$ может обращаться в $\infty$ при $n=1$. В этих случаях считаем, что $\mu^{\frac{1}{r}}(k)=\left(\int\limits_0^T \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_k(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r}}=$

$$= \operatorname*{vrai\,max}_{t\in[0,T]} \operatorname{mes}^{\frac{1}{q}} A_k(t) \text{ для } r=\infty \text{ и}$$

$$\mu^{\frac{1}{r}}(k)=\left(\int\limits_0^T \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_k(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r}} = \operatorname{mes}^{\frac{1}{r}}\{t\in[0,T]:\operatorname{mes} A_k(t)>0\}$$

$$\text{для } q=\infty.$$

Для доказательства леммы рассмотрим последовательность уровней

$$k_h=k_{h-1}+k_0\geqslant\hat{k},\quad h=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $k_0$ — положительное число, которое будет выбрано ниже, и последовательность соответствующих им величин

$$z_h=\mu^{\frac{1}{r}}(k_h),\quad h=0,\ 1,\ \ldots$$

Из (5.32) на основании неравенства (3.4) получим рекуррентные неравенства для $z_h$:

$$(k_{h+1}-k_h)\,z_{h+1}\leqslant\|u^{(k_h)}\|_{q,r,Q_T}\leqslant$$
$$\leqslant\beta\,|u^{(k_h)}|_{Q_T}\leqslant\beta\gamma\left(k_h z_h^{1+\varkappa}+z_h\right),$$

из которых следует, что

$$z_{h+1}\leqslant\beta\gamma\left[(h+1)\,z_h^{1+\varkappa}+k_0^{-1}z_h\right]. \tag{5.34}$$

Покажем, что при достаточно большом $k_0$

$$z_h\leqslant\lambda e^{-h},\quad h=0,\ 1,\ \ldots, \tag{5.35}$$

где $\lambda$ — некоторая постоянная. Действительно, если (5.35) верно для $z_h$, то для $z_{h+1}$ в силу (5.34) будет справедлива оценка

$$z_{h+1}\leqslant\beta\gamma e\left[(h+1)\,\lambda^{\varkappa}e^{-\varkappa h}+k_0^{-1}\right]\lambda e^{-(h+1)},$$

из которой будет следовать желаемая оценка (5.35) для $z_{h+1}$, если только

$$\beta\gamma e\left[(h+1)\lambda^{\varkappa}e^{-\varkappa h}+k_0^{-1}\right]\leqslant 1. \tag{5.36}$$

Функция $(h+1)e^{-\varkappa h}$ при всех $h\geqslant 0$ не превосходит $\frac{1}{\varkappa}e^{\varkappa-1}$, и потому, чтобы удовлетворить (5.36), выберем $k_0$ и $\lambda$ из условия

$$\beta\gamma\left(\frac{1}{\varkappa}\lambda^{\varkappa}e^{\varkappa}+k_0^{-1}e\right)\leqslant 1,$$

например, возьмем

$$k_0\geqslant 2\beta\gamma e,\quad \lambda=\left(\frac{\varkappa}{2\beta\gamma e^{\varkappa}}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}. \tag{5.37}$$

При таких $k_0$ и $\lambda$ неравенство (5.35) будет иметь место при всех $h=0,\ 1,\ \ldots$, если только оно справедливо при $h=0$, т. е. если $z_0\leqslant\lambda$. Но для $z_0$ верны оценки

$$z_0=\left(\int_0^T \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_{k_0}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant(k_0-\hat{k})^{-1}\|u^{(\hat{k})}\|_{q,r,Q_T}\leqslant$$
$$\leqslant(k_0-\hat{k})^{-1}\beta|u^{(\hat{k})}|_{Q_T}\leqslant$$
$$\leqslant(k_0-\hat{k})^{-1}\beta\gamma\left[\hat{k}\operatorname{mes}^{\frac{1+\varkappa}{q}}\Omega T^{\frac{1+\varkappa}{r}}+\operatorname{mes}^{\frac{1}{q}}\Omega T^{\frac{1}{r}}\right],$$

так что мы удовлетворим неравенству $z_0\leqslant\lambda$, полагая

$$k_0=\max\Big\{2\beta\gamma e;\ \hat{k}+\beta\gamma\lambda^{-1}\left[\hat{k}\operatorname{mes}^{\frac{1+\varkappa}{q}}\Omega T^{\frac{1+\varkappa}{r}}+\operatorname{mes}^{\frac{1}{q}}\Omega T^{\frac{1}{r}}\right]\Big\}. \tag{5.38}$$

Итак, (5.35) доказано. Рассмотрим теперь величины

$$\operatorname{mes}Q_{h+1}=\operatorname{mes}\{(x,t)\in Q_T: u(x,t)>k_{h+1}\}=\int_0^T\operatorname{mes}A_{k_{h+1}}(t)\,dt.$$

В силу

$$(k_{h+1}-k_h)\max_{0\leqslant t\leqslant T}\operatorname{mes}^{\frac{1}{2}}A_{k_{h+1}}(t)\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^{(k_h)}(x,t)\|_{2,\Omega}\leqslant|u^{(k_h)}|_{Q_T}$$

из (5.32), (5.35) и (5.37) следует

$$\operatorname{mes} Q_{h+1} \leqslant k_0^{-2} T \left| u^{(k_h)} \right|_{Q_T}^2 \leqslant$$
$$\leqslant k_0^{-2} \gamma^2 \left[ (h+1) k_0 \left(\lambda e^{-h}\right)^{1+\varkappa} + \lambda e^{-h} \right]^2 T \leqslant \lambda^2 \beta^{-2} T e^{-2(h+1)}.$$

Благодаря этому неравенству

$$\int\limits_{Q_T} e^{bu^{(0)}(x,\,t)}\,dx\,dt \leqslant \sum_{h=0}^{\infty} \int\limits_{Q_h \setminus Q_{h+1}} e^{bu(x,\,t)}\,dx\,dt + e^{bk_0} \operatorname{mes} Q_T \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{h=0}^{\infty} e^{bk_{h+1}} \operatorname{mes} Q_h + e^{bk_0} \operatorname{mes} Q_T \leqslant$$
$$\leqslant \lambda^2 \beta^{-2} T \sum_{h=0}^{\infty} e^{b(h+2)k_0 - 2h} + e^{bk_0} \operatorname{mes} Q_T.$$

Поэтому при $b < 2k_0^{-1}$ интеграл $\int\limits_{Q_T} e^{bu^{(0)}(x,\,t)}\,dx\,dt$ не будет превосходить числа $B = \dfrac{\lambda^2 T e^{2bk_0}}{\beta^2 \left[1 - e^{-(2-k_0 b)}\right]} + e^{bk_0} \operatorname{mes} Q_T$. Лемма доказана.

Замечание 5.4. Утверждение леммы 5.10 останется в силе, если вместо выполнения неравенств (5.32) потребовать выполнения при $k \geqslant \hat{k}$ неравенств

$$\left| u^{(k)} \right|_{Q_T} \leqslant \gamma \left[ \sum_{i=1}^{N} \mu_i^{\frac{1+\varkappa_i}{r_i}}(k)\, k^{\delta_i} + \sum_{i=1}^{N} \mu_i^{\frac{1}{r_i}}(k) \right],$$

где $\mu_i(k) = \int\limits_0^T \operatorname{mes}^{\frac{r_i}{q_i}} A_k(t)\,dt$ (см. замечание 5.3), $\varkappa_i > 0$, $\delta_i < 1 + \varkappa_i$, а $q_i$ и $r_i$ подчиняются условиям (3.3).

Доказательство этого утверждения проводится точно так же, как и доказательство, изложенное выше, с тем изменением, что вместо неравенства (5.34) получается система рекуррентных неравенств для $z_h^{(i)} = \mu_i^{\frac{1}{r_i}}(k_h)$.

Замечание 5.5. Если из условий леммы 5.10 отбросить требование ограниченности $\operatorname{vrai}\max\limits_{S_T} u$, то неравенство (5.33) сохранится, только постоянные $b$ и $B$ в нем будут зависеть и от формы области. Именно, эта зависимость будет иметь место через постоянную $c$ из неравенства (3.8), тогда как выше при условиях леммы 5.10 мы могли воспользоваться неравенством (3.4), в котором постоянная $\beta$ не зависит от области.

## § 6. Об оценках $\max|u|$. Класс $\mathfrak{A}(Q_T, \gamma, r, \hat{k}, \varkappa)$

В этом параграфе будет доказана ограниченность функций $u(x, t)$, удовлетворяющих некоторым неравенствам. Таким неравенствам подчиняются решения $u(x, t)$ линейных и квазилинейных уравнений с дивергентной главной частью и их производные $u_x$, если, разумеется, функции, образующие уравнения, удовлетворяют некоторым условиям. Эти неравенства в общем случае оценивают рост величин $|u^{(k)}|_{Q(\rho-\sigma_1\rho,\ \tau-\sigma_2\tau)}$ через $k$, меру множества, где $u^{(k)} > 0$, более слабую норму $\|u^{(k)}\|_{2,\ Q(\rho,\ \tau)}$, $\sigma_1\rho$ и $\sigma_2\tau$. Начнем мы с более простого предложения, позволяющего давать тотальную оценку максимума модуля решений во всей области их определения.

Пусть $u(x, t)$ принадлежит $V_2(Q_T)$. Обозначим через $A_k(t)$ множество точек $x \in \Omega$, в которых $u(x, t) > k$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть* $\operatorname{vrai}\max\limits_{S_T} u \leqslant \hat{k}$, $\hat{k} \geqslant 0$, *и при* $k \geqslant \hat{k}$ *выполняются неравенства*

$$|u^{(k)}|_{Q_T} \leqslant \gamma k \mu^{\frac{1+\varkappa}{r}}(k) \tag{6.1}$$

*с некоторыми положительными постоянными* $\gamma$ *и* $\varkappa$. *Здесь* $\mu(k) = \int\limits_0^T \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_k(t)\, dt$, *а* $q$ *и* $r$ — *произвольные* *числа, удовлетворяющие условиям* (3.3)*). *Тогда*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T} u(x, t) \leqslant 2\hat{k}\left[1 + 2^{\frac{2}{\varkappa}+\frac{1}{\varkappa^2}}(\beta\gamma)^{1+\frac{1}{\varkappa}} T^{\frac{1+\varkappa}{r}} \operatorname{mes}^{\frac{1+\varkappa}{q}} \Omega\right], \quad (6.2)$$

*где* $\beta$ *есть постоянная из неравенства* (3.4).

Доказательство. Возьмем последовательность уровней $k_h = M(2 - 2^{-h})$, $h = 0, 1, \ldots$, считая $M \geqslant \hat{k} > 0$**). Ясно, что

$$(k_{h+1} - k_h)\mu^{\frac{1}{r}}(k_{h+1}) \leqslant \| u^{(k_h)} \|_{q, r, Q_T}. \quad (6.3)$$

С другой стороны, в силу неравенств (3.4) и (6.1)

$$\| u^{(k_h)} \|_{q, r, Q_T} \leqslant \beta | u^{(k_h)} |_{Q_T} \leqslant \beta\gamma k_h \mu^{\frac{1+\varkappa}{r}}(k_h) \quad (6.4)$$

и потому

$$\mu^{\frac{1}{r}}(k_{h+1}) \leqslant \frac{\beta\gamma k_h}{k_{h+1} - k_h} \mu^{\frac{1+\varkappa}{r}}(k_h) \leqslant 4\beta\gamma 2^h \mu^{\frac{1+\varkappa}{r}}(k_h). \quad (6.5)$$

Отсюда и из леммы 5.6 следует, что $\mu^{\frac{1}{r}}(k_h)$ будут стремиться к нулю при $h \to \infty$, если $\mu^{\frac{1}{r}}(k_0)$ достаточно мало, именно, если

$$\mu^{\frac{1}{r}}(k_0) = \mu^{\frac{1}{r}}(M) \leqslant (4\beta\gamma)^{-\frac{1}{\varkappa}} 2^{-\frac{1}{\varkappa^2}}. \quad (6.6)$$

Чтобы удовлетворить неравенству (6.6), возьмем $M = m\hat{k}$, $m > 1$, и подставим в (6.3) $\hat{k}$ вместо $k_h$ и $M$ вместо $k_{h+1}$. Это и (6.4) дадут

$$\mu^{\frac{1}{r}}(M) \leqslant \frac{\beta\gamma}{m-1} \mu^{\frac{1+\varkappa}{r}}(\hat{k}) \leqslant \frac{\beta\gamma}{m-1} T^{\frac{1+\varkappa}{r}} \operatorname{mes}^{\frac{1+\varkappa}{q}} \Omega.$$

Отсюда видно, что при

$$m = 1 + \beta\gamma T^{\frac{1+\varkappa}{r}} \operatorname{mes}^{\frac{1+\varkappa}{q}} \Omega (4\beta\gamma)^{\frac{1}{\varkappa}} 2^{\frac{1}{\varkappa^2}}$$

---

*) При $q = \infty$ и $r = \infty$ величина $\mu^{\frac{1}{r}}(k)$ определяется так же, как в замечании 5.3.

**) При $\hat{k} = 0$ утверждение теоремы очевидно.

условие (6.6) с $M = m\hat{k}$ будет выполнено и, следовательно, $\mu(2M)$ будет равно нулю, т. е.

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T} u \leqslant 2M = 2m\hat{k}.$$

Последнее совпадает с оценкой (6.2).

Замечание 6.1. Утверждение теоремы остается в силе, если вместо неравенств (6.1) функция $u(x, t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\|u^{(k)}\|_{Q_T} \leqslant \gamma \sum_{i=1}^{N} \mu_i^{\frac{1+\varkappa_i}{r_i}}(k)\, k^{\delta_i}, \tag{6.7}$$

где

$$\varkappa_i > 0, \quad \delta_i < 1 + \varkappa_i, \quad \mu_i = \int_0^T \operatorname{mes}^{\frac{r_i}{q_i}} A_k(t)\, dt,$$

а параметры $q_i$ и $r_i$ подчиняются условиям 3.3. Доказывается это так же, как и теорема 6.1.

Замечание 6.2. В условиях теоремы 6.1 можно отбросить требование ограниченности $\operatorname*{vrai\,max}_{S_T} u$ и считать, что неравенства (6.1) выполняются при $k$, бо́льших некоторого $\hat{k} \geqslant 0$. При этом будет справедлива оценка (6.2) с постоянной $c$ из (3.8) вместо $\beta$ из (3.4). В самом деле, функции $u^{(k_h)}$ в этом случае, вообще говоря, не равны нулю на $S_T$, и потому при выводе (6.4) надо вместо (3.4) использовать неравенство (3.8).

Переходим к получению локальных оценок $\operatorname{vrai\,max} u$. Пусть имеются цилиндр $Q(\rho_0, \tau_0) = \{|x - x_0| < \rho_0, t_0 - \tau_0 < t < t_0\}$ и семейство соосных с $Q(\rho_0, \tau_0)$ и имеющих с ним общую вершину цилиндров вида

$$Q(\rho - \sigma_1\rho, \tau - \sigma_2\tau) = \\ = \{|x - x_0| < \rho - \sigma_1\rho, t_0 - (1 - \sigma_2)\tau < t < t_0\},$$

таких, что

$$\frac{\rho_0}{2} \leqslant \rho - \sigma_1\rho \leqslant \rho \leqslant \rho_0, \quad \frac{\tau_0}{2} \leqslant \tau - \sigma_2\tau \leqslant \tau \leqslant \tau_0. \tag{6.8}$$

Обозначим через $A_{k,\rho}(t)$ множество точек из шара $\{|x - x_0| < \rho\}$, в которых $u(x, t) > k$, а через $\mu(k, \rho, \tau)$

интеграл $\int\limits_{t_0-\tau}^{t_0} \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_{k,\rho}(t)\,dt$. Параметры $q$ и $r$, как и выше, считаем подчиняющимися условиям (3.3), причем при $r=\infty$ считаем $\mu^{\frac{1}{r}}(k, \rho, \tau) = \operatorname*{vrai\,max}\limits_{\tau_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0} \operatorname{mes}^{\frac{1}{q}} A_{k,\rho}(t)$, а при $q=\infty$ $\mu^{\frac{1}{r}}(k, \rho, \tau)$ равным $\operatorname{mes}^{\frac{1}{r}}\{t\in[t_0-\tau, t_0]:\ \operatorname{mes} A_{k,\rho}(t)>0\}$.

Будем говорить, что функция $u(x, t)$ из $V_2(Q(\rho_0, \tau_0))$ принадлежит классу $\mathfrak{A}(Q(\rho_0, \tau_0), \gamma, r, \widehat{k}, \varkappa)$, если для любых $k\geqslant\widehat{k}$ и всевозможных пар цилиндров $Q(\rho, \tau)$ и $Q(\rho-\sigma_1\rho, \tau-\sigma_2\tau)$ указанного выше вида выполняются неравенства

$$\| u^{(k)} \|^2_{Q(\rho-\sigma_1\rho,\ \tau-\sigma_2\tau)} \leqslant \gamma\left\{\left[(\sigma_1\rho)^{-2}+(\sigma_2\tau)^{-1}\right]\| u^{(k)}\|^2_{2,\ Q(\rho,\ \tau)} + k^2\rho_0^{-\varkappa n}\mu^{\frac{2(1+\varkappa)}{r}}(k, \rho, \tau)\right\} \tag{6.9}$$

с некоторыми положительными постоянными $\gamma$ и $\varkappa$.

Рассмотрим теперь случай, когда цилиндр $Q(\rho_0, \tau_0)$ пересекается с частью $\Gamma_T$ границы цилиндра $Q_T$. Через $\mathfrak{A}(Q(\rho_0, \tau_0)\cap Q_T, \gamma, r, \widehat{k}, \varkappa)$ обозначим класс функций из $V_2(Q(\rho_0, \tau_0)\cap Q_T)$, удовлетворяющих при $k\geqslant\widehat{k}$, $\widehat{k}\geqslant 0$ и произвольных цилиндрах $Q(\rho, \tau)$, $Q(\rho-\sigma_1\rho, \tau-\sigma_2\tau)$ указанного выше вида неравенствам

$$\| u^{(k)} \|^2_{Q(\rho-\sigma_1\rho,\ \tau-\sigma_2\tau)\cap Q_T} \leqslant \gamma\left\{\left[(\sigma_1\rho)^{-2}+(\sigma_2\tau)^{-1}\right]\| u^{(k)}\|^2_{2,\ Q(\rho,\ \tau)\cap Q_T} + k^2\rho_0^{-\varkappa n}\mu^{\frac{2(1+\varkappa)}{r}}(k, \rho, \tau)\right\}. \tag{6.10}$$

Здесь $\mu(k, \rho, \tau) = \int\limits_{\max\{0,\ t_0-\tau\}}^{t_0} \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_{k,\rho}(t)\,dt$ определяется так же, как и выше, надо только под $A_{k,\rho}(t)$ понимать множество точек из пересечения шара $\{|x-x_0|\leqslant\rho\}$ с $\Omega$, в которых $u(x, t)>k$. Параметры $\gamma$, $r$, $q$ и $\varkappa$ такие же, как в (6.9).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6.2. *Для любой функции* $u(x, t)$ *из* $\mathfrak{A}(Q(\rho_0, \tau_0), \gamma, r, \widehat{k}, \varkappa)$ *справедлива оценка*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q\left(\frac{\rho_0}{2}, \frac{\tau_0}{2}\right)} u(x, t) \leqslant 2c\left\{\rho_0^{-\frac{n+2}{2}} \|u\|_{2, Q(\rho_0, \tau_0)}\left[1+\tau_0^{-\frac{1}{2}}\rho_0\right]+\right.$$

$$\left.+\widehat{k}\left[1+\left(\tau_0\rho_0^{-2}\right)^{\frac{1+\varkappa}{r}}\right]\right\}, \qquad (6.11)$$

*в которой постоянная $c$ определяется лишь величинами $\gamma$, $q$, $r$ и $\varkappa$. Аналогичная оценка верна и для функций класса $\mathfrak{A}(Q(\rho_0, \tau_0)\cap Q_T, \gamma, r, \widehat{k}, \varkappa)$, надо только заменить в (6.11) цилиндры $Q(\rho_0, \tau_0)$ и $Q\left(\frac{\rho_0}{2}, \frac{\tau_0}{2}\right)$ их пересечениями с $Q_T$. При этом постоянная $c$ зависит только от $\gamma$, $q$, $r$ и $\varkappa$, если $\operatorname*{vrai\,max}_{Q(\rho_0, \tau_0)\cap S_T} u(x, t) \leqslant \widehat{k}$, в общем же случае она зависит и от $S$.*

Проверим справедливость первой части теоремы 6.2. Вторая доказывается аналогично.

Прежде всего сделаем замену переменных: $x - x_0 = \rho_0\widetilde{x}$, $t - t_0 = \rho_0^2\widetilde{t}$. В новых переменных $\widetilde{x}$ и $\widetilde{t}$ неравенства (6.9) после сокращения на $\rho_0^n$ примут вид

$$|u^{(k)}|^2_{Q(\widetilde{\rho}-\sigma_1\widetilde{\rho}, \widetilde{\tau}-\sigma_2\widetilde{\tau})} \leqslant \gamma\left\{\left[(\sigma_1\widetilde{\rho})^{-2}+(\sigma_2\widetilde{\tau})^{-1}\right]\|u^{(k)}\|^2_{2, Q(\widetilde{\rho}, \widetilde{\tau})}+\right.$$

$$\left.+k^2\mu^{\frac{2(1+\varkappa)}{r}}(k, \widetilde{\rho}, \widetilde{\tau})\right\}, \qquad (6.12)$$

где $\widetilde{\rho} = \rho\rho_0^{-1}$, а $\widetilde{\tau} = \tau\rho_0^{-2}$, а условия (6.8) — вид

$$\frac{1}{2} \leqslant \widetilde{\rho} - \sigma_1\widetilde{\rho} \leqslant \widetilde{\rho} \leqslant 1, \quad \frac{\theta}{2} \leqslant \widetilde{\tau} - \sigma_2\widetilde{\tau} \leqslant \widetilde{\tau} \leqslant \theta \equiv \tau_0\rho_0^{-2}, \qquad (6.13)$$

так что цилиндру $Q(\rho_0, \tau_0)$ в новых переменных соответствует цилиндр $Q(1, \theta) = \{|\widetilde{x}| < 1, -\theta < \widetilde{t} < 0\}$, а цилиндрам $Q(\rho, \tau)$ — цилиндры $Q(\widetilde{\rho}, \widetilde{\tau}) = \{|\widetilde{x}| < \widetilde{\rho}, -\widetilde{\tau} < \widetilde{t} < 0\}$.

В дальнейшем мы будем опускать волну над $x$, $\rho$, $t$ и т. д. при написании формул.

Возьмем последовательность уменьшающихся цилиндров

$$Q_h = Q(\rho_h, \tau_h) \text{ с } \rho_h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{h+2}}, \quad \tau_h = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2^{h+2}},$$

$h=0, 1, 2, \ldots$, и последовательность возрастающих уровней $k_h = M + N\left(1 - \frac{1}{2^h}\right)$, $h = 0, 1, 2, \ldots$, где $M$ и $N$ — некоторые положительные числа.

Предварительно установим следующую лемму.

Лемма 6.1. *Если функция* $u(x, t)$ *удовлетворяет неравенствам* (6.12) *при всех* $k$, *лежащих в диапазоне* $[M, M+N]$, *то для величин*

$$y_h = N^{-2} \int_{-\tau_h}^{0} \int_{A_{k_h, \rho_h}(t)} (u - k_h)^2 \, dx \, dt$$

*и*

$$z_h = \mu^{\frac{2}{r}}(k_h, \rho_h, \tau_h) \equiv \mu_h^{\frac{2}{r}}, \quad h = 0, 1, \ldots,$$

*с указанными выше* $k_h$ *и* $\rho_h$ *справедлива система рекуррентных неравенств*

$$y_{h+1} \leqslant \gamma_1 2^{4h} \left[ y_h^{1+\delta} + z_h^{1+\varkappa} y_h^{\delta} \left(\frac{M}{N} + 1\right)^2 \right], \tag{6.14}$$

$$z_{h+1} \leqslant \gamma_1 2^{2h} \left[ 2^{2h} y_h + z_h^{1+\varkappa} \left(\frac{M}{N} + 1\right)^2 \right], \tag{6.15}$$

*где* $\gamma_1 = 2^6 \beta^2 [\gamma(2^5 + \theta^{-1}) + 2^5]$, $\delta = \frac{2}{n+2}$, а $\beta$ — *постоянная из* (3.4).

После того как мы докажем эту лемму, можно будет, выбирая достаточно большими и равными друг другу числа $M$ и $N$, с помощью соотношений (6.14) — (6.15) заключить о стремлении $y_h$ и $z_h$ к нулю при $h \to \infty$. Это даст желаемую оценку: $\operatorname*{vrai\,max}_{Q\left(\frac{\rho_0}{2}, \frac{\tau_0}{2}\right)} u \leqslant 2M$.

Итак, обратимся к доказательству леммы 6.1. Возьмем последовательность непрерывных срезающих функций $\zeta_h(|x|)$, равных 1 при $|x| \leqslant \rho_{h+1}$, нулю при $|x| \geqslant \bar{\rho}_h = \frac{1}{2}(\rho_h + \rho_{h+1})$ и линейных на отрезке $|x| \in [\rho_{h+1}, \bar{\rho}_h]$, так что $|\zeta_{hx}| \leqslant 2^{h+4}$. Через $\lambda_h$ будем обозначать

$$\lambda_h = \int_{-\tau_{h+1}}^{0} \operatorname{mes} A_{k_{h+1}, \bar{\rho}_h}(t) \, dt.$$

Оценим $y_{h+1}$, используя неравенство (3.7), следующим образом:

$$y_{h+1} \leqslant N^{-2} \int\limits_{-\tau_{h+1}}^{0} \int\limits_{A_{k_{h+1}, \bar{\rho}_h}(t)} (u - k_{h+1})^2 \zeta_h^2 \, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \beta^2 N^{-2} \lambda_h^{\frac{2}{n+2}} \left| u^{(k_{h+1})} \zeta_h \right|^2_{Q(\bar{\rho}_h, \tau_{h+1})} \leqslant$$

$$\leqslant \beta^2 N^{-2} \lambda_h^{\delta} \left\{ \operatorname*{vrai\,max}_{-\tau_{h+1} \leqslant t \leqslant 0} \int\limits_{A_{k_{h+1}, \bar{\rho}_h}(t)} (u - k_{h+1})^2 \zeta_h^2 \, dx + \right.$$

$$\left. + 2 \int\limits_{-\tau_{h+1}}^{0} \int\limits_{A_{k_{h+1}, \bar{\rho}_h}(t)} \left[ u_x^2 \zeta_h^2 + (u - k_{h+1})^2 \zeta_{hx}^2 \right] dx\, dt \right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\beta^2 \lambda_h^{\delta} \left[ N^{-2} \left| u^{(k_{h+1})} \right|^2_{Q(\bar{\rho}_h, \tau_{h+1})} + 4^{h+4} y_h \right]. \quad (6.16)$$

Правую часть (6.16) оценим с помощью очевидного неравенства

$$\lambda_h \leqslant (k_{h+1} - k_h)^{-2} N^2 y_h \quad (6.17)$$

и неравенства (6.12), примененного к функции $u^{(k_{h+1})}$ и двум цилиндрам $Q(\bar{\rho}_h, \tau_{h+1})$ и $Q(\rho_h, \tau_h)$. Это даст:

$$y_{h+1} \leqslant 2\beta^2 \left[ (k_{h+1} - k_h)^{-1} N \right]^{2\delta} y_h^{\delta} \left\{ \gamma \left[ (4^{h+4} + \theta^{-1} 2^{h+3}) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times N^{-2} \| u^{(k_{h+1})} \|^2_{2, Q(\rho_h, \tau_h)} + k_{h+1}^2 N^{-2} \mu_h^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)} \right] + 4^{h+4} y_h \right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-2} \gamma_1 \left[ (k_{h+1} - k_h)^{-1} N \right]^{2\delta} \left[ 2^{2h} y_h^{1+\delta} + k_{h+1}^2 N^{-2} z_h^{1+\varkappa} y_h^{\delta} \right]. \quad (6.18)$$

Учитывая выбор $k_h$, легко убедиться, что из (6.18) следуют неравенства (6.14). Для доказательства неравенств (6.15) заметим, что

$$(k_{h+1} - k_h)^2 z_{h+1} = (k_{h+1} - k_h)^2 \mu_{h+1}^{\frac{2}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant \| u^{(k_h)} \zeta_h \|^2_{q, r, Q(\bar{\rho}_h, \tau_{h+1})} \leqslant \beta^2 \left| u^{(k_h)} \zeta_h \right|^2_{Q(\bar{\rho}_h, \tau_{h+1})}. \quad (6.19)$$

Оценивая правую часть с помощью (6.12), так же как это делалось в (6.16) — (6.18), получим

$$(k_{h+1} - k_h)^2 z_{h+1} \leqslant 2\beta^2 4^{h+4} N^2 y_h +$$
$$+ 2\beta^2\gamma\left\{\left[(\bar{\rho}_h - \rho_h)^{-2} + (\tau_{h+1} - \tau_h)^{-1}\right]\| u^{(k_h)} \|^2_{2, Q(\rho_h, \tau_h)} +\right.$$
$$\left. + k_h^2 \mu_h^{\frac{2(1+\varkappa)}{r}}\right\} \leqslant 2\beta^2\gamma\left[\left(4^{h+4}(1+\gamma^{-1}) + \theta^{-1}2^{h+3}\right)N^2 y_h + k_h^2 z_h^{1+\varkappa}\right]. \tag{6.20}$$

Отсюда в силу выбора $k_h$ следуют неравенства (6.15).

Лемма 6.1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 6.2. Положим $N = M$. Из системы неравенств (6.14) — (6.15) на основании леммы 5.7 можно заключить о стремлении величин $y_h$ и $z_h$ к нулю при $h \to \infty$, если только значения $y_0$ и $z_0$ достаточно малы, именно если

$$y_0 \leqslant \min\left\{(2c)^{-\frac{1}{\delta}} b^{-\frac{1}{d\delta}};\ (2c)^{-\frac{1+\varkappa}{\varkappa}} b^{-\frac{1}{\varkappa d}}\right\} \equiv \gamma_3,$$
$$z_0 \leqslant \gamma_3^{\frac{1}{1+\varkappa}}, \tag{6.21}$$

где $d = \min\left\{\delta; \dfrac{\varkappa}{1+\varkappa}\right\}$, $b = 16$, а $c = 4\gamma_1$. Мы добьемся выполнения неравенств (6.21), выбирая большим число $M$. В самом деле, для $y_0$ имеем оценку

$$y_0 = M^{-2} \int\limits_{-\theta}^{0} \int\limits_{A_{M,1}} (u - M)^2\, dx\, dt \leqslant M^{-2} \|u\|^2_{2, Q(1,\theta)}. \tag{6.22}$$

Чтобы оценить $z_0$, заметим, что неравенство (6.20) имеет место и при $h = -1$, если считать $k_{-1} = \hat{k}$, $\rho_{-1} = 1$, $\tau_{-1} = \theta$. Оно дает

$$z_0 \leqslant \frac{\beta^2\gamma}{(M - \hat{k})^2}\left\{\left(4^3(1+\gamma^{-1}) + \theta^{-1}2^2\right)\| u^{(\hat{k})} \|^2_{2, Q(1,\theta)} +\right.$$
$$\left. + \hat{k}^2\left[\mu(M, 1, \theta)\right]^{\frac{2(1+\varkappa)}{r}}\right\} \leqslant \frac{\beta^2\gamma}{(M - \hat{k})^2} \times \tag{6.23}$$
$$\times \left[\left(4^3(1+\gamma^{-1}) + \theta^{-1}2^2\right)\|u\|^2_{2, Q(1,\theta)} + \hat{k}^2 \theta^{2\frac{(1+\varkappa)}{r}} \varkappa_n^{\frac{2(1+\varkappa)}{q}}\right].$$

Из (6.22) и (6.23) следует, что при

$$M \geqslant \max\left\{\gamma_3^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{2, Q(1,\theta)};\ \hat{k} + \gamma_3^{-\frac{1}{2(1+\varkappa)}}\beta\gamma^{\frac{1}{2}} \times \right.$$
$$\left.\times\left[\left(4^3(1+\gamma^{-1}) + \theta^{-1}2^2\right)\|u\|^2_{2, Q(1,\theta)} + \hat{k}^2\theta^{\frac{2(1+\varkappa)}{r}}\varkappa_n^{\frac{2(1+\varkappa)}{q}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \qquad (6.24)$$

мы удовлетворим требованиям (6.21).

Итак, если $M$ взять равным, например,

$$M = c\left[\|u\|_{2, Q(1,\theta)}\left(1 + \theta^{-\frac{1}{2}}\right) + \hat{k}\left(1 + \theta^{\frac{1+\varkappa}{r}}\right)\right], \qquad (6.25)$$
$$c = \max\left\{\gamma_3^{-\frac{1}{2}} + \gamma_3^{-\frac{1}{2(1+\varkappa)}}\beta\gamma^{\frac{1}{2}}2^3;\ 1 + \gamma_3^{-\frac{1}{2(1+\varkappa)}}\beta\gamma^{\frac{1}{2}}\varkappa_n^{\frac{1+\varkappa}{q}}\right\},$$

то $y_h$ и $z_h$ стремятся к нулю при $h \to \infty$ и, следовательно,

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q\left(\frac{\rho_0}{2},\, \frac{\tau_0}{2}\right)} u(x, t) \leqslant 2M.$$

Теорема 6.2 доказана.

Замечание 6.3. Последний член в неравенстве (6.9) можно заменить членом более общего вида

$$\sum_{i=1}^{N} k^{2(1+\delta_i)}\rho_0^{-\varkappa_i n}\mu_i^{\frac{2(1+\varkappa_i)}{r_i}}(k, \rho, \tau),$$

где $\mu_i = \int\limits_{t_0-\tau}^{t_0} \operatorname{mes}^{\frac{r_i}{q_i}} A_{k,\rho}(t)\,dt$, $\delta_i \leqslant \min\{\delta(1+\varkappa_i);\ \varkappa_i\}$, $\delta = \frac{2}{n+2}$, а $\gamma$, $\varkappa_i$, $q_i$ и $r_i$ — фиксированные положительные параметры, причем $q_i$ и $r_i$ подчиняются условиям (3.3). Кроме того, вместо ограничений (6.8) можно требовать, чтобы

$$\rho_0 - \sigma_1^0\rho_0 \leqslant \rho - \sigma_1\rho \leqslant \rho \leqslant \rho_0,$$
$$\tau_0 - \sigma_2^0\tau \leqslant \tau - \sigma_2\tau \leqslant \tau \leqslant \tau_0$$

с какими-либо фиксированными положительными числами $\sigma_1^0$ и $\sigma_2^0$. При этом для $\operatorname*{vrai\,max}\limits_{Q(\rho_0-\sigma_1^0\rho_0,\ \tau_0-\sigma_2^0\tau_0)} u(x, t)$ будет справедлива оценка, аналогичная (6.11).

Это же замечание верно для цилиндров, пересекающихся с $\Gamma_T$. Доказываются все эти утверждения тем же методом, что и теорема 6.2.

Замечание 6.4. Нетрудно проверить, что функция $u(x, t)$ из $V_2(Q_T)$ принадлежит классу $\mathfrak{A}(Q(\rho_0, \tau_0) \cap Q_T, \gamma, r, \hat{k}, \varkappa)$ для любого цилиндра $Q(\rho_0, \tau_0)$, имеющего вершину в $\bar{Q}_T$, если $u(x, t)$ при всех $k \geqslant \hat{k}$ и $0 \leqslant t_0 - \tau \leqslant t_0 \leqslant T$ удовлетворяет неравенствам

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t_0-\tau \leqslant t \leqslant t_0} \| u^{(k)}(x, t)\zeta(x, t)\|_{2,\Omega}^2 + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \int_\Omega |u_x^{(k)}|^2 \zeta^2 \, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_1 \left\{ \int_{t_0-\tau}^{t_0} \int_\Omega (\zeta_x^2 + \zeta |\zeta_t|) |u^{(k)}|^2 \, dx\, dt + \right.$$
$$\left. + k^2 \left[ \int_{t_0-\tau}^{t_0} \left( \int_{A_k(t)} \zeta\, dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \right]^{\frac{2(1+\varkappa)}{r}} \right\}, \tag{6.26}$$

в которых $\gamma_1$ и $\varkappa$ суть фиксированные положительные числа, $r$ и $q$ подчиняются условиям (3.3), а $\zeta(x, t)$ — произвольная непрерывная неотрицательная кусочно-гладкая функция, такая, что $u^{(k)}(x, t)\zeta(x, t)$ равно нулю на боковой поверхности и нижнем основании цилиндра $Q(\rho_0, \tau_0)$ и $\zeta(x, t) \leqslant 1$.

При $q = \infty$ считаем, что

$$\left( \int_{A_k(t)} \zeta\, dx \right)^{\frac{1}{q}} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \operatorname{mes} A_k(t) > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \operatorname{mes} A_k(t) = 0, \end{cases}$$

а при $r = \infty$ последний член в (6.26) понимается как

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t_0-\tau \leqslant t \leqslant t_0} \left( \int_{A_k(t)} \zeta\, dx \right)^{\frac{2(1+\varkappa)}{q}}.$$

## § 7. Класс $\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$

В данном и следующих параграфах рассматриваются классы ограниченных по модулю функций, удовлетворяющих неравенствам, близким к неравенствам предыдущего параграфа. Относительно элементов $u(x, t)$ этих классов доказывается, что они непрерывны в смысле Гёльдера, и дается оценка нормы Гёльдера $|u|^{(\alpha)}$. К таким классам принадлежат решения и производные от решений линейных и квазилинейных уравнений с дивергентной главной частью.

Будем говорить, что **функция** $u(x, t)$ **принадлежит классу** $\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$, если $u(x, t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$*), $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|u| \leqslant M$ и функции $w(x, t) = \pm u(x, t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\tau} \|w^{(k)}(x, t)\|^2_{2, K_{\rho-\sigma_1\rho}} \leqslant \|w^{(k)}(x, t_0)\|^2_{2, K_\rho} + \\ + \gamma\left[(\sigma_1\rho)^{-2}\|w^{(k)}\|^2_{2, Q(\rho, \tau)} + \mu^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}(k, \rho, \tau)\right] \qquad (7.1)$$

и

$$\|w^{(k)}\|^2_{Q(\rho-\sigma_1\rho, \tau-\sigma_2\tau)} \leqslant \\ \leqslant \gamma\left\{\left[(\sigma_1\rho)^{-2} + (\sigma_2\tau)^{-1}\right]\|w^{(k)}\|^2_{2, Q(\rho, \tau)} + \mu^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}(k, \rho, \tau)\right\}, \qquad (7.2)$$

в которых $w^{(k)}(x, t) = \max\{w(x, t) - k;\ 0\}$; $Q(\rho, \tau) = K_\rho \times (t_0, t_0 + \tau) = \{|x - x_0| < \rho,\ t_0 < t < t_0 + \tau\}$ — произвольный цилиндр, принадлежащий $Q_T$; $\rho$, $\tau$ — произвольные положительные числа; $\sigma_1$ и $\sigma_2$ — произвольные числа из промежутка $(0, 1)$; $\mu(k, \rho, \tau) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_{k,\rho}(t)\,dt$, $A_{k,\rho}(t)$ — множество точек $x$ из $K_\rho$, в которых $w(x, t) > k$; $M$, $\gamma$, $q$, $r$, $\delta$, $\varkappa$ — фиксированные положительные числа, причем $q$ и $r$

---

*) Вместо принадлежности классу $V_2^{1,0}(Q_T)$, по существу, требуется лишь, чтобы $u \in V_2(Q_T)$ и чтобы норма $\|u(x, t)\|_{2,\Omega}$ была конечна при каждом $t$ из $[0, T]$.

удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{llll} \dfrac{1}{r}+\dfrac{n}{2q}=\dfrac{n}{4}, & & & \\ q\in\left(2, \dfrac{2n}{n-2}\right], & r\in[2, \infty) & \text{при} & n\geqslant 3, \\ q\in(2, \infty), & r\in(2, \infty) & \text{при} & n=2, \\ q\in(2, \infty], & r\in[4, \infty) & \text{при} & n=1; \end{array}\right\} \qquad (7.3)$$

$k$ — произвольное число, подчиняющееся лишь условию

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q(\rho, \tau)} w(x, t)-k\leqslant\delta. \qquad (7.4)$$

В случае $q=\infty$ (при $n=1$) под $\mu(k, \rho, \tau)$ понимается $\operatorname{mes}\{t\in(t_0, t_0+\tau);\ \operatorname{mes} A_{k,\rho}(t)>0\}$.

Замечание 7.1. Можно было бы в определении класса $\mathfrak{B}_2$ в неравенствах (7.1) и (7.2) считать числа $\gamma$ разными перед всеми пятью членами правых частей, причем при первом слагаемом (7.1) множитель должен быть близок к единице, и в связи с этим более дифференцировано проследить зависимости вычисленных ниже постоянных от $\gamma_i$, $i=1, \ldots, 5$. Однако нас это не интересует, и потому мы поставили в (7.1) и (7.2) одно и то же $\gamma$. Кроме того, все результаты не изменятся по существу, если на $\rho$ и $\tau$ из (7.1) и (7.2) наложить дополнительные ограничения: $\rho\leqslant\rho_0$, $\tau\leqslant\tau_0$, где $\rho_0$ и $\tau_0$ — фиксированные числа.

Основной целью данного параграфа является доказательство вложимости $\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ в $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ с некоторым положительным $\alpha$, определяемым лишь параметрами $M$, $\gamma$, $r$, $\delta$ и $\varkappa$.

Замечание 7.2. Легко проверить, что неравенства (7.1), (7.2) вытекают из неравенств

$$\begin{aligned} \|w^{(k)}(x, t_0+\tau)\zeta(x, t_0+\tau)\|^2_{2, K_\rho}+\nu\|w^{(k)}_x\zeta\|^2_{2, Q(\rho, \tau)}\leqslant \\ \leqslant\|w^{(k)}(x, t_0)\zeta(x, t_0)\|^2_{2, K_\rho}+ \\ +\gamma_1\Bigg\{\int\limits_{Q(\rho, \tau)}(\zeta_x^2+\zeta|\zeta_t|)(w^{(k)})^2\,dx\,dt+ \\ +\left[\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau}\left(\int\limits_{A_{k,\rho}(t)}\zeta\,dx\right)^{\frac{r}{q}}dt\right]^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}\Bigg\}, \end{aligned} \qquad (7.5)$$

в которых использованы те же обозначения, что и выше, а $\zeta(x, t)$ — произвольная, непрерывная, кусочно-гладкая функция со значениями между 0 и 1, равная нулю на боковой поверхности цилиндра $Q(\rho, \tau)$. При $q=\infty$ последний интеграл понимается так, как указано в замечании 6.4.

Как будет показано в следующих главах, решения линейных и квазилинейных уравнений, а также их производные по $x$ принадлежат классам $\mathfrak{B}_2$ или некоторым их обобщениям, которые будут определены ниже. Это обстоятельство позволит заключить о принадлежности всех этих функций пространствам Гёльдера и получить для них соответствующие оценки.

Докажем сначала четыре вспомогательных предложения. В них будут утверждения о существовании некоторых постоянных. Существенно то, что все они не зависят от исследуемого элемента $u(x, t)$ класса $\mathfrak{B}_2$, а определяются только $n$ и числовыми параметрами, входящими в определение класса $\mathfrak{B}_2$.

Лемма 7.1. *Пусть функция $u(x, t)$ удовлетворяет неравенствам* (7.1) *и* $\operatorname{mes} A_{k,\rho}(t_0) \leqslant \frac{1}{p} \operatorname{mes} K_\rho = \frac{\varkappa_n}{p} \rho^n$, $p > 1$. *Тогда по любому $\xi$ из $\left(\sqrt{\frac{1}{p}}, 1\right)$ можно указать такие положительные числа $\theta(\xi)$ и $b(\xi)$, что если*

$$\delta \geqslant H = \operatorname*{vrai\,max}_{\substack{x \in K_\rho \\ t_0 < t < t_0 + \theta(\xi)\rho^2}} u(x, t) - k > \rho^{-\frac{n\varkappa}{2}},$$

*то*

$$\operatorname{mes}\left(K_\rho \setminus A_{k+\xi H, \rho}(t)\right) \geqslant b(\xi)\varkappa_n\rho^n \tag{7.6}$$

*для*

$$t \in [t_0, t_0 + \theta(\xi)\rho^2].$$

В силу условий леммы имеем

$$\int\limits_{A_{k,\rho-\sigma_1\rho}(t)} (u(x, t) - k)^2\,dx \leqslant \frac{1}{p} H^2 \varkappa_n \rho^n +$$

$$+ \gamma\left\{H^2\sigma_1^{-2}(t - t_0)\varkappa_n\rho^{n-2} + \left[(t - t_0)(\varkappa_n\rho^n)^{\frac{r}{q}}\right]^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}\right\}.$$

С другой стороны,

$$(\xi H)^2 \operatorname{mes} A_{k+\xi H,\, \rho-\sigma_1\rho}(t) \leqslant \int\limits_{A_{k,\, \rho-\sigma_1\rho}(t)} (u-k)^2\, dx. \qquad (7.7)$$

Поэтому

$$\operatorname{mes} A_{k+\xi H,\, \rho-\sigma_1\rho}(t) \leqslant \frac{1}{p\xi^2}\varkappa_n\rho^n + \gamma\Big\{(\sigma_1\xi)^{-2}(t-t_0)\rho^{-2} +$$
$$+ (\xi H)^{-2}\varkappa_n^{\frac{2}{q}(1+\varkappa)-1}(t-t_0)^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}\rho^{n\frac{2}{q}(1+\varkappa)-n}\Big\}\varkappa_n\rho^n. \qquad (7.8)$$

Для $t \leqslant t_0 + \theta(\xi)\rho^2$ из (7.8), учитывая предположение $H > \rho^{\frac{n\varkappa}{2}}$, получим

$$\operatorname{mes} A_{k+\xi H,\, \rho-\sigma_1\rho}(t) \leqslant$$
$$\leqslant \xi^{-2}\Big\{p^{-1} + \gamma\Big[\sigma_1^{-2}\theta(\xi) + \varkappa_n^{\frac{2}{q}(1+\varkappa)-1}\theta(\xi)^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}\Big]\Big\}\varkappa_n\rho^n;$$

при этом мы использовали то, что $q$ и $r$ связаны равенством (7.3). Для любого $\xi > \sqrt{\frac{1}{p}}$ можно, очевидно, выбрать положительные числа $\sigma_1$, $\theta(\xi)$ и $b(\xi)$ так, чтобы

$$n\sigma_1 + \xi^{-2}\Big\{p^{-1} + \gamma\Big[\sigma_1^{-2}\theta(\xi) + \varkappa_n^{\frac{2}{q}(1+\varkappa)-1}\theta(\xi)^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}\Big]\Big\} =$$
$$= 1 - b(\xi) < 1$$

и следовательно, чтобы

$$\operatorname{mes} A_{k+\xi H,\, \rho}(t) \leqslant \operatorname{mes} A_{k+\xi H,\, \rho-\sigma_1\rho}(t) + \operatorname{mes} K_\rho \setminus K_{\rho-\sigma_1\rho} \leqslant$$
$$\leqslant (1 - b(\xi))\operatorname{mes} K_\rho.$$

Лемма доказана.

Фиксируем для дальнейших рассуждений $p$, $\xi$, $\theta(\xi)$ и $b(\xi)$, например, так: $p=2$; $\xi = \frac{3}{4}$; $b(\xi) = \frac{1}{18}$, а $\theta(\xi) = \theta$ есть положительный корень уравнения

$$\gamma\Big\{(36n)^2\theta + \varkappa_n^{\frac{2}{q}(1+\varkappa)-1}\theta^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}\Big\} = \frac{1}{64}.$$

Кроме этого, введем «стандартные цилиндры», именно цилиндры вида

$$Q_\rho = \{|x-x_0| \leqslant \rho, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \theta\rho^2\}$$

с произвольно расположенной «вершиной» $(x_0, t_0 + \theta\rho^2)$.

Замечание 7.3. Лемма 7.1 справедлива и для пересечений рассмотренных в ней цилиндров с каким-либо фиксированным цилиндром $Q_T$. Надо только во всех условиях и утверждениях брать вместо шаров $K_\rho$ их пересечения с $\Omega$.

Введем еще одно обозначение: $Q_\rho(k)$ — множество точек $(x, t)$ из $Q_\rho$, в которых $u(x, t) > k$. Легко убедиться в справедливости следующих соотношений между мерой $Q_\rho(k)$ и величиной $\mu(k, \rho, \theta\rho^2)$, относящихся к одному и тому же цилиндру $Q_\rho$:

$$\left.\begin{aligned} &(\varkappa_n\rho^n)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{r}} \operatorname{mes}^{\frac{2}{r}} Q_\rho(k) \leqslant \mu^{\frac{2}{r}}(k, \rho, \theta\rho^2) \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant (\theta\rho^2)^{\frac{2}{r}-\frac{2}{q}} \operatorname{mes}^{\frac{2}{q}} Q_\rho(k), \quad \text{при } r \leqslant q, \\ &(\varkappa_n\rho^n)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{r}} \operatorname{mes}^{\frac{2}{r}} Q_\rho(k) \geqslant \mu^{\frac{2}{r}}(k, \rho, \theta\rho^2) \geqslant \\ &\qquad\qquad \geqslant (\theta\rho^2)^{\frac{2}{r}-\frac{2}{q}} \operatorname{mes}^{\frac{2}{q}} Q_\rho(k), \quad \text{при } r \geqslant q. \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

В самом деле, правые из неравенств (7.9) следуют из неравенства Гёльдера, а левые — из того факта, что $\operatorname{mes} Q_\rho(k) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\theta\rho^2} \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_{k,\rho}(t) \operatorname{mes}^{1-\frac{r}{q}} A_{k,\rho}(t)\,dt$ оценивается через $\mu(k, \rho, \theta\rho^2) \operatorname{mes}^{1-\frac{r}{q}} K_\rho$ сверху при $r \leqslant q$ и снизу при $r \geqslant q$.

В следующих двух леммах будем предполагать параметр $q$, входящий в определение $\mu(k, \rho, \tau)$, конечным. Как видно из условий (7.3), $q$ может обращаться в бесконечность лишь при $n = 1$. В этом случае возможно так видоизменить леммы 7.2 и 7.3, чтобы охватить весь диапазон $q \in (2, \infty]$. Мы сделаем это в конце параграфа.

Лемма 7.2. *Пусть $u(x, t)$ — произвольная функция, подчиняющаяся неравенствам* (7.2). *Существует $\theta_1 > 0$ такое, что, каковы бы ни были цилиндр $Q_{\rho_0} \subset Q_T$ и число $k_0 \geqslant \operatorname{vrai\,max}_{Q_{\rho_0}} u(x, t) - \delta$, из неравенства*

$$\operatorname{mes} Q_{\rho_0}(k_0) \leqslant \theta_1 \rho_0^{n+2} \tag{7.10}$$

*следует*

$$\operatorname{mes} Q_{\frac{\rho_0}{2}}\left(k_0+\frac{H}{2}\right)=0, \tag{7.11}$$

*если только*

$$H=\max_{Q_{\rho_0}} u(x, t)-k_0 \geqslant \rho_0^{\frac{n\varkappa}{2}}. \tag{7.12}$$

*Цилиндр* $Q_{\frac{\rho_0}{2}}$ *в* (7.11) *имеет ту же вершину, что и* $Q_{\rho_0}$.

Итак, пусть условия леммы выполнены. Перейдем от $x$, $t$ к новым независимым переменным $\tilde{x}$, $\tilde{t}$ по формулам

$$x-x_0=\rho_0\tilde{x}, \quad t-t_0=\rho_0^2\tilde{t}.$$

Неравенства (7.2) при этом примут вид

$$\begin{aligned}\| u^{(k)}\|^2_{Q(\tilde{\rho}-\sigma_1\tilde{\rho},\ \tilde{\tau}-\sigma_2\tilde{\tau})} &\leqslant \\ &\leqslant \gamma\left\{\left[(\sigma_1\tilde{\rho})^{-2}+(\sigma_2\tilde{\tau})^{-1}\right]\| u^{(k)}\|^2_{2,\ Q(\tilde{\rho},\ \tilde{\tau})}+\rho_0^{\varkappa n}\mu^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}(k, \tilde{\rho}, \tilde{\tau})\right\},\end{aligned}$$

где $\tilde{\rho}=\dfrac{\rho}{\rho_0}$, $\tilde{\tau}=\dfrac{\tau}{\rho_0^2}$, а $Q_{\tilde{\rho}_0}=Q(1, \theta)$. Перейдем от $u$ к функции $v=\dfrac{u}{H}$. Для нее, разделив обе части последнего неравенства на $H^2$ и учтя, что в силу условия (7.12) $H^{-2}\rho_0^{\varkappa n}\leqslant 1$, получим

$$\begin{aligned}\| v^{(\tilde{k})}\|^2_{Q(\tilde{\rho}-\sigma_1\tilde{\rho},\ \tilde{\tau}-\sigma_2\tilde{\tau})} \leqslant \gamma\Big\{\left[(\sigma_1\tilde{\rho})^{2}+(\sigma_2\tilde{\tau})^{-1}\right]\| v^{(\tilde{k})}\|^2_{2,\ Q(\tilde{\rho},\ \tilde{\tau})}+ \\ +\mu^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}(\tilde{k}, \tilde{\rho}, \tilde{\tau})\Big\},\end{aligned} \tag{7.13}$$

где $\tilde{k}=\dfrac{k}{H}$.

Функция $v(\tilde{x}, \tilde{t})$ удовлетворяет условиям леммы 6.1. Возьмем в качестве диапазона $[M, M+N]$ изменения параметра $\tilde{k}$ отрезок $\left[\tilde{k}_0=\dfrac{k_0}{H},\ \tilde{k}_0+\dfrac{1}{2}\right]$. Тогда согласно этой лемме для величин

$$y_h = 4 \int\limits_{-\tilde{\tau}_h}^{0} \int\limits_{A_{\tilde{k}_h, \tilde{\rho}_h}(\tilde{t})} (v - \tilde{k}_h)^2 \, dx \, dt$$

и

$$z_h = \left( \int\limits_{-\tilde{\tau}_h}^{0} \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_{\tilde{k}_h, \tilde{\rho}_h}(\tilde{t}) \, d\tilde{t} \right)^{\frac{2}{r}}$$

справедлива система рекуррентных неравенств (6.14), (6.15). Из этой системы неравенств в силу леммы 5.7 следует, что $y_h$ и $z_h$ будут стремиться к нулю при $h \to \infty$, если $y_0$ и $z_0$ достаточно малы

$$y_0 \leqslant \lambda, \quad z_0 \leqslant \lambda^{\frac{1}{1+\varkappa}} \tag{7.14}$$

(выражение для $\lambda$ выписано в (5.20)).

Но в силу условия (7.10)

$$y_0 = 4 \int\limits_{-\theta}^{0} \int\limits_{A_{\tilde{k}_0, 1}} (v - \tilde{k}_0)^2 \, d\tilde{x} \, d\tilde{t} \leqslant \int\limits_{-\theta}^{0} \operatorname{mes} A_{\tilde{k}_0, 1}(\tilde{t}) \, d\tilde{t} = \\ = \rho_0^{-n-2} \operatorname{mes} Q_{\rho_0}(k_0) \leqslant \theta_1,$$

а $z_0 = \left( \int\limits_{-\theta}^{0} \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_{k_0, 1}(\tilde{t}) \, d\tilde{t} \right)^{\frac{2}{r}}$ согласно оценкам (7.9) и (7.10) не превосходит

$$\varkappa_n^{\frac{2}{q} - \frac{2}{r}} \theta_1^{\frac{2}{r}} \quad \text{при } r \geqslant q \text{ и } \quad \theta^{\frac{2}{r} - \frac{2}{q}} \theta_1^{\frac{2}{q}} \quad \text{при } r \leqslant q.$$

Ввиду этого мы удовлетворим условиям (7.14), взяв

$$\begin{aligned} \theta_1 &\leqslant \min\left(\lambda;\ \varkappa_n^{1 - \frac{r}{q}} \lambda^{\frac{r}{2(1+\varkappa)}}\right) \quad \text{при } r \geqslant q, \\ \theta_1 &\leqslant \min\left(\lambda;\ \theta^{1 - \frac{q}{r}} \lambda^{\frac{q}{2(1+\varkappa)}}\right) \quad \text{при } r \leqslant q. \end{aligned} \tag{7.15}$$

При таком выборе $\theta_1$ числа $y_h \to 0$ при $h \to \infty$. Но это и значит, что $\operatorname*{vrai\,max}\limits_{Q_{\rho_0/2}} u \leqslant k_0 + \frac{H}{2}$, т. е. (7.11) справедливо. Лемма 7.2 доказана.

Возьмем произвольный (стандартный) цилиндр $Q_{2\rho}=K_{2\rho}\times\times[t_0, t_0+4\theta\rho^2]\in Q_T$ и соосный ему цилиндр $Q_\rho$, имеющий с $Q_{2\rho}$ общую вершину. Обозначим

$$\mu_1=\max_{Q_{2\rho}} u, \quad \mu_2=\min_{Q_{2\rho}} u, \quad \omega=\mu_1-\mu_2.$$

Докажем справедливость следующей леммы.

Лемма 7.3. *Пусть $u(x, t)$ есть произвольный элемент $\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$. По любому $\theta_1>0$ можно указать $s=s(\theta_1)>0$ такое, что либо*

$$\omega=\operatorname{osc}\{u, Q_{2\rho}\}\leqslant 2^s\rho^{\frac{n\varkappa}{2}}, \tag{7.16}$$

*либо*

$$\operatorname{mes} Q_\rho\left(\mu_1-\frac{\omega}{2^s}\right)\leqslant\theta_1\rho^{n+2}, \tag{7.17}$$

*либо*

$$\operatorname{mes}\left\{(x, t)\in Q_\rho : u(x, t)<\mu_2+\frac{\omega}{2^s}\right\}\leqslant\theta_1\rho^{n+2}. \tag{7.18}$$

Пусть $\omega\geqslant 2^s\rho^{\frac{n\varkappa}{2}}$, где $s$ будет выбрано ниже. Очевидно, что имеет место хотя бы одно из неравенств:

$$\operatorname{mes} A_{\mu_1-\frac{\omega}{2}, \rho}(t_0+3\theta\rho^2)\leqslant\frac{1}{2}\varkappa_n\rho^n \tag{7.19}$$

или

$$\operatorname{mes}\left\{x\in K_\rho : u(x, t_0+3\theta\rho^2)<\mu_1-\frac{\omega}{2}\right\}\leqslant\frac{1}{2}\varkappa_n\rho^n. \tag{7.19$'$}$$

Пусть верно первое и тем самым неравенства

$$\operatorname{mes} A_{\mu_1-\frac{\omega}{2^r}, \rho}(t_0+3\theta\rho^2)\leqslant\frac{1}{2}\varkappa_n\rho^n, \qquad r=1, 2, \ldots, s-1.$$

Тогда все последующие рассуждения проведем с функцией $u(x, t)$. В противном случае мы рассмотрели бы функцию $-u(x, t)$. Обозначим $\max\limits_{Q_\rho} u$ через $\mu_1'$. Если $\mu_1'\leqslant\mu_1-\frac{\omega}{2^s}$, то $\operatorname{mes} Q_\rho\left(\mu_1-\frac{\omega}{2^s}\right)=0$ и (7.17) справедливо при любом $\theta_1$. Если же $\mu_1'>\mu_1-\frac{\omega}{2^s}$, то $H=\mu_1'-\left(\mu_1-\frac{\omega}{2^r}\right)\geqslant\frac{\omega}{2^r}-\frac{\omega}{2^r}\geqslant\frac{\omega}{2^s}\geqslant\rho^{\frac{n\varkappa}{2}}$ при любом $r\leqslant s-1$, и поэтому к $u(x, t)$

применима лемма 7.1 в цилиндре $Q_\rho$ для уровня $k=\mu_1-\frac{\omega}{2^r}$, если только $\frac{\omega}{2^r}\leqslant\delta$. Она гарантирует

$$\operatorname{mes}\left[K_\rho\setminus A_{\mu_1-\frac{\omega}{2^r}+\frac{3}{4}H,\,\rho}(t)\right]\geqslant\frac{1}{18}\varkappa_n\rho^n$$

для

$$t\in[t_0+3\theta\rho^2,\ t_0+4\theta\rho^2]$$

и тем более

$$\operatorname{mes}\left[K_\rho\setminus A_{\mu_1-\frac{\omega}{2^{r+2}},\,\rho}(t)\right]\geqslant\frac{1}{18}\varkappa_n\rho^n,\qquad t\in[t_0+3\theta\rho^2,\ t_0+4\theta\rho^2],\tag{7.20}$$

ибо $\mu_1-\frac{\omega}{2^r}+\frac{3}{4}H\leqslant\mu_1-\frac{\omega}{2^r}+\frac{3}{4}\frac{\omega}{2^r}=\mu_1-\frac{\omega}{2^{r+2}}$. Неравенства (7.20) имеют место для значений $r\in\left[\lg_2\frac{\omega}{\delta},\ s-1\right]$. Мы будем брать $r$ из интервала $\left[\left[\frac{2M}{\delta}\right]+1,\ s-1\right]\subset\left[\lg_2\frac{\omega}{\delta},\ s-1\right]$. (Символ $[a]$ означает, как принято, наибольшее из целых чисел, не превосходящих числа $a$.) Применим неравенство (5.5) к функции $u(x, t)$ и уровням $l=\mu_1-\frac{\omega}{2^{p+1}}$, $k=\mu_1-\frac{\omega}{2^p}$ при $t\in[t_0+3\theta\rho^2,\ t_0+4\theta\rho^2]$ и $p\in\left[\left[\frac{2M}{\delta}\right]+3,\ s+1\right]$ и учтем (7.20). Это даст

$$\frac{\omega}{2^{p+1}}\operatorname{mes}A_{\mu_1-\frac{\omega}{2^{p+1}},\,\rho}(t)\leqslant 18\beta\varkappa_n^{-1}\rho\int\limits_{\mathcal{D}_p(t)}|u_x(x, t)|\,dx,$$

где

$$\mathcal{D}_p(t)=A_{\mu_1-\frac{\omega}{2^p},\,\rho}(t)\setminus A_{\mu_1-\frac{\omega}{2^{p+1}},\,\rho}(t).$$

Проинтегрируем обе части этого неравенства по $t$ в пределах, указанных в (7.20), затем обе части возведем в квадрат и после этого правую часть оценим по неравенству Коши:

$$\left(\frac{\omega}{2^{p+1}}\right)^2 \operatorname{mes}^2 Q_\rho\left(\mu_1 - \frac{\omega}{2^{p+1}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(18\varkappa_n^{-1}\beta\right)^2 \rho^2 \int\limits_{t_0+3\theta\rho^2}^{t_0+4\theta\rho^2} \int\limits_{\mathscr{D}_p(t)} u_x^2\,dx\,dt \int\limits_{t_0+3\theta\rho^2}^{t_0+4\theta\rho^2} \operatorname{mes}\mathscr{D}_p(t)\,dt. \quad (7.21)$$

Для оценки первого интеграла правой части используем неравенство (7.2), выбирая за $Q(\rho, \tau)$ цилиндр $Q_{2\rho}$, а за $Q(\rho - \sigma_1\rho, \tau - \sigma_2\tau)$ цилиндр $Q_\rho$. Оно после очевидных огрублений дает

$$\int\limits_{t_0+3\theta\rho^2}^{t_0+4\theta\rho^2} \int\limits_{\mathscr{D}_p(t)} u_x^2\,dx\,dt \leqslant \left| u^{\left(\mu_1 - \frac{\omega}{2^p}\right)} \right|_{Q_\rho}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \gamma\left\{\left[\rho^{-2} + (3\theta\rho^2)^{-1}\right]\left(\frac{\omega}{2^p}\right)^2 \varkappa_n (2\rho)^n\, 4\theta\rho^2 + \right.$$
$$\left. + \left[[\varkappa_n(2\rho)^n]^{\frac{r}{q}}\, 4\theta\rho^2\right]^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}\right\}. \quad (7.22)$$

По предположению $\omega \geqslant 2^s\rho^{\frac{n\varkappa}{2}}$, так что для $p \in \left[\left[\frac{2M}{\delta}\right] + 3,\ s+1\right]$ из (7.21) и (7.22) следует

$$\operatorname{mes}^2 Q_\rho\left(\mu_1 - \frac{\omega}{2^{p+1}}\right) \leqslant c\rho^{n+2} \int\limits_{t_0+3\theta\rho^2}^{t_0+4\theta\rho^2} \operatorname{mes}\mathscr{D}_p(t)\,dt, \quad (7.23)$$

где

$$c = \left(18\varkappa_n^{-1}\beta\right)^2 \gamma\left\{\left(\theta + \frac{1}{3}\right) 2^{n+2}\varkappa_n + \left(2^n\varkappa_n^{\frac{2}{q}}\theta^{\frac{2}{r}}\right)^{1+\varkappa}\right\}.$$

Просуммируем неравенства (7.23) по $p$ от $\left[\frac{2M}{\delta}\right] + 3$ до $s - 1$, заменив предварительно левые части на $\operatorname{mes}^2 Q_\rho\left(\mu_1 - \frac{\omega}{2^s}\right)$. Это даст неравенство

$$\left(s - \left[\frac{2M}{\delta}\right] - 3\right)\operatorname{mes}^2 Q_\rho\left(\mu_1 - \frac{\omega}{2^s}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c\rho^{n+2} \int\limits_{t_0+3\theta\rho^2}^{t_0+4\theta\rho^2} \operatorname{mes} K_\rho\,dt = c\theta\varkappa_n\rho^{2n+4},$$

из которого видно, что при

$$s=\left[\frac{2M}{\delta}\right]+4+\left[\frac{c\theta\varkappa_n}{\theta_1^2}\right] \tag{7.24}$$

мы будем иметь (7.17). Лемма доказана.

Замечание к лемме 7.3. В случае, когда в $\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ $\delta=\infty$, т. е. функции $u(x, t)$ удовлетворяют неравенствам (7.1), (7.2) при всех $k$, $s=4+\left[\frac{c\theta\varkappa_n}{\theta_1^2}\right]$ и не зависит тем самым от $M$.

Из лемм 7.2 и 7.3 вытекает следующее предложение.

Лемма 7.4. *Для любого элемента* $u(x, t)$ *из* $\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ *и любых стандартных соосных цилиндров* $Q_{\frac{\rho}{2}}$ *и* $Q_{2\rho}\in Q_T$, *имеющих общую вершину, справедливо по крайней мере одно из двух: или*

$$\operatorname{osc}\left\{u;\ Q_{\frac{\rho}{2}}\right\}\leqslant 2^s\rho^{\frac{n\varkappa}{2}} \tag{7.25}$$

*или*

$$\operatorname{osc}\left\{u;\ Q_{\frac{\rho}{2}}\right\}\leqslant\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\operatorname{osc}\{u;\ Q_{2\rho}\}, \tag{7.26}$$

*где* $s$ — *число* $s(\theta_1)$ *из леммы* 7.3, *а* $\theta_1$ — *число* $\theta_1$ *из леммы* 7.2.

Напомним, что числа $\theta_1$ и $s=s(\theta_1)$ определяются только параметрами класса $\mathfrak{B}_2$.

Пусть $\theta_1$ — число, определенное в лемме 7.2, а $s=s(\theta_1)$ — число, определенное по $\theta_1$ в лемме 7.3. Предположим, что $\omega_1=\operatorname{osc}\left\{u;\ Q_{\frac{\rho}{2}}\right\}>2^s\rho^{\frac{n\varkappa}{2}}$. Тогда тем более $\omega=\operatorname{osc}\{u;\ Q_{2\rho}\}>$ $>2^s\rho^{\frac{n\varkappa}{2}}$.

В соответствии с леммой 7.3 это гарантирует справедливость неравенства (7.17) или (7.18). Рассмотрим один из случаев, когда выполняется соотношение (7.17) (второй рассматривается аналогично с заменой функции $u(x, t)$ на $-u(x, t)$). В силу леммы 7.2, примененной к функции $u(x, t)$ в $Q_\rho$ и уровню $k_0=\mu_1-\frac{\omega}{2^{s-1}}$, где $\mu_1=\max\limits_{Q_{2\rho}} u$, или $H=$

$$= \max_{Q_\rho} u - \left(\mu_1 - \frac{\omega}{2^{s-1}}\right) < \rho^{\frac{n\varkappa}{2}}, \quad \text{или} \quad \operatorname{mes} Q_{\frac{\rho}{2}}\left(k_0 + \frac{H}{2}\right) = 0.$$

(Заметим, что условие $k_0 \geqslant \operatorname{vrai}\max_{Q_\rho} u(x, t) - \delta$ леммы 7.2 выполнено.) Первое утверждение альтернативы гарантирует неравенство $\max_{Q_{\frac{\rho}{2}}} u \leqslant \mu_1 - \frac{\omega}{2^{s-1}} + \rho^{\frac{\varkappa n}{2}} \leqslant \mu_1 - \frac{\omega}{2^s}$, а тем самым и неравенство (7.26). Второе утверждение гарантирует

$$\max_{Q_{\frac{\rho}{2}}} u \leqslant \mu_1 - \frac{\omega}{2^{s-1}} + \frac{H}{2} =$$

$$= \mu_1 - \frac{\omega}{2^{s-1}} + \frac{1}{2}\left[\max_{Q_\rho} u - \left(\mu_1 - \frac{\omega}{2^{s-1}}\right)\right] \leqslant \mu_1 - \frac{\omega}{2^s}$$

и тем более (7.26). Лемма 7.4 доказана.

Из этой леммы и леммы 5.8 вытекает одно из главных утверждений о вложимости $\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ в $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$. Именно:

Теорема 7.1. *Пусть $u(x, t)$ — произвольная функция из $\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ и $Q_{\rho_0} = Q(\rho_0, \theta\rho_0^2)$ — цилиндр стандартного вида, принадлежащий $Q_T$. Тогда для любого $Q_\rho = Q(\rho, \theta\rho^2)$, соосного $Q_{\rho_0}$ и имеющего с ним общую вершину, колебание $u(x, t)$ в $Q_\rho$ оценивается так:*

$$\operatorname{osc}\{u, Q_\rho\} \leqslant c\rho^\alpha\rho_0^{-\alpha}, \tag{7.27}$$

*где*

$$\alpha = \min\left\{-\ln_4\left(1 - \frac{1}{2^s}\right);\ \frac{n\varkappa}{2}\right\}, \quad c = 4^\alpha \max\left\{2M,\ 2^s\rho_0^{\frac{n\varkappa}{2}}\right\},$$

*а числа $\theta$, $s = s(\theta_1)$ и $\theta_1$ определены в леммах 7.1—7.3. Число $\alpha$ при $\delta = \infty$ не зависит от $M$, а при $\delta < \infty$ есть монотонно убывающая функция $\frac{M}{\delta}$. Число $\theta$ во всех случаях не зависит от $M$. Таким образом, класс $\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ вкладывается в $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$, причем $\alpha$ не зависит от $M$ при $\delta = \infty$.*

Замечание к теореме 7.1. Если неравенства (7.1) и (7.2) справедливы лишь при $\tau \leqslant \theta_2\rho^2 \leqslant \theta_2\rho_0^2$, то неравенства (7.27) будут верны для $Q_\rho$ с $\rho \leqslant \rho_0$, причем вместо $\theta$ в определении $Q_\rho$ и в других местах надо взять $\theta' = \min\{\theta, \theta_2\}$.

Теорема 7.1 доказана полностью для размерностей $n \geqslant 2$. В случае $n = 1$ мы рассмотрели не все значения параметра $q$, допускаемые условиями (7.3). Именно, при доказательстве леммы 7.2 существенно использовалось предположение о том, что $q < \infty$, хотя в условиях 7.3 при $n = 1$ $q \in (2, \infty]$. Покажем, как надо изменить леммы 7.2 и 7.3 для того, чтобы доказательство годилось для всех $n \geqslant 1$ и всех значений $q$ и $r$ из (7.3).

Вместо леммы 7.2 нужно использовать следующее предложение.

Лемма 7.2′. *Если $u(x, t)$ удовлетворяет неравенствам* (7.2), *то существует такое* $\theta_1 > 0$, *что из неравенства*

$$\mu^{\frac{2}{r}}\left(k_0, \rho_0, \theta\rho_0^2\right) \leqslant \theta_1\rho_0^n \tag{7.28}$$

*для величины* $\mu\left(k_0, \rho_0, \theta\rho_0^2\right)$, *соответствующей цилиндру* $Q_{\rho_0}$ *леммы* 7.2, *следует* (7.11), *если только выполнено* (7.12) *и* $k_0 \geqslant \operatorname*{vrai\,max}_{Q_{\rho_0}} u(x, t) - \delta$.

Доказательство этой леммы основано на использовании тех же рекуррентных неравенств (6.14), (6.15), что и в лемме 7.2. Различие же состоит в том, что теперь малость величины $z_0$ гарантируется непосредственно условием (7.28)

$$z_0 \leqslant \theta_1,$$

в то время как малость $y_0$ выводится из (7.28) с помощью оценок (7.9):

$$y_0 \leqslant 4\begin{cases} \varkappa_n^{1-\frac{r}{q}}\theta_1^{\frac{r}{2}} & \text{при } r \leqslant q, \\ \theta^{1-\frac{q}{r}}\theta_1^{\frac{q}{2}} & \text{при } r \geqslant q. \end{cases}$$

Видно, что в отличие от леммы 7.2 неограниченное возрастание $q$ не представляет опасности для оценок $z_0$ и $y_0$. Лемму 7.3 следует заменить леммой 7.3′.

Лемма 7.3′. *Пусть* $u(x, t) \in \mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$. *По любому* $\theta_1 > 0$ *можно указать число* $s = s(\theta_1) > 0$ *такое, что если выполнено неравенство, обратное* (7.16), *то либо*

$$\mu^{\frac{2}{r}}\left(\mu_1 - \frac{\omega}{2^s}, \rho, \theta\rho^2\right) = \\ = \left[\int\limits_{t_0+3\theta\rho^2}^{t_0+4\theta\rho^2} \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_{\mu_1 - \frac{\omega}{2^s}, \rho}(t)\, dt\right]^{\frac{2}{r}} \leqslant \theta_1\rho^n, \tag{7.29}$$

*либо*

$$\left[\int\limits_{t_0+3\theta\rho^2}^{t_0+4\theta\rho^2} \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} \left\{x \in K_\rho:\ u(x, t) < \mu_2 + \frac{\omega}{2^s}\right\} dt\right]^{\frac{2}{r}} \leqslant \theta_1\rho^n. \tag{7.30}$$

*Здесь через* $\mu_1$, $\mu_2$, $\omega$ *обозначены те же величины, что и в лемме* 7.3.

Соотношения (7.9) показывают, что для $q < \infty$ утверждения леммы 7.3′ следуют из леммы 7.3. Неограниченным же $q$ может быть лишь при $n = 1$. Для этого случая, т. е. для $n = 1$, лемму 7.3′ докажем несколько иначе, минуя оценки (7.17) и (7.18). Именно, как и в лемме 7.3, без ограничения общности будем считать выполненным неравенство (7.19), а потому и (7.20).

Вместо неравенства (5.5) применим к функции $u(x, t)$ и уровням $l = \mu_1 - \frac{\omega}{2^{p+1}}$, $k = \mu_1 - \frac{\omega}{2^p}$ более сильное неравенство (5.6) с $\varepsilon_1 = \frac{r}{q}$, $\varepsilon_2 = 1$. При $q < \infty$ это возможно, и в силу предположения (7.20) дает

$$\frac{\omega}{2^{p+1}}\left(\frac{\operatorname{mes} A_{\mu_1 - \frac{\omega}{2^{p+1}}, \rho}(t)}{2\rho}\right)^{\frac{r}{q}} \leqslant 18 \int\limits_{\mathscr{D}_p(t)} |u_x(x, t)|\, dx. \tag{7.31}$$

Это же верно и при $q = \infty$, если условиться считать, что в случае $q = \infty$ величина $\operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_{k, \rho}(t)$ равна нулю при $\operatorname{mes} A_{k, \rho}(t) = 0$ и равна единице при $\operatorname{mes} A_{k, \rho}(t) > 0$.

Интегрируя неравенство (7.31) по $t$ от $t_0+3\theta\rho^2$ до $t_0+4\theta\rho^2$, получим

$$\frac{\omega}{2^{p+1}}\mu\left(\mu_1-\frac{\omega}{2^{p+1}},\ \rho,\ \theta\rho^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant 18(2\rho)^{-\frac{r}{q}}\int\limits_{t_0+3\theta\rho^2}^{t_0+4\theta\rho^2}\int\limits_{\mathscr{D}_p(t)}|u_x(x,\ t)|\,dx\,dt, \qquad (7.32)$$

причем величина $\mu(k,\ \rho,\ \theta\rho^2)$, стоящая в левой части, при $q=\infty$ равна $\operatorname{mes}\{t\in[t_0+3\theta\rho^2,\ t_0+4\theta\rho^2]:\operatorname{mes}A_{k,\rho}(t)>0\}$, что соответствует принятым с самого начала обозначениям.

Возводя обе части неравенства (7.32) в квадрат и продолжая те же рассуждения, что и в лемме 7.3, мы придем непосредственно к оценке (7.29), минуя оценку для $\operatorname{mes}Q_\rho\left(\mu_1-\frac{\omega}{2^{s+1}}\right)$; при этом $s$ надо взять равным

$$s=\left[\frac{2M}{\delta}+\theta_1^{-r}\gamma\theta 2^r\left(\theta+\frac{4}{3}+2^{\varkappa}\theta^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}\right)\right]+4.$$

Лемму 7.3′ можно считать доказанной. Это завершает доказательство теоремы 7.1.

Отметим одно следствие из доказанной теоремы.

Следствие 7.1. *Если функция $u(x,\ t)$ принадлежит классу $\mathfrak{B}_2(Q_T,\ M,\ \gamma,\ r,\ \delta,\ \varkappa)$, то для любого цилиндра $\overline{Q}(\rho,\ \rho^2)$, принадлежащего $Q_T$, верна оценка*

$$\int\limits_{Q(\rho,\ \rho^2)}u_x^2(x,\ t)\,dx\,dt\leqslant c_1\rho^{n+2\alpha}, \qquad (7.33)$$

*где постоянная $c_1$ определяется только параметрами класса $\mathfrak{B}_2$, $n$ и расстоянием от $Q(\rho,\ \rho^2)$ до $\Gamma_T$, а $\alpha$ то же, что и в (7.27).*

Справедливость этого утверждения вытекает из неравенств (7.2) и (7.27).

## § 8. Классы функций $\mathfrak{B}_2(Q_T\cup\Gamma',\ \ldots)$ и $\widehat{\mathfrak{B}}_2(Q_T\cup\Gamma',\ \ldots)$

Функции класса $\mathfrak{B}_2(Q_T,\ M,\ \gamma,\ r,\ \delta,\ \varkappa)$, вообще говоря, могут не быть гладкими вблизи границы $\Gamma_T$ цилиндра $Q_T$. Выделим из него два подкласса $\mathfrak{B}_2(Q_T\cup\Gamma',\ \ldots)$ и $\widehat{\mathfrak{B}}_2(Q_T\cup\Gamma',\ \ldots)$, где $\Gamma'$ — подобласть на поверхности $\Gamma_T\equiv S_T\cup\Gamma_0$, состоящая из $S'_T$ — части $S_T$ и $\Gamma'_0$ — части $\Gamma_0$. Элементы $u(x, t)$ этих подклассов, как будет доказано в данном параграфе, являются непрерывными (в смысле Гёльдера) функциями в $Q_T \cup \Gamma'$, если только $S'_T$ и $u(x, t)$ на $\Gamma'$ обладают некоторой регулярностью. Оказалось, что к $\mathfrak{B}_2(Q_T \cup \Gamma', \ldots)$ и $\hat{\mathfrak{B}}_2(Q_T \cup \Gamma', \ldots)$ принадлежат решения основных краевых задач для параболических уравнений.

*Класс* $\mathfrak{B}_2(Q_T \cup \Gamma', M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ *состоит из всех элементов* $u(x, t)$ *класса* $\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$, *для которых функции* $w(x, t) = \pm u(x, t)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\|w^{(k)}\|^2_{Q(\rho-\sigma_1\rho,\ \tau-\sigma_2\tau) \cap Q_T} \leqslant$$
$$\leqslant \gamma \left\{ \left[(\sigma_1\rho)^{-2} + (\sigma_2\tau)^{-1}\right] \|w^{(k)}\|^2_{2,\ Q(\rho,\ \tau) \cap Q_T} + \hat{\mu}^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}(k, \rho, \tau) \right\} \tag{8.1}$$

*для любых цилиндров* $Q(\rho, \tau)$, *не пересекающих* $\Gamma_T \setminus \Gamma'$. *В них все величины имеют тот же смысл, что и в* (7.2), *только числа* $k$ *подчинены дополнительному ограничению*

$$k \geqslant \max_{Q(\rho,\ \tau) \cap \Gamma'} w(x, t), \tag{8.2}$$

*а* $\hat{\mu}(k, \rho, \tau) = \int\limits_{\max\{0;\ t_0\}}^{t_0+\tau} \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_{k,\rho}(t)\, dt$, *где* $A_{k,\rho}(t)$ *есть множество точек* $x$ *из* $\Omega_\rho \equiv K_\rho \cap \Omega$, *в которых* $w(x, t) > k$.

Неравенства (8.1) совпадают с неравенствами (7.2), если функцию $w(x, t)$ считать продолженной на весь цилиндр $Q(\rho, \tau)$ так, что ее значения в $Q(\rho, \tau) \setminus Q(\rho, \tau) \cap Q_T$ не превосходят максимума $w(x, t)$ на $Q(\rho, \tau) \cap \Gamma'$. Для функций класса $\mathfrak{B}_2(Q_T \cup \Gamma', \ldots)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 8.1. *Пусть проекция* $S'_T$ *на* $S_0$*) *удовлетворяет условию* (A). *Тогда любой элемент* $u(x, t)$ *класса* $\mathfrak{B}_2(Q_T \cup \Gamma', M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$, *удовлетворяющий на* $\Gamma'$ *условию Гёльдера*:

$$\operatorname{osc}\{u;\ Q(\rho, \rho^2) \cap \Gamma'\} \leqslant c\rho^{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \tag{8.3}$$

---

*) Имеется в виду проектирование $S'_T$ на $S_0 = \{(x, t): x \in S, t = 0\}$ с помощью прямых, параллельных оси $t$.

*принадлежит* $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T \cup \Gamma')$, *причем* $\alpha > 0$ *определяется* $n$, *параметрами класса* $\mathfrak{B}_2$, *числами* $c$ *и* $\varepsilon$ *из* (8.3) *и* $a_0$, $\theta_0$ *из условия* (A). *При* $\delta = \infty$ *величина* $\alpha$ *не зависит от* $M$. *Норма* $|u|_{Q'}^{(\alpha)}$ *в любой области* $Q' \subset Q_T$, *отстоящей от* $\Gamma_T \setminus \Gamma'$ *на положительное расстояние* $d$, *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $d$ *и тех же величин, что и* $\alpha$.

Доказывается эта теорема так же, как и теорема 7.1. Небольшие видоизменения необходимы лишь в лемме 7.3. В этой лемме мы выбирали число $s = s(\theta_1)$, используя неравенства (7.2) и наличие хотя бы для одной функции $+u(x, t)$ или $-u(x, t)$ такого диапазона $\left[\mu_1 - \frac{\omega}{2^{r+2}}, \mu_1\right]$, $r \geqslant r_0$, вблизи ее максимума $\mu_1$, для которого справедливы неравенства

$$\operatorname{mes}\left[K_\rho \setminus A_{\mu_1 - \frac{\omega}{2^{r+2}}, \rho}(t)\right] \geqslant b\varkappa_n\rho^n, \quad t \in [t_0 + 3\theta\rho^2, t_0 + 4\theta\rho^2], \tag{8.4}$$

с какими-либо положительными постоянными $r_0$, $b$ и $\theta$, определяемыми известными нам параметрами $\Big($в лемме 7.3 $b = \frac{1}{18}$, $r_0 = \left[\frac{2M}{\delta}\right] + 1$, а $\theta$ выбрано в лемме 7.1$\Big)$.

Для приграничных цилиндров мы добьемся этого же нижеследующим образом. Разделим приграничные цилиндры $\overline{Q}_{2\rho} \equiv \overline{K}_{2\rho} \times [t_0, t_0 + 4\theta\rho^2]$ на два типа: первые не пересекаются с $S_T$, но пересекаются с $\Gamma_0'$, и вторые имеют пересечение с $S_T'$. Нетрудно понять, что для доказательства утверждений теоремы 8.1 достаточно рассмотреть из приграничных цилиндров $\overline{Q}_{2\rho}$ первого типа лишь те, для которых $t_0 + 3\theta\rho^2 \leqslant 0$, а второго типа — лишь те, оси которых лежат на $S_T'$. Возьмем приграничный цилиндр $\overline{Q}_{2\rho}$ с $\overline{K}_{2\rho} \subset \Omega$ и $t_0 + 3\theta\rho^2 \leqslant 0$. Предположим, что

$$\omega \equiv \operatorname{osc}\{u; Q_{2\rho}\} \geqslant 2^s\rho^{\varepsilon_1}, \tag{8.5}$$

где $\varepsilon_1 = \min\left\{\varepsilon, \frac{n\varkappa}{2}\right\}$, а число $s$ подлежит определению. Колебание функций $\pm u(x, 0)$ на $K_{2\rho}$ в силу (8.3) меньше $\frac{\omega}{4}$, если мы будем считать $\rho \leqslant 1$, а число $s$ подчиним условию

$$2^s \geqslant 2^{2+\varepsilon} c. \tag{8.6}$$

Ввиду этого по крайней мере для одной из функций $+u(x, t)$ или $-u(x, t)$ диапазон $\left[\mu_1 - \frac{\omega}{4}, \mu_1\right]$ вблизи ее максимума $\mu_1$ в $Q_{2\rho}$ будет свободен от ее значений на $K_{2\rho}$ при $t=0$. Пусть это имеет место, например, для функции $u(x, t)$, т. е. пусть

$$u(x, 0) \leqslant \mu_1 - \frac{\omega}{4}, \qquad x \in K_{2\rho}. \tag{8.7}$$

Тогда дальнейшие рассуждения будем проводить с функцией $u(x, t)$ и уровнем $k \geqslant \mu_1 - \frac{\omega}{4}$, считая $u(x, t)$ продолженной на область отрицательных значений $t$ так, что для них $u(x, t) \leqslant \mu_1 - \frac{\omega}{4}$. Все они базируются на неравенствах (8.1), которые, как отмечалось выше, для $u(x, t)$ и $k \geqslant \mu_1 - \frac{\omega}{4}$ совпадают с (7.2), и на лемме 7.1, выведенной из неравенства (7.1). Но для $u(x, t)$ и $k \geqslant \mu_1 - \frac{\omega}{4}$ неравенства (7.1) в $Q_\rho = K_\rho \times [t_0 + 3\theta\rho^2, t_0 + 4\theta\rho^2]$ являются следствиями неравенств (8.2) (действительно, неравенства (8.2), примененные, например, к цилиндрам $Q_\rho$ и $K_\rho \times [t_0 + 3\theta\rho^2 - \rho^2, t_0 + 4\theta\rho^2]$, дают (7.1) для $Q_\rho$, правда, с $\gamma$, в два раза превышающей прежнюю), и потому для $u(x, t)$ и $k \geqslant \mu_1 - \frac{\omega}{4}$ в $Q_\rho$ справедливо утверждение леммы 7.1, гарантирующее неравенства (8.4). Значение $\theta$ можно взять таким же, как оно было фиксировано после леммы 7.1. Все дальнейшие рассуждения и результаты такие же, как в лемме 7.3. Отличие имеется лишь количественное: в значении самого $s = s(\theta_1)$, которое на этот раз зависит от $c$ и $\varepsilon$ из (8.3) (см. условие (8.6) на $s$), и в альтернативной посылке (7.16), которая заменяется следующей:

$$\omega = \operatorname{osc}\{u; Q_{2\rho}\} \leqslant 2^s \rho^{\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 = \min\left\{\frac{n\varkappa}{2}, \varepsilon\right\}. \tag{8.7$'$}$$

Кроме того, считаем $\rho \leqslant 1$.

Лемма 7.2 применима к $u(x, t)$ и $k \geqslant \mu_1 - \frac{\omega}{4}$ в $Q_\rho$ без изменения. Из нее и леммы 7.3 следует лемма 7.4 с заменой в условии (7.25) $2^s\rho^{\frac{n\varkappa}{2}}$ на $2^s\rho^{\varepsilon_1}$. Лемма же 7.4 вместе с леммой 5.8 главы II гарантирует желаемую оценку колебаний функции $u(x, t)$ в приграничных цилиндрах первого типа. Для приграничных цилиндров второго типа рассуждения почти такие же, как для цилиндров первого типа. Правда, для них мы вообще не привлекаем лемму 7.1, а гарантируем неравенства (8.4) благодаря принадлежности центра $K_\rho$ границе $S$ и благодаря условию (A), которое дает

$$\operatorname{mes}\left[K_\rho \setminus A_{\mu_1-\frac{\omega}{4},\,\rho}(t)\right] \geqslant \operatorname{mes}\left[K_\rho \setminus \Omega_\rho\right] \geqslant \theta_0\varkappa_n\rho^n.$$

Так доказывается теорема 8.1. Введем следующий класс функций, используемый при исследовании решений второй краевой задачи.

*Класс* $\widehat{\mathfrak{B}}_2(Q_T \cup \Gamma', M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ *состоит из элементов* $u(x, t)$ *класса* $\mathfrak{B}_2(Q_T \cup \Gamma', M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$, *для которых выполняются неравенства* (8.1) *при всех* $k$, *удовлетворяющих условиям*

$$k \geqslant \max_{Q(\rho,\tau)\cap Q_T} w(x, t) - \delta \quad \text{и} \quad k \geqslant \max_{Q(\rho,\tau)\cap \Gamma_0'} w(x, t), \tag{8.8}$$

*и неравенства типа* (7.1)

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_0+\tau} \|w^{(k)}(x, t)\|^2_{2, K_{\rho-\sigma_1\rho}\cap\Omega} \leqslant \|w^{(k)}(x, t_0)\|^2_{2, K_\rho\cap\Omega} +$$
$$+\gamma\left[(\sigma_1\rho)^{-2}\|w^{(k)}\|^2_{2, Q(\rho,\tau)\cap Q_T} + \widehat{\mu}^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}(k, \rho, \tau)\right] \tag{8.9}$$

*при всех* $k$, *удовлетворяющих условиям*

$$k \geqslant \max_{Q(\rho,\tau)\cap Q_T} w(x, t) - \delta. \tag{8.10}$$

Предположим относительно $\Gamma' = S_T' \cup \Gamma_0'$ следующее. Пусть $S'$ есть проекция $S_T'$ на $S_0$, $\Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega$, а $K_\rho$ — шар с центром в произвольной точке $x_0 \in S'$ и с радиусом $\rho$, не превосходящим какого-либо фиксированного числа $\rho_0$ и расстояния от $x_0$ до $S \setminus S'$. Потребуем, чтобы существовали такие положительные постоянные $\beta_1$ и $\theta_2$, что

1) $\operatorname{mes}\Omega_\rho \geqslant \theta_2 \operatorname{mes} K_\rho$

и

2) для любой функции $u(x)$ из $W_2^1(\Omega_\rho)$ были справедливы неравенства вида (5.5)

$$(l-k)\operatorname{mes} A_{l,\rho} \leqslant \frac{\beta_1\rho^{n+1}}{\operatorname{mes}(\Omega_\rho \setminus A_{k,\rho})} \int\limits_{A_{k,\rho} \setminus A_{l,\rho}} |u_x|\,dx \qquad (8.11)$$

при произвольных числах $l$ и $k$, $l > k$. Как указывалось в § 5, неравенства (8.11) верны, например, для случаев, когда $\Omega_\rho$ — выпуклая область. Нетрудно показать, что свойства 1), 2) выполняются для областей, удовлетворяющих условиям, которые обычно накладываются при доказательстве теорем вложения (см. [55$_1$]). Для функций класса $\hat{\mathfrak{B}}_2(Q_T \cup \Gamma', \ldots)$ имеет место

Теорема 8.2. *Пусть функция $u(x, t)$ принадлежит $\hat{\mathfrak{B}}_2(Q_T \cup \Gamma', M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ и на $\Gamma_0'$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\varepsilon > 0$. Предположим, что для $S_T'$ выполнены сформулированные выше условия 1) и 2). Тогда $u(x, t)$ непрерывна по Гёльдеру в $Q_T \cup \Gamma'$ и для любой области $Q' \subset \overline{Q}_T$, отстоящей от $\Gamma_T \setminus \Gamma'$ на положительное расстояние $d$, норма $|u|_{Q'}^{\alpha}$ оценивается сверху постоянной $c$, определяемой лишь параметрами $M$, $\gamma$, $r$, $\delta$, $\varkappa$ класса $\hat{\mathfrak{B}}_2$, $d$, $\varepsilon$, нормой $|u(x, 0)|_{\Gamma_0'}^{\varepsilon}$ и постоянными $\rho_0$, $\beta_1$ и $\theta_2$ из условий 1), 2). Величина $\alpha > 0$ зависит от тех же величин, что и $c$, кроме $d$.*

Доказательство этой теоремы проводится так же, как доказательство теорем 7.1 и 8.1. Для приграничных цилиндров первого типа рассуждения совпадают с только что описанными при доказательстве теоремы 8.1. Для приграничных цилиндров второго типа рассуждения аналогичны тем, которые даны для внутренних цилиндров при доказательстве теоремы 7.1, надо только всюду вместо шаров и цилиндров брать их пересечения с $\Omega$ и $Q_T$ соответственно и в связи с этим в леммах 7.1 и 7.3 $\operatorname{mes} K_\rho = \varkappa_n\rho^n$ заменять на $\operatorname{mes}\Omega_\rho$. Единственными аналитическими неравенствами, на которых эта замена скажется, являются неравенства (3.7) и (5.5). Первое из них применялось выше при доказательстве леммы 6.1 и вытекающей из нее леммы 7.2 к функциям $u^{(k)}\zeta$ из $\overset{\circ}{V}_2(Q(\rho, \tau))$ (см. 6.16)). В данном случае для приграничных цилиндров функции $u^{(k)}\zeta$ не обращаются в нуль на всей боковой поверхности области $Q(\rho, \tau) \cap Q_T$. Ввиду этого вместо неравенства (3.7) следует воспользоваться аналогичным неравенством (3.9), справедливым для любой функции из $V_2(Q_T)$. Так как для рассматриваемых в лемме 7.2 областей $\Omega_\rho \times (t_0, t_0+\theta\rho^2)$ в силу условия 1) $(\theta\rho^2)^{\frac{n}{2}} \operatorname{mes}^{-1}\Omega_\rho \leqslant \theta^{\frac{n}{2}}\theta_2^{-1}\varkappa_n^{-1}$, то для $\Omega_\rho \times (t_0, t_0+\theta\rho^2)$ можно считать постоянную $c$ в (3.9), не зависящей от $\rho$.

Что касается неравенства (5.5), то оно применялось к таким уровням $k$, для которых $\operatorname{mes}(K_\rho \setminus A_{k,\rho}) \geqslant b\rho^n$, $b>0$ (см. 7.20)), и несколько огрублялось до неравенства

$$(l-k)\operatorname{mes} A_{l,\rho} \leqslant \frac{\beta}{b}\rho \int\limits_{A_{k,\rho}\setminus A_{l,\rho}} |u_x|\,dx. \tag{8.12}$$

В данном случае вместо (5.5) следует использовать (8.11), причем при таких уровнях $k$, для которых $\operatorname{mes}(\Omega_\rho \setminus A_{k,\rho}) \geqslant b \operatorname{mes}\Omega_\rho$. Это в силу условия 1) даст неравенство вида (8.12). В остальном доказательство теоремы 8.3 проводится так же, как доказательство теорем 7.1 и 8.1.

Сделаем еще одно полезное для дальнейшего замечание.

Замечание 8.1. Принадлежность функции $u(x, t)$ к тому или иному классу $\mathfrak{B}_2$ следует из того, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет неравенствам (7.5) с указанными там функциями $\zeta(x, t)$ для таких расположений цилиндров $Q(\rho, \tau)$ и таких уровней $k$, которые требуются в определении класса $\mathfrak{B}_2$. При этом, если $Q(\rho, \tau)$ пересекается с $\Gamma_T$, то все интегралы, входящие в (7.5), считаются распространенными на пересечения указанных в (7.5) областей с $Q_T$, тогда как функция $\zeta(x, t)$ по-прежнему обязана обращаться в нуль лишь на боковой поверхности и нижнем основании $Q(\rho, \tau)$ (а не $Q(\rho, \tau) \cap Q_T$!). Легко видеть, что из таких неравенств (7.5) следуют неравенства, входящие в определение различных классов $\mathfrak{B}_2$.

Лемма 8.1. *Пусть*

$$u(x, t) \in V_2^{1,0}(Q_T), \quad \operatorname*{vrai\,max}_{Q_T} |u| \leqslant M,$$

*и функции* $w(x, t) = \pm u(x, t)$ *удовлетворяют неравенствам* (7.5) *для любого* $Q(\rho, \tau)$, *не пересекающегося с* $\Gamma_T \setminus \Gamma'$

*при произвольных значениях $k$, удовлетворяющих неравенству $k \geqslant \operatorname*{vrai\,max}_{Q(\rho,\tau)\cap Q_T} w - \delta$. При этом считается, что все интегралы в (7.5) распространены лишь на пересечении указанных в (7.5) областей с $Q_T$, а числа $\varkappa > 0$, $r$ и $q$ подчиняются ограничениям (7.3). Пусть, кроме того, $\Gamma'$ удовлетворяет условиям теоремы 8.2 и для любого $K_\rho$*

$$\int\limits_{K_\rho \cap \Gamma_0'} u_x^2(x,\ 0)\,dx \leqslant c\rho^{n-2+2\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0. \tag{8.13}$$

*Тогда для произвольного цилиндра $Q_\rho = K_\rho \times (t_0,\ t_0+\rho^2)$, отстоящего от $\Gamma_T \setminus \Gamma'$ на положительное расстояние $d$, справедлива оценка*

$$\int\limits_{Q_\rho \cap Q_T} u_x^2\,dx\,dt \leqslant c_1\rho^{n+2\alpha}, \tag{8.14}$$

*где постоянные $c_1$ и $\alpha > 0$ определяются $n$, $M$, $\delta$, числами $\gamma_1$, $\nu$, $q$, $r$ и $\varkappa$ из (7.5), $c$ и $\varepsilon$ из (8.13) и свойствами $\Gamma'$, а $c_1$ зависит еще и от $d$.*

Доказывается неравенство (8.14) так же, как аналогичное неравенство (7.33), надо лишь для цилиндров, пересекающих плоскость $\{t=0\}$, использовать вместо (7.2) непосредственно неравенства (7.5) с функцией $\zeta = \zeta(x)$, равной нулю вне шара $K_{\rho_1}$, концентрического шару $K_\rho$.

## § 9. Классы функций $\mathfrak{B}_2^{N_1}$

При исследовании квазилинейных уравнений общего, недивергентного вида, а также при исследовании систем уравнений мы встретимся с необходимостью дальнейшего расширения классов $\mathfrak{B}_2$.

Будем говорить, что вектор-функция $\mathbf{u}(x,t) = (u^1(x,t), \ldots$ $\ldots, u^N(x,\ t))$, определенная и измеримая на $Q_T$, принадлежит классу $\mathfrak{B}_2^{N_1}(Q_T,\ M_1,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \gamma,\ r,\ \delta,\ \varkappa)$, если для нее можно построить $N_1$ функций $\varphi^1(u^1, \ldots, u^N), \ldots, \varphi^{N_1}(u^1, \ldots, u^N)$, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в области $\left\{|\mathbf{u}| \equiv \sqrt{\sum_{k=1}^{N}(u^k)^2} \leqslant \operatorname*{vrai\,max}_{Q_T}|\mathbf{u}(x,\ t)|\right\}$ и таких, что функции $w^l(x, t) = \varphi^l(u^1(x, t), \ldots, u^N(x, t))$, $l = 1, \ldots, N_1$, обладают следующими свойствами:

1) $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T} |w^l(x, t)| \leqslant M_1$ и $w^l \in V_2^{1,0}(Q_T)$.

2) Для любого цилиндра $Q = K_{2\rho} \times [t_0, t_0 + \tau] \subset Q_T$ и любого $t_1 \in (t_0, t_0 + \tau)$ найдется номер $p$, для которого

$$\operatorname{osc}\{w^p(x, t);\ Q\} \geqslant \delta_1 \max_{i=1, \ldots, N} \operatorname{osc}\{u^i(x, t);\ Q\} \tag{9.1}$$

и

$$\operatorname{mes}\{x \in K_\rho:\ w^p(x, t_1) \leqslant \operatorname{vrai}\max_Q w^p(x, t) - \\ - \delta_2 \operatorname{osc}\{w^p(x, t);\ Q\}\} \geqslant (1 - \delta_3)\varkappa_n \rho^n, \tag{9.2}$$

где $K_\rho$ — шар, концентрический шару $K_{2\rho}$, а $\delta_i$, $i = 1, 2, 3$, — фиксированные положительные числа, из которых $\delta_2$ и $\delta_3$ меньше единицы.

3) Для каждой из функций $w = w^l(x, t)$, $l = 1, \ldots, N_1$, выполняются неравенства (7.1) и (7.2) при произвольных $Q(\rho, \tau) \subset Q_T$ и $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, 1)$ и $k$, удовлетворяющих неравенству (7.4). Так же как и в § 7, $\mu(k, \rho, \tau) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \operatorname{mes}^{\frac{r}{q}} A_{k,\rho}(t)\,dt$, $A_{k,\rho}(t)$ — множество точек $x$ из $K_\rho$, в которых $w(x, t) > k$; $M$, $\gamma$, $q$, $r$, $\delta$, $\varkappa$ — фиксированные положительные числа, причем $q$ и $r$ удовлетворяют условиям (7.3). При $q = \infty$

$$\mu(k, \rho, \tau) = \operatorname{mes}\{t \in [t_0, t_0 + \tau]:\ \operatorname{mes} A_{k,\rho}(t) > 0\}.$$

Так же как и в § 7, можно считать, что неравенства (7.1), (7.2) выполняются лишь при $\rho \leqslant \rho_0$, $\tau \leqslant \tau_0$, где $\rho_0$ и $\tau_0$ — фиксированные числа. Нетрудно видеть, что класс функций $\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ является классом $\mathfrak{B}_2^{N_1}(Q_T, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, r, \delta, \varkappa)$, для которого $\varphi^1(u) = u$, $\varphi^2(u) = -u$, $w^1(x, t) = u(x, t)$, $w^2(x, t) = -u(x, t)$, $N_1 = 2$, $M_1 = M$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \delta_3 = \frac{1}{2}$, а $\gamma$, $\delta$, $r$ и $\varkappa$ те же, что и для $\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, r, \delta, \varkappa)$.

Мы докажем, что функции $\mathbf{u}(x, t)$ классов $\mathfrak{B}_2^{N_1}$ принадлежат $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$. Именно, верна следующая

Теорема 9.1. *Пусть* $\mathbf{u}(x, t)=(u^1, \ldots, u^N)$ — *произвольная функция класса* $\mathfrak{B}_2^{N_1}(Q_T, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ *и* $Q_{\rho_0}=Q(\rho_0, \theta\rho_0^2)$ — *цилиндр, принадлежащий* $Q_T$. *Тогда для любого цилиндра* $Q_\rho$, *соосного с* $Q_{\rho_0}$ *и имеющего с ним общую вершину, колебание* $u^l(x, t)$ в $Q_\rho$ *оценивается так:*

$$\operatorname{osc}\{u^l;\ Q_\rho\} \leqslant c\rho_0^{-\alpha}\rho^\alpha, \quad l=1, \ldots, N, \tag{9.3}$$

*где*

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{N_1}\min\left\{-\lg_4\left(1-\frac{1}{2^s}\right);\ \frac{n\varkappa}{2}\right\}, \\ c &= \frac{4^{\alpha(N_1+1)}}{\delta_1}\max\left\{2^{2\alpha N_1+1}M_1;\ 2^s\rho_0\frac{n\varkappa}{2}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

*число* $\theta=\theta\left(\frac{\sqrt{\delta_3}+1}{2}\right)$ *взято из леммы* 7.1, *а число* $s$ *определено ниже в лемме* 9.2.

*Число* $\alpha$ *при* $\delta=\infty$ *не зависит от* $M_1$, *а при* $\delta<\infty$ *есть убывающая функция* $M_1\delta^{-1}$.

Доказательство этой теоремы, так же как и теоремы 7.1, опирается на леммы 7.1—7.4. Лемма 7.1 справедлива для любой функции $w^l(x, t)$, $l=1, \ldots, N_1$, ибо $w^l$ удовлетворяют неравенствам (7.1). Фиксируем в лемме (7.1) число $\xi=\frac{\sqrt{\delta_3}+1}{2}$ и соответствующие этому $\xi$ значения $\theta=\theta(\xi)$ и $b=b(\xi)$ и будем рассматривать стандартные цилиндры $Q_\rho=\{|x-x_0|<\rho,\ \ t_0<t<t_0+\theta\rho^2\}$. Для каждой из $w^l(x, t)$, $l=1, \ldots, N_1$, будет верна и лемма 7.2, так как $w^l$ удовлетворяют неравенствам (7.2). Иначе обстоит дело с леммой 7.3. Ее утверждения могут быть неверны для любой функции $w^l$, ибо мы не предположили на этот раз, что вместе с $w^l$ неравенствам (7.2) удовлетворяет и функция $-w^l$, и потому не в праве считать выполненным неравенство (7.19) (или (7.19′)), которое было отправной точкой для вывода оценки (7.17). Вместо (7.19) нам известно неравенство (9.2), но не для всех $w^l$, а лишь для $w^l$ со специальным номером $l=p$. Именно, для $w^l$ с этим номером $l=p$ верна

Лемма 9.1. *Возьмем произвольную функцию* $\mathbf{u}(x, t)$ *из* $\mathfrak{B}_2^{N_1}(Q_T, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ *и соответствующие ей функции* $w^l(x, t)$, $l=1, \ldots, N_1$. *По любому* $\theta_1>0$ *можно указать* $s=s(\theta_1)>0$ *такое, что для любого* *цилиндра* $Q_{2\rho}=K_{2\rho}\times(t_0, t_0+4\theta\rho^2)\subset Q_T$ *и* $t_1=t_0+3\theta\rho^2$ *и соответствующей ему по условию* 2) *функции* $w^p(x, t)$ *имеет место по крайней мере одно из двух неравенств: или*

$$\omega=\operatorname{osc}\{w^p;\ Q_{2\rho}\}\leqslant 2^s\rho^{-\frac{\varkappa n}{2}}, \tag{9.5}$$

*или*

$$\operatorname{mes} Q_\rho\left(\mu_1-\frac{\omega}{2^s}\right)\leqslant \theta_1\rho^{n+2}, \tag{9.6}$$

*где* $\mu_1=\operatorname*{vrai\,max}_{Q_{2\rho}} w^p$, *а* $Q_\rho=K_\rho\times[t_0+3\theta\rho^2,\ t_0+4\theta\rho^2]$ — *соосный с* $Q_{2\rho}$ *цилиндр. Число* $s$ *определяется параметрами класса* $\mathfrak{B}_2^{N_1}$, *а при* $\delta=\infty$ *не зависит от* $M_1$.

Доказательство этой леммы то же, что и леммы 7.3, надо только вместо неравенства (7.19) использовать вытекающее из (9.2) неравенство

$$\operatorname{mes} A_{\mu_1-\delta_2\omega}(t_0+3\theta\rho^2)\leqslant \delta_3\varkappa_n\rho^n. \tag{9.7}$$

Обратимся к последней из лемм — лемме 7.4, являющейся непосредственным следствием из лемм 7.1—7.4. Она примет следующий вид:

Лемма 9.2. *Пусть* $\mathbf{u}(x, t)$ — *произвольный элемент*

$$\mathfrak{B}_2^{N_1}(Q_T, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, r, \delta, \varkappa) \text{ и } w^l(x, t),\quad l=1, \ldots, N_1,$$

— *соответствующие* $\mathbf{u}(x, t)$ *функции. Для любых стандартных соосных цилиндров* $Q_{\rho/2}$ *и* $Q_{2\rho}\subset Q_T$, *имеющих общую вершину, и функции* $w^p(x, t)$, *которая выделяется условием* 2) *для цилиндра* $Q_{2\rho}$ *и* $t_1=t_0+3\theta\rho^2$, *справедливо по крайней мере одно из двух: или*

$$\operatorname{osc}\{w^p;\ Q_{\rho/2}\}\leqslant 2^s\rho^{-\frac{n\varkappa}{2}},$$

*или*

$$\operatorname{osc}\{w^p;\ Q_{\rho/2}\}\leqslant\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\operatorname{osc}\{w^p,\ Q_{2\rho}\},$$

*где* $s$ — *число* $s(\theta_1)$ *из леммы* 9.1, *а число* $\theta_1$ *взято из леммы* 7.2. *Числа* $\theta_1$ *и* $s(\theta_1)$ *определяются только параметрами класса* $\mathfrak{B}_2^{N_1}$.

Из этой леммы и леммы 5.9 следует теорема 9.1. Она будет использована для доказательства гладкости производных $u_{x_i}$ от решений $u(x, t)$ общих квазилинейных уравнений и гладкости решений (и их производных) систем линейных и квазилинейных уравнений, рассмотренных в последней главе, во внутренних точках области их определения. Для исследования гладкости всех этих функций вблизи границы $Q_T$ нам потребуются подклассы класса $\mathfrak{B}_2^{N_1}$, аналогичные подклассам $\mathfrak{B}_2(Q_T \cup \Gamma', \ldots)$ и $\widehat{\mathfrak{B}}_2(Q_T \cup \Gamma', \ldots)$ класса $\mathfrak{B}_2(Q_T, \ldots)$, введенным в предыдущем параграфе.

*Будем говорить, что* $\mathbf{u}(x, t)$ *принадлежит классу* $\mathfrak{B}_2^{N_1}(Q_T \cup \Gamma', M_1, \delta_1, \ldots, \delta_6, \gamma, r, \delta, \varkappa)$, *если* $\mathbf{u}(x, t) \in \mathfrak{B}_2^{N_1}(Q_T, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ *и если построенные по ней функции* $w^l(x, t)$, $l = 1, \ldots, N_1$, *обладают еще следующими свойствами*:

4) *они удовлетворяют неравенствам* (8.1)' *для всех* $Q(\rho, \tau)$ *и* $k$, *указанных при* (8.1);

5) *для любого приграничного цилиндра* $Q = K_\rho \times (t_0, t_0 + \tau)$ *с осью на* $S'_T$ $(S'_T = \Gamma' \cap S_T)$ *найдется такой номер* $p$, *что*

$$\operatorname{osc}\{w^p; Q \cap Q_T\} \geqslant \delta_4 \max_{l=1, \ldots, N} \operatorname{osc}\{u^l; Q \cap Q_T\}, \tag{9.8}$$

*и если*

$$\operatorname{osc}\{w^p; Q \cap Q_T\} \geqslant \delta_5 \max_{l=1, \ldots, N_1} \operatorname{osc}\{w^l; Q \cap \Gamma'\}, \tag{9.9}$$

*то*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q \cap \Gamma'} w^p \leqslant \operatorname*{vrai\,max}_{Q \cap Q_T} w^p - \delta_6 \operatorname{osc}\{w^p; Q \cap Q_T\}, \tag{9.10}$$

*причем* $\delta_4 > 0$, $\delta_5 > 1$, $\delta_6 \in (0, 1)$.

Для функций этого класса справедлива

Теорема 9.2. *Пусть проекция* $S'_T$ *на* $S_0$ *удовлетворяет условию* (A). *Тогда если* $\mathbf{u}(x, t) \in \mathfrak{B}_2^{N_1}(Q_T \cup \Gamma', M_1, \delta_1, \ldots, \delta_6, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ *и соответствующие ей функции* $w^l(x, t)$, $l = 1, \ldots, N_1$, *принадлежат* $H^{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}}(\Gamma')$, *то* $\mathbf{u}(x, t) \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T \cup \Gamma')$ *и для любой области* $Q' \subset Q_T$, *отстоящей от* $\Gamma \setminus \Gamma'$ *на положительное расстояние* $d$, *норма* $|u|_{Q'}^{\alpha}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от параметров класса* $\mathfrak{B}_2^{N_1}$, $\varepsilon$, *нормы* $|\mathbf{u}|_{\Gamma'}^{(\varepsilon)}$, *постоянных* $a_0$ *и* $\theta_0$ *из условия* (A) *и расстояния* $d$. *Показатель* $\alpha$

*определяется этими же величинами, за исключениями $d$; при $\delta=\infty$ он не зависит от $M_1$.*

Доказывается эта теорема по тому же плану, что и теорема 9.1. Необходимые изменения в рассуждениях, касающихся приграничных цилиндров, аналогичны изменениям, внесенным в доказательстве теоремы 8.1 по сравнению с теоремой 7.1. Теоремы 9.1 и 9.2 являются обобщениями теорем 7.1 и 8.1, в которых рассматривались простейшие варианты классов $\mathfrak{B}_2^{N_1}$ с $N_1=2$, $\varphi_1=u$ и $\varphi_2=-u$. Аналогичное обобщение можно делать и для теоремы 8.2, введя классы типа $\widehat{\mathfrak{B}}_2^{N_1}(Q_T \cup \Gamma',$ $\delta_1, \delta_2, \delta_3, r, \delta, \varkappa)$.

Сформулируем еще одну лемму, используемую в главах VI и VII.

Лемма 9.3. *Пусть* $\mathbf{u}(x, t)=(u^1(x, t), \ldots, u^N(x, t))$ — *произвольная вектор-функция из* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *с* $\max\limits_{i=1,\ldots,N} \operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T} |u^i|=M<\infty$. *Тогда функции*

$$\varphi_+^l(\mathbf{u}) \equiv \varphi_+^l(u^1, \ldots, u^N)=\lambda \frac{u^l+M}{2M}+\sum_{i=1}^N\left(\frac{u^i+M}{2M}\right)^2,$$

$$\varphi_-^l(\mathbf{u}) \equiv \varphi_-^l(u^1, \ldots, u^N)=\lambda \frac{M-u^l}{2M}+\sum_{i=1}^N\left(\frac{u^i+M}{2M}\right)^2,$$

$$l=1, \ldots, N,$$

*при* $\lambda>4N$ *обладают свойствами* 1), 2) *и* 5) *из определения классов* $\mathfrak{B}_2^{N_1}(Q_T \cup \Gamma', M_1, \delta_1, \ldots, \delta_6, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ *с* $M_1= =\lambda+N$, $N_1=2N$ *и некоторыми* $\delta_1, \ldots, \delta_6$. *При* $\lambda=10N$ *эти параметры принимают следующие значения:* $\delta_1=\frac{4N}{M}$, $\delta_2=\frac{1}{4}$, $\delta_3=\frac{1}{2}$, $\delta_4=\frac{4N}{M}$, $\delta_5=3$, $\delta_6=\frac{1}{24}$, $M_1=11N$, $N_1=2N$.

Доказательство этого предложения имеется в книге [I] (см. леммы 8.1 и 8.4 главы II). Единственное отличие состоит в том, что в [I] вместо цилиндров $Q$ рассматриваются шары $K_{2\rho}$, но оно несущественно.

ГЛАВА III

# ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Настоящая глава и глава IV посвящены линейным уравнениям, и прежде всего вопросам разрешимости основных краевых задач для них. В главе III изучаются уравнения с разрывными коэффициентами. Это объясняется тем, что наиболее просто теоремы существования устанавливаются в классах обобщенных решений, имеющих лишь производные первого порядка $u_x$. Но для таких разрешимостей нет надобности предполагать коэффициенты уравнений гладкими. Ввиду этого случай разрывных коэффициентов изучается первым, причем коэффициенты предполагаются настолько плохими, насколько это допускается теоремой единственности (см. § 3 главы I). Свойства коэффициентов и свободных членов характеризуются их принадлежностью к пространствам $L_{q,\,r}(Q_T)$ с теми или иными $q$ и $r$.

С помощью метода Галёркина устанавливается разрешимость краевых задач в $V_2(Q_T)$, а затем показывается, что любое обобщенное решение из $V_2(Q_T)$ принадлежит $V_2^{1,\,\frac{1}{2}}(Q_T)$.

При несколько иной форме условий на часть коэффициентов и свободных членов уравнений обобщенные решения из $V_2(Q_T)$ принадлежат также $W_2^{1,\,\frac{1}{2}}(Q_T)$.

Результаты §§ 1—5 без труда переносятся на так называемые сильно параболические системы (см. их определение в [$33_8$]), частным случаем которых является одно параболическое уравнение высокого порядка.

После доказательства разрешимости краевых задач в $V_2^{1,\,\frac{1}{2}}(Q_T)$ (§§ 1—5) исследуется постепенное повышение гладкости решений при улучшении свойств известных в задаче функций, причем внутренние оценки даются для обобщенных решений уравнений, а оценки вплоть до границы — для обобщенных решений краевых задач (§§ 6—12). Доказанные в этих параграфах зависимости являются точными (см. примеры § 3 главы I). В § 12 результаты главы III увязываются с результатами главы IV, которые выводятся без каких-либо ссылок на главу III. Параграфы 14—18 посвящены описанию других известных способов доказательства разрешимости основных краевых задач. В § 13 показывается, что задачи дифракции (в которых в общем случае имеется несколько разнородных сред) являются частным случаем задач на разыскание обобщенных решений из $V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T)$, рассмотренных в данной главе.

## § 1. Постановка задачи. Обобщенные решения

Предметом изучения данной главы являются линейные уравнения

$$\mathcal{L}u \equiv u_t - \mathcal{M}u = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - f, \tag{1.1}$$

где

$$\mathcal{M}u = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x, t)\, u_{x_j} + a_i(x, t)\, u) - b_i(x, t)\, u_{x_i} - a(x, t)\, u,$$

с разрывными и, вообще говоря, недифференцируемыми и неограниченными коэффициентами, удовлетворяющими условию равномерной параболичности, именно:

$$\nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant a_{ij}(x, t)\, \xi_i \xi_j \leqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \nu,\ \mu = \mathrm{const} > 0. \tag{1.2}$$

В § 3 главы I мы обсудили вопрос о допустимых расширениях понятия решения для таких уравнений и краевых задач для них и выяснили, какие необходимо наложить ограничения на коэффициенты и свободные члены уравнений, чтобы можно было начать строить теорию таких обобщенных решений с сохранением основных черт, присущих параболическим уравнениям с гладкими коэффициентами и гладкими решениями. Здесь мы покажем, что никаких других ограничений для этого накладывать не надо.

Наиболее широкие из этих ограничений следующие*): коэффициенты $a_i$, $b_i$, $a$ суть измеримые функции с конечными нормами

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i^2;\ \sum_{i=1}^{n} b_i^2;\ a \right\|_{q,\,r,\,Q_T} \leqslant \mu_1, \tag{1.3}$$

в которых $q$ и $r$ суть произвольные числа, удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{r} + \dfrac{n}{2q} = 1, \\ q \in \left(\dfrac{n}{2},\ \infty\right],\quad r \in [1,\ \infty) \text{ при } n \geqq 2, \\ q \in [1,\ \infty],\ r \in [1,\ 2] \text{ при } n = 1 \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

(случай, когда в (1.3) $r = \infty$, а $q = n/2 + 2\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, содержится в (1.4), ибо $L_{q,\infty} \subset Ln/2 + \varepsilon,\ n/2\varepsilon + 1$ и показатели $q = n/2 + \varepsilon$, $r = n/2\varepsilon + 1$ удовлетворяют (1.4)), а свободные члены имеют конечные нормы

$$\|\mathbf{f}\|_{2,\,Q_T} \equiv \left( \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} f_i^2\, dx\, dt \right)^{1/2} \leqslant \mu_2,\quad \|f\|_{q_1,\,r_1,\,Q_T} \leqq \mu_2, \tag{1.5}$$

в которых

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{n}{2q_1} = 1 + \dfrac{n}{4}, & \\ q_1 \in \left[\dfrac{2n}{n+2},\ 2\right],\ r_1 \in [1,\ 2] & \text{при } n \geqq 3, \\ q_1 \in (1,\ 2],\ r_1 \in [1,\ 2) & \text{при } n = 2, \\ q_1 \in [1,\ 2],\ r_1 \in [1,\ 4/3] & \text{при } n = 1. \end{array}\right\} \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. Случаи, рассмотренные, в [33$_{14}$], содержатся здесь, ибо $L_{q,\infty}$ с $q > n/2$, при $n \geqslant 2$, вкладывается в $L_{\hat{q},\hat{r}}$, $\hat{q} = \frac{n}{2} + \varepsilon$, $\hat{\gamma} = \frac{n}{2\varepsilon} + 1$, $\varepsilon = q - \frac{n}{2} > 0$ и $\hat{q}$, $\hat{r}$ удовлетворяют условиям (1.4). В условиях (1.3) можно предпола-

*) Утверждения некоторых теорем остаются справедливыми и при условии, что показатели суммируемости для $b_i(x, t)$ равны значениям концов допустимых интервалов. Мы указываем эти случаи в замечаниях. Их доказательство не требует никаких новых средств, однако нарушает единообразие выкладок и зависимостей. Это нарушение связано с существом дела: для этих крайних случаев зависимости свойств решения от $b_i$ имеют иную форму.

гать, что $q$ и $r$ различны для разных коэффициентов. Однако мы будем считать их одинаковыми. Случай разных $q$ и $r$ рассматривается аналогично, и окончательные результаты те же. Кроме того, так как функции пространства $L_{q,\,r}(Q_T)$ принадлежат пространству $L_{q',\,r'}(Q_T)$ с $q' \leqslant q$, $r' \leqslant r$, то в условиях (1.4) и (1.6) можно было бы вместо равенств

$$\frac{1}{r}+\frac{n}{2q}=1, \quad \frac{2}{r_1}+\frac{n}{q_1}=\frac{n+4}{2}$$

писать неравенства

$$\frac{1}{r}+\frac{n}{2q}\leqslant 1, \quad \frac{2}{r_1}+\frac{n}{q_1}\leqslant\frac{n+4}{2}$$

и не ставить никаких верхних границ для выбора $q_1$ и $r_1$. Но ради удобства и единообразия записей всех соотношений нам удобнее считать один из параметров ($q$ и $r$) произвольно выбранным из указанного интервала, а другой — определенным по нему из равенств (1.4) и (1.6).

При выполнении условий (1.3) — (1.6), как будет доказано в §§ 4—5, основные краевые задачи для (1.1) однозначно разрешимы в классе $V_2(Q_T)$. Более того, при этих условиях любое решение из $V_2(Q_T)$ уравнения (1.1) оказывается обладающим некоторой дополнительной (по сравнению с произвольными элементами $V_2(Q_T)$) гладкостью по $t$, именно, оно принадлежит $V_2^{1,\,\frac{1}{2}}(Q_T)$.

Начнем с определений обобщенных решений уравнений (1.1) и первой краевой задачи для них, принадлежащих $V_2(Q_T)$, $V_2^{1,\,0}(Q_T)$ и $V^{1,\,\frac{1}{2}}(Q_T)$. В соответствии с общей установкой, описанной в § 3 главы I, назовем *обобщенным решением из $V_2(Q_T)$ уравнения* (1.1) функцию $u(x,\,t)$, принадлежащую $V_2(Q_T)$ и удовлетворяющую для почти всех $t_1 \in [0,\,T]$ тождеству

$$l(t_1;\,u,\,\eta)\equiv\int_\Omega u(x,\,t_1)\,\eta(x,\,t_1)\,dx-\int_0^{t_1}\int_\Omega u\eta_t\,dx\,dt+$$
$$+\int_0^{t_1}[\mathscr{L}_1(u,\,\eta)+\mathscr{L}_2(\hat{\mathrm{f}},\,\eta)]\,dt=0 \qquad (1.7)$$

при всех $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, равных нулю при $t=0$. Здесь и ниже мы используем сокращенные обозначения:

$$\mathscr{L}_1(u, \eta)=\int_\Omega \left[(a_{ij}u_{x_j}+a_iu)\eta_{x_i}+(b_iu_{x_i}+au)\eta\right]dx,$$

$$\mathscr{L}_2(\mathrm{f}, \eta)=\int_\Omega (f_i\eta_{x_i}+f\eta)dx. \tag{1.8}$$

Назовем *обобщенным решением из* $V_2(Q_T)$ *задачи*

$$\mathscr{L}u=\frac{\partial f_i}{\partial x_i}-f, \quad u|_{S_T}=0, \quad u|_{t=0}=\psi_0(x) \tag{1.9}$$

функцию $u(x, t)$ из $\overset{\circ}{V}_2(Q_T)$, удовлетворяющую для почти всех $t_1$ из $[0, T]$ тождеству

$$I(t_1; u, \eta)=\int_\Omega \psi_0(x)\eta(x, 0)\,dx \tag{1.10}$$

при всех $\eta$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$.

Проверим, что при выполнении условий (1.3)—(1.6) и $\psi_0\in L_2(\Omega)$ все входящие в эти тождества интегралы конечны для любых функций $u$ и $\eta$ из указанных классов. Это так в силу следующих оценок (см. неравенства (1.8), (3.4) главы II):

$$\int_{Q_T} |a_iu\eta_{x_i}|\,dx\,dt\leqslant \|\eta_x\|_{2, Q_T}\left\|\sum_i a_i^2\right\|_{q, r, Q_T}^{1/2}\|u\|_{\bar q, \bar r, Q_T}\leqslant$$
$$\leqslant \mu_1^{1/2}\beta\|\eta_x\|_{2, Q_T}|u|_{Q_T}; \tag{1.11}$$

$$\int_{Q_T} |b_iu_{x_i}\eta|\,dx\,dt\leqslant\left\|\sum_i b_i^2\right\|_{q, r, Q_T}^{1/2}\|u_x\|_{2, Q_T}\|\eta\|_{\bar q, \bar r, Q_T}\leqslant$$
$$\leqslant \mu_1^{1/2}\beta\|u_x\|_{2, Q_T}|\eta|_{Q_T}; \tag{1.12}$$

$$\int_{Q_T} |au\eta|\,dx\,dt\leqslant\|a\|_{q, r, Q_T}\|u\|_{\bar q, \bar r, Q_T}\|\eta\|_{\bar q, \bar r, Q_T}\leqslant$$
$$\leqslant \mu_1\beta^2|u|_{Q_T}|\eta|_{Q_T}; \tag{1.13}$$

$$\int_{Q_T} |f\eta|\,dx\,dt\leqslant\|f\|_{q_1, r_1, Q_T}\|\eta\|_{q_1', r_1', Q_T}\leqslant\beta\|f\|_{q_1, r_1, Q_T}|\eta|_{Q_T}. \tag{1.14}$$

Во всех этих неравенствах $q$ и $r$ связаны с $\bar{q}$ и $\bar{r}$ равенствами $q = \frac{\bar{q}}{\bar{q}-2}$, $r = \frac{\bar{r}}{\bar{r}-2}$, а $q_1$ и $r_1$ связаны с $q_1'$ и $r_1'$ равенствами $q_1' = \frac{q_1}{q_1-1}$, $r_1' = \frac{r_1}{r_1-1}$.

Остальные интегралы в (1.7) и (1.10) тоже, очевидно, существуют и конечны для любых $u$ и $\eta$ из указанных классов. Так что данные выше определения корректны. Заметим, что при этом допустимы и значения $r = \infty$, $q = \frac{n}{2}$ при $n \geqslant 3$.

Обобщенные решения из $V_2(Q_T)$ можно определить несколько иначе. Именно, $u(x, t)$ *есть обобщенное решение из* $V_2(Q_T)$ *уравнения* (1.1), если $u(x, t) \in V_2(Q_T)$ и удовлетворяет тождеству

$$I_0(u, \eta) \equiv -\int_{Q_T} u\eta_t \, dx\, dt + \int_0^T [\mathscr{L}_1(u, \eta) + \mathscr{L}_2(\hat{f}, \eta)]\, dt = 0 \tag{1.15}$$

при всех $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, равных нулю при $t = 0$ и $t = T$, и $u(x, t)$ *есть обобщенное решение из* $V_2(Q_T)$ *задачи* (1.9), если $u \in \overset{\circ}{V}_2(Q_T)$ и удовлетворяет тождеству

$$I_0(u, \eta) = \int_{\Omega} \psi_0(x)\, \eta(x, 0)\, dx \tag{1.16}$$

при всех $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, равных нулю при $t = T$.

Покажем, что эти определения эквивалентны данным выше. То, что из первых двух следуют два последних, очевидно, ибо, взяв в (1.7), (1.10) $\eta$ равным нулю для $t \geqslant T - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а число $t_1 > T - \varepsilon$, мы получим (1.15), (1.16) для таких $\eta$, а потому и для всех $\eta$, требуемых в последних определениях. Пусть теперь $u$ есть обобщенное решение уравнения (1.1) в смысле второго определения. Возьмем в (1.15) $\eta$ в виде $\Phi(t, t_1, \varepsilon)\hat{\eta}(x, t)$, где $\hat{\eta}(x, t)$ — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, равная нулю при $t = 0$, а $\Phi(t, t_1, \varepsilon)$ равна 1 при $t \leqslant t_1 - \varepsilon$, нулю при $t \geqslant t_1$ и $\frac{t_1 - t}{\varepsilon}$ при $t_1 - \varepsilon \leqslant t \leqslant t_1$. Подставим это $\eta$ в (1.15) и перейдем к пределу по $\varepsilon \to 0$. Легко видеть, что второй интеграл из (1.15) дает в пределе последний интеграл из (1.7). Первый же интеграл из (1.15) представим в виде

$$-\int_{Q_T} u(\Phi\hat{\eta}_t + \Phi_t\hat{\eta})\,dx\,dt =$$

$$= -\int_{Q_{t_1}} u\Phi\hat{\eta}_t\,dx\,dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}\int_{\Omega} u\hat{\eta}\,dx\,dt. \qquad (1.17)$$

Функция $\psi(t) = \int_{\Omega} u(x, t)\,\hat{\eta}(x, t)\,dx$ суммируема на $[0, T]$, поэтому (см. § 4 из главы II) существует последовательность $\varepsilon_k \to 0$, для которой интегралы $\frac{1}{\varepsilon_k}\int_{t_1-\varepsilon_k}^{t_1}\psi(t)\,dt$ сходятся к $\psi(t_1)$ для почти всех $t_1$ из $[0, T]$. Пределом же интеграла $-\int_{Q_{t_1}} u\Phi\hat{\eta}_t\,dx\,dt$ будет, очевидно, $-\int_{Q_{t_1}} u\hat{\eta}_t\,dx\,dt$, и потому соотношение (1.15) действительно перейдет в пределе в соотношение (1.7).

Таким образом, эквивалентность двух определений обобщенных решений из $V_2(Q_T)$ уравнений (1.1) доказана. Так же доказывается эквивалентность двух данных выше определений обобщенных решений из $V_2(Q_T)$ задачи (1.9).

Для исследования свойств обобщенных решений уравнений (1.1) удобно ввести еще два класса решений — обобщенные решения из пространства $V_2^{1,0}(Q_T)$ и пространства $V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T)$. Они определяются так же, как и обобщенные решения уравнения (или задачи) из $V_2(Q_T)$, с тем лишь отличием, что являются элементами пространства $V_2^{1,0}(Q_T)$ или $V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T)$ $\left(\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)\right.$ или $\left.\overset{\circ}{V}{}_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T)\right.$ соответственно$\left.\right)$ и удовлетворяют тождеству (1.7) (или (1.10)) для всех $t_1$ из $[0, T]$. Оба определения обобщенных решений из $V_2^{1,0}(Q_T)$ и $V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T)$, соответствующие данным выше двум определениям обобщенных решений из $V_2(Q_T)$, эквивалентны друг другу.

Ясно, что обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ $\left(V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T)\right)$ уравнения (1.1) или задачи (1.9) является обобщенным решением из $V_2(Q_T)$ уравнения (1.1) или задачи (1.9). И, наоборот, если $u(x, t)$ есть обобщенное решение (уравнения или задачи) из $V_2(Q_T)$ и если дополнительно известно, что $u(x, t)$ есть элемент $V_2^{1,0}(Q_T)$ $\left(V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T)\right)$, то оно будет и обобщенным решением (уравнения или задачи соответственно) из $V_2^{1,0}(Q_T)$ $\left(V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T)\right)$.

## § 2. Энергетическое неравенство

Мы покажем, что для любого обобщенного решения $u(x, t)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (1.9) можно оценить $|u|_{Q_T}$ через известные в этой задаче величины. Для этого докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{V}_2(Q_T)$ *и удовлетворяет для почти всех* $t_1$ *и* $t_2$ *из* $[0, T]$, *в том числе и при* $t_1 = 0$, *неравенствам*

$$\frac{1}{2}\int u^2(x, t)\,dx\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} [\mathscr{L}_1(u, u) + \mathscr{L}_2(\hat{\mathbf{f}}, u)]\,dt \leqslant 0, \tag{2.1}$$

*функции* $a_i$, $b_i$, $a$, $f_i$ *и* $f$ *в которых удовлетворяют условиям* (1.2) — (1.6). *Тогда*

$$|u|_{Q_T} \leqslant c\left[\|u(x, 0)\|_{2,\Omega} + \|\mathbf{f}\|_{2,Q_T} + \|f\|_{q_1, r_1, Q_T}\right], \tag{2.2}$$

*причем постоянная* $c$ *зависит лишь от* $n$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, *и* $q$ *из* (1.2) *и* (1.3).

Из (2.1) в силу (1.2) имеем

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x, t)\,dx\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \nu\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u_x^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \Big[\frac{\nu}{2}u_x^2 + \Big(\frac{1}{\nu}\sum_i a_i^2 + \frac{1}{\nu}\sum_i b_i^2 + |a|\Big)u^2 + {}$$

$$+ |f_i u_{x_i}| + |fu|\Big]\,dx\,dt,$$

отсюда, используя условия (1.3) — (1.6) и неравенства (1.6), (3.4) главы II, получим (аналогично неравенствам (1.11) — — (1.14) неравенства

$$\int_\Omega u^2(x, t)\,dx\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \nu\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u_x^2\,dx\,dt \leqslant 2\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (\mathscr{D}u^2 + |f_i u_{x_i}| + |fu|)\,dx\,dt \leqslant 2\beta^2 \|\mathscr{D}\|_{q, r, Q_{t_1, t_2}} |u|^2_{Q_{t_1, t_2}} + 2\left(\|\mathbf{f}\|_{2, Q_{t_1, t_2}} + \beta\|f\|_{q_1, r_1, Q_{t_1, t_2}}\right)|u|_{Q_{t_1, t_2}},$$

в которых

$$\mathscr{D} = \frac{1}{\nu}\sum_i a_i^2 + \frac{1}{\nu}\sum_i b_i^2 + |a|.$$

Из них следует

$$\min(1;\ \nu)|u|^2_{Q_{t_1, t_2}} \leqslant \|u(x, t_1)\|^2_{2, \Omega} + \mu(t_1, t_2)|u|^2_{Q_{t_1, t_2}} + \mathscr{F}(t_1, t_2)|u|_{Q_{t_1, t_2}}, \tag{2.3}$$

где

$$\mu(t_1, t_2) = 2\beta^2\|\mathscr{D}\|_{q, r, Q_{t_1, t_2}},$$

а

$$\mathscr{F}(t_1, t_2) = 2\left(\|\mathbf{f}\|_{2, Q_{t_1, t_2}} + \beta\|f\|_{q_1, r_1, Q_{t_1, t_2}}\right).$$

Если $\mu(t_1, t_2)$ меньше $\min\{1, \nu\}$, то с помощью (2.3) можно оценить сверху $|u|_{Q_{t_1, t_2}}$ через $\|u(x, t)\|_{2, \Omega}$ и известные величины. Чтобы добиться этого, разобьем отрезок $[0, T]$ на конечное число отрезков $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{s-1}, t_s = T]$ столь малой длины, чтобы

$$\mu(t_{k-1}, t_k) \leqslant \frac{\nu_1}{2} \equiv \frac{1}{2}\min(1;\ \nu), \tag{2.4}$$

причем за точки деления возьмем такие $t_k$, которые можно брать в качестве пределов интегрирования в (2.1) (обозначим множество таких допустимых $t_k$ через $\mathscr{E}$). Это возможно при $r < \infty$, причем число делений можно взять не превосходящим некоторой известной нам величины. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{s}\mu^r(t_{k-1}, t_k) = (2\beta^2)^r\|\mathscr{D}\|^r_{q, r, Q_T},$$

и потому, если дробление выбрать так, чтобы все $\mu(t_{k-1}, t_k)$, кроме, может быть, последнего, были не меньше $\frac{\nu_1}{4}$, то

$$(s-1)\left(\frac{\nu_1}{4}\right)^r \leqslant (2\beta^2)^r \|\mathscr{D}\|^r_{q, r, Q_T},$$

и, следовательно, число делений $s$ будет ограничено сверху:

$$s \leqslant 1 + \left(\frac{8\beta^2}{\nu_1}\|\mathscr{D}\|_{q, r, Q_T}\right)^r. \tag{2.5}$$

Так как нам надо, чтобы все $\mu(t_{k-1}, t_k)$ не превосходили $\frac{\nu_1}{2}$, то, не увеличивая числа делений, можно их концы $t_k$ поместить в $\mathscr{E}$. Для каждого из таких делений имеем в силу (2.3) неравенства

$$\frac{\nu_1}{2}|u|^2_{Q_{t_{k-1}, t_k}} \leqslant \|u(x, t_{k-1})\|^2_{2, \Omega} + \mathscr{F}(t_{k-1}, t_k)|u|_{Q_{t_{k-1}, t_k}} \leqslant$$
$$\leqslant \|u(x, t_{k-1})\|^2_{2, \Omega} + \frac{\nu_1}{4}|u|^2_{Q_{t_{k-1}, t_k}} + \frac{1}{\nu_1}\mathscr{F}^2(t_{k-1}, t_k),$$

из которых и следует утверждение (2.2) леммы 2.1.

Замечание 2.1. Из данного вывода видно, что если

$$2\beta^2\|\mathscr{D}\|_{q, r, Q_T} < \min\{1; \nu\}, \tag{2.6}$$

то неравенство (2.2) верно и при $r = \infty$, ибо в этом случае оно выводится непосредственно из (2.3), без дробления интервала $[0, T]$.

Пусть теперь $u(x, t)$ есть обобщенное решение из $\overset{\circ}{V}{}^{1,0}_2(Q_T)$ задачи (1.9). Возьмем в качестве $\eta(x, t)$ в (1.16) функцию

$$\widehat{\eta}_{\bar{h}}(x, t) = \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} \widehat{\eta}(x, \tau)\, d\tau, \tag{2.7}$$

где $\widehat{\eta}(x, t)$ есть произвольный элемент $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(Q_{-h, T})$, равный нулю при $t \geqslant T-h$ и при $t \leqslant 0$, и преобразуем первый член в нем следующим образом:

$$-\int_{Q_T} u\widehat{\eta}_{\bar{h}t}\, dx\, dt = -\int_{Q_T} u_h\widehat{\eta}_t\, dx\, dt = \int_{Q_T} u_{ht}\widehat{\eta}\, dx\, dt. \tag{2.8}$$

При этом мы воспользовались соотношением

$$\int_0^T u(t)\,\hat{\eta}_{\bar h}(t)\,dt = \int_0^{T-h} u_h(t)\,\hat{\eta}(t)\,dt, \tag{2.9}$$

справедливым для любых квадратично-суммируемых на $[-h, T]$ функций $u(t)$ и $\hat{\eta}(t)$, одна из которых равна нулю на интервалах $[-h, 0]$ и $[T-h, T]$, и обозначением

$$u_h(x, t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(x, \tau)\,d\tau. \tag{2.10}$$

Равенство (2.9) есть результат перемены порядков интегрирования по $t$ и $\tau$. Во всех остальных членах (1.16) также перенесем усреднение $(\ )_{\bar h}$ с $\hat{\eta}$ на стоящие при нем множители, причем учтем перестановочность этого усреднения с дифференцированием по $x$. Это даст тождество

$$\int\limits_{Q_{T-h}} \left[u_{ht}\hat{\eta} + (a_{ij}u_{x_j} + a_i u + f_i)_h \hat{\eta}_{x_i} + (b_i u_{x_i} + au + f)_h\,\hat{\eta}\right] dx\,dt = 0. \tag{2.11}$$

Это тождество фактически справедливо для класса функций $\hat{\eta}(x, t)$, более широкого, чем только что рассмотренный; именно, для любой функции $\hat{\eta}$, равной нулю при $t > t_1$ $(t_1 \leqslant T-h)$ и равной какой-либо функции $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_{t_1})$ при $t \in [0, t_1]$. Действительно, множество $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_{-h,T})$ плотно в пространстве $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_{-h,T})$. Поэтому для любой $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_{-h,T})$ есть последовательность функций $\eta_m(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_{-h,T})$, сходящаяся к ней при $m \to \infty$ сильно в норме $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_{-h,T})$. Обозначим через $\chi_k(t)$

непрерывные, кусочно-линейные функции

$$\chi_k(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } t\leqslant 0,\\ kt & \text{при } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{k},\\ 1 & \text{при } \frac{1}{k}\leqslant t\leqslant t_1-\frac{1}{k},\\ k(t_1-t) & \text{при } t_1-\frac{1}{k}\leqslant t\leqslant t_1,\\ 0 & \text{при } t\geqslant t_1.\end{cases}$$

Для $\hat{\eta}_{m,k}(x, t)=\eta_m(x, t)\chi_k(t)$ при $t_1\leqslant T-h$ тождество (2.11) установлено. В нем, как легко видеть, можно перейти к пределу по $m$ и $k\to\infty$ и убедиться тем самым в справедливости тождества

$$\int\limits_{Q_{t_1}}\big[u_{ht}\eta+(a_{ij}u_{x_j}+a_iu+f_i)_h\eta_{x_i}+ \\ +(b_iu_{x_i}+au+f)_h\eta\big]\,dx\,dt=0 \qquad (2.12)$$

для любой функции $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_{t_1})$ при $t_1\leqslant T-h$.

Возьмем в (2.12) $\eta(x, t)=u_h(x, t)$ и представим первый член в виде

$$\int\limits_{Q_{t_1}}u_{ht}u_h\,dx\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}u_h^2(x, t)\,dx\Big|_{t=0}^{t=t_1},$$

после чего устремим $h$ к нулю. Это даст

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}u^2(x, t)\,dx\Big|_{t=0}^{t=t_1}+\int\limits_0^{t_1}[\mathscr{L}_1(u, u)+\mathscr{L}_2(\hat{\mathbf{f}}, u)]\,dt=0. \qquad (2.13)$$

Действительно, в силу наших предположений (1.2)—(1.6) о коэффициентах и свободных членах и в силу принадлежности $u$ к $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ функции $a_{ij}u_{x_j}+a_iu+f_i$ суть элементы $L_2(Q_T)$, функции $au$ и $b_iu_{x_i}$ суть элементы $L_{\frac{2q}{q+1},\frac{2r}{r+1}}(Q_T)$, а функция $f$ по условию есть элемент $L_{q_1,r_1}(Q_T)$. Это следует из условий (1.5), оценок (1.11)—(1.14) и теоремы 1.1 главы II. По лемме 4.7 главы II усреднения функций из какого-либо пространства $L_{q,r}(Q_T)$ сходятся к ним в норме этого пространства. Для элементов же из $V_2^{1,0}(Q_T)$ их усреднения сходятся к ним в норме $V_2^{1,0}(Q_{T-\delta})$ и в любой из норм $L_{q,r}(Q_{T-\delta})$ с $q$ и $r$, подчиняющимися условиям (3.3) главы II, в том числе в норме пространства $L_{\frac{2q}{q-1}, \frac{2r}{r-1}}(Q_T)$, сопряженного пространству $L_{\frac{2q}{q+1}, \frac{2r}{r+1}}(Q_T)$, с $q$ и $r$, взятыми из условий (1.3), (1.4). Поэтому в интегралах

$$\int\limits_{Q_{t_1}} \left(a_{ij}u_{x_j} + a_i u + f_i\right)_h \eta_{hx_i}\, dx\, dt, \quad \int\limits_{Q_{t_1}} \left(b_i u_{x_i} + au + f\right)_h \eta_h\, dx\, dt \tag{2.14}$$

можно перейти к пределу по $h \to 0$ при любой $\eta$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$ и получить в пределе

$$\begin{gathered} \int\limits_{Q_{t_1}} \left(a_{ij}u_{x_j} + a_i u + f_i\right) \eta_{x_i}\, dx\, dt, \\ \int\limits_{Q_{t_1}} \left(b_i u_{x_i} + au + f\right) \eta\, dx\, dt. \end{gathered} \tag{2.15}$$

В частности, это верно при $\eta = u$. Наконец, интегралы $\int\limits_\Omega u_h^2(x, t)\, dx$ сходятся к $\int\limits_\Omega u^2(x, t)\, dx$ для всех $t \in [0, T-h]$, ибо $u(x, t)$ непрерывно зависит от $t$ в норме $L_2(\Omega)$. Тем самым (2.13) доказано.

Из (2.13) и леммы 2.1 следует теорема.

Теорема 2.1. *Для любого обобщенного решения $u$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (1.9) справедливо неравенство*

$$|u|_{Q_T} \leqslant c\left[\|\psi_0\|_{2,\Omega} + \|\mathbf{f}\|_{2,Q_T} + \|f\|_{q_1, r_1, Q_T}\right], \tag{2.16}$$

*если относительно уравнения (1.1) выполнены предположения (1.2) — (1.6). Постоянная $c$ в нем зависит лишь от $n$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$ из (1.2) и (1.3).*

Замечание 2.2 Оценка (2.16) верна и при $r = \infty$, если дополнительно известна справедливость неравенства (2.6).

Предположим теперь, что $u(x, t)$ есть обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ уравнения (1.1), так что по сравнению с только что рассмотренным случаем оно не обращается в нуль на $S_T$. Для него, очевидно, тоже справедливо тождество (2.12) при всех $\eta$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Положим в нем $\eta(x, t) = u_h(x, t)\zeta^2(x, t)$, где $\zeta(x, t)$ — произвольная, непрерывная неотрицательная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$, и, преобразовав, как и выше, первый член, перейдем к пределу по $h \to 0$. Это даст соотношение

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} u^2(x, t)\zeta^2(x, t)\,dx\Big|_{t=0}^{t=t_1} +$$

$$+\int_0^{t_1} [\mathscr{L}_1(u, u\zeta^2) + \mathscr{L}_2(\mathrm{f}, u\zeta^2) - (u, u\zeta\zeta_t)]\,dt = 0, \tag{2.17}$$

близкое к (2.13). Из него следует оценка

$$u\zeta|_{Q_T} \leqslant c\Big[\|u(x, 0)\zeta(x, 0)\|_{2,\Omega} + \|\mathrm{f}\zeta\|_{2,Q_T} +$$

$$+\|f\zeta\|_{q_1, r_1, Q_T} + \|u\zeta_x\|_{2,Q_T} + \|u\sqrt{\zeta|\zeta_t|}\|_{2,Q_T}\Big], \tag{2.18}$$

в которой постоянная $c$ зависит лишь от $n$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$ и $q$ из (1.2), (1.3). Выводится она из (2.17) почти так же, как энергетическое неравенство (2.2) из (2.1). Члены, в которых $\zeta$ не дифференцируется, отличаются от соответствующих членов (2.1) только множителем $\zeta^2$ и оцениваются так же, как выше. Остальные члены (их нет в (2.1)) имеют вид

$$I_1 = \int_{Q_{t_1}} \left[\left(a_{ij}u_{x_j} + a_i u + f_i\right)u2\zeta\zeta_{x_i} - u^2\zeta\zeta_t\right]dx\,dt$$

и оцениваются с помощью неравенства Коши так:

$$|I_1| \leqslant 2(\mu\|u_x\zeta\|_{2,Q_{t_1}} +$$

$$+\Big\|\sqrt{\sum_i a_i^2}\,u\zeta\Big\|_{2,Q_{t_1}} + \|\mathrm{f}\zeta\|_{2,Q_{t_1}})\,\|u\zeta_x\|_{2,Q_{t_1}} + \|u\sqrt{\zeta|\zeta_t|}\|^2_{2,Q_{t_1}}. \tag{2.19}$$

Величина $\left\| \sqrt{\sum_i a_i^2 u\zeta} \right\|_{2, Q_{t_1}}$, как видно из (1.11), не превосходит $\mu_1^{1/2}\beta |u\zeta|_{Q_{t_1}}$, и потому из (2.19) следует

$$|I_1| \leqslant \varepsilon \left(\mu \| u_x \zeta \|_{2, Q_{t_1}} + \mu_1 \beta |u\zeta|_{Q_{t_1}} + \| \mathbf{f}\zeta \|_{2, Q_{t_1}}\right)^2 + \\ + \varepsilon^{-1} \| u\zeta_x \|_{2, Q_{t_1}}^2 + \left\| u \sqrt{\zeta |\zeta_t|} \right\|_{2, Q_{t_1}}^2. \quad (2.20)$$

Эта оценка в сочетании с оценкой остальных (основных) членов, проведенной выше, и дает неравенство (2.18).

## § 3. Теоремы единственности

В § 2 главы 1 были доказаны теоремы единственности для решений краевых задач и задачи Коши для параболических уравнений (1.1) в пространстве $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$. Это сделано на основе так называемого «принципа максимума», который требует наличия у решения производных, входящих в уравнение. Здесь мы докажем, что теорема единственности для задачи (1.9) сохраняется и для решений, не имеющих производных $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$.

Первыми теоремами такого типа были теоремы, установленные одним из авторов данной книги ([33$_{3-6, 13}$]). В них доказывалась единственность обобщенных решений краевых задач для уравнений 2-го порядка гиперболического и параболического типов в пространствах $W_2^{1,1}(Q_T)$ и $W_2^{1,0}(Q_T)$ соответственно. Мы дадим здесь это первоначальное доказательство для случая параболических уравнений (теорема 3.2). В процессе его проведения устанавливается неравенство, дающее оценку нормы решения, более слабое, чем энергетическое (такие неравенства впоследствии Гординг назвал «дуальными»). Однако при этом приходится предполагать, что коэффициенты $a_{ij}$ и $b_i$ имеют производные $a_{ijt}$ и $b_{ix_i}$. Впоследствии Ладыженской, Лионсом и Проди были даны другие способы доказательства, при которых от коэффициентов уравнения (1.1) требовалась лишь ограниченность. Обобщением этих теорем на случай неограниченных коэффициентов является теорема 3.3. Желание охватить более общий случай, когда коэффициенты $q_i$, $b_i$, $a$ принадлежат классам $L_{q_k, r_k}(Q_T)$, привело к обобщенным решениям из $V_2^{1,0}(Q_T)$ — несколько более узкому классу решений, чем решения из $W_2^{1,0}(Q_T)$, в котором тем не менее, как мы покажем далее, имеет место однозначная разрешимость начально-краевых задач.

Единственность в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$ есть простое следствие теоремы 2.1, доказанной в предыдущем параграфе. Из теоремы 2.1 и теоремы 4.2, которая будет доказана ниже, следует более сильное утверждение:

Теорема 3.1. *Если коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям* (1.3), (1.4), *то первая краевая задача для* (1.1) *не может иметь двух различных обобщенных решений из* $V_2(Q_T)$.

Действительно, разность $u(x, t)$ двух таких решений была бы обобщенным решением из $V_2(Q_T)$ однородной задачи (1.9) (т. е. задачи (1.9) с $\psi_0 = f = f \equiv 0$). В силу теоремы 4.2 функция $u(x, t)$ будет элементом $V_2^{1, \frac{1}{2}}(Q_T)$, и потому для нее справедливо неравенство (2.18), из которого следует, что $u \equiv 0$.

В классах ограниченных обобщенных решений единственность сохраняется при более широких предположениях относительно коэффициентов $a_i(x, t)$. Одним из вариантов теорем этого типа является теорема 3.4. Для ее доказательства используется классический метод, предложенный Гольмгреном в начале века и использующий умение решать задачу, сопряженную с исследуемой в классе достаточно хороших функций (заметим, что задача, сопряженная к начально-краевой задаче, есть, по существу, задача того же типа, что и исходная). Укажем еще на теоремы единственности обобщенных решений краевых задач из пространства $L_2(Q_T)$ ([33$_{4,6,13}$]). Эти теоремы примечательны тем, что теоремы существования являются их просто выводимыми следствиями, подобно тому как в линейной алгебре из единственности вытекает разрешимость линейной алгебраической системы при любых правых частях. Мы расскажем о них на примере задачи (14.2) в § 14 данной главы. Эти теоремы справедливы при условии, что коэффициенты уравнений обладают некоторой гладкостью, большей, чем та, при которой доказывается однозначная разрешимость в пространстве $V_2^{1,0}(Q_T)$. Но зато и разрешимость доказывается в классе более хороших функций. Это соответствует общей тенденции: чем лучше коэффициенты уравнения, тем лучше любое решение уравнения, соответствующее достаточно гладким свободным членам, и тем более плохие допустимы для таких уравнений решения, причем это ухудшение достигается за счет расширения класса свободных членов и функций, определяющих начальное и граничное условия.

Переходим к доказательству теорем.

Теорема 3.2. *Пусть коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям* (1.2),

$$\max_{Q_T}\left| a_i - b_i,\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right| \leqslant \mu_1 \tag{3.1}$$

*и*

$$\max_{0\leqq t\leqq T}\left\| a - \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right\|_{q,\,\Omega} \leqslant \mu_2, \tag{3.2}$$

*а свободные члены — условиям*

$$\mathbf{f}\in L_2(Q_T),\quad f\in L_{\frac{2q}{q+2},\,2}(Q_T), \tag{3.3}$$

*в которых* $q=n$ *при* $n\geqslant 3$, $q>n$ *при* $n=2$ *и* $q=2$ *при* $n=1$. *Тогда для любого обобщенного решения* $u(x,\ t)$ *из* $W_2^{1,0}(Q_T)$ *задачи* (1.9) *с* $\psi_0(x)=\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial x_i}$, $\boldsymbol{\psi}(x)=(\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n)\in L_2(\Omega)$, *справедлива оценка (неравенство, дуальное энергетическому)*

$$\max_{0\leqq t\leqq t_1}\frac{\nu}{2}\|\zeta_x(x,\ t)\|^2_{2,\,\Omega}+2\|\zeta_t\|^2_{2,\,Q_{t_1}}\leqslant$$
$$\leqslant 2e^{\frac{4c_1}{\nu}t_1}\left[\frac{4}{\nu}\|\boldsymbol{\psi}\|^2_{2,\,\Omega}+\|\mathbf{f}\|^2_{2,\,Q_{t_1}}+\|f\|^2_{\frac{2q}{q+2},\,2,\,Q_{t_1}}\right] \tag{3.4}$$

*при* $t_1\in\left[0,\ \frac{\nu}{4c_1}\right]$, *в которой* $\zeta(x,\ t)=\int\limits_0^t u(x,\ \xi)\,d\xi$,

$c_1 = 10n\mu_1 + 4 + 4c^2(1+\mu_2)$, *а постоянная $c$ взята из неравенства* (2.18) *главы* II. *В частности, при* $\psi_0(x) = u|_{t=0} = 0$ *и* $\mathfrak{f} = f \equiv 0$ *решение* $u(x, t) \equiv 0$, *т. е. имеет место теорема единственности для обобщенных решений из* $W_2^{1,0}(Q_T)$ *задачи* (1.9).

Под *обобщенным решением из* $W_2^{1,0}(Q_T)$ *задачи* (1.9) в соответствии с общей концепцией обобщения понятия решения, описанной в § 3 главы I, надо понимать функцию $u(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству (1.16) или тождеству

$$\int_{Q_T} \{-u\eta_t + [a_{ij}u_{x_j} + (a_i - b_i)u + f_i]\eta_{x_i} + \\ + (a - b_{ix_i})u\eta + f\eta\}\,dx\,dt - \int_{\Omega} \psi_0(x)\eta(x, 0)\,dx = 0 \qquad (3.5)$$

при любой функции $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, равной нулю при $t = T$, если $\psi_0(x) \in L_2(\Omega)$. Если же $\psi_0(x)$ есть обобщенная функция вида $\psi_{ix_i}$ с $\psi_i(x) \in L_2(\Omega)$, то в тождестве (3.5) член $-\int_\Omega \psi_0(x)\eta(x, 0)\,dx$ считаем равным $\int_\Omega \psi_i(x)\eta_{x_i}(x, 0)\,dx$ и предполагаем, что $\eta(x, t)$ имеет еще производные $\eta_{x_i t}$ из $L_2(Q_T)$. При условиях теоремы 3.2 считаем, что $u$ удовлетворяет интегральному тождеству в форме (3.5).

Для доказательства (3.4) положим функцию $\eta(x, t)$ равной нулю при $t \geqslant t_1$ и $-\int_{t_1}^{t} u(x, \tau)\,d\tau$ при $t \in [0, t_1]$, где $t_1$ — какое-либо произвольное число из $(0, T]$, и запишем полученное равенство в виде

$$\int_{Q_{t_1}} \{\eta_t^2 - [a_{ij}\eta_{tx_j} + (a_i - b_i)\eta_t - f_i]\eta_{x_i} - \\ - (a - b_{ix_i})\eta_t\eta + f\eta\}\,dx\,dt + \int_\Omega \psi_i\eta_{x_i}(x, 0)\,dx = 0. \qquad (3.6)$$

Преобразуем отдельные члены этого равенства, помня, что $\eta(x, t_1) = 0$, и затем перейдем от равенства к соответствующему неравенству:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} a_{ij}(x, 0)\eta_{x_i}(x, 0)\eta_{x_j}(x, 0)\,dx + \int_{Q_{t_1}} \eta_t^2\,dx\,dt =$$
$$= \int_{Q_{t_1}} \Big[-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\eta_{x_i}\eta_{x_j} + (a_i - b_i)\eta_t\eta_{x_i} - f_i\eta_{x_i} +$$
$$+ (a - b_{ix_i})\eta\eta_t - f\eta\Big]dx\,dt -$$
$$- \int_{\Omega} \psi_i\eta_{x_i}(x, 0)\,dx \leqslant \int_{Q_{t_1}} \Big[\frac{n}{2}\mu_1\eta_x^2 + \frac{1}{4}\eta_t^2 + n\mu_1^2\eta_x^2 +$$
$$+ \frac{1}{4}\mathrm{f}^2 + \eta_x^2 + \frac{1}{4}\eta_t^2 + (a_i - b_{ix_i})^2\eta^2\Big]dx\,dt +$$
$$+ \int_0^{t_1} \|f\|_{\frac{2q}{q+2}, \Omega}\|\eta\|_{\frac{2q}{q-2}, \Omega}\,dt + \frac{\nu}{4}\|\eta_x(x, 0)\|^2_{2, \Omega} + \frac{1}{\nu}\|\psi\|^2_{2, \Omega}. \tag{3.7}$$

Далее член с $\eta^2$ оценим, используя неравенство Гёльдера и теорему вложения (2.18) главы II, так:

$$\int_{\Omega}(a - b_{ix_i})^2\eta^2\,dx \leqslant \|a - b_{ix_i}\|^2_{q, \Omega}\|\eta\|^2_{\frac{2q}{q-2}, \Omega} \leqslant c^2\mu_2^2\|\eta_x\|^2_{2, \Omega},$$

и аналогично

$$\int_0^{t_1}\|f\|_{\frac{2q}{q+2}, \Omega}\|\eta\|_{\frac{2q}{q-2}, \Omega}\,dt \leqslant \frac{1}{4}\|f\|^2_{\frac{2q}{q+2}, 2, Q_{t_1}} + c^2\|\eta_x\|^2_{2, Q_{t_1}}.$$

Подставляя эти оценки в (3.7), используя условие (1.2) и приводя подобные члены, получим

$$\nu\|\eta_x(x, 0)\|^2_{2, \Omega} + 2\|\eta_t\|^2_{2, Q_{t_1}} \leqslant$$
$$\leqslant c_1\|\eta_x\|^2_{2, Q_{t_1}} + \|\mathrm{f}\|^2_{2, Q_{t_1}} + \|f\|^2_{\frac{2q}{q+2}, 2, Q_{t_1}} + \frac{4}{\nu}\|\psi\|^2_{2, \Omega}, \tag{3.8}$$

где

$$c_1 = 4\left(\frac{n}{2}\mu_1 + n\mu_1^2 + 1 + c^2\mu_2^2 + c^2\right).$$

Функция $\eta(x, t)$ зависит от параметра $t_1$, что не было указано явно. Теперь мы воспользуемся произволом в выборе $t_1$. Для этого введем вместо $\eta$ другую функцию $\zeta(x, t) = \int\limits_0^t u(x, \xi)\,d\xi$. Ясно, что $\eta(x, t) = \zeta(x, t_1) - \zeta(x, t)$,

$$\eta(x, 0) = \zeta(x, t_1)$$

и

$$\|\eta_x\|^2_{2, Q_{t_1}} \leqslant 2\|\zeta_x\|^2_{2, Q_{t_1}} + 2t_1\|\zeta_x(x, t_1)\|^2_{2, \Omega}.$$

Ввиду этого из (3.8) следует неравенство

$$(\nu - 2c_1t_1)\|\zeta_x(x, t_1)\|^2_{2, \Omega} + 2\|\zeta_t\|^2_{2, Q_{t_1}} \leqslant 2c_1\|\zeta_x\|^2_{2, Q_{t_1}} + \mathcal{F}(t_1), \tag{3.9}$$

в котором

$$\mathcal{F}(t_1) = \|\mathbf{f}\|^2_{2, Q_{t_1}} + \|f\|^2_{\frac{2q}{q+2}, 2, Q_{t_1}} + \frac{4}{\nu}\|\psi\|^2_{2, \Omega}.$$

Для $t_1$, удовлетворяющих условию

$$0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{\nu}{4c_1}, \tag{3.10}$$

из (3.9) на основании леммы 5.5 главы II будем иметь

$$\frac{\nu}{2}\|\zeta_x(x, t_1)\|^2_{2, \Omega} + 2\|\zeta_t\|^2_{2, Q_{t_1}} \leqslant e^{\frac{4c_1}{\nu}t_1}\mathcal{F}(t_1),$$

а потому и (3.4). Если $\psi_t = \mathbf{f} = f = 0$, то $u(x, t) \equiv 0$ для $t_1 \in \left[0, \frac{\nu}{4c_1}\right]$, и потому тождество (3.5) примет вид

$$\int\limits_{\frac{\nu}{4c_1}}^{T} \int\limits_{\Omega} \{-u\eta_t + \ldots\}\,dx\,dt = 0,$$

т. е. $u(x, t)$ будет обобщенным решением из $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_2\left(Q_{\frac{\nu}{4c_1}, T}\right)$ задачи (1.9) в $Q_{\frac{\nu}{4c_1}, T}$ с нулевым начальным условием при $t = \frac{\nu}{4c_1}$. Применяя к нему снова оценку (3.4) в цилиндре $\Omega \times \left[\frac{\nu}{4c_1}, \frac{\nu}{2c_1}\right]$, убедимся, что $u \equiv 0$ и в нем, и так далее, пока не исчерпаем весь цилиндр $Q_T$. Теорема 3.2 доказана.

Дадим теперь другое доказательство теоремы единственности в пространстве $W^{1,0}_2(Q_T)$, не использующее существование производных от коэффициентов $\mathcal{L}$, Теорема 3.3. *Для уравнений* (1.1), *коэффициенты которых удовлетворяют условиям* (1.2) *и условиям*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \ a \right\|_{q, \infty, Q_T} \leqslant \mu_1, \quad q > \frac{n}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant 2, \tag{3.11$_1$}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \ a \right\|_{1, 2, Q_T} \leqslant \mu_1, \qquad \text{при} \quad n = 1, \tag{3.11$_2$}$$

*задача* (1.9) *может иметь не более одного обобщенного решения из* $W_2^{1,0}(Q_T)$.

Эта теорема является следствием леммы 4.3 и теоремы 3.1 данного параграфа. Лемма 4.3 гарантирует принадлежность разности $u$ двух возможных обобщенных решений из $W_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (1.9) к $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,\,1/2}(Q_{T-\delta})$, где $\delta$ — сколь угодно малое положительное число. Применяется она к функции $v(x, t) = u^*(x, t)\,\omega(t)$, где $u^*(x, t)$ построена по $u(x, t)$ так, как описано в (4.9). Функция $v$ удовлетворяет тождеству (4.11) с $f_i = f \equiv 0$, т. е. тождеству типа (4.8). Нетрудно проверить, что функции $F_i$ и $F$, соответствующие рассматриваемому нами случаю, будут удовлетворять всем требованиям первой части леммы 4.3, причем в (3.11$_1$) показатель $q$ можно взять даже равным $n/2$.

Итак, $u \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,\,1/2}(Q_{T-\delta})$, $\delta > 0$. Далее, из условий (3.11$_i$) вытекают условия (1.3) и (1.4), ибо при $n \geqslant 2$ имеем $L_{q,\infty}(Q_T) \subset L_{n/2+\varepsilon,\, n/2\varepsilon+1}(Q_T)$, где $\varepsilon = q - n/2 > 0$ и показатели $\widehat{q} = n/2 + \varepsilon$, $\widehat{r} = n/2\varepsilon + 1$ удовлетворяют условиям (1.4), а при $n = 1$ условия (3.11$_2$) просто совпадают с (1.3) и (1.4). Ввиду этого теорема 3.1 гарантирует равенство нулю $u(x, t)$ в $Q_{T-\delta}$, а так как $\delta$ — произвольное положительное число, то $u = 0$ в $Q_T$.

Теорема 3.4. *Пусть коэффициенты* $\mathscr{L}$ *и удовлетворяют условиям* (1.2),

$$\left\| \sum_{i} (a_i - b_i)^2 \right\|_{1, Q_T}^{1/2}, \quad \left\| a - \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \right\|_{1, Q_T} \leqslant \mu_1 \tag{3.12}$$

и

$$a(x, t) - \frac{\partial b_i(x, t)}{\partial x_i} \geqslant -\mu_2 \, ^{*)}, \qquad \mu_2 \geqslant 0. \tag{3.13}$$

*Тогда имеет место теорема единственности для обобщенных решений и задачи* (1.9) *из* $W_2^{1,0}(Q_T)$ *с конечным* $\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T} |u|$.

Такие обобщенные решения должны удовлетворять тождеству (3.5) с любой $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, равной нулю при $t = T$ и имеющей $\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T} |\eta| < \infty$. Пусть $u$ есть разность двух возможных решений. Для нее справедливо тождество

$$\int_{Q_T} u \mathscr{L}_m^* \eta \, dx \, dt = l_m(u, \eta), \tag{3.14}$$

где

$$\mathscr{L}_m^* \eta = -\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}^m \eta_{x_i}\right) + \left(a_i^m - b_i^m\right)\eta_{x_i} + \left(a^m - \frac{\partial b_i^m}{\partial x_i}\right)\eta,$$

$$l_m(u, \eta) = \int_{Q_T} \Big\{ \left(a_{ij}^m - a_{ij}\right) u_{x_j} \eta_{x_i} + \left[\left(a_i^m - b_i^m\right) - \left(a_i - b_i\right)\right] u \eta_{x_i} + \\ + \left[\left(a^m - \frac{\partial b_i^m}{\partial x_i}\right) - \left(a - \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right)\right] u\eta \Big\} \, dx \, dt,$$

---

*) Условие (3.13) можно заменить на условие: $a(x, t) - \frac{\partial b_i(x, t)}{\partial x_i} \geqslant -\Theta(t)$, где $\Theta(t)$ — какая-либо положительная функция, суммируемая на $[0, T]$.

Из доказательства теоремы 3.4 будет видно, что единственность сохраняется, если условие конечности $\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T} |u|$ ослабить до условия конечности $\|u\|_{q, r, Q_T}$, $q, r \geqslant 2$, но зато ограничения на коэффициенты $\mathscr{L}$ усилить, заменив (3.12) на условия

$$\left\| \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \right\|_{\frac{q}{q-2}, \frac{r}{r-2}, Q_T}, \ \|a - b_{ix_i}\|_{\frac{q}{q-1}, \frac{r}{r-1}, Q_T} \leqslant \mu_1.$$

а $a_{ij}^m$, $b_i^m$, $a_i^m$ и $a^m$ суть усреднения с гладким ядром радиуса $1/m$ соответствующих коэффициентов, которые мы можем считать предварительно продолженными на все пространство с сохранением их свойств, отмеченных условиями (1.2), (3.12) и (3.13). Возьмем в качестве $\eta(x, t)$ решение сопряженной краевой задачи в $Q_T$:

$$\mathscr{L}_m^*\eta = f(x, t), \quad \eta|_{S_T} = 0, \quad \eta|_{t=T} = 0, \tag{3.15}$$

где $f(x, t)$ — произвольная гладкая функция, равная нулю в окрестности основания $\{x \in \Omega, t = T\}$. Эта задача (она является задачей того же типа, что и исходная, и преобразуется в обычную форму с помощью замены независимой переменной $t$ на $\tau = T - t$), как будет доказано в § 5 главы IV, имеет единственное решение $\eta^m(x, t)$ в $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$. Пусть $m$ пробегает значения $m = 1, 2, \ldots$ Для всей совокупности решений $\{\eta^m\}$ равномерно ограничены две нормы:

$$\max_{Q_T} |\eta^m| \leq ce^{\mu_2 T} \max_{Q_T} |f| \equiv c_1, \tag{3.16}$$

и

$$\|\eta_x^m\|_{2, Q_T} \leq c_2. \tag{3.17}$$

Первое из этих неравенств есть следствие оценки (2.12) главы I и предположений (1.2) и (3.13), которые сохраняются и для усредненных функций (мы считаем, что ядро усреднения неотрицательно). Второе легко выводится из соотношения

$$\int_t^T \int_\Omega f\eta^m \, dx \, dt = \int_t^T \int_\Omega \mathscr{L}_m^* \eta^m \eta^m \, dx \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \|\eta^m(x, t)\|_{2,\Omega}^2 + \int_t^T \int_\Omega \left[ a_{ij}^m \eta_{x_i}^m \eta_{x_j}^m + (a_i^m - b_i^m) \eta_{x_i}^m \eta^m + \right.$$

$$\left. + \left( a^m - \frac{\partial b_i^m}{\partial x_i} \right) \eta^m \eta^m \right] dx \, dt,$$

если учесть предположения (1.2), (3.12) и уже доказанную оценку (3.16).

Перейдем теперь к пределу в (3.14) при $m \to \infty$. Правая часть (3.14) при этом будет стремиться к нулю, ибо

$$\left| \int\limits_{Q_T} (a^m_{ij} - a_{ij}) u_{x_j} \eta^m_{x_i} \, dx \, dt \right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{i,j} \| \eta^m_{x_i} \|_{2, Q_T} \| (a^m_{ij} - a_{ij}) u_{x_j} \|_{2, Q_T} \leqslant \\ \leqslant c_2 \sum_{i,j} \| (a^m_{ij} - a_{ij}) u_{x_j} \|_{2, Q_T},$$

и интеграл $\int\limits_{Q'_T} (a^m_{ij} - a_{ij})^2 u^2_{x_j} \, dx \, dt \equiv I^m (Q'_T)$ стремится к нулю на множестве $Q'_T \subset Q_T$ меры, сколь угодно мало отличающейся от меры всего $Q_T$, из-за почти равномерной сходимости $a^m_{ij}$ к $a_{ij}$, а по любому множеству малой меры $I^m (Q'_T)$ равномерно мал из-за суммируемости $u^2_x$ по $Q_T$. Интеграл

$$\left| \int\limits_{Q_T} [(a^m - b^m_{ix_i}) - (a - b_{ix_i})] u \eta^m \, dx \, dt \right| \leqslant \\ \leqslant c_1 \max_{Q_T} |u| \int\limits_{Q_T} |(a^m - b^m_{ix_i}) - (a - b_{ix_i})| \, dx \, dt$$

стремится к нулю из-за сходимости $a^m - b^m_{ix_i}$ к $a - b_{ix_i}$ в норме $L_1(Q_T)$. Наконец,

$$\left| \int\limits_{Q_T} [(a^m_i - b^m_i) - (a_i - b_i)] u \eta^m_{x_i} \, dx \, dt \right| \leqslant \\ \leqslant c_2 \max_{Q_T} |u| \left( \int\limits_{Q_T} \sum_i [(a^m_i - b^m_i) - (a_i - b_i)]^2 \, dx \, dt \right)^{1/2} \to 0$$

благодаря сходимости $a^m_i - b^m_i$ к $a_i - b_i$ в норме $L_2(Q_T)$. Таким образом, в пределе из (3.14) получим

$$\int\limits_{Q_T} uf \, dx \, dt = 0,$$

откуда ввиду достаточного произвола в выборе $f$ следует, что $u \equiv 0$.

Теорема доказана.

## § 4. Разрешимость и устойчивость первой краевой задачи в классах $V_2^{1, \frac{1}{2}}(Q_T)$ и $W_2^{1, \frac{1}{2}}(Q_T)$

Покажем сначала, что задача (1.9) разрешима в классе $V_2(Q_T)$; именно, докажем следующее предложение:

Теорема 4.1. *Если выполнены условия* (1.2)—(1.6) *и* $\psi_0(x) \in L_2(\Omega)$, *то задача* (1.9) *имеет решение из* $V_2(Q_T)$.

Для доказательства используем метод Галёркина. Возьмем какую-либо фундаментальную в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ систему функций $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, и будем ее ради несуществующих упрощений считать ортонормированной в $L_2(\Omega)$, так что $(\psi_k, \psi_l) = \delta_k^l$. Приближенное решение будем искать в виде

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\, \psi_k(x),$$

где $c_k^N(t) = (u^N, \psi_k)$ определяются из условий:

$$\frac{d}{dt}(u^N, \psi_k) + \mathscr{L}_1(u^N, \psi_k) + \mathscr{L}_2(\mathbf{f}, \psi_k) = 0 \tag{4.1}$$

и

$$c_k^N(0) = (\psi_0, \psi_k) \tag{4.2}$$

при $k = 1, \ldots, N$. Условия (4.1) представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dc_k^N(t)}{dt} + A_{kl}(t)\, c_l^N(t) + F_k(t) = 0, \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{4.3}$$

с суммируемыми по $[0, T]$ коэффициентами и свободными членами.

(Суммируемость $A_{kl}(t)$ и $F_k(t)$ по $[0, T]$ видна из оценок (1.11)—(1.14).) Ввиду этого задачи (4.3), (4.2) имеют единственное решение на $[0, T]$, и тем самым $u^N(x, t)$ при любом $N$ определяются однозначно. Покажем, что для $u^N$ равномерно ограничены нормы в $V_2(Q_T)$, т. е.

$$|u^N|_{Q_T} \leqslant c_1 \tag{4.4}$$

для всех $N = 1, 2, \ldots$ Для этого умножим каждое из уравнений (4.1) на свое $c_k^N(t)$, полученные равенства сложим для всех $k$ от 1 до $N$ и результат проинтегрируем по $t$ от 0 до $t_1$. Это дает равенство

$$\frac{1}{2}\| u^N(x, t)\|^2_{2, \Omega}\Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_0^{t_1} [\mathscr{L}_1(u^N, u^N) + \mathscr{L}_2(\hat{\mathbf{f}}, u^N)]\, dt = 0,$$

из которого вследствие леммы 2.1 получаем оценку (4.4) (при этом мы учли, что $\| u^N(x, 0)\|^2_{2, \Omega} = \sum_{k=1}^{N} (c_k^N(0))^2 \leqslant \| \psi_0\|^2_{2, \Omega}$).

Из (4.4) следует, что функции $l_{N, k}(t) = (u^N(x, t), \psi_k(x))$ равномерно ограничены. Покажем, что при фиксированном $k$ и произвольных $N \geqslant k$ они равностепенно непрерывны на $[0, T]$. Действительно, из (4.1) имеем

$$|l_{N, k}(t + \Delta t) - l_{N, k}(t)| \leqslant \int_t^{t+\Delta t} [|\mathscr{L}_1(u^N, \psi_k)| + |\mathscr{L}_2(\hat{\mathbf{f}}, \psi_k)|]\, dt.$$

Для оценки правой части используем неравенства (1.11) — (1.14), (4.4), неравенство

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_\Omega |a_{ij} u^N_{x_j} \psi_{kx_j}|\, dx\, dt \leqslant \mu \| u^N_x\|_{2, Q_{t, t+\Delta t}} \| \psi_{kx}\|_{2, Q_{t, t+\Delta t}}$$

и то, что все встречающиеся при этом интегралы от $\psi_k$ и известных функций (коэффициентов и свободных членов) малы по малым объемам $Q_{t, t+\Delta t}$ (точнее, стремятся к нулю при $\Delta t \to 0$). Это дает $|l_{N, k}(t + \Delta t) - l_{N, k}(t)| \leqslant \varepsilon(\Delta t) \| \psi_{kx}\|^1_{2, \Omega}$ с $\varepsilon(\Delta t)$, не зависящим от $N$ и стремящимся к нулю при $\Delta t \to 0$, т. е. равностепенную непрерывность $l_{N, k}(t)$, $N = k$, $k + 1, \ldots$, по $t$. Обычным диагональным процессом выделим подпоследовательность $N_m$, $m = 1, 2, \ldots$, по которой функции $l_{N_m, k}(t)$ сходятся равномерно на $[0, T]$ к некоторой непрерывной функции $l_k(t)$ для каждого $k = 1, 2, \ldots$ Функции $l_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, определяют функцию $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k(t)\psi_k(x)$. К этой функции $u^{N_m}$ сходятся слабо в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t$ из $[0, T]$. Действительно, для любой функции $\psi(x)$ из $L_2(\Omega)$

$$\left(u^{N_m} - u,\ \psi\right) = \sum_{k=1}^{s} (\psi,\ \psi_k)\left(u^{N_m} - u,\ \psi_k\right) + \\ + \left(u^{N_m} - u,\ \sum_{k=s+1}^{\infty} (\psi,\ \psi_k)\,\psi_k\right), \quad (4.5)$$

причем

$$\left|\left(u^{N_m} - u,\ \sum_{k=s+1}^{\infty} (\psi_1,\ \psi_k)\,\psi_k\right)\right| \leqslant c_2\left(\sum_{k=s+1}^{\infty} (\psi,\ \psi_k)^2\right)^{1/2} \equiv c_2 R(s),$$

где $c_2$ не зависит от $N_m$.

Выберем $s$ столь большим, чтобы $c_2 R(s)$ стало меньше наперед заданного $\varepsilon > 0$. Первая же сумма в (4.5) при фиксированном $s$ будет, как доказано выше, меньше $\varepsilon$ для всех $t$ из $[0, T]$, если $N_m$ взять достаточно большим. Таким образом, $\left|\left(u^{N_m} - u,\ \psi\right)\right|$ можно сделать меньше $\varepsilon$ для всех $t$ из $[0, T]$. Тем самым показано, что $u^{N_m}$, $m = 1, 2, \ldots$, сходятся к $u$ слабо в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t \in [0, T]$. Благодаря (4.4) из $\left\{u^{N_m}\right\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится к $u$ слабо в $L_2(Q_T)$ вместе со своими производными $u_x^{N_m}$. Без ограничения общности будем считать, что вся последовательность $u^{N_m}$ сходится к $u$ таким образом. В силу известного свойства слабой сходимости для предельной функции $u$ сохранится неравенство (4.4) и, следовательно, $u$ будет элементом $V_2(Q_T)$. Проверим, что она удовлетворяет тождеству (1.16). Для этого умножим каждое уравнение (4.1) на свою гладкую функцию $d_k(t)$, равную нулю при $t = T$, полученные равенства сложим по всем $k$ от 1 до $N' \leqslant N$ и результат проинтегрируем по $t$ в пределах от 0 до $T$. После интегрирования по частям в первом члене получим

$$I_0\left(u^N,\ \Phi^{N'}\right) \equiv \int_0^T \left[-\left(u^N,\ \Phi_t^{N'}\right) + \mathscr{L}_1\left(u^N,\ \Phi^{N'}\right) + \\ + \mathscr{L}_2\left(\mathrm{f},\ \Phi^{N'}\right)\right] dt = \left(u^N(x,\ 0),\ \Phi^{N'}(x,\ 0)\right), \quad (4.6)$$

где $\Phi^{N'}(x,\ t) = \sum_{k=1}^{N'} d_k(t)\,\psi_k(t)$. В этом равенстве можно перейти к пределу по выбранной выше подпоследовательности,

$N=N_m$, $m=1, 2, \ldots$, считая $\Phi^{N'}$ фиксированным, и прийти тем самым к (4.6) для $u$ (вместо $u^N$).

Действительно, функции $\Phi_t^{N'}$, $a_{ij}\Phi_{x_l}^{N'}$ суть элементы $L_2(Q_T)$, а функции $a_i\Phi_{x_i}^{N'}$, $b_i\Phi^{N'}$ и $a\Phi^{N'}$ принадлежат (как следует из оценок (1.11) — (1.14) данной главы и теоремы 2.1 главы II) пространствам $L_{q_2, r_2}(Q_T)$, $L_{q_3, r_3}(Q_T)$ и $L_{q_2, r_2}(Q_T)$ с $q_2=\bar{q}'=\bar{q}/(\bar{q}-1)$, $r_2=\bar{r}'=\bar{r}/(\bar{r}-1)$ и $q_3=r_3=2$, соответственно, при этом показатели $\bar{q}$, $\bar{r}$, сопряженные с $q_2$, $r_2$, удовлетворяют условиям, при которых $L_{\bar{q}, \bar{r}}(Q_T)$ вкладывается в $V_2(Q_T)$. Ввиду этого и указанной выше слабой сходимости $u^{N_m}$ к $u$ во всех объемных интегралах можно перейти к пределу по $m\to\infty$. Интеграл же $\left(u^{N_m}(x, 0), \Phi^{N'}(x, 0)\right)$ имеет своим пределом $\left(\psi_0(x), \Phi^{N'}(x, 0)\right)$, ибо $u^{N_m}(x, 0)$ сходятся к $\psi_0(x)$ в $L_2(\Omega)$.

Итак, мы доказали, что предельная функция $u(x, t)$ удовлетворяет тождеству (1.16), т. е.

$$l_0\left(u, \Phi^{N'}\right)=\left(\psi_0, \Phi^{N'}(x, 0)\right) \tag{4.7}$$

для всех $\Phi^{N'}$ вида $\sum\limits_{k=1}^{N'} d_k(t)\psi_k(x)$ с указанными выше свойствами $d_k(t)$ и $\psi_k(x)$. Но такие $\Phi^{N'}$ плотны в пространстве всех $\Phi$, требуемых во втором определении обобщенного решения из $V_2(Q_T)$ задачи (1.9) (см. лемму 4.12 главы II). Ввиду этого и оценок (1.11) — (1.14) для отдельных членов, тождества (4.7) имеют место при всех $\Phi$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, равных нулю при $t=T$, т. е. $u(x, t)$ есть обобщенное решение из $V_2(Q_T)$ задачи (1.9). Теорема доказана.

Проведем теперь дополнительные исследования, касающиеся гладкости обобщенных решений по $t$. Пусть $u$ есть обобщенное решение из $V_2(Q_T)$ задачи (1.9), и пусть для (1.1) выполнены условия (1.2) — (1.6). Функция $u$ удовлетворяет тождеству (1.16), которое перепишем следующим образом:

$$\int\limits_{Q_T} -u\eta_t\,dx\,dt-\int\limits_{\Omega}\psi_0(x)\,\eta(x, 0)\,dx=$$

$$=\int\limits_{Q_T}\left[F_i\eta_{x_i}+(F-f)\eta\right]dx\,dt. \tag{4.8}$$

В нем

$$F_i = -a_{ij}u_{x_j} - a_i u - f_i, \tag{4.8$_1$}$$

$$F = -b_i u_{x_i} - au, \tag{4.8$_2$}$$

$\psi_0 \in L_2(\Omega)$, а $\eta$, как и в (1.16), есть произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, равная нулю при $t = T$. Из оценок (1.11) — (1.14) данной главы и теоремы 1.1 гл. II следует, что $F_i(x, t)$ принадлежат $L_2(Q_T)$, а $F(x, t) \in L_{q_2, r_2}(Q_T)$ с $q_2 = 2q/(q+1)$, $r_2 = 2r/(r+1)$ (аналогичный подсчет показателей суммируемости сделан выше в § 2 данной главы при проведении предельного перехода от (2.12) к (2.13)). Показатели $q_2$, $r_2$ удовлетворяют тем же соотношениям, что и показатели $q_1$, $r_1$ пространства $L_{q_1, r_1}(Q_T)$, к которому принадлежит $f$.

Покажем, что любая функция $u$ из $\overset{\circ}{V}_2(Q_T)$, удовлетворяющая тождеству (4.8) с только что указанными свойствами входящих в него функций, сильно непрерывна по $t$ в норме $L_2(\Omega)$ и принадлежит $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,1/2}(Q_T)$ *) (определение $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,1/2}(Q_T)$ дано на стр. 15 § 1 гл. I). Для этого придадим тождеству (4.8) более удобный вид. Именно, доопределим функции $u$, $F_i$, $F$ и $f$ на весь бесконечный цилиндр $Q_{-\infty,\infty} = \Omega \times (-\infty, \infty)$ так:

$$\left.\begin{aligned}
u^*(x, t) &= \begin{cases} u(x, t), & t \in [0, T], \\ u(x, -t), & t \in [-T, 0], \\ 0, & |t| > T, \end{cases} \\
F_i^*(x, t) &= \begin{cases} F_i(x, t), & t \in [0, T], \\ -F_i(x, -t), & t \in [-T, 0), \\ 0, & |t| > T, \end{cases} \\
F^*(x, t) &= \begin{cases} F(x, t), & t \in [0, T], \\ -F(x, -t), & t \in [-T, 0), \\ 0, & |t| > T, \end{cases} \\
f^*(x, t) &= \begin{cases} f(x, t), & t \in [0, T], \\ -f(x, -t), & t \in [-T, 0), \\ 0, & |t| > T, \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

*) Относительно $\psi_0(x)$ здесь и ниже достаточно предположить лишь, что интеграл $\int\limits_\Omega \psi_0(x)\,\eta(x, 0)\,dx$ конечен для любой функции $\eta(x, 0)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

и до конца параграфа вместо $Q_{-\infty, \infty}$ будем писать просто $Q$. В силу (4.8) для этих функций справедливо тождество

$$\int\limits_Q -u^*\eta_t\,dx\,dt = \int\limits_Q \left[F_i^*\eta_{x_i} + (F^* - f^*)\,\eta\right] dx\,dt, \tag{4.10}$$

с любой функцией $\eta$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$, равной нулю при $|t| \geqslant T$. Возьмем гладкую функцию $\omega(t)$, равную 1 при $t \in [-T+\delta, T-\delta]$, где $\delta$ — какое-нибудь положительное число, и нулю при $|t| \geqslant T$. Положим в (4.10) $\eta(x, t) = \omega(t)\Phi(x, t)$, где $\Phi$ — произвольный элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$, и полученное равенство перепишем в виде

$$\int\limits_Q -v\Phi_t\,dx\,dt = \int\limits_Q \left[F_i^*\omega\Phi_{x_i} + \left(F^*\omega - f^*\omega + u\omega_t\right)\Phi\right] dx\,dt, \tag{4.11}$$

где $v(x, t) = u(x, t)\,\omega(t)$. Тождество (4.11) есть частный случай тождества

$$\int\limits_Q -v\Phi_t\,dx\,dt = \int\limits_Q \left(F_i\Phi_{x_i} + \sum_{i=1}^{m} F^i\Phi\right) dx\,dt, \tag{4.12}$$

в котором $v$, $F_i$ и $F^i$ суть заданные элементы пространств $\overset{\circ}{V}_2(Q)$, $L_2(Q)$ и $L_{q_i, r_i}(Q)$ с $q_i$ и $r_i$, удовлетворяющими условиям (1.6), соответственно, равные нулю при $|t| \geqslant T$, а $\Phi$ — произвольный элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$. Докажем следующую лемму:

Лемма 4.1. *Если элемент $v$ пространства $\overset{\circ}{V}_2(Q)$ удовлетворяет тождеству* (4.12), *в котором $F_i$ суть элементы $L_2(Q)$, $F^i$ суть элементы $L_{q_i, r_i}(Q)$ с $q_i$ и $r_i$, подчиняющимися условиям* (1.6), *а $\Phi$ — произвольный элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$, причем $v$ и $\Phi$ финитны по $t$ (то есть равны нулю при больших $|t|$), то $v$ принадлежит $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,1/2}(Q)$. Предложение остается справедливым, если «$\circ$» у $V_2$, $W_2^{1,1}$ и $V_2^{1,1/2}$ означает обращение в нуль их элементов лишь на части $S_1 \times (-\infty, \infty)$, $S_1 \subset S$, боковой поверхности $Q$.*

Возьмем в (4.12) в качестве $\Phi$ функцию $\eta_{\bar h}(x, t) = h^{-1}\int\limits_{t-h}^{t} \eta(x, \tau)\,d\tau$, $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$, и во всех членах (4.12) перенесем усреднение $(\quad)_{\bar h}$ со второго множителя на первый согласно формуле (2.9). Это дает соотношение

$$\int\limits_Q -v_h\eta_t\,dx\,dt = \int\limits_Q\left(F_{ih}\eta_{x_i} + \sum_{i=1}^m F_h^i\eta\right)dx\,dt,$$

которое при $\eta(x, t) = \chi(t)\varphi(x)$, где $\chi(t)$ — какая-либо гладкая функция $t$, а $\varphi(x)$ — произвольный элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, можно записать так:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} -\chi_t(v_h, \varphi)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi\left[(F_{ih}, \varphi_{x_i}) + \sum_{i=1}^m (F_h^i, \varphi)\right]dt. \tag{4.13}$$

Отсюда в силу определения обобщенной производной $\frac{d}{dt}$ следует, что для почти всех $t$

$$\frac{d}{dt}(v_h, \varphi) = (F_{ih}, \varphi_{x_i}) + \sum_{i=1}^m (F_h^i, \varphi) \tag{4.14}$$

при любой $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Функция $v_h$ сильно непрерывна по $t$ в норме $L_2(\Omega)$. Тем более непрерывно по $t$ скалярное произведение $(v_h, \varphi)$. Кроме того, $v_h$ имеет обобщенную производную $v_{ht}$ из $L_2(Q)$, поэтому для почти всех $t$

$$\frac{d}{dt}(v_h, \varphi) = (v_{ht}, \varphi)$$

и

$$(v_{ht}, \varphi) = (F_{ih}, \varphi_{x_i}) + \sum_{i=1}^m (F_h^i, \varphi). \tag{4.15}$$

Отсюда при любых положительных $h_1$ и $h_2$ вытекает тождество

$$(v_{h_1t} - v_{h_2t}, \varphi) = (F_{ih_1} - F_{ih_2}, \varphi_{x_i}) + \sum_{i=1}^m (F_{h_1}^i - F_{h_2}^i, \varphi). \tag{4.16}$$

Положим в нем $\varphi = v_{h_1} - v_{h_2}$ (что, очевидно, допустимо), и левую часть представим в виде производной по $t$ от непрерывной функции $\| v_{h_1} - v_{h_2} \|^2_{2, \Omega}$; именно:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| v_{h_1} - v_{h_2} \|^2_{2, \Omega} = \\ = \left(F_{ih_1} - F_{ih_2},\ v_{h_1 x_i} - v_{h_2 x_i}\right) + \sum_{i=1}^{m} \left(F^i_{h_1} - F^i_{h_2},\ v_{h_1} - v_{h_2}\right).$$

Интегрируя это равенство по $t$, получим равенство

$$\frac{1}{2} \| v_{h_1} - v_{h_2} \|^2_{2, \Omega} \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \Big[ \left(F_{ih_1} - F_{ih_2},\ v_{h_1 x_i} - v_{h_2 x_i}\right) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \left(F^i_{h_1} - F^i_{h_2},\ v_{h_1} - v_{h_2}\right) \Big] dt, \quad (4.17)$$

справедливое при всех $t_1$ и $t_2$. Все входящие сюда функции финитны по $t$. При стремлении $h_1$ и $h_2$ к нулю

$$\| F_{ih_1} - F_{ih_2} \|_{2, Q} + \| F^i_{h_1} - F^i_{h_2} \|_{q_i, r_i, Q} + \\ + \| v_{h_1 x} - v_{h_2 x} \|_{2, Q} + \| v_{h_1} - v_{h_2} \|_{q'_i, r'_i, Q} \to 0$$

(см. лемму 4.7 гл. II). Ввиду этого, из (4.17) при $t_1 = -\infty$ и произвольном $t_2$ следует сильная сходимость $v_h$ в $L_2(\Omega)$, равномерная по $t \in (-\infty, \infty)$. Поэтому предельная функция $v$ эквивалентна в $Q$ функции, сильно непрерывной по $t$ в норме $L_2(\Omega)$.

Докажем теперь, что $\int_{-\infty}^{\infty} \| v(x, t+h) - v(x, t) \|^2_{2, \Omega} dt = o(h)$. Для этого возьмем в (4.15) $\varphi(x) = \Delta_h v(x, t) \equiv v(x, t+h) - v(x, t)$ и проинтегрируем обе части равенства по $t$ от $-\infty$ до $+\infty$. Затем в правой части полученного равенства перенесем усреднение $(\ )_h$ с первых множителей на вторые, а разность $\Delta_h$ — со вторых множителей на первые.

В результате этого получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^{-1} \|\Delta_h v\|_{2,\Omega}^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (\Delta_h F_i, v_{hx_i}) + \sum_{l=1}^{m} (\Delta_h F^l, v_h) \right] dt. \tag{4.18}$$

Оценивая правую часть по неравенству Гёльдера и используя равномерную ограниченность $\| v_{hx} \|_{2,Q}$ и $\| v_h \|_{q'_l, r'_l, Q}$ и интегральную непрерывность элементов $F_i$ и $F^l$ пространств $L_2(Q)$ и $L_{q_l, r_l}(Q)$, убедимся, что

$$h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \|\Delta_h v\|_{2,\Omega}^2 dt \leqslant \varepsilon(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Это вместе с сильной непрерывностью $v$ по $t$ в норме $L_2(\Omega)$ и принадлежностью $v$ к $\overset{\circ}{V}_2(Q)$ и означает, что $v \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,1/2}(Q)$. Отсюда и из теоремы 4.1 следует основная для данного параграфа

Теорема 4.2. *При выполнении условий* (1.2) — (1.6) *любое обобщенное решение* $u$ *задачи* (1.9) *из* $\overset{\circ}{V}_2(Q_T)$ *принадлежит* $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,1/2}(Q)$, *и задача* (1.9) *однозначно разрешима в* $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,1/2}(Q_T)$, *если* $\psi_0(x) \in L_2(\Omega)$.

Замечание 4.2. Строго говоря, мы доказали принадлежность $u$ к $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,1/2}(Q_{T-\delta})$, где $\delta$ — какое-либо положительное число, а не к $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,1/2}(Q_T)$. Но это несущественно, ибо решение $u$ и само уравнение можно предварительно продолжить на бóльший цилиндр $Q_{T+\delta}$ с сохранением всех свойств входящих в рассмотрение функций.

Выясним, когда обобщенное решение $u$ задачи (1.9) является элементом $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}(Q_T)$.

*Пространство* $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}(Q)$, где $Q = \Omega \times (-\infty, \infty)$, состоит из всех элементов $u$ пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$, имеющих конечный интеграл

$$|||u|||_Q = \left( \int_0^{\infty} h^{-2} \| u(x, t+h) - u(x, t) \|_{2,Q}^2 dh \right)^{1/2}.$$

Оно будет гильбертовым пространством, если норму в нем определить равенством

$$\| u \|_{W_2^{1,\,1/2}(Q)} = \left[ \| u \|_{2,\,Q}^2 + \| u_x \|_{2,\,Q}^2 + ||| u |||_Q^2 \right]^{1/2}.$$

Нетрудно подсчитать, что

$$||| u |||_Q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} | \tilde{u}(x,\, \alpha)|^2 |\alpha| \, dx \, d\alpha,$$

где $\tilde{u}(x,\, \alpha)$ есть преобразование Фурье функции $u(x,\, t)$ по $t$, т. е.

$$\tilde{u}(x,\, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,\, t) e^{i\alpha t} \, dt.$$

Принадлежность функции $u$ к $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,\,1/2}(Q_T)$ можно определить, например, так: *$u$ есть элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,\,1/2}(Q_T)$* тогда и только тогда, когда функция $\hat{u}(x,\, t) = u'(x,\, t)\,\omega(t)$, где

$$u'(x,\, t) = u'(x,\, -t) = \begin{cases} u(x,\, t), & t \in [0,\, T], \\ u(x,\, 2T - t), & t \in [T,\, 2T], \\ 0, & t > 2T, \end{cases}$$

а

$$\omega(t) = \omega(-t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,\, T], \\ \dfrac{(3T - 2t)}{T}, & t \in \left[T,\, \dfrac{3}{2}T\right], \\ 0, & t > \dfrac{3}{2}T, \end{cases}$$

является элементом $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,\,1/2}(Q)$. В качестве нормы $u$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,\,1/2}(Q_T)$ можно взять число $\| \hat{u}' \|_{W_2^{1,\,1/2}(Q)}$.

Введем еще *банаховы пространства* $L^*_{r,\,q}(Q_T)$, $r,\, q \geqslant 1$. Они состоят из измеримых функций $u$, имеющих конечный интеграл

$$\| u \|^*_{r,\,q,\,Q_T} = \left( \int_{\Omega} \left( \int_0^T | u |^r \, dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (4.19)$$

Значение $\|u\|^*_{r,q,Q_T}$ принимается за норму $u$ в $L^*_{r,q}(Q_T)$. Известно, что

$$\|u\|^*_{r,q,Q_T} \leqslant \|u\|_{q,r,Q_T}, \quad r \leqslant q, \tag{4.20}$$

и

$$\|u\|_{q,r,Q_T} \leqslant \|u\|^*_{r,q,Q_T}, \quad r \geqslant q \tag{4.20$_1$}$$

(см. [22], стр. 204, задача 245). Ввиду этого и неравенства (3.4) гл. II

$$\|u\|^*_{r,q,Q_T} \leqslant \|u\|_{q,r,Q_T} \leqslant \beta\, |u|_{Q_T}, \tag{4.21}$$

если $r \leqslant q$ и если $r$ и $q$ удовлетворяют условиям (3.3) гл. II, гарантирующим справедливость второго из неравенств (4.21).

Предположим, что коэффициенты $a_{ij}$ и $a_i$ и функции $f_i$ удовлетворяют условиям (1.2) — (1.5), а коэффициенты $b_i$ и $a$ и функция $f$ — условиям

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} b_i^2,\ a \right\|^*_{r,q,Q_T} \leqslant \mu_1, \quad r \geqslant q, \tag{4.22}$$

и

$$\|f\|^*_{r_1,q_1,Q_T} \leqslant \mu_1, \quad r_1 \geqslant q_1, \tag{4.23}$$

в которых показатели $q$, $r$, $q_1$ и $r_1$ подчинены ограничениям (1.4) и (1.6). В силу (4.21) из этих требований вытекают прежние предположения (1.2) — (1.6), и поэтому справедливы все сделанные в этой главе выводы. В частности, функция $v(x,t) = u(x,t)\omega(t)$, где $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (1.9) из $\overset{\circ}{V}_2(Q_T)$, удовлетворяет тождеству типа (4.12) (именно тождеству (4.11)) с описанными при нем свойствами функций $F_i$ и $F^i$. Но, как легко подсчитать в данном случае, функции, стоящие при $\Phi$, будут также элементами $L^*_{r_i,q_i}(Q)$ с $r_i$ и $q_i$, подчиненными тем же ограничениям, что и показатели $r_1$ и $q_1$ у $f$. Покажем, что ввиду этого функция $v$ будет элементом $W_2^{1,1/2}(Q)$.

Лемма 4.2. *Если элемент $v$ пространства $\overset{\circ}{V}_2(Q)$ удовлетворяет тождеству* (4.12), *в котором $F_i \in L_2(Q)$, $F^i \in L^*_{r_i,q_i}(Q)$ с $q_i$ и $r_i$, удовлетворяющими условиям* (1.6) *и $q_i \leqslant r_i$, при любых $\Phi$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$, причем $v$ и $\Phi$ финитны* *по $t$, то $v$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,\,1/2}(Q)$. Предложение остается справедливым, если «$\circ$» наверху у $V_2$, $W_2^{1,\,1}$ и $W_2^{1,\,1/2}$ означает обращение в нуль всех их элементов лишь на части $S_1\times(-\infty,\,\infty)$, $S_1\subset S$, боковой поверхности $Q$, которая может быть и пустой.*

Для доказательства этого предложения используем преобразование Фурье по $t$, обозначая, как и выше, преобразование Фурье функции $\psi(x,\,t)$ по $t$ через $\tilde\psi(x,\,\alpha)$, так что, в частности,

$$\tilde v(x,\,\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}v(x,\,t)\,e^{i\alpha t}\,dt.$$

Надо установить конечность интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega}|\alpha|\,|\tilde v(x,\,\alpha)|^2\,dx\,d\alpha$.

Нетрудно видеть, что преобразование Фурье $\tilde v_h(x,\alpha)$ функции $v_h(x,\,t)$ при каждом $\alpha$ есть элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а преобразование Фурье от функции $v_{ht}(x,\,t)$ равно $-i\alpha\tilde v_h(x,\,\alpha)$. Поэтому из (4.15) следует тождество

$$-i\alpha(\tilde v_h,\,\varphi)=(\tilde F_{lh},\,\varphi_{x_l})+\sum_{l=1}^{m}(\tilde F_h^l,\,\varphi). \tag{4.24}$$

Возьмем в нем в качестве $\varphi$ функцию $\chi(\alpha)\bar{\tilde v}_h(x,\,\alpha)$, где $\chi(\alpha)$ равна $i$ при $\alpha>0$ и $-i$ при $\alpha<0$, и проинтегрируем обе части по $\alpha$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega}|\alpha|\,|\tilde v_h(x,\,\alpha)|^2\,dx\,d\alpha=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega}\left(\chi\tilde F_{lh}\bar{\tilde v}_{hx_l}+\sum_{l=1}^{m}\chi\tilde F_h^l\bar{\tilde v}_h\right)dx\,d\alpha. \tag{4.25}$$

Функции $\chi(\alpha)\tilde F_{lh}(x,\,\alpha)$, $\chi(\alpha)\tilde F_h^l(x,\,\alpha)$ являются преобразованиями Фурье функций $\hat F_{lh}(x,\,t)$, $\hat F_h^l(x,\,t)$, получаемых из функций $F_{lh}(x,\,t)$, $F_h^l(x,\,t)$ с помощью преобразования Гильберта (см. книгу [57]). Известно [57], что преобразование Гильберта является линейным ограниченным оператором из $L_r(-\infty, \infty)$ в $L_r(-\infty, \infty)$ при любом $r > 1$, так что

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{F}_{lh}(x, t)|^r\, dt\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant c\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_{lh}(x, t)|^r\, dt\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{4.26}$$

и аналогично для $F_h^l$. При $r=2$ вместо (4.26) имеет место знак равенства, если $c$ положить равной 1. Ввиду этого и равенства Парсеваля из (4.25) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega} |\alpha|\,|\tilde{v}_h(x, \alpha)|^2\, dx\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega}\left(\widehat{F}_{lh} v_{hx_l} + \sum_{l=1}^{m} \widehat{F}_h^l v_h\right) dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \|\widehat{F}_{lh}\|_{2, Q}\, \|v_{hx_l}\|_{2, Q} + \sum_{l=1}^{m} \|\widehat{F}_h^l\|^{*}_{r_l, q_l, Q}\, \|v_h\|^{*}_{r_l', q_l', Q} \leqslant$$

$$\leqslant \|F_{lh}\|_{2, Q}\, \|v_{hx_l}\|_{2, Q} + c\beta \sum_{l=1}^{m} \|F_h^l\|^{*}_{r_l, q_l, Q} |v_h|_Q, \tag{4.27}$$

ибо показатели $r_l'$, $q_l'$ таковы, что при них имеет место оценка (4.22). Переходя в этом неравенстве к пределу по $h \to 0$, убеждаемся в конечности интеграла, стоящего слева, а тем самым и в принадлежности $v$ к $\overset{\circ}{W}{}_2^{1, 1/2}(Q)$. Лемма 4.2 доказана. Из нее следует

Теорема 4.3. *Пусть $u$ есть обобщенное решение из $\overset{\circ}{V}_2(Q_T)$ задачи* (1.9), *и пусть $a_{ij}$, $a_i$ и $f_i$ удовлетворяют условиям* (1.2)—(1.5), *а $b_i$, $a$ и $f$ — условиям* (4.22), (4.23) *с указанными при них значениями показателей. Тогда $u$ есть элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^{1, 1/2}(Q_T)$.*

Аналогично леммам 4.1 и 4.2 доказывается следующая

Лемма 4.3. *Если элемент $v$ пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{1, 0}(Q)$ удовлетворяет тождеству*

$$\int_Q -v\Phi_t\, dx\, dt = \int_Q \left(F_i\Phi_{x_i} + F\Phi\right) dx\, dt, \tag{4.28}$$

*в котором $\Phi$ есть произвольный элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^{1, 1}(Q)$, а $F_i$ и $F$ — заданные функции из $L_2(Q)$ и $L_{q, 2}(Q)$, где $q = \frac{2n}{n+2}$ при $n \geqslant 3$, $q > 1$ при $n=2$ и $q=1$ при $n=1$, причем $v$ и $\Phi$*

*финитны по $t$, то $v \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,\,1/2}(Q)$. Если же при этом $F \in L^{*}_{2,\,q}(Q)$, то $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,\,1/2}(Q)$. Предложение остается справедливым, если «$\circ$» у $W_2^{1,\,0}$, $W_2^{1,\,1}$, $V_2^{1,\,1/2}$ и $W_2^{1,\,1/2}$ означает обращение в нуль их элементов лишь на части $S_1 \times (-\infty,\ \infty)$, $S_1 \subset S$, боковой поверхности $Q$, которая может быть и пустой.*

При ее выводе член $\int\limits_Q F\Phi\,dx\,dt$ оценивается в первом случае так:

$$\left|\int\limits_Q F\Phi\,dx\,dt\right| \leqslant \|F\|_{q,\,2,\,Q}\|\Phi\|_{q',\,2,\,Q} \leqslant c\,\|F\|_{q,\,2,\,Q}\|\Phi\|^{(1)}_{2,\,Q},$$

а во втором —

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\Omega} \chi\tilde{F}_h\tilde{\tilde{v}}_h\,dx\,d\alpha\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\Omega} \hat{F}_h v_h\,dx\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\hat{F}_h\|_{2,\,q,\,Q}\|v_h\|_{2,\,q',\,Q} \leqslant c\,\|F_h\|_{2,\,q,\,Q}\|v_h\|^{(1)}_{2,\,Q}.$$

В обоих случаях мы воспользовались вложимостью $\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(\Omega)$ в $L_{q'}(\Omega)$ (см. теорему 2.1 гл. II).

Предположим теперь, что $u$ есть обобщенное решение из $V_2(Q)$ уравнения (1.1). Тогда функция $v(x,\ t) = u(x,\ t)\omega(t)$ удовлетворяет тождеству (4.11) при всех $\Phi \in W_2^{1,\,1}(Q)$, если $\omega(t)$ есть гладкая функция, равная нулю при $t \leqslant \delta$ и $t \geqslant T-\delta$, где $\delta$ — какое-либо положительное число. Из этого тождества, как показано выше, следуют тождества (4.15), (4.16) и (4.24). Полагая в (4.16) $\varphi(x) = [v_{h_1}(x,\ t) - v_{h_2}(x,\ t)]\zeta^2(x)$, где $\zeta(x)$ — гладкая неотрицательная функция $x$, равная нулю на $S$, придем к равенству, из которого заключим о сильной непрерывности по $t$ функции $v(x,\ t)\zeta(x)$ в норме $L_2(\Omega)$. Из равенства (4.15) с $\varphi(x) = \zeta^2(x)\Delta_h v(x,\ t)$ выведем стремление к нулю интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} h^{-1}\|\zeta\Delta_h v\|^2_{2,\,\Omega}\,dt$ при $h \to 0$. Наконец, равенство (4.24) с $\varphi(x)=\chi(\alpha)\bar{\bar{v}}_h(x,\alpha)\zeta^2(x)$ позволит нам убедиться в принадлежности $v(x,t)\zeta(x)$ к $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,\,1/2}(Q)$. Если $u\in V_2(Q_T)$ и удовлетворяет тождеству (1.16), то функцию $\omega(t)$ в $v$ можно взять равной единице при $|t|\leqslant T-\delta$, $\delta>0$. Таким образом, доказана

Теорема 4.4. *Если коэффициенты и свободные члены уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.2, *то любое его обобщенное решение и из* $V_2(Q_T)$ *принадлежит* $V_2^{1,\,1/2}(\Omega'\times[\varepsilon,t_1])$, *где* $\Omega'$ — *произвольная строго внутренняя подобласть области* $\Omega$, $\varepsilon>0$, *а* $t_1<T$. *Любое же обобщенное решение и из* $V_2(Q_T)$ *уравнения* (1.1), *удовлетворяющее тождеству* (1.16) *с* $\eta$ *из* $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,\,1}(Q_T)$, *равной нулю при* $t=T$, *принадлежит* $V_2^{1,\,1/2}(\Omega'\times[0,t_1])$. *Если коэффициенты и свободные члены уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.3, *то любое его обобщенное решение и из* $V_2(Q_T)$ *уравнения* (1.1) *принадлежит* $W_2^{1,\,1/2}(\Omega'\times[\varepsilon,t_1])$, $\varepsilon>0$, $t_1<T$, *а любое обобщенное решение и из* $V_2(Q_T)$, *удовлетворяющее тождеству* (1.16) *с* $\eta$ *из* $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,\,1}(Q_T)$, *равной нулю при* $t=T$, *принадлежит* $W_2^{1,\,1/2}(\Omega'\times[0,t_1])$.

Обобщенное решение задачи (1.9) устойчиво в норме пространства $V_2^{1,\,0}(Q_T)$ по отношению к вариациям коэффициентов и свободных членов уравнения, а также функции $\psi_0(x)$, задающей начальное условие. Точнее, верна

Теорема 4.5. *Пусть для всех операторов*

$$\mathscr{L}^m u\equiv u_t-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^m u_{x_j}+a_i^m u\right)+b_i^m u_{x_i}+a^m u,$$

$$m=1,\,2,\,\ldots,$$

*выполнены условия теоремы* 4.1 *с одними и теми же постоянными. Пусть* $a_{ij}^m(x,t)$ *оставаясь равномерно ограниченными, сходятся почти всюду к* $a_{ij}$, *а функции* $a_i^m$, $b_i^m$, $a^m$, $f_i^m$, $f^m$ *и* $\psi_0^m$ *сходятся к* $a_i$, $b_i$, $a$, $f_i$, $f$ *и* $\psi_0$ *в нормах пространств, к которым они принадлежат по условиям теоремы* 4.1. *Тогда обобщенные решения* $u^m$

*из* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *задач*

$$\mathcal{L}^m u = \frac{\partial f_i^m}{\partial x_i} - f^m, \quad u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = \psi_0^m, \tag{4.29}$$

*сходятся сильно в* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *к обобщенному решению и предельной задачи* (1.9).

Для доказательства этого предложения вычтем из интегрального тождества (1.10) для $u^m$ интегральное тождество (1.10) для $u$ и результат вычитания запишем в виде интегрального тождества для функции $v^m = u^m - u$ следующим образом:

$$\int_\Omega v^m \eta \, dx \Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{Q_{t_1}} \left[ -v^m \eta_t + a_{ij}^m v_{x_j}^m \eta_{x_i} + a_i^m v^m \eta_{x_i} + \right.$$
$$\left. + b_i^m v_{x_i}^m \eta + a^m v^m \eta \right] dx\,dt = \int_{Q_{t_1}} \left[ (a_{ij} - a_{ij}^m) u_{x_j} \eta_{x_i} + \right.$$
$$+ (a_i - a_i^m) u \eta_{x_i} + (b_i - b_i^m) u_{x_i} \eta + (a - a^m) u \eta +$$
$$\left. + (f_i - f_i^m) \eta_{x_i} + (f - f^m) \eta \right] dx\,dt.$$

Правую часть этого тождества запишем как $\int_{Q_{t_1}} [F_i^m \eta_{x_i} + F^m \eta + (f - f^m)\eta]\,dx\,dt$. Функции $F_i^m$ и $F^m$ составлены из членов того же типа, что и $F_i$ и $F$ в ($4.8_{1-2}$), и потому в силу приведенных там соображений удовлетворяют условиям теоремы 4.1. Следовательно, $v^m$ может быть рассмотрено как обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (4.16), в которой $v^m|_{t=0} = \psi_0^m - \psi_0$, $f_i^m$ есть $-F_i^m$, а $f^m$ равно $-F^m - f + f^m$. По лемме 2.1 для него верна энергетическая оценка

$$|v^m|_{Q_T} \leqslant c \left[ \| \psi_0^m - \psi_0 \|_{2,\Omega} + \| \mathbf{F}^m \|_{2,Q_T} + \right.$$
$$\left. + \| F^m \|_{q_2, r_2, Q_T} + \| f^m - f \|_{q_1, r_1, Q_T} \right],$$

из которой видно, что $|v^m|_{Q_T} \to 0$ при $m \to \infty$. Более того, $\sup\limits_{0 \leqslant h \leqslant T} h^{-1} \| v^m(x, t+h) - v^m(x, t) \|_{2, Q_{T-h}} \to 0$, а при выполнении условий леммы 4.2 и $|||v^m|||_{Q_T} \to 0$ при $m \to \infty$.

## § 5. О разрешимости других краевых задач. Задача Коши

Рассмотрим для уравнений (1.1) вторую краевую задачу, т. е. задачу определения $u(x, t)$ в $Q_T$ из условий

$$\mathscr{L}u = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - f; \quad \frac{\partial u}{\partial \mathscr{N}} + \sigma(s, t)\, u|_{S_T} = 0; \qquad u|_{t=0} = \psi_0(x), \tag{5.1}$$

где $\sigma(s, t)$, так же как $\psi_0(x)$, коэффициенты и свободные члены $f_i$ и $f$ уравнения (1.1), суть заданные функции, принадлежащие определенным классам, $\frac{\partial u}{\partial \mathscr{N}} = a_{ij}u_{x_j}\cos\alpha_i$, $\alpha_i$ — угол, образованный внешней нормалью к $S$ с осью $x_i$, а $a_{ij}(x, t)$ те же, что и в уравнении (1.1). Случай неоднородного граничного условия сводится к однородному простой заменой неизвестной функции $u(x, t)$ на $v(x, t) = u(x, t) - \psi(x, t)$, где $\psi(x, t)$ — какая-либо функция, удовлетворяющая поставленному неоднородному граничному условию. Нередко задачу (5.1) называют третьей краевой задачей, а ее частный случай, в котором $\sigma(s, t) = 0$, — второй краевой задачей.

Относительно уравнения (1.1) и функции $\psi_0(x)$ предполагаем то же, что и в §§ 1, 2, 4. Границу $S$ области $\Omega$ считаем кусочно-гладкой, а функцию $\sigma(s, t)$ — удовлетворяющей условию

$$\|\sigma\|_{q_1, r_1, S_T} \leqslant \mu_1, \tag{5.2}$$

где $q_1$ и $r_1$ подчиняются ограничениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r_1} + \frac{n-1}{2q_1} = \frac{1}{2}, \\ &q_1 \in (n-1, \infty],\ r_1 \in [2, \infty) \quad \text{при} \quad n > 2, \\ &q_1 \in (1, \infty),\ r_1 \in (2, \infty) \quad \text{при} \quad n = 2. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

В случае $n=1$ считаем, что $\|\sigma\|_{r_1, S_T} \leqslant \mu_1$, $r_1 = 2$ *). С помощью

*) При $n = 1$ нормы вида $\|\cdot\|_{q, r, S_T}$ надо всюду заменить на нормы вида $\|\cdot\|_{r, S_T}$.

неравенств (1.8) и (3.11), (3.12) главы II нетрудно проверить, что при таких условиях на $S$ и $\sigma$ интеграл $\int_0^T \int_S |\sigma u \eta| \, ds \, dt$ будет конечен для любых $u(x, t)$ и $\eta(x, t)$ из $V_2(Q_T)$ и допускает оценку

$$\int_0^T \int_S |\sigma u \eta| \, ds \, dt \leqslant \|\sigma\|_{q_1, r_1, S_T} \|u\|_{\frac{2q_1}{q_1-1}, \frac{2r_1}{r_1-1}, S_T} \times$$
$$\times \|\eta\|_{\frac{2q_1}{q_1-1}, \frac{2r_1}{r_1-1}, S_T} \leqslant c^2 \|\sigma\|_{q_1, r_1, S_T} |u|_{Q_T} |\eta|_{Q_T}, \qquad (5.4)$$

где постоянная $c$ взята из неравенств (3.11), (3.12) главы II.

*Обобщенным решением из* $V_2(Q_T)$ (*из* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *или* $V_2^{1,1/2}(Q_T)$) ***задачи*** (5.1) назовем функцию $u(x, t)$ *из* $V_2(Q_T)$ (соответственно из $V_2^{1,0}(Q_T)$ или $V_2^{1,1/2}(Q_T)$, удовлетворяющую тождеству

$$-\int_{Q_T} u \eta_t \, dx \, dt + \int_0^T [\mathscr{L}_1(u, \eta) + \mathscr{L}_2(\hat{\mathbf{f}}, \eta)] \, dt +$$
$$+ \int_{S_T} \sigma u \eta \, ds \, dt = \int_\Omega \psi_0(x) \eta(x, 0) \, dx \qquad (5.5)$$

при любой $\eta(x, t)$ из $W_2^{1,1}(Q_T)$, равной нулю при $t = T$. Это тождество получается из тождества

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\mathscr{L} u - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f\right) \eta \, dx \, dt = 0$$

в результате однократного интегрирования по частям по $t$ и по $x_i$ в некоторых членах и учета начального и граничного условий из (5.1). Так же как и в § 1, проверяется, что все интегралы из (5.5) конечны для любой функции $u$ из $V_2(Q_T)$ и $\eta$ из $W_2^{1,1}(Q_T)$ и что вместо (5.5) можно было бы постулировать выполнение тождеств

$$\int_\Omega u(x, t)\eta(x, t)\,dx + \int_0^t \int_\Omega -u\eta_t\,dx\,dt +$$
$$+ \int_0^t [\mathscr{L}_1(u, \eta) + \mathscr{L}_2(\hat{\mathbf{f}}, \eta) + \mathscr{L}_3(u, \eta)]\,dt =$$
$$= \int_\Omega \psi_0(x)\eta(x, 0)\,dx \qquad (5.6)$$

с

$$\mathscr{L}_3(u, \eta) = \int_S \sigma u\eta\,ds$$

для почти всех $t$ (соответственно для всех $t$) из $[0, T]$ и произвольной функции $\eta(x, t)$ из $W_2^{1,1}(Q_T)$.

Для доказательства разрешимости задачи (5.1) в $V_2(Q_T)$ снова используется метод Галёркина. В отличие от § 4 функции $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, должны образовывать фундаментальную систему в $W_2^1(\Omega)$, а не в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Пусть, кроме того, $(\psi_k, \psi_l) = \delta_k^l$. Ищем приближенное решение $u^N$ в виде

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t)\,\psi_k(x),$$

где $c_k^N(t) = (u^N, \psi_k)$ определяются из условий

$$\frac{d}{dt}(u^N, \psi_k) + \mathscr{L}_1(u^N, \psi_k) + \mathscr{L}_3(u^N, \psi_k) + \mathscr{L}_2(\hat{\mathbf{f}}, \psi_k) = 0,$$
$$c_k^N(0) = (\psi_0, \psi_k).$$

Дальнейшие рассуждения и оценки аналогичны приведенным в § 4. То, что все встречающиеся функции на этот раз не обращаются в нуль на $S_T$, несущественно, надо лишь для оценки $\|u\|_{q, r, Q_T}$ через $|u|_{Q_T}$ вместо неравенства (3.4) главы II использовать неравенство (3.8) главы II для функций, не равных нулю на $S_T$. Для оправдания предельного перехода в члене $\int_{S_T} \sigma u^N \Phi^{N'}\,ds\,dt$ заметим, что из равномерной ограниченности норм $|u^N|_{Q_T}$ следует в силу неравенств (3.1)—(3.12) главы II равномерная ограниченность и слабая компактность $u^N(x, t)$ в норме $L_{q_2, r_2}(S_T)$, где $\frac{n-1}{2q_2}+\frac{1}{r_2}=\frac{n}{4}$ с $r_2 \in [2, \infty]$, $q_2 \in \left[\frac{2(n-1)}{n}, \frac{2(n-1)}{n-2}\right]$ при $n \geqslant 3$, с $r_2 \in (2, \infty]$, $q_2 \in [1, \infty)$ при $n=2$, и в норме $L_4(S_T)$ при $n=1$. В частности, это верно для $q_2=\bar{q}_1 \equiv 2q_1/(q_1-1)$, $r_2=\bar{r}_1 \equiv 2r_1/(r_1-1)$, где $q_1$ и $r_1$ взяты из (5.3). С другой стороны, из теоремы 2.1 главы II и оценки (5.4) вытекает принадлежность произведения $\sigma\Phi^{N_1}$ сопряженному с $L_{\bar{q}_1, \bar{r}_1}(S_T)$ (с $L_4(S_T)$) пространству $L_{q_3, r_3}(S_T)$ ($L_{4/3}(S_T)$). Все это обеспечивает возможность перейти в интеграле $\int\limits_{S_T} \sigma u^N \Phi^{N'}\, ds\, dt$ к пределу при $N \to \infty$ по слабо сходящейся в $L_{\bar{q}_1, \bar{r}_1}(S_T)$ (в $L_4(S_T)$) подпоследовательности $u^{N_k}$, а затем сделать предельный переход по $N' \to \infty$.

Так, с помощью метода Галёркина доказывается существование по крайней мере одного обобщенного решения $u$ задачи (5.1) в классе $V_2(Q_T)$. Принадлежность таких решений к $V_2^{1, 1/2}(Q_T)$ и $W_2^{1, 1/2}(Q_T)$ следует из лемм 4.1 и 4.2. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 5.1. *Предположим, что коэффициенты и свободные члены в уравнении и граничном условии в* (5.1) *подчиняются ограничениям* (1.2)—(1.6) и (5.2)—(5.3), *а* $\Omega$ — *область с кусочно-гладкой границей* $S$. *Тогда при любой* $\psi_0(x)$ *из* $L_2(\Omega)$ *существует единственное решение задачи* (5.1) *в классе* $V_2^{1, 1/2}(Q_T)$. *Любое решение из* $V_2(Q_T)$ *задачи* (5.1) *принадлежит* $V_2^{1, 1/2}(Q_T)$. *Если к тому же* $b_i$, $a$ *и* $f$ *удовлетворяют условиям* (4.22) и (4.23) *с указанными при них значениями показателей, а* $\sigma(s, t) \in \overset{*}{L}_{r_1, q_1}(S_T)$ *с* $r_1$ *и* $q_1$, *подчиняющимися условиям:* $q_1 \leqslant r_1$ *и*

$$\frac{1}{r_1}+\frac{n-1}{2q_1}=\frac{1}{2},$$

$$\begin{array}{lll} q_1 \in (n-1, \infty], & r_1 \in [2, \infty) & \text{при} \quad n>2, \\ q_1 \in (1, \infty), & r_1 \in (2, \infty) & \text{при} \quad n=2, \\ & r_1=2, & \text{при} \quad n=1, \end{array}$$

*то и будет элементом* $W_2^{1, 1/2}(Q_T)$.

Такой же результат справедлив и для краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}u = \frac{\partial f_l}{\partial x_l} - f, \\ &u|_{S'_T} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \omega} + \sigma u\Big|_{S''_T} = 0, \quad u|_{t=0} = \psi_0(x), \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

где $S'_T = S' \times [0, T]$, $S''_T = S'' \times [0, T]$ и $S' \cup S'' = S$. Решение ее при соблюдении предположений теоремы 5.1 будет элементом $V_2^{1,\,1/2}(Q_T)$ $\left(W_2^{1,\,1/2}(Q_T)\right)$, равным нулю на $S'_T$. Доказывается это так же, как и теорема 5.1, только функции $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, в методе Галёркина должны образовывать фундаментальную систему не в $W_2^1(\Omega)$, а в подпространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, состоящем из всех его элементов, равных нулю на $S'$.

З а д а ч а  К о ш и. Рассмотрим в слое $R_T = E_n \times [0, T]$ задачу Коши для уравнения (1.1) с начальным условием

$$u|_{t=0} = \psi_0(x), \quad x \in E_n. \tag{5.8}$$

*Обобщенным решением из* $V_2^{1,\,1/2}(R_T)$ *задачи Коши* (1.1), (5.7) будем называть функцию $u(x, t)$ из $V_2^{1,\,1/2}(R_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-\int_0^T \int_{E_n} u\eta_t \, dx \, dt + \int_0^T [\mathscr{L}_1(u, \eta) + \mathscr{L}_2(\hat{\mathbf{f}}, \eta)] \, dt = \\ = \int_{E_n} \psi_0(x) \eta(x, 0) \, dx \tag{5.9}$$

с

$$\mathscr{L}_1(u, \eta) = \int_{E_n} \left[\left(a_{ij} u_{x_j} + a_i u\right) \eta_{x_i} + \left(b u_{x_i} + a u\right) \eta\right] dx,$$

$$\mathscr{L}_2(\hat{\mathbf{f}}, \eta) = \int_{E_n} \left(f_i \eta_{x_i} + f\eta\right) dx$$

при любой $\eta(x, t)$ из $V_2^{1,\,1}(R_T)$, равной нулю при $t = T$.

Возможны другие корректные постановки задачи Коши в классах функций с более слабыми ограничениями на бесконечности, например в классе функций, допускающих экспоненциальный рост $e^{c_1x^2}$ по $x$ при $|x|\to\infty$. Мы здесь не занимаемся исследованием этих вопросов (по этому поводу см. работы, упомянутые на стр. 29) и ограничиваемся рассмотрением решений класса $V_2^{1,\frac{1}{2}}(R_T)$.

Имеет место следующая теорема существования и единственности.

Теорема 5.2. *Пусть коэффициенты и свободные члены уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям* (1.2)—(1.6) *с* $\overline{Q}_T=R_T$. *Тогда при любой функции* $\psi_0(x)$ *из* $L_2(E_n)$ *существует единственное обобщенное решение* $u(x, t)$ *класса* $V_2^{1,\frac{1}{2}}(R_T)$ *задачи Коши* (1.1), (5.7).

При выполнении условий теоремы 4.3 в $R_T$ решение задачи (1.1), (5.8) будет также элементом $W_2^{1,1/2}(R_T)$. Доказательства, данные выше для ограниченных областей $\Omega$, переносятся непосредственно и на неограниченные $\Omega$, в частности на $\Omega=E_n$, ибо оценки, на которых они базируются, не зависят от размеров $\Omega$.

## § 6. Об оценках в пространстве $W_2^{2,1}(Q_T)$ и их следствиях

В работе [$33_4$] (см. также [$33_{6,13}$] и [$17_3$]) было показано, что операторы $\mathscr{L}$ параболического типа обладают теми же свойствами, что и эллиптические: из принадлежности $\mathscr{L}u$ к $L_2(Q_T)$ следует (при выполнении каких-либо однородных краевых условий) принадлежность к $L_2(Q_T)$ каждого из составляющих $\mathscr{L}u$ слагаемых. Хотя этот факт был обобщен впоследствии на пространства $L_p(Q_T)$ и $H^{l,\frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$ (доказательству этих более общих предложений отведено центральное место в главе IV), мы приведем здесь его доказательство и из-за простоты самого доказательства и из-за ряда следствий, возникающих при этом и не вытекающих из теорем главы IV. Основу его составляют аналогичные утверждения об эллиптической части оператора $\mathscr{L}u$ ([$33_{2,3,11}$], см. также § 2 главы II и § 8 главы III книги [1]), формулируемые ниже (в одном частном случае) в виде неравенства (6.6).

Чтобы не загромождать книгу выкладками, аналогичными проведенным в предыдущих параграфах, мы ограничимся «укороченным» уравнением $\mathscr{L}_0 u = f$, сохранив в нем лишь главные члены. Симметричность полученного при этом уравнения несущественна, равно как несущественно и то, что мы берем первое краевое условие.

Итак, возьмем дифференциальный оператор

$$\mathscr{L}_0 u \equiv \alpha u_t - \mathscr{M} u \equiv \alpha(x, t) u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t) u_{x_j}\right)$$

с $\alpha > 0$ и $a_{ij}$, удовлетворяющими неравенствам (1.2), и краевое условие

$$u|_{S_T} = 0. \tag{6.1}$$

Предположим сначала, что $\alpha(x, t)$ удовлетворяет неравенствам $0 < \nu_1 \leqslant \alpha(x, t) \leqslant \mu_1$ и имеет производную $\alpha_t$, причем $\operatorname{vrai}\max_{x \in \Omega} |\alpha_t(x, t)| \equiv \mu_2(t)$, $\int_0^T \mu_2(t)\, dt < \infty$. Рассмотрим выражение $\int_{Q_t} \mathscr{L}_0 u \cdot u\, dx\, dt$ и преобразуем его следующим образом:

$$\int_{Q_t} \mathscr{L}_0 u \cdot u\, dx\, dt = \int_{Q_t} \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha}{2} u^2\right) - \frac{1}{2}\alpha_t u^2 + a_{ij} u_{x_j} u_{x_i}\right] dx\, dt.$$

Отсюда в силу наших предположений об $\alpha$ и $a_{ij}$ имеем

$$\nu_1 \int_\Omega u^2(x, t)\, dx + 2\nu \int_{Q_t} u_x^2\, dx\, dt \leqslant \mu_1 \int_\Omega u^2(x, 0)\, dx + {}$$
$$+ \int_0^t [1 + \mu_2(t)] \int_\Omega u^2(x, t)\, dx\, dt + \int_{Q_t} (\mathscr{L}_0 u)^2\, dx\, dt. \tag{6.2}$$

Обозначим

$$1 + \mu_2(t) = \mu_3(t), \qquad \nu_1 \int_0^t \mu_3(t) \int_\Omega u^2(x, t)\, dx = y(t),$$

а

$$\mu_1 \int_{\Omega} u^2(x, 0)\,dx + \int_{Q_t} (\mathscr{L}_0 u)^2\,dx\,dt = \mathscr{F}(t).$$

Для $y(t)$ из (6.2) следует неравенство

$$\frac{dy(t)}{dt} \leqslant \nu_1^{-1}\mu_3(t)\,y(t) + \mu_3(t)\,\mathscr{F}(t),$$

из которого в свою очередь в силу леммы 5.5 главы II получим

$$y(t) \leqslant \exp\left\{\nu_1^{-1}\int_0^t \mu_3(\tau)\,d\tau\right\}\int_0^t \mu_3(\tau)\,\mathscr{F}(\tau)\,d\tau.$$

Подставив эту оценку в (6.2), получим первое из интересующих нас неравенств

$$\nu_1 \| u(x, t)\|^2_{2,\Omega} + 2\nu \| u_x \|^2_{2, Q_t} \leqslant$$

$$\leqslant \left[1 + \exp\left\{\nu_1^{-1}\int_0^t \mu_3(\tau)\,d\tau\right\}\nu_1^{-1}\int_0^t \mu_3(\tau)\,d\tau\right] \times$$

$$\times \left[\mu_1 \| u(x, 0)\|^2_{2,\Omega} + \| \mathscr{L}_0 u\|^2_{2, Q_t}\right]. \qquad (6.3)$$

Аналогичное неравенство верно и для полного оператора $\mathscr{L}$ из (1.1), если только коэффициенты его удовлетворяют условиям (1.3), (1.4).

Пусть теперь коэффициенты $a_{ij}(x, t)$ имеют производную $a_{ijt}$, причем $\operatorname{vrai}\max\limits_{x\in\Omega} | a_{ijt}(x, t)| \leqslant \mu_4(t)$, $\int_0^T \mu_4(\tau)\,d\tau < \infty$, а $\alpha$ — ограниченная функция, удовлетворяющая неравенствам $0 < \nu_1 \leqslant \alpha(x, t) \leqslant \mu_1$.

Рассмотрим интеграл $\int_{Q_t} \mathscr{L}_0 u \cdot u_t\,dx\,dt$ и преобразуем его следующим образом:

$$\int_{Q_t} \mathscr{L}_0 u \cdot u_t\,dx\,dt = \int_{Q_t} \left(\alpha u_t^2 + a_{ij}u_{x_j}u_{x_it}\right) dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega} a_{ij}u_{x_j}u_{x_i}\,dx\,\Big|_{t=0}^{t=t} + \int_{Q_t}\left(\alpha u_t^2 - \frac{1}{2}a_{ijt}u_{x_j}u_{x_i}\right) dx\,dt,$$

откуда ввиду наших предположений об $\alpha$ и $a_{ij}$ следует

$$\frac{\nu}{2}\|u_x(x, t)\|^2_{2,\Omega}+\int\limits_{Q_t}\alpha u_t^2\,dx\,dt \leqslant \frac{\mu}{2}\|u_x(x, 0)\|^2_{2,\Omega}+$$
$$+\frac{\nu_1}{2}\|u_t\|^2_{2,Q_t}+\frac{1}{2\nu_1}\|\mathscr{L}_0 u\|^2_{2,Q_t}+\frac{n}{2}\int\limits_0^t \mu_4(t)\|u_x(x, t)\|^2_{2,\Omega}\,dt,$$

а потому и

$$\nu\|u_x(x, t)\|^2_{2,\Omega}+\nu_1\|u_t\|^2_{2,Q_t}\leqslant$$
$$\leqslant \mu\|u_x(x, 0)\|^2_{2,\Omega}+\nu_1^{-1}\|\mathscr{L}_0 u\|^2_{2,Q_t}+n\int\limits_0^t \mu_4(t)\|u_x\|^2_{2,\Omega}\,dt. \tag{6.4}$$

Введем обозначения

$$\nu\int\limits_0^t \mu_4(\tau)\|u_x(x, \tau)\|^2_{2,\Omega}\,d\tau=y(t)$$

и

$$\mu\|u_x(x, 0)\|^2_{2,\Omega}+\nu_1^{-1}\|\mathscr{L}_0 u\|^2_{2,Q_t}=\mathscr{F}(t).$$

Из неравенства (6.4) вытекает неравенство

$$\frac{dy(t)}{dt}\leqslant n\nu^{-1}\mu_4(t)\,y(t)+\mu_4(t)\,\mathscr{F}(t), \tag{6.5}$$

которое, как доказано в лемме 5.5 главы II, гарантирует оценку

$$y(t)\leqslant \exp\left\{n\nu^{-1}\int\limits_0^t \mu_4(\tau)\,d\tau\right\}\int\limits_0^t \mu_4(\tau)\,\mathscr{F}(\tau)\,d\tau.$$

Подставляя ее в (6.4), получим второе из интересующих нас неравенств

$$\nu\|u_x(x, t)\|^2_{2,\Omega}+\nu_1\|u_t\|^2_{2,Q_t}\leqslant$$
$$\leqslant\left[1+\exp\left\{n\nu^{-1}\int\limits_0^t \mu_4(\tau)\,d\tau\right\}n\nu^{-1}\int\limits_0^t \mu_4(\tau)\,d\tau\right]\times$$
$$\times\left[\mu\|u_x(x, 0)\|^2_{2,\Omega}+\nu_1^{-1}\|\mathscr{L}_0 u\|^2_{2,Q_t}\right]. \tag{6.6}$$

Замечание 6.1. Аналогичное неравенство верно и для полного уравнения (1.1), если только

$$\int_0^T \operatorname{vrai}\max_{x\in\Omega} |a_{it}(x, t)|\, dt < \infty$$

и коэффициенты $a_i$, $b_i$ и $a$, например, ограничены по абсолютной величине. Доказывается это так же, как неравенство (6.6).

Предположим теперь, что $a_{ij}$ имеют производные $\frac{\partial}{\partial x_k} a_{ij}$, причем $\operatorname{vrai}\max_{Q_T}\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right| \leqslant \mu_5 < \infty$ *), $\alpha(x, t) \equiv 1$ и $S \in O^2$. Рассмотрим интеграл $\int_{Q_t} \mathscr{L}_0 u(-\Delta u)\, dx\, dt$ и преобразуем его следующим образом:

$$\int_{Q_t} \mathscr{L}_0 u(-\Delta u)\, dx\, dt = \int_{Q_t} \left(u_{x_k t} u_{x_k} + \mathscr{M} u\, \Delta u\right) dx\, dt. \tag{6.7}$$

Но в силу (2.24) главы II для любой функции $u$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$

$$\int_\Omega \mathscr{M} u\, \Delta u\, dx \geqslant \frac{3}{4} \nu \|u_{xx}\|_{2,\Omega}^2 - c_1 \|u_x\|_{2,\Omega}^2, \tag{6.8}$$

где $c_1$ — постоянная, зависящая лишь от $\nu$, $\mu$, $\mu_5$ и $S$. Поэтому из (6.7) следует

$$\|u_x(x, t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3\nu}{2} \|u_{xx}\|_{2,Q_t}^2 \leqslant \|u_x(x, 0)\|_{2,\Omega}^2 + \\ + 2c_1 \|u_x\|_{2,Q_t}^2 + \varepsilon \|\Delta u\|_{2,Q_t}^2 + \varepsilon^{-1} \|\mathscr{L}_0 u\|_{2,Q_t}^2,$$

откуда, выбирая $\varepsilon = \frac{\nu}{2n}$ и используя лемму 5.5 главы II, получим неравенство

$$\|u_x(x, t)\|_{2,\Omega}^2 + \nu \|u_{xx}\|_{2,Q_t}^2 \leqslant \\ \leqslant e^{2c_1 t}\left[\|u_x(x, 0)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2n}{\nu} \|\mathscr{L}_0 u\|_{2,Q_t}^2\right]. \tag{6.9}$$

---

*) Это предположение о $a_{ijx_k}$ можно было бы несколько ослабить.

которое в сочетании с уравнением $u_t = \mathscr{M}u + \mathscr{L}_0 u$ даст третье интересующее нас неравенство:

$$\|u_x(x,\ t)\|^2_{2,\ \Omega} + \|u_{xx}\|^2_{2,\ Q_t} + \|u_t\|^2_{2,\ Q_t} \leqslant$$
$$\leqslant c_2 e^{2c_1 t}(t+1)\left[\|u_x(x,\ 0)\|^2_{2,\ \Omega} + \|\mathscr{L}_0 u\|^2_{2,\ Q_t}\right] \tag{6.10}$$

с $c_2$, зависящим лишь от $n$, $\nu$, $\mu$, $\mu_5$ и $S$.

Основу вывода неравенств (6.6), (6.10) составляют два факта: неравенство (6.8) для эллиптических операторов и положительность основной части интегралов $\int\limits_{Q_t} -u_t \Delta u\, dx\, dt$ и $\int\limits_{Q_t} -u_t(a_{ij}u_{x_j})_{x_i}\, dx\, dt$, связывающих оба члена $u_t$ и $-\Delta u$ или $-\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j})$ в параболическом операторе.

Если граница области негладкая, то неравенство (6.8) может не иметь места. В этом случае можно получить внутренние оценки для $u_t$ и $u_{xx}$, рассматривая интегралы

$$\int\limits_{Q_t}\left[u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j})\right](u_t - \Delta u)\,\zeta^2(x)\, dx\, dt,$$

где $\zeta(x)$ — гладкая функция, равная нулю на $S$. Это приведет к неравенству

$$\|u_x(x,\ t)\zeta(x)\|^2_{2,\ \Omega} + \|u_t\zeta\|^2_{2,\ Q_t} + \|u_{xx}\zeta\|^2_{2.\ Q_t} \leqslant$$
$$\leqslant c_3 e^{c_4 t}\left[\|u_x(x,\ 0)\zeta(x)\|^2_{2,\ \Omega} + \|(\mathscr{L}_0 u)\zeta\|^2_{2,\ Q_t} + \|u_x\zeta_x\|^2_{2,\ Q_t}\right], \tag{6.11}$$

причем интеграл $\|u_x\zeta_x\|_{2,\ Q_t}$ может быть оценен из энергетического неравенства. Если начальные значения $u$ не принадлежат $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то, рассматривая интегралы

$$\int\limits_{Q_t}\mathscr{L}_0 u\,(u_t - \Delta u)\,\zeta^2(x)\,\chi^2(t)\, dx\, dt \quad \text{с } \chi(0) = 0,$$

получим оценку

$$\| u_x(x, t)\zeta(x)\chi(t)\|^2_{2,\Omega} + \|u_t\zeta\chi\|^2_{2,Q_t} + \|u_{xx}\zeta\chi\|^2_{2,Q_t} \leqslant$$
$$\leqslant c_5 e^{c_6 t}\left[\|(\mathcal{L}_0 u)\zeta\chi\|^2_{2,Q_t} + \|u_x\zeta_x\chi\|^2_{2,Q_t} + \|u_x^2\zeta^2\chi'\chi\|_{1,Q_t}\right]. \tag{6.12}$$

В соответствии с выведенными здесь неравенствами можно доказать, что обобщенные решения из $V_2^{1,0}(Q_T)$, найденные в § 4, имеют конечные интегралы, стоящие в левых частях этих неравенств, если только выполнены все те условия, при которых выведены эти неравенства. Доказать это можно разными способами. Например, сразу в процессе доказательства сходимости метода Галёркина. Для этого надо показать, что аналогичные оценки верны для всех галёркинских приближений $u^N$ с константами, не зависящими от номера приближений. Оценку (6.6) можно провести, не внося никаких изменений в описанную выше схему метода Галёркина. Для этого надо каждое из уравнений (4.1) умножить на свое $\frac{dc_k^N(t)}{dt}$, все полученные равенства сложить от $k=1$ до $k=N$ и проинтегрировать по $t$ от нуля до $t$. Это даст соотношение

$$\int_{Q_t}\left[(u_t^N)^2 + \left(a_{ij}u^N_{x_j} + a_i u^N\right)u^N_{tx_i} + \left(b_i u^N_{x_i} + au^N\right)u_t^N\right]dx\,dt =$$
$$= -\int_{Q_t}\left(f_i u^N_{tx_i} + fu_t^N\right)dx\,dt, \tag{6.13}$$

левая часть которого совпадает с интегралом $\int_{Q_t}\mathcal{L}u^N\cdot u_t^N dx\,dt$, из рассмотрения которого и было выведено неравенство (6.6) для случая $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$. Аналогично из (6.13) выводится равномерная по $N$ оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_x^N(x, t)\|^2_{2,\Omega} + \|u_t^N\|^2_{2,Q_t} \leqslant$$
$$\leqslant c_7\left[\|u_x^N(x, 0)\|^2_{2,\Omega} + \left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_i} - f\right\|^2_{2,Q_T}\right] \leqslant c_8, \tag{6.14}$$

из которой следует, что предельная для $u_m^N$ функция $u$ будет иметь производную $u_t$ из $L_2(Q_T)$.

Для другого случая (при котором было выведено неравенство (6.10)) возьмем в качестве базисных функций $\{\psi_k(x)\}$ в методе Галёркина собственные функции оператора Лапласа при нулевом граничном условии на границе $S$ области $\Omega$, так что

$$\Delta\psi_k = -\lambda_k\psi_k, \quad \psi_k|_S = 0. \tag{6.15}$$

Для вывода оценки (6.9) умножим каждое из уравнений (4.1) на $\lambda_k c_k^N(t)$, полученные равенства просуммируем по $k$ от 1 до $N$ и результат проинтегрируем по $t$. Ввиду (6.15) его можно записать в виде соотношения

$$-\int\limits_{Q_t} \mathcal{L}u^N \cdot \Delta u^N\,dx\,dt = \int\limits_{Q_t}\left(-\frac{\partial f_l}{\partial x_l} + f\right)\Delta u^N\,dx\,dt, \tag{6.16}$$

левая часть которого совпадает для $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ с тем интегралом, из рассмотрения которого было выведено неравенство (6.9). Таким же образом из (6.16) выводится равномерная по $N$ оценка:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_x^N(x,\ t)\|_{2,\Omega}^2 + \|u_{xx}^N\|_{2,\ Q_T}^2 \leqslant$$
$$\leqslant c_9\left[\|u_x^N(x,\ 0)\|_{2,\Omega}^2 + \left\|\frac{\partial f_l}{\partial x_l} - f\right\|_{2,\ Q_T}^2\right] \leqslant c_{10}. \tag{6.17}$$

Из нее вытекает, что предельная для $u^{N_m}$ функция $u$ будет иметь производные $u_{xx}$ из $L_2(Q_T)$. Отсюда же и из интегрального тождества (1.16), которому удовлетворяет функция $u$, следует, что $u$ имеет производную $u_t$ и удовлетворяет для почти всех $(x,\ t)$ из $Q_T$ уравнению $\mathcal{L}u = \frac{\partial f_l}{\partial x_l} - f$; производная $u_t$ при этом окажется элементом $L_2(Q_T)$ (что видно из уравнения). Сформулируем доказанные утверждения в виде теоремы.

Теорема 6.1. *Задача*

$$\left.\begin{aligned} &u_t - \frac{\partial}{\partial x_l}(a_{lj}(x,\ t)\,u_{x_j}) = \mathcal{F}(x,\ t),\\ &u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = \psi_0(x), \end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

*имеет единственное решение из* $W_2^{1,1}(Q_T)$, *если* $\mathscr{F} \in L_2(Q_T)$, $\psi_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $a_{ij}$ *удовлетворяет условию* (1.2) *и*

$$\int_0^T \operatorname*{vrai\,max}_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right| dt < \infty.$$

*Если последнее условие заменить условием* $\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T} \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \right| < \infty$ *и предположить, что* $S \in O^2$, *то решение будет принадлежать* $W_2^{2,1}(Q_T)$ *и будет удовлетворять уравнению при почти всех* $(x, t)$ *из* $Q_T$.

Замечание 6.2. Первая часть теоремы 6.1 о разрешимости в $W_2^{1,1}(Q_T)$ верна и для уравнения

$$\mathscr{L}_0 u \equiv \alpha(x, t) u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t) u_{x_j}\right) = \mathscr{F}(x, t) \tag{6.19}$$

с произвольной измеримой функцией $\alpha(x, t)$, удовлетворяющей условию $0 < \nu_1 \leqslant \alpha(x, t) \leqslant \mu_2 < \infty$. Это можно доказать разными способами, основываясь на неравенстве (6.6).

Например, рассмотрим вспомогательные задачи

$$\begin{gathered} \alpha^{(m)}(x, t) u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{(m)} u_{x_j}\right) = \mathscr{F}(x, t), \\ u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = \psi_0(x), \end{gathered} \tag{6.20}$$

где $\alpha^{(m)}(x, t)$ и $a_{ij}^{(m)}(x, t)$ — последовательности бесконечно дифференцируемых функций, сходящихся почти всюду к $\alpha$ и $a_{ij}$ соответственно и такие, что $\frac{\nu_1}{2} \leqslant \alpha^{(m)} \leqslant 2\mu_2$ и $\int_0^T \operatorname*{vrai\,max}_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial a_{ij}^{(m)}}{\partial t} \right| dt \leqslant 2\mu$. Если $S \bar{\in} O^2$, то аппроксимируем и $S$ гладкими контурами $S^m$ из $O^2$. В силу второй части теоремы 6.1 задачи (6.20) однозначно разрешимы в $W_2^{2,1}(Q_T^{(m)})$, и для их решений $u^m$ справедливы неравенства (6.6), которые гарантируют равномерную оценку

$$\| u^m \|_{W_2^{1,1}(Q_T^m)} \leqslant c.$$

Благодаря ей можно выделить из $\{u^m\}$ подпоследовательность, дающую в пределе желаемое решение для уравнения из (6.19).

Отметим еще один частный случай уравнений

$$\mathscr{L}_1 u \equiv u_t - \alpha(x,\ t)\Delta u = \mathscr{F}(x,\ t) \tag{6.21}$$

с $\alpha(x,\ t)$, удовлетворяющей условиям $0 \leqslant \alpha(x,\ t) \leqslant \mu_2 < \infty$ и с $\mathscr{F}(x,\ t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Рассмотрим для них задачу

$$\mathscr{L}_1 u = \mathscr{F},\quad u|_{S_T} = 0,\quad u|_{t=0} = \psi_0(x) \tag{6.22}$$

с $\psi_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Из соотношений

$$-\int\limits_{Q_t} \mathscr{L}_1 u\, \Delta u\, dx\, dt = -\int\limits_{Q_t} \mathscr{F}\, \Delta u\, dx\, dt = \int\limits_{Q_t} \mathscr{F}_{x_i} u_{x_i}\, dx\, dt$$

можно вывести неравенство

$$\|u_x(x,\ t)\|_{2,\,\Omega}^2 + \int\limits_{Q_t} \alpha(\Delta u)^2\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant e^{c_1 t}\left(\|u_x(x,\ 0)\|_{2,\,\Omega}^2 + \|\mathscr{F}_x\|_{2,\,Q_t}^2\right), \tag{6.23}$$

подобно тому как было выведено (6.9) из (6.7). Из него и (6.21) следует неравенство

$$\|u_t\|_{2,\,Q_t}^2 \leqslant 2\|\mathscr{F}\|_{2,\,Q_t}^2 +$$
$$+ 2\mu_2 e^{c_1 t}\left(\|u_x(x,\ 0)\|_{2,\,\Omega}^2 + \|\mathscr{F}_x\|_{2,\,Q_t}^2\right). \tag{6.24}$$

На основании этих априорных оценок (6.23) и (6.24), так же как и выше, доказывается, что задача (6.22) имеет решение $u$, обладающее производными $u_x$ и $u_t$, а также $u_{xx}$ там, где $\alpha(x,\ t) > 0$, и удовлетворяющее неравенству

$$\int\limits_{Q_T} \left[u_t^2 + \alpha(\Delta u)^2\right] dx\, dt + \operatorname{vrai}\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u_x\|_{2,\,\Omega}^2 \leqslant$$
$$\leqslant c(T)\left(\int\limits_{Q_T} \mathscr{F}_x^2\, dx\, dt + \int\limits_{\Omega} \psi_{0x}^2(x,\ 0)\, dx\right), \tag{6.25}$$

в котором $c(T)$ зависит только от $T$ и $\mu_2$.

Замечание 6.3. Аналогично теореме 6.1 доказывается однозначная разрешимость первой краевой задачи (и других основных краевых задач) для полного уравнения (1.1) при $\mathcal{F} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - f \in L_2(Q_T)$ и следующих предположениях относительно его коэффициентов: разрешимость в $W_2^{1,1}(Q_T)$ при условиях

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x \leqslant \Omega} \left| b_i(x, t), \ \frac{\partial a_{ij}(x, t)}{\partial t} \right| \leqslant \mu_1(t),$$

$$\int_0^T \mu_1(t)\,dt < \infty, \quad a \in L_{n,2}(Q_T);$$

разрешимость в $W_2^{2,1}(Q_T)$ при условиях

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}, \ b_i \in L_{q,r}(Q_T), \ \frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = \frac{1}{2}, \quad r < \infty \tag{6.26}$$

и $a \in L_{q,r}(Q_T)$, $r < \infty$ и

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = 1, & & \text{при } n \geqslant 4, \\ \frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = 1, & q > 2 & \text{при } n = 3, \\ r > 4, & q = 2 & \text{при } n = 3, \\ r > 2, & q = 2 & \text{при } n = 2. \end{array}\right\} \tag{6.27}$$

Коэффициенты $a_i(x, t)$ считаем равными нулю (что равносильно присоединению членов

$$a_i u_{x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} u = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i u)$$

к $b_i u_{x_i}$ и $au$ соответственно). Условия на $\psi_0$ те же, что и в теореме 6.1. При $r = \infty$ условия (6.26) и (6.27) надо заменить условием равномерной малости норм $\left\| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}, b_i \right\|_{n, K_\rho}$ и $\| a \|_{\frac{n}{2}, K_\rho}$ при малых $\rho$ и любых $t$ из $[0, T]$.

Оценка (6.10) относится к числу точных оценок. В §§ 14 и 15 показано, как на ее основе можно доказать разрешимость задачи (1.9) в $W_2^{2,1}(Q_T)$, не прибегая к каким-либо приближенным методам.

## § 7. Оценка $\max_{Q_T} |u|$. Принцип максимума

Предположим, что коэффициенты при младших членах и свободные члены уравнения (1.1) обладают несколько лучшими свойствами, чем в § 1, а именно:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i^2;\ \sum_{i=1}^{n} b_i^2;\ \sum_{i=1}^{n} f_i^2;\ a;\ f \right\|_{q,\, r,\, Q_T} \leqslant \mu_1, \tag{7.1}$$

где $q$ и $r$ — произвольные положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = 1 - \varkappa_1, \\ &\text{причем} \\ &q \in \left[\frac{n}{2(1-\varkappa_1)},\ \infty\right],\ r \in \left[\frac{1}{1-\varkappa_1},\ \infty\right], \\ &\qquad\qquad 0 < \varkappa_1 < 1,\ \text{при } n \geqslant 2, \\ &q \in [1,\ \infty],\ r \in \left[\frac{1}{1-\varkappa_1},\ \frac{2}{1-2\varkappa_1}\right], \\ &\qquad\qquad 0 < \varkappa_1 < \frac{1}{2},\quad \text{при}\quad n = 1. \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

Предположения о старших коэффициентах $a_{ij}$ оставим прежними — (1.2). Покажем, что тогда любое обобщенное решение $u$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$ уравнения (1.1) является ограниченной функцией. Точнее, докажем нижеследующие теоремы.

Теорема 7.1. *Если коэффициенты и свободные члены уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям* (1.2) *и* (7.1), (7.2), *то для любого обобщенного решения* $u(x, t)$ *из* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *уравнения* (1.1), *не превосходящего* $\hat{k}$ *на* $\Gamma_T$, $\operatorname{vrai}\max_{Q_T} u(x, t)$ *конечен и оценивается сверху постоян-*

*ной $c$, определяемой лишь $n$, $\hat{k}$ и параметрами* $\nu$, $\mu_1$, $q$, $r$, *входящими в условия* (1.2), (7.1), (7.2), *причем зависимость от $\hat{k}$ линейна.*

Замечание 7.1. Постоянная $c$ зависит и от $\operatorname{mes} Q_T$: она возрастает с ростом $\operatorname{mes} Q_T$. Ниже (§ 8) даются локальные оценки $\max|u|$, благодаря которым $\max\limits_Q|u|$ можно оценивать для областей $Q$ любой меры, в том числе и неограниченных.

Замечание 7.2. В условиях (7.1) и (7.2) $q$ и $r$ могут быть разными для разных коэффициентов и свободных членов. Необходимое для этого обобщение теоремы 6.1 главы II дается замечанием 6.1 к ней.

Замечание 7.3. Утверждение теоремы об ограниченности сверху $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T} u(x, t)$ остается в силе, если $b_i$ подчиняются вместо (7.1), (7.2) требованию

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right\|_{q_1,\, r_1,\, Q_T} \leqslant \mu_2, \tag{7.3}$$

где $q_1$ и $r_1$ — произвольные числа, удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r_1} + \frac{n}{2q_1} = 1, \\ &q_1 \in \left[\frac{n}{2}, \infty\right], \quad r_1 \in [1, \infty] \quad \text{при} \quad n \geqslant 3, \\ &q_1 \in (1, \infty], \quad r_1 \in [1, \infty] \quad \text{при} \quad n = 2, \\ &q_1 \in [1, \infty], \quad r_1 \in [1, 2] \quad \text{при} \quad n = 1. \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

Доказывается это обобщение так же, как и теорема 7.1. Необходимые небольшие видоизменения укажем в конце параграфа.

Там же опишем еще случай, когда в условии (7.3) $r_1 = \infty$, $q_1 = \frac{n}{2}$ и $n \geqslant 3$.

Замечание 7.4. Так как $-u(x, t)$ удовлетворяет уравнению такого же типа, как и $u(x, t)$, то все теоремы об оценке $\operatorname{vrai}\max u$ сверху дают соответствующие утверждения и об оценке $\operatorname{vrai}\min u$ снизу.

Для доказательства теоремы воспользуемся тождеством (2.12). Возьмем в нем

$$\eta(x, t) = u_h^{(k)}(x, t) = \max\{u_h(x, t) - k;\ 0\},\quad k \geqslant \hat{k}.$$

Это возможно, ибо функция $u_h$, а следовательно, и функция $u_h^{(k)}$ (см. лемму 4.9 главы II) принадлежат $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_{T-h})$ и даже $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_{T-h})$. Учитывая, что для почти всех $t$

$$\int_\Omega u_{ht}(x, t)\, u_h^{(k)}(x, t)\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega [u_h^{(k)}(x, t)]^2\, dx,$$

перепишем полученные равенства в виде

$$\frac{1}{2}\int_\Omega [u_h^{(k)}(x, t)]^2\, dx\,\Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_0^{t_1}\int_\Omega \Big[\big(a_{ij}u_{x_j} + a_i u + {}$$
$$+ f_i\big)_h\, u_{hx_i}^{(k)} + \big(b_i u_{x_i} + au + f\big)_h\, u_h^{(k)}\Big]\, dx\, dt = 0. \quad (7.5)$$

Устремим в (7.5) $h$ к нулю. Так как $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, то $u_h$ сходится к $u$ в норме $V_2^{1,0}(Q_{T-\delta})$, $\delta > 0$, и потому «подрезанные» функции $u_h^{(k)}$ сходятся к $u^{(k)}$ в той же норме (см. лемму 4.5 главы II). Как показано в § 2 при выводе (2.13) из равенства (2.12), отсюда и из предположенных свойств известных функций предельным для (7.5) соотношением будет

$$\frac{1}{2}\int_\Omega [u^{(k)}(x, t)]^2\, dx\,\Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_0^{t_1}\int_\Omega \Big[\big(a_{ij}u_{x_j} + a_i u + f_i\big)\, u_{x_i}^{(k)} + {}$$
$$+ \big(b_i u_{x_i} + au + f\big)\, u^{(k)}\Big]\, dx\, dt = 0,\quad k \geqslant \hat{k}. \quad (7.6)$$

Обозначим множество точек $x$ из $\Omega$, в которых $u(x, t) > k$, через $A_k(t)$. Так как по условию $u(x, 0) \leqslant \hat{k}$, то $\int_\Omega [u^{(k)}(x, 0)]^2\, dx = 0$. Оставим в левой части (7.6) два первых заведомо неотрицательных члена и оценим их снизу, используя условие эллиптичности, остальные же перенесем в правую часть и оценим сверху с помощью неравенства Коши (1.2) главы II. Именно:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}[u^{(k)}(x, t_1)]^2\,dx+\nu\int_0^{t_1}\int_{A_k(t)} u_x^2\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant-\int_0^{t_1}\int_{A_k(t)}\left[(a_iu+f_i)\,u_{x_i}+(b_iu_{x_i}+au+f)(u-k)\right]dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{t_1}\int_{A_k(t)}\left[\frac{\nu}{4}u_x^2+\frac{2}{\nu}\sum_i(a_i^2u^2+f_i^2)+\frac{\nu}{4}u_x^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\nu}\sum_i b_i^2(u-k)^2+|au|(u-k)+|f|(u-k)\right]dx\,dt, \quad (7.7)$$

откуда, считая $k\geqslant 1$, получим

$$\min\left\{\frac{1}{2};\ \frac{\nu}{2}\right\}|u^{(k)}|_{Q_{t_1}}^2\leqslant\int_0^{t_1}\int_{A_k(t)}\mathscr{D}(x, t)\,[(u-k)^2+k^2]\,dx\,dt,$$

где

$$\mathscr{D}(x, t)=$$

$$=2\left[\frac{4}{\nu}\sum_{i=1}^n a_i^2+\frac{4}{\nu}\sum_{i=1}^n f_i^2+\frac{2}{\nu}\sum_{i=1}^n b_i^2+2|a|+|f|\right].$$

Для оценки правой части воспользуемся неравенствами Гёльдера (1.6) главы II. Это дает

$$\min\left\{\frac{1}{2};\ \frac{\nu}{2}\right\}|u^{(k)}|_{Q_{t_1}}^2\leqslant$$

$$\leqslant\|\mathscr{D}\|_{q,\,r,\,Q_{t_1}(k)}\|(u-k)^2+k^2\|_{\frac{q}{q-1},\,\frac{r}{r-1},\,Q_{t_1}(k)}. \quad (7.8)$$

Здесь $Q_{t_1}(k)$ есть множество точек $(x, t)$ цилиндра $Q_{t_1}=\Omega\times\times(0, t_1)$, в которых $u(x, t)>k$. Оценим норму функции $u$, стоящую в правой части (7.8), с помощью неравенства (3.5) главы II следующим образом:

$$\|(u-k)^2\|_{\frac{q}{q-1},\, \frac{r}{r-1},\, Q_{t_1}(k)} = \|u^{(k)}\|^2_{\bar q,\, \bar r,\, Q_{t_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \|u^{(k)}\|^2_{\hat q,\, \hat r,\, Q_{t_1}} \mu^{\frac{2}{\bar r}-\frac{2}{\hat r}}(k). \quad (7.9)$$

Здесь $\mu(k) = \int\limits_0^{t_1} \operatorname{mes}^{\frac{\bar r}{\bar q}} A_k(t)\,dt$ *), $\bar q = \frac{2q}{q-1}$, $\bar r = \frac{2r}{r-1}$, $\hat q = \bar q(1+\varkappa)$, $\hat r = \bar r(1+\varkappa)$, а $\varkappa = \frac{2\varkappa_1}{n}$. Легко подсчитать, что в силу предположений (7.2) $\frac{1}{\bar r} + \frac{n}{2\bar q} = \frac{n}{4} + \frac{\varkappa_1}{2}$, $\frac{1}{\hat r} + \frac{n}{2\hat q} = 1$, и при $n \geqslant 2$ значения параметров $\hat q$ и $\hat r$ принадлежат отрезкам: $\hat q \in \left[2(1+\varkappa),\ \frac{2n(1+\varkappa)}{n-2+2\varkappa_1}\right]$, $\hat r \in \left[2(1+\varkappa),\ \frac{2(1+\varkappa)}{\varkappa_1}\right]$, а при $n=1$ — отрезкам: $\hat q \in [2(1+\varkappa),\ \infty]$, $\hat r \in \left[4,\ \frac{4(1+\varkappa)}{\varkappa}\right]$. Поэтому $V_2^{1,0}(Q_{t_1})$ вкладывается в $L_{\hat q,\hat r}(Q_{t_1})$ и $\|u^{(k)}\|_{\hat q,\, \hat r,\, Q_{t_1}}$ можно оценить через $|u^{(k)}|_{Q_{t_1}}$, используя неравенство (3.4) главы II, именно:

$$\|(u-k)^2\|_{\frac{q}{q-1},\, \frac{r}{r-1},\, Q_{t_1}(k)} \leqslant \beta^2 |u^{(k)}|^2_{Q_{t_1}} \mu^{\frac{2\varkappa}{\hat r}}(k), \quad (7.10)$$

где $\mu(k)$ имеет тот же смысл, что и в (7.9). Второе слагаемое правой части (7.8) запишем так:

$$\|k^2\|_{\frac{q}{q-1},\, \frac{r}{r-1},\, Q_{t_1}(k)} = k^2 \|1\|^2_{\bar q,\, \bar r,\, Q_{t_1}(k)} =$$

$$= k^2 \left(\int\limits_0^{t_1} \operatorname{mes}^{\frac{\bar r}{\bar q}} A_k(t)\,dt\right)^{\frac{2}{\bar r}} = k^2 \mu^{\frac{2(1+\varkappa)}{\hat r}}(k), \quad (7.11)$$

---

*) При $q=n=1$ числа $\bar q$ и $\hat q$ будут равны $\infty$ и вместо $\mu(k) = \int\limits_0^{t_1} \operatorname{mes}^{\frac{\hat r}{\hat q}} A_k(t)\,dt$ будем иметь (здесь и ниже) меру множества точек $t$ отрезка $[0, t_1]$, для которых $\operatorname{mes} A_k(t) > 0$.

ибо $\frac{\bar{r}}{\bar{q}} = \frac{\hat{r}}{\hat{q}}$, а $\hat{r} = \bar{r}(1+\varkappa)$. Учитывая оценки (7.10), (7.11), из (7.8) получим

$$\min\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right) | u^{(k)} |^2_{Q_{t_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \| \mathscr{D} \|_{q, r, Q_{t_1}(k)} \left[ \beta^2 \mu^{\frac{2\varkappa}{\hat{r}}}(k) | u^{(k)} |^2_{Q_{t_1}} + k^2 \mu^{\frac{2(1+\varkappa)}{\hat{r}}}(k) \right]. \quad (7.12)$$

Выберем $t_1$ столь малым, чтобы

$$\beta^2 \| \mathscr{D} \|_{q, r, Q_{t_1}(k)} t_1^{\frac{2\varkappa}{\hat{r}}} (\text{mes}\, \Omega)^{\frac{2\varkappa}{\hat{q}}} \leqslant \frac{1}{4} \min\{1;\ \nu\}. \quad (7.13)$$

Тогда из (7.12) следует при $k \geqslant \max\{1, \hat{k}\} \equiv k_1$

$$\min\left(\frac{1}{4}, \frac{\nu}{4}\right) | u^{(k)} |^2_{Q_{t_1}} \leqslant \gamma k^2 \mu^{\frac{2}{\hat{r}}(1+\varkappa)}(k), \quad (7.14)$$

где

$$\gamma = \| \mathscr{D} \|_{q, r, Q_{t_1}}, \quad \varkappa = \frac{2\varkappa_1}{n}.$$

Так как $\varkappa$ в (7.14) положительно, то из (7.14) на основании теоремы 6.1 главы II заключаем, что $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_{t_1}} u(x, t)$ не превосходит некоторой, известной нам постоянной, умноженной на $k_1$.

Аналогичные рассуждения справедливы и для цилиндров $Q_s = \Omega \times [t_s, t_{s+1}]$, лишь бы высоты их подчинялись требованиям (7.13). Так, мы за конечное число шагов убедимся в справедливости оценки

$$\operatorname{vrai}\max_{Q_T} u(x, t) \leqslant c k_1 \quad (7.15)$$

с постоянной $c$, которую можно было бы явно выразить, через известные нам характеристики (см. неравенство (6.2) из теоремы (6.1) главы II). Теорема 7.1 доказана.

Следствие 7.1. Пусть выполнены все условия теоремы 7.1, кроме $u|_{\Gamma_T} \leqslant \hat{k}$, которое заменено условием $u|_{\Gamma_T} \geqslant \hat{k}$. Тогда решение $u(x, t)$ ограничено снизу и $\operatorname{vrai}\min\limits_{Q_T} u$ оценивается снизу постоянной, определяемой, как и $c$ в теореме 7.1, известными нам величинами.

Это утверждение следует из теоремы 7.1, если ее применить к функции $v(x, t) = -u(x, t)$.

Как отмечено в замечании 7.3, предположения (7.1), (7.2) о $b_i$ в теореме 7.1 можно заменить на несколько более широкие предположения (7.3), (7.4). Поясним, какие при этом надо внести видоизменения в только что приведенные оценки. Член

$$j = \int_0^{t_1} \int_{A_k(t)} \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n b_i^2 (u-k)^2 \, dx \, dt = \frac{1}{\nu} \int_{Q_{t_1}} \sum_{i=1}^n b_i^2 (u^{(k)})^2 \, dx \, dt$$

в (7.7) оценим с помощью неравенств (1.6), (3.4) главы II так:

$$|j| \leqslant \frac{1}{\nu} \left\| \sum_{i=1}^n b_i^2 \right\|_{q_1, r_1, Q_{t_1}(k)} \| u^{(k)} \|^2_{\frac{2q_1}{q_1-1}, \frac{2r_1}{r_1-1}, Q_{t_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta^2}{\nu} \left\| \sum_{i=1}^n b_i^2 \right\|_{q_1, r_1, Q_{t_1}(k)} | u^{(k)} |^2_{Q_{t_1}}. \qquad (7.16)$$

Выражение, стоящее в правой части (7.16), постараемся погасить с помощью подобного ему выражения, стоящего в левой части (7.14). Это возможно, если, например,

$$\frac{\beta^2}{\nu} \left\| \sum_{i=1}^n b_i^2 \right\|_{q_1, r_1, Q_{t_1}(k)} \leqslant \frac{1}{8} \min\{1; \nu\}. \qquad (7.17)$$

При $r_1 < \infty$ мы добьемся (7.17) за счет выбора достаточно малого $t_1$. Как показано в § 2 при выводе энергетического неравенства, в этом случае весь цилиндр $Q_T$ можно разбить на конечное число цилиндров $Q_s = \Omega \times [t_{s-1}, t_s]$, для каждого из которых будет верно (7.17), причем число цилиндров будет зависеть лишь от $\mu_2$ и $r_1$ из (7.3), (7.4).

Если же $r_1 = \infty$, то такое разбиение ничего не дает, ибо

$$\left\| \sum_{i=1}^n b_i^2 \right\|_{\frac{n}{2}, \infty, Q_{t_1}(k)} = \operatorname*{vrai\,max}_{0 \leqslant t \leqslant t_1} \left\| \sum_{i=1}^n b_i^2 (x, t) \right\|_{\frac{n}{2}, A_k(t)}.$$

Предположим, что в этом случае нам известна величина $\mu_3 = \|u\|_{1, \infty, Q_T}$ и то, что

$$\Delta(k) = \operatorname*{vrai\,max}_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i^2(x, t) \right\|_{\frac{n}{2}, A_k(t)} \to 0 \tag{7.18}$$

при $\operatorname*{vrai\,max}_{0 \leqslant t \leqslant T} \operatorname{mes} A_k(t) \to 0$. В силу неравенства $k \operatorname{mes} A_k(t) \leqslant \leqslant \|u(x, t)\|_{1, \Omega}$ величина $\operatorname*{vrai\,max}_{0 \leqslant t \leqslant T} \operatorname{mes} A_k(t) \leqslant k^{-1}\mu_3 \to 0$ при $k \to \infty$, и потому неравенство (7.17) будет выполняться для всех $k \geqslant k_2$, где $k_2$ таково, что

$$\frac{\beta^2}{\nu} \Delta(k_2) \leqslant \frac{1}{8} \min\{1;\ \nu\}. \tag{7.19}$$

Итак, пусть (7.17) справедливо. Тогда, подставляя полученную оценку $|j|$ и ранее полученные оценки остальных членов в (7.7), придем к неравенству, отличающемуся от (7.14) лишь коэффициентом в левой части. Из этого же неравенства в силу теоремы 6.1 главы II следует оценка сверху для $\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T} u$. При $r_1 = \infty$ она будет зависеть также от $k_2$.

Покажем, что для обобщенных решений $u(x, t)$ уравнений (1.1) из $V_2^{1,0}(Q_T)$ справедлив принцип максимума в нижеследующей форме.

Теорема 7.2. *Пусть $u(x, t)$ есть обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ уравнения* (1.1), *коэффициенты которого $a_{ij}$, $b_i$ и $a$ удовлетворяют условиям* (1.2) — (1.4), $a(x, t) \geqslant 0$, а $a_i \equiv f_i \equiv f \equiv 0$. *Тогда для почти всех $(x, t)$ из $Q_T$*

$$\min\left\{0;\ \operatorname*{vrai\,min}_{\Gamma_T} u(x, t)\right\} \leqslant u(x, t) \leqslant$$
$$\leqslant \max\left\{0;\ \operatorname*{vrai\,max}_{\Gamma_T} u(x, t)\right\}. \tag{7.20}$$

Для доказательства правого неравенства из (7.20) возьмем неравенство (7.7) при $k = \max\left\{0;\ \operatorname*{vrai\,max}_{\Gamma_{t_1}} u\right\}$. Из него в силу наших предположений и выбора $k$ следует

$$\frac{1}{2}\|u^{(k)}(x, t_1)\|_{2, \Omega}^2 + \nu \|u_x^{(k)}\|_{2, Q_{t_1}}^2 \leqslant -\int_{Q_{t_1}} b_i u_{x_i} u^{(k)}\, dx\, dt. \tag{7.21}$$

Правую часть оценим так же, как был оценен член $b_i u_{x_i} u$ в § 2 при выводе энергетического неравенства, именно:

$$\left| \int\limits_{Q_{t_1}} b_i u_{x_i} u^{(k)}\, dx\, dt \right| \leqslant \int\limits_{Q_{t_1}} \left( \frac{\nu}{2} u_x^{(k)\,2} + \frac{1}{2\nu} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 u^{(k)\,2} \right) dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\nu}{2} \| u_x^{(k)} \|_{2,\,Q_{t_1}}^2 + \frac{1}{2\nu} \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right\|_{q,\,r,\,Q_{t_1}} \| u^{(k)} \|^2_{\frac{2q}{q-1},\,\frac{2r}{r-1},\,Q_{t_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\nu}{2} \| u_x^{(k)} \|_{2,\,Q_{t_1}}^2 + \frac{\beta^2}{2\nu} \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right\|_{q,\,r,\,Q_{t_1}} | u^{(k)} |_{Q_{t_1}}^2 .$$

Отсюда и из (7.21) следует

$$\min\{1,\, \nu\} \, | u^{(k)} |_{Q_{t_1}}^2 \leqslant \frac{2\beta^2}{\nu} \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right\|_{q,\,r,\,Q_{t_1}} | u^{(k)} |_{Q_{t_1}}^2 . \tag{7.22}$$

При $t_1$, удовлетворяющих условию

$$\frac{2\beta^2}{\nu} \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right\|_{q,\,r,\,Q_{t_1}} < \min\{1,\, \nu\}, \tag{7.23}$$

из (7.22) получаем

$$| u^{(k)} |_{Q_{t_1}} \leqslant 0,$$

т. е. для почти всех $(x,\, t)$ из $Q_{t_1}$ функция $u(x,\, t)$ не превосходит $k = \max\left\{0;\ \operatorname{vrai}\max\limits_{\Gamma_{t_1}} u\right\}$. Повторяя это рассуждение для цилиндров $\Omega \times [t_1,\, t_2]$, ... и т. д., убедимся в справедливости правого неравенства из (7.20). Аналогичные рассуждения с функцией $-u(x,\, t)$ приводят к доказательству левого неравенства из (7.20). Если $a \equiv 0$, то нуль из (7.20) можно выбросить.

Мозер предложил иной способ оценки $\operatorname{vrai}\max |u(x,\, t)|$ решений линейных уравнений эллиптического и параболического типа [**42**$_{1,\,2}$], состоящий в получении рекуррентных соотношений между безгранично возрастающими степенями $u$, из которых оказывается возможным заключить об ограниченности $\operatorname{vrai}\max |u(x,\, t)|$. Он эту идею провел для уравнений (1.1) с $a_i \equiv b_i \equiv a \equiv f \equiv f_i \equiv 0$. Она же с использованием оценок младших членов, данных выше, может быть применена к полному уравнению нижеследующим образом.

Будем ради простоты считать решение $u(x, t)$ ограниченным и равным нулю на $S_T$. Положим в тождестве (2.12) $\eta(x, t) = \varphi'(u_h(x, t))\varphi(u_h(x, t))\zeta^2(x, t)$, где $u_h$ — усреднение $u$ по $t$, определенное в (2.10), $\zeta(x, t)$ — произвольная гладкая функция, а $\varphi(\tau) = |\tau|^s$ с $s > 1$. Легко видеть, что такая функция допустима для (2.12). Обозначим $\varphi(u_h(x, t)) = v_{(h)}(x, t)$ и представим первый член (2.12) в виде

$$\int\limits_{Q_{t_1}} u_{ht}\varphi'(u_h)\, v_{(h)}\, \zeta^2\, dx\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} v_{(h)}^2\zeta^2\, dx\, \Big|_0^{t_1} - \int\limits_{Q_{t_1}} v_{(h)}^2\, \zeta\zeta_t\, dx\, dt.$$

После этого перейдем к пределу по $h \to 0$ во всех членах равенства. Это возможно, и предельное равенство можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} v^2\zeta^2\, dx\,\Big|_0^{t_1} + \int\limits_{Q_{t_1}} \big[-v^2\zeta\zeta_t + a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}v\varphi''\zeta^2 + $$
$$+ a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}\zeta^2 + 2a_{ij}v_{x_j}v\zeta\zeta_{x_i} + (a_i u + f_i)\,(\varphi'' u_{x_i} v\zeta^2 + $$
$$+ \varphi' v_{x_i}\zeta^2 + 2\varphi' v\zeta\zeta_{x_i}) + (b_i u_{x_i} + au + f)\,\varphi' v\zeta^2\big]\, dx\, dt = 0, \tag{7.24}$$

где $v = \varphi(u)$. Положим в (7.24) $\zeta \equiv 1$ и перенесем в правую часть все члены, кроме заведомо неотрицательных: первого интеграла и второго и третьего слагаемых, стоящих под знаком второго интеграла. Затем члены, перенесенные в правую часть, оценим так, как это было сделано выше с использованием предположений (7.1) и (7.2). Это приведет к неравенству

$$|v|_{Q_T}^2 \leqslant \gamma^2 s^2 \Big(\|v\|_{\bar{q}, \bar{r}, Q_T} + 1\Big)^2, \tag{7.25}$$

в котором постоянная $\gamma$ определяется величинами $\nu$, $\mu_1$, $q$ и $r$ из условий (1.2), (7.1) — (7.2), $T$ и $\operatorname{mes}\Omega$, а $\bar{r} = \frac{2r}{r-1}$, $\bar{q} = \frac{2q}{q-1}$.

Обозначим, так же как и выше, $\hat{q}=\bar{q}(1+\varkappa)$, $\bar{r}=r(1+\varkappa)$, $\varkappa=\frac{2\varkappa_1}{n}$. Параметры $\hat{q}$ и $\hat{r}$ подчиняются ограничениям (3.3) главы II, и потому в силу неравенства (3.4) главы II

$$\|v\|_{\hat{q},\,\hat{r},\,Q_T}\leqslant\beta|v|_{Q_T}.$$

Отсюда и из (7.25) следует оценка

$$\|v\|_{\hat{q},\,\hat{r},\,Q_T}\leqslant\beta\gamma s\left[\left\|v^{\frac{1}{1+\varkappa}}\right\|^{1+\varkappa}_{\hat{q},\,\hat{r},\,Q_T}+1\right].\tag{7.26}$$

В качестве $s$ мы будем брать последовательность чисел $(1+\varkappa)^k$ с $k=1,\,2,\,\ldots$ Если обозначить через $\Phi_k$ норму $\left\|u^{(1+\varkappa)^k}\right\|_{\hat{q},\,\hat{r},\,Q_T}=\|u\|^{(1+\varkappa)^k}_{(1+\varkappa)^k\,\hat{q},\,(1+\varkappa)^k\,\hat{r},\,Q_T}$, то неравенства (7.26) для $v=|u|^{(1+\varkappa)^k}$ запишутся как

$$\Phi_k\leqslant(1+\varkappa)^k\beta\gamma\left(\Phi_{k-1}^{1+\varkappa}+1\right),\quad k=1,\,2,\,\ldots\tag{7.27}$$

Отсюда заключаем (см. лемму 5.6 главы II), что

$$\Phi_k\leqslant[2(1+\varkappa)\max\{1,\,\beta\gamma\}]^{\frac{(1+\varkappa)^k-1}{\varkappa}}\times$$
$$\times(1+\varkappa)^{\frac{(1+\varkappa)^k-1}{\varkappa^2}-\frac{k}{\varkappa}}(\Phi_0+1)^{(1+\varkappa)^k},$$

и, следовательно,

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T}|u|\equiv\|u\|_{\infty,\,Q_T}=\lim_{k\to\infty}\Phi_k^{(1+\varkappa)^{-k}}\leqslant$$
$$\leqslant 2^{\frac{1}{\varkappa}}\max\{1,\,\beta\gamma\}^{\frac{1}{\varkappa}}(1+\varkappa)^{\frac{1+\varkappa}{\varkappa^2}}(\Phi_0+1).\tag{7.28}$$

Входящая в правую часть неравенства величина $\Phi_0=\|u\|_{\hat{q},\,\hat{r},\,Q_T}$ не превосходит $\beta|u|_{Q_T}$, и потому с помощью энергетического неравенства она оценивается через известные постоянные $\nu$, $\mu_1$, $q$ и $r$ из условий (1.2), (7.1) — (7.2). Таким образом, желаемая оценка $\operatorname*{vrai\,max}\limits_{Q_T}|u|$ получена.

## § 8. Локальные оценки $\max|u|$

Получим теперь локальные оценки для произвольных обобщенных решений $u(x, t)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$ уравнения (1.1) без предположения об их ограниченности на $\Gamma_T$. Пусть условия (1.2) и (7.1) — (7.2) выполнены. Возьмем произвольный цилиндр $Q(\rho_0, \tau_0)=\{|x-x_0|<\rho_0; t_0<\tau<t_0+\tau_0\}\in Q_T$ и положим в (2.12)

$$\eta(x, t)=\zeta^2(x, t)u_h^{(k)}(x, t)=\zeta^2(x, t)\max\{u_h(x, t)-k; 0\},$$

где $\zeta(x, t)$ — неотрицательная, непрерывная, кусочно-гладкая функция, не превосходящая 1, равная нулю на $S_{t_0, t_0+\tau_0}$ — боковой поверхности цилиндра $Q(\rho_0, \tau_0)$ и вне его. После подстановки этой функции в (2.12) и перехода к пределу по $h\to 0$, получим равенство, близкое к (7.6). Из него ввиду произвольности верхнего предела интегрирования по $t$ будем иметь

$$\frac{1}{2}\|u^{(k)}(x, t)\zeta(x, t)\|_{2,\Omega}^2\Big|_{t_1}^{t_2}+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{A_k(t)}\{(a_{ij}u_{x_j}+a_iu+f_i)[u_{x_i}\zeta^2+2(u-k)\zeta\zeta_{x_i}]+$$
$$+(b_iu_{x_i}+au-f)(u-k)\zeta^2-(u-k)^2\zeta\zeta_t\}\,dx\,dt=0, \quad (8.1)$$
$$t_0<t_1<t_2<t_0+\tau_0.$$

Из этого равенства следуют неравенства

$$\max_{t_1\leqslant t\leqslant t_2}\|u^{(k)}(x, t)\zeta(x, t)\|_{2,\Omega}^2+\nu\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}(u_x^{(k)})^2\zeta^2\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\|u^{(k)}(x, t_1)\zeta(x, t_1)\|_{2,\Omega}^2+\gamma_1\left\{\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}(\zeta_x^2+\zeta|\zeta_t|)(u^{(k)})^2\,dx\,dt+\right.$$
$$\left.+k^2\left[\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{A_k(t)}\zeta^{\bar q}\,dx\right)^{\frac{\hat r}{\bar q}}dx\right]^{\frac{2(1+\varkappa)}{\hat r}}\right\}^{*)} \quad (8.2)$$

*) При $\bar q=\infty$ (что бывает лишь для $n=1$) вместо последнего члена в фигурной скобке будем иметь $k^2\left[\int_{t_1}^{t_2}(\operatorname{vrai}\max_{x\in A_k(t)}\zeta)^{\bar r}\,dt\right]^{\frac{2(1+\varkappa)}{\hat r}}$, причем для тех $t$, для которых $\operatorname{mes}A_k(t)=0$, надо считать $\operatorname{vrai}\max_{x\in A_k(t)}\zeta(x, t)$ равным нулю.

с теми же значениями параметров $\hat{q}$, $\hat{r}$, $\varkappa$, что и в (7.14). Символ $A_k(t)$, как и выше, означает множество точек $x$ из $\Omega$, в которых $u(x, t) > k$. Постоянная $\gamma_1$ зависит от известных нам величин примерно так же, как и $\gamma$ в (7.14). Вывод (8.2) из (8.1) таков же, как вывод (7.14) из (7.6). Только на этот раз мы можем удовлетворить условию (7.13), точнее условию

$$\beta^2 \|\mathscr{D}\zeta\|_{q, r, Q_{t_0, t_0+\tau}(k)} \left[\int_{t_0}^{t_0+\tau_0} \left(\int_{A_k(t)} \zeta\, dx\right)^{\frac{\hat{r}}{\hat{q}}} dt\right]^{\frac{2\varkappa}{\hat{r}}} \leqslant \min\left\{\frac{1}{4};\ \frac{\nu}{4}\right\},$$

не обязательно за счет малости $\tau_0$, а общее, за счет малости меры множества, где $\zeta(x, t)$ отлична от нуля. Как указывалось в замечании 6.4 главы II, из (8.2) следуют неравенства (6.9) главы II и, следовательно, $u(x, t) \in \mathfrak{A}(Q(\rho_0, \tau_0), \gamma, \hat{r}, \hat{k}, \varkappa)$ при любых $\hat{k}$, $Q(\rho_0, \tau_0) \in Q_T$ и $\rho_0$ и $\tau_0$, удовлетворяющих условию

$$\beta^2 \|\mathscr{D}\zeta\|_{q, r, Q(\rho_0, \tau_0)} \tau_0^{\frac{2\varkappa}{\hat{r}}} (\varkappa_n \rho_0)^{\frac{2\varkappa}{\hat{q}}} \leqslant \min\left\{\frac{1}{4};\ \frac{\nu}{4}\right\}. \tag{8.3}$$

Это же верно и для функции $-u(x, t)$.

Пусть $u(x, t)$ на $\Gamma' \subset \Gamma_T$ не превосходит какого-либо числа $\hat{k}$. Возьмем произвольный цилиндр $Q(\rho_0, \tau_0)$, пересечение которого с $\Gamma_T$ не пусто и принадлежит $\Gamma'$, и для него функцию $\eta(x, t)$, равную $\zeta^2(x, t)\, u_h^{(k)}(x, t)$ в $Q(\rho_0, \tau_0) \cap Q_T$ и нулю в остальной части $Q(\rho_0, \tau_0)$. Такая функция допустима для (2.12) при $k \geqslant \hat{k}$, ибо она является элементом $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q(\rho_0, \tau_0) \cap Q_T)$. Подставляя ее в (2.12) и проводя те же оценки, что и для внутренних цилиндров, убедимся, что $u(x, t)$ удовлетворяет неравенствам (6.10) главы II и является тем самым элементом $\mathfrak{A}(Q(\rho_0, \tau_0) \cap Q_T, \gamma, \hat{r}, \hat{k}, \varkappa)$.

Из принадлежности $u(x, t)$ и $-u(x, t)$ к классам $\mathfrak{A}(Q(\rho_0, \tau_0), \ldots)$, $\mathfrak{A}(Q(\rho_0, \tau_0) \cap Q_T, \ldots)$ на основании теоремы 6.2 главы II следует

Теорема 8.1. *Пусть для уравнения* (1.1) *выполнены условия* (1.2), (7.1), (7.2). *Тогда любое его обобщенное решение* $u(x, t)$ *из* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *имеет конечный* $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q'}|u|$

*для любой области* $Q' \subset Q$, *отстоящей от* $\Gamma_T$ *на положительное расстояние* $d$. *Величина* $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q'} |u|$ *оценивается сверху постоянной, зависящей* лишь *от* $n$, $\|u\|_{2, Q_T}$, *постоянных* $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $r$ *и* $q$, *входящих в условия* (1.2), (7.1), (7.2) *и расстояния* $d$. *Если к тому же* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Gamma'} u = \hat{k} < \infty$ *для какого-либо куска* $\Gamma'$ *поверхности* $\Gamma_T$, *то* $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_1} u$ *конечен для любой подобласти* $Q_1 \subset Q_T$, *находящейся на положительном расстоянии* $d$ *от* $\Gamma_T \setminus \Gamma'$, *и оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $n$, $\|u\|_{2, Q_T}$, $\hat{k}$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $r$, $q$ *и* $d$. *Аналогичный факт верен и для функции* — $u(x, t)$.

Из теоремы 6.2 главы II виден характер зависимости оценки для $u(x, t)$ сверху и снизу от перечисленных в теореме величин.

Замечание 8.1. Утверждения теоремы 8.1 о конечности $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q'} |u|$ и $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_1} (\pm u)$ остаются справедливыми, если о коэффициентах $b_i$ предположить лишь (7.3), (7.4). Доказывается это так же, как замечание 7.3 в конце § 7.

Требованию (7.17), точнее требованию

$$\frac{\beta^2}{\nu} \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right\|_{q_1, r_1, Q(k, \rho_0, \tau_0)} \leqslant \frac{1}{8} \min\{1; \nu\}, \tag{8.4}$$

где $Q(k, \rho_0, \tau_0)$ — множество точек $(x, t) \in Q(\rho_0, \tau_0)$, в которых $u(x, t) > k$, можно удовлетворить на этот раз и при $r_1 = \infty$ не за счет выбора высокого уровня $k$, а за счет достаточной малости радиуса $\rho_0$ (при $r_1 < \infty$ (8.4) будет верно, если $\operatorname{mes} Q(\rho_0, \tau_0)$ взята достаточно малой). Влияние коэффициентов $b_i$ на оценку $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q'} |u|$ и $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_1} (\pm u)$ сказывается только через ограничение (8.4) на цилиндры $Q(\rho_0, \tau_0)$, к которым применяется теорема 6.2. В другие постоянные никакие характеристики $b_i$ не входят.

Замечание 8.2. В условиях (7.1), (7.2) и (7.3), (7.4) теоремы 8.1 числа $q$ и $r$ можно считать разными для разных коэффициентов и свободных членов, лишь бы они удовлетворяли требованиям (7.2), (7.4).

Теорему 8.1 можно доказать иначе, используя идею Мозера, изложенную в конце предыдущего параграфа. Для этого надо взять последовательность вложенных друг в друга соосных цилиндров

$$Q_{\rho_k} = K_{\rho_k} \times (t_0 - \rho_k^2,\ t_0),\ \rho_k = \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2^{k+1}}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,$$

принадлежащих $Q_T$, и последовательность соответствующих им срезающих функций $\hat{\zeta}_k(x,\ t) = \hat{\zeta}\left(2^{k+1}\left(\frac{|x-x_0|}{\rho} - \frac{1}{2}\right),\right.$ $\left.2^{k+1}\left(\frac{\sqrt{t_0-t}}{\rho} - \frac{1}{2}\right)\right)$, $k = 1, 2, \ldots$, где $x_0$ есть центр шаров $K_{\rho_k}$, а $\zeta(\xi,\ \eta)$ — какая-нибудь гладкая неотрицательная функция, не превосходящая единицы,

равная единице при $\xi \leqslant \frac{1}{2}$, $\eta \leqslant \frac{1}{2}$ и
равная нулю при $\xi \geqslant 1$, $\eta \geqslant 1$.

В тождестве (7.24) надо считать, как и выше, $v = |u|^s$, $s = (1+\varkappa)^k$, а $\zeta(x,\ t)$ взять равной $\hat{\zeta}_{k-1}(x,\ t)$, $k = 1, 2, \ldots$ Оценивая затем все члены в основном так же, как и выше, в §§ 7, 8, приходим к системе рекуррентных неравенств для

$$\Phi_k = \left\| |u|^{(1+\varkappa)^k} \right\|_{\hat{q},\hat{r},\ Q_{\rho_k}} = \| u \|^{(1+\varkappa)^k}_{(1+\varkappa)^k \hat{q},\ (1+\varkappa)^k \hat{r},\ Q_{\rho_k}},$$

именно

$$\Phi_k \leqslant c^k \left(\Phi_{k-1}^{1+\varkappa} + 1\right),\ k = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{8.5}$$

с известной нам постоянной $c \geqslant 1$, определяемой, как и $\varkappa$, параметрами из условий (7.1), (7.2). Из нее следует, как мы видели в конце § 7, желаемая оценка

$$\operatorname{vrai\,max}_{Q_\rho} |u| = \lim_{k\to\infty} \Phi_k^{(1+\varkappa)^{-k}} \leqslant c^{\frac{1+\varkappa}{\varkappa^2}} \left(\|u\|_{\hat{q},\hat{r},\ Q_{2\rho}} + 1\right). \tag{8.6}$$

## § 9. Оценки некоторых норм Орлича для обобщенных решений

В двух предыдущих параграфах были получены оценки для максимумов модулей обобщенных решений $u(x,\ t)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$ уравнения (1.1) при условиях (7.1), (7.2) на правые части $f$ и $f_i$. Однако если эти условия ослабить, то решения остаются все же более хорошими, чем это дает энергетическое неравенство (2.2). Точнее, верна следующая теорема.

Теорема 9.1. *Пусть для коэффициентов уравнения* (1.1) *выполнены условия* (1.2) — (1.4), *а для правых частей справедливы условия*

$$\|f\|_{q_3,\, r_3,\, Q_T}, \quad \Big\|\sum_{i=1}^{n} f_i^2\Big\|_{q_4,\, r_4,\, Q_T} \leqslant \mu_2, \tag{9.1}$$

*в которых*

$$\frac{1}{r_3}+\frac{n}{2q_3}=1+\frac{n\theta}{4},$$

*причем*

$$\left.\begin{aligned}
&q_3\in\left[\frac{2n}{4+\theta(n-2)},\ \frac{2}{\theta}\right],\quad r_3\in\left[1,\ \frac{2}{\theta}\right] \quad \textit{при} \quad n\geqslant 3,\\
&q_3\in\left(1,\ \frac{2}{\theta}\right],\quad r_3\in\left[1,\ \frac{2}{\theta}\right) \quad \textit{при} \quad n=2,\\
&q_3\in\left[1,\ \frac{2}{\theta}\right],\quad r_3\in\left[1,\ \frac{4}{2+\theta}\right] \quad \textit{при} \quad n=1,\\
&\qquad \frac{1}{r_4}+\frac{n}{2q_4}=1+\frac{n\theta}{2},\\
&\textit{причем}\\
&q_4\in\left[\frac{n}{2+\theta(n-2)},\ \frac{1}{\theta}\right],\quad r_4\in\left[1,\ \frac{1}{\theta}\right] \quad \textit{при} \quad n\geqslant 3,\\
&q_4\in\left(1,\ \frac{1}{\theta}\right],\quad r_4\in\left[1,\ \frac{1}{\theta}\right) \quad \textit{при} \quad n=2,\\
&q_4\in\left[1,\ \frac{1}{\theta}\right],\quad r_4\in\left[1,\ \frac{2}{1+\theta}\right] \quad \textit{при} \quad n=1,
\end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

*а* $\theta$ — *какое-либо число из интервала* (0, 1)*).

*Тогда, если* $|u|\,\big|_{S_T}$ *ограничен и* $|u(x,\ 0)|^{\frac{1}{\theta}}\in L_2(\Omega)$, *то*

$$|u(x,\ t)|^{\frac{1}{\theta}}\in V_2(Q_T).$$

---

*) Как легко видеть, при $\theta=1$ соотношения (9.2) переходят в соотношения (1.6).

*Если же об* $|u|\big|_{\Gamma_T}$ *ничего не известно, то принадлежность* $|u|^{\frac{1}{\theta}}$ *к* $V_2(Q_T)$ *имеет место для любой строго внутренней подобласти* $Q' \subset Q_T$.

Следствие. Из теоремы 9.1 и неравенства (3.4) главы II следует, что при условиях (9.1), (9.2) любое обобщенное решение уравнения (1.1) принадлежит $L_{q,r}(Q_T)$ или $L_{q,r}(Q')$ такому, что

$$\frac{1}{r}+\frac{n}{2q}=\frac{n}{4}\theta.$$

Будем считать $u$ на $\Gamma_T$ равной нулю. (Доказательство, по существу, не изменится, если это требование заменить ограниченностью $u$ на $\Gamma_T$.)

Для доказательства воспользуемся тождеством (2.12), установленным для $u$ и любой функции $\eta$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$.

Возьмем в нем

$$\eta(x, t)=u_h(x, t)\left[\psi_M^{(h)}(x, t)\right]^{\frac{2}{\theta}-2},$$

где

$$\psi_M^{(h)}(x, t)=\begin{cases} M & \text{при } u_h \geqslant M, \\ u_h(x, t) & \text{при } 0 \leqslant u_h \leqslant M, \\ 0 & \text{при } u_h < 0. \end{cases} \tag{9.3}$$

Все слагаемые (2.12), кроме первого, имеют предел при $h \to 0$. О первом же слагаемом сразу этого сказать нельзя, так как $u_t$, вообще говоря, не существует. Преобразуем поэтому первое слагаемое к подходящей форме

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega u_{ht}u_h\left(\psi_M^{(h)}\right)^{\frac{2}{\theta}-2}dx\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\int_\Omega \left(u_h^2\right)_t\left(\psi_M^{(h)}\right)^{\frac{2}{\theta}-2}dx\,dt=$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\int_\Omega u_h^2\left[\left(\psi_M^{(h)}\right)^{\frac{2}{\theta}-2}\right]_t dx\,dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_\Omega u_h^2\left(\psi_M^{(h)}\right)^{\frac{2}{\theta}-2}dx\,\Big|_{t=0}^{t=t_1}. \tag{9.4}$$

В первом слагаемом (9.4) можно выполнить интегрирование по $t$ следующим образом:

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega u_h^2\left[\left(\psi_M^{(h)}\right)^{\frac{2}{\theta}-2}\right]_t dx\,dt=\left(\frac{2}{\theta}-2\right)\int_0^{t_1}\int_\Omega \left(\psi_M^{(h)}\right)^{\frac{2}{\theta}-1}\psi_{Mt}^{(h)}\,dx\,dt=$$
$$=(1-\theta)\int_\Omega \left[\psi_M^{(h)}\right]^{\frac{2}{\theta}}dx\,\Big|_{t=0}^{t=t_1}.$$

Поэтому $\int_0^{t_1}\int_\Omega u_{ht}\eta(x,\ t)\,dx\,dt$ равняется

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_h^2\left(\psi_M^{(h)}\right)^{\frac{2}{\theta}-2}dx\,\Big|_{t=0}^{t=t_1}-\frac{1}{2}(1-\theta)\int_\Omega\left[\psi_M^{(h)}\right]^{\frac{2}{\theta}}dx\,\Big|_{t=0}^{t=t_1}. \qquad (9.5)$$

В этих интегралах уже можно перейти к пределу по $h\to 0$. Подставляя их в (2.12) и переходя в (2.12) к пределу по $h\to 0$, мы получим следующее равенство для $u$:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2}dx\,\Big|_{t=0}^{t=t_1}-\frac{1}{2}(1-\theta)\int_\Omega \psi_M^{\frac{2}{\theta}}dx\,\Big|_{t=0}^{t=t_1}+$$
$$+\int_0^{t_1}\int_\Omega a_{ij}u_{x_j}\left(u\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2}\right)_{x_i}dx\,dt=-\int_0^{t_1}\int_\Omega\left[(a_iu+f_i)\left(u\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2}\right)_{x_i}+\right.$$
$$\left.+(b_iu_{x_i}+au+f)\,u\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2}\right]dx\,dt. \qquad (9.6)$$

В нем $\psi_M(x,\ t)$ равна $M$ при $u(x,\ t)>M$, равна $u(x,\ t)$ при $0\leqslant u(x,\ t)\leqslant M$ и равна 0 при $u(x,\ t)<0$. Ясно, что всюду $0\leqslant\psi_M(x,\ t)\leqslant|u(x,\ t)|$, а в тех точках, где $\psi_M(x,\ t)\neq u(x,\ t)$, $\psi_{Mx}=0$. Ввиду этого сумма первых двух членов левой части (9.6) не меньше $\frac{\theta}{2}\int_\Omega u^2\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2}dx\,\Big|^{t=t_1}-$ $-\frac{1}{2}\int_\Omega|u(x,\ 0)|^{\frac{2}{\theta}}dx$. Следующий за ними член оценим снизу, используя то, что в точках, где $\psi_M(x,\ t)=u(x,\ t)$,

$$a_{ij}u_{x_j}\left(u\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2}\right)_{x_i}=\left(\frac{2}{\theta}-1\right)a_{ij}u_{x_j}u^{\frac{2}{\theta}-2}u_{x_i}\geqslant$$
$$\geqslant\left(\frac{2}{\theta}-1\right)\nu u_x^2\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2}=(2-\theta)\,\theta\nu\left[\left(u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right)_x\right]^2,$$

а там, где $\psi_M(x, t) \neq u(x, t)$,

$$a_{ij}u_{x_j}\left(u\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2}\right)_{x_i} = a_{ij}u_{x_j}u_{x_i}\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2} \geqslant \nu\left[\left(u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right)_x\right]^2,$$

и потому всюду

$$a_{ij}u_{x_j}\left(u\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2}\right)_{x_i} \geqslant \nu\theta\left[\left(u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right)_x\right]^2.$$

Таким образом, левая часть (9.6) не меньше

$$\theta\min\left\{\nu;\ \frac{1}{2}\right\}\left\{\int_\Omega\left(u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right)^2 dx\,\Big|^{t=t_1} + \int_{Q_{t_1}}\left[\left(u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right)_x\right]^2 dx\,dt\right\} - \\ -\frac{1}{2}\int_\Omega |u(x, 0)|^{\frac{2}{\theta}} dx. \qquad (9.7)$$

Все члены правой части (9.6) оценим сверху, рассматривая аналогично только что проведенным рассуждениям все выражения в точках, где $\psi_M = u$, и в точках, где $\psi_M = \mathrm{const}$ (т. е. там, где $\psi_M \neq u$), и затем выбирая мажоранту, общую для обеих категорий точек $(x, t)$. Это, как нетрудно подсчитать, приводит к следующим неравенствам:

$$\left|a_i u\left(u\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2}\right)_{x_i}\right| \leqslant (2-\theta)\left|a_i\left(u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right)\left(u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right)_{x_i}\right|,$$

$$\left|b_i u_{x_i} u\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2}\right| \leqslant \theta\left|b_i\left(u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right)\left(u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right)_{x_i}\right|,$$

$$\left|au^2\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2}\right| = |a|\left(u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right)^2,$$

$$\left|f_i\left(u\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2}\right)_{x_i}\right| \leqslant (2-\theta)\left|f_i\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\left(u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right)_{x_i}\right| \leqslant \\ \leqslant 2|f_i|\left|u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right|^{1-\theta}\left|\left(u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right)_{x_i}\right|,$$

$$\left|fu\psi_M^{\frac{2}{\theta}-2}\right| \leqslant |f|\left|u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right|^{2-\theta}.$$

В их правых частях стоит всюду функция $u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}$, которую мы обозначим через $v$. Подставляя полученные неравенства в (9.6) и оценивая интегралы в правой части по неравенствам Коши с произвольным $\varepsilon > 0$, получим

$$\theta \min\left\{\frac{1}{2};\ \nu\right\}\left(\|v(x,\ t_1)\|_{2,\ \Omega}^2 + \|v_x\|_{Q_{t_1}}^2\right) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{Q_{t_1}} \Big[(2|a_i| + |b_i|)|vv_{x_i}| + |a|v^2 +$$
$$+ 2|f_i|\left||v|^{1-\theta}v_{x_i}\right| + |f||v|^{2-\theta}\Big]\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,\ 0)|^{\frac{2}{\theta}}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{Q_{t_1}} \left\{2\varepsilon v_x^2 + \left[\frac{1}{4\varepsilon}\sum_{i=1}^n (2|a_i| + |b_i|)^2 + |a|\right]v^2 +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^n f_i^2|v|^{2(1-\theta)} + |f||v|^{2-\theta}\right\}dx\,dt + \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,\ 0)|^{\frac{2}{\theta}}\,dx. \tag{9.8}$$

Обозначим $\theta \min\left\{\frac{1}{2};\ \nu\right\}$ через $2\nu_1$ и возьмем $\varepsilon = \frac{\nu_1}{2}$. Тогда после приведения подобных членов и максимизации по $t$ из (9.8) выведем неравенство

$$\nu_1 |v|_{Q_{t_1}}^2 \leqslant 2\int_{Q_{t_1}} \left(\mathscr{D}v^2 + \frac{2}{\nu_1}\sum_{i=1}^n f_i^2|v|^{2(1-\theta)} + |f||v|^{2-\theta}\right)dx\,dt +$$
$$+ \int_\Omega |u(x,\ 0)|^{\frac{2}{\theta}}\,dx, \tag{9.9}$$

где $\mathscr{D} = \frac{1}{2\nu_1}\sum_{i=1}^n (2|a_i| + |b_i|)^2 + |a|$. Члены, стоящие в правой части, оценим сверху, используя неравенство Гёльдера, теорему вложения (3.4) главы II и предположения о коэффициентах и свободных членах уравнения (1.1), следующим образом:

$$\int_{Q_{t_1}} \mathscr{D} v^2 dx\, dt \leqslant \| \mathscr{D} \|_{q, r, Q_{t_1}} \| v \|^2_{\bar{q}, \bar{r}, Q_{t_1}} \leqslant \beta^2 \| \mathscr{D} \|_{q, r, Q_{t_1}} | v |^2_{Q_{t_1}},$$

$$\int_{Q_{t_1}} \sum_{i=1}^{n} f_i^2 | v |^{2(1-\theta)} dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \right\|_{q_4, r_4, Q_{t_1}} \| v \|^{2(1-\theta)}_{\bar{q}_4 (1-\theta), \bar{r}_4 (1-\theta), Q_{t_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \beta^{2(1-\theta)} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \right\|_{q_4, r_4, Q_{t_1}} | v |^{2(1-\theta)}_{Q_{t_1}},$$

$$\int_{Q_{t_1}} | f | | v |^{2-\theta} dx\, dt \leqslant \| f \|_{q_3, r_3, Q_{t_1}} \| v \|^{2-\theta}_{\bar{q}_3 \frac{(2-\theta)}{2}, \bar{r}_3 \frac{(2-\theta)}{2}, Q_{t_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \beta^{2-\theta} \| f \|_{q_3, r_3, Q_{t_1}} | v |^{2-\theta}_{Q_{t_1}}.$$

Здесь, как и в других местах, параметры с чертой и без черты связаны равенством $\bar{q} = \frac{2q}{q-1}$. При этих оценках было использовано то, что в силу (9.2) пространство $V_2(Q_{t_1})$ вкладывается в пространства $L_{\bar{q}, \bar{r}}(Q_{t_1})$, $L_{\bar{q}_4 (1-\theta), \bar{r}_4 (1-\theta)}(Q_{t_1})$ и в $L_{\bar{q}_3 \frac{2-\theta}{2}, \bar{r}_3 \frac{2-\theta}{2}}(Q_{t_1})$, и для них справедливо неравенство (3.4) главы II. Благодаря этим неравенствам и неравенству Юнга из (9.9) следует

$$\frac{\nu_1}{2} | v |^2_{Q_{t_1}} \leqslant \beta^2 \| \mathscr{D} \|_{q, r, Q_{t_1}} | v |^2_{Q_{t_1}} + \frac{1}{2} \| | u(x, 0) |^{\frac{1}{\theta}} \|^2_{2, \Omega} +$$

$$+ \beta^{2(1-\theta)} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \right\|_{q_4, r_4, Q_{t_1}} | v |^{2(1-\theta)}_{Q_{t_1}} + \beta^{2-\theta} \| f \|_{q_3, r_3, Q_{t_1}} | v |^{2-\theta}_{Q_{t_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[ \beta^2 \| \mathscr{D} \|_{q, r, Q_{t_1}} + (1-\theta) \varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}} + \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) \varepsilon^{\frac{2}{2-\theta}} \right] | v |^2_{Q_{t_1}} + \mathscr{F}(t_1), \tag{9.10}$$

где

$$\mathcal{F}(t_1)=\theta\varepsilon^{-\frac{1}{\theta}}\beta^{2\left(\frac{1}{\theta}-1\right)}\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i^2\right\|_{q_4,\,r_4,\,Q_{t_1}}^{\frac{1}{\theta}}+$$

$$+\frac{1}{2}\left\|\,|u(x,\;0)|^{\frac{1}{\theta}}\right\|_{2,\,\Omega}^2+\frac{\theta}{2}\varepsilon^{-\frac{2}{\theta}}\beta^{2\left(\frac{2}{\theta}-1\right)}\|f\|_{q_3,\,r_3,\,Q_{t_1}}^{\frac{2}{\theta}},$$

а $\varepsilon$ — произвольное положительное число. Возьмем $\varepsilon$ таким, чтобы $(1-\theta)\,\varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}}+\left(1-\frac{\theta}{2}\right)\varepsilon^{\frac{2}{2-\theta}}=\frac{\nu_1}{8}$, а $t_1$ выберем столь малым, чтобы

$$\beta^2\|\mathcal{D}\|_{q,\,r,\,Q_{t_1}}\leqslant\frac{\nu_1}{8}. \tag{9.11}$$

Это возможно, ибо $r<\infty$. Для таких $t_1$ и $\varepsilon$ неравенство (9.10) дает

$$\frac{\nu_1}{4}\,|v|_{Q_{t_1}}^2\equiv\frac{\nu_1}{4}\left|u\psi_M^{\frac{1}{\theta}-1}\right|_{Q_{t_1}}^2\leqslant\mathcal{F}(t_1).$$

Устремляя $M$ к бесконечности, получим из нее желаемую оценку для $u^{(0)}=\max\{u(x,\,t);\;0\}$:

$$\left|(u^{(0)})^{\frac{1}{\theta}}\right|_{Q_{t_1}}\leqslant\left(\frac{4}{\nu_1}\mathcal{F}(t_1)\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant c. \tag{9.12}$$

Идя маленькими шагами по $t$, получим оценку $\left|(u^{(0)})^{\frac{1}{\theta}}\right|_{Q_T}$ для всего $Q_T$, подобно тому как это было сделано выше, в § 4. Поясним это.

Неравенство (9.12), точнее неравенство

$$\left|(u^{(0)})^{\frac{1}{\theta}}\right|_{Q_{t_{k-1},\,t_k}}\leqslant\left(\frac{4}{\nu_1}F(t_{k-1},\;t_k)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{9.12'}$$

доказано нами, по существу, для любого цилиндра $Q_{t_{k-1},\,t_k}=\Omega\times(t_{k-1},\;t_k)$, $0\leqslant t_{k-1}\leqslant t_k\leqslant T$, если только для $Q_{t_{k-1},\,t_k}$ выполнено условие (9.11), т. е. если

$$\mu(t_{k-1},\;t_k)\equiv\beta^2\|\mathcal{D}\|_{q,\,r,\,Q_{t_{k-1},\,t_k}}\leqslant\frac{\nu_1}{8}. \tag{9.11'}$$

Величина $F(t_{k-1}, t_k)$ в (9.12′) вычисляется для $Q_{t_{k-1}, t_k}$ так же, как выше $F(t_1)$ для $Q_{t_1} \equiv Q_{0, t_1}$. Разобьем $[0, T]$ на конечное число отрезков $[t_0 = 0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{s-1}, t_s = T]$ так, чтобы для каждого из них выполнялось (9.11′), причем чтобы для всех, кроме может быть последнего, имел место в (9.11′) знак равенства. Ввиду этого

$$(s-1)\left(\frac{\nu_1}{8}\right)^r \leqslant \sum_{k=1}^{s} \mu^r(t_{k-1}, t_k) = \beta^{2n} \| \mathscr{D} \|_{q, r, Q_T}^r,$$

т. е. число делений $s$ при таком разбиении не будет превосходить известной нам величины $1 + \left(\frac{8\beta^2}{\nu_1} \| \mathscr{D} \|_{q, r, Q_T}\right)^r$. Благодаря этому мы получим из неравенств (9.12′) желаемую оценку $|u^{(0)}|_{Q_T}$ для всего $Q_T$, если заметим, что в них величины $\max\limits_{t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k} \int\limits_\Omega [u^{(0)}(x, t)]^{\frac{2}{\theta}} dx$ оцениваются через $\int\limits_\Omega [u^{(0)}(x, t_{k-1})]^{\frac{2}{\theta}} dx$ и известные нам нормы правых частей уравнения (1.1).

Итак, принадлежность $[u^{(0)}(x, t)]^{\frac{1}{\theta}}$ к $V_2(Q_T)$ установлена. Аналогично, рассматривая функцию $(\max\{-u(x, t);\ 0\})^{\frac{1}{\theta}}$, докажем и ее принадлежность к $V_2(Q_T)$ и получим оценку ее нормы в $V_2(Q_T)$. Тем самым утверждение теоремы 9.1 о глобальной оценке доказано. Если относительно решения $u$ не известно, что $|u|\,|_{\Gamma_T}$ ограничена, то, взяв $\eta(x, t)$ в (2.12) равной $u_h\left(\psi_M^{(h)}\right)^{\frac{2}{\theta}-2}\zeta^2$ с гладкой $\zeta(x, t)$, равной нулю на $\Gamma_T$, и проводя аналогичные оценки, получим справедливость второго утверждения теоремы.

Итак, теорема 9.1 доказана.

Если в условиях (9.1) $\theta = 0$, то из теоремы 9.1 следует суммируемость решения $u$ с любой положительной степенью. Однако если коэффициенты уравнения (1.1) подчиняются требованиям (7.1), то о решении можно сказать больше: оно экспоненциально суммируемо. Именно, справедлива

Теорема 9.2. *Пусть коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям* (1.2), (7.1), (7.2), *а правые* *части* $f_i$ *и* $f$ *— условиям* (9.1), (9.2) *с* $\theta=0$. *Тогда для любого обобщенного решения* $u$ *из* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *уравнения* (1.1) *с* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Gamma_T}|u|\equiv\hat{k}<\infty$ *существуют постоянные* $c>0$ *и* $c_1$ *такие, что*

$$\int\limits_{Q_T}\exp\left[c\,|u(x,t)|\right]dx\,dt\leqslant c_1,$$

***причем*** $c$ ***и*** $c_1$ ***определяются известными параметрами, входящими в перечисленные условия.***

Доказательство этого утверждения проводится почти так же, как и доказательство теоремы 7.1: доказывается некоторое интегральное неравенство (типа неравенства (5.32) главы II), из которого с помощью леммы 5.10 главы II делается желаемый вывод.

Упомянутое неравенство, как и в § 7, выводится из равенства (7.6) при помощи оценок различных интегралов по неравенству Гёльдера. Все слагаемые, кроме тех, которые содержат множители $f_i$ и $f$, оцениваются точно так же, как и в § 7. А слагаемые с $f_i$ и $f$ оцениваются следующим образом:

$$\int\limits_{Q_{t_1}(k)}|f|\,(u-k)\,dx\,dt\leqslant\mu_3^{\frac{1}{\bar r_3}}(k)\,\|f\|_{q_3,r_3,Q_{t_1}}\|u^{(k)}\|_{\bar q_3,\bar r_3,Q_{t_1}},\tag{9.13}$$

$$\int\limits_{Q_{t_1}(k)}\sum_{i=1}^{n}f_i^2\,dx\,dt\leqslant\mu_4^{\frac{2}{\bar r_4}}(k)\left\|\sum_{i=1}^{n}f_i^2\right\|_{q_4,r_4,Q_{t_1}},$$

где

$$\bar q_i=\frac{2q_i}{q_i-1},\quad \bar r_i=\frac{2r_i}{r_i-1},\quad i=3,\ 4,$$

$$\mu_i(k)=\int\limits_0^{t_1}\operatorname{mes}^{\frac{\bar r_i}{\bar q_i}}A_k(t)\,dt,\qquad A_k(t)=\{x\in\Omega\colon\ u(x,t)>k\}\ ^{*)}.$$

---

*) При $\bar r_i=\infty$ надо считать $\mu_i^{\frac{1}{\bar r_i}}(k)=\operatorname{vrai}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant t_1}\operatorname{mes}^{\frac{1}{\bar q_i}}A_k(t)$, а при $\bar q_i=\infty$ надо $\mu_i(k)$ считать равной мере точек отрезка $[0,t_1]$, для которых $\operatorname{mes}A_k(t)>0$. Случай $\bar r_i=\infty$ имеет место при $r_i=1$, $n\geqslant1$, а случай $\bar q_i=\infty$ встречается лишь при $n=1$, когда $q_i=1$.

В результате получаем следующую оценку при $k \geqslant \max\{\hat{k};\ 1\}$:

$$\min\left\{\frac{1}{2};\ \frac{\nu}{2}\right\}\left[\int\limits_{A_k(t_1)}(u-k)^2\,dx+\|u_x\|^2_{2,\,Q_{t_1}(k)}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{A_k(t)}\left(\frac{4}{\nu}\sum_{i=1}^n a_i^2+\frac{2}{\nu}\sum_{i=1}^n b_i^2+2|a|\right)[(u-k)^2+k^2]\,dx\,dt+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\|u^{(k)}\|^2_{\bar{q}_3,\,\bar{r}_3,\,Q_{t_1}}+\frac{1}{2\varepsilon}\mu_3^{\frac{2}{\bar{r}_3}}(k)\|f\|^2_{q_3,\,r_3,\,Q_{t_1}}+$$

$$+\frac{4}{\nu}\mu_4^{\frac{2}{\bar{r}_4}}(k)\left\|\sum_{i=1}^n f_i^2\right\|_{q_4,\,r_4,\,Q_{t_1}}. \quad (9.14)$$

Первое слагаемое правой части оценим так же, как правая часть (7.8) была оценена в § 7, а интеграл $\|u^{(k)}\|^2_{\bar{q}_3,\,\bar{r}_3,\,Q_{t_1}}$ оценим через $|u^{(k)}|^2_{Q_{t_1}}$, используя неравенство (3.4) главы II (оно применимо, ибо $\bar{q}_3$ и $\bar{r}_3$ удовлетворяют условиям (3.3) главы II). После этого проведем максимизацию по $t$, учитывая, что все наши неравенства справедливы при любом $t_1$ из $[0, T]$. Это приведет к неравенству

$$\min\left\{\frac{1}{2};\ \frac{\nu}{2}\right\}|u^{(k)}|^2_{Q_{t_1}}\leqslant\beta^2\|\mathscr{D}_1\|_{q,\,r,\,Q_{t_1}(k)}\,\mu^{\frac{2\varkappa}{\hat{r}}}(k)\,|u^{(k)}|^2_{Q_{t_1}}+$$

$$+k^2\|\mathscr{D}_1\|_{q,\,r,\,Q_{t_1}}\,\mu^{\frac{2(1+\varkappa)}{\hat{r}}}(k)+\varepsilon\beta^2|u^{(k)}|^2_{Q_{t_1}}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2_{q_3,\,r_3,\,Q_{t_1}}\,\mu_3^{\frac{2}{\bar{r}_3}}(k)+\frac{8}{\nu}\left\|\sum_{i=1}^n f_i^2\right\|_{q_4,\,r_4,\,Q_{t_1}}\mu_4^{\frac{2}{\bar{r}_4}}(k),$$

где

$$\mathscr{D}_1=2\left(\frac{4}{\nu}\sum_{i=1}^n a_i^2+\frac{2}{\nu}\sum_{i=1}^n b_i^2+2|a|\right).$$

а $\hat{r}$, $\varkappa$ и $\mu(k)$ такие же, как в неравенстве (7.9). Положим $\varepsilon = \frac{1}{\beta^2}\min\left\{\frac{1}{8};\ \frac{\nu}{8}\right\}$ и найдем $t_1$ из условия

$$\beta^2 \|\mathscr{D}_1\|_{q,\,r,\,Q_{t_1}(k)}\, t_1^{\frac{2\varkappa}{\hat{r}}} \operatorname{mes}\Omega^{\frac{2\varkappa}{\hat{q}}} \leqslant \min\left\{\frac{1}{8};\ \frac{\nu}{8}\right\}.$$

В результате для $k \geqslant \max\{\hat{k};\ 1\}$ получим

$$\min\left\{\frac{1}{4};\ \frac{\nu}{4}\right\}\|u^{(k)}\|^2_{Q_{t_1}} \leqslant c\left[k^2\mu^{\frac{2(1+\varkappa)}{\hat{r}}}(k) + \mu_3^{\frac{2}{\hat{r}_3}}(k) + \mu_4^{\frac{2}{\hat{r}_4}}(k)\right], \tag{9.15}$$

с $c = \max\left\{\|\mathscr{D}_1\|_{q,\,r,\,Q_{t_1}};\ \frac{8\beta^2}{\min\{1;\ \nu\}}\|f\|^2_{q_3,\,r_3,\,Q_{t_1}};\ \frac{8}{\nu}\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i^2\right\|_{q_4,\,r_4,\,Q_{t_1}}\right\}$.

Заключение теоремы теперь следует из замечания 5.4 к лемме 5.10 главы II.

Можно получить и локальные оценки $\int\limits_{Q'} \exp[c|u(x,t)|]\,dx\,dt$ для решений $u(x, t)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$, о которых неизвестна ограниченность $|u|$ на $\Gamma_T$. Необходимые для этого видоизменения аналогичны тем, которые проведены в § 8 при оценке $\max\limits_{Q'}|u|$ для любых $u$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$. Локальные оценки $\|u\|_{q,\,r,\,Q'}$ и $\int\limits_{Q'} \exp[c|u(x, t)|]\,dx\,dt$ даны в [$22_5$].

## § 10. Оценка константы Гёльдера. Неравенство Гарнака

В §§ 7, 8 мы доказали, что при выполнении условий (1.2), (7.1), (7.2) каждое из обобщенных решений $u(x, t)$ уравнения (1.1) из пространства $V_2^{1,0}(Q_T)$ является ограниченным. Оказывается, при этих же условиях $u$ принадлежит $H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ с некоторым $\alpha > 0$ и его нормы $|u|_{Q'}^{(\alpha)}$ можно оценить через $\|u\|_{2,\,Q_T}$ и известные параметры, входящие в условия (1.2), (7.1), (7.2). Именно, справедливо следующее утверждение:

Теорема 10.1. *Пусть* $u(x, t)$ *есть обобщенное решение из* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *уравнения* (1.1), *коэффициенты и* *свободные члены которого удовлетворяют условиям* (1.2) *и* (7.1), (7.2), *и пусть* $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|u| = M$. *Тогда* $u \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ *и норма* $|u|_{Q'}^{(\alpha)}$ *для любого* $Q' \subset Q_T$, *отстоящего от* $\Gamma_T$ *на положительное расстояние* $d$, *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $n$, $M$, *параметров* $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$ *и* $r$ *из условий* (7.1), (7.2) *и расстояния* $d$. *Показатель* $\alpha > 0$ *и определяется лишь числами* $n$, $\nu$, $\mu$, $q$ *и* $r$.

*Если дополнительно известно, что* $u|_{\Gamma'} \in H^{\beta, \frac{\beta}{2}}(\Gamma')$ *на некотором куске* $\Gamma' \subset \Gamma_T$, *удовлетворяющем условию* $(A)$*), *то* $u(x, t) \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T \cup \Gamma')$ *и норма* $|u|_{Q'}^{(\alpha)}$ *для любого* $Q'$, *принадлежащего* $Q_T$ *и отстоящего от* $\Gamma_T \setminus \Gamma'$ *на положительное расстояние* $d$, *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $n$, $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$, $d$, $\beta$, $|u|_{\Gamma'}^{(\beta)}$ *и постоянных* $a_0$ *и* $\theta_0$ *из условия* (A). *Показатель* $\alpha$ *принадлежит полуинтервалу* $(0, \beta]$ *и определяется* $n$, $\nu$, $\mu$, $r$ *и* $q$.

Итак, пусть $u$ есть обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ уравнения (1.1) с $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|u| = M$. Для него справедливо равенство (8.1). Будем считать в нем $\zeta(x, t)$ отличной от нуля лишь при $x \in K_\rho$. Из него, используя неравенства (1.1), (1.2) главы II получим при $k \in [-M, M]$:

$$\frac{1}{2}\|u^{(k)}(x, t)\zeta(x, t)\|_{2, K_\rho}^2\Big|_{t_0}^{t} + \nu\int_{t_0}^{t}\int_{K_\rho}(u_x^{(k)})^2\zeta^2 dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{t}\int_{A_{k,\rho}(t)}\Big[\varepsilon_1\mu u_x^2\zeta^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\mu(u-k)^2\zeta_x^2 + \varepsilon_1 u_x^2\zeta^2 +$$
$$+\frac{1}{2\varepsilon_1}\sum_i (a_i^2M^2 + f_i^2)\zeta^2 + (u-k)^2\zeta_x^2 + 2\sum_i (a_i^2M^2 + f_i^2\zeta^2) +$$
$$+\varepsilon_1 u_x^2\zeta^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\sum_i b_i^2(u-k)^2\zeta^2 + (|a|M + |f|)\,2M\zeta^2 +$$
$$+(u-k)^2\zeta|\zeta_t|\Big]dx\,dt. \qquad (10.1)$$

---

*) Условие $(A)$ определено на стр. 18, § 1, гл. I.

Отсюда, выбирая $\varepsilon_1=\frac{\nu}{2(\mu+2)}$, приводя подобные члены и максимизируя по $t$, будем иметь

$$\frac{1}{2}\max_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+\tau}\|u^{(k)}(x,t)\zeta(x,t)\|^2_{2,K_\rho}+\frac{\nu}{2}\int\limits_{Q(\rho,\tau)}(u^{(k)}_x)^2\zeta^2dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\|u^{(k)}(x,t_0)\zeta(x,t_0)\|^2_{2,K_\rho}+c\int\limits_{Q(\rho,\tau)}(u^{(k)})^2(\zeta_x^2+\zeta|\zeta_t|)\,dx\,dt+$$
$$+(M^2+1)\int\limits_{Q(k,\rho,\tau)}\mathscr{D}_1(x,t)\,dx\,dt,\qquad(10.2)$$

где

$$c=2\left[1+\frac{2\mu(\mu+2)}{\nu}\right],$$

$$\mathscr{D}_1(x,t)=2\left(2+\frac{\mu+2}{\nu}\right)\sum_{i=1}^n(a_i^2+b_i^2)\zeta^2+\frac{4(\mu+2)}{\nu}\sum_{i=1}^n b_i^2\zeta^2+$$
$$+4(|a|+|f|)\zeta^2,$$
$$Q(\rho,\tau)=K_\rho\times(t_0,t_0+\tau);$$
$$Q(k,\rho,\tau)=\{(x,t)\in Q(\rho,\tau):\ u(x,t)>k\}.$$

Последний интеграл в (10.2) оценим, используя неравенства (1.6), (3.5) главы II так же, как интеграл $\int\mathscr{D}(x,t)\,dx\,dt$ из (7.7) оценен в (7.8), (7.11); именно,

$$\int\limits_{Q(k,\rho,\tau)}\mathscr{D}_1\,dx\,dt\leqslant\|\mathscr{D}_1\|_{q,r,Q(k,\rho,\tau)}\|1\|^2_{\bar q,\bar r,Q(k,\rho,\tau)}\leqslant$$
$$\leqslant c_1\mu^{\frac{2(1+\varkappa)}{\hat r}}\left(k,\frac{\hat r}{\hat q},\rho,\tau\right),\qquad(10.3)$$

где

$$c_1=\|\mathscr{D}_1\|_{q,r,Q_T},\quad\mu\left(k,\frac{\hat r}{\hat q},\rho,\tau\right)=\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau}\operatorname{mes}^{\frac{\hat r}{\hat q}}A_{k,\rho}(t)\,dt\ ^*),$$

а числа $\bar q$, $\bar r$, $\hat q$ и $\hat r$ те же, что и в (7.9) — (7.12).

---

*) При $\bar q=\hat q=\infty$ под $\mu(k,0,\rho,\tau)$ надо понимать меру множества точек $t$ из $[t_0,t_0+\tau]$, для которых $\operatorname{mes}A_{k,\rho}(t)>0$.

Подставляя эту оценку в (10.2), придем к неравенствам:

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\tau} \| u^{(k)}(x, t)\zeta(x, t)\|^2_{2, K_\rho} + \nu \| |u^{(k)}_x| \zeta\|^2_{2, Q(\rho, \tau)} \leqslant$$
$$\leqslant \| u^{(k)}(x, t_0)\zeta(x, t_0)\|^2_{2, K_\rho} + c \int\limits_{Q(\rho, \tau)} (u^{(k)})^2 (\zeta_x^2 + \zeta|\zeta_t|)\, dx\, dt +$$
$$+ c_1 (M^2+1) \mu^{\frac{2(1+\varkappa)}{\hat{r}}} \left(k, \frac{\hat{r}}{\hat{q}}, \rho, \tau\right). \tag{10.4}$$

Такие же неравенства справедливы и для функции $-u(x, t)$. Из них следует, что решение $u(x, t)$ есть элемент класса $\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, \hat{r}, \delta, \varkappa)$ с $\delta = \infty$ и $\gamma$, определяемым $\nu$, $c$ и $c_1$ из (10.4). На основании теоремы 7.1 главы II $u$ будет элементом $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ с некоторым $\alpha > 0$. Однако $\alpha$, гарантированное теоремой 7.1, зависит от $\gamma$, а $\gamma$ в нашем случае зависит от $M$ и $\mu_1$. Чтобы добиться независимости показателя гёльдеровости $u$ от $M$ и $\mu_1$, рассмотрим (10.4) лишь при $\tau \leqslant \rho^2 \leqslant \rho_0^2$, где $\rho_0$ определяется равенством

$$\frac{c_1}{c}(M^2+1)\varkappa_n^{\frac{\varkappa}{\hat{q}}} \rho_0^{\frac{n\varkappa}{2}} = 1. \tag{10.5}$$

Для таких $\rho$ и $\tau$ из неравенств (10.4) следуют неравенства:

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\tau} \| u^{(k)}(x, t)\zeta(x, t)\|^2_{2, K_\rho} + \nu \| |u^{(k)}_x| \zeta\|^2_{2, Q(\rho, \tau)} \leqslant$$
$$\leqslant \| u^{(k)}(x, t_0)\zeta(x, t_0)\|^2_{2, K_\rho} + c \left\{ \int\limits_{Q(\rho, \tau)} (u^{(k)})^2 (\zeta_x^2 + \zeta|\zeta_t|)\, dx\, dt + \right.$$
$$\left. + \mu^{\frac{2}{\hat{r}}\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)} \left(k, \frac{\hat{r}}{\hat{q}}, \rho, \tau\right)\right\}. \tag{10.6}$$

В силу теоремы 7.1 главы II и замечания к ней из этих неравенств следует, что $u(x, t)$ принадлежит к $H^{\tilde{\alpha}, \frac{\tilde{\alpha}}{2}}(Q_T)$ с некоторым положительным $\tilde{\alpha}$ (вообще говоря, меньшим, чем $\alpha$), уже не зависящим от $M$ и $\mu_1$. Постоянная же Гёльдера $\langle u \rangle_{Q'}^{(\tilde{\alpha})}$ будет зависеть от $M$ и $\mu_1$. Итак, первая часть теоремы 10.1 доказана. Два других утверждения теоремы суть следствия теоремы 8.1 главы II и того факта, что неравенства (10.4) и (10.6) справедливы для $v(x, t) = \pm u(x, t)$ и для цилиндров $Q(\rho, \tau)$, пересекающих $\Gamma_T$, если только уровни $k$ в них подчинены условию: $k \geqslant \max\limits_{Q(\rho, \tau) \cap \Gamma_T} (\pm u)$, а все области интегрирования заменены их пересечениями с $Q_T$.

В § 10 главы V мы даем другое доказательство непрерывности в смысле Гёльдера обобщенных решений, причем делаем это сразу для квазилинейных уравнений, частным случаем которых являются уравнения (1.1). Здесь мы проиллюстрируем его на примере простейшего представителя уравнений (1.1), именно на уравнении

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\, u_{x_j}\right) = 0, \tag{10.7}$$

предполагая выполненным лишь условие (1.2).

Как известно (см. лемму 5.8 главы II), для доказательства непрерывности $u(x, t)$ по Гёльдеру и получения оценки постоянной Гёльдера $\langle u \rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$ достаточно показать, что колебание $u$ в произвольном цилиндре стандартного вида строго больше его колебания в меньшем соосном цилиндре того же вида с той же вершиной.

Цилиндры стандартного вида — это цилиндры $\{|x - x^0| < \rho,\ 0 < t - t_0 < \theta_1\rho^2\}$ с каким-либо $\theta_1 > 0$, которое в рассуждении фиксируется, и произвольными $x^0$, $t_0$ и $\rho$. Их вершинами считаются точки $(x^0, t_0 + \theta_1\rho^2)$. Так как уравнение (10.7) вместе с условием (1.2) инвариантны по отношению к преобразованию координат $\tilde{x} = \dfrac{x - x^0}{\rho}$, $\tilde{t} = \dfrac{t - t_0}{\rho^2}$ и преобразованию функций $\tilde{u}(x, t) = c_1(u(x, t) - c)$, то вместо изучения $u$ с произвольным $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T} |u|$ в произвольных цилиндрах стандартного типа достаточно доказать, что для любого решения $u(x, t)$ уравнения (10.7), определенного в цилиндре $Q_2 = K_2 \times (0, \theta) = \{|x| < 2;\ 0 < t < \theta\}$ и меняющегося в диапазоне $[0, 1]$ и цилиндре $Q_1 = K_1 \times \left(\frac{3}{4}\theta, \theta\right) = \left\{|x| < 1,\ \frac{3}{4}\theta < t < \theta\right\}$, справедливо неравенство

$$\operatorname{osc}\{u, Q_1\} \leqslant (1 - \delta_0) \operatorname{osc}\{u, Q_2\} \equiv 1 - \delta_0, \tag{10.8}$$

где $\theta$ и $\delta_0$ — какие-либо положительные постоянные.

Рассмотрим $u(x, 0)$ в $K_1$. Пусть

$$\operatorname{mes}\left\{x \in K_1 : u(x, 0) \leqslant \frac{1}{2}\right\} \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} K_1; \tag{10.9}$$

тогда все дальнейшие рассуждения будем проводить с функцией $u(x, t)$. В противном случае надо взять функцию $1 - u(x, t)$. Так как $u(x, t)$ есть решение уравнения (10.7), то для него неравенство (10.4) с $\zeta = \zeta(x)$ имеет вид

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \theta} \| u^{(k)}(x, t)\zeta(x)\|^2_{2, K_2} + \nu \| \, |u_x^{(k)}| \zeta \|^2_{2, Q(2, \theta)} \leqslant$$
$$\leqslant \| u^{(k)}(x, 0)\zeta(x)\|^2_{2, K_2} + 4\mu \int_{Q(2, \theta)} (u^{(k)})^2 |\zeta_x|^2 \, dx \, dt;$$

отсюда и из (10.9) в силу замечания 7.2 главы II и леммы 7.1 главы II следует, что

$$\operatorname{mes}\left\{x \in K_1 : u(x, t) \leqslant \frac{7}{8}\right\} \geqslant b \operatorname{mes} K_1, \quad t \in [0, \theta], \tag{10.10}$$

с некоторым положительным $b$.

Рассмотрим в $Q_2$ функцию $\varphi(u) = -\ln 8(1 - u + \varepsilon)$, где $\varepsilon$ — произвольное положительное число, которое мы затем устремим к нулю. Функция $\varphi(u)$ ограничена снизу и отрицательна там, где $u \leqslant \frac{7}{8}$. Если мы докажем, что $v(x, t) = \varphi(u(x, t))$ ограничена в $Q_1$ при всех $\varepsilon > 0$ некоторой константой $M_1$, то в $Q_1$ будем иметь

$$8(1 - u) \geqslant e^{-M_1}$$

и тем самым (10.8) с $\delta_0 = \frac{1}{8} e^{-M_1}$ *).

Будем для простоты считать, что $u(x, t)$ — классическое решение (в главе V рассмотрение будет проведено сразу для плохих решений). Умножим (10.7) на $\varphi'(u)\zeta(x, t)$, где $\zeta \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(K_2)$, и, проинтегрировав результат по $K_2$, получим после интегрирования по частям во втором слагаемом

$$\int_{K_2} \left(v_t \zeta + a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} \zeta + a_{ij} v_{x_j} \zeta_{x_i}\right) dx = 0. \tag{10.11}$$

*) Идея введения подобных функций $\varphi(u)$ для доказательства неравенств (10.8) принадлежит Ю. Мозеру (см. [42₁], § 5 главы IX (1), а также конец § 8 и конец § 10 данной главы).

Из (10.11) легко получить для $v$ неравенство

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\theta}\|v^{(k)}\zeta\|^2_{2,K_2}+\nu\||v^{(k)}_x|\zeta\|^2_{2,Q(2,\theta)}\leqslant$$
$$\leqslant\max\left(1,\frac{2\mu}{\nu}\right)\int_{Q(2,\theta)}(v^{(k)})^2(|\zeta_x|^2+\zeta|\zeta_t|)\,dx\,dt,$$

которое влечет за собой в силу теоремы 6.2 главы II ограниченность $v$ сверху в $Q\left(1,\frac{\theta}{4}\right)=K_1\times\left(\frac{3\theta}{4},\theta\right)$, если только конечна норма $\|v\|_{2,Q\left(\frac{3}{2},\frac{3\theta}{4}\right)}$. Для получения оценки сверху для $\|v\|_{2,Q\left(\frac{3}{2},\frac{3\theta}{4}\right)}$ положим в (10.11) $\zeta(x,t)=\mathfrak{N}^2(x)\chi^2(t)$, где функция $\chi(t)$ равна нулю при $t\leqslant 0$, равна $\frac{4t}{\theta}$ при $0\leqslant t\leqslant\frac{\theta}{4}$ и равна 1 при $\frac{\theta}{4}\leqslant t\leqslant\theta$, а $\mathfrak{N}(x)=\mathfrak{N}(|x|)$ есть монотонно убывающая функция $|x|$ при $|x|\in[0,2]$, равная 1 при $|x|\leqslant\frac{3}{2}$ и нулю при $|x|=2$. Проинтегрируем обе части (10.11) по $t$ и в первом слагаемом проведем интегрирование по частям:

$$\int_{K_2}v\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\Big|^{t=\theta}+\int_0^\theta\int_{K_2}a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt=$$
$$=\int_0^\theta\int_{K_2}\left[v\mathfrak{N}^2 2\chi\chi'-a_{ij}v_{x_j}2\mathfrak{N}\mathfrak{N}_{x_i}\chi^2\right]dx\,dt.$$

Отсюда, используя неравенство (1.2) главы II, получим

$$\int_{K_2}v\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\Big|^{t=\theta}+\int_0^\theta\int_{K_2}a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_1\int_0^\theta\int_{K_2}a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt+\frac{1}{\varepsilon_1}\int_0^\theta\int_{K_2}a_{ij}\mathfrak{N}_{x_i}\mathfrak{N}_{x_j}\chi^2\,dx\,dt+$$
$$+\int_0^\theta\int_{K_2}\left(\varepsilon_2v^2\mathfrak{N}^2\chi^2+\frac{1}{\varepsilon_2}\mathfrak{N}^2\chi'^2\right)dx\,dt.\quad(10.12)$$

Для дальнейших оценок членов (10.12) используем условие (10.10) и неравенство (5.4) главы II. Числа $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ выберем так:

$\varepsilon_1 = \frac{1}{4}$, $\varepsilon_2 = \frac{\nu b^2 \varkappa_n^2}{4\beta_2}$, где $\beta_2$—постоянная из неравенства (5.4) главы II. В результате этого и приведения подобных членов из (10.12) выведем желаемую оценку:

$$\int\limits_{\frac{\theta}{4}}^{\theta} \int\limits_{K_{3/2}} \left(v^2 + v_x^2\right) dx\, dt \leqslant c.$$

Это, как сказано выше, заканчивает доказательство неравенства (10.8).

Мы изложили здесь два способа получения оценок $|u|_Q^{(\alpha)}$.

Другое доказательство этой оценки для уравнения (10.7) вытекает из неравенства Гарнака, установленного Мозером [$42_2$]. Это неравенство утверждает, что для неотрицательных в $\hat{Q}_\rho$ решений уравнения (10.7) справедливо соотношение

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q_\rho^-} u(x, t) \leqslant c \operatorname*{vrai\,min}_{Q_\rho^+} u(x, t), \tag{10.13}$$

где постоянная $c$ зависит лишь от $\nu$ и $\mu$ из условия (1.2),

$$Q_\rho^+ = K_{\frac{\rho}{2}} \times \left(t_0 + \frac{3}{4}\rho^2,\ t_0 + \rho^2\right),$$

$$Q_\rho^- = K_{\frac{\rho}{2}} \times \left(t_0 - \frac{3}{4}\rho^2,\ t_0 - \frac{\rho^2}{2}\right),$$

а $\hat{Q}_\rho = K_\rho \times (t_0 - \rho^2,\ t_0 + \rho^2) \subset Q_T$. Из (10.13) легко получить неравенство вида (10.8) для произвольных решений (10.7), а потому и оценку гёльдеровской нормы $|u|_{Q'}^{(\alpha)}$ для любой области $Q' \subset Q_T$.

Основной ход доказательства Мозера состоит в следующем. Сначала способом, описанным коротко в конце § 8, выводится оценка

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q_\rho^-} u \equiv \|u\|_{\infty,\, Q_\rho^-} \leqslant c\, \|u\|_{\varepsilon,\, Q_\rho(x_0,\, t_0)}, \qquad \varepsilon > 0,$$

$$Q_\rho(x_0, t_0) = K_\rho(x_0) \times (t_0 - \rho^2,\ t).$$

Затем аналогично получается оценка

$$\|u\|_{-\varepsilon,\, Q_\rho(x_0,\, t_0 + \rho^2)} \leqslant c \operatorname*{vrai\,min}_{Q_\rho^+} u.$$

Наконец, при некотором $\varepsilon > 0$ устанавливается неравенство

$$\|u\|_{\varepsilon,\, Q_\rho(x_0,\, t_0)} \leqslant c\, \|u\|_{-\varepsilon,\, Q_\rho(x_0,\, t_0+\rho^2)}.$$

Вывод его составляет наиболее сложную часть всего доказательства.

Применительно к линейным уравнениям общего вида (1.1), а также к некоторым классам квазилинейных параболических уравнений идеи Мозера развивались в работах С. Н. Кружкова [$32_{2-4}$] и А. В. Иванова [$22_5$]. В [$22_5$] для неотрицательных обобщенных решений некоторого класса квазилинейных параболических уравнений и, в частности, линейных уравнений общего вида установлено такое обобщение неравенства (10.13):

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q_\rho^-} u(x,\, t) \leqslant c_1 \left(\operatorname*{vrai\,min}_{Q_\rho^+} u(x,\, t) + c_2\rho^\delta\right),$$

где $\delta \in (0,\, 1]$ и где $c_1$ и $c_2$ определяются лишь известными величинами, причем в случае однородного уравнения $c_2 = 0$.

## § 11. Оценка $\max\limits_{Q'} |u_x|$ и $\langle u_x \rangle_Q^{(\alpha)}$

Оценим $\max\limits_{Q'} |u_x|$ и $\langle u_x \rangle_{Q'}^{(\alpha)}$ для решений $u$ уравнений (1.1), при этом ограничимся в основном внутренними оценками и будем считать ради простоты $u$ принадлежащим $C^{2,\,1}(Q_T)$. Докажем следующую теорему.

Теорема 11.1. *Пусть коэффициенты и свободные члены уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям* (1.2) *и*

$$\left\| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k},\, a_i,\, \frac{\partial a_i}{\partial x_k},\, b_i,\, a,\, \frac{\partial f_i}{\partial x_k},\, f_i,\, f \right\|_{2q,\, 2r,\, Q_T} \leqslant \mu_1, \tag{11.1}$$

*где $q$ и $r$ — произвольные числа, удовлетворяющие соотношениям* (7.2) *при $n \geqslant 2$ и соотношению*

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{2q} = 1 - \varkappa_1, \quad q \in (1,\, \infty], \quad r \in \left[\frac{1}{1-\varkappa_1},\, \frac{2}{1-2\varkappa_1}\right], \tag{11.2}$$
$$0 < \varkappa_1 < \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad n = 1.$$

*Тогда для любого решения $u$ уравнения* (1.1), *принадлежащего $C^{2,\,1}(Q_T)$, величина $|u_x|_{Q'}^{(\alpha)}$ оценивается сверху* *постоянной, зависящей лишь от* $\max\limits_{Q_T}|u|$, *постоянных* $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$ *и* $r$ *из условий* (1.2), (11.1) *и расстояния* $Q'$ *до* $\Gamma_T$. *Показатель* $\alpha$ *определяется* $n$, $\nu$, $\mu$, $q$ *и* $r$.

Замечание 11.1. В условиях (11.1) $q$ и $r$ могут быть разные для разных функций. Мы же лишь ради упрощений записи считаем их одинаковыми.

Доказательство. Продифференцируем уравнение (1.1) по каждому из $x_k$ и результат запишем в виде

$$u_{kt}-\frac{\partial}{\partial x_l}\left(a_{ij}u_{kx_j}+\sum_{m=0}^{n}A_{im}^k u_m\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\delta_i^k f+\frac{\partial f_j}{\partial x_j}\right],\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{11.3}$$

где

$$u_0=u,\quad u_k=u_{x_k},\quad A_{im}^k=\frac{\partial a_{im}}{\partial x_k}+\delta_m^k a_i-\delta_i^k b_m$$

при $m=1,\ \ldots,\ n$ и $A_{i0}^k=\frac{\partial a_i}{\partial x_k}-\delta_i^k a$, а $\delta_i^k$ — символ Кронекера. Соотношения (11.3) и (1.1) рассмотрим как систему уравнений для $u_k$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Ее характерной особенностью является то, что главная часть, состоящая из членов вида $\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_l}\left(a_{lj}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, диагональна и одинакова во всех уравнениях системы. Такие системы удалось исследовать столь же детально, как и одно уравнение второго порядка. Им посвящены §§ 1—4 главы VII. Там получены, в частности, оценки $\max\limits_{Q'}|u_k|$ и $\langle u_k\rangle_{Q'}^{(\alpha)}$ через $\sum\limits_{k=0}^{n}\|u_k\|_{2,\,Q_T}$, расстояние $Q'$ до $\Gamma_T$ и известные параметры (теоремы 2.1 и 3.1), что применительно к нашему случаю дает оценку $|u_x|_{Q'}^{(\alpha)}$ через $\|u_x\|_{2,\,Q_T}$.

Дадим иной вывод оценки $|u_x|_Q^{(\alpha)}$, не использующий результатов главы VII по системам. Сначала оценим нормы $\|u_x\|_{s,\,Q'}$ при любом $s$, не превосходящем какого-либо числа $s_0$. Для этого рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{Q_t}\sum_{k=1}^{n}\mathscr{L}u\,\frac{d}{dx_k}\left(|u|^{2s}u_{x_k}\zeta^2\right)dx\,dt=0, \tag{11.4}$$

где $\zeta(x,\ t)$ — гладкая, не превосходящая 1, неотрицательная функция, равная нулю вблизи $S_T$, и преобразуем его с помощью двукратного интегрирования по частям к виду

$$\frac{1}{2s+2}\int_{\Omega}|u_x(x,t)|^{2s+2}\zeta^2(x,t)\,dx+\int_{Q_t}\Big\{-\frac{1}{s+1}|u_x|^{2s+2}\zeta\zeta_t+ \\ +\left(a_{ij}u_{x_j}+a_iu+f_i\right)_{x_k}\left(|u_x|^{2s}u_{x_k}\zeta^2\right)_{x_l}- \\ -\left(b_iu_{x_l}+au+f\right)\frac{d}{dx_k}\left(|u_x|^{2s}u_{x_k}\zeta^2\right)\Big\}\,dx\,dt=0. \qquad (11.5)$$

Соотношение (11.5) верно для $u$ из $C^{2,1}(Q_T)$, хотя при его выводе (при интегрировании по частям) были использованы производные $u_{xt}$ и $D_x^3u$. Действительно, возьмем последовательность бесконечно дифференцируемых функций $u^m(x,t)$, сходящихся к $u$ в норме $C^{2,1}(Q')$, где $Q'$ — подобласть $Q_t$, в которой $\zeta$ отлична от 0. Для них левая часть (11.4) равна левой части (11.5), а при стремлении $m$ к $\infty$ они сходятся к таким же выражениям для $u$. Следовательно, если левая часть (11.4) для $u$ равна нулю, то равна нулю и левая часть (11.5) для $u$.

Оставим в левой части (11.5) заведомо неотрицательные члены, а остальные перенесем направо и оценим сверху следующим образом:

$$\frac{1}{2s+2}\int_{\Omega}|u_x(x,t)|^{2s+2}\zeta^2(x,t)\,dx+\int_{Q_t}\Big(a_{ij}u_{x_kx_j}u_{x_kx_l}|u_x|^{2s}\zeta^2+ \\ +2sa_{ij}|u_x|^{2s-2}u_{x_k}u_{x_kx_j}u_{x_l}u_{x_lx_i}\zeta^2\Big)\,dx\,dt= \\ =\frac{1}{2s+2}\int_{\Omega}|u_x(x,0)|^{2s+2}\zeta^2(x,0)\,dx-\int_{Q_t}\Big\{-\frac{1}{s+1}|u_x|^{2s+2}\zeta\zeta_t+ \\ +a_{ij}u_{x_kx_j}|u_x|^{2s}u_{x_k}2\zeta\zeta_{x_l}+\left[\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}u_{x_j}+a_iu_{x_k}+\frac{\partial a_i}{\partial x_k}u+\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)-\right. \\ \left.-\delta_k^l\left(b_ju_{x_j}+au+f\right)\right]\left(|u_x|^{2s}u_{x_k}\zeta^2\right)_{x_l}\Big\}\,dx\,dt\leqslant \\ \leqslant\frac{1}{2s+2}\int_{\Omega}|u_x(x,0)|^{2s+2}\zeta^2(x,0)\,dx+\int_{Q_t}\Big[\frac{1}{s+1}|u_x|^{2s+2}\zeta\zeta_t+ \\ +\varepsilon u_{xx}^2|u_x|^{2s}\zeta^2+\frac{\mu^2}{\varepsilon}|u_x|^{2s+2}\zeta_x^2+ \\ +\sum_{i,k}\Big(\sum_j\Big|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\Big||u_x|+|a_i||u_x|+\Big|\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\Big|M+\Big|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\Big|+ \\ +|b_i||u_x|+|a|M+|f|\Big)\Big|\left(|u_x|^{2s}u_{x_k}\zeta^2\right)_{x_l}\Big|\Big]\,dx\,dt. \qquad (11.6)$$

Выберем $\varepsilon = \frac{\nu}{2}$ и, используя условие эллиптичности (1.2), перейдем от (11.6) к неравенству

$$\frac{1}{2s+2}\int\limits_{\Omega} |u_x(x, t)|^{2s+2}\zeta^2(x, t)\,dx + \int\limits_{Q_t}\Bigg[\frac{\nu}{2}u_{xx}^2|u_x|^{2s}\zeta^2 + \\ + 2s\nu|u_x|^{2s-2}\sum_l\Big(\sum_k u_{x_k}u_{x_k x_l}\Big)^2\zeta^2\Bigg]dx\,dt \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2s+2}\int\limits_{\Omega}|u_x(x, 0)|^{2s+2}\zeta^2(x, 0)\,dx + \\ + \int\limits_{Q_t}\Bigg[|u_x|^{2s+2}\Big(\frac{1}{s+1}|\zeta_t|\zeta + \frac{2\mu^2}{\nu}\zeta_x^2\Big) + \\ + \mathcal{D}(|u_x|+1)\sum_{l,k}\Big|\big(|u_x|^{2s}u_{x_k}\zeta^2\big)_{x_l}\Big|\Bigg]dx\,dt, \tag{11.7}$$

где

$$\mathcal{D} = \sum_{l,k}\Bigg[\sum_j\Big|\frac{\partial a_{lj}}{\partial x_k}\Big| + |a_l| + \Big|\frac{\partial a_l}{\partial x_k}\Big|M + \\ + \Big|\frac{\partial f_l}{\partial x_k}\Big| + |b_l| + |a|M + |f|\Bigg].$$

Оценим последний член правой части (11.7) с помощью неравенства Коши (1.2) главы II, отдавая малое $\varepsilon$ членам со вторыми производными $u_{xx}$. Именно,

$$\mathcal{D}(|u_x|+1)\sum_{l,k}\Big|\big(|u_x|^{2s}u_{x_k}\zeta^2\big)_{x_l}\Big| = \\ = \mathcal{D}(|u_x|+1)\sum_{l,k}\Big||u_x|^{2s}u_{x_k x_l}\zeta^2 + \\ + 2s|u_x|^{2s-2}\sum_i u_{x_i}u_{x_i x_l}u_{x_k}\zeta^2 + 2|u_x|^{2s}u_{x_k}\zeta\zeta_{x_l}\Big| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon u_{xx}^2|u_x|^{2s}\zeta^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\mathcal{D}^2(|u_x|+1)^2 n^2|u_x|^{2s}\zeta^2 + \\ + n\varepsilon_1 s\sum_l\Big(\sum_i u_{x_i}u_{x_i x_l}\Big)^2|u_x|^{2s-2}\zeta^2 + \mathcal{D}^2(|u_x|+1)^2\frac{sn}{\varepsilon_1}|u_x|^{2s}\zeta^2 + \\ + |u_x|^{2s+2}\zeta_x^2 + n^2\mathcal{D}^2(|u_x|+1)^2|u_x|^{2s}\zeta^2.$$

Подставим эту оценку в (11.7) и приведем подобные члены, считая $\varepsilon=\frac{\nu}{4}$, а $\varepsilon_1=\frac{\nu}{n}$. Это даст

$$
\begin{gathered}
j(t,\, s)\equiv\frac{1}{2s+2}\int\limits_{\Omega}|u_x(x,\, t)|^{2s+2}\zeta^2(x,\, t)\,dx+\\
+\int\limits_{Q_t}\left[\frac{\nu}{4}u_{xx}^2|u_x|^{2s}\zeta^2+s\nu|u_x|^{2s-2}\sum_l\Big(\sum_k u_{x_k}u_{x_kx_l}\Big)^2\zeta^2\right]dx\,dt\leqslant\\
\leqslant\frac{1}{2s+2}\int\limits_{\Omega}|u_x(x,\, 0)|^{2s+2}\zeta^2(x,\, 0)\,dx+\\
+\int\limits_{Q_t}\left[|u_x|^{2s+2}\left(\frac{1}{s+1}|\zeta_t|\zeta+\left(1+\frac{2\mu^2}{\nu}\right)\zeta_x^2\right)+\right.\\
\left.+n^2\left(\frac{s+1}{\nu}+1\right)\mathscr{D}^2(|u_x|+1)^2|u_x|^{2s}\zeta^2\right]dx\,dt\leqslant\\
\leqslant\frac{1}{2s+2}\int\limits_{\Omega}|u_x(x,\, 0)|^{2s+2}\zeta^2(x,\, 0)\,dx+\\
+c\int\limits_{Q_t}\left[|u_x|^{2s+2}(|\zeta_t|\zeta+\zeta_x^2)+(s+1)\,\mathscr{D}^2\left(|u_x|^{2s+2}\zeta^2+\zeta^2\right)\right]dx\,dt,
\end{gathered}
\tag{11.8}
$$

где

$$c=\max\left\{1+\frac{2\mu^2}{\nu};\; 4n^2\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right\}.$$

Член, содержащий $\mathscr{D}^2$, оценим по неравенству Гёльдера

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{Q_t}\mathscr{D}^2\left(|u_x|^{2s+2}\zeta^2+\zeta^2\right)dx\,dt\leqslant\\
\leqslant\|\mathscr{D}^2\|_{q,\, r,\, Q_t}\left\||u_x|^{2s+2}\zeta^2+\zeta^2\right\|_{\frac{q}{q-1},\,\frac{r}{r-1},\, Q_t}\leqslant\\
\leqslant c_1\left(\left\||u_x|^{s+1}\zeta\right\|^2_{\frac{2q}{q-1},\,\frac{2r}{r-1},\, Q_t}+\operatorname{mes}^{1-\frac{1}{q}}\Omega t^{1-\frac{1}{r}}\right),
\end{gathered}
\tag{11.9}
$$

где $c_1$ зависит только $\mu_1$ из условия (11.1), $n$ и $M$. Первый член правой части оценим так же, как в § 7 было оценено выражение $\|(u-k)^2\|_{\frac{q}{q-1},\ \frac{r}{r-1},\ Q_t(k)}$ в (7.9). Именно:

$$\||u_x|^{s+1}\zeta\|^2_{\frac{2q}{q-1},\ \frac{2r}{r-1},\ Q_t}\leqslant$$

$$\leqslant\||u_x|^{s+1}\zeta\|^2_{\hat{q},\ \hat{r},\ Q_t}\left(\int\limits_0^t \operatorname{mes}^{\frac{\hat{r}}{\hat{q}}}\Omega\,dt\right)^{\frac{2}{\bar{r}}-\frac{2}{\hat{r}}}\leqslant$$

$$\leqslant\beta^2\||u_x|^{s+1}\zeta|^2_{Q_t}\operatorname{mes}^{\frac{2}{\bar{q}}-\frac{2}{\hat{q}}}\Omega t^{\frac{2}{\bar{r}}-\frac{2}{\hat{r}}}\ {}^{*}). \tag{11.10}$$

Здесь числа $\bar{q}$, $\bar{r}$, $\hat{q}$ и $\hat{r}$ построены по $q$ и $r$ так, как описано в § 7, и мы вправе были использовать теорему вложения (3.4) главы II.

Выражение $j(t, s)$ оценим снизу, используя соотношение

$$|(|u_x|^{s+1}\zeta)_x|^2=\sum_{i=1}^n\left[(s+1)|u_x|^s\frac{u_{x_k}u_{x_kx_l}}{|u_x|}\zeta+|u_x|^{s+1}\zeta_{x_i}\right]^2\leqslant$$

$$\leqslant 2(s+1)^2|u_x|^{2s-2}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n u_{x_k}u_{x_kx_l}\right)^2\zeta^2+2|u_x|^{2s+2}\zeta_x^2 \tag{11.11}$$

следующим образом:

$$j(t, s)\geqslant\frac{\min(8;\nu)}{16(s+1)}\left[\||u_x(x, t)|^{s+1}\zeta\|^2_{2,\Omega}+\|(|u_x|^{s+1}\zeta)_x\|^2_{2,Q_t}\right]+$$

$$+\frac{\nu}{8}\int\limits_{Q_t}u_{xx}^2|u_x|^{2s}\zeta^2\,dx\,dt-\frac{\nu}{s+1}\int\limits_{Q_t}|u_x|^{2s+2}\zeta_x^2\,dx\,dt. \tag{11.12}$$

---

*) Заметим, что в силу предположений теоремы (1.1) числа $\bar{r}$, $\bar{q}$, $\hat{r}$ и $\hat{q}$ конечны при всех $n$.

Из неравенства (11.8) в силу неравенств (11.12), (11.9) и (11.10) получим

$$\frac{\min(8;\nu)}{16(s+1)}\left[\left\| |u_x(x,t)|^{s+1}\zeta(x,t)\right\|^2_{2,\Omega} + \left\|\left(|u_x|^{s+1}\zeta\right)_x\right\|^2_{2,Q_t}\right] + \\ + \frac{\nu}{8}\int_{Q_t} u_{xx}^2 |u_x|^{2s}\zeta^2\,dx\,dt \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2s+2}\int_\Omega |u_x(x,0)|^{2s+2}\zeta^2(x,0)\,dx + \\ + \left[c+\frac{\nu}{s+1}\right]\int_{Q_t}|u_x|^{2s+2}\left(|\zeta_t|\zeta+\zeta_x^2\right)dx\,dt + \\ + c(s+1)c_1\beta^2\left\| |u_x|^{s+1}\zeta\right\|^2_{Q_t}\operatorname{mes}^{\frac{2}{l}-\frac{2}{\hat q}}\Omega t^{\frac{2}{\overline{r}}-\frac{2}{\hat r}} + \\ + c(s+1)c_1\operatorname{mes}^{1-\frac{1}{q}}\Omega t^{1-\frac{1}{r}}. \tag{11.13}$$

Для положительных $t_1$, удовлетворяющих условию

$$c(s+1)c_1\beta^2\operatorname{mes}^{\frac{2}{\overline{q}}-\frac{2}{\hat q}}\Omega t^{\frac{2}{\overline{r}}-\frac{2}{\hat r}} \leqslant \frac{\min(8;\nu)}{32(s+1)}, \tag{11.14}$$

из (11.13) следует неравенство

$$\left\| |u_x|^{s+1}\zeta\right\|^2_{Q_{t_1}} + \int_{Q_{t_1}} u_{xx}^2|u_x|^{2s}\zeta^2\,dx\,dt \leqslant \\ \leqslant \frac{16}{\min\{8;\nu\}}\left\| |u_x(x,0)|^{s+1}\zeta(x,0)\right\|^2_{2,\Omega} + \\ + (s+1)^2 c_2\left[1+\int_{Q_{t_1}}|u_x|^{2s+2}\left(|\zeta_t|\zeta+\zeta_x^2\right)dx\,dt\right] \tag{11.15}$$

с постоянной $c_2$, зависящей лишь от $\operatorname{mes}\Omega$, $t_1$ и числовых параметров, входящих в условия (1.2) (11.1). Число $s$ в нем может принимать любое из значений: $s=0, 1, 2, \ldots$

С другой стороны, для произвольной гладкой функции справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |u_x|^{2s+4}\zeta^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c_3(s)\max_{\Omega}|u|^2\int\limits_{\Omega}\left[u_{xx}^2|u_x|^{2s}\zeta^2+|u_x|^{2s+2}(\zeta_x^2+\zeta^2)\right]dx, \tag{11.16}$$

вытекающие из неравенства (5.8) главы II, с постоянной $c_3(s)$, зависящей лишь от $s$ и $n$. Поэтому, считая $\max\limits_{Q_T}|u|=M$ известным из (11.15) и (11.16), получим

$$\int\limits_{Q_{t_1}} |u_x|^{2s+4}\zeta^2\,dx\,dt \leqslant c_4(s)\Bigg[\big\||u_x(x,0)|^{s+1}\zeta(x,0)\big\|_{2,\Omega}^2+$$
$$+\int\limits_{Q_{t_1}}|u_x|^{2s+2}\left(|\zeta_t|\zeta+\zeta_x^2+\zeta^2\right)dx\,dt+1\Bigg] \tag{11.17}$$

с некоторой известной постоянной, зависящей от $s$.

Фиксируем $s_0>0$ (его величина будет выбрана ниже, в зависимости лишь от параметров $q$ и $r$ из (11.1)) и в соответствии с ним разобьем отрезок $[0, T]$ на конечное число отрезков $[t^0=0,\ t^1]$, $[t^1,\ t^2]$, ..., $[t^{m-1},\ t^m=T]$ длины $\frac{t_1}{2}$ (последний может иметь меньшую длину), где $t_1$ удовлетворяет условию (11.14) с $s=s_0$. Для каждого цилиндра $Q^k=\Omega\times[t^{k-1},\ t^{k+1}]$ справедливо неравенство типа (11.17). Выбирая в нем $\zeta(x,t)=\hat{\zeta}(x)\chi(t)$, где $\chi(t)$ равна нулю при $t=t^{k-1}$ и единице при $t\in[t^k,\ t^{k+1}]$, для $k\geqslant 2$, а на первом интервале пока произвольна, и складывая неравенства (11.17) по всем (перекрывающимся) цилиндрам $Q^k$, $k=1, 2, \ldots$, получим

$$\int\limits_{Q_T} |u_x|^{2s+4}\zeta^2\,dx\,dt \leqslant c_5(s_0)\Bigg[\big\||u_x(x,0)|^{s+1}\zeta(x,0)\big\|_{2,\Omega}^2+$$
$$+\int\limits_{Q_T}|u_x|^{2s+2}\left(|\zeta_t|\zeta+\zeta_x^2+\zeta^2\right)dx\,dt+1\Bigg] \tag{11.18}$$

для $s=0, 1, \ldots, s_0$ и любой гладкой неотрицательной функции $\zeta$, не превосходящей 1 и равной нулю вблизи $S_T$. Эти неравенства позволяют оценить интеграл от $|u_x|^{2s+4}$ через интеграл от $|u_x|^{2s+2}$ по несколько более широкой области. Как показано в конце § 2, интеграл $\int\limits_{Q(0)} |u_x|^2\,dx\,dt$, $Q(0)\subset Q_T$ оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от $M$ (даже только от $\|u\|_{2,\,Q_T}$), постоянных, входящих в условия (1.2) — (1.6), и расстояния от $Q(0)$ до $\Gamma_T$. Из (11.18) при $s=0$ следует, что интеграл $\int\limits_{Q(1)} |u_x|^4\,dx\,dt$, $Q(1)\subset Q(0)$ оценивается через $\int\limits_{Q(0)} |u_x|^2\,dx\,dt$ и расстояние от $Q(1)$ до $\Gamma_T(0)$ ($\Gamma_T(0)$ — нижнее основание и боковая поверхность $Q(0)$). Сужая шаг за шагом область, мы оценим интегралы

$$\int\limits_{Q(s+1)} |u_x|^{2s+4}\,dx\,dt \leqslant c_6(s_0), \qquad s=0, 1, \ldots, s_0, \tag{11.19}$$

причем $c_6(s_0)$ зависит лишь от $s_0$, $M$, постоянных из условий (1.2) и (11.1), и расстояния от $Q(s+1)$ до $\Gamma_T$ (последнее, как всегда, предполагается положительным). Если $\big\|\,|u(x, 0)|^{s_0+1}\zeta(x, 0)\big\|_{2,\,\Omega}<\infty$, то цилиндры $Q(0)\supset Q(1)\supset\to$ $\to Q(s_0+1)$ можно брать с тем же нижним основанием, что и у $Q_T$, т. е. $Q(s)=\Omega(s)\times[0, T]$, $\Omega(0)\supset\Omega(1)\supset, \ldots,$ и получить тем самым оценки (11.19) и для таких цилиндров.

Вернемся к системе (11.2). Каждое ее уравнение рассмотрим как уравнение относительно $u_k=u_{x_k}$ вида

$$u_{kt}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}u_{kx_j}\right)=\frac{\partial F_i^k(x, t)}{\partial x_i}, \tag{11.20}$$

а $u_k$ — как его обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q')$ (оно даже лучше: $u_k$ — непрерывная функция в $\overline{Q}'$ с непрерывными в $\overline{Q}'$ производными $u_{kx}$). Из предположений (11.1) и неравенств (11.19) следует

$$\|F_i^k\|_{2q_2,\,2r_2,\,Q'}\leqslant\mu_2, \tag{11.21}$$

причем $s_0$ можно выбрать столь большим, чтобы числа $q_2$ и $r_2$ удовлетворяли условиям $\frac{1}{r_2}+\frac{n}{2q_2}<1$, причем

$$q_2\in\left(\frac{n}{2},\ q\right),\quad r_2\in(1,\ r)\quad \text{при}\quad n\geqslant 2,$$

$$q_2\in(1,\ q),\quad r_2\in(1,\ r)\quad \text{при}\quad n=1.$$

Возьмем такое $s_0$ (оно зависит, очевидно, лишь от $q$ и $r$). Тогда теоремы 8.1 и 10.1 гарантируют оценки $\max\limits_{Q''}|u_x|$ и $\langle u_x\rangle_{Q''}^{(\alpha)}$ для $Q''\subset Q'$ через $\|u_x\|_{2,\,Q'}$, известные постоянные и расстояние от $Q''$ до нижнего основания и боковой поверхности $Q'$. Эти же теоремы и неравенства (11.19) для цилиндров $\Omega(s)\times(0,\ T)$ дают оценки $\max\limits_{Q''}|u_x'|$ и $\langle u_x\rangle_{Q'}^{(\alpha)}$ для $Q''=\Omega''\times(0,\ T)$ через $\|u_x\|_{2,\,Q'}$, $Q'=\Omega'\times(0,\ T)$, $\max\limits_{\Omega'}|u(x,\ 0)|$ и $\langle u_x(x,\ 0)\rangle_{\Omega'}^{(\beta)}$ соответственно и расстояние от $\Omega''$ до границы $\Omega'$. Теорема 11.1 доказана.

Сложнее получить оценки $\max\limits_{Q_T}|u_x|$ и $\langle u_x\rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$ для всего $Q_T$ (т. е. вблизи $S_T$). Мы это делаем в §§ 4, 5 главы V сразу для квазилинейных уравнений.

Замечание 11.2. Оценка $|u_x|_{Q_T}^{(\alpha)}$ $\left(\text{и аналогично } |u_x|_{Q_T}^{(\alpha)}\right)$ через известные величины может быть выведена и иначе — из теоремы 9.1 главы IV об оценке $\|u_t,\ u_{xx}\|_{q,\,Q_T}$ через $\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_i}-f\right\|_{q,\,Q_T}$ и теоремы вложения главы II пространства $W_q^{2,\,1}(Q_T)$ в $H^{2-\frac{n+2}{q},\ 1-\frac{n+2}{2q}}(Q_T)$ при $q>n+2$ (см. лемму 3.3 главы II). Правда, при этом приходится предполагать в отличие от теоремы 11.1 коэффициенты $a_{ij}(x,\ t)$ непрерывными по $(x,\ t)$.

## § 12. О зависимости гладкости обобщенных решений от гладкости данных задачи

Покажем, что гладкость обобщенных решений из $V_2^{1,\,0}(Q_T)$ уравнений (1.1) в открытой области $Q_T$ определяется лишь гладкостью коэффициентов и свободных членов этих уравнений — она увеличивается с увеличением последней. Пусть $u(x,\ t)$ есть произвольное обобщенное решение из $V_2^{1,\,0}(Q_T)$

уравнения (1.1), коэффициенты и свободные члены которого удовлетворяют условиям (1.2) — (1.6), а $Q'$ — произвольная подобласть $Q_T$, отстоящая от $\Gamma_T$ на положительное расстояние.

В предыдущих параграфах было доказано, что если вместо (1.3) — (1.6) выполняются более сильные условия (1.3), (1.4) и (9.1), (9.2), то для $u$ конечны нормы $\left\| |u|^{\theta^{-1}} \right\|_{Q'}$ с $\theta$ из $(0, 1)$; если для коэффициентов выполняются условия (7.1), (7.2), а для $f_i$ и $f$ — условия (9.1), (9.2) с $\theta = 0$, то для $u$ конечны интегралы $\int\limits_{Q'} \exp\{c|u(x, t)|\}\,dx\,dt$ с некоторым $c > 0$; если, наконец, справедливы условия (7.1), (7.2), то для $u$ конечны нормы $|u|_{Q'}^{(\alpha)}$ с некоторым $\alpha > 0$, причем все эти нормы эффективно оцениваются через $\|u\|_{2, Q_T}$, расстояние $Q'$ до $\Gamma_T$ и известные параметры, входящие в соответствующие условия на данные функции (т. е. коэффициенты и свободные члены (1.1)).

Пусть данные функции обладают лучшими свойствами, например удовлетворяют условиям (11.1), (7.2), (11.2). Покажем, что тогда для $u$ конечны нормы $|u_x|_{Q'}^{(\alpha)}$ с некоторым $\alpha > 0$. Для этого воспользуемся априорной оценкой этой нормы, установленной в § 11. Она получена нами, однако, в предположении, что $u \in C^{(2, 1)}(Q_T)$, и потому не может быть применена непосредственно к исследуемому обобщенному решению, о котором пока известно лишь, что оно принадлежит $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ и имеет $u_x$ из $L_2(Q_T)$.

Рассмотрим в каком-нибудь цилиндре $Q'_{t_0, t_1} = \Omega' \times (t_0, t_1)$, где $\Omega'$ — внутренняя подобласть $\Omega$ с очень гладкой границей $S'$, а $0 < t_0 < t_1 \leqslant T$, вспомогательную задачу

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}^{\rho} v \equiv v_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij\rho} v_{x_j} + a_{i\rho} v + f_{i\rho}\right) + \\ + b_{i\rho} v_{x_i} + a_{\rho} v + f_{\rho} = 0, \\ v|_{\Gamma'_{t_0, t_1}} = u_{\rho}|_{\Gamma'_{t_0, t_1}}, \end{aligned}\right\} \qquad (12.1)$$

где $\Gamma'_{t_0, t_1}$ — боковая поверхность и нижнее основание цилиндра $Q'_{t_0, t_1}$, а $a_{ij\rho}, \ldots, u_{\rho}$ суть усреднения $a_{ij}, \ldots, u$ по

$x$ и $t$ с бесконечно дифференцируемым ядром радиуса $\rho$ (см. § 4 главы II). Задача (12.1), как будет доказано в теореме 5.2 главы IV, имеет единственное классическое (и даже бесконечно дифференцируемое в $Q'_{t_0, t_1}$) решение $v^\rho$. Известно, что $u_\rho$ при $\rho \to 0$ сходятся к $u$ в норме $V_2^{1,0}(Q'_{t_0, t_1})$. Мы покажем, что к $u(x, t)$ сходятся в норме $V_2^{1,0}(Q'_{t_0, t_1})$ и $v_\rho$ (и тем самым $|v^\rho|_{Q'_{t_0, t_1}}$ равномерно ограничены). Кроме того, из данных в предыдущих параграфах оценок и равномерной (по $\rho$) ограниченности $|u_\rho|^{(\alpha)}_{Q'_{t_0, t_1}}$ следует равномерная ограниченность норм $|v^\rho|^{(\beta)}_{Q'_{t_0, t_1}}$ и $|v^\rho_x|^{(\beta)}_{Q''_{t_0, t_1}}$ с некоторым $\beta > 0$, в которых $Q''_{t_0, t_1}$ — произвольно выбранный цилиндр, принадлежащий $Q'_{t_0, t_1}$ и отстоящий от $\Gamma'_{t_0, t_1}$ на положительное расстояние. В силу этого для $\lim\limits_{\rho \to 0} v^\rho$, т. е. для $u$, будут ограничены нормы $|u_x|^{(\beta)}_{Q''_{t_0, t_1}}$ и для них справедливы оценки, установленные в § 11. Аналогично, используя априорные оценки § 10 главы IV, устанавливаем дальнейшее улучшение дифференциальных свойств решений $u$ внутри $Q_T$ при увеличении гладкости коэффициентов и свободных членов уравнения (1.1).

Итак, нам осталось доказать, что $|v^\rho - u_\rho|_{Q'_{t_0, t_1}} \to 0$ при $\rho \to 0$.

Рассмотрим интегральное тождество (1.15), которому удовлетворяет обобщенное решение $u$, и положим в нем $\eta = \zeta_\rho$, где $\zeta(x, t)$ — функция из $W_2^{1,1}(Q_T)$, равная нулю в области $Q_T \setminus Q'_{t_0, t}$, $t_0 < t \leqslant t_1$, и ее $\rho$-окрестности.

Перенося в интегралах операцию усреднения с $\zeta$ на стоящие при нем множители и производя интегрирование по частям в члене $\int -u_\rho \zeta_t \, dx\, dt$, придем к равенству

$$\int\limits_{Q'_{t_0, t}} \left[u_{\rho t}\zeta + (a_{ij}u_{x_j} + a_i u + f_i)_\rho \zeta_{x_i} + \right.$$
$$\left. + (b_i u_{x_i} + au + f)_\rho \zeta\right] dx\, dt = 0.$$

Учитывая, кроме того, уравнение (12.1), можем для разности $w = u_\rho - v^\rho$ написать следующее соотношение:

$$\int\limits_{Q'_{t_0, t}} \{w_t\zeta + [(a_{ij}u_{x_j})_\rho - a_{ij\rho}v^\rho_{x_j} + (a_i u)_\rho - a_{i\rho}v^\rho]\zeta_{x_i} + \\ + [(b_i u_{x_i})_\rho - b_{i\rho}v^\rho_{x_i} + (au)_\rho - a_\rho v^\rho]\zeta\}\,dx\,dt = 0,\ t_0 < t \leqslant t_1.$$

Нетрудно понять, что это равенство справедливо при любой функции $\zeta(x, t)$ из $W_2^{1,1}(Q'_{t_0, t_1})$, равной нулю на $S'_{t_0, t_1}$ (см. в связи с этим вывод (2.12)). Положим $\zeta = w$ и под знаком интеграла добавим и вычтем члены $a_{ij\rho}u_{\rho x_j}w_{x_i}$, $a_{i\rho}u_\rho w_{x_i}$, $b_{i\rho}u_{\rho x_i}w$, $a_\rho u_\rho w$ и результат запишем в виде

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega'} w^2(x, t)\,dx + \int\limits_{Q'_{t_0, t}} a_{ij\rho}w_{x_i}w_{x_j}\,dx\,dt = -j_1 - j_2, \tag{12.2}$$

$$j_1 = \int\limits_{Q'_{t_0, t}} (a_{i\rho}ww_{x_i} + b_{i\rho}w_{x_i}w + a_\rho w^2)\,dx\,dt,$$

$$j_2 = \int\limits_{Q'_{t_0, t}} \{[(a_{ij}u_{x_j})_\rho - a_{ij\rho}u_{\rho x_j}]w_{x_i} + [(a_i u)_\rho - a_{i\rho}u_\rho]w_{x_i} + \\ + [(b_i u_{x_i})_\rho - b_{i\rho}u_{\rho x_i}]w + [(au)_\rho - a_\rho u_\rho]w\}\,dx\,dt.$$

Интеграл $j_1$ допускает оценку

$$|j_1| \leqslant \int\limits_{Q'_{t_0, t}} \left[\varepsilon w_x^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^n a_{i\rho}^2 + \sum_{i=1}^n b_{i\rho}^2 + 2|a_\rho|\right)w^2\right]dx\,dt \leqslant \\ \leqslant \varepsilon |w|^2_{Q'_{t_0, t}} + \frac{1}{2\varepsilon}\|\mathscr{D}\|_{q, r, Q'_{t_0, t}}\|w\|^2_{\bar{q}, \bar{r}, Q'_{t_0, t}} \leqslant \varepsilon|w|^2_{Q'_{t_0, t}} + \\ + \frac{\beta^2}{2\varepsilon}\|\mathscr{D}\|_{q, r, Q'_{t_0, t}}|w|^2_{Q'_{t_0, t}}\left(\operatorname{mes}\Omega'^{\frac{2}{\bar{q}} - \frac{2}{\hat{q}}}(t - t_0)^{\frac{2}{\bar{r}} - \frac{2}{\hat{r}}}\right),$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$, $\mathscr{D} = \sum\limits_{i=1}^n a_{i\rho}^2 + \sum\limits_{i=1}^n b_{i\rho}^2 + 2|a_\rho|$, а числа $\bar{q}$, $\bar{r}$, $\hat{q}$ и $\hat{r}$ имеют те же значения, что и в оценке (7.9).

Для $j_2$, используя свойство усреднений, условия (7.1), (7.2) и ограниченность $|u|_{Q_T}$, нетрудно вывести, что

$$|j_2| \leqslant \delta(\rho) |w|_{Q'_{t_0, t}} \leqslant \frac{1}{4\varepsilon} \delta^2(\rho) + \varepsilon |w|^2_{Q'_{t_0, t}},$$

где $\delta(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$.

В равенстве (12.2) оценим второй член снизу с помощью условия (1.2), а интегралы $j_1$ и $j_2$ сверху, как указано выше, и полученное неравенство максимизируем по $t \in [t_0, t_1]$. В результате будем иметь следующее:

$$\nu_0 |w|^2_{Q'_{t_0, t_1}} \leqslant 2 |w|^2_{Q'_{t_0, t_1}} \left[2\varepsilon + \frac{\beta^2}{2\varepsilon} \|\mathscr{D}\|_{q, r, Q'_{t_0, t_1}} \times \right.$$
$$\left. \times (\operatorname{mes} \Omega')^{\frac{2}{\overline{q}} - \frac{2}{\widehat{q}}} (t_1 - t_0)^{\frac{2}{\overline{r}} - \frac{2}{\widehat{r}}} \right] + \frac{1}{2\varepsilon} \delta^2(\rho), \quad \nu_0 = \min\left\{\frac{1}{2}, \nu\right\}. \quad (12.3)$$

Возьмем в (12.3) $\varepsilon = \frac{\nu_0}{8}$, а $t_1 - t_0$ настолько малым, чтобы

$$\frac{8\beta^2}{\nu_0} \|\mathscr{D}\|_{q, r, Q'_T} (\operatorname{mes} \Omega')^{\frac{2}{\overline{q}} - \frac{2}{\widehat{q}}} (t_1 - t_0)^{\frac{2}{\overline{r}} - \frac{2}{\widehat{r}}} \leqslant \frac{\nu_0}{4}. \quad (12.4)$$

Тогда из (12.3) будет следовать оценка

$$|w|^2_{Q'_{t_0, t_1}} \leqslant 16 \nu_0^{-2} \delta^2(\rho).$$

Таким образом, мы доказали, что $|w|_{Q'_{t_0, t_1}} = |u_\rho - v^\rho|_{Q'_{t_0, t_1}} \to 0$ при $\rho \to 0$, если только $t_1 - t_0$ подчиняется ограничению (12.4).

Как указывалось выше, этого факта и оценок, установленных в § 11, достаточно, чтобы делать заключения о существовании у обобщенных решений класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ уравнения (1.1) непрерывных по Гёльдеру производных по $x$, если только выполнены условия (11.1), (11.2).

Если коэффициенты и свободные члены уравнения (1.1), помимо условий (1.2) — (1.6), удовлетворяют условиям теоремы 9.1 главы IV, гарантирующим оценку (10.12) главы IV для $\|u_t, u_{xx}\|_{q, Q'}$ через $\left\|f - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right\|_{q, Q_T}$, то, применяя эту оценку к $v^\rho$ и $Q''_{t_0, t_1} \subset Q'_{t_0, t_1}$ и замечая, что входящая в нее постоянная не зависит от $\rho$, установим, что для предельной функции $u$ также существуют производные $u_t$ и $u_{xx}$, принадлежащие $L_q(Q''_{t_0, t_1})$. Если функции $a_{ij}$, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}$, $a_i$, $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$, $b_i$, $a$, $f$ и $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ суть элементы $H^{2m+\alpha, m+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$, $m \geqslant 0$, то любое обобщенное решение уравнения (1.1) есть элемент $H^{2m+2+\alpha, m+1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$. Это следует из того, что в силу оценки (10.5) главы IV для $v^\rho$ равномерно ограничены нормы в пространстве $H^{2m+2+\alpha, m+1+\frac{\alpha}{2}}(Q''_{t_0, t_1})$, а следовательно, они конечны и для $u$.

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 12.1. *Пусть $u$ есть обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ уравнения* (1.1), *коэффициенты и свободные члены которого удовлетворяют условиям* (1.2)—(1.6). *Если к тому же выполняются условия* (11.1), (7.2), (11.2), *то $u_{x_k}$ принадлежат $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ с некоторым $\alpha > 0$, определяемым $n$, $\nu$, $\mu$ и числовыми параметрами $q$, $r$ из условий* (11.1), (7.2), (11.2). *Если коэффициенты и свободные члены удовлетворяют условиям теоремы* 9.1 *главы* IV, *то $u$ имеет производные $u_t$ и $u_{xx}$, суммируемые со степенью $q$ по любой области $Q'$, отстоящей от $\Gamma_T$ на положительное расстояние.*

*Если, наконец, все коэффициенты и свободные члены, а также их производные, входящие в уравнение* (1.1) *суть элементы $H^{2m+\alpha, m+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$, $m \geqslant 0$*, то *$u$ будет принадлежать $H^{2m+2+\alpha, m+1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$.*

Априорные оценки данной главы и главы IV, полученные для всей области $Q_T$, позволяют установить принадлежность обобщенных решений из $V_2^{1,0}(Q_T)$ к пространствам, $H^{2m+2+\alpha, m+1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$, $H^{2m+2+\alpha, m+1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T \cup \Gamma')$, $m \geqslant 0$, $W_q^{2m, m}(Q_T)$, $m \geqslant 1$, и пр., если, помимо гладкости входящих в уравнение (1.1) функций, соответствующей гладкостью обладают граничные значения и поверхность $S_T$ (или ее часть), а также если выполнены условия согласования на $\Gamma' \cap S_0$ до нужного порядка.

Мы не будем приводить здесь точные формулировки всех этих предложений, ибо это нетрудно сделать самостоятельно, а число различных возможностей довольно большое.

Подчеркнем лишь то, что свойства гладкости обобщенных решений из $V_2^{1,0}(Q_T)$ уравнений (1.1) имеют локальный характер: гладкость $u$ в какой-либо внутренней подобласти $Q' \subset Q_T$ определяется лишь гладкостью образующих уравнение (1.1) функций в $Q'$, гладкость же их в областях $Q'$, примыкающих к $\Gamma' \subset \Gamma_T$, определяется, кроме этого, еще и гладкостью $\Gamma'$, гладкостью значений $u$ на $\Gamma'$ и условиями согласования на $\Gamma' \cap S_0$.

Рассмотрим аналогичные вопросы для уравнений

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - a_{ij}(x, t)\, u_{x_i x_j} + b_i(x, t)\, u_{x_i} + a(x, t)\, u = F(x, t). \qquad (12.5)$$

Для них в главе IV доказано (см. теорему 9.1), что если их коэффициенты $a_{ij}$ непрерывны, $b_i \in L_r(Q_T)$, $a \in L_s(Q_T)$ с некоторыми $r$ и $s > 1$, а $F \in L_q(Q_T)$, $q > 1$, то основные начально-краевые задачи однозначно разрешимы в $W_q^{2,1}(Q_T)$ (разумеется, при определенной гладкости $S$ и граничной функции). Дифференциальные свойства таких решений улучшаются по мере улучшения коэффициентов и свободного члена (12.5), причем это улучшение имеет локальный характер. Так, например, верна теорема:

Теорема 12.2. *Пусть $u(x, t)$ есть обобщенное решение из $W_q^{2,1}(Q_T)$, $q > 1$, уравнения* (12.5). *Если коэффициенты и свободный член* (12.5) *удовлетворяют условиям теоремы* 9.1 *главы* IV *с показателем $q_1 > q$, то $u(x, t)$ будет элементом $W_{q_1}^{2,1}(Q')$ в любой подобласти $Q'$ области $Q_T$, отстоящей от $\Gamma_T$ на положительное расстояние. Если же коэффициенты и свободный член* (12.5) *являются элементами $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$, то $u(x, t)$ будет принадлежать $H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$.*

Доказывается эта теорема так же, как теорема 12.1, надо только вместо энергетического неравенства использовать неравенство (9.3) главы IV.

## § 13. О задачах дифракции

Собственно задачами дифракции принято называть краевые задачи в областях, состоящих из двух или более разнородных сред. На границе раздела этих сред должны выполняться определенные условия согласования. Для уравнений второго порядка таких условий два. Это чаще всего непрерывность искомого решения и непрерывность его производной по конормали к поверхности раздела (в соответствующих физических задачах первое условие отражает естественное требование — отсутствие разрывов среды, а второе — равновесие сил, действующих на границе раздела). В заметке [$33_7$] было показано, что такого типа задачи для уравнений различных типов могут быть сведены с помощью простого приема к задачам на разыскание обобщенных решений (с конечным интегралом энергии) обычных краевых задач для одного уравнения. Разрешимость же этих последних доказана разными способами, в том числе для них оправданы и различные приближенные методы решений (метод конечных разностей, метод Галёркина и др.). Тем самым была доказана однозначная разрешимость задач дифракции для уравнений основных типов в обобщенной постановке при весьма слабых предположениях о всех данных задачи.

Более того, в работах [$33_{3,6,13}$] описаны приемы исследования улучшения дифференциальных свойств этих обобщенных решений по мере улучшения дифференциальных свойств коэффициентов и свободных членов уравнений, поверхностей раздела и пр. (более подробно это изложено в [$46_{1,2}$]). В дальнейшем эти приемы были существенно пополнены новыми методами исследования, позволившими доказать классичность обобщенных решений для них при условиях, близких к необходимым ([$33_{17}$]).

Мы остановимся здесь лишь на том, как существование обобщенных решений задач дифракции для параболических уравнений выводится из доказанных выше теорем о разрешимости обычных краевых задач. Исследование же их гладкости проводить не будем и отошлем к работе [$33_{17}$], ибо в идейном плане оно близко к изложенному в §§ 6—12, а технически довольно громоздко.

Начнем со следующего случая. Пусть область $Q_T = \Omega \times \times (0, T)$ разбита на несколько областей $Q^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, N$

(так что $\overline{Q}_T = \overline{Q}^{(1)} \cup \ldots \cup \overline{Q}^{(N)}$), в каждой из которых задано свое уравнение вида

$$\mathscr{L}^{(k)} u \equiv u_t - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^k (x, t) u_{x_j} \right) + b_i^k (x, t) u_{x_i} + \\ + a^k (x, t) u = f^k (x, t) \qquad (13.1)$$

с гладкими коэффициентами и свободными членами. Требуется найти в $\overline{Q}_T$ функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую в $Q^{(k)}$, $k = 1, \ldots, N$, соответствующему уравнению (13.1), на боковой поверхности $S_T$ области $Q_T$ одному из основных краевых условий, например

$$u|_{S_T} = 0, \qquad (13.2)$$

на нижнем основании $Q_T$ начальному условию

$$u|_{t=0} = \psi_0(x), \qquad (13.3)$$

а на границах $S^{(k, l)}$ раздела областей $Q^{(k)}$ и $Q^{(l)}$, $k, l = 1, \ldots, N$, двум условиям сопряжения

$$[u]|_{S^{(k, l)}} = 0 \qquad (13.4)$$

и

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial \mathscr{N}} \right] \Big|_{S^{(k, l)}} = 0. \qquad (13.5)$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial \mathscr{N}} = a_{ij} u_{x_j} \cos(\mathbf{n}, x_i)$, $\mathbf{n}$ — нормаль к $S^{(k, l)}$, направленная внутрь $Q^{(l)}$, а символ $[v]$ означает скачок, который испытывает функция $v$ при переходе через $S^{(k, l)}$ из $Q^{(k)}$ в $Q^{(l)}$

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial \mathscr{N}} \right] \Big|_{(x^0, t^0) \in S^{(k, l)}} = \\ = \Big( a_{ij}^k u_{x_j} \Big|_{\substack{(x, t) \in Q^{(k)} \\ (x, t) \to (x^0, t^0)}} - a_{ij}^l u_{x_j} \Big|_{\substack{(x, t) \in Q^{(l)} \\ (x, t) \to (x^0, t^0)}} \Big) \cos(\mathbf{n}, x_i).$$

Обычно рассматриваемые задачи дифракции являются частным случаем этой задачи. Покажем, что сама эта задача есть частный случай обычной краевой задачи для уравнений (1.1) с произвольными разрывными коэффициентами, изученной в данной главе. В самом деле, рассмотрим уравнение (13.1) как одно уравнение

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\, u_{x_j}\right) + b_i(x, t)\, u_{x_i} + \\ + a(x, t)\, u = f(x, t) \qquad (13.6)$$

с коэффициентами и свободным членом, равными в каждой из $Q^{(k)}$ соответствующим коэффициентам и свободному члену уравнения $L^{(k)}u = f^{(k)}$ (на $S^{(k,\, l)}$ их можно доопределить произвольно, например, как полусуммы предельных значений на $S^{(k,\, l)}$ соответствующих функций, если последние существуют), и для него поставим в $\overline{Q}_T$ первую краевую задачу (13.6), (13.2), (13.3). Как доказано в предыдущих параграфах, эта задача имеет единственное обобщенное решение $u$ в классе $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,\, \frac{1}{2}}(Q_T) \cap H^{\alpha,\, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ при любой $\psi_0(x) \in L_2(\Omega)$, причем в каждой из областей $Q^{(k)}$ его гладкость полностью определяется гладкостью коэффициентов и свободного члена соответствующего уравнения (13.1) в $Q^{(k)}$. Все требования сформулированной выше дифракционной задачи, кроме (13.5), удовлетворяются очевидным образом, если только коэффициенты и свободные члены (13.1) в $Q^{(k)}$, $k = 1, \ldots, N$, а также $a^k_{ijx_l}$ суть, например, элементы $H^{\alpha,\, \frac{\alpha}{2}}(Q^{(k)})$. Покажем, что условие (13.5) есть следствие интегрального тождества

$$\int\limits_{Q_T} (-u\eta_t + a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + b_i u_{x_i}\eta + au\eta - f\eta)\, dx\, dt - \\ - \int\limits_{\Omega} \psi_0\eta(x, 0)\, dx = 0, \qquad (13.7)$$

которому удовлетворяет обобщенное решение $u$ задачи (13.6), (13.2), (13.3), если только это решение в каждой из $Q^{(k)}$ принадлежит, например, пространству $W_2^{2,\,1}(Q^{(k)})$, а поверхности $S^{(k,\, l)}$ кусочно-гладкие без касательных плоскостей, параллельных плоскости $t = 0$. Для этого преобразуем (13.7) к виду

$$\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{Q^{(k)}}\left(\mathscr{L}^{(k)}u-f^{(k)}\right)\eta\,dx\,dt+\sum_{k,\,l=1}^{N}\int\limits_{S^{(k,\,l)}}\left[\frac{\partial u}{\partial\mathscr{N}}\right]\eta\,ds=0,\quad(13.8)$$

что возможно в силу сделанных предположений об $u$ и $S^{(k,\,l)}$. Из него же, в силу достаточного произвола в выборе $\eta(x,\,t)$ следуют и уравнение (13.1) и равенства (13.5). Таким образом, действительно, обобщенное решение из $V_2^{1,\,\frac{1}{2}}(Q_T)$ задачи (13.6), (13.2), (13.3) есть решение сформулированной выше задачи (13.1)—(13.5), если только оно обладает указанной выше гладкостью и $S^{(k,\,l)}$ не имеют горизонтальных касательных плоскостей. Как легко видеть, верно и обратное утверждение: классическое решение задачи (13.1) — (13.5) (если оно существует) есть обобщенное решение из $V_2^{1,\,\frac{1}{2}}(Q_T)$ задачи (13.6), (13.2), (13.3). А так как последнее единственно, то мы вправе заменить первоначальную (классическую) постановку дифракционной задачи обобщенной — нахождением решений из $V_2^{1,\,\frac{1}{2}}(Q_T)$ задачи (13.6), (13.2), (13.3). Тем самым однозначная разрешимость задачи (13.1) — (13.5) в этой обобщенной постановке вытекает из теоремы 4.1, при этом предположения о всех данных задачи можно снизить до условий теоремы 4.1. Теоремы §§ 6—12 дают достаточные условия того, когда это решение принадлежит классам $H^{\alpha,\,\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$, $H^{\alpha,\,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, а также $H^{l,\,\frac{l}{2}}(Q^{(k)})$, $l>1$, и $W_q^{l,\,\frac{l}{2}}(Q^{(k)'})$, $l\geqslant 2$, $k=1,\,\ldots,\,N$, где $Q^{(k)'}$ — произвольная внутренняя подобласть $Q^{(k)}$. Исследование же поведения $u_{x_i}$ вблизи поверхностей $S^{(k,\,l)}$ требует специальных рассмотрений, которые проведены в [$33_{17}$]. Так как все эти исследования носят локальный характер, то предположение о том, что границы $S^{(k,\,l)}$ имеют вид $S_0^{(k,\,l)}\times(0,\,T)$, где $S_0^{(k,\,l)}$ — гладкие поверхности в пространстве $x$, разделяющие $\Omega$ на области $\Omega^{(k)}$, $k=1,\,\ldots,\,N$, не ограничивает общности: в малом любой гладкий кусок $S^{(k,\,l)}$, не имеющий нормалей, параллельных оси $t$, можно с помощью замены переменных $(x, t)$ вида $y_i = t - \varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $\tau = t$, превратить в кусок поверхности (и даже плоскости) с параллельными оси $\tau$ образующими, не нарушая характера задачи. Приведем здесь один из основных результатов по разрешимости задачи (13.1) — (13.5).

Теорема 13.1. *Задача* (13.1) — (13.5) *имеет единственное обобщенное решение* $u(x, t)$ *из* $V_2^{1, \frac{1}{2}}(Q_T)$, *если* $\psi_0 \in L_2(\Omega)$, *а коэффициенты и свободные члены уравнений* (13.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.1. *Это решение и есть не что иное, как обобщенное решение из* $V_2^{1, \frac{1}{2}}(Q_T)$ *задачи* (13.6), (13.2), (13.3). *Для него справедливы утверждения теорем* 7.1—9.1 *о том, когда оно суммируется по* $Q_T$ *с бо́льшими степенями или непрерывно по Гёльдеру в* $Q_T$ *или* $\bar{Q}_T$ *и пр. Более того, вне поверхностей раздела* $S^{(k, l)}$ *его гладкость гарантируется теоремами* §§ 10—12, *в частности, оно принадлежит классам* $H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q^{(k)})$ *в каждой из областей* $Q^{(k)}$, *если только коэффициенты и свободные члены уравнений* (13.1), *а также* $a^k_{ijx_l}$ *являются элементами* $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q^{(k)})$. *Вблизи же любого дважды непрерывно дифференцируемого куска* $S_1^{(k, l)}$ *поверхности* $S^{(k, l)}$ *), *не имеющего нормалей, параллельных оси* $t$, *производные от решения и непрерывны* (*по Гёльдеру*) *по обе стороны* $S_1^{(k, l)}$ *вплоть до самой поверхности* $S_1^{(k, l)}$, *если только в некоторой ее окрестности* $\Omega_1 \times [t_1, t_2]$ $\left\| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}, b_i, \frac{\partial b_i}{\partial t}, a, \frac{\partial a}{\partial t}, f, \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{q, \Omega_1} \leqslant \text{const}$ *при* $q > n$ *для* $t \in [t_1, t_2]$ *и если, как всюду, выполнено условие эллиптичности* (1.2). *Таким образом, в этом случае оба требования* (13.4), (13.5) *выполняются в классическом смысле.*

Ввиду устойчивости краевых задач по отношению к вариациям коэффициентов и свободных членов уравнений решения дифракционных задач можно получать как пределы хороших решений уравнений со сглаженными коэффициентами. Так,

*) Эти условия в [33₁₇] несколько ослаблены.

решение $u$ задачи (13.1)—(13.5), или, что то же, задачи (13.6), (13.2), (13.3) (при условиях теоремы 4.1), есть предел в норме $V_2^{1,0}(Q_T)$ решений $u^m$ краевых задач

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ijm}u_{x_j}\right) + b_{im}u_{x_i} + a_m u = f_m,$$

$$u\big|_{S_T} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \psi_{0m}(x),$$

в которых $a_{ijm}$, $b_{im}$, $a_m$, $f_m$, $\psi_{0m}$ суть гладкие функции, аппроксимирующие $a_{ij}$, $b_i$, $a$, $f$ и $\psi_0$ соответственно в нормах тех пространств, к которым принадлежат эти (последние) функции (точная формулировка дана в теореме 4.5). Если к тому же выполняются условия теоремы 9.1, то $u^m$ будут сходиться к $u$ равномерно.

Заметим, что случай неоднородных условий на $S_T$ и $S^{(k,l)}$ сводится к однородному случаю с помощью введения вместо $u$ новой неизвестной функции $v(x, t) = u(x, t) - \psi(x, t)$, где $\psi(x, t)$ — какая-либо гладкая функция, удовлетворяющая на $S_T$ и $S^{(k,l)}$ тем же неоднородным условиям, что и $u$. Аналогично рассматриваются другие краевые условия на $S_T$ и условия

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \mathscr{N}} + \sigma u\right]\Big|_{S^{(k,l)}} = 0 \qquad (13.9)$$

вместо (13.5). Важным для данного метода является то, что условие (13.5) на разрыве имеет специальный вид, связанный с главными членами уравнения, именно в него входят производные $\frac{\partial u}{\partial \mathscr{N}}$ по конормали, а не по каким-либо произвольным направлениям $\mathbf{l}$ в пространстве $x$. В силу этого члены по поверхности раздела, выделяющиеся при переходе от уравнения к интегральному тождеству, или полностью исчезают (см. (13.8) и (13.7)), или исчезают главные из них.

Аналогичные рассмотрения допускают следующие обобщения задачи (13.1)—(13.5). Пусть вместо уравнений (13.1) имеем уравнения

$$\mathscr{L}^{(k)}u \equiv \alpha^k(x, t)\,u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^k(x, t)\,u_{x_j} + a_i^k(x, t)\,u\right) + \\ + b_i^k(x, t)\,u_{x_i} + a^k(x, t)\,u = f^k(x, t), \qquad (13.10)$$

коэффициенты и свободные члены в которых суть хорошие функции в каждой из $\overline{Q}^{(k)}$, терпящие разрывы первого рода при переходе через $S^{(k,l)}$, причем $\alpha^k(x,t)$ строго положительны, а вместо условий (13.5) — условия

$$\left[ba_{ij}u_{x_j}+ba_iu\right]\cos(\mathbf{n},x_i)\big|_{S^{(k,l)}}=0,\quad k,l=1,\ldots,N, \tag{13.11}$$

или условия

$$[b\alpha u]\cos(\mathbf{n},t)-\left[ba_{ij}u_{x_j}+ba_iu\right]\cos(\mathbf{n},x_i)\big|_{S^{(k,l)}}=0, \tag{13.12}$$

в которых $b(x,t)$ — какая-либо гладкая в каждой из $\overline{Q}^{(k)}$ положительная функция, имеющая разрывы первого рода при переходе через $S^{(k,l)}$. В первой задаче в условиях (13.4) и (13.11) скачки определяются так же, как и выше, а во второй иначе, именно:

$$[u]\big|_{(x^0,t^0)\in S^{(k,l)}}=u\big|_{\substack{(x,t^0)\in Q^{(k)}\\(x,t^0)\to(x^0,t^0)}}-u\big|_{\substack{(x,t^0)\in Q^{(l)}\\(x,t^0)\to(x^0,t^0)}}$$

в (13.4), также $\left[ba_{ij}u_{x_j}+ba_iu\right]\big|_{S^{(k,l)}}$ в (13.12), а

$$[b\alpha u]\big|_{(x^0,t^0)\in S^{(k,l)}}=b\alpha u\big|_{\substack{(x^0,t)\in Q^{(k)}\\(x^0,t)\to(x^0,t^0)}}-b\alpha u\big|_{\substack{(x^0,t)\in Q^{(l)}\\(x^0,t)\to(x^0,t^0)}}.$$

Покажем, как можно трансформировать эти задачи в задачи на определение обобщенных решений краевой задачи для одного уравнения с разрывными коэффициентами и заменить тем самым их классические постановки обобщенными.

Для задачи (13.10), (13.2) — (13.4), (13.11) — это разыскание обобщенного решения $u$ из $W_2^{1,1}(Q_T)$ первой краевой задачи (13.2), (13.3) для уравнения

$$\mathscr{L}_1u\equiv b\alpha u_t-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(ba_{ij}u_{x_j}+ba_iu\right)+B_ju_{x_j}+Au=bf, \tag{13.13}$$

в котором $B_j=a_{ij}b_{x_i}+b_jb$, $A=a_ib_{x_i}+ab$, а функции $\alpha(x,t)$, $a_{ij}(x,t)$ и др. совпадают с $\alpha^{(k)}(x,t)$, $a_{ij}^k(x,t)$ и пр. в областях $Q^{(k)}$. Такое решение в соответствии с нашей концепцией определения обобщенных решений краевых задач, есть функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \left[ b\alpha u_t \eta + \left( b a_{ij} u_{x_j} + b a_i u \right) \eta_{x_i} + B_j u_{x_j} \eta + A u \eta \right] dx\, dt = \\ = \int_{Q_T} b f \eta\, dx\, dt \qquad (13.14)$$

при любой $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ и условию (13.3). Нетрудно видеть, что тождество (13.14) хранит в себе две информации: в $Q^{(k)}$ функция $u$ удовлетворяет уравнению (13.13), или, что то же самое, уравнению (13.10), а на $S^{(k,l)}$ — условиям (13.11). Остальные требования задачи (13.2) — (13.4) содержатся в том, что $u$ должна быть элементом $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, удовлетворяющим условию (13.2).

Задача (13.10), (13.2) — (13.4), (13.12) переформулируется как задача на разыскание обобщенного решения $u$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ первой краевой задачи (13.2), (13.3) для уравнения

$$\mathscr{L}_2 u \equiv \frac{\partial (b\alpha u)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left( b a_{ij} u_{x_j} + b a_i u \right) + B_j u_{x_j} + \hat{A} u = bf \qquad (13.15)$$

с теми же, что и выше, $B_j$ и с $\hat{A} = -(b\alpha)_t + a_i b_{x_i} + ab$. Это значит, что $u$ должно быть элементом $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющим тождеству

$$\int_{Q_T} \left[ -b\alpha u \eta_t + \left( b a_{ij} u_{x_j} + b a_i u \right) \eta_{x_i} + B_j u_{x_j} \eta + \hat{A} u \eta \right] dx\, dt - \\ - \int_{\Omega} b\alpha \psi_0 \eta\, dx \Big|_{t=0} = \int_{Q_T} b f \eta\, dx\, dt \qquad (13.16)$$

при любой $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, равной нулю при $t = T$. В данном случае тождество (13.16) содержит уравнение (13.15), или, что то же, (13.10), и условия (13.3) и (13.12).

Существование обобщенных решений обеих только что поставленных задач можно доказать разными способами, опираясь на неравенство (6.6) в первой из них и на неравенство энергетического типа во второй. Покажем, как это сделать, используя, например, умение решать первую краевую задачу для уравнений с гладкими коэффициентами (соответствующие теоремы доказаны в § 5 главы IV). Предположим, ради несущественных упрощений, что все входящие в тождества (13.14) и (13.16) известные функции, кроме $f$ и $\psi_0$, ограничены по модулю каким-нибудь числом $M$. Аппроксимируем коэффициенты $ba$, $ba_{ij}$, $ba_i$, $B_j$, $A$ и $\hat{A}$ какими-нибудь гладкими в $\overline{Q}_T$ функциями $(ba)_m$, $(ba_{ij})_m$ и т. д. так, чтобы выполнялись условия теоремы 5.2 главы IV. Более того, сделаем это так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{gathered}
\nu_1\xi^2 \leqslant (ba_{ij})_m \xi_i\xi_j \leqslant \mu_1\xi^2, \quad \nu_1 > 0, \\
\int_0^T \max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial (ba_{ij})_m}{\partial t}\right| dt \leqslant \mu_1, \\
\int_0^T \max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial (ba_i)_m}{\partial t}\right| dt \leqslant \mu_1, \qquad \int_0^T \max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial (ba)_m}{\partial t}\right| dt \leqslant \mu_1,
\end{gathered} \tag{13.17}$$

с одними и теми же положительными постоянными $\nu_1$ и $\mu_1$, и чтобы приближения для всех остальных коэффициентов были бы равномерно ограничены, а $(bf)_m$ и $(b\psi_0)_m$ сходились бы к $bf$ и $b\psi_0$ в $L_2(Q_T)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно. Тогда для всей совокупности решений $u^m$ вспомогательных задач в первом случае будем иметь неравенство (6.6), которое дает равномерную ограниченность норм

$$\| u^m \|_{W_2^{1,1}(Q_T)} \leqslant \mu_2, \tag{13.18}$$

а во втором — неравенство (6.3), гарантирующее равномерную ограниченность

$$\| u^m \|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant \mu_2. \tag{13.19}$$

Благодаря им можно перейти от тождеств (13.14) и (13.16) для $u^m$ к этим же тождествам для функций $u$, являющихся предельными для $\{u^m\}$ в слабой топологии $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ соответственно. Эти предельные функции $u$ и будут искомыми обобщенными решениями.

Единственность обобщенных решений этих двух задач устанавливается на основании того, что эти задачи сопряжены друг другу. Именно, пусть $u$ есть решение первой краевой задачи с $f$ и $\psi_0$, равными нулю, так что для $u$ справедливо тождество (13.14) с $f=0$. Возьмем в нем в качестве $\eta$ обобщенное решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ задачи

$$-\frac{\partial(b\alpha\eta)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(ba_{ij}\eta_{x_i}+B_j\eta\right)+ + ba_i\eta_{x_i}+A\eta=F(x,t), \quad (13.20)$$

$$\eta|_{S_T}=0, \quad \eta|_{t=T}=0,$$

где $F(x,t)$ — какая-либо произвольная гладкая в $\bar{Q}_T$ функция. Существование по крайней мере одного такого решения доказано выше. Из сопоставления интегрального тождества (13.14) для $u$ с $f\equiv 0$ и $\eta$, равным решению задачи (13.20), и тождества (13.16) для $\eta$, как решения задачи (13.20), в котором в качестве произвольной функции взято исследуемое решение $u$, видно, что

$$\int\limits_{Q_T} uF\,dx\,dt=0,$$

а отсюда в силу достаточного произвола $F$ решение $u\equiv 0$. Аналогично доказывается единственность обобщенного решения второй задачи. Ради упрощения выкладок мы предполагали при этом, что в каждой из областей $Q^{(k)}$ ограничены все коэффициенты $L^{(k)}$ и функция $b(x,t)$ вместе с их производными, встретившимися в наших рассуждениях.

Классичность полученных обобщенных решений устанавливается в принципе так же, как и классичность обобщенных решений задачи (13.1) — (13.5).

Подытожим доказанное в виде теоремы.

Теорема 13.2. *Задача* (13.10), (13.2) — (13.4), (13.11) *имеет единственное решение из* $W_2^{1,1}(Q_T)$, *а задача* (13.10), (13.2) — (13.4), (13.12) *имеет единственное решение из* $W_2^{1,0}(Q_T)$ *при любой* $f$ *из* $L_2(Q_T)$, *а* $\psi_0$ *из* $L_2(\Omega)$ *в первой задаче и* $\psi_0$ *из* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — *во второй. Относительно функций* $a_{ij}$, $a_{ijt}$, $a_i$, $a_{it}$, $b_i$, $b_{it}$, $a$, $\alpha$, $\alpha_t$, $b$, $b_x$, $b_t$ *и* $b_{xt}$ *при этом предполагаем, что они ограничены по абсолютной величине в каждой из областей* $\bar{Q}^{(k)}$, $\alpha$ *и* $b$ *строго положительны, а* $a_{ij}$ *подчиняются неравенствам* (1.2),

## § 14. Функциональные методы решения краевых задач

В этом и последующих параграфах главы III мы изложим различные способы доказательства разрешимости краевых задач для линейных уравнений. Все они применимы и к задаче Коши. Большинство из них может быть использовано и для фактического нахождения решений (точнее, для определения приближений $u^m$, сходящихся при $m \to \infty$ к искомым решениям). В § 4 данной главы был исследован метод Галёркина. В главе IV будет дано два других метода: классический метод теории потенциалов и один из наиболее поздних методов, основанный на точных априорных оценках и построении регуляризатора — оператора, обращающего главную линейную часть уравнения с замороженными коэффициентами. В данном параграфе мы опишем три метода, которые принято называть функциональными ввиду того, что они используют лишь самые общие свойства операторов, отвечающих задаче, а не их конкретную функциональную структуру. С помощью этих методов была доказана однозначная разрешимость абстрактной задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} + S(t)\,u(t) = f(t), \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{14.1}$$

в которой $u_0$ есть заданный элемент гильбертова пространства $\mathscr{H}$, $u(t)$ и $f(t)$ суть неизвестная и известная функции $t$ со значениями из $\mathscr{H}$, а $S(t)$ — семейство полуограниченных линейных операторов в $\mathscr{H}$, зависящих от параметра $t$. Условия, которые налагались при этом на $S(t)$, $f(t)$ и $u_0$, старались сформулировать так, чтобы они выполнялись в основных краевых задачах для линейных параболических уравнений. Так, задачу (1.9) можно интерпретировать, например, как задачу (14.1) с $\mathscr{H} = L_2(\Omega)$ и с $S(t)$, определяемым эллиптическим оператором

$$\mathscr{M}(t)\,u \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\,u_{x_j} + a_i(x, t)\,u\right) + \\ + b_i(x, t)\,u_{x_i} + a(x, t)\,u$$

на множестве $\mathscr{D}(S(t)) = \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$. Условие $u|_{S_T} = 0$ «вобралось» в указание области определения $S(t)$. Решение $u(x, t)$ и свободный член $F(x, t) = \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x_i} - f(x, t)$ рассматриваются как функции $t$ со значениями в $L_2(\Omega)$, а $\psi_0(x)$ — как известный элемент $L_2(\Omega)$, определяющий начальное значение $u(x, t)$.

Первые два функциональных метода для (1.9) и для (14.1) были даны М. И. Вишиком [$10_2$] и О. А. Ладыженской [$33_4$] (подробные их публикации и дальнейшие обобщения см. в их работах [$10_3$, $33_{5,6}$] и обзоре [$10_8$]). Затем было предложено несколько других методов ([$33_6$, $10_8$, **37**, $56_1$] и др; книга [**37**] посвящена главным образом абстрактным методам решения задачи Коши для уравнений вида (14.1)). Результаты, которые с их помощью получаются для параболических уравнений, отличаются друг от друга как предположениями об известных функциях, так и свойствами решений, которые удается с их помощью установить. Одни из них дают более точную информацию о решении, другие зато несколько проще, в третьих меньше (или больше) предположений о данных задачи. Мы не будем излагать и точно формулировать всё, что получается с их помощью применительно к интересующим нас задачам в их общем виде. Вместо этого изложим основные идеи этих методов (в данном параграфе и следующих параграфах) на примере простейшей задачи

$$\mathcal{L}_0 u \equiv u_t - \Delta u = f(x, t), \quad u|_{\Gamma_T} = 0, \tag{14.2}$$

а в тех методах, в которых задача (14.2) считается уже решенной и используется как отправной пункт, на примере несколько более общей задачи

$$\mathcal{L}_1 u \equiv u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t) u_{x_j}\right) + \lambda u = f(x, t), \quad u|_{\Gamma_T} = 0. \tag{14.3}$$

Заметим лишь следующее: мы выбрали в данной главе в качестве основного метода метод Галёркина потому, что он не требует не только гильбертовости пространства, в котором находится решение (пространство $V_2^{1,0}(Q_T)$), но не требует и его рефлексивности. Выбор же нерефлексивного банахова пространства $V_2^{1,0}(Q_T)$ был обусловлен желанием максимально расширить класс уравнений (т. е. ослабить предположения о их коэффициентах), но так, чтобы для него еще сохранились теоремы существования и единственности. Результат, установленный нами в § 4, не следует непосредственно из того, что дают другие методы.

Метод, предложенный О. А. Ладыженской в [$33_{4-6}$], применительно к задаче (14.2) выглядит так. В гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = L_2(Q_T)$ рассматривается оператор $A$, сопоставляющий каждой функции $u(x, t)$ из $W_2^{2,1}(Q_T)$, равной нулю на $\Gamma_T$, функцию $Au = \mathscr{L}_0 u(x, t)$.

Область его определения обозначим через $\mathscr{D}(A)$, а область значений через $\mathscr{R}(A)$.

Из соотношения

$$\int\limits_{Q_T} (Au)^2\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T} \left[u_t^2 + (\Delta u)^2\right] dx\,dt + \int\limits_{\Omega} u_x^2(x, T)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant c\left(\|u\|_{2, Q_T}^{(2)}\right)^2, \quad c = \mathrm{const} > 0, \qquad (14.4)$$

видно, что замыкание оператора $A$ (возможность замыкания легко проверяется непосредственно или устанавливается как следствие плотности в $L_2(Q_T)$ области определения сопряженного к $A$ оператора) приводит к замыканию области его значений, т. е.

$$\mathscr{R}(\bar{A}) = \overline{\mathscr{R}(A)}.$$

Покажем, что $\overline{\mathscr{R}(A)}$ совпадает со всем $L_2(Q_T)$. Действительно, в противном случае нашелся бы элемент $v(x, t) \in L_2(Q_T)$, ортогональный ко всему $\mathscr{R}(A)$, т. е. такой, что

$$\int\limits_{Q_T} v \mathscr{L}_0 u\,dx\,dt = 0 \qquad (14.5)$$

при всех $u \in \mathscr{D}(A)$.

Построим по $v(x, t)$ функцию $w(x, t)$ как решение задачи

$$-\Delta w(x, t) = \int\limits_0^t v(x, \tau)\,d\tau, \qquad w|_{S_T} = 0. \qquad (14.6)$$

Доказано ([$33_2$], см. также [1], § 9 главы III), что эта задача однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ при любой правой части из $L_2(\Omega)$. Ввиду этого $w=(-\Delta)^{-1}\int\limits_0^t v(x,\tau)\,d\tau$ принадлежит $\mathscr{D}(A)$, и потому в (14.5) можно вместо $u$ подставить $w$. Результат этой подстановки запишем в виде

$$\int\limits_{Q_T} v\left[(-\Delta)^{-1}v+\int\limits_0^t v\,d\tau\right]dx\,dt=0,$$

откуда

$$\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}v\right\|^2_{2,\,Q_T}+\frac{1}{2}\left\|\int\limits_0^t v\,d\tau\right\|^2_{2,\,\Omega}\Bigg|_{t=0}^{t=T}=0$$

и, следовательно, $v\equiv 0$. Итак, доказано, что

$$\mathscr{R}(\bar{A})=L_2(Q_T).$$

Но это и значит, что уравнение

$$\bar{A}u=f \tag{14.7}$$

имееет решение $u$ из $\mathscr{D}(\bar{A})$ для любого $f$ из $L_2(Q_T)$.

Из соотношения (14.4) видно, что элементы $u(x,t)$ из $\mathscr{D}(\bar{A})$ имеют обобщенные производные $u_t$, $u_x$ и $u_{x_ix_j}$ из $L_2(Q_T)$. При этом предполагается, что граница $S$ есть поверхность класса $O^2$.

Оператор $\bar{A}$ на них вычисляется как обычный дифференциальный оператор $\mathscr{L}_0u$, в котором все производные понимаются как обобщенные, а уравнение $\mathscr{L}_0u=f$ удовлетворяется почти всюду в $Q_T$. Граничные же и начальные условия на $\Gamma_T$ выполняются «в среднем».

Итак, доказано, что при любой $f(x,t)$ из $L_2(Q_T)$ задача (14.2) имеет решение $u$, принадлежащее $W_2^{2,1}(Q_T)$ (если $S\in O_2$). Ясно, что результат этот точен и что решение единственно в этом классе функций. Более того, фактически мы доказали значительно более сильную теорему единственности: *единственность для обобщенных решений задачи* (14.2) (*точнее, сопряженной к ней задачи*:

$$-v_t - \Delta v = \psi, \quad v|_{S_T} = 0, \quad v(x,\ T) = 0,$$

*которая переходит в задачу* (14.2), *если заменить $t$ на $\tau = T - t$) из класса* $L_2(Q_T)$. Такие решения определяются следующим образом:

*Обобщенным решением задачи* (14.2) *из класса* $L_2(Q_T)$ называется функция $u(x,\ t)$ из $L_2(Q_T)$, удовлетворяющая тождеству

$$\int\limits_{Q_T} u(-\eta_t - \Delta\eta)\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T} f\eta\,dx\,dt \tag{14.8}$$

при любой $\eta$ из $W_2^{2,1}(Q_T)$, равной нулю на $S_T$ и при $t = T$.

Метод, предложенный М. И. Вишиком [$10_{2,8}$], базируется на следующем легко доказываемом предложении функционального анализа:

Лемма 14.1. *Пусть $A$ — есть оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ с плотной областью определения $\mathscr{D}(A)$ и с ограниченным обратным на области своих значений $\mathscr{R}(A)$. Тогда область значений $\mathscr{R}(A^*)$ сопряженного к нему оператора совпадает со всем $\mathscr{H}$.*

Действительно, возьмем произвольный элемент $f$ из $\mathscr{H}$. Уравнение $A^*x = f$ в силу определения сопряженного оператора $A^*$, эквивалентного тождеству $(x,\ Au) = (f,\ u)$ при любом $u$ из $\mathscr{D}(A)$, или, что то же самое, тождеству $(x,\ v) = (f,\ A^{-1}v)$ при любом $v$ из $\mathscr{R}(A)$. Но это последнее разрешимо при любом $f$ из $\mathscr{H}$, ибо $(f,\ A^{-1}v)$ есть линейный функционал над $v$ (линейность его очевидна, а ограниченность следует из ограниченности оператора $A^{-1}$ на $\mathscr{R}(A)$), и потому в силу теоремы Рисса о виде линейного функционала найдется по крайней мере один элемент $x$ из $\overline{\mathscr{R}(A)}$, для которого $(f,\ A^{-1}v) = (x,\ v)$ при всех $v$ из $\mathscr{R}(A)$. Этот элемент и дает одно из решений уравнения $A^*x = f$. Лемма доказана.

Ее можно по-разному применить к доказательству разрешимости задачи (14.2). Вишик берет в качестве основного пространства $\mathscr{H}$ пространство функций $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ со скалярным произведением $(u, v)_{\mathscr{H}} = \int\limits_{Q_T} (uv + v_x v_x)\, dx\, dt$. Уравнение (14.2) и начальное условие заменим интегральным тождеством

$$I_0(u, \eta) \equiv \int\limits_{Q_T} (-u\eta_t + u_x\eta_x)\, dx\, dt = \int\limits_{Q_T} f\eta\, dx\, dt, \qquad (14.9)$$

где $\eta$ — произвольная функция из множества $\mathscr{D}$, состоящего из всех элементов $W_2^{1,1}(Q_T)$, равных нулю на $S_T$ и при $t = T$. Функция $u$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющая тождеству (14.9) при всех только что указанных $\eta$, называется в соответствии с § 3 обобщенным решением задачи (14.2) из пространства $W_2^{1,0}(Q_T)$.

Интеграл $I_0(u, \eta)$ при любом фиксированном $\eta$ из $\mathscr{D}$ определяет, как легко видеть, линейный функционал над $u$ в $\mathscr{H}$, который в силу теоремы Рисса можно записать в виде скалярного произведения $u$ на некоторый элемент $A\eta$ из $\mathscr{H}$, т. е.

$$I_0(u, \eta) = (u, A\eta)_{\mathscr{H}}, \quad u \in \mathscr{H}. \qquad (14.10)$$

Оператор $A$, определяемый этим тождеством, имеет в качестве области своего определения $\mathscr{D}(A)$ множество $\mathscr{D}$. Он удовлетворяет условиям леммы 14.1, ибо, подставляя в (14.10) вместо $u$ функцию $\eta$, получим

$$(\eta, A\eta)_{\mathscr{H}} = I_0(\eta, \eta) = \int\limits_{Q_T} (-\eta\eta_t + \eta_x^2)\, dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\|\eta(x, 0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\eta_x\|_{2,Q_T}^2 \geqslant c\|\eta\|_{\mathscr{H}}^2, \quad c = \text{const} > 0,$$

откуда следует, что

$$\|A^{-1}\|_{\mathscr{H}} \leqslant \frac{1}{c}.$$

Правую часть в тождестве (14.9) также можно представить в виде скалярного произведения в $\mathscr{H}$:

$$\int\limits_{Q_T} f\eta\, dx\, dt = (F, \eta)_{\mathscr{H}},$$

где $F$ однозначно определяется по $f$, ибо при любой $f$ из $L_2(Q_T)$ интеграл $\int\limits_{Q_T} f\eta\,dx\,dt$ определяет линейный функционал над $\eta$ в $\mathscr{H}$. В результате этого тождество (14.9) примет вид

$$(u,\ A\eta)_{\mathscr{H}}=(F,\ \eta)_{\mathscr{H}}. \tag{14.11}$$

Применяя теперь к оператору $A$ лемму 14.1, мы убедимся, что уравнение $A^*u=F$, или, что то же, тождество (14.11), имеет решение $u$ из $\mathscr{H}$ при любом $F$ из $\mathscr{H}$. Тем самым мы доказали существование обобщенного решения из $W_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (14.2) при любой $f$ из $L_2(Q_T)$.

Можно было бы в качестве $\mathscr{H}$ взять подпространство гильбертова пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, состоящее из функций, равных нулю на $\Gamma_T$. Уравнение (14.2) надо при этом заменить тождеством

$$\int\limits_{Q_T}(u_t\zeta_t+u_x\zeta_{xt})\,dx\,dt=\int\limits_{Q_t} f\zeta_t\,dx\,dt, \tag{14.12}$$

в котором $\zeta(x,\ t)$ пробегает все множество $\mathscr{D}$ элементов $\mathscr{H}$, имеющих производные $\zeta_{x_i t}\in L_2(Q_T)$, и затем (14.12) преобразовать в равенство скалярных произведений в $\mathscr{H}$:

$$(u,\ A\zeta)_{\mathscr{H}}=(F,\ \zeta)_{\mathscr{H}}. \tag{14.13}$$

Разрешимость (14.13) выводится на основании леммы 14.1. Это рассуждение дает разрешимость задачи (14.2) в пространстве $W_2^{1,1}(Q_T)$ при любой $f$ из $L_2(Q_T)$.

Лионс устанавливает разрешимость краевых задач на основании доказанной им теоремы об абстрактных билинейных формах (теорема 1.1 главы III из его книги [37]). Применительно к задаче (1.9) его подход, по существу, совпадает с изложенным только что способом доказательства разрешимости в пространстве $W_2^{1,0}(Q_T)$ на основании леммы 14.1.

Отметим еще раз, что все излагаемые здесь функциональные методы применимы к задаче (1.9) (и к ряду других краевых задач) в ее общем виде, причем предположения об ограниченности коэффициентов младших членов (которые делались в указанных выше работах) могут быть заменены принадлежностью их к некоторым $L_{q,\infty}(Q_T)$ ($q$ — разные для разных коэффициентов и в разных методах).

Чем-то средним между первым из изложенных методов и методом продолжения по параметру, излагаемым в следующем параграфе, является нижеследующий метод, базирующийся на тех же априорных оценках, что и первые два ([56₁]). Пусть $S \in O^2$ и пусть известно, что задача (14.2) однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$ для любого $f$ из $L_2(Q_T)$ (напомним, что $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$ есть подпространство пространства $W_2^{2,1}(Q_T)$, состоящее из элементов $W_2^{2,1}(Q_T)$, обращающихся в нуль на $S_T$). Покажем, что тогда то же имеет место и для задачи (14.3). Для этого используем обобщение соотношения (14.4), состоящее в том, что для любой функции $v$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$

$$\int\limits_{Q_T} \mathscr{L}_1 v \mathscr{L}_0 v\, dx\, dt \geqslant c_1 \left( \|v\|_{2,Q_T}^2 \right)^2, \quad c_1 = \text{const} > 0, \tag{14.14}$$

если только $\lambda$ в (14.3) — достаточно большое положительное число (см. по этому поводу § 6 данной главы). Без ограничения общности можно считать, что $\lambda$ в $\mathscr{L}_1$ такое, и (14.14) справедливо.

Кроме этого, для $\mathscr{L}_1$ справедливо соотношение типа (14.4), именно:

$$\int\limits_{Q_T} (\mathscr{L}_1 v)^2\, dx\, dt \geqslant c_2 \left( \|v\|_{2,Q_T}^{(2)} \right)^2, \quad c_2 = \text{const} > 0 \tag{14.15}$$

(см. неравенство (6.10) данной главы) при любой $v$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$. Из него следует, что оператор $\mathscr{L}_1$ на $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$ замкнут, имеет на области своих значений $\mathscr{R}(\mathscr{L}_1)$ ограниченный обратный и $\mathscr{R}(\mathscr{L}_1)$ есть замкнутое подпространство $L_2(Q_T)$. Покажем, что $\mathscr{R}(\mathscr{L}_1)$ совпадает со всем $L_2(Q_T)$. Пусть $v(x, t)$ принадлежит $L_2(Q_T)$ и ортогонален $\mathscr{R}(\mathscr{L}_1)$, т. е.

$$\int\limits_{Q_T} \mathscr{L}_1 u v\, dx\, dt = 0 \tag{14.16}$$

для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$.

Построим по нему элемент $w = \mathscr{L}_0^{-1} v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$ и положим в (14.16) $u = w$. Это даст

$$\int_{Q_T} \mathscr{L}_1 w \mathscr{L}_0 w \, dx \, dt = 0.$$

Но в силу (14.14) отсюда следует, что $w = 0$, а потому и $v = \mathscr{L}_0 w = 0$. Итак, $\mathscr{R}(\mathscr{L}_1) = L_2(Q_T)$, т. е. задача (14.3) однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$ при любой $f$ из $L_2(Q_T)$.

## § 15. Метод продолжения по параметру

Докажем разрешимость задачи (14.3), считая, что задача (14.2) уже исследована. Для этого рассмотрим семейство задач

$$\mathscr{L}_\tau u = u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\tau a_{ij}(x, t) u_{x_j} + (1 - \tau) u_{x_i}\right] + \lambda \tau u = f,$$
$$u|_{\Gamma_T} = 0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{15.1}$$

Пусть $S \in O^2$, $f \in L_2(Q_T)$, а $a_{ij}(x, t)$, кроме условия равномерной эллиптичности

$$\nu \xi^2 \leqslant a_{ij} \xi_i \xi_j \leqslant \mu \xi^2, \tag{15.2}$$

удовлетворяют условиям

$$\left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \right| \leqslant \mu_1. \tag{15.3}$$

Тогда задачи (15.1) однозначно разрешимы в пространстве $W_2^{2,1}(Q_T)$.

Доказательство (оно взято из [33₉]) базируется на точной оценке (6.10) данной главы, равномерной для всего семейства операторов $\mathscr{L}_\tau$, которая для решений $u^\tau$ задач (15.1) имеет вид

$$\| u^\tau \|_{2, Q_T}^{(2)} \leqslant c \| f \|_{2, Q_T}, \tag{15.4}$$

и на том факте, что для оператора $\mathscr{L}_0 = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ разрешимость задачи (15.1) в классе $W_2^{2,1}(Q_T)$ считается установленной хотя бы для плотного в $L_2(Q_T)$ множества функций $f$. Это последнее следует, например, из результатов

§ 6 данной главы, результатов главы IV, из первого функционального метода, изложенного в § 14, и из метода Фурье, который будет описан в § 17. Но, если задача (15.1) при $\tau=0$ разрешима в $W_2^{2,1}(Q_T)$ для плотного множества $f$ из $L_2(Q_T)$, то в силу (15.4) при $\tau=0$ она однозначно разрешима в $W_2^{2,1}(Q_T)$ при любой $f$ из $L_2(Q_T)$ (ибо из сходимости $f_m$ к $f$ в $L_2(Q_T)$ следует согласно (15.4) сходимость соответствующих им решений $u_m$ в $W_2^{2,1}(Q_T)$ к некоторой функции $u$ из $W_2^{2,1}(Q_T)$, которая, очевидно, и будет решением задачи, соответствующим $f$). Итак, оператор $\mathscr{L}_0$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между подпространством $W$ пространства $W_2^{2,1}(Q_T)$, состоящим из элементов $W_2^{2,1}(Q_T)$, равных нулю на $\Gamma_T$, и всем $L_2(Q_T)$. Покажем, что то же самое делают все операторы $\mathscr{L}_\tau$. Для этого задачу (15.1) запишем в виде операторного уравнения

$$\mathscr{L}_0 u+\tau(\mathscr{L}_1-\mathscr{L}_0)u=f, \qquad f\in L_2(Q_T), \qquad u\in W, \tag{15.5}$$

которое эквивалентно в силу только что доказанного свойства $\mathscr{L}_0$ уравнению

$$u+\tau\mathscr{L}_0^{-1}(\mathscr{L}_1-\mathscr{L}_0)u=\mathscr{L}_0^{-1}f \tag{15.5$'$}$$

в пространстве $W$. Оператор $\mathscr{L}_0^{-1}(\mathscr{L}_1-\mathscr{L}_0)$ ограничен в $W$ в силу предположений (15.2), (15.3) и неравенства (15.4) при $\tau=0$. Поэтому уравнение (15.5) однозначно разрешимо (хотя бы по методу последовательных приближений) для $\tau<\dfrac{1}{\|\mathscr{L}_0^{-1}(\mathscr{L}_1-\mathscr{L}_0)\|_W}\equiv a$, и тем самым операторы $\mathscr{L}_\tau$ при $\tau>0$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между $W$ и $L_2(Q_T)$. Ввиду этого уравнение (15.5) эквивалентно уравнению

$$u+(\tau-\tau_1)\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}(\mathscr{L}_1-\mathscr{L}_0)u=\mathscr{L}_{\tau_1}^{-1}f \tag{15.6}$$

в $W$ при любом $\tau_1<a$. Нормы операторов $\mathscr{L}_\tau^{-1}(\mathscr{L}_1-\mathscr{L}_0)$ в $W$ для всех $\tau$ из $[0,1]$, для которых существует $\mathscr{L}_\tau^{-1}$, не превосходят некоторого числа $a_1$, не зависящего от $\tau$ (что следует из (15.2) — (15.4)), и потому уравнения (15.6) разрешимы при всех $\tau$ из $\left[\tau_1, \tau_1+\dfrac{1}{a_1}\right)$. Повторяя это

рассуждение, мы за конечное число шагов дойдем до оператора $\mathscr{L}_1$ и установим однозначную разрешимость в $W$ задачи (15.1) при $\tau = 1$ (или, что то же самое, задачи (14.3)) при любом $f$ из $L_2(Q_T)$.

Продолжение по параметру можно провести и иначе, не по операторам $\mathscr{L}$, а по соответствующим им билинейным формам (см. [$33_6$]).

## § 16. Метод Ротэ и метод конечных разностей

Метод Ротэ и метод конечных разностей применимы для решения задачи Коши и начально-краевых задач для уравнений общего вида (1.1), причем область $Q$ изменения $(x, t)$ может быть и нецилиндрической. Первый из названных методов был предложен немецким математиком Ротэ в 1930 году ([**51**]) и был обоснован им применительно к одномерному параболическому уравнению второго порядка. Это обоснование было дано им, естественно, в рамках классической разрешимости при условии достаточной (но не сильно завышенной) гладкости коэффициентов. Дальнейшие результаты по разрешимости краевых задач для многомерных эллиптических уравнений позволили без труда перенести результаты Ротэ и на случай параболических уравнений (1.1) с любым $n > 1$ (см. работу [$33_8$], в которой это сделано для более сложного объекта — квазилинейного уравнения с нелинейностью по $u$, а также работы [$9_1$] и [$65_1$]). В основе доказательства классической разрешимости по методу Ротэ лежит (как и во многих других методах) принцип максимума, который сохраняется в предложенной Ротэ аппроксимации параболических уравнений. Опишем метод Ротэ на примере задачи

$$u_t - \Delta u = f(x, t), \quad u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = \psi_0(x) \tag{16.1}$$

в цилиндрической области $Q_T = \Omega \times [0, T]$. Будем в этом параграфе дифференцирования по $x_i$ и $t$ обозначать $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial}{\partial t}$, а символы $(\cdot)_{x_i}$ и $(\cdot)_t$ используем для обозначения разностных отношений. Разобьем пространство $(x, t)$ плоскостями $t = kh$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, на слои и предположим, ради сокращения записи, что $\frac{T}{h} = m$ есть целое число. Пусть $\Omega_k$

есть пересечение плоскости $t = kh$ с $Q_T$, а $S_k$ — его граница. На всех $\Omega_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, рассмотрим задачи

$$u_{\bar{t}}(x, kh) - \Delta u(x, kh) = f(x, k), \quad u|_{S_k} = 0, \tag{16.2}$$

считая

$$u(x, 0) = \psi_0(x). \tag{16.3}$$

Здесь

$$u_{\bar{t}}(x, kh) = \frac{1}{h}[u(x, kh) - u(x, kh - h)],$$

а

$$f(x, k) = f(x, kh).$$

Задачи (16.2) решаются последовательно от слоя $\Omega^k$ к слою $\Omega_{k+1}$, начиная с $k = 1$, причем каждый раз (даже в случае общего уравнения (1.1)) имеется единственное решение соответствующей краевой задачи для эллиптического уравнения благодаря наличию в уравнении члена $\frac{1}{h}u(x, kh)$ с большим положительным коэффициентом $\frac{1}{h}$. Доказывается, что в пределе при $h \to 0$ функции $u(x, kh)$ (или, например, их линейные интерполяции $u^h(x, t)$, $(x, t) \in Q_T$, совпадающие с $u(x, kh)$ при $t = kh$ и линейно зависящие от $t$ внутри слоев $kh \leqslant t \leqslant (k+1)h$) дадут решение $u(x, t)$ задачи (16.1). Для этого устанавливаются оценки разных норм $u(x, kh)$, не зависящие от $h$. Одни из них базируются на принципе максимума, присущем и дифференциально-разностному уравнению (16.2). В «чистом» виде этот принцип имеет место, как всюду, для однородного уравнения, когда $f = 0$. В этом случае максимальное и минимальное значения функций $u(x, kh)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, принимаются или на нижнем основании $\Omega_0$, или на $S_k$. Действительно, если бы наибольшее значение принималось в какой-нибудь внутренней точке $x_0 \in \Omega_k$ для $k \geqslant 1$, то в этой точке $u_{x_i}(x_0, kh) = 0$, $-\Delta u(x_0, kh) \geqslant 0$ и $u_{\bar{t}}(x_0, kh) \geqslant 0$, и тогда в силу уравнения (16.2) в ней $u_{\bar{t}}(x_0, kh) = 0$, т. е. $u(x_0, kh) = u(x_0, kh - h)$. (Так что строгий максимум в $(x_0, kh)$ невозможен.) Беря теперь точку $(x_0, kh - h)$ и проводя те же рассуждения, что и в точке $(x_0, t_0)$, получим $u(x_0, kh - h) = u(x_0, kh - 2h)$ и т. д. до $u(x_0, 0)$. Тем самым доказано, что на $S_k$, $k = 0, 1, \ldots, m$, или на $\Omega_0$ найдется точка, где принимается наибольшее значение для функций $u(x, kh)$ $k=0, 1, \ldots, m$. Аналогичное утверждение верно и для их наименьшего значения. Несколько усложняя рассуждение, нетрудно показать, что если $f=0$, то наибольшее и наименьшее значения не могут приниматься во внутренних точках, если $u \neq \mathrm{const}$ (делается это так же, как и для обычного дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a_{ij}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0;$$

см. по этому поводу работу [44₁]).

Принцип максимума дает оценку $\max\limits_{\substack{x \in \Omega \\ k=0, 1, \ldots, m}} |u(x, kh)|$ через известные в задаче (16.1) величины. Случай $f \neq 0$ рассматривается почти так же с предварительной заменой функции $u(x, kh)$ на $v(x, kh)e^{\lambda kh}$, $\lambda > 0$. Сложнее выводится оценка $\max\left|\frac{\partial u(x, kh)}{\partial x}\right|$, но и ее основу составляет принцип максимума. Для уравнений с коэффициентами, не зависящими от $x$, это усматривается сравнительно просто, ибо из производных $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ удовлетворяет такой же системе уравнений (16.2), что и $u$, именно:

$$\left(\frac{\partial u(x, kh)}{\partial x_j}\right)_{\bar{t}} - \Delta\left(\frac{\partial u(x, kh)}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f(x, kh)}{\partial x_j}, \qquad (16.4)$$

$$k = 1, 2, \ldots, m.$$

Ввиду этого, величины $\max\limits_{\substack{x \in \Omega \\ k=0, 1, \ldots, m}} \left|\frac{\partial u(x, kh)}{\partial x_j}\right|$ оцениваются через верхние границы на $S_k$, $k=0, 1, \ldots, m$, $\Omega_0$ и $\max\limits_{\substack{x \in \Omega \\ k=1, \ldots, m}} \left|\frac{\partial f(x, kh)}{\partial x_j}\right|$. Эти же последние на $\Omega_0$ известны, а на $S_k$ оцениваются так же, как и для дифференциального уравнения, с помощью барьеров (см. доказательство леммы 3.1 главы VI; для линейного случая оно понятным образом упрощается). В случае уравнений с коэффициентами, зависящими от $x$, нельзя составить таких уравнений, из которых можно было бы оценить величину каждой из производных $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ отдельно. Но это возможно сделать сразу для всех производных $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j=1, \ldots, n$, взяв функции

$$v(x, kh)=\left[\mu u^2(x, kh)+\left(\frac{\partial u(x, kh)}{\partial x}\right)^2\right] e^{-2\lambda kh},$$
$$k=0, 1, \ldots, m,$$

с достаточно большими числами $\mu$ и $\lambda$ и составив для них уравнения типа (16.2). Этот прием, предложенный С. Н. Бернштейном (см. [5₁]) для оценки $\max|u_x|$ решений $u$ линейных параболических уравнений второго порядка, применим и для дифференциально-разностных уравнений (16.2) (см. о нем § 17 главы IV). Аналогично оцениваются и производные более высоких порядков от $u(x, kh)$ по $x$. Так, для производных второго порядка надо рассмотреть функции

$$w(x, kh)=\left[\mu\left(\frac{\partial u(x, kh)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u(x, kh)}{\partial^2 x}\right)^2\right] e^{-2\lambda kh}$$

с достаточно большими числами $\mu$ и $\lambda$. Гладкость же по $t$ устанавливается непосредственно из уравнения (16.2). Мы не будем проводить подробно все эти оценки и предельный переход $h \to 0$, а отошлем читателя к работе [$33_8$] (см. также [$33_3$]). Заметим только, что поскольку в этой работе уравнение зависит от $u$ нелинейно, то для оценки $\max\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ пришлось ввести более сложную функцию $v$, чем указанная выше. Оценка же $\max\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|$ проведена по Бернштейну так, как только что описано. При этом отличие уравнения (16.2) от дифференциального проявляется несколько больше, чем выше при оценке $\max|u(x, kh)|$.

Окончательные результаты по классической разрешимости краевых задач при исследовании этим методом получаются несколько более грубыми, чем имеющие место на самом деле и изложенные в главе IV.

Метод Ротэ дает возможность весьма просто и при сравнительно широких предположениях о данных в краевых задачах доказать существование их обобщенных решений (в [$33_8$] это сделано для квазилинейных уравнений). Правда, доведение этих предположений до максимально широких (при которых это сделано в § 4 данной главы) требует дополнительных рассуждений. Мы покажем, как доказывается наличие обобщенных решений по методу Ротэ на примере задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\mathcal{M}(t)u\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f(x,\ t), \tag{16.5}$$

$$u|_{S_T}=0, \qquad u|_{t=0}=\psi_0(x),$$

при $\psi_0\in L_2(\Omega)$, $f\in L_2(Q_T)$ и $a_{ij}(x,\ t)$, удовлетворяющих условию

$$\nu\xi^2\leqslant a_{ij}(x,\ t)\xi_i\xi_j\leqslant\mu\xi^2, \qquad \nu=\mathrm{const}>0. \tag{16.6}$$

Заменим уравнение (16.5) дифференциально-разностным

$$u_{\bar t}(k)-\mathcal{M}(kh)u(k)\equiv u_{\bar t}(x,\ kh)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^h_{ij}(x,\ k)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f^h(x,\ k), \tag{16.7}$$

в котором

$$f^h(x,\ k)=\frac{1}{h}\int\limits_{kh-h}^{kh}f(x,\ \tau)\,d\tau,$$

а

$$a^h_{ij}(x,\ k)=\frac{1}{h}\int\limits_{kh-h}^{kh}a_{ij}(x,\ \tau)\,d\tau.$$

К ним присоединим граничное и начальное условия:

$$u(x,\ 0)=\psi_0(x) \quad \text{и} \quad u(x,\ kh)|_{S_T}=0. \tag{16.8}$$

Так как $f^h(x,\ k)\in L_2(\Omega)$, то на каждом слое $\Omega_k$ задача (16.7), (16.8) однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Получим для ее решений $u(x,\ kh)$ оценку энергетического типа, не зависящую от $h$. Для этого умножим (16.7) на $2hu(x,\ kh)$, полученные равенства просуммируем по $k$ в пределах от 1 до какого-либо $k_0\leqslant m$ и результирующее равенство проинтегрируем по $\Omega$. Это после интегрирования по частям во втором члене левой части приведет нас к соотношению

$$2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_\Omega u_{\bar t}(x,\ kh)\,u(x,\ kh)\,dx+$$
$$+2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_\Omega a^h_{ij}(x,\ k)\,u_{x_i}(x,\ kh)\,u_{x_j}(x,\ kh)\,dx=$$
$$=2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_\Omega f^h(x,\ k)\,u(x,\ kh)\,dx. \qquad (16.9)$$

Для преобразования первого члена используем элементарное, но весьма полезное тождество, указанное автором [$33_8$] для исследования метода Ротэ и неявной разностной схемы для уравнений параболического типа

$$2h\sum_{k=1}^{k_0}u_{\bar t}(k)\,u(k)=u^2(k_0)-u^2(0)+h^2\sum_{k=1}^{k_0}\left(u_{\bar t}(k)\right)^2, \qquad (16.10)$$

которое легко проверить непосредственно. Кроме этого, оценим второй член снизу с помощью (16.6). Это приведет нас к неравенству

$$I_h(k_0)\equiv\int_\Omega u^2(x,\ k_0h)\,dx+2\nu h\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx+$$
$$+h^2\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}(u_{\bar t})^2\,dx\leqslant\int_\Omega u^2(x,\ 0)\,dx+2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}f^h u\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_\Omega u^2(x,\ 0)\,dx+h\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}(f^h)^2\,dx+h\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}u^2\,dx, \qquad (16.11)$$

из которого элементарно получается желаемая оценка для $I_h(k_0)$:

$$I_h(k_0)\leqslant c\left(\|\psi_0\|^2_{2,\ \Omega}+\|f\|^2_{2,\ Q_{k_0h}}\right),\quad k_0=0,\ 1,\ \ldots,\ m, \qquad (16.12)$$

с постоянной $c$, не зависящей от $h$. Благодаря ей можно сделать предельный переход по $h\to 0$ и доказать, что предельная для $\{u(x,\ kh),\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ m\}$ функция $u(x,\ t)$ есть обобщенное решение задачи (16.5) из $W_2^{1,0}(Q_T)$. Для этого обозначим через $\overline{u}^h(x, t)$ функцию, равную на каждом слое $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [kh - h, kh)$, $k = 1, 2, \ldots$, функции $u(x, kh - h)$. Легко видеть, что функции $\overline{u}^h(x, t) \in W_2^{1, 0}(Q_T)$, равны нулю на $S_T$ и в силу (16.12) имеют равномерно ограниченные нормы в $W_2^{1, 0}(Q_T)$

$$\|\overline{u}^h\|_{2, Q_T} + \left\|\frac{\partial \overline{u}^h}{\partial x}\right\|_{2, Q_T} \leqslant c_1. \tag{16.13}$$

Благодаря (16.13) можно выбрать последовательность $h_l$, $l = 1, 2, \ldots$, стремящуюся к нулю, для которой функции $\{\overline{u}^{h_l}\}$ и их производные $\left\{\frac{\partial \overline{u}^{h_l}}{\partial x_k}\right\}$ сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ к некоторой функции $u(x, t)$ из $W_2^{1, 0}(Q_T)$, равной нулю на $S_T$, и ее производным $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ соответственно. Покажем, что $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \left(-u \frac{\partial \eta}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right) dx\, dt - \\ - \int_{\Omega} \psi_0 \eta(x, 0)\, dx = \int_{Q_T} f\eta\, dx\, dt \tag{16.14}$$

при любой $\eta(x, t)$ из $W_2^{1, 1}(Q_T)$, равной нулю на $S_T$ и при $t = T$, и тем самым является обобщенным решением задачи (16.5) из $W_2^{1, 0}(Q_T)$. Соотношение (16.14) достаточно установить лишь для непрерывно дифференцируемых $\eta(x, t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1, 1}(Q_T)$, равных нулю вблизи слоя $t = T$. Для этого умножим уравнение (16.7) на $h\eta(x, kh)$, полученные равенства просуммируем по $k$ от 1 до $m$ и проинтегрируем по $\Omega$. Первый член полученного соотношения преобразуем с помощью формулы «суммирования по частям»

$$h \sum_{k=1}^{m} u_{\bar{t}}(k)\, \eta(k) = -h \sum_{k=0}^{m-1} u(k)\, \eta_t(k) + u(m)\, \eta(m) - u(0)\, \eta(0), \tag{16.15}$$

легко проверяемой непосредственно. В ней использовано обозначение $u_{\bar{t}}(x, t) = \frac{1}{h}[u(x, t+h) - u(x, t)]$. Во втором же члене производную $\dfrac{\partial}{\partial x_l}$ перенесем на $\eta$. Таким образом, из (16.7) получим тождество

$$-h\sum_{k=0}^{m}\int_{\Omega_k} u\eta_t\,dx-\int_{\Omega}\psi_0\eta(x,\,0)\,dx+$$
$$+h\sum_{k=1}^{m}\int_{\Omega_k} a_{ij}^h\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\eta}{\partial x_l}\,dx=h\sum_{k=1}^{m}\int_{\Omega_k} f^h\eta\,dx,$$

в котором мы считаем $\eta(x,\,t)$ равной нулю при $t>mh-h$. Перепишем его в виде

$$-\int_{Q_T}\overline{u_h(x,\,t)}\,\overline{\eta_t(x,\,t)}\,dx\,dt-\int_{\Omega}\psi_0(x)\,\eta(x,\,0)\,dx+$$
$$+\int_h^T\int_{\Omega}\overline{a_{ij}^h(x,\,t)}\,\overline{\left(\frac{\partial u^h(x,\,t)}{\partial x_j}\right)}\,\overline{\left(\frac{\partial\eta(x,\,t)}{\partial x_l}\right)}\,dx\,dt=$$
$$=\int_h^T\int_{\Omega}\overline{f^h(x,\,t)}\,\overline{\eta(x,\,t)}\,dx\,dt,\qquad(16.16)$$

где черта сверху над какой-либо из функций означает, что в точке $(x,\,t)$ каждого слоя $x\in\overline{\Omega}$, $t\in[kh-h,\,kh]$ она равна своему значению в точке $(x,\,kh-h)$. Для непрерывно дифференцируемой функции $\eta(x,\,t)$ кусочно-непрерывные функции $\overline{\eta(x,\,t)}$ сходятся равномерно к $\eta(x,\,t)$, а функции $\overline{(\eta_t(x,\,t))}$ равномерно аппроксимируют ее производную $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Для функций же $\overline{a_{ij}^h(x,\,t)}$ и $\overline{f^h(x,\,t)}$ можно выбрать из $\{h_l\}$ подпоследовательность $\{h_{l_p}\}$, $p=1,\,2,\,\ldots$, по которой эти функции сходятся к $a_{ij}(x)$ и $f(x,\,t)$ почти всюду и сильно в $L_2(Q_T)$ соответственно *), причем $|a_{ij}^h|\leqslant\mu$. Ввиду этого

*) Последний интеграл левой части и интеграл правой части можно записать как интегралы по всему $Q_T$, положив в них $\eta(x,\,t)=0$ для $t\in[0,\,h)$. Это доопределение $\eta$, как легко понять, «исчезнет» в пределе, не сказавшись на других членах тождества.

и слабой сходимости $u^h(x, t)$ и $\overline{\left(\frac{\partial u^h(x, t)}{\partial x_k}\right)}$ к $u$ и $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ в (16.16) можно перейти к пределу по подпоследовательности $\{h_{l_p}\}$ и убедиться тем самым в том, что предельная для $u^h(x, t)$ функция $u(x, t)$ действительно удовлетворяет тождеству (16.14). Так доказывается наличие обобщенных решений из $W_2^{1,0}(Q_T)$. Благодаря единственности обобщенного решения $u$ из $W_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (16.5) вся совокупность $\overline{u^h}$ сходится к $u$. Используя (16.13), можно вывести и более сильное утверждение — о сильной сходимости $\overline{u^h}(x, t)$ к $u$ в $L_2(Q_T)$ (см. по этому поводу работу [$33_{19}$]) и тем самым доказать, что найденное нами решение $u$ фактически принадлежит $V_2(Q_T)$.

Переходим теперь к методу конечных разностей. Для уравнений параболического типа известны явные и неявные разностные схемы (см. [7, $33_{5,6,10}$, **14**, **28**, **49**, 61, $51_{1,2}$, 52, 49] и др.), приводящие к решениям краевых задач при определенных соотношениях между шагами решетки $\Delta x$ и $\Delta t$. Мы рассмотрим здесь лишь одну из неявных схем, аналогичную в определенном отношении методу Ротэ и сходящуюся при любом соотношении шагов $\Delta x$ и $\Delta t$. Доказательство ее сходимости весьма близко к только что приведенному доказательству сходимости приближений $u^h$ к обобщенному решению задачи (16.5). Покажем это на примере задачи (16.5), считая выполненным условие (16.6) и $\psi_0(x) \in L_2(\Omega)$, $f(x, t) \in L_2(Q_T)$. Разобьем все пространство $(x, t)$ плоскостями $x_i = k_i \Delta x$ $i = 1, \ldots, n$, $t = k_0 \Delta t$, $k_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, на элементарные ячейки — параллелепипеды со сторонами длины $\Delta x$ в направлении осей $x_k$ и длины $\Delta t$ в направлении оси $t$, причем ради несущественных упрощений в записи будем считать, что $m = \frac{T}{\Delta t}$ есть целое число. Обозначим через $Q_T^\Delta$ совокупнось всех элементарных ячеек, принадлежащих $\overline{Q_T}$, через $\Omega_k^\Delta$ — пересечение $Q_T^\Delta$ с плоскостью $t = k\Delta t$, через $S_k^\Delta$ — границу $\Omega_k^\Delta$. Эти же обозначения $Q_T^\Delta$, $\Omega_k^\Delta$ и $S_k^\Delta$ сохраним и за совокупностями вершин решетки (т. е. точек с координатами $(k_1 \Delta x, \ldots, k_n \Delta x, k_0 \Delta t)$, принадлежащими множествам $Q_T^\Delta$, $\Omega_k^\Delta$ и $S_k^\Delta$ соответственно). Уравнение (16.5) во всех внутренних для $Q_T^\Delta$ точках решетки заменим разностным

$$u_{\bar{t}}(x, t) - \left(a^{\Delta}_{ij}(x, t)\, u_{x_j}(x, t)\right)_{\bar{x}_i} = f^{\Delta}(x, t), \qquad (16.17)$$

в котором использованы следующие обозначения: $u_{\bar{t}}(x, t)$, как и выше, равно $\frac{1}{\Delta t}[u(x, t) - u(x, t - \Delta t)]$,

$$u_{x_i}(x, t) = \frac{1}{\Delta x}[u(x_1, \ldots, x_i + \Delta x, \ldots, x_n, t) - \\ - u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n t)],$$

$$u_{\bar{x}_i}(x; t) = \frac{1}{\Delta x}[u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n, t) - \\ - u(x_1, \ldots, x_i - \Delta x, \ldots, x_n, t)],$$

$$f^{\Delta}(x, t) = \frac{1}{(\Delta x)^n \Delta t} \int\limits_{x_1 - \Delta x}^{x_1} \ldots \int\limits_{x_n - \Delta x}^{x_n} \int\limits_{t - \Delta t}^{t} f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

и так же определяются $a^{\Delta}_{ij}(x, t)$ по $a_{ij}(x, t)$. Если $a_{ij}(x, t)$ **или** $f(x, t)$ являются непрерывными функциями $x$, $t$, то вместо $a^{\Delta}_{ij}(x, t)$ или $f^{\Delta}(x, t)$ можно брать их значение в точке решетки $(x, t)$. К соотношениям (16.17) присоединим равенства

$$u|_{S^{\Delta}_k} = 0, \; k = 1, \ldots, m, \text{ и } u(x, 0) = \psi^{\Delta}_0(x), \qquad (16.18)$$

где $\psi^{\Delta}_0(x) = (\Delta x)^{-n} \int\limits_{x_1 - \Delta x}^{x_1} \ldots \int\limits_{x_n - \Delta x}^{x_n} \psi_0(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$

во внутренних точках $\Omega_0$ и $\psi^{\Delta}_0(x) = 0$ в точках $S_0$.

Соотношения (16.17), (16.18) позволяют вычислить приближенное решение $u^{\Delta}$ во всех точках решетки $Q^{\Delta}_T$ последовательно слой за слоем $t = k\Delta t$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Они определяются однозначно (в случае общего уравнения это будет для всех $\Delta t$, не превосходящих некоторого числа $\tau_0$; в нашем частном примере это будет для всех $\Delta t$).

Действительно, для определения $u^{\Delta}$ на $k$-м слое (на $\Omega_k$) мы имеем систему линейных алгебраических уравнений, содержащую столько же уравнений, сколько и неизвестных (их число равно числу точек решетки $\Omega^{\Delta}_k \setminus S^{\Delta}_k$).

Соответствующая однородная система имеет вид

$$\frac{1}{\Delta t} u^{\Delta}(x, t) - \left(a^{\Delta}_{ij}(x, t)\, u^{\Delta}_{x_j}(x, t)\right)_{\bar{x}_i} = 0, \quad (x, t) \in \Omega^{\Delta}_k - S^{\Delta}_k. \tag{16.19}$$

Умножим это равенство на $(\Delta x)^n u^{\Delta}(x, t)$ и просуммируем по всем точкам $\Omega^{\Delta}_k$, считая $u^{\Delta}$ здесь и далее равной нулю на $S^{\Delta}_k$ и вне $\Omega^{\Delta}_k$. Второй член преобразуем согласно формуле «суммирование по частям»

$$(\Delta x)^n \sum_{\Omega^{\Delta}_k} v_{\bar{x}_i} u = -(\Delta x)^n \sum_{\Omega^{\Delta}_k} v u_{x_i}, \tag{16.20}$$

справедливой для любых функций $u$ и $v$, одна из которых равна нулю на $S^{\Delta}_k$ и вне $\Omega^{\Delta}_k$. Вывод формулы (16.20) дан в [33₃]; его легко сделать самостоятельно, используя формулу вычисления разностного отношения от произведения:

$$u(x)\, v(x))_{x_i} = u(x)\, v_{x_i}(x) + u_{x_i}(x)\, v(x_1, \ldots \\ \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n). \tag{16.21}$$

Итак, из (16.19) благодаря (16.20) имеем

$$(\Delta x)^n \sum_{\Omega^{\Delta}_k} \left[\frac{1}{\Delta t}(u^{\Delta})^2 + a^{\Delta}_{ij} u^{\Delta}_{x_j} u^{\Delta}_{x_i}\right] = 0,$$

и, следовательно, $u^{\Delta} \equiv 0$ на $\Omega^{\Delta}_k$, т. е. однородные системы, соответствующие системам (16.17), на каждом слое $\Omega_k$ имеют только тривиальные решения, и потому полные неоднородные системы однозначно разрешимы при любых правых частях. Для получения равномерной оценки для всех $u^{\Delta}$ при разных $\Delta x$ и $\Delta t$ умножим (16.17) на $2(\Delta x)^n \Delta t\, u^{\Delta}(x, t)$, просуммируем по всем внутренним точкам $Q^{\Delta}_{k_0 \Delta t}$ и преобразуем первый член согласно формуле (16.10), а второй — согласно формуле (16.20). Это даст

$$(\Delta x)^n \sum_{\Omega^{\Delta}_{k_0}} (u^{\Delta})^2 - (\Delta x)^n \sum_{\Omega^{\Delta}_0} \psi_0^2 + (\Delta t)^2 (\Delta x)^n \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{\Omega^{\Delta}_k} (u^{\Delta}_{\bar{t}})^2 + \\ + 2\Delta t (\Delta x)^n \sum_{\Omega^{\Delta}_k} a^{\Delta}_{ij} u^{\Delta}_{x_j} u^{\Delta}_{x_i} = 2\Delta t (\Delta x)^n \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{\Omega^{\Delta}_k} f^{\Delta} u^{\Delta}. \tag{16.22}$$

Отсюда нетрудно получить основную оценку

$$\max_{0 \leqslant k_0 \leqslant m} (\Delta x)^n \sum_{\Omega^\Delta_{k_0}} (u^\Delta)^2 + (\Delta t)^2 (\Delta x)^n \sum_{k=1}^{m} \sum_{\Omega^\Delta_k} (u^\Delta_t)^2 + \\ + \Delta t (\Delta x)^n \sum_{k=1}^{m} \sum_{\Omega^\Delta_k} (u^\Delta_x)^2 \leqslant c \qquad (16.23)$$

с постоянной $c$, зависящей лишь от $\|f\|_{2, Q_T}$, $\|\psi_0\|_{2, \Omega}$, чисел $\nu$ и $\mu$ и высоты $T$, и общей, тем самым для всего семейства решений $\{u^\Delta\}$ при разных $\Delta x$ и $\Delta t$. Оценка (16.23) дает возможность выполнить предельный переход $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ и доказать, что пределом $\{u^\Delta\}$ является обобщенное решение задачи. Подробное описание этого с необходимыми вспомогательными предложениями об интерполяции функций на сетках и теоремах вложения для сеточных функций дано в § 6 главы I, § 2 главы III и § 2 главы IV книги [33$_3$]. В общих чертах это выглядит так: по каждому из $u^\Delta$ строится непрерывная в $\overline{Q}^\Delta_T$ функция $u^{\Delta'}(x, t)$, совпадающая в вершинах сетки с $u^\Delta$, линейная по каждому переменному при фиксированных остальных и равная нулю для $x \overline{\in} \Omega^\Delta_k$, $t \overline{\in} [0, m\Delta t]$. Функции $u^{\Delta'}(x, t)$ суть элементы $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(Q_T)$. В силу (16.23) для них равномерно ограничены нормы

$$|u^{\Delta'}|_{Q_T} \leqslant c. \qquad (16.24)$$

Благодаря этому из $\{u^{\Delta'}\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u^{\Delta'_k}\}$ с $\Delta_k x$ и $\Delta_k t \to 0$, сходящуюся слабо в $W^{1,0}_2(Q_T)$ в некоторой функции $u(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_2(Q_T)$. Эта функция $u$ и есть обобщенное решение задачи (16.5). Чтобы доказать это, введем иную интерполяцию функций $u^\Delta$, дающую кусочно-постоянные функции $\overline{u^{\Delta_k}}(x, t)$, равные на каждой элементарной ячейке сетки их значениям в одной из вершин ячейки (пусть для определенности в вершине, имеющей наименьшие координаты). Доказано, что $\overline{u^{\Delta_k}}(x, t)$ сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ к той же функции $u(x, t)$, что и $u^{\Delta'_k}(x, t)$, а $\left(u^{\Delta_k}_{x_i}\right)$, $i = 1, \ldots, n$, сходятся слабо в $L_2(Q_T)$

к ее производным $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Возьмем произвольную гладкую функцию $\eta(x, t)$, равную нулю вблизи $S_T$ и при $t \geqslant T-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и умножим на $\Delta t(\Delta x)^n \eta(x, t)$ обе части уравнений (16.17). После этого просуммируем полученные равенства по всем внутренним точкам $(x, t)$ решетки из $Q_T^\Delta$ и в первом и втором члене произведем суммирование по частям в соответствии с формулами (16.15) и (16.20). Это даст нам тождество

$$-\Delta t(\Delta x)^n \sum_{k=0}^{m} \sum_{\Omega_k^\Delta} u^\Delta \eta_t - (\Delta x)^n \sum_{\Omega_0^\Delta} \psi_0 \eta(x, 0) +$$

$$+\Delta t(\Delta x)^n \sum_{k=1}^{m} \sum_{\Omega_k^\Delta} a_{ij}^\Delta u_{x_j}^\Delta \eta_{x_i} = \Delta t(\Delta x)^n \sum_{k=1}^{m} \sum_{\Omega_k^\Delta} f^\Delta \eta, \quad (16.25)$$

которое можно, пользуясь указанной выше кусочно-постоянной интерполяцией, записать в виде

$$\int_{Q_T} -\overline{u^\Delta}\,\overline{(\eta_t)}\,dx\,dt - \int_\Omega \overline{\psi_0}\,\overline{\eta}(x, 0)\,dx +$$

$$+\int_{\Delta t}^{T} \int_\Omega \overline{a_{ij}^\Delta}\,\overline{\left(u_{x_j}^\Delta\right)}\,\overline{\left(\eta_{x_i}\right)}\,dx\,dt = \int_{\Delta t}^{T} \int_\Omega \overline{f^\Delta}\,\overline{\eta}\,dx\,dt. \quad (16.26)$$

В этом тождестве можно перейти к пределу по выбранной выше подпоследовательности $\Delta_k$, ибо $\overline{u^{\Delta_k}}$ и $\overline{\left(u_{x_i}^{\Delta_k}\right)}$ сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ к $u$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ соответственно, $\overline{\eta}$, $\overline{(\eta_{x_i})}$ и $\overline{(\eta_t)}$ сходятся равномерно в $\overline{Q_T}$ к $\eta$, $\frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\overline{a_{ij}^\Delta}$ (точнее, некоторая их подпоследовательность), оставаясь равномерно ограниченными, сходятся почти всюду к $a_{ij}$, $\overline{\psi_0^\Delta}$ сходятся в $L_2(\Omega)$ к $\psi_0$, а $\overline{f^\Delta}$ сходятся в $L_2(Q_T)$ к $f$. В пределе придем к тождеству (16.14) для $u$ и тем самым убедимся, что $u$ есть обобщенное решение задачи (16.5). В силу теоремы единственности для обобщенных решений задачи (16.5) в классе $W_2^{1,0}(Q_T)$ можно утверждать, что все множество приближенных решений $\{u^\Delta\}$ имеет своим пределом при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$ функцию $u$.

Рассмотренная нами разностная схема, равно как и способ доказательства ее сходимости, применимы и к общим параболическим уравнениям. Известно, что метод конечных разностей позволяет проследить за улучшением дифференциальных свойств решений в связи с улучшением дифференциальных свойств известных функций, определяющих задачу. Устанавливаемые на этом пути зависимости не являются точными, но недалеки от них. Как это делается, читатель может познакомиться по книге [$33_3$].

## § 17. О методе Фурье

Рассмотрим задачу

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - \mathscr{M}u = 0, \quad u|_{S_t} = 0, \quad u|_{t=0} = \psi_0(x), \tag{17.1}$$

где $\mathscr{M}u = \left(a_{ij}(x)\, u_{x_j}\right)_{x_i} - a(x)\, u$.

Как хорошо известно, формально ее решение можно представить в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} \psi_k(x), \tag{17.2}$$

в котором $a_k = (\psi_0, \psi_k) \equiv \int\limits_{\Omega} \psi_0 \psi_k\, dx$, а $\psi_k(x)$ и $-\lambda_k$ суть ортонормированные функции и соответствующие им собственные числа эллиптической задачи:

$$\mathscr{M}\psi_k = -\lambda_k \psi_k, \quad \psi_k|_S = 0. \tag{17.3}$$

Каждый член ряда (17.2) есть решение уравнения (17.1), удовлетворяющее граничному условию, а весь ряд при $t = 0$ есть разложение функции $\psi_0(x)$ по функциям $\psi_k(x)$. Для обоснования метода Фурье надо исследовать сходимость рядов (17.2).

В зависимости от характера сходимости ряда (17.2) его сумма $u(x, t)$ будет обобщенным решением из того или иного функционального пространства. Так, например, если ряд (17.2) сходится в $L_2(Q_T)$, то $u(x, t)$ будет обобщенным решением задачи (17.1) из $L_2(Q_T)$, если в $W_2^{1,0}(Q_T)$, то обобщенным решением из $W_2^{1,0}(Q_T)$ и т. д. Исследование сходимости рядов (17.2) упирается в изучение разложений

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x), \quad a_k=(\varphi, \psi_k), \tag{17.4}$$

произвольных функций $\varphi(x)$ в ряды по собственным функциям $\psi_k$.

Сходимость (17.4) в $L_2(\Omega)$ для произвольной функции $\varphi(x)$ из $L_2(\Omega)$ есть следствие общих фактов теории самосопряженных операторов и доказанной К. Фридрихсом в середине 30-х годов теоремы о возможности расширения оператора $M$, заданного первоначально на множестве гладких функций, равных нулю на $S$, до самосопряженного. Из этих же предложений легко выводится и сходимость рядов (17.4) в $W_2^1(\Omega)$ для любой функции $\varphi(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. В свою очередь эти предложения явились развитием исследований по сходимости в $L_2(\Omega)$ разложений по собственным функциям оператора Лапласа и одномерного дифференциального оператора $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+q(x)$ (см. [7₂]).

Сходимость рядов (17.4) в пространствах $W_2^m(\Omega)$ при любом целом $m$ была исследована в [33₃]. Именно, в главе II [33₃] доказана следующая теорема.

Теорема 17.1. *Если* $\varphi(x)$ *есть элемент* $W_2^m(\Omega)$, $m\geqslant 0$, *удовлетворяющий граничным условиям* $\varphi|_S=\mathcal{M}\varphi|_S=\ldots\mathcal{M}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\varphi|_S=0$ (*при* $m=0$ *все условия отпадают, а при* $m=1$ *сохраняется первое*: $\varphi|_S=0$), *то ряд* (17.4) *сходится к ней в норме* $W_2^m(\Omega)$. *При этом граница* $S$ *и коэффициенты* $a_{ij}(x)$ *и* $a(x)$ *предполагаются обладающими некоторой гладкостью.*

Легко видеть, что результат точный и обратимый (т. е. из сходимости ряда (17.4) в пространстве $W_2^m(\Omega)$ следует, что его сумма $\varphi(x)$ обладает указанными в теореме 17.1 свойствами). Он следует из двух доказанных в [33₃] предположений: 1) для суммы любого ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x)$

справедливы оценки

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x) \right\|_{2,\Omega}^{(m)} \leqslant c_m \left[ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left( |\lambda_k|^m + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \tag{17.5}$$

и 2) для любой функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 17.1, коэффициенты $a_k = (\varphi, \psi_k)$ подчиняются неравенствам

$$|a_k| \leqslant c'_m \alpha_k |\lambda_k|^{-\frac{m}{2}} \text{ с } \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2} \leqslant \|\varphi\|_{2,\Omega}^{(m)} \leqslant c''_m. \tag{17.6}$$

Постоянные $c_m$, $c'_m$, $c''_m$ зависят лишь от $m$, $S$ и коэффициентов $\mathcal{M}$.

Числа $\lambda_k$, как известно, стремятся к $+\infty$ при $k \to \infty$. Ввиду этого и оценок (17.5), (17.6) ряд (17.2) будет сходиться при $t > 0$ в норме любого $W_2^m(\Omega)$, $m \geqslant 0$ (лишь бы $S$ и $a_{ij}$, $a$ были достаточно гладкими), если только $\varphi_0(x) \in L_2(\Omega)$. Его же сходимость при $t = 0$ (и тем самым при $t \geqslant 0$) определяется свойствами функции $\psi_0(x)$ так, как сформулировано в теореме 17.1.

З а м е ч а н и е 17.1. Заметим, что если ограничиться сходимостью рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x)$ в $W_2^m(\Omega')$ для любой строго внутренней подобласти $\Omega'$ области $\Omega$, то на границу $S$ при этом не надо накладывать каких-либо условий гладкости. Действительно, при выводе неравенств (17.6) используется лишь формула интегрирования по частям, а неравенства (17.5) заменяются неравенствами

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x) \zeta(x) \right\|_{2,\Omega}^{(m)} \leqslant c_m(|\zeta_x|) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left( |\lambda_k|^m + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{17.7}$$

где $\zeta(x)$ есть произвольная достаточно гладкая функция, равная нулю вблизи всей границы $S$, при выводе которых вообще не используется никаких свойств $S$ (по поводу неравенств (17.7) см., например, § 7 главы III книги [I]).

Исследованию сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x)$ в областях с плохими границами для случая, когда $\mathcal{M}$ есть оператор

Лапласа, посвящена работа [24]. В работах [$35_{1,2}$] исследуется вопрос о сходимости рядов (17.2) в $L_2(\Omega)$ для случая $\mathcal{M}u=(a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i}+b_i(x)u_{x_i}+a(x)u$. Для исследования их сходимости в пространствах $W_2^m(\Omega)$ надо учесть неравенства

$$\|u(x)\|_{2,\Omega}^{(2m)}\leqslant c_m\left[\|\mathcal{M}^m u\|_{2,\Omega}+\|u\|_{2,\Omega}\right], \tag{17.7'}$$

$$\|u(x)\|_{2,\Omega}^{(2m+1)}\leqslant c_m\left[|(\mathcal{M}^{m+1}u,\ \mathcal{M}^m u)|+\|u\|_{2,\Omega}\right], \tag{17.8}$$

доказанные и для несамосопряженных $\mathcal{M}$ и для различных однородных краевых условий (см. [$33_3$], глава II). Применительно к рядам Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\psi_k(x)$ они дают оценку $\left\|\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\psi_k\right\|_{2,\Omega}^{(2m)}$ через $\left\|\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\lambda_k^m\psi_k\right\|_{2,\Omega}$ и $\left\|\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\psi_k\right\|_{2,\Omega}$ и $\left\|\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\psi_k\right\|_{2,\Omega}^{(2m+1)}$ через $\left|\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\lambda_k^{m+1}\varphi_k,\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\lambda_k^m\psi_k\right)\right|$ и $\left\|\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\psi_k\right\|_{2,\Omega}$.

Метод Фурье дает хорошее представление и для решения неоднородного уравнения

$$u_t-\mathcal{M}u=f(x,\ t), \tag{17.9}$$

если только $\mathcal{M}$, как и в уравнении (17.1), есть формально самосопряженный оператор с коэффициентами, не зависящими от $t$. Решение этого уравнения, равное нулю на $\Gamma_T$, дается рядом

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x)\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}f_k(\tau)\,d\tau, \tag{17.10}$$

где $\psi_k(x)$ и $\lambda$ имеют прежний смысл, а $f_k(t)=(f(x,\ t),\ \psi_k(x))$. Сходимость таких рядов в $W_2^m(\Omega)$ исследуется с помощью предложений, сформулированных выше для рядов

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x)$. Аналогичные исследования проведены в [33₃] и для краевого условия $\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u|_S = a_{ij}(x) u_{x_j} \cos(\mathrm{n}, x_i) + \sigma u|_S = 0$, в котором $\mathrm{n}$ есть нормаль к $S$.

## § 18. О методе преобразования Лапласа

Для решения задачи Коши и краевых задач для уравнений

$$u_t - \mathcal{M} u \equiv u_t - \left(a_{ij}(x) u_{x_j} + a_i(x) u\right)_{x_i} + b_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x, t) \quad (18.1)$$

с коэффициентами, не зависящими от $t$, нередко используют преобразование Лапласа по $t$, сводящее их к соответствующим задачам эллиптического типа с комплексным параметром $\lambda$. Опишем его основную схему на примере первой краевой задачи

$$u_t - \mathcal{M} u = f(x, t), \quad u|_{S_\infty} = 0, \quad u|_{t=0} = \psi_0(x) \quad (18.2)$$

в полубесконечном цилиндре $Q = \Omega \times (0, \infty)$.

Умножим обе части уравнения на $e^{-\lambda t}$, где $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ — комплексное число с $\lambda_1 > 0$, и затем проинтегрируем по $t$ в пределах от 0 до $\infty$. Считая все интегралы сходящимися, преобразуем первый из них так:

$$\int_0^\infty u_t e^{-\lambda t}\, dt = u e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty + \lambda \int_0^\infty u e^{-\lambda t}\, dt. \quad (18.3)$$

Обозначим преобразования Лапласа от $u$ и $f$ через

$$\tilde{u}(x, \lambda) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-\lambda t}\, dt \quad \text{и} \quad \tilde{f}(x, \lambda) = \int_0^\infty f(x, t) e^{-\lambda t}\, dt$$

и учтем, что в силу предполагаемой сходимости интегралов $ue^{-\lambda t} \to 0$ при $t \to \infty$, а в силу начального условия $ue^{-\lambda t} \to \psi_0$

при $t \to 0$. Так что для $\tilde{u}$ получается уравнение

$$\lambda \tilde{u} - \mathcal{M} \tilde{u} = \tilde{f} + \psi_0. \tag{18.4}$$

Кроме того, в силу $u(x, t)\big|_{S_\infty} = 0$ оно должно удовлетворять граничному условию

$$\tilde{u}\big|_S = 0. \tag{18.5}$$

Известно, что задача (18.4), (18.5) однозначно разрешима для всех значений $\lambda$ на комплексной плоскости $\lambda$, кроме спектральных значений, которые в случае конечности области $\Omega$ (и приличных свойств коэффициентов) образуют счетное множество, уходящее на $-\infty$. Иными словами, оператор $\mathcal{M} - \lambda$ имеет обратный в $L_2(\Omega)$ для всех $\lambda$, кроме спектральных. Этот обратный оператор $(\mathcal{M} - \lambda)^{-1}$ называется резольвентой оператора $\mathcal{M}$, и с его помощью решение задачи (18.4), (18.5) представляется в виде

$$\tilde{u}(x, \lambda) = -(\mathcal{M} - \lambda)^{-1} \tilde{f} - (\mathcal{M} - \lambda)^{-1} \psi_0. \tag{18.6}$$

Если $\tilde{u}(x, \lambda)$ достаточно быстро убывает при $\lambda_2 \to \pm\infty$, когда $\lambda_1 \geqslant 0$ закреплено, то по нему $u(x, t)$ восстанавливается с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} \tilde{u}(x, \lambda) e^{\lambda t} \, d\lambda. \tag{18.6$'$}$$

Формула (18.6′) и дает искомое решение задачи (18.3). Такова формальная схема метода преобразования Лапласа. В ней функция $u(x, t)$, а также $f(x, t)$ фактически продолжаются нулями в область отрицательных значений $t$. Это позволяет брать $\lambda_1 > 0$ и добиваться сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty u e^{-\lambda t} \, dt$ даже в тех случаях, когда решение $u(x, t)$ растет при $t \to +\infty$. Однако такое продолжение не очень хорошо при $\psi_0(x) \not\equiv 0$, ибо оно приводит к функции, разрывной при $t = 0$, а преобразования Лапласа от негладких функций убывают при $\lambda_2 \to \pm\infty$ довольно медленно (и наоборот, медленное убывание $\tilde{u}$ порождает негладкость $u$).

Чтобы избежать такой «порчи» задачи (18.3), лучше ее предварительно свести к нулевому начальному условию (а если можно, то и к равенству нулю $f$ и ее производных по $t$ при $t=0$) и после этого, продолжив $u$ и $f$ нулями в область $t<0$, применить преобразование Лапласа.

Обоснование метода Лапласа, по существу, состоит в изучении свойств гладкости решений $\tilde{u}(x, \lambda)$ задачи (18.4), (18.5) по $x$ и характера убывания $\tilde{u}(x, \lambda)$ (как элемента какого-либо функционального пространства функций $x$) при $\lambda_2 \to \pm\infty$ и закрепленном $\lambda_1 \geqslant 0$. Это было сделано применительно к уравнениям параболического и гиперболического типов, а также к сильно параболическим и сильно гиперболическим системам одним из авторов (в [$33_3$] подробно изложен гиперболический случай) и применительно к параболическому случаю авторами **[33]**. Этот метод анализируется также во многих работах по абстрактным уравнениям (14.1) с операторами $S$, не зависящими от $t$ (см. [**23**$_{1,2}$, **37**, **58**, $57_{1,2}$, 38 и др.]).

ГЛАВА IV

# ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ГЛАДКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этой главе мы рассматриваем задачу Коши и основные краевые задачи для параболических уравнений второго порядка в основном с гладкими коэффициентами.

Эти задачи рассматриваются здесь с помощью двух различных методов. В §§ 1—9 излагается метод, связанный с точными оценками решения через данные задачи и с построением специального оператора, который является аналогом регуляризатора в теории эллиптических систем [$4_1$, 18] и позволяет решить задачу Коши или краевую задачу «в малом» по $t$. После этого, используя несколько раз теорему о разрешимости задачи «в малом», можно построить решение в любом конечном промежутке $0 < t < T$, не теряя при этом точности результата.

С помощью этого метода мы изучаем задачу Коши, первую краевую задачу и задачу с косой производной в классах $H^{l, \frac{l}{2}}$ и $W_q^{2m, m}$. В основе построения регуляризатора лежит идея Корна—Шаудера о «замораживании» коэффициентов оператора $L$, и поэтому этот метод требует детального изучения так называемых модельных задач: задачи Коши и краевых задач в полупространстве для уравнений с постоянными коэффициентами без младших членов. Линейным преобразованием координат такие задачи сводятся к аналогичным задачам для уравнения теплопроводности, которые рассматриваются в § 1. Этот параграф носит вспомогательный характер. В нем приводятся хорошо известные представления через тепловые потенциалы решений задачи Коши и первой краевой задачи. Кроме того, в § 1 выводится аналогичное представление для задачи с косой производной, впервые приведенное в работе [45]. В §§ 2 и 3 для всех этих потенциалов доказываются точные оценки в нормах $H^{l, \frac{l}{2}}$ и $W_q^{2m, m}$. В § 4 содержатся некоторые определения и вспомогательные предложения из теории функций, необходимые для дальнейшего. Основные результаты о разрешимости задачи Коши и краевых задач для параболических уравнений второго порядка в классах $H^{l, \frac{l}{2}}$ формулируются в § 5 и доказываются в §§ 6—8. В § 9 на примере первой краевой задачи показано, каким образом с помощью общей схемы, изложенной в предыдущих параграфах, доказываются аналогичные результаты в пространствах $W_q^{2m, m}$. § 10 посвящен точным оценкам решения в подобластях $Q' \subset Q_T$, как чисто внутренних, так и прилегающих к нижнему основанию или боковой поверхности цилиндра $Q_T$.

Следует подчеркнуть, что с помощью указанного метода доказывается существование решений задачи Коши и краевых задач в классах функций, у которых все производные, входящие в уравнение, или даже производные более высокого порядка гёльдеровы или суммируемы со степенью $q > 1$ во всей области $\bar{Q}_T$.

Другой метод, излагаемый в §§ 11—17,—это метод теории потенциала для уравнений с переменными коэффициентами. Центральным моментом в нем является построение фундаментального решения $Z(x, \xi, t, \tau)$ параболического уравнения вида (2.2) главы I. Впервые это было сделано в работах Ф. Дресселя [11], использовавшего для построения фундаментального решения классический метод Э. Леви [35]. Суть этого метода состоит в том, что фундаментальное решение разыскивается в виде суммы двух слагаемых: фундаментального решения $Z_0$ уравнения без младших членов и с замороженными старшими коэффициентами (оно выписывается в явном виде и является главным членом по порядку особенности в точке $x = \xi$, $t = \tau$) и добавочного слагаемого в виде интегрального оператора с ядром $Z_0$ и некоторой плотностью $Q$, определяемой из интегрального уравнения. В параболическом случае это интегральное уравнение оказывается вольтерровским по переменной $t$ и, следовательно, решается методом последовательных приближений.

Ограничения, которые приходится накладывать на коэффициенты при построении фундаментального решения, во многом зависят от выбора главного члена $Z_0$. Так, например, если в качестве $Z_0$ выбрать фундаментальное решение уравнения, коэффициенты которого заморожены в точке $(x, t)$, то приходится требовать, чтобы старшие коэффициенты $a_{ij}$ оператора $L$ имели производные $\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}$, удовлетворяющие условию Гёльдера. Именно при этих условиях в [11] построено фундаментальное решение $Z$ и показано, что оно имеет такую же особенность в точке $z=\xi$, $t=\tau$, что и функция $Z_0$. Если в качестве $Z_0$ выбрать фундаментальное решение уравнения, коэффициенты которого заморожены в точке $(\xi, \tau)$, то тогда все дальнейшие построения возможны при гёльдеровских $a_{ij}$. Это сделано в работах В. Погожельского [$47_{1,3}$] (для эллиптических уравнений такой прием был еще раньше предложен Л. Лихтенштейном; см. по этому поводу его работу [38], а также монографию К. Миранды «Уравнения с частными производными эллиптического типа»). Замораживая коэффициенты только по $x$, можно отказаться от условия Гёльдера по $t$ для $a_{ij}$ [$68_{2,\text{II}}$]. Дальнейшее значительное ослабление условий на $a_{ij}$ достигнуто в [40].

Построению фундаментального решения посвящен § 11 настоящей главы. Ради некоторых упрощений изложения мы не снижаем до минимума ограничения на $a_{ij}$ и предполагаем, что эти функции удовлетворяют условию Гёльдера по всем своим аргументам. При этих условиях мы доказываем точные оценки для производных $D_xZ$, $D_x^2Z$, $D_tZ$ [$68_1$] и их разностей по $x$ и $t$. Как указано в [40], точные оценки разностей были впервые получены в неопубликованной работе С. Д. Ивасишена.

В § 14 с помощью функции $Z$ исследуется задача Коши в классе ограниченных функций и еще раз другим методом доказываются точные оценки ее решения в нормах $H^{l, \frac{l}{2}}$.

В §§ 15 и 16 излагается теория потенциала для первой и второй краевых задач в областях с ограниченной границей $S$. Эта теория является обобщением классической теории тепловых потенциалов [$47_2$, $44_{1,2}$, $60_2$]. Она позволяет доказывать классическую разрешимость краевых задач, предполагая только непрерывность граничных значений. Правда, при использовании потенциала двойного слоя для решения первой краевой задачи приходится накладывать на старшие коэффициенты уравнения дополнительные условия: дифференцируемость этих коэффициентов по $x_k$ и непрерывность по Гёльдеру их производных. В. Погожельский [$47_4$] избавился от этих дополнительных ограничений, построив функцию Грина для первой краевой задачи с помощью потенциала простого слоя. Мы излагаем этот прием В. Погожельского в § 16.

Наконец, в § 17 излагаются оценки С. Н. Бернштейна первых производных $u_{x_k}$ решений первой краевой задачи.

## § 1. Уравнение теплопроводности и тепловые потенциалы

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые модельные задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \Delta u(x, t) = f(x, t). \tag{1.1}$$

Начнем с рассмотрения задачи Коши

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad (t > 0, -\infty < x_i < +\infty, \ i = 1, \dots, n), \\ u|_{t=0} = \varphi(x).\end{gathered} \tag{1.2}$$

При некоторых естественных ограничениях на функции $f$ и $\varphi$ решение этой задачи явно выписывается через потенциалы, плотности которых просто выражаются через функции $f$ и $\varphi$, а ядром служит фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$\Gamma(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad \left(x^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

которое для уравнения теплопроводности играет такую же важную роль, как функция $\dfrac{1}{|x|^{n-2}}$ для уравнения Лапласа. Образованные с помощью функции (1.3) потенциалы называются тепловыми потенциалами. Сейчас мы рассмотрим те из них, которые решают задачу Коши (1.2). Это — тепловой объемный потенциал

$$(\Gamma * f) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_n} \Gamma(x-y,\ t-\tau) f(y,\ \tau)\,dy, \tag{1.4}$$

играющий роль ньютонова потенциала для уравнения (1.1), и потенциал

$$(\Gamma *_1 \varphi) = \int_{E_n} \Gamma(x-y,\ t)\,\varphi(y)\,dy. \tag{1.5}$$

Интегралы (1.4) и (1.5) сходятся, если функции $f$ и $\varphi$ удовлетворяют определенным условиям на бесконечности: они не слишком быстро растут при $|x| \to \infty$ (не быстрее $e^{cx^2}$) и функция $f$ убывает степенным образом при $t \to -\infty$. Так как результаты этого и следующих двух параграфов будут ниже применяться в основном к потенциалам с финитными плотностями, мы не будем рассматривать растущих $f$ и $\varphi$.

Потенциал (1.5) при $t > 0$ является решением однородного уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)(\Gamma *_1 \varphi) = 0.$$

Кроме того, если функция $\varphi$ непрерывна в точке $x$, то

$$\lim_{t\to 0} (\Gamma *_1 \varphi) = \varphi(x). \tag{1.6}$$

Для того чтобы это доказать, воспользуемся следующим легко проверяемым свойством функции $\Gamma$: при $t > 0$

$$\int_{E_n} D_t^r D_x^s \Gamma(x,\ t)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{если } r = 0,\ s = 0, \\ 0, & \text{если } r + s \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

Из этого свойства вытекает, что

$$\lim_{t\to 0} (\Gamma *_1 \varphi) = \lim_{t\to 0} \int_{E_n} \Gamma(x-y,\ t)\,[\varphi(y) - \varphi(x)]\,dy + \varphi(x) =$$

$$= (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \lim_{t\to 0} \int_{E_n} e^{-\frac{z^2}{4}} \left[\varphi\left(x - z\sqrt{t}\right) - \varphi(x)\right] dz + \varphi(x) = \varphi(x).$$

Рассмотрим теперь объемный потенциал

$$g(x,\ t)=(\Gamma * f).$$

Ядра $\Gamma(x-y,\ t-\tau)$ и $\frac{\partial \Gamma(x-y,\ t-\tau)}{\partial x_i}$ имеют слабые (локально интегрируемые) особенности в точке $y=x$, $t=\tau$ и потому

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} * f\right).$$

Дифференцировать объемный потенциал два раза по $x$ или один раз по $t$ таким образом уже нельзя. Вычислим эти производные, предполагая, что $f(x,\ t)$ удовлетворяет условию Гёльдера по переменным $x$, а по $t$ непрерывна. Рассмотрим последовательность функций

$$g_h(x,\ t)=\int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_{E_n} \Gamma(x-y,\ t-\tau) f(y,\ \tau)\, dy.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{h\to 0} g_h(x,\ t)=g(x,\ t)$. Докажем существование предела у последовательности $\frac{\partial g_h}{\partial t}$. Имеем

$$\frac{\partial g_h}{\partial t}=\int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_{E_n} \frac{\partial \Gamma(x-y,\ t-\tau)}{\partial t} f(y,\ \tau)\, dy+\int_{E_n} \Gamma(x-y,\ h) f(y,\ t-h)\, dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_{E_n} \frac{\partial \Gamma(x-y,\ t-\tau)}{\partial t}[f(y,\ \tau)-f(x,\ \tau)]\, dy+\int_{E_n} \Gamma(x-y,\ h) f(y,\ t-h)\, dy.$$

Принимая во внимание (1.6), заключаем, что

$$\frac{\partial g}{\partial t}=\lim_{h\to 0}\frac{\partial g_h}{\partial t}=$$

$$=\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_n} \frac{\partial \Gamma(x-y,\ t-\tau)}{\partial t}[f(y,\ \tau)-f(x,\ \tau)]\, dy+f(x,\ t). \tag{1.8}$$

Аналогично.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{h\to 0} \frac{\partial^2 g_h}{\partial x_i \partial x_j} =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_n} \frac{\partial^2 \Gamma(x-y, t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} [f(y, \tau) - f(x, \tau)]\, dy. \quad (1.9)$$

Из двух последних соотношений вытекает, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)(\Gamma * f) = f. \quad (1.10)$$

Если функция $f$ удовлетворяет условию Гёльдера по переменной $t$, то для $\frac{\partial g}{\partial t}$ справедливо представление

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_n} \frac{\partial \Gamma(x-y, t-\tau)}{\partial t} [f(y, \tau) - f(y, t)]\, dy. \quad (1.11)$$

Выразим через потенциалы (1.4), (1.5) решение задачи Коши $u(x, t)$. Предположим, что функция $f$ удовлетворяет условию Гёльдера, а $\varphi$ непрерывна. Продолжим $f(x, t)$ каким-нибудь образом в область $t < 0$. Функция

$$v(x, t) = u(x, t) - g(x, t)$$

в силу (1.10) должна быть решением задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0,$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x) - g(x, 0) \equiv \psi(x).$$

Следовательно,

$$v(x, t) = (\Gamma *_1 \psi)$$

и, таким образом,

$$u(x, t) = (\Gamma * f) + (\Gamma *_1 \psi), \quad \psi = \varphi - (\Gamma * f)|_{t=0}. \quad (1.12)$$

Чаще всего мы будем пользоваться этой формулой, полагая функцию $f$ в области $t < 0$ равной нулю. В этом случае

$$g(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{E_n} \Gamma(x-y, t-\tau) f(y, \tau)\, dy,$$

$$\psi(x) = \varphi(x)$$

и

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{E_n} \Gamma(x-y, t-\tau) f(y, \tau)\, dy + (\Gamma *_1 \varphi). \quad (1.13)$$

Кроме задачи Коши, мы рассмотрим в этом параграфе две краевые задачи для уравнения теплопроводности в области $x_n > 0$, $t > 0$ пространства $E_{n+1}$: первую краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x_n=0} = \Phi_1(x', t) \quad (1.14)$$

и задачу с косой производной

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0,$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\bigg|_{x_n=0} = \Phi_2(x', t). \quad (1.15)$$

Здесь $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $b_i$ — некоторые вещественные постоянные, причем $b_n \neq 0$. Мы будем считать, что $b_n > 0$.

Обе задачи сформулированы для однородного уравнения теплопроводности и однородных начальных условий, так как неоднородности в уравнении и начальных условиях снимаются с помощью потенциалов (1.4), (1.5).

Введем обозначения

$$(G *_2 \Phi^0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{E_{n-1}} G(x'-y', x_n, t-\tau)\, \Phi^0(y', \tau)\, dy',$$

$$\Phi^0 = \begin{cases} \Phi & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Решением задачи (1.17) служит тепловой потенциал двойного слоя

$$u = -2\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_n} *_2 \Phi_1^0\right) =$$

$$= -2\int_0^t d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{\partial\Gamma(x'-y', x_n, t-\tau)}{\partial x_n}\Phi_1(y', \tau)\,dy'. \qquad (1.16)$$

Для того чтобы проверить это, достаточно убедиться в том, что он удовлетворяет нужным краевым условиям при $x_n = 0$. Так как

$$-2\int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{\partial\Gamma(x', x_n, \tau)}{\partial x_n}\,dx' =$$

$$= \frac{x_n}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-\frac{x_n^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{\frac{n+2}{2}}}\int_{E_{n-1}} e^{-\frac{x'^2}{4\tau}}\,dx' = 1, \qquad (1.17)$$

то для любой непрерывной в точке $(x', t)$ функции $\Phi(x', t)$ справедливо следующее соотношение:

$$-2\lim_{x_n\to 0}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_n} *_2 \Phi\right) =$$

$$= \Phi(x', t) - 2\lim_{x_n\to 0}\int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{\partial\Gamma(y', x_n, \tau)}{\partial x_n}\times$$

$$\times[\Phi(x'-y', t-\tau) - \Phi(x', t)]\,dy' = \Phi(x', t). \qquad (1.18)$$

Следовательно, потенциал (1.16) удовлетворяет нужному краевому условию при любой непрерывной $\Phi_1$.

Решение задачи (1.15) также выражается в виде потенциала

$$v = \left(G *_2 \Phi_2^0\right).$$

Чтобы вычислить ядро $G$ этого потенциала, совершим в (1.15) преобразование Фурье по переменным $x'$ и преобразование Лапласа по $t$. Преобразованные таким образом функции будем обозначать знаком $\sim$ сверху:

$$\tilde{f}(\xi, p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty e^{-pt}\,dt \int_{E_{n-1}} e^{-ix'\zeta} f(x', t)\,dx' \tag{1.19}$$

$\left(\text{здесь и ниже } x'\zeta = \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_\alpha \zeta_\alpha\right)$.

При таком преобразовании задача (1.18) перейдет в следующую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения по переменной $x_n$:

$$\frac{d^2\tilde{v}}{dx_n^2} - (p + \zeta^2)\tilde{v} = 0, \tag{1.20}$$

$$b_n \frac{d\tilde{v}}{dx_n} + i \sum_{\alpha=1}^{n-1} b_\alpha \zeta_\alpha \tilde{v} = \tilde{\Phi}_2^0. \tag{1.21}$$

В этой задаче пока не хватает одного условия для функции $\tilde{v}$, которое может быть сформулировано с помощью следующих соображений. Функция $v$ выражается через $\tilde{v}$ с помощью интегрального преобразования, обратного по отношению к (1.19), т. е.

$$v(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} 2\pi i} \int_{E_{n-1}} e^{ix'\zeta}\,d\zeta \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{v}(\zeta, p, x_n) e^{pt}\,dp, \tag{1.22}$$

если интеграл в правой части имеет смысл. Уравнение (1.20) имеет два линейно независимых решения: $e^{-x_n\sqrt{p+\zeta^2}}$ и $e^{x_n\sqrt{p+\zeta^2}}$, где под $\sqrt{z}$ понимается значение корня, соответствующее изменению $\arg z$ в пределах $-\pi < \arg z \leqslant \pi$; функция $\tilde{v}$ является линейной комбинацией этих двух решений. Для того чтобы интеграл в правой части (1.22) сходился при любом $x_n > 0$, необходимо потребовать, чтобы функция $\tilde{v}$ выражалась только через первое из этих решений. Этого можно достичь, поставив условие

$$\tilde{v} \xrightarrow[x_n \to +\infty]{} 0. \tag{1.23}$$

Это и есть недостающее условие для функции $\tilde{v}$.

Таким образом, мы должны решить задачу (1.20), (1.21), (1.23). Очевидно, что

$$\tilde{v}(\zeta,\ p,\ x_n) = F(\zeta,\ p)\, e^{-x_n\sqrt{p+\zeta^2}}.$$

Вычисляя функцию $F$ из условия (1.21), получаем

$$\tilde{v}(\zeta,\ p,\ x_n) = \frac{e^{-x_n\sqrt{p+\zeta^2}}}{i\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1} b_\alpha\zeta_\alpha - b_n\sqrt{p+\zeta^2}}\,\tilde{\Phi}_2^0(\zeta,\ p)$$

и, следовательно,

$$v(x,\ t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,2\pi i}\int\limits_{E_{n-1}} e^{ix'\zeta}\,d\zeta\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}\times$$

$$\times\frac{e^{-x_n\sqrt{p+\zeta^2}}}{i\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1} b_\alpha\zeta_\alpha - b_n\sqrt{p+\zeta^2}}\,\tilde{\Phi}_2^0(\zeta,\ p)\,dp.$$

В силу хорошо известной формулы для преобразования Фурье свертки двух функций заключаем, что

$$v(x,\ t) = \left(G *_2 \Phi_2^0\right), \tag{1.24}$$

где

$$G(x,\ t) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}2\pi i}\int\limits_{E_{n-1}} e^{ix'\zeta}\,d\zeta\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}\,\frac{e^{-x_n\sqrt{p+\zeta^2}}}{ib'\zeta - b_n\sqrt{p+\zeta^2}}\,dp \tag{1.25}$$

(мы ввели обозначение $b' = (b_1,\ \ldots,\ b_{n-1})$).

Число $\sigma$ мы выберем таким образом, чтобы контур интегрирования по $p$ проходил в области аналитичности подынтегрального выражения. Это будет иметь место при $\sigma = -\zeta^2 + a^2$, $a > 0$.

Используя аналитичность подынтегрального выражения по переменной $p$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\zeta^2$, нетрудно убедиться в том, что при отрицательных значениях $t$ $G(x,\ t) = 0$. При положительном $t$ интеграл (1.25) можно вычислить. Введем новую переменную интегрирования $s = s_1 + is_2$, связанную с $p$ соотношением

$$\sqrt{p+\zeta^2} = s.$$

Тогда

$$\int\limits_{a^2-\zeta^2-i\infty}^{a^2-\zeta^2+i\infty} e^{pt}\frac{e^{-x_n\sqrt{p+\zeta^2}}}{ib'\zeta-b_n\sqrt{p+\zeta^2}}\,dp=2e^{-\zeta^2t}\int\limits_{H(a)} e^{s^2t-sx_n}\frac{s\,ds}{ib'\zeta-b_ns},$$

где $H(a)$ — правая ветвь гиперболы $s_1^2-s_2^2=a^2$. Очевидно, что значение интеграла в правой части не изменится, если контур $H(a)$ заменить на контур $\operatorname{Re} s=a$. Сделаем эту замену и положим $\beta_\alpha=\frac{b_\alpha}{b_n}$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$. Получим

$$G(x, t)=-\frac{1}{(2\pi)^{n-1}\pi i b_n}\int\limits_{E_{n-1}} e^{ix'\zeta-\zeta^2t}\,d\zeta\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{s^2t-sx_n}\frac{s\,ds}{s-i\beta\zeta}.$$

Введем еще раз новую переменную интегрирования $v=s-$ $-i\beta\zeta$ и поменяем порядок интегрирования по $\zeta$ и $v$. Будем иметь

$$G(x, t)=-\frac{1}{(2\pi)^{n-1}\pi i b_n}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{v^2t-vx_n}\frac{dv}{v}\times$$

$$\times\int\limits_{E_{n-1}} \exp\left[ix'\zeta-\zeta^2t-(\beta\zeta)^2t+2ivt\beta\zeta-ix_n\beta\zeta\right](v+i\beta\zeta)\,d\zeta=$$

$$=-\frac{1}{(2\pi)^{n-1}\pi i b_n}\left[\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{v^2t-vx_n}J\,dv+\right.$$

$$\left.+\sum_{\alpha=1}^{n-1}\beta_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{v^2t-vx_n}J\frac{dv}{v}\right], \quad (1.26)$$

где

$$J=\int\limits_{E_{n-1}} \exp\left\{-\left[\zeta^2+(\beta\zeta)^2\right]t+i\left(x'+2vt\beta-x_n\beta\right)\zeta\right\}d\zeta.$$

Предположим, что $\beta\neq 0$ $\Big($если $\beta=0$, то легко видеть, что $J=\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{x'^2}{4t}}\Big)$.

Пусть $B$ — ортогональная матрица порядка $n-1$ с элементами $\beta_{kj}$, причем

$$\beta_{j1}=\frac{\beta_j}{|\beta|} \quad (j=1, \ldots, n-1),$$

а остальные элементы выбраны произвольно. Введем в интеграле $J$ новые переменные интегрирования $\eta_j$ $(j=1,\ldots, n-1)$, связанные с $\zeta_j$ соотношением $\zeta=B\eta$. Тогда

$$\beta\zeta=|\beta|\eta_1,$$

$$\zeta^2+(\beta\zeta)^2=\eta^2+\beta^2\eta_1^2,$$

$$x'\zeta=y'\eta,$$

где

$$y'_i=\sum_{k=1}^{n-1}\beta_{ki}x'_k, \tag{1.27}$$

и, следовательно,

$$J=\prod_{j=2}^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta_j^2t+iy_j\eta_j}\,d\eta_j\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(1+\beta^2\right)\eta_1^2t+i\left(y_1+2v|\beta|t-x_n|\beta|\right)\eta_1}\,d\eta_1=$$

$$=\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\exp\left[-\frac{1}{4t}\sum_{j=2}^{n-1}y_j^2-\frac{(y_1+2vt|\beta|-x_n|\beta|)^2}{4t(1+\beta^2)}\right]=$$

$$=\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\exp\left[-\frac{1}{4t}\sum_{j=2}^{n-1}y_j^2-\frac{(y_1-x_n|\beta|)^2}{4t(1+\beta^2)}-\frac{v^2t\beta^2}{1+\beta^2}-\right.$$

$$\left.-v|\beta|\frac{y_1-x_n|\beta|}{1+\beta^2}\right] \tag{1.28}$$

и в силу (1.26)

$$G(x, t) = -\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n-1}{2}} \pi i b_n \sqrt{1+\beta^2}} \times$$

$$\times \left\{ \exp\left[-\frac{1}{4t}\sum_{j=2}^{n-1} y_j^2 - \frac{(y_1 - x_n|\beta|)^2}{4t(1+\beta^2)}\right] \times \right.$$

$$\times \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp\left(\frac{v^2 t}{1+\beta^2} - \frac{v x_n}{1+\beta^2} - \frac{v y_1 |\beta|}{1+\beta^2}\right) dv +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{n-1} \beta_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \exp\left[-\frac{1}{4t}\sum_{j=2}^{n-1} y_j^2 - \frac{(y_1 - x_n|\beta|)^2}{4t(1+\beta^2)}\right] \times$$

$$\left. \times \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp\left(\frac{v^2 t}{1+\beta^2} - \frac{v x_n}{1+\beta^2} - \frac{v y_1 |\beta|}{1+\beta^2}\right) \frac{dv}{v} \right\}. \qquad (1.29)$$

Первый интеграл в правой части (1.29) подсчитывается легко:

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp\left(\frac{v^2 t}{1+\beta^2} - \frac{v x_n}{1+\beta^2} - \frac{|\beta| y_1 v}{1+\beta^2}\right) dv =$$

$$= i \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{w^2 t + iw(x_n + |\beta| y_1)}{1+\beta^2}\right] dw =$$

$$= i \sqrt{\frac{\pi(1+\beta^2)}{t}}\, e^{-\frac{(x_n + |\beta| y_1)^2}{4t(1+\beta^2)}}. \qquad (1.30)$$

Второй интеграл, который мы обозначим через $K$, проще всего подсчитать с помощью очевидного соотношения

$$\frac{\partial K}{\partial x_n} = -\frac{1}{1+\beta^2} I.$$

Так как

$$|K| \leqslant \exp\left(\frac{a^2 t - a x_n - a y_1 |\beta|}{1+\beta^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{w^2 t}{1+\beta^2}\right) \frac{dw}{\sqrt{a^2 + w^2}},$$

то $\lim\limits_{x_n \to +\infty} K = 0$ и, следовательно,

$$K = \frac{1}{1+\beta^2} \int\limits_{x_n}^{\infty} I\, dz = i \sqrt{\frac{\pi}{t(1+\beta^2)}} \int\limits_{x_n}^{\infty} \exp\left[-\frac{(z+|\beta|\, y_1)^2}{4t(1+\beta^2)}\right] dz =$$

$$= 2i\sqrt{\pi} \int\limits_{\frac{x_n+|\beta|\, y_1}{2\sqrt{t(1+\beta^2)}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz. \qquad (1.31)$$

Подставляя (1.30) и (1.31) в (1.29) и пользуясь тем, что в силу (1.27)

$$y_1 = \frac{\beta x'}{|\beta|}, \qquad y'^2 = x'^2$$

и, следовательно,

$$-\sum_{j=2}^{n-1} y_j^2 - \frac{(y_1 - x_n|\beta|)^2}{1+\beta^2} - \frac{(x_n + |\beta|\, y_1)^2}{1+\beta^2} = -y'^2 - x_n^2 = -x^2,$$

$$-\sum_{j=2}^{n-1} y_j^2 - \frac{(y_1 - x_n|\beta|)^2}{1+\beta^2} =$$

$$= -x^2 + \frac{(x_n + |\beta|\, y_1)^2}{1+\beta^2} = -x^2 + \frac{(x_n + \beta x')^2}{1+\beta^2},$$

получим

$$G(x, t) = -\frac{2}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}\, b_n} \left\{ e^{-\frac{x^2}{4t}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1+\beta^2}} \sum_{\alpha=1}^{n-1} \beta_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} e^{-\frac{x^2}{4t} + \frac{(x_n+\beta x')^2}{4t(1+\beta^2)}} \int\limits_{\frac{x_n+\beta x'}{2\sqrt{t(1+\beta^2)}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz \right\} =$$

$$= \frac{2}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}} b_n} \left\{ e^{-\frac{x^2}{4t}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sqrt{t}}{|b|} \sum_{\alpha=1}^{n-1} b_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} e^{-\frac{x^2}{4t} + \frac{(bx)^2}{4tb^2}} \int\limits_{\frac{bx}{2\sqrt{t}|b|}}^{\infty} e^{-z^2} dz \right\} \quad (1.32)$$

Здесь $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $bx = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$. Выполняя дифференцирование во втором члене, получим

$$G(x, t) = -\frac{2}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}} b^2} \left\{ b_n e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{b^2 x_n - b_n (bx)}{|b| \sqrt{t}} \times \right.$$

$$\left. \times e^{-\frac{x^2}{4t} + \frac{(bx)^2}{4tb^2}} \int\limits_{\frac{bx}{2\sqrt{t}|b|}}^{\infty} e^{-z^2} dz \right\}. \quad (1.33)$$

Эта функция, являющаяся решением однородного уравнения теплопроводности, обладает свойством

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial G(x, t)}{\partial x_i} = \frac{x_n}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}} t} e^{-\frac{x^2}{4t}} = -2 \frac{\partial \Gamma(x, t)}{\partial x_n}, \quad (1.34)$$

и потому в силу (1.18) ясно, что функция (1.24) действительно является решением задачи (1.15).

Частным случаем задачи (1.15) является вторая краевая задача, для которой $b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$, $b_n = 1$. Ее решением является тепловой потенциал простого слоя:

$$v(x, t) = -2(\Gamma *_2 \Phi_2^0) =$$

$$= -2 \int_0^t d\tau \int\limits_{E_{n-1}} \Gamma(x' - y', x_n, t - \tau) \Phi_2(y', \tau) dy'.$$

## § 2. Оценки тепловых потенциалов в гёльдеровских нормах

В этом и в следующем параграфах будут получены точные оценки основных потенциалов $(\Gamma * f)$, $(\Gamma *_1 \varphi)$, $(G *_2 \Phi)$, которые были введены в § 1, через их плотности.

Удобно ввести стандартные обозначения для областей и пространств, в которых определены функции $f$, $\varphi$, $\Phi$ и потенциалы. Мы будем пользоваться следующими обозначениями (некоторые из них встречались выше):

$E_{n+1}$ — евклидово пространство точек $(x_1, \ldots, x_n, t)$
$E_n$ — пространство точек $(x_1, \ldots, x_n)$,
$\tilde{E}_n$ — подпространство $x_n = 0$ в $E_{n+1}$,
$E_{n-1}$ — пространство точек $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$,
$D_{n+1}$ — полупространство $t > 0$ в $E_{n+1}$,
$\tilde{D}_{n+1}$ — полупространство $x_n > 0$ в $E_{n+1}$,
$D_n$ — полупространство $x_n > 0$ в $E_n$,
$\tilde{D}_n$ — полупространство $t > 0$ в $\tilde{E}_n$,
$R$ — область $x_n > 0$, $t > 0$ в $E_{n+1}$.

Через $B^{(T)}$ $(T > 0)$ будем обозначать множество точек области $B$, расположенных в области $t < T$, причем под $B$ понимается любая из введенных выше областей, кроме $E_n$ и $D_n$. Так, например, $D_{n+1}^{(T)} = E_n \times (0, T)$, $E_{n+1}^{(T)} = E_n \times (-\infty, T)$ и т. д.

Ниже будут доказаны следующие неравенства:

$$\langle (\Gamma * f) \rangle_{E_{n+1}^{(T)}}^{(l+2)} \leqslant c_1 \langle f \rangle_{E_{n+1}^{(T)}}^{(l)}, \tag{2.1}$$

$$\langle (\Gamma *_1 \varphi) \rangle_{D_{n+1}^{(T)}}^{(l)} \leqslant c_2 \langle \varphi \rangle_{E_n}^{(l)}, \tag{2.2}$$

$$\langle (G *_2 \Phi) \rangle_{\tilde{D}_{n+1}^{(T)}}^{(l+1)} \leqslant c_3 \langle \Phi \rangle_{\tilde{E}_n^{(T)}}^{(l)}. \tag{2.3}$$

Во всех трех неравенствах $l$ — произвольное нецелое положительное число, $T$ — любое положительное число, в том числе $+\infty$ (в этом случае естественно считать $B^{(\infty)} = B$), а $\langle v\rangle^{(l)}$ — норма, определенная в § 1 главы I *). Постоянные всюду от $T$ не зависят.

Неравенство (2.3) при $b_n = 1$, $b_\alpha = 0$ $(\alpha < n)$ дает нам оценку потенциала простого слоя. Кроме того, в силу (1.34)

$$-2\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_n} * {}_2\Phi\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}(G * {}_2\Phi),$$

и поэтому из (2.3) вытекает также оценка потенциала двойного слоя:

$$\left\langle\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_n} * {}_2\Phi\right)\right\rangle^{(l)}_{\widetilde{D}^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\,\langle\Phi\rangle^{(l)}_{\widetilde{E}^{(T)}_n}. \tag{2.4}$$

При доказательстве неравенств (2.1) — (2.3) мы будем пользоваться следующими оценками ядер $\Gamma$ и $G$:

$$\left|D_t^r D_x^s \Gamma(x, t)\right| \leqslant c_{r, s} t^{-\frac{n}{2}-r-\frac{s}{2}} \exp\left(-C\frac{x^2}{t}\right), \tag{2.5}$$

$$\left|D_t^r D_x^s G(x, t)\right| \leqslant c'_{r, s} t^{-\frac{n}{2}-r-\frac{s}{2}} \exp\left(-C'\frac{x^2}{t}\right). \tag{2.6}$$

Оценка (2.5) очевидна при $C < \frac{1}{4}$. Для доказательства оценки (2.6) достаточно убедиться в том, что

$$e^{-\frac{x^2}{4t}+\frac{(bx)^2}{4tb^2}} \int\limits_{\frac{bx}{2\sqrt{t}\,|b|}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz \leqslant c\exp\left(-C''\frac{x^2}{4t}\right) \tag{2.7}$$

при любом $x \in D_n$. Если $bx \geqslant 0$, то

$$\int\limits_{\frac{bx}{2\sqrt{t}\,|b|}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz \leqslant e^{-\frac{(bx^2)}{8tb^2}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{(bx)^2}{8tb^2}}$$

и

$$e^{-\frac{x^2}{4t}+\frac{(bx)^2}{8tb^2}} \int\limits_{\frac{bx}{2\sqrt{t}\,|b|}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}+\frac{(bx)^2}{8tb^2}} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{8t}},$$

---

*) При этом мы полагаем в (1.11) и (1.12) главы I $\rho_0 = \rho_1 = +\infty$.

так как $x^2-\frac{(bx)^2}{b^2}\geqslant 0$. Если же $bx<0$, то

$$x^2-\frac{(bx^2)}{b^2}\geqslant x^2[1-\max\cos^2\vartheta],$$

где $\vartheta$ — угол между векторами $b$ и $x$, и максимум берется по всем $x\in D_n$, таким, что $bx<0$ (т. е. $\cos\vartheta<0$). Это максимальное значение достигается, когда $x_n=0$, а вектор $x'=(x_1, \ldots, x_{n-1})$ направлен противоположно вектору $b'=(b_1, \ldots, b_{n-1})$, причем

$$\max\cos^2\vartheta=\frac{b'^2}{b^2}=1-\frac{b_n^2}{b^2}.$$

Поэтому если $bx<0$, то

$$x^2-\frac{(bx)^2}{b^2}\geqslant\frac{b_n^2}{b^2}x^2.$$

Отсюда и вытекает неравенство (2.7) и, следовательно (2.6). Постоянная $C'$ зависит от $b_n^2/b^2$.

Кроме оценок (2.5) и (2.6), мы будем использовать тот факт, что потенциал $(\Gamma*f)$ удовлетворяет неоднородному уравнению теплопроводности (1.10), а остальные потенциалы — однородному уравнению теплопроводности. Наконец, мы будем использовать равенства (1.7) и (1.17).

Приступим к доказательству неравенства (2.1). В соответствии с определением нормы $\langle v\rangle^{(l)}_{E^{(T)}_{n+1}}$ (см. (1.10) главы I и ниже) оно сводится к доказательству двух оценок:

$$\langle D_t^rD_x^s(\Gamma*f)\rangle^{(l-l')}_{x,\,E^{(T)}_{n+1}}\leqslant c\langle f\rangle^{(l)}_{E^{(T)}_{n+1}},\tag{2.8}$$

где $2r+s=l'+2$, $l'=[l]$ и

$$\langle D_t^rD_x^s(\Gamma*f)\rangle^{\left(\frac{l+2-2r-s}{2}\right)}_{t,\,E^{(T)}_{n+1}}\leqslant c\langle f\rangle^{(l)}_{E^{(T)}_{n+1}},\tag{2.9}$$

где $r$ и $s$ удовлетворяют условию $0<l+2-2r-s<2$.

В силу уравнения (1.10) можно при доказательстве обеих оценок ограничиться случаем $r=0$ и оценивать только производные $D_x^s(\Gamma*f)$.

Докажем (2.8) при $r=0$, $s=l'+2$. Так как

$$D_x^s(\Gamma * f)=D_x^2(\Gamma * D_x^{l'}f), \tag{2.10}$$

то достаточно доказать оценку (2.8) при $r=0$, $l'=0$ (т. е. при $l=a<1$). Пусть, как и в § 1, $(\Gamma * f)=g(x, t)$. В силу формулы (1.9)

$$\begin{aligned}
&D_x^2 g(x, t)-D_{x'}^2 g(x', t)= \\
&=\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{|x-y|\leqslant 2|x-x'|} D_x^2\Gamma(x-y, t-\tau)[f(y, \tau)-f(x, \tau)]\,dy- \\
&\quad-\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{|x-y|\leqslant 2|x-x'|} D_{x'}^2\Gamma(x'-y, t-\tau)\times \\
&\quad\times[f(y, \tau)-f(x', \tau)]\,dy+ \\
&\quad+\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{|x-y|\geqslant 2|x-x'|} \left[D_x^2\Gamma(x-y, t-\tau)-\right. \\
&\quad\left.-D_{x'}^2\Gamma(x'-y, t-\tau)\right][f(y, \tau)-f(x, \tau)]\,dy+ \\
&\quad+\int_{-\infty}^{t} [f(x', \tau)-f(x, \tau)]\,d\tau\times \\
&\quad\times\int_{|x-y|\geqslant 2|x-x'|} D_x^2\Gamma(x-y, t-\tau)\,dy=\sum_{i=1}^{4} I_i.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Оценим по модулю каждый из четырех членов правой части с помощью (2.5). Первый и второй члены оцениваются совершенно одинаково, например,

$$\begin{aligned}
|I_1|\leqslant c&\int_{|x-y|\leqslant 2|x-x'|} |x-y|^{\alpha}\,dy\times \\
&\times\int_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{-\frac{n}{2}-1}\exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right)d\tau\langle f\rangle_{x, E_{n+1}^{(T)}}^{(\alpha)}= \\
&=c\int_{|x-y|\leqslant 2|x-x'|}|x-y|^{-n+\alpha}\,dy\langle f\rangle_{x, E_{n+1}^{(T)}}^{(\alpha)}= \\
&\qquad\qquad=c|x-x'|^{\alpha}\langle f\rangle_{x, E_{n+1}^{(T)}}^{(\alpha)}.
\end{aligned}$$

В третьем члене при $|x-y| \geqslant 2|x-x'|$ имеем

$$|D_x^2\Gamma(x-y,\ t-\tau) - D_{x'}^2\Gamma(x'-y,\ t-\tau)| \leqslant \leqslant c|x-x'|(t-\tau)^{-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right)$$

и потому

$$|I_3| \leqslant c\langle f\rangle_{x,E_{n+1}^{(T)}}^{(\alpha)}|x-x'|\int\limits_{|x-y|\geqslant 2|x-x'|}|x-y|^\alpha\,dy\times \times\int\limits_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{-\frac{n+3}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{(t-\tau)}\right)d\tau \leqslant \leqslant c|x-x'|^\alpha\langle f\rangle_{x,E_{n+1}^{(T)}}^{(\alpha)}.$$

Наконец, $I_4$ можно записать в форме

$$I_4 = -\int\limits_{-\infty}^{t}[f(x',\tau)-f(x,\tau)]\,d\tau\times \times\int\limits_{|x-y|=2|x-x'|}\frac{\partial\Gamma(x-y,\ t-\tau)}{\partial x_k}n_j\,dS_y,$$

и так как

$$\left|\frac{\partial\Gamma(x,t)}{\partial x_k}\right| = \frac{|x_k|}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}}t^{\frac{n+2}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

то

$$|I_4| \leqslant |x-x'|^{1+\alpha}\langle f\rangle_{x,E_{n+1}^{(T)}}^{(\alpha)}\int\limits_{|x-y|=2|x-x'|}dS_y\times \times\int\limits_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}e^{-\frac{|x-x'|^2}{4(t-\tau)}}d\tau = c|x-x'|^\alpha\langle f\rangle_{x,E_{n+1}^{(T)}}^{(\alpha)}.$$

Следовательно,

$$\langle g\rangle_{x,E_{n+1}^{(T)}}^{(\alpha+2)} \leqslant c\langle f\rangle_{E_{n+1}^{(T)}}^{(\alpha)}.$$

Применяя эту оценку к потенциалу, стоящему в правой части (2.10), при $\alpha = l - l'$, получаем неравенство (2.8).

Переходим к доказательству неравенства (2.9) при $r=0$, $0 < l+2-s < 2$. Из последнего неравенства видно, что

$s > l$ и, следовательно, $D_x^s(\Gamma * f) = D_x^{s_1}(\Gamma * D_x^{l'} f)$, где $s_1 = s - l'$ удовлетворяет условию $l - l' < s_1 < l - l' + 2$, т. е. $s_1$ может принимать два значения: $s_1 = 1$ и $s_1 = 2$. Таким образом, доказательство неравенства (2.9), так же как и доказательство неравенства (2.8), сводится к частному случаю $l = \alpha < 1$, $r = 0$ и $s = 1,2$. Докажем неравенство (2.9) при этих значениях индексов.

Пользуясь при $s = 2$ формулой (1.9), а при $s = 1$ равенством (1.7), убеждаемся в том, что при $s = 1,2$

$$D_x^s g(x, t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_n} D_x^s \Gamma(x - y, t - \tau)[f(y, \tau) - f(x, \tau)]\, dy.$$

Поэтому, считая для определенности, что $t' < t \leqslant T$, имеем

$$D_x^s g(x, t) - D_x^s g(x, t') = \int_{2t'-t}^{t} d\tau \int_{E_n} D_x^s \Gamma(x - y, t - \tau) \times$$
$$\times [f(y, \tau) - f(x, \tau)]\, dy - \int_{2t'-t}^{t'} d\tau \int_{E_n} D_x^s \Gamma(x - y, t' - \tau) \times$$
$$\times [f(y, \tau) - f(x, \tau)]\, dy + \int_{-\infty}^{2t'-t} d\tau \int_{E_n} \left[D_x^s \Gamma(x - y, t - \tau) - \right.$$
$$\left. - D_x^s \Gamma(x - y, t' - \tau)\right] [f(y, \tau) - f(x, \tau)]\, dy.$$

Оценивая правую часть этого представления так же, как правую часть (2.11), получаем

$$|D_x^s g(x, t) - D_x^s g(x, t')| \leqslant c(t - t')^{\frac{\alpha+2-s}{2}} \langle f \rangle_{x, E_{n+1}^{(T)}}^{(\alpha)},$$

что доказывает неравенство (2.9) при $r = 0$, $l = \alpha < 1$. Отсюда вытекает неравенство (2.9) в общем случае.

Таким образом, неравенства (2.8) и (2.9) и, следовательно, неравенство (2.1) доказаны.

Переходим к доказательству неравенства (2.2). Оно также сводится к оценкам

$$\langle D_t^r D_x^s (\Gamma *_1 \varphi) \rangle_{x, D_{n+1}^{(T)}}^{(l-l')} \leqslant c \langle \varphi \rangle_{E_n}^{(l)} \quad (2r + s = l') \quad (2.12)$$

и

$$\langle D_t^r D_x^s (\Gamma *_1 \varphi)\rangle_{t,\, D_{n+1}^{(T)}}^{\left(\frac{l-2r-s}{2}\right)} \leqslant c\langle\varphi\rangle_{E_n}^{(l)} \quad (0 < l-2r-s < 2). \qquad (2.13)$$

Так как $(\Gamma *_1 \varphi)$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности, то достаточно доказать оба неравенства при $r=0$. Следует воспользоваться тем, что

$$D_x^s(\Gamma *_1 \varphi) = (\Gamma *_1 D_x^s \varphi).$$

Это позволяет ограничиться доказательством неравенства (2.12) только при $r=0$, $s=0$, $l=\alpha<1$, а неравенства (2.13) — при $r=0$, $s=0$, $0<l<2$.

Пусть $(\Gamma *_1 \varphi) = h(x, t)$.

Неравенство (2.12) при указанных значениях параметров доказывается следующим образом: так как $\Gamma > 0$, то в силу (1.7)

$$|h(x,t) - h(x',t)| = \left| \int_{E_n} \Gamma(y, t)[\varphi(x-y) - \varphi(x'-y)]\,dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E_n} \Gamma(y, t)\,|\varphi(x-y) - \varphi(x'-y)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant |x-x'|^\alpha \langle\varphi\rangle_{E_n}^{(\alpha)} \int_{E_n} \Gamma(y, t)\,dy = |x-x'|^\alpha \langle\varphi\rangle_{E_n}^{(\alpha)}.$$

Докажем (2.13) при $r=0$, $s=0$, $l=\rho\in(0,2)$. Так как функция $\Gamma$ является четной по совокупности переменных $x$, то

$$h(x, t) = \int_{E_n} \Gamma(y, t)\varphi(x-y)\,dy = \int_{E_n} \Gamma(y, t)\varphi(x+y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{E_n} \Gamma(y, t)[\varphi(x-y) + \varphi(x+y)]\,dy =$$

$$= \varphi(x) + \frac{1}{2}\int_{E_n} \Gamma(y, t)[\varphi(x-y) - 2\varphi(x) + \varphi(x+y)]\,dy$$

(мы воспользовались также (1.7)) и

$$h(x, t)-h(x, t')=\frac{1}{2}\int_{E_n}[\Gamma(y, t)-\Gamma(y, t')]\times$$
$$\times[\varphi(x-y)-2\varphi(x)+\varphi(x+y)]\,dy=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{t'}^{t}d\tau\int_{E_n}\frac{\partial\Gamma(y, \tau)}{\partial\tau}[\varphi(x-y)-2\varphi(x)+\varphi(x+y)]\,dy. \quad (2.14)$$

Теперь заметим, что

$$|\varphi(x-y)-2\varphi(x)+\varphi(x+y)|\leqslant c\langle\varphi\rangle_{E_n}^{(\rho)}|y|^{\rho}. \quad (2.15)$$

При $\rho<1$ это вытекает из

$$\varphi(x-y)-2\varphi(x)+\varphi(x+y)=$$
$$=[\varphi(x-y)-\varphi(x)]+[\varphi(x+y)-\varphi(x)],$$

а при $1<\rho<2$ — из

$$\varphi(x-y)-2\varphi(x)+\varphi(x+y)=$$
$$=\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}[\varphi(x+ty)+\varphi(x-ty)]\,dt=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}y_i\int_0^1\left[\varphi_{x_i}(x+ty)-\varphi_{x_i}(x-ty)\right]dt.$$

Оценивая правую часть (2.14) с помощью (2.15) и (2.5), получаем

$$|h(x, t)-h(x, t')|\leqslant c\langle\varphi\rangle_{E_n}^{(\rho)}\int_{t'}^{t}d\tau\int_{E_n}|y|^{\rho}\left|\frac{\partial\Gamma(y, \tau)}{\partial\tau}\right|dy\leqslant$$
$$\leqslant c\langle\varphi\rangle_{E_n}^{(\rho)}\int_{t'}^{t}\tau^{-1+\frac{\rho}{2}}\,d\tau\leqslant c(t-t')^{\frac{\rho}{2}}\langle\varphi\rangle_{E_n}^{(\rho)}.$$

Таким образом, доказаны неравенства (2.12), (2.13) и, следовательно, (2.2).

Переходим к доказательству оценки (2.3). Установим следующие неравенства:

$$\langle (D_x G *_2 \Phi)\rangle^{(\alpha)}_{x,\, \tilde{D}^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\, \langle \Phi\rangle^{(\alpha)}_{\tilde{E}^{(T)}_n}, \tag{2.16}$$

$$\langle (D_t G *_2 \Phi)\rangle^{(\alpha)}_{x,\, \tilde{D}^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\, \langle \Phi\rangle^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}_{t,\, \tilde{E}^{(T)}_n}, \tag{2.17}$$

$$\langle (D_x G *_2 \Phi)\rangle^{(\alpha)}_{t,\, \tilde{D}^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\, \langle \Phi\rangle^{(2\alpha)}_{\tilde{E}^{(T)}_n}, \tag{2.18}$$

$$\langle (D_t G *_2 \Phi)\rangle^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}_{t,\, \tilde{D}^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\, \langle \Phi\rangle^{(\alpha+1)}_{\tilde{E}^{(T)}_n}, \tag{2.19}$$

$$\langle (G *_2 \Phi)\rangle^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}_{t,\, \tilde{D}^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\, \langle \Phi\rangle^{(\alpha)}_{\tilde{E}^{(T)}_n}, \tag{2.20}$$

в которых $0 < \alpha < 1$.

При доказательстве (2.16) будем пользоваться представлением

$$(D_x G *_2 \Phi) = \int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} D_x G(x'-y',\, x_n,\, \tau)\,[\Phi(y',\, t-\tau) - \Phi(y',\, t)]\, dy' + \int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} D_x G(x'-y',\, x_n,\, \tau)\,[\Phi(y',\, t) - \Phi(x',\, t)]\, dy' + \Phi(x',\, t) \int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} D_x G(x',\, x_n,\, \tau)\, dx'. \tag{2.21}$$

Убедимся в том, что при всяком $x_n > 0$

$$\int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_i} G(x',\, x_n,\, \tau)\, dx' = \frac{\delta_{in}}{b_n}. \tag{2.22}$$

Очевидно, что при $i < n$ левая часть (2.22) равна нулю. Производная же $\partial G/\partial x_n$ выражается с помощью (1.34) следующим образом:

$$\frac{\partial G}{\partial x_n} = -\frac{2}{b_n}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{b_n}\frac{\partial G}{\partial x_i}. \tag{2.23}$$

Поэтому

$$\int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{\partial G(x', x_n, \tau)}{\partial x_n} dx' =$$

$$= -\frac{2}{b_n} \int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{\partial \Gamma(x', x_n, \tau)}{\partial x_n} dx' = \frac{1}{b_n}.$$

Пусть $x$, $z \in D_n$. Пусть $K$ — пересечение шара с центром $x$ и радиусом $2|x-z|$ в пространстве $E_n$ с гиперплоскостью $E_{n-1}$ (оно может быть пустым).

Из (2.21) и (2.22) нетрудно получить следующее равенство:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x_l} *_2 \Phi\right) - \left(\frac{\partial G}{\partial z_l} *_2 \Phi\right) =$$

$$= \int_0^{|x-z|^2} d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_l} G(x'-y', x_n, \tau)[\Phi(y', t-\tau) - \Phi(y', t)]\, dy' -$$

$$- \int_0^{|x-z|^2} d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{\partial}{\partial z_l} G(z'-y', z_n, \tau)[\Phi(y', t-\tau) - \Phi(y', t)]\, dy' +$$

$$+ \int_{|x-z|^2}^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} \left[\frac{\partial}{\partial x_l} G(x'-y', x_n, \tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial z_l} G(z'-y', z_n, \tau)\right] [\Phi(y', t-\tau) - \Phi(y', t)]\, dy' +$$

$$+ \int_K [\Phi(y', t) - \Phi(x', t)]\, dy' \int_0^\infty \frac{\partial G(x'-y', x_n, \tau)}{\partial x_l} d\tau -$$

$$- \int_K [\Phi(y', t) - \Phi(z', t)]\, dy' \int_0^\infty \frac{\partial G(z'-y', z_n, \tau)}{\partial z_l} d\tau +$$

$$+ \int_{E_{n-1} \setminus K} dy' \int_0^\infty \left[\frac{\partial G(x'-y', x_n, \tau)}{\partial x_l} - \right.$$

$$- \frac{\partial G(z' - y', z_n, \tau)}{\partial z_i}\Big] [\Phi(y', t) - \Phi(z', t)]\, d\tau +$$

$$+ [\Phi(z', t) - \Phi(x', t)] \int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1} \setminus K} \frac{\partial G(x' - y', x_n, \tau)}{\partial x_i} dy' +$$

$$+ \frac{\delta_{in}}{b_n} [\Phi(x', t) - \Phi(z', t)]. \quad (2.24)$$

Оценим с помощью (2.6) каждый член правой части (2.24). Заметим, что при $i \neq n$

$$\int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1} \setminus K} \frac{\partial G(x' - y', x_n, \tau)}{\partial x_i} dy' =$$

$$= \int_0^\infty d\tau \int_\Sigma G(x' - y', x_n, \tau) n_i \, dS_{y'},$$

где $\Sigma$ — граница $K$, являющаяся при непустом $K$ сферой в пространстве $E_{n-1}$ с центром $x'$, причем если $y' \in \Sigma$, то $\sqrt{|x' - y'|^2 + x_n^2} = 2|x - z|$. Пусть $G'$ и $G''$ — два слагаемых в правой части (1.33), в сумме составляющих $G$. Легко видеть, что

$$\int_\Sigma G'(x' - y', x_n, \tau) n_i \, dS_{y'} = 0$$

и

$$|G''(\xi, \tau)| \leqslant \frac{c|\xi|}{t^{\frac{n+1}{2}}} e^{-\frac{\xi^2}{8t}},$$

так что при $i < n$

$$\left| \int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1} \setminus K} \frac{\partial G(x' - y', x_n, \tau)}{\partial x_i} dy' \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty d\tau \int_\Sigma |G''(x' - y', x_n, \tau)| \, dS_{y'} \leqslant$$

$$\leqslant c|x - z|^{n-1} \int_0^\infty e^{-\frac{|x-z|^2}{8\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{\frac{n+1}{2}}} = c.$$

Это неравенство справедливо и при $l=n$ вследствие (2.23) и того факта, что

$$\left| \int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1} \setminus K} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_n}\, dy' \right| = \int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1} \setminus K} \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x_n} \right| dy' \leqslant \frac{1}{2}.$$

Принимая во внимание это неравенство и оценку (2.6), получим

$$\left| \left( \frac{\partial G}{\partial x_i} *_2 \Phi \right) - \left( \frac{\partial G}{\partial z_i} *_2 \Phi \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \langle \Phi \rangle^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}_{t, \widetilde{E}^{(T)}_n} \left[ \int_0^{|x-z|^2} \tau^{-\frac{\alpha}{2}}\, d\tau \int_{E_{n-1}} \left( \left| \frac{\partial G(x'-y', x_n, \tau)}{\partial x_i} \right| + \right. \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\partial G(z'-y', z_n, \tau)}{\partial z_i} \right| \right) dy' +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} |x_j - z_j| \int_0^1 d\lambda \int_{|x-z|^2}^{\infty} \tau^{-\frac{\alpha}{2}}\, d\tau \times$$

$$\left. \times \int_{E_{n-1}} \left| \frac{\partial^2 G(u'-y', u_n, \tau)}{\partial u_i\, \partial u_j} \right|_{u=\lambda x + (1-\lambda) z} dy' \right] +$$

$$+ \langle \Phi \rangle^{(\alpha)}_{x, \widetilde{E}^{(T)}_n} \left[ \int_K dy' \int_0^\infty \left( |x'-y'|^\alpha \left| \frac{\partial G(x'-y', x_n, \tau)}{\partial x_i} \right| + \right. \right.$$

$$\left. + |z'-y'|^\alpha \left| \frac{\partial G(z'-y', z_n, \tau)}{\partial z_i} \right| \right) d\tau +$$

$$+ \int_{E_{n-1} \setminus K} |y'-z'|^\alpha\, dy' \int_0^\infty \left| \frac{\partial G(x'-y', x_n, \tau)}{\partial x_i} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\partial G(z'-y', z_n, \tau)}{\partial z_i} \right| d\tau + c\, |x'-z'|^\alpha \right] \leqslant$$

$$\leqslant c\, |x-z|^\alpha \left( \langle \Phi \rangle^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}_{t, \widetilde{E}^{(T)}_n} + \langle \Phi \rangle^{(\alpha)}_{x, \widetilde{E}^{(T)}_n} \right) = c\, |x-z|^\alpha \langle \Phi \rangle^{(\alpha)}_{\widetilde{E}^{(T)}_n},$$

что доказывает (2.16).

Неравенство (2.17) доказывается аналогично. Так как

$$(D_tG *_2 \Phi) = \int\limits_{E_{n-1}} dy' \int\limits_0^\infty D_tG(x'-y', x_n, \tau)[\Phi(y', t-\tau) - \Phi(y', t)]\,d\tau,$$

что аналогично представлению (2.21), но без второго и третьего членов правой части, то для разности потенциала $(D_tG *_2 \Phi)$ в точках $x$ и $z$ справедливо равенство, в правой части которого находятся первые три члена правой части (2.24) с ядром $\partial G/\partial t$ вместо $\partial G/\partial x_i$, и неравенство (2.17) доказывается с помощью точно таких же оценок, как и неравенство (2.16).

Переходим к доказательству оценок (2.18) — (2.20). Обозначим ядра $D_xG$, $D_tG$, $G$ потенциалов, подлежащих оценке, общим символом $\mathfrak{G}(x, t)$. Имеем

$$(\mathfrak{G} *_2 \Phi) = \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{E_{n-1}} \mathfrak{G}(x'-y', x_n, t-\tau)[\Phi(y', \tau) - \Phi(y', t)]\,dy' + \int\limits_{E_{n-1}} \Phi(y', t)\,dy' \int\limits_0^\infty \mathfrak{G}\,d\tau$$

и, считая для определенности, что $t > t'$, получим

$$\begin{aligned}(\mathfrak{G}(x, t) *_2 \Phi) - (\mathfrak{G}(x, t') *_2 \Phi) &= \int\limits_{2t'-t}^{t} d\tau \int\limits_{E_{n-1}} \mathfrak{G}(x'-y', x_n, t-\tau)[\Phi(y', \tau) - \Phi(y', t)]\,dy' - \\ &- \int\limits_{2t'-t}^{t'} d\tau \int\limits_{E_{n-1}} \mathfrak{G}(x'-y', x_n, t'-\tau)[\Phi(y', \tau) - \Phi(y', t')]\,dy' + \\ &+ \int\limits_{-\infty}^{2t'-t} d\tau \int\limits_{E_{n-1}} [\mathfrak{G}(x'-y', x_n, t-\tau) - \\ &- \mathfrak{G}(x'-y', x_n, t'-\tau)][\Phi(y', \tau) - \Phi(y', t')]\,dy' + \\ &+ \int\limits_{E_{n-1}} [\Phi(y', t) - \Phi(y', t')]\,dy' \int\limits_0^{2(t-t')} \mathfrak{G}(x'-y', x_n, \tau)\,d\tau.\end{aligned} \qquad (2.25)$$

Первые три члена правой части легко оцениваются с помощью неравенства (2.6). Только последний член оценивается по-разному в зависимости от того, что понимается под $\mathfrak{G}(x, t)$. Если $\mathfrak{G} = G$, то

$$\left| \int\limits_{E_{n-1}} [\Phi(y', t) - \Phi(y', t')]\, dy' \int\limits_0^{2(t-t')} G(x'-y', x_n, \tau)\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant (t-t')^{\frac{\alpha}{2}} \langle \Phi \rangle_{t, \widetilde{E}_n^{(T)}}^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_0^{2(t-t')} d\tau \int\limits_{E_{n-1}} |G(y', x_n, \tau)|\, dy' \leqslant$$

$$\leqslant c(t-t')^{\frac{\alpha+1}{2}} \langle \Phi \rangle_{t, \widetilde{E}_n^{(T)}}^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

При $\mathfrak{G} = \dfrac{\partial G}{\partial t}$ имеем

$$\left| \int\limits_{E_{n-1}} [\Phi(y', t) - \Phi(y', t')]\, dy' \int\limits_0^{2(t-t')} \frac{\partial G(x'-y', x_n, \tau)}{\partial \tau}\, d\tau \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{E_{n-1}} G(x'-y', x_n, 2(t-t'))\, [\Phi(y', t) - \Phi(y', t')]\, dy' \right| \leqslant$$

$$\leqslant (t-t')^{\frac{\alpha+1}{2}} \langle \Phi \rangle_{t, \widetilde{E}_n^{(T)}}^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} \int\limits_{E_{n-1}} |G(x'-y', x_n, 2(t-t'))|\, dy' \leqslant$$

$$\leqslant c(t-t')^{\frac{\alpha}{2}} \langle \Phi \rangle_{t, \widetilde{E}_n^{(T)}}^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

Пусть $\mathfrak{G} = \partial G/\partial x_i$, $\alpha < \frac{1}{2}$. Тогда

$$\int\limits_{E_{n-1}} [\Phi(y', t) - \Phi(y', t')]\, dy' \int\limits_0^{2(t-t')} \frac{\partial G(x'-y', x_n, \tau)}{\partial x_i}\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{2(t-t')} d\tau \int\limits_{E_{n-1}} [\Phi(y', t) - \Phi(x', t)] \frac{\partial G(x'-y', x_n, \tau)}{\partial x_i}\, dy' -$$

$$-\int_0^{2(t-t')} d\tau \int_{E_{n-1}} [\Phi(y', t') - \Phi(x', t')] \frac{\partial G(x'-y', x_n, \tau)}{\partial x_i} dy' +$$
$$+ [\Phi(x', t) - \Phi(x', t')] \int_0^{2(t-t')} d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{\partial G(x'-y', x_n, \tau)}{\partial x_i} dy'.$$

Так как

$$\int_0^{2(t-t')} d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_i} G(x'-y', x_n, \tau)\, dy' =$$
$$= -\frac{2}{b_n}\delta_{in} \int_0^{(2t-t')} d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_n} \Gamma(x'-y', x_n, \tau)\, dy',$$

то

$$\left| \int_{E_{n-1}} [\Phi(y', t) - \Phi(y', t')]\, dy' \int_0^{2(t-t')} \frac{\partial}{\partial x_i} G(x'-y', x_n, \tau)\, d\tau \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\langle\Phi\rangle^{(2\alpha)}_{x, \tilde{E}^{(T)}_n} \int_0^{2(t-t')} d\tau \int_{E_{n-1}} |x-y'|^{2\alpha} \left| \frac{\partial G(x'-y', x_n, \tau)}{\partial x_i} \right| dy' +$$
$$+ \frac{1}{|b_n|} \langle\Phi\rangle^{(\alpha)}_{t, \tilde{E}^{(T)}_n} (t-t')^{\alpha} \leqslant c\,(t-t')^{\alpha} \langle\Phi\rangle^{(2\alpha)}_{\tilde{E}^{(T)}_n}.$$

Нам осталось доказать неравенство (2.18) в случае $\alpha > \frac{1}{2}$. Заметим, что если $k \neq n$, то

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x_k} *_2 \Phi\right) = \left(G *_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right)$$

и в силу (2.20)

$$\left\langle \left(\frac{\partial G}{\partial x_k} *_2 \Phi\right) \right\rangle^{(\alpha)}_{t, \tilde{D}^{(T)}_{n+1}} =$$
$$= \left\langle \left(G *_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right) \right\rangle^{(\alpha)}_{t, \tilde{D}^{(T)}_{n+1}} \leqslant c \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right\rangle^{(2\alpha-1)}_{\tilde{E}^{(T)}_n} \leqslant c \langle\Phi\rangle^{(2\alpha)}_{\tilde{E}^{(T)}_n}.$$

Далее, из (1.34) получаем

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x_n} *_2 \Phi\right) = -\frac{2}{b_n}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_n} *_2 \Phi\right) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{b_n} \left(\frac{\partial G}{\partial x_k} *_2 \Phi\right).$$

Члены, стоящие под знаком суммы, только что оценены, а первый член правой части оценивается следующим образом:

$$\left|\int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{\partial\Gamma(y',x_n,\tau)}{\partial x_n}[\Phi(x'-y',t-\tau)-\Phi(x'-y',t'-\tau)]\,dy'\right| \leqslant$$

$$\leqslant (t-t')^\alpha \langle\Phi\rangle^{(\alpha)}_{t,\widetilde{E}_n^{(T)}} \int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} \left|\frac{\partial\Gamma(y',x_n,\tau)}{\partial x_n}\right| dy' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(t-t')^\alpha \langle\Phi\rangle^{(\alpha)}_{t,\widetilde{E}_n^{(T)}}.$$

Следовательно,

$$\left\langle\left(\frac{\partial G}{\partial x_n} *_2 \Phi\right)\right\rangle^{(\alpha)}_{t,\widetilde{D}_{n+1}^{(T)}} \leqslant c\,\langle\Phi\rangle^{(2\alpha)}_{\widetilde{E}_n^{(T)}},$$

и неравенство (2.18) доказано при любом $\alpha < 1$.

Итак, неравенства (2.16) — (2.20) доказаны.

Докажем теперь с помощью этих неравенств оценку (2.3). Так же как и оценки (2.1), (2.2), она сводится к доказательству того, что при $2r+s=l'+1$

$$\langle D_t^r D_x^s (G *_2 \Phi)\rangle^{(l-l')}_{x,\widetilde{D}_{n+1}^{(T)}} \leqslant c\,\langle\Phi\rangle^{(l)}_{\widetilde{E}_n^{(T)}} \tag{2.26}$$

и при $0 < l+1-2r-s < 2$

$$\langle D_t^r D_x^s (G *_2 \Phi)\rangle^{\left(\frac{l+1-2r-s}{2}\right)}_{t,\widetilde{D}_{n+1}^{(T)}} \leqslant c\,\langle\Phi\rangle^{(l)}_{\widetilde{E}_n^{(T)}}. \tag{2.27}$$

Так как $(G *_2 \Phi)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, то можно ограничиться доказательством неравенств (2.26), (2.27) для случая, когда $D_x^s = D_{x'}^s$ и $D_x^s = D_{x'}^{s-1} D_{x_n}$, т. е. оценить производные $D_t^r D_{x'}^{s-k} D_{x_n}^k (G *_2 \Phi)$ при $k \leqslant 1$.

Докажем для таких производных неравенство (2.26). Выберем числа $r_1 \leqslant r$ и $s_1 \leqslant s-k$ так, чтобы сумма $2r_1+s_1$ принимала максимальное значение, не превосходящее $l'$. Так как $k \leqslant 1$, то $2r_1+s_1 \geqslant l'-1$.

Пусть $r_2 = r-r_1$, $s_2 = s-k-s_1$. Имеем

$$D_t^r D_{x'}^{s-k} D_{x_n}^k (G *_2 \Phi) = D_t^{r_2} D_{x'}^{s_2} D_{x_n}^k \left(G *_2 D_t^{r_1} D_{x'}^{s_1} \Phi\right). \tag{2.28}$$

Предположим, что $r_1$ и $s_1$ можно так подобрать, что $2r_1+s_1=l'$. Так как $2r+s=l'+1$, то $2r_2+s_2+k=1$, откуда вытекает, что $r_2=0$, $s_2+k=1$.

Если же числа $r_1$ и $s_1$ нельзя подобрать так, чтобы $2r_1+s_1=l'$, но можно подобрать так, что $2r_1+s_1=l'-1$, то в этом случае $2r_2+k=2$, $s_2=0$ (иначе можно было бы увеличить $s_1$ на единицу и добиться того, чтобы $2r_1+s_1=l'$) и, следовательно, $k=0$, $r_2=1$.

Привлекая для оценки правой части (2.28) неравенство (2.16) или (2.17), в зависимости от значения $2r_1+s_1$, получим (2.26).

В (2.27) сумма $2r+s$ может принимать два возможных значения: $2r+s=l'+1$ и $2r+s=l'$.

В случае, если $2r+s=l'+1$, оценка (2.27) устанавливается точно так же, как (2.26), с помощью неравенств (2.18), (2.19).

Рассмотрим случай $2r+s=l'$. Если $2r_1+s_1=l'$, то тогда $r_2=s_2=k=0$, а если $2r_1+s_1=l'-1$, то $r_2=0$, $s_2=0$, $k=1$ и для доказательства неравенства (2.27) при $2r+s=l'$ следует пользоваться оценками (2.20) или (2.18).

Таким образом, неравенства (2.1) — (2.3) доказаны.

## § 3. Оценки тепловых потенциалов в нормах $W_q^l$

Докажем, что потенциалы, рассмотренные в предыдущих параграфах, удовлетворяют неравенствам

$$\langle\langle(\Gamma * f)\rangle\rangle_{q,E_{n+1}}^{(2m+2)} \leqslant c\,\langle\langle f\rangle\rangle_{q,E_{n+1}}^{(2m)}, \tag{3.1}$$

$$\langle\langle(\Gamma *_1 \varphi)\rangle\rangle_{q,D_{n+1}}^{(2m+2)} \leqslant c\,\langle\langle \varphi\rangle\rangle_{q,E_n}^{\left(2m+2-\frac{2}{q}\right)}, \tag{3.2}$$

$$\langle\langle(G *_2 \Phi)\rangle\rangle_{q,\widetilde{D}_{n+1}}^{(2m+2)} \leqslant c\,\langle\langle \Phi\rangle\rangle_{q,\widetilde{E}_n}^{\left(2m+1-\frac{1}{q}\right)}, \tag{3.3}$$

$$\left\langle\left\langle\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_n} *_2 \Phi\right)\right\rangle\right\rangle_{q,\widetilde{D}_{n+1}}^{(2m+2)} \leqslant c\,\langle\langle \Phi\rangle\rangle_{q,\widetilde{E}_n}^{\left(2m+2-\frac{1}{q}\right)}, \tag{3.4}$$

где $q>1$ и $m$ — неотрицательное целое число. Нормы, входящие в неравенства (3.1) — (3.4), определены в § 1 главы I.

Легко убедиться в том, что неравенства (3.1) — (3.4) при любом $m>0$ легко сводятся к таким же неравенствам с $m=0$. Для неравенства (3.1) это вытекает из следующего свойства объемного потенциала $(\Gamma * f)$, которым мы уже пользовались выше:

$$D_t^r D_x^s (\Gamma * f) = (\Gamma * D_t^r D_x^s f).$$

Остальные потенциалы удовлетворяют уравнению теплопроводности. Поэтому, например, вместо (3.2) достаточно установить неравенство

$$\sum_{(s=2m+2)} \langle\langle D_x^s (\Gamma *_1 \varphi)\rangle\rangle_{q,\, D_{n+1}}^{(2m+2)} \leqslant c \langle\langle\varphi\rangle\rangle_{q,\, E_n}^{\left(2m+2-\frac{2}{q}\right)},$$

а вместо (3.3) —

$$\sum_{\substack{2r+s=2m+2\\ k\leqslant 1}} \langle\langle D_t^r D_{x'}^{s-k} D_{x_n}^k (G *_2 \Phi)\rangle\rangle_{q,\, \tilde{D}_{n+1}^{(T)}}^{(2m+2)} \leqslant c \langle\langle\Phi\rangle\rangle_{q,\, \tilde{E}_n^{(T)}}^{\left(2m+1-\frac{1}{q}\right)}.$$

Так как

$$D_x^s (\Gamma *_1 \varphi) = (\Gamma *_1 D_x^s \varphi),$$

$$D_t^r D_{x'}^{s'} (G *_2 \Phi) = (G *_2 D_t^r D_x^{s'} \Phi),$$

то очевидно, что неравенства (3.2), (3.3) с $m>0$ вытекают из этих же неравенств с $m=0$. То же самое относится к (3.4).

Поэтому мы будем доказывать неравенства (3.1) — (3.4), предполагая, что $m=0$. Для доказательства (3.1) воспользуемся теоремой о мультипликаторах в интегралах Фурье [43].

Обозначим через $\tilde{f}(\xi, \xi_0)$ преобразование Фурье функции $f(x, t)$ по переменным $x$ и $t$:

$$\tilde{f}(\xi, \xi_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{E_n} e^{-ix\xi}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\xi_0} f(x, t)\, dt,$$

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}} (i\xi_0 + \xi^2)}.$$

Согласно известной теореме о преобразовании Фурье свертки двух функций

$$\widetilde{(\Gamma * f)} = (2\pi)^{\frac{n+1}{2}} \tilde{\Gamma}\tilde{f} = \frac{\tilde{f}}{i\xi_0 + \xi^2},$$

и, следовательно,

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\Gamma * f)} = \frac{i\xi_0}{i\xi_0 + \xi^2}\tilde{f}, \quad \overline{\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_j}(\Gamma * f)} = -\frac{\xi_k\xi_j}{i\xi_0 + \xi^2}\tilde{f}.$$

Функции $\Lambda_0(\xi_0, \xi) = \frac{i\xi_0}{i\xi_0 + \xi^2}$ и $\Lambda_{jk}(\xi_0, \xi) = -\frac{\xi_k\xi_j}{i\xi_0 + \xi^2}$ удовлетворяют условиям

$$\left|\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_s}\frac{\partial^s\Lambda}{\partial\xi_{i_1}\ldots\partial\xi_{i_s}}\right| \leqslant c \tag{3.5}$$

при $s = 1, \ldots, n+1$, $i_j = 0, \ldots, n$ и $i_k \neq i_j$ $(k \neq j)$. Значит, они являются мультипликаторами класса $(L_q, L_q)$ *) и имеет место оценка

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}(\Gamma * f)\right\|_{q, E_{n+1}} + \sum_{k, j=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_j}(\Gamma * f)\right\|_{q, E_{n+1}} =$$

$$= \langle\langle(\Gamma * f)\rangle\rangle^{(2)}_{q, E_{n+1}} \leqslant c\,\|f\|_{q, E_{n+1}},$$

представляющая собой неравенство (3.1) с $m = 0$. Таким образом, неравенство (3.1) доказано.

Переходим к доказательству (3.2).

Пусть $\mathfrak{G}(x, t)$ — символ, обозначающий $D_t\Gamma$ или $D_x^2\Gamma$. Ядро $\mathfrak{G}(x, t)$ является четным по совокупности переменных $x$ и, кроме того, при любом $t > 0$

$$\int_{E_n}\mathfrak{G}(x, t)\,dx = 0.$$

Поэтому

$$(\mathfrak{G} *_1 \varphi) = \frac{1}{2}\int_{E_n}\mathfrak{G}(y, t)\,[\varphi(x-y) - 2\varphi(x) + \varphi(x+y)]\,dy$$

---

*) Хотя в формулировке основной теоремы [43], которая здесь используется, вместо неравенства (3.5) фигурирует несколько более сильное условие, из доказательства совершенно ясно, что теорема справедлива и при условии (3.5).

и

$$\|(\mathfrak{G} *_1 \varphi)\|_{q, E_n} \leqslant \frac{1}{2} \int_{E_n} |\mathfrak{G}(y, t)| N(y)\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{t^{\frac{n+2}{2}}} \int_{E_n} e^{-\frac{y^2}{8t}} N(y)\, dy,$$

где

$$N(y) = \|\varphi(x-y) - 2\varphi(x) + \varphi(x+y)\|_{q, E_n}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\|(\mathfrak{G} *_1 \varphi)\|_{q, E_n} \leqslant \frac{c}{t^{\frac{n+2}{2}}} \left( \int_{E_n} e^{-\frac{y^2}{8t}} N^q(y)\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{E_n} e^{-\frac{y^2}{8t}}\, dy \right)^{1-\frac{1}{q}} =$$

$$= \frac{c}{t^{1+\frac{n}{2q}}} \left( \int_{E_n} e^{-\frac{y^2}{8t}} N^q(y)\, dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

и вследствие леммы 2.1 главы II

$$\|(\mathfrak{G} *_1 \varphi)\|_{q, D_{n+1}} \leqslant c \left( \int_0^\infty \frac{dt}{t^{q+\frac{n}{2}}} \int_{E_n} e^{-\frac{y^2}{8t}} N^q(y)\, dy \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c \left( \int_{E_n} \int_{E_n} \frac{|\varphi(x-y) - 2\varphi(x) + \varphi(x-y)|^q}{|y|^{n-2+2q}}\, dx\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant c \langle\langle \varphi \rangle\rangle_{q, E_n}^{\left(2-\frac{2}{q}\right)},$$

что и требовалось.

Оценка (3.3) при $m = 0$ сводится к неравенствам

$$\left\| \left( \frac{\partial G}{\partial t} *_2 \Phi \right) \right\|_{q, \widetilde{D}_{n+1}} \leqslant c \langle\langle \Phi \rangle\rangle_{q, \widetilde{E}_n}^{\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \tag{3.6}$$

$$\left\| \left( D_{x'}^{2-k} D_{x_n}^k G *_2 \Phi \right) \right\|_{q, \widetilde{D}_{n+1}} \leqslant c \langle\langle \Phi \rangle\rangle_{q, \widetilde{E}_n}^{\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \quad k = 0,\ 1, \tag{3.7}$$

а в случае $n = 1$ — только к (3.6).

Докажем (3.6). Заметим, что

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t} *_2\Phi\right) = \\ = \int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{\partial G(y', x_n, \tau)}{\partial \tau} [\Phi(x'-y', t-\tau) - \Phi(x'-y', t)]\, dy',$$

поэтому в силу (2.6)

$$\left\|\left(\frac{\partial G}{\partial t} *_2\Phi\right)\right\|_{q, \widetilde{E}_n} \leqslant \int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} \left|\frac{\partial G(y', x_n, \tau)}{\partial \tau}\right| N_1(\tau)\, dy' \leqslant \\ \leqslant c \int_0^\infty e^{-\frac{x_n^2}{8\tau}} N_1(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{\frac{3}{2}}},$$

где

$$N_1(\tau) = \| \Phi(x', t-\tau) - \Phi(x', t) \|_{q, \widetilde{E}_n}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\left\|\left(\frac{\partial G}{\partial t} *_2\Phi\right)\right\|_{q, \widetilde{E}_n} \leqslant c \left( \int_0^\infty e^{-\frac{x_n^2}{8\tau}} N_1^q(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{\frac{3}{4}+\frac{q}{2}}} \right)^{\frac{1}{q}} \times \\ \times \left( \int_0^\infty e^{-\frac{x_n^2}{8\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+\frac{q'}{4q}}} \right)^{\frac{1}{q'}} = \frac{c}{x_n^{\frac{1}{2q}}} \left( \int_0^\infty e^{-\frac{x_n^2}{8\tau}} N_1^q(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{\frac{3}{4}+\frac{q}{2}}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ \left(\frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q}\right).$$

Образуем теперь норму $L_q$ обеих частей по переменной $x_n$ на полуоси $x_n > 0$. Будем иметь

$$\left\|\left(\frac{\partial G}{\partial t} *_2\Phi\right)\right\|_{q, \widetilde{D}_{n+1}} \leqslant c \left( \int_0^\infty N_1^q(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{\frac{3}{4}+\frac{q}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{x_n^2}{8\tau}} \frac{dx_n}{x_n^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ = c \left( \int_0^\infty N_1^q(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{\frac{1}{2}+\frac{q}{2}}} \right)^{\frac{1}{q}} = c \langle\langle \Phi \rangle\rangle_{q, t, \widetilde{E}_n}^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}\right)},$$

и (3.6) доказано.

При доказательстве (3.7) следует считать, что $n > 1$. Воспользуемся тем, что

$$\left(D_{x'}^{2-k} D_{x_n}^k G *_2 \Phi\right) = \int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} D_{y'}^{2-k} D_{x_n}^k G(y', x_n, \tau) \times$$
$$\times [\Phi(x'-y', t-\tau) - \Phi(x', t-\tau)]\, dy'.$$

Следовательно,

$$\left\| \left(D_{x'}^{2-k} D_{x_n}^k G *_2 \Phi\right) \right\|_{q, \tilde{E}_n} \leqslant c \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{\frac{n+2}{2}}} \int_{E_{n-1}} e^{-\frac{y'^2 + x_n^2}{8\tau}} N_2(y')\, dy' =$$

$$= c' \int_{E_{n-1}} \frac{N_2(y')\, dy'}{\left(y'^2 + x_n^2\right)^{\frac{n}{2}}} \leqslant c' \left( \int_{E_{n-1}} \frac{N_2^q(y')\, dy'}{\left(y'^2 + x_n^2\right)^{\frac{n-1}{2} + \frac{q}{2} - \frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left( \int_{E_{n-1}} \frac{dy'}{\left(y'^2 + x_n^2\right)^{\frac{n-1}{2} + \frac{q'}{4q}}} \right)^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= c'' \frac{1}{x_n^{\frac{1}{2q}}} \left( \int_{E_{n-1}} \frac{N_2^q(y')\, dy'}{\left(y'^2 + x_n^2\right)^{\frac{n-1}{2} + \frac{q}{2} - \frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{q}},$$

где

$$N_2(y') = \| \Phi(x'-y', t) - \Phi(x', t) \|_{q, \tilde{E}_n},$$

и

$$\left\| \left(D_{x'}^{2-k} D_{x_n}^k G *_2 \Phi\right) \right\|_{q, \tilde{D}_{n+1}} \leqslant$$

$$\leqslant c \left( \int_{E_{n-1}} N_2^q(y')\, dy' \int_0^\infty \frac{dx_n}{x_n^{\frac{1}{2}} \left(y'^2 + x_n^2\right)^{\frac{n-1}{2} + \frac{q}{2} - \frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c \int_{E_{n-1}} \frac{N_2^q(y')\, dy'}{|y'|^{n-2+q}} = c \langle\langle \Phi \rangle\rangle_{q, x, \tilde{E}_n}^{\left(1 - \frac{1}{q}\right)}.$$

Таким образом, мы доказали оценку (3.3).

Осталось доказать оценку (3.4), которая, как и (3.3), сводится к неравенствам

$$\left\| \left( \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial x_n} *{}_2 \Phi \right) \right\|_{q,\, \tilde{D}_{n+1}} \leqslant c \langle\langle \Phi \rangle\rangle_{q,\, \tilde{E}_n}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)}, \tag{3.8}$$

$$\left\| D_{x'}^{2-k} D_{x_n}^{k} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial x_n} *{}_2 \Phi \right) \right\|_{q,\, \tilde{D}_{n+1}} \leqslant c \langle\langle \Phi \rangle\rangle_{q,\, \tilde{E}_n}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)}, \quad k = 0,\ 1. \tag{3.9}$$

Так как

$$\left( \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial x_n} *{}_2 \Phi \right) = \int_0^\infty d\tau \int_{E_{n-1}} \frac{\partial^2 \Gamma (y', x_n, \tau)}{\partial x_n \partial \tau} [\Phi(x'-y', t-\tau) - \\ - \Phi(x'-y', t)]\, dy',$$

то (3.8) доказывается так же, как (3.6). Что касается неравенства (3.9), то его можно свести к уже доказанной оценке (3.3) с $m = 0$, если воспользоваться уравнением (1.34). Имеем

$$D_{x'}^{2-k} D_{x_n}^{k} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial x_n} *{}_2 \Phi \right) = D_{x'}^{1-k} D_{x_n}^{k} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial x_n} *{}_2 D_{x'} \Phi \right) = \\ = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^{1-k} D_{x_n}^{k} (G *{}_2 D_{x'} \Phi) \quad (k = 0,\ 1).$$

Оценивая стоящие в правой части производные второго потенциала $(G *{}_2 D_{x'} \Phi)$ с помощью (3.3), получим

$$\left\| D_{x'}^{2-k} D_{x_n}^{k} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial x_n} *{}_2 \Phi \right) \right\|_{q,\, \tilde{D}_{n+1}} \leqslant \\ \leqslant c \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle\right\rangle_{q,\, \tilde{E}_n}^{\left(1-\frac{1}{q}\right)} \leqslant c \langle\langle \Phi \rangle\rangle_{q,\, \tilde{E}_n}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)}.$$

Оценки (3.1) — (3.4) доказаны.

## § 4. Области. Некоторые вспомогательные предложения

В этом параграфе собраны определения и вспомогательные предложения, используемые только в данной главе и отчасти в § 10 главы VII.

Ниже мы будем изучать краевые задачи для уравнения с переменными коэффициентами в областях цилиндрической формы $Q_T = \Omega \times (0, T) \subset E_{n+1}$, где $T > 0$ — некоторое конечное число, а $\Omega$ — область в пространстве $E_n$.

Сейчас мы сформулируем те требования, которые предъявляются к области.

Область $\Omega$ и ее граница $S$ могут быть как конечными, так и бесконечными; граница $S$ должна быть достаточно гладкой. В каждой точке граница должна иметь касательную плоскость. Пусть $\mathfrak{n}(\xi)$ — единичный вектор внешней нормали к $S$ в точке $\xi$. Прямоугольную систему координат $\{y\}$ с началом в $\xi$, ось $y_n$ которой направлена вдоль $\mathfrak{n}(\xi)$, мы, как обычно, называем местной системой координат. Предполагается, что существует такое число $d > 0$, что в сфере радиуса $d$ с центром в любой точке $\xi \in S$ поверхность $S$ задается в местной системе в точке $\xi$ уравнением

$$y_n = F(y') \qquad (y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})), \tag{4.1}$$

где $F$ — однозначная функция. Будем говорить, что $S \in H^l$ ($S \in C^m$), если для любой $\xi \in S$, $F(y') \in H^l(K_0)$ или $F(y') \in C^m(K_0)$, где $K_0$ — шар $|y'| \leqslant \frac{d}{2}$, и если нормы $|F|_{K_0}^{(l)}$ или соответственно $|F|_{K_0}^{(m)}$ ограничены общей постоянной. Мы будем считать, что по меньшей мере $S \in H^{1+\alpha}$; $0 < \alpha \leqslant 1$. При этом в окрестности $\xi$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y_k}\right| \leqslant c\,|y'|^{\alpha}. \tag{4.2}$$

Будем предполагать, что в области $\Omega$ для любого сколь угодно малого $\lambda > 0$ можно построить конечное или счетное (при неограниченной $\Omega$) число подобластей $\omega^{(k)}$ и $\Omega^{(k)}$, обладающих следующими свойствами:

1. $$\omega^{(k)} \subset \Omega^{(k)} \subset \Omega, \qquad \bigcup_k \omega^{(k)} = \bigcup_k \Omega^{(k)} = \Omega.$$

2. Для любой точки $x \in \Omega$ найдется такое $\omega^{(k)}$, что $x \in \omega^{(k)}$ и расстояние от $x$ до $\Omega \setminus \omega^{(k)}$ не меньше, чем $d\lambda$ $(d > 0)$.

3. Существует такое $N_0$, не зависящее от $\lambda$, что пересечение любых $N_0 + 1$ различных $\Omega^{(k)}$ (и тем более $\omega^{(k)}$) пусто.

4. Множества $\omega^{(k)}$ и $\Omega^{(k)}$, отстоящие на некоторое положительное расстояние от границы $S$ (множество их номеров $k$ мы обозначаем через $\mathfrak{M}$), — это $n$-мерные кубы с общим центром $\xi^{(k)} \subset \Omega$, линейные размеры которых равны соответственно $\beta\lambda$ и $2\beta\lambda$ ($\beta > 0$), а множества $\omega^{(k)}$ и $\Omega^{(k)}$, примыкающие к границе (множества их номеров обозначаются через $\mathfrak{N}$), определяются в местных координатах в точке $\xi^{(k)} \in S$ неравенствами

$$|y_\alpha| < \frac{\lambda}{2} \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1); \quad 0 < y_n - F(y') < \lambda,$$

$$|y_\alpha| < \lambda \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1); \quad 0 < y_n - F(y') < 2\lambda.$$

Множество подобластей $\omega^{(k)}$ будем обозначать через $\mathfrak{k}^{(\lambda)}$, а подобластей $\Omega^{(k)}$ — через $\mathfrak{K}^{(\lambda)}$.

Можно показать (мы этого делать не будем), что в областях с гладкими границами, удовлетворяющих сформулированным выше условиям, при любом $\lambda > 0$ можно построить системы подобластей $\mathfrak{k}^{(\lambda)}$ и $\mathfrak{K}^{(\lambda)}$.

Замена переменных

$$z_\alpha = y_\alpha \, (\alpha < n), \qquad z_n = y_n - F(y') \tag{4.3}$$

переводит область $\Omega^{(k)} \, (k \in \mathfrak{N})$ в куб

$$|z_\alpha| < \lambda, \qquad 0 < z_n < 2\lambda,$$

который обозначается через $\mathfrak{K}$. Его грань $|z_\alpha| < \lambda$, $z_n = 0$ обозначается через $\sigma$. Мы полагаем также

$$s^{(k)} = \overline{\omega}^{(k)} \cap S, \quad S^{(k)} = \overline{\Omega}^{(k)} \cap S \qquad (k \in \mathfrak{N}).$$

Введем функции $\zeta^{(k)}(x)$, обладающие свойствами

$$0 \leqslant \zeta^{(k)} \leqslant 1, \quad |D_x^s \zeta^{(k)}| \leqslant \frac{c_s}{\lambda^s}, \quad \zeta^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \omega^{(k)}, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \setminus \Omega^{(k)}. \end{cases}$$

В силу свойства 3 областей $\Omega^{(k)}$

$$1 \leqslant \sum_k \zeta^{(k)^2}(x) \leqslant N_0,$$

и поэтому функции

$$\eta^{(k)}(x) = \frac{\zeta^{(k)}(x)}{\sum_j \zeta^{(j)^2}(x)}$$

обладают свойствами: $\eta^{(k)} = 0$ в $\Omega \setminus \Omega^{(k)}$,

$$\left| D^s \eta^{(k)}(x) \right| \leqslant \frac{c_s}{\lambda^s}$$

и, кроме того,

$$\sum_k \eta^{(k)}(x) \zeta^{(k)}(x) = 1. \tag{4.4}$$

Переходим к доказательству необходимых вспомогательных предложений для функций из гёльдеровских классов $H^{l, \frac{l}{2}}(\bar{Q}_T)$ и из классов $W_q^{2m, m}(\bar{Q}_T)$.

Сначала мы рассмотрим вопрос о продолжении функций из этих классов.

Пусть $V$ и $V_1$ — две области в некотором евклидовом пространстве, причем $V \subset V_1$, и пусть функция $u$ задана в $V$ и принадлежит некоторому функциональному пространству $\mathfrak{B}(V)$ с нормой $\| u \|_V$. Говорят, что она продолжена с сохранением класса в область $V_1$, если в $V_1$ построена функция $u^*$, совпадающая в $V$ с $u$ и принадлежащая пространству $\mathfrak{B}(V_1)$, причем

$$\| u^* \|_{V_1} \leqslant c \| u \|_V$$

с постоянной, не зависящей от $u$.

Рассмотрим сначала случай, когда области $V$ и $V_1 \setminus V$ симметричны относительно некоторой плоскости. Пусть для определенности $V$ — полупространство $D_{n+1}$, а $V_1$ — все пространство $E_{n+1}$ и нужно продолжить в $E_{n+1}$ функцию $u(x, t)$, заданную в $D_{n+1}$, т. е. при $t > 0$. Продолжим ее в область $t < 0$, положив при $t < 0$

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{N} \lambda_l u\left(x, -\frac{t}{l}\right), \tag{4.5}$$

где $\lambda_l$ — числа, определяемые из линейной системы уравнений

$$\sum_{l=1}^{N} \lambda_l \left(-\frac{1}{l}\right)^s = 1 \qquad (s = 0, \ldots, N-1).$$

Легко проверить с помощью этой системы, что всякая достаточно гладкая функция, продолженная указанным способом, будет иметь по крайней мере $N-1$ непрерывных производных $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ $(k=0, \ldots, N-1)$ на плоскости $t=0$.

Приведенная конструкция продолжения функций принадлежит Хестенсу и Уитни и описана, например, в курсе анализа [64].

С помощью совершенно элементарных оценок можно показать, что продолжение функций по указанному способу является продолжением с сохранением любого из употребляемых нами классов. В частности, справедливы неравенства

$$\langle u\rangle_{E_{n+1}}^{(l)} \leqslant c\,\langle u\rangle_{D_{n+1}}^{(l)}, \quad |u|_{E_{n+1}}^{(l)} \leqslant c\,|u|_{D_{n+1}}^{(l)}, \tag{4.6}$$

а также

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q,\,E_{n+1}}^{(l)} \leqslant c\,\langle\langle u\rangle\rangle_{q,\,D_{n+1}}^{(l)}, \quad \|u\|_{q,\,E_{n+1}}^{(l)} \leqslant c\,\|u\|_{q,\,D_{n+1}}^{(l)} \tag{4.7}$$

при любом $l \geqslant 0$, как целом, так и нецелом, если только $N \geqslant \left[\frac{l}{2}\right]$ ($N$ — число слагаемых в (4.5)).

Разумеется, описанный способ продолжения функций сохраняет класс не только при продолжении из полупространства на все пространство, но и при продолжении из области $\Omega \times (0, T)$ в $\Omega \times (-T, T)$, а также при продолжении по пространственным переменным $x$ (ниже мы будем продолжать таким образом функции из области $R^{(T)}$ в $D_{n+1}^{(T)}$ по переменной $x_n$).

С помощью этого способа можно продолжать функции и из областей с криволинейными границами. Для этого надо построить в рассматриваемой области $\Omega$ достаточно мелкое «разбиение единицы»

$$1 = \sum_k \psi_k$$

(можно воспользоваться разбиением единицы (4.4)). Тогда продолжение функции $u$ сводится к продолжению функции $u_k = u\psi_k$ для таких $k$, для которых граница носителя функции $\psi_k$ имеет общую часть $S_k$ с границей $S$ области $\Omega$. А это можно сделать указанным выше способом после «распрямления» $S_k$.

Таким образом, можно доказать следующую используемую ниже теорему.

Теорема 4.1. *Пусть $\Omega \subset E_n$ — конечная или бесконечная область, удовлетворяющая условиям, сформулированным в начале параграфа, и ее граница $S$ принадлежит классу $H^l$. Тогда всякую функцию $u(x) \in H^l(\overline{\Omega})$ можно продолжить с сохранением класса на все пространство $E_n$.*

Аналогичная теорема справедлива и для пространств $W_q^l(\Omega)$ (для целых $l$ она доказана в [3$_I$]).

Кроме продолжения с сохранением класса из меньшей области в бо́льшую область той же размерности, мы будем использовать продолжение функций, заданных в пространстве $E_n$, в область $D_{n+1}^{(T)}$ большей размерности. Мы будем делать это, решая задачу Коши (1.2), решение которой можно рассматривать как продолжение функции $\varphi(x)$, определяющей начальные условия, в область $D_{n+1}^{(T)}$. Прежде всего заметим, что из оценок § 2 вытекает следующий результат:

Теорема 4.2. *Если $f \in H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{D}_{n+1})$, $\varphi \in H^{l+2}(\overline{E}_n)$, то решение* (1.12) *задачи* (1.2) *удовлетворяет неравенству*

$$\langle u \rangle_{D_{n+1}}^{(l+2)} \leqslant c\left(\langle f \rangle_{D_{n+1}}^{(l)} + \langle \varphi \rangle_{E_n}^{(l+2)}\right)$$

*с постоянной $c$, зависящей только от $n$ и $l$.*

Доказательство. Продолжим функцию $f$ из $D_{n+1}$ в $E_{n+1}$ по формуле (4.5) с $N = \left[\frac{l}{2}\right]$; тогда согласно (4.6)

$$\langle f \rangle_{E_{n+1}}^{(l)} \leqslant c_l \langle f \rangle_{D_{n+1}}^{(l)}.$$

В силу (2.1) и (2.2) с $T = \infty$ для функции (1.12) справедлива оценка

$$\langle u \rangle_{D_{n+1}}^{(l+2)} \leqslant c\left(\langle f \rangle_{E_{n+1}}^{(l)} + \langle \psi \rangle_{E_n}^{(l+2)}\right) \leqslant c\left(\langle f \rangle_{D_{n+1}}^{(l)} + \langle \varphi \rangle_{E_n}^{(l+2)} + \right.$$
$$\left. + \langle (\Gamma * f) \rangle_{E_n}^{(l+2)}\right) \leqslant c\left(\langle f \rangle_{D_{n+1}}^{(l)} + \langle \varphi \rangle_{E_n}^{(l+2)}\right),$$

и теорема доказана.

Эта теорема позволяет построить в области $D_{n+1}^{(T)}$ функцию из класса $H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{D_{n+1}^{(T)}})$ по заданному ее значению и значению некоторых ее производных при $t = 0$.

Теорема 4.3. *Пусть в пространстве $E_n$ заданы функции $\varphi_j(x) \in H^{l-2j}(\overline{E}_n)$ $\left(j = 0, \ldots, \left[\frac{l}{2}\right]\right)$, причем $l$—про-*

*произвольное положительное нецелое число. Можно построить функцию* $u(x, t) \in H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{D_{n+1}^{(T)}})$ *такую, что*

$$\left.\frac{\partial^j u(x, t)}{\partial t^j}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \tag{4.8}$$

$$|u|^{(l)}_{D^{(T)}_{n+1}} \leqslant c \sum_{j=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} |\varphi_j|^{(l-2j)}_{E_n} \tag{4.9}$$

*при любом конечном* $T$ *и*

$$\langle u\rangle^{(l)}_{D_{n+1}} \leqslant c \sum_{j=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \langle\varphi_j\rangle^{(l-2j)}_{E_n}. \tag{4.10}$$

Доказательство. Пусть $l > 2$. Введем функции

$$\psi_j(x) = \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (-1)^s \Delta^s \varphi_{j-s}(x) \qquad \left(j = 0, \ldots, \left[\frac{l}{2}\right]\right). \tag{4.11}$$

Всякая функция $u(x, t)$, заданная при $t > 0$ и удовлетворяющая условию (4.8), удовлетворяет также условию

$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)^j u(x, t)\right|_{t=0} = \psi_j(x) \tag{4.12}$$

и наоборот. Проверим, что из (4.12) вытекает (4.8). Условия (4.12) можно записать в виде

$$\sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (-1)^s \Delta^s \left[\left.\frac{\partial^{j-s} u(x, t)}{\partial t^{j-s}}\right|_{t=0} - \varphi_{j-s}(x)\right] = 0$$

$$\left(j = 0, \ldots, \left[\frac{l}{2}\right]\right). \tag{4.13}$$

Из уравнения, соответствующего $j = 0$, получаем

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x).$$

Пользуясь этим равенством, мы получим из уравнения, соответствующего $j = 1$, условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x)$$

и т. д.

Определим функцию $u(x, t)$ из задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^{(1)}(x, t), \quad u|_{t=0} = \psi_0(x) = \varphi_0(x),$$

функцию $u^{(1)}$ — из задачи

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} - \Delta u^{(1)} = u^{(2)}, \quad u^{(1)}|_{t=0} = \psi_1(x)$$

и т. д., а функцию $u^{\left(\left[\frac{l}{2}\right]\right)}$ — из задачи

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u^{\left(\left[\frac{l}{2}\right]\right)} = 0, \quad u^{\left(\left[\frac{l}{2}\right]\right)}\Big|_{t=0} = \psi_{\left[\frac{l}{2}\right]}(x).$$

Так как $u^{(j)} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)^j u$, то функция $u(x, t)$ удовлетворяет условиям (4.12) и, следовательно, (4.8). При этом в силу теоремы 4.3

$$\langle u\rangle^{(l)}_{D_{n+1}} \leqslant c_1\left(\langle u^{(1)}\rangle^{(l-2)}_{D_{n+1}} + \langle\psi_0\rangle^{(l)}_{E_n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c_2\left(\langle u^{(2)}\rangle^{(l-4)}_{D_{n+1}} + \langle\psi_0\rangle^{(l)}_{E_n} + \langle\psi_1\rangle^{(l-2)}_{E_n}\right) \leqslant \ldots \leqslant c\sum_{j=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \langle\psi_j\rangle^{(l-2j)}_{E_n}.$$

Но из (4.11) вытекает, что

$$\langle\psi_j\rangle^{(l-2j)}_{E_n} \leqslant c\sum_{s=0}^{j} \langle\varphi_{j-s}\rangle^{(l-2j+2s)}_{E_n},$$

поэтому

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \langle\psi_j\rangle^{(l-2j)}_{E_n} \leqslant c\sum_{j=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \langle\varphi_j\rangle^{(l-2j)}_{E_n},$$

и неравенство (4.10) доказано.

Мы предполагали, что $l > 2$. При $l < 2$ можно взять $u(x, t) = \varphi_0(x)$.

Остается доказать, что при любом конечном $T$ выполняется неравенство (4.9). Для этого воспользуемся тождеством

$$g(x, t) = \sum_{l=0}^{k} \frac{t^l}{l!} \frac{\partial^l g(x, \tau)}{\partial \tau^l}\bigg|_{t=0} +$$
$$+ \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{k-1} \left[ \frac{\partial^k g(x, \tau)}{\partial \tau^k} - \frac{\partial^k g(x, \tau)}{\partial \tau^k}\bigg|_{\tau=0} \right] d\tau.$$

Из этого тождества вытекает, что при любом $\alpha < 1$

$$|g(x, t)|^{(0)}_{D^{(\tau)}_{n+1}} \leqslant c_1(T) \sum_{l=0}^{k} \left| \left| \frac{\partial^l g(x, \tau)}{\partial \tau^l} \right|^{(0)}_{\tau=0} \right|_{E_n} + c_2(T) \langle g \rangle^{(k+\alpha)}_{t, D^{(\tau)}_{n+1}}. \tag{4.14}$$

Возьмем в качестве $g$ функцию $D^r_t D^s_x u$ с $2r + s < l$ и положим $k = \left[\frac{l-2r-s}{2}\right]$, $\alpha = \frac{l-2r-s}{2} - \left[\frac{l-2r-s}{2}\right]$. Оценивая второй член правой части (4.14) с помощью уже доказанного неравенства (4.10), мы получим оценку (4.9).

Таким образом, теорема доказана полностью.

Аналогичный результат для пространств $W^{2m,\,m}_q\left(D^{(T)}_{n+1}\right)$ формулируется следующим образом.

Теорема 4.4. *Пусть заданы функции* $\varphi_j \in W_q^{2m-2j-\frac{2}{q}}(E_n)$ $(j = 0, \ldots, m-1;\ m \geqslant 1)$. *В области* $D_{n+1}$ *можно построить функцию* $u(x, t)$ *такую, что при любом* $T > 0$

$$u \in \dot{W}^{2m,\,m}_q\left(D^{(T)}_{n+1}\right), \quad \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=0} = \varphi_j(x),$$
$$\|u\|^{(2m)}_{q,\,D^{(T)}_{n+1}} \leqslant c \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|^{\left(2m-2j-\frac{2}{q}\right)}_{q,\,E_n}$$

и

$$\langle\langle u \rangle\rangle^{(2m)}_{q,\,D_{n+1}} \leqslant c \sum_{j=0}^{m-1} \langle\langle \varphi_j \rangle\rangle^{\left(2m-2j-\frac{2}{q}\right)}_{q,\,E_n}.$$

Этот результат хорошо известен [6], [$25_2$]. Теорема 4.3 также известна, но она в теории функций обычно рассматривается как частный случай соответствующих результатов для пространств $H_q^{l, \frac{l}{2}}$ С. М. Никольского [45], которыми мы не пользуемся.

Сформулируем теперь важное для дальнейшего определение.

Множество функций из класса $H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющих нулевым начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \quad \left(k = 0, \ldots, \left[\frac{l}{2}\right]\right), \tag{4.15}$$

назовем пространством $\overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$.

Аналогично множество функций из класса $W_q^{2m, m}(Q_T)$, удовлетворяющих нулевым начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \qquad (k = 0, \ldots, m-1),$$

назовем пространством $\overset{\circ}{W}{}_q^{2m, m}(Q_T)$.

Эти пространства обладают следующим свойством: нулевое продолжение функций из этих пространств в область $t < 0$ является продолжением с сохранением класса.

Для функций из $\overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$ справедливы следующие утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть* $\Omega' \subseteq \Omega$, $Q'_\tau = \Omega' \times (0, \tau)$. *Если* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2}}(Q'_\tau)$, *то для всех целых* $j < l$

$$\langle u \rangle_{Q'_\tau}^{(j)} \leqslant c\tau^{\frac{l-j}{2}} \langle u \rangle_{t, Q'_\tau}^{\left(\frac{l}{2}\right)}.$$

Эта лемма очевидна.

Возьмем произвольное малое $\lambda$ и рассмотрим систему подмножеств $\mathfrak{K}^{(\lambda)}$. Пусть $Q_\tau^{(k)} = \Omega^{(k)} \times (0, \tau)$. Для всякой функции $u \in H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{Q}_\tau)$, очевидно, конечна следующая норма:

$$\{u\}_{Q_\tau}^{(l)} = \sup_k \langle u \rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l)}. \tag{4.16}$$

Лемма 4.2. *Пусть*

$$\tau = \lambda^2 \varkappa, \tag{4.17}$$

*причем* $\varkappa \leqslant 1$, $\lambda^{2b}\varkappa \leqslant T$. *Тогда в классе* $\overset{\circ}{H}{}^{l,\frac{l}{2}}(\overline{Q}_\tau)$ *нормы* $\langle u\rangle^{(l)}_{Q_\tau}$ *и* $\{u\}^{(l)}_{Q_\tau}$ *эквивалентны*:

$$\{u\}^{(l)}_{Q_\tau} \leqslant \langle u\rangle^{(l)}_{Q_\tau} \leqslant c\,\{u\}^{(l)}_{Q_\tau} \tag{4.18}$$

*и постоянная* $c$ *не зависит от* $\lambda$ *и* $\varkappa$.

Доказательство. Левое неравенство (4.18) совершенно очевидно. Очевидно также, что

$$\langle u\rangle^{\left(\frac{l}{2}\right)}_{t,\,Q_\tau} \leqslant c \sup_k \langle u\rangle^{\left(\frac{l}{2}\right)}_{t,\,Q_\tau^{(k)}} \leqslant c\,\{u\}^{(l)}_{Q_\tau}.$$

Остается показать, что $\langle u\rangle^{(l)}_{x,\,Q_\tau} \leqslant c\,\{u\}^{(l)}_{Q_\tau}$. Пусть $2r+s=l'$; рассмотрим функцию

$$\frac{1}{|x-x'|^{l-l'}}\left|D_t^rD_x^su(x,\ t)-D_t^rD_{x'}^su(x',\ t)\right|.$$

Пусть $x_0$, $x_0'$ и $t_0$ — такие точки, что

$$\frac{1}{\left|x_0-x_0'\right|^{l-l'}}\left|D_t^rD_x^su(x,\ t)\Big|_{\substack{x=x_0\\ t=t_0}}-D_t^rD_x^su(x,\ t)\Big|_{\substack{x=x_0'\\ t=t_0}}\right| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\sup_{x,\,x',\,t}\frac{1}{|x-x'|^{l-l'}}\left|D_t^rD_x^su(x,\ t)-D_t^rD_{x'}^su(x',\ t)\right|.$$

Если $\left|x_0-x_0'\right| \geqslant d\lambda$, то

$$\frac{1}{\left|x_0-x_0'\right|^{l-l'}}\left|D_t^rD_x^su(x,\ t)\Big|_{\substack{x=x_0\\ t=t_0}}-D_t^rD_x^su(x,\ t)\Big|_{\substack{x=x_0'\\ t=t_0}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{d^{l-l'}\lambda^{l-l'}}\sup_{Q_\tau}\left|D_t^rD_x^su\right| = \frac{1}{d^{l-l'}\lambda^{l-l'}}\sup_k\sup_{Q_\tau^{(k)}}\left|D_t^rD_x^su\right|.$$

Теперь в силу леммы 4.1

$$\sup_{Q_\tau^{(k)}}\left|D_t^rD_x^su(x,\ t)\right| \leqslant c\lambda^{l-l'}\varkappa^{\frac{l-l'}{2}}\langle u\rangle^{\left(\frac{l}{2}\right)}_{t,\,Q_\tau^{(k)}}$$

и, следовательно, при $\left|x_0-x_0'\right| \geqslant d\lambda$

$$\langle u\rangle^{(l)}_{x,\,Q_\tau} \leqslant c\,\frac{\varkappa^{\frac{l-l'}{2}}}{d^{l-l'}}\{u\}^{(l)}_{Q_\tau} \leqslant \frac{c}{d^{l-l'}}\{u\}^{(l)}_{Q_\tau}.$$

Если же $|x_0 - x_0'| \leqslant d\lambda$, то тогда в силу свойства 2 множеств $\Omega^{(k)}$ точки $x_0$ и $x_0'$ принадлежат какому-либо одному множеству $\Omega^{(k_0)}$ и поэтому

$$\langle u\rangle^{(l)}_{x,\,Q_\tau} \leqslant 2\,\{u\}^{(l)}_{Q_\tau}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Пусть функция* $\psi_k(x)$, *определенная в* $\Omega^{(k)}$, *обладает свойством*

$$|D_x^s\psi_k(x)| \leqslant \frac{c_s}{\lambda^s} \quad (s \leqslant [l]+1), \tag{4.19}$$

*а числа* $\tau$ *и* $\lambda$ *связаны соотношением* (4.17). *Тогда для любой функции* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{l,\frac{l}{2}}(Q_\tau^{(k)})$ *справедливо неравенство*

$$\langle\psi_k u\rangle^{(l)}_{Q_\tau^{(k)}} \leqslant c\,\langle u\rangle^{(l)}_{Q_\tau^{(k)}}, \tag{4.20}$$

*в котором постоянная* $c$ *не зависит от* $\lambda$ *и* $\tau$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\langle\psi_k u\rangle^{(l)}_{x,\,Q_\tau^{(k)}} \leqslant c\sum_{j=0}^{[l]}\left(\langle\psi_k\rangle^{(j)}_{\Omega^{(k)}}\langle u\rangle^{(l-j)}_{x,\,Q_\tau^{(k)}} + \langle u\rangle^{(j)}_{Q_\tau^{(k)}}\langle\psi_k\rangle^{(l-j)}_{\Omega^{(k)}}\right),$$

откуда в силу (4.19)

$$\langle\psi_k u\rangle^{(l)}_{x,\,Q_\tau^{(k)}} \leqslant c\sum_{j=0}^{[l]}\left(\frac{1}{\lambda^j}\langle u\rangle^{(l-j)}_{x,\,Q_\tau^{(k)}} + \frac{1}{\lambda^{l-j}}\langle u\rangle^{(j)}_{Q_\tau^{(k)}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\langle u\rangle^{(l)}_{x,\,Q_\tau^{(k)}} + \sum_{j=0}^{[l]}\frac{1}{\lambda^{l-j}}\langle u\rangle^{(j)}_{Q_\tau^{(k)}}\right).$$

Мы воспользовались тем, что при $j > 0$

$$\langle u\rangle^{(l-j)}_{x,\,Q_\tau^{(k)}} \leqslant c\lambda^{1-(l-[l])}\langle u\rangle^{[l]+1-j}_{Q_\tau^{(k)}}.$$

Аналогичным образом оценивается $\langle\psi_k u\rangle^{\left(\frac{l}{2}\right)}_{t,\,Q_\tau^{(k)}}$. Пользуясь для оценки $\langle u\rangle^{(j)}_{Q_\tau^{(k)}}$ леммой 4.1 и принимая во внимание соотношение (4.17), мы получим требуемое неравенство (4.20). Лемма доказана.

В дальнейшем нам часто придется оценивать функции вида

$$w(x, t) = \sum_k w^{(k)}(x, t), \tag{4.21}$$

где $w^{(k)} = 0$ при $x \in \Omega \setminus \Omega^{(k)}$.

Лемма 4.4. *Справедливо неравенство*

$$\{w\}_{Q_\tau}^{(l)} \leqslant N_0 \sup_k \langle w^{(k)} \rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l)}. \tag{4.22}$$

Доказательство. Так как

$$\langle w \rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l)} \leqslant \sum_{k'} \langle w^{(k')} \rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l)} =$$

$$= \sum_{s=1}^{N_0} \langle w^{(k_s)} \rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l)} \leqslant \sum_{s=1}^{N_0} \langle w^{(k_s)} \rangle_{Q_\tau^{(k_s)}}^{(l)} \leqslant N_0 \sup_{k'} \langle w^{(k')} \rangle_{Q_\tau^{(k')}}^{(l)},$$

то

$$\{w\}_{Q_\tau}^{(l)} = \sup_k \langle w \rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l)} \leqslant N_0 \sup_k \langle w^{(k)} \rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l)}$$

и (4.22) доказано.

Следствие. *Пусть имеет место* (4.17) *и пусть*

$$\tilde{w}(x, t) = \sum_k \psi^{(k)}(x) \tilde{w}^{(k)}(x, t), \tag{4.23}$$

*где* $\tilde{w}^{(k)} \in \overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2}}(\overline{Q_\tau^{(k)}})$, а $\psi^{(k)}$ — *функции, каждая из которых отлична от нуля только в* $\Omega^{(k)}$ *и удовлетворяет неравенству* (4.9). *Тогда*

$$\{\tilde{w}\}_{Q_\tau}^{(l)} \leqslant c \sup_k \langle \tilde{w}^{(k)} \rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l)},$$

*причем постоянная* $c$ *не зависит от* $\lambda$ *и* $\tau$.

Переходим к рассмотрению пространства $\overset{\circ}{W}{}_q^{2m, m}(Q_\tau)$. Заметим прежде всего, что в силу свойства 3 областей $\Omega^{(k)}$ норме $\| u \|_{q, Q_\tau}$ эквивалентна норма

$$\{u\}_{q, Q_\tau} = \left( \sum_k \| u \|_{q, Q_\tau^{(k)}}^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

так как имеет место неравенство

$$\| u \|_{q, Q_\tau} \leqslant \{u\}_{q, Q_\tau} \leqslant N_0^{\frac{1}{q}} \| u \|_{q, Q_\tau}.$$

Следовательно, норме $\langle\langle u\rangle\rangle_{q, Q_\tau}^{(2m)}$ эквивалентна норма

$$\{u\}_{q, Q_\tau}^{(2m)} = \left[\sum_k \left(\langle\langle u\rangle\rangle_{q, Q_\tau^{(k)}}^{(2m)}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}},$$

т. е.

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q, Q_\tau}^{(2m)} \leqslant \{u\}_{q, Q_\tau}^{(2m)} \leqslant c\,\langle\langle u\rangle\rangle_{q, Q_\tau}^{(2m)}.$$

В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_q^{2m, m}(Q_\tau)$ нормы $\langle\langle u\rangle\rangle_{q, Q_\tau}^{(2m)}$ и $\|u\|_{q, Q_\tau}^{(2m)}$ эквивалентны. Это вытекает из следующей леммы, которая аналогична лемме 4.1.

Лемма 4.5. *Если имеет место* (4.17), *то для любой* $u \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2m, m}(Q_\tau^{(k)})$

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q, Q_\tau^{(k)}}^{(j)} \leqslant c\tau^{m - \frac{j}{2}} \langle\langle u\rangle\rangle_{q, Q_\tau^{(k)}}^{(2m)} \tag{4.24}$$

*и для любой* $u \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2m, m}(Q_\tau)$

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q, Q_\tau}^{(j)} \leqslant c\tau^{m - \frac{j}{2}} \langle\langle u\rangle\rangle_{q, Q_\tau}^{(2m)}, \tag{4.24$'$}$$

*где* $j < 2m$.

Доказательство. Докажем (4.24). В случае, если $j = 2m' < 2m$, доказательство очевидно. При $j = 2m' + 1$ нужно воспользоваться неравенством (3.15) главы II, которое в данном случае в силу (4.17) справедливо при $\delta = \tau^{\frac{1}{2}}$. В результате мы получим

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q, Q_\tau^{(k)}}^{(j)} \leqslant \tau^{m - \frac{j}{2}} \langle\langle u\rangle\rangle_{q, Q_\tau^{(k)}}^{(2m)} + c\tau^{-\frac{j}{2}} \|u\|_{q, Q_\tau^{(k)}},$$

и так как для $u \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2m, m}(Q_\tau^{(k)})$

$$\|u\|_{q, Q_\tau^{(k)}} \leqslant c\tau^m \left\|\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right\|_{q, Q_\tau^{(k)}} \leqslant c\tau^m \langle\langle u\rangle\rangle_{q, Q_\tau^{(k)}}^{(2m)},$$

то (4.24) доказано. Неравенство (4.24$'$) доказывается точно так же.

Лемма 4.6. *Если $\psi_k(x)$ обладает свойством* (4.19) *при $s \leqslant 2m$ и имеет место* (4.17), *то*

$$\langle\langle \psi_k u \rangle\rangle^{(2m)}_{q, Q^{(k)}_\tau} \leqslant c \, \langle\langle u \rangle\rangle^{(2m)}_{q, Q^{(k)}_\tau}$$

*с постоянной $c$, не зависящей от $\lambda$ и $\tau$.*

Действительно, с помощью леммы 4.5 и неравенства (4.17) получаем

$$\langle\langle \psi_k u \rangle\rangle^{(2m)}_{q, Q^{(k)}_\tau} \leqslant c \sum_{j=0}^{2m} \frac{1}{\lambda^j} \langle\langle u \rangle\rangle^{(2m-j)}_{q, Q^{(k)}_\tau} \leqslant c \, \langle\langle u \rangle\rangle^{(2m)}_{q, Q^{(k)}_\tau}.$$

Лемма 4.7. *Если имеет место* (4.17), *то для функции $w(x, t)$* (4.21) *справедливо неравенство*

$$\{w\}^{(2m)}_{q, Q_\tau} \leqslant c \left[ \sum_k \left( \langle\langle w^{(k)} \rangle\rangle^{(2m)}_{q, Q^{(k)}_\tau} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

*с постоянной $c$, зависящей только от $N_0$.*

Доказательство. Имеем

$$\{w\}^{(2m)}_{q, Q_\tau} = \left[ \sum_k \left( \langle\langle w \rangle\rangle^{(2m)}_{q, Q^{(k)}_\tau} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[ \sum_k \left( \sum_{k'} \langle\langle w^{(k')} \rangle\rangle^{(2m)}_{q, Q^{(k)}_\tau} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left[ \sum_k \left( \sum_{s=1}^{N_0} \langle\langle w^{(k_s)} \rangle\rangle^{(2m)}_{q, Q^{(k)}_\tau} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant c(N_0) \left[ \sum_k \sum_{s=1}^{N_0} \left( \langle\langle w^{(k_s)} \rangle\rangle^{(2m)}_{q, Q^{(k)}_\tau} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c(N_0) \left[ \sum_k \sum_{k'} \left( \langle\langle w^{(k')} \rangle\rangle^{(2m)}_{q, Q^{(k)}_\tau} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c(N_0) \left[ \sum_{k'} \sum_{s=1}^{N_0} \left( \langle\langle w^{(k')} \rangle\rangle^{(2m)}_{q, Q^{(k_s)}_\tau} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant N_0^{\frac{1}{q}} c(N_0) \left[ \sum_{k'} \left( \langle\langle w^{(k')} \rangle\rangle^{(2m)}_{q, Q^{(k')}_\tau} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}},$$

что и требовалось.

Из лемм 4.6 и 4.7 вытекает

Следствие. *Если имеет место* (4.17), *то функция* (4.23) *подчиняется неравенству*

$$\{\tilde{w}\}^{(2m)}_{q,\,Q_\tau} \leqslant c\left[\sum_k \left(\langle\langle \tilde{w}^{(k)}\rangle\rangle^{(2m)}_{q,\,Q_\tau^{(k)}}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{4.25}$$

*в котором постоянная $c$ не зависит от $\lambda$ и $\tau$.*

Лемма 4.8. *Пусть $S \in O^{2m}$. Тогда всякая функция $u(x, t) \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2m,\,m}(Q_\tau)$ может быть аппроксимирована в норме $\|u\|^{(2m)}_{q,\,Q_\tau}$ бесконечно дифференцируемыми функциями, равными нулю при малых $t$.*

Доказательство. Продолжим функцию $u(x, t)$ с сохранением класса в область $D^{(\tau)}_{n+1}$, а затем — в $E^{(\tau)}_{n+1}$, положив $u(x, t) = 0$ при $t < 0$. Наконец, продолжим $u$ с сохранением класса из $E^{(\tau)}_{n+1}$ на все пространство $E_{n+1}$. При таком продолжении

$$\|u\|^{(2m)}_{q,\,E_{n+1}} \leqslant c\|u\|^{(2m)}_{q,\,E^{(\tau)}_{n+1}} = c\|u\|^{(2m)}_{q,\,D^{(\tau)}_{n+1}} \leqslant c\|u\|^{(2m)}_{q,\,Q_\tau}.$$

Последовательность функций

$$u_n(x, t) = u\left(x, t - \frac{1}{n}\right),$$

каждая из которых равна нулю при $t < \frac{1}{n}$, сходится к $u(x, t)$ в норме $\|u\|^{(2m)}_{q,\,E_{n+1}}$. Теперь каждую функцию $u_n$ можно аппроксимировать ее усреднениями — бесконечно дифференцируемыми функциями, обращающимися в нуль при малых $t$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Если $u(x, t) \in W_q^{2m,\,m}(Q_\tau)$, то, как видно из леммы 3.4 главы II, значения функции $u$ и некоторых ее производных на поверхности $S_\tau$ принадлежат классам $W_q^{s-\frac{1}{q},\,\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{q}\right)}(S_\tau)$, где $s$ — целое число, причем имеет место неравенство (3.20) главы II. Если функция $u(x, t)$ задана в области $\tilde{D}^{(T)}_{n+1}$ и $u \in W_q^{2m,\,m}\left(\tilde{D}^{(T)}_{n+1}\right)$, то, кроме неравенства (3.20), выполняется также аналогичное неравенство между главными частями норм, входящих в (3.20). Именно, имеет место

Теорема 4.5. *Для любой функции* $u \in W_q^{2m,\, m}(\tilde{D}_{n+1}^{(T)})$ *справедливо неравенство*

$$\left\langle\!\left\langle D_t^r D_x^s u \big|_{x_n=0} \right\rangle\!\right\rangle_{q,\, \tilde{E}_n^{(T)}}^{\left(2m-2r-s-\frac{1}{q}\right)} \leqslant c \left\langle\!\left\langle u \right\rangle\!\right\rangle_{q,\, \tilde{D}_{n+1}^{(T)}}^{(2m)},$$

*в котором* $2r+s<2m$, *а постоянная* $c$ *от* $T$ *не зависит.*

Нормы в пространствах $H^{l,\, \frac{l}{2}}(S_\tau)$ и $W_q^{l,\, \frac{l}{2}}(S_\tau)$ ($l$ — нецелое число), как было указано в § 3 главы II, обычно определяют с помощью параметризации поверхности $S_\tau$ — разбиения ее на достаточно мелкие части и отображения каждой части в пространство $\tilde{E}_n$. Мы будем в этой главе всегда использовать параметризацию, связанную с разбиением поверхности $S$ на подмножества $S^{(k)}=\overline{\Omega}^{(k)}\cap S$ (систему множеств $s^{(k)}=\overline{\omega}^{(k)}\cap S$ мы обозначим через $\mathfrak{f}^{(\lambda)}$, а множеств $S^{(k)}$ — через $\mathfrak{S}^{(\lambda)}$) и, следовательно, поверхности $S_\tau$ — на подмножества $S_\tau^{(k)}=S^{(k)}\times(0,\ \tau)$. Они отображаются в пространство $\tilde{E}_n$ преобразованием пространственных координат (4.3). При этом преобразовании $S^{(k)}$ переходит в $(n-1)$-мерный куб $\sigma$

$$|z_\alpha|<\lambda \quad (\alpha=1,\ \ldots,\ n-1)$$

и $S_\tau^{(k)}$ — в $\sigma_\tau=\sigma\times(0,\ \tau)$.

Пространство функций из $H^{l,\frac{l}{2}}(S_\tau)$, удовлетворяющих начальным условиям (4.15), мы обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^{l,\, \frac{l}{2}}(S_\tau)$. В этом пространстве эквивалентны нормы

$$|u|_{S_\tau}^{(l)}=\sup_{k\in\mathfrak{N}}|u^{(k)}(z',\ t)|_{\sigma_\tau}^{(l)}$$

и

$$\{u\}_{S_\tau}^{(l)}=\sup_{k\in\mathfrak{N}}\langle u^{(k)}(z',\ t)\rangle_{\sigma_\tau}^{(l)},$$

в которых $u^{(k)}(z',\ t)$ $(z'\in\sigma,\ k\in\mathfrak{N})$ — это функция $u(x,\ t)$, заданная на $S_\tau^{(k)}$, в координатах (4.3), т. е. в местных координатах в точке $\xi^{(k)}\in S^{(k)}$. Кроме того, в пространствах $\overset{\circ}{H}{}^{l,\, \frac{l}{2}}(S_\tau)$ справедливы леммы 4.3 и 4.4.

Введем теперь пространства $\overset{\circ}{W}{}_q^{l,\frac{l}{2}}(\tilde{D}_n^{(\tau)})$ с нецелым $l>0$. В основу введения этих пространств положим следующий естественный принцип: если функцию $u\in \overset{\circ}{W}{}_q^{l,\frac{l}{2}}(\tilde{D}_n^{(\tau)})$ продолжить нулем в область $t<0$, то полученная функция $u^0$ должна принадлежать классу $W_q^{l,\frac{l}{2}}(\tilde{E}_n^{(\tau)})$. Выясним, каким условиям должна для этого удовлетворять функция $u$. Рассмотрим сначала случай, когда $\lambda=\frac{l}{2}<1$. Подсчитаем норму

$$[u^0]^{(l)}_{q,E_n^{(\tau)}}=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{\tau}dt\int_{E_{n-1}}dx'\int_{E_{n-1}}\left|\frac{\partial^{[l]}u^0(x,t)}{\partial x_i^{[l]}}-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^{[l]}u^0(y',t)}{\partial y_i^{[l]}}\right|^q\frac{dy'}{|x'-y'|^{n-1+q(l-[l])}}+$$
$$\left.+\int_{E_{n-1}}dx'\int_{-\infty}^{\tau}dt\int_{-\infty}^{\tau}|u^0(x',t)-u^0(x',t')|^q\frac{dt'}{|t-t'|^{1+q\lambda}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

эквивалентную норме $\langle\langle u^0\rangle\rangle^{(l)}_{q,\tilde{E}_n^{(\tau)}}$. Ее первое слагаемое, очевидно, равно

$$\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^{\tau}dt\int_{E_{n-1}}dx'\int_{E_{n-1}}\left|\frac{\partial^{[l]}u(x',t)}{\partial x_i^{[l]}}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^{[l]}u(y',t)}{\partial y_i^{[l]}}\right|^q\frac{dy'}{|x'-y'|^{n-1+q(l-[l])}},$$

а второе преобразуется следующим образом:

$$\int_{E_{n-1}}dx'\int_{-\infty}^{\tau}dt\int_{-\infty}^{\tau}|u^0(x',t)-u^0(x',t')|^q\frac{dt'}{|t-t'|^{1+q\lambda}}=$$
$$=\int_{E_{n-1}}dx'\int_0^{\tau}dt\int_0^{\tau}|u(x',t)-u(x',t')|^q\frac{dt'}{|t-t'|^{1+q\lambda}}+$$

$$+\int\limits_{E_{n-1}} dx' \int\limits_0^{\tau} |u(x', t)|^q\, dt \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dt'}{|t-t'|^{1+q\lambda}} +$$

$$+\int\limits_{E_{n-1}} dx' \int\limits_0^{\tau} |u(x', t')|^q\, dt' \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dt}{|t-t'|^{1+q\lambda}} =$$

$$= \int\limits_{E_{n-1}} dx' \int\limits_0^{\tau} dt \int\limits_0^{\tau} |u(x', t)-u(x', t')|^q \frac{dt'}{|t-t'|^{1+q\lambda}} +$$

$$+\frac{2}{q\lambda} \int\limits_{E_{n-1}} dx' \int\limits_0^{\tau} \frac{|u(x', t)|^q\, dt}{t^{q\lambda}}.$$

Таким образом,

$$\left([u^0]^{(l)}_{q,\, \widetilde{E}_n^{(\tau)}}\right)^q = \left([u]^{(l)}_{q,\, \widetilde{D}_n^{(\tau)}}\right)^q +$$

$$+\frac{2}{q\lambda} \int\limits_{E_{n-1}} dx' \int\limits_0^{\tau} \frac{|u(x', t)|^q\, dt}{t^{q\lambda}}. \quad (4.26)$$

Относительно последнего члена правой части (4.26) можно показать следующее. Если $q\lambda < 1$, то

$$\int\limits_{E_{n-1}} dx' \int\limits_0^{\tau} \frac{|u(x', t)|^q\, dt}{t^{q\lambda}} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int\limits_{E_{n-1}} dx' \int\limits_0^{\tau} dt \int\limits_0^{\tau} \frac{|u(x', t)-u(x', t')|^q}{|t-t'|^{1+q\lambda}}\, dt' +$$

$$+\frac{c_2}{\tau^{q\lambda}} \int\limits_{E_{n-1}} dx' \int\limits_0^{\tau} |u(x', t)|^q\, dt. \quad (4.27)$$

Если $q\lambda > 1$, то этот интеграл ограничен лишь в случае, если $u(x, 0) = 0$ (при $q\lambda > 1$ это предельное значение функции

$u(x, t)$ имеет смысл) и тогда

$$\int_{E_{n-1}} dx' \int_0^\tau \frac{|u(x', t)|^q\,dt}{t^{q\lambda}} \leqslant$$

$$\leqslant c \int_{E_{n-1}} dx' \int_0^\tau dt \int_0^\tau \frac{|u(x', t) - u(x', t')|^q}{|t - t'|^{1+q\lambda}}\,dt'. \quad (4.28)$$

Если же $q\lambda = 1$, то тогда оценка вида (4.27) или (4.28) не имеет места (см. по этому поводу [$58_2$]).

На основании всего сказанного естественно определить пространство $\overset{\circ}{W}{}_q^{l,\frac{l}{2}}(\widetilde{D}_n^{(\tau)})$ при $l < 2$ как множество функций с конечной нормой

$$|u|^{(l)}_{q,\widetilde{D}_n^{(\tau)}} = \langle\langle u\rangle\rangle^{(l)}_{q,\widetilde{D}_n^{(\tau)}} + \left(\int_0^\tau \frac{dt}{t^{\frac{q}{2}l}} \int_{E_{n-1}} |u(x', t)|^q\,dx'\right)^{\frac{1}{q}}.$$

При $\frac{l}{2} > \frac{1}{q}$ это означает, что выполняется условие $u(x, 0) = 0$.

При $l > 2$ пространство $\overset{\circ}{W}{}_q^{l,\frac{l}{2}}(D_n^{(\tau)})$ естественно определить как множество функций, удовлетворяющих нулевым начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \left(k = 0, \ldots, \left[\frac{l}{2}\right] - 1\right) \quad (4.29)$$

и, кроме того, имеющих конечную норму

$$|u|^{(l)}_{q,\widetilde{D}_n^{(\tau)}} = \langle\langle u\rangle\rangle^{(l)}_{q,\widetilde{D}_n^{(\tau)}} + \left(\int_0^\tau \frac{dt}{t^{q\lambda}} \int_{E_{n-1}} \left|\frac{\partial^{\left[\frac{l}{2}\right]} u(x', t)}{\partial t^{\left[\frac{l}{2}\right]}}\right|^q dx'\right)^{\frac{1}{q}},$$

где $\lambda = \frac{l}{2} - \left[\frac{l}{2}\right]$ $\left(\text{если } \lambda > \frac{1}{q}\right.$, то эта норма конечна только при $\left.D_t^{\left[\frac{l}{2}\right]} u\Big|_{t=0} = 0\right)$.

Теорема 4.6. *Для любой функции* $u \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2m,\,m}(R^{(\tau)})$ *справедливо неравенство*

$$\left| D_t^r D_x^s u \right|_{x_n=0} \Big|_{q,\,\widetilde{D}_n^{(\tau)}}^{\left(2m-2r-s-\frac{1}{q}\right)} \leqslant c \langle\langle u \rangle\rangle_{q,\,R^{(\tau)}}^{(2m)} \tag{4.30}$$

$(2r+s<2m)$.

Действительно, продолжая функцию $u(x,t)$ в область $t<0$ нулем, мы будем иметь, с одной стороны,

$$\langle\langle u \rangle\rangle_{q,\,\widetilde{D}_{n+1}^{(\tau)}}^{(2m)} = \langle\langle u \rangle\rangle_{q,\,R^{(\tau)}}^{(2m)}$$

и, с другой стороны, в силу (4.26)

$$\left| D_t^r D_x^s u \right|_{x_n=0} \Big|_{q,\,\widetilde{D}_n^{(\tau)}}^{\left(2m-2r-s-\frac{1}{q}\right)} \leqslant c \left\langle\left\langle D_t^r D_x^s u \right|_{x_n=0} \right\rangle\right\rangle_{q,\,\widetilde{E}_n^{(\tau)}}^{\left(2m-2r-s-\frac{1}{q}\right)}.$$

Остается применить теорему 4.5.

Точно так же, как лемма 4.7, доказывается

Лемма 4.9. *Всякая функция* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{l,\,\frac{l}{2}}(\widetilde{D}_n^{(\tau)})$ *может быть аппроксимирована в норме* $|u|_{q,\,\widetilde{D}_n^{(\tau)}}^{(l)}$ *бесконечно дифференцируемыми функциями, равными нулю при малых* $t$.

Пространство $\overset{\circ}{W}{}_q^{l,\,\frac{l}{2}}(S_\tau)$ при нецелом $l>0$, мы определим теперь как множество функций, удовлетворяющих при $l>2$ условиям (4.29) и имеющих конечную норму

$$\{u\}_{q,\,S_\tau}^{(l)} = \left[\sum_{k\in\mathfrak{N}} \left( |u^{(k)}(z',t)|_{q,\,\sigma_\tau}^{(l)} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}},$$

где

$$|u^{(k)}|_{q,\,\sigma_\tau}^{(l)} = \langle\langle u^{(k)} \rangle\rangle_{q,\,\sigma_\tau}^{(l)} + \left( \int_0^\tau \frac{dt}{t^{q\lambda}} \int_\sigma \left| \frac{\partial^{\left[\frac{l}{2}\right]} u^{(k)}(z',t)}{\partial t^{\left[\frac{l}{2}\right]}} \right|^q dz' \right)^{\frac{1}{q}},$$

а $\langle\langle u \rangle\rangle_{q,\,\sigma_\tau}^{(l)}$ определяется равенством (3.17) главы II.

## § 5. Формулировка основных результатов о разрешимости задачи Коши и краевых задач для уравнений с переменными коэффициентами в гёльдеровских классах функций

Основным результатом этой главы является теорема об однозначной резрешимости задачи Коши и двух краевых задач для параболического уравнения второго порядка в цилиндрической области $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

Сформулируем эти задачи.

Обозначим через $\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ линейный параболический дифференциальный оператор с вещественными коэффициентами

$$\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x, t) u. \quad (5.1)$$

Предположим, что этот оператор равномерно параболический, т. е. в областях, где решаются указанные выше задачи, при любых вещественных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ выполняется неравенство (2.5) главы I.

Предположим, что коэффициенты оператора (5.1) определены в слое $D_{n+1}^{(T)} = E_n \times (0, T)$. Мы будем рассматривать в этой области задачу Коши

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = f(x, t), \\ &u|_{t=0} = \varphi(x). \end{aligned}\right\} \quad (5.2)$$

Пусть далее $\Omega$ — область, удовлетворяющая условиям, указанным в § 4. Рассмотрим в цилиндрической области $Q_T = \Omega \times (0, T)$ с боковой поверхностью $S_T = S \times (0, T)$

первую краевую задачу и задачу с косой производной:

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}\left(x,\, t,\, \frac{\partial}{\partial x},\, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,\, t) = f(x,\, t), \\ &u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u\big|_{S_T} = \Phi(x,\, t), \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}\left(x,\, t,\, \frac{\partial}{\partial x},\, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,\, t) = f(x,\, t), \\ &u\big|_{t=0} = \varphi(x), \\ &\mathscr{B}\left(x,\, t,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\Big|_{S_T} \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x,\, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x, t)\, u\big|_{S_T} = \Phi(x, t). \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Предположим, что функции $b_i(x,\, t)$ всюду на $S_T$ удовлетворяют условию

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i(x,\, t)\, n_i(x)\right| \geqslant \delta > 0. \tag{5.5}$$

Это условие можно записать в виде $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}) \geqslant \delta > 0$, где $\mathbf{b} = (b_1,\, \ldots,\, b_n)$, и оно означает, что вектор $\mathbf{b}$ ни в одной точке не лежит в касательной плоскости к $S$. Краевое условие (5.4) можно записать в виде

$$|\mathbf{b}(x,\, t)|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} + bu\Big|_{S_T} = \Phi,$$

где $\mathbf{l} = \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.

В задаче (5.2), а при неограниченной $\Omega$ также в задачах (5.3), (5.4) нужно еще ограничить рост решения при $|x| \to \infty$. Мы будем рассматривать эти задачи только в классах функций $H^{l,\, \frac{l}{2}}$, элементы которых ограничены, а также в классах $W_q^{2m,\, m}$, элементы которых в определенном смысле стремятся к нулю при $|x| \to \infty$.

Будем предполагать, что функции $f$, $\varphi$, $\Phi$ в (5.3) и (5.4) удовлетворяют условиям согласования при $x \in S$, $t = 0$. Эти условия состоят в том, что производные $\left.\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}$, которые могут быть определены при $t = 0$ с помощью уравнения и начального условия, должны удовлетворять при $x \in S$ краевым условиям (5.3) или (5.4). Введем обозначения

$$u^{(k)}(x)=\left.\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\right|_{t=0},$$

$$\mathcal{A}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-au. \tag{5.6}$$

Очевидно, что функции $u^{(k)}(x)\,(k=0,1)$ определяются следующим образом:

$$u^{(0)}(x)=\varphi(x),\quad u^{(1)}(x)=\mathcal{A}\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)+f(x,0), \tag{5.7}$$

а остальные функции находятся из рекуррентных соотношений

$$u^{(k+1)}(x)=\frac{\partial^k}{\partial t^k}\mathcal{A}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)+\left.\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k}\right|_{t=0}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathcal{A}^{(j)}\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x}\right)u^{(k-j)}(x)+f^{(k)}(x), \tag{5.8}$$

где $\mathcal{A}^{(j)}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — оператор, получающийся из оператора $\mathcal{A}$ (5.6) дифференцированием коэффициентов по $t$ $j$ раз.

Будем говорить, что для задачи (5.3) или (5.4) выполняются условия согласования порядка $m\geqslant 0$, если

$$u^{(k)}(x)\big|_{x\in S}=\left.\frac{\partial^k\Phi}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\Phi^{(k)}(x)\qquad(k=0,\ldots,m)$$

или соответственно

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left[\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+b(x,t)\,u\right]\right|_{\substack{t=0\\x\in S}}=$$

$$=\Phi^{(k)}(x)\qquad(k=0,\ldots,m),$$

т. е.

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[\sum_{i=1}^{n}b_i^{(k-j)}(x)\frac{\partial u^{(j)}(x)}{\partial x_i}+b^{(k-j)}(x)\,u^{(j)}(x)\right]\Bigg|_{x\in S}=$$

$$=\Phi^{(k)}(x)\qquad(k=0,\ldots,m).$$

Мы будем рассматривать задачи (5.2) — (5.4) сначала в гёльдеровских классах функций $H^{l, \frac{l}{2}}$. Сформулируем сразу же основные результаты о разрешимости этих задач в виде теорем, которые будут доказываться в ближайших параграфах.

Теорема 5.1. *Пусть* $l > 0$ — *нецелое число и пусть коэффициенты оператора* $\mathcal{L}$ *принадлежат классу* $H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{D_{n+1}^{(T)}})$. *Тогда при любых* $f \in H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{D_{n+1}^{(T)}})$, $\varphi \in H^{l+2}(\bar{E}_n)$ *задача* (5.2) *имеет единственное решение из класса* $H^{l+2, \frac{l}{2}+1}(\overline{D_{n+1}^{(T)}})$. *Для него справедливо неравенство*

$$|u|_{D_{n+1}^{(T)}}^{(l+2)} \leqslant c\left(|f|_{D_{n+1}^{(T)}}^{(l)} + |\varphi|_{E_n}^{(l+2)}\right) \tag{5.9}$$

*с постоянной, не зависящей от* $f$ *и* $\varphi$.

Теорема 5.2. *Пусть* $l > 0$ — *нецелое число, коэффициенты оператора* $\mathcal{L}$ *принадлежат классу* $H^{l, \frac{l}{2}}(\bar{Q}_T)$, *а граница* $S$ — *классу* $H^{l+2}$. *Тогда при любых* $f \in H^{l, \frac{l}{2}}(\bar{Q}_T)$, $\varphi \in H^{l+2}(\bar{\Omega})$, $\Phi \in H^{l+2, \frac{l}{2}+1}(\bar{S}_T)$, *удовлетворяющих условию согласования порядка* $\left[\frac{l}{2}\right]+1$, *задача* (5.3) *имеет единственное решение из класса* $H^{l+2, \frac{l}{2}+1}(\bar{Q}_T)$. *Для него справедливо неравенство*

$$|u|_Q^{(l+2)} \leqslant c\left(|f|_Q^{(l)} + |\varphi|_\Omega^{(l+2)} + |\Phi|_{S_T}^{(l+2)}\right). \tag{5.10}$$

Теорема 5.3. *Пусть* $l > 0$ — *нецелое число,* $S \in H^{l+2}$, *коэффициенты оператора* $\mathcal{L}$ *принадлежат классу* $H^{l, \frac{l}{2}}(\bar{Q}_T)$ *и, наконец,* $b_i$, $b \in H^{l+1, \frac{l}{2}+\frac{1}{2}}(\bar{S}_T)$. *Тогда при любых* $f \in H^{l, \frac{l}{2}}(\bar{Q}_T)$, $\varphi \in H^{l+2}(\bar{\Omega})$, $\Phi \in H^{l+1, \frac{l+1}{2}}(\bar{S}_T)$, *удовлетворяющих условию согласования порядка* $\left[\frac{l+1}{2}\right]$, *задача* (5.4) *имеет единственное решение из класса*

$H^{l+2,\, \frac{l}{2}+1}(\overline{Q}_T)$, *причем*

$$|u|_Q^{(l+2)} \leqslant c\left(|f|_Q^{(l)} + |\varphi|_\Omega^{(l+2)} + |\Phi|_{S_T}^{(l+1)}\right). \qquad (5.11)$$

Так как доказательства этих теорем почти совершенно идентичны, мы ограничимся подробным доказательством одной из них, а именно теоремы 5.3. Выкладки при доказательстве этой теоремы несколько сложнее, чем при доказательстве теорем 5.1 и 5.2.

Теоремы 5.1—5.3 сначала доказываются при специальных предположениях относительно $f$, $\varphi$ и $\Phi$, которые сводятся к следующему: $\varphi = 0$, а $f$ и $\Phi$ удовлетворяют нулевым начальным условиям:

$$\left.\frac{\partial^i f}{\partial t^i}\right|_{t=0} = 0 \qquad \left(i = 0, \ldots, \left[\frac{l}{2}\right]\right)$$

и

$$\left.\frac{\partial^i \Phi}{\partial t^i}\right|_{t=0} = 0,$$

где $i = 0, \ldots, \left[\frac{l}{2}\right] + 1$ для задачи (5.3) и $i = 0, \ldots, \left[\frac{l+1}{2}\right]$ для задачи (5.4). Нетрудно проверить, что при этих условиях функции $f$ и $\Phi$ удовлетворяют условиям согласования порядка, указанного в теоремах 5.2 и 5.3. При этом $u^{(k)}(x) = 0$ при $k = 0, \ldots, \left[\frac{l}{2}\right] + 1$.

Если функции $f$, $\varphi$, $\Phi$ удовлетворяют указанным условиям, то мы будем называть соответствующие задачи (5.2)—(5.4) задачами с нулевыми начальными данными. Используя понятие классов $\overset{\circ}{H}{}^{l,\, \frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$, введенное в § 4, можно эти задачи сформулировать следующим образом:

1. Найти функцию $u \in \overset{\circ}{H}{}^{l+2,\, \frac{l}{2}+1}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$ такую, что

$$\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u \doteq f, \qquad (5.2')$$

где

$$f \in \overset{\circ}{H}{}^{l,\, \frac{l}{2}}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right).$$

2. Найти функцию $u \in \overset{\circ}{H}{}^{l+2, \frac{l}{2}+1}(\bar{Q}_T)$ такую, что

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f, \\ &u\big|_{S_T} = \Phi, \end{aligned}\right\} \tag{5.3'}$$

где

$$f \in \overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2}}(\bar{Q}_T), \quad \Phi \in \overset{\circ}{H}{}^{l+2, \frac{l}{2}+1}(\bar{S}_T).$$

3. Найти функцию $u \in \overset{\circ}{H}{}^{l+2, \frac{l}{2}+1}(\bar{Q}_T)$, для которой

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f, \\ &\mathcal{B}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\Big|_{S_T} = \Phi, \end{aligned}\right\} \tag{5.4'}$$

где

$$f \in \overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2}}(\bar{Q}_T), \quad \Phi \in \overset{\circ}{H}{}^{l+1, \frac{l+1}{2}}(\bar{S}_T).$$

Центральным моментом в доказательстве теорем 5.1—5.3 является доказательство следующего утверждения:

Теорема 5.4. *При условиях теорем* 5.1—5.3 *задачи* (5.3′) *и* (5.4′) *имеют единственное решение в цилиндре* $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$, *а задача* (5.2′) — *в* $D_{n+1}^{(\tau)}$ *при* $\tau \leqslant \tau_0$, *где* $\tau_0$ — *некоторое положительное число, зависящее от коэффициентов оператора* $\mathcal{L}$, *от* $b_l$, $b$ (*в случае задачи* (5.4′)) *и различных характеристик области* $\Omega$ *и границы* $S$, *но не от* $f$ *и* $\Phi$. *Решения подчиняются неравенствам*

$$|u|_{D_{n+1}^{(\tau)}}^{(l+2)} \leqslant c\,|f|_{D_{n+1}^{(\tau)}}^{(l)}, \tag{5.12}$$

$$|u|_{Q_\tau}^{(l+2)} \leqslant c\left(|f|_{Q_\tau}^{(l)} + |\Phi|_{S_\tau}^{(l+2)}\right), \tag{5.13}$$

$$|u|_{Q_\tau}^{(l+2)} \leqslant c\left(|f|_{Q_\tau}^{(l)} + |\Phi|_{S_\tau}^{(l+1)}\right), \tag{5.14}$$

*в которых постоянные остаются ограниченными при* $\tau \to 0$.

С помощью этой теоремы будет нетрудно доказать теоремы 5.1—5.3 для цилиндрической области $Q_T$ произвольной конечной высоты $T$.

Как будет показано в § 10 главы VII, теоремы 5.1—5.3 переносятся на параболические системы (см. теорему 3.1 главы VII). Здесь мы сформулируем теорему о разрешимости первой краевой задачи для параболической системы второго порядка, главная часть которой распадается на отдельные параболические уравнения:

$$\frac{\partial u^k}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x,\ t)\frac{\partial^2 u^k}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i^{(k,\ l)}(x,\ t)\frac{\partial u^l}{\partial x_i}+\\ +\sum_{l=1}^{m} a^{(k,\ l)}(x,\ t)\,u^l=f^k(x,\ t),$$

$$\left.\begin{aligned} u^k|_{t=0}&=\varphi^k(x),\\ u^k|_{S_T}&=\Phi^k(x,\ t)\\ (k=1,\ \ldots&,\ m). \end{aligned}\right. \tag{5.15}$$

Теорема 5.5. *Пусть* $S\in H^{l+2}$, *а коэффициенты* $a_{ij}$, $a_i^{(k,r)}$, $a^{(k,r)}$ *принадлежат классу* $H^{l,\frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$. *Тогда при любых* $f^k\in H^{l,\frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$, $\varphi^k\in H^{l+2}(\overline{\Omega})$, $\Phi^k\in H^{l+2,\frac{l}{2}+1}(\overline{S}_T)$, *удовлетворяющих условиям согласования порядка* $\left[\frac{l}{2}\right]+1$, *задача* (5.15) *имеет единственное решение* $u=(u^1,\ \ldots,\ u^m)$ *с* $u^j\in H^{l+2,\frac{l}{2}+1}(\overline{Q}_T)$, *причем справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{m}|u^k|_{Q_T}^{(l+2)}\leqslant c\left(\sum_{k=1}^{m}|f^k|_{Q_T}^{(l)}+\sum_{k=1}^{m}|\varphi^k|_{\Omega}^{(l+2)}+\sum_{k=1}^{m}|\Phi^k|_{S_T}^{(l+2)}\right).$$

Условия согласования для задачи (5.15) формулируются точно так же, как для задачи (5.3), а доказательство теоремы 5.5 дословно совпадает с доказательством теоремы 5.2. Нужно только во всех выкладках $u$ считать вектором, а $a_l$ и $a$ — матрицами с элементами $a_l^{(k,\ l)}$ и $a^{(k,\ l)}$.

Мы выделяем здесь задачу (5.15) потому, что она будет объектом специального изучения в главе VII.

## § 6. Модельные задачи в полупространстве

Рассмотрим задачу Коши и краевые задачи с нулевыми начальными данными в области $R^{(T)}$ для уравнений с постоянными коэффициентами, содержащих только старшие члены. В задаче Коши требуется найти функцию $w \in \overset{\circ}{H}{}^{l+2, \frac{l}{2}+1}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$, удовлетворяющую в $D_{n+1}^{(T)}$ уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = f, \tag{6.1}$$

где $f \in \overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2}}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$; $a_{ij}$ — постоянные, удовлетворяющие условию (2.5) главы I.

Кроме того, рассмотрим в области $R^{(T)}$ краевые задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = f, \\ &v\,|_{x_n=0} = \Phi_1(x', t), \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f, \\ &\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{x_n=0} = \Phi_2(x', t) \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

($b_i$ — постоянные, $b_n \neq 0$).

Предполагается, что $f \in \overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2}}\left(\overline{R^{(T)}}\right)$, $\Phi_1 \in \overset{\circ}{H}{}^{l+2, \frac{l}{2}+1}\left(\overline{\tilde{D}_n^{(T)}}\right)$, $\Phi_2 \in \overset{\circ}{H}{}^{l+1, \frac{l+1}{2}}\left(\overline{\tilde{D}_n^{(T)}}\right)$. Решение задач (6.2) и (6.3) должно принадлежать классу $\overset{\circ}{H}{}^{l+2, \frac{l}{2}+1}\left(\overline{R^{(T)}}\right)$.

Теорема 6.1. *Задача* (6.1) *однозначно разрешима в классе* $\overset{\circ}{H}{}^{l+2, \frac{l}{2}+1}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$, *а задачи* (6.2), (6.3) — *в классе* $\overset{\circ}{H}{}^{l+2, \frac{l}{2}+1}\left(\overline{R^{(T)}}\right)$ *при любом* $T > 0$. *Решения этих задач* *подчиняются неравенствам:*

$$\langle w\rangle^{(l+2)}_{D^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\langle f\rangle^{(l)}_{D^{(T)}_{n+1}}, \tag{6.4}$$

$$\langle v\rangle^{(l+2)}_{R^{(T)}} \leqslant c\left(\langle f\rangle^{(l)}_{R^{(T)}} + \langle \Phi_1\rangle^{(l+2)}_{\widetilde{D}^{(T)}_n}\right), \tag{6.5}$$

$$\langle u\rangle^{(l+2)}_{R^{(T)}} \leqslant c\left(\langle f\rangle^{(l)}_{R^{(T)}} + \langle \Phi_2\rangle^{(l+1)}_{\widetilde{D}^{(T)}_n}\right), \tag{6.6}$$

*в которых постоянные не зависят от $T$.*

Доказательство. Докажем прежде всего эту теорему для уравнения теплопроводности ($a_{ij}=\delta_{ij}$).

Как видно из результатов § 1, в этом случае решения задач (6.1) — (6.3) даются формулами

$$w=\int_0^t d\tau \int_{E_n} \Gamma(x-y,\ t-\tau)\, f(y,\ \tau)\, dy = (\Gamma * f^0), \tag{6.7}$$

где

$$f^0(x,\ t)=\begin{cases} f(x,\ t) & \text{при } t\geqslant 0, \\ 0 & \text{при } t<0; \end{cases} \tag{6.8}$$

$$v(x,\ t)=(\Gamma * f^{*0}) - 2\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_n} *_2 \omega_1^0\right), \tag{6.9}$$

где $f^*$ — продолжение функции $f(x,\ t)$, заданной в $R^{(T)}$, в область $D^{(T)}_{n+1}$ по переменной $x_n$ с помощью формулы типа (4.5), так что

$$\langle f^*\rangle^{(l)}_{D^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\langle f\rangle^{(l)}_{R^{(T)}},$$

$f^{*0}$ — продолжение функции $f^*$ в область $t<0$, определяемое формулой (6.8), и

$$\omega_1 = \Phi_1 - (\Gamma * f^{*0})\big|_{x_n=0}; \tag{6.10}$$

наконец,

$$u(x,\ t)=(\Gamma * f^{*0}) + (G *_2 \omega_2^0), \tag{6.11}$$

где

$$\omega_2 = \Phi_2 - \sum_{l=1}^n b_l \frac{\partial}{\partial x_l}(\Gamma * f^{*0})\big|_{x_n=0}.$$

Оценки (6.4) — (6.6) являются следствием оценок (2.1), (2.3), (2.4), а также того факта, что при нулевом продолжении (6.8) функций из классов $\overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2}}$ норма сохраняется.

Например, неравенство (6.6) доказывается с помощью (2.1) и (2.3) следующим образом:

$$\langle u\rangle_{R^{(T)}}^{(l+2)} \leqslant \langle\!\langle(\Gamma * f^{*\prime})\rangle\!\rangle_{E_{n+1}^{(T)}}^{(l+2)} + \langle\!\langle(G *_2 \omega_2^{\prime})\rangle\!\rangle_{\widetilde{D}_{n+1}^{(T)}}^{(l+2)} \leqslant \langle\!\langle(\Gamma * f^{*\prime})\rangle\!\rangle_{E_{n+1}^{(T)}}^{(l+2)} +$$

$$+ c\langle\omega_2^{\prime}\rangle_{\widetilde{E}_n^{(T)}}^{(l+1)} \leqslant \langle\!\langle(\Gamma * f^{*\prime})\rangle\!\rangle_{E_{n+1}^{(T)}}^{(l+2)} + c\left\{\langle\Phi_2^{\prime}\rangle_{\widetilde{E}_n^{(T)}}^{(l+1)} + \langle\!\langle(\Gamma * f^{*\prime})\rangle\!\rangle_{E_{n+1}^{(T)}}^{(l+2)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant c\left\{\langle\Phi_2\rangle_{\widetilde{D}_n^{(T)}}^{(l+1)} + \langle f^{*\prime}\rangle_{E_{n+1}^{(T)}}^{(l)}\right\} \leqslant c\left\{\langle\Phi_2\rangle_{\widetilde{D}_n^{(T)}}^{(l+1)} + \langle f\rangle_{R^{(T)}}^{(l)}\right\}.$$

Единственность построенных решений вытекает из результатов § 2 главы I (см. теоремы 2.6, 2.7 главы I). Условия теоремы 2.7 выполняются, так как в качестве функции $\varphi(x)$ можно взять в полупространстве $x_n > 0$ функцию

$$\varphi(x_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4mx_n + 2}.$$

Таким образом, теорема доказана для случая, когда $a_{ij} = \delta_{ij}$, т. е. когда рассматриваются задачи (6.1) — (6.3) для уравнения теплопроводности. Общий случай сводится к разобранному, так как задачи (6.1) — (6.3), как известно, можно записать как задачи для уравнения теплопроводности. Для этого надо сделать определенным образом линейные преобразования координат. Прежде всего сделаем ортогональное преобразование координат

$$y_k = \sum_{l=1}^{n} \beta_{kl} x_l,$$

приводящее матрицу $A$ с элементами $a_{ij}$, которую без ограничения общности можно считать симметричной, к диагональному виду, т. е.

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} \beta_{ki} a_{ij} \beta_{lj} = \alpha_l \delta_{kl}.$$

В качестве $\beta_{lj}$ нужно взять компоненты $l$-го собственного вектора матрицы $A$; числа $\alpha_l$ являются собственными значениями этой матрицы. Уравнение (6.1) запишется в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \frac{\partial^2 w}{\partial y_l^2} = f(y, t).$$

Если ввести новые переменные

$$z_l = \frac{y_l}{\sqrt{\alpha_l}},$$

то это уравнение перейдет в уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial t} - \Delta w(z, t) = f(z, t).$$

В задачах (6.2) и (6.3) эти преобразования как-то поворачивают плоскость $x_n = 0$. Поэтому при рассмотрении этих задач удобно сделать еще одно ортогональное преобразование координат,

$$\xi_l = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{lk} z_k,$$

которое эту плоскость снова переводило бы в плоскость $\xi_n = 0$. Оператор Лапласа при этом преобразовании не изменится. Таким образом, задачи (6.1) — (6.3) можно преобразовать только за счет линейного преобразования координат в такие же задачи для уравнения теплопроводности. При этом краевое условие (6.3) переходит в

$$\sum_{l=1}^{n} b'_l \left.\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi_l}\right|_{\xi_n = 0} = \Phi_2(\xi', t),$$

где

$$b'_l = \sum_{l,\, k=1}^{n} \frac{b_l \beta_{kl} \gamma_{lk}}{\sqrt{\alpha_k}}.$$

Проверим, что выполняется необходимое условие

$$b'_n = \sum_{l,\, k=1}^{n} \frac{\gamma_{nk}}{\sqrt{\alpha_k}} \beta_{kl} b_l \neq 0. \tag{6.12}$$

Уравнение плоскости $x_n=0$ в координатах $\{y\}$ и $\{z\}$ выглядит следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{kn} y_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{kn} \sqrt{\alpha_k}\, z_k = 0.$$

С другой стороны, оно может быть также записано в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_{nk} z_k = 0.$$

Следовательно,

$$\beta_{kn} \sqrt{\alpha_k} = \gamma_{nk} d, \tag{6.13}$$

откуда вытекает, что

$$d^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_{kn}^2,$$

т. е.

$$\sqrt{\nu} \leqslant |d| \leqslant \sqrt{\mu},$$

где $\mu$ и $\nu$ — наибольшее и наименьшее из собственных чисел матрицы $A$ (постоянные, входящие в неравенство (2.5) главы I).

Из (6.12) и (6.13) следует

$$b'_n = \frac{1}{d} \sum_{l,k=1}^{n} \beta_{kn} \beta_{kl} b_l = \frac{b_n}{d}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} |b_n| \leqslant |b'_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\nu}} |b_n|.$$

Таким образом, условие $b'_n \neq 0$ доказано, и доказательство теоремы завершено.

## § 7. О разрешимости задачи (5.4′)

В этом параграфе будет доказана теорема 5.4 для задачи (5.4′). Основная идея доказательства состоит в следующем. Пусть $A$ — линейный оператор, определяемый в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^{l+2,\, \frac{l}{2}+1}(\overline{Q}_\tau)$ и сопоставляющий каждому элементу этого пространства пару функций $\left(\mathscr{L}u,\ \mathscr{B}u|_{S_\tau}\right)$. При тех ограничениях на коэффициенты операторов $\mathscr{L}$ и $\mathscr{B}$, которые наложены в условии теоремы 5.4, для каждого $u \in \overset{\circ}{H}{}^{l+2,\ \frac{l}{2}+1}(\bar{Q}_\tau)$ имеет место неравенство

$$|\mathscr{L}u|_{Q_\tau}^{(l)} + |\mathscr{B}u|_{S_\tau}^{(l+1)} \leqslant c\,|u|_{Q_\tau}^{(l+2)}. \tag{7.1}$$

Пусть

$$\mathfrak{H}^{(l)} = \overset{\circ}{H}{}^{l,\ \frac{l}{2}}(\bar{Q}_\tau) \times \overset{\circ}{H}{}^{l+1,\ \frac{l+1}{2}}(\bar{S}_\tau)$$

— банахово пространство, элементами которого являются пары функций $h = (f,\ \Phi)$, где $f \in \overset{\circ}{H}{}^{l,\ \frac{l}{2}}(\bar{Q}_\tau)$, $\Phi \in \overset{\circ}{H}{}^{l+1,\ \frac{l+1}{2}}(\bar{S}_\tau)$, а норма определяется как сумма норм $|f|_{Q_\tau}^{(l)}$ и $|\Phi|_{S_\tau}^{(l+1)}$. Неравенство (7.1) выражает тот факт, что оператор $A$ является ограниченным оператором, действующим из $\overset{\circ}{H}{}^{l+2,\ \frac{l}{2}+1}(\bar{Q}_\tau)$ в $\mathfrak{H}^{(l)}$. Задачу (5.4′) можно истолковать как задачу на решение уравнения

$$Au = h, \tag{7.2}$$

где $h \in \mathfrak{H}^{(l)}$, а теорему 5.4 — как теорему о существовании ограниченного обратного оператора $A^{-1}$.

Для доказательства теоремы 5.4 в этом параграфе будет построен ограниченный оператор $R$, действующий из $\mathfrak{H}^{(l)}$ в $\overset{\circ}{H}{}^{l+2,\ \frac{l}{2}+1}(\bar{Q}_\tau)$ и такой, что для любых $h \in \mathfrak{H}^{(l)}$ и $v \in \overset{\circ}{H}{}^{l+2,\ \frac{l}{2}+1}(\bar{Q}_\tau)$

$$ARh = h + Th, \tag{7.3}$$

$$RAv = v + Wv. \tag{7.4}$$

где $T$ и $W$ — ограниченные операторы в пространствах $\mathfrak{H}^{(l)}$ и $\overset{\circ}{H}{}^{l+2,\ \frac{l}{2}+1}(\bar{Q}_\tau)$ соответственно, нормы которых малы, если мала высота $\tau$ цилиндра $Q_\tau$.

Равенства (7.3) и (7.4) позволяют доказать теорему 5.4 с помощью самых элементарных средств функционального анализа.

Фиксируем число $\tau$ таким образом, чтобы

$$\|T\| < 1, \ \|W\| < 1.$$

На основании принципа сжатых отображений мы можем теперь заключить, что операторы $I+T$ и $I+W$ имеют ограниченные обратные $(I+T)^{-1}$ и $(I+W)^{-1}$, определенные соответственно в пространствах $\mathfrak{H}^{(l)}$ и $\overset{\circ}{H}{}^{l+2,\, \frac{l}{2}+1}(\overline{Q}_\tau)$. Действуя оператором $(I+W)^{-1}$ на обе части равенства (7.4) и заменяя в (7.3) $h$ на $(I+T)^{-1}h$, мы убедимся в том, что для любых $h \in \mathfrak{H}^{(l)}$ и $v \in \overset{\circ}{H}{}^{l+2,\, \frac{l}{2}+1}(\overline{Q}_\tau)$

$$AR(I+T)^{-1}h = h,$$

$$(I+W)^{-1}RAv = v.$$

Это значит, что оператор $A$ имеет ограниченные правый и левый обратные операторы, равные соответственно $R(I+T)^{-1}$ и $(I+W)^{-1}R$. Эти операторы, как известно, совпадают:

$$R(I+T)^{-1} = (I+W)^{-1}R = A^{-1}. \tag{7.5}$$

Следовательно, оператор $A$ устанавливает однозначное соответствие между пространствами $\overset{\circ}{H}{}^{l+2,\, \frac{l}{2}+1}(\overline{Q}_\tau)$ и $\mathfrak{H}^{(l)}$, т. е. уравнение (7.2), или, что то же самое, задача (5.4′), однозначно разрешимо при любом $h \in \mathfrak{H}^{(l)}$. Оценка (5.14) эквивалентна следующему утверждению: оператор $A^{-1}$ ограничен. Но это вытекает из равенства (7.5):

$$\|A^{-1}\| \leqslant \|(I+T)^{-1}\| \|R\|,$$

$$\|A^{-1}\| \leqslant \|(I+W)^{-1}\| \|R\|.$$

Если выбрать $\tau$ настолько малым, чтобы, например, $\|T\| \leqslant \frac{1}{2}$, то тогда $\|(I+T)^{-1}\| \leqslant 2$ и $\|A^{-1}\| \leqslant 2\|R\|$. Норма оператора $R$ будет оценена ниже (теорема 7.1).

Итак, все сводится к построению оператора $R$, доказательству (7.3), (7.4) и оценкам норм $\|R\|$, $\|T\|$, $\|W\|$.

Приступим к построению оператора $R$. Фиксируем произвольным образом малое $\lambda > 0$ и введем множества $\Omega^{(k)} \subset \mathfrak{R}^{(\lambda)}$ из § 4. Введем еще следующие обозначения. Через $Z_k$ обозначим оператор, определенный на функциях $u(z)$, заданных в области $\mathfrak{R}$, который сопоставляет каждой такой функции ту же самую функцию при переходе от координат $\{z\}$, связанных с местными координатами в точке $\xi^{(k)}$ формулами (4.3), к исходным координатам $\{x\}$. Пусть, далее,

$$\mathscr{L}_0\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

а $\mathscr{L}_0^{(k)}$ — оператор $\mathscr{L}_0$ в местной системе координат $\{y\}$ в точке $\xi^{(k)}$, т. е.

$$\mathscr{L}_0^{(k)} = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j},$$

где

$$a_{rs}^{(k)} = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \beta_{ri}^{(k)} \beta_{sj}^{(k)},$$

а $\beta_{ri}^{(k)}$ — элементы ортогональной матрицы, связывающей координаты $\{x\}$ и $\{y\}$:

$$y_r = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ri}^{(k)} \left(x_i - \xi_i^{(k)}\right).$$

Очевидно, что оператор $\mathscr{L}_0^{(k)}$ также удовлетворяет условию параболичности (2.5) главы I с теми же самыми $\mu$ и $\nu$, что и $\mathscr{L}_0$.

Аналогично, пусть

$$B_0\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

и

$$B_0^{(k)}\left(y, t, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i^{(k)} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

где

$$b_l^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} b_j \beta_{lj}^{(k)}.$$

Пусть $f^{(k)}(x, t)$ $(k \in \mathfrak{M})$ — функция из $\overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2}}\left(\overline{D_{n+1}^{(\tau)}}\right)$. Обозначим через $R^{(k)}$ оператор, сопоставляющий этой функции решение задачи Коши с нулевыми начальными данными

$$\mathscr{L}_0\left(\xi^{(k)}, 0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) v^{(k)}(x, t) = f^{(k)}(x, t),$$

$$v^{(k)} \in \overset{\circ}{H}{}^{l+2, \frac{l}{2}+1}\left(\overline{D_{n+1}^{(\tau)}}\right), \tag{7.6}$$

которое, как было показано в § 6, существует и единственно. Пусть, далее, при $k \in \mathfrak{N}$ $f^{(k)}(z, t) \in \overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2}}\left(\overline{R^{(\tau)}}\right)$, $\Phi^{(k)}(z', t) \in \overset{\circ}{H}{}^{l+1, \frac{l+1}{2}}\left(\overline{\widetilde{D}_n^{(\tau)}}\right)$ и $R^{(k)}$ — оператор, сопоставляющий паре функций $h^{(k)} = (f^{(k)}, \Phi^{(k)})$ решение краевой задачи с нулевыми начальными данными

$$\mathscr{L}_0^{(k)}\left(\xi_0^{(k)}, 0, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right) v^{(k)}(z, t) = f^{(k)}(z, t),$$

$$B_j^{(k)}\left(\xi^{(k)}, 0, \frac{\partial}{\partial z}\right) v^{(k)}\Big|_{z_n=0} = \Phi^{(k)}(z', t). \tag{7.7}$$

Решение этой задачи, как было показано в § 6, также существует и единственно в классе $\overset{\circ}{H}{}^{l+2, \frac{l}{2}+1}\left(\overline{R^{(\tau)}}\right)$.

Пусть $\zeta^{(k)}(x)$ и $\eta^{(k)}(x)$ — функции, введенные в § 4. Определим оператор $R$ формулой

$$Rh = \sum_k \eta^{(k)}(x)\, v^{(k)}(x, t), \tag{7.8}$$

где

$$v^{(k)}(x, t) = \begin{cases} R^{(k)}\zeta^{(k)} f & \text{при } k \in \mathfrak{M}, \\ Z_k R^{(k)}\left(Z_k^{-1}\zeta^{(k)} f,\ Z_k^{-1}\zeta^{(k)}\Phi\right) & \text{при } k \in \mathfrak{N}. \end{cases} \tag{7.9}$$

В силу (6.4) и (6.6)

$$\langle R^k f^{(k)}\rangle^{(l+2)}_{D^{(\tau)}_{n+1}} \leqslant c\,\langle f^{(k)}\rangle^{(l)}_{D^{(\tau)}_{n+1}} \quad (k\in\mathfrak{M}), \tag{7.10}$$

$$\langle R^{(k)}(f^{(k)},\ \Phi^{(k)})\rangle^{(l+2)}_{R^{(\tau)}} \leqslant c\left(\langle f^{(k)}\rangle^{(l)}_{R^{(\tau)}} + \langle\Phi^{(k)}\rangle^{(l+1)}_{\tilde{D}^{(\tau)}_n}\right) \tag{7.11}$$

$$(k\in\mathfrak{N}),$$

причем постоянные в обоих неравенствах не зависят от $\tau$ и от $k$ в силу равномерной параболичности уравнения.

Введем в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^{l+2,\,\frac{l}{2}+1}(\overline{Q}_\tau)$ норму $\{v\}^{(l+2)}_{Q_\tau}$ (4.16), а в пространстве $\mathfrak{H}^{(l)}$ — норму $\|h\|_{\mathfrak{H}^{(l)}} = \{f\}^{(l)}_{Q_\tau} + \{\Phi\}^{(l+1)}_{S_\tau}$. В силу лемм 4.1, 4.2 эта норма эквивалентна норме $|f|^{(l)}_{Q_\tau} + |\Phi|^{(l+1)}_{S_\tau}$.

Пусть числа $\tau$ и $\lambda$ связаны друг с другом соотношением (4.17).

Теорема 7.1. *Оператор $R$ является ограниченным оператором, действующим из пространства $\mathfrak{H}^{(l)}$ в пространство $\overset{\circ}{H}{}^{l+2,\,\frac{l}{2}+1}(\overline{Q}_\tau)$, т. е.*

$$\{Rh\}^{(l+2)}_{Q_\tau} \leqslant c\,\|h\|_{\mathfrak{H}^{(l)}}, \tag{7.12}$$

*причем постоянная $c$ не зависит от $\lambda$ и $\tau$.*

Доказательство. Оценим вектор $v = Rh$ с помощью следствия леммы 4.4. Будем иметь

$$\{v\}^{(l+2)}_{Q_\tau} \leqslant c\sup_k \langle v^{(k)}\rangle^{(l+2)}_{Q^{(k)}_\tau}.$$

Пользуясь для оценки $v^{(k)}$ неравенствами (7.10) или (7.11), а также очевидным свойством ограниченности операторов $Z_k$ и $Z_k^{-1}$, мы получим

$$\langle v^{(k)}\rangle^{(l+2)}_{Q^{(k)}_\tau} \leqslant c\,\langle \zeta^{(k)} f\rangle^{(l)}_{Q^{(k)}_\tau} \tag{7.13}$$

при $k\in\mathfrak{M}$ и

$$\langle v^{(k)}\rangle^{(l+2)}_{Q^{(k)}_\tau} \leqslant c\left(\langle \zeta^{(k)} f\rangle^{(l)}_{Q^k_\tau} + \langle Z_k^{-1}\zeta^{(k)}\Phi\rangle^{(l+1)}_{\sigma_\tau}\right) \tag{7.14}$$

при $k \in \mathfrak{N}$. Отсюда с помощью леммы 4.3 выводим

$$\{v\}_{Q_\tau}^{(l+2)} \leqslant c\left(\sup_k \langle \zeta^{(k)} f\rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l)} + \sup_{k \in \mathfrak{N}} \langle Z_k^{-1}\zeta^{(k)}\Phi\rangle_{\sigma_\tau}^{(l+1)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\sup_k \langle f\rangle_{Q_\tau^k}^{(l)} + \sup_{k \in \mathfrak{N}} \langle Z_k^{-1}\Phi\rangle_{\sigma_\tau}^{(l+1)}\right) = c\,\|h\|_{\mathfrak{H}^{(l)}},$$

и теорема доказана.

Теорема 7.2. *При любых* $h \in \mathfrak{H}^{(l)}$ *и* $v \in \overset{\circ}{H}{}^{l+2,\frac{l}{2}+1}(\overline{Q}_\tau)$ *справедливы соотношения* (7.3), (7.4), *в которых* $T$ *и* $W$ — *ограниченные операторы в пространствах* $\mathfrak{H}^{(l)}$ *и* $\overset{\circ}{H}{}^{l+1,\frac{l}{2}+1}$ *соответственно и их нормы малы при малом* $\tau$.

Доказательство. Введем для младших членов операторов $\mathscr{L}$ и $\mathscr{B}$ следующие обозначения:

$$\mathscr{L}_1\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \sum_{i=1}^{n} a_i(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,\ t)\,u,$$

$$\mathscr{B}_1(x,\ t)\,u = b(x,\ t)\,u.$$

Пусть также

$$A_0 v = (\mathscr{L}_0 v,\ \mathscr{B}_0 v\,|_{S_\tau}), \qquad A_1 v = (\mathscr{L}_1 v,\ \mathscr{B}_1 v\,|_{S_\tau}).$$

Имеем

$$\mathscr{L}_0 Rh = \sum_k \mathscr{L}_0 \eta^{(k)} v^{(k)} = \sum_k (\mathscr{L}_0 \eta^{(k)} v^{(k)} - \eta^{(k)} \mathscr{L}_0 v^{(k)}) +$$

$$+ \sum_k \eta^{(k)} \left[\mathscr{L}_0\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) - \mathscr{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\right] v^k +$$

$$+ \sum_k \eta^{(k)} \mathscr{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) v^{(k)}.$$

Если $k \in \mathfrak{M}$, то

$$\mathscr{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) v^{(k)} =$$

$$= \mathscr{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) R^{(k)}\zeta^{(k)} f = \zeta^{(k)} f;$$

если же $k \in \mathfrak{N}$, то

$$\mathcal{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) v^{(k)} =$$

$$= \mathcal{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) Z_k R^{(k)}\left(Z_k^{-1}\zeta^{(k)} f,\ Z_k^{-1}\zeta^{(k)}\Phi\right) =$$

$$= Z_k \mathcal{L}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z} - \operatorname{grad} F \frac{\partial}{\partial z_n},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) R^{(k)}\left(Z_k^{-1}\zeta^{(k)} f,\ Z_k^{-1}\zeta^{(k)}\Phi\right) =$$

$$= Z_k \left[\mathcal{L}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z} - \operatorname{grad} F \frac{\partial}{\partial z_n},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) - \right.$$

$$\left. - \mathcal{L}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\right] R^{(k)}\left(Z_k^{-1}\zeta^{(k)} f,\ Z_k^{-1}\zeta^{(k)}\Phi\right) + \zeta^{(k)} f,$$

поскольку по определению $R^{(k)}$ при $z \in \mathfrak{R}$

$$\mathcal{L}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) R^{(k)}\left(Z_k^{-1}\zeta^{(k)} f,\ Z_k^{-1}\zeta^{(k)}\Phi\right) = Z_k^{-1}\zeta^{(k)} f.$$

Через $\operatorname{grad} F$ мы все время будем обозначать $n$-мерный вектор с компонентами $\frac{\partial F}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial z_{n-1}}, 0$. При замене переменных (4.3)

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial}{\partial z_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial z_\alpha}\frac{\partial}{\partial z_n} \quad (\alpha \neq n), \qquad \frac{\partial}{\partial y_n} = \frac{\partial}{\partial z_n},$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} - \operatorname{grad} F \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

Пользуясь теперь тем, что $\sum\limits_k \eta^{(k)}\zeta^{(k)} = 1$, и полагая для краткости

$$\tilde{v}^{(k)} = R^{(k)}\left(Z_k^{-1}\zeta^{(k)} f,\ Z_k^{-1}\zeta^{(k)}\Phi\right) \quad (k \in \mathfrak{N}),$$

получаем

$$\mathcal{L}Rh = h + T_1 h,$$

где

$$T_1 h = \mathcal{L}_1 Rh + \sum_k \left(\mathcal{L}_0 \eta^{(k)} v^{(k)} - \eta^{(k)} \mathcal{L}_0 v^{(k)}\right) +$$

$$+ \sum_k \eta^{(k)}\left[\mathcal{L}_0\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) - \mathcal{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\right] v^{(k)} +$$

$$+ \sum_{k \in \mathfrak{N}} \eta^{(k)} Z_k \left[\mathcal{L}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z} - \operatorname{grad} F \frac{\partial}{\partial z_n},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) - \right.$$

$$\left. - \mathcal{L}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\right] \tilde{v}^{(k)}(z,\ t). \quad (7.15)$$

Совершенно аналогично устанавливаем, что

$$\mathscr{B}Rh|_{S_\tau} = h + T_2 h,$$

где

$$T_2 h = \mathscr{B}_1 Rh|_{S_\tau} + \sum_{k\in\mathfrak{N}} (\mathscr{B}_0 \eta^{(k)} v^{(k)} - \eta^{(k)} \mathscr{B}_0 v^{(k)})|_{S_\tau} + \\ + \sum_{k\in\mathfrak{N}} \eta^{(k)} \left[\mathscr{B}_0\left(x,\, t,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \mathscr{B}_0\left(\xi^{(k)},\, 0,\, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] v^{(k)}\Big|_{S_\tau} + \\ + \sum_{k\in\mathfrak{N}} \eta^{(k)} Z_k \left[\mathscr{B}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\, 0,\, \frac{\partial}{\partial z} - \operatorname{grad} F \frac{\partial}{\partial z_n}\right) - \right. \\ \left. - \mathscr{B}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\, 0,\, \frac{\partial}{\partial z}\right)\right] \tilde{v}^{(k)}.$$

Таким образом,

$$ARh = (\mathscr{L}Rh,\ \mathscr{B}Rh|_{S_\tau}) = (f,\ \Phi) + (T_1 h,\ T_2 h) = h + Th.$$

Для оценки нормы оператора $T$ выразим операторы $T_1$ и $T_2$ через коэффициенты операторов $\mathscr{L}$ и $\mathscr{B}$. Имеем

$$T_1 h = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\, t)\frac{\partial}{\partial x_i} + a(x,\, t)\right) Rh - \\ - \sum_k \sum_{i,\, j=1}^{n} \left(2a_{ij}(x,\, t)\frac{\partial \eta^{(k)}}{\partial x_i}\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_j} + v^{(k)} a_{ij}(x,\, t)\frac{\partial^2 \eta^{(k)}}{\partial x_i\, \partial x_j}\right) - \\ - \sum_k \sum_{i,\, j=1} \eta^{(k)} [a_{ij}(x,\, t) - a_{ij}(\xi^{(k)},\, 0)] \frac{\partial^2 v^{(k)}}{\partial x_i\, \partial x_j} + \\ + \sum_{k\in\mathfrak{N}} \eta^{(k)} Z_k \left[\sum_{\alpha,\, \beta=1}^{n-1} \left(2a_{\alpha\beta}^{(k)}(z,\, t)\frac{\partial F}{\partial z_\alpha}\frac{\partial^2 \tilde{v}^{(k)}}{\partial z_\beta\, \partial z_n} - \right.\right. \\ \left. - a_{\alpha\beta}^{(k)}(z,\, t)\frac{\partial F}{\partial z_\alpha}\frac{\partial F}{\partial z_\beta}\frac{\partial^2 \tilde{v}^{(k)}}{\partial z_n^2} + a_{\alpha\beta}^{(k)}\frac{\partial^2 F}{\partial z_\alpha\, \partial z_\beta}\frac{\partial v^{(k)}}{\partial z_n}\right) + \\ \left. + 2\sum_{\alpha=1}^{n-1} a_{\alpha n}^{(k)}(z,\, t)\frac{\partial F}{\partial z_\alpha}\frac{\partial^2 \tilde{v}^{(k)}}{\partial z_n^2}\right],$$

$$T_2h = b(x,\ t)Rh|_{S_\tau} + \sum_{k\in\mathfrak{N}}\sum_{i=1}^{n} b_i(x,\ t)\frac{\partial\eta^{(k)}}{\partial x_i}v^{(k)}\Big|_{S_\tau} +$$

$$+\sum_{k\in\mathfrak{N}}\sum_{i=1}^{n}\eta^{(k)}\left[b_i(x,\ t) - b_i(\xi^{(k)},\ 0)\right]\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_i}\Big|_{S_\tau} -$$

$$-\sum_{k\in\mathfrak{N}}\eta^{(k)}Z_k\sum_{\alpha=1}^{n-1} b_\alpha^{(k)}(z,\ t)\frac{\partial F}{\partial z_\alpha}\frac{\partial\tilde{v}^{(k)}}{\partial z_n}\Big|_{z_n=0}.$$

Принимая во внимание, что при $x\in\Omega^{(k)}$

$$|a_{ij}(x,\ t) - a_{ij}(\xi^{(k)},\ 0)| \leqslant$$

$$\leqslant |a_{ij}(x,\ t) - a_{ij}(\xi^{(k)},\ t)| + |a_{ij}(\xi^{(k)},\ t) - a_{ij}(\xi^{(k)},\ 0)| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\begin{matrix} c\lambda & \text{при} & l>1 \\ c\lambda^l & \text{при} & l<1\end{matrix}\right\} \leqslant c\lambda^{l-[l]},$$

$$|b_i(x,\ t) - b_i(\xi^{(k)},\ 0)| \leqslant c\lambda$$

и при $z'\in\sigma$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial z_\alpha}\right| \leqslant c\lambda, \tag{7.16}$$

а также пользуясь леммами 4.1 и 4.4, можно оценить функцию $T_1h$ следующим образом:

$$\{T_1h\}_{Q_\tau}^{(l)} \leqslant c\left(\{Rh\}_{Q_\tau}^{(l+1)} + \frac{1}{\lambda}\sup_k\langle v^{(k)}\rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l+1)} + \frac{1}{\lambda^2}\sup_k\langle v^{(k)}\rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l)} +\right.$$

$$\left. + \lambda^{l-[l]}\sup_k\langle v^{(k)}\rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l+2)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c\left[\tau^{\frac{1}{2}}\{Rh\}_{Q_\tau}^{(l+2)} + \left(\frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{\lambda} + \frac{\tau}{\lambda^2} + \lambda^{l-[l]}\right)\sup_k\langle v^{(k)}\rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l+2)}\right],$$

откуда в силу (7.12)—(7.14) и леммы 4.3 получаем

$$\{T_1h\}_{Q_\tau}^{(l)} \leqslant c\left(\varkappa^{\frac{1}{2}}\lambda + \varkappa^{\frac{1}{2}} + \varkappa + \lambda^{l-[l]}\right)\|h\|_{\mathfrak{H}^{(l)}} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\varkappa^{\frac{1}{2}} + \lambda^{l-[l]}\right)\|h\|_{\mathfrak{H}^{(l)}}.$$

Совершенно аналогично можно показать, что

$$\{T_2 h\}_{S_\tau}^{(l+1)} \leqslant c\left(\varkappa^{\frac{1}{2}} + \lambda\right) \| h \|_{\mathfrak{H}^{(l)}}.$$

Следовательно,

$$\| Th \|_{\mathfrak{H}^{(l)}} \leqslant c\left(\varkappa^{\frac{1}{2}} + \lambda^{l-[l]}\right) \| h \|_{\mathfrak{H}^{(l)}}, \tag{7.17}$$

откуда видно, что при малых $\tau$ и $\lambda$ норма оператора $T$ действительно будет мала. Так как параметр $\lambda$ можно выбрать произвольно малым, то можно считать, что мы получили желаемую оценку нормы оператора $T$.

Переходим к доказательству (7.4). Имеем

$$RAv = RA_0 v + RA_1 v.$$

При $k \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned} R^{(k)}\zeta^{(k)}\mathscr{L}_0 v = R^{(k)}&(\zeta^{(k)}\mathscr{L}_0 v - \mathscr{L}_0\zeta^{(k)}v) + \\ &+ R^{(k)}\left(\mathscr{L}_0\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) - \right. \\ &\left. - \mathscr{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\zeta^{(k)}v + \zeta^{(k)}v, \end{aligned} \tag{7.18}$$

так как в силу единственности решения задачи (7.6)

$$R^{(k)}\mathscr{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\zeta^{(k)}v = \zeta^{(k)}v.$$

Далее, при $k \in \mathfrak{N}$

$$\begin{aligned} &R^{(k)}\left(Z_k^{-1}\zeta^{(k)}\mathscr{L}_0 v,\ Z_k^{-1}\zeta^{(k)}\mathscr{B}_0 v\,|_{S_\tau}\right) = \\ &= R^{(k)}\left[Z_k^{-1}(\zeta^{(k)}\mathscr{L}_0 v - \mathscr{L}_0\zeta^{(k)}v),\ Z_k^{-1}(\zeta^{(k)}\mathscr{B}_0 v - \mathscr{B}_0\zeta^{(k)}v)\,|_{S_\tau}\right] + \\ &+ R^{(k)}\left[Z_k^{-1}\left(\mathscr{L}_0\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) - \mathscr{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\zeta^{(k)}v,\right. \\ &\left. Z_k^{-1}\left(\mathscr{B}_0\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right) - \mathscr{B}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\zeta^{(k)}v\,\Big|_{S_\tau}\right] + \\ &\qquad + R^{(k)}\left[\left(\mathscr{L}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z} - \operatorname{grad} F\frac{\partial}{\partial z_n},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) - \right.\right. \\ &\qquad\qquad \left. - \mathscr{L}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\right) Z_k^{-1}\zeta^{(k)}v, \\ &\left(\mathscr{B}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z} - \operatorname{grad} F\,\frac{\partial}{\partial z_n}\right) - \right. \\ &\qquad \left.\left. - \mathscr{B}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\right) Z_k^{-1}\zeta^{(k)}v\,\Big|_{z_n=0}\right] + Z_k^{-1}\zeta^{(k)}v, \end{aligned} \tag{7.19}$$

так как в силу единственности решения задачи (7.7) (теорема 6.1)

$$R^{(k)}\left[\mathscr{L}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) Z_k^{-1}\zeta^{(k)}v,\right.$$
$$\left.\mathscr{B}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0\ \frac{\partial}{\partial z}\right) Z_k^{-1}\zeta^{(k)}v\,\Big|_{z_n=0}\right] = Z_k^{-1}\zeta^{(k)}v.$$

Из (7.18), (7.19), (7.8), (7.9) вытекает, что равенство (7.4) имеет место и

$$Wv = RA_1v + \sum_{k\in\mathfrak{M}}\eta^{(k)}R^{(k)}\left(\zeta^{(k)}\mathscr{L}_0v - \mathscr{L}_0\zeta^{(k)}v\right) +$$
$$+\sum_{k\in\mathfrak{M}}\eta^{(k)}R^{(k)}\left[\left(\mathscr{L}_0\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) -\right.\right.$$
$$\left.\left.-\mathscr{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\zeta^{(k)}v\right] +$$
$$+\sum_{k\in\mathfrak{N}}\eta^{(k)}Z_kR^{(k)}\left[Z_k^{-1}\left(\zeta^{(k)}\mathscr{L}_0v - \mathscr{L}_0\zeta^{(k)}v\right),\right.$$
$$\left.Z_k^{-1}\left(\zeta^{(k)}\mathscr{B}_0v - \mathscr{B}_0\zeta^{(k)}v\right)\Big|_{S_\tau}\right] +$$
$$+\sum_{k\in\mathfrak{N}}\eta^{(k)}Z_kR^{(k)}\left[Z_k^{-1}\left(\mathscr{L}_0\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) -\right.\right.$$
$$\left.-\mathscr{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\zeta^{(k)}v,$$
$$\left.Z_k^{-1}\left(\mathscr{B}_0\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right) - \mathscr{B}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\zeta^{(k)}v\Big|_{S_\tau}\right] +$$
$$+\sum_{k\in\mathfrak{N}}\eta^{(k)}Z_kR^{(k)}\left[\left(\mathscr{L}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z} - \operatorname{grad} F\frac{\partial}{\partial z_n}\right) -\right.\right.$$
$$\left.-\mathscr{L}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\right) Z_k^{-1}\zeta^{(k)}v,$$
$$\left(\mathscr{B}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z} - \operatorname{grad} F\,\frac{\partial}{\partial z_n}\right) -\right.$$
$$\left.\left.-\mathscr{B}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\right) Z_k^{-1}\zeta^{(k)}v\,\Big|_{z_n=0}\right].$$

Оценка нормы $\langle Wv\rangle_{Q_\tau}^{(l+2)}$ получается с помощью этого представления точно так же, как оценка (7.17). В силу неравенства (7.12) и леммы 4.1

$$\{RA_1v\}_{Q_\tau}^{(l+2)} \leqslant c\,\|A_1v\|_{\mathfrak{H}^{(l)}} \leqslant c\,\{v\}_{Q_\tau}^{(l+1)} \leqslant c\tau^{\frac{1}{2}}\,\{v\}_{Q_\tau}^{(l+2)}.$$

Пользуясь еще леммами 4.3, и 4.4 и неравенствами (7.10), (7.11), мы получим оценку

$$\{Wv\}_{Q_\tau}^{(l+2)} \leqslant c\left(\tau^{\frac{1}{2}}\{v\}_{Q_\tau}^{(l+2)} + \frac{1}{\lambda}\sup_k \langle v\rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l+1)} + \frac{1}{\lambda^2}\sup_k \langle v\rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l)} + \right.$$
$$\left. + \lambda^{l-[l]}\sup_k \langle v\rangle_{Q_\tau^{(k)}}^{(l+2)}\right) \leqslant c\left(\lambda^{l-[l]} + \varkappa^{\frac{1}{2}}\right)\{v\}_{Q_\tau}^{(l+2)},$$

завершающую доказательство теоремы.

Итак, мы построили оператор $R$, доказали равенства (7.3) и (7.4) и получили оценки норм $\|R\|$, $\|T\|$, $\|W\|$. Как было показано в начале параграфа, из этих результатов вытекает однозначная разрешимость задачи (5.4′) и следующая оценка для ее решения:

$$\{u\}_{Q_\tau}^{(l+2)} \leqslant \|A^{-1}\|\,\|h\|_{\mathfrak{H}^{(l)}} \leqslant 2c\,\|h\|_{\mathfrak{H}^{(l)}}.$$

Здесь $c$ — постоянная из неравенства (7.12). В силу лемм 4.1 и 4.2 эта оценка эквивалентна неравенству (5.14). Теорема 5.4 для задачи (5.4′) доказана.

Как мы уже отмечали, для задач (5.2′) и (5.3′) эта теорема доказывается совершенно аналогично; более того, выкладки при доказательстве упрощаются, так как в задаче (5.2′) нет никаких краевых условий, а в задаче (5.3′) они имеют более простой вид.

Подчеркнем еще, что точно таким же образом можно рассмотреть задачу (5.4′) для того же самого уравнения в цилиндрической области, нижнее основание которой лежит в плоскости $t = t_0 < T$. Высота цилиндра, в котором гарантируется существование решения, может быть выбрана одинаковой для любого $t_0$, что является следствием равномерной параболичности оператора $\mathcal{L}$ и неравенства (5.6). Мы обозначим эту высоту через $\tau_0$.

## § 8. О разрешимости задачи (5.4)

В этом параграфе мы выведем теорему 5.3 из доказанной только что теоремы 5.4. Очевидно, что для этого нужно свести задачу (5.4) к задаче с нулевыми начальными данными (5.4′). Для этого нужно вычислить из уравнения и начального условия функции $u^{(k)}(x)$, $k = 0, \ldots, 1 + \left[\frac{l}{2}\right]$

(это делается с помощью (5.7), (5.8)), а затем построить функцию $v(x, t)$, которая обладала бы тем свойством, что

$$\left.\frac{\partial^k v(x, t)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u^{(k)}(x) \quad \left(k = 0, \ldots, 1 + \left[\frac{l}{2}\right]\right), \tag{8.1}$$

и ввести новую неизвестную функцию

$$u'(x, t) = u(x, t) - v(x, t). \tag{8.2}$$

Она должна быть решением задачи с нулевыми начальными данными

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u' = f', \\ &\mathscr{B}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u'\Big|_{S_T} = \Phi', \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

где

$$f' = f - Lv \in \overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2}}(\bar{Q}_T), \quad \Phi' = \Phi - Bv|_{S_T} \in \overset{\circ}{H}{}^{l+1, \frac{l+1}{2}}(S_T).$$

Проверим, что если выполняются условия теоремы 5.3, то $u^{(k)}(x) \in H^{l+2-2k}(\bar{\Omega})$ при $k < 1 + \frac{l}{2}$ и

$$|u^{(k)}|_{\Omega}^{(l+2-2k)} \leqslant c\left(|f|_{Q_t}^{(l)} + |\varphi|_{\Omega}^{(l+2)}\right) \quad (0 < t \leqslant T). \tag{8.4}$$

Это нетрудно сделать с помощью (5.7), (5.8). Так как коэффициенты оператора $A^{(j)}$, будучи производными коэффициентов оператора $A$, принадлежат классу $H^{l-2j, \frac{l}{2}-j}(\bar{Q}_T)$, то из (5.8) следует, что при $k < 1 + \frac{l}{2}$

$$|u^{(k)}|_{\Omega}^{(l+2-2k)} \leqslant |f^{(k-1)}|_{\Omega}^{(l+2-2k)} + c\sum_{j=0}^{k-1} |u^{(j)}|_{\Omega}^{(l+2-2(k-1))} \leqslant$$
$$\leqslant |f|_{Q_t}^{(l)} + c\sum_{j=0}^{k-1} |u^{(j)}|_{\Omega}^{(l+2-2j)}. \tag{8.5}$$

Таким образом, оценка $|u^{(k)}|_{\Omega}^{(l+2-2k)}$ сводится к оценке нормы $|u^{(j)}|_{\Omega}^{(l+2-2j)}$ при $j < k$. Так как $u^{(0)} = \varphi$, то очевидно, что из (8.5) вытекает (8.4).

Итак, показано, что $u^{(k)}(x) \in H^{l+2-2k}(\bar{\Omega})$. С помощью теоремы 4.1 мы можем теперь продолжить функции $u^{(k)}(x)$ на все пространство $E_n$ так, чтобы

$$|u^{(k)}|_{E_n}^{(l+2-2k)} \leqslant c\,|u^{(k)}|_{\Omega}^{(l+2-2k)}. \tag{8.6}$$

В силу теоремы 4.3 можно построить функцию $v(x, t) \in H^{l+2, \frac{l}{2}+1}(\overline{D_{n+1}^{(T)}})$, удовлетворяющую начальным условиям (8.1) и неравенству

$$|v|_{D_{n+1}^{(T)}}^{(l+2)} \leqslant c \sum_{k=0}^{1+\left[\frac{l}{2}\right]} |u^{(k)}|_{E_n}^{(l+2-2k)} \leqslant c \sum_{k=0}^{1+\left[\frac{l}{2}\right]} |u^{(k)}|_{\Omega}^{(l+2-2k)} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(|f|_Q^{(l)} + |\varphi|_{\Omega}^{(l+2)}\right) \tag{8.7}$$

(мы воспользовались также неравенствами (8.4) и (8.6)). Поэтому функции $f'$ и $\Phi'$ в (8.3) обладают следующими дифференциальными свойствами: $f' \in \overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$, $\Phi' \in \overset{\circ}{H}{}^{l+1, \frac{l+1}{2}}(S_T)$.

Согласно теореме 5.4 в цилиндре $Q_{\tau_0}$ существует единственное решение задачи (8.3) из класса $\overset{\circ}{H}{}^{l+2, \frac{l}{2}+1}(\overline{Q}_{\tau_0})$, удовлетворяющее неравенству

$$|u'|_{Q_{\tau_0}}^{(l+2)} \leqslant c\left(|f'|_{Q_{\tau_0}}^{(l)} + |\Phi'|_{S_{\tau_0}}^{(l+1)}\right). \tag{8.8}$$

Тем самым доказано, что задача (5.4) также имеет единственное решение в $Q_{\tau_0}$, причем из (8.8), (8.7) вытекает, что

$$|u|_{Q_{\tau_0}}^{(l+2)} \leqslant |u'|_{Q_{\tau_0}}^{(l+2)} + |v|_{Q_{\tau_0}}^{(l+2)} \leqslant c\left(|f|_{Q_{\tau_0}}^{(l)} + |\varphi|_{\Omega}^{(l+2)} + |\Phi|_{S_{\tau_0}}^{(l+1)}\right).$$

Покажем, что решение этой задачи существует в цилиндре большей высоты. Для этой цели фиксируем какую-нибудь точку в промежутке $[0, \tau_0]$, например $\frac{\tau_0}{2}$, и подсчитаем $\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=\frac{\tau_0}{2}}$. Пусть

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=\frac{\tau_0}{2}} = \varphi^{(k)}(x).$$

Так как $u \in H^{l+2, \frac{l}{2}+1}(Q_\tau)$, то $\varphi^{(k)} \in H^{l+2-2k}(\overline{\Omega})$. Построим функцию $v'(x, t) \in H^{l+2, \frac{l}{2}+1}(\overline{Q}')$, где $Q' = \Omega \times \left(\frac{\tau_0}{2}, T\right)$, такую, что при $k < 1 + \frac{l}{2}$

$$\left.\frac{\partial^k v'}{\partial t^k}\right|_{t=\frac{\tau_0}{2}} = \varphi^{(k)}(x)$$

и

$$|v'|_{Q'}^{(l+2)} \leqslant c \sum_{k=0}^{1+\left[\frac{l}{2}\right]} |\varphi^{(k)}|_{\Omega}^{(l+2-2k)}. \tag{8.9}$$

Это можно сделать точно таким же способом, каким была выше построена функция $v$.

Функция $u'' = u - v'$ является решением следующей задачи с нулевыми начальными данными, поставленными при $t = \frac{\tau_0}{2}$:

$$\mathscr{L}u'' = f - \mathscr{L}v' = f'',$$
$$\mathscr{B}u''|_S = \Phi - \mathscr{B}v'|_S = \Phi''.$$

Мы установили, что решение этой задачи существует при $\frac{\tau_0}{2} \leqslant t \leqslant \tau_0$, однако в силу теоремы 5.4 можно утверждать, что оно существует при $\frac{\tau_0}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3\tau_0}{2}$ и удовлетворяет в цилиндре $Q'' = \Omega \times \left(\frac{\tau_0}{2}, \frac{3\tau_0}{2}\right)$ неравенству

$$|u''|_{Q''}^{(l+2)} \leqslant c\left(|f''|_{Q''}^{(l)} + |\Phi''|_{\tilde{S}_{\tau_0}}^{(l+1)}\right), \tag{8.10}$$
$$\left(\tilde{S}_{\tau_0} = S \times \left(\frac{\tau_0}{2}, \frac{3\tau_0}{2}\right)\right).$$

Тем самым доказано, что решение задачи (5.4) существует при $0 \leqslant t \leqslant \frac{3\tau_0}{2}$; легко проверить, что из (8.9), (8.10) вытекает

$$|u|_{Q_{\frac{3\tau_0}{2}}}^{(l+2)} \leqslant c\left(|f|_{Q_{\frac{3\tau_0}{2}}}^{(l)} + |\Phi|_{S_{\frac{3\tau_0}{2}}}^{(l+1)} + |\varphi|_{\Omega}^{(l+2)}\right).$$

Рассуждая таким же образом и дальше, мы исчерпаем весь промежуток $[0, T]$ и докажем существование решения задачи (5.4) в цилиндре $Q_T$, а также оценку (5.11).

Единственность решения задачи (5.5) или эквивалентной задачи (8.3) в цилиндре $Q_T$ является очевидным следствием единственности решения задачи (8.3) в цилиндре малой высоты $Q_{\tau_0}$, установленной в теореме 5.4.

Таким образом, теорема 5.3 полностью доказана.

## § 9. Первая краевая задача в классах $W_q^{2,1}(Q_T)$

Задачи (5.2) — (5.4) могут быть также разрешены в пространствах $W_q^{2m, m}(Q_T)$ ($q > 1$, $m$ — положительное целое число). Общая схема исследования задач (5.2) — (5.4) в этих классах не претерпевает никаких изменений по сравнению со схемой, изложенной в §§ 6—8 применительно к пространствам $H^{l, \frac{l}{2}}(\bar{Q}_T)$. Мы ограничимся здесь иллюстрацией этой схемы на примере первой краевой задачи (5.3), которую рассмотрим в классах $W_q^{2,1}(Q_T)$.

Введем предварительно норму

$$\|f\|_{r, Q_T}^{(\mathrm{loc})} = \sup_{q_T} \|f\|_{r, q_T}, \tag{9.1}$$

где sup берется по всем цилиндрам $q_T = \omega \times (0, T)$, основания которых $\omega$ являются пересечением области $\Omega$ с какой-либо областью единичной меры, например кубом. Если область $\Omega$ ограничена, то множество функций с конечной нормой $\|f\|_{r, Q_T}^{(\mathrm{loc})}$ совпадает с $L_r(Q_T)$, но при неограниченной $\Omega$ оно шире, чем $L_r(Q_T)$.

Теорема 9.1. *Пусть $q > 1$, $q \neq \frac{3}{2}$. Предположим, что коэффициенты $a_{ij}$ оператора $\mathscr{L}$ являются ограниченными непрерывными функциями в $Q_T$, а коэффициенты $a_i$ и $a$ имеют конечные нормы $\|a_i\|_{r, Q_T}^{(\mathrm{loc})}$ и $\|a\|_{s, Q_T}^{(\mathrm{loc})}$ соответственно, причем*

$$r = \begin{cases} \max(q, n+2) & \text{при} \quad q \neq n+2, \\ n+2+\varepsilon & \text{при} \quad q = n+2, \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} \max\left(q, \dfrac{n+2}{2}\right) & \text{при} \quad q \neq \dfrac{n+2}{2}, \\ \dfrac{n+2}{2} + \varepsilon & \text{при} \quad q = \dfrac{n+2}{2} \end{cases}$$

*и $\varepsilon$ — сколь угодно малое положительное число. Предположим, кроме того, что при $\tau \to 0$ величины $\|a_i\|_{r, Q_{t,t+\tau}}^{(\mathrm{loc})}$ и $\|a\|_{s, Q_{t,t+\tau}}^{(\mathrm{loc})}$ стремятся к нулю. Пусть $S \in O^2$. Тогда при любых $f \in L_q(Q_T)$, $\varphi \in W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)$ и $\Phi \in W_q^{2-\frac{1}{q},\, 1-\frac{1}{2q}}(S_T)$, удовлетворяющих в случае $q > \frac{3}{2}$ условию согласования нулевого порядка*

$$\varphi|_S = \Phi|_{t=0}, \tag{9.2}$$

*задача* (5.3) *имеет единственное решение $u \in W_q^{2,1}(Q_T)$. Для него справедлива оценка*

$$\|u\|_{q,Q}^{(2)} \leqslant c\left(\|f\|_{q,Q} + \|\varphi\|_{q,\Omega}^{\left(2-\frac{2}{q}\right)} + \|\Phi\|_{q,S_T}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)}\right). \tag{9.3}$$

Случай $q = \frac{3}{2}$ выпадает из общей схемы и будет рассмотрен отдельно.

Из теоремы 9.1 и леммы 3.3 главы II вытекает

Следствие. *Если выполнены условия теоремы* 9.1 *при $q > \frac{n+2}{2}$, то решение задачи* (5.3) *удовлетворяет условию Гёльдера по $x$ и $t$; в случае $q > n+2$ производные по $x_i$ решения задачи* (5.4) *также удовлетворяют условию Гёльдера по $x$ и $t$.*

Действительно, из леммы 3.3 главы II следует, что при $q > \frac{n+2}{2}$, $q \neq n+2$

$$|u|_Q^{\left(2-\frac{n+2}{q}\right)} \leqslant c\|u\|_{q,Q}^{(2)}.$$

Если же $q > n+2$, то $2 - \frac{n+2}{q} > 1$.

При доказательстве теоремы 9.1, так же как при доказательстве теорем 5.1 —5.3, основную роль играет исследование задачи с нулевыми начальными данными, которая формулируется следующим образом: найти функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2,1}(Q_\tau)$ такую, что

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}u &= f, \\ u|_{S_T} &= \Phi, \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

где

$$f \in L_q(Q_\tau), \quad \Phi \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2-\frac{1}{q},\, 1-\frac{1}{2q}}(S_\tau).$$

Теорема 9.2. *При условиях теоремы* 9.1 *задача* (9.4) *имеет единственное решение* $u \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2,1}(Q_\tau)$ *при любых* $f \in L_q(Q_\tau)$, $\Phi \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2-\frac{1}{q},\, 1-\frac{1}{2q}}(S_\tau)$, *если* $\tau \leqslant \tau_0'$, *где* $\tau_0'$ — *некоторое число, не зависящее от* $f$, $\Phi$. *При этом*

$$\|u\|_{q,\, Q_\tau}^{(2)} \leqslant c\left(\|f\|_{q,\, Q_\tau} + \{\Phi\}_{q,\, S_\tau}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)}\right). \tag{9.5}$$

*Показатель* $q$ *может принимать любое значение, большее* 1, *в частности* $\frac{3}{2}$.

Для доказательства этой теоремы нужно рассмотреть модельную задачу в области $R^{(T)}$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i\, \partial x_j} = f(x,\, t), \\ &v|_{x_n=0} = \Phi(x',\, t). \end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

Предполагается, что $f \in L_q(R^{(T)})$, $\Phi \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2-\frac{1}{q},\, 1-\frac{1}{2q}}(\widetilde{D}_n^{(T)})$; решение нужно найти в классе $\overset{\circ}{W}{}_q^{2,1}(R^{(T)})$. Покажем, что задача (9.6) имеет единственное решение в этом классе, удовлетворяющее неравенству

$$\langle\langle v \rangle\rangle_{q,\, R^{(T)}}^{(2)} \leqslant c\left(\|f\|_{q,\, R^{(T)}} + |\Phi|_{q,\, \widetilde{D}_n^{(T)}}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)}\right). \tag{9.7}$$

Точно так же как при доказательстве теоремы 6.1, достаточно ограничиться рассмотрением уравнения теплопроводности. В § 6 показано, что при $f \in \overset{\circ}{H}{}^{l,\, \frac{l}{2}}(\overline{R^{(T)}})$, и $\Phi \in \overset{\circ}{H}{}^{l+2,\, \frac{l}{2}+1}(\overline{\widetilde{D}_n^{(T)}})$ ($l > 0$) задача (9.6) имеет решение в классе $\overset{\circ}{H}{}^{l+2,\, \frac{l}{2}+1}(\overline{R^{(T)}})$, выражающееся по формуле (6.9). Покажем, что для функции (6.9) справедлива оценка (9.7). Продолжим функцию $f^{*0}$ из (6.9) из области $E_{n+1}^{(T)}$ в пространство $E_{n+1}$, а функцию $\omega_1^0$ — из $\widetilde{E}_n^{(T)}$ в $\widetilde{E}_n$ таким образом, что

$$\|f^{*0}\|_{q, E_{n+1}} \leqslant c\,\|f^{*0}\|_{q, E_{n+1}^{(T)}} \leqslant c\,\|f\|_{q, R^{(T)}}, \tag{9.8}$$

$$\langle\langle \omega_1^0 \rangle\rangle_{q, \widetilde{E}_n}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} \leqslant c\,\langle\langle \omega_1^0 \rangle\rangle_{q, \widetilde{E}_n^{(T)}}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)}. \tag{9.9}$$

Как было выяснено в § 4, такое продолжение возможно. Пользуясь неравенствами (9.8), (9.9), а также оценками (3.1), (3.4), получаем

$$\left.\begin{aligned} &\langle\langle (\Gamma * f^{*0}) \rangle\rangle_{q, R^{(T)}}^{(2)} \leqslant \langle\langle (\Gamma * f^{*0}) \rangle\rangle_{q, E_{n+1}}^{(2)} \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant c\,\|f^{*0}\|_{q, E_{n+1}} \leqslant c\,\|f\|_{q, R^{(T)}}, \\ &\left\langle\left\langle \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_n} *_2 \omega_1^0\right) \right\rangle\right\rangle_{q, R^{(T)}}^{(2)} \leqslant c\,\langle\langle \omega_1^0 \rangle\rangle_{q, \widetilde{E}_n^{(T)}}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

Для оценки нормы функции $\omega_1^0$ воспользуемся определением (6.10) этой функции. Принимая во внимание (4.26) и теорему вложения (теорема 4.5), а также оценку (9.10), получим

$$\begin{aligned} \langle\langle \omega_1^0 \rangle\rangle_{q, \widetilde{E}_n^{(T)}}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} &\leqslant \langle\langle \Phi^0 \rangle\rangle_{q, \widetilde{E}_n^{(T)}}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} + \left\langle\left\langle (\Gamma * f^{*0})\big|_{x_n=0} \right\rangle\right\rangle_{q, \widetilde{E}_n^{(T)}}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} \leqslant \\ &\leqslant c\left( |\Phi|_{q, \widetilde{D}_n^{(T)}}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} + \langle\langle (\Gamma * f^{*0}) \rangle\rangle_{q, E_{n+1}}^{(2)} \right) \leqslant \\ &\leqslant c\left( |\Phi|_{q, \widetilde{D}_n^{(T)}}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} + \|f\|_{q, R^{(T)}} \right). \end{aligned} \tag{9.11}$$

Объединяя оценки (9.10) и (9.11), мы получаем неравенство (9.7) для функции (6.9).

Пусть теперь $f \in L_q(R^{(T)})$, $\Phi \in \overset{\circ}{W}_q^{2-\frac{1}{q},\, 1-\frac{1}{2q}}(\widetilde{D}_n^{(T)})$. Аппроксимируем эти функции функциями $f^{(n)} \in \overset{\circ}{H}^{l,\, \frac{l}{2}}(\overline{R^{(T)}})$, $\Phi^{(n)} \in \overset{\circ}{H}^{l+2,\, \frac{l}{2}+1}(\overline{\widetilde{D}_n^{(T)}})$ $(l > 0)$. Пусть $v^{(n)} \in \overset{\circ}{H}^{l+2,\, \frac{l}{2}+1}(\overline{R^{(T)}})$ — решение задачи с функциями $f^{(n)}$, $\Phi^{(n)}$ вместо $f$, $\Phi$ в правой части уравнения и краевого условия. Функция $v^{(n)}-v^{(m)}$ оценивается через $f^{(n)}-f^{(m)}$, $\Phi^{(n)}-\Phi^{(m)}$ по неравенству (9.7), из которого вытекает, что последовательность $\{v^{(n)}\}$ сходится в норме $\langle\langle v\rangle\rangle^{(2)}_{q,R^{(T)}}$ к некоторому пределу $v\in \overset{\circ}{W}{}^{2,1}_q(R^{(T)})$, который является искомым решением задачи. Это решение подчиняется неравенству (9.7).

Единственность решения следует из того факта, что неравенство (9.7) имеет место для любого решения задачи (9.6) из класса $\overset{\circ}{W}{}^{2,1}_q(R^{(T)})$, в чем легко убедиться, аппроксимируя это решение функциями $v^{(n)}\in \overset{\circ}{H}{}^{l+2,\frac{l}{2}+1}(\overline{R^{(T)}})$ и используя тот факт, что для функций $v^{(n)}$ неравенство (9.7) справедливо.

Итак, мы доказали однозначную разрешимость задачи (9.6) в классах $\overset{\circ}{W}{}^{2,1}_q(R^{(T)})$.

Точно так же рассматривается задача Коши с нулевыми начальными данными для уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j}=f \tag{9.12}$$

с постоянными $a_{ij}$. При любой $f\in L_q(D^{(T)}_{n+1})$ эта задача имеет единственное решение $w\in \overset{\circ}{W}{}^{2,1}_q(D^{(T)}_{n+1})$, причем

$$\langle\langle w\rangle\rangle^{(2)}_{q,D^{(T)}_{n+1}}\leqslant c\,\|f\|_{q,D^{(T)}_{n+1}}. \tag{9.13}$$

Переходим к доказательству теоремы 9.2. Так же как в § 7, запишем задачу (9.4) в виде

$$A'u=h, \tag{9.14}$$

где $A'$ — оператор, сопоставляющий каждой функции $u\in \overset{\circ}{W}{}^{2,1}_q(Q_\tau)$ пару функций $A'u=(\mathscr{L}u,\ u|_{S_\tau})$. В силу леммы 3.4 главы II, оператор $A'$ является ограниченным оператором, действующим из пространства $\overset{\circ}{W}{}^{2,1}_q(Q_\tau)$ в пространство

$$\mathfrak{W}_q=L_q(Q_\tau)\times \overset{\circ}{W}{}^{2-\frac{1}{q},\,1-\frac{1}{2q}}_q(S_\tau).$$

Разрешимость уравнения (9.14) при любом $h \in \mathfrak{B}_q$, или, что то же самое, задачи (9.4), можно доказать для малых $\tau$, построив оператор $R'$, вполне аналогичный оператору $R$ из § 7. Мы определим его по формулам (7.8), (7.9), однако под $R^{(k)}$ в этом параграфе мы будем понимать операторы, несколько отличающиеся от соответствующих операторов § 7. Именно, мы будем теперь обозначать через $R^{(k)}$ при $k \in \mathfrak{M}$ оператор, сопоставляющий функции $f^{(k)} \in L_q\left(D_{n+1}^{(\tau)}\right)$ решение задачи Коши с нулевыми начальными данными

$$\mathscr{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) v^{(k)} = f^{(k)},$$

$$v^{(k)} \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2,1}\left(D_{n+1}^{(\tau)}\right), \tag{9.15}$$

а при $k \in \mathfrak{R}$ — оператор, сопоставляющий паре функций $h^{(k)} = \left(f^{(k)},\ \Phi^{(k)}\right)$, где $f^{(k)} \in L_q\left(R^{(\tau)}\right)$, $\Phi^{(k)} \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2-\frac{1}{q},\ 1-\frac{1}{2q}}\left(\tilde{D}_n^{(\tau)}\right)$, решение первой краевой задачи с нулевыми начальными данными

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) v^{(k)}(z,\ t) = f^{(k)}(z,\ t),\\ &v^{(k)}\big|_{z_n=0} = \Phi^{(k)}\left(z',\ t\right),\\ &v^{(k)} \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2,1}\left(R^{(\tau)}\right).\end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

Нетрудно проверить с помощью оценок (9.7), (9.13), что если в (9.15) функция $f^{(k)}(x,\ t)$ обращается в нуль вне $Q_\tau^{(k)}$, а в (9.16) $f^{(k)}(z,\ t)$ обращается в нуль вне области $\mathfrak{R}$ и $\Phi^{(k)}$ — вне области $\sigma'_\tau = \sigma' \times (0,\ \tau)$, где $\sigma' \subset \sigma$ — $(n-1)$-мерный куб

$$|z_\alpha| < \frac{3}{4} \qquad (\alpha = 1,\ \ldots,\ n-1),$$

то тогда при $k \in \mathfrak{M}$

$$\left\langle\!\left\langle R^{(k)} f^{(k)} \right\rangle\!\right\rangle_{q,\ Q_\tau^{(k)}}^{(2)} \leqslant c \left\| f^{(k)} \right\|_{q,\ Q_\tau^{(k)}} \tag{9.17}$$

и при $k \in \mathfrak{N}$

$$\langle\langle R^{(k)} h^{(k)} \rangle\rangle^{(2)}_{q, \mathfrak{N}_\tau} \leqslant$$

$$\leqslant c \left( \| f^{(k)} \|_{q, \mathfrak{N}_\tau} + | \Phi^{(k)} |^{\left(2 - \frac{1}{q}\right)}_{q, \sigma_\tau} \right) \qquad (\mathfrak{N}_\tau = \mathfrak{N} \times (0, \tau)). \qquad (9.18)$$

Определение областей $Q^{(k)}_\tau$, $\mathfrak{N}$, $\sigma$ см. в § 4.

Введем в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{2,1}_q(Q_\tau)$ норму $\{v\}^{(2)}_{q, Q_\tau}$, а в пространстве $\mathfrak{W}_q$ — норму

$$\| h \|_{\mathfrak{W}_q} = \{ f \}_{q, Q_\tau} + \{ \Phi \}^{\left(2 - \frac{1}{q}\right)}_{q, S_\tau},$$

где $\{f\}_{q, Q_\tau}$, $\{v\}^{(2)}_{q, Q_\tau}$ и $\{\Phi\}^{\left(2 - \frac{1}{q}\right)}_{q, Q_\tau}$ — нормы, определенные в § 4. Пользуясь (9.17), (9.18), легко показать, что при любом $h \in \mathfrak{W}_q$

$$\{R'h\}^{(2)}_{q, Q_\tau} \leqslant c \| h \|_{\mathfrak{W}_q}. \qquad (9.19)$$

Это неравенство доказывается точно так же, как (7.8), но вместо леммы 4.4 нужно использовать лемму 4.7. Следует только отметить, что применять неравенство (9.18) при доказательстве (9.19) можно при условии, что входящие в (7.9) функции $Z_k^{-1} \zeta^{(k)} \Phi$ равны нулю вне $\sigma'_\tau$ при любом $k \in \mathfrak{N}$. Это будет иметь место, если $Z_k^{-1} \zeta^{(k)} = 0$ при $z' \in E_{n-1} \setminus \sigma'$ для любого $k \in \mathfrak{N}$. Очевидно, что это последнее условие может быть выполнено без ущерба для других свойств функций $\zeta^{(k)}$, которые сформулированы в § 4 и которыми мы все время пользуемся.

Докажем, наконец, что при любых $h \in \mathfrak{W}_q$ и $v \in \overset{\circ}{W}{}^{2,1}_q(Q_\tau)$ справедливы соотношения

$$A'R'h = h + T'h, \qquad (9.20)$$

$$R'A'v = v + W'v \qquad (9.21)$$

с ограниченными операторами $T'$ и $W'$, норма которых мала при малом $\tau$.

Пусть

$$A'_0 v = (\mathscr{L}_0 v, \; v|_S), \quad A'_1 v = (\mathscr{L}_1 v, \; 0).$$

Повторяя рассуждения теоремы 7.2, мы легко убедимся в том, что соотношения (9.20), (9.21) действительно имеют место, причем

$$T'h = (T_1 h,\ 0),$$

где $T_1$ — оператор, определяемый равенством (7.15), в котором $R$ заменено на $R'$, а

$$\begin{aligned}
W'v = R'A_1'v &+ \sum_{k \in \mathfrak{M}} \eta^{(k)} R^{(k)} \left(\zeta^{(k)} \mathscr{L}_0 v - \mathscr{L}_0 \zeta^{(k)} v\right) + \\
&+ \sum_{k \in \mathfrak{M}} \eta^{(k)} R^{(k)} \left[\left(\mathscr{L}_0\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) - \right.\right. \\
&\left.\left. - \mathscr{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\zeta^{(k)} v\right. + \\
&+ \sum_{k \in \mathfrak{N}} \eta^{(k)} Z_k R^{(k)} \left[Z_k^{-1}\left(\zeta^{(k)} \mathscr{L}_0 v - \mathscr{L}_0 \zeta^{(k)} v\right),\ 0\right] + \\
&+ \sum_{k \in \mathfrak{N}} \eta^{(k)} Z_k R^{(k)} \left[Z_k^{-1}\left(\mathscr{L}_0\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) - \right.\right. \\
&\left.\left. - \mathscr{L}_0\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\zeta^{(k)} v,\ 0\right] + \\
+ \sum_{k \in \mathfrak{N}} \eta^{(k)} Z_k R^{(k)} &\left[\left(\mathscr{L}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z} - \operatorname{grad} F \frac{\partial}{\partial z_n},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) - \right.\right. \\
&\left.\left. - \mathscr{L}_0^{(k)}\left(\xi^{(k)},\ 0,\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\right) Z_k^{-1} \zeta^{(k)} v,\ 0\right]. \qquad (9.22)
\end{aligned}$$

Приступим к оценке $\|T'h\|_{\mathfrak{W}_q}$ и $\{W'v\}_{q,Q_\tau}^{(2)}$. Покажем, что при любом $v \in \overset{\circ}{W}{}_q^{2,1}(Q_\tau)$

$$\{\mathscr{L}_1 v\}_{q,Q_\tau} \leqslant \eta(\tau)\,\{v\}_{q,Q_\tau}^{(2)}, \qquad (9.23)$$

где $\eta(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
\{\mathscr{L}_1 v\}_{q,Q_\tau} &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\{a_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\}_{q,Q_\tau} + \{av\}_{q,Q_\tau} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_k \left\| a_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{q,Q_\tau^{(k)}}^q\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_k \|av\|_{q,Q_\tau^{(k)}}^q\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Оценим $\left\| a_l \frac{\partial v}{\partial x_l} \right\|_{q, Q_\tau^{(k)}}$. Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\left\| a_l \frac{\partial v}{\partial x_l} \right\|_{q, Q_\tau^{(k)}} \leqslant \| a_l \|_{r, Q_\tau^{(k)}} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_l} \right\|_{\frac{rq}{r-q}, Q_\tau^{(k)}}. \tag{9.24}$$

Здесь $r \geqslant q$ — показатель, определенный в формулировке теоремы 9.1. В случае $r = q$ мы, как обычно, считаем

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_l} \right\|_{\frac{rq}{r-q}, Q_\tau^{(k)}} = \left\| \frac{\partial v}{\partial x_l} \right\|_{\infty, Q_\tau^{(k)}} = \operatorname{vrai}\max_{Q_\tau^{(k)}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_l} \right|,$$

в этом случае неравенство (9.24) остается в силе.

Пользуясь леммой 3.3 главы II и леммой 4.5, мы получим

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_l} \right\|_{\frac{rq}{r-q}, Q_\tau^{(k)}} \leqslant c \langle\langle v \rangle\rangle^{(2)}_{q, Q_\tau^{(k)}}, \tag{9.25}$$

и так как функции $a_l$ по условию имеют конечную норму $\| a_l \|^{(\mathrm{loc})}_{r, Q_\tau}$, то из (9.24) и (9.25) вытекает

$$\left\| a_l \frac{\partial v}{\partial x_l} \right\|_{q, Q_\tau^{(k)}} \leqslant c \| a_l \|^{(\mathrm{loc})}_{r, Q_\tau} \langle\langle v \rangle\rangle^{(2)}_{q, Q_\tau^{(k)}}.$$

Совершенно аналогично

$$\| av \|_{q, Q_\tau^{(k)}} \leqslant c \| a \|^{(\mathrm{loc})}_{s, Q_\tau} \langle\langle v \rangle\rangle^{(2)}_{q, Q_\tau^{(k)}},$$

так что

$$\{\mathscr{L}_1 v\}_{q, Q_\tau} \leqslant c \left( \sum_{l=1}^{n} \| a_l \|^{(\mathrm{loc})}_{r, Q_\tau} + \| a \|^{(\mathrm{loc})}_{s, Q_\tau} \right) \left[ \sum_k \left( \langle\langle v \rangle\rangle^{(2)}_{q, Q_\tau^{(k)}} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

и, следовательно, (9.23) имеет место с

$$\eta(\tau) = c \left( \sum_{l=1}^{n} \| a_l \|^{(\mathrm{loc})}_{r, Q_\tau} + \| a \|^{(\mathrm{loc})}_{s, Q_\tau} \right).$$

В силу условия теоремы эта величина мала при малых $\tau$.

Оценка (9.23) вместе с неравенством (9.19) позволяет оценить первые члены правых частей (7.15) и (9.22). Остальные члены оцениваются так же, как в § 7, с помощью лемм 4.6 и 4.7, неравенств (9.17) — (9.19), (7.16), а также неравенств

$$|a_{ij}(x, t)| \leqslant c,$$
$$|a_{ij}(x, t) - a_{ij}(\xi^{(k)}, 0)| \leqslant \eta_1(\lambda) \qquad ((x, t) \in Q_\tau^{(k)}),$$

где $\eta_1(\lambda) \to 0$ вместо с $\lambda$. В результате получаются оценки

$$\|T'h\|_{\mathfrak{W}_q} \leqslant c\left(\eta(\tau) + \eta_1(\lambda) + \lambda + \varkappa^{\frac{1}{2}}\right)\|h\|_{\mathfrak{W}_q},$$
$$\{W'v\}_{q, Q_\tau}^{(2)} \leqslant c\left(\eta(\tau) + \eta_1(\lambda) + \lambda + \varkappa^{\frac{1}{2}}\right)\{v\}_{q, Q_\tau}^{(2)}.$$

Отсюда видно, что, выбирая числа $\lambda$ и $\varkappa$ достаточно малыми, мы можем сделать как угодно малыми нормы операторов $T'$ и $W'$. Это доказывает теорему 9.2, так же как и в гёльдеровском случае.

Теорема 9.1 доказывается с помощью теоремы 9.2 таким же способом, как теорема 5.3 в § 8. Для доказательства существования решения задачи (5.3) и оценки (9.3) эта задача сводится к задаче с нулевыми начальными данными для функции $u' = u - v$, где $v(x, t)$ — функция, заданная в $Q_T$ и удовлетворяющая начальному условию

$$v(x, 0) = \varphi(x),$$

причем

$$\|v\|_{q, Q}^{(2)} \leqslant c\|\varphi\|_{q, \Omega}^{\left(2-\frac{2}{q}\right)}. \tag{9.26}$$

Для построения этой функции можно продолжить $\varphi(x)$ с сохранением класса на все пространство $E_n$ и положить $v = (\Gamma *_1 \varphi)$. Тогда оценка (9.26) будет следствием (3.2).

Функция $u'$ должна быть решением задачи

$$\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u' = f,$$
$$u'|_{S_T} = \Phi',$$
$$u'|_{t=0} = 0, \tag{9.27}$$

где $\Phi' = \Phi - v|_S$. При этом вследствие леммы 3.4 главы II

$$\|\Phi'\|_{q, S_T}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} \leqslant \|\Phi\|_{q, S_T}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} + \|v\|_{q, S_T}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} \leqslant \|\Phi\|_{q, S_T}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} +$$
$$+ c\|v\|_{q, Q_T}^{(2)} \leqslant \|\Phi\|_{q, S_T}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} + c\|\varphi\|_{q, \Omega}^{\left(2-\frac{2}{q}\right)}. \tag{9.28}$$

а в силу условий согласования (9.2) функция $\Phi'$ при $q > \frac{3}{2}$ удовлетворяет нулевому начальному условию $\Phi'(x, 0) = 0$.

По условию теоремы 9.1 $q \neq \frac{3}{2}$ и, следовательно, $1 - \frac{1}{2q} \neq \frac{1}{q}$. Как было показано в § 4 (см. (4.27), (4.28)), при этом

$$\{\Phi'\}_{q, S_T}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} \leqslant c \, \| \Phi' \|_{q, S_T}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)}. \tag{9.29}$$

Применяя последовательно теорему 9.2 для промежутков $t \in \left(k\tau_0', (k+1)\tau_0'\right)$, $k = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ и используя (9.29), мы, точно так же как в § 8, докажем разрешимость задачи (9.27) и оценку

$$\| u' \|_{q, Q}^{(2)} \leqslant c \left( \| f \|_{q, Q} + \| \Phi' \|_{q, S_T}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} \right). \tag{9.30}$$

Из этого результата и из оценки (9.28) вытекает теорема 9.1.

В случае $q = \frac{3}{2}$ теорема 9.2 дает возможность доказать разрешимость задачи с нулевыми начальными данными

$$\mathscr{L}u = f,$$
$$u|_{S_T} = \Phi,$$
$$u|_{t=0} = 0,$$

в которой $f \in L_{\frac{3}{2}}(Q_T)$, $\Phi \in \overset{\circ}{W}{}_{\frac{3}{2}}^{\frac{4}{3}, \frac{2}{3}}(S_T)$. Но так как неравенство (9.29) в этом случае не имеет места, то оценка решения имеет вид

$$\| u \|_{q, Q_T}^{(2)} \leqslant c \left( \| f \|_{q, Q_T} + \{\Phi\}_{q, S_T}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} \right).$$

Разрешимость задачи общего вида (5.4) в классе $W_{\frac{3}{2}}^{2, 1}(Q_T)$ при $f \in L_{\frac{3}{2}}(Q_T)$, $\varphi \in W_{\frac{3}{2}}^{\frac{2}{3}}(\Omega)$ и $\Phi \in W_{\frac{3}{2}}^{\frac{4}{3}, \frac{2}{3}}(S_T)$ мы можем установить лишь при дополнительном условии согласования функций $\Phi$ и $\varphi$, которое состоит в том, что функция $\Phi'$ из (9.27) принадлежит классу $\overset{\circ}{W}{}^{\frac{4}{3},\frac{2}{3}}_{\frac{3}{2}}(S_T)$. Это условие можно сформулировать еще в следующей эквивалентной форме: существует такая функция $v(x, t) \in W^{2,1}_{\frac{3}{2}}(Q_T)$, что

$$v|_{t=0} = \varphi(x), \qquad v|_{S_T} = \Phi$$

и

$$\|v\|^{(2)}_{\frac{3}{2}, Q_T} \leqslant C\left(\|\varphi\|^{\left(\frac{2}{3}\right)}_{\frac{3}{2}, \Omega} + \|\Phi\|^{\left(\frac{4}{3}\right)}_{\frac{3}{2}, S_T}\right). \tag{9.31}$$

При этом условии теорема 9.1 для $q = \frac{3}{2}$ доказывается точно так же, как и для $q \neq \frac{3}{2}$, однако постоянная в неравенстве (9.3) будет зависеть от постоянной $C$ в неравенстве (9.31).

Для задачи (5.5) таким дефектным показателем будет $q = 3$.

Теорема 9.1 дословно переносится на первую краевую задачу (5.15).

## § 10. Локальные оценки решений задач (5.4) и (5.5)

Этот параграф посвящен оценкам решения задач (5.4) и (5.5) в нормах $|u|^{(l)}_{Q'}$, где $Q' = \Omega' \times (T_1, T_2)$, причем $\Omega' \subset \Omega$, $0 \leqslant T_1 < T_2 \leqslant T$. В правую часть этих оценок, кроме норм известных функций, входит еще какая-нибудь слабая норма решения, например $\max|u|$, но в некоторой более широкой области $Q''$.

Введем следующие обозначения. Через $S'$ обозначим пересечение $S \cap \overline{\Omega'}$. Пусть $\Omega \supset \Omega'' \supset \Omega'$ причем расстояние от $\Omega'$ до $\Omega \setminus \Omega''$ положительно, $S'' = S \cap \overline{\Omega''}$. Если множество $S'$ пусто, то область $\Omega''$ мы выберем так, чтобы $S''$ также было бы пусто. Пусть $Q'' = \Omega'' \times (T_0, T_2)$, причем $0 < T_0 < T_1$, если $T_1 > 0$, и $T_0 = 0$, если $T_1 = 0$. Наконец, пусть $S'_{T_1T_2} = S' \times (T_1, T_2)$ и $S''_{T_1T_2} = S'' \times (T_1, T_2)$.

Теорема 10.1. *Пусть* $u \in H^{l+2, \frac{l}{2}+1}(\overline{Q''})$ *и пусть в* $Q''$ *выполняется равенство*

$$\mathscr{L}\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f, \tag{10.1}$$

*кроме того, если* $T_0 = 0$, *то выполняется начальное условие*

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad x \in \Omega'' \tag{10.2}$$

*и, наконец, если* $S''$ *не пусто, то выполняется краевое условие*

$$u|_{S''_{T_1 T_2}} = \Phi(x,\ t) \tag{10.3}$$

*или*

$$\mathscr{B} u|_{S''_{T_1 T_2}} = \Phi(x,\ t). \tag{10.4}$$

*Пусть коэффициенты оператора* $\mathscr{L}$ *принадлежат классу* $H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{Q''})$ *и* $S'' \in H^{l+2}$. *Если выполняется условие* (10.3), *то имеет место оценка*

$$|u|_{Q'}^{(l+2)} \leqslant c_1 \left( |f|_{Q''}^{(l)} + |\varphi|_{\Omega''}^{(l+2)} + |\Phi|_{S''_{T_0 T_2}}^{(l+2)} \right) + c_2 |u|_{Q''}; \tag{10.5}$$

*если же выполняется краевое условие* (10.4) *и коэффициенты* $b_i$ *и* $b$ *оператора* $\mathscr{B}$ *принадлежат классу* $H^{l+1, \frac{l+1}{2}}(\overline{S''_{T_0 T_2}})$, *то тогда*

$$|u|_{Q'}^{(l+2)} \leqslant c \left( |f|_{Q''}^{(l)} + |\varphi|_{\Omega''}^{(l+2)} + |\Phi|_{S''_{T_0 T_2}}^{(l+1)} \right) + c_2 |u|_{Q''}. \tag{10.6}$$

*Если* $S''$ *пусто, то в правой части* (10.5) *и* (10.6) *отсутствуют нормы функции* $\Phi$, *а при* $T_0 > 0$ *отсутствует* $|\varphi|_{\Omega''}^{(l+2)}$.

Доказательство. Будем для определенности предполагать, что $S''$ не пусто, краевое условие имеет форму (10.3), $T_0 = T_1 = 0$, и докажем неравенство (10.5). Заметим, что его достаточно доказать для областей $\Omega''$ и $\Omega'$ канонического вида, т. е. таких, которые входят в $\mathfrak{k}^{(\lambda)}$ и $\mathfrak{K}^{(\lambda)}$.

Пусть область $\Omega''$ в местной системе координат в некоторой точке $\xi \in S$ задается неравенствами

$$-\lambda_1 \leqslant y_\alpha \leqslant \lambda_1 \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1), \quad 0 < y_n - F(y') < 2\lambda_1,$$

где $\lambda_1$ — некоторое малое положительное число. Наряду с $\Omega''$ мы рассмотрим области $\Omega^{(\lambda)} (0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1)$, определяемые неравенствами

$$-(\lambda_1 - \lambda) \leqslant y_\alpha \leqslant (\lambda_1 - \lambda) \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1),$$
$$0 \leqslant y_n - F(y') \leqslant 2(\lambda_1 - \lambda).$$

Введем обозначения: $Q^{(\lambda)} = \Omega^{(\lambda)} \times (0, T_2)$, $S^{(\lambda)} = \overline{\Omega}^{(\lambda)} \cap S$, $S_{T_2}^{(\lambda)} = S^{(\lambda)} \times (0, T_2)$.

Пусть $\zeta^{(\lambda)}(x)$ — функция, обладающая свойствами:

$$\zeta^{(\lambda)} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \Omega^{(\lambda)}, \\ 0 & \text{при} \quad x \in \Omega \setminus \Omega^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}, \end{cases} \qquad |D_x^s \zeta^{(\lambda)}| \leqslant \frac{c_s}{\lambda^s}.$$

Функция $v = \zeta^{(\lambda)} u$ определена в $Q_{T_2}$ (она равна нулю вне $Q''$) и является решением первой краевой задачи

$$\mathcal{L} v = g,$$
$$v|_{t=0} = \varphi \zeta^{(\lambda)}, \quad v|_{S_{T_2}} = \Phi \zeta^{(\lambda)},$$

где

$$g = f\zeta^{(\lambda)} + \left(\mathcal{L} u \zeta^{(\lambda)} - \zeta^{(\lambda)} \mathcal{L} u\right).$$

На основании теоремы 5.2

$$|v|_{Q_{T_2}}^{(l+2)} \leqslant c\left(|g|_{Q_{T_2}}^{(l)} + |\varphi\zeta^{(\lambda)}|_{\Omega}^{(l+2)} + |\Phi\zeta^{(\lambda)}|_{S_{T_2}}^{(l+2)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c\left\{|f\zeta^{(\lambda)}|_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}^{(l)} + |\mathcal{L} u\zeta^{(\lambda)} - \zeta^{(\lambda)} \mathcal{L} u|_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}^{(l)} + |\varphi\zeta^{(\lambda)}|_{\Omega^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}^{(l+2)} + \right.$$
$$\left. + |\Phi\zeta^{(\lambda)}|_{S_{T_2}^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}^{(l+2)}\right\}. \qquad (10.7)$$

Имеем

$$\mathcal{L} u\zeta^{(\lambda)} - \zeta^{(\lambda)} \mathcal{L} u =$$
$$= -2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta^{(\lambda)}}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u \frac{\partial^2 \zeta^{(\lambda)}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u \frac{\partial \zeta^{(\lambda)}}{\partial x_i}$$

и поэтому

$$|\mathscr{L}u\zeta^{(\lambda)}-\zeta^{(\lambda)}\mathscr{L}u|^{(l)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}\leqslant$$

$$\leqslant c\left\{\sum_{k=1}^{[l]+2}\frac{1}{\lambda^k}\langle u\rangle^{(l+2-k)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}+\sum_{k=0}^{[l]+1}\frac{1}{\lambda^{l+2-k}}\langle u\rangle^{(k)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}\right\}. \qquad (10.8)$$

В нормах функций $f\zeta^{(\lambda)}$, $\varphi\zeta^{(\lambda)}$, $\Phi\zeta^{(\lambda)}$ мы выделим $\langle f\rangle^{(l)}$, $\langle\varphi\rangle^{(l+2)}$, $\langle\Phi\rangle^{(l+2)}$, а остальные члены оценим через нормы функции $u(x, t)$ с помощью соотношений (10.1) — (10.3). Например,

$$|f\zeta^{(\lambda)}|^{(l)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}=\langle f\zeta^{(\lambda)}\rangle^{(l)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}+\sum_{k=0}^{[l]}\langle f\zeta^{(\lambda)}\rangle^{(k)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}\leqslant\langle f\rangle^{(l)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}+$$

$$+c\left(\sum_{k=1}^{[l]}\frac{1}{\lambda^k}\langle f\rangle^{(l-k)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}+\sum_{k=0}^{[l]}\frac{1}{\lambda^{l-k}}\langle f\rangle^{(k)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}\right)\leqslant\langle f\rangle^{(l)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}+$$

$$+c\left(\sum_{k=1}^{[l]+2}\frac{1}{\lambda^k}\langle u\rangle^{(l+2-k)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}+\sum_{k=0}^{[l]+2}\frac{1}{\lambda^{l+2-k}}\langle u\rangle^{(k)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}\right).$$

Поступая так же с остальными членами правой части (10.7) и принимая во внимание (10.8), мы получим

$$|u|^{(l+2)}_{Q^{(\lambda)}}\leqslant|v|^{(l+2)}_{Q_{T_2}}\leqslant c_1\left\{\langle f\rangle^{(l)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}+\langle\varphi\rangle^{(l+2)}_{\Omega^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}+\langle\Phi\rangle^{(l+2)}_{S_{T_2}^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}\right\}+$$

$$+c_2\left\{\sum_{k=1}^{[l]+2}\frac{1}{\lambda^k}\langle u\rangle^{(l+2-k)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}+\sum_{k=0}^{[l]+2}\frac{1}{\lambda^{l+2-k}}\langle u\rangle^{(k)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}\right\}. \qquad (10.9)$$

Нормы функции $u(x, t)$, стоящие в правой части, мы оценим с помощью леммы 3.2 главы II. В силу этой леммы

$$\left.\begin{aligned}\langle u\rangle^{(l+2-k)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}&\leqslant\delta^k\langle u\rangle^{(l+2)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}+c\delta^{-(l+2-k)}|u|^{(0)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}},\\ \langle u\rangle^{(k)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}&\leqslant\delta^{l+2-k}\langle u\rangle^{(l+2)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}+c\delta^{-k}|u|^{(0)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}.\end{aligned}\right\} \qquad (10.10)$$

Эти неравенства справедливы при $\delta \leqslant c_0\left(\lambda_1 - \frac{\lambda}{2}\right)$, где $c_0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $\lambda$. Поэтому можно взять $\delta = \varepsilon\lambda$ с малым $\varepsilon$. Оценивая правую часть (10.9) с помощью (10.10), будем иметь

$$|u|^{(l+2)}_{Q^{(\lambda)}} \leqslant \varepsilon |u|^{(l+2)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}} + c\left\{\langle f\rangle^{(l)}_{Q''} + \langle\varphi\rangle^{(l+2)}_{\Omega''} + \langle\Phi\rangle^{(l+2)}_{S''_{T_2}}\right\} + \\ + \frac{c_\varepsilon}{\lambda^{l+2}}|u|^{(0)}_{Q^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}. \quad (10.11)$$

Пусть

$$N_0 = \langle f\rangle^{(l)}_{Q''} + \langle\varphi\rangle^{(l+2)}_{\Omega''} + \langle\Phi\rangle^{(l+2)}_{S''_{T_2}},$$

$$N_1 = |u|^{(0)}_{Q''},$$

$$f(\lambda) = \lambda^{l+2}\langle u\rangle^{(l+2)}_{Q^{(\lambda)}}, \quad K(\lambda) = c\lambda^{l+2}N_0 + c_\varepsilon N_1$$

и

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2^{l+3}}.$$

Число $\mu \leqslant 1$ фиксировано так, чтобы $\delta = \varepsilon\lambda \leqslant c_0\left(\lambda_1 - \frac{\lambda}{2}\right)$; для этого достаточно взять $\mu = \min(1, 2^{l+2}c_0)$. Умножая (10.11) на $\lambda^{l+2}$, мы получим

$$f(\lambda) \leqslant \frac{\mu}{2} f\left(\frac{\lambda}{2}\right) + K(\lambda) \leqslant \frac{1}{2} f\left(\frac{\lambda}{2}\right) + K(\lambda).$$

Так как функция $f(\lambda)$ ограничена при $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$, то из этого неравенства следует

$$f(\lambda) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} K\left(\frac{\lambda}{2^j}\right).$$

Функция $K(\lambda)$ является монотонно возрастающей, поэтому

$$f(\lambda) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} K(\lambda) = 2K(\lambda).$$

Разделив это неравенство на $\lambda^{l+2}$, мы получим нужную оценку

$$|u|_{Q^{(\lambda)}}^{(l+2)} \leqslant c_1 \left\{ \langle f \rangle_{Q''}^{(l)} + \langle \varphi \rangle_{\Omega''}^{(l+2)} + \langle \Phi \rangle_{S''_{T_1}}^{(l+2)} \right\} + \frac{c_2}{\lambda^{l+2}} |u|_{Q''}^{(0)},$$

справедливую при любом $\lambda < \lambda_1$. Неравенство (10.5) доказано.

Мы предположили, что $T_0 = T_1 = 0$. При $T_1 > T_0 > 0$ оценка (10.5) доказывается аналогично; нужно только взять в качестве срезающей функции функцию, зависящую от $x$ и $t$ и обращающуюся в нуль при $t \leqslant T_0$.

Заметим еще, что вместо $|u|_{Q''}^{(0)}$ в правую часть (10.5), (10.6) можно поставить более слабую норму $\|u\|_{r,\, Q''}$ $(r > 1)$. Можно получить оценки, аналогичные оценкам (10.5), (10.6), также в нормах $\langle\langle u \rangle\rangle_{Q''}^{(2m)}$. Например, для функции $u \in W_q^{2,1}(Q'')$, удовлетворяющей соотношениям (10.1) — (10.3), справедливо неравенство

$$\|u\|_{q,\, Q'}^{(2)} \leqslant \left( \|f\|_{q,\, Q''} + \|\varphi\|_{q,\, \Omega''}^{\left(2-\frac{2}{q}\right)} + \|\Phi\|_{q,\, S''_{T_0 T_1}}^{\left(2-\frac{1}{q}\right)} \right) + c_2 \|u\|_{\tilde{q},\, Q''},$$

где $1 \leqslant \tilde{q} \leqslant q$. В случае $T_0 = T_1 = 0$ это неравенство не имеет места при $q = \frac{3}{2}$. Доказывается оно точно так же, как (10.5), с помощью оценки (9.3), причем предполагается, что коэффициенты оператора $\mathscr{L}$ удовлетворяют в $Q''$ условиям теоремы 9.1.

## § 11. Фундаментальное решение параболического уравнения второго порядка

В этом параграфе мы начинаем изложение другого метода исследования задачи Коши и основных краевых задач для параболических уравнений второго порядка — метода теории потенциала. Начнем с построения фундаментального решения для параболического оператора второго порядка.

Пусть в области $D_{n+1}^{(T)} = E_n \times (0, T)$ задан параболический оператор $\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$, коэффициенты которого принадлежат классу $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$, $\alpha < 1$. Построим фундаментальное решение $Z(x, \xi, t, \tau)$, удовлетворяющее уравнению

$$\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) Z(x, \xi, t, \tau) = \delta(x-\xi)\,\delta(t-\tau) \qquad (11.1)$$

и ограниченное при $|x| \to \infty$.

Функция $Z$ для оператора $\mathscr{L}$ играет такую же важную роль, как функция $\Gamma$ для оператора теплопроводности. Функция $Z$ может быть построена по методу Е. Леви [35], который состоит в том, что она разыскивается в виде суммы двух слагаемых: главного члена, имеющего нужную особенность при $x = \xi$, $t = \tau$, и некоторого добавочного слагаемого, причем в качестве главного члена выбирается функция $Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau)$ — фундаментальное решение уравнения с параболическим оператором $\mathscr{L}_0\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$, который получается из исходного оператора $\mathscr{L}$ отбрасыванием младших членов и «замораживанием» коэффициентов в точке $(\xi, \tau)$. Второе слагаемое разыскивается в виде интегрального оператора с ядром $Z_0$. Плотность этого оператора определяется из некоторого интегрального уравнения.

Функция $Z_0$, которая, очевидно, получается из функции $\Gamma$ определенной линейной заменой пространственных переменных $x$, при $t > \tau$ имеет вид

$$Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau) = \frac{1}{[4\pi(t-\tau)]^{\frac{n}{2}}\,(\det A(\xi, \tau))^{1/2}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{4(t-\tau)} \sum_{i, j=1}^{n} A^{(i, j)}(\xi, \tau)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)\right), \qquad (11.2)$$

где $A(\xi, \tau)$ — матрица, составленная из старших коэффициентов $a_{ij}(\xi, \tau)$ оператора $\mathscr{L}$, а $A^{(i, j)}(\xi, \tau)$ — элементы обратной матрицы $A^{-1}(\xi, \tau)$. При $t < \tau$ $Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau) = 0$.

Функция $Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau)$ обладает следующими свойствами. Как функция аргументов $x$ и $t$ она бесконечно дифференцируема при $t > \tau$ и

$$|D_t^r D_x^s Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c\,(t-\tau)^{-\frac{n}{2}-r-\frac{s}{2}} \exp\left(-C\,\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) \qquad (11.3)$$

($C$, $c>0$). Кроме того, функция $Z_0(z, \xi, t, \tau)$ и ее производные по $z$ и $t$ удовлетворяют условию Гёльдера по аргументам $\xi$ и $\tau$. В частности, справедливо неравенство

$$|D_t^r D_z^s Z_0(z, \xi, t, \tau) - D_t^r D_z^s Z_0(z, \xi', t, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c|\xi-\xi'|^\beta (t-\tau)^{-\frac{n}{2}-r-\frac{s}{2}} \exp\left(-C\frac{z^2}{t-\tau}\right), \qquad 0<\beta\leqslant\alpha. \tag{11.4}$$

Наконец, мы будем пользоваться еще следующим свойством функции $Z_0$: при любом фиксированном $\xi$ и при $t-\tau>0$

$$\int_{E_n} Z_0(z, \xi, t, \tau)\,dz = 1;$$

следовательно, при $2r+s>0$

$$\int_{E_n} D_t^r D_z^s Z_0(z, \xi, t, \tau)\,dz = 0. \tag{11.5}$$

Нам часто придется рассматривать интеграл

$$\int_{E_n} D_t^r D_x^s Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau)\,d\xi \qquad (2r+s>0).$$

В силу (11.5)

$$\int_{E_n} D_t^r D_x^s Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau)\,d\xi = \int_{E_n} \left[D_t^r D_x^s Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau) - \right.$$
$$\left. - D_t^r D_x^s Z_0(x-\xi, z, t, \tau)|_{z=x}\right] d\xi,$$

откуда с помощью неравенства (11.4) получаем

$$\left|\int_{E_n} D_t^r D_x^s Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau)\,d\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s}{2}} \int_{E_n} |x-\xi|^\alpha \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) d\xi =$$
$$= c(t-\tau)^{-\frac{2r+s-\alpha}{2}}. \tag{11.6}$$

Рассмотрим объемный потенциал

$$u(x, t, \tau) = \int_\tau^t d\lambda \int_{E_n} Z_0(x-y, y, t, \lambda) f(y, \lambda)\, dy, \quad (11.7)$$

где $f$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера по своим аргументам. Производные этого потенциала выражаются по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_\tau^t d\lambda \int_{E_n} \frac{\partial Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i} f(y, \lambda)\, dy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \int_\tau^t d\lambda \int_{E_n} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} [f(y, \lambda) - f(x, \lambda)]\, dy +$$

$$+ \int_\tau^t f(x, \lambda)\, d\lambda \int_{E_n} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} dy, \quad (11.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) +$$

$$+ \int_\tau^t d\lambda \int_{E_n} \frac{\partial Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial t} [f(y, \lambda) - f(x, \lambda)]\, dy +$$

$$+ \int_\tau^t f(x, \lambda)\, d\lambda \int_{E_n} \frac{\partial Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial t} dy. \quad (11.9)$$

Легко проверить с помощью оценок (11.3), (11.6), что интегралы в правых частях этих равенств сходятся.

Равенства (11.8), (11.9) проще всего доказать, рассмотрев последовательность функций

$$u_h(x, t, \tau) = \int_\tau^{t-h} d\lambda \int_{E_n} Z_0(x-y, y, t, \lambda) f(y, \lambda)\, dy$$

и рассуждая точно так же, как при доказательстве равенств (1.8), (1.9). При этом используется соотношение

$$\lim_{h \to 0} \int_{E_n} Z_0(x-y, y, t, t-h)\, \varphi(y)\, dy = \varphi(x), \quad (11.10)$$

справедливое для любой непрерывной и не слишком быстро растущей на бесконечности $\varphi(x)$. Действительно,

$$\int_{E_n} Z_0(x-y,\ y,\ t,\ t-h)\,\varphi(y)\,dy = \int_{E_n} Z_0(x-y,\ x,\ t,\ t-h)\,\varphi(y)\,dy + \int_{E_n} [Z_0(x-y,\ y,\ t,\ t-h) - Z_0(x-y,\ x,\ t,\ t-h)]\,\varphi(y)\,dy = I_1 + I_2.$$

Первый член $I_1$ правой части при $h \to 0$ стремится к $\varphi(x)$ (это устанавливается точно так же, как (1.7)). Для второго члена в силу (11.4) справедлива оценка

$$|I_2| \leqslant Ch^{-\frac{n}{2}} \int_{E_n} |x-y|^{\alpha} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{h}\right) dy = ch^{\frac{\alpha}{2}},$$

из которой вытекает, что при $h \to 0$ он стремится к нулю.

Таким образом, доказано соотношение (11.10) и, следовательно, равенства (11.8), (11.9).

Нетрудно также подсчитать, что

$$\mathscr{L}\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,\ t,\ \tau) = \lim_{h \to 0} \mathscr{L}\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right) u_h(x,\ t,\ \tau) = f(x,\ t) + \int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{E_n} K(x,\ y,\ t,\ \lambda)\,f(y,\ \lambda)\,dy, \tag{11.11}$$

где

$$K(x,\ y,\ t,\ \lambda) = \sum_{i,\ j=1}^{n} [a_{ij}(y,\ \lambda) - a_{ij}(x,\ t)]\,\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\ y,\ t,\ \lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j} + \mathscr{L}_1\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right) Z_0(x-y,\ y,\ t,\ \lambda), \tag{11.12}$$

$$\mathscr{L}_1\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x,\ t)\,\frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x,\ t).$$

Приступим к построению фундаментального решения $Z$. Будем искать его в виде

$$Z(x, \xi, t, \tau) = Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau) + \int_\tau^t d\lambda \int_{E_n} Z_0(x-y, y, t, \lambda) Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy, \tag{11.13}$$

где $Q$ — функция, подбираемая с таким расчетом, чтобы выполнялось уравнение (11.1). Применяя к потенциалу

$$Z'(x, \xi, t, \tau) = \int_\tau^t d\lambda \int_{E_n} Z_0(x-y, y, t, \lambda) Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy \tag{11.14}$$

формулу (11.11) и замечая, что

$$\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau) = \delta(x-\xi)\,\delta(t-\tau) + K(x, \xi, t, \tau),$$

видим, что уравнение (11.1) будет иметь место, когда

$$Q(x, \xi, t, \tau) + \int_\tau^t d\lambda \int_{E_n} K(x, y, t, \lambda) Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy + K(x, \xi, t, \tau) = 0. \tag{11.15}$$

Это равенство является интегральным уравнением Вольтерра относительно $Q$, ядро которого $K$ является ядром со слабой особенностью, поскольку

$$|a_{ij}(y, \tau) - a_{ij}(x, t)| \leqslant c\left(|x-y|^\alpha + |t-\tau|^{\frac{\alpha}{2}}\right) \tag{11.16}$$

и, следовательно,

$$|K(x, y, t, \tau)| \leqslant c\,(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right). \tag{11.17}$$

Оценим еще разность $K(x, \xi, t, \tau) - K(x', \xi, t, \tau)$. Пусть $x''$ — та из двух точек $x$ и $x'$, которая является ближайшей к $\xi$. Пусть для определенности $x''=x'$. Имеем

$$|K(x,\xi,t,\tau)-K(x',\xi,t,\tau)|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}(x,t)-a_{ij}(x',t)|\left|\frac{\partial^2 Z_0(x-\xi,\xi,t,\tau)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right|+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}(\xi,\tau)-a_{ij}(x',t)|\times$$
$$\times\left|\frac{\partial^2 Z_0(x-\xi,\xi,t,\tau)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 Z_0(x'-\xi,\xi,t,\tau)}{\partial x'_i\,\partial x'_j}\right|+$$
$$+\left|\left[\mathscr{L}_1\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)-\mathscr{L}_1\left(x',t,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]Z_0(x-\xi,\xi,t,\tau)\right|+$$
$$+\left|\mathscr{L}_1\left(x',t,\frac{\partial}{\partial x}\right)Z_0(x-\xi,\xi,t,\tau)-\right.$$
$$\left.-\mathscr{L}_1\left(x',t,\frac{\partial}{\partial x'}\right)Z_0(x'-\xi,\xi,t,\tau)\right|. \quad (11.18)$$

Легко проверить, что

$$\left|\frac{\partial^2 Z_0(x-\xi,\xi,t,\tau)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 Z_0(x'-\xi,\xi,t,\tau)}{\partial x'_i\,\partial x'_j}\right|\leqslant$$
$$\leqslant c\,|x-x'|\,(t-\tau)^{-\frac{n+3}{2}}\exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right) \quad (11.19)$$

(элементарное доказательство этого неравенства мы опускаем).

Из последнего неравенства и из (11.3) вытекает, что для $\gamma\in[0,1]$

$$\left|\frac{\partial^2 Z_0(x-\xi,\xi,t,\tau)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 Z_0(x'-\xi,\xi,t,\tau)}{\partial x'_i\,\partial x'_j}\right|\leqslant\left|\frac{\partial^2 Z_0(x-\xi,\xi,t,\tau)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2 Z_0(x'-\xi,\xi,t,\tau)}{\partial x'_i\,\partial x'_j}\right|^{\gamma}\left(\left|\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x_i\,\partial x_j}\right|+\left|\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x'_i\,\partial x'_j}\right|\right)^{1-\gamma}\leqslant$$
$$\leqslant c\,|x-x'|^{\gamma}(t-\tau)^{-\frac{n+2+\gamma}{2}}\exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right). \quad (11.20)$$

Используя неравенства (11.16), (11.20) при $\gamma=\alpha$ и (11.3) для оценки первых двух членов правой части (11.18) и пользуясь аналогичными неравенствами для оценки последующих членов, мы получим

$$|K(x, \xi, t, \tau) - K(x', \xi, t, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c\,|x - x'|^{\alpha} (t - \tau)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\,\frac{|x'' - \xi|^2}{t - \tau}\right). \quad (11.21)$$

Из этой оценки и из оценки (11.17) легко получается более общее неравенство (ср. (11.20))

$$|K(x, \xi, t, \tau) - K(x', \xi, t, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c\,|x - x'|^{\beta} (t - \tau)^{-\frac{n+2-(\alpha-\beta)}{2}} \exp\left(-C\,\frac{|x'' - \xi|^2}{t - \tau}\right), \quad (11.22)$$

в котором $\beta$ — любое число, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$.

Интегральное уравнение (11.15) решается по методу последовательных приближений, и его решение $Q$ выражается в виде ряда

$$Q(x, \xi, t, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m K_m(x, \xi, t, \tau), \quad (11.23)$$

где $K_m$ — повторное ядро:

$$K_m(x, \xi, t, \tau) = \int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{E_n} K(x, y, t, \lambda) K_{m-1}(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy. \quad (11.24)$$

С помощью индукции можно доказать оценку

$$|K_m(x, \xi, t, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c^m \left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{n(m-1)}{2}} \frac{\Gamma^m\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m\alpha}{2}\right)} (t - \tau)^{\frac{m\alpha - n - 2}{2}} \exp\left(-C\,\frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}\right). \quad (11.25)$$

При $m=1$ эта оценка имеет место (см. (11.17)), а для того, чтобы доказать ее для $m>1$, нужно оценить интеграл

$$|K_{m+1}(x,\xi,t,\tau)| = \\ = \left| \int_\tau^t d\lambda \int_{E_n} K(x,y,t,\lambda) K_m(y,\xi,\lambda,\tau)\,dy \right| \leqslant \\ \leqslant c^{m+1}\left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{n(m-1)}{2}} \frac{\Gamma^m\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m\alpha}{2}\right)} \int_\tau^t (t-\lambda)^{\frac{\alpha-n-2}{2}}(\lambda-\tau)^{\frac{m\alpha-n-2}{2}}\,d\lambda \times \\ \times \int_{E_n} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda} - C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)dy.$$

Так как

$$\int_{E_n} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda} - C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)dy = \\ = \left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{(t-\lambda)(\lambda-\tau)}{t-\tau}\right)^{\frac{n}{2}}$$

и

$$\int_\tau^t (t-\tau)^{\frac{\alpha-2}{2}}(\lambda-\tau)^{\frac{m\alpha-2}{2}}\,d\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(m+1)\alpha}{2}\right)}(t-\tau)^{\frac{\alpha+m\alpha-2}{2}},$$

то

$$|K_{m+1}| \leqslant c^{m+1}\left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{nm}{2}} \frac{\Gamma^{m+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(m+1)\alpha}{2}\right)} \times \\ \times (t-\tau)^{\frac{(m+1)\alpha-n-2}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right),$$

и оценка (11.25) доказана. Неравенство (11.25) гарантирует равномерную сходимость ряда (11.23) при $t-\tau>0$ и дает для $Q$ оценку

$$|Q(x,\xi,t,\tau)| \leqslant c\,(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right). \quad (11.26)$$

Эта оценка обеспечивает сходимость интегралов, входящих в (11.14) и (11.15).

Таким образом, мы построили решение интегрального уравнения (11.15) и доказали для него оценку (11.26). Покажем теперь, что решение $Q(x, \xi, t, \tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера по первому аргументу.

Из оценок (11.21) и (11.26) вытекает, что при $\alpha' < \alpha$

$$\left|\int_\tau^t d\lambda \int_{E_n} [K(x, y, t, \lambda) - K(x', y, t, \lambda)]\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant c\,|x - x'|^{\alpha'} \int_\tau^t (t-\lambda)^{-\frac{n+2-(\alpha-\alpha')}{2}} (\lambda - \tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} d\lambda \times$$
$$\times \int_{E_n} \left[\exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-C\frac{|x'-y|^2}{t-\lambda}\right)\right] \exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) dy \leqslant$$
$$\leqslant c\,|x - x'|^{\alpha'} (t-\tau)^{-\frac{n+2-2\alpha+\alpha'}{2}} \exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right). \quad (11.27)$$

Мы воспользовались очевидным неравенством

$$\exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) + \exp\left(-C\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Оценивая теперь $Q(x, \xi, t, \tau) - Q(x', \xi, t, \tau)$ с помощью уравнения (11.15), видим, что

$$|Q(x, \xi, t, \tau) - Q(x', \xi, t, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c\,|x-x'|^{\alpha'} (t-\tau)^{-\frac{n+2-(\alpha-\alpha')}{2}} \exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right), \quad \alpha' < \alpha. \quad (11.28)$$

Теперь следует подставить полученное решение $Q$ в (11.13) и убедиться в том, что действительно функция (11.13) удовлетворяет уравнению (11.1). Но это уже фактически было сделано выше при выводе уравнения (11.15); следует только отметить, что применение формулы (11.11) к потенциалу (11.14) является законным в силу оценки (11.28).

Построение фундаментального решения $Z$ закончено.

## § 12. Некоторые вспомогательные неравенства для функции $Q$

В этом параграфе мы получим некоторые неравенства для функции $Q$, которые будут нам нужны для точных оценок фундаментального решения $Z$.

Прежде всего мы улучшим оценку (11.28), доказав ее для $\alpha'=\alpha$:

$$|Q(x, \xi, t, \tau)-Q(x', \xi, t, \tau)| \leqslant \\ \leqslant c|x-x'|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right). \quad (12.1)$$

Во-вторых, мы покажем, что при $t>t'>\tau$

$$|Q(x, \xi, t, \tau)-Q(x, \xi, t', \tau)| \leqslant \\ \leqslant c(t-t')^{\frac{\alpha}{2}}(t'-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right). \quad (12.2)$$

Наконец, мы рассмотрим функцию

$$q(x, t)=\int_0^t d\tau \int_{E_n} Q(x, \xi, t, \tau)\,d\xi$$

и покажем, что она принадлежит классу $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$:

$$|q|_{D_{n+1}^{(T)}}^{(\alpha)} \leqslant c. \quad (12.3)$$

Приступим к доказательству оценки (12.1). Пусть

$$K_1(x, \xi, t, \tau)= \\ =\sum_{i, j=1}^{n} [a_{ij}(\xi, \tau)-a_{ij}(x, t)] \frac{\partial^2 Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau)}{\partial x_i\,\partial x_j},$$

$$K_2(x, \xi, t, \tau)=\mathscr{L}_1\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau).$$

Ядро $K_2$ имеет менее сильную особенность, чем $K_1$, так как не содержит вторых производных функции $Z_0$. В частности, вместо (11.21) для ядра $K_2$ выполняется неравенство

$$|K_2(x, \xi, t, \tau)-K_2(x', \xi, t, \tau)| \leqslant \\ \leqslant c|x-x'|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n+1+\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right) \quad (12.4)$$

и потому вместо (11.27) будем иметь

$$\left|\int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{E_n} [K_2(x, y, t, \lambda) - K_2(x', y, t, \lambda)]\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant c\,|x - x'|^{\alpha} (t-\tau)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left(-C\,\frac{|x'' - \xi|^2}{t-\tau}\right). \quad (12.5)$$

Оценим теперь

$$\int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{E_n} [K_1(x, y, t, \lambda) - K_1(x', y, t, \lambda)]\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy =$$
$$= \int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{\sigma} K_1(x, y, t, \lambda)\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy -$$
$$- \int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{\sigma} K_1(x', y, t, \lambda)\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy +$$
$$+ \int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{E_n \setminus \sigma} [K_1(x, y, t, \lambda) - K_1(x', y, t, \lambda)]\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy. \quad (12.6)$$

Здесь $\sigma = \sigma_1 \setminus \sigma_2$, $\sigma_1$ — шар с центром $x''$ и радиусом $2\,|x - x'|$, $\sigma_2$ — шар с центром $\xi$ и радиусом $\frac{1}{2}\,|x'' - \xi|$.

При оценке первых двух интегралов правой части (12.6) надо принять во внимание, что если $y \in \sigma$, то $y \in E_n \setminus \sigma_2$ и, следовательно,

$$|y - \xi| \geqslant \frac{|x'' - \xi|}{2}.$$

Имеем

$$\left|\int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{\sigma} K_1(x, y, t, \lambda)\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant c \int_{\tau}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} (\lambda - \tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} d\lambda \times$$
$$\times \int_{\sigma} \exp\left(-C\,\frac{|y - \xi|^2}{\lambda - \tau}\right) \exp\left(-C\,\frac{|x - y|^2}{t - \lambda}\right) dy.$$

Разобьем интеграл по $\tau$ на две части: интеграл в пределах $\left(\tau, \frac{t+\tau}{2}\right)$ и в пределах $\left(\frac{t+\tau}{2}, t\right)$. В первом интеграле применим неравенства

$$t-\lambda \geqslant \frac{1}{2}(t-\tau), \quad \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right) \leqslant 1,$$

$$\exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{C}{2}\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)\exp\left(-\frac{C}{4}\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right),$$

а во втором — неравенства

$$\lambda-\tau \geqslant \frac{1}{2}(t-\tau), \quad \exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{C}{4}\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

В результате получим

$$\begin{gathered}
\left|\int_\tau^t d\lambda \int_\sigma K_1(x, y, t, \lambda) Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy\right| \leqslant \\
\leqslant c\exp\left(-\frac{C}{4}\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right)(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \times \\
\times\left[\int_\sigma dy \int_\tau^{\frac{t+\tau}{2}} (\lambda-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-\frac{C}{2}\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) d\lambda + \right. \\
\left. + \int_\sigma dy \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t (t-\lambda)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right) d\lambda\right] \leqslant \\
\leqslant c|x-x'|^\alpha (t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-\frac{C}{4}\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right). \quad (12.7)
\end{gathered}$$

Совершенно так же доказывается неравенство

$$\begin{gathered}
\left|\int_\tau^t d\lambda \int_\sigma K_1(x', y, t, \lambda) Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy\right| \leqslant \\
\leqslant c|x-x'|^\alpha (t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-\frac{C}{4}\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right).
\end{gathered}$$

Осталось оценить последний интеграл в (12.6). Предположим для определенности, что $x'' = x'$. Имеем

$$\int_\tau^t d\lambda \int_{E_n \setminus \sigma} [K_1(x, y, t, \lambda) - K_1(x', y, t, \lambda)] Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy =$$

$$= \sum_{i, j=1}^{n} [a_{ij}(x', t) - a_{ij}(x, t)] \times$$

$$\times \int_\tau^t d\lambda \int_{E_n \setminus \sigma} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i\, \partial x_j} Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy +$$

$$+ \sum_{i, j=1}^{n} \int_\tau^t d\lambda \int_{E_n \setminus \sigma} [a_{ij}(y, \lambda) - a_{ij}(x', t)] \left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i\, \partial x_j} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 Z_0(x'-y, y, t, \lambda)}{\partial x'_i\, \partial x'_j}\right] Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy. \quad (12.8)$$

Рассмотрим последний член. Заметим, что $E_n \setminus \sigma = (E_n \setminus \sigma_1) \cup (\sigma_1 \cap \sigma_2)$, и оценим интеграл по $E_n \setminus \sigma_1$.

Если $y \in E_n \setminus \sigma_1$, то легко видеть, что

$$\frac{1}{2}|x'-y| \leqslant |x-y| \leqslant \frac{3}{2}|x'-y|,$$

поэтому в силу (11.16), (11.20), (11.26)

$$\left| \int_\tau^t d\lambda \int_{E_n \setminus \sigma_1} [a_{ij}(y, \lambda) - a_{ij}(x', t)] \left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i\, \partial x_j} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^2 Z_0(x'-y, y, t, \lambda)}{\partial x'_i\, \partial x'_j}\right] Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant c \left\{ |x-x'|^\alpha \int_\tau^{\frac{t+\tau}{2}} (t-\lambda)^{-\frac{n+2+\alpha}{2}} (\lambda-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} d\lambda \times \right.$$

$$\times \int_{E_n \setminus \sigma_1} \exp\left(-C\frac{|x'-y|^2}{t-\lambda}\right) \exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) \left[|x'-y|^\alpha + \right.$$

$$+(t-\lambda)^{\frac{\alpha}{2}}\Big]dy+|x-x'|\int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t}(t-\lambda)^{-\frac{n+3}{2}}(\lambda-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}d\lambda\times$$

$$\times\int_{E_n\setminus\sigma_1}\exp\left(-C\frac{|x'-y|^2}{t-\lambda}\right)\exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)\times$$

$$\times\left[|x'-y|^{\alpha}+(t-\lambda)^{\frac{\alpha}{2}}\right]dy\Big\}. \qquad (12.9)$$

Воспользуемся неравенствами

$$|x'-y|^{\alpha}\exp\left(-C\frac{|x'-y|^2}{t-\lambda}\right)\leqslant$$

$$\leqslant c(t-\lambda)^{\frac{\alpha}{2}}\exp\left(-C'\frac{|x'-y|^2}{t-\lambda}\right),\quad (C'<C),$$

$$\exp\left(-C'\frac{|x'-y|^2}{t-\lambda}\right)\exp\left(-C'\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left[-\frac{C'}{t-\tau}(|x'-y|^2+|y-\xi|^2)\right]\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left(-\frac{C'}{2}\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}\right). \qquad (12.10)$$

Обозначая левую часть (12.9) через $I_{ij}$, получим

$$I_{ij}\leqslant c\Big\{|x-x'|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left(-C_1\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}\right)\times$$

$$\times\int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}(\lambda-\tau)^{-\frac{2-\alpha}{2}}d\lambda+|x-x'|(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\times$$

$$\times\exp\left(-C_1\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}\right)\int_{E_n\setminus\sigma_1}dy\int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t}(t-\lambda)^{-\frac{n+3-\alpha}{2}}\times$$

$$\times\exp\left(-C_2\frac{|x'-y|^2}{t-\lambda}\right)d\lambda\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant c|x-x'|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\exp\left(-C_1\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$I'_{ij}=\int_{\tau}^{t}d\lambda\int_{\sigma_1\cap\sigma_2}[a_{ij}(y,\ \lambda)-a_{ij}(x',\ t)]\left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\ y,\ t,\ \lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2 Z_0(x'-y,\ y,\ t,\ \lambda)}{\partial x'_i\,\partial x'_j}\right]Q(y,\ \xi,\ \lambda,\ \tau)\,dy.$$

Если $y\in\sigma_2$, то $|x'-y|\leqslant|x'-\xi|+|\xi-y|\leqslant\frac{3}{2}|x'-\xi|$ и потому $|x'-y|\geqslant\frac{1}{2}|x'-\xi|\geqslant\frac{1}{3}|x'-y|$. Кроме того, $|x-y|\geqslant|x-\xi|-|\xi-y|\geqslant|x-\xi|-\frac{1}{2}|x'-\xi|\geqslant\frac{1}{2}|x'-\xi|\geqslant$ $\geqslant\frac{1}{3}|x'-y|$. Следовательно,

$$|I'_{ij}|\leqslant c\int_{\tau}^{t}(t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}}(\lambda-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}d\lambda\int_{\sigma_1\cap\sigma_2}\left[|x'-y|^{\alpha}+\right.$$
$$\left.+(t-\lambda)^{\frac{\alpha}{2}}\right]\exp\left(-C_3\frac{|x'-y|^2}{t-\lambda}\right)\exp\left(-C_3\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)dy\leqslant$$
$$\leqslant c\exp\left(-C_4\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}\right)\left[(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\int_{\sigma_1\cap\sigma_2}dy\int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}(\lambda-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\times\right.$$
$$\times\exp\left(-C_5\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)dy+$$
$$\left.+(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\int_{\sigma_1\cap\sigma_2}dy\int_{\frac{\tau+t}{2}}^{t}(t-\lambda)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\exp\left(-C_5\frac{|x'-y|^2}{t-\lambda}\right)d\lambda\right]\leqslant$$
$$\leqslant c|x-x'|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\exp\left(-C_4\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Итак, мы показали, что

$$\left|\int_{\tau}^{t}d\lambda\int_{E_n\setminus\sigma}[a_{ij}(y,\ \lambda)-a_{ij}(x',\ t)]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\ y,\ t,\ \lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 Z_0(x'-y,\ y,\ t,\ \lambda)}{\partial x'_i\,\partial x'_j}\right]Q(y,\ \xi,\ \lambda,\ \tau)\,dy\right|\leqslant$$
$$\leqslant c|x-x'|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\exp\left(-C\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}\right).\qquad(12.11)$$

Наконец, покажем, что

$$\left| \int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{E_n \setminus \sigma} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy \right| \leqslant \\ \leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right). \tag{12.12}$$

Имеем

$$\left| \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} d\lambda \int_{E_n \setminus \sigma} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x_i \partial x_j} Q\, dy \right| \leqslant \\ \leqslant c \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} (t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} (\lambda-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} d\lambda \times \\ \times \int_{E_n} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda} - C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) dy \leqslant \\ \leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Далее

$$\int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} d\lambda \int_{E_n \setminus \sigma} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x_i \partial x_j} Q\, dy = \\ = \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} d\lambda \int_{E_n \setminus \sigma} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} [Q(y, \xi, \lambda, \tau) - Q(x, \xi, \lambda, \tau)]\, dy + \\ + \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} Q(x, \xi, \lambda, \tau)\, d\lambda \int_{E_n \setminus \sigma} \left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 Z_0(x-y, x, t, \lambda)}{\partial y_i \partial y_j}\right] dy - \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} Q(x, \xi, \lambda, \tau)\, d\lambda \times \\ \times \int_{\omega} \frac{\partial Z_0(x-y, x, t, \lambda)}{\partial y_i} n_j(y)\, d\omega_y = J_1 + J_2 + J_3,$$

где $\omega$ — граница $\sigma$. Пользуясь оценками (11.3), (11.28) и повторяя уже проведенные не один раз выше выкладки, получим

$$|J_1| \leqslant c \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} (\lambda-\tau)^{-\frac{n+2-(\alpha-\alpha')}{2}} d\lambda \times$$

$$\times \int_{E_n} |x-y|^{\alpha'} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right)\left[\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)\right] dy \leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C'\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right),$$

$$|J_2| \leqslant c \int_{\frac{\tau+t}{2}}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{2-\alpha}{2}} (\lambda-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n+2-2\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

При оценке $J_3$ используем вытекающее из (11.2) неравенство

$$\left|\frac{\partial Z_0(x-y, x, t, \lambda)}{\partial y_i}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c|x-y|(t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right). \qquad (12.13)$$

Заметим также, что множество $\omega$ совпадает с границей $\omega_1$ шара $\sigma_1$, если $|x'-\xi| \geqslant 4|x-x'|$; если же $|x'-\xi| < 4|x-x'|$, то $\omega = \omega_1' \cup \omega_2'$, где $\omega_1'$ — множество точек $\omega_1$, расстояние которых до $\xi$ не меньше, чем $\frac{|x'-\xi|}{2}$, а $\omega_2'$ — часть границы $\omega_2$ шара $\sigma_2$, лежащая в $\sigma_1$.

Если $y \in \omega_1'$, то

$$|x-x'| \leqslant |x-y| \leqslant 3|x-x'|;$$

если же $y \in \omega_2'$ (в случае $|x'-\xi| < 4|x-x'|$), то

$$\frac{1}{2}|x-\xi| \leqslant |x-y| \leqslant \frac{3}{2}|x-\xi|.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{\omega_1'} \frac{\partial Z_0(x-y, x, t, \lambda)}{\partial y_i} n_j(y)\, d\omega_y\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\,|x-x'|^n (t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-x'|^2}{t-\lambda}\right),$$

$$\left|\int\limits_{\omega_2'} \frac{\partial Z_0(x-y, x, t, \lambda)}{\partial y_i} n_j(y)\, d\omega_y\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\,|x-\xi|^n (t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\lambda}\right)$$

и

$$|J_3| \leqslant c\,(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) \times$$

$$\times \left[|x-x'|^n \int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-x'|^2}{t-\lambda}\right) d\lambda + \right.$$

$$\left. + |x-\xi|^n \int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\lambda}\right) d\lambda \right] \leqslant$$

$$\leqslant c\,(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Итак, неравенство (12.12) доказано. Из (12.8), (12.11), (12.12) получаем

$$\left|\int\limits_{\tau}^{t} d\lambda \int\limits_{E_n \setminus \sigma} [K_1(x, y, t, \lambda) - K_1(x', y, t, \lambda)]\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\,|x-x'|^{\alpha} (t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right). \qquad (12.14)$$

Объединяя оценки (12.5), (12.7), (12.14), убеждаемся в том, что

$$\left|\int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{E_n} [K(x, y, t, \lambda) - K(x', y, t, \lambda)]\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant c\,|x - x'|^{\alpha} (t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x'' - \xi|^2}{t-\tau}\right). \qquad (12.15)$$

Из этого неравенства и из (11.21) вытекает оценка (12.1).

Переходим к неравенству (12.2). Предположим, что $t > t' > \tau$ и $t - t' < \frac{1}{3}(t-\tau)$. Прежде всего заметим, что

$$|K(x, \xi, t, \tau) - K(x, \xi, t', \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c\,(t-t')^{\frac{\alpha}{2}} (t'-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right), \qquad (12.16)$$

а для $K_2$ справедливо неравенство

$$|K_2(x, \xi, t, \tau) - K_2(x, \xi, t', \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c\,(t-t')^{\frac{\alpha}{2}} (t'-\tau)^{-\frac{n+1+\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right). \qquad (12.17)$$

Имеем

$$\int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{E_n} K(x, y, t, \lambda)\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy -$$
$$- \int_{\tau}^{t'} d\lambda \int_{E_n} K(x, y, t', \lambda)\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy =$$
$$= \int_{2t'-t}^{t} d\lambda \int_{E_n} K(x, y, t, \lambda)\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy -$$
$$- \int_{2t'-t}^{t'} d\lambda \int_{E_n} K(x, y, t', \lambda)\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy +$$
$$+ \int_{\tau}^{2t'-t} d\lambda \int_{E_n} [K_2(x, y, t, \lambda) - K_2(x, y, t', \lambda)]\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy +$$

$$+\sum_{i,\,j=1}^{n}[a_{ij}(x,\,t')-a_{ij}(x,\,t)]\int_{\tau}^{2t'-t}d\lambda\times$$

$$\times\int_{E_n}\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\,y,\,t,\,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}Q(y,\,\xi,\,\lambda,\,\tau)\,dy+$$

$$+\sum_{i,\,j=1}^{n}\int_{\tau}^{2t'-t}d\lambda\int_{E_n}[a_{ij}(y,\,\lambda)-a_{ij}(x,\,t')]\times$$

$$\times\left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\,y,\,t,\,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\,y,\,t',\,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]Q(y,\,\xi,\,\lambda,\,\tau)\,dy. \tag{12.18}$$

Применяя оценки (11.17) и (11.26), получаем

$$\left|\int_{2t'-t}^{t}d\lambda\int_{E_n}KQ\,dy\right|\leqslant c\int_{2t'-t}^{t}(t-\lambda)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}(\lambda-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\,d\lambda\times$$

$$\times\int_{E_n}\exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right)\exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)dy\leqslant$$

$$\leqslant c\,(t-t')^{\frac{\alpha}{2}}(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Аналогично оценивается второй член правой части (12.18). Последующие члены оцениваются с помощью неравенств (12.17), (11.16), (11.3). Доказывается аналогичное (12.12) неравенство

$$\left|\int_{\tau}^{2t'-t}d\lambda\int_{E_n}\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\,y,\,t,\,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}Q(y,\,\xi,\,\lambda,\,\tau)\,dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\,(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right). \tag{12.19}$$

Для доказательства используется представление

$$\int\limits_{\tau}^{2t'-t} d\lambda \int\limits_{E_n} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x_i\, \partial x_j} Q\, dy =$$

$$= \int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{2t'-t} d\lambda \int\limits_{E_n} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x_i\, \partial x_j} [Q(y, \xi, \lambda, \tau) - Q(x, \xi, \lambda, \tau)]\, dy +$$

$$+ \int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{2t'-t} Q(x, \xi, \lambda, \tau)\, d\lambda \int\limits_{E_n} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dy +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} d\lambda \int\limits_{E_n} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i\, \partial x_j} Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy.$$

В результате оценки всех членов правой части (12.18) мы получаем неравенство (12.2).

Мы предполагали, что $t - t' < \frac{1}{3}(t' - \tau)$. Однако неравенство (12.2) верно и при $t - t' \geqslant \frac{1}{3}(t - \tau)$. В этом случае оно следует из (11.26), поскольку $(t' - \tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \leqslant$ $\leqslant (t - t')^{\frac{\alpha}{2}} (t' - \tau)^{-\frac{n+2}{2}}$.

Наконец, рассмотрим функцию

$$q(x, t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} Q(x, y, t, \tau)\, dy.$$

Пусть $\sigma_1$ — шар $|x' - y| \leqslant 2|x - x'|$. Имеем

$$q(x, t) - q(x', t) = \int\limits_{\sigma_1} dy \int\limits_0^t Q(x, y, t, \tau)\, d\tau -$$

$$- \int\limits_{\sigma_1} dy \int\limits_0^t Q(x', y, t, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{E_n \setminus \sigma_1} dy \int\limits_0^t [Q(x, y, t, \tau) - Q(x', y, t, \tau)]\, d\tau.$$

С помощью (11.26) очень легко доказать, что первые два интеграла оцениваются через $c|x-x'|^\alpha$. Для оценки третьего члена представим $Q$ в виде

$$Q = -K_1 - Q_1,$$

где

$$Q_1 = K_2 + \int_\tau^t d\lambda \int_{E_n} K(x, y, t, \lambda) Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy.$$

Из (12.4) и (12.15) получаем

$$|Q_1(x, \xi, t, \tau) - Q_1(x', \xi, t, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c|x-x'|^\alpha (t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}+\frac{\beta}{2}} \exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right),$$

где $\beta = \min(\alpha, 1-\alpha)$. Поэтому

$$\int_0^t dt \int_{E_n \setminus \sigma_1} |Q_1(x, y, t, \tau) - Q_1(x', y, t, \tau)|\, dy \leqslant c|x-x'|^\alpha.$$

Наконец,

$$\int_{E_n \setminus \sigma_1} dy \int_0^t [K_1(x, y, t, \tau) - K_1(x', y, t, \tau)]\, d\tau =$$
$$= \sum_{i, j=1}^n [a_{ij}(x', t) - a_{ij}(x, t)] \int_0^t d\tau \int_{E_n \setminus \sigma_1} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \tau)}{\partial x_i \partial x_j} dy +$$
$$+ \sum_{i, j=1}^n \int_0^t d\tau \int_{E_n \setminus \sigma_1} [a_{ij}(y, \tau) - a_{ij}(x', t)] \times$$
$$\times \left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \tau)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 Z_0(x'-y, y, t, \tau)}{\partial x'_i \partial x'_j}\right] dy,$$

откуда, повторяя уже проведенные выше рассуждения, получим

$$\left|\int_0^t d\tau \int_{E_n \setminus \sigma_1} [K_1(x, y, t, \tau) - K_1(x', y, t, \tau)]\, dy\right| \leqslant c|x-x'|^\alpha.$$

Таким образом, $\langle q\rangle_{x, Q_T}^{(\alpha)} \leqslant c$. Аналогично можно доказать, что $\langle q\rangle_{t, Q_T}^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \leqslant c$.

Для этого нужно использовать представление

$$
\begin{aligned}
q(x, t) - q(x, t') = & \int\limits_{\max(0, 2t'-t)}^{t} d\tau \int\limits_{E_n} Q(x, y, t, \tau)\, dy - \\
& - \int\limits_{\max(0, 2t'-t)}^{t'} d\tau \int\limits_{E_n} Q(x, y, t', \tau)\, dy + \\
& + \int\limits_{0}^{\max(0, 2t'-t)} d\tau \int\limits_{E_n} [Q_1(x, y, t, \tau) - Q_1(x, y, t', \tau)]\, dy + \\
& + \sum_{i, j=1}^{n} [a_{ij}(x, t') - a_{ij}(x, t)] \times \\
& \times \int\limits_{0}^{\max(0, 2t'-t)} d\tau \int\limits_{E_n} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \tau)}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dy + \\
& + \sum_{i, j=1}^{n} \int\limits_{0}^{\max(0, 2t'-t)} d\tau \int\limits_{E_n} [a_{ij}(y, \tau) - a_{ij}(x, t')] \times \\
& \times \left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \tau)}{\partial x_i\, \partial x_j} - \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t', \tau)}{\partial x_i\, \partial x_j}\right] dy.
\end{aligned}
$$

Подробные выкладки мы опускаем.

Таким образом, неравенства (12.1)—(12.3) установлены.

## § 13. Оценки фундаментального решения

В этом параграфе мы получим следующие оценки фундаментального решения $Z(x, \xi, t, \tau)$, необходимые для установления точных оценок объемного потенциала с ядром $Z$:

$$
\left|D_t^r D_x^s Z(x, \xi, t, \tau)\right| \leqslant c\,(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right), \tag{13.1}
$$

где $2r+s\leqslant 2,\ t>\tau,$

$$|D_t^r D_x^s Z(x,\ \xi,\ t,\ \tau)-D_t^r D_{x'}^s Z(x',\ \xi,\ t,\ \tau)|\leqslant$$

$$\leqslant c\left[|x-x'|^{\gamma}(t-\tau)^{-\frac{n+2+\gamma}{2}}+|x-x'|^{\beta}(t-\tau)^{-\frac{n+2+\alpha-\beta}{2}}\right]\times$$

$$\times\exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right),\qquad(13.2)$$

где $2r+s=2$ (т. е. $r=0,\ s=2$ и $r=1,\ s=0$), $0\leqslant\gamma\leqslant 1$, $0\leqslant\beta\leqslant\alpha$,

$$|D_t^r D_x^s Z(x,\ \xi,\ t,\ \tau)-D_{t'}^r D_x^s Z(x,\ \xi,\ t',\ \tau)|\leqslant$$

$$\leqslant c\left[(t-t')(t'-\tau)^{-\frac{n+2r+s+2}{2}}+(t-t')^{\frac{2-2r-s+\alpha}{2}}(t'-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\right]\times$$

$$\times\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right),\qquad(13.3)$$

где $2r+s=1,2$ и $t>t'>\tau$.

Для функции $Z_0$ оценки (13.1) — (13.3) вытекают из (11.3), поэтому достаточно установить их для функции $Z'$ (11.14). Если $s=0$ или $s=1$, то в силу (11.3) и (11.26)

$$|D_x^s Z'(x,\ \xi,\ t,\ \tau)|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\tau}^{t}d\lambda\int_{E_n}|D_x^s Z_0(x-y,\ y,\ t,\ \lambda)||Q(y,\ \xi,\ \lambda,\ \tau)|dy\leqslant$$

$$\leqslant C\int_{\tau}^{t}(t-\lambda)^{-\frac{n+s}{2}}(\lambda-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}d\lambda\times$$

$$\times\int_{E_n}\exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right)\exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)dy\leqslant$$

$$\leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}\int_{\tau}^{t}(t-\lambda)^{-\frac{s}{2}}(\lambda-\tau)^{-\frac{2-\alpha}{2}}d\lambda\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right)=$$

$$=c(t-\tau)^{-\frac{n+s-\alpha}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Для оценки $D_x^2 Z'$ воспользуемся формулой

$$\frac{\partial^2 Z'}{\partial x_i\, \partial x_j} = \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} d\lambda \int_{E_n} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i\, \partial x_j} Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy +$$

$$+ \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} d\lambda \int_{E_n} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i\, \partial x_j} [Q(y, \xi, \lambda, \tau) - Q(x, \xi, \lambda, \tau)]\, dy +$$

$$+ \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} Q(x, \xi, \lambda, \tau)\, d\lambda \int_{E_n} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dy, \qquad (13.4)$$

вытекающей из (11.8). С помощью неравенств (11.3), (11.26), (11.6), (12.1) получаем

$$\left| \frac{\partial^2 Z'}{\partial x_i\, \partial x_j} \right| \leqslant c \left\{ \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} (t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} (\lambda-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\, d\lambda \times \right.$$

$$\times \int_{E_n} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right) \exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) dy +$$

$$+ \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} (\lambda-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\, d\lambda \int_{E_n} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right) \times$$

$$\times |x-y|^{\alpha} \left[\exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) + \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)\right] dy +$$

$$\left. + \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} (t-\lambda)^{-1+\frac{\alpha}{2}} (\lambda-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) d\lambda \right\} \leqslant$$

$$\leqslant c\,(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Точно такая же оценка справедлива и для $\left|\frac{\partial Z'}{\partial t}\right|$. Итак, при $2r+s\leqslant 2$

$$|D_t^r D_x^s Z'|\leqslant c\,(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s-\alpha}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right), \tag{13.5}$$

и неравенство (13.1) доказано.

Оценим

$$\frac{\partial^2 Z'(x,\xi,t,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 Z'(x',\xi,t,\lambda)}{\partial x_i'\,\partial x_j'}.$$

Воспользуемся для этого формулой (13.4). В силу (11.20) и (11.26)

$$\left|\int_\tau^{\frac{t+\tau}{2}} d\lambda\int_{E_n}\left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y,y,t,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 Z_0(x'-y,y,t,\lambda)}{\partial x_i'\,\partial x_j'}\right]\times\right.$$
$$\left.\times Q(y,\xi,\lambda,\tau)\,dy\right|\leqslant c\,|x-x'|^\alpha\int_\tau^{\frac{t+\tau}{2}}(t-\lambda)^{-\frac{n+2+\alpha}{2}}\times$$
$$\times(\lambda-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}d\lambda\int_{E_n}\left[\exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right)+\right.$$
$$\left.+\exp\left(-C\frac{|x'-y|^2}{t-\lambda}\right)\right]\exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)dy\leqslant$$
$$\leqslant C|x-x'|^\alpha(t-\tau)^{-\frac{n+2+\alpha}{2}}\int_\tau^{\frac{t+\tau}{2}}(\lambda-\tau)^{-\frac{2-\alpha}{2}}d\lambda\times$$
$$\times\left[\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right)+\exp\left(-C\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}\right)\right]\leqslant$$
$$\leqslant c\,|x-x'|^\alpha(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right). \tag{13.6}$$

Обозначим через $H_{ij}(x,\xi,t,\tau)$ сумму двух последних членов в (13.4), а через $\sigma_1$, как и выше, — шар с центром $x''$ и радиусом $2|x-x'|$.

Нетрудно проверить, что

$$H_{ij}(x, \xi, t, \tau) - H_{ij}(x', \xi, t, \tau) =$$

$$= \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} d\lambda \int_{\sigma_1} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} [Q(y, \xi, \lambda, \tau) - Q(x, \xi, \lambda, \tau)]\, dy -$$

$$- \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} d\lambda \int_{\sigma_1} \frac{\partial^2 Z_0(x'-y, y, t, \lambda)}{\partial x'_i \partial x'_j} [Q(y, \xi, \lambda, \tau) - Q(x', \xi, \lambda, \tau)]\, dy +$$

$$+ \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} d\lambda \int_{E_n \setminus \sigma_1} \left[ \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 Z_0(x'-y, y, t, \lambda)}{\partial x'_i \partial x'_j} \right] \times$$

$$\times [Q(y, \xi, \lambda, \tau) - Q(x', \xi, \lambda, \tau)]\, dy +$$

$$+ \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} [Q(x, \xi, \lambda, \tau) - Q(x', \xi, \lambda, \tau)]\, d\lambda \int_{\sigma_1} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j}\, dy +$$

$$+ \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} Q(x', \xi, \lambda, \tau)\, d\lambda \int_{E_n} \left[ \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 Z_0(x'-y, y, t, \lambda)}{\partial x'_i \partial x'_j} \right] dy = \sum_{l=1}^{5} M_l.$$

Пользуясь (12.10), мы получим

$$|M_1| \leqslant c \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} (\lambda-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\, d\lambda \times$$

$$\times \int_{\sigma_1} |x-y|^{\alpha} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right) \left[ \exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) \right] dy \leqslant c\,(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C'\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) \times$$

$$\times \int_{\sigma_1} |x-y|^\alpha\,dy \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C'\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right) d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant c\,|x-x'|^\alpha (t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C'\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Совершенно аналогично

$$|M_2| \leqslant c\,|x-x'|^\alpha (t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Если $y \in E_n \setminus \sigma_1$, то $c_1|x'-y| \leqslant |x-y| \leqslant c_2|x'-y|$. Поэтому

$$|M_3| \leqslant c\,|x-x'| \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{n+3}{2}} (\lambda-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} d\lambda \times$$

$$\times \int_{E_n \setminus \sigma_1} |x''-y|^\alpha \exp\left(-C\frac{|x''-y|^2}{t-\lambda}\right) \times$$

$$\times \left[\exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) + \exp\left(-C\frac{|x'-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)\right] dy \leqslant$$

$$\leqslant c\,|x-x'|\,(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-\frac{C}{2}\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right) \times$$

$$\times \int_{E_n \setminus \sigma_1} |x''-y|^\alpha\,dy \int_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{n+3}{2}} \exp\left(-C\frac{|x''-y|^2}{t-\lambda}\right) d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant c\,|x-x'|^\alpha (t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-\frac{C}{2}\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Прежде чем оценивать $M_4$, заметим, что

$$\int_{\sigma_1} \frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}\,dy = \int_{\sigma_1} \left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y, y, t, \lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 Z_0(x-y, x, t, \lambda)}{\partial y_i\,\partial y_j}\right] dy + \int_{\omega_1} \frac{\partial Z_0(x-y, x, t, \lambda)}{\partial y_i}\,n_j\,d\omega_y. \quad (13.7)$$

Вследствие (11.4)

$$\left|\int\limits_{\sigma_1}\left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\, y,\, t,\, \lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\, x,\, t,\, \lambda)}{\partial y_i\,\partial y_j}\right]dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\,(t-\lambda)^{-\frac{2+n}{2}}\int\limits_{\sigma_1}|x-y|^{\alpha}\exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right)dy, \quad (13.8)$$

откуда

$$\left|\int\limits_{\sigma_1}\left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\, y,\, t,\, \lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\, x,\, t,\, \lambda)}{\partial y_i\,\partial y_j}\right]dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\,(t-\lambda)^{-\frac{2-\alpha}{2}}.$$

Оценивая второй член правой части (13.7) с помощью (12.13), будем иметь

$$\left|\int\limits_{\sigma_1}\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\, y,\, t,\, \lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}\,dy\right| \leqslant c\left[|t-\lambda|^{-\frac{2-\alpha}{2}}+\right.$$

$$\left.+\,|x-x'|^{n}\,(t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-x'|^2}{t-\lambda}\right)\right]. \quad (13.9)$$

Из этого неравенства и из оценки (12.1) вытекает, что

$$|M_4| \leqslant c\,|x-x'|^{\alpha}\,(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\times$$

$$\times\exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right)\left[\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t}(t-\lambda)^{-\frac{2-\alpha}{2}}\,d\lambda+\right.$$

$$\left.+\,|x-x'|^{n}\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t}(t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-x'|^2}{t-\lambda}\right)d\lambda\right] \leqslant$$

$$\leqslant c\,|x-x'|^{\alpha}\,(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Наконец, оценим $M_5$. Имеем

$$\int\limits_{E_n}\left[\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x_i'\,\partial x_j'}\right]dy=$$

$$=\int\limits_{E_n\setminus\sigma_1}\left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\,y,\,t,\,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 Z_0(x'-y,\,y,\,t,\,\lambda)}{\partial x_i'\,\partial x_j'}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\,x,\,t,\,\lambda)}{\partial y_i\,\partial y_j}+\frac{\partial^2 Z_0(x'-y,\,x',\,t,\,\lambda)}{\partial y_i\,\partial y_j}\right]dy+$$

$$+\int\limits_{\sigma_1}\left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\,y,\,t,\,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\,x,\,t,\,\lambda)}{\partial y_i\,\partial y_j}\right]dy-$$

$$-\int\limits_{\sigma_1}\left[\frac{\partial^2 Z_0(x'-y,\,y,\,t,\,\lambda)}{\partial x_i'\,\partial x_j'}-\frac{\partial^2 Z_0(x'-y,\,x',\,t,\,\lambda)}{\partial y_i\,\partial y_j}\right]dy.$$

Второй член правой части оценивается по неравенству (13.8); для третьего справедливо аналогичное неравенство

$$\left|\int\limits_{\sigma_1}\left[\frac{\partial^2 Z_0(x'-y,\,y,\,t,\,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 Z_0(x'-y,\,x',\,t,\,\lambda)}{\partial y_i\,\partial y_j}\right]dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\,(t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}}\int\limits_{\sigma_1}|x'-y|^{\alpha}\exp\left(-C\,\frac{|x'-y|^2}{t-\lambda}\right)dy.$$

Интеграл $I$ по $E_n\setminus\sigma_1$ (первый член) представим в виде

$$I=\int\limits_{E_n\setminus\sigma_1}\left[\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\,y,\,t,\,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 Z_0(x'-y,\,y,\,t,\,\lambda)}{\partial x_i'\,\partial x_j'}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 Z_0(x-y,\,x,\,t,\,\lambda)}{\partial y_i\,\partial y_j}+\frac{\partial^2 Z_0(x'-y,\,x,\,t,\,\lambda)}{\partial y_i\,\partial y_j}\right]dy-$$

$$-\int\limits_{\omega_1}\left[\frac{\partial^2 Z_0(x'-y,\,x',\,t,\,\lambda)}{\partial y_i}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial Z_0(x'-y,\,x,\,t,\,\lambda)}{\partial y_i}\right]n_j(y)\,d\omega_y=I_1+I_2.$$

Представляя разность функции $\dfrac{\partial^2 Z_0}{\partial x_i\,\partial x_j}$ в точке $x$ и $x'$ через производную $\dfrac{\partial^3 Z_0}{\partial l\,\partial z_i\,\partial z_j}$, где $z$ — точка на отрезке между точками $x$ и $x'$, а $l$ — направление вектора $x-x'$, получим с помощью (11.4)

$$|I_1| \leqslant \left| \int_x^{x'} dl_z \int_{E_n \setminus \sigma_1} \left[ \frac{\partial^3 Z_0(z-y, y, t, \lambda)}{\partial l\, \partial z_i\, \partial z_j} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^3 Z_0(z-y, x, t, \lambda)}{\partial l\, \partial z_i\, \partial z_j} \right] dy \right| \leqslant c\,|x-x'|\,(t-\lambda)^{-\frac{n+3}{2}} \times$$

$$\times \int_{E_n \setminus \sigma_1} |x''-y|^{\alpha} \exp\left(-C\,\frac{|x''-y|^2}{t-\lambda}\right) dy. \qquad (13.10)$$

Для оценки $I_2$ воспользуемся неравенством

$$\left| \frac{\partial Z_0(x'-y, x', t, \lambda)}{\partial y_i} - \frac{\partial Z_0(x'-y, x, t, \lambda)}{\partial y_i} \right| \leqslant$$

$$\leqslant c\,|x-x'|^{\alpha}\,|x'-y|\,(t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\,\frac{|x'-y|^2}{t-\lambda}\right),$$

которое получается из (11.2) с помощью элементарных оценок. В силу этого неравенства

$$|I_2| \leqslant c\,|x-x'|^{n+\alpha}\,(t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\,\frac{|x'-x|^2}{t-\lambda}\right). \qquad (13.11)$$

Объединяя неравенства (13.8), (13.10) и (13.11), получим

$$\int_{-\infty}^{t} d\lambda \left| \int_{E_n} \left[ \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x_i\, \partial x_j} - \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x'_i\, \partial x'_j} \right] dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant c \left\{ \int_{\sigma_1} |x-y|^{\alpha} dy \int_{-\infty}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\,\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right) d\lambda + \right.$$

$$+ \int_{\sigma_1} |x'-y|^{\alpha} dy \int_{-\infty}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\,\frac{|x'-y|^2}{t-\lambda}\right) d\lambda +$$

$$+ |x-x'| \int_{E_n \setminus \sigma_1} |x''-y|^{\alpha} dy \int_{-\infty}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{n+3}{2}} \times$$

$$\times \exp\left(-C\,\frac{|x''-y|^2}{t-\lambda}\right) d\lambda + |x-x'|^{n+\alpha} \int_{-\infty}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} \times$$

$$\left. \times \exp\left(-C\,\frac{|x-x'|^2}{t-\lambda}\right) d\lambda \right\} \leqslant c\,|x-x'|^{\alpha}. \qquad (13.12)$$

Из этого неравенства и из оценки (11.26) функции $Q$ вытекает, что

$$|M_5| \leqslant c|x-x'|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\exp\left(-C\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c|x-x'|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Таким образом, все $M_i$ оценены и

$$|H_{ij}(x, \xi, t, \tau) - H_{ij}(x', \xi, t, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c|x-x'|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Это неравенство вместе с (13.6) доказывает оценку

$$\left|\frac{\partial^2 Z'(x, \xi, t, \tau)}{\partial x_i\,\partial x_j} - \frac{\partial^2 Z'(x', \xi, t, \tau)}{\partial x'_i\,\partial x'_j}\right| \leqslant$$
$$\leqslant c|x-x'|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right). \qquad (13.13)$$

Для того чтобы получить аналогичную оценку для $\frac{\partial Z'}{\partial t}$, воспользуемся тем, что, как было выяснено в § 11, функция $Z'$ удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) Z'(x, \xi, t, \tau) =$$
$$= Q(x, \xi, t, \tau) + \int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{E_n} K(x, y, t, \lambda)\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, d\xi =$$
$$= -K(x, \xi, t, \tau). \qquad (13.14)$$

Перенося в правую часть этого уравнения все члены, кроме $\frac{\partial Z'}{\partial t}$, и пользуясь уже доказанными оценками (13.5) и (13.13), получаем

$$\left|\frac{\partial Z'(x, \xi, t, \lambda)}{\partial t} - \frac{\partial Z'(x', \xi, t, \tau)}{\partial t}\right| \leqslant$$
$$\leqslant c|x-x'|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Таким образом, при $2r+s=2$

$$|D_t^r D_x^s Z'(x, \xi, t, \tau) - D_t^r D_{x'}^s Z'(x', \xi, t, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c\,|x-x'|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Отсюда и из (13.5) вытекает, что

$$|D_t^r D_x^s Z'(x, \xi, t, \tau) - D_t^r D_{x'}^s Z'(x', \xi, t, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c\,|x-x'|^{\beta}(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha+\beta}{2}} \exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{t-\tau}\right) \qquad (13.15)$$

при $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Это завершает доказательство неравенства (13.2).

Переходим к оценкам разностей

$$D_x^s Z'(x, \xi, t, \tau) - D_x^s Z'(x, \xi, t', \tau)$$

при $s=1, 2$, $t>t'>\tau$, $t-t'<\frac{1}{4}(t'-\tau)$. Воспользуемся представлением

$$D_x^s Z'(x, \xi, t, \tau) =$$
$$= \int_{\tau}^{\frac{t'+\tau}{2}} d\lambda \int_{E_n} D_x^s Z_0(x-y, y, t, \lambda)\, Q(y, \xi, \lambda, \tau)\, dy +$$
$$+ \int_{\frac{t'+\tau}{2}}^{t} d\lambda \int_{E_n} D_x^s Z_0(x-y, y, t, \lambda) \times$$
$$\times [Q(y, \xi, \lambda, \tau) - Q(x, \xi, \lambda, \tau)]\, dy +$$
$$+ \int_{\frac{t'+\tau}{2}}^{t} Q(x, \xi, \lambda, \tau)\, d\lambda \int_{E_n} D_x^s Z_0(x-y, y, t, \lambda)\, dy \qquad (13.16)$$

и таким же представлением для $D_x^s Z'_0(x, \xi, t', \tau)$, получающимся из (13.16) заменой всюду $t$ на $t'$. Составляя разность этих двух функций, получим

$$D_x^s Z'(x, \xi, t, \tau) - D_x^s Z'(x, \xi, t', \tau) =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{\frac{t'+\tau}{2}} d\lambda \int\limits_{E_n} \left[D_x^s Z_0(x-y, y, t, \lambda) - D_x^s Z_0(x-y, y, t', \lambda)\right] Q\, dy +$$

$$+ \int\limits_{\frac{t'+\tau}{2}}^{2t'-t} d\lambda \int\limits_{E_n} \left[D_x^s Z_0(x-y, y, t, \lambda) - D_x^s Z_0(x-y, y, t', \lambda)\right] \times$$

$$\times [Q(y, \xi, \lambda, \tau) - Q(x, \xi, \lambda, \tau)]\, dy + \int\limits_{\frac{t'+\tau}{2}}^{2t'-t} Q(x, \xi, \lambda, \tau)\, d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{E_n} \left[D_x^s Z_0(x-y, y, t, \lambda) - D_x^s Z_0(x-y, y, t', \lambda)\right] dy +$$

$$+ \int\limits_{2t'-t}^{t} d\lambda \int\limits_{E_n} D_x^s Z_0(x-y, y, t, \lambda)[Q(y, \xi, \lambda, \tau) - Q(x, \xi, \lambda, \tau)]\, dy -$$

$$- \int\limits_{2t'-t}^{t'} d\lambda \int\limits_{E_n} D_x^s Z_0(x-y, y, t', \lambda) \times$$

$$\times [Q(y, \xi, \lambda, \tau) - Q(x, \xi, \lambda, \tau)]\, dy +$$

$$+ \int\limits_{2t'-t}^{t} Q(x, \xi, \lambda, \tau)\, d\lambda \int\limits_{E_n} D_x^s Z_0(x-y, y, t, \lambda)\, dy -$$

$$- \int\limits_{2t'-t}^{t'} Q(x, \xi; \lambda, \tau)\, d\lambda \int\limits_{E_n} D_x^s Z_0(x-y, y, t', \lambda)\, dy \equiv \sum_{l=1}^{7} N_l.$$

Каждый член правой части этого представления оценивается с помощью неравенств (11.3), (11.6), (11.26), (12.1).

Используются также предположения $t > t' > \tau$, $t - t' < \frac{1}{4}(t' - \tau)$:

$$|N_1| \leqslant c(t-t') \int_{\tau}^{\frac{t'+\tau}{2}} (t'-\lambda)^{-\frac{n+s+2}{2}} (\lambda-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} d\lambda \times$$

$$\times \int_{E_n} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right) \exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) dy \leqslant$$

$$\leqslant c(t-t')(t'-\tau)^{-\frac{n+s+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c(t-t')^{\frac{2-s+\alpha}{2}} (t'-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\lambda}\right),$$

$$|N_2| \leqslant c(t-t') \int_{\frac{t'+\tau}{2}}^{2t'-t} (t-\lambda)^{-\frac{n+s+2}{2}} (\lambda-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} d\lambda \times$$

$$\times \int_{E_n} |x-y|^{\alpha} \left[\exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) + \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right) dy \leqslant c(t-t')(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} \times$$

$$\times \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) \int_{\frac{t'+\tau}{2}}^{2t'-t} (t-\lambda)^{-\frac{s+2-\alpha}{2}} d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant c(t-t')^{\frac{2-s+\alpha}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Четвертый и пятый, а также шестой и седьмой члены оцениваются одинаково; например,

$$|N_4| \leqslant c \int_{2t'-t}^{t} (t-\lambda)^{-\frac{n+s}{2}} (\lambda-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} d\lambda \times$$

$$\times \int_{E_n} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\lambda}\right) \left[\exp\left(-C\frac{|y-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right) + \right.$$

$$+\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{\lambda-\tau}\right)\Big]|x-y|^\alpha dy \leqslant$$

$$\leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right)\int\limits_{2t'-t}^{t}(t-\lambda)^{-\frac{s-\alpha}{2}}d\lambda =$$

$$= c(t-t')^{\frac{2-s+\alpha}{2}}(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right),$$

и в силу (11.6)

$$|N_6| \leqslant c\int\limits_{2t-t'}^{t}|Q(x,\ \xi,\ \lambda,\ \tau)|(t-\lambda)^{-\frac{s-\alpha}{2}}d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant c(t-t')^{\frac{2-s+\alpha}{2}}(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Нам осталось оценить третий член $N_3$. Так как

$$\int\limits_{E_n}\left[D_x^s Z_0(x-y,\ y,\ t,\ \lambda)-D_x^s Z_0(x-y,\ y,\ t',\ \lambda)\right]dy =$$

$$= \int\limits_{t'}^{t}dt''\int\limits_{E_n}D_{t''}D_x^s Z_0(x-y,\ y,\ t'',\ \lambda)\,dy$$

и вследствие (11.6)

$$\left|\int\limits_{E_n}\left[D_x^s Z_0(x-y,\ y,\ t,\ \lambda)-D_x^s Z_0(x-y,\ y,\ t',\ \lambda)\right]dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{t'}^{t}(t''-\lambda)^{-\frac{2+s-\alpha}{2}}dt'', \tag{13.17}$$

то

$$|N_3| \leqslant c(t'-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{t'}^{t}dt''\int\limits_{\frac{t'+\tau}{2}}^{2t'-t}(t''-\lambda)^{-\frac{2+s-\alpha}{2}}d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant c(t-t')^{\frac{2-s+\alpha}{2}}(t'-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Объединяя теперь оценки, мы получим для $s=1, 2$

$$|D_x^s Z'(x, \xi, t, \tau)-D_x^s Z'(x, \xi, t', \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c(t-t')^{\frac{2-s+\alpha}{2}}(t'-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right). \quad (13.18)$$

Эта оценка доказана в предположении $t-t' \leqslant \frac{1}{4}(t'-\tau)$. Но она имеет место и при $t-t' \geqslant \frac{1}{4}(t'-\tau)$, так как в этом случае она вытекает из (13.5).

Оценим разность

$$D_t Z'(x, \xi, t, \tau)-D_{t'} Z'(x, \xi, t', \tau).$$

Это легко сделать с помощью уже доказанной оценки (13.18), если воспользоваться уравнением (13.14). Из этого уравнения, из (13.18), (13.1) и из легко проверяемого неравенства

$$|K(x, \xi, t, \tau)-K(x, \xi, t', \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c(t-t')^{\alpha}(t'-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right)$$

следует

$$|D_t Z'(x, \xi, t, \tau)-D_{t'} Z'(x, \xi, t', \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c(t-t')^{\alpha}(t'-\tau)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) \quad (13.19)$$

(мы считаем, как и выше, что $t>t'>\tau$).

Оценки (13.18), (13.19) вместе с (11.3) доказывают неравенство (13.3).

## § 14. Решение задачи Коши

Рассмотрим в области $D_{n+1}^{(T)}$ задачу Коши

$$\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)v(x, t)=f(x, t),$$
$$v|_{t=0}=\varphi(x). \quad (14.1)$$

Предположим, что функция $f$ удовлетворяет условию Гёльдера по всем своим аргументам, а $\varphi$ непрерывна. Тогда решение задачи (14.1) может быть записано в виде суммы двух потенциалов с ядром $Z$:

$$v(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{E_n} Z(x, \xi, t, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi + \\ + \int_{E_n} Z(x, \xi, t, 0)\varphi(\xi)\, d\xi. \quad (14.2)$$

Для обеспечения сходимости интегралов в правой части (14.2) нужно потребовать, чтобы функции $f$ и $\varphi$ не росли при $|x| \to \infty$ слишком быстро; достаточно потребовать, чтобы они росли не быстрее функции $e^{ax^2}$, где $a$ — некоторая положительная постоянная, зависящая от $T$ и от константы $C$ в неравенстве (13.1). Более точно эти ограничения на $f$ и $\varphi$ сформулированы в [68$_1$], где потенциалы (14.2) подробно изучены в классах растущих на бесконечности функций. Мы будем рассматривать задачу (14.1) только в классе ограниченных функций.

Для того чтобы проверить, что функция (14.2) действительно является решением задачи (14.1), следует рассмотреть отдельно функции

$$v_1(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{E_n} Z(x, \xi, t, \tau) f(\xi, \tau)\, d\tau,$$

$$v_2(x, t) = \int_{E_n} Z(x, \xi, t, 0)\varphi(\xi)\, d\xi.$$

Они являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}v_1 &= f, \quad v_1|_{t=0} = 0, \\ \mathscr{L}v_2 &= 0, \quad v_2|_{t=0} = \varphi. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Из этих равенств проверки требует только равенство $v_2|_{t=0} = \varphi$, так как соотношение $\mathscr{L}v_1 = f$ было положено в основу построения фундаментального решения в § 11, а остальные равенства очевидны. Так как в силу (13.5) при $r = s = 0$

$$\lim_{t\to 0} \int_{E_n} Z'(x, \xi, t, 0)\varphi(\xi)\, d\xi = 0,$$

то, используя соотношение (11.10), убеждаемся в том, что

$$\lim_{t\to 0} v_2(x, t) = \lim_{t\to 0} \int_{E_n} Z_0(x-\xi, \xi, t, 0)\,\varphi(\xi)\,d\xi = \varphi(x),$$

что и требовалось.

Докажем теперь, пользуясь оценками предыдущих параграфов, что если $f \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}\left(\overline{D^{(T)}_{n+1}}\right)$ и $\varphi \in H^{2+\alpha}(\overline{E_n})$, то

$$|v_1|^{(2+\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\,|f|^{(\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}}, \tag{14.4}$$

$$|v_2|^{(2+\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\,|\varphi|^{(2+\alpha)}_{E_n} \tag{14.5}$$

и, следовательно,

$$|v|^{(2+\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\left(|f|^{(\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}} + |\varphi|^{(2+\alpha)}_{E_n}\right). \tag{14.6}$$

Тем самым мы докажем другим способом теорему 5.1 при $l = \alpha < 1$. Для доказательства неравенства (14.4) следует установить, что

$$\langle v_1\rangle^{(2+\alpha)}_{x,\, D^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\,|f|^{(\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}}, \tag{14.7}$$

$$\langle D^s_x v_1\rangle^{\left(\frac{2-s+\alpha}{2}\right)}_{t,\, D^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\,|f|^{(\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}} \quad (s = 1, 2), \tag{14.8}$$

$$\langle D_t v_1\rangle^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}_{t,\, D^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\,|f|^{(\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}}, \tag{14.9}$$

а также

$$\langle v_1\rangle^{(s)}_{D^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\,|f|^{(\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}} \quad (s = 0, 1, 2). \tag{14.10}$$

Так как эти оценки доказываются примерно так же, как оценки (2.8), (2.9), мы не будем проводить их во всех деталях. Воспользуемся равенством

$$D^s_x v_1(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{E_n} D^s_x Z(x, y, t, \tau)\,[f(y, \tau) - f(x, \tau)]\,dy + \\ + \int_0^t f(x, \tau)\,d\tau \int_{E_n} D^s_x Z(x, y, t, \tau)\,dy. \tag{14.11}$$

Так как в силу (11.6) и (13.5)

$$\left| \int_{E_n} D_x^s Z(x, y, t, \tau)\, dy \right| \leqslant c(t-\tau)^{-\frac{s-\alpha}{2}} \quad (s=1, 2),$$
$$\left| \int_{E_n} Z\, dy \right| \leqslant c, \tag{14.12}$$

то из представления (14.11) вытекает, что

$$|D_x^s v_1| \leqslant ct^{\frac{2-s+\alpha}{2}} |f|^{(\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}} \quad (s=1, 2),$$
$$|v_1| \leqslant ct |f|^{(\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}}. \tag{14.13}$$

Используя для оценки $D_t v_1$ уравнение $\mathscr{L} v_1 = f$, получаем

$$|D_t v_1| \leqslant ct^{\frac{\alpha}{2}} |f|^{(\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}}.$$

Последние три неравенства доказывают оценку (14.10), которая, впрочем, при $s=0, 1$ совершенно очевидна.

Переходим к доказательству оценок (14.7)—(14.9). Начнем с оценки (14.8). Для ее доказательства нужно оценить разность

$$D_x^s v_1(x, t) - D_x^s v_1(x, t') \quad (s=1, 2).$$

Пусть для определенности $t' < t \leqslant T$. Если $t > 2t'$, т. е. $t - t' > t'$, то в силу (14.13)

$$|D_x^s v_1(x, t) - D_x^s v_1(x, t')| \leqslant c\left(t^{\frac{2-s+\alpha}{2}} + t'^{\frac{2-s+\alpha}{2}}\right) |f|^{(\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}} \leqslant c(t-t')^{\frac{2-s+\alpha}{2}} |f|^{(\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}}. \tag{14.14}$$

Это же неравенство имеет место и при $t - t' \leqslant t'$, однако в этом случае для его доказательства требуются более тонкие рассуждения. С помощью (14.11) можно доказать, что

$$
\begin{aligned}
& D_x^s v_1(x, t) - D_x^s v_1(x, t') = \\
&= \int_{2t'-t}^{t} d\tau \int_{E_n} D_x^s Z(x, y, t, \tau)\,[f(y, \tau) - f(x, \tau)]\,dy - \\
&- \int_{2t'-t}^{t'} d\tau \int_{E_n} D_x^s Z(x, y, t', \tau)\,[f(y, \tau) - f(x, \tau)]\,dy + \\
&+ \int_{0}^{2t'-t} d\tau \int_{E_n} \big[D_x^s Z(x, y, t, \tau) - \\
&- D_x^s Z(x, y, t', \tau)\big]\,[f(y, \tau) - f(x, \tau)]\,dy + \\
&+ \int_{2t'-t}^{t} f(x, \tau)\,d\tau \int_{E_n} D_x^s Z(x, y, t, \tau)\,dy - \\
&- \int_{2t'-t}^{t'} f(x, \tau)\,d\tau \int_{E_n} D_x^s Z(x, y, t', \tau)\,dy + \\
&+ \int_{0}^{2t'-t} [f(x, \tau) - f(x, t)]\,d\tau \int_{E_n} \big[D_x^s Z(x, y, t, \tau) - \\
&- D_x^s Z(x, y, t', \tau)\big]\,dy + f(x, t) \int_{0}^{2t'-t} d\tau \int_{E_n} \big[D_x^s Z(x, y, t, \tau) - \\
&- D_x^s Z(x, y, t', \tau)\big]\,dy = \sum_{j=1}^{7} J_j. \qquad (14.15)
\end{aligned}
$$

Первые шесть членов правой части легко оцениваются с помощью неравенств (13.1), (13.3), (13.5), (11.6):

$$
\sum_{j=1}^{6} |J_j| \leqslant c\,(t - t')^{\frac{2-s+\alpha}{2}}\, |f|^{(\alpha)}_{D^{(T)}_{n+1}}. \qquad (14.16)
$$

Член $J_7$ мы преобразуем следующим образом:

$$\int_0^{2t'-t} d\tau \int_{E_n} \left[D_x^s Z(x, y, t, \tau) - D_x^s Z(x, y, t', \tau)\right] dy =$$

$$= \int_0^{2t'-t} d\tau \int_{E_n} \left[D_x^s Z_0(x-y, y, t, \tau) - D_x^s Z_0(x-y, y, t', \tau)\right] dy -$$

$$- \int_{2t'-t}^{t} d\tau \int_{E_n} D_x^s Z'(x, y, t, \tau)\, dy +$$

$$+ \int_{2t'-t}^{t'} d\tau \int_{E_n} D_x^s Z'(x, y, t', \tau)\, dy +$$

$$+ \left[\int_0^t d\tau \int_{E_n} D_x^s Z'(x, y, t, \tau)\, dy - \int_0^{t'} d\tau \int_{E_n} D_x^s Z'(x, y, t', \tau)\, dy\right].$$

Первые три интеграла правой части в силу (13.17) и (13.5) не превосходят $c(t-t')^{\frac{2-s+\alpha}{2}}$. Четвертый член может быть записан в виде

$$\int_0^t d\tau \int_{E_n} D_x^s Z'(x, y, t, \tau)\, dy - \int_0^{t'} d\tau \int_{E_n} D_x^s Z'(x, y, t', \tau)\, dy =$$

$$= D_x^s \left[\int_0^t d\tau \int_{E_n} Z_0(x-y, y, t, \tau)\, q(y, \tau)\, dy - \right.$$

$$\left. - \int_0^{t'} d\tau \int_{E_n} Z_0(x-y, y, t', \tau)\, q(y, \tau)\, dy\right], \quad (14.17)$$

где

$$q(y, \tau) = \int_0^{\tau} d\lambda \int_{E_n} Q(y, \xi, \tau, \lambda)\, d\xi$$

— функция, которая, как было показано в § 12, принадлежит классу $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$ (12.3).

Если бы мы с самого начала рассматривали вместо $v_1$ объемный потенциал

$$v_1^0 = \int_0^t d\tau \int_{E_n} Z_0(x-y,\ y,\ t,\ \tau) f(y,\ \tau)\, dy,$$

то для этого потенциала было бы справедливо представление (14.15), в котором всюду ядро $Z$ заменено на $Z_0$. Для правой части этого представления была бы справедлива оценка (14.16), а также в силу (13.17) оценка

$$|J_7| \leqslant c\,(t-t')^{\frac{2-s+\alpha}{2}} |f|^{(0)}_{D^{(T)}_{n+1}}. \qquad (14.18)$$

Следовательно, для потенциала $v_1^0$ имеет место неравенство (14.8) и правая часть (14.17) оценивается через $c\,(t-t')^{\frac{2-s+\alpha}{2}}$ (мы пользуемся здесь также (12.3)). Значит, член $J_7$ представления (14.15) также оценивается по неравенству (14.18), и оценка (14.8), таким образом, доказана.

Неравенство (14.7) получается путем таких же рассуждений из представления

$$\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x_i\,\partial x_j} - \frac{\partial^2 v_1(x',t)}{\partial x'_i\,\partial x'_j} = \int_0^t d\tau \int_{\sigma_1} \frac{\partial^2 Z(x,y,t,\tau)}{\partial x_i\,\partial x_j} \times$$

$$\times \{[f(y,\ \tau) - f(x,\ \tau)] + [f(x,\ \tau) - f(x',\ t)]\}\, dy -$$

$$- \int_0^t d\tau \int_{\sigma_1} \frac{\partial^2 Z(x',y,t,\tau)}{\partial x'_i\,\partial x'_j} \{[f(y,\ \tau) - f(x',\ \tau)] +$$

$$+ [f(x',\ \tau) - f(x',\ t)]\}\, dy + \int_0^t d\tau \int_{E_n \setminus \sigma_1} \left[ \frac{\partial^2 Z(x,y,t,\tau)}{\partial x_i\,\partial x_j} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 Z(x',y,t,\tau)}{\partial x'_i\,\partial x'_j} \right] [f(y,\ \tau) - f(x',\ t)]\, dy +$$

$$+ f(x',\ t) \int_0^t d\tau \int_{E_n} \left[ \frac{\partial^2 Z(x,y,t,\tau)}{\partial x_i\,\partial x_j} - \frac{\partial^2 Z(x',y,t,\tau)}{\partial x'_i\,\partial x'_j} \right] dy,$$

где $\sigma_1$ — шар с центром $x$ и радиусом $2|x-x'|$. При оценке правой части следует воспользоваться неравенствами (13.1), (13.2), (13.9).

Наконец, неравенство (14.9) есть следствие уже доказанного неравенства (14.8) и уравнения $\mathscr{L}v_1=f$.

Таким образом, мы доказали неравенство (14.4).

Неравенство (14.5) можно доказать, записав функцию $v_2$ через объемный потенциал. Так как эта функция является решением задачи (14.3), то функция

$$v_3(x,\ t)=v_2(x,\ t)-\varphi(x)$$

является решением задачи

$$\mathscr{L}v_3=-\mathscr{L}\varphi(x),\quad v_3|_{t=0}=0.$$

Следовательно,

$$v_3=-\int_0^t d\tau\int_{E_n} Z(x,\ y,\ t,\ \tau)\mathscr{L}\varphi(y)\,dy$$

и

$$v_2(x,\ t)=\varphi(x)-\int_0^t d\tau\int_{E_n} Z(x,\ y,\ t,\ \tau)\mathscr{L}\varphi(y)\,dy.$$

Применяя теперь к правой части неравенство (14.4), мы получим (14.5).

Оценка (14.6) доказана.

## § 15. Потенциал простого слоя

Пусть $Q=\Omega\times(0,\ T)$, где $\Omega$ — ограниченная область в пространстве $E_n$ с границей $S\in H^{1+\beta}$; $\beta<1$. Пусть в $D_{n+1}^{(T)}$ определен параболический оператор $\mathscr{L}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ с коэффициентами из $H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$ и пусть $Z$ — его фундаментальное решение.

Потенциал

$$V(x,\ t)=\int_0^t d\tau\int_S Z(x,\ \xi,\ t,\ \tau)\varphi(\xi,\ \tau)\,dS_\xi$$

называется потенциалом простого слоя.

Этот потенциал обладает многими свойствами обычного электростатического и теплового потенциала простого слоя.

С помощью оценки (13.1) нетрудно показать, что функция $v(x, t)$ при любой ограниченной $\varphi$ является непрерывной функцией $x$ и $t$.

Вычислим конормальную производную потенциала $V(x, t)$ на $S$

$$\lim_{x \to x_0 \in S} \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_j} n_i(x_0).$$

Пусть

$$V(x, t) = V_0(x, t) + V'(x, t),$$

где

$$V_0 = \int_0^t d\tau \int_S Z_0 \varphi \, dS_\xi, \qquad V' = \int_0^t d\tau \int_S Z' \varphi \, dS_\xi.$$

Вследствие оценки (13.5) при $r = 0$, $s = 1$

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial V'(x, t)}{\partial x_j} n_i(x_0) =$$

$$= \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x_0, t) \left. \frac{\partial V'(x, t)}{\partial x_j} \right|_{x = x_0} n_i(x_0). \qquad (15.1)$$

Вычислим конормальную производную функции $V_0$. Прежде всего рассмотрим прямое значение конормальной производной

$$W_0(x_0, t) = \int_0^t d\tau \int_S H_0(x_0, \xi, t, \tau) \varphi(\xi, \tau) \, dS_\xi,$$

где

$$H_0(x_0, \xi, t, \tau) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x_0, t) \left. \frac{\partial Z_0}{\partial x_j} \right|_{x = x_0} n_i(x_0) =$$

$$= -\frac{1}{2(t - \tau)} \sum_{i, j, k=1}^{n} a_{ij}(x_0, t) A^{(j, k)}(\xi, \tau) \times$$

$$\times \left(x_{0_k} - \xi_k\right) n_i(x_0) Z_0(x_0 - \xi, \xi, t, \tau).$$

Так как

$$\left|\sum_{i,\,j,\,k=1}^{n} a_{ij}(\xi,\,\tau)\,A^{(j,\,k)}(\xi,\,\tau)\left(x_{0_k}-\xi_k\right)n_i(x_0)\right| =$$
$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(x_{0_i}-\xi_i\right)n_i(x_0)\right|\leqslant c\,|\,x_0-\xi\,|^{1+\beta}$$

и

$$|\,a_{ij}(x_0,\,t)-a_{ij}(\xi,\,\tau)\,|\leqslant c\left(|\,x_0-\xi\,|^{\alpha}+(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}\right),$$

то

$$|H_0|\leqslant c\left(|\,x_0-\xi\,|^{\beta}+|\,x_0-\xi\,|^{\alpha}+(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}\right)(t-\tau)^{-\frac{n+1}{2}}\times$$
$$\times\exp\left(-C\frac{|\,x_0-\xi\,|^2}{t-\tau}\right)\leqslant c\,(t-\tau)^{-\frac{n+1-\delta}{2}}\exp\left(-C\frac{|\,x_0-\xi\,|^2}{t-\tau}\right),\tag{15.2}$$

где $\delta=\min(\alpha,\,\beta)$. Следовательно, ядро $H_0$ имеет слабую (интегрируемую) особенность.

Предположим, что точка $x$ приближается к $x_0$, находясь на нормали к $x_0$. Рассмотрим разность

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,\,t)\,\frac{\partial V_0(x,\,t)}{\partial x_j}\,n_i(x_0)-W_0(x_0,\,t).$$

Легко проверить, что справедливо тождество

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,\,t)\,\frac{\partial V_0(x,\,t)}{\partial x_j}\,n_i(x_0)-W_0(x_0,\,t)=$$
$$=\left[\int_0^t d\tau\int_S\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,\,t)\,\frac{\partial Z_0(x-\xi,\,\xi,\,t,\,\tau)}{\partial x_j}\,n_i(x_0)\times\right.$$
$$\times\left(\varphi(\xi,\,t)-\varphi(x_0,\,\tau)\right)dS_\xi-\int_0^t d\tau\int_S H_0(x_0,\,\xi,\,t,\,\tau)\times$$
$$\left.\times\left(\varphi(\xi,\,\tau)-\varphi(x_0,\,\tau)\right)dS_\xi\right]+\left[\int_0^t\left(\varphi(x_0,\,\tau)-\varphi(x_0,\,t)\right)d\tau\times\right.$$
$$\times\int_S\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,\,t)\,\frac{\partial Z_0(x-\xi,\,\xi,\,t,\,\tau)}{\partial x_j}\,n_i(x_0)\,dS_\xi-$$

$$-\int_0^t (\varphi(x_0, \tau)-\varphi(x_0, t))\,d\tau \int_S H_0(x_0, \xi, t, \tau)\,dS_\xi\Big] +$$

$$+\varphi(x_0, t)\Big[\int_0^t d\tau \int_S \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x, t) \times$$

$$\times\left(\frac{\partial Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial Z_0(x-\xi, z, t, \tau)}{\partial x_j}\Big|_{z=x}\right) n_i(x_0)\,dS_\xi -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_S \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x_0, t)\left(\frac{\partial Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau)}{\partial x_j}\Big|_{x=x_0} -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial Z_0(x-\xi, z, t, \tau)}{\partial x_j}\Big|_{\substack{z=x_0\\x=x_0}}\right) n_i(x_0)\,dS_\xi\Big] +$$

$$+\varphi(x_0, t)\Big[\int_0^t d\tau \int_S \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x, t)\frac{\partial Z_0(x-\xi, z, t, \tau)}{\partial x_j}\Big|_{z=x} \times$$

$$\times(n_i(x_0)-n_i(\xi))\,dS_\xi - \int_0^t d\tau \int_S \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x_0, t) \times$$

$$\times\frac{\partial Z_0(x-\xi, z, t, \tau)}{\partial x_j}\Big|_{\substack{z=x_0\\x=x_0}} (n_i(x_0)-n_i(\xi))\,dS_\xi\Big] +$$

$$+\varphi(x_0, t)\Big\{\int_0^t d\tau \int_S \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x, t)\frac{\partial Z_0(x-\xi, z, t, \tau)}{\partial x_j}\Big|_{z=x} \times$$

$$\times n_i(\xi)\,dS_\xi - \int_0^t d\tau \int_S \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x_0, t) \times$$

$$\times\frac{\partial Z_0(x-\xi, z, t, \tau)}{\partial x_j}\Big|_{\substack{z=x_0\\x=x_0}} n_i(\xi)\,dS_\xi\Big\}. \qquad (15.3)$$

Если функция $\varphi$ непрерывна, то все выражения в квадратных скобках в правой части стремятся к нулю при $x \to x_0$. Рассмотрим первое выражение. Фиксируем произвольное малое положительное $\varepsilon$. Пусть $\delta$ — такое число, что при $|\xi - x_0| \leqslant \delta$ имеем $|\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Пусть $\Sigma$ — часть поверхности $S$, лежащая внутри шара с центром $x_0$ и радиусом $\delta$, а $\sigma$ — часть $S$, лежащая внутри шара с центром $x_0$ и радиусом $2|x-x_0|$. Предположим, что $\frac{1}{2}\delta > |x-x_0|$. Имеем

$$\left| \int_0^t d\tau \int_\sigma \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial Z_0}{\partial x_j} n_i [\varphi(\xi, \tau) - \varphi(x_0, \tau)]\, dS_\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon \int_\sigma dS_\xi \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon \int_\sigma \frac{dS_\xi}{|x-\xi|^{n-1}} \leqslant \frac{c\varepsilon}{|x-x_0|^{n-1}} \int_\sigma dS_\xi \leqslant c\varepsilon,$$

поскольку $x$ лежит на нормали к $x_0$ и, следовательно, $x_0$ является ближайшей к $x$ точкой поверхности $S$.

В силу (15.2)

$$\left| \int_0^t d\tau \int_\sigma H_0(x_0, \xi, t, \tau) [\varphi(\xi, \tau) - \varphi(x_0, \tau)]\, dS_\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon \int_\sigma dS_\xi \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n+1-\delta}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) d\tau \leqslant c\varepsilon.$$

При оценке остальных интегралов воспользуемся неравенством

$$\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial Z_0(x-\xi, \xi, t, \tau)}{\partial x_j} n_i(x_0) - H_0(x_0, \xi, t, \tau) \right| \leqslant$$

$$\leqslant c \left\{ |x-x_0| (t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} + |x-x_0|^\alpha (t-\tau)^{-\frac{n+1}{2}} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) + \exp\left(-C\frac{|x_0-\xi|^2}{t-\tau}\right) \right\}, \tag{15.4}$$

вытекающим из (11.3) и из

$$|a_{ij}(x, t) - a_{ij}(x_0, t)| \leqslant c|x-x_0|^\alpha. \tag{15.5}$$

Так как при $\xi \in S \setminus \sigma$ мы имеем

$$\frac{1}{2}|x_0-\xi| \leqslant |x-\xi| \leqslant \frac{3}{2}|x_0-\xi|,$$

то

$$\left|\int_0^t d\tau \int_{\Sigma\setminus\sigma} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\frac{\partial Z_0}{\partial x_j} n_i(x_0) - H_0\right] \times \right.$$

$$\left. \times [\varphi(\xi,\tau)-\varphi(x_0,\tau)]\,dS_\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon \int_0^t \left\{|x-x_0|(t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} + \right.$$

$$\left. + |x-x_0|^\alpha (t-\tau)^{-\frac{n+1}{2}}\right\} d\tau \int_{\Sigma\setminus\sigma} \exp\left(-C\frac{|x_0-\xi|^2}{t-\tau}\right) dS_\xi \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon \left[|x-x_0| \int_{\Sigma\setminus\sigma} \frac{dS_\xi}{|x_0-\xi|^n} + |x-x_0|^\alpha \int_{\Sigma\setminus\sigma} \frac{dS_\xi}{|x_0-\xi|^{n-1}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon [1 + |x-x_0|^\alpha |\log|x-x_0||] \leqslant c\varepsilon$$

и

$$\left|\int_0^t d\tau \int_{S\setminus\Sigma} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\frac{\partial Z_0}{\partial x_j} n_i(x_0) - H_0\right] \times \right.$$

$$\left. \times [\varphi(\xi,\tau)-\varphi(x_0,\tau)]\,dS_\xi \right| \leqslant c(\delta)|x-x_0|^\alpha.$$

Объединяя все эти оценки, видим, что при малом $|x-x_0|$ первый член (15.3) не превосходит $c\varepsilon$, и, следовательно, он исчезает при $|x-x_0| \to 0$.

Рассмотрим второй член. Пусть $\eta$ — такое число, что при $|t-\tau| \leqslant \eta$ имеем

$$|\varphi(x,t)-\varphi(x,\tau)| \leqslant \varepsilon.$$

Повторяя проведенные только что выкладки, мы получаем

$$\left| \int_{t-\eta}^{t} [\varphi(x_0, \tau) - \varphi(x_0, t)]\, d\tau \int_{\sigma} \left[ \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial Z_0}{\partial x_j} n_i - H_0 \right] dS_\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_{t-\eta}^{t} d\tau \left[ \int_{\sigma} \sum_{i, j=1}^{n} \left| a_{ij} \frac{\partial Z_0}{\partial x_j} n_i \right| dS_\xi + \int_{\sigma} |H_0|\, dS_\xi \right] \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon \int_{\sigma} dS_\xi \left[ \int_{t-\eta}^{t} (t-\tau)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left( -C \frac{|x_0-\xi|^2}{t-\tau} \right) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t-\eta}^{t} (t-\tau)^{-\frac{n+1-\delta}{2}} \exp\left( -C \frac{|x_0-\xi|^2}{t-\tau} \right) d\tau \right] \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon \left[ \int_{\sigma} \frac{dS_\xi}{|x-\xi|^{n-1}} + \int_{\sigma} \frac{dS_\xi}{|x_0-\xi|^{n-1-\delta}} \right] \leqslant c\varepsilon,$$

далее

$$\left| \int_{t-\eta}^{t} [\varphi(x_0, \tau) - \varphi(x_0, t)]\, d\tau \int_{S \setminus \sigma} \left[ \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial Z_0}{\partial x_j} n_i - H_0 \right] dS_\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon \int_{S \setminus \sigma} dS_\xi \int_{t-\eta}^{t} \left[ |x-x_0| (t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} + |x-x_0|^{\alpha} (t-\tau)^{-\frac{n+1}{2}} \right] \times$$

$$\times \left[ \exp\left( -C \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right) + \exp\left( -C \frac{|x_0-\xi|^2}{t-\tau} \right) \right] d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon\, [1 + |x-x_0|^{\alpha}\, |\log|x-x_0||] \leqslant c\varepsilon$$

и, наконец,

$$\left| \int_0^{t-\eta} [\varphi(x_0, \tau) - \varphi(x_0, t)]\, d\tau \int_S \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial Z_0}{\partial x_j} - H_0 \right] dS_\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant c(\eta)\, |x - x_0|^\alpha.$$

Складывая эти оценки, видим, что и второй член правой части стремится к нулю при $x \to x_0$.

Третий и четвертый члены также исчезают при $x \to x_0$, что легко установить с помощью оценок (11.3), (15.5) и

$$|n_i(x_0) - n_i(\xi)| \leqslant c\, |x_0 - \xi|^\beta. \tag{15.6}$$

В этих членах можно перейти к пределу под знаком интеграла при $x \to x_0$, так как ядра потенциалов, входящих в эти члены, имеют слабую особенность.

Рассмотрим выражение в фигурных скобках в (15.3). Имеем

$$\int_0^t d\tau \int_S \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \left. \frac{\partial Z_0(x - \xi, z, t, \tau)}{\partial x_j} \right|_{z=x} n_i(\xi)\, dS_\xi =$$
$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_S \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial Z_0(x - \xi, x, t, \tau)}{\partial \xi_j} n_i(\xi)\, dS_\xi =$$
$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 Z_0(x - \xi, x, t, \tau)}{\partial \xi_i\, \partial \xi_j}\, d\xi =$$
$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_\Omega \frac{\partial Z_0(x - \xi, x, t, \tau)}{\partial t}\, d\xi +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^n \int_0^t d\tau \int_\Omega [a_{ij}(x, \tau) - a_{ij}(x, t)] \frac{\partial^2 Z_0(x - \xi, x, t, \tau)}{\partial \xi_i\, \partial \xi_j}\, d\xi.$$

Функция $Z_0$ зависит от $\tau$ через разность $t - \tau$ и через функции $A^{(i,j)}(\xi, \tau)$ и $\det A(\xi, \tau)$. Пусть

$$\tilde{Z}(x - \xi, x, t - \tau, \tau) = Z_0(x - \xi, x, t, \tau).$$

Последний аргумент $\tau$ у $\tilde{Z}$ совпадает с аргументом $A^{(i,j)}$ и $\det A$.

Очевидно, что

$$\frac{\partial Z_0}{\partial t} = -\left.\frac{\partial \tilde{Z}(x-\xi, x, t-\tau, \lambda)}{\partial \tau}\right|_{\lambda=\tau} = -\frac{\partial \tilde{Z}(x-\xi, x, t-\tau, t)}{\partial \tau} + \mathfrak{Z}(x, \xi, t, \tau),$$

где

$$\mathfrak{Z} = \left(\frac{\partial \tilde{Z}(x-\xi, x, t-\tau, t)}{\partial \tau} - \left.\frac{\partial \tilde{Z}(x-\xi, x, t-\tau, \lambda)}{\partial \tau}\right|_{\lambda=\tau}\right).$$

Легко убедиться в том, что

$$|\mathfrak{Z}(x, \xi, t, \tau)| \leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n+2-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right)$$

и, следовательно,

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_\Omega \frac{\partial Z_0(x-\xi, x, t, \tau)}{\partial t}\, d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \tilde{Z}(x-\xi, x, \varepsilon, t)\, d\xi - \int_\Omega \tilde{Z}(x-\xi, x, t, t)\, d\xi - \int_0^t d\tau \int_\Omega \mathfrak{Z}(x, \xi, t, \tau)\, d\xi.$$

Преобразуя аналогичным образом второй член выражения в фигурных скобках в правой части (15.3), увидим, что все это выражение равно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \tilde{Z}(x-\xi, x, \varepsilon, t)\, d\xi - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \tilde{Z}(x_0-\xi, x_0, \varepsilon, t)\, d\xi - \left[\int_\Omega \tilde{Z}(x-\xi, x, t, t)\, d\xi - \int_\Omega \tilde{Z}(x_0-\xi, x_0, t, t)\, d\xi\right] - \left[\int_0^t d\tau \int_\Omega \mathfrak{Z}(x, \xi, t, \tau)\, d\xi - \int_0^t d\tau \int_\Omega \mathfrak{Z}(x_0, \xi, t, \tau)\, d\xi\right] +$$

$$+\left[\sum_{i,\,j=1}^{n}\int_0^t d\tau\int_\Omega (a_{ij}(x,\tau)-a_{ij}(x,t))\frac{\partial^2 Z_0(x-\xi,x,t,\tau)}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}\,d\xi-\right.$$

$$-\sum_{i,\,j=1}^{n}\int_0^t d\tau\int_\Omega (a_{ij}(x_0,\tau)-a_{ij}(x_0,t))\times$$

$$\left.\times\frac{\partial^2 Z_0(x_0-\xi,x_0,t,\tau)}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}\,d\xi\right].$$

Очевидно, что выражения в квадратных скобках здесь также стремятся к нулю при $x\to x_0$. Поэтому

$$\lim_{x\to x_0}\left[\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial V_0}{\partial x_j}n_i(x_0)-W_0(x_0,t)\right]=$$

$$=\varphi(x_0,t)\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \tilde Z(x-\xi,x,\varepsilon,t)\,d\xi-\right.$$

$$\left.-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \tilde Z(x_0-\xi,x_0,\varepsilon,t)\,d\xi\right\}.$$

Нетрудно подсчитать, вводя новые переменные интегрирования $z=\frac{x-\xi}{\sqrt{\varepsilon}}$, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \tilde Z(x-\xi,x,\varepsilon,t)\,d\xi=\begin{cases}1, & \text{если}\quad x\in\Omega,\\ 0, & \text{если}\quad x\in E_n\setminus\overline{\Omega},\end{cases}$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \tilde Z(x_0-\xi,x_0,\varepsilon,t)\,d\xi=\int_{\mathfrak{D}}\tilde Z(z,x_0,1,t)\,dz=$$

$$=\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}(\det A_0(x_0,t))^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\int_{\mathfrak{D}}\exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{i,\,j=1}^{n}A^{(i,\,j)}(x_0,t)z_iz_j\right)dz,$$

где $\mathfrak{D}$ — некоторое полупространство, граничная плоскость которого проходит через начало координат. Легко видеть, что последний интеграл равен половине интеграла от той же подынтегральной функции, взятого по всему пространству $E_n$, поскольку эта функция является четной по совокупности переменных $z$. Итак,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega}\tilde{Z}(x_0-\xi,\ x_0,\ \varepsilon,\ t)\,d\xi=\frac{1}{2}\int_{E_n}\tilde{Z}(z,\ x_0,\ 1,\ t)\,dz=\frac{1}{2}$$

и

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial V_0}{\partial x_j}n_i(x_0)=W_0(x_0,\ t)\pm\frac{1}{2}\varphi(x_0,\ t), \tag{15.7}$$

причем знак плюс во втором члене соответствует случаю, когда точка $x$ стремится к $x_0$ изнутри $\Omega$, а знак минус — случаю, когда $x\to x_0$ извне.

При доказательстве соотношения (15.7) мы предполагали, что точка $x$ стремится к $x_0$, оставаясь на нормали к $S$ в точке $x_0$, однако, так же как в классической теории потенциала, это соотношение справедливо и при более общих предположениях. Пусть $x$ находится в окрестности $x_0$ и $\bar{x}$ — ближайшая к $x$ точка поверхности $S$, так что $x$ находится на нормали к $S$ в точке $\bar{x}$. Пусть для определенности $x\in\Omega$. Имеем

$$\left|\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(x,\ t)\frac{\partial V_0(x,\ t)}{\partial x_j}n_i(x_0)-W_0(x_0,\ t)-\frac{1}{2}\varphi(x_0,\ t)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(x,\ t)\frac{\partial V_0(x,\ t)}{\partial x_j}n_i(\bar{x})-W_0(\bar{x},\ t)-\frac{1}{2}\varphi(\bar{x},\ t)\right|+$$
$$+\left|W_0(\bar{x},\ t)-W_0(x_0,\ t)\right|+\frac{1}{2}\left|\varphi(\bar{x},\ t)-\varphi(x_0,\ t)\right|+$$
$$+\left|\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(x,\ t)\frac{\partial V_0(x,\ t)}{\partial x_j}[n_i(x_0)-n_i(\bar{x})]\right|.$$

Легко видеть, что при $x\to x_0$ первые три слагаемых правой части стремятся к нулю. Для оценки четвертого слагаемого воспользуемся неравенствами (15.6) и

$$\left|\frac{\partial V_0(x, t)}{\partial x_j}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c \max|\varphi| \int\limits_S dS_\xi \int\limits_0^t \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right)(t-\tau)^{-\frac{n+1}{2}} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \max|\varphi| \int\limits_S \frac{dS_\xi}{|x-\xi|^{n-1}} \leqslant c_2 |\log|x-\bar{x}||.$$

Таким образом, четвертое слагаемое также стремится к нулю, если $x$ стремится к $x_0$ так, что

$$|x_0-\bar{x}|^\beta \log|x-\bar{x}| \to 0. \qquad (15.8)$$

Это всегда имеет место, если $x$ не выходит за пределы некоторого конуса, вершина которого находится в $x_0$, а ось направлена вдоль $\mathbf{n}(x_0)$.

Из (15.1) и (15.7) следует, что при условии (15.8)

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x, t)\frac{\partial V(x, t)}{\partial x_j} n_i(x_0) = W(x_0, t) \pm \frac{1}{2}\varphi(x_0, t), \qquad (15.9)$$

где

$$W(x_0, t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S H(x_0, \xi, t, \tau)\varphi(\xi, \tau)\, dS_\xi,$$

$$H(x_0, \xi, t, \tau) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x_0, t)\frac{\partial Z(x, \xi, t, \tau)}{\partial x_j}\Big|_{x=x_0} n_i(x_0). \qquad (15.10)$$

Это позволяет решать с помощью потенциала простого слоя вторую краевую задачу для уравнения $\mathscr{L}u=0$ как во внутренней области $Q_T$, так и во внешней области $D_{n+1}^{(T)} \setminus \bar{Q}_T$. Рассмотрим, например, внутреннюю задачу

$$\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0 \qquad (x \in \Omega),$$

$$\sum_{i, j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} n_i(x)\Big|_{S_T} = \Phi(x, t), \quad u|_{t=0} = 0. \qquad (15.11)$$

Ее решение разыскивается в виде потенциала простого слоя

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_S Z(x, \xi, t, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\xi. \qquad (15.12)$$

Потенциал является непрерывной в замкнутой области функцией, удовлетворяющей внутри $Q$ однородному уравнению (15.11), а также нулевому начальному условию. Требуя, чтобы его конормальная производная равнялась $\Phi$, мы в силу (15.9) приходим к интегральному уравнению для плотности $\varphi$

$$\varphi(\xi, t) = -2 \int_0^t d\tau \int_S H(\xi, \eta, t, \tau) \varphi(\eta, \tau) dS_\eta + 2\Phi(\xi, t).$$

Так как ядро $H$ имеет слабую особенность, то это уравнение решается методом последовательных приближений. Решение его будет непрерывной функцией, если $\Phi$ непрерывна. Легко также показать, что если $\Phi$ удовлетворяет условию Гёльдера по своим аргументам, то $\varphi$ также будет удовлетворять условию Гёльдера.

Решение внешней задачи

$$\mathscr{L}u = 0 \qquad (x \in E_n \setminus \Omega),$$

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i(x) \bigg|_{S_T} = \Phi, \quad u|_{t=0} = 0 \qquad (15.13)$$

также можно искать в виде (15.12), и уравнение для плотности $\varphi$ будет следующим:

$$\varphi(\xi, t) = 2 \int_0^t d\tau \int_S H(\xi, \eta, t, \tau) \varphi(\eta, \tau) dS_\eta - 2\Phi(\xi, t).$$

Таким образом, доказана

Теорема 15.1. *Пусть коэффициенты оператора $\mathscr{L}$ определены в $D_{n+1}^{(T)}$ и принадлежат классу $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{D_{n+1}^{(T)}})$. Пусть $\Omega$ — ограниченная область с границей $S \in H^{1+\beta}$. Для любой непрерывной на $S_T$ функции $\varphi$ задачи* (15.11) *и* (15.13) *имеют классические решения, непрерывные в замкнутых областях $\overline{Q}_T$ и $D_{n+1}^{(T)} \setminus Q_T$ соответственно,* *имеющие непрерывные производные, входящие в уравнение, внутри этих областей и удовлетворяющие краевым условиям при стремлении к границе вдоль любой кривой, на которой выполняется соотношение* (15.8). *Решение внешней задачи ограничено на бесконечности.*

## § 16. Решение первой краевой задачи

В этом параграфе мы получим решение первой краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f, \\ &u\,|_S = \Phi(x, t), \quad u\,|_{t=0} = \varphi(x). \end{aligned}\right\} \tag{16.1}$$

Решение этой задачи при $f=0$, $\varphi=0$ можно искать в виде потенциала двойного слоя

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_S \sum_{i,\,j=1}^n a_{ij}(\xi, \tau)\frac{\partial Z(x, \xi, t, \tau)}{\partial \xi_j} n_i(\xi)\,\mu(\xi, \tau)\,dS_\xi. \tag{16.2}$$

Однако при этом приходится накладывать дополнительные ограничения на старшие коэффициенты $a_{ij}$ оператора $\mathscr{L}$, что связано с необходимостью дифференцировать функцию $Z$ по переменным $\xi_j$. Если предположить, что функции $a_{ij}$ удовлетворяют условию Гёльдера по $t$ с показателем $\frac{\alpha}{2}$ и имеют производные $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем $\alpha$ по переменным $x$, то тогда можно показать, что функция $Z$ имеет производные $\frac{\partial Z}{\partial \xi_j}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x_k \partial \xi_j}$, $\frac{\partial^3 Z}{\partial x_l \partial x_k \partial \xi_j}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial t\, \partial \xi_j}$, являющиеся непрерывными функциями при $x \neq \xi$ и подчиняющиеся неравенствам

$$\left| D_t^r D_x^s \frac{\partial Z(x, \xi, t, \tau)}{\partial \xi_j}\right| \leqslant c\,(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s+1}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) \tag{16.3}$$

при $2r+s\leqslant 2$, так что потенциал двойного слоя имеет внутри $Q_T$ и $D_{n+1}^{(T)}\setminus\overline{Q}_T$ непрерывные производные $D_t^rD_x^su(x, t)$ $(2r+s\leqslant 2)$. Для функции $Z'$ справедливы оценки

$$\left|D_x^s\frac{\partial Z'}{\partial\xi_j}\right|\leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n+s}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right)\quad(s\leqslant 2).\quad(16.4)$$

Доказательство оценок (16.3), (16.4) и непрерывности всех указанных выше производных функции $Z$ мы проводить не будем; оно имеется в [$68_1$], [$\mathbf{15}_2$].

Предельное значение потенциала (16.2) при $x\to x_0\in S$ подсчитывается так же, как и предельное значение конормальной производной потенциала простого слоя в § 15. Оно выражается по формуле

$$\lim_{x\to x_0\in S}u(x, t)=$$
$$=\int_0^t d\tau\int_S M(x_0, \xi, t, \tau)\,\mu(\xi, \tau)\,dS_\xi\mp\frac{1}{2}\mu(x_0, t),\quad(16.5)$$

где

$$M(x_0, \xi, t, \tau)=\sum_{i, j=1}^n a_{ij}(\xi, \tau)\frac{\partial Z(x_0, \xi, t, \tau)}{\partial\xi_j}n_i(\xi)$$

— ядро, удовлетворяющее при $x_0\in S$ неравенству

$$|M_0(x_0, \xi, t, \tau)|\leqslant$$
$$\leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n+1-\delta}{2}}\exp\left(-C\frac{|x_0-\xi|^2}{t-\tau}\right),\quad\delta>0,\quad(16.6)$$

и, следовательно, имеющее интегрируемую особенность при $x_0=\xi$, $t=\tau$. Знак минус в формуле (16.5) берется, когда $x\to x_0$ изнутри $\Omega$, а знак плюс берется при стремлении $x$ к $x_0$ извне $\Omega$. Соотношение (16.5) первоначально устанавливается в случае, когда $x$ стремится к $x_0$, оставаясь на нормали к $S$ в точке $x_0$. Но затем, точно так же как в классической теории потенциала (см., например, [16], стр. 71, а также конец § 15), можно показать, что (16.5) имеет место при любом стремлении $x$ к $x_0$, даже без условия (15.8). Отсюда, в частности, вытекает, что при непрерывной $\varphi$

функция $u(x, t)$ является равномерно непрерывной как в $\overline{Q}_T$, так и в $D_{n+1}^{(T)} \setminus Q_T$.

Соотношение (16.5) позволяет свести задачу (16.1) с $f=0$ как во внутренней по отношению к $S$ области $Q_T$, так и во внешней области $D_{n+1}^{(T)} \setminus \overline{Q}_T$ к интегральному уравнению. Решение внутренней задачи выражается в виде потенциала (16.2), плотность которого $\mu(\xi, t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\mu(\xi, t) = 2\int_0^t d\tau \int_S M(\xi, \eta, t, \tau)\,\mu(\eta, \tau)\,dS_\eta - 2\Phi(\xi, t),$$

а в случае внешней задачи интегральное уравнение имеет вид

$$\mu(\xi, t) = -2\int_0^t d\tau \int_S M(\xi, \eta, t, \tau)\,\mu(\eta, \tau)\,dS_\eta + 2\Phi(\xi, t).$$

Оба уравнения являются вольтерровыми уравнениями со слабо полярным ядром и решаются методом последовательных приближений. Их решения являются столь же гладкими функциями, как функция $\Phi(\xi, t)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 16.1. *Если коэффициенты оператора $\mathscr{L}$ принадлежат классу $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(D_{n+1}^{(T)})$ и, кроме того, старшие коэффициенты $a_{ij}$ имеют производные $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$, удовлетворяющие условию Гёльдера по переменным $x$ с показателем $\alpha$, а поверхность $S$ удовлетворяет условиям Ляпунова, то задача (16.1) как во внутренней области $Q_T$, так и во внешней области $D_{n+1}^{(T)} \setminus \overline{Q}_T$ при $f=0$, $\varphi=0$ и любой непрерывной $\Phi$ имеет классическое решение. Это решение имеет непрерывные производные, входящие в уравнение, во внутренних точках соответствующей области, а само оно непрерывно вплоть до границы.*

Сейчас мы переходим к решению первой краевой задачи (16.1) с помощью функции Грина.

Функцией Грина для задачи (16.1) во внутренней области называется функция $G(x, y, t, \tau)$, обладающая при всех

$(y, \tau) \in Q_T$ следующими свойствами:

$$\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) G(x, y, t, \tau) = \delta(x-y)\,\delta(t-\tau),$$
$$G(x, y, \tau, \tau) = 0, \quad G(x, y, t, \tau)\big|_{x \in S} = 0.$$

Она связана с фундаментальным решением $Z$ соотношением

$$G(x, y, t, \tau) = Z(x, y, t, \tau) - g(x, y, t, \tau), \tag{16.7}$$

где функция $g(x, y, t, \tau)$ — решение задачи

$$\begin{gathered} \mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) g(x, y, t, \tau) = 0, \\ g(x, y, \tau, \tau) = 0, \\ g(x, y, t, \tau)\big|_{x \in S} = Z(x, y, t, \tau)\big|_{x \in S}. \end{gathered} \tag{16.8}$$

Если потребовать, чтобы коэффициенты оператора $\mathscr{L}$ удовлетворяли условиям теоремы 16.1, то можно выразить функцию $g$ в виде потенциала двойного слоя. В. Погожельский [47$_4$] предложил излагаемый ниже остроумный прием, позволяющий получить решение задачи (16.8) в виде потенциала простого слоя при $a_{ij} \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$.

Пусть $(y, \tau) \in Q_T$. Пусть при $x \in E_n \setminus \overline{\Omega}$, $\tau \leqslant t \leqslant T$

$$g(x, y, t, \tau) = Z(x, y, t, \tau). \tag{16.9}$$

Эта функция, очевидно, является решением второй краевой задачи во внешней области $D_{n+1}^{(T)} \setminus \overline{Q}_T$

$$\begin{gathered} \mathscr{L} g = 0, \\ g(x, y, \tau, \tau) = 0, \\ \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} n_i(x)\Big|_{x \in S} = H(x, y, t, \tau), \end{gathered}$$

где $H(x, y, t, \tau)$ — функция (15.10).

Из результатов § 15 вытекает, что функция $g$ представима в виде потенциала простого слоя

$$g(x, y, t, \tau) = \int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{S} Z(x, \xi, t, \lambda)\, \omega(\xi, y, \lambda, \tau)\, dS_\xi, \tag{16.10}$$

где плотность $\omega$ определяется из интегрального уравнения

$$\omega(\xi, y, t, \tau) = \\ = 2\int_\tau^t d\lambda \int_S H(\xi, \eta, t, \lambda)\,\omega(\eta, y, \lambda, \tau)\,dS_\xi - 2H(\xi, y, t, \tau), \tag{16.11}$$

которое решается методом последовательных приближений.

Определим теперь функцию $g$ в $Q_T$ формулой (16.10) и покажем, что она удовлетворяет соотношениям (16.8). Из всех этих соотношений проверки требует только краевое условие. Оно вытекает из непрерывности потенциала простого слоя в области $D_{n+1}^{(T)}$. Действительно, если точка $x$ стремится к точке $x_0 \in S$, оставаясь в области $E_n \setminus \overline{\Omega}$, то в силу (16.9)

$$\lim_{x \to x_0} g(x, y, t, \tau) = Z(x, y, t, \tau). \tag{16.12}$$

Но так как предельное значение потенциала простого слоя не зависит от того, с какой стороны поверхности $S$ точка $x$ приближается к $x_0$, то соотношение (16.12) и доказывает нужное краевое условие.

Таким образом, функция $g$ выражается формулой (16.10). Из этой формулы видно, что $g(x, y, t, \tau)$ не имеет особенностей, когда точки $x$ и $y$ не находятся на поверхности $S$.

Оценим функцию $g$ с помощью соотношений (16.10), (16.11). Прежде всего отметим, что при $y \in \Omega$ функция $H(\xi, y, t, \tau)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} |H(\xi, y, t, \tau)| \leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left(-C\frac{|\xi - y|^2}{t-\tau}\right), \\ \int_\tau^t d\lambda \int_S |H(\xi, y, \lambda, \tau)|\,dS_\xi \leqslant c. \end{gathered} \tag{16.13}$$

Для доказательства последней оценки представим $H$ в виде

$$H = H_0 + H',$$

где $H' = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi, t) \frac{\partial Z'(\xi, y, t, \tau)}{\partial \xi_j} n_i(\xi)$ — функция, для которой в силу (13.5) имеет место оценка

$$|H'(\xi, y, t, \tau)| \leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n+1-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|\xi-y|^2}{t-\tau}\right)$$

и, следовательно,

$$\int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{S} |H'(\xi, y, \lambda, \tau)| dS_\xi \leqslant c(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}} \leqslant c_1.$$

Для функции $H_0$ справедлива формула

$$H_0(\xi, y, t, \tau) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi, t) \frac{\partial Z_0(\xi-y, y, t, \tau)}{\partial \xi_j} n_i(\xi) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} [a_{ij}(\xi, t) - a_{ij}(y, \tau)] \frac{\partial Z_0(\xi-y, y, t, \tau)}{\partial \xi_j} n_i(\xi) -$$

$$- \frac{1}{2(t-\tau)} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - y_i) n_i(\xi) Z_0(\xi-y, y, t, \tau),$$

так что

$$\int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{S} |H_0(\xi, y, \lambda, \tau)| dS_\xi \leqslant$$

$$\leqslant c\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}} + \int_{S} \left|\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - y_i) n_i(\xi)\right| \frac{dS_\xi}{|\xi-y|^n}\right) \leqslant c.$$

Ограниченность последнего интеграла доказывается в классической теории потенциала (см., например, [16], стр. 275—276, для $n = 3$).

Итак, $H(\xi, y, t, \tau)$ подчиняется неравенствам (16.13). Используя представление функции $\omega$ в виде ряда, получающееся при решении уравнения (16.11) методом последовательных приближений, нетрудно показать, что для $\omega$

справедливы такие же оценки:

$$
\begin{gathered}
|\omega(\xi, y, t, \tau)| \leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left(-C \frac{|\xi-y|^2}{t-\tau}\right), \\
\int_\tau^t d\lambda \int_S |\omega(\xi, y, \lambda, \tau)|\, dS_\xi \leqslant c.
\end{gathered} \tag{16.14}
$$

С помощью (16.10) мы оценим теперь функцию $g$. Пусть $\rho(x)$ — расстояние от точки $x$ до поверхности $S$; тогда при $0 \leqslant 2r+s \leqslant 2$

$$
\begin{aligned}
&|D_t^r D_x^s g(x, y, t, \tau)| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\substack{\xi \in S \\ \tau \leqslant \lambda \leqslant t}} |D_t^r D_x^s Z(x, \xi, t, \lambda)| \int_\tau^t d\lambda \int_S |\omega(\xi, y, \lambda, \tau)|\, dS_\xi \leqslant \\
&\qquad \leqslant c \sup_{\substack{\xi \in S \\ \tau \leqslant \lambda \leqslant t}} (t-\lambda)^{-\frac{n+2r+s}{2}} \exp\left(-C \frac{|x-\xi|^2}{t-\lambda}\right) \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \frac{c}{\rho^{n+2r+s}(x)} \exp\left(-C' \frac{\rho^2(x)}{t-\tau}\right).
\end{aligned} \tag{16.15}
$$

Кроме того, можно получить для $g$ оценку, не зависящую от $\rho(x)$. Пусть $\sigma$ — часть поверхности $S$, лежащая в шаре с центром $x$ и радиусом $\frac{1}{2}|x-y|$. Имеем

$$
\begin{aligned}
|g(x, y, t, \tau)| \leqslant c \Bigg\{ &(t-\tau)^{-\frac{n+1}{2}} \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t (t-\lambda)^{-\frac{n}{2}} d\lambda \times \\
&\times \int_S \exp\left(-C \frac{|x-\xi|^2}{t-\lambda}\right) \exp\left(-C \frac{|\xi-y|^2}{\lambda-\tau}\right) dS_\xi + \\
&+ (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-C \frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right) \int_\tau^{\frac{t+\tau}{2}} d\lambda \int_{S \setminus \sigma} |\omega(\xi, y, \lambda, \tau)|\, dS_\xi +
\end{aligned}
$$

$$+(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{C}{2}\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}(\lambda-\tau)^{-\frac{n+1}{2}}\exp\left(-\frac{C}{2}\frac{|x-y|^2}{\lambda-\tau}\right)d\lambda\int\limits_{\sigma}dS_\xi\Bigg\}\leqslant$$

$$\leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-C_1\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right).$$

Из этой оценки вытекает, что функция Грина имеет ту же особенность в точке $x=y$, $t=\tau$, что и фундаментальное решение:

$$|G(x,\ y,\ t,\ \tau)|\leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right). \qquad (16.16)$$

Рассмотрим функцию

$$u(x,\ t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega G(x,\ y,\ t,\ \tau)f(y,\ \tau)\,dy+$$

$$+\int\limits_\Omega G(x,\ y,\ t,\ 0)\varphi(y)\,dy=u_1(x,\ t)+u_2(x,\ t) \qquad (16.17)$$

при $f\in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, $\varphi\in C(\bar{\Omega})$ и покажем, что она является решением задачи (16.1) при $\Phi=0$. Вследствие (16.7) в области $Q_T$ выполняется уравнение $\mathscr{L}u=f$. Далее в силу (16.16) и результатов § 14

$$\lim_{t\to 0}u(x,\ t)=\lim_{t\to 0}u_2(x,\ t)=\varphi(x).$$

Наконец, проверим, что функция $u$ удовлетворяет нулевому краевому условию. Очевидно, что при $t>0$

$$u_2|_S=0.$$

Фиксируем малое $\delta>0$. Вследствие (16.16)

$$\left|\int\limits_{t-\delta}^t d\tau\int\limits_\Omega G(x,\ y,\ t,\ \tau)f(y,\ \tau)\,dy\right|\leqslant c\max|f|\delta.$$

Так как при $t>\tau$ функция $G(x,\ y,\ t,\ \tau)$ не имеет особенности, то для любого наперед заданного $\eta>0$ можно найти такое $d>0$, что, когда расстояние от точки $x$ до границы меньше $d$,

$$\left|\int_0^{t-\delta} d\tau \int_\Omega G(x, y, t, \tau) f(y, \tau) dy\right| \leqslant \eta.$$

Таким образом, при достаточно близкой к границе точке $x$ $|u_1(x, t)| \leqslant c\delta \max|f| + \eta$, т. е. $u_1|_S = 0$.

Итак, мы доказали, что функция (16.10) является классическим решением задачи (16.1) при $\Phi = 0$.

Мы рассмотрели задачу (16.1) во внутренней области, однако все рассуждения с очевидными изменениями переносятся на внешнюю область $D_{n+1}^{(T)} \setminus \bar{Q}_T$.

Таким образом, справедлива

Теорема 16.2. *Пусть коэффициенты оператора* $\mathcal{L}$ *принадлежат классу* $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$. *Тогда задача* (16.1) *с* $\Phi = 0$ *как во внутренней, так и во внешней области имеет классическое решение при любых ограниченных* $f$ *и* $\varphi$, *если* $f$ *удовлетворяет условию Гёльдера, а* $\varphi$ *непрерывна.*

Теорема 10.1 и неравенство (16.16) позволяют получить точные оценки производных функции Грина. Приведем их без доказательства.

Теорема 16.3. *Если коэффициенты оператора* $\mathcal{L}$ *принадлежат классу* $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}$, *то справедливы следующие неравенства*:

$$|D_t^r D_x^s G(x, y, t, \tau)| \leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right).$$

$$|D_t^r D_x^s G(x, y, t, \tau) - D_{t'}^r D_x^s G(x, y, t', \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c(t-t')^{\frac{\alpha}{2}+1-r-\frac{s}{2}} (t'-\tau)^{-\frac{n+2+\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right),$$

*где* $2r + s = 1, 2, \quad \tau < t' < t$, *и*

$$|D_t^r D_x^s G(x, y, t, \tau) - D_t^r D_{x'}^s G(x', y, t, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c|x-x'|^\alpha (t-\tau)^{-\frac{n+2+\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x''-y|^2}{t-\tau}\right),$$

*где* $2r + s = 2$ *и* $x''$ — *та из точек* $x$ *и* $x'$, *которая является ближайшей к* $y$.

## § 17. Об оценках С. Н. Бернштейна

В работе [$5_1$] С. Н. Бернштейн предложил метод оценок максимумов модулей производных любого порядка для решения линейных параболических уравнений в предположении, что сами решения и все входящие в уравнение известные функции достаточно гладкие. В [$5_1$] изложены локальные (внутренние) оценки. В сочетании с оценками производных на границе, данными им ранее (см. [$5_2$] и § 3 главы VI), они образуют достаточно полный набор оценок и в замкнутой области (с использованием, разумеется, краевых и начальных условий). То, что оценки на границе проведены в [$5_2$] лишь для эллиптических уравнений, причем в двумерных областях, несущественно: они проходят без каких-либо изменений для уравнений обоих типов, эллиптических и параболических, в любой многомерной области. Оценки эти, как мы покажем ниже, просты и красивы. Однако они не относятся к числу точных (см. об этом §§ 3, 4 главы I) и потому не могут быть столь же эффективно использованы для доказательства теорем о разрешимости тех или иных краевых задач, как изложенные выше оценки в пространствах Гёльдера и в пространствах $W_q^{2m,\,m}$.

Изложим метод оценки Бернштейна для $|u_x|$. Пусть $u$ есть классическое решение уравнения

$$\mathscr{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + a_i\frac{\partial u}{\partial x_i} = -au + f \qquad (17.1)$$

с непрерывными коэффициентами и свободным членом $f$ и с $a_{ij}$, удовлетворяющими условию (2.5) главы I.

Если на $\Gamma_T$ известны его значения: $u|_{\Gamma_T} = \psi$, причем $S$ и $\psi$ достаточно гладкие, то $\max\limits_{\Gamma_T}|u_x|$ оценивается через известные величины так, как это сделано в лемме 3.1 главы VI (с понятными упрощениями для данного, линейного случая). Для оценки $|u_x|$ внутри надо знать, что производные $u_t$ и $u_{x_i x_j}$ и все коэффициенты и свободный член уравнения (17.1) дифференцируемы по $x$ в каждой точке $Q_T$. Пусть $\max\limits_{Q_T}|u| = M$. Рассмотрим функцию $v(x, t) = u_x^2(x, t) +$

$+\lambda u^2(x, t)-\mu t$, где $\lambda$ и $\mu$ — два числа, которые будут выбраны в дальнейшем достаточно большими. Вычислим $\mathscr{L}v$:

$$\mathscr{L}v=2u_{x_k}\left(u_{x_k t}-a_{ij}u_{x_k x_i x_j}+a_i u_{x_k x_i}\right)+ \\ +2\lambda u\left(u_t-a_{ij}u_{x_i x_j}+a_i u_{x_i}\right)-2a_{ij}u_{x_k x_i}u_{x_k x_j}- \\ -2\lambda a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}-\mu.$$

В силу уравнения (17.1)

$$\mathscr{L}v=2u_{x_k}\left(-au_{x_k}-a_{x_k}u+f_{x_k}+a_{ijx_k}u_{x_i x_j}-a_{ix_k}u_{x_i}\right)+ \\ +2\lambda u(-au+f)-2a_{ij}u_{x_k x_i}u_{x_k x_j}-2\lambda a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}-\mu.$$

Оценим $\mathscr{L}v$ сверху, используя неравенство Коши (1.2) главы II и условие (2.5) главы I, следующим образом:

$$\mathscr{L}v\leqslant c\left[\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)u_x^2+(1+\lambda)M^2+f_x^2\right]+ \\ +\varepsilon u_{xx}^2+\lambda f^2-2\nu u_{xx}^2-2\nu\lambda u_x^2-\mu,$$

где постоянная $c$ зависит лишь от $\max\limits_{Q_T}\left|a_{ij}, a_i, a_{ijx_k}, a_{ix_k}, a, a_{x_k}\right|$. Возьмем $\varepsilon=2\nu$, $\lambda=\frac{1}{2\nu}c\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)$ и $\mu=c(1+\lambda)M^2+c\max\limits_{Q_T}f_x^2+\lambda\max\limits_{Q_T}f^2+1$. Тогда во всех точках $Q_T$ $\mathscr{L}v\leqslant-1<0$ и потому максимум $v$ находится на $\Gamma_T$, т. е.

$$\max_{Q_T}v=\max_{Q_T}\left(u_x^2+\lambda u^2-\mu t\right)\leqslant\max_{\Gamma_T}\left(u_x^2+\lambda u^2-\mu t\right). \quad (17.2)$$

Это и есть желаемая оценка для $\max\limits_{Q_T}|u_x|$ через $M$ и уже оцененный ранее $\max\limits_{\Gamma_T}|u_x|$.

Для получения локальной (внутренней) оценки $|u_x|$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$w(x, t)=\zeta^2(x, t)u_x^2(x, t)+\lambda u^2(x, t)-\mu t,$$

где $\zeta(x, t)$ — срезающая функция, равная нулю вблизи $\Gamma_T$. Нетрудно подсчитать, что для нее $\mathscr{L}w$ будет отрицательным при достаточно больших $\lambda$ и $\mu$, и потому $\max\limits_{Q_T} w$ будет приниматься на $\Gamma_T$, т. е.

$$w(x, t) \leqslant \max_{\Gamma_T} w \leqslant \lambda M^2.$$

Это неравенство и дает оценку $\max\limits_{Q'} |u_x|$ для любой области $Q'$, отстоящей от $\Gamma_T$ на положительное расстояние.

Для оценки производных второго порядка надо рассмотреть функцию

$$v(x, t) = u_{xx}^2(x, t) + \lambda u_x^2(x, t) - \mu t$$

или

$$w(x, t) = \zeta^2(x, t)\, u_{xx}^2(x, t) + \lambda u_x^2(x, t) - \mu t,$$

в зависимости от того, тотальную или локальную оценку $|u_{xx}|$ желательно получить, и подобрать $\lambda$ и $\mu$ столь большими, чтобы $\mathscr{L}v$ или $\mathscr{L}w$ были отрицательными в $Q_T$. (Подробный вывод этого можно найти в [$33_8$] и в [$9_1$].) Принципиально так же оцениваются производные от $u$ любого порядка.

# ГЛАВА V

# КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДИВЕРГЕНТНОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

Эта глава посвящена квазилинейным уравнениям с дивергентной главной частью, т. е. уравнениям вида

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, u_x) + a(x, t, u, u_x) = 0. \quad (0.1)$$

Они не охватывают всех квазилинейных уравнений. Однако все широко известные уравнения механики, относящиеся к параболическому типу, принадлежат к этому классу. К нему же очевидным образом приводятся уравнения

$$u_t - a_{ij}(x, t, u) u_{x_i x_j} + a(x, t, u, u_x) = 0$$

и

$$u_t - a_{11}(x_1, t, u, u_{x_1}) u_{x_1 x_1} + a(x_1, t, u, u_{x_1}) = 0.$$

Для уравнений (0.1) будут исследованы обобщенные и классические решения и будет доказана однозначная разрешимость основных краевых задач. Ограничения, при которых это делается, вызваны существом дела и для всего класса уравнений (0.1), как показывают примеры главы I, не могут быть ослаблены в терминах взятых пространств.

Разрешимость краевых задач, как отмечалось в § 4 гл. I, доказывается нами на основании теоремы Лерэ — Шаудера и априорных оценок норм $|u|_{Q_T}^{(1+\alpha)}$ всех возможных их решений. С получения этих оценок мы начинаем данную главу. В §§ 1 и 2 даются оценки норм $\max_{Q_T}|u|$, $|u|_{Q'}^{(\alpha)}$ и $|u|_{Q_T}^{(\alpha)}$, затем (в § 3) норм $|u_x|_{Q'}^{(\alpha)}$, после этого $\max_{Q_T}|u_x|$ (§ 4) и $|u_x|_{Q_T}^{(\alpha)}$

(§ 5) для всей области $Q_T$. При этом существенно используются результаты §§ 7 и 8 главы II о функциях классов $\mathfrak{B}_2$, к которым принадлежат сами решения $u$ и их производные $u_x$. Оценки вблизи границы $S_T$, а тем самым и во всей области, в этих параграфах проведены для первого краевого условия. Они и теорема 5.2 главы IV о линейных уравнениях с гладкими коэффициентами позволяют проверить выполнимость всех условий теоремы Лерэ — Шаудера и установить с ее помощью разрешимость первой краевой задачи. Это сделано в § 6. В § 7 аналогичные рассуждения проведены для других краевых (нелинейных) условий. В § 8 кратко анализируется задача Коши. В § 9 рассматривается задача Стефана. Ее специфической особенностью является то, что граница раздела разных фаз (или границы области определения в случае однофазовой задачи) неизвестна. Наконец, в § 10 дается иной способ оценки колебаний решений уравнений (0.1), не требующий обращения к классам $\mathfrak{B}_2$, но использующий, по существу, те же аналитические факты, что и первый.

В конце § 6 доказывается обобщенная разрешимость краевых задач, базирующаяся лишь на энергетической оценке.

## § 1. Ограниченные обобщенные решения. Непрерывность по Гёльдеру

Пусть функции $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$, образующие уравнение (0.1), определены для $(x, t) \in \overline{Q}_T$ и произвольных значений аргументов $u$ и $p = (p_1 \dots p_n)$, непрерывны по $u$, $p$ и удовлетворяют условиям

$$a_i(x, t, u, p)\, p_i \geqslant \nu(|u|)\, p^2 - \varphi_0(x, t), \tag{1.1}$$

$$|a_i(x, t, u, p)| \leqslant \mu(|u|)\,|p| + \varphi_1(x, t), \tag{1.2}$$

$$|a(x, t, u, p)| \leqslant \mu_1(|u|)\, p^2 + \varphi_2(x, t), \tag{1.3}$$

в которых $\nu(\xi)$ и $\mu_i(\xi)$, как везде, суть положительные непрерывные функции $\xi \geqslant 0$, причем $\nu(\xi)$ — монотонно убывающая, а $\mu_i(\xi)$ — монотонно возрастающие, а функции $\varphi_i(x, t)$ неотрицательные и имеют конечные нормы

$$\|\varphi_0, \varphi_2\|_{q, r, Q_T}, \qquad \|\varphi_1\|_{2q, 2r, Q_T} \leqslant \mu_2. \tag{1.4}$$

где $q$ и $r$ суть произвольные положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\frac{1}{r}+\frac{n}{2q}=1-\varkappa_1,$$

причем

$$\left.\begin{aligned} &q\in\left[\frac{n}{2(1-\varkappa_1)},\ \infty\right],\quad r\in\left[\frac{1}{1-\varkappa_1},\ \infty\right],\quad 0<\varkappa_1<1\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{при}\quad n\geqslant 2,\\ &q\in[1,\ \infty],\quad r\in\left[\frac{1}{1-\varkappa_1},\ \frac{2}{1-2\varkappa_1}\right],\quad 0<\varkappa_1<\frac{1}{2}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{при}\quad n=1.\end{aligned}\right\}\qquad(1.5)$$

Назовем *ограниченным обобщенным решением* (ог. об. решением) уравнения (0.1) функцию $u(x,\ t)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$ с $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|u|<\infty$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega}u(x,\ t)\,\eta(x,\ t)\,dx\Big|_0^t+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left[-u\eta_t+a_i(x,\ t,\ u,\ u_x)\,\eta_{x_i}+\right.$$
$$\left.+\,a(x,\ t,\ u,\ u_x)\,\eta\right]dx\,dt=0\qquad(1.6)$$

при любой функции $\eta(x,\ t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ с $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|\eta|<\infty$ и любом $t$ из $[0,\ T]$.

Вследствие предположений (1.1)—(1.5) все члены (1.6) конечны при произвольных $u$ и $\eta$ из указанных классов, и из (1.6) следует

$$\int\limits_{\Omega}u(x,\ t)\,\eta(x,\ t)\,dx\Big|_{t_0}^t+$$
$$+\int\limits_{t_0}^t\int\limits_{\Omega}\left[-u\eta_t+a_i(x,\ t,\ u,\ u_x)\,\eta_{x_i}\right]dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{t_0}^t\int\limits_{\Omega}(\mu_1u_x^2+\varphi_2)\,|\eta|\,dx\,dt,\qquad 0\leqslant t_0\leqslant t\leqslant T,\qquad(1.7)$$

где $\mu_1=\mu_1(\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|u|)$. Пусть $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|u|=M$, $\mu=\mu(M)$, $\nu=\nu(M)$, $\mu_1=\mu_1(M)$. Имеет место теорема:

Теорема 1.1. *Пусть функции* $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ *обладают указанными выше свойствами* (1.1) — (1.5), *а* $u(x, t)$ *есть ог. об. решение уравнения* (0.1) *с* $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|u| = M$. *Тогда* $u(x, t)$ *принадлежит* $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ *с некоторым положительным* $\alpha$, *зависящим лишь от* $n$, $\nu$, $\mu$, $q$, $r$ *и* $\frac{M\mu_1}{\nu}$. *Величина* $|u|_{Q'}^{(\alpha)}$ *для любого* $Q' \subset Q_T$, *отстоящего от* $\Gamma_T$ *на положительное расстояние* $d$, *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $n$, $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$, $q$, $r$ *и расстояния* $d$.

*Если и непрерывно в смысле Гёльдера на каком-либо куске* $\Gamma'$ *границы* $\Gamma_T$ $\left(\text{с показателем Гёльдера } \beta \text{ по } x \text{ и } \frac{\beta}{2} \text{ по } t\right)$, *удовлетворяющем условию* (А), *то* $u(x, t)$ *будет принадлежать* $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T \cup \Gamma')$ *с некоторым* $\alpha > 0$, *зависящим лишь от* $n$, $\nu$, $\mu$, $q$, $r$, $\frac{M\mu_1}{\nu}$ *и* $\beta$. *Норма* $|u|_{Q'}^{(\alpha)}$ *для любого* $Q'$, *принадлежащего* $Q_T$ *и отстоящего от* $\Gamma_T \setminus \Gamma'$ *на положительное расстояние* $d$, *оценивается сверху постоянной, определяемой* $n$, $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$, $q$, $r$, $\beta$, $|u|_{\Gamma'}^{(\beta)}$, *константами* $\theta_0$ *и* $a_0$ *из условия* (А) *и расстоянием* $d$. *В частности, когда* $\Gamma' = \Gamma_T$, $S$ *удовлетворяет условию* (А) *и* $u|_{\Gamma_T} \in H^{\beta, \frac{\beta}{2}}(\Gamma_T)$, *решение* $u(x, t) \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, *и* $|u|_{Q_T}^{(\alpha)}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $n$, $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$, $q$, $r$, $\beta$, *констант* $\theta_0$ *и* $a_0$ *из условия* (А) *и* $|u|_{\Gamma_T}^{(\beta)}$.

Замечание 1.1. Параметры $q$ и $r$ в (1.4) могут быть разными для разных $\varphi_i$, и вместо $\varphi_i(x, t)$ в правых частях (1.1) — (1.3) могут стоять конечные суммы разных $\varphi$, надо лишь, чтобы соответствующие им параметры $q$ и $r$ удовлетворяли требованиям (1.5).

Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что $u(x, t)$ принадлежит классу $\mathfrak{B}_2(\bar{Q}_T, M, \gamma, m, \delta, \varkappa)$ с параметрами $\gamma$, $m$, $\delta$, $\varkappa$, определяемыми лишь $M$ и числами, входящими в условия (1.1) — (1.5).

Для этого прежде всего заметим, что из тождества (1.6) следуют тождества

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left[u_{ht}\hat{\eta}+a_i(x,\ t,\ u,\ u_x)\hat{\eta}_{\bar{h}x_i}+\right.$$
$$\left.+a(x,\ t,\ u,\ u_x)\hat{\eta}_{\bar{h}}\right]dx\,dt=0 \qquad (1.8)$$

при $h\leqslant t_0\leqslant t_1\leqslant T-h$ с любой функцией $\hat{\eta}(x,\ t)$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_{T-h})$. В них символы $(\ \ )_h$ и $(\ \ )_{\bar{h}}$ обозначают стекловские усреднения по $t$ вверх и вниз, определенные формулами (2.7) и (2.10) главы III. Выводятся соотношения (1.8) из (1.6) так же, как (2.11) было выведено из (1.16) в главе III. Положим в (1.8) $\hat{\eta}(x,\ t)=\zeta^2(x,\ t)\max\{u_h(x,\ t)-k;\ 0\}\equiv\zeta^2u_h^{(k)}$, где $\zeta(x,\ t)$ — произвольная, неотрицательная, непрерывная, кусочно-гладкая функция, равная нулю на $S_T$, и первый член преобразуем так:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}u_{ht}u_h^{(k)}\zeta^2\,dx\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(u_h^{(k)}(x,\ t)\right)^2\zeta^2(x,\ t)\,dx\,\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left(u_h^{(k)}\right)^2\zeta\zeta_t\,dx\,dt.$$

Затем во всех членах перейдем к пределу по $h\to 0$. В результате получим

$$\frac{1}{2}\left\|u^{(k)}(x,\ t)\zeta(x,\ t)\right\|_{2,\Omega}^2\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left[-(u^{(k)})^2\zeta\zeta_t+\right.$$
$$\left.+a_i(u^{(k)}\zeta^2)_{x_i}+au^{(k)}\zeta^2\right]dx\,dt=0. \qquad (1.9)$$

Законность предельных переходов по $h\to 0$ во всех членах следует из лемм 4.5—4.7 главы II и предположений (1.1)—(1.5) о функциях $a_i(x,\ t,\ u,\ p)$ и $a(x,\ t,\ u,\ p)$, а также из принадлежности $u$ к $V_2^{1,0}(Q_T)$. В (1.9) $t_0$ и $t_1$ можно брать любыми из $(0,\ T)$, а так как все члены (1.9) суть непрерывные функции $t_0$ и $t_1$, то и из $[0,\ T]$.

Будем считать $\zeta(x, t)$ отличной от нуля лишь при $x \in K_\rho$. В силу предположений (1.1)—(1.3) из (1.9) следует

$$\frac{1}{2}\|u^{(k)}(x, t)\zeta(x, t)\|^2_{2, K_\rho}\Big|_{t_0}^{t} + \nu\int_{t_0}^{t}\int_{K_\rho}[u_x^{(k)}]^2\zeta^2\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{t}\int_{A_{k,\rho}}\Big[\varphi_0\zeta^2 + (\mu|u_x| + \varphi_1)\,2(u-k)\zeta|\zeta_x| +$$
$$+\left(\mu_1 u_x^2 + \varphi_2\right)(u-k)\zeta^2 + (u-k)^2\zeta|\zeta_t|\Big]\,dx\,dt. \qquad (1.10)$$

Оценивая члены правой части по неравенству Коши (1.2) главы II, получим неравенство

$$\frac{1}{2}\|u^{(k)}(x, t)\zeta(x, t)\|^2_{2, K_\rho}\Big|_{t_0}^{t} + \nu\int_{Q(\rho,\, t-t_0)}[u_x^{(k)}]^2\zeta^2\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{t}\int_{A_{k,\rho}}\Big[\varphi_0\zeta^2 + \varepsilon_1\mu u_x^2\zeta^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\mu(u-k)^2\zeta_x^2 + \varphi_1^2\zeta^2 +$$
$$+(u-k)^2\zeta_x^2 + \left(\mu_1 u_x^2 + \varphi_2\right)\zeta^2\left(\max_{Q(\rho,\, t-t_0)} u(x, t) - k\right) +$$
$$+(u-k)^2\zeta|\zeta_t|\Big]\,dx\,dt, \qquad (1.11)$$

в котором $Q(\rho, t-t_0) = K_\rho \times (t_0, t)$, а $\varepsilon_1$ — произвольное положительное число.

Это неравенство имеет тот же характер, что и неравенство (10.1) главы III. Единственное отличие состоит в том, что в правой части (1.11) имеется член $\left(\max\limits_{Q(\rho,\, t-t_0)} u(x, t) - k\right)\mu_1 u_x^2$, коэффициент $\mu_1\left(\max\limits_{Q(\rho,\, t-t_0)} u(x, t) - k\right)$ которого, вообще говоря, не мал и который в связи с этим не может быть погашен вторым членом левой части. Чтобы это было возможно, наложим ограничение на выбор уровня $k$. Именно, возьмем только такие $k$, для которых

$$\max_{Q(\rho,\, \tau)} u(x, t) - k \leqslant \delta = \frac{\nu}{4\mu_1}. \qquad (1.12)$$

Тогда из (1.11) с $\varepsilon_1 = \frac{\nu}{4\mu}$ для $t \in [t_0, t_0+\tau]$ следует

$$\|u^{(k)}(x, t)\zeta(x, t)\|^2_{2, K_\rho} + \nu \int\limits_{Q(\rho, t-t_0)} [u_x^{(k)}]^2 \zeta^2 \, dx \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \|u^{(k)}(x, t_0)\zeta(x, t_0)\|^2_{2, K_\rho} + c \int\limits_{Q(\rho, t-t_0)} [u^{(k)}]^2 (\zeta_x^2 + \zeta|\zeta_t|) \, dx \, dt +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{A_{k, \rho(t)}} \mathscr{D}_1(x, t) \, dx \, dt, \qquad (1.13)$$

где $c = 2\left(\frac{4\mu^2}{\nu} + 1\right)$, а $\mathscr{D}_1(x, t) = 2(\varphi_0 + \varphi_1^2 + \delta\varphi_2)\zeta^2$. Это неравенство совпадает с неравенством (10.2) главы III, если в последнем положить $M = 0$. Более того, предположения (1.4)—(1.5) о $\varphi_i$ таковы, что $\mathscr{D}_1$ из (1.13) и $\mathscr{D}_1$ из (10.2) принадлежат одному и тому же пространству $L_{q, r}(Q_T)$. В виду этого из (1.13) следуют неравенства (10.4) и (10.6) главы III, в которых $M$ положено равным 0, или, что то же самое, неравенства (7.5) главы II. Аналогичные неравенства верны и для функции $-u(x, t)$. Из них следуют неравенства (7.1), (7.2) главы II, а тем самым и то, что решение $u$ является элементом

$$\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, \hat{r}, \delta, \varkappa) \text{ с } \gamma = \frac{\max\{c; \|\mathscr{D}_1\|_{q, r, Q_T}\}}{\min\{1; \nu\}},$$

$$\varkappa = \frac{2\varkappa_1}{n}, \quad \hat{r} = \frac{2r}{r-1}(1+\varkappa), \quad \delta = \frac{\nu}{4\mu_1},$$

и элементом

$$\mathfrak{B}_2(Q(\rho_0, \rho_0^2), M, \gamma, \hat{r}, \delta, \varkappa) \text{ с } \rho_0 = \left[c\|\mathscr{D}_1\|^{-1}_{q, r, Q_T}\right]^{\frac{1}{n\varkappa}} \varkappa_n^{\frac{1}{\hat{r}} - \frac{n}{4}},$$

а $\gamma = \frac{c}{\min\{1; \nu\}}$, $\varkappa = \frac{\varkappa_1}{n}$, $\hat{r} = \frac{2r}{r-1}(1+2\varkappa)$, $\delta = \frac{\nu}{4\mu_1}$. А это, как доказано в § 7 главы II, гарантирует принадлежность $u$ к $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ с некоторым положительным $\alpha$, являющимся непрерывной функцией аргументов $\gamma = \frac{2}{\min\{1; \nu\}} \times \left(\frac{4\mu^2}{\nu} + 1\right)$, $q$, $r$ и $\frac{M}{\delta} = \frac{4M\mu_1}{\nu}$ в допустимой области изменения этих аргументов $\left(\text{для } \frac{M}{\delta}\right.$ этой областью является полуось $\left.[0, \infty)\right)$, и оценку $\langle u\rangle_{Q'}^{(\alpha)}$.

Справедливость двух других утверждений теоремы следует из теоремы 8.1 главы II и того, что решение $u$ принадлежит $\mathfrak{B}_2(\bar{Q}_T, M, \gamma, \hat{r}, \delta, \varkappa)$ и $\mathfrak{B}_2(\bar{Q}(\rho_0, \rho_0^2), M, \gamma, \hat{r}, \delta, \varkappa)$ с теми же значениями параметров $M$, $\gamma$, $\hat{r}$, $\delta$ и $\varkappa$, что и выше.

Замечание 1.2. Легко видеть, что принадлежность функции $u(x, t)$ к классам $\mathfrak{B}_2$ была выведена нами фактически не из того факта, что $u(x, t)$ удовлетворяет тождеству (1.6), а из того, что для нее справедливы неравенства (1.7) Поэтому все утверждения теоремы 1.1 справедливы для произвольной функции $u(x, t)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$ с конечным $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|u|$, удовлетворяющей неравенствам (1.7) для всех указанных при нем $\eta$, $t_0$ и $t$.

Неравенства же (1.13) для $u$ (но не для $-u$!), а следовательно, и неравенства (7.1) и (7.2) главы II для нее, лежащие в основе определений классов $\mathfrak{B}_2$, были выведены нами из неравенств (1.7), в которых $\eta$ принимает лишь неотрицательные значения.

## § 2. Об ограниченности обобщенных решений

Рассмотрим здесь произвольные (не обязательно ограниченные) обобщенные решения уравнения (0.1), принадлежащие пространству $V_2^{1,0}(Q_T)$. Такие решения $u(x, t)$ естественно определить как элементы $V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющие тождеству (1.6) при любой функции $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$. Чтобы это определение имело смысл, надо на функции $a_i(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ наложить ограничения, несколько более жесткие, чем (1.2)—(1.5). Так, если их формулировать в виде неравенств

$$\begin{gathered} |a_i(x, t, u, p)| \leqslant c|p| + c|u|^\alpha + \varphi_1(x, t), \\ |a(x, t, u, p)| \leqslant c|p|^{2-\beta} + c|u|^\gamma + \varphi_2(x, t), \end{gathered} \tag{2.1}$$

то функции $\varphi_1(x, t)$, $\varphi_2(x, t)$ и параметры $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, должны удовлетворять условиям:

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{n+2}{n}; \quad \frac{n}{n+2} \leqslant \beta \leqslant 2; \\ &0 \leqslant \gamma \leqslant 1 + \frac{4}{n}; \quad \varphi_1 \in L_2(Q_T), \quad \varphi_2 \in L_{q_0, r_0}(Q_T); \\ &\frac{1}{r_0} + \frac{n}{2q_0} = 1 + \frac{n}{4}, \quad q_0 \geqslant 1, \quad r_0 \geqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Условия (2.1), (2.2), как нетрудно подсчитать с помощью неравенства Гёльдера и неравенства (3.4) главы II, гарантируют конечность интегралов $\int\limits_{Q_T} a_i(x, t, u, u_x)\,\eta_{x_i}\,dx\,dt$ и $\int\limits_{Q_T} a(x, t, u, u_x)\,\eta\,dx\,dt$ при любых функциях $u$ и $\eta$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$. Покажем, что любое обобщенное решение $u(x, t)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$ уравнения (0.1) будет ограниченным и его $\operatorname*{vrai\,max}\limits_{Q_T} |u|$ можно оценить сверху через $\|u\|_{q_1, r_1, Q_T}$ и известные величины, если функции $a_i(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ удовлетворяют еще при $|u| \geqslant k_0$ условиям:

$$a_i(x, t, u, p)\,p_i \geqslant \nu |p|^2 - \mu |u|^\delta - u^2\varphi(x, t), \qquad \nu > 0, \tag{2.3}$$

и

$$-a(x, t, u, p)\,u \leqslant \mu_0 |p|^2 + \mu |u|^\delta + u^2\varphi(x, t), \tag{2.4}$$

в которых

$$\left.\begin{aligned} &(\delta - 2)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{n}{2q_1}\right) = 1 - \varkappa_1, \quad \text{причем} \quad \delta > 2, \\ &\frac{q_1}{\delta - 2} \in \left[\frac{n}{2(1-\varkappa_1)}, \infty\right], \quad \frac{r_1}{\delta - 2} \in \left[\frac{1}{1-\varkappa_1}, \infty\right], \\ &\qquad\qquad 0 < \varkappa_1 < 1, \quad \text{при} \quad n \geqslant 2 \text{ и} \\ &\frac{q_1}{\delta - 2} \in [1, \infty], \quad \frac{r_1}{\delta - 2} \in \left[\frac{1}{1-\varkappa_1}, \frac{2}{1-2\varkappa_1}\right], \\ &\qquad\qquad 0 < \varkappa_1 < \frac{1}{2}, \quad \text{при} \quad n = 1, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

а $\varphi(x, t)$ есть элемент $L_{q_2, r_2}(Q_T)$ с $q_2$ и $r_2$, удовлетворяющими условиям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r_2}+\frac{n}{2q_2}=1-\varkappa_2,\\ &q_2\in\left[\frac{n}{2(1-\varkappa_2)}, \infty\right],\ r_2\in\left[\frac{1}{1-\varkappa_2}, \infty\right],\ 0<\varkappa_2<1,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\text{при}\quad n\geqslant 2,\\ &q_2\in[1, \infty],\ r_2\in\left[\frac{1}{1-\varkappa_2}, \frac{2}{1-2\varkappa_2}\right],\ 0<\varkappa_2<\frac{1}{2}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\text{при}\quad n=1.\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

Числа $q_1$ и $r_1$ при этом могут быть любыми положительными, даже меньшими единицы, $\mu_0<\nu_0$. Число $\delta$ считаем бо́льшим 2, при $\delta=2$ член $\mu|u|^{\delta}$ можно считать включенным в $u^2\varphi(x, t)$. Ограничимся здесь тотальной оценкой $|u|$, т. е. оценкой $\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T}|u|$, считая при этом, разумеется, что $\operatorname*{vrai\,max}_{\Gamma_T}|u|<\infty$. Как изменить рассуждение для получения локальных оценок $\operatorname{vrai\,max}|u|$ (без предположения об ограниченности $\operatorname*{vrai\,max}_{\Gamma_T}|u|$) видно из данного параграфа и § 8 главы III. Если $\mu=0$ в (2.3), (2.4), то $\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T}|u|$ оценивается только через известные величины. Если о решении $u(x, t)$ априори известна его ограниченность, то условие $\mu_0<\nu$ можно снять. Докажем все эти утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть функции* $a_i(x, t, u, p)$ *и* $a(x, t, u, p)$ *удовлетворяют условиям* (2.1)—(2.6) *и* $\mu_0<\nu$. *Тогда любое обобщенное решение* $u(x, t)$ *из* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *уравнения* (0.1) *с* $\operatorname*{vrai\,max}_{\Gamma_T}|u|\equiv M_0<\infty$ ***является ограниченной функцией и*** $\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T}|u|$ ***оценивается сверху постоянной*** $c$, *определяемой лишь величинами* $\nu-\mu_0$, $\mu$, $\|\varphi\|_{q_2, r_2, Q_T}$, $q_2$, $r_2$, $q_1$, $r_1$, $\delta$, $k_0$, $\|u\|_{q_1, r_1, Q_T}$, $T$ *и* $\operatorname{mes}\Omega$. *Параметры* $q_1$ *и* $r_1$ *при этом могут быть любыми положительными числами. При* $\mu=0$ *постоянная* $c$ *не зависит от* $\|u\|_{q_1, r_1, Q_T}$.

Для доказательства теоремы 2.1 рассмотрим соотношение (1.9). При $k\geqslant M_0$ функцию $\zeta(x, t)$ в нем можно положить равной 1, ибо функция $\widehat{\eta} = u_h^{(k)}\zeta^2$ при этом будет равна нулю на $\Gamma_T$. Из (1.9) с $\zeta \equiv 1$, $t_0 = 0$ и $k \geqslant \max\{M_0;\ k_0\}$ в силу предположений (2.3) и (2.4) следует

$$\frac{1}{2}\|u^{(k)}\|^2_{2,\,A_k(t_1)} + \int\limits_{Q_{t_1}(k)} (\nu u_x^2 - \mu |u|^\delta - u^2\varphi)\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant -\int\limits_{Q_{t_1}(k)} au\frac{u^{(k)}}{u}\,dx\,dt \leqslant \int\limits_{Q_{t_1}(k)} (\mu_0 u_x^2 + \mu |u|^\delta + u^2\varphi)\,dx\,dt, \tag{2.7}$$

где, как и всюду, $u^{(k)}(x,\ t) = \max\{u(x,\ t) - k;\ 0\}$, $A_k(t)$ — множество точек $x \in \Omega$, где $u(x,\ t) > k$, а $Q_{t_1}(k)$ — множество точек $(x,\ t) \in Q_{t_1} = \Omega \times (0,\ t_1)$, где $u(x,\ t) > k$. Так как по условию $\mu_0 < \nu$, то из (2.7) имеем неравенство

$$\|u^{(k)}\|^2_{2,\,A_k(t_1)} + \|u_x^{(k)}\|^2_{Q_{t_1}(k)} \leqslant c \int\limits_{Q_{t_1}(k)} (\mu |u|^\delta + u^2\varphi)\,dx\,dt, \tag{2.8}$$

в котором $c$ зависит лишь от $\nu - \mu_0$ из условий (2.3), (2.4). Оценим интегралы $j_1 = \int\limits_{Q_{t_1}(k)} |u|^\delta\,dx\,dt$ и $j_2 = \int\limits_{Q_{t_1}(k)} u^2\varphi\,dx\,dt$, считая, что $\delta > 2$ и величина $\|u\|_{q_1,\,r_1,\,Q_T}$ известна. В силу условий (2.5) и неравенства Гёльдера

$$j_1 = \int\limits_{Q_{t_1}(k)} |u|^{\delta-2} u^2\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \|u^{\delta-2}\|_{\frac{q_1}{\delta-2},\,\frac{r_1}{\delta-2},\,Q_{t_1}(k)} \|u^2\|_{\frac{q_1}{q_1-(\delta-2)},\,\frac{r_1}{r_1-(\delta-2)},\,Q_{t_1}(k)} \equiv$$
$$\equiv \|u\|^{\delta-2}_{q_1,\,r_1,\,Q_{t_1}(k)} \|u\|^2_{\bar{q}_1,\,\bar{r}_1,\,Q_{t_1}(k)} \leqslant$$
$$\leqslant 2\|u\|^{\delta-2}_{q_1,\,r_1,\,Q_T}\left[\|u-k\|^2_{\bar{q}_1,\,\bar{r}_1,\,Q_{t_1}(k)} + \right.$$
$$\left. + k^2\left(\int\limits_0^{t_1} \operatorname{mes}^{\frac{\bar{r}_1}{\bar{q}_1}} A_k(t)\,dt\right)^{\frac{2}{\bar{r}_1}}\right], \tag{2.9}$$

где $\bar{q}_1 = \frac{2q_1}{q_1-(\delta-2)}$, $\bar{r}_1 = \frac{2r_1}{r_1-(\delta-2)}$. Условия (2.5) гарантируют $\frac{1}{\bar{r}_1} + \frac{n}{2\bar{q}_1} = \frac{n}{4}(1+\hat{\varkappa}_1)$, где $\hat{\varkappa}_1 = \frac{2\varkappa_1}{n}$, и

$$\bar{q}_1 \in \left[2, \frac{2n}{n-2+2\varkappa_1}\right], \quad \bar{r}_1 \in \left[2, \frac{2}{\varkappa_1}\right] \quad \text{при} \quad n \geqslant 2,$$

$$\bar{q}_1 \in [2, \infty], \quad \bar{r}_1 \in \left[\frac{4}{1+2\varkappa_1}, \frac{2}{\varkappa_1}\right] \quad \text{при} \quad n = 1.$$

Возьмем числа $\hat{q}_1 = \bar{q}_1(1+\hat{\varkappa}_1)$, $\hat{r}_1 = \bar{r}_1(1+\hat{\varkappa}_1)$. Они удовлетворяют соотношениям (3.3) главы II, при выполнении которых справедлива теорема вложения (3.4) главы II. Ввиду этого и неравенства (3.5) главы II

$$j_1 \leqslant 2\|u\|^{\delta-2}_{q_1, r_1, Q_T}\left[\beta^2 |u^{(k)}|^2_{Q_{t_1}^{(k)}}\left(\int_0^{t_1} \operatorname{mes}^{\frac{\hat{r}_1}{\hat{q}_1}} A_k(t)\,dt\right)^{\frac{2}{\bar{r}_1}-\frac{2}{\hat{r}_1}} + \right.$$

$$\left. + k^2 \left(\int_0^{t_1} \operatorname{mes}^{\frac{\hat{r}_1}{\hat{q}_1}} A_k(t)\,dt\right)^{2\frac{1+\varkappa_1}{\hat{r}_1}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2\|u\|^{\delta-2}_{q_1, r_1, Q_T}\left[\beta^2 |u^{(k)}|^2_{Q_{t_1}^{(k)}}\left(t_1^{\frac{1}{\hat{r}_1}} \operatorname{mes}^{\frac{1}{\hat{q}_1}}\Omega\right)^{2\hat{\varkappa}_1} + \right.$$

$$\left. + k^2 \left(\int_0^{t_1} \operatorname{mes}^{\frac{\hat{r}_1}{\hat{q}_1}} A_k(t)\,dt\right)^{2\frac{1+\hat{\varkappa}_1}{\hat{r}_1}}\right]. \qquad (2.10)$$

При $q_1 = \delta - 2$ (это может быть лишь в случае $n = 1$) $\bar{q}_1$ обратится в $\infty$ и вместо (2.10) будем иметь:

$$j_1 \leqslant 2\|u\|^{\delta-2}_{q_1, r_1, Q_T}\left[\beta^2 |u^{(k)}|^2_{Q_{t_1}^{(k)}} \mu^{\frac{2\hat{\varkappa}_1}{\hat{r}_1}}(k, t_1) + \right.$$

$$\left. + k^2 \mu^{2\frac{1+\hat{\varkappa}_1}{\hat{r}_1}}(k, t_1)\right], \qquad (2.11)$$

где $\mu(k, t_1)$ — мера множества тех точек $t$ на отрезке $(0, t_1)$, в которых $\operatorname{mes} A_k(t) > 0$.

Интеграл $j_2$ оценивается аналогично:

$$j_2 \leqslant \|\varphi\|_{q_2, r_2, Q_{t_1}(k)} \|u\|^2_{\bar{q}_2, \bar{r}_2, Q_{t_1}(k)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\|\varphi\|_{q_2, r_2, Q_T}\left[\|u-k\|^2_{\bar{q}_2, \bar{r}_2, Q_{t_1}(k)} + k^2\|1\|^2_{\bar{q}_2, \bar{r}_2, Q_{t_1}(k)}\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2\|\varphi\|_{q_2, r_2, Q_T}\left[\beta^2 |u^{(k)}|^2_{Q_{t_1}(k)}\left(t_1^{\frac{1}{\hat{r}_2}} \operatorname{mes}^{\frac{1}{\hat{q}_2}} \Omega\right)^{2\hat{\varkappa}_2} + \right.$$

$$\left. + k^2\left(\int_0^{t_1} \operatorname{mes}^{\frac{\hat{r}_2}{\hat{q}_2}} A_k(t)\, dt\right)^{2\frac{1+\hat{\varkappa}_2}{\hat{r}_2}}\right], \tag{2.12}$$

где $\bar{q}_2 = \frac{2q_2}{q_2-1}$, $\bar{r}_2 = \frac{2r_2}{r_2-1}$, $\hat{\varkappa}_2 = \frac{2\varkappa_2}{n}$, $\hat{q}_2 = \bar{q}_2(1+\hat{\varkappa}_2)$, $\hat{r}_2 = \bar{r}_2(1+\hat{\varkappa}_2)$, причем числа $q_2$ и $r_2$ удовлетворяют соотношениям (3.3) главы II. При $q_2 = 1$ показатель $\bar{q}_2 = \infty$ и вместо (2.12) получим

$$j_2 \leqslant 2\|\varphi\|_{q_2, r_2, Q_T}\left[\beta^2 |u^{(k)}|^2_{Q_{t_1}(k)} \mu^{\frac{2\hat{\varkappa}_2}{\hat{r}_2}}(k, t_1) + \right.$$

$$\left. + k^2 \mu^{2\frac{1+\hat{\varkappa}_2}{\hat{r}_2}}(k, t_1)\right], \tag{2.13}$$

где $\mu(k, t_1)$ имеет тот же смысл, что и в (2.10). Подставим полученные оценки для $j_1$ и $j_2$ в неравенство (2.8). Тогда при достаточно малом $t_1$, таком, что

$$4c\beta^2\left[\mu\|u\|^{\delta-2}_{q_1, r_1, Q_T}\left(t_1^{\frac{1}{\hat{r}_1}} \operatorname{mes}^{\frac{1}{\hat{q}_1}} \Omega\right)^{2\hat{\varkappa}_1} + \right.$$

$$\left. + \|\varphi\|_{q_2, r_2, Q_T}\left(t_1^{\frac{1}{\hat{r}_2}} \operatorname{mes}^{\frac{1}{\hat{q}_2}} \Omega\right)^{2\hat{\varkappa}_2}\right] \leqslant \frac{1}{2},$$

будем иметь

$$|u^{(k)}|_{Q_{t_1}(k)} \leqslant c_1 k\left[\left(\int_0^{t_1} \operatorname{mes}^{\frac{\hat{r}_1}{\hat{q}_1}} A_k(t)\, dt\right)^{\frac{1+\hat{\varkappa}_1}{\hat{r}_1}} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^{t_1} \operatorname{mes}^{\frac{\hat{r}_2}{\hat{q}_2}} A_k(t)\, dt\right)^{\frac{1+\hat{\varkappa}_2}{\hat{r}_2}}\right]. \tag{2.14}$$

при $k \geqslant \max\{M_0, k_0\}$, причем при $\hat{q}_l = \infty$ вместо интеграла $\int\limits_0^{t_1} \operatorname{mes}^{\frac{\hat{r}_l}{\hat{q}_l}} A_k(t)\,dt$ надо брать $\mu(k, t_1)$. Постоянная $c_1$ определяется лишь известными нам величинами. При $\mu = 0$ (т. е. при $\delta = 2$) она не зависит от $\|u\|_{q_1, r_1, Q_T}$. Из неравенства (2.14) на основании теоремы 6.1 главы II (точнее, замечания 6.1 к ней) заключаем, что $u(x, t)$ ограничена в $Q_{t_1}$ сверху и ее $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_{t_1}} u$ не превосходит некоторого числа, определяемого лишь $M_0$, $k_0$, постоянными $c_1$, $\hat{r}_l$, $\hat{q}_l$, $\hat{\varkappa}_l$, а также $\operatorname{mes}\Omega$ и $T$, т. е. теми величинами, которые указаны в теореме 2.1. Рассматривая $u(x, t)$ последовательно в цилиндрах $\Omega \times (t_1, 2t_1)$, $\Omega \times (2t_1, 3t_1)$ и т. д., мы за конечное число шагов оценим $\operatorname{vrai}\max u$ сверху во всем $Q_T$. Чтобы оценить $u(x, t)$ снизу, надо только что полученный результат применить к функции $\tilde{u}(x, t) = -u(x, t)$, которая удовлетворяет уравнению того же типа, что и $u(x, t)$, именно

$$\tilde{u}_t - \frac{d}{dx_i}\tilde{a}_i(x, t, \tilde{u}, \tilde{u}_x) + \tilde{a}(x, t, \tilde{u}, \tilde{u}_x) = 0$$

с

$$\tilde{a}_i(x, t, \tilde{u}, \tilde{u}_x) = -a_i(x, t, -\tilde{u}, -\tilde{u}_x)$$

и

$$\tilde{a}(x, t, \tilde{u}, \tilde{u}_x) = -a(x, t, -\tilde{u}, -u_x),$$

подчиняющимся условиям (2.3) — (2.6). Теорема 2.1 доказана.

Как указывалось, условия (2.1) — (2.2) накладываются лишь для того, чтобы для любых рассматриваемых решений имели смысл интегралы, входящие в (1.6). Если считать решение $u$ более хорошим, чем в теореме 2.1, то требования (2.1) — (2.2) можно ослабить. Кроме того, можно освободиться и от ограничения: $\mu_0 < \nu$, которое накладывалось выше. Именно, имеет место теорема:

Теорема 2.2. *Если функции* $a_i(x, t, u, p)$ *и* $a(x, t, u, p)$ *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $|u|$, $|p| < \infty$ *подчиняются ограничениям* (1.2) — (1.3) *с* $\varphi_1^2$, $\varphi_2$ *из* $L_1(Q_T)$, *а при* $k \geqslant k_0$ *и тех же* $x$, $t$, $u$, $p$ *удовлетворяют условиям* (2.3) — (2.6) *с произвольной постоянной* $\mu_0$ *в неравенстве* (2.4), *тогда для любого ограниченного обобщенного решения*

$u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ *величина* $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T} |u|$ *оценивается сверху постоянной* $M$, *зависящей лишь от* $k_0$, $\nu$, $\mu$, $\mu_0$, $\delta$, $q_1$, $r_1$, $\|\varphi\|_{q_2, r_2, Q_T}$, $q_2$, $r_2$ *из условий* (2.3) — (2.6), *от* $M_0 = \operatorname{vrai}\max\limits_{\Gamma_T} |u|$, *нормы* $\|u\|_{q_1, r_1, Q_T}$, $\operatorname{mes}\Omega$ *и* $T$.

Рассмотрим функцию $v = |u|^m$, $m > 1$, и соответствующую ей функцию $v_{(h)} = |u_h|^m$ и положим в тождестве (1.8)

$$\hat{\eta}(x, t) = |u_h(x, t)|^{m-1} v_{(h)}^{(k)}(x, t) \operatorname{sign} u_h(x, t), \qquad k \geqslant M_0^m.$$

Здесь $u_h$ есть стекловское уравнение $u$ по $t$, определенное в § 2 главы III, а $v_{(h)}^{(k)}(x, t) = \max\{v_{(h)}(x, t) - k; 0\}$.

Это приведет нас к неравенству

$$\frac{1}{2m}\int\limits_\Omega [v_{(h)}^{(k)}(x, t)]^2\,dx\,\Big|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_\Omega \Big[a_i(x, t, u, u_x)\big(|u_h|^{m-1}\operatorname{sign} u_h v_{(h)}^{(k)}\big)_{\bar{h}x_i} + a(x, t, u, u_x)\big(|u_h|^{m-1}\operatorname{sign} u_h v_{(h)}^{(k)}\big)_{\bar{h}}\Big]\,dx\,dt = 0,$$

из которого, переходя к пределу по $h \to 0$ и полагая $t_0 = 0$, выводим следующее:

$$\frac{1}{2m}\int\limits_\Omega [v^{(k)}(x, t)]^2\,dx + \int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega \Big[a_i(x, t, u, u_x)\big(|u|^{m-2} u v_{x_i}^{(k)} + (m-1)|u|^{m-2} u_{x_i} v^{(k)}\big) + a(x, t, u, u_x)|u|^{m-2} u v^{(k)}\Big]\,dx\,dt = 0; \tag{2.15}$$

при $k \geqslant \max\{M_0^m; k_0^m\}$ из (2.15), (2.3) и (2.4) вытекает такое неравенство

$$\frac{1}{2m}\int\limits_\Omega [v^{(k)}(x, t_1)]^2\,dx + \int\limits_{Q_{t_1}(k)} \big(\nu u_x^2 - \mu|u|^\delta - u^2\varphi\big)\big(m|u|^{2m-2} + (m-1)|u|^{m-2} v^{(k)}\big)\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{Q_{t_1}(k)} \big(\mu_0 u_x^2 + \mu|u|^\delta + u^2\varphi\big)|u|^{m-2} v^{(k)}\big)\,dx\,dt,$$

где $Q_{t_1}(k)$ — множество точек $(x, t)$ из $Q_{t_1}$, в которых $v(x, t) > k$.

Отсюда, выбирая $m > \frac{\mu_0}{\nu}$ и учитывая, что $|u|^m = v$, $m|u|^{m-1}|u_x| = |v_x|$, выводим

$$\int_\Omega [v^{(k)}(x, t_1)]^2\, dx + \int_{Q_{t_1}(k)} v_x^2\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant c \int_{Q_{t_1}(k)} \left(v^{\frac{\delta-2}{m}+2} + v^2\varphi\right) dx\, dt. \qquad (2.16)$$

Здесь функция $\varphi(x, t)$ та же, что и в (2.8), показатель $\tilde{\delta} = \frac{\delta - 2}{m} + 2$ подчиняется ограничению

$$(\tilde{\delta} - 2)\left(\frac{m}{r_1} + \frac{mn}{2q_1}\right) = 1 - \varkappa_1,$$

а относительно $v(x, t)$ известна величина

$$\|v\|^{\frac{1}{m}}_{\frac{q_1}{m}, \frac{r_1}{m}, Q_T} = \left\| v^{\frac{1}{m}} \right\|_{q_1, r_1, Q_T} = \|u\|_{q_1, r_1, Q_T}.$$

Таким образом, неравенства (2.16) имеют в точности тот же вид, что и (2.8), с такими же ограничениями на $\varphi$, $\tilde{\delta} = \frac{\delta - 2}{m} + 2$ и $v$, которые накладывались на $\varphi$, $\delta$ и $u$ соответственно в неравенствах (2.8). Это позволяет сделать желаемый вывод об оценке $\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T} v$, а потому и $\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T} |u|$ сверху через постоянные, указанные в теореме.

## § 3. Оценки $\max_{Q'} |u_x|$ и $\langle u_x \rangle^{(\alpha)}_{Q'}$

Предположим, что функции $a_i(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ обладают несколько более хорошими свойствами, чем в § 1, а именно, существуют частные производные $\frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial p_j}$, $\frac{\partial a_i}{\partial u}$ и $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ и при $(x, t) \in Q_T$, $|u| \leqslant M$ и произвольных $p$

справедливы оценки

$$\nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\leqslant\frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j\leqslant\mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \tag{3.1}$$

$$|a_i(x, t, u, p)|+\left|\frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial u}\right|\leqslant\mu|p|+\varphi_1(x, t), \tag{3.2}$$

$$\left|\frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial x_j}\right|\leqslant\mu p^2+\varphi_2(x, t), \tag{3.3}$$

$$|a(x, t, u, p)|\leqslant\mu p^2+\varphi_3(x, t), \tag{3.4}$$

в которых

$$\|\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\|_{2q, 2r, Q_T}\leqslant\mu_1, \tag{3.5}$$

причем

$$\left.\begin{array}{ll} & \dfrac{1}{r}+\dfrac{n}{2q}=1-\varkappa_1 \quad \text{и} \\ q\in\left[\dfrac{n}{2(1-\varkappa_1)}, \infty\right], & r\in\left[\dfrac{1}{1-\varkappa_1}, \infty\right], \\ & 0<\varkappa_1<1 \quad \text{при} \quad n\geqslant 2, \\ q\in[1, \infty], & r\in\left[\dfrac{1}{1-\varkappa_1}, \dfrac{2}{1-2\varkappa_1}\right], \\ & 0<\varkappa_1<\dfrac{1}{2} \quad \text{при} \quad n=1. \end{array}\right\} \tag{3.6}$$

Мы докажем, что при выполнении этих условий для решений $u(x, t)$ уравнений (0.1) величины $\max\limits_{Q'}|u_x|$ и $\langle u_x\rangle_{Q'}^{(\alpha)}$ при некотором $\alpha>0$ оцениваются сверху постоянной, зависящей лишь от числовых параметров, входящих в условия (3.1)—(3.6), $\max\limits_{Q_T}|u|$ и расстояния от $Q'$ до $\Gamma_T$. Чтобы не загромождать изложение, мы предположим, что $u\in O^{2,1}(Q_T)$. По поводу того, как получать эти оценки для обобщенных решений, мы отошлем читателя к главе IV книги [1], в которой это показано для уравнений эллиптического типа. Показатели $q$ и $r$ в (3.5) можно брать разными для разных функций. Итак, пусть $u(x, t)\in O^{2,1}(Q_T)$ и $\max\limits_{Q_T}|u|=M$.

Оценим сначала $\|u_x\zeta\|_{L_2(Q_T)}$, где $\zeta(x, t)$ — гладкая функция со значениями между 0 и 1, равная нулю на $\Gamma_T$. Для этого рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega \mathscr{L} u e^{\lambda u} \zeta^2 dx\, dt = 0, \quad \lambda = \text{const} \gg 1,$$

и преобразуем его с помощью интегрирования по частям к виду

$$\frac{1}{\lambda} \int_\Omega e^{\lambda u(x,t)} \zeta^2(x, t)\, dx \Big|_0^t + \int_0^t \int_\Omega e^{\lambda u} \Big[ -\frac{1}{\lambda} 2\zeta\zeta_t + \\ + a_i(x, t, u, u_x)\left(\lambda u_{x_i} + 2\zeta\zeta_{x_i}\right) + a\zeta^2 \Big] dx\, dt = 0. \quad (3.7)$$

В силу предположений (3.1), (3.2)

$$a_i(x, t, u, p)\, p_i = \\ = p_i p_j \int_0^1 \frac{\partial a_i(x, t, u, \tilde{p})}{\partial \tilde{p}_j} \Big|_{\tilde{p} = \tau p} d\tau + p_i a_i(x, t, u, 0) \geqslant \\ \geqslant \nu p^2 - \sum_{i=1}^n |p_i|\, \varphi_1(x, t) \geqslant \frac{\nu}{2} p^2 - \frac{n}{2\nu} \varphi_1^2.$$

Поэтому

$$\int_0^t \int_\Omega \frac{\lambda\nu}{2} u_x^2 e^{\lambda u} \zeta^2 dx\, dt \leqslant \int_0^t \int_\Omega e^{\lambda u} \Big[ \frac{2}{\lambda} |\zeta\zeta_t| + \frac{\lambda n}{2\nu} \varphi_1^2 + \\ + (\mu |u_x| + \varphi_1)\, 2\zeta |\zeta_x| + (\mu u_x^2 + \varphi_3)\zeta^2 \Big] dx\, dt \leqslant \\ \leqslant \int_0^t \int_\Omega e^{\lambda u} \Big( \frac{2}{\lambda} |\zeta\zeta_t| + \frac{\lambda n}{2\nu} \varphi_1^2 + \mu u_x^2 \zeta^2 + \mu \zeta_x^2 + 2\varphi_1 \zeta |\zeta_x| + \\ + \mu u_x^2 \zeta^2 + \varphi_3 \zeta^2 \Big) dx\, dt. \quad (3.8)$$

Выберем $\lambda = \frac{8\mu}{\nu}$ и учтем, что $\| \varphi_1, \varphi_1^2, \varphi_3 \|_{1, Q_T} \leqslant c(\mu_1)$, тогда из (3.8) видно, что

$$\int_{Q_T} u_x^2 \zeta^2 dx\, dt \leqslant c, \quad (3.9)$$

где $c$ — постоянная, зависящая лишь от $n$, $\frac{1}{\nu}$, $\mu, \mu_1$, $M$, $\max\limits_{Q_T}(|\zeta_x|, |\zeta_t|)$ и $\operatorname{mes} Q_T$ ($c$ есть возрастающая функция указанных аргументов).

Покажем теперь, что интегралы $\int\limits_{K_\rho}|u_x|^{2s}\,dx$ можно оценить при любом $s$ (нам понадобятся лишь $s$, не превосходящие некоторого фиксированного числа $s_0$, определяемого по параметрам $q$ и $r$ из (3.6)) через известные нам параметры, если только $K_\rho$ и концентрический ему шар $K_{2\rho}$ принадлежат $\Omega$ и $\rho$ не превосходит некоторого числа $\rho_0$. Число $\rho_0$ также определяется лишь известными параметрами и $s_0$. Легко проверить, что из условий (3.1) — (3.6) следуют предположения теоремы 1.1. Фиксируем произвольно внутренний цилиндр $Q'$ и все рассмотрения проведем внутри его. Для любого $K_\rho\subset\overline{\Omega}'$ в силу теоремы 1.1

$$\operatorname{osc}^2\{u, K_\rho\}\leqslant c\rho^{\alpha_1}. \tag{3.10}$$

Возьмем цилиндр $K_{2\rho}\times(0, t_1)$ и гладкую функцию $\zeta(x, t)$ со значениями между 0 и 1, равную нулю вблизи нижнего основания и боковой поверхности этого цилиндра.

Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_0^t\int\limits_{K_{2\rho}}\sum_{k=1}^n \mathscr{L}u\frac{d}{dx_k}\left(|u_x|^{2s}u_{x_k}\zeta^2\right)dx\,dt=0, \tag{3.11}$$
$$t\leqslant t_1,\quad s=0, 1, \ldots,$$

и преобразуем его с помощью двукратного интегрирования по частям к виду

$$\frac{1}{2s+2}\int\limits_{K_{2\rho}}|u_x(x, t)|^{2s+2}\zeta^2(x, t)\,dx+\int\limits_0^t\int\limits_{K_{2\rho}}\left[\frac{-1}{2s+2}|u_x|^{2s+2}\,2\zeta\zeta_t+\right.$$
$$\left.+\frac{da_l}{dx_k}\frac{d}{dx_l}\left(|u|^{2s}u_{x_k}\zeta^2\right)-a\frac{d}{dx_k}\left(|u_{x_k}|^{2s}u_{x_k}\zeta^2\right)\right]dx\,dt=0. \tag{3.12}$$

Нетрудно понять, что переход от (3.11) к (3.12) законен, несмотря на то, что при промежуточных преобразованиях были использованы производные $u_{tx}$ и $D_x^3u$ (см. стр. 247).

Оставим в левой части заведомо неотрицательные члены, а остальные перенесем направо и оценим сверху, используя неравенство (1.2) главы II и (3.1) — (3.6):

$$\frac{1}{2s+2}\int\limits_{K_{2\rho}} |u_x(x,t)|^{2s+2}\zeta^2(x,t)\,dx +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{K_{2\rho}}\left[\frac{\partial a_l}{\partial u_{x_j}}|u_x|^{2s}u_{x_kx_l}u_{x_kx_j}\zeta^2+\right.$$
$$\left.+\,2s\frac{\partial a_l}{\partial u_{x_j}}|u_x|^{2s-2}u_{x_k}u_{x_kx_j}u_{x_l}u_{x_lx_l}\zeta^2\right]dx\,dt=$$
$$=\int\limits_0^t\int\limits_{K_{2\rho}}\left[\frac{\partial a_l}{\partial u_{x_j}}u_{x_kx_j}|u_x|^{2s}u_{x_k}2\zeta\zeta_{x_l}+\right.$$
$$+\left(\frac{\partial a_l}{\partial u}u_{x_k}+\frac{\partial a_l}{\partial x_k}-a\delta_k^l\right)\frac{d}{dx_l}\left(|u_x|^{2s}u_{x_k}\zeta^2\right)+$$
$$\left.+\frac{1}{s+1}|u_x|^{2s+2}\zeta\zeta_t\right]dx\,dt\leqslant\int\limits_0^t\int\limits_{K_{2\rho}}\left[\varepsilon|u_x|^{2s}u_{xx}^2\zeta^2+\frac{\mu^2}{\varepsilon}|u_x|^{2s+2}\zeta_x^2+\right.$$
$$+(\mu u_x^2+\varphi_1|u_x|+\mu u_x^2+\varphi_2+\mu u_x^2+\varphi_3)\sum_{l,k=1}^n\frac{d}{dx_l}\left(|u_x|^{2s}u_{x_k}\zeta^2\right)+$$
$$\left.+\frac{1}{s+1}|u_x|^{2s+2}\zeta|\zeta_t|\right]dx\,dt. \qquad (3.13)$$

Отсюда следует

$$j\equiv\frac{1}{2s+2}\int\limits_{K_{2\rho}}|u_x(x,t)|^{2s+2}\zeta^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^t\int\limits_{K_{2\rho}}\left[\frac{\nu}{2}|u_x|^{2s}u_{xx}^2\zeta^2+\right.$$
$$\left.+\,\nu s|u_x|^{2s-2}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n u_{x_k}u_{x_kx_i}\right)^2\zeta^2\right]dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^t\int\limits_{K_{2\rho}}\left[\varepsilon u_{xx}^2|u_x|^{2s}\zeta^2+\frac{\mu^2}{\varepsilon}|u_x|^{2s+2}\zeta_x^2+\varepsilon u_{xx}^2|u_x|^{2s}\zeta^2+\right.$$

$$+\frac{9n^2}{4\varepsilon}\mu^2|u_x|^{2s+4}\zeta^2+\varepsilon_1 s\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}u_{x_k}u_{x_kx_i}\right)^2|u_x|^{2s-2}\zeta^2+$$
$$+\frac{9sn^2}{\varepsilon_1}\mu^2|u_x|^{2s+4}\zeta^2+3n^2\mu|u_x|^{2s+4}\zeta^2+3n^2\mu|u_x|^{2s+2}\zeta_x^2+$$
$$+|u_x|^{2s+2}\zeta|\zeta_t|+(\varphi_1|u_x|+\varphi_2+\varphi_3)\sum_{i,k=1}^{n}\left|(|u_x|^{2s}u_{x_k}\zeta^2)_{x_i}\right|\Bigg]dx\,dt.$$

Выберем $\varepsilon=\frac{\nu}{8}$, а $\varepsilon_1=\frac{\nu}{2}$, перенесем члены, содержащие вторые производные $u$ по $x$, налево и приведем подобные члены. Это даст

$$J\leqslant c\left(n,\frac{1}{\nu},\mu\right)\int_0^t\int_{K_{2\rho}}\Big[(s+1)|u_x|^{2s+4}\zeta^2+$$
$$+|u_x|^{2s+2}(\zeta_x^2+|\zeta_t|)+(\varphi_1|u_x|+\varphi_2+\varphi_3)\times$$
$$\times\sum_{i,k=1}^{n}(|u_x|^{2s}u_{x_k}\zeta^2)_{x_i}\Big]dx\,dt. \tag{3.14}$$

Для оценки первого члена правой части воспользуемся неравенством

$$\int_{K_{2\rho}}|u_x|^{2s+4}\zeta^2\,dx\leqslant$$
$$\leqslant c_1\rho^{\alpha_1}\int_{K_{2\rho}}\left[(s+1)^2|u_x|^{2s}u_{xx}^2\zeta^2+|u_x|^{2s+2}\zeta_x^2\right]dx, \tag{3.15}$$

которое в силу (3.10) следует из неравенства (5.8) главы II. Постоянная $c_1$ в нем зависит только от $n$ и $c$ из (3.10). Возьмем такое $\rho_0$, чтобы

$$c_1c\left(n,\frac{1}{\nu},\mu\right)(s_0+1)^3\rho_0^{\alpha_1}=\frac{\nu}{4}. \tag{3.16}$$

Тогда для $\rho \leqslant \rho_0$ и $s = s_0$ из (3.14) и (3.15) следует

$$\frac{1}{2s+2} \int_{K_{2\rho}} |u_x|^{2s+2} \zeta^2 \, dx + \int_0^t \int_{K_{2\rho}} \left[ \frac{\nu}{4} |u_x|^{2s} u_{xx}^2 \zeta^2 + \right.$$
$$\left. + \nu s |u_x|^{2s-2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n u_{x_k} u_{x_k x_l} \right)^2 \zeta^2 \right] dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant c\left(n, \frac{1}{\nu}, \mu\right) \int_0^t \int_{K_\rho} \{ [c_1 \rho_0^{\alpha_1} (s+1) + 1] |u_x|^{2s+2} \zeta_x^2 +$$
$$+ |u_x|^{2s+2} \zeta_t + (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)(1 + |u_x|) \times$$
$$\times \sum_{l,k} \left| \left( |u_x|^{2s} u_{x_k} \zeta^2 \right)_{x_l} \right| \} dx\, dt. \qquad (3.17)$$

Неравенства (3.17) имеют тот же характер, что и неравенства (11.7) из главы III. Отличия в постоянных и областях интегрирования несущественны. Роль функции $\mathscr{D}$ играет сумма $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, которая, как видно из сравнения условий (3.2) — (3.6) с условиями (11.1) главы III, имеет конечной ту же самую норму $\| \mathscr{D} \|_{2q, 2r, Q_T}$.

Из (3.17) и (3.15) при $s = 0$ и неравенства (3.9) так же, как в гл. III, получаем оценку

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \| u_x \zeta \|_{2, K_{2\rho}}^2 + \int_0^T \int_{K_{2\rho}} [u_{xx}^2 + |u_x|^4] \zeta^2 \, dx\, dt \leqslant c,$$

а из нее и самого уравнения (1.1) оценку

$$\int_0^T \int_{K_{2\rho}} u_t^2 \zeta^2 \, dx\, dt \leqslant c,$$

где $c$ — постоянные, определяемые лишь известными нам величинами.

Кроме того, из неравенств (11.7) были выведены оценки интегралов

$$\max_{\varepsilon \leqslant t \leqslant T} \int_{K_\rho} |u_x(x, t)|^{2s+2} dx + \int_\varepsilon^T \int_{K_\rho} |u_x|^{2s+4} dx\, dt \leqslant c_{s_0}, \qquad (3.18)$$
$$\varepsilon > 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant s_0, \quad \rho \leqslant \rho_0.$$

с постоянными $c_{s_0}$, зависящими лишь от $n$, $M$, $s_0$, параметров из условий (3.1) — (3.6) и $\varepsilon > 0$. Следовательно, и в данном случае справедливы оценки (3.18), лишь бы $\rho_0$ и $s_0$ подчинялись условию (3.16). Для случая, когда $u(x, 0)$ суммируется по $K_{2\rho}$ со степенью $2s_0 + 2$, функцию $\zeta$ можно взять не зависящей от $t$ и получить тем самым оценки (3.18) и при $\varepsilon = 0$.

Переходим теперь к оценке $\max_{Q'}|u_x|$ и $\langle u_x\rangle_{Q'}^{(\alpha)}$. Каждую из производных $u_{x_k}$ можно рассмотреть как обобщенное решение некоторого линейного уравнения, коэффициенты которого удовлетворяют всем условиям, благодаря которым в § 10 главы III была оценена норма Гёльдера любого обобщенного решения такого линейного уравнения через его норму в $L_2(Q_T)$. Для этого тождество

$$-\int_0^T \int_{K_\rho} \mathcal{L} u \eta_{x_k}\, dx\, dt = 0 \tag{3.19}$$

преобразуем с помощью интегрирования по частям следующим образом:

$$\int_{K_\rho} u_{x_k}(x, t)\eta(x, t)\, dx + \\
+ \int_0^t \int_{K_\rho} \left[ -u_{x_k}\eta_t + \left( \frac{\partial a_i(x, t, u, u_x)}{\partial u_{x_j}} u_{x_k x_j} + \right.\right. \\
\left.\left. + \frac{\partial a_i}{\partial u} u_{x_k} + \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) \eta_{x_i} - a\eta_{x_k} \right] dx\, dt = 0; \tag{3.20}$$

при этом $\eta(x, t)$ считаем равной нулю на нижнем основании и боковой поверхности цилиндра $Q_1 = K_\rho \times (0, t_1)$. Переход от (3.19) к (3.20) законен, хотя промежуточные выкладки содержали производные $u_{x_k t}$ и $D_x^3 u$ (см. пояснения по близкому поводу на стр. 247). В силу (3.20) функцию $u_k = u_{x_k}$ можно рассмотреть как обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_1)$ линейного уравнения

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t) u_{k x_j} + f_i^k(x, t)\right) = 0, \tag{3.21}$$

в котором

$$a_{ij}(x,\ t) = \frac{\partial a_i(x,\ t,\ u(x,\ t),\ u_x(x,\ t))}{\partial u_{x_j}},$$

а

$$f_i^k(x,\ t) = \frac{\partial a_i(x,\ t,\ u(x,\ t),\ u_x(x,\ t))}{\partial u} u_{x_k}(x,\ t) + \\ + \frac{\partial a_i(x,\ t,\ u(x,\ t),\ u_x(x,\ t))}{\partial x_k} - \delta_k^i a(x,\ t,\ u(x,\ t),\ u_x(x,\ t)).$$

Функции $a_{ij}(x,\ t)$ и $f_i(x,\ t)$, образующие это уравнение, в силу наших предположений об исследуемом решении $u(x,\ t)$ и функциях $a_i(x,\ t,\ u,\ p)$ и $a(x,\ t,\ u,\ p)$ обладают нижеследующими свойствами:

$$\nu(M)\xi^2 \leqslant a_{ij}(x,\ t)\xi_i\xi_j \leqslant \mu(M)\xi^2$$

и

$$|f_i^k(x,\ t)| \leqslant (\mu|u_x(x,\ t)| + \varphi_1(x,\ t))|u_x(x,\ t)| + \\ + \mu u_x^2(x,\ t) + \varphi_2(x,\ t) + \mu u_x^2(x,\ t) + \varphi_3(x,\ t) \leqslant \\ \leqslant 3\mu u_x^2(x,\ t) + \varphi_2 + \varphi_3 + \frac{1}{1+\delta}\varphi_1^{1+\delta} + \frac{\delta}{1+\delta}|u_x|^{\frac{1+\delta}{\delta}},$$

где $\delta$ — произвольное положительное число. Возьмем $\delta$ столь малым, чтобы числа $q_1 = \frac{q}{1+\delta}$ и $r_1 = \frac{r}{1+\delta}$ удовлетворяли условию типа (3.6). Именно:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{n}{2q_1} = \frac{1+\delta}{r} + \frac{(1+\delta)n}{q} = (1-\varkappa_1)(1+\delta) < 1. \quad (3.22)$$

При таком $\delta$ функция $\varphi_2 + \varphi_3 + \frac{1}{1+\delta}\varphi_1^{1+\delta_1}$ будет иметь конечную норму в $L_{q_1, r_1}$. Чтобы $3\mu u_x^2 + \frac{\delta}{1+\delta}|u_x|^{\frac{1+\delta}{\delta}}$ принадлежало $L_{q_1, r_1}$, достаточно вследствие (3.18) взять $s_0 = [mq_1]$, где $m = \max\left\{1,\ \frac{1+\delta}{2\delta}\right\}$, и тогда $f_i^k$ будет принадлежать $L_{q_1, r_1}(Q(\rho_0,\ \tau))$ в произвольном цилиндре $Q(\rho_0,\ \tau) \subset Q_T$, отстоящем от $\Gamma_T$ (или от $S_T$, если $u(x,\ 0) \in L_{2s_0+2}(\Omega)$) на положительное расстояние, с $\rho_0$, определяемым условием (3.16).

Ввиду этого к $u_k = u_{x_k}$ как к решению линейного уравнения (3.21) применимы теоремы 8.1 и 10.1 главы III. Они и рассмотрения, аналогичные проведенным в § 6 гл. III, гарантируют справедливость следующего предложения:

Теорема 3.1. *Пусть* $u(x,t)$ *есть решение уравнения* (0.1) *из* $O^{2,1}(Q_T)$ с $\max\limits_{Q_T}|u|=M$. *Если функции* $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$, *входящие в уравнение* (0.1), *удовлетворяют условиям* (3.1)—(3.6), *то для любой области* $Q'\subset Q_T$, *отстоящей от* $\Gamma_T$ *на положительное расстояние* $d$, *величина* $|u_x|_{Q'}^{(\alpha)}$ *с некоторым* $\alpha>0$ *и нормы* $\|u_{xx}, u_t\|_{2, Q'}$ *оцениваются сверху постоянной, зависящей лишь от* $n$, $M$, *параметров* $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$ *и* $r$ *из условий* (3.1)—(3.6) *и расстояния* $d$. *Число* $\alpha>0$ *определяется* $n$, $\nu$, $\mu$, $q$ *и* $r$. *Если к тому же известно, что* $\max\limits_{x\in\Omega}|u_x(x, 0)|<\infty$ (*или* $|u_x(x, 0)|_{\Omega}^{(\beta)}<\infty$), *то* $\max\limits_{Q'}|u_x|$ (*соответственно* $|u_x|_{Q'}^{(\alpha)}$) *и* $\|u_{xx}, u_t\|_{2Q'}$ *для любой области* $Q'\subset Q_T$, *отстоящей от* $S_T$ *на положительное расстояние* $d$, *конечен и оценивается сверху постоянной, определяемой лишь* $n$, $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$, $r$, $d$ *и* $\max\limits_{x\in\Omega}|u_x(x, 0)|$ (*соответственно* $|u_x(x, 0)|_{\Omega}^{(\beta)}$ *и* $\beta$).

## § 4. Оценка $\max|u_x|$ во всей области

Займемся теперь оценкой $\max|u_x|$ вблизи $S_T$. Пусть функции $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ удовлетворяют условиям (3.1)—(3.6), а решение $u(x, t)$ уравнения (0.1) есть элемент $O^{2,1}(\overline{Q}_T)$. Предположим сначала, что $u|_{S_T}=0$, а $S_T$ удовлетворяет условию (А). Из равенства

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \mathscr{L}u\,(e^{\lambda u}-1)\,dx\,dt=0,\quad t\leqslant T,$$

где $\lambda$ — достаточно большое число, получаем оценку

$$\int\limits_{Q_T} u_x^2\,dx\,dt\leqslant c, \tag{4.1}$$

где $c$ — постоянная, зависящая лишь от $n$, $M=\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|u|$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$ из условий (3.1)—(3.6), $T$, $\operatorname{mes}\Omega$ ($c$ есть возрастающая функция этих аргументов). Выводится оно буквально так же, как неравенство (3.9) из (3.7). Получим теперь оценки интегралов $\int |u_x|^{2s+2} dx$ при любом $s$ для областей, примыкающих к $S$. Это делается в основном так же, как в § 11 главы III и в § 3 данной главы.

Предположим, что

$$\max |u_x| \big|_{S_T} = M_2. \tag{4.2}$$

Рассмотрим функцию

$$b(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |u_x(x, t)|^2 \leqslant M_2^2 \equiv \hat{M}, \\ |u_x|^2 - \hat{M} & \text{при } \hat{M} \leqslant |u_x|^2 \leqslant \hat{M} + 1, \\ 1 & \text{при } |u_x|^2 \geqslant \hat{M} + 1, \end{cases}$$

равную нулю на $S_T$.

Образуем с ее помощью следующее интегральное тождество:

$$-\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} \sum_{k=1}^n \mathscr{L}u \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_{x_k} b\zeta^2\right) dx\, dt = 0, \tag{4.3}$$

где $\Omega_{2\rho} = K_{2\rho} \cap \Omega$, $K_{2\rho}$ — произвольный шар с центром на $S$ и $\rho$, не превосходящим некоторого числа $\rho_0$, а $\zeta(x)$ — срезающая для $K_{2\rho}$ функция.

Обозначим $u_x^2$ через $v$. Слагаемое, содержащее $u_t$, преобразуем так:

$$\frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} v_t b\zeta^2\, dx\, dt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\rho}} vb\zeta^2\, dx \Big|_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} v(b\zeta^2)_t\, dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\rho}} vb\zeta^2\, dx \Big|_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} (b + \hat{M})\, b_t\zeta^2\, dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\rho}} vb\zeta^2\, dx \Big|_0^t - \frac{1}{4}\int_{\Omega_{2\rho}} (b + \hat{M})^2 \zeta^2\, dx \Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\rho}} \left(vb - \frac{b^2}{2} - \hat{M}b\right) \zeta^2\, dx \Big|_0^t.$$

Остальные слагаемые преобразуем с помощью двукратного интегрирования по частям. В результате из (4.3) получим

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\rho}}\left(vb-\frac{b^2}{2}-\hat{M}b\right)\zeta^2\,dx\Big|_0^t+\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}\Big[\Big(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{x_kx_j}+$$
$$+\frac{\partial a_i}{\partial u}u_{x_k}+\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\Big)\left(u_{x_kx_i}b\zeta^2+u_{x_k}b_{x_i}\zeta^2+2u_{x_k}b\zeta\zeta_{x_i}\right)+$$
$$+a\left(\Delta ub\zeta^2+u_{x_k}b_{x_k}\zeta^2+2u_{x_k}b\zeta\zeta_{x_k}\right)\Big]\,dx\,dt=0. \quad (4.4)$$

Переход (4.3) и (4.4) законен, несмотря на то, что в промежуточных выкладках были использованы производные $u_{xt}$ и $D_x^3u$. Оставим в левой части равенства (4.4) положительные интегралы

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\rho}}vb\zeta^2\,dx\Big|^t,\quad \int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{x_kx_j}u_{x_kx_i}b\zeta^2\,dx\,dt,$$

$$\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{x_kx_j}u_{x_k}b_{x_i}\zeta^2\,dx\,dt=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}b_{x_i}b_{x_j}\zeta^2\,dx\,dt$$

и произведем оценки остальных членов по модулю сверху, используя условия (3.1)—(3.4) и неравенство Коши. В результате этих оценок и оценки положительных слагаемых левой части снизу получим

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\rho}}vb\zeta^2dx\Big|^t+\nu\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}\left(u_{xx}^2b+\frac{1}{2}b_x^2\right)\zeta^2\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\rho}}vb\zeta^2\,dx\Big|^{t=0}+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\rho}}\left(\frac{b^2}{2}+\hat{M}b\right)\zeta^2\,dx\Big|_0^t+$$
$$+c\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}\sum_{i=1}^3\varphi_i^2\,dx\,dt+c\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}vb\zeta_x^2\,dx\,dt+$$
$$+c\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}\varphi_1^2u_x^2b^2\zeta^2\,dx\,dt+c\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}v^2b\zeta^2\,dx\,dt. \quad (4.5)$$

Легко видеть, что левая часть (4.5) оценивается снизу через $c'\,|w|^2_{\Omega_{2\rho}\times(0,\,t)} - c\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{2\rho}} vb\zeta_x^2\,dx\,dt$, где $w = |u_x|\,b\zeta$, $c'>0$.

В правой части (4.5) первые четыре интеграла ограничены известными нам величинами, так как $0\leqslant b(x,t)\leqslant 1$, а для интеграла $\int\limits_{Q_T} v\,dx\,dt$ уже имеется оценка (4.1). Последние же интегралы можно оценить следующим образом с помощью неравенства (3.6) гл. II с учетом условий (3.5), (3.6), а также граничного условия $u|_S = 0$ и гёльдеровости $u$ по $x$:

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{2\rho}} \varphi_1^2 w^2\,dx \leqslant c_1\rho^{\varepsilon}\,|w|^2_{\Omega_{2\rho}\times(0,\,t)},$$

$$\varepsilon = \frac{n(q-1)\varkappa_1}{q(2\varkappa_1+n)},$$

$$\int\limits_{\Omega_{2\rho}} |u_x|^4\,b\zeta^2\,dx = \int\limits_{\Omega_{2\rho}}\sum_{k=1}^n u_{x_k}^2 vb\zeta^2\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_{2\rho}} u\,[\Delta u b\zeta^2 + 2u_{x_k}u_{x_l}u_{x_lx_k}b\zeta^2 +$$

$$+ u_{x_k}vb_{x_k}\zeta^2 + 2u_{x_k}vb\zeta\zeta_{x_k}]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1\rho^{\alpha}\int\limits_{\Omega_{2\rho}}\left(u_{xx}^2 b\zeta^2 + \frac{1}{2}\,b_x^2\zeta^2\right)dx + c_1\rho^{\alpha}\int\limits_{\Omega_{2\rho}} v^2 b\zeta^2\,dx + c_1. \tag{4.6}$$

Выбирая

$$\rho^{\varepsilon} + \rho^{\alpha} \leqslant \frac{1}{4c_1(c+1)}\min\{1;\ \nu;\ c'\},$$

из (4.6) и (4.5) получим

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\Omega_{2\rho}} vb\zeta^2\,dx + \nu\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_{2\rho}} (u_{xx}^2 b + b_x^2)\zeta^2\,dx\,dt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_{2\rho}} v^2 b\zeta^2\,dx\,dt \leqslant \mathrm{const}.$$

Эти оценки вместе с аналогичными оценками для внутренних шаров $K_{2\rho}$, полученными в § 3, и уравнением (1.1) гарантируют неравенства

$$\left.\begin{aligned}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\Omega} u_x^2(x,\ t)\,dx+\int_{Q_T}|u_x|^4\,dx\,dt\leqslant c_2,\\ \int_0^T\int_{\Omega'}\left(u_{xx}^2+u_t^2\right)dx\,dt\leqslant c_2',\end{aligned}\right\}\tag{4.7}$$

в которых постоянная $c_2$ зависит от $c$ из (4.1), $M_2$, $\|u_x(x,\ 0)\|_{2,\ \Omega}$, $|u|_{Q_T}^{(\alpha)}$ и $\alpha$, а $c_2'$ также от расстояния $\Omega'$ до $S$.

Для получения оценок интегралов от более высоких степеней $u_x$ надо взять соотношения

$$-\int_0^t\int_{A_{2\rho,\ \hat{M}}(t)}\mathscr{L}u\,\frac{d}{dx_k}\left[(v-\hat{M})^s\,u_{x_k}\zeta^2\right]dx\,dt=0,\tag{4.8}$$

$$s=1,\ 2,\ \ldots,$$

где, как и выше, $v=u_x^2$, $\hat{M}=M_2^2$, $A_{2\rho,\ \hat{M}}(t)$ — множество точек $x\in\Omega_{2\rho}=K_{2\rho}\cap\Omega$, в которых $v(x,\ t)>\hat{M}$, а $K_{2\rho}$ — шар с центром на $S$, и провести с ними рассуждения, аналогичные выводу оценок (3.18) из (3.11). Это приведет к неравенствам

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\Omega_\rho}|u_x|^{2s+2}\,dx+\int_0^T\int_{\Omega_\rho}|u_x|^{2s+4}\,dx\,dt\leqslant c_s\tag{4.9}$$

для $1\leqslant s\leqslant s_0$ и $\rho\leqslant\rho_0$, где $s_0$ и $\rho_0$ связаны условием типа (3.16). Неравенства (4.7), (4.9) вместе с такими же оценками (3.18) для внутренних цилиндров позволяют заключить, что при любом $s>0$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\Omega}|u_x|^{2s+2}\,dx+\int_0^T\int_{\Omega}|u_x|^{2s+4}\,dx\,dt\leqslant c_s',\tag{4.10}$$

где $c_s'$ есть некоторая постоянная, зависящая лишь от $s$, $M_2$, $n$, постоянных $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$, $r$ из условий (3.1) — (3.6), $\operatorname{mes}\Omega$, $T$, $\|u_x(x,\ 0)\|_{2s+2,\ \Omega}$ и $|u|_{Q_T}^{(\alpha)}$. Норма же $|u|_{Q_T}^{(\alpha)}$ в силу теоремы 1.1 оценивается через $|u|^{(\beta)}_{\Gamma_T}$, $\beta$, $\max\limits_{Q_T}|u|$ и постоянные, входящие в условия (A) и (3.1)—(3.6). Далее, рассуждая так же, как в конце предыдущего параграфа, убедимся, что $u_k \equiv u_{x_k}$ есть решение линейного уравнения (3.21) с $a_{ij}$ и $f_i$, удовлетворяющими условиям теорем 8.1 и 10.1 главы III, и потому для $u_{x_k}$ верны их заключения. Итак, доказана теорема:

Теорема 4.1. *Пусть $u(x, t) \in O^{2,1}(\overline{Q}_T)$, удовлетворяет уравнению* (0.1) *и обращается в нуль на $S_T$, которая предполагается удовлетворяющей условию* (A). *Если функции $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ удовлетворяют условиям* (3.1)—(3.6), *то $\max\limits_{Q_T}|u_x|$ оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от параметров, входящих в условия* (3.1)—(3.6), *$n$, $\max\limits_{Q_T}|u|$, $\max\limits_{\Gamma_T}|u_x|$, $\operatorname{mes}\Omega$, $T$ и $a_0$ и $\theta_0$, входящих в условие* (A), *а $|u_x|^{(\alpha)}_{Q_T}$ оценивается сверху постоянной, зависящей от этих же параметров, $|u_x|^{(\beta)}_{\Gamma_T}$ и $\beta$. Число $\alpha$ определяется при этом $n$, $\mu$, $\nu$, $\mu_1$, $q$, $r$ и $\beta$.*

Эта теорема дает оценку $\max\limits_{Q_T}|u_x|$ и $|u_x|^{(\alpha)}_{Q_T}$ через величины $\max\limits_{\Gamma_T}|u_x|$ и $|u_x|^{(\beta)}_{\Gamma_T}$ соответственно, не известные из условий краевых задач. В главе VI (см. лемму 3.1) $\max\limits_{\Gamma_T}|u_x|$ будет оценен для решений первой краевой задачи только через известные величины, и это будет сделано сразу для решений общих квазилинейных уравнений без ссылок на какие-либо результаты данной главы. В следующем же параграфе будет дана оценка $|u_x|^{(\alpha)}_{Q_T}$ только через известные величины и $\max\limits_{Q_T}|u_x|$.

Теорема 4.1 легко обобщается на случай неоднородного граничного условия. Для этого надо вместо $u(x, t)$ ввести новую неизвестную функцию $v(x, t) = u(x, t) - \widehat{\psi}(x, t)$, где $\widehat{\psi}(x, t)$ — какая-либо функция из $O^{2,1}(\overline{Q}_T)$, равная $u$

на $S_T$, и заметить, что к ней применима теорема 4.1. Это приводит к следующему предложению.

Теорема 4.2. *Теорема 4.1 справедлива и для случая, когда $u$ на $S_T$ совпадает со значениями какой-нибудь функции $\widehat{\psi}(x, t)$ из $O^{2,1}(\overline{Q}_T)$. Оценки $\max\limits_{Q_T}|u_x|$ и $|u_x|^{(\alpha)}_{Q_T}$ будут зависеть при этом от нормы $\widehat{\psi}$ в $O^{2,1}(\overline{Q}_T)$, т. е. от* $\max\limits_{Q_T}|\psi, \psi_x, \psi_{xx}, \psi_t|$.

## § 5. Оценки $\langle u_x\rangle^{(\alpha)}_{Q'}$ и старших производных в произвольной подобласти области $Q_T$

В этом параграфе мы дадим оценки величин $\langle u_x\rangle^{(\alpha)}_{Q'}$ и $|u_t, u_{xx}|^{(\alpha)}_{Q'}$ для решений $u(x, t)$ в произвольной (не обязательно строго внутренней) подобласти $Q'$ области $Q_T$. Для этого сначала докажем теорему, гарантирующую оценку $\max\limits_{Q'}|u_t|$.

Теорема 5.1. *Пусть решение $u(x, t)$ уравнения* (0.1) *принадлежит $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ и имеет $\max\limits_{Q_T}|u| = M$, $\max\limits_{Q_T}|u_x| = M_1$, и пусть при $(x, t)\in\overline{Q}_T$, $|u|\leqslant M$, $|p|\leqslant M_1$ функции $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ удовлетворяют условию Липшица по $t$, дифференцируемы по $u$ и $p$ и подчиняются неравенствам*

$$\nu\xi^2 \leqslant \frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \tag{5.1}$$

$$\left|\frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial u}, \frac{a_i(x, t+h, u, p) - a_i(x, t, u, p)}{h},\right.$$
$$\left.\frac{\partial a}{\partial p}, \frac{\partial a}{\partial u}, \frac{a(x, t+h, u, p) - a(x, t, u, p)}{h}\right| \leqslant \varphi(x, t), \tag{5.2}$$

*где $\|\varphi\|_{q, r, Q_T} \leqslant \mu_1$, а числа $q$ и $r$ удовлетворяют условию* (3.6).

*Тогда $\max\limits_{Q_T}|u_t|$ оценивается сверху постоянной, зависящей только от $n$, $\nu$, $\mu_1$, $q$ и $r$ и $\max\limits_{\Gamma_T}|u_t|$.*

*Если $\Gamma'$ — произвольный участок поверхности $\Gamma$, то для любой части $Q'$ цилиндра $Q_T$, не пересекающейся с $\Gamma_T \setminus \Gamma'$, $\max\limits_{Q'}|u_t|$ оценивается через $n$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$, $r$, $\max\limits_{\Gamma'}|u_t|$ и расстояние от $Q'$ до $\Gamma_T \setminus \Gamma'$.*

Для доказательства рассмотрим в цилиндре $Q_{T-h}$ функцию

$$v^h(x, t) = \frac{1}{\Delta t}[u(x, t+\Delta t) - u(x, t)], \quad \Delta t = h > 0,$$

и покажем, что она является обобщенным решением некоторого линейного уравнения. Возьмем от обеих частей уравнения (0.1) разностное отношение по $t$:

$$\frac{\Delta \mathscr{L} u}{\Delta t} \equiv \frac{\partial v^h}{\partial t} - \frac{d}{dx_i}\frac{\Delta a_i}{\Delta t} + \frac{\Delta a}{\Delta t} = 0$$

и представим $\frac{\Delta a_i}{\Delta t}$, $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta a_i}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\{a_i[x, t+\Delta t, u(x, t+\Delta t), u_x(x, t+\Delta t)] - \\
- a_i[x, t, u(x, t), u_x(x, t)]\} = \\
= \frac{1}{\Delta t}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} a_i[x, t+\Delta t, \tau u(x, t+\Delta t) + (1-\tau)u(x, t), \\
\tau u_x(x, t+\Delta t) + (1-\tau)u_x(x, t)]\,d\tau + \\
+ \frac{1}{\Delta t}\{a_i[x, t+\Delta t, u(x, t), u_x(x, t)] - \\
- a_i[x, t, u(x, t), u_x(x, t)]\} = \\
= v^h_{x_j}\int_0^1 \frac{\partial a_i[\ldots]}{\partial u_{x_j}}\,d\tau + v^h\int_0^1 \frac{\partial a_i[\ldots]}{\partial u}\,d\tau + \frac{1}{h}\{\ldots\} \equiv \\
\equiv a_{ij}v^h_{x_j} + b_i v^h + b,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

и аналогично

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = c_i v^h_{x_i} + cv^h + d.$$

Это даст для $v^h$ соотношение

$$\frac{\partial v^h}{\partial t} - \frac{d}{dx_i}[a_{ij}v^h_{x_j} + b_i v^h + b] + c_i v^h_{x_i} + cv^h + d = 0, \tag{5.4}$$

которое может быть рассмотрено как линейное параболическое уравнение для $v^h$ с коэффициентами и свободными членами, удовлетворяющими условиям теорем 7.1 и 10.1 главы III.

В силу теоремы 7.1

$$\max_{Q_{T-h}} |v^h| \leqslant 2c \max \{\max_{\Gamma_{T-h}} |v^h|;\ 1\}, \tag{5.5}$$

где $c$ определяется $n$, $\nu$, $\mu_1$, $q$ и $r$ и не зависит от $h$, и потому для $\lim\limits_{h\to 0} v^h = u_t$ справедлива аналогичная оценка. Первая часть теоремы 5.1 доказана.

Для доказательства второго ее утверждения — о локальных оценках $\max\limits_{Q'} |u_t|$ — воспользуемся теоремой 8.1 главы III. Из нее следует справедливость неравенства

$$\max_{Q'} |v^h| \leqslant c'$$

для любой части $Q'$ области $\overline{Q}_T$. Если $Q'$ — внутренняя подобласть $Q_T$, то величина $c'$ определяется теми же постоянными, что и $c$ в (5.5), и расстоянием $Q'$ до $\Gamma_{T-h}$, а для цилиндров, примыкающих к участку $\Gamma'$ поверхности $\Gamma_T$, величина $c'$ зависит лишь от $n$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$, $r$, $\max\limits_{\Gamma'} |v^h|$ и от расстояния $Q'$ до $\Gamma_T \setminus \Gamma'$. Ясно, что аналогичные оценки будут верны и для $u_t$.

Замечание 5.1. На основании теоремы 10.1 главы III для $v^h$, а потому и для $u_t$, можно оценить $|v^h|_{Q'}^{(\alpha)}$ через те же величины, что и $\max\limits_{Q'} |v^h|$, и расстояние от $Q'$ до $\Gamma_T$, если последнее положительно. Если $S$ удовлетворяет условию (A) и $|u_t|_{\Gamma_T}^{(\beta)} < \infty$, то можно оценить и $|u_t|_{Q_T}^{(\alpha)}$.

Замечание 5.2. Нетрудно видеть, что утверждение теоремы 5.1 остается в силе и для решений $u(x, t)$ из $C^{2,1}(\overline{Q}_T \setminus S_0) \cap C(\overline{Q}_T)$ с $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Gamma_T} |u_t| < \infty$, где $S_0 = \{x \in S,\ t = 0\}$, надо только $\max\limits_{\Gamma_T} |u_t|$ понимать как

$$\lim_{\Delta t \to +0} \sup_{(x,t)\in\Gamma_{T-h}} \left| \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \right|.$$

Перейдем теперь к оценке $\langle u_x\rangle^{(\alpha)}_{Q_T}$, считая $S$ принадлежащей $O^2$, а функции $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$, помимо условий (5.1), (5.2), удовлетворяющими при $|u|\leqslant M$, $|p|\leqslant M_1$ условиям

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial u}, \frac{\partial a_i}{\partial x_j}, a\right\|_{q_2, \Omega}\leqslant\mu_2, \quad q_2>n. \tag{5.6}$$

Для этого рассмотрим (0.1) при фиксированном $t$ как эллиптическое уравнение

$$-\frac{d}{dx_i}(a_i(x, t, u, u_x))+f(x, t)=0 \tag{5.7}$$

со свободным членом

$$f(x, t)=u_t(x, t)+a(x, t, u(x, t), u_x(x, t)).$$

Из условий (5.6) и оценок $\max\limits_{Q'}|u_t|$, установленных в теореме 5.1, следует ограниченность норм

$$\|f(x, t)\|_{q_2, \Omega'}\leqslant\mu_3(\Omega'), \quad q_2>n. \tag{5.8}$$

Для таких уравнений справедливо утверждение:

Теорема 5.2. *Пусть $u(x)$ принадлежит $W^2_2(\Omega)$, имеет* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u_x|\leqslant M_1$ *и удовлетворяет почти всюду в $\Omega$ уравнению (5.7) (в котором $t$ фиксировано: $t=t_0$). Если выполнены условия*

$$\nu\xi^2\leqslant\frac{\partial a_i(x, t_0, u(x), u_x(x))}{\partial u_{x_j}}\xi_i\xi_j\leqslant\mu\xi^2, \quad \nu>0,$$

$$\left\|\frac{\partial a_i(x, t_0, u(x), u_x(x))}{\partial u}, \frac{\partial a_i}{\partial x_j}, f\right\|_{q_2, \Omega}\leqslant\mu_2, \quad q_2>n,$$

*то величина $\langle u_x(x)\rangle^{(\alpha)}_{\Omega'}$ для любой подобласти $\Omega'\subset\Omega$, отстоящей от $S\setminus S'$ на положительное расстояние $d$, оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от $n$, $\nu$, $\mu$, $\mu_2$, $q_2$ $M_1$, $\|u\|^{\left(2-\frac{1}{q_3}\right)}_{q_3, S'}$, $q_3>n$, $S'$ и расстояния $d$. Постоянная $\alpha>0$ определяется этими же величинами, кроме $d$. Кусок границы $S'$ (он может быть и пустым множеством) должен быть поверхностью класса $O^2$ (или хотя бы $W^2_{q_3}$, $q_3>n$).*

Эта теорема доказана в § 6 главы IV книги [1] (см. теорему 6.1 и замечание к ней), только там зависимость от граничных значений $u$ выражена в терминах норм $\|\psi\|^{(2)}_{q_3,\Omega}$, где $\psi(x)$ — какая-нибудь функция, совпадающая с $u$ на $S$. Но это отличие несущественно, ибо в силу теоремы 2.3 главы II нормы $\|\hat{\psi}\|^{\left(2-\frac{1}{q_3}\right)}_{q_3,S}$ и $\inf\|\psi\|^{(2)}_{q_3,\Omega}$, где инфимум взят по всем функциям $\psi$ из $W^{(2)}_{q_3}(\Omega)$, равным $\hat{\psi}$ на $S$, эквивалентны.

На основании теоремы 5.2 и высказанных выше предположений для исследуемого решения $u(x, t)$ получаем оценку $\langle u_x(x, t)\rangle^{(\alpha)}_{x,\Omega'}$ для произвольных областей $\Omega'\subset\Omega$ через известные нам величины.

Пусть $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\langle u_x(x, t)\rangle^{(\alpha)}_{x,\Omega}\leqslant c$. В силу леммы 3.1 главы II из этого неравенства и неравенства $\max\limits_{Q_T}|u_t|\leqslant c_1$ следует неравенство $\langle u_x\rangle^{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)}_{t,Q_T}\leqslant c_2$ с $c_2$, зависящей лишь от $c$, $c_1$, $\alpha$ и границы $S$. Аналогично, используя локальные оценки $\max\limits_{Q'}|u_t|$ и $\langle u_x\rangle^{(\alpha)}_{x,\Omega'}$, получим оценки $\langle u_x\rangle^{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)}_{t,Q'}$ для любого $Q'\subset Q_T$. Таким образом, доказано следующее предложение:

Теорема 5.3. *Пусть функции* $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ *удовлетворяют условиям* (5.1), (5.2), (5.6), *а* $S\in O^2$. *Тогда для любого решения* $u\in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ *уравнения* (0.1) *с* $\max\limits_{Q_T}|u|=M$, $\max\limits_{Q_T}|u_x|=M_1$ *норма* $|u_x|^{(\alpha)}_{Q_T}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $n$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$, $r$, $\mu_2$, $q_2$, $M$, $M_1$, $\max\limits_{\Gamma_T}|u_t|$, $S$, $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(x, t)\|^{\left(2-\frac{1}{q_3}\right)}_{q_3,S}$ *и* $q_3$, *причем* $q_3>n$. *Для любой части* $Q'$ *цилиндра* $Q_T$, *пересекающейся с участком* $\Gamma'$ *поверхности* $\Gamma_T$ *и отстоящей от* $\Gamma_T\setminus\Gamma'$ *на положительное расстояние* $d$, *норма* $|u_x|^{(\alpha)}_{Q'}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей только от* $n$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$, $r$, $\mu_2$, $q_2$, $M$, $M_1$, $d$, $\Gamma'$, $\max\limits_{\Gamma'}|u_t|$

*и величин* $\max\limits_{t_1\leqslant t\leqslant t_2}\|u(x, t)\|_{q_3, S'}^{\left(2-\frac{1}{q_3}\right)}$ *и* $q_3>n$, *если* $\Gamma'=S'\times[t_1, t_2]$ *и* $t_1>0$, *и величин* $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant t_2}\|u(x, t)\|_{q_3, S'}^{\left(2-\frac{1}{q_3}\right)}$, $\|u(x, 0)\|_{q_3, \Omega'}^{(2)}$ *и* $q_3>n$, *если* $\Gamma'$ *есть объединение поверхности* $S'\times[0, t_2]$ *и части* $\{(x, 0)\colon x\in\Omega'\}$ *нижнего основания* $Q_T$. *Показатель* $\alpha$ *в обоих случаях определяется теми же, что и норма* $|u_x|^{(\alpha)}$, *величинами, кроме* $d$.

Замечание 5.3. Утверждение теоремы 5.3 остается в силе и для решений, описанных в замечании 5.2.

После того как оценены нормы $|u_x|_{Q_T}^{(\alpha)}$ и $|u_x|_{Q'}^{(\alpha)}$, уравнение (0.1) можно рассматривать как линейное уравнение с гладкими коэффициентами (если, конечно, $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ суть гладкие функции своих аргументов) и использовать для оценок и прочих качественных исследований его решений соответствующие теоремы главы IV о линейных уравнениях.

Сформулируем предложение, вытекающее из теоремы 5.2 главы IV и теоремы 5.3 этого параграфа.

Теорема 5.4. *Пусть на множестве* $\mathfrak{M}=\{(x, t, u, p)\colon (x, t)\in\overline{Q}_T,\ |u|\leqslant M,\ |p|\leqslant M_1\}$ *функции* $a_i(x, t, u, p)$ *и* $a(x, t, u, p)$ *удовлетворяют условиям* (5.1), (5.2), *а функции* $a_i$, $\frac{\partial a_i}{\partial p_j}$, $\frac{\partial a_i}{\partial u}$, $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ *и* $a$ *непрерывны* по Гёльдеру по аргументам $x, t, u, p$, *с показателями* $\beta$, $\frac{\beta}{2}$, $\beta$ *и* $\beta$ *соответственно. Если* $S$ *принадлежит классу* $H^{2+\beta}$, *то для любого решения* $u$ *из* $H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ *уравнения* (0.1), *имеющего* $\max\limits_{Q_T}|u|\leqslant M$, $\max\limits_{Q_T}|u_x|\leqslant M_1$, *норма* $|u|_{Q_T}^{(2+\beta)}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $M$, $M_1$, $\beta$, *величин* $\nu$, $\mu$, $q$, $r$, $\mu_1$ *из условий* (5.1), (5.2), *норм* $a_i$, $\frac{\partial a_i}{\partial p_j}$, $\frac{\partial a_i}{\partial u}$, $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ *и* $a$ *в* $H^{\beta, \frac{\beta}{2}, \beta, \beta}(\mathfrak{M})$, $S$ *и нормы* $|u|_{\Gamma_T}^{(2+\beta)}$.

*Пусть* $\Gamma_T'$ — *произвольный участок поверхности* $\Gamma_T$. *Для любой подобласти* $Q'$ *цилиндра* $\overline{Q}_T$, *отстоящей* *от* $\Gamma_T \setminus \Gamma'$ *на расстояние* $d > 0$, *норма* $|u|_{Q'}^{(2+\beta)}$ *оценивается сверху через* $d$ *и те же величины, что и норма* $|u|_{Q_T}^{(2+\beta)}$, *исключая величину* $|u|_{\Gamma_T}^{(2+\beta)}$, *которая заменяется нормой* $|u|_{\Gamma'}^{(2+\beta)}$.

Теорема 5.4 вместе с теоремами §§ 1—4 этой главы и теоремой 5.2 главы IV для линейных уравнений позволяет доказать разрешимость в целом первой краевой задачи для уравнений (0.1).

## § 6. Разрешимость первой краевой задачи

Рассмотрим в $Q_T$ первую краевую задачу для уравнения (0.1), т. е. задачу нахождения в $\overline{Q}_T$ функции $u(x, t)$, удовлетворяющей в $Q_T$ уравнению

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, u_x) + a(x, t, u, u_x) = 0, \tag{6.1}$$

а на $\Gamma_T$ совпадающей с некоторой известной функцией $\psi$:

$$u|_{\Gamma_T} = \psi|_{\Gamma_T}. \tag{6.2}$$

Равенство (6.2) содержит в себе начальное и граничное условия. Будем считать, что $\psi$ есть значение на $\Gamma_T$ функции $\psi(x, t)$, определенной в $\overline{Q}_T$ и обладающей некоторой гладкостью, которая будет уточнена ниже. Если $\psi(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$, то говорят, что выполнено условие согласования (начального и граничного условий) нулевого порядка. Если $\psi(x, t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ и на многообразии $S_0 \equiv \{x \in S,\ t = 0\}$

$$\psi_t - \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, \psi, \psi_x) + a(x, t, \psi, \psi_x) = 0, \tag{6.3}$$

то говорят, что выполнено условие согласования (начального и граничного условий и уравнения) первого порядка. Ясно, что для решения $u(x, t)$ задачи (6.1), (6.2), принадлежащего $C(\overline{Q}_T)$, должно быть выполнено условие согласования нулевого порядка, а для решения из $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющего (6.1) в $\overline{Q}_T$, — условие согласования и первого порядка.

Для доказательства разрешимости задачи (6.1), (6.2) можно использовать различные теоремы из теории абстрактных нелинейных уравнений, помня, что для нее имеет место теорема единственности классического решения. Мы применим принцип Лерэ — Шаудера (его формулировку см. в [34] или в § 8 главы IV [1]).

Запишем уравнение (6.1) в виде

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - \frac{\partial a_i(x, t, u, u_x)}{\partial u_{x_j}} u_{x_i x_j} + A(x, t, u, u_x) = 0, \tag{6.4}$$

где

$$A(x, t, u, u_x) = \\ = a(x, t, u, u_x) - \frac{\partial a_i(x, t, u, u_x)}{\partial u} u_{x_i} - \frac{\partial a_i(x, t, u, u_x)}{\partial x_i},$$

и рассмотрим семейство линейных задач

$$\left.\begin{aligned} &v_t - \left[\tau \frac{\partial a_i(x, t, w, w_x)}{\partial w_{x_j}} + (1-\tau)\delta_i^j\right] v_{x_i x_j} + \\ &\qquad + \tau A(x, t, w, w_x) - (1-\tau)[\psi_t - \Delta\psi] = 0, \\ &\qquad v|_{\Gamma_T} = \psi|_{\Gamma_T}, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

на определение функции $v$; функция $w(x, t)$ при этом считается заданной. Введем линейное банахово пространство $B_\delta$ функций $w(x, t)$, непрерывных вместе со своими производными по $x$ в $\bar{Q}_T$ и имеющих конечную норму

$$|w|_{B_\delta} \equiv |w|_{Q_T}^{(\delta)} + |w_x|_{Q_T}^{(\delta)}.$$

При некоторых ограничениях на функции $a_i$, $a$, $\psi$ и $S$ задача (6.5) определит в $B_\delta$ оператор $\Phi$, который каждой функции $w$ из $B_\delta$ сопоставляет решение $v$ линейной задачи (6.5):

$$v = \Phi(w; \tau). \tag{6.6}$$

Этот оператор нелинеен и зависит от $\tau$. Его неподвижные точки при $\tau = 1$ являются решениями задачи (6.1), (6.2). Для разыскания неподвижных точек $\Phi(w; \tau)$ применим принцип Лерэ — Шаудера.

Пусть $u^\tau$ — какая-нибудь из неподвижных точек преобразования $\Phi(w; \tau)$, т. е. пусть

$$u^\tau = \Phi(u^\tau; \tau).$$

Это означает, что $u^\tau$ есть решение нелинейной задачи

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}_\tau u \equiv \tau\mathscr{L}u + (1-\tau)(u_t - \Delta u - \psi_t + \Delta\psi) \equiv \\ \equiv u_t - \frac{d}{dx_i}\left[\tau a_i(x, t, u, u_x) + (1-\tau)u_{x_i}\right] + \\ + \tau a(x, t, u, u_x) - (1-\tau)[\psi_t - \Delta\psi] = 0, \\ u|_{\Gamma_T} = \psi|_{\Gamma_T}, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Операторы $\mathscr{L}_\tau$ обладают тем свойством, что если для оператора $\mathscr{L}$ справедливы условия той или иной теоремы из предыдущих параграфов, в которой получена оценка одной из рассматриваемых в книге норм, то эти же условия справедливы и для $\mathscr{L}_\tau$ при $\tau \in [0, 1]$. Действительно, пусть для $\mathscr{L}$ выполнены условия (2.29), (2.30) или (2.29), (2.32), (2.33) главы I. Тогда, как легко видеть, для $\mathscr{L}_\tau$ выполняются аналогичные условия, и для всех возможных классических решений $u^\tau$ задач (6.7) имеет место оценка (2.31) или (2.34) главы I, так что

$$\max_{Q_T} |u^\tau| \leqslant M, \qquad \tau \in [0, 1]. \tag{6.8}$$

Предположим далее, что при $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $|u| \leqslant M$ и произвольных $p$ функции $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left.\begin{aligned} \nu\xi^2 \leqslant \frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu > 0, \\ \sum_{i=1}^n \left(|a_i| + \left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|\right)(1 + |p|) + \sum_{i, j=1}^n \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right| + |a| \leqslant \\ \leqslant \mu(1 + |p|)^2. \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Очевидно, такого же типа условиям будут удовлетворять и коэффициенты операторов $\mathscr{L}_\tau$, причем постоянные $\nu_\tau$ и $\mu_\tau$ для них можно выбрать общими для всех $\tau$ из [0, 1]. Сохраним для этих постоянных обозначения $\nu$ и $\mu$. Из условий (6.9) следуют условия теорем 1.1 и 4.1 данной главы и условия леммы 3.1 главы VI, и потому для всех решений $u^\tau$ из $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задач (6.7) имеют место оценки

$$|u^\tau|_{Q_T}^{(\alpha)} \leqslant M'; \quad \max_{Q_T} |u_x^\tau| \leqslant M_1, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{6.10}$$

с постоянными $M'$ и $M_1$, общими для всех $u^\tau$ и зависящими лишь от $M$, постоянных $\nu$ и $\mu$ из условий (6.9), $|\psi|_{S_T}^{(2)}$, $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}|\psi_x(x, 0)|$ и границы $S$, которую предполагаем принадлежащей классу $O^2$.

Дальнейшие ограничения на $a_i(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ будем накладывать лишь при $(x, t)\in\overline{Q}_T$, $|u|\leqslant M$ и $|p|\leqslant M_1$. Так, для получения априорных оценок $\max\limits_{Q_T}|u_t^\tau|$ и $|u_x^\tau|_{Q_T}^{(\alpha)}$ к (6.9) надо добавить требования (5.2). Они будут выполняться для всех $\mathscr{L}_\tau$ с той же самой функцией $\varphi(x, t)$ и потому для всей совокупности решений $u^\tau$

$$\max_{Q_T}|u_t^\tau|, \quad |u_x^\tau|_{Q_T}^{(\alpha)}\leqslant M_2, \qquad 0\leqslant\tau\leqslant 1, \tag{6.11}$$

с одним и тем же $\alpha$ и одной и той же постоянной $M_2$, зависящей лишь от известных параметров из наших условий, $S\in O^2$ и $|\psi|_{\Gamma_T}^{(2)}$. Наконец, оценка

$$|u^\tau|_{Q_T}^{(2+\beta)}\leqslant M_3 \tag{6.12}$$

дается теоремой 5.2 главы IV о решениях линейных уравнений с гладкими коэффициентами, если дополнительно предположить, что функции $a_i(x, t, u, p)$, $\frac{\partial a_i}{\partial p_j}$, $\frac{\partial a_i}{\partial u}$, $\frac{\partial a_i}{\partial x_l}$, $a$ суть непрерывные функции $(x, t, u, p)$, удовлетворяющие по $x$, $t$, $u$, и $p$ условию Гёльдера с показателями $\beta$, $\frac{\beta}{2}$, $\beta$ и $\beta$, $S\in H^{2+\beta}$, $\psi\in H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ и $\psi$ удовлетворяет условию согласования (6.3). Так устанавливается равномерная ограниченность в норме $H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ всех возможных решений $u^\tau$ задач (6.7) или, что то же, всех неподвижных точек преобразования $\Phi(w, \tau)$. Равномерная же ограниченность норм $u^\tau$ (в том пространстве, в котором рассматривается преобразование $\Phi(w, \tau)$ является одним из условий применимости теоремы Лерэ — Шаудера, причем наиболее трудно проверяемым.

Сформулируем теперь первую теорему существования классического решения.

Теорема 6.1. *Предположим, что*:

a) *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$ *и произвольных и выполнены условия* (2.29), (2.30) *или* (2.29), (2.32), (2.33) *главы* I, *которые применительно к уравнению* (0.1) *имеют вид*: $\left.\frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j\right|_{p=0} \geqslant 0$ *и* $A(x, t, u, 0)\,u \geqslant -b_1u^2 - b_2$ *или*

$$A(x, t, u, 0)\,u \geqslant -\Phi(|u|)|u| - b_2, \quad \int_0^\infty \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} = \infty, \quad \Phi > 0;$$

b) *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $|u| \leqslant M$ ($M$ *взято из* (6.8)) *и произвольных* $p$ *функции* $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ *непрерывны*, $a_i(x, t, u, p)$ *дифференцируемы по* $x$, $u$ *и* $p$ *и выполняются неравенства* (6.9);

c) *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $|u| \leqslant M$ *и* $|p| \leqslant M_1$ ($M_1$ *взято из* (6.10)) *функции* $a_i$, $a$, $\frac{\partial a_i}{\partial p_j}$, $\frac{\partial a_i}{\partial u}$, $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ *суть непрерывные функции, удовлетворяющие по* $x$, $t$, $u$ *и* $p$ *условию Гёльдера с показателями* $\beta$, $\frac{\beta}{2}$, $\beta$ *и* $\beta$ *соответственно*;

d) *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $|u| \leqslant M$ *и* $|p| \leqslant M_1$ *функция* $a(x, t, u, p)$ *имеет частные производные* $\frac{\partial a}{\partial p_i}$, $\frac{\partial a}{\partial u}$ *и* $a_i$ *и* $a$ *удовлетворяют условию* (5.2);

e) $\psi(x, t) \in H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ *и удовлетворяет условию* (6.3);

f) $S \in H^{2+\beta}$.

*При этих условиях существует единственное решение задачи* (6.1), (6.2) *из класса* $H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$. *Более того, это решение имеет производные* $u_{xt}$ *из* $L_2(Q_T)$.

Доказательство. В качестве основного пространства, в котором будем рассматривать преобразование $\Phi$, определяемое равенством (6.6), возьмем пространство $B_\delta$ с достаточно малым $\delta$ ($\delta$ будет фиксировано ниже). Как показано выше, теоремы предыдущих параграфов гарантируют равномерную ограниченность

$$\max_{Q_T}|u^\tau| \leqslant M, \ \max_{Q_T}|u_x^\tau| \leqslant M_1, \ |u^\tau|_{B_\alpha} \equiv |u^\tau|_{Q_T}^{(\alpha)} + |u_x^\tau|_{Q_T}^{(\alpha)} \leqslant M_3 \tag{6.12'}$$

с некоторым $0<\alpha<1$ для всех решений $u^\tau$ из $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задач (6.7). Но каждое такое решение $u^\tau$ есть, очевидно, неподвижная точка преобразования $\Phi(w, \tau)$ и, наоборот, любая неподвижная точка $u^\tau \in B_\delta$ преобразования $\Phi(w, \tau)$ есть классическое решение задачи (6.7), точнее решение из $H^{2+\beta\delta,\, 1+\frac{\beta\delta}{2}}(\overline{Q}_T)$. Действительно, из принадлежности $u^\tau$ к $B_\delta$ и условия с) следует, что коэффициенты при $v_{x_ix_j}$ и свободный член в (6.5) при $w=u^\tau$ суть элементы $H^{\beta\delta,\, \frac{\beta\delta}{2}}(\overline{Q}_T)$ и потому в силу теоремы 5.2 главы IV решение $v=\Phi(u^\tau, \tau)$ задачи (6.5) будет принадлежать $H^{2+\beta\delta,\, 1+\frac{\beta\delta}{2}}(\overline{Q}_T)$.

Видоизменим, если надо, функции $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ вне области изменения аргументов $\{(x, t)\in\overline{Q}_T,\ |u|\leqslant M,\ |p|\leqslant M_1\}$ так, чтобы они удовлетворяли свойствам a) — d) теоремы 6.1 на множестве $\{(x, t)\in\overline{Q}_T,\ |u|\leqslant M+\varepsilon,\ M\leqslant M_1+\varepsilon\}$, где $\varepsilon$ — какое-либо положительное число. Возьмем $\delta=\alpha<1$ из (6.12′) и рассмотрим оператор $\Phi(w, \tau)$ на выпуклом ограниченном множестве $\mathfrak{M}$ пространства $B_\delta$, состоящем из всех элементов $w\in B_\delta$, удовлетворяющих неравенствам

$$\max_{Q_T}|w|\leqslant M+\varepsilon,\quad \max_{Q_T}|w_x|\leqslant M_1+\varepsilon,\quad |w|_{B_\delta}\leqslant M_3+\varepsilon. \tag{6.13}$$

В силу (6.12′) все неподвижные точки $u^\tau$ преобразования $\Phi(w, \tau)$ лежат строго внутри этого множества $\mathfrak{M}$.

Проверим, что $\Phi(w, \tau)$ на $\mathfrak{M}\times[0, 1]$ есть семейство равностепенно непрерывных по $w$ и $\tau$ и равномерно компактных операторов. Для всех $w$ с $|w|_{B_\delta}\leqslant M_3+\varepsilon$ и $\tau\in[0, 1]$ функции $v=\Phi(w, \tau)$ как решения задачи (6.5) в силу сказанного выше имеют равномерно ограниченные нормы

$$|v,\ v_x,\ v_t,\ v_{xx}|_{Q_T}^{(\alpha\beta)}\leqslant c. \tag{6.14}$$

В силу равномерной ограниченности $|v_{xx}|$ и $|v_t|$, как доказано в лемме 3.1 главы II, для функций $v$ равномерно ограничены нормы $|v_x|_{Q_T}^{(1)}$, а множество таких $v$ компактно в $B_\alpha$, ибо $\alpha<1$ и, следовательно, операторы $\Phi$, $0\leqslant\tau\leqslant1$ переводят все множества $\mathfrak{M}$ в компактное в $B_\alpha$ множество. Для проверки равномерной непрерывности $\Phi(w, \tau)$ на $\mathfrak{M}\times[0, 1]$ по $w$ возьмем два близких элемента $w'$ и $w''$ из $\mathfrak{M}$ и соответствующие им $v'=\Phi(w', \tau)$ и $v''=\Phi(w'', \tau)$. Вычтем из уравнения (6.5) для $v'$ уравнения (6.5) для $v''$ и результат рассмотрим как линейное уравнение для $v=v'-v''$ вида

$$v_t-\left[\tau\frac{\partial a_i(x, t, w', w'_x)}{\partial w_{x_j}}+(1-\tau)\delta_i^j\right]v_{x_ix_j}=$$
$$=\tau\left[\frac{\partial a_i(x, t, w', w'_x)}{\partial w_{x_j}}-\frac{\partial a_i(x, t, w'', w''_x)}{\partial w_{x_j}}\right]v''_{x_ix_j}-$$
$$-\tau\left[A(x, t, w', w'_x)-A(x, t, w'', w''_x)\right]=0. \quad (6.15)$$

Кроме этого,

$$v|_{\Gamma_T}=0. \quad (6.16)$$

Правую часть (6.15) рассмотрим как свободный член. Нетрудно подсчитать, что она при малой величине $|w'-w''|_{B_\alpha}$ мала равномерно по $\tau\in[0, 1]$ как функция $(x, t)$ в норме пространства $H^{\alpha\beta, \frac{\alpha\beta}{2}}(\bar{Q}_T)$. Но тогда по теореме 5.2 главы IV будут малы величины $|v, v_x, v_{xx}, v_t|_{Q_T}^{(\alpha\beta)}$, а потому и норма $|v|_{B_\alpha}$.

Аналогично доказывается равномерная непрерывность $\Phi(w, \tau)$ на $\mathfrak{M}\times[0, 1]$ по $\tau$, а тем самым и равномерная непрерывность $\Phi(w, \tau)$ по $(w, \tau)$ на $\mathfrak{M}\times[0, 1]$. Для возможности применения теоремы Лерэ — Шаудера осталось убедиться, что при $\tau=0$ преобразование $\Phi(w, 0)$ имеет внутри $\mathfrak{M}$ единственную неподвижную точку и в окрестности этой точки преобразование $w-\Phi(w, 0)$ обратимо. Но это действительно имеет место, ибо $\Phi(w, 0)$ переводит все $\mathfrak{M}$ в единственный элемент $\hat{v}(x, t)\equiv\psi(x, t)$, являющийся решением задачи

$$\hat{v}_t-\Delta\hat{v}=\psi_t-\Delta\psi, \quad \hat{v}|_{\Gamma_T}=\psi|_{\Gamma_T}.$$

Таким образом, при каждом $\tau$ из $[0, 1]$ существует по крайней мере одна неподвижная точка $u^\tau(x, t)$ для $\Phi$, которая, как пояснено выше, будет решением задачи (6.7) из

$H^{2+\alpha\beta,\, 1+\frac{\alpha\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ (в силу (6.12) изменение функций $a_i$ и $a$ за пределами множества $\{(x, t)\in\overline{Q}_T,\ |u|\leqslant M,\ |p|\leqslant M_1\}$ никакого влияния на $u^\tau$ не оказывает). Проверим, что фактически $u^\tau$ будут принадлежать $H^{2+\beta,\, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$. Действительно, из принадлежности $u^\tau$ к $H^{2+\alpha\beta,\, 1+\frac{\alpha\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ следует в силу леммы 3.1 главы II принадлежность $u^\tau_x$ к $H^{1,\, \frac{1}{2}}(\overline{Q}_T)$, а отсюда и условия теоремы с) следует, что коэффициенты уравнения (6.5), если в них вместо $w(x, t)$ подставить $u^\tau(x, t)$, будут как функции $(x, t)$ элементами $H^{\beta,\, \frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$. Но решение $u^\tau$ задачи (6.7) может быть рассмотрено как решение $v$ задачи (6.5) с $w=u^\tau$, и потому (см. теорему 5.2 главы IV) $v=u^\tau$ есть элемент $H^{2+\beta,\, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$. Итак, доказано, что задачи (6.7) при всех $\tau$ из $[0,1]$ и, в частности задача (6.1), (6.2) имеют решения из $H^{2+\beta,\, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$.

Единственность такого решения доказывается стандартным способом. Пусть $u'$ и $u''$ — два решения задачи (6.1), (6.2). Они удовлетворяют интегральным тождествам

$$\int_0^t\int_\Omega \left[u_t\eta + a_i(x, t, u, u_x)\,\eta_{x_i} + a(x, t, u, u_x)\,\eta\right]dx\,dt = 0 \tag{6.17}$$

с произвольной непрерывно дифференцируемой функцией $\eta(x, t)$, равной нулю на $S_T$. Вычтем из одного тождества другое и запишем приращения $a_i$ и $a$, следуя (5.3), в виде

$$\Delta a_i \equiv a_i(x, t, u', u'_x) - a_i(x, t, u'', u''_x) =$$

$$= v_{x_j}\int_0^1 \frac{\partial a_i\left[x, t, \tau u' + (1-\tau)\,u'', \tau u'_x + (1-\tau)\,u''_x\right]}{\partial u_{x_j}}\,d\tau +$$

$$+ v\int_0^1 \frac{\partial a_i\,[\ldots]}{\partial u}\,d\tau \equiv \hat{a}_{ij}v_{x_j} + \hat{b}_i v;\quad \Delta a = \hat{c}_i v_{x_i} + \hat{c}v.$$

где $v = u' - u''$. В результате получим тождество

$$\int_0^t \int_\Omega [v_t\eta + (\hat{a}_{ij}v_{x_j} + \hat{b}_i v)\eta_{x_i} + (\hat{c}_i v_{x_i} + \hat{c}v)\eta]\, dx\, dt = 0,$$

из которого в силу теорем § 3 гл. III о линейных уравнениях следует, что $v \equiv 0$.

Для доказательства существования у решения $u$ производных $\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x}$ из $L_2(Q_T)$ обратимся к доказательству теоремы 5.1. В силу наших предположений об $a_i$ и $a$ соотношение (5.4) может быть рассмотрено как линейное уравнение для

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}[u(x,\ t+\Delta t) - u(x,\ t)]$$

с такими свойствами коэффициентов, которые обеспечивают равномерную по $\Delta t$ ограниченность интегралов $\int_0^{T-\Delta t} \int_\Omega \left(\frac{\Delta u_x}{\Delta t}\right)^2 dx\, dt$. Из этой последней следует существование $u_{tx}$ и конечность $\|u_{tx}\|_{2,\ Q_T}$. Теорема доказана.

Если предположить, что данные задачи обладают большей гладкостью, то более гладкими будут и решения задач. Действительно, если известно, что решение $u(x,\ t)$ задачи (6.1), (6.2) принадлежит, например, $H^{2+\beta,\ 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$, то, рассматривая $u(x,\ t)$ как решение линейной задачи (6.5) с $w = u$, мы получим о нем на основании теоремы 5.2 главы IV дополнительные сведения, например принадлежность к $H^{3+\beta,\ \frac{3+\beta}{2}}(Q_T)$, если об $a_i(x,\ t,\ u,\ p)$ и $a(x,\ t,\ u,\ p)$ известно, что они, частные производные $a_i$ первого и второго порядка и частные производные $a$ первого порядка удовлетворяют условию Гёльдера с показателями $\beta$, $\frac{\beta}{2}$, $\beta$ и $\beta$ соответственно. В общем, это улучшение усматривается уже из теорем главы IV о линейных уравнениях и не требует анализа собственно нелинейной задачи. Мы не будем перечислять здесь все следствия, которые можно извлечь из теоремы 6.1 и теорем главы IV, считая, что читатель это сможет сделать самостоятельно.

Из сравнения условий теоремы 6.1 данной главы и теоремы 5.2 главы IV в теореме 6.1 кажется излишним (завышенным) условие d) о дифференцируемости $a$ по $u$, $p$ и липшицевости $a_i$ и $a$ по $t$. С точки зрения теоремы единственности дифференцируемость $a$ по $u$ и $p$ (или, что примерно то же, липшицевость $a$ по $u$ и $p$) необходима. Но теорему существования можно доказать и без этих предположений, используя только что доказанную теорему 6.1 и те или иные теоремы глав III—V об априорных оценках для квазилинейных и линейных уравнений. Дифференциальные свойства гарантируемых при этом решений будут определяться условиями гладкости функций $a_i$ и $a$, а также гладкостью $\psi|_{\Gamma_T}$, $S$ и порядком согласования граничных и начальных условий, а сами решения будут получаться как пределы решений $u^m(x, t)$ краевых задач для уравнений $\mathscr{L}^m u = 0$ со сглаженными функциями $a_i^m$ и $a^m$ и сглаженными $S^m$ и $\psi^m$. В качестве возможных следствий теоремы 6.1 и априорных оценок предыдущих параграфов установим, например, следующие предложения.

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия* a) — c) *теоремы* 6.1. *Пусть, кроме того, выполняются условия*:

d) $\psi|_{S_T} \in O^{2,1}(S_T)$; $\max\limits_{x \in \Omega} |\psi_x(x, 0)| < \infty$; $\psi \in H^{\gamma, \frac{\gamma}{2}}(\bar{Q}_T)$;

e) $S \in O^2$.

*Тогда существует по крайней мере одно решение* $u(x, t)$ *задачи* (6.1), (6.2), *принадлежащее* $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, *имеющее* $u_x$, *ограниченные в* $\bar{Q}_T$, *и производные* $u_t$, $u_{xx}$, *принадлежащие* $H^{\beta, \frac{\beta}{2}}(Q_T)$. *Для единственности такого решения достаточно, чтобы функция* $a(x, t, u, p)$ *удовлетворяла условию Липшица по* $u$ *и* $p$ *равномерно на любом компакте вида* $\{(x, t) \in \bar{Q}_T, |u| \leqslant c, |p| \leqslant c\}$.

Возьмем бесконечную последовательность вложенных друг в друга цилиндров $Q_T^m = \Omega_m \times (0, T)$, $m = 1, 2, \ldots$, таких, что $Q_T^m \supset Q_T^{m+1} \supset Q_T$ при всех $m$, и таких, что границы $\Omega_m$ (а тем самым и боковые поверхности $S_T^m$ цилиндров $Q_T^m$) принадлежат $H^{2+\beta}$ и имеют равномерно ограниченные нормы в $Q^2$, и будем считать, что функция $\psi(x, t)$ продолжена на область $\overline{Q}_T^1$, а функции $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ продолжены на область $\{(x, t)\in\overline{Q}_T^1, |u|<\infty, |p|<\infty\}$, причем так, что $\psi\in O^{2\,1}(\overline{Q}_T^1\setminus\Omega\times[0, T])$, а для $a_i$ и $a$ выполнены свойства гладкости и неравенства, перечисленные в условиях а) — с) теоремы 6.2.

Построим по $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ и $\psi(x, t)$ усреднения $a_i^m(x, t, u, p)$, $a^m(x, t, u, p)$, $\psi^m(x, t)$ по $x$, $t$, $u$ и $p$ с радиусом усреднения $\rho_m=\frac{d}{m}$, где $d$ — расстояние от $S_T^1$ до $S_T^2$, причем по $t$ возьмем стекловское усреднение вверх.

Рассмотрим теперь семейство краевых задач

$$\mathscr{L}^m u\equiv u_t-\frac{d}{dx_i}a_i^m(x, t, u, u_x)+A^m(x, t, u, u_x)=0, \tag{6.18}$$
$$u|_{\Gamma_T^m}=\psi^m|_{\Gamma_T^m},\quad m=2, 3, \ldots,$$

в областях $Q_T^m$, в которых $a_i^m(x, t, u, p)$ и $\psi^m(x, t)$ суть построенные выше усреднения $a_i$ и $\psi$ соответственно, а $A^m(x, t, u, p)$ равна $a^m(x, t, u, p)$ при $\{(x, t)\in\overline{Q}_T,$ $|u|<\infty, |p|<\infty\}$, равна

$$-\psi_t^m(x, 0)+\frac{d}{dx_i}a_i(x, 0, \psi^m(x, 0), \psi_x^m(x, 0))$$

при $\{(x, t)\in S_0^m, u=\psi^m(x, 0), p=\psi_x^m(x, 0)\}$ *), а при остальных значениях аргументов определена так, что $A^m(x, t, u, p)$ есть гладкая функция своих аргументов, и функции $A^m(x, t, u, p)$, $m=1, 2, \ldots$, удовлетворяют условиям (6.9) равномерно по $m$, т. е.

$$|A^m(x, t, u, p)|\leqslant\mu(|u|)(1+|p|)^2.$$

Задача (6.18) удовлетворяет всем условиям теоремы 6.1 в $Q_T^m$ и потому имеет решение $u^m(x, t)$, обладающее указанными в теореме 6.1 свойствами. На основании теорем 1.1 и 4.1 данной главы, неравенств (2.31) и (2.34) главы I и

*) Напомним, что в соответствии с используемыми нами обозначениями $\Gamma_T^m$ есть совокупность точек $(x, t)$, принадлежащих боковой поверхности и нижнему основанию цилиндра $Q_T^m$, а $S_0^m$ — совокупность точек $(x, 0)$ с $x$, принадлежащим границе $S^m$ области $\Omega_m$.

леммы 3.1 главы VI имеют место равномерные по $m$ оценки

$$|u^m|^{(\alpha)}_{Q_T^m} \leqslant c, \quad \max_{Q_T^m} |u_x^m| \leqslant c, \tag{6.19}$$

с некоторым $\alpha \leqslant \gamma$, и

$$|u^m|^{(2+\beta)}_{Q'} \leqslant c(d), \tag{6.20}$$

где $Q'$ — какая-либо подобласть $Q_T$, отстоящая от $\Gamma_T$ на положительное расстояние $d > 0$, а $c(d)$ — постоянная, зависящая только от постоянных из условий a) — c), $\max\limits_{Q_T^1} |\psi|$ и расстояния $d$. Ввиду (6.19) из последовательности $\{u^m\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся к $u(x, t)$ в $\overline{Q}_T$, которая в силу (6.19) и (6.20) является решением задачи (6.1), (6.2) с описанными в теореме 6.2 свойствами. Единственность доказывается так же, как в теореме 6.1.

Если в теореме 6.2 отбросить условие c), то у задачи (6.1) — (6.2) будет существовать решение $u$, принадлежащее $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$, имеющее производные $u_{x_i}$, ограниченные в $\overline{Q}_T$ и непрерывные по Гёльдеру внутри $Q_T$, и производные $u_t$ и $u_{xx}$, квадратично-суммируемые по $Q'_T = \Omega' \times [0, T]$, $\overline{\Omega}' \subset \Omega$. Доказывается это утверждение так же, как и теорема 6.2, только вместо (6.20) будем иметь в соответствии с теоремами 3.1 и 4.1 равномерную ограниченность более слабых норм $u^m$, а именно:

$$|u_x^m|^{(\gamma)}_{Q'} + \|u_t^m\|_{2, Q'_T} + \|u_{xx}^m\|_{2, Q'_T} \leqslant c(d), \tag{6.21}$$

где $Q'$ и $Q'_T$ — любые подобласти $Q_T$, отстоящие от $\Gamma_T$ и $S_T$ соответственно на расстояние $d > 0$. Итак, справедлива

Теорема 6.3. *Пусть выполнены условия* a) *и* b) *теоремы* 6.1 *и условия* d) *и* e) *теоремы* 6.2. *Тогда задача* (6.1), (6.2) *имеет решение* $u(x, t)$ *из* $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T) \cap W_2^{2,1}(Q'_T)$ *с* $u_x$ *из* $H^{\gamma, \frac{\gamma}{2}}(Q_T)$ *и с конечным* $\max\limits_{Q_T} |u_x|$. *Если к тому же,* $a(x, t, u, p)$ *удовлетворяет условию Липшица по* $u$ *и* $p$ *(равномерному на любом компакте), то решение единственно в указанном классе.*

Единственность доказывается так же, как и в теореме 6.1, а то, что $u(x, t)$ удовлетворяет для почти всех $(x, t) \in Q_T$ уравнению (6.1), лучше проверить следующим образом: записать вместо уравнений (6.18) тождества

$$\int\limits_{Q_T^m} \left[u_t^m \eta + a_i^m\left(x, t, u^m, u_x^m\right) \eta_{x_i} + \right. \\ \left. + a^m\left(x, t, u^m, u_x^m\right) \eta\right] dx\, dt = 0 \quad (6.22)$$

с гладкой финитной в $Q_T$ функцией $\eta$ и в них перейти к пределу по некоторой подпоследовательности $\{u^{m_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящейся к $u$ равномерно в $\bar{Q}_T$ и такой, что $u_x^{m_k}$ сходятся равномерно к $u_x$ в каждой внутренней подобласти $Q' \subset Q_T$, а $u_t^{m_k}$ и $u_{xx}^{m_k}$ сходятся к $u_t$ и $u_{xx}$ слабо в $L_2(Q_T')$. Так как функции $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ непрерывны по $(x, t, u, p)$, то их усреднения сходятся к ним равномерно.

В силу всего сказанного в (6.22) можно перейти к пределу по $k \to \infty$ и получить аналогичное тождество для $u$, которое эквивалентно уравнению (6.1), ибо $u$ имеет, помимо непрерывных $u_x$, обобщенные производные $u_t$ и $u_{xx}$.

При дальнейшем ослаблении условий на $\psi$ и $S$ мы лишимся ограниченности $\max\limits_{Q_T} |u_x|$. Так, если в теореме 6.3 вместо условия b) потребовать, чтобы $a_i(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ были непрерывны по $u$, $p$ и удовлетворяли неравенствам (3.1) — (3.6), а условия d) и e) заменить на принадлежность $\psi|_{\Gamma_T}$ к $H^\beta(\Gamma_T)$ и условие (A), то вместо (6.19) — (6.21) будем иметь меньшую информацию:

$$\left.\begin{aligned} &|u^m|_{Q_T^m}^{(\alpha)} \leqslant c \\ \text{и} \qquad & \\ &|u_x^m|_{Q'}^{(\gamma)} + \|u_t^m\|_{2, Q'} + \|u_{xx}^m\|_{2, Q'} \leqslant c(d). \end{aligned}\right\} \quad (6.23)$$

Эти равномерные оценки дают возможность заключить о существовании предельной для $u^m$ функции $u$, принадлежащей $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T) \cap W_2^{2,1}(Q')$, имеющей $u_x$ из $H^{\gamma, \frac{\gamma}{2}}(Q_T)$, удовлетворяющей (6.2) в каждой точке $\Gamma_T$, а уравнению (6.1) почти всюду.

Таким образом, с помощью вышеописанной аппроксимации доказывается теорема 6.4.

Теорема 6.4. *Предположим, что:*

a) *выполняется условие* a) *теоремы* 6.1;

b) $a_i(x, t, u, p)$ *и* $a(x, t, u, p)$ *непрерывны по* $(u, p)$, $a_i(x, t, u, p)$ *дифференцируемы по* $x$, $u$ *и* $p$ *и для них справедливы неравенства* (3.1) — (3.6);

c) $\psi|_{\Gamma_T} \in H^{\beta}(\Gamma_T)$;

d) $S$ *удовлетворяет условию* (A).

*Тогда задача* (6.1), (6.2) *имеет решение* $u$ *из* $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T) \cap \cap W_2^{2,1}(Q')$, *с* $u_x$ *из* $H^{\gamma, \frac{\gamma}{2}}(Q_T)$, *где* $Q'$ — *любая внутренняя подобласть* $Q_T$.

Условие a) в теоремах 6.1—6.4 дает возможность априорно оценить $\max\limits_{Q_T} |u|$ всех возможных классических решений задач (6.1), используя так называемый «принцип максимума». Его можно заменить условиями интегрального типа, позволяющими оценивать $\max\limits_{Q_T} |u|$ на основании теорем 2.1 или 2.2. Так как эти оценки мы применяем к хорошим (классическим) решениям, то ограничения на $a_i(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ сводятся к тому, чтобы эти функции при любых конечных $u$ и $p$ интегрировались по $Q_T$ и чтобы выполнялись условия (2.3) — (2.6). Так, например, из теоремы 2.2 и теоремы 6.1 следует

Теорема 6.5. *Утверждения теоремы* 6.1 *остаются в силе, если ее условие* a) *заменить на условие*:

a′) *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$ *и произвольных* $u$ *и* $p$ *справедливо неравенство*

$$\sum_i |a_i(x, t, u, p)| + |a(x, t, u, p)| \leqslant \mu(|u|, |p|)\varphi_1(x, t)$$

*с какой-нибудь непрерывной функцией* $\mu(\xi, \tau)$ и $\varphi_1(x, t) \in \in L_1(Q_T)$, *а при* $|u|$, *превосходящих какое-либо число* $k_0$, *выполнены предположения* (2.3) — (2.6), *причем, если в них* $\mu > 0$, *то должна быть известна равномерная ограниченность* $\|u^\tau\|_{q_1, r_1, Q_T}$ *для всех возможных решений* $u^\tau$ (*в теореме* 6.1 — *это только решения из* $H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ *задачи* (6.7)).

Условие а′) гарантирует в силу теоремы 2.2 равномерную ограниченность $\max_{Q_T} |u^\tau|$, т. е. то, что мы извлекали из условия а) теоремы 6.1. Напомним, что числа $q_1$ и $r_1$, входящие в условия (2.3) — (2.6), могут быть любыми, бо́льшими нуля, и что при $\mu = 0$ никаких априорных требований на ограниченность каких-либо норм решений $u^\tau$ не накладывается.

Можно дать разные достаточные условия, когда через известные нам величины оцениваются какие-либо слабые нормы решений. Например, если при $(x, t) \in \overline{Q}_T$ и произвольных $u$ и $p$

$$a_i(x, t, u, p) p_i + a(x, t, u, p) u \geqslant$$
$$\geqslant \nu p^2 - \varphi_2(x, t) |u|^\alpha - \varphi_1(x, t), \quad (6.24)$$

причем $\nu > 0$, $\varphi_1(x, t) \in L_1(Q_T)$, $\alpha \in (0, 2)$, $\varphi_2(x, t) \in L_{q_2, r_2}(Q_T)$, а числа $q_2$ и $r_2$ подчиняются условиям: $\frac{1}{r_2} + \frac{n}{2q_2} = 1 + \frac{n}{4}(2 - \alpha)$, $r_2$, $q_2 \geqslant 1$, то для $u^\tau$ при $u^\tau|_{\Gamma_T} = \psi|_{\Gamma_T} = 0$ равномерно ограничены нормы $|u^\tau|_{Q_T}$. Действительно, возьмем равенство

$$\int_{Q_t} \left[u_t^\tau u^\tau + \tau a_i\left(x, t, u^\tau, u_x^\tau\right) u_{x_i}^\tau + (1 - \tau)\left(u_x^\tau\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \tau a\left(x, t, u^\tau, u_x^\tau\right)\right] dx\, dt = 0, \quad (6.25)$$

справедливое, очевидно, для любого решения $u^\tau$ задачи (6.7), и, воспользовавшись предположением (6.24), выведем из него неравенство

$$\frac{1}{2} \int_\Omega (u^\tau)^2 dx \Big|_0^t + (\tau\nu + 1 - \tau) \int_{Q_T} \left(u_x^\tau\right)^2 dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \tau \int_{Q_T} \left(\varphi_2 |u^\tau|^\alpha + \varphi_1\right) dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \tau \|\varphi_2\|_{q_2, r_2, Q_T} \|u^\tau\|^\alpha_{\frac{\alpha q_2}{q_2 - 1}, \frac{\alpha r_2}{r_2 - 1}, Q_T} + \tau \|\varphi_1\|_{1, Q_T} \leqslant$$
$$\leqslant \tau \beta^{(\alpha)} \|\varphi_2\|_{q_2, r_2, Q_T} |u^\tau|^\alpha_{Q_T} + \tau \|\varphi_1\|_{1, Q_T}. \quad (6.26)$$

Из (6.26) следует нужная нам оценка $|u^\tau|_{Q_T}$, ибо

$$\tau\nu + 1 - \tau \geqslant \min\{\nu;\ 1\} \text{ и } \alpha < 2. \tag{6.27}$$

Если при $(x, t) \in \bar{Q}_T$ и произвольных $u$ и $p$

$$a_i(x, t, u, p)\, p_i + a(x, t, u, p)\, u \geqslant \nu\, |u|^{q_1} - \varphi_1(x, t) \tag{6.28}$$

с какими-нибудь $\nu > 0$, $q_1 \geqslant 0$, $\varphi_1 \in L_1(Q_T)$, то из того же соотношения (6.25) получим равномерную оценку

$$\| u^\tau \|_{2, \infty Q_T} + \| u^\tau \|_{q,\ Q_T}, \quad q = \min\left\{q_1,\ 2\,\frac{n+2}{n}\right\}.$$

Близкие к только что указанным критериям можно получить, исходя не из (6.25), а из равенства

$$\int\limits_{Q_t} \left[\frac{1}{q+1}\,\frac{\partial (u^\tau)^{q+1}}{\partial t} + q\tau a_i\left(x,\ t,\ u^\tau,\ u^\tau_x\right) u^\tau_{x_i}\, (u^\tau)^{q-1} + \right.$$
$$\left. + q(1-\tau)\left(u^\tau_x\right)^2\left(\tau^\tau\right)^{q-1} + \tau a\left(x,\ t,\ u^\tau,\ u^\tau_x\right)\left(u^\tau\right)^q\right] dx\,dt = 0, \tag{6.29}$$

справедливого, очевидно, для решений $u^\tau$ задачи (6.7) при $\psi|_{\Gamma_T} = 0$.

Замену условия а) на условия типа а′) можно сделать и в других теоремах данного параграфа. Другое допустимое видоизменение условий теоремы 6.1 состоит в замене условия е) на $\psi$ условием простой непрерывности $\psi$ на $\Gamma_T$. Мы это сделаем в теореме 4.4 главы VI сразу для уравнений общего вида. Можно пойти дальше в ослаблении условий теорем и прийти к обобщенным решениям уравнений (6.1), имеющим лишь производные первого порядка. Приведем одно из таких предложений, аналогичных теореме 8.8 главы IV книги [1].

Теорема 6.6. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) *при* $(x, t) \in \bar{Q}_T$ *и произвольных* $u$ *и* $p$ *справедливы неравенство* (6.24) *и неравенства*

$$|a_i(x,\ t,\ u,\ p)|\,(1 + |p|) \leqslant \mu(1 + |p|)^2 +$$
$$+ \left(1 + |u|^\alpha\right)\varphi_3(x,\ t) \tag{6.30}$$

и

$$|a(x,\ t,\ u,\ p)| \leqslant \mu\,(1 + |p|)^2 + \left(1 + |u|^\alpha\right)\varphi_3(x,\ t) \tag{6.31}$$

*с*

$$\alpha < 2 \text{ и } \varphi_3 \in L_{q_3, r_3}(Q_T), \quad \frac{1}{r_3} + \frac{n}{2q_3} < 1; \; r_3, \; q_3 \geqslant 1;$$

b) *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$, *произвольных* $p$ *и* $|u|$, *превосходящих какую-либо постоянную* $R$, *справедливы неравенства*

$$a_i(x, t, u, p)\, p_i \geqslant \nu |p|^2 - \mu |u|^\beta - u^2 \varphi_3(x, t)$$

*и*

$$-a(x, t, u, p)\, u \leqslant \mu |p|^2 + \mu |u|^\beta + u^2 \varphi_3(x, t)$$

*с* $\beta < 2 + \frac{4}{n}$ *и с функцией* $\varphi_3$ *того же типа, что и в* (6.30);

c) *при* $(x, t)$ *и* $(x', t') \in \overline{Q}_T$ *и произвольных* $u$, $v$, $p$ и $q$ справедливы неравенства

$$(p_i - q_i)[a_i(x, t, u, p) - a_i(x, t, u, q)] \geqslant \nu(|u|)\, |p - q|^2, \tag{6.32}$$

$$|a_i(x, t, u, p) - a_i(x, t, u, q)| \leqslant \mu(|u|)\, |p - q|, \tag{6.33}$$

$$|a_i(x, t, u, p) - a_i(x', t', v, p)| \leqslant \varepsilon(|x - x'| + |t - t'| + |u - v|)\,[|p| + \mu(|u| + |v|) + \varphi_4(x, t) + \varphi_4(x', t')]$$

*и*

$$|a(x, t, u, p) - a(x', t', v, q)| \leqslant \varepsilon(|x - x'| + |t - t'| + |u - v| + |p - q|)[\mu(|u| + |v| + |p| + |q|) + \varphi_1(x, t) + \varphi_1(x', t')], \tag{6.34}$$

*в которых* $\nu(\tau)$ *и* $\mu(\tau)$ *суть какие-нибудь непрерывные положительные функции* $\tau \geqslant 0$, $\varepsilon(\tau)$ — *непрерывная функция* $\tau \geqslant 0$, *равная нулю при* $\tau = 0$, $\varphi_4 \in L_2(Q_T)$, *а* $\varphi_1(x, t) \in L_1(Q_T)$. *Тогда задача* (6.1), (6.2) *с* $\psi|_{S_T} = 0$ *имеет по крайней мере одно решение из* $H^{\gamma, \frac{\gamma}{2}}(\overline{Q}_T) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1, 0}(Q_T)$ *с некоторым* $\gamma > 0$ *при любой функции* $\psi \in H^{\delta, \frac{\delta}{2}}(\Gamma_T)$. *Граница* $S$ *должна при этом удовлетворять условию* (A). *Если к тому же функции* $a_i(x, t, u, p)$ *дифференцируемы по* $u$ *и* $p$ *и*

$$\left| \frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial u} \right| \leqslant \mu(|u|)\,[|p| + \varphi_4(x, t)], \quad \varphi_4 \in L_2(Q_T), \tag{6.35}$$

*а функция* $a(x, t, u, p)$ *не зависит от* $u$ *и* $p$, *то решение единственно в классе ограниченных функций из* $W_2^{1,0}(Q_T)$.

Доказывается эта теорема с использованием аппроксимаций того же типа, что при доказательстве теоремы 8.8 главы IV [1]. Именно, решения $u(x, t)$ задачи (6.1), (6.2) получаем как предельные точки в сильной топологии пространств $H^{\gamma, \frac{\gamma}{2}}(\bar{Q}_T)$ и $W_2^{1,0}(Q_T)$ для множества решений $u^{\rho,\delta}(x, t)$, $\rho \to +0$, $\delta \to +0$, вспомогательных задач

$$\left.\begin{aligned} &u_t - \frac{d}{dx_i}\left[a_i^\rho(x, t, u, u_x) + \delta u_{x_i}\right] + a^\rho(x, t, u, u_x) \doteq 0, \\ &u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = \psi(x, 0), \end{aligned}\right\} \qquad (6.36)$$

в которых $a_i^\rho(x, t, u, p)$ и $a^\rho(x, t, u, p)$ суть усреднения функций $a_i(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ с бесконечно дифференцируемым неотрицательным ядром $\omega(\tau)$ вида

$$a^\rho(x, t, u, p) = \int\limits_{|x-x'| \leqslant \rho} \omega\left(\frac{|x-x'|}{\rho}\right)\frac{dx'}{\rho^n} \times$$
$$\times \int\limits_{|t-t'| \leqslant \rho} \omega\left(\frac{|t-t'|}{\rho}\right)\frac{dt'}{\rho} \int\limits_{|u-u'| \leqslant \rho} \omega\left(\frac{|u-u'|}{\rho}\right)\frac{du'}{\rho} \times$$
$$\times \int\limits_{|p-p'| \leqslant \rho(1+|p|)} \omega\left(\frac{|p-p'|}{\rho(1+|p|)}\right) a(x', t', u', p') \frac{dp'}{\rho^n(1+|p|)^n}$$

(при этом надо предварительно функции $a_i(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ продолжить с $\bar{Q}_T$ на несколько более широкую область с сохранением их свойств, перечисленных в условиях теоремы).

Предположения а), b) и (6.32) гарантируют выполнимость всех условий теоремы 6.4 (с заменой условия а) на условие а′), см. теорему 6.5) для задач (6.36), а следовательно, и разрешимость этих задач. Более того, они гарантируют равномерную ограниченность норм $|u^{\rho,\delta}|_{Q_T}^{(\hat{\gamma})}$ и $\|u^{\rho,\delta}\|_{Q_T}$ (с некоторым $\hat{\gamma} > 0$) всех решений (6.36). Это, условия а) — с) и соотношения (6.36) позволяют выбрать из $\{u^{\rho,\delta}\}$

подпоследовательность, сходящуюся в $H^{\gamma, \frac{\gamma}{2}}(\overline{Q}_T)$, $\gamma < \widehat{\gamma}$, и в $W_2^{1,0}(Q_T)$, и доказать, что предельные для них функции $u$ будут удовлетворять интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \left[-u\eta_t + a_i(x, t, u, u_x)\eta_{xi} + a(x, t, u, u_x)\eta\right] dx\, dt = 0 \tag{6.37}$$

при всех гладких $\eta$, равных нулю на границе $Q_T$, и, следовательно, будут искомыми обобщенными решениями задачи (6.1), (6.2). Вопрос о единственности решения, гарантированного теоремой 6.6, когда к ее условиям присоединяются лишь условия типа

$$|a(x, t, u, p) - a(x, t, v, p)| \leqslant \mu |u - v| [|p|^2 + \varphi_1(x, t)]$$

и

$$|a(x, t, u, p) - a(x, t, u, q)| \leqslant \\ \leqslant \mu |p - q| [|p| + |q| + \varphi_4(x, t)],$$

где $\varphi_1 \in L_1(Q_T)$, а $\varphi_4 \in L_2(Q_T)$, в общем случае не решен. Для случая же, отмеченного в теореме 6.6, единственность следует из теоремы 3.4 главы III. Действительно, для разности $v(x, t) = u'(x, t) - u''(x, t)$ двух возможных решений $u'$ и $u''$ задачи (6.1), (6.2) из (6.37) следует тождество

$$\int_{Q_T} \left[-v\eta_t + \left(\widehat{a}_{ij}(x, t) v_{x_j} + \widehat{a}_i(x, t) v\right)\eta_{x_i}\right] dx\, dt = 0,$$

в котором

$$\widehat{a}_{ij}(x, t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p_j} a_i\left[x, t, \tau u'(x, t) + \right. \\ \left. + (1-\tau) u''(x, t), \tau u'_x(x, t) + (1-\tau) u''_x(x, t)\right] d\tau,$$

а $\widehat{a}_i(x, t) = \int_0^1 \frac{\partial a_i[\ldots]}{\partial u} d\tau$. В силу условий (6.32), (6.33) и (6.35) выполняются условия теоремы 3.4 главы III, а тем самым и ее утверждение о том, что $v \equiv 0$. Теорема 3.4 дает возможность несколько усилить только что доказанную теорему единственности.

Существование обобщенных решений $u$ краевых задач для уравнений (6.1) в классе функций, имеющих лишь производные $u_x$, можно доказать и иначе, не используя теорем 6.1—6.5 о их классической разрешимости. Именно, такие решения можно получить как пределы приближенных решений $u^N$, вычисленных по методу Галёркина. Определение $u^N$ производится так же, как и для линейных уравнений (см. § 4, гл. III). Специфика же квазилинейного случая состоит в необходимости выполнить предельный переход в функциях $a(x, t, u^N, u^N_x)$, зависящих от $u^N_x$, вообще говоря, нелинейно, когда известна лишь слабая сходимость $u^N_x$ к $u_x$. Мы сделаем это ниже, используя из работы [$40_1$] Минти идею таких предельных переходов в функциях $a(x, t, u, u_x)$, монотонно зависящих от $u_x$ (см. в связи с этим работы [40, 4, $34_1$, 17]).

Введем пространство $\overset{\circ}{V}_{m,2}(Q_T)$, $m \geqslant 1$, состоящее из всех измеримых функций $u(x, t)$, равных нулю на $S_T$ и имеющих конечную норму

$$|u|_{m,2,Q_T} = \operatorname*{vrai\,max}_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u\|_{2,\Omega} + \|u_x\|_{m,Q_T},$$

и пространство $\overset{\circ}{V}{}^{1,0}_{m,2}(Q_T)$, полученное замыканием по этой норме всех гладких функций, равных нулю на $S_T$.

Они вкладываются в пространства $L_{q,r}(Q_T)$ с $q$ и $r$, удовлетворяющими условиям

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{r} + \dfrac{2n}{mn+2m-2n}\dfrac{1}{q} = \dfrac{n}{mn+2m-2n}, \\ \text{причем} \\ q \in \left[2, \dfrac{nm}{n-m}\right], \quad r \in [m, \infty], \text{ при } n > m \geqslant \dfrac{2n}{n+2}, \\ \qquad\qquad n \geqslant 2, \\ q \in [2, \infty), \ r \in \left(m-2+2\dfrac{m}{n}, \infty\right], \text{ при } 1 < n \leqslant m, \\ \quad q \in [2, \infty], \ r \in [3m-2, \infty], \text{ при } m \geqslant n = 1, \end{array}\right\} \qquad (6.38)$$

так что для таких $q$ и $r$ для любой функции $u$ из $\overset{\circ}{V}_{m,2}(Q_T)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{q,r,Q_T} \leqslant \beta |u|_{m,2,Q_T}. \qquad (6.39)$$

Выводится (6.39) из неравенства (2.9) гл. II для произвольного $m \geqslant 1$ так же, как и для $m=2$, то есть так же, как неравенство (3.4) гл. II.

Нам понадобится несколько вспомогательных предложений. Одно из них обобщает известное неравенство Фридрихса для функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ на функции из $W_m^1(\Omega)$ ([$7_2$], гл. 7), именно:

Лемма 6.1. *Пусть функции $\psi_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. Тогда по любому $\varepsilon>0$ можно указать номер $N_\varepsilon$ такой, что для любой функции $u(x)$ из $W_m^1(\Omega)$ с $m>\frac{2n}{n+2}$ при $n \geqslant 2$ и с $m \geqslant 1$ при $n=1$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{2,\Omega} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}(u, \psi_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon\|u\|_{m,\Omega}^{(1)}. \tag{6.40}$$

*Число $N_\varepsilon$ не зависит от $u$.*

Достаточно доказать справедливость неравенства

$$\|u\|_{2,\Omega} \leqslant (1+\delta)\left(\sum_{k=1}^{N_{\varepsilon,\delta}}(u, \psi_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon\|u\|_{m,\Omega}^{(1)} \tag{6.40$'$}$$

с произвольными $\delta>0$ и $\varepsilon>0$, ибо из него, в силу ортонормированности $\{\psi_k\}$ в $L_2(\Omega)$ и неравенства (2.5) гл. II при $S_r=\Omega$, $q=2$, $l=1$, $p=m$, следует

$$\|u\|_{2,\Omega} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N_{\varepsilon,\delta}}(u, \psi_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \delta\|u\|_{2,\Omega} + \varepsilon\|u\|_{m,\Omega}^{(1)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{N_{\varepsilon,\delta}}(u, \psi_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} + (c\delta+\varepsilon)\|u\|_{m,\Omega}^{(1)},$$

т. е. утверждение леммы 6.1.

Предположим, что неравенство (6.40$'$) неверно. Тогда найдется $\varepsilon_0>0$ и последовательность функций $u_r$, $r=1, 2, \ldots$, из $W_m^1(\Omega)$, таких, что

$$\|u_r\|_{2,\Omega} > (1+\delta)\left(\sum_{k=1}^{r}(u_r, \psi_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_0\|u_r\|_{m,\Omega}^{(1)}$$

при любом $r$. Отсюда для функций $v_r = \frac{u_r}{\| u_r \|_{2, \Omega}}$ получаем

$$1 = \| v_r \|_{2, \Omega} > (1 + \delta) \left( \sum_{k=1}^{r} (v_r, \psi_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_0 \| v_r \|^{(1)}_{m, \Omega},$$

так что нормы $\| v_r \|^{(1)}_{m, \Omega}$, $r = 1, 2, \ldots$, равномерно ограничены. В силу компактности вложения $W^1_m(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ (теорема 2.1 гл. II) существует подпоследовательность $v_{r_p}$, $p = 1, 2, \ldots$, сильно сходящаяся в $L_2(\Omega)$ к некоторой функции $v$, причем $\| v \|_{2, \Omega} = \| v_r \|_{2, \Omega} = 1$. Функции $P_{r_p} v_{r_p} \equiv \sum_{k=1}^{r_p} (v_{r_p}, \psi_k) \psi_k$ так же сильно сходятся к $v$, ибо

$$\| v - P_{r_p} v_{r_p} \|_{2, \Omega} = \| P_{r_p}(v - v_{r_p}) + (E - P_{r_p}) v \|_{2, \Omega} \leqslant$$
$$\leqslant \| v - v_{r_p} \|_{2, \Omega} + \| (E - P_{r_p}) v \|_{2, \Omega} \to 0 \quad \text{при} \quad p \to \infty.$$

Ввиду этого, переходя в предыдущем неравенстве к пределу по подпоследовательности $r_p$, $p \to \infty$, получим

$$1 \geqslant 1 + \delta,$$

что невозможно. Лемма 6.1 доказана.

Сформулируем в виде лемм два предложения, известные из теории функций вещественного переменного.

Лемма 6.2. *Если последовательность функций $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, сходится сильно в $L_q(\Omega)$, $q \geqslant 1$, к функции $u(x)$, то из нее можно выделить подпоследовательность $u_{k_p}$, $p = 1, 2, \ldots$, которая сходится к $u$ почти всюду. Из сходимости же $u_k$ к $u$ почти всюду на $\Omega$ следует почти равномерная на $\Omega$ сходимость, т. е. такая, что по любому $\varepsilon > 0$ найдется множество $\Omega^\varepsilon \subset \Omega$ с $\operatorname{mes} \Omega^\varepsilon < \varepsilon$, такое, что $u_k$ на $\Omega \setminus \Omega^\varepsilon$ сходятся к $u$ равномерно.*

Лемма 6.3. *Пусть $f(x, t, u)$ — измеримая на множестве $\{(x, t) \in Q_T, u \in (-\infty, \infty)\}$ функция, непрерывная по $u$ для почти всех $(x, t)$ из $Q_T$. Тогда, если последовательность функций $u_k(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots$, из $L_1(\Omega)$ сходится почти всюду к $u \in L_1(\Omega)$, и $\| f(x, t, u_k(x, t)) \|_{q, Q_T} \leqslant c$*

*при* $q>1$, *то функции* $f(x, t, u_k(x, t))$ *сходятся к* $f(x, t, u(x, t))$ *в нормах* $L_{q^*}(Q_T)$, $q^*<q$, *и слабо в* $L_q(Q_T)$. *Если дополнительно известно, что по любому* $\varepsilon>0$ *можно найти такое* $\delta>0$, *для которого интегралы* $\|f(x, t, u_k(x, t))\|_{q, \Omega^\delta}$ *не превосходят* $\varepsilon$ *при любом (как всюду, измеримом) множестве* $\Omega^\delta\subset\Omega$ *с* $\operatorname{mes}\Omega^\delta\leqslant\delta$, *то* $f(x, t, u_k(x, t))$ *сходятся к* $f(x, t, u(x, t))$ *в* $L_q(Q_T)$.

*Если же* $u_k$ *сходятся к* $u$ *в* $L_1(Q_T)$ *и* $\|u_k\|_{q, Q_T}\leqslant c$, *при* $q>1$, *то* $u_k$ *сходятся к* $u$ *в* $L_{q^*}(Q_T)$, $q^*<q$.

Доказательство леммы 6.2 можно найти в учебниках по теории функций вещественного переменного. Лемму же 6.3 нетрудно доказать самостоятельно, используя утверждение леммы 6.2.

Рассмотрим уравнение (6.1) при следующих условиях:

1) При $(x, t, u, p)\in\{\overline{\Omega}\times[0, T]\times E_1\times E_n\}$ функции $a_i(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ измеримы по $(x, t, u, p)$ и непрерывны по $(u, p)$ при почти всех $(x, t)$ из $Q_T$; функции $a_i(x, t, u, p)$ удовлетворяют неравенствам

$$|a_i(x, t, u, p)|\leqslant\varphi_1(x, t)+c\left(|u|^{\frac{q^*}{m'}}+|p|^{m-1}\right),\quad \varphi_1\in L_{m'}(Q_T), \tag{6.41}$$

где $q^*<q=m\dfrac{n+2}{n}$, $m'=\dfrac{m}{m-1}$, а $m>\dfrac{2n+2}{n+2}$; функция $a(x, t, u, p)$ равна $\bar{a}_i(x, t, u)p_i+\bar{\bar{a}}(x, t, u)$, где $\bar{a}_i$ и $\bar{\bar{a}}$ измеримые по $(x, t, u)$ и непрерывные по $u$ функции, удовлетворяющие неравенствам

$$|\bar{a}_i(x, t, u)|\leqslant\varphi_2(x, t)+c|u|^{\frac{q^*}{m'}-1},\quad \varphi_2\in L_{\frac{m'q}{q-m'}}(Q_T), \tag{6.42}$$

и

$$|\bar{\bar{a}}(x, t, u)|\leqslant\varphi_3(x, t)+c|u|^{\frac{q^*}{q'}},\quad \varphi_3\in L_{q'}(Q_T),\ q'=\frac{q}{q-1}. \tag{6.43}$$

2) При любой функции $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_\Omega[a_i(x, t, u, u_x)u_{x_i}+a(x, t, u, u_x)u]\,dx\geqslant$$
$$\geqslant\nu\int_\Omega|u_x|^m\,dx-c(t)\int_\Omega(1+u^2)\,dx,\quad \nu>0,\quad \int_0^T c(t)\,dt\leqslant c. \tag{6.44}$$

3) При любых функциях $u(x, t)$ из $L_q(Q_T)$, $v(x, t)$ и $w(x, t)$ из $\overset{\circ}{V}{}^{1,0}_{m,2}(Q_T)$ справедливы неравенства

$$\int\limits_{Q_t} [a_i(x, t, u, v_x) - a_i(x, t, u, w_x)]\left(v_{x_i} - w_{x_i}\right) dx\,dt + \\ + f\left(\|v - w\|_{q^*, Q_t}\right) \geqslant 0, \quad t \in [0, T], \tag{6.45}$$

где $f(\tau)$ — непрерывная при $\tau \geqslant 0$ функция, удовлетворяющая условию: $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-1} f(\varepsilon\tau) = 0$ при любом $\tau > 0$.

Условие (6.45) стали называть в последнее время *условием монотонности*. Оно слабее условия эллиптичности (6.9). Неравенство (6.44) также может быть выведено из условия (6.9) и предположений типа (6.41) — (6.43). Мы будем считать выполненными условия 1) — 3).

Благодаря им функции $a_i(x, t, u(x, t), v_x(x, t))$ являются элементами $L_{m'}(Q_T)$ при любых функциях $u$ и $v$ из $\overset{\circ}{V}{}^{1,0}_{m,2}(Q_T)$ и

$$\|a_i(x, t, u, v_x)\|_{m', Q_T^\varepsilon} \leqslant \|\varphi_1\|_{m', Q_T^\varepsilon} + \\ + c\|u\|^{\frac{q^*}{m'}}_{q, Q_T^\varepsilon} (\operatorname{mes} Q_T^\varepsilon)^{\frac{1}{m'}\left(1 - \frac{q^*}{q}\right)} + c\|v_x\|^{m-1}_{m, Q_T^\varepsilon} \equiv \\ \equiv \mu_1(\operatorname{mes} Q_T^\varepsilon, \|u\|_{q, Q_T^\varepsilon}, \|v_x\|_{m, Q_T^\varepsilon}), \tag{6.46}$$

где $Q_T^\varepsilon$ — любое подмножество $Q_T$.

Функции $\bar{a}_i(x, t, u(x, t))$ и $\bar{\bar{a}}(x, t, u(x, t))$ принадлежат $L_{\frac{m'q}{q-m'}}(Q_T)$ и $L_{q'}(Q_T)$ соответственно при любой $u$ из $\overset{\circ}{V}{}^{1,0}_{m,2}(Q_T)$, причем

$$\|\bar{a}_i(x, t, u(x, t))\|_{\frac{m'q}{q-m'}, Q_T^\varepsilon} \leqslant \|\varphi_2\|_{\frac{m'q}{q-m'}, Q_T^\varepsilon} + \\ + c\|u\|^{q_1}_{q, Q_T^\varepsilon} (\operatorname{mes} Q_T^\varepsilon)^{\frac{q-q^*}{m'q}} \equiv \mu_2(\operatorname{mes} Q_T^\varepsilon, \|u\|_{q, Q_T^\varepsilon}) \tag{6.47}$$

и

$$\|\bar{\bar{a}}(x, t, u(x, t))\|_{q', Q_T^\varepsilon} \leqslant \|\varphi_3\|_{q', Q_T^\varepsilon} + \\ + \|u\|^{\frac{q^*}{q'}}_{q, Q_T^\varepsilon} (\operatorname{mes} Q_T^\varepsilon)^{\frac{q^*}{q'}\left(\frac{1}{q^*} - \frac{1}{q}\right)} \equiv \mu_3(\operatorname{mes} Q_T^\varepsilon, \|u\|_{q, Q_T^\varepsilon}). \tag{6.48}$$

Функция $a(x, t, u(x, t), v_x(x, t))$ будет элементом $L_{q'}(Q_T)$

при любых функциях $u$ и $v$ из $V_{m,2}^{1,0}(Q_T)$ и

$$\|a(x, t, u, v_x)\|_{q', Q_T^\varepsilon} \leqslant \mu_4(\operatorname{mes} Q_T^\varepsilon, \|u\|_{l, Q_T^\varepsilon}, \|v_x\|_{m, Q_T^\varepsilon}). \quad (6.49)$$

Функции $\mu_k(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, $k=1, 4$, и $\mu_k(\tau_1, \tau_2)$, $k=2, 3$, стоящие в правых частях (6.47) — (6.49), суть непрерывные функции своих аргументов при $\tau_i \geqslant 0$, $i=1, 2, 3$, стремящиеся к нулю при $\tau_1+\tau_3 \to 0$.

Переходим к доказательству разрешимости задачи

$$\begin{gathered} u_t - \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, u_x) + a(x, t, u, u_x) = 0, \\ u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = \psi_0(x). \end{gathered} \quad (6.50)$$

Возьмем базис $\{\psi_k(x)\}$, $k=1, 2, \ldots$, в пространстве функций $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ и будем считать, ради несущественных упрощений, что $(\psi_k, \psi_l) = \delta_k^l$ и $\max\limits_{\Omega} |\psi_k, \psi_{kx}| \leqslant c_k < \infty$. Приближенное решение $u^N(x, t)$ будем искать в обычном виде $u^N = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k^N(t) \psi_k(x)$, где $c_k^N(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} (u_t^N, \psi_k) + (a_i(x, t, u^N, u_x^N), \psi_{kx_i}) + \\ + (a(x, t, u^N, u_x^N), \psi_k) = 0, \quad k=1, 2, \ldots, N, \end{gathered} \quad (6.51)$$

и начальных условий

$$c_k^N(0) = (\psi_0, \psi_k), \qquad k=1, 2, \ldots, N. \quad (6.52)$$

Из предположений (6.41) — (6.43) и свойств $\psi_k$ следует, что второй и третий члены в (6.51) являются измеримыми, ограниченными на каждом множестве $\{t \in [0, T], \ |c_k^N| \leqslant \text{const}\}$ функциями $t$, $c_k^N$, $k=1, 2, \ldots, N$, непрерывными по $c_k^N$, $k=1, 2, \ldots, N$. Поэтому для существования по крайней мере одного решения задачи (6.51), (6.52) на всем интервале $[0, T]$ достаточно знать, что все ее возможные решения равномерно ограничены на $[0, T]$.

Такая ограниченность следует из априорной оценки

$$|u^N|_{m, 2, Q_T} \leqslant c, \quad (6.53)$$

в которой постоянная $c$ не зависит от $N$, ибо

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \sum_{k=1}^{N} (c_k^N(t))^2 = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u^N\|_{2, \Omega}^2 \leqslant |u^N|_{m, 2, Q_T}^2.$$

Оценка (6.53) выводится из (6.51) следующим образом. Умножим $k$-е из уравнений (6.51) на $c_k^N$ и затем все уравнения сложим по $k$ от 1 до $N$. Из результирующего равенства и предположения (6.44) получим

$$\frac{1}{2}\| u^N(x, t)\|^2_{2,\Omega} + \nu \int\limits_{Q_t} |u^N_x|^m\, dx\, dt \leqslant \int\limits_0^t c(t) \int\limits_\Omega [1+(u^N)^2]\, dx\, dt,$$

откуда ввиду леммы 5.5 гл. II будем иметь (6.53), если считать, что $\psi_0 \in L_2(\Omega)$. Из оценки же (6.53) следует в силу неравенства (6.39) оценка

$$\| u^N \|_{q, Q_T} \leqslant c\beta, \quad q = m\frac{n+2}{n}. \tag{6.54}$$

Функции $l_{N,k}(t) = (u^N(x, t), \psi_k(x))$, $N, k = 1, 2, \ldots$, очевидно, непрерывны по $t \in [0, T]$. Покажем, что $l_{N,k}(t)$, $N = 1, 2, \ldots$, при любом фиксированном $k$ равностепенно непрерывны по $t$ на $[0, T]$. Для этого проинтегрируем (6.51) в пределах от $t$ до $t+\Delta t$ и результат оценим, используя наши предположения о $\psi_k$, $a_i$ и $a$ и уже полученные оценки (6.46), (6.49) и (6.53), так

$$\begin{aligned}
&|(u^N(x, t+\Delta t) - u^N(x, t), \psi_k(x))| \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_t^{t+\Delta t} \left|\left(a_i(x, t, u^N, u^N_x), \psi_{kx_i}\right) + \left(a(x, t, u^N, u^N_x), \psi_k\right)\right| dx\, dt \leqslant \\
&\leqslant c_k \int\limits_t^{t+\Delta t} \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n \left|a_i(x, t, u^N, u^N_x)\right| + \left|a(x, t, u^N, u^N_x)\right|\Big)\, dx\, dt \leqslant \\
&\leqslant c_k \sum_{i=1}^n \left\| a_i(x, t, u^N, u^N_x)\right\|_{m', Q_{t, t+\Delta t}} (\Delta t \cdot \operatorname{mes}\Omega)^{\frac{1}{m}} + \\
&+ c_k \left\| a(x, t, u^N, u^N_x)\right\|_{q', Q_{t, t+\Delta t}} (\Delta t \cdot \operatorname{mes}\Omega)^{\frac{1}{q}} \leqslant c'_k (\Delta t)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Постоянные $c_k$ и $c'_k$ зависят от $\psi_k$ (ибо $c_k$ оценивает сверху $\max\limits_\Omega |\psi_k, \psi_{kx}|$), но не зависят от $N$ при $N \geqslant k$. Ввиду этого семейства функции $l_{N,k}(t)$, $N = 1, 2, \ldots$, действительно равностепенно непрерывны по $t \in [0, T]$ при любом фиксированном $k$. Кроме того, из (6.53) следует $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} |l_{N,k}(t)| \leqslant c$ при всех $N$, $k=1, 2, \ldots$ Это, как показано при доказательстве теоремы 4.1 гл. III, позволяет выбрать из $\{u^N\}$ подпоследовательность, сходящуюся слабо в $L_2(\Omega)$ равномерно по $t\in[0, T]$ к некоторой функции $u$ с $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|u\|_{2,\Omega}\leqslant c$.

Из этой подпоследовательности, в свою очередь, можно выделить такую, для которой производные $\frac{\partial}{\partial x_i}$ сходятся слабо в $L_m(Q_T)$ к $u_{x_i}$. Это возможно из-за наличия равномерной оценки (6.53). Без ограничения общности, будем считать, что вся последовательность $u^N$, $N=1, 2, \ldots$, сходится только что описанным образом к $u$. Для $u$ сохраняется оценка (6.53).

Докажем, что $u$ есть обобщенное решение из $\overset{\circ}{V}{}^{1,0}_{m,2}(Q_T)$ задачи (6.50). Из (6.51) следует тождество

$$\int\limits_{Q_t}\left[-u^N\varphi_t+a_i\left(x, t, u^N, u^N_x\right)\varphi_{x_i}+a\left(x, t, u^N, u^N_x\right)\varphi\right]dx\,dt+$$
$$+\int\limits_{\Omega}u^N\varphi\,dx\Big|_{t=0}^{t=t}=0, \qquad 0\leqslant t\leqslant T, \qquad (6.55)$$

справедливое для любой функции $\varphi=\sum\limits_{k=1}^{N}d_k(t)\psi_k(x)$, где $d_k(t)$ — какие-либо непрерывные функции $t$, имеющие ограниченные на $[0, T]$ обобщенные производные $d'_k(t)$. Совокупность таких $\varphi$ обозначим через $\mathscr{P}_N$. Функция $u^N$ принадлежит к $\mathscr{P}_N$.

Попробуем перейти к пределу по $N\to\infty$ в (6.55) при фиксированном $\varphi$. Функции $A^N_i(x, t)=a_i\left(x, t, u^N, u^N_x\right)$ в силу оценок (6.46), (6.49) и (6.53) имеют равномерно ограниченные нормы в пространстве $L_{m'}(Q_T)$. Ввиду этого можно выбрать подпоследовательность индексов, для которой эти функции сходятся слабо в $L_{m'}(Q_T)$ к элементам $A_i(x, t)$ пространств $L_{m'}(Q_T)$. Будем считать, что вся последовательность $A^N_i$, $N=1, 2, \ldots$, сходится слабо в $L_{m'}(Q_T)$ к $A_i$.

Условимся ради сокращения рассуждений не отмечать необходимость выделения из компактной последовательности сходящейся подпоследовательности, а говорить о сходимости самой последовательности.

Благодаря оценке (6.53) и слабой сходимости $u^N$ к $u$ в $L_2(\Omega)$, равномерной по $t\in[0, T]$, функции $u^N$ сходятся к $u$

сильно в норме $L_{2,m}(Q_T)$, что видно из неравенства (6.40), примененного к разности $u^N - u^{N_1}$. Из сходимости же $u^N$ к $u$ в $L_{2,m}(Q_T)$ следует сходимость $u^N$ к $u$ в $L_2(\Omega)$ для почти всех $t$ из $[0, T]$ и почти всюду в $Q_T$. Кроме этого, из нее и равномерной ограниченности $\|u^N\|_{q, Q_T}$ (см. (6.54)) следует сильная сходимость $u^N$ в $L_{q^*}(Q_T)$ с любым $q^* < q$ и слабая сходимость в $L_q(Q_T)$ (см. лемму 6.3).

Такая сходимость $u^N$ к $u$, а также оценки (6.47), (6.48) гарантируют в силу леммы 6.3 сходимость интегралов

$$\int_{Q_t} \bar{a}_i(x, t, u^N)\, u^N_{x_i} \varphi^{N'} dx\, dt, \quad \int_{Q_t} \bar{\bar{a}}(x, t, u^N)\, \varphi^{N'} dx\, dt, \quad t \in [0, T],$$

$N, N' \to \infty$, а потому и интегралов $\int_{Q_t} a(x, t, u^N, u^N_x)\, \varphi^{N'} dx\, dt$ к интегралам $\int_{Q_t} \bar{a}_i(x, t, u)\, u_{x_i} \varphi\, dx\, dt$, $\int_{Q_t} \bar{\bar{a}}(x, t, u)\, \varphi\, dx\, dt$ и $\int_{Q_t} a(x, t, u, u_x)\, \varphi\, dx\, dt$ соответственно для любой последовательности $\{\varphi^{N'}\}$ из $L_q(Q_T)$, сходящейся почти всюду в $Q_T$ к $\varphi$ и имеющей равномерно ограниченные нормы $\|\varphi^{N'}\|_{q, Q_T}$. В частности, это будет верно и при произвольно фиксированном элементе $\varphi$ из $\mathscr{P}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Таким образом, в (6.55) можно перейти к пределу по $N \to \infty$, в результате чего получим тождество

$$\int_{Q_t} \left[ -u\varphi_t + A_i \varphi_{x_i} + a(x, t, u, u_x)\, \varphi \right] dx\, dt + \int_{\Omega} u\varphi\, dx \Big|_{t=0}^{t=t} = 0. \tag{6.56}$$

Оно справедливо при любом $\varphi$ из $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{P}_k$. Для доказательства того, что $u$ есть обобщенное решение задачи (6.50) нам осталось убедиться в справедливости тождества

$$\int_{Q_t} A_i \varphi_{x_i} dx\, dt = \int_{Q_t} a_i(x, t, u, u_x)\, \varphi_{x_i} dx\, dt \tag{6.57}$$

при $\varphi \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{P}_k$. Для этого воспользуемся условием монотонности

$$\int_{Q_t} \left[a_i\left(x, t, u^N, u_x^N\right) - a_i\left(x, t, u^N, \eta_x\right)\right]\left(u_{x_i}^N - \eta_{x_i}\right) dx\,dt + \\ + f\left(\| u^N - \eta \|_{q^*, Q_t}\right) \geqslant 0,$$

с произвольным элементом $\eta$ из $\mathscr{P}_N$. Заменим в нем $\int_{Q_t} a_i\left(x, t, u^N, u_x^N\right)\left(u_{x_i}^N - \eta_{x_i}\right) dx\,dt$ через соответствующие члены из (6.55), в котором $\varphi$ взято равным $u^N - \eta$, и преобразуем возникающий при этом интеграл $\int_{Q_t} u^N u_t^N\,dx\,dt$ к виду $\frac{1}{2}\| u^N(x, t)\|_{2, \Omega}^2 \Big|_{t=0}^{t=t}$. Это даст неравенство

$$\int_{Q_t} \left[-u^N\eta_t - a\left(x, t, u^N, u_x^N\right)\left(u^N - \eta\right) - \\ - a_i\left(x, t, u^N, \eta_x\right)\left(u_{x_i}^N - \eta_{x_i}\right)\right] dx\,dt - \frac{1}{2}\| u^N \|_{2, \Omega}^2 \Big|_{t=0}^{t=t} + \\ + (u^N, \eta)\Big|_{t=0}^{t=t} + f\left(\| u^N - \eta \|_{q^*, Q_t}\right) \geqslant 0. \quad (6.58)$$

В нем можно перейти к пределу по $N \to \infty$ при фиксированном $\eta$ для почти всех $t$ из $[0, T]$, и получить в пределе неравенство

$$\int_{Q_t} \left[-u\eta_t - a(x, t, u, u_x)(u - \eta) - \\ - a_i\left(x, t, u, \eta_x\right)\left(u_{x_i} - \eta_{x_i}\right)\right] dx\,dt - \frac{1}{2}\| u \|_{2, \Omega}^2 \Big|_{t=0}^{t=t} + \\ + (u, \eta)\Big|_{t=0}^{t=t} + f\left(\| u - \eta \|_{q^*, Q_t}\right) \geqslant 0. \quad (6.59)$$

Справедливость этого следует из установленной выше сходимости $u^N$ к $u$ и $a\left(x, t, u^N, u_x^N\right)$ к $a\left(x, t, u, u_x\right)$, а также из того, что функции $a_i(x, t, u^N, \eta_x)$ сходятся к $a_i(x, t, u, \eta_x)$ почти всюду в $Q_T$, а в силу (6.46) и леммы 6.3 в норме $L_{m'}(Q_T)$.

Если бы в (6.56) можно было взять $\varphi$ равным $u$, то из него мы получили бы равенство

$$\frac{1}{2}\|u\|^2_{2,\Omega}\Big|_{t=0}^{t=t}+\int\limits_{Q_t}\left[A_i u_{x_i}+a(x,\,t,\,u,\,u_x)\,u\right]dx\,dt=0. \tag{6.60}$$

Непосредственно этого сделать нельзя, ибо относительно $u$ известно лишь, что она есть элемент $\overset{\circ}{V}_{m,2}(Q_T)$, а элементы этого пространства, вообще говоря, не имеют производной по $t$. Однако равенства (6.60) справедливы. Доказывается это так же, как в §§ 2, 4 для линейных уравнений. Именно, сначала, исходя из тождества (6.56) доказываем, что функция $u$ непрерывна в норме $L_2(\Omega)$ по $t$, для чего, следуя § 4 гл. III, преобразуем тождество (6.56) к виду (4.11) гл. III и затем убеждаемся, что все рассуждения, проведенные при доказательстве сильной непрерывности $u$ по $t$ в $L_2(\Omega)$ в лемме 4.1 проходят и для случая $m$, отличного от 2 (справедливо так же и утверждение леммы 4.1 о стремлении к нулю $h^{-1}\|u(x,\,t+h)-u(x,\,t)\|^2_{2,\,Q_{T-h}}$ при $h\to 0$). После этого выводим (6.60) из (6.56) так, как (2.13) было выведено из (1.16) в гл. III. При этом выводе отличие $m$ от 2 несущественно. Мы ограничимся этими указаниями, предоставляя читателю самостоятельно проверить все детали.

Сложим теперь неравенство (6.59) с (6.60) и с (6.56), в котором $\varphi$ взято равным $-\eta\in\mathscr{P}_N$. В результате получим

$$\int\limits_{Q_t}\left[A_i(x,\,t)-a_i(x,\,t,\,u,\,\eta_x)\right]\left(u_{x_i}-\eta_{x_i}\right)dx\,dt+\\+f\left(\|u-\eta\|_{q^*,\,Q_t}\right)\geqslant 0. \tag{6.61}$$

Это неравенство выведено при условии, что $\eta\in\mathscr{P}_N$, а т. к. $N$ может быть взято любым, то $\eta$ есть произвольный элемент $\mathscr{P}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\mathscr{P}_k$. Нетрудно видеть, что множество $\mathscr{P}$ плотно в $\overset{\circ}{V}{}^{1,0}_{m,2}(Q_T)$. Кроме того, функции $A_i(x,\,t)-a_i(x,\,t,\,u,\,\eta_x)$ являются элементами $L_{m'}(Q_T)$. Поэтому (6.61) будет справедливо при любой функции $\eta$ из $\overset{\circ}{V}{}^{1,0}_{m,2}(Q_T)$. Возьмем в нем $\eta=u-\varepsilon\zeta$, где $\zeta(x,\,t)$ — какая-либо гладкая функция, равная нулю на $S_T$, а $\varepsilon$ — произвольное положительное число, и умножим обе части неравенства на $\varepsilon^{-1}$. Это даст

$$\int\limits_{Q_t} \left[A_i(x, t) - a_i\left(x, t, u, u_x - \varepsilon\zeta_x\right)\right]\zeta_{x_i}\,dx\,dt + \\ + \varepsilon^{-1} f\left(\varepsilon \|\zeta\|_{q^*, Q_t}\right) \geqslant 0,$$

откуда, устремляя $\varepsilon$ к нулю, получим

$$\int\limits_{Q_t} \left[A_i(x, t) - a_i\left(x, t, u, u_x\right)\right]\zeta_{x_i}\,dx\,dt \geqslant 0. \tag{6.62}$$

Т. к. $\zeta$ — произвольная гладкая функция, равная нулю на $S_T$, то в (6.62) имеет место знак равенства, а т. к. $A_i(x, t) - a_i(x, t, u, u_x) \in L_{m'}(Q_T)$, то это равенство справедливо при любой функции $\zeta$ из $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{m,2}(Q_T)$. Из него и (6.56) следует тождество

$$\int\limits_{Q_t} \left[-u\varphi_t + a_i\left(x, t, u, u_x\right)\varphi_{x_i} + a\left(x, t, u, u_x\right)\varphi\right]dx\,dt + \\ + (u(x, t), \varphi(x, t)) - (\psi_0, \varphi(x, 0)) = 0. \tag{6.63}$$

Оно справедливо при любой $\varphi$ из $\mathscr{P}$, а потому и при любой функции $\varphi$ из $\overset{\circ}{V}{}^{1,0}_{m,2}(Q_T)$, имеющей производную $\varphi_t$ из $L_2(Q_T)$. Тем самым установлено, что $u$ есть решение задачи (6.50). Сформулируем это в виде теоремы:

Теорема 6.7. *Пусть выполнены условия* 1) — 3). *Тогда задача* (6.50) *при любом* $\psi_0 \in L_2(\Omega)$ *имеет по крайней мере одно решение и из* $\overset{\circ}{V}{}^{1,0}_{m,2}(Q_T)$. *Для него* $h^{-1}\|u(x, t+h) - u(x, t)\|^2_{2, Q_{T-h}} \to 0$ *при* $h \to 0$.

Совершенно также доказывается следующее обобщение теоремы 6.7.

Теорема 6.8. *Задача* (6.50) *имеет решение и из* $\overset{\circ}{V}{}^{1,0}_{m,2}(Q_T) \cap L_r(Q_T)$ *с* $h^{-1}\| u(x, t+h) - u(x, t)\|^2_{2, Q_{T-h}} \to 0$ *при* $h \to 0$ *при любой* $\psi_0 \in L_2(\Omega)$, *если выполнены условия*:

1′) *При* $(x, t, u, p) \in \{\overline{\Omega} \times [0, T] \times E_1 \times E_n\}$ *все нижеследующие функции измеримы по* $(x, t, u, p)$ *и непрерывны по* $(u, p)$:

$$a_i(x,t,u,p)=\hat{a}_i(x,t,u,p)+a_i'(x,t,u,p),\ a(x,t,u,p)=$$
$$=\bar{a}_i(x,t,u)p_i+\bar{\bar{a}}(x,t,u)+a'(x,t,u,p)+a''(x,t,u,p),$$
$$|\hat{a}_i(x,t,u,p)|\leqslant\varphi_1(x,t)+c|u|^{\frac{r^*}{m'}}+c|p|^{m-1},\varphi_1\in L_{m'}(Q_T),$$
$$|a_i'(x,t,u,p)|\leqslant\varphi_1(x,t)+c(|u|^{\frac{z}{m'}}+|p|^{m-1}),\ |\bar{a}_i(x,t,u)|\leqslant$$
$$\leqslant\varphi_2(x,t)+c|u|^{\frac{r^*}{\lambda}},\ \varphi_2\in L_\lambda(Q_T),\ \frac{1}{\lambda}+\frac{1}{m}+\frac{1}{p}=1,\ |\bar{\bar{a}}(x,t,u)|\leqslant$$
$$\leqslant\varphi_3(x,t)+c|u|^{\frac{r^*}{r'}},\ \varphi_3\in L_{r'}(Q_T),\ |a'(x,t,u,p)|\leqslant\varphi_4(x,t)+$$
$$+c(|u|^{\frac{r}{r'}}+|p|^{\frac{m}{r'}}),\ \varphi_4\in L_{r'}(Q_T),\ |a''(x,t,u,p)|\leqslant\varphi_4(x,t)+$$
$$+c(|u|^{\frac{r^*}{r'}}+|p|^{\frac{m}{r'}}),$$

*где* $r\geqslant q=m\dfrac{n+2}{n},\ r^*<r,\ r'=\dfrac{r}{r-1},\ m'=\dfrac{m}{m-1},$

$m>\dfrac{2n+2}{n+2}.$

2′) *При любой функции $u$ из* $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ *и почти всех $t$ из* $[0,T]$ *справедливо неравенство*

$$\int_\Omega[a_i(x,t,u,u_x)u_{x_i}+a(x,t,u,u_x)u]\,dx\geqslant$$
$$\geqslant\nu\int_\Omega|u_x|^m\,dx+\nu_1\int_\Omega|u|^r\,dx-c(t)\int_\Omega(1+u^2)\,dx,$$
$$\nu,\ \nu_1>0,\quad\int_0^T c(t)\,dt<\infty.$$

3′) *При любых функциях $u$ из* $L_r(Q_T)$, $v$ *и* $w$ *из* $L_r(Q_T)\cap\overset{\circ}{V}{}^{1,0}_{m,2}(Q_T)$ *и* $t\in[0,T]$ *имеем* $\int\limits_{Q_t}[\hat{a}_i(x,t,v,v_x)-$
$$-\hat{a}_i(x,t,v,w_x)+a_i'(x,t,v,v_x)-a_i'(x,t,w,w_x)]\times$$
$$\times(v_{x_i}-w_{x_i})+[a'(x,t,v,v_x)-a'(x,t,w,w_x)+a''(x,t,v,v_x)-$$
$$-a''(x,t,v,w_x)](v-w)\}\,dx\,dt+f(\|v-w\|_{r^*,\,Q_T})\geqslant 0,$$

*где $f(\tau)$ — непрерывная при $\tau \geqslant 0$ функция удовлетворяющая условию $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-1} f(\varepsilon\tau) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$. Если $\bar{a}_i(x, t, u) = 0$, то предположение $m > \frac{2n+2}{n+2}$ можно заменить на следующее: $m > \frac{2n}{n+2}$ при $n \geqslant 2$ и $m \geqslant 1$ при $n = 1$.*

При $r = q$ и $a' = a'' = a_i' \equiv 0$ условия 1′) — 3′) совпадают с условиями 1) — 3) теоремы 6.7. Можно было бы предположения о функциях $\varphi_i(x, t)$ в условиях 1′) — 3′) формулировать в виде их принадлежности к пространствам $L_{q_i, r_i}(Q_T)$.

Видоизменяя метод Галёркина так, как это сделано в [$33_{11}$] для линейных уравнений, и накладывая на известные функции бо́льшие ограничения, можно установить существование решения задачи (6.50), обладающего лучшими свойствами, например, имеющего производные $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ (см. в связи с этим [$10_{4,5}$ и $17_1$]).

Отметим, наконец, что теоремы, аналогичные теоремам 6.7 и 6.8, справедливы и для квазилинейных параболических уравнений произвольно высокого порядка, а также для квазилинейных строго параболических систем, и доказываются они так же, как это только что было сделано для уравнений (6.50) второго порядка, при этом в качестве краевого условия можно брать не только первое, но и любое из тех, что указаны в § 5 гл. III и в § 7 данной главы.

Доказательству существования обобщенных решений таких задач посвящены работы [$4_{1-4}$, $10_{4,5}$, 17].

## § 7. Другие краевые задачи

В этом параграфе мы рассмотрим вторую и третью краевые задачи для уравнений вида

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - a_{ij}(x, t, u) u_{x_i x_j} + b(x, t, u, u_x) = 0, \quad (7.1)$$

являющихся частным случаем уравнений (0.1). Именно, будем задавать на боковой поверхности цилиндра $Q_T$ граничное условие

$$\mathscr{L}^{(S)}u \equiv \left[a_{ij}(x, t, u) u_{x_j} \cos(\mathbf{n}, x_i) + \psi(x, t, u)\right]\Big|_{S_T} = 0, \quad (7.2)$$

а на нижнем основании $Q_T$ — условие

$$u|_{t=0} = \psi_0(x). \tag{7.3}$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ есть вектор внешней нормали к поверхности $S$, которую мы предполагаем достаточно гладкой.

Мы будем исследовать разрешимость задачи (7.1) — (7.3) в классе $H^{2+\beta,\, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$. Предварительно установим все необходимые для этого оценки. Принимая во внимание результаты §§ 1—3, при получении оценок достаточно ограничиться рассмотрением малых подобластей $Q'$, прилегающих к боковой поверхности цилиндра $Q_T$. Фиксируем, например, какой-нибудь участок $S'$ границы $S$, и будем обозначать через $\Omega'$ произвольную подобласть $\Omega$, прилегающую к $S'$, а через $Q'_T$ цилиндры вида $\Omega' \times (0, T)$. Без ограничения общности можно считать, что $S'$ лежит в плоскости $x_n = 0$, а $\Omega$ — в полупространстве $x_n \leqslant 0$ (этого всегда можно добиться с помощью преобразования независимых переменных).

Имея в виду основную цель этого параграфа — доказательство существования классического решения задачи (7.1) — (7.3), будем проводить все оценки для решений $u(x, t)$ из $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, хотя многие из них можно получить и при более слабых предположениях относительно $u(x, t)$, как это сделано в §§ 1—3.

Начнем с вывода оценки нормы $|u|^{(\alpha)}_{Q'_T}$, считая, что $\max\limits_{Q_T}|u(x, t)| \leqslant M$ уже оценен. Относительно функций $a_{ij}$, $b$ и $\psi$ будем предполагать, что при $(x, t) \in \overline{Q}_T$ и $|u| \leqslant M$ функции $a_{ij}(x, t, u)$ и $\psi(x, t, u)$ дифференцируемы по $x$, $u$ и удовлетворяют неравенствам

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, t, u)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \quad \nu > 0, \tag{7.4}$$

$$\left| \frac{\partial a_{ij}(x, t, u)}{\partial u}, \ \frac{\partial a_{ij}}{\partial x}, \ \psi, \ \frac{\partial \psi}{\partial u}, \ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leqslant \mu, \tag{7.5}$$

а $b(x, t, u, p)$ при тех же $(x, t, u)$ и произвольных $p$ удовлетворяет неравенству

$$|b(x, t, u, p)| \leqslant \mu(1 + p^2). \tag{7.6}$$

Пусть $u(x, t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ есть решение уравнения (7.1), удовлетворяющее условию (7.2). При любой функции $\eta(x, t)$ из $V_2^1(Q_T)$ справедливо тождество

$$\int_{t_0}^{t} \int_{\Omega} \Big[ u_t \eta + a_{ij}(x, t, u) u_{x_j} \eta_{x_i} + \\ + \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial u} u_{x_i} u_{x_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} u_{x_j} + b \right) \eta \Big] dx\, dt + \\ + \int_{t_0}^{t} \int_{S} \psi(x, t, u) \eta \, dx\, dt = 0, \quad 0 \leqslant t_0 < t \leqslant T. \tag{7.7}$$

Для функций $\eta(x, t)$, равных нулю на $S_T \setminus S'_T$, где $S'_T = S' \times [0, T]$, последний интеграл можно преобразовать к объемному

$$\int_{t_0}^{t} \int_{S} \psi\eta \, dx\, dt = \int_{t_0}^{t} \int_{\Omega} \frac{d}{dx_n} (\psi\eta)\, dx\, dt = \\ = \int_{t_0}^{t} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial\psi}{\partial u} u_{x_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \right) \eta + \psi \frac{d\eta}{dx_n} \right] dx\, dt,$$

при этом тождество (7.7) примет вид

$$\int_{t_0}^{t} \int_{\Omega} [u_t \eta + a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} + a\eta + \psi \eta_{x_n}]\, dx\, dt = 0, \tag{7.8}$$

где

$$a(x, t, u, u_x) = \frac{\partial a_{ij}(x, t, u)}{\partial u} u_{x_i} u_{x_j} + \\ + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} u_{x_j} + b(x, t, u, u_x) + \frac{\partial\psi}{\partial u} u_{x_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}.$$

Это равенство того же вида, что и (1.6), с теми же условиями на $a_i(x, t, u, p) = a_{ij}(x, t, u) p_j + \psi\delta_i^n$ и

$a(x, t, u, p)$, что и в (1.6), только в отличие от (1.6) здесь функция $\eta(x, t)$ обязана обращаться в нуль не на всей поверхности $S_T$, а лишь на $S_T \setminus S'_T$.

Положим в (7.8) $\eta = u^{(k)}(x, t)\xi^2(x, t)$, где значение $k$ любое, а $\xi$ — произвольная гладкая функция со значениями между 0 и 1, равная нулю на боковой поверхности произвольно выбранного цилиндра $Q(\rho, \tau) = K_\rho \times (t_0, t_0+\tau)$ с $0 \leqslant t_0 < t_0 + \tau \leqslant T$, не пересекающего $S_T \setminus S'_T$, и при $x \in K_\rho$. В полученном равенстве произведем оценки с помощью неравенства (1.2) главы II и условий (7.4)—(7.6), как это делалось в § 1 при выводе (1.11). В результате получим неравенство

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} [u^{(k)}(x, t)\zeta(x, t)]^2\,dx\,\Big|_{t_0}^{t} + \nu\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega_\rho} (u_x^{(k)})^2\zeta^2\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant c(\mu)\int_{t_0}^{t}\int_{A_{k,\rho}(t)} \left[u_x^2 u^{(k)}\zeta^2 + \zeta^2 + u^{(k)^2}\zeta_x^2 + u^{(k)^2}|\zeta\zeta_t|\right]dx\,dt,$$

где $A_{k,\rho}(t)$ — множество $x$ из $\Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega$, для которых $u(x, t) > k$. Отсюда при $k$, удовлетворяющих условию

$$\max_{Q(\rho, \tau)} u(x, t) - k \leqslant \delta = \frac{\nu}{2c(\mu)}, \tag{7.9}$$

следует неравенство

$$\|u^{(k)}(x, t_0+\tau)\zeta(x, t_0+\tau)\|^2_{2, \Omega_\rho} + \nu\|u_x^{(k)}\zeta\|^2_{2, Q(\rho, \tau)} \leqslant$$
$$\leqslant \|u^{(k)}(x, t_0)\zeta(x, t_0)\|^2_{2, \Omega_\rho} + \gamma\left[\int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{\Omega_\rho} u^{(k)^2}\left[\zeta_x^2 + \zeta|\zeta_t|\right]dx\,dt + \right.$$
$$\left. + \int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta\,dx\,dt\right], \quad 0 \leqslant t_0 \leqslant t_0 + \tau \leqslant T,$$

совпадающее с неравенством (7.5) главы II с $r = \frac{2(n+2)}{n}$,

$\varkappa=\frac{2}{n}$. Такому же неравенству удовлетворяет и функция $-u(x, t)$. Как отмечалось в замечании 8.1 главы II, этого достаточно, чтобы заключить о принадлежности функции $u(x, t)$ классу $\hat{\mathfrak{B}}_2\left(Q_T \cup \Gamma', M, \gamma, \frac{2n+4}{n}, \delta, \frac{2}{n}\right)$, где $\Gamma'$ есть объединение $S'_T$ и нижнего основания цилиндра $Q_T$.

Отсюда на основании теоремы 8.2 и леммы 8.1 главы II можно сделать такой вывод:

Теорема 7.1. *Для любого решения* $u(x, t)$ *из* $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ *задачи* (7.1)—(7.3) *и произвольного цилиндра* $Q_\rho=K_\rho\times(t_0, t_0+\rho^2)$, *не пересекающего* $S_T \setminus S'_T$, *верны оценки*

$$\operatorname{osc}\{u, Q_\rho \cap Q_T\} \leqslant c\rho^\alpha, \tag{7.10}$$

$$\int\limits_{Q_\rho \cap Q_T} u_x^2\,dx\,dt \leqslant c_1\rho^{n+2\alpha}, \tag{7.11}$$

*в которых показатель* $\alpha>0$ *определяется лишь величиной* $M=\max\limits_{Q_T}|u|$ *и постоянными* $\nu$ *и* $\mu$ *из неравенств* (7.4)—(7.6), $c$ *определяется* $M$, $\nu$, $\mu$, $|u(x, 0)|_\Omega^{(\beta)}$ *и расстоянием центра* $K_\rho$ *до* $S \setminus S'$, *а* $c_1$ *зависит от тех же величин, что и* $c$, *и от* $\max\limits_\Omega|u_x(x, 0)|$.

Нам предстоит теперь получить априорные оценки $\max\limits_{Q'_T}|u_x|$ и $|u|_{Q_T}^{(1+\delta)}$. Это будет сделано на следующем пути. Сначала установим оценку интегралов $\int\limits_\Omega |u_t|^q\,dx$ с любым $q \geqslant 1$. Затем используем ее для $q=n+1$. Именно, уравнение (7.1) при каждом $t$ из $[0, T]$ рассмотрим как квазилинейное эллиптическое уравнение, зависящее от $t$ как от параметра:

$$a_{ij}(x, t, u)\,u_{x_ix_j}+\hat{a}(x, t, u, u_x)=0,$$

для которого функции $a_{ij}$ и $\hat{a}(x, t, u, p)=-b(x, t, u, p)-$

— $u_t(x, t)$ удовлетворяют условиям (7.4) — (7.5) и

$$|\hat{a}(x, t, u, p)| \leqslant \mu p^2 + \varphi(x, t); \quad \max_{t \in [0, T]} \|\varphi\|_{n+1, \Omega} \leqslant \mu. \qquad (7.12)$$

Для решений таких уравнений, удовлетворяющих граничному условию (7.2), справедливы оценки

$$\max_{\Omega} |u_x| \leqslant c, \quad \operatorname{osc}\{u_x, \Omega_\rho\} \leqslant c\rho^\alpha, \qquad (7.13)$$

если граница $S$ области $\Omega$ принадлежит классу $O^2$, а функция $\psi$ из (7.2) подчиняется условию (7.5). Постоянные $c$ и $\alpha > 0$ в (7.13) определяются лишь величинами $\nu^{-1}$ и $\mu$ из (7.4), (7.5) и (7.12), $M = \max\limits_{\Omega} |u|$ и границей $S$. При несколько более жестких ограничениях — дифференцируемости $a$ по $x$, $u$, $p$ и ограниченности $\varphi(x, t)$ — оценки (7.13) выведены в главе X книги [1], однако данное в [1] доказательство без существенных изменений переносится на случай условий (7.12).

Итак, имея оценки интегралов $\int\limits_{\Omega} |u_t|^{n+1} dx$, мы в силу (7.13) будем иметь оценки $\max\limits_{Q_T} |u_x|$ и постоянных Гёльдера $\langle u_x(x, t)\rangle_{\Omega}^{(\alpha)}$, $t \in [0, T]$, по переменным $x$. Используя затем оценку для $\int\limits_{\Omega} |u_t|^q dx$ с $q > 2n + 2$, а также теорему 2.1 и лемму 3.1 гл. II, придем к оценке

$$|u|_{Q_T}^{(1+\delta)} \leqslant c. \qquad (7.14)$$

При выводе дальнейших оценок нам потребуются еще следующие ограничения на функции $a_{ij}$, $b$ и $\psi$ при $(x, t) \in \overline{Q}_T$ и $|u| \leqslant M$:

$$\left.\begin{aligned} &|\psi_{uu}(x, t, u), \psi_{ux}, \psi_{ut}, a_{ijt}, \psi_t| \leqslant \mu, \\ &|b_p|(1 + |p|) + |b_u| + |b_t| \leqslant \mu(1 + p^2), \end{aligned}\right\} \qquad (7.15_1)$$

и

$$|a_{ijuu}, a_{ijut}, a_{ijux}, a_{ijxt}| \leqslant \mu. \qquad (7.15_2)$$

Прежде чем оценивать интегралы $\int |u_t|^q dx$, докажем лемму.

Лемма 7.1. *Для любого шара $K_\rho$ с центром в $\overline{\Omega}$, который, также как и концентрический ему шар $K_{2\rho}$, не пересекается с $S \setminus S'$, верны оценки*

$$\int_0^T \int_{\Omega_\rho} \left(u_t^2 + |u_x|^4 + |u_{xx}|^2\right) dx\, dt \leqslant c, \tag{7.16}$$

$$\max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega_\rho} u_x^2(x, t)\, dx \leqslant c\rho^{n-2+2\alpha} \tag{7.17}$$

*с постоянными $c$ и $\alpha > 0$, зависящими только от $M = \max_{Q_T} |u|$ $\nu$ и $\mu$ из* (7.4) — (7.6) и (7.15), $\max_{\Omega} |u_x(x, 0)|$ *и расстояния центра $K_\rho$ до $S \setminus S'$.*

Возьмем в равенстве (7.8) $t_0 = 0$, а $\eta = u_t(x, t)\zeta^2(x, t)$, где $\zeta(x, t)$ — гладкая неотрицательная функция, равная нулю на боковой поверхности цилиндра $K_{2\rho} \times (0, T)$ и вне его.

То, что $u_t\zeta^2 \in V_2^{1,0}(Q_T)$, точнее существование производных $u_{tx_i}$ из $L_2(Q_T)$, будет доказано ниже, в лемме 7.2. Замечая, что

$$a_{ij}u_{x_j}u_{tx_i}\zeta^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\zeta^2\right) - \frac{1}{2}\frac{d(a_{ij}\zeta^2)}{dt} u_{x_i}u_{x_j}$$

и $\psi u_{tx_n}\zeta^2 = \dfrac{d}{dt}\left(\psi u_{x_n}\zeta^2\right) - u_{x_n}\dfrac{d}{dt}(\psi\zeta^2)$, получим из (7.8)

$$\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} u_t^2\zeta^2\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\rho}} \left(a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\zeta^2 + 2\psi u_{x_n}\zeta^2\right) dx \Bigg|_0^t =$$

$$= \int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} \Big[\left(a_{iju}u_t\zeta^2 + a_{ij}2\zeta\zeta_t + a_{ijt}\zeta^2\right)\frac{1}{2} u_{x_i}u_{x_j} - a_{ij}u_{x_j}u_t 2\zeta\zeta_{x_i} -$$

$$- a u_t\zeta^2 + u_{x_n}\left(\psi_u u_t\zeta^2 + \psi_t\zeta^2 + \psi 2\zeta\zeta_t\right) - \psi u_t 2\zeta\zeta_{x_n}\Big] dx\, dt.$$

Отсюда, используя предположения (7.4) — (7.6) и (7.15) и неравенство (1.2) главы II, легко вывести неравенство

$$\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} u_t^2\zeta^2 + \int_{\Omega_{2\rho}} u_x^2(x, t)\zeta^2(x, t)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c \int_{\Omega_{2\rho}} \left(u_x^2(x, 0)+1\right)\zeta^2(x, 0)\,dx + c_1\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} \Big[|u_x|^4\zeta^2 + $$

$$+\left(1+u_x^2\right)\left(|\zeta\zeta_t| + \zeta_x^2+\zeta^2\right)\Big]\,dx\,dt. \tag{7.18}$$

Покажем, что для интеграла $\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} |u_x|^4\zeta^2\,dx\,dt$ верна оценка

$$\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} |u_x|^4\zeta^2\,dx\,dt \leqslant c_2\rho^\alpha \int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} \left(u_{xx}^2\zeta^2 + u_x^2\zeta_x^2\right)dx\,dt. \tag{7.19}$$

На самом деле, с помощью интегрирования по частям находим

$$\int_{\Omega_{2\rho}} |u_x|^4\zeta^2\,dx = -\int_{\Omega_{2\rho}} (u-u_0)\left(\Delta u u_x^2\zeta^2 + 2u_{x_l}u_{x_kx_l}u_{x_k}\zeta^2 + \right.$$

$$\left. + u_{x_l}u_x^2 2\zeta\zeta_{x_l}\right)dx + \int_{K_{2\rho}\cap S} u_x^2(u-u_0)\,u_{x_n}\zeta^2\,ds. \tag{7.20}$$

Здесь $u_0 = u_0(t)$ — значение $u(x, t)$ в центре шара $K_{2\rho}$. В силу оценки (7.10) $\max\limits_{\Omega_{2\rho}}|u(x, t) - u_0(t)| \leqslant c\rho^\alpha$, где $c$ зависит от расстояния центра $K_\rho$ до $S\setminus S'$. Поэтому граничный интеграл в (7.20) не превосходит выражения

$$c_3\rho^\alpha \int_{K_{2\rho}\cap S'} |u_x|^3\zeta^2\,ds = c_3\rho^\alpha \int_{\Omega_{2\rho}} \frac{\partial}{\partial x_n}\left(|u_x|^3\zeta^2\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant c_4\rho^\alpha \int_{\Omega_{2\rho}} \left(|u_{xx}|\,u_x^2\zeta^2 + |u_x|^3\zeta|\zeta_x|\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant c_5\rho^\alpha \int_{\Omega_{2\rho}} \left(\varepsilon u_x^4\zeta^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\,u_{xx}^2\zeta^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\,u_x^2\zeta_x^2\right)dx.$$

Аналогично оценивается первый интеграл в правой части (7.20). Беря $\varepsilon$ достаточно малым, приходим к оценке (7.19).

Оценим теперь интеграл $\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_{2\rho}} u_{xx}^2 \zeta^2\, dx\, dt$. Для этого в тождестве (7.8) положим

$$\eta = \sum_{s=1}^{n-1} \left(u_{x_s}\zeta^2\right)_{x_s}$$

и проведем интегрирование по частям. Это даст

$$\sum_{s=1}^{n-1} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_{2\rho}} \Big[(u_t + a)\left(u_{x_s x_s}\zeta^2 + 2u_{x_s}\zeta\zeta_{x_s}\right) - \\ - \left(a_{ij}u_{x_s x_j} + a_{iju}u_{x_s}u_{x_j} + a_{ijx_s}u_{x_j} + \frac{d\psi}{dx_s}\delta_i^n\right) \times \\ \times \left(u_{x_s x_i}\zeta^2 + u_{x_s}2\zeta\zeta_{x_i}\right)\Big]\, dx\, dt = 0.$$

Отсюда, используя условия (7.4) — (7.6) и неравенство (1.2) главы II, нетрудно вывести неравенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_{2\rho}} \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} u_{x_s x_i}^2 \zeta^2\, dx\, dt \leqslant \\ \leqslant c_6 \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_{2\rho}} \left[u_t^2\zeta^2 + |u_x|^4\zeta^2 + (u_x^2 + 1)(\zeta_x^2 + \zeta^2)\right] dx\, dt. \tag{7.21}$$

С другой стороны, разрешая уравнение (7.1) относительно производной $u_{x_n x_n}$:

$$u_{x_n x_n} = \frac{1}{a_{nn}}\left(u_t - \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{si}u_{x_i x_s} + b\right),$$

и учитывая предположения (7.4) и (7.6), мы видим, что

$$u_{x_n x_n}^2 \leqslant c_7\left(u_t^2 + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} u_{x_s x_i}^2 + |u_x|^4 + 1\right). \tag{7.22}$$

Из (7.22) и (7.21) следует

$$\int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} u_{xx}^2 \zeta^2\,dx\,dt \leqslant c_8 \int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} \left[u_t^2\zeta^2 + |u_x|^4\zeta^2 + \right.$$
$$\left. + \left(u_x^2 + 1\right)\left(\zeta_x^2 + \zeta^2\right)\right] dx\,dt. \qquad (7.23)$$

Рассмотрим неравенства (7.18), (7.19) и (7.23). При $\rho$, не превосходящих достаточно малого числа $\rho_0$ (величина $\rho_0$ определяется постоянными $c_i$ и $\alpha$ из (7.18), (7.19) и (7.23)), из этих неравенств следует оценка

$$\int_{\Omega_{2\rho}} u_x^2(x, t)\zeta^2(x, t)\,dx +$$
$$+ \int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} \left(|u_x|^4 + u_{xx}^2 + u_t^2\right)\zeta^2\,dx\,dt \leqslant c_9 \int_{\Omega_{2\rho}} \left[u_x^2(x, 0) + 1\right] \times$$
$$\times \zeta^2(x, 0)\,dx + c_9 \int_0^t \int_{\Omega_{2\rho}} \left(u_x^2 + 1\right)\left(|\zeta_t|\zeta + \zeta_x^2 + \zeta^2\right) dx\,dt.$$

Из нее и неравенств (7.11) следуют, как легко видеть, оба утверждения леммы 7.1.

Докажем следующее предложение.

Лемма 7.2. *По любому $q \geqslant 1$ можно указать постоянную $c(q)$ такую, что*

$$\max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega'} |u_t|^q\,dx \leqslant c(q), \qquad (7.24)$$

*где $\Omega'$ — произвольная подобласть $\Omega$, отстоящая от $S \setminus S'$ на положительное расстояние $d$. Постоянная $c(q)$ зависит лишь от $q$, $M$, постоянных $\nu$ и $\mu$ из условий (7.4)—(7.6) и (7.15$_{1,2}$), от $\max\limits_{\Omega} |u_x(x, 0)|$, $\int_{\Omega} |u_t(x, 0)|^q\,dx$ и $d$.*

Возьмем от обеих частей равенств (7.1) и (7.2) разностное отношение по $t$:

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_t - \frac{\Delta\left(a_{ij}u_{x_ix_j}\right)}{\Delta t} + \frac{\Delta b}{\Delta t} = 0, \qquad (7.25)$$

$$\left[\frac{\Delta}{\Delta t}\left(a_{ij}u_{x_j}\right)\cos(\mathrm{n}, x_i) + \frac{\Delta\psi}{\Delta t}\right]\Big|_{S_T} = 0, \qquad (7.26)$$

затем умножим (7.25) на $\left|\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|^{r-2}\frac{\Delta u}{\Delta t}\zeta^2(x)$, $r\geqslant 2$, результат проинтегрируем по $\Omega$ и по промежутку $[0, t]$, и в полученном равенстве произведем интегрирование по частям с учетом условия (7.26). Это даст

$$\frac{1}{r}\int\limits_\Omega\left|\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|^r\zeta^2\,dx\Big|_0^t+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\left[\frac{\Delta\left(a_{ij}u_{x_j}\right)}{\Delta t}\frac{d}{dx_i}\left(\left|\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|^{r-2}\frac{\Delta u}{\Delta t}\zeta^2\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{da_{ij}}{dx_i}u_{x_j}\right)+\frac{\Delta b}{\Delta t}\right)\left|\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|^{r-2}\frac{\Delta u}{\Delta t}\zeta^2\right]dx\,dt+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_S\frac{\Delta\psi}{\Delta t}\left|\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|^{r-2}\frac{\Delta u}{\Delta t}\zeta^2\,ds\,dt=0. \quad (7.27)$$

При $r=2$ и $\zeta\equiv 1$ из этого равенства, учитывая условия $(7.15_{1,2})$(7.4) — (7.6) и принадлежность $u(x, t)$ к $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, нетрудно вывести ограниченность интегралов

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\Delta u_{x_i}}{\Delta t}\right)^2dx\,dt,\quad 0\leqslant t\leqslant T-h,$$

равномерную относительно $|\Delta t|\leqslant h$, где $h$ — любое положительное число. Отсюда в силу леммы 4.11 главы II следует существование обобщенных производных вида $u_{x_it}$, квадратично-суммируемых по цилиндру $Q_T$.

Будем теперь считать функцию $\zeta(x)$ срезающей для какого-нибудь шара $K_\rho$, не пересекающегося с $S\setminus S'$. В равенстве (7.27) преобразуем последний интеграл к объемному, как это было сделано в (7.7), и затем перейдем к пределу по $\Delta t\to 0$. В результате придем к равенству

$$\frac{1}{r}\int\limits_{\Omega_\rho}|u_t(x, t)|^r\zeta^2(x)\,dx\,|_0^t+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_\rho}\left\{\left(a_{ij}u_{x_j}\right)_t\left(|u_t|^{r-2}u_t\zeta^2\right)_{x_i}+\right.$$
$$+\frac{d}{dt}\left(\frac{da_{ij}}{dx_i}u_{x_i}+b\right)|u_t|^{r-2}u_t\zeta^2+$$
$$\left.+\frac{d}{dx_n}\left[(\psi_u u_t+\psi_t)|u_t|^{r-2}u_t\zeta^2\right]\right\}dx\,dt=0.$$

Раскроем в нем выражения для производных по $t$ и $x_i$:

$$\frac{1}{r}\int_{\Omega_\rho}|u_t(x,t)|^r\zeta^2(x)\,dx\,\Big|_0^t+\int_0^t\int_{\Omega_\rho}\Big[\big(a_{ij}u_{x_jt}+a_{iju}u_tu_{x_j}+$$
$$+a_{ijt}u_{x_j}+\psi_u\delta_n^iu_t+\psi_t\delta_n^i\big)\big((r-1)|u_t|^{r-2}u_{tx_i}\zeta^2+$$
$$+|u_t|^{r-2}u_t2\zeta\zeta_{x_i}\big)+\big(b_t+b_uu_t+b_{u_{x_i}}u_{tx_i}+\psi_{uu}u_tu_{x_n}+$$
$$+\psi_{ux_n}u_t+\psi_{ut}u_{x_n}+\psi_{tx_n}+2a_{iju}u_{x_it}u_{x_j}+a_{ijuu}u_{x_i}u_{x_j}u_t+$$
$$+a_{ijut}u_{x_i}u_{x_j}+a_{ijx_iu}u_{x_j}u_t+a_{ijx_it}u_{x_j}\big)|u_t|^{r-2}u_t\zeta^2\Big]\,dx\,dt=0.$$

Отсюда, используя условия (7.4) — (7.5) и (7.15), нетрудно вывести неравенство

$$\int_{\Omega_\rho}|u_t|^r\zeta^2\,dx\,\Big|_0^t+\int_0^t\int_{\Omega_\rho}|u_t|^{r-2}u_{tx}^2\zeta^2\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant c_1(r)\int_0^t\int_{\Omega_\rho}|u_t|^r\big(\zeta_x^2+u_x^2\zeta^2+\zeta^2\big)\,dx\,dt,\tag{7.28}$$

в котором $c_1(r)$, вообще говоря, стремится к $\infty$ при $r\to\infty$. Покажем, что интеграл $\int_0^t\int_{\Omega_\rho}|u_t|^{r+1}\zeta^2\,dx\,dt$ также оценивается через правую часть этого неравенства и $\int_0^t\int_{\Omega_\rho}|u_t|^{r-2}u_{tx}^2\zeta^2\,dx\,dt$.

Действительно, полагая в (7.8) $\eta=|u_t|^{r-1}u_t\zeta^2$, получим

$$\int_0^t\int_{\Omega_\rho}\Big[|u_t|^{r+1}\zeta^2+a_{ij}u_{x_j}r|u_t|^{r-1}u_{tx_i}\zeta^2+$$
$$+a_{ij}u_{x_j}|u_t|^{r-1}u_t2\zeta\zeta_{x_i}+a|u_t|^{r-1}u_t\zeta^2+\psi r|u_t|^{r-1}u_{tx_n}\zeta^2+$$
$$+\psi|u_t|^{r-1}u_t2\zeta\zeta_{x_n}\Big]\,dx\,dt=0,$$

откуда в силу (7.4) — (7.6) и (7.28) следует нужная оценка для $\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\rho} |u_t|^{r+1}\zeta^2\,dx\,dt$. Таким образом, помимо (7.28), верно и такое неравенство:

$$\int\limits_{\Omega_\rho} |u_t|^r\zeta^2\,dx\Big|_0^t + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\rho} \left(|u_t|^{r-2}u_{tx}^2 + |u_t|^{r+1}\right)\zeta^2\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant c_1(r)\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\rho} |u_t|^r\left(\zeta_x^2 + u_x^2\zeta^2 + \zeta^2\right)dx\,dt. \qquad (7.29)$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\rho} u_x^2|u_t|^r\zeta^2\,dx\,dt$, стоящий в правой части. Для его оценки воспользуемся доказанными в лемме 7.1 неравенствами (7.17) и леммой 5.3 главы II. Согласно этой лемме

$$\int\limits_{\Omega_\rho} u_x^2|u_t|^r\zeta^2\,dx \leqslant c\rho^{2\alpha}\int\limits_{\Omega_\rho}\left(|u_t|^{\frac{r}{2}}\zeta\right)_x^2 dx,$$

и потому

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\rho} u_x^2|u_t|^r\zeta^2\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant c_2(r)\rho^{2\alpha}\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\rho}\left[|u_t|^{r-2}u_{tx}^2\zeta^2 + |u_t|^r\zeta_x^2\right]dx\,dt. \qquad (7.30)$$

Здесь постоянная $c_2(r)$ определяется величинами $\nu$ и $\mu$ из (7.4) и (7.6), $M$, $r$, расстоянием центра $K_\rho$ до $S\setminus S'$ и $\max\limits_{\Omega}|u_x(x, 0)|$. Из (7.30) и (7.29) следует, что при $\rho\leqslant\rho_0(r)$, где $\rho_0(r)$ выбирается из условия

$$c_2(r)\rho_0^{2\alpha}(r)\,c_1(r) = \frac{1}{2}, \qquad (7.31)$$

выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\rho} |u_t|^r \zeta^2 dx \Big|_0^t + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\rho} |u_t|^{r+1} \zeta^2 \, dx \, dt \leqslant$$
$$\leqslant c_3(r) \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\rho} |u_t|^r (\zeta^2 + \zeta_x^2) \, dx \, dt. \qquad (7.32)$$

Допустим, что мы хотим оценить $\int |u_t|^q \, dx$ при некотором $q \geqslant 2$. Применим неравенства (7.32) к последовательности сужающихся концентрических шаров $K_{\rho_r}$, $\rho_r = \rho_0(q)\left(1 - \frac{r}{2q}\right)$, $r = 2, \ldots, q$, беря при $\rho = \rho_r$ в качестве $\zeta(x)$ срезающую функцию для шара $K_{\rho_{r-1}}$. Тогда, учитывая полученную в лемме 7.1 оценку $\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\rho} u_t^2 \, dx \, dt$, получим интересующую нас оценку

$$\int\limits_{\Omega_{\frac{\rho_0(q)}{2}}} |u_t(x, t)|^q \, dx \leqslant c(q).$$

Здесь $t$ — произвольное значение из $[0, T]$, а $\rho_0(q)$ — достаточно малое, но фиксированное условием (7.31) число. Покрывая $\Omega'$ конечным числом таких шаров $K_{\frac{\rho_0(q)}{2}}$, придем к оценке (7.24).

Лемма 7.2 доказана.

Как отмечалось выше, из оценок (7.24) с $q > 2n + 2$ следуют оценки (7.13) и (7.14). Постоянные $c$, $\alpha$ и $\delta$ в них определяются $|u_x(x, 0)|_\Omega^{(\alpha)}$, а также теми величинами, что и $c(q)$ в лемме 7.2, в частности величиной $\|u_t(x, 0)\|_{q, \Omega}$. Последнюю можно, используя уравнение (7.1), оценить через $|u(x, 0)|_\Omega^{(2)}$. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 7.2. *Пусть функции* $a_{ij}(x, t, u)$, $b(x, t, u, p)$ *и* $\psi(x, t, u)$ *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $|u| \leqslant M$ *и произвольных* $p$ *подчиняются условиям* (7.4) — (7.6) *и* (7.15$_{1,2}$) *и* $S \in O^2$. *Тогда для любого решения* $u(x, t)$ *из* $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ *уравне-*

*ния* (7.1), *удовлетворяющего условию* (7.2) *и имеющего* $\max\limits_{Q_T}|u|\leqslant M$, *имеет место оценка*

$$\max_{Q_T}|u_x|\leqslant M_1, \quad |u|_{Q_T}^{(1+\delta)}\leqslant c, \tag{7.33}$$

*где постоянные* $M_1$, $c$ и $\delta>0$ *зависят лишь от* $M$, $\nu$ *и* $\mu$ *из* (7.4) — (7.6) *и* (7.15), *от нормы* $|u(x, 0)|_{\Omega}^{(2)}$ *и от границы* $S$.

Замечание. Из вывода теоремы видно, что если в ее условиях предположить, что не вся поверхность $S$, а лишь часть ее $S'$ принадлежит $O^2$ и условие (7.2) выполняется лишь на $S'_T=S'\times[0, T]$, тогда оценки (7.33) будут верны для любой области $Q'\subset Q_T$, отстоящей от $S_T\setminus S'_T$ на положительное расстояние $d$, причем постоянные $M_1$, $c$ в этом случае будут зависеть также и от $d$.

Выше при выводе всех оценок мы предполагали известной оценку $\max\limits_{Q_T}|u(x, t)|$. Эта последняя устанавливается с помощью того же приема, что и в линейном случае в § 2 главы I. Именно, верно следующее предложение, обобщающее теоремы 2.2, 2.3 главы I.

Теорема 7.3. *Пусть функции* $a_{ij}(x, t, u)$, $b(x, t, u, p)$ *и* $\psi(x, t, u)$ *подчиняются при произвольных* $u$ *условиям*:

$$\left.\begin{aligned}
&0\leqslant a_{ij}(x, t, u)\xi_i\xi_j\leqslant\mu_1\xi^2 \text{ при } (x, t)\in\overline{\Omega}\times(0, T],\\
&-ub(x, t, u, p)\leqslant c_0p^2+c_1u^2+c_2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } (x, t)\in\overline{Q}_T\setminus\Gamma_T,\\
&\nu_1\xi^2\leqslant a_{ij}(x, t, u)\xi_i\xi_j, \quad -u\psi(x, t, u)\leqslant c_3u^2+c_4\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } (x, t)\in S_T,
\end{aligned}\right\} \tag{7.34}$$

*где* $\mu_1$, $\nu_1=\mathrm{const}>0$, $c_i=\mathrm{const}\geqslant 0$, $i=0, \ldots, 4$. *Тогда для любого решения* $u(x, t)$ *из* $C^{2,1}(\overline{Q}_T\setminus\Gamma_T)$, *непрерывного в* $\overline{Q}_T$ *и имеющего непрерывные вплоть до* $S_T$ *производные* $u_x$, *справедлива оценка*

$$\max_{Q_T}|u(x, t)|\leqslant\lambda_1e^{\lambda T}\max\left\{\sqrt{c_2};\ \sqrt{c_4};\ \max_{\Omega}|u(x, 0)|\right\}, \tag{7.35}$$

*где постоянные* $\lambda$ *и* $\lambda_1$ *определяются лишь величинами* $\nu_1$, $\mu$, $c_0$, $c_1$ *и* $c_3$ *из* (7.34) *и границей* $S$ *области* $\Omega$, *которая предполагается принадлежащей классу* $O^2$.

*Если* $S \in O^1$ *и вместо* (7.34) выполнены условия

$$\left.\begin{array}{ll} a_{ij}(x, t, u)\xi_i\xi_j \geqslant 0 & \text{при } (x, t) \in \bar{\Omega} \times (0, T], \\ -ub(x, t, u, 0) \leqslant c_1 u^2 + c_2 & \text{при } (x, t) \in \bar{Q}_T \setminus \Gamma_T, \\ -u\psi(x, t, u) < 0 & \text{при } |u| > 0,\ (x, t) \in S_T, \\ \qquad c_1,\ c_2 = \text{const} \geqslant 0, & \end{array}\right\} \quad (7.36)$$

*тогда*

$$\max_{Q_T} |u(x, t)| \leqslant \min_{\lambda > c_1} e^{\lambda T} \max\left\{\sqrt{\frac{c_2}{\lambda - c_1}};\ \max_{\Omega} |u(x, 0)|\right\}. \quad (7.37)$$

Для доказательства первой части теоремы рассмотрим функцию $w(x, t) = e^{-\lambda t}\varphi(x)u(x, t)$, где $\varphi(x)$ и $\lambda$ выбираются из условий:

$$\left.\begin{array}{l} \min_{\Omega} \varphi(x) \geqslant 1;\ A(x, t) \equiv \\ \equiv \min_u \left[-\dfrac{1}{\varphi(x)} a_{ij}(x, t, u)\cos(\mathbf{n}, x_i)\varphi_{x_j}(x)\right]\Big|_S > c_3, \\ B(x, t) \equiv \min_u \left[\lambda + a_{ij}(x, t, u)\dfrac{\varphi_{x_i x_j}}{\varphi} - \right. \\ \qquad \left. - 2a_{ij}(x, t, u)\dfrac{\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}}{\varphi^2} - \dfrac{c_0\varphi_x^2}{\varphi^2}\right] > c_1, \quad x \in \Omega \end{array}\right\} \quad (7.38)$$

(существование таких $\varphi$ и $\lambda$ при наших условиях на $S$ и $a_{ij}$ очевидно).

Принимая во внимание соотношения

$$w_t = -\lambda w + e^{-\lambda t}\varphi u_t; \quad w_{x_i} = w\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} + e^{-\lambda t}\varphi u_{x_i};$$

$$w_{x_i x_j} = \frac{\varphi_{x_i x_j}}{\varphi} w + \left(\varphi_{x_i} u_{x_j} + \varphi_{x_j} u_{x_i}\right)e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\varphi u_{x_i x_j},$$

выводим, что $w(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$w_t + \lambda w - a_{ij}(x, t, u) w_{x_i x_j} + a_{ij} \frac{\varphi_{x_i x_j}}{\varphi} w + \\ + 2a_{ij} \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} w_{x_j} - 2a_{ij} \frac{\varphi_x \varphi_{x_j}}{\varphi^2} w + e^{-\lambda t} \varphi b(x, t, u, u_x) = 0$$

и условиям

$$\left[ a_{ij}(x, t, u) w_{x_j} \cos(\mathbf{n}, x_i) - w a_{ij} \frac{\varphi_{x_j}}{\varphi} \cos(\mathbf{n}, x_i) + \right. \\ \left. + e^{-\lambda t} \varphi(x) \psi(x, t, u) \right] \Big|_{S_T} = 0,$$

$$w\big|_{t=0} = \varphi(x) u_0(x).$$

В силу положительной определенности формы $a_{ij}\xi_i\xi_j$ на $S_T$ вектор $\mathbf{l}$ с составляющими $a_{ij}\cos(\mathbf{n}, x_i)$, $j = 1, \ldots, n$, образует острый угол с внешней нормалью $\mathbf{n}$ поверхности $S$. Пусть максимальное в $\overline{Q}_T$ значение $w^2(x, t) > 0$ достигается в какой-нибудь точке $(x_0, t_0) \in \overline{Q}_T$. Если $x_0$ принадлежит поверхности $S$ и $t_0 > 0$, то в той точке

$$\frac{\partial w^2}{\partial \mathbf{l}} = 2 w a_{ij} w_{x_j} \cos(\mathbf{n}, x_i) \geqslant 0,$$

и потому из граничного условия для $w$ и (7.34) выводим

$$\left[ w^2 \left( - a_{ij} \frac{\varphi_{x_j}}{\varphi} \cos(\mathbf{n}, x_i) - c_3 \right) - c_4 e^{-2\lambda t} \varphi^2 \right] \Big|_{(x_0, t_0)} \leqslant 0.$$

Отсюда в силу выбора $\varphi(x)$ следует, что

$$|w(x_0, t_0)| \leqslant \sqrt{c_4}\, (A - c_3)^{-\frac{1}{2}} \varphi(x_0) e^{-\lambda t_0}.$$

Если $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$, то, учитывая соотношения

$$w w_t \big|_{(x_0, t_0)} \geqslant 0, \quad w w_{x_i} \big|_{(x_0, t_0)} = 0,$$

$$w a_{ij} w_{x_i x_j} \big|_{(x_0, t_0)} \leqslant 0, \quad \varphi u_{x_i} e^{-\lambda t} \big|_{(x_0, t_0)} = - w \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} \Big|_{(x_0, t_0)},$$

из уравнения для $w$ и условий (7.34) получаем

$$0 \geqslant \left[\left(\lambda + \frac{a_{ij}\varphi_{x_i x_j}}{\varphi} - 2a_{ij}\frac{\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}}{\varphi^2}\right)w^2 - \right.$$

$$\left.\left. - e^{-2\lambda t}\varphi^2\left(c_0 u_x^2 + c_1 u^2 + c_2\right)\right]\right|_{(x_0,\, t_0)} =$$

$$= \left.\left[\left(\lambda + a_{ij}\frac{\varphi_{x_i x_j}}{\varphi} - 2a_{ij}\frac{\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}}{\varphi^2} - c_0\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} - c_1\right)w^2 - c_2\varphi^2 e^{-2\lambda t}\right]\right|_{(x_0,\, t_0)},$$

а это в силу (7.38) дает

$$|w(x_0, t_0)| \leqslant \sqrt{c_2}\,(B - c_1)^{-\frac{1}{2}}\varphi(x_0)\,e^{-\lambda t_0}.$$

Наконец, если $t_0 = 0$, то $|w(x_0, t_0)| \leqslant \max\limits_{\Omega}|u(x, 0)\varphi(x)|$.

Из рассмотренных трех случаев следует оценка (7.35) с постоянной

$$\lambda_1 = \max\left\{1;\ \max_{Q_T}[A(x, t) - c_3]^{-\frac{1}{2}}\varphi(x);\right.$$

$$\left.\max_{Q_T}[B(x, t) - c_1]^{-\frac{1}{2}}\varphi(x)\right\}.$$

Чтобы доказать вторую часть теоремы, достаточно в предыдущих рассуждениях положить $\varphi(x) = 1$. Легко видеть, что в случае условий (7.36) функция $w^2(x, t) = e^{-2\lambda t}u^2(x, t)$ не может достигать максимума на поверхности $S_T$, если же $\max\limits_{Q_T} w^2$ достигается в точке $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$, то

$$[(\lambda - c_1)w^2 - c_2 e^{-2\lambda t}]\big|_{(x_0,\, t_0)} \leqslant 0,$$

так что $|w(x_0, t_0)| \leqslant \sqrt{\dfrac{c_2}{\lambda - c_1}}$. Рассматривая еще последнюю возможность, когда $\max\limits_{Q_T} w^2 = w^2(x_0, 0)$, придем к оценке (7.37).

Используем установленные в этом параграфе априорные оценки для доказательства однозначной разрешимости задачи (7.1) — (7.3) в классе $H^{2+\beta,\, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$. Будем предполагать начальное условие (7.3) однородным

$$u|_{t=0} = 0 \tag{7.39}$$

(общий случай условия 7.3 сводится к этому заменой $u(x, t)$ на $v(x, t) = u(x, t) - \psi(x)$) и $S \in H^{2+\beta}$.

Так же как в § 6, мы включим исследуемую задачу (7.1), (7.2), (7.39) в семейство задач, зависящих от параметра $\tau \in [0, 1]$, и будем применять теорему Лерэ — Шаудера. Для простоты ограничимся случаем конкретного включения параметра:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}_\tau u &\equiv \tau \mathscr{L} u + (1-\tau) \mathscr{L}_0 u, \quad \tau \in [0, 1], \\ \mathscr{L}_\tau^{(S)} u &\equiv \tau \mathscr{L}^{(S)} u + (1-\tau) \mathscr{L}_0^{(S)} u = 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (7.40)$$

где

$$\mathscr{L}_0 u \equiv u_t - \mu \Delta u, \quad \mathscr{L}_0^{(S)} u \equiv \mu \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + u \right) \Big|_{S_T},$$

а $\mu$ — постоянная из неравенств (7.4) — (7.5).

Пусть при $\tau = 1$ выполнено условие согласования начальных и граничных данных, т. е. $\psi(x, 0, 0)|_{x \in S} = 0$. Тогда ясно, что оно будет выполнено при всех $\tau \in [0, 1]$. Предположим, кроме того, что операторы $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^{(S)}$ удовлетворяют ограничениям (7.34) или (7.36) теоремы 7.3. Тогда тем же самым ограничениям с теми же постоянными $c_i$ и с $\nu(\tau) = \min\{\nu_1, \mu\}$, $\mu(\tau) = \max\{\mu_1, \mu\}$ будут, очевидно, удовлетворять и операторы $\mathscr{L}_\tau$ и $\mathscr{L}_\tau^{(S)}$ при всех $\tau$ из $[0, 1]$. Поэтому на основании теоремы 7.3 можно утверждать, что для всех возможных решений $u(x, t, \tau)$ из $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ задач (7.40) справедлива равномерная относительно $\tau$ из $[0, 1]$ оценка

$$\max_{Q_T} |u(x, t, \tau)| \leqslant M. \qquad (7.41)$$

Далее, будем считать, что при $(x, t) \in \bar{Q}_T$, $|u| \leqslant M$ и произвольных $p$ выполняются неравенства (7.4) — (7.6) и (7.15). Легко видеть, что функции $a_{ij}^\tau = \tau a_{ij} + (1-\tau)\delta_i^j \mu$, $b^\tau = \tau b$ и $\psi^\tau = \tau\psi + (1-\tau)\mu u$ удовлетворяют неравенствам вида (7.4) - (7.6) и (7.15) при всех $\tau \in [0, 1]$ с теми же постоянными $\nu$ и $\mu$, что и при $\tau = 1$. Ввиду этого теорема 7.2 для всех решений $u(x, t, \tau)$ задачи (7.40) гарантирует оценки

$$\max_{Q_T} |u_x(x, t, \tau)| \leqslant M_1, \quad |u|_{Q_T}^{(1+\delta)} \leqslant c \qquad (7.42)$$

с постоянными $M_1$, $c$, общими для всех $\tau$ из $[0, 1]$. Сформулируем теперь теорему.

Теорема 7.4. *Пусть выполнены следующие условия:*

a) *функции* $a_{ij}(x, t, u)$, $b(x, t, u, p)$ *и* $\psi(x, t, u)$ *удовлетворяют неравенствам* (7.34) *или* (7.36);

b) *при* $(x, t)\in\bar{Q}_T$, $|u|\leqslant M$, *где* $M$ — *постоянная из оценки* (7.41), *и при произвольных* $p$ *функции* $a_{ij}(x, t, u)$, $b(x, t, u, p)$ *и* $\psi(x, t, u)$ *непрерывны по своим аргументам, обладают производными, входящими в условия* (7.4) — (7.6) *и* $(7.15_{1,2})$, *и удовлетворяют этим условиям;*

c) *при* $(x, t)\in\bar{Q}_T$, $|u|\leqslant M$, $|p|\leqslant M_1$, *где* $M_1$ — *постоянная из неравенства* (7.42), *функции* $a_{ijx}(x, t, u)$ *непрерывны (в смысле Гёльдера) по переменным* $x$ *с показателем* $\beta$; $\psi_x(x, t, u)$ *непрерывна по* $x$ *и* $t$ *с показателями* $\beta$ *и* $\beta/2$ *соответственно;* $b(x, t, u, p)$ *непрерывна по* $x$ *с показателем* $\beta$;

d) $S\in H^{2+\beta}$; $\psi(x, 0, 0)|_{x\in S}=0$.

*Тогда задача* (7.40) *при каждом* $\tau$ *из* $[0, 1]$ *имеет единственное решение* $u(x, t, \tau)$ *в классе* $H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\bar{Q}_T)$.

Доказательство. Рассмотрим задачи

$$\left.\begin{aligned} &v_t-\left[\tau a_{ij}(x, t, w)+(1-\tau)\delta_i^j\mu\right]v_{x_ix_j}+\\ &\qquad\qquad+\tau b(x, t, w, w_x)=0,\\ &\left\{\left[\tau a_{ij}(x, t, w)+(1-\tau)\delta_i^j\mu\right]v_{x_j}\cos(\mathbf{n}, x_i)+\right.\\ &\qquad\left.+(1-\tau)\mu v+\tau\psi(x, t, w)\right\}|_{S_T}=0,\\ &\qquad v|_{t=0}=0. \end{aligned}\right\}\qquad(7.43)$$

В качестве основного пространства $B_\alpha$ возьмем подпространство $H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, состоящее из функций, равных нулю при $t=0$. Положим $\alpha=\min\{\delta; \beta\}$, где показатель $\delta$ взят из (7.42).

При любой функции $w(x, t)$ из $B_\alpha$, удовлетворяющей условиям $\max\limits_{Q_T}|w|\leqslant M$, $\max\limits_{Q_T}|w_x|\leqslant M_1$, (7.43) есть линейная задача вида (5.5) главы IV, для которой выполнены все условия теоремы 5.3 главы IV. Именно, в силу предположений теоремы 7.4 функции $a_{ij}^\tau(x, t)=\tau a_{ij}(x, t, w(x, t))+(1-\tau)\delta_i^j\mu$

и $\psi^\tau(x, t) = \tau\psi(x, t, w(x, t))$ принадлежат $H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, $a^\tau(x, t) = \tau b(x, t, w(x, t), w_x) \in H^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_T)$ и выполнено условие согласования начальных и граничных данных в задаче (7.43). Поэтому из теоремы 5.3 главы IV следует, что каждой функции $w(x, t)$, обладающей описанными только что свойствами, соответствует единственное решение $v(x, t, \tau) \in \in H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ задачи (7.43), — это определяет вполне непрерывное преобразование $v = \Phi(w, \tau)$ в пространстве $B_\alpha$, неподвижные точки которого суть решения задачи (7.40). С помощью оценок (7.33), (7.35), (7.37), установленных выше, можно доказать существование неподвижных точек этого преобразования и принадлежность их пространству $H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\bar{Q}_T)$ точно так же, как в случае первой краевой задачи в § 6.

Единственность решения задачи (7.40) при каждом $\tau$ из $[0, 1]$ легко устанавливается с помощью теорем 2.2 и 2.3 главы I.

Предложения, доказанные в данном параграфе, допускают некоторые обобщения и усиления в рамках изложенных здесь методов. Например, можно предполагать наличие особенностей у функций $a_{ij}(x, t, u)$ и $b(x, t, u, p)$ по переменным $x$ и $t$, как это делалось в §§ 1—4. Кроме того, все приведенные выше доказательства почти без изменений сохраняются для уравнений более общего вида (0.1) с $a_i(x, t, u, p) = F_{p_i}(x, t, u, p)$ и граничных условий

$$a_i(x, t, u, u_x)\cos(\mathbf{n}, x_i) + \varphi(x, t, u)\big|_{S_T} = 0.$$

## § 8. Задача Коши

Рассмотрим для уравнения (0.1) задачу Коши в слое $R_T = \{x \in E_n,\ t \in [0, T]\}$ с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \psi_0(x). \tag{8.1}$$

Будем искать решение в классе ограниченных функций, принадлежащих $H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\bar{Q}_T)$ для любой конечной подобласти $Q_T$ слоя $R_T$.

Относительно функций $a_i(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ предположим, что они в любой конечной области $\overline{Q}_T \subset R_T$ удовлетворяют условиям a) — c) теоремы 6.1, причем постоянные, входящие в условие a), не зависят от размеров $Q_T$. Кроме того, пусть $\psi_0(x) \in H^{2+\beta}(\Omega)$ в любой ограниченной области $\Omega \subset E_n$ и $\max\limits_{E_n} |\psi_0(x)| < \infty$.

Решение задачи Коши может быть получено как предел последовательности решений первой краевой задачи для уравнения (0.1) в цилиндрах $Q_T = \Omega \times (0, T)$ при безграничном раздувании области $\Omega$. Именно, пусть $\Omega^N$ — последовательность расширяющихся областей с гладкими границами $S^N$, стремящихся в пределе ко всему $E_n$. В каждом из цилиндров $Q_T^N = \Omega^N \times (0, T)$ в силу теорем § 6, существует единственное решение $u^N(x, t)$ из

$$H^{2+\beta,\, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T^N \setminus S_T^N) \cap H^{\alpha,\, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T^N)$$

уравнения (0.1), удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{aligned} u^N|_{t=0} &= \psi_0(x), \\ u^N|_{S_T^N} &= \psi_0(x)|_{S_T^N}. \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Из результатов предыдущих параграфов следует, что решения равномерно ограничены:

$$\max_{Q_T^N} |u^N(x, t)| \leqslant M, \tag{8.3}$$

и, кроме того, для любого $Q_T^m$ и $u^N$ с $N > m$ имеют место оценки

$$|u^N|^{(2+\beta)}_{Q_T^m} \leqslant c(m), \tag{8.4}$$

в которых постоянные $c(m)$ зависят от $m$, но не зависят от $N$. Применяя обычный диагональный процесс, можно из $\{u^N\}$ выделить подпоследовательность $\{u^{N_k}\}$, сходящуюся вместе с производными $u_x^{N_k}$, $u_{xx}^{N_k}$, $u_t^{N_k}$ в каждой точке $R_T$ к некоторой функции $u$ и ее соответствующим производным. Ясно, что $u(x, t)$ не превосходит $M$, принадлежит $H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\bar{Q}_T)$ в любом конечном цилиндре $\bar{Q}_T \subset R_T$ и удовлетворяет уравнению (0.1) и начальному условию (8.1), т. е. является решением задачи Коши для (0.1) в $R_T$.

Если предположить, что постоянные в условиях b) — c) теоремы 6.1 не зависят от размеров $Q_T$ (т. е. условия b) — c) выполняются во всей полосе $R_T$) и $\psi_0(x) \in H^{2+\beta}(E_n)$, то постоянная $c(m)$ в (8.3) не будет зависеть от $m$ и потому предельные для $\{u^N\}$ функции $u(x, t)$ будут принадлежать $H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(R_T)$.

Для доказательства единственности таких решений предположим дополнительно, что функции

$$a_{ij}(x, t, u, p) \equiv \frac{\partial a_i(x, t, u, p)}{\partial p_j},$$

$$A(x, t, u, p) \equiv a(x, t, u, p) - \frac{\partial a_i}{\partial u} p_i - \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \tag{8.5}$$

дифференцируемы по $u$ и $p$, причем производные $\frac{\partial a_{ij}}{\partial p}$, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}$, $\frac{\partial A}{\partial p}$ ограничены по модулю, а $\frac{\partial A}{\partial u}$ ограничена снизу в любой конечной области изменения $(u, p)$ и $(x, t) \in R_T$.

Пусть, кроме того,

$$a_{ij}(x, t, u, p)\xi_i\xi_j \geqslant 0 \tag{8.6}$$

при $t \in (0, T]$ и произвольных $x$, $u$, $p$. При этих условиях к разности $u(x, t) = u'(x, t) - u''(x, t)$ двух возможных решений $u'$ и $u''$ задачи (0.1), (8.1), ограниченных вместе со своими производными первого и второго порядков, можно применить оценку (2.23) теоремы 2.5 главы I.

В самом деле, $u(x, t)$ есть ограниченное решение линейной задачи Коши

$$u_t - \hat{a}_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \hat{a}_i(x, t) u_{x_i} + \hat{a}(x, t) u = 0,$$

$$u|_{t=0} = 0,$$

где

$$\hat{a}_{ij}(x, t) = a_{ij}(x, t, u', u'_x);$$

$$\hat{a}_i(x, t) =$$

$$= -u''_{x_i x_j} \int_0^1 \frac{\partial a_{ij}[x, t, u^\tau(x, t), u^\tau_x(x, t)]}{\partial u^\tau_{x_j}} d\tau + \int_0^1 \frac{\partial A[\ldots]}{\partial u^\tau_{x_i}} d\tau;$$

$$\hat{a}(x, t) = -u''_{x_i x_j} \int_0^1 \frac{\partial a_{ij}[\ldots]}{\partial u^\tau} d\tau + \int_0^1 \frac{\partial A[\ldots]}{\partial u^{(\tau)}} d\tau;$$

$$u^\tau(x, t) = \tau u'(x, t) + (1 - \tau) u''(x, t),$$

причем функции $\hat{a}_{ij}$, $\hat{a}_i$, $\hat{a}$ подчиняются условиям теоремы 2.5 главы I, а потому в силу оценки (2.23) главы I $u(x, t) \equiv 0$ в $R_T$. Сформулируем доказанное утверждение в виде теоремы.

Теорема 8.1. *Предположим следующее*:

a) $\psi_0(x) \in H^{2+\beta}(\Omega)$ *в любой* $\Omega \subset E_n$ *и* $\max\limits_{E_n} |\psi_0(x)| < \infty$;

b) *при* $t \in (0, T]$ *и произвольных* $x$, $u$, $p$ *выполняются неравенство* (8.6) *и неравенство*

$$A(x, t, u, 0) u \geqslant -b_1 u^2 - b_2, \quad b_1, b_2 = \text{const} \geqslant 0,$$

*для* $A(x, t, u, p)$, *определенной в* (8.5). *Последнее можно заменить более общим*

$$A(x, t, u, 0) u \geqslant -\Phi(|u|)|u| - b_2, \quad \text{где} \quad \int_0^\infty \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} = \infty;$$

c) *для любого ограниченного цилиндра* $Q_T$ *слоя* $R_T$ *и* $|u| \leqslant M$, *где* $M$ — *постоянная из* (8.3), *функции* $a_i(x, t, u, p)$ *и* $a(x, t, u, p)$ *удовлетворяют условиям* b) *и* c) *теоремы* 6.1 *с постоянными, вообще говоря, зависящими от* $Q_T$.

*При выполнении этих условий существует по крайней мере одно решение* $u(x, t)$ *задачи Коши* (0.1), (8.1) *в полосе* $R_T$, *не превосходящее по модулю* $M$ *и принадлежащее* $H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\bar{Q}_T)$ *для любого ограниченного цилиндра* $Q_T \in R_T$. *Оно будет элементом* $H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(R_T)$, *если дополнительно предположить, что постоянные в условиях* b) — c) *теоремы* 6.1 *не зависят от* $Q_T$;

d) *если функции* $a_{ij}(x, t, u, p)$, $A(x, t, u, p)$, *определенные равенствами* (8.5), *дифференцируемы по* $u$, $p$ *и подчиняются условиям* (8.6) *и*

$$\max_{\substack{(x,t)\in R_T,\\ |u,p|\leqslant N}} \left| \frac{\partial a_{ij}(x,t,u,p)}{\partial u}, \frac{\partial a_{ij}(x,t,u,p)}{\partial p}, \frac{\partial A(x,t,u,p)}{\partial p} \right| \leqslant \leqslant \mu_1(N),$$

$$\min_{\substack{(x,t)\in R_T,\\ |u,p|\leqslant N}} \frac{\partial A(x,t,u,p)}{\partial u} \geqslant -\mu_2(N),$$

*при произвольном* $N$ *и каких-либо постоянных* $\mu_1$, $\mu_2$, *может быть, зависящих от* $N$, *то задача* (0.1), (8.1) *в* $R_T$ *имеет не более одного классического решения* $u(x, t)$, *ограниченного в* $R_T$ *вместе со своими производными первого и второго порядков.*

Замечание 8.1. Если условие a) заменить более слабым требованием непрерывности и ограниченности $\psi_0(x)$ *в* $E_n$, то при тех же предположениях b) — c) относительно $a_i$, *a* будет существовать ограниченное решение $u(x, t)$ задачи (0.1), (8.1), принадлежащее $H^{2+\beta,\, 1+\frac{\beta}{2}}(Q_T) \cap C(R_T)$ для любого конечного цилиндра $Q_T \subset R_T$. Для доказательства этого предположения надо аппроксимировать $\psi_0(x)$ гладкими ограниченными функциями $\psi_0^{(m)}(x)$, сходящимися к $\psi_0(x)$ равномерно в $E_n$, и воспользоваться теоремой 8.1. То, что последовательность решений $u^{(m)}(x, t)$ вспомогательных задач будет сходиться к непрерывному в $R_T$ решению задачи (0.1), (8.1), может быть доказано с помощью метода барьеров.

Замечание 8.2. Нетрудно проследить, что теоремы существования и единственности для задачи Коши (0.1), (8.1) сохраняются при допущении некоторого роста известных и искомых в задаче (0.1), (8.1) функций, когда $|x| \to \infty$ (см. в связи с этим работы [$9_3$, **32**, $32_6$] и др.).

## § 9. О задаче Стефана

Остановимся еще на задаче (точнее, задачах) Стефана. Покажем, что она может быть сведена к нахождению обобщенных решений краевых задач для некоторых квазилинейных уравнений простейшего вида, но с функциями, разрывными по $u$. Делается это принципиально так же, как в § 13 главы III для задачи дифракции. В том и другом случае мы «прячем» первое из условий на разрывах в требование непрерывности (в том или ином смысле) искомого решения, а второе — в интегральное тождество, причем так, что поверхности разрывов не входят в тождество. Это обстоятельство в задачах Стефана имеет принципиальное значение, ибо в них поверхности разрывов неизвестны.

Рассмотрим, например, задачу на определение температуры $u(x, t)$ в области $\Omega$ изменения $x=(x_1, \ldots, x_n)$ для $t \in (0, T]$ при наличии фазовых переходов при значениях температуры $u_1, \ldots, u_m$. Пусть $u_1 < u_2 < \ldots < u_m$. В тех частях $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где $u(x, t)$ не принимает значений $u_1, \ldots, u_m$, она должна удовлетворять уравнению

$$\alpha(u) u_t - \left(k(u) u_{x_i}\right)_{x_i} = 0, \tag{9.1}$$

в котором $\alpha(u)$ и $k(u)$ — известные положительные функции, гладкие на каждом из отрезков $[u_k, u_{k+1}]$ и имеющие разрывы первого рода в точках $u=u_k$, $k=1, \ldots, m$. На границах раздела $S^{(k)}$ двух фаз должны выполняться два условия

$$[u]\big|_{S^{(k)}} = 0 \tag{9.2}$$

и

$$b_k \cos(\mathbf{n}, t) + \left[k(u) u_{x_i}\right] \cos(\mathbf{n}, x_i)\big|_{S^{(k)}} = 0, \tag{9.3}$$

где $b_k$ — заданные положительные числа, $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности раздела $S^{(k)} = \{(x, t): u(x, t) = u_k\}$, направленная в сторону возрастания $u$ (по градиенту $u$), а скачок $[v]\big|_{S^{(k)}}$ есть разность между предельным значением $v$ на $S^{(k)}$, взятым из области $\{(x, t): u < u^k\}$, и предельным значением $v$ на $S^{(k)}$, взятым из области $\{(x, t): u > u^k\}$.

Наконец, $u(x, t)$ должна удовлетворять начальному условию

$$u\big|_{t=0} = \psi_0(x) \tag{9.4}$$

и какому-нибудь граничному условию, например

$$u\big|_{S_T} = 0. \tag{9.5}$$

По самой (классической) постановке требуется, чтобы множества $S^{(k)}$ были бы кусочно-гладкими поверхностями в пространстве $(x, t)$. Упростим предварительно задачу, введя вместо $u(x, t)$ новую неизвестную функцию

$$v(x, t) = \int_0^{u(x, t)} k(\xi)\, d\xi.$$

Для нее из (9.1) следует уравнение

$$\beta(v) v_t - \Delta v = 0 \tag{9.6}$$

с $\beta(v)$, обладающей теми же свойствами, что и $\alpha(u)$ (т. е. $\beta(v)$ — положительная, кусочно-гладкая функция, имеющая разрывы первого рода в точках $v_1, \ldots, v_m$), условия на поверхностях $\{(x, t) : v(x, t) = v_k\}$ (это те же самые поверхности $S^{(k)}$) приобретают вид

$$[v]\big|_{S^{(k)}} = 0 \tag{9.7}$$

и

$$b_k \cos(\mathbf{n}, t) + \left[v_{x_i}\right] \cos\left(\mathbf{n}, x_i\right)\big|_{S^{(k)}} = 0, \tag{9.8}$$

а начальное и граничное условия сохранят прежний вид

$$v\big|_{t=0} = \psi_1(x) \quad \text{и} \quad v\big|_{S_T} = 0. \tag{9.9}$$

Так же как и в задачах § 13 главы III, придадим уравнению (9.6) дивергентную форму

$$\frac{\partial b(v)}{\partial t} - \Delta v = 0, \tag{9.10}$$

где $b(v)$ — монотонно возрастающая кусочно-гладкая функция, производная которой $b'(v)$ равна $\beta(v)$ на каждом из интервалов $(v_k, v_{k+1})$. Чтобы определить поведение $b(v)$ при переходе через точки разрыва $v = v_k$, перейдем от уравнения (9.10) к интегральному тождеству. Для этого умножим уравнение (9.10) на $\eta(x, t)$ из $W_2^{1,1}(Q_T)$, равную нулю на границе $Q_T$, и проведем в каждом члене однократное интегрирование по частям, перенося на $\eta$ производные $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и помня, что на поверхностях $S^{(k)} = \{(x, t) : v(x, t) = v_k\}$,

$k=1, \ldots, m$, (которые мы предполагаем кусочно-гладкими) функции $b(v)$ могут иметь разрывы. Это даст

$$\int_{Q_T} \left\{-b(v)\eta_t + v_{x_i}\eta_{x_i}\right\} dx\,dt +$$
$$+\sum_{k=1}^{m} \int_{S^{(k)}} \left\{[b(v)]\cos(\mathbf{n},\ t) - \left[v_{x_i}\right]\cos(\mathbf{n},\ x_i)\right\}\eta\,ds = 0. \tag{9.11}$$

При этом мы учли выбор направления $\mathbf{n}$ и правило составления скачка [ ]. Если функцию $b(v)$ определить так, чтобы $[b(v)]\big|_{S^{(k)}} = -b_k$, то все интегралы по поверхностям $S^{(k)}$ исчезнут в силу условий (9.8) и тождество (9.11) примет вид

$$\int_{Q_T} \left\{-b(v)\eta_t + v_{x_i}\eta_{x_i}\right\} dx\,dt = 0. \tag{9.12}$$

Итак, мы показали, что если $v(x,\ t)$ есть классическое решение задачи (9.6) — (9.9) и, следовательно, оно принимает критические значения лишь на кусочно-гладких поверхностях $S^{(k)}$, то оно удовлетворяет тождеству (9.12) с любой $\eta(x,\ t)$ из $W_2^{1,1}(Q_T)$, равной нулю на границе $Q_T$, и с любой монотонно возрастающей функцией $b(v)$, имеющей в точках $v_k$, $k=1, \ldots, m$, скачки $b_k$, а на интервалах $(v_k,\ v_{k+1})$ имеющей производную $b'(v)$, равную $\beta(v)$. Функция $b(v)$ определяется этими требованиями с точностью до ее значений в точках $v_k$, $k=1, \ldots, m$, и с точностью до произвольного слагаемого, которое мы зафиксируем, задав значение $b(v)$ в какой-нибудь точке $v_0$, отличной от $v_1, \ldots, v_m$. Обозначим через $B(x,\ t,\ v)$ произвольную измеримую функцию, равную $b(v)$ при $v \neq v_k$, $k=1, \ldots, m$, и $(x,\ t) \in \overline{Q}_T$, а при $v=v_k$ и $(x,\ t) \in \overline{Q}_T$ имеющую значения из интервала $\left[\lim\limits_{v\to v_k-0} b(v),\ \lim\limits_{v\to v_k+0} b(v)\right]$ (в разных точках $(x,\ t)$ они могут быть разными). Классическое решение $v(x,\ t)$ задачи (9.6) — (9.9) удовлетворяет тождеству

$$\int_{Q_T} \left\{-B(x,\ t,\ v)\eta_t + v_{x_i}\eta_{x_i}\right\} dx\,dt = 0 \tag{9.13}$$

с $\eta$ из $W_2^{1,1}(Q_T)$, равной нулю на границе $Q_T$, и с любой такой функцией $B(x, t, v)$. Так как мера множеств $S^{(k)}$, где $v(x, t)$ принимает критические значения $v_1, \ldots, v_m$, равна в данном случае нулю, то информация, которую мы получаем из (9.13) при какой-либо одной функции $B(x, t, v)$ или при всех таких функциях, одна и та же.

Назовем **обобщенным решением задачи** (9.6)—(9.9) ограниченную функцию $v$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, равную $\psi_1(x)$ при $t=0$ и удовлетворяющую тождеству (9.13) при какой-нибудь одной функции типа $B(x, t, v)$ и указанных выше $\eta$. Покажем, что задача (9.6) — (9.9) может иметь не более одного обобщенного решения. Более того, сделаем это для более широкого класса обобщенных решений, о которых априорно известно лишь то, что они ограничены, и не известно, что они являются элементами $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$. Такие решения в соответствии с нашей концепцией определения обобщенных решений суть ограниченные функции, удовлетворяющие тождеству

$$\int_{Q_T} \{B(x, t, v)\eta_t + v\Delta\eta\}\,dx\,dt + \\ + \int_{\Omega} B(x, t, \psi_1(x))\,\eta(x, 0)\,dx = 0 \qquad (9.14)$$

при любой функции $\eta$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$, равной нулю при $t=T$. Пусть имеется два таких решения: $v'$ и $v''$, причем пусть начальное состояние $\psi_1(x)$ таково, что критические значения $v_k$, $k=1, \ldots, m$, принимаются $\psi_1(x)$ на множестве $n$-мерной меры нуль в пространстве $x$. Вычтем из тождества (9.14) для $v'$ тождество (9.14) для $v''$, обозначив соответствующие им функции $B(x, t, v)$ через $B'$ и $B''$, и результат запишем в виде

$$\int_{Q_T} \{B'(x, t, v') - B''(x, t, v'')\} \times \\ \times \left\{\eta_t + \frac{v' - v''}{B'(x, t, v') - B''(x, t, v'')}\Delta\eta\right\} dx\,dt = 0$$

или, короче,

$$\int_{Q_T} \hat{B}(x, t)\{\eta_t + a(x, t)\Delta\eta\}\,dx\,dt = 0. \qquad (9.15)$$

Функция $a(x, t)$ в силу свойств функции $B'$ и $B''$ неотрицательна и $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T} a(x, t) \equiv a_0 < \infty$. Возьмем в качестве $\eta(x, t)$ решение задачи

$$\eta_t + (a(x, t) + \varepsilon)\Delta\eta = F(x, t), \quad \eta|_{t=T} = 0, \quad \eta|_{S_T} = 0, \tag{9.16}$$

в которой $\varepsilon$ есть малое положительное число, а $F(x, t)$ — произвольная, гладкая, финитная в $Q_T$ функция. В силу замечания 6.2 главы III такое решение $\eta^\varepsilon(x, t)$ существует и для него справедлива оценка (6.25) главы III, т. е.

$$\int\limits_{Q_T} \left\{(\eta_t^\varepsilon)^2 + (a+\varepsilon)(\Delta\eta^\varepsilon)^2\right\} dx\,dt \leqslant c(T) \int\limits_{Q_T} F_x^2\,dx\,dt \tag{9.17}$$

с $c(T)$, зависящей только от $T$ и $a_0$ *).

Подставив $\eta^\varepsilon$ вместо $\eta$ в (9.15), получим

$$\int\limits_{Q_T} \hat{B}(F - \varepsilon\Delta\eta^\varepsilon)\,dx\,dt = 0. \tag{9.18}$$

Устремляя в этом равенстве $\varepsilon$ к нулю, придем к равенству

$$\int\limits_{Q_T} \hat{B}F\,dx\,dt = 0, \tag{9.19}$$

ибо

$$\left|\int\limits_{Q_T} \hat{B}\varepsilon\Delta\eta^\varepsilon\,dx\,dt\right| \leqslant \operatorname{vrai}\max_{Q_T}|\hat{B}| \times$$
$$\times \left[\int\limits_{Q_T} \frac{\varepsilon^2}{a+\varepsilon}\,dx\,dt \int\limits_{Q_T} (a+\varepsilon)(\Delta\eta^\varepsilon)^2\,dx\,dt\right]^{1/2} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Но из (9.19) в силу достаточного произвола $F$ следует $\hat{B}(x, t) \equiv 0$, а потому и совпадение $v'$ с $v''$ для почти всех $(x, t)$ из $Q_T$. Теорема единственности доказана.

---

*) Заметим, что если $S \in O^2$, то $\eta^\varepsilon$ будет элементом $W_2^{2,1}(Q_T)$, в противном случае оно принадлежит $W_2^{1,1}(Q_T)$ и для него конечен $\int\limits_{Q_T} (\Delta\eta^\varepsilon)^2\,dx\,dt$. Такую $\eta^\varepsilon(x, t)$, как легко видеть, можно взять в качестве $\eta$ в (9.15).

Существование обобщенного решения при любой ограниченной функции $\psi_1$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ получим на основании какой-либо из теорем § 6. Для этого аппроксимируем функцию $b(v)$ ее усреднениями $b_\rho(v)$, полученными с помощью бесконечно дифференцируемого неотрицательного ядра $\omega_\rho(|v|)$ радиуса $\rho$, а функцию $\psi_1(x)$ — какими-нибудь равномерно ограниченными и бесконечно дифференцируемыми финитными в $\Omega$ функциями $\psi_1^\rho(x)$, сходящимися к ней в норме $W_2^1(\Omega)$. Если $S \bar{\in} H^{2+\alpha}$, то аппроксимируем и $S$ поверхностями $S^\rho$ класса $H^{2+\alpha}$. Вспомогательные задачи

$$\frac{\partial b_\rho(v)}{\partial t} - \Delta v = 0, \quad v\big|_{S_T^\rho} = 0, \quad v\big|_{t=0} = \psi_1^\rho \tag{9.20}$$

имеют решения $v^\rho$ из $H^{2+\alpha,\, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T^\rho)$ в силу теоремы 6.1. Для них справедливы равномерные оценки

$$\left.\begin{aligned} &\max_{Q_T^\rho} |v^\rho| \leqslant \max_{x\in\Omega^\rho} |\psi_1^\rho| \leqslant c_1, \\ &\text{и} \\ &\|v_x^\rho\|_{2,\, Q_T^\rho} + \nu_1 \|v_t^\rho\|_{2,\, Q_T^\rho} \leqslant c, \end{aligned}\right\} \tag{9.21}$$

где $\nu_1$ — нижняя грань функций $b'_\rho(v)$ на отрезке $[-c, c]$. Первая из них есть частный случай неравенства (2.31) главы I, а вторая — частный случай неравенства (6.6) главы III. Число $\nu_1$ — положительно в силу строгого монотонного возрастания функции $b(v)$. Неравенства (9.21) позволяют выбрать подпоследовательность $v^{\rho_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, которая сходится почти всюду в $Q_T$ и слабо в $W_2^{1,1}(Q_T)$ к некоторой ограниченной функции $v$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$. Кроме того, $\rho_k$ выбираем так, чтобы последовательность функций $b_{\rho_k}(v^{\rho_k}(x, t))$ сходилась слабо в $L_2(Q_T)$ к какой-нибудь функции $\tilde{b}(x, t)$. Это возможно, ибо функции $b_\rho(v^\rho(x, t))$ равномерно ограничены. Для каждой из $v^{\rho_k}$ справедливо тождество (9.12). Переходя в нем к пределу по $k \to \infty$, придем к тождеству

$$\int_{Q_T} \{-\tilde{b}(x, t)\eta_t + v_{x_i}\eta_{x_i}\}\, dx\, dt = 0. \tag{9.22}$$

Нетрудно проверить, что $\tilde{b}(x, t)$ есть функция типа $B(x, t, v(x, t))$ и, следовательно, $v(x, t)$ есть искомое обобщенное решение задачи (9.6) — (9.9).

Покажем, что вне множеств $S^{(k)}$, где $v(x, t) = v_k$, гладкость функции $v(x, t)$ (а следовательно, и $u(x, t)$) определяется лишь гладкостью функции $b(v)$. Пусть значения функции $v(x, t)$ на множестве $\bar{Q}' = \bar{\Omega}' \times [t_1, t_2]$ принадлежат отрезку $[v_k + \varepsilon, v_{k+1} - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, и $b(v)$ на нем — гладкая функция. На $Q'$ функция $B(x, t, v(x, t))$ равна $b(v(x, t))$ и обладает производной по $t$ из $L_2(Q')$. Следовательно, тождество (9.13) при $\eta(x, t)$, равной нулю вне $Q'$, можно преобразовать к виду

$$\int_{Q'} \left[b'(v)\, v_t \eta + v_{x_i} \eta_{x_i}\right] dx\, dt = 0.$$

Это тождество указывает, что для почти всех $t$ из $[t_1, t_2]$ $v$ является обобщенным решением из $W_2^1(\Omega')$ уравнения $\Delta v = b'(v)\, v_t$ со свободным членом из $L_2(\Omega')$. В силу теоремы 10.1 главы III [1] для таких $t$ решение $v$ имеет производные по $x$ второго порядка и для любой внутренней подобласти $\Omega''$ области $\Omega'$

$$\| v(x, t) \|_{2, \Omega''}^{(2)} \leqslant c(d'') \| b'(v)\, v_t \|_{2, \Omega'}, \tag{9.23}$$

где $c(d'')$ зависит лишь от расстояния $\Omega''$ до границы $\Omega'$. Из (9.23) следует, что

$$\| v \|_{2, Q''}^{(2)} \leqslant c(d'') \| b'(v)\, v_t \|_{2, Q'} < \infty, \tag{9.24}$$

где $Q'' = \Omega'' \times [t_1, t_2]$. Итак, $v$ есть элемент $W_2^{2, 1}(Q'')$. Для почти всех точек $(x, t)$ из $Q''$ он удовлетворяет уравнению

$$b'(v)\, v_t - \Delta v = 0. \tag{9.25}$$

Функция $w(x, t) = b(v(x, t))$, как легко видеть, удовлетворяет в силу (9.25) уравнению

$$w_t - \left(\frac{1}{b'(v)} w_{x_i}\right)_{x_i} = 0. \tag{9.26}$$

Так как на $Q''$ функция $b'(v(x, t))$ удовлетворяет неравенствам $0 < \nu_1 \leqslant b'(v(x, t)) \leqslant \mu_1$ и $w \in V_2^{1, 0}(Q'')$, то в силу теоремы 10.1 главы III $w(x, t)$ есть элемент $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q'')$ с некоторым $\alpha > 0$. Но тогда и $v(x, t)$ принадлежит $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q'')$. Если предположить, что функция $b'(v)$ непрерывна в смысле Гёльдера на интервале $[v_k + \varepsilon, v_{k+1} - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, то $b'(v(x, t))$ будет элементом $H^{\tilde{\alpha}, \frac{\tilde{\alpha}}{2}}(Q'')$ с некоторым $\hat{\alpha} > 0$, и потому $v(x, t)$ как решение из $W_2^{2,1}(Q'')$ линейного уравнения $v_t - \frac{1}{b'(v(x, t))} \Delta v = 0$ будет элементом $H^{2+\tilde{\alpha}, 1+\frac{\tilde{\alpha}}{2}}(Q'')$ (см. теорему 12.1 главы III). При более гладких $b(v)$ и решение $v(x, t)$ будет более гладкой функцией, что гарантируется теоремами 12.1 главы III и 5.2 главы IV о решениях линейных уравнений.

Итак, мы видим, что существование и единственность обобщенных решений задачи Стефана (рассмотренный случай допускает некоторые обобщения) устанавливается принципиально так же, как и однозначная разрешимость задач дифракции в обобщенной постановке в $[33_7]$ (см. § 13 главы III). Это сделано в работе $[27_{1,2}]$ (см. также $[46_4]$). Однако вопрос о классичности этих решений и главным образом о том, что множества точек $S^{(k)}$, где $v(x, t)$ равно одному из особых значений $v_k$, образует кусочно-гладкие $n$-мерные поверхности в пространстве $(x, t)$, остается открытым и его решение представляет несомненный интерес.

В заключение укажем на работы [48, **54**, **15**, **31**] и др., в которых изучаются одномерные задачи Стефана в их классической постановке. Методы этих работ отличны от изложенного здесь метода. В них задачи сводятся к исследованию нелинейных интегральных уравнений. В [**15**] и $[48_2]$ имеется решение некоторых из этих задач в целом.

## § 10. Другой способ оценки постоянной Гёльдера для решеиий

В данном параграфе мы оценим постоянные Гёльдера для обобщенных решений уравнения (0.1) способом, отличным от изложенного в § 1. Это будет сделано без использования теорем §§ 7—8 главы II о функциях классов $\mathfrak{B}_2$. Предлагаемый метод является распространением на общий случай метода, описанного на примере простейшего линейного уравнения параболического типа в конце § 10 главы III.

Мы дадим здесь другое доказательство теоремы 1.1, точнее ее первой части, касающейся внутренних оценок. Оценки вблизи поверхности $S_T$ устанавливаются аналогично, но с привлечением лемм главы II, относящихся к поведению функций в цилиндрах, пересекающихся с поверхностью $S_T$.

Итак, пусть выполнены условия теоремы 1.1 — неравенства (1.1) — (1.5), и пусть $u(x, t)$ есть ограниченное обобщенное решение класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ уравнения (0.1), так что $u(x, t)$ при любой ограниченной функции $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ удовлетворяет интегральному тождеству (1.6). Из (1.6) и условий (1.1) — (1.5) следует справедливость для $u(x, t)$ неравенства (1.7):

$$\int_\Omega u\eta\,dx\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left[-u\eta_t + a_i(x, t, u, u_x)\eta_{x_i}\right]dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left[\mu_1 u_x^2 + \varphi_2(x, t)\right]|\eta|\,dx\,dt, \qquad (10.1)$$
$$0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T,$$

где $\eta(x, t)$—произвольная ограниченная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, а функции $a_i$ и $\varphi_2$ удовлетворяют ограничениям (1.1) — (1.2), (1.4) — (1.5). Это неравенство, как и в § 1, является исходным для всех последующих рассуждений. В § 1 из него мы вывели, что $w = \pm u(x, t)$ подчиняются неравенствам (7.5) главы II:

$$\|w^{(k)}(x, t_0+\tau)\zeta(x, t_0+\tau)\|_{2, K_\rho}^2 + \nu\|w_x^{(k)}\zeta\|_{2, Q(\rho, \tau)}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|w^{(k)}(x, t_0)\zeta(x, t_0)\|_{2, K_\rho}^2 +$$
$$+ \gamma_1\left\{\int_{Q(\rho, \tau)} (w^{(k)})^2(\zeta_x^2 + \zeta|\zeta_t|)\,dx\,dt + \right.$$
$$\left. + \left[\int_{t_0}^{t_0+\tau}\left(\int_{A_{k,\rho}(t)} |\zeta|\,dx\right)^{\frac{\hat r}{\hat q}} dt\right]^{\frac{2}{\hat r}(1+\varkappa)}\right\} \qquad (10.2)$$

при любых значениях $k \geqslant \operatorname*{vrai\,max}_{Q(\rho,\tau)} w(x, t) - \delta$. Здесь $\varkappa = \frac{2}{n}\varkappa_1$, $\hat{q} = \frac{2q}{q-1}(1+\varkappa)$, $\hat{r} = \frac{2r}{r-1}(1+\varkappa)$, $\delta$ — положительное число, определяемое $M = \operatorname*{vrai\,max}_{Q_T}|u|$, $n$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$, $r$ и $q$, $Q(\rho, \tau) = K_\rho \times (t_0, t_0+\tau)$ — произвольный цилиндр, принадлежащий $Q_T$, $A_{k,\rho}(t)$ — множество точек $x$ из $K_\rho$, для которых $w(x, t) > k$, а $\zeta(x, t)$ — произвольная гладкая функция, равная нулю на боковой поверхности $Q(\rho, \tau)$. Это гарантировало принадлежность решения $u(x, t)$ классу $\mathfrak{B}_2(Q_T, M, \gamma, \hat{r}, \delta, \varkappa)$, откуда и было сделано нужное заключение об оценке постоянной Гёльдера для $u(x, t)$.

Как уже отмечалось выше, мы здесь не будем применять теорем о функциях классов $\mathfrak{B}_2$. Из всех доказанных в §§ 7–8 главы II предложений мы воспользуемся лишь простейшим из них — леммой 7.1, вытекающей из неравенств (10.2).

Получение оценок постоянной Гёльдера будет проводиться следующим образом. Рассмотрим произвольный цилиндр $Q_{2R} = K_{2R} \times (t_0 - \theta R^2, t_0)$, где постоянную $\theta > 0$ мы фиксируем ниже, и соосный ему цилиндр $Q_R = K_R \times \left(t_0 - \frac{1}{4}\theta R^2, t_0\right)$ и докажем справедливость неравенства

$$\operatorname{osc}\{u, Q_R\} \leqslant (1-\delta_0)\operatorname{osc}\{u, Q_{2R}\} + R^{\varkappa_1}, \tag{10.3}$$

с постоянной $\delta_0 > 0$, определяемой $M = \max_{Q_T}|u|$ и известными величинами из условий (1.1)—(1.5). Это в силу леммы 5.8 главы II даст желаемую оценку для $\langle u\rangle_{Q'}^{(\alpha)}$, $Q' \subset Q_T$.

Если $\operatorname{osc}\{u, Q_R\} \leqslant R^{\varkappa_1}$, то (10.3) справедливо. Предположим, что $\operatorname{osc}\{u, Q_R\} > R^{\varkappa_1}$, и введем обозначение $\omega = \operatorname{osc}\{u, Q_{2R}\}$. Очевидно, $\omega > R^{\varkappa_1}$. Без ограничения общности можно считать, что в $Q_{2R}$ функция $u(x, t)$ меняется в диапазоне $0 \leqslant u(x, t) \leqslant \omega$. Всегда верно по крайней мере одно из двух неравенств

$$\operatorname{mes}\left\{x \in K_R : u(x, t_0 - \theta R^2) \leqslant \frac{\omega}{2}\right\} \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{mes} K_R \tag{10.4$_1$}$$

или

$$\operatorname{mes}\left\{x \in K_R : \omega - u(x, t_0 - \theta R^2) \leqslant \frac{\omega}{2}\right\} \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{mes} K_R. \tag{10.4$_2$}$$

Если имеет место первое из них, то из $(10.4_1)$ и неравенств (10.1) с $\eta \geqslant 0$ выведем, что $u(x, t)$ не подходит в $Q_R$ к $\omega$ на некоторую долю $\omega$. Если же имеет место $(10.4_2)$, то вместо $u(x, t)$ возьмем функцию $\hat{u}(x, t) = \omega - u(x, t)$. Для нее, кроме $(10.4_2)$, справедливы неравенства типа (10.1) с $\eta \geqslant 0$, что следует из (10.1) для $u(x, t)$ и того факта, что $\eta(x, t)$ в (10.1) может иметь любой знак. Поэтому она, подобно $u(x, t)$ в первом случае, не подходит в $Q_R$ к своему максимуму в $Q_{2R}$ (т. е. к $\omega$) на определенную долю $\omega$. Так что в обоих случаях придем к (10.3). Пусть верно, например, $(10.4_1)$. Тогда тем более

$$\operatorname{mes}\left\{x \in K_R : u(x, t_0 - \theta R^2) \leqslant (1 - \mu_0)\,\omega\right\} \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} K_R,$$

где $\mu_0 = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2M}\right\} \leqslant \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\delta}{\omega}\right\}$. Согласно лемме 7.1 главы II для любого $\xi \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ существуют положительные числа $\theta(\xi)$ и $b(\xi)$ такие, что для всех $t \in [t_0 - \theta R^2, t_0]$

$$\operatorname{mes}\{x \in K_\rho : u(x, t) \leqslant (1 - \mu_0)\,\omega + \xi H\} \geqslant b(\xi) \operatorname{mes} K_R, \quad (10.5)$$

если только $H = \max\limits_{\substack{x \in K_\rho \\ t \in [t_0 - \theta R^2, t_0]}} u(x, t) - (1 - \mu_0)\,\omega$ не превосходит $\delta$ и $H > R^{\varkappa_1}$. Первое из этих требований на $H$ выполнено, ибо $H \leqslant \omega - (1 - \mu_0)\,\omega = \mu_0 \omega$, а $\mu_0 \leqslant \frac{\delta}{\omega}$. Если второе требование на $H$ не выполнено, т. е. $H \leqslant R^{\varkappa_1}$, то $\max\limits_{Q_R} u(x, t) \leqslant (1 - \mu_0)\,\omega + R^{\varkappa_1}$ и, следовательно, выполнено (10.3) с $\delta_0 = \mu_0$. Если же $H > R^{\varkappa_1}$, то используем утверждение леммы 7.1 главы II. В качестве $\xi$ возьмем, например, $\frac{7}{8}$ и соответствующие ему $\theta = \theta(\xi)$ и $b = b(\xi)$. Так как $(1 - \mu_0)\,\omega + \frac{7}{8} H \leqslant \omega - \frac{\mu_0}{8}\,\omega$, то из (10.5) следует, что

$$\operatorname{mes}\left\{x \in K_R : u(x, t) \leqslant \omega - \frac{\mu_0}{8}\,\omega\right\} \geqslant b \operatorname{mes} K_R, \quad (10.6)$$
$$t \in [t_0 - \theta R^2, t_0].$$

Рассмотрим в $Q_{2R}$ функцию $v(x, t) = \psi(u(x, t))$, где $\psi(u) = -\ln 8\,\frac{\omega - u + R^{\varkappa_1}}{\mu_0\omega}$. Она ограничена снизу числом $-\ln\frac{16}{\mu_0}$ и заведомо неположительна там, где $u(x, t) \leqslant \omega - \frac{\mu_0}{8}\omega$, а такое множество согласно (10.6) составляет определенную долю от $K_\rho$ при любом $t \in [t_0 - \theta R^2, t_0]$. Если мы докажем, что $\max\limits_{Q_R} v(x, t) \leqslant M_1$, то это гарантирует оценку $\max\limits_{Q_R} u(x, t) \leqslant \omega\left(1 - \frac{\mu_0}{8} e^{-M_1}\right) + R^{\varkappa_1}$, а тем самым и (10.3) с $\delta_0 = \frac{\mu_0}{8} e^{-M_1}$.

Итак, для получения оценки (10.3) достаточно показать ограниченность $v(x, t)$ в $Q_R$ сверху величиной, определяемой разве лишь $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$, $q$, $r$ и не зависящей от $R$. Оценка $v(x, t)$ сверху будет основана на использовании теоремы 6.2 главы II. Именно, мы установим оценку

$$R^{-n-2}\int\limits_{t_0-\frac{3}{4}\theta R^2}^{t_0}\int\limits_{K_{\frac{3R}{2}}} v^2\,dx\,dt \leqslant c \tag{10.7}$$

и докажем, что функция $v(x, t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\max_{t\in[t_0-\tau,\, t_0]}\int\limits_{K_\rho}(v^{(k)}\zeta)^2\,dx + \int\limits_{t_0-\tau}^{t_0}\int\limits_{K_\rho}|v_x^{(k)}|^2\zeta^2\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \gamma\left\{\int\limits_{t_0-\tau}^{t_0}\int\limits_{K_\rho}|v^{(k)}|^2\left(\zeta_x^2 + \zeta|\zeta_t|\right)dx\,dt + R^{-n\varkappa}\left[\int\limits_{t_0-\tau}^{t_0}(\operatorname{mes} A_{k,\rho}(t))^{\frac{\hat{r}}{\hat{q}}}\,dt\right]^{\frac{2}{\hat{r}}(1+\varkappa)}\right\} \tag{10.8}$$

при $k$, превосходящих некоторое значение $k_0$; здесь $A_{k,\rho}(t) = \{x \in K_\rho : v(x, t) > k\}$, $\zeta(x, t)$ — произвольная гладкая неотрицательная функция с $\zeta(x, t) \leqslant 1$, равная нулю на боковой поверхности и нижнем основании цилиндра

$Q(\rho, \tau) = K_\rho \times (t_0 - \tau, t_0)$, $\frac{1}{4}\theta R^2 \leqslant \tau \leqslant \frac{3}{4}\theta R^2$, $R \leqslant \rho \leqslant \frac{3}{2}R$, а $\hat{q}$, $\hat{r}$ и $\varkappa$ определяются, как и в (10.2), из соотношений $\varkappa = \frac{2}{n}\varkappa_1$, $\hat{q} = \frac{2q}{q-1}(1+\varkappa)$, $\hat{r} = \frac{2r}{r-1}(1+\varkappa)$. Легко убедиться, используя предположения (1.5), что параметры $\hat{r}$ и $\hat{q}$ подчиняются ограничениям (3.3) главы II.

Из (10.8) и (10.7) на основании теоремы 6.2 главы II и будет следовать желаемая оценка для $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_R} v(x, t)$, а тем самым неравенство (10.3).

Начнем с вывода неравенства (10.7). Для этого предварительно убедимся в справедливости следующей леммы.

Лемма 10.1. *Если* $u(x, t) \in V_2^{1,0}(K_{2R} \times (0, T)) \equiv V_2^{1,0}(\hat{Q}_T)$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{\hat{Q}_T}|u| = M$ *и для всех* $t_1 \in (0, T)$ *верны неравенства* (10.1) *с произвольной ограниченной неотрицательной* $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\hat{Q}_T)$, *а* $a_i$ *и* $\varphi_2$ *удовлетворяют условиям* (1.1) — (1.5), *то при любых* $t_1 \leqslant t_2$ *из* $[0, T]$ *верна оценка*

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{K_{2R}} u_x^2\zeta^2\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant cR^n + c(t_2 - t_1)R^n\left[\max \zeta_x^2 + (t_2 - t_1)^{-\frac{1}{r}}R^{-\frac{n}{q}}\right], \quad (10.9)$$

*где величина* $c$ *зависит лишь от* $n$, $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$, $q$, $r$, *а* $\zeta = \zeta(x)$ *есть гладкая функция, равная нулю на границе шара* $K_{2R}$, *причем* $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$.

Для доказательства положим в (10.1) $\eta = (e^{\lambda u_h}\zeta^2)_{\bar{h}}$ и преобразуем член, содержащий производную $\eta_t$, следующим образом:

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{K_{2R}} u(e^{\lambda u_h}\zeta^2)_{\bar{h}t}\,dx =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_{K_{2R}} u_{ht}e^{\lambda u_h}\zeta^2\,dx - \int_{K_{2R}} [u(x, t+h)e^{\lambda u_h}\zeta^2]_{\bar{h}}\,dx\,\Big|_{t_1}^{t_2} =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\int_{K_{2R}} e^{\lambda u_h}\zeta^2\,dx\,\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{K_{2R}} [u(x, t+h)e^{\lambda u_h}\zeta^2]_{\bar{h}}\,dx\,\Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (10.10)$$

Теперь в (10.1), преобразованном с помощью (10.10), можно перейти к пределу при $h \to 0$. В результате предельного перехода и оценок с помощью условий (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) получаем

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_{K_{2R}} e^{\lambda u}\zeta^2\,dx\Big|_{t_1}^{t_2} + \nu\lambda\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{K_{2R}} e^{\lambda u}u_x^2\zeta^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{K_{2R}} e^{\lambda u}\left[\lambda\varphi_0\zeta^2+2(\mu|u_x|+\varphi_1)\zeta|\zeta_x|+(\mu_1 u_x^2+\varphi_2)\zeta^2\right]dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{K_{2R}} e^{\lambda u}\left[(\lambda\varphi_0+\varphi_1^2+\varphi_2)\zeta^2+\zeta_x^2+\frac{1}{\mu_1}\mu^2\zeta_x^2+2\mu_1 u_x^2\zeta^2\right]dx\,dt. \tag{10.11}$$

Выбирая в (10.11) $\lambda = 4\nu^{-1}\mu_1$ и пользуясь условием $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|u(x, t)| \leqslant M$ и (1.4), получим

$$\mu_1 e^{-\frac{4M\mu_1}{\nu}}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{K_{2R}} u_x^2\zeta^2\,dx\,dt \leqslant \frac{\nu}{4\mu_1}e^{\frac{4\mu_1 M}{\nu}}\varkappa_n 2^n R^n +$$

$$+e^{\frac{4M\mu_1}{\nu}}\left[\mu_2\left(\frac{4\mu_1}{\nu}+2\right)(t_2-t_1)^{1-\frac{1}{r}}(\varkappa_n 2^n R^n)^{1-\frac{1}{q}}+\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{\mu^2}{\mu_1}\right)\max_{K_{2R}}\zeta_x^2\,(t_2-t_1)\,\varkappa_n 2^n R^n\right],$$

откуда и следует (10.9). Лемма 10.1 доказана.

Пусть шар $K_{2R}$ имеет центр в точке $x_0$.

Рассмотрим неравенство (10.1) с $t_1 = t_0 - \theta R^2$, $t_2 = t_0$. Положим в нем $\eta = (\psi'(u_h)\,\mathfrak{R}^2(x)\,\chi^2(t))_{\bar h}$, где

$$\mathfrak{R}(x) = \mathfrak{R}(|x|) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant |x-x_0| \leqslant \frac{3}{2}R, \\ 2\left(2-\frac{|x-x_0|}{R}\right), & \frac{3}{2}R \leqslant |x-x_0| \leqslant 2R, \\ 0, & 2R \leqslant |x-x_0|; \end{cases}$$

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant t_0-\theta R^2, \\ \frac{4}{\theta R^2}(t-t_0+\theta R^2), & t_0-\theta R^2 \leqslant t \leqslant t_0-\frac{3}{4}\theta R^2, \\ 1, & t_0-\frac{3}{4}\theta R^2 \leqslant t \leqslant t_0. \end{cases}$$

Проведем во втором слагаемом (10.1) интегрирование по частям по $t$ и приведем его первый член к виду

$$\int_{Q_{2R}} u_{ht}\psi'(u_h)\,\mathfrak{N}^2(x)\,\chi^2(t)\,dx\,dt - \int_{K_{2R}} (u^{+h}\psi(u_h)\,\mathfrak{N}^2\chi^2)_{\bar h}\,dx\Big|^{t_0} =$$

$$= \int_{K_{2R}} v^h\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\Big|^{t_0} - \int_{K_{2R}} (u^{+h}\psi'(u_h)\,\mathfrak{N}^2\chi^2)_{\bar h}\,dx\Big|^{t_0} - \int_{Q_{2R}} 2v^h\mathfrak{N}^2\chi\chi'\,dx\,dt,$$

где $u^{+h} = u(x,\ t+h)$, $v^h = \psi(u_h)$.

После этого перейдем в (10.1) к пределу по $h \to 0$. Законность этого предельного перехода легко оправдывается с помощью лемм § 4 главы II. В результате получим соотношение

$$\int_{K_{2R}} v\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\Big|^{t_0} + \int_{Q_{2R}} a_i\left(u_{x_i}\psi''\mathfrak{N}^2\chi^2 + 2\psi'\mathfrak{N}\mathfrak{N}_{x_i}\chi^2\right)dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{Q_{2R}} \left[\mu_1 u_x^2 + \varphi_2(x,\ t)\right]\psi'\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt + \int_{Q_{2R}} 2v\mathfrak{N}^2\chi\chi'\,dx\,dt. \quad (10.12)$$

Произведем в (10.12) оценки по неравенствам (1.1) — (1.2), (1.4) — (1.5), учитывая определение $v(x,\ t)$:

$$\int_{K_{2R}} v\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\Big|^{t_0} + \nu\int_{Q_{2R}} v_x^2\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt \leqslant \int_{Q_{2R}} 2v\mathfrak{N}^2\chi\chi'\,dx\,dt +$$

$$+ \int_{Q_{2R}} \left[\varphi_0\psi''\mathfrak{N}^2\chi^2 + 2\psi'\mathfrak{N}\,|\mathfrak{N}_x|\,\chi^2(\mu\,|u_x| + \varphi_1) + (\mu_1 u_x^2 + \varphi_2)\,\psi'\mathfrak{N}^2\chi^2\right]dx\,dt.$$

Первое слагаемое правой части этого неравенства оценим по неравенству (1.2) главы II

$$\int\limits_{Q_{2R}} 2v\mathfrak{N}^2\chi\chi'\,dx\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{R^2}\int\limits_{Q_{2R}} v^2\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt + \frac{R^2}{\varepsilon}\int\limits_{Q_{2R}} \mathfrak{N}\chi'^2\,dx\,dt$$

и воспользуемся неравенством (5.4) главы II. В силу предположения (10.6) и того, что $v \geqslant -\ln\frac{16}{\mu_0}$, это дает

$$\int\limits_{Q_{2R}} 2v\mathfrak{N}^2\chi\chi'\,dx\,dt \leqslant \varepsilon\beta_3\int\limits_{Q_{2R}} v_x^2\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt + \frac{c_1}{\varepsilon}R^n,$$

$$\beta_3 = \beta_2(b\varkappa_n)^{-2}2^{2n+2}.$$

Остальные члены оцениваем так:

$$\int\limits_{Q_{2R}} \varphi_0\psi''\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt \leqslant R^{-2\varkappa_1}\int\limits_{Q_{2R}} \varphi_0\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt \leqslant c_2R^n\|\varphi_0\|_{q,\,r,\,Q_{2R}},$$

$$2\int\limits_{Q_{2R}} \psi'\mathfrak{N}|\mathfrak{N}_x|\chi^2|u_x|\,dx\,dt \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q_{2R}} v_x^2\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt +$$

$$+\varepsilon^{-1}\int\limits_{Q_{2R}} \mathfrak{N}_x^2\chi^2\,dx\,dt \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q_{2R}} v_x^2\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt + \frac{c_3}{\varepsilon}R^n,$$

$$\int\limits_{Q_{2R}} \psi'\mathfrak{N}|\mathfrak{N}_x|\chi^2\varphi_1\,dx\,dt \leqslant R^{-\varkappa_1}\max_{K_{2R}}|\mathfrak{N}_x|\int\limits_{Q_{2R}} \varphi_1\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c_4R^n\|\varphi_1\|_{2q,\,2r,\,Q_{2R}},$$

$$\int\limits_{Q_{2R}} u_x^2\psi'\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt = \int\limits_{Q_{2R}} |v_x||u_x|\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{Q_{2R}} v_x^2\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt + \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{Q_{2R}} u_x^2\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt.$$

По лемме 10.1 отсюда следует, что

$$\int\limits_{Q_{2R}} u_x^2\psi'\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{Q_{2R}} v_x^2\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt + \frac{c_5}{\varepsilon}R^n;$$

$$\int\limits_{Q_{2R}} \varphi_2\psi'\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt \leqslant R^{-\varkappa_1}\int\limits_{Q_{2R}} \varphi_2\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt \leqslant c_6R^{n+\varkappa_1}\|\varphi_2\|_{q,\,r,\,Q_T}.$$

Приведя после этих оценок подобные члены, получим

$$\int_{K_{2R}} v\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,\Big|^{t_0} + \nu \int_{Q_{2R}} v_x^2\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\left(\beta_3 + \mu + \frac{1}{2}\mu_1\right)\int_{Q_{2R}} v_x^2\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt +$$

$$+ \left(\frac{c_1}{\varepsilon} + c_2\|\varphi_0\|_{q,\,r,\,Q_T} + \mu\frac{c_3}{\varepsilon} + 2c_4\|\varphi_1\|_{2q,\,2r,\,Q_T} + \right.$$

$$\left. + \mu_1\frac{c_5}{\varepsilon} + c_6R^{\varkappa_1}\|\varphi_2\|_{r,\,q,\,Q_T}\right)R^n. \qquad (10.13)$$

Выберем здесь $\varepsilon = \dfrac{\nu}{2\left(\beta_3 + \frac{1}{2}\mu_1 + \mu\right)}$. Тогда из (10.13) получим

$$\int_{Q_{2R}} v_x^2\mathfrak{N}^2\chi^2\,dx\,dt \leqslant c_7R^n,$$

что вместе с вытекающим из (10.6) неравенством

$$\operatorname{mes}\{x \in K_R;\ v(x,\ t) \leqslant 0\} \geqslant b\operatorname{mes} K_R, \quad t \in [t_0 - \theta R^2,\ t_0],$$

неравенством (5.4) главы II и оценкой $v \geqslant -\ln\frac{16}{\mu_0}$ дает

$$\int_{t_0-\frac{3\theta}{4}R^2}^{t_0}\int_{K_{2R}} v^2\mathfrak{N}^2\,dx\,dt \leqslant \left|\ln\frac{16}{\mu_0}\right|\frac{3\theta}{4}R^2\operatorname{mes}K_{2R} +$$

$$+ \beta_3R^2\int_{t_0-\frac{3\theta}{4}R^2}^{t_0}\int_{K_{2R}} v_x^2\mathfrak{N}^2\,dx\,dt \leqslant cR^{n+2}.$$

Таким образом, оценка (10.7) установлена. Осталось убедиться в справедливости неравенств (10.8). Для этого положим в (10.1) $t_1 = t_0 - \tau$, $t_2 \in [t_0 - \tau,\ t_0]$,

$$\eta(x,\ t) = [\psi'(u_h)\max\{\psi(u_h) - k,\ 0\}\,\zeta^2]_{\bar h} = [\psi'(u_h)\,v^{h(k)}\zeta^2]_{\bar h},$$

где $\zeta$ — срезающая функция для цилиндра $Q(\rho, \tau)=K_\rho \times \times (t_0-\tau, t_0)$, и преобразуем член с $\eta_t$ в (10.1) к виду

$$\int_{t_0-\tau}^{t_2}\int_{K_\rho} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[v^{h(k)}]^2\zeta^2\,dx\,dt - \int_{K_\rho}(\psi' v^{h(k)}\zeta^2)_{\bar h}\Big|^{t_2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{K_\rho}[v^{h(k)}\zeta]^2\,dx\Big|^{t_2} - \int_{t_0-\tau}^{t_2}\int_{K_\rho}[v^{h(k)}]^2\zeta\zeta_t\,dx\,dt -$$

$$- \int_{K_\rho}(\psi' v^{h(k)}\zeta^2)_{\bar h}\Big|^{t_2},$$

затем перейдем к пределу по $h\to 0$ и в полученном равенстве произведем оценки с помощью условий (1.1) — (1.2), (1.4) — (1.5). В результате будем иметь неравенство типа (1.10), именно

$$\frac{1}{4}\max_{t_2\in[t_0-\tau,\, t_0]}\int_{K_\rho}[v^{(k)}\zeta]^2\,dx\Big|^{t_2} +$$

$$+\frac{\nu}{2}\int_{Q(\rho,\,\tau)}\left[|v^{(k)}_x|^2 v^{(k)}\zeta^2 + |v^{(k)}_x|^2\zeta^2\right]dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{Q(\rho,\,\tau)}(v^{(k)})^2\zeta|\zeta_t|\,dx\,dt + \int_{t_0-\tau}^{t_0}\int_{A_{k,\rho}}\Big[\varphi_0\zeta^2\left(v^{(k)}\psi''+\psi'^2\right)+$$

$$+2\psi' v^{(k)}\zeta|\zeta_x|(\mu|u_x|+\varphi_1)+\psi' v^{(k)}\zeta^2\left(\mu_1 u_x^2+\varphi_2\right)\Big]\,dx\,dt,$$

где $A_{k,\rho}(t)=\{x\in K_\rho;\ v(x, t)>k\}$. (10.14)

Оценим слагаемые правой части (10.14) следующим образом:

$$\int_{Q(\rho,\,\tau)}\varphi_0\zeta^2 v^{(k)}\psi''(u)\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant R^{-2\varkappa_1}\|\varphi_0\zeta\|_{q,\,r,\,Q(\rho,\,\tau)}\|v^{(k)}\zeta\|_{\hat q,\,\hat r,\,Q(\rho,\,\tau)}(\mu(k, \rho, \tau))^{\frac{1}{\hat r}(1+2\varkappa)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|v^{(k)}\zeta\|^2_{\hat q,\,\hat r,\,Q(\rho,\,\tau)} + \frac{c_8}{2\varepsilon}R^{-2\varkappa_1}\|\varphi_0\zeta\|^2_{q,\,r,\,Q(\rho,\,\tau)}\times$$

$$\times(\mu(k, \rho, \tau))^{\frac{2}{\hat r}(1+\varkappa)}.$$

Здесь и ниже мы обозначаем

$$\mu(k, \rho, \tau) = \int_{t_0-\tau}^{t_0} \operatorname{mes}\{A_{k,\rho}(t)\}^{\frac{\hat r}{\hat q}}\, dt$$

с $\hat q$ и $\hat r$, определенными выше, $\varkappa = \frac{2}{n}\varkappa_1$.

$$\int_{t_0-\tau}^{t_0} \int_{A_{k,\rho}} \varphi_0 \psi'^2 \zeta^2\, dx\, dt \leqslant R^{-2\varkappa_1} \|\varphi_0\zeta\|_{q,r,Q(\rho,\tau)}\, \mu^{\frac{2}{\hat r}(1+\varkappa)}(k, \rho, \tau),$$

$$2 \int_{Q(\rho,\tau)} \mu\psi' v^{(k)}\zeta|\zeta_x|\,|u_x|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_{Q(\rho,\tau)} |v_x^{(k)}|^2 \zeta^2\, dx\, dt + \frac{\mu^2}{\varepsilon} \int_{Q(\rho,\tau)} (v^{(k)})^2 \zeta_x^2\, dx\, dt,$$

$$2 \int_{Q(\rho,\tau)} \psi' v^{(k)}\zeta|\zeta_x|\varphi_1\, dx\, dt \leqslant \int_{Q(\rho,\tau)} (v^{(k)})^2 \zeta_x^2\, dx\, dt +$$

$$+ R^{-2\varkappa_1} \int_{t_0-\tau}^{t_0} \int_{A_{k,\rho}(t)} \varphi_1^2\zeta^2\, dx\, dt \leqslant \int_{Q(\rho,\tau)} (v^{(k)})^2 \zeta_x^2\, dx\, dt +$$

$$+ R^{-2\varkappa_1} \|\varphi_1\|^2_{2q,2r,Q(\rho,\tau)}\, \mu^{\frac{2}{\hat r}(1+\varkappa)}(k, \rho, \tau),$$

$$\int_{Q(\rho,\tau)} \mu_1 \psi' v^{(k)} \zeta^2 u_x^2\, dx\, dt =$$

$$= \mu_1 \int_{Q(\rho,\tau)} (v_x^{(k)})^2 \zeta^2 v^{(k)} (\psi')^{-1}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \mu_1 \frac{\mu_0\omega}{8} \max_{Q(\rho,\tau)} [v^{(k)} e^{-v}] \int_{Q(\rho,\tau)} |v_x^{(k)}|^2 \zeta^2\, dx\, dt.$$

Так как $\mu_0 \leqslant \frac{\delta}{\omega}$ и $\max\limits_{Q(\rho,\tau)} v^{(k)} e^{-v} \leqslant e^{-1-k}$, то

$$\int\limits_{Q(\rho,\tau)} \mu_1 \psi' v^{(k)} \zeta u_x^2 \, dx\, dt \leqslant \frac{1}{8} \mu_1 \delta e^{-1-k} \int\limits_{Q(\rho,\tau)} \left(v_x^{(k)}\right)^2 \zeta^2 \, dx\, dt;$$

$$\int\limits_{Q(\rho,\tau)} \psi' v^{(k)} \zeta^2 \varphi_2 \, dx\, dt \leqslant R^{-\varkappa_1} \| v^{(k)} \zeta \|_{\hat{q}, \hat{r}, Q(\rho,\tau)} \times$$

$$\times \| \varphi_2 \zeta \|_{q, r, Q(\rho,\tau)} \mu^{\frac{1}{\hat{r}}(1+2\varkappa)}(k, \rho, \tau) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \| v^{(k)} \zeta \|^2_{\hat{q}, \hat{r}, Q(\rho,\tau)} +$$
$$+ \frac{c_0}{2\varepsilon} \| \varphi_2 \|^2_{q, r, Q(\rho,\tau)} \mu^{\frac{2}{\hat{r}}(1+\varkappa)}(k, \rho, \tau).$$

Подставим эти оценки в (10.14), $\| v^{(k)} \zeta \|_{\hat{q}, \hat{r}, Q(\rho,\tau)}$ заменим большей величиной $\beta | v^{(k)} \zeta |_{Q(\rho,\tau)}$ (см. неравенство (3.4) главы II), а $\varepsilon$ возьмем равным $\frac{1}{2(1+\beta^2)} \min\left\{\frac{1}{4}; \frac{\nu}{2}\right\}$. Это после приведения подобных членов даст неравенство

$$\min\left\{\frac{1}{8}; \frac{\nu}{4}\right\} \left[ \max_{t \in [t_0-\tau,\, t_0]} \int\limits_{K_\rho} [v^{(k)} \zeta]^2 \, dx \,|^t + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{Q(\rho,\tau)} \left[v_x^{(k)} \zeta\right]^2 dx\, dt \right] \leqslant \gamma_1 \left[ \int\limits_{Q(\rho,\tau)} (v^{(k)})^2 \left(\zeta |\zeta_t| + \zeta_x^{(2)}\right) dx\, dt + \right.$$
$$\left. + R^{-2\varkappa_1} \mu^{\frac{2}{\hat{r}}(1+\varkappa)}(k, \rho, \tau) \right] + \frac{\delta}{8} \mu_1 e^{-1-k} \int\limits_{Q(\rho,\tau)} \left[v_x^{(k)} \zeta\right]^2 dx\, dt \tag{10.15}$$

с $\gamma_1$, определяемым лишь $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$, $q$ и $r$, справедливое при любом $k$. Наложим теперь на $k$ ограничение: потребуем, чтобы $k \geqslant k_0$, где $k_0 = \ln\left[\frac{\delta}{8} \mu_1 \max\left(8; \frac{4}{\nu}\right)\right]$. При таких $k$ из (10.15) следуют неравенства (10.8). Таким образом, первую часть теоремы 1.1 можно считать доказанной.

Замечание 10.1. В вышеприведенном выводе (10.3) вместо предположения о том, что $u(x, t)$ есть обобщенное решение уравнения (0.1), фактически требовалось лишь, чтобы $u(x, t)$ удовлетворяло неравенству (10.1) при любой ограниченной $\eta(x, t) \geqslant 0$ из $\overset{\circ}{W}{}_1^{1,1}(Q_T)$ и $a_i$ и $\varphi_2$, подчиняющихся условиям (1.1) — (1.2), (1.4) — (1.5) (см. в связи с этим замечание 1.1 данной главы), и чтобы для функции $u(x, t)$ было выполнено условие ($10.4_1$). Это последнее предположение можно было бы заменить условием

$$\operatorname{mes}\{x \in K_\rho : u(x, t_0 - \theta R^2) \leqslant \max_{Q_{2R}} u - \\ - \delta_2 \operatorname{osc}\{u, Q_{2R}\}\} \geqslant \delta_3 \operatorname{mes} K_R \tag{10.16}$$

с некоторыми положительными постоянными $\delta_2$ и $\delta_3$. Доказательство оценки (10.3) от этого почти не изменится, а те изменения, которые нужно внести, очевидны.

Учитывая только что сказанное, можно утверждать справедливость следующей леммы, которая будет использоваться в главе VI.

Лемма 10.2. *Если функция $u(x, t)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$ имеет* $\operatorname{vrai\,max}_{Q_T}|u| = M < \infty$, *удовлетворяет неравенству* (10.1) *при любой ограниченной неотрицательной $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ с $a_i$ и $\varphi_2$, подчиняющимися ограничениям* (1.1) — (1.2), (1.4) — (1.5), *и если для $u(x, t)$ выполнено условие* (10.16) *с $\delta_2, \delta_3 > 0$, то для $u(x, t)$ справедливо неравенство* (10.3) *с постоянной $\delta_0 > 0$, определяемой лишь величинами $\mu_1$, $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_2$, $q$, $r$ из условий* (1.1) — (1.2), (1.4) — (1.5), $\delta_2$ *и* $\delta_3$.

# ГЛАВА VI

## КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА

В данной главе исследуются квазилинейные уравнения общего вида

$$u_t - a_{ij}(x, t, u, u_x)u_{x_i x_j} + a(x, t, u, u_x) = 0. \qquad (0.1)$$

Для их решений $u(x, t)$ устанавливаются априорные оценки норм $|u_x|^{(\alpha)}_{Q_T}$, которые вместе с результатами главы IV по линейным уравнениям с гладкими коэффициентами и теоремой Лерэ — Шаудера дают возможность заключить о классической разрешимости в целом первой краевой задачи для уравнений (0.1). Такие оценки, как показано на примерах § 3 главы II, не имеют места для всего класса равномерно параболических уравнений (0.1). Для их справедливости необходимо наложить определенные ограничения на поведение функций $a_{ij}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ при больших $u$ и $p$. Мы это и делаем при выводе оценок $\max_{Q_T}|u_x|$. (Оценки $\max_{Q_T}|u|$ даны в § 2 главы I. Для них также необходимо выполнение некоторых условий.)

Оценки константы Гёльдера $\langle u_x\rangle^{(\alpha)}_Q$ через $M = \max_{Q_T}|u|$ и $M_1 = \max_{Q_T}|u_x|$ и некоторые числовые характеристики известных функций $a_{ij}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ даются для всего класса невырожденных параболических уравнений. С доказательства этого важного факта мы и начинаем данную главу (§§ 1 и 2). В § 1 излагаются внутренние оценки $\langle u_x\rangle^{(\alpha)}_{Q'}$ для всех решений $u(x, t)$ уравнений (0.1), непрерывных в $Q_T$ и имеющих $u_t$ из $L_2(Q_T)$ и ограниченные производные $u_x$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$. (Класс таких обобщенных решений $u$ мы обозначим через $\mathfrak{M}$.) Они получаются как следствия результатов § 9 главы II о функциях классов $\mathfrak{B}_2^N$, ибо, как показывается в § 1, вектор-функция $u_x = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ принадлежит классу $\mathfrak{B}_2^{2n}$, параметры которого можно подсчитать. В § 2 оценивается $\langle u_x \rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$ во всем цилиндре $Q_T$ для $u$, удовлетворяющих первому краевому условию.

Следующий параграф (§ 3) посвящен выводу локальных и тотальных оценок $\max |u_x|$. В отличие от уравнений предыдущей главы для решений $u$ уравнений (0.1) не удается дать оценку постоянной Гёльдера $\langle u \rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$ (или хотя бы модуля непрерывности $u$ по $x$) через $\max\limits_{Q_T} |u|$ и известные величины, и потому при доказательстве разрешимости краевой задачи нам необходимо иметь оценку $\max |u_x|$ через $\max |u|$ (а не через $|u|_{Q_T}^{(\alpha)}$, как это было в главе V). Для получения такой оценки на функции $a_{ij}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ пришлось наложить одно дополнительное условие. Оно снимается в § 5 для случая одной пространственной переменной. Наконец, в § 4 доказываются теоремы существования.

## § 1. Доказательство гладкости обобщенных решений класса $\mathfrak{M}$ и оценка $\langle u_x \rangle_{Q'}^{(\alpha)}$

Пусть $u(x, t)$ есть произвольное обобщенное решение уравнения (0.1) класса $\mathfrak{M}$, т. е. оно непрерывно, имеет обобщенные производные $u_t$, $u_{xx}$ из $L_2(Q_T)$, его производные $u_x$ ограничены по модулю и непрерывно зависят от $t$ в норме $L_2(\Omega)$, и оно почти всюду удовлетворяет уравнению (0.1). Покажем, что фактически его гладкость по $(x, t)$ определяется лишь гладкостью $a_{ij}(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ как функций $x$, $t$, $u$ и $p$, если только уравнение (0.1) параболично на рассматриваемом решении. Собственно весь вопрос — в доказательстве непрерывности в смысле Гёльдера производных $u_x$, ибо если это уже известно, то остальное устанавливается на основании результатов глав III и IV по линейным уравнениям с гладкими коэффициентами. Действительно, уравнение (0.1) можно рассмотреть как линейное уравнение с главными коэффициентами $\hat{a}_{ij}(x, t) = a_{ij}(x, t, u(x, t), u_x(x, t))$ и со свободным членом $\hat{a}(x) = a(x, t, u(x, t), u_x(x, t))$ и рассуждать следующим образом.

Если $a_{ij}(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ суть непрерывные в смысле Гёльдера функции своих аргументов, то $\hat{a}_{ij}(x, t)$ и $\hat{a}(x, t)$ будут принадлежать $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ с некоторым $\alpha > 0$, и потому (на основании теоремы 12.1 главы III) каждое решение этого линейного уравнения фактически будет элементом $H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$. Если функции $a_{ij}(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ обладают большей гладкостью, то только что установленный факт о принадлежности $u(x, t)$ к $H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ гарантирует большую гладкость функций $\hat{a}_{ij}(x, t)$, $\hat{a}(x, t)$, а это на основании той же теоремы 12.1 главы III дает бóльшую гладкость любого решения линейного уравнения, т. е. и исследуемой функции $u(x, t)$.

В данном параграфе мы докажем гладкость $u_x$ внутри $Q_T$ и получим оценку $\langle u_x\rangle_{Q'}^{(\alpha)}$ для любого цилиндра $\bar{Q}' \subset \bar{Q}_T$, не пересекающего $S_T$. Именно, докажем теорему.

Теорема 1.1. *Пусть $u(x, t)$ есть обобщенное решение из класса $\mathfrak{M}$ уравнения* (0.1), *для которого функции $a_{ij}(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ определены, а $a_{ij}(x, t, u, p)$ и дифференцируемы по $x$, $u$, $p$ в области*

$$\{(x, t) \in Q_T, |u| \leqslant \max_{Q_T}|u(x, t)|, |p| \leqslant \max_{Q_T}|u_x(x, t)| \equiv M_1\}$$

*и удовлетворяют условию*

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, t, u(x, t), u_x(x, t))\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \quad \nu, \mu = \mathrm{const} > 0. \tag{1.1}$$

*Если при $u = u(x, t)$ и $p = u_x(x, t)$*

$$\begin{aligned} &\max_{Q_T}\left|\frac{\partial a_{ij}(x, t, u, p)}{\partial p_k}\right| \leqslant \mu_1, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n, \\ &\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}, a\right| \leqslant \varphi(x, t), \quad i, j, k = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1.2}$$

*где*

$$\|\varphi\|_{2q,\,2r,\,Q_T} \leqslant \mu_1, \tag{1.3}$$

*а $q$ и $r$ удовлетворяют соотношениям* (7.2) *главы* III, *то производные $u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}$ непрерывны по Гёльдеру в $Q_T$ и для любого $Q' \subset Q_T$ величина $\langle u_x \rangle_{Q'}^{(\alpha)}$ не превосходит постоянной $c$, зависящей лишь от $M_1$, $n$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$ и $r$ из условий* (1.1) — (1.3) *и от расстояния $Q'$ до $\Gamma_T$. Величина $\alpha > 0$ определяется $M_1$, $n$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$ и $r$.*

*Если ограничена норма $|u_x(x, 0)|_{\Omega}^{(\beta)}$, $\beta > 0$, то оценки $\langle u_x \rangle_{Q'}^{(\alpha)} \leqslant c$ справедливы и для цилиндров $Q' = \Omega' \times [0, T]$, где $\Omega'$ — произвольная внутренняя подобласть $\Omega$. В этом случае постоянная $c$ зависит от $M_1$, $n$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$ и $r$ из* (1.1)—(1.3), *от расстояния от $\Omega'$ до $S$, от $|u_x(x, 0)|_{\Omega}^{(\beta)}$ и от $\beta$, причем показатель $\alpha \leqslant \beta$.*

Без ограничения общности будем считать функции $u_{x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, нормированными в том смысле, что их значения не выходят из промежутка $[0, 1]$: $0 \leqslant u_{x_i} \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В противном случае мы в уравнении (1.1) сделали бы замену функций $u(x, t)$ на $v(x, t) = \dfrac{u(x, t) + M_1 \sum_{i=1}^{n} x_i}{2M_1}$ и все рассуждения проводили с функцией $v$. Очевидно, что $v$ удовлетворяет уравнению того же вида (1.1) с теми же свойствами $a_{ij}$ и $a$.

Покажем, что вектор-функция $U(x, t)$ с компонентами $u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}$ принадлежит классу $\mathfrak{B}_2^{2n}(Q_T, \hat{M}_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \hat{r}, \delta, \varkappa)$, параметры которого $\hat{M}_1$, $\gamma$, $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, $\hat{r}$, $\delta$ и $\varkappa$ определяются лишь величинами $M_1$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$ и $r$. Для этого в силу леммы 9.3 главы II достаточно доказать, что функции

$$w_+^l(x, t) = 10nu_{x_l}(x, t) + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2(x, t),$$

$$w_-^l(x, t) = 10n\left[1 - u_{x_l}(x, t)\right] + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2(x, t), \quad l = 1, \ldots, n,$$

при любой ограниченной неотрицательной функции $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ удовлетворяют неравенствам

$$\int_\Omega w(x, t)\eta(x, t)\,dx\Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t}\int_\Omega \{-w\eta_t + [\hat a_{ij}(x, t)w_{x_j} + 2c_i^l(x, t)]\eta_{x_i}\}\,dx\,dt \leqslant \int_{t_0}^{t}\int_\Omega [\gamma w_x^2 + \varphi_2(x, t)]\eta\,dx\,dt, \quad (1.4)$$
$$0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

в которых $\hat a_{ij}(x, t) = a_{ij}(x, t, u(x, t), u_x(x, t))$, а $c_i^l(x, t)$ и $\varphi_2(x, t)$ подчиняются условиям

$$\|(c_i^l)^2, \varphi_2\|_{q, r, Q_T} \leqslant \mu_2, \quad l, i = 1, \ldots, n. \quad (1.5)$$

Здесь значения $q$ и $r$ взяты из (1.3). В самом деле, неравенства (1.4) имеют тот же вид, что и неравенства (1.7) главы V, с теми же ограничениями на функции $a_i(x, t, u, p) = \hat a_{ij}(x, t)p_j + 2c_i^l(x, t)$ и $\varphi_2(x, t)$, что и в § 1 главы V. Из них, как показано в § 1 главы V (см. замечание 1.3), следуют неравенства (7.1), (7.2) главы II для $w = w_{\pm}^l$, $l = 1, \ldots, n$, гарантирующие принадлежность функции $\mathrm{U}(x, t)$ классу $\mathfrak{B}_2^{2n}$.

Итак, приступим к выводу (1.4).

Для этой цели рассмотрим интегральное тождество

$$-\int_{t_0}^{t}\int_\Omega (\mathscr{L}u)\,\xi_{x_s}\,dx\,dt = 0, \quad s = 1, \ldots, n, \quad (1.6)$$

где $\xi(x, t)$ — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$. Предполагая решение $u(x, t)$ трижды непрерывно дифференцируемым, можем преобразовать (1.6) интегрированием по частям к виду

$$0=\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}\left[u_{x_st}\xi-a_{ij}u_{x_sx_ix_j}\xi-\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}}u_{x_mx_s}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_{x_s}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_s}\right)u_{x_ix_j}\xi-a\xi_{x_s}\right]dx\,dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}\left[u_{x_st}\xi+a_{ij}u_{x_sx_j}\xi_{x_i}+\right.$$
$$+\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}}u_{x_mx_i}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_{x_i}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\right)u_{x_sx_j}\xi-$$
$$\left.-\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}}u_{x_mx_s}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_{x_s}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_s}\right)u_{x_ix_j}\xi-a\xi_{x_s}\right]dx\,dt. \quad (1.7)$$

Введем обозначения

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}}-\frac{\partial a_{im}}{\partial u_{x_j}}\equiv a_{ij}^m,\quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_{x_i}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}=a^j,$$
$$-\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_s}-\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_{x_s}=b_{ij}^s.$$

Тогда тождество (1.7) будет выглядеть так:

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}\left[u_{x_st}\xi+a_{ij}u_{x_sx_j}\xi_{x_i}+\left(a_{ij}^m u_{x_mx_i}u_{x_sx_j}+a^ju_{x_sx_j}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+b_{ij}^s u_{x_ix_j}\right)\xi-a\xi_{x_s}\right]dx\,dt=0,\qquad s=1,\ \ldots,\ n. \quad (1.8)$$

Положим здесь

$$\xi(x,\ t)=u_{x_s}(x,\ t)\,\eta(x,\ t),$$

где $\eta(x,\ t)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, и полученные равенства просуммируем по $s$ от 1 до $n$. Тогда, обозначая

$$v=\sum_{s=1}^{n}u_{x_s}^2,$$

будем иметь

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}\Big[\frac{1}{2}v_t\eta + a_{ij}u_{x_sx_j}u_{x_sx_i}\eta + \frac{1}{2}a_{ij}v_{x_j}\eta_{x_i} + \\ + \frac{1}{2}\left(a_{ij}^m v_{x_j}u_{x_mx_i} + a^j v_{x_j} + 2b_{ij}^s u_{x_s}u_{x_ix_j}\right)\eta - \\ - au_{x_sx_s}\eta - au_{x_s}\eta_{x_s}\Big]\,dx\,dt = 0. \quad (1.9)$$

Сложим это тождество с тождеством (1.8), в котором $s$ взято равным $l$, а $\xi = 5n\eta(x, t)$, и результат запишем как следующее соотношение относительно функции $w = w_+^l = 10nu_{x_l} + v$:

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}\Big[\frac{1}{2}w_t\eta + a_{ij}u_{x_sx_j}u_{x_sx_i}\eta + \frac{1}{2}a_{ij}w_{x_j}\eta_{x_i} + \\ + \frac{1}{2}a_{ij}^m w_{x_j}u_{x_mx_i}\eta + \frac{1}{2}a^j w_{x_j}\eta + c_{ij}^l u_{x_ix_j}\eta + c_i^l\eta_{x_i}\Big]\,dx\,dt = 0, \quad (1.10)$$

где

$$c_{ij}^l = b_{ij}^s u_{x_s} - a\delta_i^j + 5nb_{ij}^l,$$
$$-c_i^l = au_{x_i} + 5na\delta_i^l.$$

В первом члене равенства (1.10) произведем интегрирование по частям; это даст

$$\int_{\Omega} w(x, t)\,\eta(x, t)\,dx\Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}\big[-w\eta_t + 2a_{ij}u_{x_sx_j}u_{x_sx_i}\eta + \\ + \left(a_{ij}w_{x_j} + 2c_i^l\right)\eta_{x_i}\big]\,dx\,dt = \\ = -\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}\left[a_{ij}^m w_{x_j}u_{x_mx_i} + a^j w_{x_j} + 2c_{ij}^l u_{x_ix_j}\right]\eta\,dx\,dt. \quad (1.11)$$

Члены в правой части оценим по неравенству (1.2) главы II:

$$|a_{ij}^m w_{x_j}u_{x_mx_i}\eta| \leqslant |\eta|\left(\varepsilon u_{x_mx_i}^2 + \frac{1}{4\varepsilon}|a_{ij}^m|^2 w_{x_j}^2\right),$$
$$|a^j w_{x_j}\eta| \leqslant \left(\frac{1}{2}w_{x_j}^2 + \frac{1}{2}|a^j|^2\right)|\eta|,$$
$$|c_{ij}^l u_{x_ix_j}\eta| \leqslant \left(\varepsilon u_{x_ix_j}^2 + \frac{1}{4\varepsilon}|c_{ij}^l|^2\right)|\eta|.$$

При $\varepsilon=\frac{\nu}{n}$ и $\eta\geqslant 0$ из этих оценок и (1.11) в силу предположений (1.1) — (1.3) будут следовать неравенства (1.4) для функций $w=w^l_+$, $l=1, \ldots, n$. При этом в (1.4)

$$\gamma=\frac{n}{4\nu}\max_{Q_T}\sum_{l,\,j,\,m}(a^m_{lj})^2+\frac{1}{2},$$

$\varphi_2(x,\ t)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(a^j)^2+\frac{n}{4\nu}\sum_{l,\,j=1}(c^l_{lj})^2$, а $\eta(x,\ t)$ — произвольная ограниченная неотрицательная функция из $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(Q_T)$.

При выводе тождества (1.11) и вытекающих из него неравенств (1.4) мы использовали существование у $u(x,\ t)$ производных $u_{xt}$, $D^3_x u$. В самом же тождестве (1.11), равно как и в исходном равенстве (1.6), эти производные не содержатся — в них интегралы имеют смысл при произвольных функциях $\xi$ и ограниченных $\eta\geqslant 0$ из $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(Q_T)$, если $u(x,\ t)$ обладает лишь теми свойствами, которые предписываются условиями теоремы 1.1.

Покажем, что для любого такого решения также справедливо (1.11), а следовательно и (1.4). Для этого аппроксимируем $u(x,\ t)$ трижды непрерывно-дифференцируемыми функциями $u^p(x,\ t)$, $p=1,\ 2, \ldots,$ так чтобы $0\leqslant u^p_{x_l}\leqslant 1$, функции $u^p$ сходились к $u$ равномерно в $Q_T$, производные $u^p_{x_l}$ сходились к $u_{x_l}$, $l=1, \ldots, n$, почти всюду в $Q_T$, а производные $u^p_t$ и $u^p_{x_l x_j}$ сходились к $u_t$ и $u_{x_l x_j}$, $l,\ j=1, \ldots, n$, соответственно в $L_2(Q_T)$. Составим от $u^p$ выражения

$$\mathscr{L}_p(u^p)=u^p_t-a_{lj}(x,\ t,\ u,\ u_x)u^p_{x_l x_j}+a(x,\ t,\ u,\ u_x).$$

Ясно, что $\|\mathscr{L}_p(u^p)-\mathscr{L}u\|_{2,\,Q_T}\to 0$ при $p\to\infty$. В соответствии с (1.6) рассмотрим тождество

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}[u^p_t-a_{lj}(x,\ t,\ u,\ u_x)u^p_{x_l x_j}+a(x,\ t,\ u,\ u_x)]\,\xi_{x_s}\,dx\,dt=$$

$$=\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\mathscr{L}_p(u^p)\,\xi_{x_s}\,dx\,dt$$

и преобразуем его левую часть к виду, аналогичному (1.8):

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}\Big[u^p_{x_st}\xi + a_{ij}u^p_{x_sx_j}\xi_{x_i} + \\ + \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}}\left(u_{x_mx_i}u^p_{x_sx_j} - u_{x_mx_s}u^p_{x_ix_j}\right)\xi + \\ + \left(a^j u^p_{x_sx_j} + b^s_{ij}u^p_{x_ix_j}\right)\xi - a\xi_{x_s}\Big]dx\,dt = \\ = \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}\mathscr{L}_p(u^p)\xi_{x_s}\,dx\,dt.$$

Отсюда выводим соотношения, близкие к (1.9), (1.10), (1.11). Последнее из этих соотношений будет выглядеть так:

$$\int_{\Omega} w^p(x, t)\eta(x, t)\,dx\Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}\Big[-w^p\eta_t + 2a_{ij}u^p_{x_sx_i}u^p_{x_sx_j}\eta + \\ + \left(a_{ij}w^p_{x_j} + 2c_i^{pl}\right)\eta_{x_l}\Big]dx\,dt = \\ = -\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}\Big[\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}}u_{x_mx_i}w_{x_j} - 2u_{x_mx_s}u^p_{x_jx_i}u^p_{x_s} - \\ - 10nu_{x_mx_l}u^p_{x_ix_j} + a^j w^p_{x_j} + 2c^{pl}_{ij}u^p_{x_lx_j}\Big]\eta\,dx\,dt + \\ + \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}\mathscr{L}_p(u^p)\Big[\left(u^p_{x_s}\eta\right)_{x_s} + 5n\eta_{x_l}\Big]dx\,dt. \quad (1.12)$$

Здесь

$$w^p = w_+^{pl} = 10nu^p_{x_l} + \sum_{l=1}^{n}(u^p_{x_i})^2,$$

$$-c_i^{pl} = au^p_{x_i} + 5na\delta_i^l,$$

$$c^{pl}_{ij} = -\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_{x_s}\right)u^p_{x_s} - a\delta^l_j - 5n\left(\frac{\partial a_{lj}}{\partial x_l} + \frac{\partial a_{lj}}{\partial u}u_{x_l}\right).$$

Переходя в (1.12) к пределу по $p\to\infty$, получим равенство (1.11). Возможность такого предельного перехода нетрудно доказать, если учесть, что $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T} |u^p_x| \leqslant 1$, $u^p_{x_i}$ сходятся к $u_{x_i}$ почти всюду в $Q_T$ к $u_{x_i}$, а $\left\| u^p_{x_ix_j} - u_{x_ix_j} \right\|_{2, Q_T} \to 0$ при $p \to \infty$. Рассмотрим, к примеру, один из членов в (1.12)

$$j_p \equiv \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}} u_{x_mx_s} u^p_{x_ix_j} u^p_{x_s} \eta \, dx \, dt$$

и покажем, что при $p \to \infty$ $j_p \to j \equiv \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}} u_{x_mx_s} \times$ $\times\, u_{x_ix_j} u_{x_s} \eta \, dx \, dt$. Действительно, в силу (1.2)

$$|j - j_p| \leqslant c \, \| u_{xx} \|_{2, Q_T} \sum_{i, j, s} \left\| u^p_{x_ix_j} u^p_{x_s} - u_{x_ix_j} u_{x_s} \right\|_{2, Q_T}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon$ и соответствующее ему по теореме Егорова множество $Q^\varepsilon_T$ с $\operatorname{mes} Q^\varepsilon_T < \varepsilon$ такое, что на $Q_T \setminus Q^\varepsilon_T$ функции $u^p_{x_i}$ сходятся равномерно к $u_{x_i}$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$. Ясно, что норма

$$\left\| u^p_{x_ix_j} u^p_{x_s} - u_{x_ix_j} u_{x_s} \right\|_{2, Q_T}$$

не превосходит суммы норм

$$\left\| \left(u^p_{x_ix_j} - u_{x_ix_j}\right) u^p_{x_s} \right\|_{2, Q_T} + \left\| u_{x_ix_j} \left(u^p_{x_s} - u_{x_s}\right) \right\|_{2, Q_T \setminus Q^\varepsilon_T} +$$

$$+ \left\| u_{x_ix_j} \left(u^p_{x_s} - u_{x_s}\right) \right\|_{2, Q^\varepsilon_T} \leqslant \left\| u^p_{xx} - u_{xx} \right\|_{2, Q_T} +$$

$$+ \| u_{xx} \|_{2, Q_T} \max_{Q_T \setminus Q^\varepsilon_T} \left| u^p_{x_s} - u_{x_s} \right| + 2 \| u_{xx} \|_{2, Q^\varepsilon_T},$$

причем в правой части первые два слагаемых стремятся к нулю при $p \to \infty$, а последнее может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора $\varepsilon$. Из сказанного следует, что $|j_p - j| \to 0$ при $p \to \infty$.

Аналогично проверяется, что и в остальных членах (1.12) можно перейти к пределу по $p \to \infty$.

Таким образом, доказано, что для решений $u(x, t)$ уравнения (1.1), рассматриваемых в теореме 1.1, и построенных по ним функций

$$w = w_+^l = 10nu_{x_l} + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2, \quad l = 1, \ldots, n,$$

верны равенства (1.11), а следовательно, и неравенства (1.4) с $\eta \geqslant 0$.

Совершенно так же можно установить, что неравенствам (1.4) с $\eta \geqslant 0$ удовлетворяют функции

$$w = w_-^l = 10n\left(1 - u_{x_l}\right) + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2, \quad l = 1, \ldots, n.$$

Как уже отмечалось выше, неравенств (1.4) с $\eta(x, t) \geqslant 0$ для $w = w_\pm^l$, $l = 1, \ldots, n$, достаточно, чтобы на основании леммы 9.3 главы II заключить о принадлежности вектор-функции $\mathrm{U}(x, t) = \left(u_{x_1}(x, t), \ldots, u_{x_n}(x, t)\right)$ классу $\mathfrak{B}_2^{2n}(Q_T, \hat{M}_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \hat{r}, \delta, \varkappa)$ с $\hat{M}_1 = 11n$, $\delta_1 = 16n$, $\delta_2 = \frac{1}{4}$, $\delta_3 = \frac{1}{2}$ и параметрами $\gamma$, $\hat{r}$, $\delta$ и $\varkappa$, определяемыми величинами $\gamma$, $q$, $r$ и $\mu_2$ из неравенств (1.4), (1.5). Отсюда в силу теорем 9.1, 9.2 главы II следует справедливость утверждений теоремы 1.1.

Можно было бы не обращаться к результатам, касающимся функций классов $\mathfrak{B}_2^{N_1}$, а вместо этого воспользоваться леммой 10.2 главы V для того, чтобы из неравенств (1.4), (1.5) сделать вывод о справедливости утверждений теоремы 1.1 об оценке $\langle u_x\rangle_{Q'}^{(\alpha)}$. В самом деле, неравенства (1.4) являются частным случаем неравенств (10.1) главы V (что то же, неравенств (1.7) главы V). Для них $\mu_1 = \gamma$ и функции $a_i(x, t, u, p) = a_{ij}(x, t, u, p)\, p_l + 2c_i^l$, $\varphi_2(x, t)$ в силу (1.5), (1.1) удовлетворяют требованиям леммы 10.2 главы V. Возьмем в $Q_T$ произвольный цилиндр $Q_{2R} = K_{2R} \times [t_0 - \theta R^2, t_0] \subset \subset Q_T$ и соосный ему цилиндр $Q_R = K_R \times \left[t_0 - \frac{1}{4}\theta R^2, t_0\right]$,

где $\theta$ — число, определяемое $n$, $M_1$, $\nu$, $\mu_1$, $r$ и $q$ в соответствии с леммой 7.1 главы II. Среди функций $u_{x_l}(x, t)$ выберем ту, которая в $Q_{2R}$ имеет наибольшее колебание; пусть это будет $u_{x_r}$, так что $\omega^r = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \omega^i = \max\limits_i \operatorname{osc}\{u_{x_i};\ Q_{2R}\}$. Согласно лемме 9.3 главы II $\operatorname{osc}\{w_\pm^r,\ Q_{2R}\} \geqslant \delta_1\omega^r$, $\delta_1 = \frac{8N_1}{M_1}$, и хотя бы для одной из функций $w^r = w_\pm^r$ выполнено неравенство

$$\operatorname{mes}\{x \in K_R : w^r(x,\ t_0 - \theta R^2) \leqslant \\ \leqslant \max_{Q_{2R}} w^r - \delta_2 \operatorname{osc}\{w^r,\ Q_{2R}\}\} \geqslant \delta_3 \operatorname{mes} K_R.$$

Тогда эта функция удовлетворяет всем требованиям леммы 10.2 главы V, а потому и неравенству

$$\operatorname{osc}\{w^r,\ Q_R\} \leqslant (1 - \delta_0)\operatorname{osc}\{w^r,\ Q_{2R}\} + R^{\varkappa_1} \tag{1.13}$$

с $\delta_0 > 0$ и $\varkappa_1 > 0$, зависящими лишь от $\delta_2$, $\delta_3$ и величин, входящих в неравенство (1.4). Из (1.13) и леммы 5.9 главы II следует желаемая оценка для $\langle u_x\rangle_{Q'}^{(\alpha)}$, $Q' \subset Q_T$.

## § 2. Оценка $\langle u_x\rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$

В предыдущем параграфе были получены оценки $\langle u_x\rangle_{Q'}^{(\alpha)}$ для любого внутреннего цилиндра $Q' = \Omega' \times (\varepsilon,\ T)$, $\varepsilon \geqslant 0$, $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Для доказательства теоремы о разрешимости краевой задачи надо иметь оценки $\langle u_x\rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$ во всей области $Q_T$. Это будет сделано по тому же плану, что и в случае уравнений с дивергентной главной частью в § 5 главы V. Именно, сначала установим неравенство $\max\limits_{Q_T}|u_t| \leqslant c$, а затем рассмотрим $u(x,\ t)$ как решение эллиптического уравнения

$$a_{ij}(x,\ t,\ u,\ u_x)\, u_{x_i x_j} + f(x,\ t) = 0 \tag{2.1}$$

со свободным членом $f(x,\ t) = -a(x,\ t,\ u(x,\ t),\ u_x(x,\ t)) - u_t(x,\ t)$, зависящее от $t$ как от параметра. Для решений таких уравнений верно следующее утверждение (см. теорему 1.1 главы VI [I]).

Теорема 2.1. *Пусть функция $u(x)$ принадлежит $W_2^2(\Omega)$, имеет* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u_x| \leqslant M_1$ *и удовлетворяет почти* *всюду в* $\Omega$ *уравнению* (2.1) (*в котором* $t$ *фиксировано*: $t=t_0$). *Если выполнены условия*

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x,\ t_0,\ u(x),\ u_x(x))\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2,\ \nu>0,$$

$$\max_{\Omega}\left|\frac{\partial a_{ij}(x,\ t_0,\ u(x),\ u_x(x))}{\partial u_{x_k}},\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial u},\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k},\ f\right| \leqslant \mu_1,$$

*и если* $u(x)|_S=\psi(x)|_S$, *где* $\psi(x)\in W_q^2(\Omega)$ *с* $q>n$, *и* $S\subset O^2$, *то* $u(x)\in H^{1+\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta>0$, *и величина* $|u_x|_\Omega^{(\beta)}$ *оценивается сверху постоянной, определяемой лишь* $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $M_1$, $q$, $\|\psi\|_{q,\Omega}^{(2)}$ *и границей* $S$.

Теорема 2.1 дает оценку $\langle u_x\rangle_{x,\Omega}^{(\beta)}$ через известные величины и $\max\limits_{Q_T}|u_t|$, которая вместе с неравенством $\max\limits_{Q_T}|u_t|\leqslant c$ позволит оценить $\langle u_x\rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$ (см. лемму 3.1 главы II). Начнем с получения априорной оценки $\max\limits_{Q_T}|u_t|$. Предположим, что $u(x,\ t)$ есть классическое решение уравнения (1.1) и что величина $M_1=\max\limits_{Q_T}|u_x|$ нам уже известна. Пусть известен и $\max\limits_{\Gamma_T}|u_t|$.

Будем считать, что функции $a_{ij}(x,\ t,\ u,\ p)$ и $a(x,\ t,\ u,\ p)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам в окрестности многообразия $\{(x,\ t)\in\overline{Q}_T,\ u=u(x,\ t),\ p=u_x(x,\ t)\}$. Чтобы получить оценку $\max\limits_{Q_T}|u_t|$, достаточно оценить максимум в $Q_T$ выражений $v=u_t+\lambda\sum\limits_{l=1}^{n}u_{x_l}^2$ и $w=-u_t+\lambda\sum\limits_{l=1}^{n}u_{x_l}^2$, где $\lambda\geqslant 1$ — некоторая постоянная. Рассмотрим, например, $v(x,\ t)$.

Если функция $u(x,\ t)$ имеет не только непрерывные производные вида $u_t$ и $u_{x_ix_j}$, но и производные $u_{tx_l}$, $D_x^3u$, то можно поступать следующим образом. Уравнение (0.1) продифференцируем по $t$ и $x_l$, $l=1,\ \ldots,\ n$, и составим сумму

$$(\mathscr{L}u)_t+\lambda\sum_{l=1}^{n}(\mathscr{L}u)_{x_l}2u_{x_l}+\mathscr{L}u=0.$$

Результат запишем в виде следующего соотношения для $v$:

$$v_t - a_{ij}(x, t, u, u_x) v_{x_i x_j} + 2\lambda a_{ij} u_{x_i x_i} u_{x_i x_j} + \left(-\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}} u_{x_i x_j} + \frac{\partial a}{\partial u_{x_m}}\right) v_{x_m} - \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u} u_t + \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial a_{ij}}{\partial u} 2\lambda \sum_{l=1}^{n} u_{x_l}^2 + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} 2\lambda u_{x_l}\right) u_{x_i x_j} + \frac{\partial a}{\partial u} u_t + \frac{\partial a}{\partial t} +$$
$$+ \lambda \frac{\partial a}{\partial u} 2 \sum_{l=1}^{n} u_{x_l}^2 + 2\lambda \frac{\partial a}{\partial x_l} u_{x_l} + v - a_{ij} u_{x_i x_j} +$$
$$+ a - \lambda \sum_{l=1}^{n} u_{x_l}^2 = 0.$$

Умножим это равенство на $v - k$ и результат проинтегрируем сначала по $x \in A_k(t)$, где $A_k(t)$ — множество точек $x \in \Omega$, для которых $v(x, t) > k$, а затем по $t$ от 0 до $T$. Число $k$ считаем положительным и бо́льшим $\max\limits_{\Gamma_T} v$.

Член

$$J_1 = \int_0^T \int_{A_k(t)} -a_{ij} v_{x_i x_j} (v - k)\, dt\, dt$$

преобразуем с помощью интегрирования по частям к виду

$$J_1 = \int_0^T \int_{A_k(t)} \left[a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_l}} u_{x_l x_i} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial u} u_{x_i} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\right) v_{x_j} (v - k)\right] dx\, dt. \tag{2.2}$$

Тогда получим

$$\frac{1}{2} \int_{A_k(T)} [v(x, T) - k]^2\, dx +$$
$$+ \int_0^T \int_{A_k(t)} [a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + 2\lambda a_{ij} u_{x_l x_i} u_{x_l x_j} (v - k) +$$

$$+v(v-k)]\,dx\,dt=-\int_0^T\int_{A_k(t)}\left\{\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_l}}u_{x_lx_l}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_{x_l}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\right)v_{x_j}+\left(-\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_l}}u_{x_ix_j}+\frac{\partial a}{\partial u_{x_l}}\right)v_{x_l}-$$

$$-\left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\left(a_{lm}u_{x_lx_m}-a\right)+\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}2\lambda\sum_{l=1}^{n}u_{x_l}^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}2\lambda u_{x_l}\right]u_{x_ix_j}+\frac{\partial a}{\partial u}\left(a_{ij}u_{x_ix_j}-a\right)+\frac{\partial a}{\partial t}+$$

$$+2\lambda\frac{\partial a}{\partial u}\sum_{l=1}^{n}u_{x_l}^2+2\lambda\frac{\partial a}{\partial x_l}u_{x_l}-a_{ij}u_{x_ix_j}+a-$$

$$\left.-\lambda\sum_{l=1}^{n}u_{x_l}^2\right\}(v-k)\,dx\,dt. \quad (2.3)$$

Оценим сверху правую часть в (2.3), учитывая, что $M_1=\max\limits_{Q_T}|u_x|$ известен и что $\lambda$ и $k$ в дальнейшем мы возьмем достаточно большими. Из (2.3) имеем

$$\int_0^T\int_{A_k(t)}\left[a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}+2\lambda a_{ij}u_{x_lx_i}u_{x_lx_j}(v-k)+v(v-k)\right]dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant c\int_0^T\int_{A_k(t)}[|u_{xx}||v_x|+|v_x|+|u_{xx}|^2+$$

$$+\lambda|u_{xx}|+\lambda](v-k)\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant c\int_0^T\int_{A_k(t)}\left[\varepsilon v_x^2+\frac{1}{4\varepsilon}|u_{xx}|^2(v-k)^2+\varepsilon v_x^2+\frac{1}{4\varepsilon}(v-k)^2+\right.$$

$$\left.+2|u_{xx}|^2(v-k)+\frac{1}{4}\lambda^2(v-k)+\lambda(v-k)\right]dx\,dt.$$

Постоянная $c$ определяется величинами $M_1$ и

$$\max_{i,\,j,\,k=1,\,\ldots,\,n}\ \max_{Q_T}\left| a_{ij}(x,\,t,\,u(x,\,t),\,u_x(x,\,t)),\ a,\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_k}},\right.$$
$$\left.\frac{\partial a}{\partial t},\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial u},\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial t},\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k},\ \frac{\partial a}{\partial u_{x_k}},\ \frac{\partial a}{\partial u},\ \frac{\partial a}{\partial x_k}\right| = M_2. \tag{2.4}$$

Возьмем $\varepsilon$ и $\lambda$ так, чтобы

$$2c = \lambda\nu,\quad 2c\varepsilon = \frac{\nu}{2}.$$

Тогда, перенося налево члены с $v_x^2$ и $u_{xx}^2(v-k)$, получим

$$\int_0^T \int_{A_k(t)} \left[\frac{\nu}{2} v_x^2 + \lambda\nu\,|u_{xx}|^2(v-k) + v(v-k)\right] dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{4\varepsilon} \int_0^T \int_{A_k(t)} [\,|u_{xx}|^2(v-k)^2 +$$
$$+ (v-k)(v-k+\varepsilon\lambda^2 + 4\varepsilon\lambda)]\,dx\,dt. \tag{2.5}$$

Постоянные $c$, $\varepsilon$ и $\lambda$ уже фиксированы в зависимости только от $M_1$ и $M_2$. Параметр же $k$ подчинен лишь одному требованию

$$k > M_0 = \max_{\Gamma_T} v.$$

Пусть $k_{\max}$ есть максимум $v$ в $Q_T$ и пусть он больше $M_0$. Возьмем в (2.5) $k = k_{\max} - \delta$, где $\delta = \frac{4\varepsilon\nu\lambda}{c}$. Для таких $k$ неравенство (2.5) дает

$$\int_0^T \int_{A_k(t)} v(v-k)\,dx\,dt \leqslant c \int_0^T \int_{A_k(t)} (v-k)\left(\frac{\delta}{4\varepsilon} + \frac{1}{4}\lambda^2 + \lambda\right) dx\,dt,$$

или, что то же,

$$\int_0^T \int_{A_k(t)} (v-k)\left[v - c\left(\frac{\delta}{4\varepsilon} + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda\right)\right] dx\,dt \leqslant 0,$$
$$k = k_{\max} - \delta.$$

Мы лишь уменьшим левую часть, если заменим во второй скобке $v$ на $k_{\max}-\delta$:

$$\left[k_{\max}-\delta-c\left(\frac{\delta}{4\varepsilon}+\frac{\lambda^2}{4}+\lambda\right)\right]\int_0^T\int_{A_k(t)}(v-k)\,dx\,dt\leqslant 0,$$

т. е. получаем

$$k_{\max}\leqslant\delta+c\left(\frac{\delta}{4\varepsilon}+\frac{\lambda^2}{4}+\lambda\right).$$

Окончательно можем написать

$$\max_{Q_T} v\leqslant\max\{M_0;\ c_1\}, \tag{2.6}$$

где

$$c_1=2\frac{\nu}{c}+2c+\frac{c^3}{\nu^2}+\frac{2c^2}{\nu}.$$

Это и есть желаемая оценка $v$, а следовательно, и оценка $u_t$ сверху. Аналогично оценивается положительный максимум функции $w=-u_t+\lambda u_x^2$, что дает оценку $u_t$ снизу.

Однако все наши рассуждения законны лишь для $u$, обладающих производными $u_{tx}$, $D_x^3u$ и им подчиненными, хотя в тождество (2.3), из которого мы получили оценку (2.6), входят лишь производные $D_x^2u$, $u_{xt}$, $u_x$.

Покажем, что (2.3) справедливо и для решений уравнения (0.1), о которых известно лишь, что они принадлежат $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$. Такие решения имеют обобщенные производные $u_{tx}$, и эти производные принадлежат $L_2(Q_T)$. Действительно, составим от обеих частей уравнения (0.1) разностное отношение по $t$, затем умножим обе части этого равенства на разностное отношение $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ от $u(x, t)$ и результат проинтегрируем по $Q_{t_1}$, $t_1\leqslant T-\Delta t$. Мы получим, принимая во внимание формулы (4.7) — (4.9) главы II:

$$0=\int_0^{t_1}\int_\Omega \frac{\Delta(\mathcal{L}u)}{\Delta t}\frac{\Delta u}{\Delta t}\,dx\,dt=\int_0^{t_1}\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\Delta u}{\Delta t}-a_{ij}\frac{\Delta u_{x_ix_j}}{\Delta t}-\right.$$

$$\left.-u_{x_ix_j}(x,\ t+\Delta t)\frac{\Delta a_{ij}}{\Delta t}+\frac{\Delta a}{\Delta t}\right)\frac{\Delta u}{\Delta t}\,dx\,dt=$$

$$=\int_0^{t_1}\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2+a_{ij}\frac{\Delta u_{x_i}}{\Delta t}\frac{\Delta u_{x_j}}{\Delta t}+\frac{\Delta u_{x_j}}{\Delta t}\frac{\Delta u}{\Delta t}\frac{da_{ij}}{dx_i}+\right.$$

$$+\left[-u_{x_ix_j}(x,\ t+\Delta t)\left(\frac{\partial\hat{a}_{ij}}{\partial u_{x_l}}\frac{\Delta u_{x_l}}{\Delta t}+\frac{\partial\hat{a}_{ij}}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial\hat{a}_{ij}}{\partial t}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial\hat{a}}{\partial u_{x_l}}\frac{\Delta u_{x_l}}{\Delta t}+\frac{\partial\hat{a}}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial\hat{a}}{\partial t}\right)\right]\frac{\Delta u}{\Delta t}\right\}dx\,dt,$$

откуда, пользуясь ограниченностью $|u_x|$ и $|u_{xx}|$, выводим

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2dx\,\Big|_0^{t_1}+\int_0^{t_1}\int_\Omega a_{ij}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_{x_i}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_{x_j}dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant c\int_0^{t_1}\int_\Omega\left[\left|\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|\left|\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_x\right|+\left|\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_x\right|+\left|\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|+\left|\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|^2\right]dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant c\int_0^{t_1}\int_\Omega\left[\varepsilon\left|\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_x\right|^2+\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)\left|\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|^2+\left(\frac{1}{2\varepsilon}+\varepsilon\right)\right]dx\,dt,$$

где $\varepsilon$ — любое из промежутка (0, 1). При $\varepsilon=\frac{\nu}{2c}$ получаем

$$2\int_\Omega\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2dx\,\Big|_0^{t_1}+\nu\int_0^{t_1}\int_\Omega\left|\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_x\right|^2dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant c'\int_0^{t_1}\int_\Omega\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2dx\,dt+c'.$$

Отсюда на основании леммы 5.5 главы II выводим равномерную ограниченность интеграла

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega \left|\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_x\right|^2 dx\,dt \leqslant \text{const} \tag{2.7}$$

при всех $\Delta t$ и $t_1 \leqslant T-\Delta t$. Неравенство (2.7) гарантирует существование у $u$ обобщенных производных $u_{x_i t}$ и их квадратичную суммируемость по $Q_T$.

Для вывода соотношения типа (2.3) возьмем функцию

$$v_\Delta = \frac{\Delta u}{\Delta t} + \lambda\sum_{l=1}^n \left(\frac{\Delta u}{\Delta x_l}\right)^2, \quad \Delta x_l = \Delta t = \Delta,$$

и поступим с нею так же, как выше с функцией $v$. Именно, рассмотрим соотношение

$$\frac{\Delta}{\Delta t}(\mathscr{L}u) + \lambda\sum_{l=1}^n \frac{\Delta(\mathscr{L}u)}{\Delta x_l}\, 2\frac{\Delta u}{\Delta x_l} + \mathscr{L}u = 0 \tag{2.8}$$

в области $Q_{T,\Delta} = \Omega_\Delta \times [0, T-\Delta]$, где $\Omega_\Delta$ после сдвига на $\Delta$ по любой из осей все еще принадлежит $\Omega$. Это соотношение можно преобразовать к виду, близкому к (2.3). Действительно, в силу (4.7)—(4.9) главы II равенство (2.8) можно записать так:

$$\begin{gathered} v_{\Delta t} - a_{ij}(x, t, u(x, t), u_x(x, t))\,v_{\Delta x_i x_j} + \\ + 2\lambda a_{ij}\frac{\Delta u_{x_i}}{\Delta x_l}\frac{\Delta u_{x_j}}{\Delta x_l} - u_{x_i x_j}(x, t+\Delta t)\frac{\Delta a_{ij}}{\Delta t} + \frac{\Delta a}{\Delta t} - \\ - \lambda u_{x_i x_j}(x+\Delta x_l, t)\frac{\Delta a_{ij}}{\Delta x_l}\, 2\frac{\Delta u}{\Delta x_l} + \frac{\Delta a}{\Delta x_l}\, 2\lambda\frac{\Delta u}{\Delta x_l} + \mathscr{L}u = 0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Пусть

$$M_0 = \max_{\Gamma_T}|v|.$$

В силу непрерывности $v(x, t)$ множество точек $(x, t)$ из $\overline{Q}_T$, где $v(x, t) > M_0 + 1$, содержится в цилиндре $Q_T^{(h)}$, расстояние которого до $\Gamma_T$ равно $h > 0$. При достаточно малых $\Delta\,(\Delta < h)$ функции $v_\Delta$ определены в $Q_{T-\Delta}^{(h)}$ и максимум $v_\Delta$ на нижнем основании и боковой поверхности $Q^{(h)}_{T-\Delta}$ не превосходит $M_0+2$.

Умножим (2.9) на $v_\Delta - k$, где $k \geqslant M_0 + 2$, и проинтегрируем результат сначала по множеству $A_k^\Delta(t)$ точек $x$ из $\Omega_\Delta$, для которых $v_\Delta(x, t) > k$, а затем по $t$ от 0 до $t_1 \leqslant T-\Delta$. Второй член заменим в соответствии с равенством (2.2). Это приведет к соотношению, близкому к (2.3):

$$\frac{1}{2}\int\limits_{A_k^\Delta(t_1)} [v_\Delta(x, t_1) - k]^2\,dx +$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{A_k^\Delta(t)} \left[a_{ij}(v_\Delta)_{x_i}(v_\Delta)_{x_j} + 2\lambda a_{ij}\frac{\Delta u_{x_l}}{\Delta x_l}\frac{\Delta u_{x_j}}{\Delta x_l}(v_\Delta - k) + \right.$$

$$\left. + \mathscr{L}u(v_\Delta - k)\right] dx\,dt =$$

$$= -\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{A_k^\Delta(t)} \left[\frac{da_{ij}}{dx_l}(v_\Delta)_{x_j} - u_{x_lx_j}(x, t+\Delta t)\frac{\Delta a_{ij}}{\Delta t} + \frac{\Delta a}{\Delta t} - \right.$$

$$\left. - \lambda u_{x_lx_j}(x+\Delta x_l, t)\frac{\Delta a_{ij}}{\Delta x_l}2\frac{\Delta u}{\Delta x_l} + \frac{\Delta a}{\Delta x_l}2\lambda\frac{\Delta u}{\Delta x_l}\right](v_\Delta - k)\,dx\,dt. \tag{2.10}$$

Будем переходить в этом равенстве к пределу, устремляя $\Delta x_l$ и $\Delta t$ к нулю. Отношения $\frac{\Delta u}{\Delta x_l}$, $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, $\frac{\Delta u_{x_l}}{\Delta x_l}$ стремятся равномерно в $Q^{(h)}_{t_1}$ к $\frac{\partial u}{\partial x_l}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_l\,\partial x_l}$ соответственно, а $\frac{\Delta u_{x_l}}{\Delta t}$ стремятся к $\frac{\partial^2 u}{\partial x_l\,\partial t}$ в $L_2\left(Q_t^{(h)}\right)$ (см. лемму 4.10 главы II). Следовательно, $v_\Delta$ равномерно в $Q_t^{(h)}$ сходятся к $v$, а $(v_\Delta)_{x_l}$ сходятся к $v_{x_l}$ в $L_2\left(Q^{(h)}_{t_1}\right)$. В силу неравенства (4.1) и леммы 4.3 главы II заключаем, что непрерывные функции

$$v_\Delta^{(k)}(x, t) = \max\left\{v_\Delta(x, t) - k;\ 0\right\}$$

равномерно в $Q_{t_1}^{(h)}$ стремятся к непрерывной функции

$$v^{(k)}(x,\ t) = \max\{v(x,\ t) - k;\ 0\}$$

и

$$\left\|\left(v_\Delta^{(k)}\right)_{x_i} - v_{x_i}^{(k)}\right\|_{2,\ Q_{t_1}^{(h)}} \to 0, \quad i = 1,\ \ldots,\ n, \quad \text{при} \quad \Delta \to 0.$$

Все интегралы в (2.10) распространим с $A_k^\Delta(t)$ на всю область $\Omega$, беря в них вместо $(v_\Delta - k)$ и $(v_\Delta)_{x_i}$ функции $v_\Delta^{(k)}$ и $\left(v_\Delta^{(k)}\right)_{x_i}$ соответственно, так что область интегрирования теперь не будет зависеть от $\Delta$. Из сказанного следует, что во всех интегралах в (2.10) возможно перейти к пределу по $\Delta t = \Delta x_l = \Delta \to 0$. В результате такого предельного перехода получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{A_k(t_1)} [v(x,\ t_1) - k]^2\,dx + \\ + \int\limits_0^{t_1}\int\limits_{A_k(t)} \left[a_{ij}v_{x_i}v_{x_j} + 2\lambda a_{ij}u_{x_lx_i}u_{x_lx_j}(v-k) + \right. \\ \left. + \mathscr{L}u(v-k)\right]dx\,dt = -\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{A_k(t)}\left[\frac{da_{ij}}{dx_i}v_{x_j} - u_{x_lx_j}\frac{da_{lj}}{dt} + \right. \\ \left. + \frac{da}{dt} - \lambda u_{x_lx_j}\frac{da_{ij}}{dx_l}2u_{x_i} + \frac{da}{dx_l}2\lambda u_{x_l}\right](v-k)\,dx\,dt.$$

Возьмем здесь $t_1 = T$ и раскроем полные производные $a_{ij}$ и $a$, а $\mathscr{L}u$ запишем в виде $\mathscr{L}u = v - \lambda\sum\limits_{l=1}^n u_{x_l}^2 - a_{lm}u_{x_lx_m} + a$. Это дает

$$\frac{1}{2}\int\limits_{A_k(T)} [v(x,\ T) - k]^2\,dx + \\ + \int\limits_0^T\int\limits_{A_k(t)} \left[a_{ij}v_{x_i}v_{x_j} + 2\lambda a_{ij}u_{x_lx_i}u_{x_lx_j}(v-k) + v(v-k)\right]dx\,dt =$$

$$
\begin{aligned}
&=-\int_0^T\int_{A_k(t)}\Big[-\lambda u_x^2-a_{lm}u_{x_lx_m}+a+\\
&+\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_l}}u_{x_lx_l}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_{x_l}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}\right)v_{x_j}-\\
&-u_{x_lx_j}\left(\underline{\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_l}}u_{x_lt}}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_t+\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right)+\underline{\frac{\partial a}{\partial u_{x_l}}u_{x_lt}}+\\
&+\frac{\partial a}{\partial u}u_t+\frac{\partial a}{\partial t}-2\lambda u_{x_lx_j}u_{x_l}\left(\underline{\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}}u_{x_mx_l}}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_{x_l}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}\right)-\\
&\qquad-2\lambda u_{x_l}\left(\underline{\frac{\partial a}{\partial u_{x_m}}u_{x_mx_l}}+\frac{\partial a}{\partial u}u_{x_l}+\frac{\partial a}{\partial x_l}\right)\Big](v-k)\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

Объединим подчеркнутые члены, замечая, что

$$u_{x_lt}+2\lambda u_{x_mx_l}u_{x_m}=v_{x_l},$$

а производную $u_t$ заменим, пользуясь уравнением (1.1), на $a_{lm}u_{x_lx_m}-a$. В результате получим равенство, которое в точности совпадает с (2.3). Оно выведено нами для всех значений $k$, удовлетворяющих условию

$$k\geqslant M_0+2.$$

В соответствии с (2.6) можем утверждать справедливость оценки

$$\max_{Q_T} v\leqslant\max\{M_0+2;\ c_1\},$$

где постоянная $c_1$ та же, что и в (2.6).

Итак, оценка $\max\limits_{Q_T}|u_t|$ установлена. Полученный результат может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть* $u(x, t)$ *есть решение уравнения* (0.1), *принадлежащее* $C^{2,1}(\bar Q_T)$. *Предположим, что уравнение* (0.1) *параболично на* $u(x, t)$ (*т. е. выполнено неравенство* (1.1)) *и функции* $a_{ij}(x, t, u, p)$ *и* $a(x, t, u, p)$ *в области* $\Big\{(x, t)\in\bar Q_T,\ |u|\leqslant\max\limits_{Q_T}|u(x, t)|,\ |p|\leqslant M_1=\max\limits_{Q_T}|u_x(x, t)|\Big\}$ *непрерывны и непрерывно дифферен-*

*цируемы по всем своим аргументам. Тогда величина* $\max\limits_{Q_T}|u_t|$ *оценивается только через постоянные* $\nu$, $\mu$ *и* $M_2$ *из условий* (1.1), (2.4), $M_1$ *и* $\max\limits_{\Gamma_T}|u_t|$.

Из этой теоремы, теоремы 2.1 и леммы 3.1 главы II следует

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и* $S\in O^2$. *Тогда при некотором* $\alpha>0$ *величина* $\langle u_x\rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$ *оценивается постоянной, зависящей лишь от* $M_1=\max\limits_{Q_T}|u_x(x, t)|$, *от величин* $\nu$, $\mu$ *и* $M_2$ *из условий* (1.1) *и* (2.4), *от нормы* $|u|_{\Gamma_T}^{(2)}$ *и от нормы в* $O^2$ *функций, определяющих границу* $S$. *Этими же величинами определяется и показатель* $\alpha$.

Вывод этой теоремы из теорем 2.1, 2.2 и из леммы 3.1 главы II буквально тот же, что для уравнений с дивергентной главной частью в § 5 главы V.

Замечание 2.1. Утверждения теорем остаются в силе и для решений, описанных в замечании 5.2 главы V.

## § 3. Оценка $\max|u_x|$

В §§ 3—4 главы V мы оценили $\max|u_x|$ для решений уравнений с дивергентной главной частью через $\max|u|$. Здесь мы сделаем то же для решений общих квазилинейных уравнений

$$\mathscr{L}u\equiv u_t-a_{ij}(x, t, u, u_x)\,u_{x_ix_j}+a(x, t, u, u_x)=0 \qquad (3.1)$$

в предположении их равномерной параболичности

$$\nu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2\leqslant$$
$$\leqslant a_{ij}(x, t, u, p)\xi_i\xi_j\leqslant\mu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2. \qquad (3.2)$$

Как показывают примеры § 3 главы I, для этого необходимо, чтобы порядок роста $a(x, t, u, p)$ по $p$ превосходил порядок роста $a_{ij}(x, t, u, p)\xi_i\xi_j$ по $p$ не более чем на две единицы, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$|a(x, t, u, p)|\leqslant\mu(|u|)(1+|p|)^m. \qquad (3.3)$$

Кроме того, надо наложить определенные ограничения на рост по $p$ частных производных функций $a_{ij}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ по переменным $x$, $u$, $p$. Обычно эти ограничения формулировались в таком виде: при дифференцировании $a_{ij}$ и $a$ по $x$ и $u$ порядки их роста по $x$ не повышаются, а при дифференцировании по $p$ понижаются по крайней мере на единицу (ясно, что для случая, когда $a_{ij}$ и $a$ при больших $|p|$ суть полиномы по $x$ и $u$, эти предположения об их частных производных являются следствием условий (3.2) и (3.3)).

Мы будем предполагать эти ограничения выполненными для частных производных по $p_k$:

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}\right|(1+|p|)^2+\left|\frac{\partial a}{\partial p_k}\right|\leqslant\mu_1(|u|)(1+|p|)^{m-1}. \tag{3.4}$$

Для частных производных по $x_k$ ослабим их, предположив

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right|(1+|p|)^2+\left|\frac{\partial a}{\partial x_k}\right|\leqslant \\ \leqslant[\varepsilon(|u|)+P(|p|, |u|)](1+|p|)^{m+1}, \tag{3.5}$$

где $\varepsilon(\tau)$ — непрерывная монотонно возрастающая неотрицательная функция $\tau$, а $P(\rho, \tau)$ — непрерывная на множестве $\{\rho\geqslant 0, \tau\geqslant 0\}$ функция, монотонно возрастающая по $\tau$ и стремящаяся к нулю при $\rho\to\infty$ равномерно относительно $\tau$ из $[0, \tau_1]$, где $\tau_1$ — любое число. А для частных производных по $u$ будем считать, что

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\right|\leqslant[\varepsilon(|u|)+P(|p|, |u|)](1+|p|)^{m-2},$$

$$-\frac{\partial a(x, t, u, p)}{\partial u}\leqslant[\varepsilon(u)+P(|p|, |u|)](1+|p|)^{m}, \tag{3.6}$$

где $\varepsilon(\tau)$ и $P(\rho, \tau)$ обладают теми же свойствами, что и в (3.5).

При выполнении условий (3.2)—(3.6) будет получена оценка $\max|u_x|$ через $\max\limits_{Q_T}|u|=M$ и известные величины

$$\nu=\nu(M),\quad \mu=\mu(M),\quad \mu_1=\mu_1(M),$$

$$\varepsilon=\varepsilon(M),\quad P(|p|)=P(|p|, M),$$

входящие в (3.2)—(3.6), если $\varepsilon(M)$ достаточно мала. Если в неравенствах (3.5) и (3.6) постоянная $\varepsilon(M)$ произвольна (не мала), то $\max|u_x|$ возможно оценить через $|u|^{(\alpha)}_{Q_T}$ с любым $\alpha>0$ (или через $\max\limits_{Q_T}|u|$ и модуль непрерывности $u(x, t)$) и те же величины $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $\varepsilon$, $P(|p|)$.

В случае уравнений с дивергентной главной частью (см. главу V) норма $|u|^{(\alpha)}_{Q_T}$ с некоторым $\alpha>0$ оценивалась через $M=\max\limits_{Q_T}|u|$ и известные константы без предположений о малости $\varepsilon(M)$ и, следовательно, $\max|u_x|$ их решений оценивался при любом $\varepsilon(M)$ из (3.5) и (3.6). Возможно ли это сделать для всех уравнений вида (3.1) при выполнении только условий (3.2)—(3.6) с произвольным $\varepsilon(M)$ — неясно. Точно так же обстоит дело и в случае уравнений эллиптического типа (см. [I], глава VI, § 2).

В этом параграфе мы будем следовать изложению аналогичных оценок § 2 главы VI книги [I]. Некоторое различие будет вызвано, во-первых, появлением члена $u_t$ в уравнении и, во-вторых, тем, что по сравнению с [I] мы ослабляем априорные предположения относительно гладкости решения $u(x, t)$. Именно, в [I] при получении оценок $\max|u_x|$ для решений эллиптических уравнений

$$a_{ij}(x, u, u_x)u_{x_ix_j}+a(x, u, u_x)=0$$

предполагалось, что $u(x)\in W^2_2(\Omega)$ и $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u_x|<\infty$. Из приведенного ниже вывода следует, что требование ограниченности $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u_x|$ можно заменить условием ограниченности интеграла

$$\int\limits_{\Omega}|u_x|^{2s}(|u_{xx}|^2+1)\,dx<\infty, \tag{3.7}$$

где $s$ — достаточно большое число, зависящее от $a_{ij}$ и $a$. В частности, все утверждения из § 2 главы IV книги [I], касающиеся внутренних оценок $\max|u_x|$, справедливы для решений $u(x)$ из $W^2_n(\Omega)$ — для них в силу теорем вложения интегралы (3.7) конечны при любом $s$.

Оценим сначала $|u_x|$ на поверхности $S_T$. При этом будем предполагать, что функция $u(x, t)\in O^{1,0}(\bar{Q}_T)$ и в каждой точке $Q_T\setminus\Gamma_T$ имеет второй дифференциал по $x$, производную по $t$ и удовлетворяет уравнению (3.1). Обозначим $\max\limits_{Q_T}|u| = M$, $\nu(M) = \nu$, $\mu(M) = \mu$.

Будем считать, что

$$u|_{\Gamma_T} = \psi(x, t)|_{\Gamma_T}, \text{ а } \psi(x, 0) \in O^1(\bar{\Omega}) \text{ и } \psi \in O^{2,1}(S_T). \tag{3.8}$$

Лемма 3.1. *Пусть функция $u$ является решением уравнения* (3.1), *причем $u$ и $\psi$ обладают только что описанными свойствами. Тогда $\max\limits_{S_T}|u_x|$ оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от $M$, $\frac{\mu(M)}{\nu(M)}$ из* (3.2), (3.3), *от границы $S$ области $\Omega$, которая предполагается принадлежащей классу $O^2$, и от $\max\limits_{x \in \Omega}|\psi_x(x, 0)|$ и $|\psi|^{(2)}_{S_T}$.*

Возьмем какой-либо небольшой кусок границы $S^1$ области $\Omega$. Вводя новые координаты $y_1, \ldots, y_n$, преобразуем всю область $\Omega$ так, чтобы $S^1$ лег в плоскость $y_n = 0$, а вся область $\Omega$ расположилась от него в сторону положительных $y_n$. Уравнение (3.1) в переменных $y_1, \ldots, y_n$ будет иметь тот же вид и те же свойства (3.2) — (3.3), если только функции $y_l = y_l(x)$, $l = 1, \ldots, n$, будут иметь в $\bar{\Omega}$ ограниченные производные до второго порядка включительно. Наши предположения об $S$ и сводятся к тому, что $S$ можно разбить на конечное число кусков и для каждого из них ввести невырожденные координаты $y_1, \ldots, y_n$, обладающие только что описанными свойствами. Ввиду этого без ограничения общности будем считать, что уже в координатах $x_1, \ldots, x_n$ кусок $S^1$ границы $S$ лежит в плоскости $x_n = 0$ и вся область $\Omega$ принадлежит полупространству $x_n \geqslant 0$. Кроме того, будем рассматривать случай однородного граничного условия

$$u|_{S_T} = 0.$$

Общий случай условия (3.8) сводится к этому с помощью замены $u(x, t)$ на $w(x, t) = u(x, t) - \hat{\psi}(x, t)$, где $\hat{\psi}(x, t)$ — какая-либо функция из $O^{2,1}(\bar{Q}_T)$, равная $\psi$ на $S_T$.

Построим по $u(x, t)$ функцию $v(x, t)$, которая равнялась бы нулю на $S_T$ и для которой выражение

$$(1 + |u_x|)^{2-m}\mathscr{L}_0 v \equiv (1 + |u_x|)^{2-m}\,[v_t - a_{ij}(x, t, u, u_x)\,v_{x_i x_j}]$$

было бы меньше какой-нибудь известной нам постоянной. Введем $v(x, t)$ с помощью равенства

$$u=\varphi(v).$$

Тогда

$$u_t=\varphi' v_t, \quad u_{x_i}=\varphi' v_{x_i}, \quad u_{x_i x_j}=\varphi' v_{x_i x_j}+\varphi'' v_{x_i} v_{x_j},$$

и уравнение (3.1) дает

$$\mathscr{L}(u;\ v)\equiv v_t-a_{ij}(x, t, u, u_x)v_{x_i x_j}-\\ -\frac{\varphi''}{\varphi'}a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}+\frac{1}{\varphi'}a(x, t, u, u_x)=0. \tag{3.9}$$

Если $\varphi'>0$ и $\varphi''<0$, то отсюда следует

$$v_t-a_{ij}(x, t, u, u_x)v_{x_i x_j}=\frac{\varphi''}{\varphi'}a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}-\frac{a}{\varphi'}\leqslant\\ \leqslant(1+|u_x|)^{m-2}\left[\frac{\varphi''}{\varphi'}\nu v_x^2+\frac{1}{\varphi'}\mu(1+|u_x|)^2\right]\leqslant\\ \leqslant\left[\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\nu+2\mu\varphi'\right)v_x^2+\frac{2\mu}{\varphi'}\right](1+|u_x|)^{m-2}. \tag{3.10}$$

Подберем $\varphi$ так, чтобы

$$\frac{\varphi''}{\varphi'}\nu+2\mu\varphi'\leqslant 0, \qquad \varphi(0)=0.$$

Например, возьмем

$$\varphi(v)=\frac{\nu}{2\mu}\ln(1+v),$$

так что $v=-1+e^{\frac{2\mu}{\nu}u}$ и $v|_{S_T}=0$. Тогда из (3.10) следует

$$(1+|u_x|)^{2-m}\left[v_t-a_{ij}(x, t, u, u_x)v_{x_i x_j}\right]\leqslant\frac{2\mu}{\varphi'}=\\ =\frac{4\mu^2}{\nu}(1+v)=\frac{4\mu^2}{\nu}e^{\frac{2\mu u}{\nu}}\leqslant\frac{4\mu^2}{\nu}e^{\frac{2\mu M}{\nu}}\equiv c.$$

При $t=0$ имеем

$$\max_{\Omega}|v_x(x, 0)|\leqslant\frac{2\mu}{\nu}\max_{\Omega}e^{\frac{2\mu u(x, 0)}{\nu}}M_0\leqslant\frac{2\mu M_0}{\nu}e^{\frac{2\mu M}{\nu}}\equiv c_1.$$

Рассмотрим теперь функцию $v(x, t)+\lambda e^{-x_n}$. При $\lambda \geqslant c_1 e^d$, где $d$ — диаметр $\Omega$, ее максимальное на $\Gamma_T$ значение принимается при $x \in S^1$, $t \in [0, T]$:

$$\max_{\Gamma_T}\left(v+\lambda e^{-x_n}\right) \leqslant \left(v+\lambda e^{-x_n}\right)\Big|_{x \in S^1}=\lambda. \tag{3.11}$$

Действительно,

$$\max_{S_T}\left(v+\lambda e^{-x_n}\right)=\max_{S_T} \lambda e^{-x_n}=\lambda e^{-x_n}\Big|_{x \in S^1}=\lambda$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\left[v(x, 0)+\lambda e^{-x_n}\right]\Big|_{x \in \Omega} \leqslant c_1-\lambda e^{-x_n}\Big|_{x \in \Omega} \leqslant c_1-\lambda e^{-d} \leqslant 0,$$

откуда следует, что

$$\max_{\Omega}\left[v(x, 0)+\lambda e^{-x_n}\right] \leqslant \max_{S}\left[v(x, 0)+\lambda e^{-x_n}\right] \leqslant \lambda.$$

Положим

$$\lambda=e^d \max\left\{c_1 ; \frac{2c}{\nu}\right\},$$

тогда

$$\frac{\partial\left(v+\lambda e^{-x_n}\right)}{\partial t}-a_{ij}(x, t, u, u_x)\left(v+\lambda e^{-x_n}\right)_{x_i x_j}<0, \tag{3.12}$$

ибо

$$v_t-a_{ij}(x, t, u, u_x)\left(v+\lambda e^{-x_n}\right)_{x_i x_j} \leqslant (1+|u_x|)^{m-2} c-$$
$$-\lambda a_{nn} e^{-x_n} \leqslant (1+|u_x|)^{m-2}\left(c-\lambda \nu e^{-d}\right)<0.$$

Из (3.11) и (3.12) заключаем, что значение функции $v+\lambda e^{-x_n}$ при $x \in S^1$, $t \in [0, T]$ есть ее максимальное в $\bar{Q}_T$ значение, и потому

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\left(v+\lambda e^{-x_n}\right)\Big|_{x \in S^1}=\frac{\partial v}{\partial x_n}\Big|_{x \in S^1}-\lambda \leqslant 0,$$

т. е.

$$\operatorname{vrai} \max_{\substack{x \in S^1 \\ t \in [0, T]}} \frac{\partial v}{\partial x_n} \leqslant \lambda=e^{d+\frac{2\mu M}{\nu}} \max\left\{\frac{2\mu M_0}{\nu}, \frac{8\mu^2}{\nu^2}\right\}. \tag{3.13}$$

Это дает оценку сверху для $\frac{\partial u}{\partial x_n}$ на $S^1 \times [0, T]$, ибо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x \in S^1} = \varphi'(v) \left.\frac{\partial v}{\partial x_n}\right|_{x \in S^1} = \frac{\nu}{2\mu} \left.\frac{\partial v}{\partial x_n}\right|_{x \in S^1} \leqslant \frac{\nu\lambda}{2\mu}.$$

Чтобы оценить $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_n}$ снизу при $x \in S^1$, достаточно предыдущую оценку применить к решению $-u(x, t)$ уравнения

$$(-u)_t - a_{ij}(x, t, u, u_x)(-u)_{x_i x_j} - a(x, t, u, u_x) = 0.$$

Это дает

$$-\operatorname*{vrai\,min}_{\substack{x \in S^1 \\ t \in [0, T]}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \operatorname*{vrai\,max}_{\substack{x \in S^1 \\ t \in [0, T]}} \frac{\partial(-u)}{\partial \mathbf{n}} \leqslant \frac{\nu\lambda}{2\mu}.$$

Так получается двусторонняя оценка $\frac{\partial u}{\partial x_n}$ на $S^1 \times [0, T]$.

Такого типа оценки $\max|u_x|$ на $S_T$ ведут свое начало от работ С. Н. Бернштейна [$5_2$]. В этих работах рассматриваются эллиптические уравнения с двумя независимыми переменными, однако переход к любому $n$ и к уравнениям параболического типа не вызывает затруднений при оценках $\max|u_x|$ на границе. Иначе обстоит дело с внутренними оценками. В работах С. Н. Бернштейна такие оценки сделаны с использованием того, что в точке максимума какой-либо производной $u_{x_i}$ можно исключить из рассмотрения все производные второго порядка $u_{x_1x_1}$, $u_{x_1x_2}$ и $u_{x_2x_2}$, выразив их через производные по $x$ первого порядка из трех соотношений: равенства нулю производных $u_{x_ix_1}$ и $u_{x_ix_2}$ и самого уравнения. Такое исключение невозможно при $n > 2$ в эллиптическом случае и при $n > 1$ в параболическом (ясно, что для параболических уравнений с одной пространственной переменной $x = x_1$ такого исключения не требуется).

Впервые внутренние оценки $\max|u_x|$ для квазилинейных параболических и эллиптических уравнений с произвольным $n$ были даны в работе [$33_8$]. Предложенный там прием оценки $\max|u_x|$ роднит с методом оценок С. Н. Бернштейна идея введения вместо $u$ новой функции $v = \psi(u)$, для которой возможно оценить $\max|v_x|$, используя лишь уравнение для $u$. Относительно исследуемых решений в [$33_8$] предполагалось, что они непрерывны в $Q_T$ вместе с производными вида $u_{x_i}$,

$u_t$, $u_{tx_i}$, $D_x^2u$, $D_x^3u$. Мы видоизменяем прежние рассуждения так, чтобы они были пригодны для решений $u(x, t)$, имеющих лишь обобщенные производные, входящие в уравнение (для случая, когда эти производные непрерывны, это было сделано в [I]).

Итак, будем предполагать, что решение $u(x, t)$ уравнения (3.1) ограничено в $Q_T$, имеет в $Q_T$ обобщенные производные вида $u_{x_i}$, $u_{x_ix_j}$, $u_t$, причем $|u_x|^{2s+2} \in V_2^{1,0}(Q_T)$,

$$\int\limits_{Q_T} \left[(1+|u_x|)^{4s+m}|u_{xx}|^2 + (1+|u_x|)^{4s+2}|u_t|^2 + \right.$$
$$\left. + |u_x|^{4s+m+4}\right] dx\,dt < \infty, \tag{3.14}$$

где $s$ — достаточно большое число, величину которого мы уточним ниже в зависимости от постоянных $\nu(M)$, $\mu_1(M)$ и $\varepsilon(M)$ из условий (3.2) — (3.6).

Мы дадим два сорта оценок $|u_x|$: глобальную — для всего цилиндра $Q_T$ сразу и локальные оценки для подобластей $Q' \subset Q_T$. Начнем с первой, считая, что $\max\limits_{\Gamma_T}|u_x| = M_0$ уже известен. Снова введем функцию $v(x, t)$ с помощью равенства

$$u = \varphi(v), \tag{3.15}$$

предполагая $\varphi'(v) > 0$. Для $v$ верно соотношение (3.9) и, следовательно, тождества

$$\int\limits_{Q_{t_1}} \mathscr{L}(u;\ v)\,\eta_{x_l}\,dx\,dt = 0, \quad l = 1, \ldots n,\ t_1 \leqslant T, \tag{3.16}$$

где $\eta(x, t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая в $\overline{Q}_T$ функция. Если $\eta|_{\Gamma_T} = 0$, а решение $u(x, t)$ имеет непрерывные производные $u_x$, $u_{xx}$, $u_{xt}$, $D_x^3u$, то, производя в (3.16) двукратное интегрирование по частям, преобразуем его к виду

$$\int\limits_{Q_{t_1}} \left\{ v_{x_lt}\eta + a_{ij}v_{x_lx_j}\eta_{x_i} + \left[\frac{da_{ij}}{dx_i}v_{x_lx_j} - \frac{da_{ij}}{dx_l}v_{x_ix_j} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{d}{dx_l}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}a_{ij}v_{x_i}v_{x_j} - \frac{a}{\varphi'}\right)\right]\eta\right\} dx\,dt = 0, \qquad l = 1, \ldots, n. \tag{3.17}$$

Пусть $w=\sum_{l=1}^{n} v_{x_l}^2$ и $z=w^{s+1}$. Положим

$$\eta(x, t)=2v_{x_l}w^s z^{(k)}, \tag{3.18}$$

где

$$z^{(k)}=\max\{z(x, t)-k;\ 0\}$$

и

$$k\geqslant \operatorname*{vrai\,max}_{\Gamma_T} z, \tag{3.19}$$

и произведем в (3.17) суммирование по $l$ в пределах от 1 до $n$. Тогда, замечая, что

$$2v_{x_l x_j}v_{x_l}=w_{x_j};\quad 2v_{x_l t}v_{x_l}w^s=\frac{1}{s+1}z_t;$$

$$2v_{x_l x_j}v_{x_l}w^s=\frac{1}{s+1}z_{x_j},$$

выводим из (3.17) равенство

$$\frac{1}{s+1}\int_{\Omega}[z^{(k)}(x, t)]^2\,dx+2\int_{Q_{t_1}}\Big\{2a_{ij}v_{x_l x_i}v_{x_l x_j}w^s z^{(k)}+$$

$$+sa_{ij}w_{x_j}w_{x_i}w^{s-1}z^{(k)}+\frac{1}{s+1}a_{ij}z^{(k)}_{x_i}z^{(k)}_{x_j}+$$

$$+\Big[\frac{da_{ij}}{dx_l}v_{x_l x_j}-\frac{da_{ij}}{dx_l}v_{x_i x_j}-\frac{d}{dx_l}\Big(\frac{\varphi''}{\varphi'}a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}-$$

$$-\frac{a}{\varphi'}\Big)2v_{x_l}w^s z^{(k)}\Big]\Big\}\,dx\,dt=0,\quad t_1\in[0, T]. \tag{3.20}$$

В промежуточных преобразованиях мы использовали наличие у $u(x, t)$ производных $u_{xt}$, $D_x^3 u$, хотя в самом равенстве (3.20), так же как и в исходном (3.16), интегралы имеют смысл для любого решения, удовлетворяющего лишь условиям (3.14). Покажем, что для любого такого решения также верно (3.20) при значениях $k$, подчиняющихся неравенству (3.19).

Введем усреднения функции $v(x, t)$ вида

$$v_\rho(x, t)=\int_{|x-y|\leqslant\rho}\omega_\rho(|x-y|)\,v(y, t)\,dy,$$

$$v_h(x, t)=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}v(x, \tau)\,d\tau$$

и в соответствии с (3.16) рассмотрим тождества

$$\int\limits_{Q_{t_1}} \left[v_{ht} - a_{ij}(x, t, u, u_x) v_{\rho x_i x_j} - \frac{\varphi''}{\varphi'} a_{ij}(x, t, u, u_x) v_{x_i} v_{x_j} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varphi'} a(x, t, u, u_x)\right] \eta_{x_l} \, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{Q_{t_1}} \left[v_{ht} - v_t + a_{ij}(x, t, u, u_x)\left(v_{x_i x_j} - v_{\rho x_i x_j}\right)\right] \eta_{x_l} \, dx\, dt,$$

$$l = 1, \ldots, n, \quad t_1 \in [0, T-h], \tag{3.21}$$

с гладкой функцией $\eta(x, t)$, равной нулю вблизи $S_T$. Произведем в левой части (3.21) интегрирование по частям так, как это было сделано при выводе (3.17), и затем перейдем к пределу по $\rho \to 0$. В результате получим тождества

$$\int\limits_{Q_{t_1}} \left\{ v_{hx_l t}\eta + a_{ij} v_{x_l x_j} \eta_{x_i} + \left[\frac{da_{ij}}{dx_i} v_{x_l x_j} - \frac{d}{dx_l}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'} a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{a}{\varphi'}\right) - \frac{da_{ij}}{dx_l} v_{x_i x_j}\right]\eta \right\} dx\, dt = \int\limits_{Q_{t_1}} (v_{ht} - v_t)\, \eta_{x_l} \, dx\, dt,$$

$$l = 1, \ldots, n. \tag{3.22}$$

В них в качестве $\eta(x, t)$ можно брать любую функцию из $V_2(Q_T)$, равную нулю на $S_T$, для которой имеют смысл все входящие в (3.22) интегралы. В частности, можно положить

$$\eta(x, t) = 2 v_{hx_l} (w^h)^s z^{h(k)}, \tag{3.23}$$

где $w^h = \sum\limits_{l=1}^{n} v^2_{hx_l}$, $z^h = (w^h)^{s+1}$, а число $k$ подчинено условию (3.19). При таких $k$ функция $z^{h(k)}$ обращается в нуль на $S_{T-h}$, так как $\operatorname{vrai\,max}\limits_{S_{T-h}} z^h \leqslant \operatorname{vrai\,max}\limits_{S_{T-h}} \left[\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} |v_x(x, \tau)|^2 d\tau\right]^{s+1} \leqslant$ $\leqslant \operatorname{vrai\,max}\limits_{S_T} |v_x|^{2s+2} = \operatorname{vrai\,max}\limits_{S_T} z$. Подставим указанную $\eta(x, t)$ в (3.22), произведем суммирование по $l$ и первый член запишем в виде

$$j_h = \int\limits_{Q_{t_1}} v_{hx_l t} 2 v_{hx_l} (w^h)^s z^{h(k)} \, dx\, dt = \frac{1}{2(s+1)} \int\limits_{\Omega} [z^{h(k)}]^2 \, dx \Big|_0^{t_1}.$$

Устремим $h$ к нулю. При этом в силу леммы 4.7 главы II $\| z^{h(k)} - z^{(k)} \|_{2,\Omega} \to 0$, а так как $k$ выбрано из условия (3.19), то $\lim\limits_{h\to 0} \| z^{h(k)}(x, 0)\|_{2,\Omega} = 0$. Следовательно,

$$j_h \to \frac{1}{2(s+1)} \int\limits_{\Omega} [z^{(k)}(x, t_1)]^2\, dx \text{ при } h \to 0.$$

Остальные члены в левой части равенства (3.22) с $\eta$ из (3.23) в пределе преобразуются в аналогичные члены с $\eta$ из (3.18), правая же часть (3.22) стремится к нулю при $h \to 0$. Таким образом, в результате предельного перехода по $h \to 0$ мы придем к соотношению (3.20).

Положим в (3.20) $t_1 = T$ и перепишем его так:

$$\frac{1}{s+1} \int\limits_{A_k(T)} (z-k)^2\, dx + 2\int\limits_0^T \int\limits_{A_k(t)} \Big\{ 2a_{ij} v_{x_l x_i} v_{x_l x_j} w^s (z-k) +$$
$$+ s a_{ij} w_{x_j} w_{x_i} w^{s-1}(z-k) + \frac{1}{s+1} a_{ij} z_{x_i} z_{x_j} +$$
$$+ \left[ \frac{da_{ij}}{dx_l} w_{x_j} - \frac{da_{ij}}{dx_l} 2v_{x_l} v_{x_i x_j} - \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' 2w a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} - \right.$$
$$- \frac{\varphi''}{\varphi'} \frac{da_{ij}}{dx_l} 2v_{x_l} v_{x_i} v_{x_j} - \frac{\varphi''}{\varphi'} 2a_{ij} w_{x_j} v_{x_i} - \frac{\varphi''}{\varphi'^2} 2wa +$$
$$\left. + \frac{1}{\varphi'} \frac{da}{dx_l} 2v_{x_l} \right] w^s (z-k) \Big\}\, dx\, dt = 0. \qquad (3.24)$$

Здесь $A_k(t)$ — множество точек $x \in \Omega$, для которых $z(x, t) > k$. Мы будем выбирать функцию $\varphi(v)$ так, чтобы $\varphi' > 0$ и $-\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' > 0$. В левой части (3.24) оставим лишь положительные члены

$$\frac{1}{s+1} \int\limits_{A_k(T)} (z-k)^2\, dx + 2\int\limits_0^T \int\limits_{A_k(t)} \Big[ 2a_{ij} v_{x_l x_i} v_{x_l x_j} w^s (z-k) +$$
$$+ s a_{ij} w^{s-1} w_{x_i} w_{x_j} (z-k) + \frac{1}{s+1} a_{ij} z_{x_i} z_{x_j} -$$
$$- 2\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' a_{ij} v_{x_i} v_x w^{s+1} (z-k)\Big]\, dx\, dt,$$

а остальные перенесем в правую часть. Положительные члены оценим снизу, используя положительную определенность формы $a_{ij}\xi_i\xi_j$ (первое из неравенств (3.2)). Правую же часть оценим сверху с помощью условий (3.3) — (3.6).

Полные производные $\frac{d}{dx_l}$ в (3.24) представим в виде

$$\frac{da_{ij}}{dx_l}=\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}}u_{x_m x_l}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}u_{x_l}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}=$$

$$=\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}}(\varphi' v_{x_m x_l}+\varphi'' v_{x_m}v_{x_l})+\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\varphi' v_{x_l}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}$$

и аналогично $\frac{da}{dx_l}$. Кроме того, заметим, что в (3.24) при производных $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}$ и $\frac{da}{dx_l}$ стоят множители $2v_{x_l}$ и по $l$ производится суммирование в пределах от 1 до $n$. Такие суммы представим в виде

$$2\sum_{l=1}^{n}\frac{da_{ij}}{dx_l}v_{x_l}=\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}}(\varphi' w_{x_m}+2\varphi'' w v_{x_m})+$$

$$+2\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\varphi' w+2\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}v_{x_l},$$

$$2\sum_{l=1}^{n}\frac{da}{dx_l}v_{x_l}=\frac{\partial a}{\partial u_{x_m}}(\varphi' w_{x_m}+2\varphi'' w v_{x_m})+$$

$$+2\frac{\partial a}{\partial u}\varphi' w+2\frac{\partial a}{\partial x_l}v_{x_l}.$$

В результате из (3.24) с помощью условий (3.2) — (3.6) выводим неравенство

$$\nu\int_0^T\int_{A_k(t)}(1+|u_x|)^{m-2}\Big[2|v_{xx}|^2+sw^{-1}w_x^2-$$

$$-2\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'w^2\Big]w^s(z-k)\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant n^3\int_0^T\int_{A_k(t)}(1+|u_x|)^{m-2}\Big\{|w_x|\Big[\frac{\mu_1}{(1+\psi'\sqrt{w})}(\varphi'|v_{xx}|+$$

$$+|\varphi''|w)+(\varepsilon+P)\varphi'\sqrt{w}+(\varepsilon+P)\left(1+\varphi'\sqrt{w}\right)\Big]+$$
$$+\left(|v_{xx}|+\frac{|\varphi''|}{\varphi'}w\right)\left[\frac{\mu_1}{(1+\varphi'\sqrt{w})}\left(\varphi'|w_x|+|\varphi''|w^{\frac{3}{2}}\right)+\right.$$
$$\left.+2(\varepsilon+P)\varphi'w+2(\varepsilon+P)\left(1+\varphi'\sqrt{w}\right)\sqrt{w}\right]+$$
$$+2\mu\frac{|\varphi''|}{\varphi'}|w_x|\sqrt{w}+\frac{|\varphi''|}{\varphi'^2}2\mu\left(1+\varphi'\sqrt{w}\right)^2w+$$
$$+\frac{1}{\varphi'}\left[\mu_1\left(1+\varphi'\sqrt{w}\right)\left(\varphi'|w_x|+2|\varphi''|w^{\frac{3}{2}}\right)+\right.$$
$$+2(\varepsilon+P)\left(1+\varphi'\sqrt{w}\right)^2\varphi'w+$$
$$\left.+2(\varepsilon+P)\left(1+\varphi'\sqrt{w}\right)^3\sqrt{w}\right]\Big\}w^s(z-k)\,dx\,dt. \quad (3.25)$$

Рассмотрим члены в фигурной скобке. Те из них, которые содержат $|v_{xx}|$, оценим по неравенству $2ab\leqslant\delta a^2+\delta^{-1}b^2$, $\delta>0$, отдавая малое $\delta$ множителю $v_{xx}$:

$$|w_x|\frac{\mu_1}{(1+\varphi'\sqrt{w})}\varphi'|v_{xx}|\leqslant\frac{\delta}{2}|v_{xx}|^2+$$
$$+\frac{\mu_1^2}{2\delta}\frac{w_x^2\varphi'^2}{(1+\varphi'\sqrt{w})^2}\leqslant\frac{\delta}{2}|v_{xx}|^2+\frac{\mu_1^2}{2\delta}\frac{w_x^2}{w};$$

$$|v_{xx}|\left[\frac{\mu_1}{(1+\varphi'\sqrt{w})}\left(\varphi'|w_x|+\varphi''w^{\frac{3}{2}}\right)+2(\varepsilon+P)\varphi'w+\right.$$
$$\left.+2(\varepsilon+P)\left(1+\varphi'\sqrt{w}\right)\sqrt{w}\right]\leqslant3\delta|v_{xx}|^2+\frac{\mu_1^2}{2\delta}\frac{w_x^2}{w}+$$
$$+\frac{\mu_1^2}{2\delta}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2w^2+\frac{1}{\delta}(\varepsilon+P)^2\varphi'^2w^2+\frac{2}{\delta}(\varepsilon+P)^2\left(1+\varphi'^2w\right)w.$$

Члены с $|w_x|$ оценим так:

$$|w_x|(\varepsilon+P)\left(1+2\varphi'\sqrt{w}\right)\leqslant\frac{w_x^2}{2w}+(\varepsilon+P)^2\left(1+4\varphi'^2w\right)w;$$

$$|\varphi''|w\frac{\mu_1}{(1+\varphi'\sqrt{w})}|w_x|\leqslant\frac{w_x^2}{2w}+\frac{\mu_1^2}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2w^2;$$

$$2\mu\left|\frac{\varphi''}{\varphi'}\right| |w_x| \sqrt{w} \leqslant \frac{w_x^2}{2w} + 2\mu^2\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 w^2;$$

$$\mu_1\left(1+\varphi'\sqrt{w}\right)|w_x| \leqslant \frac{\mu_1^2}{2\varepsilon}\frac{w_x^2}{w} + \varepsilon\left(1+\varphi'^2 w\right)w.$$

Оставшиеся члены не превосходят выражения

$$\mu_1\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 w^2 + 4(\varepsilon+P)|\varphi''|w^2 + 2(\varepsilon+P)\frac{|\varphi''|}{\varphi'}w^{\frac{3}{2}} +$$
$$+4\mu|\varphi''|w^2 + 4\mu\frac{\varphi''}{\varphi'^2}w + 2\mu_1|\varphi''|w^2 + 2\mu_1\frac{|\varphi''|}{\varphi'}w^{\frac{3}{2}} +$$
$$+4(\varepsilon+P)\left(\varphi'^2 w^2 + w\right) + 16(\varepsilon+P)\left(\frac{\sqrt{w}}{\varphi'} + \varphi'^2 w^2\right).$$

Выберем число $\delta$ равным $\frac{\nu}{2n^3}$, а число $s$ фиксируем так, чтобы

$$n^3\left(\frac{2\mu_1^2 n^3}{\nu} + 2 + \frac{\mu_1^2}{2\varepsilon}\right) \leqslant \frac{s\nu}{2}. \tag{3.26}$$

Подставим только что выписанные оценки в правую часть неравенства (3.25), затем перенесем члены с $|v_{xx}|^2$ и $w_x^2$ в левую часть неравенства и объединим их с подобными членами. В правой части главными членами будут члены, содержащие $w^{s+2}$, остальные содержат более низкие степени $w$, именно $w^{s+\frac{3}{2}}$ и ниже. Будем брать число $k \geqslant 1$, тогда на множестве $A_k(t)$ функция $z$, а следовательно, и $w$, будет не меньше 1, т. е. все младшие степени $w$ можно оценить через $w^{s+\frac{3}{2}}$. В силу всего сказанного из (3.25) будем иметь

$$\int_0^T \int_{A_k(t)} (1+|u_x|)^{m-2}\left[\frac{s}{2}\frac{w_x^2}{w} + \frac{1}{4}|v_{xx}|^2 - \right.$$
$$\left. - 2\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' w^2\right] w^s (z-k)\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^T \int_{A_k(t)} (1+|u_x|)^{m-2}\left\{c_1\left[\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 + |\varphi''|(1+\varepsilon+\hat{P}) + \right.\right.$$
$$\left.\left. +(\varepsilon^2+P^2+2\varepsilon+P)\varphi'^2\right] w^2 + c_2 w^{\frac{3}{2}}\right\} w^s (z-k)\,dx\,dt. \tag{3.27}$$

Здесь $\hat{P} = \max\limits_{|p| \geqslant 0} P(|p|)$. Постоянная $c_1$ определяется лишь $n$ и значениями $\nu(M) = \nu$, $\mu(M) = \mu$, $\mu_1(M) = \mu_1$ из (3.3) — (3.4), а постоянная $c_2$ зависит также от $\varepsilon(M) = \varepsilon$, $\hat{P}$ и функции $\varphi(v)$, которую мы будем выбирать специальным образом. Именно, выберем $\varphi(v)$ так, чтобы

$$-\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' \geqslant c_1 \left[\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 + |\varphi''|(1+\varepsilon+\hat{P}) + (2\varepsilon^2+3\varepsilon)\varphi'^2\right], \tag{3.28}$$

$$\varphi'(v) > 0. \tag{3.29}$$

Кроме того, надо, чтобы обратная для $\varphi(v)$ функция была определена на промежутке $[-M, M]$. Построением такой функции $\varphi(v)$ мы займемся ниже, а сейчас, предполагая, что такая функция уже найдена, продолжим оценку. Рассмотрим неравенство (3.27) при $k \geqslant k_1$, где $k_1 \geqslant 1$ и удовлетворяет условию

$$P\left(k^{\frac{1}{2s+2}} \min_{-M \leqslant u \leqslant M} \varphi'(v)\right) + P^2\left(k^{\frac{1}{2s+2}} \min_{-M \leqslant u \leqslant M} \varphi'(v)\right) \leqslant \varepsilon$$
$$\text{при } k \geqslant k_1. \tag{3.30}$$

Такое $k_1$ существует, ибо $P(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$ и

$$\min_{-M \leqslant u \leqslant M} \varphi'(v) \geqslant \text{const} > 0.$$

В силу (3.30) и (3.28) из (3.27) следует оценка

$$\nu_1 \int_0^T \int_{A_k(t)} (1+|u_x|)^{m-2} w^{s+2}(z-k)\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant c_2 \int_0^T \int_{A_k(t)} (1+|u_x|)^{m-2} w^{s+\frac{3}{2}}(z-k)\,dx\,dt, \tag{3.31}$$

где

$$\nu_1 = \min_{-M \leqslant u \leqslant M}\left(-\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' > 0.$$

Из (3.31), очевидно, имеем

$$\left(\nu_1 k^{\frac{1}{2(s+1)}} - c_2\right) \int_0^T \int_{A_k(t)} (1+|u_x|)^{m-2} w^{s+\frac{3}{2}}(z-k)\,dx\,dt \leqslant 0.$$

Если значение $k$ превосходит $k_2 = \max\left\{k_1; \left(\frac{c_2}{\nu_1}\right)^{2(s+1)}\right\}$, то это неравенство возможно только в том случае, когда интеграл равен нулю. Другими словами, мера множества точек $(x, t)$ из $Q_T$, для которых $z > k_2$, равна нулю, т. е.

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T} z(x, t) \leqslant \max\left\{k_1; \left(\frac{c_2}{\nu}\right)^{2(s+1)}; \max_{\Gamma_T} z\right\}. \tag{3.32}$$

Это дает оценку $\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T} w^{s+1}(x, t) = \operatorname*{vrai\,max}_{Q_T} |v_x|^{2s+2}$, а следовательно, и оценку $\operatorname*{vrai\,max}_{Q_T} |u_x|$.

Для завершения доказательства осталось найти функцию $\varphi$. В качестве $\varphi(v)$ возьмем функцию

$$\varphi(v) = -2M + 6Me\int_0^v e^{-\xi^q}\,d\xi.$$

Проверим, что при достаточно большом $q$ она удовлетворяет всем требованиям. Выясним диапазон изменения $[v_1, v_2]$ для $v$, когда $u = \varphi(v)$ меняется от $-M$ до $M$. Интеграл $\int_0^v e^{-\xi^q}\,d\xi$, очевидно, будет меняться в промежутке $\left[\frac{1}{6e}, \frac{1}{2e}\right]$, так что

$$\int_0^{v_1} e^{-\xi^q}\,d\xi = \frac{1}{6e}, \quad \int_0^{v_2} e^{-\xi^q}\,d\xi = \frac{1}{2e}.$$

При любом $q \geqslant 1$ значения функции $e^{-\xi^q}$ заключены между $e^{-1}$ и 1 на промежутке $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ и между 0 и 1 для всех $\xi \geqslant 0$; поэтому при всех $q \geqslant 1$

$$\frac{1}{6e} < \int_0^{v_1} d\xi = v_1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2e} = \int_0^{v_2} e^{-\xi^q}\,d\xi = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\xi^q}\,d\xi + \int_{\frac{1}{2}}^{v_2} e^{-\xi^q}\,d\xi > \frac{1}{2e} + \int_{\frac{1}{2}}^{v_2} e^{-\xi^q}\,d\xi,$$

т. е. $v_2 < \frac{1}{2}$.

Итак, при всех $q \geqslant 1$

$$\frac{1}{6e} < v_1 < v_2 < \frac{1}{2}.$$

Проверим теперь справедливость соотношений (3.28) и (3.29):

$$\varphi' = 6Mee^{-v^q}, \qquad \varphi'' = -6Meqv^{q-1}e^{-v^q},$$

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -qv^{q-1}, \quad \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' = -q(q-1)v^{q-2}.$$

Неравенство (3.29), очевидно, выполняется. Для проверки (3.28) подсчитаем его правую часть:

$$c_1\left[q^2v^{2q-2} + (1+\varepsilon+\hat{P})\,6Meqv^{q-1}e^{-v^q} + \right.$$

$$\left. + (3\varepsilon+2\varepsilon^2)\,36M^2e^{2-2v^q}\right] \leqslant c_1\left[q^2v^{q-2}2^{-q} + \right.$$

$$\left. + (1+\varepsilon+\hat{P})\,6Meqv^{q-1}e^{-(6e)^{-q}} + (3\varepsilon+2\varepsilon^2)\,36M^2e^{2-2(6e)^{-q}}\right].$$

Из сравнения этого выражения с $-\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'$ ясно, что неравенство (3.28) будет выполняться, если $\varepsilon$ достаточно мало, а $q$ взять достаточно большим. Именно здесь (и только здесь!) мы сталкиваемся с необходимостью считать $\varepsilon$ достаточно малым числом. Его максимально возможную величину можно подсчитать точно, но мы этого делать здесь не будем. Итак, оценка $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|u_x(x, t)|$ получена. Сформулируем это в виде теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть функция* $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$ *подчиняется условиям* (3.14) *для всех* $s$ *до порядка, указанного в* (3.26), *и удовлетворяет уравнению* (3.1) *почти всюду в* $Q_T$ *и пусть* $M = \operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|u| < \infty$ *и* $M_0 = \operatorname{vrai}\max\limits_{\Gamma_T}|u_x| < \infty$. *Тогда, если выполнены условия* (3.2) — (3.6) *и* $\varepsilon(M)$ *в* (3.5) *и* (3.6) *не превосходит некоторого числа* $\varepsilon_0$, *определяемого лишь* $M$, $\nu=\nu(M)$, $\mu=\mu(M)$, $\mu_1=\mu_1(M)$ *и* $\hat{P} = \max\limits_{|p|\geqslant 0} P(|p|) = \max\limits_{|p|\geqslant 0} P(|p|, M)$ *из* (3.2) — (3.6), *то* $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|u_x|$ *не превосходит некоторой* *постоянной, зависящей лишь от* $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $\varepsilon$, $P(|p|)$ *и* $M_0$.

Из этой теоремы и леммы 3.1 следует, что справедлива

Теорема 3.2. *Пусть функция* $u(x, t)$ *принадлежит* $O^{1,0}(\bar{Q}_T) \cap W_2^{2,1}(Q_T)$ *и в каждой точке цилиндра* $Q_T$ *имеет второй дифференциал по* $x$, *производную по* $t$ *и удовлетворяет уравнению* (3.1). *Пусть выполнены условия* (3.2) — (3.6) *с достаточно малым* $\varepsilon(M)$, *определяемым* $M = \max_{Q_T} |u|$, $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\mu_1(M)$ *и* $\hat{P} = \max_{|p| \geqslant 0} P(|p|, M)$. *Тогда, если* $u|_{\Gamma_T} = \psi(x, t)|_{\Gamma_T}$, *где* $\psi(x, 0) \in O^1(\bar{\Omega})$ *и* $\psi(s, t) \in O^{2,1}(S_T)$, *а* $S$ *принадлежит классу* $O^2$, *то* $\operatorname{vrai\,max}_{Q_T} |u_x|$ *не превосходит постоянной, зависящей лишь от* $M$, $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\mu_1(M)$, $\varepsilon(M)$, $P(|p|, M)$, *от границы* $S$ *области* $\Omega$, *а также от* $\max_{x \in \Omega} |\psi_x(x, 0)|$ *и нормы* $|\psi|_{S_T}^{(2)}$.

Утверждения теорем 3.1, 3.2 остаются в силе, если вместо малости $\varepsilon(M)$ потребовать достаточной малости колебания $u$ в $Q_T$.

Действительно, пусть $\varepsilon(M)$ произвольно. Обозначим через $u_1$ и $u_2$ наименьшее и наибольшее значения $u$ в $\bar{Q}_T$, а через $\omega = u_2 - u_1$ — колебание $u$ в $\bar{Q}_T$. Проверим, что условиям (3.28) и (3.29) и требованию, чтобы обратная функция $v = \varphi^{-1}(u)$ была определена на отрезке $[u_1, u_2]$, удовлетворяет функция

$$\varphi(v) = \frac{3u_1 - u_2}{2} + 3\omega r \int_0^v e^{-\xi^2} d\xi \tag{3.33}$$

при достаточно большом $r > 0$, если только $\omega$ достаточно мало (максимально возможная величина $\omega$ определяется константами $c_1$, $\hat{P}$ и $\varepsilon$ из (3.28)).

Определим диапазон $v_1$, $v_2$ изменения $v$, когда $u = \varphi(v)$ меняется на отрезке $[u_1, u_2]$. Из (3.33) будем иметь

$$\int_0^{v_1} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{6r}, \qquad \int_0^{v_2} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2r}.$$

Так как $\int\limits_0^1 e^{-\xi^2}d\xi > \frac{1}{e}$, то при достаточно большом $r$ числа $v_1$ и $v_2$ будут малыми: $\frac{1}{6r} < v_1 < v_2 < \frac{e}{2r}$. Производная $\varphi'(v) = 3\omega r e^{-v^2}$ всюду положительна. Разность между левой и правой частями (3.28) для функции (3.33) (при произвольно фиксированных постоянных $c_1$, $\widehat{P}$ и $\varepsilon$)

$$2 - c_1[4v^2 + (1 + \varepsilon + \widehat{P})\,6\omega r e^{-v^2}v + (3\varepsilon + 2\varepsilon^2)\,9\omega^2 r^2 e^{-2v^2}]$$

будет больше нуля, если $r$ взять достаточно большим, например так, чтобы $v^2$ было меньше $\frac{1}{2\sqrt{c_1}}$, а $\omega$ считать достаточно малым.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.3. *Утверждения теорем* 3.1 *и* 3.2 *остаются в силе, если вместо малости* $\varepsilon(M)$ *в* (3.5), (3.6) *потребовать достаточной малости колебания* $\omega$ *функции* $u(x, t)$ *в* $Q_T$.

Допустимая величина $\omega$ определяется постоянными $n$, $M = \max\limits_{Q_T}|u|$, $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\mu_1(M)$, $\varepsilon(M)$ и $\widehat{P} = \max\limits_{|p|\geqslant 0} P(|p|, M)$ из (3.2)—(3.6) и легко может быть сосчитана явно, исходя из данного только что метода оценки $|u_x|$.

Переходим теперь к получению локальных оценок $|u_x|$. Мы покажем, что для любого внутреннего цилиндра $Q' = \Omega' \times (\varepsilon, T)$, $\varepsilon > 0$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q'}|u_x|$ можно оценить через $n$, расстояние $Q'$ до $\Gamma_T$, $M = \max\limits_{Q_T}|u|$, постоянные $m$, $\nu = \nu(M)$, $\mu = \mu(M)$, $\mu_1 = \mu_1(M)$, $\varepsilon = \varepsilon(M)$ и $P(|p|, M)$ из условий (3.2)—(3.6), если $m \geqslant 1$. От свойств $S$ и значений $u(x, t)$ на $\Gamma_T$ эти оценки не зависят. Если же предположить ограниченность $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u_x(x, 0)| = M_0$, то $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q'}|u_x|$ для $Q' = \Omega' \times (0, T)$ можно оценить при любом $m$ через $M_0$, $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $\varepsilon$ и $P(|p|)$.

Без ограничения общности в качестве $Q'$ возьмем произвольный цилиндр $Q_\rho = K_\rho \times (\tau - \rho^2, \tau)$, где $K_\rho \subset \Omega$, $0 \leqslant \tau - \rho^2 < \tau \leqslant T$. Пусть $\zeta(x, t)$ есть срезающая для $Q_\rho$

функция, равная единице в соосном $Q_\rho$ цилиндре $Q_{\frac{\rho}{2}} = K_{\frac{\rho}{2}} \times \times \left(\tau - \frac{\rho^2}{4}, \tau\right)$ и удовлетворяющая условию

$$|\zeta_x| \leqslant c\rho^{-1}, \quad |\zeta_{xx}|, \quad |\zeta_t| \leqslant c\rho^{-2}.$$

Будем теперь через $z(x, t)$ обозначать

$$z(x, t) = (\zeta^2 w)^{s+1} = \left(\zeta^2 \sum_{l=1}^{n} v_{x_l}^2\right)^{s+1}$$

и оценим $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_\tau} z$. Выведем для $z(x, t)$ равенство, аналогичное (3.24). Для этого в тождестве (3.22) с $t_1 = \tau$ возьмем функцию $\eta(x, t)$ равной $2v_{hx_l}\zeta^{2s+2}(w^h)^s z^{h(k)}$, где $k$ — произвольное положительное число, и произведем суммирование по $l$ от 1 до $n$. Тогда первый член в (3.22) будет иметь вид

$$\int\limits_{Q_\tau} v_{hx_lt} 2v_{hx_l}\zeta^{2s+2}(w^h)^s z^{h(k)}\,dx\,dt =$$
$$= \frac{1}{2(s+1)} \int\limits_{\Omega} \left[z^{h(k)}(x, \tau)\right]^2 dx - \int\limits_{Q_\tau} (w^h)^{s+1}\zeta^{2s+1}\zeta_t z^{h(k)}\,dx\,dt,$$

и потому, переходя к пределу по $h \to 0$, получим следующее равенство, близкое к (3.24):

$$\frac{1}{s+1} \int\limits_{A_{k,\rho}(\tau)} (z-k)^2\,dx + 2\int\limits_{\tau-\rho^2}^{\tau} \int\limits_{A_{k,\rho}(t)} \{-w^{s+1}\zeta^{2s+1}\zeta_t(z-k) +$$
$$+ 2a_{ij}v_{x_lx_j}v_{x_lx_l}\zeta^{2s+2}w^s(z-k) + sa_{ij}w_{x_l}w_{x_j}w^{s-1}\zeta^{2s+2}(z-k) +$$
$$+ (2s+2)a_{ij}w_{x_j}\zeta^{2s+1}\zeta_{x_l}w^s(z-k) + a_{ij}w_{x_j}w^s\zeta^{2s+2}z_{x_l} +$$
$$+ [\ldots]w^s\zeta^{2s+2}(z-k)\}\,dx\,dt = 0. \qquad (3.34)$$

Здесь квадратная скобка $[\ldots]$ та же, что и в (3.24), а $A_{k,\rho}(t)$ — множество точек $x$ из $K_\rho$, для которых $z(x, t) > k$.

Проведем в (3.34) оценки с помощью условий (3.2)—(3.6), накладывая на $s$ ограничения (3.26), как это делалось выше при выводе (3.27). Это приведет нас к неравенству

$$\int\limits_{\tau-\rho^2}^{\tau}\int\limits_{A_{k,\rho}(t)}(1+|u_x|)^{m-2}\left[\frac{s}{2}\frac{w_x^2}{w}+\frac{1}{4}|v_{xx}|^2-2\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'w^2\right]\times$$

$$\times\zeta^{2s+2}w^s(z-k)\,dx\,dt\leqslant\frac{1}{\nu}\int\limits_{\tau-\rho^2}^{\tau}\int\limits_{A_{k,\rho}(t)}\left[w^{s+1}\zeta^{2s+1}|\zeta_t|(z-k)+\right.$$

$$+(2s+2)\mu(1+|u_x|)^{m-2}|w_x|\zeta^{2s+1}|\zeta_x|w^s(z-k)-$$

$$\left.-a_{ij}w_{x_j}w^s\zeta^{2s+2}z_{x_i}\right]dx\,dt+\int\limits_{\tau-\rho^2}^{\tau}\int\limits_{A_{k,\rho}(t)}(1+|u_x|)^{m-2}\times$$

$$\times\left\{c_1\left[\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2+|\varphi''||1+\varepsilon+\hat{P}|+(\varepsilon^2+P^2+2\varepsilon+P)\varphi'^2\right]w^2+\right.$$

$$\left.+c_2w^{\frac{3}{2}}\right\}\zeta^{2s+2}w^s(z-k)\,dx\,dt;\qquad(3.35)$$

здесь считается $k\geqslant 1$. Функцию $\varphi(v)$ определим из условий, сформулированных выше (см. (3.28), (3.29) и далее). Для нее

$$-2\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'-c_1\left[\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2+|\varphi''|(1+\varepsilon+\hat{P})+\right.$$

$$\left.+(2\varepsilon+2\varepsilon^2+P(|u_x|)+2P^2(|u_x|))\varphi'^2\right]\geqslant c_3>0,$$

если только уровень $k$ в (3.35) взят достаточно большим, именно $k\geqslant k_1$, где $k_1$ выбирается из условия

$$P(|u_x|)+2P^2(|u_x|)\leqslant\varepsilon.\qquad(3.36)$$

Так как $P(\rho)$ по условию стремится к нулю при $\rho\to\infty$, а

$$|u_x|=\varphi'(v)|v_x|=\varphi'(v)w^{\frac{1}{2}}=\varphi'(v)\frac{z^{\frac{1}{2(s+1)}}}{\zeta}\geqslant\mathrm{const}\,z^{\frac{1}{2(s+1)}},$$

т. е. при безграничном увеличении $z$ безгранично растет и $|u_x|$, то неравенству (3.36) можно удовлетворить, беря уровни $k$ бо́льшими некоторого числа $k_1\geqslant 1$. Для таких уровней $k$ из (3.35) будем иметь

$$\int_{\tau-\rho^2}^{\tau}\int_{A_{k,\rho}(t)}(1+|u_x|)^{m-2}\left[\frac{s}{2}\frac{w_x^2}{w}+\frac{1}{4}|v_{xx}|^2+c_3w^2\right]\times$$

$$\times\zeta^{2s+2}w^s(z-k)\,dx\,dt\leqslant\frac{1}{\nu}\int_{\tau-\rho^2}^{\tau}\int_{A_{k,\rho}(t)}\left[w^{s+1}\zeta^{2s+1}|\zeta_t|(z-k)+\right.$$

$$+(2s+2)\mu(1+|u_x|)^{m-2}|w_x|\zeta^{2s+1}\zeta_xw^s(z-k)-$$

$$\left.-a_{ij}w_{x_j}w^s\zeta^{2s+2}z_{x_i}\right]dx\,dt+$$

$$+c_2\int_{\tau-\rho^2}^{\tau}\int_{A_{k,\rho}(t)}(1+|u_x|)^{m-2}w^{s+\frac{3}{2}}\zeta^2(z-k)\,dx\,dt.\qquad(3.37)$$

Займемся преобразованием интеграла

$$I_1\equiv-\int_{\tau-\rho^2}^{\tau}\int_{A_{k,\rho}(t)}a_{ij}w_{x_j}w^s\zeta^{2s+2}z_{x_i}\,dx\,dt,$$

помня, что

$$z=\left(w\zeta^2\right)^{s+1},\quad z_{x_i}=(s+1)\left[w^sw_{x_i}\zeta^{2s+2}+w^{s+1}2\zeta^{2s+1}\zeta_{x_i}\right];$$

$$I_1=\int_{\tau-\rho^2}^{\tau}\int_{A_{k,\rho}(t)}\left(-\frac{1}{s+1}a_{ij}z_{x_j}z_{x_i}+a_{ij}w^{s+1}2\zeta^{2s+1}\zeta_{x_j}z_{x_i}\right)dx\,dt=$$

$$=\int_{\tau-\rho^2}^{\tau}\int_{A_{k,\rho}(t)}\left[\frac{1}{s+1}a_{ij}z_{x_i}z_{x_j}+(z-k)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d}{dx_i}\left(a_{ij}w^{s+1}2\zeta^{2s+1}\zeta_{x_j}\right)\right]dxdt=-\int_{\tau-\rho^2}^{\tau}\int_{A_{k,\rho}(t)}\left\{\frac{1}{s+1}a_{ij}z_{x_i}z_{x_j}+\right.$$

$$+2\left[\frac{da_{ij}}{dx_i}\zeta^{2s+1}\zeta_{x_j}+a_{ij}(s+1)w^{-1}w_{x_i}\zeta^{2s+1}\zeta_{x_j}+\right.$$

$$\left.\left.+(2s+1)a_{ij}\zeta^{2s}\zeta_{x_i}\zeta_{x_j}+a_{ij}\zeta^{2s+1}\zeta_{x_ix_j}\right]w^{s+1}(z-k)\right\}dx\,dt.$$

Оценим это выражение сверху, используя предположения (3.2) — (3.6):

$$I_1 \leqslant 2 \int\limits_{\tau-\rho^2}^{\tau} \int\limits_{A_{k,\rho}(t)} (1+|u_x|)^{m-2} \left\{ \left[ \frac{\mu_1}{1+\varphi'\sqrt{w}} (\varphi'|v_{xx}| + \varphi'' w) + \right.\right.$$

$$\left. + (\varepsilon + P)\varphi'\sqrt{w} + (\varepsilon + P)\left(1+\varphi'\sqrt{w}\right)\right] \zeta^{2s+1}|\zeta_x| +$$

$$\left. + (s+1)\mu \frac{|w_x|}{w} \zeta^{2s+1}|\zeta_x| + \mu\zeta^{2s+1}|\zeta_{xx}| \right\} w^{s+1}(z-k)\,dx\,dt.$$

Отсюда и из (3.37) следует неравенство

$$\int\limits_{\tau-\rho^2}^{\tau} \int\limits_{A_{k,\rho}(t)} (1+|u_x|)^{m-2} \left[ \frac{s}{2}\frac{w_x^2}{w} + \frac{1}{4} v_{xx}^2 + c_3 w^2 \right] \times$$

$$\times w^s \zeta^{2s+2}(z-k)\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{\nu} \int\limits_{\tau-\rho^2}^{\tau} \int\limits_{A_{k,\rho}(t)} w^{s+1}\zeta^{2s+1}|\zeta_t|(z-k) +$$

$$+ \int\limits_{\tau-\rho^2}^{\tau} \int\limits_{A_{k,\rho}(t)} (1+|u_x|)^{m-2} \left[ c_4 \left( |w_x|\zeta^{2s+1}|\zeta_x| w^s + \right.\right.$$

$$\left. + |v_{xx}| w^{s+\frac{1}{2}} \zeta^{2s+1}|\zeta_x| + w^{s+\frac{3}{2}}\zeta^{2s+1}|\zeta_x| + \zeta^{2s+1}|\zeta_{xx}| w^{s+\frac{3}{2}} \right) +$$

$$\left. + c_2 w^{s+\frac{3}{2}} \zeta^{2s+2} \right] (z-k)\,dx\,dt.$$

В правой части члены $c_4|w_x|\zeta^{2s+1}|\zeta_x|w^s$ и $c_4|v_{xx}| \times$ $\times w^{s+\frac{1}{2}}\zeta^{2s+1}|\zeta_x|$ заменяем большими: $\frac{s}{2} w_x^2 \zeta^{2s+2} w^{s-1} +$ $+ \frac{c_4^2}{2s} w^{s+1}\zeta_x^2\zeta^{2s}$ и $\frac{1}{4}|v_{xx}|^2 w^s \zeta^{2s+2} + c_4^2 w^{s+1}\zeta_x^2\zeta^{2s}$ соответственно. После этого члены, содержащие $|v_{xx}|^2$ и $w_x^2$, перенесем налево и приведем подобные члены.

В результате всего сказанного получим неравенство

$$\int\limits_{\tau-\rho^2}^{\tau}\int\limits_{A_{k,\rho}(t)}(1+|u_x|)^{m-2}w^{s+2}\zeta^{2s+2}(z-k)\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{\tau-\rho^2}^{\tau}\int\limits_{A_{k,\rho}(t)}(1+|u_x|)^{m-2}\Big[cw^{s+\frac{3}{2}}\zeta^{2s+2}+c_\rho\Big(w^{s+1}\zeta^{2s}+$$
$$+w^{s+\frac{3}{2}}\zeta^{2s+1}\Big)+c'_\rho w^{s+1}\zeta^{2s+1}w^{\frac{2-m}{2}}\Big](z-k)\,dx\,dt. \qquad (3.38)$$

Постоянные $c_\rho$ и $c'_\rho$ зависят от $\zeta_x^2$, $|\zeta_{xx}|$ и $|\zeta_t|$ соответственно и при $\rho\to 0$ стремятся к бесконечности как $\rho^{-2}$, но для нас это несущественно, так как $\rho$ берется, может быть, небольшим, но фиксированным. Замечая, что $w^{s+1}\zeta^{2s+2}=z$, можем переписать (3.38) так:

$$\int\limits_{\tau-\rho^2}^{\tau}\int\limits_{A_{k,\rho}(t)}(1+|u_x|)^{m-2}wz(z-k)\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{\tau-\rho^2}^{\tau}\int\limits_{A_{k,\rho}(t)}(1+|u_x|)^{m-2}w\Bigg[cz^{\frac{s+\frac{1}{2}}{s+1}}+c_\rho\Bigg(z^{\frac{s}{s+1}}+z^{\frac{s+\frac{1}{2}}{s+1}}\Bigg)+$$
$$+c'_\rho z^{\frac{s+\frac{1}{2}}{s+1}}w^{\frac{1}{2}-\frac{m}{2}}\Bigg](z-k)\,dx\,dt. \qquad (3.39)$$

Так как $k\geqslant 1$, то $z\geqslant 1$ и $w\geqslant 1$ на множествах $A_{k,\rho}(t)$, и потому при $m\geqslant 1$ $w^{\frac{1}{2}-\frac{m}{2}}\leqslant 1$. Таким образом, при $m\geqslant 1$ неравенство (3.39) сходно с неравенством (3.31). Из него оценка $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_\rho} z$ получается так же, как из (3.31) оценка $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T} w$. Величина $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_\rho} z$ определяется постоянными $c$, $c_\rho$ и $c'_\rho$, входящими в (3.39), и высотой уровня $k_1\geqslant 1$, начиная с которого имеет место (3.39). Зная $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_\rho} z$, мы будем знать и оценки $\operatorname{vrai}\max w$ и $\operatorname{vrai}\max|u_x|$ в цилиндре $Q_{\frac{\rho}{2}}$.

Итак, вводя срезающую функцию $\zeta(x, t)$, мы оценили $|u_x|$ в любом цилиндре $Q_\rho = K_\rho \times (\tau - \rho^2, \tau)$, используя значение $\max|u|$ в несколько большем цилиндре $K_{\rho_1} \times (\tau - \rho_1^2, \tau)$, $\rho_1 > \rho$. При этом $\varepsilon$ в неравенствах (3.5) — (3.6) надо считать достаточно малым. Это условие малости можно снять, если считать известным модуль непрерывности функции $u(x, t)$ в $Q_T$, т. е. функцию $\omega(\rho) = \sup osc\{u;\ Q_\rho \cap Q_T\}$, где sup взят по всем $Q_\rho$, причем $\omega(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Как показано при доказательстве теоремы 3.3, нужную нам функцию $\varphi(v)$ (см. (3.28), (3.29) и далее) можно подобрать при любых $\varepsilon$ и $c_1$, если известно, что в рассматриваемой области (на этот раз цилиндр $Q_\rho$) колебание $u(x, t)$ не превосходит известной нам величины $\omega_0$. Поэтому, считая $\rho$ столь малым, что $\omega(\rho) \leqslant \omega_0$, мы сможем оценить $\max|u_x|$ в цилиндре $Q_{\frac{\rho}{2}}$ без каких-либо предположений о малости $\varepsilon$. Если считать известным $\max|u|$ и модуль непрерывности $u(x, t)$ для всего цилиндра $Q_T$, то из только что сказанного следует возможность оценки $\max|u_x|$ для любого цилиндра вида $Q' = \Omega' \times (\delta, T)$, где $\Omega' \subset \Omega$, а $\delta > 0$. Для этого надо покрыть $Q'$ конечным числом цилиндров $Q_{\frac{\rho}{2}}$ с достаточно малым $\rho$ (так чтобы $\omega(\rho) \leqslant \omega_0$) и воспользоваться оценкой $\max|u_x|$ для каждого из этих цилиндров $Q_{\frac{\rho}{2}}$.

Если $\max\limits_{K_\rho}|u_x(x, 0)| = M_0$ уже известен, то оценки $\max|u_x|$ можно дать и для цилиндров $Q' = K_\rho \times (0, \tau)$, $\tau \leqslant T$, причем в этом случае можно $m$ считать произвольным. Действительно, в этом случае надо в равенстве (3.34) и ниже подчинить $k$ ограничению $k \geqslant M_0$, а функцию $\zeta$ брать не зависящей от $t$. При этом член в (3.39), содержащий $c'_\rho$, будет равен нулю (так как $\zeta_t \equiv 0$), а он был единственным членом, при оценке которого выше требовалось ограничение $m \geqslant 1$.

Локальные оценки $\max|u_x|$ можно дать и для цилиндров, пересекающих $S_T$. Если известно, что $\max\limits_{\Gamma_T}|u_x| \leqslant M_0$, то в (3.34) и ниже надо считать $k \geqslant \max\limits_{Q_\rho \cap \Gamma_T} z$. Заметим, что и оценку $|u_x|$ на $S_T$ можно делать не для всей поверхности $S_T$

сразу (как это сделано выше в лемме 3.1), а локально, на отдельно взятом ее куске $S_\rho = S_T \cap Q_\rho$, без использования каких-либо сведений о поведении $u(x, t)$ вблизи остальной части $S_T$.

Сформулируем доказанное о локальных оценках в виде двух теорем.

Теорема 3.4. *Пусть функция $u(x, t)$ в цилиндре $Q_T$ ограничена, имеет обобщенные производные вида $u_x$, $u_{xx}$, $u_t$ и удовлетворяет уравнению* (3.1) *почти всюду в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$. Пусть коэффициенты уравнения при $(x, t) \in \overline{Q}_T$ подчиняются неравенствам* (3.2)—(3.6) *с $m \geqslant 1$ и при некотором $s$, удовлетворяющем неравенству* (3.26), *выполнены условия* (3.14) *относительно $u(x, t)$. Тогда для любого цилиндра $Q' = \Omega' \times (\delta, T)$, $\Omega' \subset \Omega$, $\delta > 0$, величина $\operatorname{vrai\,max}_{Q'} |u_x(x, t)|$ не превосходит некоторой постоянной, зависящей лишь от расстояния $Q'$ до $\Gamma_T$, $n$, $M = \max_{Q_T} |u|$, $\nu = \nu(M)$, $\mu = \mu(M)$, $\mu_1 = \mu_1(M)$, $\varepsilon = \varepsilon(M)$, $P(|p|) = P(|p|, M)$ и $m$ из неравенств* (3.2)—(3.6), *причем $\varepsilon(M)$ должно быть достаточно мало. Если $u(x, t)$ непрерывна в $\overline{Q}_T$, то $\operatorname{vrai\,max}_{Q'} |u_x(x, t)|$ можно оценить через эти же величины и модуль непрерывности $\omega(\rho)$ функции $u(x, t)$ в $Q_T$ при произвольном (не обязательно малом) числе $\varepsilon(M)$.*

*Если $\operatorname{vrai\,max}_{\Omega} |u_x(x, 0)| \leqslant M_0$, то, каково бы ни было $m$ в условиях* (3.2)—(3.6), $\operatorname{vrai\,max} |u_x|$ *в цилиндре $Q' = \Omega' \times (0, T)$, где $\Omega'$ — произвольная внутренняя подобласть $\Omega$, оценивается через расстояние $\Omega'$ до $S$, $n$, $M_0$, $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $\varepsilon$ и $P(|p|)$, если $\varepsilon = \varepsilon(M)$ мало, а также через модуль непрерывности $\omega(\rho)$ функции $u(x, t)$ в $Q_T$, если $\varepsilon(M)$ любое, но и непрерывна в $\overline{Q}_T$.*

Теорема 3.5. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 3.2, *кроме условий на границу $S$ и функцию $\psi(x, t)$, которые заменены следующими: участок $S'$ границы $S$ принадлежит классу $O^2$ и на некоторой части $S'_T \subset S' \times [0, T]$ функция $u(x, t)|_{S'_T} = \psi(s, t) \in O^{2,1}(S'_T)$. Пусть число $m$ в условиях* (3.2)—(3.6) *не меньше единицы. Тогда для любой части $Q'$ цилиндра $\overline{Q}_T$, отстоя-*

*щей от* $\Gamma_T \setminus S'_T$ *на положительное расстояние* $d$, *величина* $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q'}|u_x|$ *оценивается постоянной, зависящей лишь от* $S'$, $|\psi|^{(2)}_{S'_T}$, $d$, $n$, $M$, $m$, $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\mu_1(M)$, $\varepsilon(M)$ *и* $P(|p|, M)$ *из* (3.2) — (3.6), *если* $\varepsilon(M)$ *достаточно мало, а также через модуль непрерывности* $\omega(\rho)$ *функции* $u(x, t)$ *в* $\overline{Q}_T$, *если* $\varepsilon(M)$ *любое, но и непрерывна в* $\overline{Q}_T$.

Пусть $S'_\tau = S' \times [0, \tau]$, $\tau \leqslant T$ *и* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u_x(x, 0)| \leqslant M_0$, *и обозначим через* $\Gamma'_\tau$ *объединение нижнего основания цилиндра* $\overline{Q}_T$ *и участка* $S'_\tau$ *поверхности* $S_T$. *Тогда для любой подобласти* $Q'$ *цилиндра* $Q_T$, *отстоящей от* $S_\tau \setminus S'_\tau$ *на положительное расстояние* $d$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q'}|u_x|$ *не превосходит постоянной, зависящей только от* $S'$, $|\psi|^{(2)}_{S'_\tau}$, $n$, $d$, $M_0$, $M$, $m$, $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\mu_1(M)$, $\varepsilon(M)$ *и* $P(|p|, M)$, *если* $\varepsilon(M)$ *мало, и зависящей еще от модуля непрерывности* $\omega(\rho)$ *функции* $u(x, t)$ *в* $Q_T$, *если* $\varepsilon(M)$ *любое, но и непрерывна в* $\overline{Q}_T$.

Замечание 3.1. Для некоторых классов уравнений (0.1) можно получить оценку $\max\limits_{Q_T}|u_x|$ через $\max\limits_{\Gamma_T}|u_x|$ или известные в задаче величины, не накладывая никаких ограничений на порядки роста функций $a_{ij}$ и $a$ по $p$ или накладывая более слабые ограничения, чем условия теорем 3.1—3.5. Например, возьмем уравнение вида

$$\mathscr{L}u = u_t - a_{ij}(t, u_x)\, u_{x_i x_j} + a(t, u_x) = 0 \qquad (3.40)$$

и будем считать, ради простоты, все функции и решения достаточно гладкими.

Из равенства

$$0 = (\mathscr{L}u)_{x_l}\, u_{x_l} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_x^2}{\partial t} - \frac{1}{2} a_{ij} \frac{\partial^2 u_x^2}{\partial x_i\, \partial x_j} + $$
$$+ a_{ij} u_{x_l x_i} u_{x_l x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} u_{x_i x_j} \frac{\partial u_x^2}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial u_{x_k}}\frac{\partial u_x^2}{\partial x_k}$$

следует неравенство

$$v_t - a_{ij} v_{x_i x_j} + A_k v_{x_k} \leqslant 0,$$

в котором $v = u_x^2$, а $A_k = -\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_k}} u_{x_i x_j} + \frac{\partial a}{\partial u_{x_k}}$, а из него, как известно (см. § 2 главы I), следует, что $v$ принимает свое наибольшее значение на $\Gamma_T$, т. е.

$$v(x, t) \leqslant \max_{\Gamma_T} v. \tag{3.41}$$

Это неравенство сводит вопрос оценки $\max_{Q_T} u_x^2$ к оценке максимума $u_x^2$ на $\Gamma_T$. Для оценки же $\max_{\Gamma_T} u_x^2$ надо привлекать граничное и начальное условия. (См. по этому поводу § 7 главы V и лемму 3.1 этого параграфа.)

## § 4. Теоремы существования

В § 6 предыдущей главы мы показали, как с помощью принципа Лерэ — Шаудера, априорных оценок $|u_x|_{Q_T}^{(\alpha)}$ для всех возможных решений нелинейных задач и теорем разрешимости в классах Гёльдера для линейных задач устанавливается разрешимость этих нелинейных задач. Имеет ли при этом исследуемое уравнение дивергентную главную часть или нет, несущественно. Рассуждения, приведенные в § 6 главы V, для уравнений с дивергентной главной частью, сохраняют свою силу и для общих квазилинейных уравнений

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - a_{ij}(x, t, u, u_x) u_{x_i x_j} + a(x, t, u, u_x) = 0, \tag{4.1}$$

$$u|_{\Gamma_T} = \psi|_{\Gamma_T}. \tag{4.2}$$

Отличие состоит лишь в условиях, при которых установлены априорные оценки решений тех и других уравнений, и в том уравнении, с которым связывается параметром данное. Ввиду этого мы не будем повторять здесь всех рассуждений § 6 главы V, а сформулируем лишь окончательные результаты (причем только основные из них, без их следствий), используя априорные оценки, полученные в данной главе для решений задачи (4.1), (4.2), и дадим к ним необходимые пояснения.

Так же как в § 6 главы V, задачу (4.1), (4.2) рассмотрим не изолированно, а одновременно с однопараметрическим семейством задач того же типа:

$$\mathscr{L}_\tau u \equiv u_t - \left[\tau a_{ij}(x, t, u, u_x) + (1-\tau)\left(1+u_x^2\right)^{\frac{m}{2}-1}\delta_i^j\right] u_{x_i x_j} +$$
$$+ \tau a(x, t, u, u_x) - (1-\tau)\left[\psi_t - \left(1+\psi_x^2\right)^{\frac{m}{2}-1}\Delta\psi\right] = 0, \quad (4.3)$$
$$u|_{\Gamma_T} = \psi|_{\Gamma_T}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \text{ считая } \psi \in H^{2+\beta,\, 1+\frac{\beta}{2}}(\bar{Q}_T).$$

Линейная задача

$$v_t - \left[\tau a_{ij}(x, t, w, w_x) + (1-\tau)\left(1+w_x^2\right)^{\frac{m}{2}-1}\delta_i^j\right] v_{x_i x_j} +$$
$$+ \tau a(x, t, w, w_x) - (1-\tau)\left[\psi_t - \left(1+\psi_x^2\right)^{\frac{m}{2}-1}\Delta\psi\right] = 0,$$
$$v|_{\Gamma_T} = \psi|_{\Gamma_T}, \quad (4.4)$$

определяет преобразование $\Phi(w, \tau) = v$ функции $w$ в $v$, к которому и применяется принцип Лерэ — Шаудера.

Относительно функций $a_{ij}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ предполагаем выполненными или условия (2.29), (2.30) главы I или, общее, условие (2.29), (2.32), (2.33) главы I. Те и другие, как доказано в теореме 2.9 главы I, дают оценку

$$\max_{Q_T} |u^\tau| \leqslant M \quad (4.5)$$

для всех возможных классических решений задач (4.3).

Пусть, далее, при $(x, t) \in \bar{Q}_T$, $|u| \leqslant M$ и произвольных $p$ функции $a_{ij}(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ непрерывны по $x, t, u, p$, непрерывно дифференцируемы по $x, u, p$ и удовлетворяют неравенствам

$$\nu(1+|p|)^{m-2}\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, t, u, p)\xi_i\xi_j \leqslant \mu(1+|p|)^{m-2}\xi^2,$$
$$\nu, \mu = \mathrm{const} > 0, \quad (4.6)$$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}\right|(1+|p|)^3 + |a| + \left|\frac{\partial a}{\partial p_k}\right|(1+|p|) \leqslant \mu_1(1+|p|)^m, \quad (4.7)$$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right|(1+|p|)^2 + \left|\frac{\partial a}{\partial x_k}\right| \leqslant$$
$$\leqslant [\varepsilon + P(|p|)](1+|p|)^{m+1}, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.8)$$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\right| \leqslant [\varepsilon + P(|p|)](1+|p|)^{m-2}, \quad (4.9)$$

$$-\frac{\partial a}{\partial u} \leqslant [\varepsilon + P(|p|)](1+|p|)^m, \quad (4.10)$$

где $P(\rho)$ — неотрицательная непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $\rho \to \infty$, а $m$ — произвольное число. Легко проверить, что такого же типа неравенствам подчиняются и функции $a^{\tau}_{ij}(x, t, u, p) = \tau a_{ij}(x, t, u, p) + (1-\tau)(1+p^2)^{\frac{m-2}{2}} \delta^j_i$ и $-(1-\tau)\left[\psi_t - (1+\psi_x^2)^{\frac{m}{2}-1} \Delta\psi\right] + \tau a(x, t, u, p)$, причем постоянные $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $\varepsilon$ и функции $P(|p|)$ в них можно взять общими для всех $\tau \in [0, 1]$. Ввиду этого, как доказано в теореме 3.2, для всех решений $u^{\tau}$ задач, обладающих указанной в этой теореме гладкостью, при $S \in O^2$ равномерно ограничены $|u^{\tau}_x|$:

$$\max_{Q_T} |u^{\tau}_x| \leqslant M_1, \tag{4.11}$$

если только число $\varepsilon$ в (4.8) — (4.10) меньше некоторого числа, определяемого числами $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$ и $\hat{P} = \max\limits_{\rho \geqslant 0} P(\rho)$, или если известна равностепенная непрерывность в $\overline{Q}_T$ всех решений $u^{\tau}$.

Сформулируем теперь теоремы существования.

Теорема 4.1. *Предположим, что*:

a) *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$ *и произвольных* $u$ *выполнены условия* (2.29), (2.30) *или, общее,* (2.29), (2.32), (2.33) *главы* I;

b) *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $|u| \leqslant M$ *(где* $M$ *взята из оценки* (4.5)) *и произвольных* $p$ *функции* $a_{ij}(x, t, u, p)$ *и* $a(x, t, u, p)$ *непрерывны и дифференцируемы по* $x$, $u$ *и* $p$ *и удовлетворяют неравенствам* (4.6) — (4.10) *с достаточно малым* $\varepsilon$, *определяемым числами* $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$ *и* $\hat{P} = \max\limits_{\rho \geqslant 0} P(\rho)$;

c) *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $|u| \leqslant M$, $|p| \leqslant M_1$ *(где* $M_1$ *взята из* (4.11)) *функции* $a_{ij}(x, t, u, p)$ *и* $a(x, t, u, p)$ *непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам*;

d) *граничное условие* (4.2) *задается функцией* $\psi(x, t)$, *принадлежащей* $H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ *и удовлетворяющей на* $S_0 = \{(x, t) : x \in S, t = 0\}$ *уравнению* (4.1), *т. е.*

$$\psi_t - a_{ij}(x, 0, \psi(x, 0), \psi_x(x, 0))\psi_{x_i x_j} + \\ + a(x, 0, \psi(x, 0)\psi_x(x, 0))|_{x \in S} = 0 \tag{4.12}$$

*(т. е. считаем выполненными условия согласования нулевого и первого порядков);*

e) $S \in H^{2+\beta}$.

*Тогда существует единственное решение задачи* (4.1), (4.2) *в пространстве* $H^{2+\beta,\, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$. *Это решение имеет производные* $u_{tx_i}$ *из* $L_2(Q_T)$.

Используя эту теорему, теорему об оценке $\max\limits_{Q_T}|u_x|$ и теоремы о внутренних оценках решений в более сильных нормах, убедимся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* a) *и* b) *теоремы* 4.1 *и пусть:*

c) *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $|u| \leqslant M$ и $|p| \leqslant M_1$ *функции* $a_{ij}(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$ *непрерывно дифференцируемы по* $x$, $u$, $p$ *и непрерывны в смысле Гёльдера по* $t$ *с показателем* $\frac{\beta}{2}$;

d) $\psi|_{S_T} \in O^{2,1}(S_T)$, $\max\limits_{\Omega}|\psi_x(x, 0)| < \infty$,

$$\psi(x, t) \in H^{\gamma,\, \frac{\gamma}{2}}(\overline{Q}_T).$$

e) $S \in O^2$.

*Тогда существует решение* $u(x, t)$ *задачи* (4.1), (4.2), *принадлежащее* $H^{\alpha,\, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T) \cap H^{2+\beta,\, 1+\frac{\beta}{2}}(Q_T)$ *и имеющее ограниченный* $\max\limits_{Q_T}|u_x|$.

Теоремы 4.1 и 4.2 доказываются аналогично теоремам 6.1 и 6.2 главы V. В их условиях требование малости $\varepsilon$ в неравенствах (4.8) — (4.10) можно заменить, следуя теореме 3.3, условием равностепенной непрерывности в $\overline{Q}_T$ всех решений $u^\tau$. Эта замена в теоремах 4.1 и 4.2 приводит к такой теореме существования:

Теорема 4.3. *Утверждения теорем* 4.1 *и* 4.2 *сохраняются, если в них условие малости* $\varepsilon$ *в неравенствах* (4.8) — (4.10) *заменить требованием равностепенной непрерывности в* $\overline{Q}_T$ *всех возможных решений задач* (4.3).

Можно ценой потери гладкости решения в $\bar{Q}_T$ ослабить и наши предположения о $S$ и $\psi$. Так, например, имеет место теорема:

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия* a) — c) *теоремы* 4.1 *и пусть*

d) $\psi \in C(\bar{Q}_T) \cap H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(Q_T)$;

e) *в каждой точке можно коснуться $S$ извне шариком (или конусом) фиксированного размера так, чтобы шарик (конус) не имел общих точек с $\Omega$.*

*Тогда задача* (4.1), (4.2) *имеет решение из* $C(\bar{Q}_T) \cap H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(Q_T)$.

Доказывается она так же, как и теоремы 6.2—6.4 глава V и теорема 4.2 данной главы, с помощью аппроксимации уравнения, граничного и начального условий и самой области более гладкими, удовлетворяющими условиям теоремы 4.1, и с помощью теорем предыдущих параграфов об априорных оценках в $\bar{Q}_T$ и в $Q' \in Q_T$. Специфика условий о $S$ и $\psi$ в теореме 4.4 состоит в том, что на этот раз для замкнутых областей $\bar{Q}^m$ мы будем иметь единственную равномерную оценку:

$$\max_{Q^m} |u_m(x, t)| \leqslant M \tag{4.13}$$

вместо $|u_m|^{(\alpha)}_{Q^m} \leqslant M$ в прежних случаях. Оценка (4.13) не дает возможности заключить о непрерывности предельной для $u^m$ функции в $\bar{Q}_T$. Это надо доказывать специально, используя то, что $u_m$ суть решения параболических уравнений. Делается это с помощью классического метода барьеров, разработанного в первых десятилетиях нашего века. Для параболических уравнений он мало чем отличается от метода барьеров для уравнений эллиптического типа. В том и другом случае в основе его лежит «принцип максимума», присущий уравнениям второго порядка того и другого типов. Мы не будем приводить доказательство теоремы 4.4, а отошлем к § 3 главы VI нашей книги ([I]), где это сделано подробно для квазилинейных эллиптических уравнений общего вида.

## § 5. Уравнения с одной пространственной переменной

Для случая уравнений

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - a_{11}(x, t, u, u_x) u_{xx} + a(x, t, u, u_x) = 0 \quad (5.1)$$

с одной пространственной переменной приведенные выше рассуждения и результаты допускают некоторые упрощения и усиления. Как и выше, ограничимся областями $Q_T = (-l, l) \times \times (0, T)$, хотя излагаемые здесь методы без существенных изменений применимы и к областям вида $\{(x, t) : \varphi_1(t) \leqslant x \leqslant \leqslant \varphi_2(t)\}$ с $\varphi_i'(t) \neq \infty$. Более того, в этом параграфе ограничимся ради экономии места лишь классическими решениями и непрерывными функциями $a_{11}(x, t, u, p)$, $a(x, t, u, p)$. Из изложенного выше ясно, какие возможны обобщения приводимых ниже предложений в отношении допущения разных особенностей у функций $a_{11}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ и решений $u(x, t)$.

Уравнения (5.1) при гладкой функции $a_{11}(x, t, u, p)$ могут быть приведены к виду уравнения с дивергентной главной частью, именно:

$$u_t - \frac{d}{dx} a_1(x, t, u, u_x) + b(x, t, u, u_x) = 0, \quad (5.2)$$

в котором

$$a_1(x, t, u, p) = \int_0^p a_{11}(x, t, u, \tau)\, d\tau,$$

$$b(x, t, u, p) = a(x, t, u, p) + \frac{\partial a_1(x, t, u, p)}{\partial u} p + \frac{\partial a_1(x, t, u, p)}{\partial x}.$$

Ввиду этого к уравнениям (5.1) применимы теоремы, доказанные в главах V и VI. Более того, для их решений $u$ можно оценить $|u_x|_{Q_T}^{(\alpha)}$ по всей области $Q_T$ без предварительной оценки $\max\limits_{Q_T} |u_t|$ и тем самым без предположений о дифференцируемости по $t$ функций, образующих уравнение. Покажем это.

Теорема 5.1. *Пусть $u(x, t)$ есть решение уравнения (5.1), принадлежащее $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, и пусть при $(x, t) \in \bar{Q}_T$ выполняются неравенства*

$$\begin{gathered} \nu \leqslant a_{11}(x, t, u(x, t), u_x(x, t)) \leqslant \mu, \\ |a(x, t, u(x, t), u_x(x, t))| \leqslant \mu, \quad \nu, \mu = \mathrm{const} > 0. \end{gathered} \quad (5.3)$$

*Тогда величину* $\langle u_x \rangle_{Q'}^{(\alpha)}$, $\alpha > 0$, *для любого прямоугольника* $Q' = (-l+\varepsilon,\ l-\varepsilon) \times (\varepsilon_1,\ T)$ *с* $\varepsilon,\ \varepsilon_1 > 0$, *можно оценить сверху постоянной, зависящей лишь от* $\nu$, $\mu$, $M_1 = \max\limits_{Q_T} |u_x|$, $\varepsilon$ *и* $\varepsilon_1$. *При* $\varepsilon_1 = 0$ *величина* $\langle u_x \rangle_{Q'}^{(\alpha)}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $\nu$, $\mu$, $M_1$, $\varepsilon$, $\langle u_x(x,\ 0) \rangle_{(-l,\ l)}^{(\beta)}$ *и* $\beta > 0$. *Для всего прямоугольника* $\langle u_x \rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $\nu$, $\mu$, $M_1$, $\langle u_x(x,\ 0) \rangle_{(-l,\ l)}^{(\beta)}$, $\beta$ *и* $\max\limits_{t \in [0,\ T]} (|u_t(-l,\ t)|,\ |u_t(l,\ t)|)$. *Постоянная* $\alpha$ *определяется* $\nu$, $\mu$, $M_1$ *и* $\beta$.

Для доказательства рассмотрим соотношение

$$-\int_{t_0}^{t} \int_{-l}^{l} \mathscr{L}u \left(u_x^{(k)} \zeta^2\right)_x dx\,dt = 0, \tag{5.4}$$

где $u_x^{(k)}(x,\ t) = \max\{u_x(x,\ t) - k;\ 0\}$, $k$ — произвольное число, $\zeta(x,\ t)$ — гладкая функция со значениями из $[0,\ 1]$, равная нулю вне $K_\rho = \{x\colon\ |x - x_0| < \rho\}$, а $(x_0,\ t_0) \in \overline{Q}_T$ и $\rho \leqslant l$. Если отрезок $K_\rho$ не выходит из $(-l,\ l)$, то, проведя в (5.4) интегрирование по частям, получим

$$\frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \left[u_x^{(k)}(x,\ t)\zeta(x,\ t)\right]^2 dx \Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \int_{-l}^{l} \Big[-\left(u_x^{(k)}\right)^2 \zeta\zeta_t + \\ + \left(a_{11}u_{xx} - a\right)\left(u_{xx}^{(k)}\zeta^2 + 2u_x^{(k)}\zeta\zeta_x\right)\Big] dx\,dt = 0. \tag{5.5}$$

Если же один из концов промежутка $[-l,\ l]$, например $x = l$, содержится в $K_\rho$, то первый член (5.4) преобразуем так:

$$-\int_{t_0}^{t} \int_{-l}^{l} u_t \left(u_x^{(k)}\zeta^2\right)_x dx\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \int_{-l}^{l} \left\{\left[-u_t(x,t) + u_t(l,t)\right]\left(u_x^{(k)}\zeta^2\right)_x - u_t(l,t)\left(u_x^{(k)}\zeta^2\right)_x\right\} dx\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \int_{-l}^{l} \left[u_{tx}u_x^{(k)}\zeta^2 - u_t(l,\ t)\left(u_x^{(k)}\zeta^2\right)_x\right] dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \left(u_x^{(k)}\zeta\right)^2 dx \Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \int_{-l}^{l} \left[\left(u_x^{(k)}\right)^2 \zeta\zeta_t + u_t(l,\ t)\left(u_x^{(k)}\zeta^2\right)_x\right] dx\,dt.$$

В результате мы придем к равенству (5.5), в котором $a(x, t, u, p)$ заменено на $\tilde{a}(x, t, u, p) = a(x, t, u, p) + u_t(l, t)$. То, что при выводе (5.5) было использовано существование у решения производных $u_{xt}$ из $L_2(Q_T)$, несущественно. Как пояснялось много раз выше, этого можно избежать разными способами, например взять вместо (5.4) соотношение

$$\int_{t_0}^{t}\int_{-l}^{l}\left[-u_{ht}+(a_{11}u_{xx}-a)\right]\left(u_{hx}^{(k)}\zeta^2\right)_x dx\,dt = \\ = \int_{t_0}^{t}\int_{-l}^{l}\left(u_t-u_{ht}\right)\left(u_{hx}^{(k)}\zeta^2\right)_x dx\,dt,$$

где $u_h(x, t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(x, \tau)\,d\tau$, преобразовать его первый член так, как описано выше, а затем перейти к пределу по $h \to 0$.

Из (5.5) и предположений теоремы 5.1, как нетрудно видеть, следует неравенство

$$\int_{\Omega_\rho}\left(u_x^{(k)}\zeta\right)^2 dx\Big|_{t_0}^{t} + \nu\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega_\rho}\left(u_{xx}^{(k)}\zeta\right)^2 dx\,dt \leqslant \\ \leqslant \gamma_1\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega_\rho}\left(u_x^{(k)}\right)^2\left(\zeta_x^2+\zeta\,|\zeta_t|\right)dx\,dt + \int_{t_0}^{t}\operatorname{mes} A_{k,\rho}(t)\,dt\right],$$

в котором $\Omega_\rho = K_\rho \cap (-l, l)$, $A_{k,\rho}(t)$ — множество тех точек $x$ из $\Omega_\rho$, в которых $u_x(x, t) > k$, а постоянная $\gamma_1$ зависит лишь от $\nu$ и $\mu$ при $K_\rho \subset (-l, l)$ и зависит еще от $\max\limits_{[t_0, t]}|u_t(\pm l, t)|$, если $x = l$ или $x = -l$ лежит в $K_\rho$. Аналогичные неравенства справедливы и для функции $-u_x(x, t)$. Ввиду этого (см. §§ 7 и 8 главы II) функция $u_x(x, t)$ принадлежит классу $\hat{\mathfrak{B}}_2(\bar{Q}_T, M_1, \gamma, 6, \infty, 2)$ с $\gamma = \frac{2\gamma_1}{\min\{1; \nu\}}$, и потому в силу теорем 7.1, 8.1 и 8.2 главы II для $u_x$ верны утверждения теоремы 5.1.

Обратимся к оценкам $\max|u_x|$ для решений уравнения (5.1). В § 3 даны оценки $\max|u_x|$ сразу для любого $n \geqslant 1$. При $n = 1$ можно несколько ослабить предположения, при которых возможны такие оценки. Так, если в условиях (3.2) $n=1$, $m=2$, то вместо условий (3.3) — (3.6) можно взять следующее:

$$\left|\frac{\partial a_{11}(x, t, u, p)}{\partial p}\right|(1+|p|)^3+\left|\frac{\partial a_{11}(x, t, u, p)}{\partial u}\right|(1+|p|)^2+\\+\left|\frac{\partial a_{11}(x, t, u, p)}{\partial x}\right|(1+|p|)+|a(x, t, u, p)| \leqslant\\ \leqslant \mu(|u|)(1+|p|)^2, \quad (5.6)$$

ибо при этих предположениях уравнение (5.1), записанное в форме (5.2), удовлетворяет всем условиям §§ 3 и 4 главы V, и потому для него справедливы теоремы об оценке $\max\limits_{Q'}|u_x|$ и $\max\limits_{Q_T}|u_x|$, установленные в этих параграфах.

При $n=1$ и $m \neq 2$ из предположений (3.2) — (3.6) этой главы можно исключить требование малости $\varepsilon(|u|)$ в условии (3.6) относительно $\frac{\partial a_{11}}{\partial u}$. В этом нетрудно убедиться, проследив оценки соответствующих членов в неравенстве (3.25) и заметив, что при $n=1$ функцию $|v_{xx}|$ можно представить в виде $\frac{1}{2}w^{-\frac{1}{2}}|w_x|$ и соответствующие ей члены погасить за счет члена, имеющегося в левой части неравенства.

Сформулируем теперь теорему о разрешимости первой краевой задачи для уравнения (5.1), вытекающую из только что описанных оценок $\max\limits_{Q_T}|u_x|$ и $\langle u_x\rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$. Возьмем, как выше, семейство краевых задач в $Q_T$:

$$\mathscr{L}_\tau u \equiv u_t-\left[\tau a_{11}(x, t, u, u_x)+(1-\tau)\left(1+u_x^2\right)^{\frac{m}{2}-1}\right] u_{xx}+\\+\tau a(x, t, u, u_x)-(1-\tau)\left[\psi_t-\left(1+\psi_x^2\right)^{\frac{m}{2}-1} \psi_{xx}\right]=0, \quad (5.7)$$

$$u|_{t=0}=\psi(x, 0), \quad u(-l, t)=\psi(-l, t), \quad u(l, t)=\psi(l, t),\\ 0 \leqslant \tau \leqslant 1,$$

где $\psi(x, t)$ — известная функция, определенная в $\bar{Q}_T$. Для них справедливо следующее предложение:

Теорема 5.2. *Пусть выполнены следующие условия:*
a) *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$ *и произвольных* $u$

$$a_{11}(x, t, u, 0) \geqslant 0 \tag{5.8}$$

*и*

$$-a(x, t, u, 0)\, u \leqslant |u|\, \Phi(|u|), \quad \int\limits_1^\infty \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} = \infty. \tag{5.9}$$

*Это дает априорную оценку* $\max\limits_{Q_T} |u^\tau| \leqslant M$ *для всех возможных (классических) решений задач* (5.7);

b) *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $|u| \leqslant M$ *и произвольных* $p$ *функции* $a_{11}(x, t, u, p)$ *и* $a(x, t, u, p)$ *непрерывны, дифференцируемы по* $x$, $u$, $p$ *и удовлетворяют неравенствам*

$$\nu(1 + |p|)^{m-2} \leqslant a_{11}(x, t, u, p) \leqslant \mu(1 + |p|)^{m-2}, \quad \nu > 0, \tag{5.10}$$

$$\left|\frac{\partial a_{11}(x, t, u, p)}{\partial p}\right|(1 + |p|)^3 + \left|\frac{\partial a_{11}}{\partial u}\right|(1 + |p|)^2 + \\ + |a| \leqslant \mu_1 (1 + |p|)^m, \tag{5.11}$$

$$\left|\frac{\partial a_{11}}{\partial x}\right|(1 + |p|)^2 + \left|\frac{\partial a}{\partial x}\right| \leqslant [\varepsilon + P(|p|)](1 + |p|)^{m+1}, \tag{5.12}$$

$$-\frac{\partial a(x, t, u, p)}{\partial u} \leqslant [\varepsilon + P(|p|)](1 + |p|)^m, \tag{5.13}$$

*где* $m$ — *произвольное число,* $P(\rho)$ — *неотрицательная непрерывная функция, стремящаяся к нулю при* $\rho \to \infty$, *а* $\varepsilon$ — *положительное число, меньшее некоторого числа, определяемого величинами* $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$ *и* $\hat{P} = \max\limits_{\rho \geqslant 0} P(\rho)$. *Неравенства* (5.10) — (5.13) *гарантируют оценку:*

$$\max_{Q_T} |u_x^\tau| \leqslant M_1;$$

c) *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $|u| \leqslant M$ *и* $|p| \leqslant M_1$ *функции* $a_{11}(x, t, u, p)$ *и* $a(x, t, u, p)$ *непрерывны в смысле Гёльдера по переменной* $t$ *с показателем* $\frac{\beta}{2}$, *а по переменным* $x$, $u$ *и* $p$ *с показателем* $\beta$;

d) *функция* $\psi(x, t) \in H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ *и*

$$[\psi_t(x, 0) - a_{11}(x, 0, \psi(x, 0), \psi_x(x, 0))\psi_{xx}(x, 0) + \\ + a(x, 0, \psi(x, 0), \psi_x(x, 0))]|_{x=\pm l} = 0. \quad (5.14)$$

*Тогда задачи* (5.7) *однозначно разрешимы в* $H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ *при всех* $\tau$ *из* $[0, 1]$.

Замечание 5.1. Условие b) в теореме 5.2 можно заменить следующим:

b′) при $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $|u| \leqslant M$ и произвольных $p$ функции $a_{11}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ непрерывны, $a_{11}(x, t, u, p)$ дифференцируема по $x$, $u$ и $p$ и удовлетворяются неравенство (5.10) с $m = 2$ и неравенство (5.6).

Замечание 5.2. Условие b) в теореме 5.2 можно заменить следующим:

b″) при $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $|u| \leqslant M$ и произвольных $p$ функции $a_{11}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$ трижды непрерывно дифференцируемы по $x$, $t$, $u$ и $p$, $a_{11}(x, t, u, p) \geqslant \nu$, $\nu = \text{const} > 0$, и функция $q(x, t, u, p) = \dfrac{a(x, t, u, p)}{a_{11}(x, t, u, p)}$ подчиняется неравенствам

$$|q(x, t, u, p)| + \left|\frac{\partial q(x, t, u, p)}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial q(x, t, u, p)}{\partial u}\right| + \\ + (1 + |p|)\left|\frac{\partial q(x, t, u, p)}{\partial p}\right| \leqslant \mu(1 + |p|)^2, \quad (5.15)$$

$$\left|\frac{\partial q(x, t, u, p)}{\partial x}\right| \leqslant [\varepsilon + P(|p|)](1 + |p|)^3, \quad (5.16)$$

где $\varepsilon$ и $P(|p|)$ такие же, как в (5.12).

Если сравнить предположение b) с b″), то видно, что в последнем наложены более жесткие условия на гладкость функций $a_{11}(x, t, u, p)$ и $a(x, t, u, p)$, зато ограничения на рост $a_{11}$ и $a$ по $p$ в b″) несколько слабее, чем в b) (именно, не требуется малости $\varepsilon$ в (5.13)). Предположение же b′) — самое слабое из всех условий b), b′) и b″), но оно охватывает лишь случай $m = 2$.

Чтобы убедиться в справедливости замечания 5.2, надо доказать, что условие b″) обеспечивает оценку $\max\limits_{Q_T}|u_x^\tau|$. Оценки для $\max\limits_{t \in [0, T]}|u_x^\tau(\pm l, t)|$ следуют из леммы 3.1 данной главы. Оценка же $|u_x(x, t)|$ во внутренних точках $Q_T$ при условиях b″) установлена А. Ф. Филипповым в заметке [63]. Дадим ее доказательство.

Лемма 5.1. *При выполнении предположений b″) и (5.10) $\max\limits_{Q_T}|u_x|$ оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $\nu$, $\mu$, $\varepsilon$, $P(\rho)$ *и* $\max\limits_{\Gamma_T}|u_x|$.

Введем вспомогательную функцию $w(x, t)$ с помощью равенства

$$w(x, t) = \varphi(x, t, u(x, t), u_x(x, t)), \tag{5.17}$$

где $\varphi(x, t, u, p)$ есть некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов в области $\{(x, t, u, p);\ (x, t) \in \bar{Q}_T,\ |u| \leqslant M,\ -\infty < p < \infty\}$, строго монотонно возрастающая по $p$ и стремящаяся к $+\infty$ при $p \to +\infty$ и к $-\infty$ при $p \to -\infty$. В дальнейшем мы наложим на $\varphi(x, t, u, p)$ ряд других ограничений и построим ее.

Чтобы упростить выкладки, предположим, что $q(x, t, u, p)$ не зависит от $x$. Тогда и функцию $\varphi$ возьмем не зависящей от $x$: $\varphi = \varphi(t, u, p)$. Из (5.17) имеем

$$w_x = \varphi_u u_x + \varphi_p u_{xx}, \tag{5.18}$$

$$w_t = \varphi_t + \varphi_u u_t + \varphi_p u_{xt}. \tag{5.19}$$

Из (5.18) и уравнения (5.1) следует

$$u_t = \frac{a_{11}}{\varphi_p}(w_x - \varphi_u u_x - \varphi_p q),$$

а отсюда и из (5.19)

$$w_t = \varphi_t + \frac{\varphi_u a_{11}}{\varphi_p}[w_x - (\varphi_u u_x + \varphi_p q)] + \\ + \varphi_p \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a_{11}}{\varphi_p} w_x - \frac{a_{11}}{\varphi_p}(\varphi_u u_x + \varphi_p q)\right]. \tag{5.20}$$

Потребуем, чтобы при больших $|p|$ функция $\varphi(t, u, p)$ удовлетворяла уравнению

$$\varphi_u(t, u, p)\, p + \varphi_p(t, u, p)\, q(t, u, p) = 0 \tag{5.21}$$

в частных производных первого порядка. Известно, что такому уравнению удовлетворяют первые интегралы обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dp}{du}=\frac{q(t,\ u,\ p)}{p}, \tag{5.22}$$

в которое $t$ входит как параметр. При $p=0$ правая часть уравнения (5.22) имеет особенность. Поэтому возьмем вместо (5.22) несколько иное уравнение:

$$\frac{dp}{du}=F(t,\ u,\ p), \tag{5.23}$$

правая часть которого $F(t,\ u,\ p)$ совпадает с $\dfrac{q(t,\ u,\ p)}{p}$ при $|p|\geqslant 1$ и является какой-нибудь трижды непрерывно дифференцируемой функцией своих аргументов во всей области $\{(t,\ u,\ p)\colon\ t\in[0,\ T],\ |u|\leqslant M,\ -\infty<p<\infty\}$. В качестве $\varphi(t,\ u,\ p)$ мы возьмем один из первых интегралов уравнения (5.23), удовлетворяющий при $t\in[0,\ T]$, $|u|\leqslant M$ и произвольных $w$ неравенству

$$|\varphi_t(t,\ u,\ p(t,\ u,\ w))|\leqslant\Phi(|w|),\qquad \int\limits_1^{\infty}\frac{d\tau}{\Phi(\tau)}=\infty, \tag{5.24}$$

где $p=p(t,\ u,\ w)$ есть решение уравнения

$$w=\varphi(t,\ u,\ p). \tag{5.25}$$

Ниже мы построим такую функцию $\varphi(t,\ u,\ p)$, а сейчас покажем, как с ее помощью оценивается $|u_x(x,\ t)|$. Соотношение (5.20) рассмотрим как уравнение для $w$:

$$w_t-a_{11}w_{xx}-b(x,\ t\ w,\ w_x)=0, \tag{5.26}$$

в котором

$$b(x,\ t,\ w,\ w_x)=\varphi_t+\left(\frac{\varphi_u a_{11}}{\varphi_p}+\varphi_p\frac{\partial}{\partial x}\frac{a}{\varphi_p}\right)w_x \tag{5.27}$$

при больших $|p|$ и

$$b(x,\ t,\ w,\ w_x)=\varphi_t+\left(\frac{\varphi_u a_{11}}{\varphi_p}+\varphi_p\frac{\partial}{\partial x}\frac{a}{\varphi_p}\right)w_x-$$
$$-\frac{\varphi_u a_{11}}{\varphi_p}(\varphi_u u_x+\varphi_p q)-\varphi_p\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a_{11}}{\varphi_p}(\varphi_u u_x+\varphi_p q)\right] \tag{5.28}$$

при остальных $p$. При этом в правых частях (5.27) и (5.28) надо считать, что вместо $u_{xx}$ подставлено $\dfrac{1}{\varphi_p}(w_x-\varphi_u u_x)$, вместо $p$ и $u_x$ — функция $p(t, u, w)$, являющаяся решением уравнения (5.25), а вместо $u$ — исследуемое решение $u(x, t)$. При $w_x = 0$ и больших $w$ (т. е. больших $p$) функция $b(x, t, w, 0)$ удовлетворяет в силу (5.24) условию

$$|b(x, t, w, 0)| \leqslant \Phi(|w|), \qquad \int_1^\infty \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} = \infty, \tag{5.29}$$

и потому $\max_{Q_T} |w|$ решения $w$ уравнения (5.26) может быть оценен сверху постоянной, зависящей лишь от $\Phi(\tau)$ и $\max_{\Gamma_T} |w|$, т. е. известных нам величин (см. теорему 2.9 главы I). Это в свою очередь дает желаемую оценку для $\max_{Q_T} |u_x|$.

Итак, весь вопрос сведен к построению функции $\varphi(t, u, p)$, обладающей перечисленными выше свойствами. Пусть $p = p(t, u, p_0)$ есть решение уравнения (5.23), удовлетворяющее начальному условию

$$p|_{u=-M} \equiv p(t, -M, p_0) = p_0. \tag{5.30}$$

Такое решение существует при любом $p_0$ на всем отрезке $-M \leqslant u \leqslant M$, и кривые $p = p(t, u, p_0)$ выстилают без пересечений всю полосу $-M \leqslant u \leqslant M$ плоскости $(u, p)$. Эти утверждения справедливы на основании известной теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и свойств функции $F(t, u, p)$, именно ее гладкости и не более чем линейного роста по $p$ (см. [59, 27]). Последнее следует из предположения (5.15), точнее из того, что при $|p| \geqslant 1$ $|F| = \left|\frac{q(t, u, p)}{p}\right| \leqslant \mu \frac{(1+|p|)^2}{|p|} \leqslant 4\mu |p|$, а при $|p| \leqslant 1$ имеем $|F(t, u, p)| \leqslant c \equiv \max_{t \in [0, T],\, |u| \leqslant M,\, |p| \leqslant 1} \left|F, \frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial t}\right|$. Благодаря этим неравенствам для решений $p(t, u, p_0)$, как нетрудно подсчитать, справедлива оценка

$$|p(t, u, p_0)| \leqslant e^{8\mu M}\left(p_0 + \frac{c}{4\mu}\right) \text{ при } |u| \leqslant M. \tag{5.31}$$

Функция $p(t, u, p_0)$ является строго монотонно возрастающей функцией $p_0$ (при фиксированных $t$ и $u$), что следует непосредственно из характера расположения интегральных кривых $p = p(t, u, p_0)$ в полосе $-M \leqslant u \leqslant M$. Поэтому уравнение $p = p(t, u, p_0)$ можно однозначно разрешить относительно $p_0$:

$$p_0 = p_0(t, u, p), \tag{5.32}$$

причем $p_0 \to \pm\infty$, когда $p \to \pm\infty$ соответственно. Покажем, что функцию $p_0(t, u, p)$ можно взять в качестве желаемой функции $\varphi(t, u, p)$.

Как известно, $\frac{\partial p(t, u, p_0)}{\partial p_0}$ удовлетворяет вдоль интегральной кривой $p = p(t, u, p_0)$ линейному уравнению

$$\frac{d}{du}\frac{\partial p}{\partial p_0} = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial p_0}, \tag{5.33}$$

а при $u = -M$ обращается в единицу, т. е.

$$\left.\frac{\partial p}{\partial p_0}\right|_{u=-M} = 1. \tag{5.34}$$

Поэтому $\frac{\partial p}{\partial p_0}$, а следовательно, и $\frac{\partial p_0}{\partial p} = \left(\frac{\partial p}{\partial p_0}\right)^{-1}$ строго положительны.

Более того, для $\frac{\partial p}{\partial p_0}$ можно получить оценку снизу, исходя из (5.33) и (5.34) и предположений (5.15). Именно, из (5.15) следует, что

$$\left|\frac{\partial F}{\partial p}\right| \leqslant \left|\frac{q_p}{p} - \frac{q}{p^2}\right| \leqslant 6\mu \quad \text{при } |p| \geqslant 1$$

и

$$\left|\frac{\partial F}{\partial p}\right| \leqslant c \quad \text{при } |p| \leqslant 1,$$

и потому

$$\frac{\partial p(t, u, p_0)}{\partial p_0} = \exp\left\{\int_{-M}^{u} \frac{\partial F}{\partial p}\,d\tau\right\} \geqslant e^{-6\mu(u+M) - c(u+M)} \geqslant$$

$$\geqslant e^{-2M(6\mu+c)}. \tag{5.35}$$

Далее, на основании теорем теории обыкновенных дифференциальных уравнений о характере зависимости решений задачи Коши (5.23), (5.30) от аргумента $u$, начального значения $p_0$ и параметра $t$ (см. [59, 27]) можно заключить, что $p(t, u, p_0)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая функция всех своих аргументов, а отсюда и из положительности $\frac{\partial p}{\partial p_0}$ следует, что этими же свойствами обладает и обратная ей функция $p_0(t, u, p)$.

Покажем, наконец, что для $\varphi(t, u, p) \equiv p_0(t, u, p)$ справедливо свойство (5.24), точнее, что

$$\left| \frac{\partial p_0(t, u, p)}{\partial t} \right| \Bigg|_{p=p(t, u, p_0)} \leqslant c_1 (1 + |p_0|). \tag{5.36}$$

Действительно, продифференцировав

$$p = p(t, u, p_0(t, u, p))$$

как тождество относительно независимых аргументов $t$, $u$ и $p$ по $t$, получим

$$0 = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t},$$

т. е.

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial t} \left( \frac{\partial p}{\partial p_0} \right)^{-1}. \tag{5.37}$$

Благодаря (5.23) производная $\frac{\partial p}{\partial t}$ удовлетворяет вдоль траектории $p = p(t, u, p_0)$ уравнению

$$\frac{d}{du} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{5.38}$$

и начальному условию

$$\frac{\partial p}{\partial t} \bigg|_{u=-M} = 0, \tag{5.39}$$

а так как в силу (5.15) и (5.31)

$$\left| \frac{\partial F}{\partial p} \right| \leqslant 6\mu + c, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| \leqslant 4\mu |p| + c \leqslant c_2 |p_0| + c_3,$$

где $c_2 = 4\mu e^{8\mu M}$, а $c_3 = c + ce^{8\mu M}$, то

$$\left| \frac{\partial p}{\partial t} \right| \leqslant \frac{c_2 |p_0| + c_3}{6\mu + c} e^{2(6\mu + c)M}.$$

Это вместе с (5.37) и (5.35) дает желаемое неравенство (5.36). Таким образом, мы показали, что $p_0(t, u, p)$ обладает всеми свойствами, которые требовались от функции $\varphi(t, u, p)$, а это, как показано выше, дает возможность оценить $\max\limits_{Q_T} |w|$, а потому и $\max\limits_{Q_T} |u_x|$ через известные нам величины. Лемма 5.1 доказана.

ГЛАВА VII

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе мы рассмотрим один класс систем дифференциальных уравнений второго порядка параболического типа, линейных и квазилинейных, и для него исследуем те же вопросы, что и для одного уравнения в предыдущих главах. Он выделен по следующему признаку: для таких систем справедлив принцип максимума в ослабленной форме. Именно, если из всех уравнений системы отбросить младшие члены, а в старших членах заморозить коэффициенты, то для модуля $|\mathbf{u}(x, t)|$ классических решений $\mathbf{u}(x, t)$ так упрощенной системы имеет место принцип максимума в той же форме, как и для уравнения теплопроводности. Все уравнения таких систем имеют одинаковые главные части. Оказывается, для этих систем справедливы все основные утверждения, установленные в предыдущих главах для одного уравнения (см. [$33_{15}$]). Мы докажем их, останавливаясь подробно лишь на тех местах, которые существенно отличают системы от одного уравнения.

§§ 8—10 содержат обзор основных результатов по исследованию общих краевых задач для линейных систем уравнений параболического типа.

## § 1. Обобщенные решения линейных систем

Рассмотрим в $Q_T$ системы вида

$$\mathbf{u}_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\,\mathbf{u}_{x_j} + A_i(x, t)\,\mathbf{u}\right) + B_i(x, t)\,\mathbf{u}_{x_i} + A(x, t)\,\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i} - \mathbf{f}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{u}(x, t)$, $\mathbf{f}_i(x, t)$, $\mathbf{f}(x, t)$ — $N$-мерные вектор-функции $(u^1, \ldots, u^N)$, $(f_i^1, \ldots, f_i^N)$, $(f^1, \ldots, f^N)$ соответственно, $A_i(x, t)$, $B_i(x, t)$, $A(x, t)$ — матрицы порядка $N \times N$ с элементами $a_i^{kl}(x, t)$, $b_i^{kl}(x, t)$, $a^{kl}(x, t)$ соответственно, а $a_{ij}(x, t)$ — скалярные функции.

Воспользуемся в этой главе обозначениями:

$$\mathbf{v}\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{N} v^k w^k, \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^2} = \sqrt{\mathbf{v}\mathbf{v}},$$

$$|\mathbf{v}_x|^2 = \mathbf{v}_x^2 = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} (v_{x_i}^k)^2,$$

$$|A| = \left(\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} |a^{kl}|^2\right), \qquad \|A\|_{q, r, Q_T} = \| \, |A| \, \|_{q, r, Q_T}.$$

Принадлежность вектор-функции к какому-либо пространству будет обозначать, что к этому пространству принадлежат все ее компоненты.

Будем считать, что для системы (1.1) справедливы неравенства

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu > 0, \tag{1.2}$$

при любых вещественных $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Условие (1.2) означает параболичность системы (1.1).

Для (1.1) рассмотрим первую краевую задачу т. е. задачу о нахождении функции $\mathbf{u}(x, t) = (u^1, \ldots, u^N)$, удовлетворяющей системе (1.1) и условиям

$$\mathbf{u}|_{S_T} = \psi(s, t), \tag{1.3$_1$}$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \psi_0(x). \tag{1.3$_2$}$$

Назовем обобщенным решением из $V_2(Q_T)$ $\left(\text{из } V_2^{1,0}(Q_T) \text{ или } V_2^{1, \frac{1}{2}}(Q_T)\right)$ задачи (1.1), (1.3) вектор-функцию $\mathbf{u}(x, t) \in V_2(Q_T)$ $\left(V_2^{1,0}(Q_T) \text{ или } V_2^{1, \frac{1}{2}}(Q_T)\right)$, удовлетворяющую условию (1.3$_1$) и такую, что для любой вектор-функции

$\eta(x, t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_\Omega \mathbf{u}(x, t)\,\eta(x, t)\,dx + \int_0^t \int_\Omega \left[-\mathbf{u}\eta_t + \left(a_{ij}\mathbf{u}_{x_j} + A_i\mathbf{u} + \mathbf{f}_i\right)\eta_{x_i} + \right.$$
$$\left. + \left(B_i\mathbf{u}_{x_i} + A\mathbf{u} + \mathbf{f}\right)\eta\right] dx\,dt - \int_\Omega \psi_0(x)\,\eta(x, 0)\,dx = 0 \qquad (1.4)$$

при почти всех (при всех) $t$ из $[0, T]$.

В этом параграфе мы остановимся на вопросе об однозначной разрешимости задачи (1.1), $(1.3_1)$, $(1.3_2)$ в пространстве $V_2^{1, \frac{1}{2}}(Q_T)$.

Как показано в § 2 главы I, для того чтобы сохранить основные свойства, присущие задаче в ее классической постановке, необходимо наложить на коэффициенты системы (1.1) некоторые дополнительные ограничения, которые мы будем по-прежнему формулировать в терминах принадлежности их некоторым пространствам $L_{q, r}(Q_T)$. Эти ограничения следующие:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i=1}^n |A_i|^2; \quad \sum_{i=1}^n |B_i|^2; \quad |A| \right\|_{q, r, Q_T} \leqslant \mu_1,\\
&\text{где } \frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = 1 \text{ и}\\
&q \in \left(\frac{n}{2}, \infty\right]; \quad r \in [1, \infty) \quad \text{при} \quad n \geqslant 2,\\
&q \in [1, \infty]; \quad r \in [1, 2] \quad \text{при} \quad n = 1,
\end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{f}_i \in L_2(Q_T), \quad \mathbf{f} \in L_{q_1, r_1}(Q_T),\\
&\text{где } \frac{1}{r_1} + \frac{n}{2q_1} = \frac{n+4}{4} \text{ и}\\
&q_1 \in \left[\frac{2n}{n+2}, 2\right], \quad r_1 \in [1, 2] \quad \text{при} \quad n \geqslant 3,\\
&q_1 \in (1, 2], \quad r_1 \in [1, 2) \quad \text{при} \quad n = 2,\\
&q_1 \in [1, 2], \quad r_1 \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \quad \text{при} \quad n = 1.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

В условиях (1.5) и втором из условий (1.6) показатели $q$ и $r$ можно считать разными для каждого из элементов матриц и каждой из компонент векторов, на которые эти условия накладываются, — ни одно из утверждений при этом, по существу, не изменится, лишь удлинятся их формулировки и доказательства.

Кроме того, будем для простоты считать $\psi(s, t) = 0$.

Так же как и для одного уравнения, для систем вида (1.1) справедлива теорема:

Теорема 1.1. *При выполнении условий* (1.2), (1.5), (1.6) *и при начальном условии* $\mathbf{u}|_{t=0} = \psi_0(x) \in L_2(\Omega)$ *система* (1.1) *имеет единственное обобщенное решение* $\mathbf{u}(x, t)$ *из* $\overset{\circ}{V}{}_2^{1, \frac{1}{2}}(Q_T)$. *Любое решение из* $\overset{\circ}{V}_2(Q_T)$ *принадлежит* $\overset{\circ}{V}{}_2^{1, \frac{1}{2}}(Q_T)$. *Если к тому же* $|B_i|^2$ *и* $|A|$ *принадлежат* $L^*_{r, q}(Q_T), r \geqslant q$, *а* $\mathbf{f} \in L^*_{r_1, q_1}(Q_T)$, $r_1 \geqslant q_1$, *то* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1, \frac{1}{2}}(Q_T)$.

Доказательство проводится точно так же, как и в случае одного уравнения, и основано на энергетической априорной оценке

$$|\mathbf{u}|^2_{Q_T} \leqslant c \left[ \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{f}_i\|^2_{2, Q_T} + \|\mathbf{f}\|^2_{q_1, r_1, Q_T} + \|\psi_0\|^2_{2, \Omega} \right], \tag{1.7}$$

имеющей место для произвольного обобщенного решения из $V_2(Q_T)$ задачи (1.1), (1.3$_1$), (1.3$_2$) с $\psi(s, t) \equiv 0$.

Постоянная $c$ в этом неравенстве определяется лишь $n$, $\nu$, $\mu$, нормами $\mu_1$ коэффициентов и показателями $q$ и $r$ в условиях (1.5).

Доказательство неравенства (1.7), по существу, не отличается от доказательства неравенства (2.2) в главе III: нужно только обычное умножение функций заменить скалярным умножением вектор-функций.

Единственность в $V_2(Q_T)$ сразу следует из неравенства (1.7), примененного к разности двух возможных решений, а существование может быть доказано, например, по методу Галёркина.

## § 2. Об ограниченности $\max\limits_{Q_T} |\mathbf{u}|$

В этом параграфе мы оценим максимум модуля решения $\mathbf{u}(x, t)$ системы (1.1). Для того чтобы это было возможно, согласно примерам главы I, необходимо наложить на коэффициенты (1.1) и правые части $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{f}$ дополнительные ограничения. Условия, при которых будет доказана ограниченность обобщенных решений из $V_2^{1,0}(Q_T)$, мы сформулируем так:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} |A_i|^2, \ \sum_{i=1}^{n} |B_i|^2, \ \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{f}_i|^2, \ |A|, \ |\mathbf{f}| \right\|_{q,r,Q_T} \leqslant \mu_1, \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{где } \dfrac{1}{r}+\dfrac{n}{2q}=1-\varkappa_1, \text{ причем} \\ q\in\left[\dfrac{n}{2(1-\varkappa_1)}, \infty\right], \quad r\in\left[\dfrac{1}{1-\varkappa_1}, \infty\right], \\ \qquad\qquad 0<\varkappa_1<1, \quad \text{при} \quad n\geqslant 2, \\ q\in[1,\infty], \quad r\in\left[\dfrac{1}{1-\varkappa_1}, \dfrac{2}{1-2\varkappa_1}\right], \\ \qquad\qquad 0<\varkappa_1<\dfrac{1}{2}, \quad \text{при} \quad n=1. \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

Числа $q$ и $r$ для каждого из элементов векторов $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{f}$ и для каждого элемента матриц $A_i$, $B_i$ и $A$ в условиях (2.1) можно было бы считать различными. Достаточно только, чтобы они были подчинены условию (2.2). Для простоты будем считать, что $\mathbf{u}|_{S_T}=0$. Основная идея получения оценки $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}|$ та же, что и для одного уравнения в § 7 главы III. Однако ее реализация для системы осложнена тем, что наши априорные предположения о решении (что $\mathbf{u}\in V_2^{1,0}(Q_T)$) не дают возможности провести ее в том же виде, как для одного уравнения. Поясним это. Для одного уравнения неравенства, лежащие в основе определения класса $\mathfrak{A}(Q_T, \ldots)$ и позволяющие тем самым делать заключения об ограниченности $u$, получались из основного интегрального тождества, которому удовлетворяет решение $u$, при функции $\eta(x, t)$, равной $u^{(k)}(x,t)=\max\{u(x,t)-k; 0\}$. Для системы подобные же неравенства получаются из тождества (1.4), если в нем взять вектор-функцию $\boldsymbol{\eta}(x, t)$, равной $\mathbf{u}(x,t)\max\{v(x,t)-k;\ 0\}$, где $v(x,t)=\mathbf{u}^2(x,t)$. Однако мы не вправе это делать, если нам не известна заранее, например, ограниченность $|\mathbf{u}|$ или хотя бы принадлежность $\mathbf{u}^2$ к $V_2^{1,0}(Q_T)$. Ввиду этого функцию $\boldsymbol{\eta}$ приходится брать в более сложном виде, вводя подрезания $v(x, t)$ на больших значениях $|\mathbf{u}(x, t)|$. Кроме этого, надо, как везде, в качестве промежуточного этапа проводить сглаживание по $t$. Покажем, как это сделать.

Во-первых, заметим, что, так же как и для одного уравнения, из тождества (1.4) следует тождество

$$\int\limits_{Q_{t_1}} \left[\mathbf{u}_{ht}\boldsymbol{\eta} + \left(a_{ij}\mathbf{u}_{x_j} + A_i\mathbf{u} + \mathbf{f}_i\right)_h \boldsymbol{\eta}_{x_i} + \right.$$
$$\left. + \left(B_i\mathbf{u}_{x_i} + A\mathbf{u} + \mathbf{f}\right)_h \boldsymbol{\eta}\right] dx\, dt = 0 \quad (2.3)$$

с любой вектор-функцией $\boldsymbol{\eta}$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ и $t_1 \leqslant T - h$ (см. § 2 главы III). В нем $(\;)_h$ означает усреднение по $t$ (см. (2.10) главы III). Положим в (2.3)

$$\boldsymbol{\eta}(x, t) = 2\mathbf{u}_h(x, t)\max\left\{v_M^h(x, t) - k;\ 0\right\} \equiv 2\mathbf{u}_h v_M^{h(k)},$$

где $\mathbf{u}_h(x, t)$ — усреднение $\mathbf{u}$ по $t$, $v(x, t) = \mathbf{u}^2(x, t)$, $v^h = (\mathbf{u}_h)^2$, функция $v_M^h(x, t)$ равна $v^h(x, t)$ при $v^h(x, t) < M$ и равна $M$ при $v^h(x, t) \geqslant M$, а $k$ — произвольное неотрицательное число. Получаемый при этом первый член преобразуем согласно равенству

$$2\mathbf{u}_{ht}\mathbf{u}_h v_M^{h(k)} = v_t^h v_M^{h(k)} = \frac{\partial}{\partial t}\left(v^{h(k)} v_M^{h(k)}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(v_M^{h(k)}\right)^2, \quad (2.4)$$

которое проверяется непосредствеьно, исходя из определения функций $v^h$, $v^{h(k)}$ и $v_M^{h(k)}$. Подставив правую часть (2.4) вместо $\mathbf{u}_{ht}\boldsymbol{\eta}$ в (2.3) и выполнив в этих членах интегрирование по $t$, перейдем затем во всех интегралах (2.3) к пределу по $h \to 0$. Это, как нетрудно проверить (см. главу III), допустимо и приводит к соотношению

$$\int\limits_{\Omega} v^{(k)} v_M^{(k)}\, dx\,\Big|_0^{t_1} - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(v_M^{(k)}\right)^2 dx\,\Big|_0^{t_1} +$$
$$+ 2\int\limits_{Q_{t_1}(k)} \left[\left(a_{ij}\mathbf{u}_{x_j} + A_i\mathbf{u} + \mathbf{f}_i\right)\left(\mathbf{u}v_M^{(k)}\right)_{x_i} + \right.$$
$$\left. + \left(B\mathbf{u}_{x_i} + A\mathbf{u} + \mathbf{f}\right)\mathbf{u}v_M^{(k)}\right] dx\, dt = 0, \quad (2.5)$$

где через $Q_{t_1}(k)$ обозначено множество точек $(x, t)$ цилиндра $Q_{t_1}$, в которых $v_M(x, t) > k$. Для оценки различных членов (2.5) используем следующие неравенства:

$$a_{ij}\mathbf{u}_{x_j}\left(\mathbf{u}v_M^{(k)}\right)_{x_i}=a_{ij}\mathbf{u}_{x_j}\mathbf{u}_{x_i}v_M^{(k)}+\frac{1}{2}a_{ij}v_{x_j}v_{Mx_i}^{(k)}\geqslant$$
$$\geqslant \nu\mathbf{u}_x^2v_M^{(k)}+\frac{\nu}{2}\left(v_{Mx}^{(k)}\right)^2,$$

$$2\left|A_i\mathbf{u}\left(\mathbf{u}v_M^{(k)}\right)_{x_i}\right|\leqslant 2|A_i|\left(|\mathbf{u}|\,|\mathbf{u}_{x_i}|\,v_M^{(k)}+\sqrt{vv_M}\,|v_{Mx_i}^{(k)}|\right)\leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\mathbf{u}_x^2v_M^{(k)}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^n|A_i|^2vv_M^{(k)}+\varepsilon\left(v_{Mx}^{(k)}\right)^2+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^n|A_i|^2vv_M,$$

$$2\left|\mathbf{f}_i\left(\mathbf{u}v_M^{(k)}\right)_{x_i}\right|\leqslant 2|\mathbf{f}_i|\left(|\mathbf{u}_{x_i}|\,v_M^{(k)}+\sqrt{v_M}\,|v_{Mx_i}^{(k)}|\right)\leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\mathbf{u}_x^2v_M^{(k)}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^n|\mathbf{f}_i|^2v_M^{(k)}+\varepsilon\left(v_{Mx}^{(k)}\right)^2+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^n|\mathbf{f}_i|^2v_M\leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\mathbf{u}_x^2v_M^{(k)}+\varepsilon\left(v_{Mx}^{(k)}\right)^2+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^n|\mathbf{f}_i|^2(vv_M+1),$$

$$2\left|B_i\mathbf{u}_{x_i}\mathbf{u}v_M^{(k)}\right|\leqslant 2|B_i|\left|\mathbf{u}_{x_i}\sqrt{v_M^{(k)}}\right|\left|\mathbf{u}\sqrt{v_M^{(k)}}\right|\leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\mathbf{u}_x^2v_M^{(k)}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^n|B_i|^2vv_M^{(k)},$$

$$2\left|A\mathbf{u}\mathbf{u}v_M^{(k)}\right|\leqslant 2|A|\,|vv_M^{(k)}|,$$

$$2\left|\mathbf{f}\mathbf{u}v_M^{(k)}\right|\leqslant 2|\mathbf{f}|\,|\mathbf{u}|\,v_M^{(k)}\leqslant 2|\mathbf{f}|\left(vv_M\right)^{\frac{3}{4}}\leqslant 2|\mathbf{f}|\left(vv_M+1\right).$$

В них мы учитывали, что $v^mv_{Mx_i}^{(k)}=v_M^mv_{Mx_i}^{(k)}$ при любом $m$ и $v_M\leqslant v$.

В силу этих оценок из (2.5) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\int_\Omega v^{(k)}v_M^{(k)}\,dx\Big|^{t_1}+\nu\int_{Q_{t_1}(k)}\left[2\mathbf{u}_x^2v_M^{(k)}+\left(v_{Mx}^{(k)}\right)^2\right]dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega\left(v^{(k)}\right)^2dx\Big|^{t=0}+\int_{Q_{t_1}(k)}\Bigg[3\varepsilon\mathbf{u}_x^2v_M^{(k)}+2\varepsilon\left(v_{Mx}^{(k)}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\Bigg(2\sum_{i=1}^n|A_i|^2+\sum_{i=1}^n|B_i|^2+2\varepsilon|A|+$$
$$+\sum_{i=1}^n|\mathbf{f}_i|^2+2\varepsilon|\mathbf{f}|\Bigg)(vv_M+1)\Bigg]dx\,dt, \qquad (2.6)$$

из которого в свою очередь при $\varepsilon = \frac{\nu}{4}$ получим

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} v^{(k)} v_M^{(k)}\, dx \Big|^{t_1} + \frac{\nu}{2} \int\limits_{Q_{t_1}(k)} \left[2\mathbf{u}_x^2 v_M^{(k)} + \left(v_{Mx}^{(k)}\right)^2\right] dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (v^{(k)})^2\, dx \Big|^{t=0} + \int\limits_{Q_{t_1}(k)} \mathfrak{D}(v v_M + 1)\, dx\, dt, \qquad (2.7)$$

где

$$\mathfrak{D} = \frac{4}{\nu}\left(2\sum_{i=1}^{n} |A_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |B_i|^2 + \frac{\nu}{2}|A| + \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{f}_i|^2 + \frac{\nu}{2}|\mathbf{f}|\right),$$

а из (2.7) неравенство

$$\nu_1 \left\{ \max_{0 \leqslant t \leqslant t_1} \int\limits_{\Omega} v^{(k)} v_M^{(k)}\, dx + \int\limits_{Q_{t_1}(k)} \left[2\mathbf{u}_x^2 v_M^{(k)} + \left(v_{Mx}^{(k)}\right)^2\right] dx\, dt \right\} \leqslant$$
$$\leqslant \| v^{(k)}(x, 0)\|_{2, \Omega}^2 + 2 \int\limits_{Q_{t_1}(k)} \mathfrak{D}(v v_M + 1)\, dx\, dt \leqslant \| v^{(k)}(x, 0)\|_{2, \Omega}^2 +$$
$$+ 2 \|\mathfrak{D}\|_{q, r, Q_{t_1}(k)} \left( \|\sqrt{v v_M}\|_{\bar q, \bar r, Q_{t_1}(k)}^2 + \|1\|_{\bar q, \bar r, Q_{t_1}(k)}^2 \right), \qquad (2.8)$$

в котором $\nu_1 = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right\}$, а $\bar q = \frac{2q}{q-1}$, $\bar r = \frac{2r}{r-1}$. Из него при $k = 0$ и $t_1 = T$ в силу неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sqrt{v v_M}\right)_{x_i}\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4 v v_M} \left(v_{x_i} v_M + v v_{M x_i}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2 v v_M} \left(v_x^2 v_M^2 + v^2 v_{Mx}^2\right) \leqslant \mathbf{u}_x^2 v_M + \frac{1}{2} v_{Mx}^2 \qquad (2.9)$$

и того, что $v^{(0)} = v$, следует

$$\nu_1 \left|\sqrt{v v_M}\right|_{Q_{t_1}}^2 \leqslant \|v(x, 0)\|_{2, \Omega}^2 +$$
$$+ 2 \|\mathfrak{D}\|_{q, r, Q_{t_1}} \left( \|\sqrt{v v_M}\|_{\bar q, \bar r, Q_{t_1}}^2 + \|1\|_{\bar q, \bar r, Q_{t_1}}^2 \right). \qquad (2.10)$$

Это неравенство имеет тот же характер, что и неравенство (7.8) главы III при каком-нибудь фиксированном $k$. Из него, оценивая правую часть так же, как в § 7 главы III (см.

формулы (7.9) — (7.11)), заключим о равномерной (по $M$) ограниченности интеграла $\left|\sqrt{vv_M}\right|_{Q_{t_1}}$, а следовательно и интеграла $|v|_{Q_{t_1}}$, если только высота $t_1$ не превосходит некоторого числа $\tau$ (см. условие типа (7.13)). Повторяя рассуждение для цилиндров $Q_{\tau, 2\tau} = \Omega \times (\tau, 2\tau)$, $Q_{2\tau, 3\tau} = \Omega \times (2\tau, 3\tau)$ и т. д., мы в конечное число шагов исчерпаем весь цилиндр $Q_T$ и убедимся, что интеграл $|v|_{Q_T}$ не превосходит некоторой постоянной, которую нетрудно подсчитать по величинам $n$, $\nu$, $\mu_1$, $r$, $q$, $\operatorname{mes}\Omega$ и $T$.

После этого вернемся к неравенству (2.8) с произвольным $k \geqslant 0$. Его правая часть при любом $M \geqslant 0$ не превосходит

$$\|v^{(k)}(x, 0)\|_{2, \Omega}^2 + 2\|\mathfrak{D}\|_{q, r, Q_{t_1}(k)}\left(\|v\|^2_{\bar q, \bar r, Q_{t_1}(k)} + \|1\|^2_{\bar q, \bar r, Q_{t_1}(k)}\right),$$

а супремум левой части по $M \in [0, \infty)$ есть

$$\nu_1\left\{\max_{0 \leqslant t \leqslant t_1}\|v^{(k)}(x, t)\|_{2, \Omega}^2 + \int\limits_{Q_{t_1}(k)}\left[2u_x^2 v^{(k)} + \left(v_x^{(k)}\right)^2\right] dx\, dt\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \nu_1 |v^{(k)}|^2_{Q_{t_1}}.$$

Поэтому

$$\nu_1 |v^{(k)}|^2_{Q_{t_1}} \leqslant \|v^{(k)}(x, 0)\|^2_{2, \Omega} +$$
$$+ 2\|\mathfrak{D}\|_{q, r, Q_{t_1}(k)}\left(\|v\|^2_{\bar q, \bar r, Q_{t_1}(k)} + \|1\|^2_{\bar q, \bar r, Q_{t_1}(k)}\right). \tag{2.11}$$

Для $k \geqslant \hat{k} = \max\limits_{x \in \Omega} v(x, 0) + 1$ мы получаем из (2.11) неравенство

$$\nu_1 |v^{(k)}|^2_{Q_{t_1}} \leqslant 6\|\mathfrak{D}\|_{q, r, Q_{t_1}(k)}\left(\|v - k\|^2_{\bar q, \bar r, Q_{t_1}(k)} + \|k\|^2_{\bar q, \bar r, Q_{t_1}(k)}\right) \tag{2.12}$$

по существу, совпадающие с неравенством (7.8) главы III, из которого в § 7 была выведена ограниченность сверху входящей в него функции $u$. В нашем случае это дает ограниченность $v$ в $Q_{t_1}$ и оценку для $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_{t_1}} v$ через $\hat{k}$ и известные из условий (1.2), (2.1), (2.2) параметры, если только $t_1$ не превосходит $\tau$. Повторяя рассуждение для цилиндров

$Q_{\tau,2\tau}$, $Q_{2\tau,3\tau}$ и т. д., мы получим желаемую оценку $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T} v$, а следовательно и $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}|$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbf{u}(x, t)$ *есть обобщенное решение из* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *системы* (1.1), *равное нулю на* $S_T$ *) *и ограниченное при* $t=0$, *и пусть для системы* (1.1) *выполнены условия* (1.2), (2.1), (2.2). *Тогда* $\mathbf{u}(x, t)$ *есть ограниченная в* $Q_T$ *функция, и ее* $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}|$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $n$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{x\in\Omega}|\mathbf{u}(x, 0)|$, $T$, $\operatorname{mes}\Omega$ *и параметров* $\nu$, $\mu_1$, $q$ *и* $r$ *из условий* (1.2), (2.1).

При условиях (1.2), (2.1), (2.2) произвольное обобщенное решение $\mathbf{u}$ системы (1.1), принадлежащее $V_2^{1,0}(Q_T)$ (в силу теоремы 1.1 и любое решение из $V_2(Q_T)$), будет ограниченной функцией в любой подобласти $Q'\subset Q_T$, отстоящей на положительное расстояние от той части $\Gamma'\subset\Gamma_T$, на которой ограниченности $\mathbf{u}$ нет. Сформулируем это в виде теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть для системы* (1.1) *выполнены условия* (1.2), (2.1), (2.2). *Тогда для любого ее обобщенного решения* $\mathbf{u}$ *из* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *величина* $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q'}|\mathbf{u}|$, *где* $Q'$ — *подобласть* $Q_T$, *отстоящая от* $\Gamma_T$ *на положительное расстояние* $d$, *не превосходит некоторой постоянной, определяемой лишь* $n$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$ *и* $r$ *из условий* (1.2), (2.1), *нормой* $\|\mathbf{u}\|_{2,Q_T}$ *и* $d$. *Если же* $\operatorname{vrai}\max\limits_{x\in\Omega}|\mathbf{u}(x, 0)| = M_0<\infty$, *то конечен* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'\times[0,T]}|\mathbf{u}|$ *и оценивается сверху постоянной, определяемой* $M_0$ *и теми же, что и выше, величинами, только роль* $d$ *на этот раз будет играть расстояние от* $\Omega'$ *до* $S$.

Доказывается теорема 2.2 в основном так же, как теорема 2.1. Видоизменения рассуждений, связанные с необхо-

---

*) Предположение о равенстве $\mathbf{u}(x, t)$ нулю на $S_T$ несущественно, его можно заменить предположением об ограниченности $\mathbf{u}|_{S_T}$.

димостью введения срезающей функции, аналогичны тем, которые были даны в случае одного уравнения (см. § 8 главы III). Мы их повторять здесь не будем, полагая, что читатель это сможет сделать самостоятельно.

## § 3. Оценка $|\mathbf{u}|_{Q_T}^{(\alpha)}$

Покажем, что при выполнении неравенств (1.2), (2.1), (2.2) можно оценить не только $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}|$, но и нормы Гёльдера для каждой компоненты $\mathbf{u}$ с некоторым положительным показателем $\alpha > 0$. Для этого достаточно доказать, что ограниченные обобщенные решения системы (1.1) из $V_2^{1,0}(Q_T)$ принадлежат классу $\mathfrak{B}_2^{2N}(\overline{Q}_T, M_1, \delta_1, \ldots, \delta_6, \gamma, \widehat{r}, \delta, \varkappa)$. Пусть $\mathbf{u}(x, t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$ и $\operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}(x, t)| = M < \infty$. Ради простоты будем считать, что $0 \leqslant u^l(x, t) < 1$, $l = 1, \ldots, N$. Этого легко можно добиться, вводя в (1.1) вместо $u^l(x, t)$ функции $\widehat{u}^l(x, t) = \frac{u^l + M}{2M}$. Предположим, что это уже сделано.

В качестве функций $\varphi^l(\mathbf{u})$ для $\mathbf{u}(x, t)$ возьмем функции

$$\varphi_+^l(\mathbf{u}) = 10Nu^l + \sum_{i=1}^N (u^i)^2,$$

$$\varphi_-^l(\mathbf{u}) = 10N(1 - u^l) + \sum_{i=1}^N (u^i)^2.$$

В силу леммы 9.3 главы II достаточно проверить, что функции $w_\pm^l(x, t) = \varphi_\pm^l(\mathbf{u}(x, t))$ удовлетворяют условиям 3) и 4), входящим в определение класса $\mathfrak{B}_2^{2N}(\overline{Q}_T, M_1, \delta_1, \ldots, \delta_6, \gamma, \delta, \widehat{r}, \varkappa)$.

Для этого положим в тождестве (2.3) $\eta = 5N\Phi(x, t)\,\mathbf{e}^{(l)}$ и $\eta = u_h(x, t)\Phi(x, t)$ и сложим полученные тождества. Здесь $\Phi(x, t)$ — произвольная ограниченная функция из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$, а $\mathbf{e}^{(l)}$ есть вектор, у которого компонента, стоящая на месте $l$, равна 1, а остальные — нулю. Это даст

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega \mathbf{u}_{ht}(5N\mathbf{e}^{(l)}\Phi+\mathbf{u}_h\Phi)\,dx\,dt+$$
$$+\int_0^{t_1}\int_\Omega \Big[\big(a_{ij}\mathbf{u}_{x_j}+A_i\mathbf{u}+\mathbf{f}_i\big)_h(5N\mathbf{e}^{(l)}\Phi+\mathbf{u}_h\Phi)_{x_i}+$$
$$+\big(B_i\mathbf{u}_{x_i}+A\mathbf{u}+f\big)_h(5N\mathbf{e}^{(l)}\Phi+\mathbf{u}_h\Phi)\Big]\,dx\,dt=0. \qquad (3.1)$$

Затем положим $\Phi(x,\ t)=2\zeta^2\max\left\{w_+^{hl}(x,\ t)-k;\ 0\right\}\equiv\equiv 2w_+^{hl\,(k)}(x,\ t)\zeta^2$, где $k$ — некоторое число, $\zeta^2(x,\ t)$ — гладкая функция, неотрицательная в некотором строго внутреннем цилиндре $Q(\rho,\ \tau)=K_\rho\times(t_0-\tau,\ t_0)$ и равная нулю при при $x\,\overline{\in}\,K_\rho$, а

$$w_+^{hl}=10Nu_h^l+|\,\mathbf{u}_h|^2.$$

Вычтем полученное равенство с $t_1=t_0-\tau$ из такого же равенства с $t_1=t_0$. В результате мы будем иметь для первого слагаемого

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\left[w_+^{hl\,(k)}\zeta\right]^2dx\,\Big|_{t_0-\tau}^{t_0}-\int_{Q(\rho,\ \tau)}\zeta\zeta_t\left[w_+^{hl\,(k)}\right]^2dx\,dt.$$

Учитывая это преобразование, перейдем к пределу при $h\to 0$. Будем вместо $w_+^l(x,\ t)$ в дальнейшем писать просто $w(x,\ t)$. В результате предельного перехода получим

$$\frac{1}{2}\int_{A_{k,\,\rho}(t)}[w^{(k)}(x,\ t)\zeta(x,\ t)]^2\,dx\,\Big|_{t_0-\tau}^{t_0}+$$
$$+\int_{Q(\rho,\ \tau)}\left(2a_{ij}\mathbf{u}_{x_i}\mathbf{u}_{x_j}w^{(k)}\zeta^2+a_{ij}w^{(k)}_{x_i}w^{(k)}_{x_j}\zeta^2\right)dx\,dt=$$
$$=\int_{Q(\rho,\ \tau)}\Big\{(w^{(k)})^2\zeta\zeta_t-2a_{ij}w^{(k)}_{x_j}w^{(k)}\zeta\zeta_{x_i}-$$
$$-(A_i\mathbf{u}+\mathbf{f}_i)\big[2\mathbf{u}_{x_i}w^{(k)}\zeta^2+(10N\mathbf{e}^{(l)}+2\mathbf{u})\,w^{(k)}_{x_i}\zeta^2+$$
$$+2\,(10N\mathbf{e}^{(l)}+2\mathbf{u})\,w^{(k)}\zeta\zeta_{x_i}\big]-$$
$$-\big(B_i\mathbf{u}_{x_i}+A\mathbf{u}+\mathbf{f}\big)(10N\mathbf{e}^{(l)}+2\mathbf{u})\,w^{(k)}\zeta^2\Big\}\,dx\,dt. \qquad (3.2)$$

Левая часть (3.2) оценивается снизу выражением

$$\frac{1}{2}\int\limits_{A_{k,\rho}(t)}[w^{(k)}(x,t)\zeta(x,t)]^2\,dt\Big|_{t_0-\tau}^{t_0}+$$

$$+2\nu\int\limits_{Q(\rho,\tau)}\left[u_x^2 w^{(k)}\zeta^2+\frac{1}{2}\left(w_x^{(k)}\right)^2\right]dx\,dt.$$

Здесь и выше $A_{k,\rho}(t)=\{x\in K_\rho : w(x,t)>k\}$. Все слагаемые правой части оцениваются через второе и третье слагаемые левой части (3.2) и через

$$\int\limits_{Q(\rho,\tau)}(w^k)^2\zeta_x^2\,dx\,dt,\qquad \int\limits_{Q(\rho,\tau)}(w^{(k)})^2|\zeta||\zeta_t|\,dx\,dt,\quad \mu^{\frac{2}{\hat r}(1+\varkappa)}(k,\rho,\tau),$$

где $\mu(k,\rho,\tau)=\int\limits_{t_0-\tau}^{t_0}[\operatorname{mes}A_{k,\rho}(t)]^{\frac{\hat r}{\hat q}}\,dt,\qquad \hat q=\frac{2q}{q-1}(1+\varkappa),$

$\hat r=\frac{2r}{r-1}(1+\varkappa)$, а $\varkappa=\frac{2\varkappa_1}{n}$.

В силу (2.2) параметры $\hat q$ и $\hat r$ подчиняются условиям (3.3) главы II. Оценки проводятся почти так же, как и при доказательстве ограниченности $v(x,t)$ в § 2 *). В некотором смысле они даже проще, так как нам уже известна ограниченность $u(x,t)$. В результате мы получаем из (3.2) неравенства

$$\int\limits_{A_{k,\rho}(t_0)}[w^{(k)}(x,t_0)\zeta(x,t_0)]^2\,dx+\nu\int\limits_{Q(\rho,\tau)}[w^{(k)}\zeta]^2\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{A_{k,\rho}(t_0-\tau)}(w^{(k)}\zeta)^2\,dx+$$

$$+\gamma\left[\max_{Q(\rho,\tau)}(|\zeta_x|^2+|\zeta_t|)\int\limits_{Q(\rho,\tau)}(w^{(k)})^2\,dx\,dt+\mu^{\frac{2}{\hat r}(1+\varkappa)}(k,\rho,\tau)\right]\tag{3.3}$$

при $\rho\leqslant\rho_0$ или $\tau\leqslant\tau_0$, любых $k$ с постоянной $\gamma$, определяе-

---

*) Они весьма близки также к оценкам § 10 главы III. Ввиду этого мы излагаем их конспективно.

мой лишь $n$, $M$, $\nu^{-1}$, $\mu$, показателями $q$ и $r$ и нормами известных функций из условий (2.1). Такие же неравенства имеют место и для $w = w^l_-$. Неравенства (3.3) означают выполнение условия 3) из определения класса $\mathfrak{B}_2^{2N}(Q_T, \ldots)$. Тем самым принадлежность $\mathfrak{u}(x, t)$ к $\mathfrak{B}_2^{2N}(Q_T, \ldots)$ доказана.

В силу теоремы 9.1 главы II $\mathfrak{u}$ будет принадлежать $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ с некоторым $\alpha > 0$ и нормы $|\mathfrak{u}|^{(\alpha)}_{Q'}$ для любой строго внутренней подобласти $Q' \subset Q_T$ оцениваются через известные нам величины и расстояния $Q'$ до $\Gamma_T$. Чтобы получить оценку нормы Гёльдера $\mathfrak{u}$ во всем цилиндре $Q_T$, надо получить неравенства (3.3) при $k \geqslant \max\limits_{Q(\rho, \tau) \cap \Gamma_T} w(x, t)$ для $w = w^l_\pm$ и в цилиндрах $Q(\rho, \tau)$, пересекающих поверхность $\Gamma_T$. Такие неравенства действительно имеют место, и их вывод точно такой же, как и проведенный выше вывод неравенств (3.3), ибо функция

$$\Phi(x, t) = w^{(k)}(x, t)\,\zeta^2(x, t) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1, 0}(Q_T)$$

при любой гладкой функции $\zeta(x, t)$, равной нулю в окрестности боковой поверхности некоторого кругового цилиндра $Q(\rho, \tau)$, пересекающего границу $\Gamma_T$, а только это и нужно знать о $\Phi(x, t)$ для вывода неравенства (3.3).

Значит, $\mathfrak{u}(x, t)$ принадлежит классу $\mathfrak{B}_2^{2N}(Q_T \cup \Gamma_T, \ldots)$ и, следовательно, имеет место

Теорема 3.1. *Пусть для системы* (1.1) *выполнены условия* (1.2), (2.1), (2.2). *Тогда любое ограниченное обобщенное решение* $\mathfrak{u}(x, t)$ *системы* (1.1) *из* $V_2^{1, 0}(Q_T)$ *принадлежит* $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ *с некоторым* $\alpha > 0$ *и норма* $|\mathfrak{u}|^{(\alpha)}_{Q'}$, *где* $Q'$ — *произвольная, строго внутренняя подобласть* $Q'_T$, *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $n$, $M = \operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T}|\mathfrak{u}|$, $N$, *от величин* $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$, $r$ *из условий* (1.2), (2.1) *и* (2.2) *и расстояния* $Q'$ *до* $\Gamma_T$. *Если же* $S$ *удовлетворяет условию* ($A$) *и* $\mathfrak{u}|_{S_T} \in H^{\beta, \frac{\beta}{2}}(\Gamma_T)$, *то* $\mathfrak{u} \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$ *и* $|\mathfrak{u}|^{(\alpha)}_{Q_T}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $n$, $N$, $M$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$, $q$, *и* $r$ *из* (1.2), (2.1), (2.2), $\beta$, $|\mathfrak{u}|^{(\beta)}_{\Gamma_T}$

*и постоянных* $a_0$ *и* $\theta_0$, *входящих в формулировку условия* (A). *Число* $\alpha > 0$ *определяется в обоих случаях значениями* $n$, $N$, $\nu$, $\mu$, $\mu_1$ $\beta$, *нормами известных функций и показателями* $q$ и $r$ из условий (2.1).

## § 4. Об оценках $|\mathbf{u}_x|_{Q'}^{(\alpha)}$ и других старших норм решений

В §§ 2 и 3 мы показали, что если коэффициенты и свободные члены системы обладают несколько более хорошими свойствами, чем свойства, перечисленные в § 1, то любое обобщенное решение системы класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ будет непрерывной в смысле Гёльдера функцией $(x, t)$. Дальнейшее улучшение свойств коэффициентов и свободного члена системы влечет и дальнейшее увеличение гладкости всех ее обобщенных решений, причем вид этой зависимости такой же, как и для одного уравнения в главе III. Мы остановимся лишь на получении априорной оценки для $|\mathbf{u}_x|_{Q'}^{(\alpha)}$. Все остальные предложения доказываются или так же, как для одного уравнения, или даже следуют из соответствующих предложений, установленных нами в главах III и IV для одного уравнения. Оценка $|\mathbf{u}_x|_{Q_T}^{(\alpha)}$ для всей области $Q_T$ будет доказана в следующем параграфе сразу для квазилинейных уравнений. Для линейного случая данное там доказательство допускает, естественно, ряд упрощений.

Итак, пусть коэффициенты и свободные члены системы удовлетворяют, помимо (1.2), условиям:

$$\left\| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}, \ |A_i|, \left|\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right|, \ |B_i|, \ |A|, \ \mathbf{f}_i, \ \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i}, \ \mathbf{f} \right\|_{2q,\, 2r,\, Q_T} \leqslant \mu_1, \tag{4.1}$$

в которых числа $q$ и $r$ такие же, как в (2.2). Относительно решения $\mathbf{u}$ предположим, что оно ограничено и его производные $\mathbf{u}_x$ суть элементы $V_2^{1,0}(Q_T)$. Покажем, что оценка $|\mathbf{u}_x|_{Q'}^{(\alpha)}$ может быть получена на основании теорем 2.2 и 3.1, установленных в этой главе. Для этого убедимся, что вектор-функция $\mathrm{U} = \left(u_{x_1}^1, u_{x_2}^1, \ldots, u_{x_n}^N\right)$ может быть рассмотрена как обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ системы вида (1.1), коэффициенты и свободные члены которой удовлетворяют условиям теорем 2.2, 3.1.

Возьмем в интегральном тождестве (1.4) $\eta(x, t)=\xi_{x_k}(x, t)$, где $\xi(x, t)$ — произвольная функция из $W_2^{2,1}(Q_T)$, равная нулю вместе с первыми производными по $x$ на $S_T$, и затем в первом, втором, третьем и последнем членах проведем интегрирование по частям, перенося производную $\frac{\partial}{\partial x_k}$ со второго множителя на первый. После этого равенства, полученные при $k=1, \ldots, n$, сложим и результат запишем в виде тождества для $\mathbf{U}$ и $\Xi=(\xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \xi_n^N)$:

$$\int_\Omega \mathbf{U}(x, t)\,\Xi(x, t)\,dx+\int_0^t\int_\Omega\left[-\mathbf{U}\Xi_t+\right.$$
$$\left.+\left(a_{ij}\mathbf{U}_{x_j}+\hat{A}_i\mathbf{U}+\mathbf{F}_i\right)\Xi_{x_i}\right]dx\,dt-$$
$$-\int_\Omega \psi_{0x_k}^l\xi_k^l(x, 0)\,dx=0, \tag{4.2}$$

в котором $\hat{A}_i$ — матрицы с элементами

$$a_i^{dk,lj}=\delta_i^k b_j^{dl}+a_i^{dl}\delta_j^k+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\delta_d^l, \tag{4.3}$$
$$i, j, k=1, \ldots, n; \quad d, l=1, \ldots, N,$$

а $\mathbf{F}_i$ — векторы с компонентами

$$\mathbf{F}_i^{d,k}=\delta_i^k\left(f^d+a^{dl}u^l\right)+\frac{\partial f_i^d}{\partial x_k}+\frac{\partial a_i^{dl}}{\partial x_k}u^l,$$
$$i, k=1, \ldots, n; \quad d=1, \ldots, N.$$

Тождество (4.2) справедливо, как нетрудно видеть, для любой функции $\Xi$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$. Из него следует, что $\mathbf{U}$ есть обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ системы

$$\mathbf{U}_t-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\mathbf{U}_{x_j}+\hat{A}_i\mathbf{U}+\mathbf{F}_i\right)=0, \tag{4.4}$$

являющейся частным случаем систем вида (1.1). В силу предположения (1.2) и (4.1), а также в силу уже известной ограниченности $|\mathbf{u}(x, t)|$ для системы (4.4) выполнены условия теорем 2.1 и 3.1, а потому справедливы и их заключения об ограниченности $|\mathbf{U}|_{Q'}^{(\alpha)}$. Таким образом, доказана

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (1.2), (4.1) *и пусть* $\mathbf{u}$ *есть обобщенное решение системы* (1.1) *из* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *такое, что* $\mathbf{u}_{x_k} \in V_2^{1,0}(Q_T)$ *при всех* $k = 1, \ldots, n$. *Тогда* $\mathbf{u}_x \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$, $\alpha > 0$, *причем нормы* $|\mathbf{u}_x|_{Q'}^{(\alpha)}$, $Q' = \Omega' \times (\varepsilon, T)$, $\varepsilon > 0$, *оцениваются сверху постоянной, определяемой лишь нормой* $\|\mathbf{u}\|_{2, Q_T}$, $n$, $N$, $\nu$ *и* $\mu$ *из условия* (1.2), *нормами коэффициентов и показателями* $q$ *и* $r$ *из условия* (4.1), $\varepsilon$ *и расстоянием* $\Omega'$ *до* $S$. *Если же известно, что* $\mathbf{u}(x, 0) \in H^{1+\beta}(\Omega)$, *то* $\mathbf{u}_x \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\Omega \times [0, T])$, $0 < \alpha \leqslant \beta$, *причем норма* $|\mathbf{u}_x|_{Q'_T}^{(\alpha)}$, $Q'_T = \Omega' \times [0, T]$ *оценивается сверху постоянной, определяемой* $\beta$, *нормой* $|\mathbf{u}(x, 0)|_{\Omega}^{(1+\beta)}$ *и указанными выше величинами, кроме* $\varepsilon$.

*Показатель* $\alpha$ *в обоих случаях определяется теми же величинами, что и* $|\mathbf{u}_x|^{(\alpha)}$, *кроме* $\|\mathbf{u}\|_{2, \Omega}$, $d$, $\varepsilon$ *и* $|\mathbf{u}(x, 0)|_{\Omega}^{(1+\beta)}$.

После того как получена оценка для $|\mathbf{u}_x|^{(\alpha)}$, систему (1.1) можно рассматривать как набор отдельных уравнений вида $u_t^k - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} u_{x_j}^k\right) = \Phi^k$ и использовать для их решений $u^k$ дальнейшие результаты глав III и IV. Мы не будем формулировать все, что они дают применительно к системе (1.1), в частности, когда задача (1.1), $(1.3_1)$, $(1.3_2)$ однозначно разрешима в $W_q^{2m, m}(Q_T)$, $m \geqslant 1$, или в $H^{l, \frac{l}{2}}(\bar{Q}_T)$, $l > 2$, а укажем лишь, что окончательные результаты те же, что и для одного уравнения.

## § 5. Квазилинейные параболические системы. Оценки норм $|\mathbf{u}|_{Q_T}^{(l+\alpha)}$, $l \geqslant 1$, через $\max\limits_{Q_T} |\mathbf{u}, \mathbf{u}_x|$

В §§ 5—7 мы рассмотрим квазилинейные параболические системы вида

$$\mathbf{u}_t - a_{ij}(x, t, \mathbf{u}) \mathbf{u}_{x_i x_j} + \mathbf{a}(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x) = 0, \tag{5.1}$$

в которых $\mathbf{u}(x, t) = (u^1(x, t), u^2(x, t), \ldots, u^N(x, t))$ —

неизвестная вектор-функция, определенная в $\overline{Q}_T$. Для систем вида (5.1) при некоторых условиях гладкости известных функций и ограничениях на их поведение при больших значениях аргументов будет доказана теорема существования единственного классического решения первой краевой задачи. Предварительно получим необходимые для доказательства теоремы существования априорные оценки.

Пусть $\mathbf{u}(x, t)$ есть классическое решение системы (5.1), т. е. $\mathbf{u}(x, t)$ принадлежит $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ и удовлетворяет системе уравнений (5.1). Если нам уже известны оценки

$$\max_{Q_T}|\mathbf{u}| = M, \quad \max_{Q_T}|\mathbf{u}_x| = M_1,$$

то все дальнейшие априорные оценки следуют из результатов, полученных в главах III, IV для одного уравнения. В самом деле, каждое из уравнений системы (5.1) может быть рассмотрено как линейное уравнение для определения $u^l(x, t)$

$$u_t^l - \frac{d}{dx_i}\left[\hat{a}_{ij}(x, t)\, u_{x_j}^l\right] + \hat{a}^{(l)}(x, t) = 0, \qquad (5.1')$$

где

$$\hat{a}_{ij}(x, t) = a_{ij}(x, t, \mathbf{u}(x, t)), \qquad \hat{a}^l(x, t) =$$

$$= a(x, t, \mathbf{u}(x, t), \mathbf{u}_x(x, t)) + \frac{\partial a_{ij}(x, t, \mathbf{u}(x, t))}{\partial u^m} u_{x_i}^m u_{x_j}^l + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} u_{x_j}^l.$$

(Мы предполагаем, что функции, входящие в уравнения (5.1), достаточно гладкие, и, часто не оговаривая этого, будем считать, что все функции и их производные, которые участвуют в выкладках, непрерывны по своим аргументам.)

Равенство (5.1′) представляет собой уравнение для $u^l$ с ограниченными коэффициентами и ограниченными производными

$$\frac{d\hat{a}_{ij}}{dx_k} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^m} u_{x_k}^m + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}.$$

Отсюда, как показано в § 3 главы V, следует оценка $|u_x^l|_{Q'}^{(\alpha)}$.

После этого оценку $u^l(x, t)$ в норме $H^{2+\alpha,\, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q')$ мы получаем на основании теоремы А. Фридмана (теоремы 5.2 главы IV) о линейных уравнениях, так как каждое из уравнений (5.1) можно рассматривать как линейное уравнение относительно $u^l(x, t)$ с непрерывными по Гёльдеру коэффициентами.

Итак, принимая во внимание условия теорем, на которые мы ссылались выше, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathbf{u}(x, t)$ *есть решение системы* (5.1), *принадлежащее* $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, *и пусть система* (5.1) *параболична на нем, т. е. в* $Q_T$ *выполнено неравенство*

$$a_{ij}(x, t, \mathbf{u}(x, t))\xi_i\xi_j \geqslant \nu\xi^2, \qquad \nu > 0. \tag{5.2}$$

*Пусть в области* $\mathfrak{M} = \left\{(x, t) \in \overline{Q}_T, \ |\mathbf{u}| \leqslant M = \max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}(x, t)|, \ |\mathbf{p}| \leqslant M_1 = \max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}_x(x, t)|\right\}$ *функции* $a_{ij}(x, t, \mathbf{u})$ *дифференцируемы по* $x_k$ *и* $u^l$, *причем и сами эти функции и их производные по* $x_k$ *и* $u^l$, *и функции* $a^l(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ *непрерывны на* $\mathfrak{M}$. *Верхнюю границу их модулей обозначим через* $M_2$. *Тогда для* $Q' \subset Q_T$ *нормы* $|\mathbf{u}_x|_{Q'}^{(\alpha)}$ *с некоторым* $\alpha > 0$ *оцениваются только через величины* $M_1$, $M_2$, $\nu$ *из условия* (5.2) *и расстояние от* $Q'$ *до* $\Gamma_T$. *Эти же нормы оцениваются через величины* $M_1$, $M_2$, $\nu$, *расстояние* $Q'$ *до* $S_T$ *и* $|\mathbf{u}_x(x, 0)|_\Omega^{(\alpha)}$.

*Если, кроме того, функции* $a_{ij}(x, t, \mathbf{u})$ *и* $a(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ *удовлетворяют в* $\mathfrak{M}$ *условию Гёльдера по аргументам* $x$, $t$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{p}$ *с показателями* $\beta$, $\frac{\beta}{2}$, $\beta$ *и* $\beta$ *соответственно, то нормы* $|\mathbf{u}|_{Q'}^{(2+\beta)}$ *оцениваются через* $M_1$, $M_2$, $\nu$, *нормы Гёльдера функций* $a_{ij}$ *и* $a$ *в* $\mathfrak{M}$, *а также через расстояние* $Q'$ *до* $\Gamma_T$ *или через* $|\mathbf{u}(x, 0)|_\Omega^{(2+\beta)}$ *и расстояние* $Q'$ *до* $S_T$.

Оценки $|\mathbf{u}_x|_{Q_T}^{(\alpha)}$ $\left(\text{а вместе с ними и оценки } |\mathbf{u}|_{Q_T}^{(2+\beta)}\right)$ для всего цилиндра $\overline{Q}_T$ получатся как следствия теоремы 6.1 главы IV из [I] и леммы 3.1 главы II, если предварительно оценить $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}_t|$.

Для того чтобы получить эту оценку, составим для системы (5.1) разностное отношение по $t$ и результат запишем в виде

$$\mathbf{v}_t - \frac{d}{dx_i}\left[a_{ij}\mathbf{v}_{x_j} + A_i\mathbf{v} + \mathbf{f}_i\right] + B_i\mathbf{v}_{x_i} + A\mathbf{v} + \mathbf{f} = 0, \quad (5.3)$$

где

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\Delta t}\left[\mathbf{u}(x, t+\Delta t) - \mathbf{u}(x, t)\right],$$

$$a_i^{lm} = u_{x_j}^l \int_0^1 \frac{\partial a_{ij}[x, t+\tau\Delta t, \tau u(x, t+\Delta t) + (1-\tau)u(x, t)]}{\partial u^m}\, d\tau,$$

$$f_i^l = u_{x_j}^l \int_0^1 \frac{\partial a_{ij}[\ldots]}{\partial t}\, d\tau,$$

$$b_i^{lm} = \int_0^1 \frac{\partial \hat{a}^l[x, t+\tau\Delta t, \tau u(x, t+\Delta t) + (1-\tau)u(x, t)]}{\partial u_{x_i}^m}\, d\tau,$$

$$a^{lm} = \int_0^1 \frac{\partial \hat{a}^l[\ldots]}{\partial u^m}\, d\tau, \qquad f^l = \int_0^1 \frac{\partial \hat{a}^l[\ldots]}{\partial t}\, d\tau,$$

$$\hat{a}^l(x, t, u, p) = a^l(x, t, u, p) + \frac{\partial a_{ij}(x, t, u)}{\partial u^m} p_i^m p_j^l + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} p_j^l.$$

(5.3) можно рассматривать как линейную систему относительно $\mathbf{v}$ с ограниченными коэффициентами. Границы этих коэффициентов нам будут известны, если известна величина $\nu$ из (5.2), $M = \max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}|$, $M_1 = \max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}_x|$ и граница $M_3$ для

$$\left|a_{ij}(x, t, \mathbf{u}), \mathbf{a}(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p}), \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^m}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, \frac{\partial \hat{a}_i^l}{\partial u^m}, \frac{\partial \hat{a}^l}{\partial p_i^m}, \frac{\partial \hat{a}^l}{\partial t}\right|$$

в области $\mathfrak{M}$. Эти границы можно взять не зависящими от $\Delta t$. По теореме 2.1 $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{v}|$ можно оценить только через $M_1$, $M_3$ и $\max\limits_{\Gamma_T}|\mathbf{v}|$. Переходя к пределу по $\Delta t \to 0$, получим оценку $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}_t|$ через $M_1$, $M_3$ и $\max\limits_{\Gamma_T}|\mathbf{u}_t|$. Таким образом, для системы (5.1) имеет место следующая

Теорема 5.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 5.1 и пусть на $\mathfrak{M}$ функции* $\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial u^m \partial u^l}$, $\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial u^m \partial t}$, $\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial u^m \partial x_k}$, $\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_k \partial t}$, $\frac{\partial a^l}{\partial u^m}$, $\frac{\partial a^l}{\partial p_i^m}$, $\frac{\partial a^l}{\partial t}$ *непрерывны. Обозначим их границу через* $M_3$. *Тогда* $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}_t|$ *и* $|\mathbf{u}_x|_{Q_T}^{(\alpha)}$ *с некоторым* $\alpha > 0$ *оцениваются через* $\nu^{-1}$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, $\max\limits_{\Gamma_T}|\mathbf{u}_t|$ *и нормы в* $H^{1+\beta, \frac{1+\beta}{2}}(\Gamma_T)$ *значений* $\mathbf{u}$ *на* $\Gamma_T$.

*Если, кроме того, известно, что* $a(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ *удовлетворяют на* $\mathfrak{M}$ *условию Гёльдера по* $x$ *с показателем* $\beta$ *и соответствующая константа Гёльдера для* $a$ *по* $x$ *не превосходит* $M_3$, *то* $\mathbf{u} \in H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ *и норма* $|\mathbf{u}|_{Q_T}^{(2+\beta)}$ *оценивается через те же величины и нормы в* $H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(\Gamma_T)$ *значений* $\mathbf{u}$ *на* $\Gamma_T$. *Кроме этого, все указанные нормы* $\mathbf{u}$ *зависят от норм функций, определяющих границу* $S$: *в первом случае они зависят от нормы этих функций в* $O^2$, *во втором — от их норм в* $H^{2+\beta}$.

Таким образом, теоремы 5.1 и 5.2 сводят вопрос об априорных оценках решения систем вида (5.1) к вопросу о получении оценок $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}|$ и $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}_x|$.

## § 6. Оценка $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}_x|$

Примеры § 3 главы I показывают, что для получения оценок $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}_x|$ необходимо согласование порядков роста коэффициентов уравнения по $|\mathbf{p}| = \sqrt{\sum\limits_{k, l}(p_l^k)^2}$ при $|\mathbf{p}| \to \infty$. В нашем случае условие параболичности имеет вид

$$\nu(|\mathbf{u}|)\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, t, \mathbf{u})\xi_i\xi_j \leqslant \mu(|\mathbf{u}|)\xi^2, \quad \nu > 0, \quad (6.1)$$

и поэтому необходимое требование на порядок роста $\mathbf{a}$ по $|\mathbf{p}|$ следующее:

$$|\mathbf{a}(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p})| \leqslant \mu(|\mathbf{u}|)(1 + |\mathbf{p}|)^2.$$

Но как показывает пример системы

$$\begin{cases} u_t^1 - u_{xx}^1 = u^1 \left[(u_x^1)^2 + (u_x^2)^2\right], \\ u_t^2 - u_{xx}^2 = u^2 \left[(u_x^1)^2 + (u_x^2)^2\right], \end{cases}$$

$$u^1 = \cos mx \quad \text{и} \quad u^2 = \sin mx$$

Э. Хайнца, это ограничение на $\mathbf{a}(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ еще не достаточно для вывода такой оценки. Однако если члены, имеющие квадратичный рост по $\mathbf{p}$, имеют специальный вид, то оценка становится возможной. Именно, будем считать, что система имеет вид

$$\mathbf{u}_t - a_{ij}(x, t, \mathbf{u})\, \mathbf{u}_{x_i x_j} + b_i(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x)\, \mathbf{u}_{x_i} + \mathbf{b}(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x) = 0, \tag{6.2}$$

где функции $b_i$ и $\mathbf{b}$ подчинены следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &|b_i(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p})| \leqslant \mu(|\mathbf{u}|)(1 + |\mathbf{p}|), \\ &|\mathbf{b}(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p})| \leqslant [\varepsilon(|\mathbf{u}|) + P(|\mathbf{p}|, |\mathbf{u}|)](1 + |\mathbf{p}|)^2, \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

где $P(|\mathbf{p}|, |\mathbf{u}|) \to 0$ при $|\mathbf{p}| \to \infty$, а $\varepsilon(M)$ — достаточно малое число, определяемое лишь величинами $M$, $\nu(M)$ и $\mu(M)$ из (6.1), (6.3). От $a_{ij}(x, t, \mathbf{u})$ будем требовать, чтобы они удовлетворяли неравенству (1.2), были дифференцируемы по $x_k$ и $u^l$ и выполнялось неравенство

$$\left| \frac{\partial a_{ij}(x, t, \mathbf{u})}{\partial x_k}, \frac{\partial a_{ij}(x, t, \mathbf{u})}{\partial u^l} \right| \leqslant \mu(|\mathbf{u}|). \tag{6.4}$$

Будем считать, что $\mathbf{u}(x, t)|_{S_T} = 0$. (Это предположение несущественно, т. е. если граница $S$ и граничные значения $\mathbf{u}|_S$ достаточно гладкие, то $\mathbf{u}|_S$ можно распространить с сохранением гладкости в $Q_T$ и вычитанием добиться однородности граничных условий). Оценим сначала $\max\limits_{S_T} |\mathbf{u}_x|$ или, что то же, $\left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}\right|$ на поверхности $S_T$.

Лемма 6.1. *Пусть* $\mathbf{u}(x, t)$ *есть решение системы* (6.2), *принадлежащее* $C^{2,1}(Q_T)$, *непрерывное вместе с производными* $\mathbf{u}_x$ *в* $\overline{Q}_T$ *и равное нулю на* $S_T$. *Пусть при* $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ *и произвольных* $\mathbf{p}$ *выполняются* *неравенства* (6.1) *и* (6.3). *Тогда* $\max\limits_{S_T}|\mathbf{u}_x(x, t)|$ *оценивается постоянной, зависящей лишь от* $M = \max|\mathbf{u}(x, t)|$, *величин* $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\varepsilon(M)$ *и* $P(|\mathbf{p}|, M)$ *из* (6.1), (6.3), $\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}_x(x, 0)|$ *и от границы* $S$, *которая предполагается принадлежащей классу* $O^2$.

Доказательство. Ясно, что в условиях леммы

$$|u_x^l|_{S_T} = \left|\frac{\partial u^l}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_T}.$$

Возьмем точку $(x_0, t_0)$ на $S_T$ и номер $r$ такие, что

$$\left|\frac{\partial u^r(x_0, t_0)}{\partial \mathbf{n}}\right| = \max_{l=1, \ldots, N} \max_{S_T}\left|\frac{\partial u^l}{\partial \mathbf{n}}\right| = M_0.$$

Если $t_0 = 0$, то $M_0 \leqslant \max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}_x(x, 0)|$.

Пусть $t_0 > 0$ и пусть для определенности $\frac{\partial u^r(x_0, t_0)}{\partial \mathbf{n}} < 0$. Возьмем функцию

$$w^r = u^r + \sum_{l=1}^{N}(u^l)^2$$

$\left(\text{ясно, что } \left.\frac{\partial w^r}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_T} = \left.\frac{\partial u^r}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_T}\right)$ и рассмотрим равенство

$$\mathscr{L}^r(\mathbf{u}) + 2\sum_{l=1}^{N} u^l \mathscr{L}^l(\mathbf{u}) = 0,$$

где $\mathscr{L}^l$ есть левая часть $l$-го уравнения системы (6.2) $\Bigg($в случае $\frac{\partial u^r(x_0, t_0)}{\partial \mathbf{n}} > 0$ надо рассмотреть функцию

$$\left.-u^r + \sum_{l=1}^{N}(u^l)^2\right).$$

Его можно записать в виде

$$w_t^r - a_{ij}(x, t, \mathbf{u})w_{x_ix_j}^r + 2a_{ij}(x, t, \mathbf{u})u_{x_i}^l u_{x_j}^l + \\ + b_i w_{x_i}^r + c_r = 0, \quad (6.5)$$

где $c_r = 2b^l(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x)u^l + b^r(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x)$, а $b^l(x, t, u, p)$ — компоненты $\mathbf{b}(x, t, u, p)$. Введем вместо $w^r$ функцию $v^r$

с помощью равенства $w^r = \varphi(v^r)$. Функция $\varphi$ будет выбрана ниже, но так, что $\varphi'(y) > 0$. Подставим в (6.5)

$$w_t^r = \varphi' v_t^r;\ w_{x_i}^r = \varphi' v_{x_i}^r;\ w_{x_i x_j}^r = \varphi' v_{x_i x_j}^r + \varphi'' v_{x_i}^r v_{x_j}^r.$$

Это дает

$$v_t^r - a_{ij}(x,\ t,\ \mathbf{u})\, v_{x_i x_j}^r - \frac{\varphi''}{\varphi'} a_{ij} v_{x_i}^r v_{x_j}^r + \\ + \frac{2}{\varphi'} a_{ij} u_{x_i}^l u_{x_j}^l + b_i v_{x_i}^r + \frac{1}{\varphi'} c_r = 0.$$

Отсюда в силу (6.3) будем иметь

$$v_t^r - a_{ij} v_{x_i x_j}^r - \frac{\varphi''}{\varphi'} a_{ij} v_{x_i}^r v_{x_j}^r + \frac{2}{\varphi'} a_{ij} u_{x_i}^l u_{x_j}^l \leqslant \\ \leqslant \left[\mu (1 + |\mathbf{u}_x|)\, |v_x^r| + \frac{2M+1}{\varphi'} (1 + \mathbf{u}_x^2)(\varepsilon + P(|\mathbf{u}_x|))\right], \quad (6.6)$$

где $\mu = \mu(M)$, $\varepsilon = \varepsilon(M)$, $P(|\mathbf{p}|) = P(|\mathbf{p}|,\ M)$ — величины из условий (6.1), (6.3).

Применяя неравенство Коши (2.1) главы II, оценим правую часть (6.6) сверху выражением

$$\frac{2(M+1)}{\varphi'} [\varepsilon + P(|\mathbf{u}_x|)]\, \mathbf{u}_x^2 + \frac{\mu^2 \varphi'}{2\varepsilon} |v_x^r|^2 + \frac{2(M+1)}{\varphi'} (2\varepsilon + \hat{P}).$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon(M)$ из условий (6.3), а $\hat{P} = \max\limits_{|\mathbf{p}| \geqslant 0} P(|\mathbf{p}|)$.

По условию $\varepsilon(M)$ мало, а $P(|\mathbf{p}|) \to 0$ при $|\mathbf{p}| \to \infty$. Предположим, что

$$(M+1)\,\varepsilon(M) \leqslant \frac{\nu}{2} \quad (6.7)$$

и $|\mathbf{u}_x(x_0,\ t_0)| \geqslant k_0$, где значение $k_0$ определяется неравенством

$$(M+1)\, P(k,\ M) \leqslant \frac{\nu}{2} \quad \text{при} \quad k \geqslant k_0. \quad (6.8)$$

Тогда из (6.6) следует, что в точке $(x_0,\ t_0)$

$$v_t^r - a_{ij} v_{x_i x_j}^r - \frac{\varphi''}{\varphi'} a_{ij} v_{x_i}^r v_{x_j}^r \leqslant c\left[\varphi' |v_x^r|^2 + (\varphi')^{-1}\right], \quad (6.9)$$

где $c$ — известная постоянная.

Подберем $\varphi(y)$ так, чтобы при $y \geqslant 0$ выполнялись условия

$$-\frac{\varphi''}{\varphi'}\nu(M) - c\varphi' \geqslant 0 \text{ и } \varphi(0) = 0,$$

где $\nu(M)$ взято из (6.1).

Этим условиям удовлетворяет функция

$$\varphi(y) = \frac{\nu(M)}{c}\ln(1+y).$$

При таком $\varphi(y)$ неравенство (6.9) дает

$$v_t^r - a_{ij}v_{x_i x_j}^r \leqslant c_1,$$

$$c_1 = \frac{c^2}{\nu}\max_{Q_T}(1+v^r) \leqslant \frac{c^2}{\nu}e^{\frac{c}{\nu}(M+M^2)}. \tag{6.10}$$

Функция $v^r$, так же как и $w^r$, равна нулю на $S_T$, и

$$\left.\frac{\partial v^r}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_T} = \frac{1}{\varphi'(v^r)}\left.\frac{\partial w^r}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_T} = \frac{c}{\nu(M)}\left.\frac{\partial u^r}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_T}$$

достигает своего максимума на $S_T$ в той же точке $(x_0, t_0)$, что и $\frac{\partial u^r}{\partial \mathbf{n}}$.

Построим теперь какую-нибудь барьерную функцию $\psi(x)$, т. е. функцию, удовлетворяющую соотношениям

$$-a_{ij}\psi_{x_i x_j} < -c_1, \quad x \in \Omega,$$

$$\max_{\Omega}[v^r(x, 0) + \psi(x)] = v^r(x_0, 0) + \psi(x_0),$$

$$\max_{S}\psi(x) = \psi(x_0).$$

**В качестве такой функции можно взять, например, функцию $\psi(x) = me^{-k\Phi(x)}$ с достаточно большими $k$ и $m$, с дважды непрерывно дифференцируемой функцией $\Phi(x)$, обладающей следующими свойствами:**

1) она больше нуля в $\Omega$,

2) $|\Phi_x| \geqslant \text{const} > 0$ в $\Omega$,

3) поверхность $\Phi(x) = 0$ содержит точку $x_0$.

Если область $\Omega$ расположена вся по одну сторону плоскости, касающейся $S$ в точке $x_0$ (пусть это будет плоскость $x_n = x_n^{(0)}$ и пусть в $\Omega$ имеем $x_n > x_n^0$), то в качестве $\Phi$

можно взять $\Phi(x)=x_n-x_n^0$. В противном случае нужно преобразовать $\Omega$ так, чтобы она располагалась по отношению к $x_0$ указанным образом.

Для функции $v^r(x, t)+\psi(x)$ имеем

$$(v^r+\psi)_t-a_{ij}(v^r+\psi)_{x_ix_j}<0.$$

Следовательно, ее максимум находится на $\Gamma_T$. Более того, этот максимум достигается во всех точках отрезка $\{x=x_0, t\in[0, T]\}$, так как

$$\max_{\Omega}[v^r(x, 0)+\psi(x)]=v^r(x_0, 0)+\psi(x_0)=\psi(x_0)$$

и

$$\max_{S_T}(v+\psi)=\max_{S_T}\psi=\psi(x_0).$$

Поэтому

$$\left.\frac{\partial\,[v^r(x, t)+\psi(x)]}{\partial\mathbf{n}}\right|_{x=x_0}\geqslant 0$$

и, в частности,

$$-\left.\frac{\partial v^r}{\partial\mathbf{n}}\right|_{(x_0,\, t_0)}\leqslant\left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{x_0}.$$

Отсюда следует желаемая оценка для величины

$$M_0=\max_{l=1,\,\ldots,\,N}\max_{S_T}\left|\frac{\partial u^l}{\partial\mathbf{n}}\right|.$$

Лемма доказана.

Оценим теперь модуль непрерывности решения $\mathbf{u}(x, t)$ в $Q_T$.

Лемма 6.2. *Пусть* $\mathbf{u}(x, t)$ *есть решение системы* (6.2), *принадлежащее* $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ *и* $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}(x, t)|=M$. *Пусть при* $(x, t)\in Q_T$, $|\mathbf{u}|\leqslant M$ *и произвольном* $\mathbf{p}$ *функции*

$$a_{ij}(x, t, \mathbf{u}),\ b_i(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p}),\ b^l(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p}),\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k},\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^l}$$

*непрерывны и удовлетворяют неравенствам* (6.1), (6.3) *и* (6.4). *Тогда для любого внутреннего цилиндра* $Q'\subset Q_T$ *нормы* $|u|_{Q'}^{(\alpha)}$ *с некоторым* $\alpha>0$ *оцениваются только через* $M$, $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\varepsilon(M)$ *и* $P(|\mathbf{p}|, M)$ *из* (6.1), (6.3) *и* (6.4) *и расстояние* $Q'$ *до* $\Gamma_T$.

*Если, кроме того, $S$ удовлетворяет условию* (A), *то норма* $|\mathbf{u}|_{Q_T}^{(\alpha)}$, *помимо указанных величин* $M$, $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\varepsilon(M)$, $P(|\mathbf{p}|, M)$, *оценивается еще через* $|\mathbf{u}|_{\Gamma_T}^{(\beta)}$, $\beta$ *и постоянные* $a_0$ *и* $\theta_0$ *из условия* (A).

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 3.1 о решениях линейных систем и сводится к проверке принадлежности решения функциональному классу $\mathfrak{B}_2^{2N}(\overline{Q}_T, M_1, \delta_1, \ldots, \delta_6, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ на этот раз с $\delta$, отличным от бесконечности, $r=\frac{2(n+2)}{n}$, $\varkappa=\frac{2}{n}$. Ввиду этого мы не будем здесь доказывать эту лемму.

Переходим теперь к формулировке и доказательству основного факта данного параграфа — априорной оценке $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}_x(x, t)|$.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия леммы* 6.2. *Тогда в* $Q'=\Omega'\times(0, T)$ *величина* $\max\limits_{Q'}|\mathbf{u}_x(x, t)|$ *оценивается через* $M=\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}|$, *постоянные* $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\varepsilon(M)$ *и величину* $P(|\mathbf{p}|, M)$ *из неравенств* (6.1), (6.3), (6.4), $\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}_x(x, 0)|$ *и расстояние* $Q'$ *до* $S_T$.

*Если, кроме того,* $\mathbf{u}|_S=0$ *и* $S\in O^2$, *то* $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}_x|$ *оценивается через те же величины* $M$, $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\varepsilon(M)$, $P(|\mathbf{p}|, M)$, $\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}_x(x, 0)|$ *и норму в* $O^2$ *функций, определяющих границу* $S$.

Рассмотрим сначала внутренние оценки $|\mathbf{u}_x|$. Предварительно оценим $\int\limits_{Q_T}|\mathbf{u}_x|^2\,dx\,dt$. Для этого в тождестве

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\Big[u_t^l\eta+a_{ij}(x, t, \mathbf{u})u_{x_i}^l\eta_{x_j}+\\+\left(\frac{da_{ij}}{dx_j}u_{x_i}^l+b_iu_{x_i}^l\right)\eta+b^l\eta\Big]\,dx\,dt=0, \quad t\in[0, T], \qquad (6.11)$$

справедливом для любой $\eta(x, t)$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$, положим $t=T$, $\eta=u^le^{\lambda v}\zeta^2(x)$, где $v=|\mathbf{u}|^2=\sum\limits_{r=1}^N(u^r)^2$, а $\zeta$—срезающая для $\Omega$

функция. Если $u|_{S_T}=0$, то возьмем $\zeta\equiv 1$. В (6.11) произведем суммирование по $l$ от 1 до $N$. Это дает

$$\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{\Omega} e^{\lambda v(x,\,t)}\zeta^2 dx\Big|_0^T + \\ +\int\limits_{Q_T} e^{\lambda v}\Big\{\frac{\lambda}{2}a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}\zeta^2 + a_{ij}v_{x_i}\zeta\zeta_{x_j} + \zeta^2\Big[a_{ij}u^l_{x_i}u^l_{x_j} + \\ +\Big(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u^m}u^m_{x_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + b_i\Big)\frac{1}{2}v_{x_i} + b^l u^l\Big]\Big\}\,dx\,dt = 0.$$

Используя (6.1), (6.3), (6.4) (в том числе и достаточную малость $\varepsilon$ в (6.3)) и беря $\lambda$ достаточно большим, отсюда нетрудно получить оценку

$$\int\limits_{Q_T}\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left(u^l_{x_i}\right)^2\zeta^2 dx\,dt \leqslant c. \tag{6.12}$$

Положим в (6.11) $\eta=\left(u^l_{x_k}\xi\right)_{x_k}$, где $\xi(x,\,t)$ считаем равной нулю на $S_T$ вместе с первыми производными. Тогда после очевидных преобразований с помощью интегрирования по частям и суммирования по $k$ и $l$ придем к тождеству

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\Big[\frac{1}{2}V_t\xi + a_{ij}u^l_{x_kx_i}u^l_{x_kx_j}\xi + \frac{1}{2}a_{ij}V_{x_i}\xi_{x_j} + \\ +\frac{da_{ij}}{dx_k}u^l_{x_i}u^l_{x_kx_j}\xi + \frac{da_{ij}}{dx_k}u^l_{x_i}u^l_{x_k}\xi_{x_j} - \\ -\Big(\frac{da_{ij}}{dx_j}u^l_{x_i} + b_i u^l_{x_i} + b^l\Big)\left(\Delta u^l\xi + u^l_{x_k}\xi_{x_k}\right)\Big]\,dx\,dt = 0, \tag{6.13}$$

где $V=\sum\limits_{l=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(u^l_{x_k}\right)^2$. Положим в (6.13) $\xi=2V^s\zeta^2$, где $\zeta(x)$ — срезающая функция для шара $K_\rho\subset\Omega$, $s\geqslant 0$. Первые три члена подынтегрального выражения дадут основные положительные члены, все остальные члены будем оценивать по модулю сверху с помощью неравенств (6.1), (6.3), (6.4). Это приведет нас к неравенству

$$\frac{1}{s+1}\int_{\Omega} V^{s+1}\zeta^2\,dx\Big|_0^t + \nu\int_0^t\int_{\Omega}\left[2\mathrm{u}_{xx}^2 V^s\zeta^2 + sV^{s-1}V_x^2\zeta^2\right]dx\,dt \leqslant \leqslant c(s)\int_0^t\int_{\Omega}\left(V^{s+1}\zeta_x^2 + V^{s+2}\zeta^2 + \zeta_x^2\right)dx\,dt \tag{6.14}$$

с некоторой постоянной $c(s)$, зависящей от известных нам констант и числа $s$. С другой стороны,

$$\int_{K_\rho} V^{s+2}\zeta^2\,dx = \int_{K_\rho} V^{s+1}\zeta^2\sum_{k,\,l} u_{x_k}^l u_{x_k}^l\,dx =$$
$$= -\int_{K_\rho}\left(u^l - u_0^l\right)\left[V^{s+1}\zeta^2\Delta u^l + (1+s)V^s\zeta^2 u_{x_k}^l 2u_{x_p}^m u_{x_p x_k}^m + V^{s+1}u_{x_k}^l 2\zeta\zeta_{x_k}\right]dx \leqslant \max_{l,\,K_\rho}\left|u^l - u_0^l\right| c_1(s)\int_{K_\rho}\left[V^{s+2}\zeta^2 + V^s\mathrm{u}_{xx}^2\zeta^2 + V^{s+1}\zeta_x^2\right]dx.$$

Если в качестве $u_0^l$ взять значение $u^l(x,\,t)$ в центре шара $K_\rho$, то в силу леммы 6.2

$$\max_{l,\,K_\rho}\left|u^l - u_0^l\right| \leqslant c\rho^\alpha,\quad \alpha > 0.$$

Выбирая $\rho$ достаточно малым, получим

$$\int_{K_\rho} V^{s+2}\zeta^2\,dx \leqslant c\rho^\alpha\int_{K_\rho}\left(V^s|\mathrm{u}_{xx}|^2\zeta^2 + V^{s+1}\zeta_x^2\right)dx. \tag{6.15}$$

Это неравенство вместе с (6.14) дает при достаточно малых $\rho \leqslant \rho(s)$

$$\frac{1}{s+2}\int V^{s+1}\zeta^2\,dx\Big|_0^t + \frac{\nu}{2}\int_0^t\int_{K_\rho}\left(|\mathrm{u}_{xx}|^2 V^s\zeta^2 + V^{s+2}\zeta^2\right)dx\,dt \leqslant \leqslant c(s)\int_0^t\int_{K_\rho}\left(1 + V^{s+1}\right)\zeta_x^2\,dx\,dt. \tag{6.16}$$

Неравенства (6.16) справедливы для $s=0, 1, 2, \ldots$. Вместе с исходным неравенством (6.12) они позволяют последовательно по $s$ дать оценки

$$\max_{t\in[0,T]}\int_{\Omega'} V^{s+1}\,dx\,dt \leqslant c(s, \Omega'). \tag{6.17}$$

Обратимся к тождеству (6.11). Возьмем в нем $\eta=\xi_{x_k}$, где $\xi(x, t)$ — произвольная гладкая функция, равная нулю вблизи $S_T$, и произведем интегрирование по частям. В результате (6.11) примет вид

$$\int_0^t\int_\Omega \left[u^l_{x_k t}\xi+\left(a_{ij}u^l_{x_k x_l}+f^{k,l}_j\right)\xi_{x_j}\right]dx\,dt=0, \tag{6.18}$$

где

$$f^{k,l}_j=\frac{\partial a_{lj}}{\partial x_k}u^l_{x_l}+\frac{\partial a_{lj}}{\partial u^m}u^m_{x_k}u^l_{x_l}+\left(\frac{da_{lr}}{dx_r}+b_l\right)u^l_{x_l}\delta^j_k+b^l\delta^j_k.$$

Отсюда видно, что каждую из функций $v=u^l_{x_k}$, $k=1, \ldots, n$, $l=1, \ldots, N$, можно рассматривать как решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ уравнения

$$v_t-\frac{\partial}{\partial x_l}\left(a_{ij}v_{x_j}+f^{k,l}_j\right)=0.$$

В силу предположений (6.1), (6.3) и (6.4) и неравенства (6.17) с $s=n$ можно утверждать, что для $a_{ij}$ и $f^{k,l}_j$ выполнены условия

$$\|f^{k,l}_j\|_{q,r,Q'}\leqslant\mu_1,\quad q=n+1,\quad r=\infty,\quad Q'=\Omega'\times(0, T).$$

Поэтому на основании теоремы 7.1 главы III следует, что в $Q''\subset Q'$ $\max\limits_{Q''}|u^l_{x_k}|$ оценивается через $\nu$, $\mu$, $\mu_1$ и расстояние $Q''$ до боковой поверхности цилиндра $Q'$. Таким образом, первую часть теоремы 6.1 можно считать доказанной.

Осталось провести аналогичную оценку в цилиндрах, пересекающих границу. Величина $\max\limits_{\Gamma_T}|\mathbf{u}_x|=M_0$ уже оценена. Оценка $\|\mathbf{u}_x\|_{2,Q_T}$ дана для всего $Q_T$. Надо доказать оценку (6.17) для областей $\overline{\Omega}_\rho$, пересекающих границу $S$. Для числа

$s \geqslant 1$ мы получим неравенства (6.14) — (6.17) так же, как и выше, если только в (6.13) вместо $\xi = V^s\zeta^2$ подставим функцию

$$\xi = \begin{cases} 2\left(V - M_0^2\right)^s \zeta^2 & \text{при} \quad V > M_0^2, \\ 0 & \text{при} \quad V \leqslant M_0^2. \end{cases}$$

Это допустимо, так как такое $\xi$ равно нулю на всей границе области $K_\rho \cap \Omega$. В случае же $s = 0$ возьмем в (6.9)

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad V \leqslant M_0^2, \\ 2\left(V - M_0^2\right)\zeta^2 & \text{при} \quad M_0^2 \leqslant V \leqslant M_0^2 + 1, \\ 2\zeta^2 & \text{при} \quad V \geqslant M_0^2 + 1. \end{cases}$$

Тогда после ряда преобразований и оценок, аналогичных сделанным при доказательстве теоремы 4.1 главы V для одного уравнения, мы придем к оценке для $\max\limits_{t \in [0, T]} \int\limits_{\Omega_\rho} V^{s+1}\,dx\,dt$.

Таким образом доказывается вторая часть теоремы 6.1.

## § 7. Теорема существования для квазилинейных систем

Полученные в предыдущих параграфах априорные оценки решения $\mathbf{u}(x, t)$ системы (5.1) позволяют доказать разрешимость первой краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}_t - a_{ij}(x, t, \mathbf{u})\,\mathbf{u}_{x_i x_j} + b_i(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x)\,\mathbf{u}_{x_i} + \\ + \mathbf{b}(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x) = 0, \\ \mathbf{u}|_{S_T} = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \psi_0(x) \qquad \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

Предварительно заметим, что $\max\limits_{Q_T} |\mathbf{u}(x, t)|$ для решений задачи (7.1) оценивается так же, как и для одного уравнения, если

$$a_{ij}(x, t, \mathbf{u})\,\xi_i\xi_j \geqslant 0 \tag{7.2}$$

и

$$b^l(x, t, \mathbf{u}, 0)\,u^l \geqslant -c_1|\mathbf{u}|^2 - c_2, \quad c_i = \text{const} \geqslant 0, \quad i = 1, 2. \tag{7.3}$$

Именно

$$\max_{Q_T}|\mathbf{u}(x, t)| \leqslant \min_{c>c_1} e^{cT}\left[\max_{\Omega}|\mathbf{u}(x, 0)| + \sqrt{\frac{c_2}{c-c_1}}\right] \equiv M. \tag{7.4}$$

Возможны априорные оценки $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}(x, t)|$ и при некоторых других условиях на коэффициенты.

Справедлива следующая

Теорема 7.1. *Пусть для задачи* (7.1) *выполнены следующие условия*:

a) *при* $(x, t) \in \overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ *и произвольных* $\mathbf{u}$ *справедливы неравенства* (7.2), (7.3);

b) *при* $(x, t) \in Q_T$, $|\mathbf{u}| \leqslant M$, *где* $M$ *определено равенством* (7.4), *и произвольных* $\mathbf{p}$ *функции*

$$a_{ij}(x, t, \mathbf{u}),\quad b_i(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p}),\quad b^l(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p}),\quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k},\quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^l}$$

*непрерывны и удовлетворяют неравенствам* (6.1), (6.3), (6.4).

*(Это дает априорную оценку для решения*: $\max\limits_{Q_T}|\mathbf{u}_x| \leqslant M_1$, *где* $M_1$ *определяется величинами, входящими в перечисленные только что условия*, $S$ *и* $\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}_x(x, 0)|$.)

c) *При* $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $|\mathbf{u}| \leqslant M$ и $|\mathbf{p}| \leqslant M_1$ *первые производные функций* $a_{ij}(x, t, \mathbf{u})$, $b_i(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p})$, $b^l(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ *по* $x, t, \mathbf{u}, \mathbf{p}$ *и производные* $\dfrac{\partial^2 a_{ij}}{\partial u^l \partial u^m}$, $\dfrac{\partial^2 a_{ij}}{\partial u^l \partial x_k}$, $\dfrac{\partial^2 a_{ij}}{\partial u^l \partial t}$, $\dfrac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_k \partial t}$ *непрерывны*;

d) $\psi_0(x) \in H^{2+\beta}(\overline{\Omega})$ *и удовлетворяют условиям согласования*:

$$\psi_0|_{x\in S} = 0,$$

$$\left[-a_{ij}(x, 0, 0)\psi^l_{0x_ix_j} - b_i(x, 0, 0, \psi_{0x})\psi^l_{0x_i} + {} \right.$$
$$\left. + b^l(x, 0, 0, \psi_x)\right]\Big|_{x\in S} = 0, \qquad l = 1, \ldots, N.$$

e) $S \in H^{2+\beta}$.

*Тогда в классе* $H^{2+\beta,\,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T)$ *существует единственное решение* $\mathrm{u}(x, t)$ *задачи* (7.1).

Доказывается эта теорема для систем так же, как теорема существования для случая одного уравнения (теорема 6.1 главы V), с помощью продолжения по параметру и применения принципа Лерэ — Шаудера о неподвижной точке.

## § 8. Линейные параболические системы общего вида

В 1938 году И. Г. Петровский в работе [$47_3$] ввел весьма широкий класс параболических систем линейных дифференциальных уравнений, которые подверглись детальному изучению. Оказалось, что многие характерные свойства решений параболических уравнений второго порядка сохраняются и для этих систем. Впоследствии определение И. Г. Петровского обобщалось в различных направлениях и в ряде случаев для более общих параболических систем, чем системы И. Г. Петровского, были получены некоторые законченные результаты.

Начнем с определения параболического по Петровскому уравнения высокого порядка. Пусть $L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ — линейный дифференциальный оператор*) произвольного порядка с комплексными коэффициентами, зависящими от $x$ и $t$ в некоторой области $Q \subset E_{n+1}$. Ясно, что в любой точке $(x, t) \in Q$ функция $L(x, t, i\xi, p)$, где $\xi$ — $n$-мерный вектор с компонентами $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $p$ — скалярный комплексный параметр, является полиномом относительно $\xi_j$ и $p$. Пусть $b$ — некоторое положительное целое число и пусть степень полинома $L(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b})$ относительно $\lambda$ равна $2br$, где $r > 0$ — целое число. Обозначим через $L_0$ главную часть полинома $L$, т. е. сумму всех членов $L$, для которых

$$L_0(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b}) = \lambda^{2br} L_0(x, t, i\xi, p).$$

Определение 1. *Оператор* $L$ *называется параболическим* ($2b$-*параболическим*) *в точке* $x, t$, *если при лю-*

---

*) В §§ 8—10 мы часто будем употреблять термин «дифференциальный оператор» или даже просто «оператор» в смысле «дифференциальное выражение».

*бом вещественном* $\xi$ *корни* $p_s$ *полинома* $L_0(x, t, i\xi, p)$ *по переменной* $p$ *удовлетворяют условию*

$$\operatorname{Re} p_s \leqslant -\delta |\xi|^{2b} \quad (\delta > 0). \tag{8.1}$$

*Оператор* $L$ *называется равномерно параболическим в области* $Q_T$, *если он является параболическим в каждой точке этой области и неравенство* (8.1) *выполняется в каждой точке* $(x, t) \in Q_T$ *с одним и тем же числом* $\delta > 0$.

Для уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами $b = 1$, $L_0(x, t, i\xi, p) = p + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j$ и в силу условия (2.5) главы I

$$\operatorname{Re} p_s = p_s = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \leqslant -\nu|\xi|^2,$$

так что $\delta = \nu$.

Из определения параболичности видно, что у параболических операторов однократное дифференцирование по $t$ приравнивается по силе к $2b$-кратному дифференцированию по пространственным переменным $x$ (говорят, что дифференцирование по $t$ имеет вес $2b$). Этот вес должен быть непременно четным числом, иначе условие параболичности (8.1) не будет выполняться для любых вещественных $\xi$.

Поясним это подробнее. Предположим, что $R(i\xi, p)$ — полином, однородный в следующем смысле:

$$R(i\xi\lambda^q, p\lambda^s) = \lambda^N R(i\xi, p). \tag{8.2}$$

Здесь $q$, $s$, $N$ — целые положительные числа, а $\lambda$ — любое комплексное число. Пусть $\xi_0$, $p_0$ — корни полинома $R$, причем $\xi_0$ — вещественный вектор и $\operatorname{Re} p_0 < 0$. Из (8.2) следует, что вместе с $\xi_0$, $p_0$ корнями полинома $R$ будут также $\xi_0\lambda^q$, $p_0\lambda^s$. Если $\frac{s}{q} \neq 2b$, то можно подобрать $\lambda$ таким образом, чтобы $\lambda^q$ было вещественным, а $\operatorname{Re} p_0\lambda^s > 0$, и тогда условие (8.1) не будет выполнено для всех корней $p_s$ при всех вещественных $\xi$. Действительно, если $\frac{s}{q} \neq 2b$, то для любого $\vartheta \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ можно найти такие целые числа $k$ и $m$, что

$$2m + \frac{3}{2} - \vartheta < \frac{ks}{q} < 2m + \frac{5}{2} - \vartheta. \tag{8.3}$$

Пусть $\arg p_0 = \vartheta\pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ и $\lambda = e^{i\pi\frac{k}{q}}$. Тогда из неравенства (8.3) следует, что

$$\left(2m + \frac{3}{2}\right)\pi < \arg(p_0\lambda^s) < \left(2m + \frac{5}{2}\right)\pi,$$

т. е. $\operatorname{Re} p_0\lambda^s > 0$.

Если же $\frac{s}{q} = 2b$, то такого $\lambda$ подобрать нельзя, так как $\lambda^s = (\lambda^q)^{2b} > 0$, если $\lambda^q$ вещественно.

Итак, если полином $R$ однороден в смысле (8.2), то условие параболичности типа (8.1) для него может выполняться только в том случае, если $s = 2bq$.

Предположим, что условие (8.1) для однородного полинома $R$ выполняется. Тогда в силу только что доказанного

$$R\left(i\xi\lambda,\ p\lambda^{2b}\right) = \lambda^{N_1} R(i\xi,\ p). \tag{8.4}$$

Нетрудно показать, что

$$N_1 = 2br,$$

где $r$ — целое число, и коэффициенты при $p^r$ и $\xi_j^{2br}$ отличны от нуля. Действительно, полагая в (8.4) $\xi = 0$, получим

$$R\left(0,\ p\lambda^{2b}\right) = \lambda^{N_1} R(0,\ p).$$

Если $N_1 \neq 2br$, то это равенство может выполняться только в том случае, если обе его части равны нулю при всех $p$.

Но тогда

$$R(0,\ p) = 0$$

при всех $p$, в частности при $\operatorname{Re} p > 0$, что противоречит условию (8.1). Это доказывает, что $N_1 = 2br$ и $R(0,\ p) = \gamma p^r$, $\gamma \neq 0$. Аналогичным образом можно показать, что коэффициенты при $\xi_j^{2br}$ $(j = 1, \ldots, m)$ в полиноме $R$ отличны от нуля. Из доказанного вытекает, что для параболического оператора $L$ числа $b$ и $r$ определяются единственным образом: $r$ — это степень полинома $L(x, t, i\xi, p)$ по $p$, а $2br$ — по переменным $\xi_j$.

Переходим к определению параболических по Петровскому систем.

Определение 2. *Матричный дифференциальный оператор* $\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ *с элементами* $L_{kj}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ $(k, j = 1, \ldots, m)$ *называется параболическим в смысле И. Г. Петровского, если*:

1) *оператор*

$$L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \det \mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

*является* $2b$*-параболическим в смысле определения* 1;

2) *степень полиномов* $L_{kj}(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b})$ *относительно* $\lambda$ *не превосходит* $2br_j$ *и*

$$L_{kj}(x, t, i\xi, p) = \delta_k^j p^{r_j} + L'_{kj}(x, t, i\xi, p),$$

*где* $L'_{kj}$ — *полином, не содержащий* $p^{r_j}$.

Таким образом, системы И. Г. Петровского $\mathscr{L}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ разрешены относительно старших производных по $t$ $\frac{\partial^{r_j} u^j}{\partial t^{r_j}}$.

Важным и наиболее хорошо изученным частным случаем параболических по Петровскому систем являются системы, у которых все $r_j = 1$; они имеют вид

$$\mathscr{L}\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathscr{A}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{8.5}$$

где $\mathscr{A}$ — оператор порядка $2b$.

Главной частью полинома $L_{kj}(x, t, i\xi, p)$ назовем сумму $L^0_{kj}$ всех членов $L_{kj}$, для которых выполняется условие однородности

$$L^0_{kj}(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b}) = \lambda^{2br_j} L^0_{kj}(x, t, i\xi, p),$$

а матрицу $\mathscr{L}_0$, составленную из $L^0_{kj}$, назовем главной частью матрицы $\mathscr{L}$. Очевидно, что полином

$$L_0(x, t, i\xi, p) = \det \mathscr{L}_0(x, t, i\xi, p)$$

является главной частью полинома $L$.

Для систем И. Г. Петровского характерно то, что степень однородности полиномов $\overset{0}{L}_{kj}$, равная $2br_j$, не зависит от $k$. Были предложены другие определения параболичности, в которых сохранялось условие 1) определения И. Г. Петровского, но допускалось, чтобы степень однородности полиномов $\overset{0}{L}_{kj}$ зависела как от $j$, так и от $k$. Для гиперболических систем такое обобщение было сделано еще раньше Ж. Лерэ, для эллиптических — А. Даглисом и Л. Ниренбергом. В этих определениях порядок операторов $L_{kj}$ определялся суммой $s_k + t_j$, где $s_k$ и $t_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ — некоторые наборы целых чисел. Для параболических систем одно из таких обобщений определения И. Г. Петровского было предложено японским математиком Т. Сирота [$55_2$].

Определение 3. *Система вида* (8.5) *называется параболической в смысле Т. Сирота, если*:

1) *оператор* $L = \det \mathcal{L}$ *является* $2b$-*параболическим*;

2) *существуют такие числа* $s_k$ $(k = 1, \ldots, m)$, *что порядок оператора* $A_{kj}$ *не превосходит величины* $s_k - s_j + 2b$.

Хотя эти системы содержат только производные первого порядка по $t$, а системы Петровского — производные сколь угодно высокого порядка, последние являются подклассом первых в следующем смысле. Если в системе, параболической по Петровскому, ввести новые неизвестные функции вместо $\dfrac{\partial^k u_j}{\partial t^k}$ $(k = 1, \ldots, r_j - 1)$ в случае $r_j > 1$, то в результате получится система вида (8.5), и можно показать, что она является параболической в смысле Т. Сирота.

Еще более общий класс параболических систем введен в работах [$58_{2,5}$].

Определение 4. *Будем называть оператор* $\mathcal{L}$ *параболическим, если*:

1) *оператор* $L = \det \mathcal{L}$ *является* $2b$-*параболическим в смысле определения* 1;

2) *существуют такие целые числа* $s_k$ *и* $t_k$ $(k = 1, \ldots, m)$, *что степень полинома* $L_{kj}(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b})$ *не превосходит* $s_k + t_j$ (*если* $s_k + t_j < 0$, *то* $L_{kj} = 0$) *и, кроме того,*

$$\sum_{k=1}^{m} (s_k + t_k) = 2br,$$

*где* $r$ — *степень полинома* $L(x, t, i\xi, p)$ *по переменной* $p$.

Главной частью $\mathscr{L}$ назовем матрицу $\mathscr{L}_0$, элементами которой являются полиномы $L^0_{kj}(x, t, i\xi, p)$ — главные части полиномов $L_{kj}$. Это — суммы всех членов $L_{kj}$, для которых выполняется условие однородности

$$L^0_{kj}(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b}) = \lambda^{s_k+t_j} L^0_{kj}(x, t, i\xi, p).$$

Если степень полинома $L_{kj}(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b})$ меньше, чем $s_k + t_j$, то $L^0_{kj} = 0$. Очевидно, что полином $L_0 = \det \mathscr{L}_0$ является главной частью полинома $L$.

Системы И. Г. Петровского и Т. Сирота являются подклассами определенных только что систем.

Системы Петровского — это такие параболические системы, для которых $s_1 = \ldots = s_m = 0$, $t_j = 2br_j$. Далее, если параболическая в смысле определения 4 система имеет вид (8.5), то для диагональных операторов $L^0_{jj}$

$$L^0_{jj}(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b}) = p\lambda^{2b} + A^0_{jj}(x, t, i\xi\lambda) = \\ = \lambda^{s_j+t_j} L^0_{jj}(x, t, i\xi, p),$$

откуда

$$s_j + t_j = 2b, \quad t_j = 2b - s_j.$$

Следовательно, эта система является параболической в смысле Т. Сирота.

В связи с определением 4 возникает следующий вопрос. Пусть задан матричный дифференциальный оператор $\mathscr{L}$ такой, что оператор $L = \det \mathscr{L}$ является параболическим в смысле определения 1. Спрашивается, всегда ли можно подобрать числа $s_j$ и $t_j$ так, чтобы оператор $\mathscr{L}$ был параболическим в смысле определения 4, и будут ли они единственны? Пусть $a_{kj}$ — степень полинома $L_{kj}(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b})$ по $\lambda$. Числа $s_j$ и $t_j$ должны удовлетворять следующим требованиям:

$$\begin{gathered} s_k + t_j \geqslant a_{kj}, \\ \sum_{k=1}^{m} (s_k + t_k) = 2br, \end{gathered} \tag{8.6}$$

где $b$ и $r$ — числа, однозначно определяемые полиномом $L$.

Как показал Л. Р. Волевич [$11_{1,3}$], *такие числа всегда существуют, но определяются неоднозначно*. Прежде всего, если некоторые числа $s_k$ и $t_k$ удовлетворяют условиям (8.6), то тем же самым условиям будут удовлетворять $s_k+a$ и $t_j-a$. Постоянную $a$ мы фиксируем требованием $\max_i s_i=0$. Но даже и при этом условии числа $s_k$ и $t_k$ иногда не определяются однозначно из (8.6).

Простым примером системы, для которой можно задать бесконечно много наборов чисел $s_k$ и $t_k$, является система из двух уравнений теплопроводности. Для нее

$$\mathcal{L}(i\xi,\ p)=\mathcal{L}_0(i\xi,\ p)=\begin{pmatrix} p+\xi^2, & 0 \\ 0 & p+\xi^2 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{L}$, очевидно, является параболическим по Петровскому, и можно положить $s_1=s_2=0$, $t_1=t_2=2$. Но вместе с тем можно взять

$$\begin{array}{llll} s_1=0, & s_2=-k, & t_1=2, & t_2=2+k, \\ s_1=-k, & s_2=0, & t_1=2+k, & t_2=2, \end{array}$$

где $k$ — любое положительное целое число.

Заметим, наконец, что определение 4 по форме несколько отличается от определения, данного в работе [$58_3$], хотя полностью эквивалентно ему. Данное здесь определение более конструктивно. На возможность такого улучшения определения (в применении к эллиптическим системам) указал Л. Р. Волевич [$11_1$].

В определениях 2—4 есть одна общая черта — условие, налагаемое на определитель. Это условие также подвергалось обобщениям.

Определение 5. *Система*

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}+\mathcal{A}\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{u}=0$$

*называется параболической в смысле Г. Е. Шилова, если при всех вещественных* $\xi$ *корни* $p_s$ *полинома*

$$L(x,\ t,\ i,\ \xi,\ p)=\det\left[pE+\mathcal{A}(x,\ t,\ i,\ \xi)\right]$$

*обладают свойством*

$$\operatorname{Re} p_s\leqslant -c\,|\,\xi\,|^h+c_1,$$

*где $c$ и $h$ — положительные постоянные.*

Этот класс систем шире, чем класс систем, параболических в смысле Т. Сирота. Эти системы исследовались в работах [$7_{1,2}$, $67_{1,2}$] в случае, когда коэффициенты не зависят от $t$. Для них решена задача Коши. Основные результаты приведены в монографии [$68_1$] (дополнение 1).

Приведем еще определение $2\mathfrak{b}$-параболических систем, введенных С. Д. Эйдельманом [$68_1$]. В этих системах дифференцирование по различным $x_n$ имеет, вообще говоря, различный вес $\frac{1}{2b_k}$ относительно дифференцирования по $t$. Через $\mathfrak{b}$ обозначается вектор $(b_1, \ldots, b_n)$.

Определение 6. *Оператор $\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ называется $2\mathfrak{b}$-параболическим, если существуют такие положительные числа $b_k$ $(k=1, \ldots, n)$, что:*

1) *функции $L_{kj}\left(x, t, i\xi_1\lambda^{\frac{1}{2b_1}}, \ldots, i\xi_n\lambda^{\frac{1}{2b_n}}, p\lambda\right)$ относительно $\lambda$ являются линейными комбинацаями степенных функций, максимальная степень которых не превосходит $r_j$, причем*

$$L_{kj}(x, t, i\xi, p) = \delta_k^j p^{r_j} + L'_{kj}(x, t, i\xi, p),$$

*где $L'_{kj}$ — полином, не содержащий $p^{r_j}$;*

2) *полином*

$$L_0(x, t; i\xi, p) = \det \mathscr{L}_0(x, t, i\xi, p),$$

*где $\mathscr{L}_0$ — матрица, составленная из главных частей $L^0_{kj}$ полиномов $L_{kj}$, являющихся суммой всех членов $L_{kj}$, для которых*

$$L^0_{kj}\left(x, t, i\xi_1\lambda^{\frac{1}{2b_1}}, \ldots, i\xi_n\lambda^{\frac{1}{2b_n}}, p\lambda\right) = \lambda^{r_j} L^0_{kj}(x, t, i\xi, p),$$

*обладает следующим свойством: при всех вещественных $\xi$ его корни $p_s$ удовлетворяют неравенству*

$$\operatorname{Re} p_s \leqslant -\delta\left(\xi_1^{2b_1} + \ldots + \xi_n^{2b_n}\right), \quad \delta > 0.$$

Как указано в [$68_1$], для этих систем может быть построена фундаментальная матрица решений и с ее помощью исследована задача Коши примерно так же, как для систем, параболических по И. Г. Петровскому.

В заключение приведем определение сильно параболических систем.

Определение 7. *Система вида* (8.5) *называется сильно параболической, если оператор* $\mathcal{A}$ *является сильно эллиптическим* [$10_1$], *т. е. его порядок равен* $2b$ *и его главная часть* $\mathcal{A}_0$ *удовлетворяет условию*

$$\operatorname{Re}[\mathcal{A}_0(x, t, i\xi)\eta, \eta] \geqslant \delta|\xi|^{2b}|\eta|^2, \tag{8.7}$$

*где*

$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m), \quad [\zeta, \eta] = \sum_{l=1}^{m} \zeta_l \bar{\eta}_l.$$

Очевидно, что сильно параболические системы параболичны в смысле И. Г. Петровского. Свойство (8.7) позволяет применить для исследования первой краевой задачи для сильно параболических систем многие из методов, изложенных в главе III.

## § 9. Постановка краевых задач и задачи Коши для параболических систем

Рассмотрим общие краевые задачи для систем, параболических в смысле определения 4. В них граничные условия задаются равенством

$$\mathcal{B}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{u}\Big|_{S_T} = \Phi, \tag{9.1}$$

где $\mathcal{B}$ — матричный дифференциальный оператор, а $\Phi$ — вектор, задаваемый на поверхности $S_T$ произвольно.

Выясним, сколько строк должна иметь матрица $\mathcal{B}$ (т. е. сколько нужно задавать условий на границе) и каким алгебраическим условиям эта матрица должна удовлетворять для того, чтобы условие (9.1) порождало хорошо поставленную краевую задачу.

Прежде всего определим главную часть $\mathcal{B}_0$ матрицы $\mathcal{B}$. Обозначим через $B_{qj}$ ($q = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, m$) элементы матрицы $\mathcal{B}$ и через $\beta_{qj}$ — степень полинома $B_{qj}(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b})$ относительно $\lambda$. Если $B_{qj} = 0$, возьмем в качестве $\beta_{qj}$ любое целое число. Пусть

$$\sigma_q = \max_j (\beta_{qj} - t_j),$$

когда

$$\sigma_q + t_j \geqslant \beta_{qj}.$$

Главной частью полинома $B_{qj}$ назовем сумму $B^0_{qj}$ всех его членов, удовлетворяющих условию однородности

$$B^0_{qj}(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b}) = \lambda^{\sigma_q + t_j} B^0_{qj}(x, t, i\xi, p).$$

Через $\mathscr{B}_0$ обозначим матрицу с элементами $B^0_{qj}$. Таким образом, выбор главной части $\mathscr{B}_0$ матрицы $\mathscr{B}$ зависит от чисел $t_j$ и может быть неоднозначен.

Фиксируем произвольные допустимые числа $s_k$, $t_j$ и $\sigma_q$. Возьмем любую точку $(x_0, t_0) \in S_T$, введем в пространстве $E_n$ $(x_1, \ldots, x_n)$ местные координаты $\{y\}$ в точке $x_0 \in S$, причем ось $y_n$ направим по направлению вектора внутренней нормали $\nu(x_0)$, и рассмотрим в полупространстве $y_n > 0$ задачу

$$\mathscr{L}_0\left(x_0, t_0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathfrak{u} = 0 \ (-\infty < y_1 \ldots, y_{n-1}, t < +\infty, y_n > 0),$$

$$\mathscr{B}_0\left(x_0, t_0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathfrak{u}\Big|_{y_n=0} = \Phi. \qquad (9.2)$$

Коэффициенты операторов $\mathscr{L}_0$ и $\mathscr{B}_0$ в этой задаче «заморожены» в точке $(x_0, t_0)$, а все младшие члены отброшены. Следуя Я. Б. Лопатинскому [37], предположим, что выполняется следующее условие локальности: какую бы точку $(x_0, t_0) \in S_T$ мы ни взяли, задача (9.2) всегда будет однозначно разрешима при любой гладкой финитной вектор-функции $\Phi$ в классе функций, допускающих преобразование (1.22) главы IV ($x'$ — координаты в касательной плоскости к $S$ в точке $x_0$).

Выразим это условие в алгебраической форме. Перейдя в (9.2) к координатам $\{y\}$, мы получим задачу

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathfrak{u} = 0,$$

$$\mathfrak{B}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathfrak{u}\Big|_{y_n=0} = \Phi(y', t). \qquad (9.3)$$

Легко видеть, что оператор $\mathfrak{L}$ является параболическим с той же самой постоянной $\delta$ в условии (8.1).

Задачу (9.3) можно свести к краевой задаче для системы обыкиовенных дифференциальных уравнеиий, если совершить преобразоваиие Фурье по переменным $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, а затем преобразование Лапласа по $t$ ((1.19) главы IV).

В результате этого преобразования мы получим

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{L}\left(i\zeta, \frac{d}{dy_n}, p\right)\tilde{\mathbf{u}}(y_n) = 0, \\ &\mathfrak{B}\left(i\zeta, \frac{d}{dy_n}, p\right)\tilde{\mathbf{u}}(y_n)\Big|_{y_n=0} = \tilde{\mathbf{\Phi}}, \\ &|\tilde{\mathbf{u}}(y_n)| \xrightarrow[y_n\to\infty]{} 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

Здесь $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ — $(n-1)$-мерный вектор. Необходимость третьего условия доказывается так же, как и соответствующего условия в (1.23) главы IV.

Не обращая пока внимания иа зависимость операторов $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{B}$ от $\zeta$ и $p$, рассмотрим иа полупрямой $z > 0$ задачу вида (9.4) для некоторой системы обыкновенных дифференциальиых уравнеиий (число уравнений по-прежнему обозначим через $m$):

$$\mathscr{P}\left(\frac{d}{dz}\right)\mathbf{w}(z) = 0, \tag{9.5}$$

$$\mathscr{A}\left(\frac{d}{dz}\right)\mathbf{w}(z)\Big|_{z=0} = \mathfrak{h}, \tag{9.6}$$

$$|\mathbf{w}(z)| \xrightarrow[z\to+\infty]{} 0. \tag{9.7}$$

Выясним, при каких условиях эта задача однозиачно разрешима для всякого числового вектора $\mathfrak{h}$. Обозначим через $\mathfrak{P}_0$ пространство решений системы (9.5), удовлетворяющих условиям (9.7). Это пространство является, очевидио, конечиомериым, и размерность его равна числу корней полинома

$$P(\lambda) = \det \mathscr{P}(\lambda),$$

имеющих отрицательную веществениую часть, или, что то же, числу корней полииома $P(i\tau)$, имеющих положительную мнимую часть (с учетом кратности корией). Мы обозначим эти корни через $\tau_s^+$, а их число — через $r^+$. Далее, компоненты любого вектора $\mathbf{v}(z) \in \mathfrak{P}_0$ удовлетворяют уравнению

$$P^+\left(-i\frac{d}{dz}\right)v^k(z) = 0, \tag{9.8}$$

где

$$P^+(\tau)=\prod_{s=1}^{r^+}\left(\tau-\tau_s^+\right),$$

так как являются линейными комбинациями экспонент $e^{i\tau_s^+ z}$, которые, возможно, умножены на полиномы (при кратных корнях $\tau_s^+$). Все это легко показать с помощью перехода от системы (9.5) к эквивалентной треугольной системе (см. [27]).

Пусть $\mathrm{w}_s(z)$ — векторы, образующие базис в пространстве $\mathfrak{P}_0$. Тогда решение задачи (9.5) — (9.7) имеет вид

$$\mathrm{w}(z)=\sum_{s=1}^{r^+} c_s \mathrm{w}_s(z),$$

где $c_s$ — некоторые постоянные. Их мы найдем из условия (9.6):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{r^+} A_{qj}\left(\frac{d}{dz}\right) w_s^j(z)\Big|_{z=0} c_s = h_q \quad (q=1, \ldots, N).$$

Мы получили линейную систему уравнений относительно $c_s$. Для того чтобы она была однозначно разрешима при любых $h_q$, необходимо и достаточно, чтобы

$$N=r^+ \tag{9.9}$$

и

$$\det \mathfrak{A} \neq 0, \tag{9.10}$$

где $\mathfrak{A}$ — матрица с элементами

$$\mathfrak{A}_{qs}=\sum_{j=1}^{m} A_{qj}\left(\frac{d}{dz}\right) w_s^j(z)\Big|_{z=0}. \tag{9.11}$$

В силу (9.9) матрица $\mathcal{A}$ должна иметь $r^+$ строк.

Теперь мы дадим условию (9.10) другую эквивалентную формулировку. Для этого докажем, что всякий вектор $\mathrm{w}(z)\in\mathfrak{P}_0$ представим в виде

$$\mathrm{w}(z)=\hat{\mathscr{P}}\left(\frac{d}{dz}\right)\mathrm{v}(z), \tag{9.12}$$

где $\hat{\mathscr{P}}$ — взаимная матрица для $\mathscr{P}$ $\left(\hat{\mathscr{P}} = \mathscr{P}^{-1} \det \mathscr{P}\right)$, а $\mathrm{v}(z)$ — вектор, компоненты которого удовлетворяют уравнению (9.8) (он, вообще говоря, не принадлежит $\mathfrak{P}_0$).

Действительно, в качестве $\mathrm{v}(z)$ можно взять вектор

$$\mathrm{v}(z) = \mathscr{P}\left(\frac{d}{dz}\right) \mathrm{u}(z), \tag{9.13}$$

где $\mathrm{u}(z)$ — вектор, компоненты которого являются решениями уравнений

$$P\left(\frac{d}{dz}\right) u^k(z) = w^k(z)$$

и имеют ту же структуру, что и $w^k(z)$, т. е. являются линейными комбинациями экспонент $e^{i\tau_s^+ z}$, умноженных на полиномы. Из элементарных курсов обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что функции $u^k$ с требуемыми свойствами можно найти.

Убедимся в том, что вектор $\mathrm{v}(z)$ (9.13) удовлетворяет всем указанным выше требованиям. Действуя на обе части (9.13) оператором $\hat{\mathscr{P}}\left(\frac{d}{dz}\right)$, получим равенство (9.12). Чтобы доказать, что вектор $\mathrm{v}(z)$ (9.13) удовлетворяет уравнению (9.8), подействуем на обе части (9.12) оператором $\mathscr{P}\left(\frac{d}{dz}\right)$. Будем иметь

$$P\left(\frac{d}{dz}\right) v^l(z) = 0.$$

Так как $v^l(z)$ выражается только через экспоненты $e^{i\tau_s^+ z}$, то отсюда вытекает более сильное равенство (9.8).

Итак, желаемое представление (9.12) для любого вектора $\mathrm{w}(z) \in \mathfrak{P}_0$ доказано.

Степень полинома $P^+$ равна $r^+$, и поэтому уравнение (9.8) имеет $r^+$ линейно независимых решений. Нетрудно убедиться в том, что в качестве этих решений можно взять функции

$$V_s(z) = \int\limits_{\gamma^+} \frac{\tau^{s-1} e^{i\tau z}}{P^+(\tau)}\, d\tau \quad (s = 1, \ldots, r^+),$$

где $\gamma^+$ — простой контур в комплексной плоскости $\tau$, охватывающий все $\tau_s^+$. Значит, всякое решение уравнения (9.8) представимо в виде

$$v(z)=\int\limits_{\gamma^+}\frac{Q(\tau)}{P^+(\tau)}e^{i\tau z}\,d\tau,$$

а убывающее при $z\to+\infty$ решение системы (9.5) в силу (9.12) — в виде

$$w^k(z)=\int\limits_{\gamma^+}\sum_{j=1}^{m}\hat{P}_{kj}(i\tau)\,Q_j(\tau)\,\frac{e^{i\tau z}}{P^+(\tau)}\,d\tau, \qquad (9.14)$$

где $Q$ и $Q_j$ — полиномы степени $r^+-1$. В частности, базисные векторы $\mathrm{w}_s(z)$ имеют вид

$$w_s^k(z)=\int\limits_{\gamma^+}\sum_{j=1}^{m}\hat{P}_{kj}(i\tau)\,Q_j^{(s)}(\tau)\,\frac{e^{i\tau z}}{P^+(\tau)}\,d\tau. \qquad (9.15)$$

Какие бы полиномы $Q_j(\tau)$ $(j=1,\ldots,m)$ степени $r^+-1$ мы ни взяли, найдутся такие числа $a_s$ $(s=1,\ldots,r^+)$, что при любом $k=1,\ldots,m$

$$\int\limits_{\gamma^+}\sum_{j=1}^{m}\hat{P}_{kj}(i\tau)\,Q_j(\tau)\frac{e^{i\tau z}}{P^+(\tau)}\,d\tau=\sum_{s=1}^{r^+}a_s w_s^k=$$
$$=\int\limits_{\gamma^+}\sum_{j=1}^{m}\hat{P}_{kj}(i\tau)\sum_{s=1}^{r^+}a_s Q_j^{(s)}(\tau)\,\frac{e^{i\tau z}}{P^+(\tau)}\,d\tau. \qquad (9.16)$$

Рассмотрим теперь функции (9.11). Вследствие (9.15)

$$\mathfrak{A}_{qs}=\int\limits_{\gamma^+}\sum_{j=1}^{m}D_{qj}(i\tau)\,Q_j^{(s)}(\tau)\,\frac{d\tau}{P^+(\tau)},$$

где

$$D_{qj}=\sum_{k=1}^{m}A_{qk}\hat{P}_{kj}.$$

В силу условия (9.10) из

$$\sum_{q=1}^{r^+} d_q \mathfrak{A}_{qs} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, r^+) \tag{9.17}$$

вытекает, что $d_q = 0$ ($q = 1, \ldots, r^+$). Пусть

$$D_j(i\tau) = \sum_{q=1}^{r^+} d_q D_{qj}(i\tau).$$

Равенство (9.17) можно записать в виде

$$\int_{\gamma^+} \sum_{j=1}^{m} D_j(i\tau)\, Q_j^{(s)}(\tau) \frac{d\tau}{P^+(\tau)} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, r^+), \tag{9.18}$$

Это эквивалентно тому, что

$$\int_{\gamma^+} \sum_{j=1}^{m} D_j(i\tau)\, Q_j(\tau) \frac{d\tau}{P^+(\tau)} = 0 \tag{9.19}$$

при любых полиномах $Q_j(\tau)$ степени $r^+ - 1$. Для доказательства (9.19) достаточно подействовать на обе части (9.16) оператором

$$\sum_{q=1}^{r^+} d_q A_{qk}\left(\frac{d}{dz}\right),$$

затем просуммировать полученные равенства по $k$ от 1 до $m$, положить $z = 0$ и принять во внимание (9.18).

Так как полиномы $Q_j$ произвольны, то (9.19) эквивалентно тому, что для любого $j$ и любого полинома $Q(\tau)$ степени $r^+ - 1$ мы имеем

$$\int_{\gamma^+} D_j(i\tau)\, Q(\tau) \frac{d\tau}{P^+(\tau)} = 0,$$

что, очевидно, равносильно равенству

$$\sum_{q=1}^{r^+} d_q D_{qj}(i\tau) = D_j(i\tau) = p_j(\tau) P^+(\tau), \tag{9.20}$$

где $p_j$ — некоторые полиномы.

Итак, мы показали, что условия (9.17) и (9.20) эквивалентны, так что из (9.20) вытекает, что все $d_q = 0$. Это свойство матрицы $\mathscr{D}$ с элементами $D_{qj}$ формулируется следующим образом:

*строки матрицы*

$$\mathscr{D}(i\tau) = \mathscr{A}(i\tau)\hat{\mathscr{P}}(i\tau)$$

*линейно независимы по модулю полинома* $P^+(\tau)$.

Для того чтобы сформулировать это условие для задачи (9.5), нужно знать, чему равно число $r^+$ для полинома

$$\tilde{L}_0(i\zeta,\ i\tau,\ p) = \det \mathscr{L}(i\zeta,\ i\tau,\ p).$$

Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 9.1 *Если полином* $L_0$ *удовлетворяет условию* (8.1), *то при любых вещественных* $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ *и любом комплексном* $p$, *удовлетворяющем условиям*

$$\operatorname{Re} p \geqslant -\delta_1 |\zeta|^{2b} \qquad (0 < \delta_1 < \delta), \qquad |p| + |\zeta| > 0, \quad (9.21)$$

*полином* $L_0(i\zeta,\ i\tau,\ p)$ *как функция* $\tau$ *имеет* $br$ *корней с положительной и* $br$ *корней с отрицательной мнимой частью.*

Таким образом, при условии (9.21) $r^+ = br$.

Теорема 9.1 была впервые доказана Т. Я. Загорским [20] в предположении, что полином $L$ имеет вещественные коэффициенты; без этого предположения она доказана в [$68_1$] и [$58_3$].

Теперь мы можем сформулировать желаемое алгебраическое условие для задачи (9.5) и, следовательно, для исходной задачи (9.2). Сформулируем его сразу для задачи (9.2). Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — произвольный вещественный вектор. Его можно однозначно представить в виде

$$\xi = \zeta + \tau\nu,$$

где $\zeta$ — вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности $S$ в точке $x_0$, $\nu$ — единичный вектор внутренней нормали в точке $x_0$ и $\tau$ — вещественный параметр. Рассмотрим полином

$$L_0(x_0,\ t_0,\ i(\zeta + \tau\nu),\ p)$$

как функцию $\tau$ на всей комплексной плоскости. В силу теоремы 9.1 при условии (9.21) этот полином имеет $br$ корней с положительной мнимой частью (их мы обозначим через $\tau_s^+(x_0, t_0, \zeta, p)$) и $br$ — с отрицательной. Пусть

$$L^+(x_0, t_0, \zeta, p, \tau) = \prod_{s=1}^{br} [\tau - \tau_s^+(x_0, t_0, \zeta, p)]. \qquad (9.22)$$

Мы будем предполагать, что матрицы $\mathscr{L}_0$ и $\mathscr{B}_0$ удовлетворяют следующему условию, которое называют «условием дополнительности»:

*для любой точки* $(x_0, t_0) \in S_T$ *строки матрицы*

$$\mathscr{B}_0(x_0, t_0, i(\zeta + \tau\nu), p)\hat{\mathscr{L}}_0(x_0, t_0, i(\zeta + \tau\nu), p)$$

*линейно независимы по модулю полинома* $L^+$ *как полиномы по* $\tau$, *если вектор* $\zeta$ *и число* $p$ *удовлетворяют условиям* (9.21) *при некотором* $\delta_1 \in (0, \delta)$.

Для параболических по Петровскому систем вида (8.5) (для них $r = m$) условие дополнительности в большинстве работ формулируется точно так же, как в работе Я. Б. Лопатинского [37]: *ранг матрицы*

$$\int_{\gamma^+} \mathscr{B}_0(x_0, t_0, i(\zeta + \tau\nu, p)\mathscr{L}_0^{-1}(x_0, t_0, i(\zeta + \tau\nu, p)\mathscr{M}(\tau)\,d\tau, \qquad (9.23)$$

*где*

$$\mathscr{M} = (\mathscr{E}, \tau\mathscr{E}, \ldots, \tau^{2b-1}\mathscr{E}),$$

*а* $\mathscr{E}$ — *единичная матрица порядка* $m$, *равен* $bm$ *в каждой точке* $(x_0, t_0) \in S_T$ *и для любых касательных* $\zeta$ *и любых* $p$, *удовлетворяющих* (9.21).

Эти две формулировки эквивалентны друг другу [57$_3$].

Как было указано выше, выбор главной части $\mathscr{B}_0$ матрицы $\mathscr{B}$ диктуется числами $t_j$ и может быть неоднозначен. При этом может оказаться, что для одного выбора чисел $s_k$, $t_j$ и, следовательно, главных частей матриц $\mathscr{L}$ и $\mathscr{B}$ условие дополнительности имеет место, а для другого — не имеет. В качестве примера мы рассмотрим в полупространстве $x_2 > 0$ пространства $E_3(x_1, x_2, t)$ параболическую систему, распадающуюся на два отдельных уравнения теплопроводности:

$$\mathscr{L}(i\zeta, i\tau, p) = \mathscr{L}_0(i\zeta, i\tau, p) = \begin{pmatrix} p + \zeta^2 + \tau^2 & 0 \\ 0 & p + \zeta^2 + \tau^2 \end{pmatrix}.$$

Для этой системы $b=1$, $r=2$ и, как мы видели в § 8, возможны следующие наборы чисел $s_k$ и $t_j$:

$$s_1=-k,\quad s_2=0,\quad t_1=2+k,\quad t_2=2 \qquad (k>0),$$
$$s_1=0,\quad s_2=-k,\quad t_1=2,\quad t_2=2+k \qquad (k\geqslant 0).$$

Пусть

$$\mathscr{B}(i\zeta,\ i\tau,\ p)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ i\zeta & 1\end{pmatrix}.$$

Для этого оператора числа $\sigma_1$ и $\sigma_2$ принимают следующие значения: если $t_1=2+k$, $t_2=2$ $(k>0)$, то $\sigma_1=-2-k$, $\sigma_2=-2$; если же $t_1=2$, $t_2=2+k$ $(k\geqslant 0)$, то $\sigma_1=-2$, $\sigma_2=-1$. Нетрудно проверить, что в первом случае условие дополнительности выполняется. Во втором случае

$$\mathscr{B}_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ i\zeta & 0\end{pmatrix},$$

и так как строки этой матрицы, а значит, и матрицы $\mathscr{B}_0\hat{\mathscr{L}}_0$ линейно зависимы, то условие дополнительности не имеет места. В частности, оно не выполняется, если рассматривать оператор $\mathscr{L}$ как оператор, параболический по Петровскому $(s_1=s_2=0,\ t_1=t_2=2)$.

Переходим теперь к вопросу о задании начальных условий для параболических систем. Для систем, параболических по Петровскому, начальные условия задают следующим образом: если наивысший порядок дифференцирования по $t$ функции $u_j$ равен $r_j$, то при $t=0$ задаются все производные этой функции по $t$ более низкого порядка. Однако в общем случае, как будет видно из дальнейшего, задавать таким образом начальные условия нельзя.

Будем задавать их в виде

$$\mathscr{C}\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u}\Big|_{t=0}=\varphi(x), \tag{9.24}$$

где $\mathscr{C}$ — матричный дифференциальный оператор с элементами $C_{\alpha k}$ $(\alpha=1,\ \ldots,\ N_1;\ x=1,\ \ldots,\ m)$, а $\varphi(x)$ — произвольная вектор-функция.

Определим главную часть матрицы $\mathscr{C}$ точно так же, как для матрицы $\mathscr{B}$. Пусть $\gamma_{\alpha k}$ — степень полинома $C_{\alpha k}(x,\ i\xi\lambda,\ p\lambda^{2b})$

относительно $\lambda$ и любое целое число при $C_{\alpha k}=0$, а $\rho_\alpha=\max\limits_k(\gamma_{\alpha k}-t_k)$. Сумму $C^0_{\alpha k}$ всех членов полинома $C_{\alpha k}$, удовлетворяющих условию однородности

$$C^0_{\alpha k}\left(x,\ l\xi\lambda,\ p\lambda^{2b}\right)=\lambda^{\rho_\alpha+t_j}C^0_{\alpha k}(x,\ l\xi,\ p), \qquad (9.25)$$

назовем главной частью $C_{\alpha k}$, а матрицу $\mathcal{C}_0$, составленную из $C^0_{\alpha k}$, — главной частью матрицы $\mathcal{C}$.

Выясним, каково должно быть число $N_1$ и каким условиям должна удовлетворять матрица $\mathcal{C}$, чтобы можно было из системы

$$\mathscr{L}\mathbf{u}=\mathbf{f} \qquad (9.26)$$

и начального условия (9.24) только с помощью операций дифференцирования и решения линейных алгебраических систем однозначно определить значение любой производной любой функции $u_j$ при $t=0$ (разумеется, при достаточной гладкости этих функций и коэффициентов операторов $\mathscr{L}$ и $\mathcal{C}$). При этом мы потребуем, чтобы упомянутое условие одинаково формулировалось для всех параболических систем и чтобы в него входили только главные части матриц $\mathscr{L}$ и $\mathcal{C}$, т. е. $\mathscr{L}_0$ и $\mathcal{C}_0$, так же как в определение параболичности и в условие дополнительности. Следовательно, такими же свойствами должна обладать система

$$\mathscr{L}_0\left(x,\ 0,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u}=\mathbf{f} \qquad (9.27)$$

и начальные условия

$$\mathcal{C}_0\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u}\Big|_{t=0}=\boldsymbol{\varphi}. \qquad (9.28)$$

Будем подставлять в левые части (9.27) и (9.28) всевозможные вектор-функции $\mathbf{u}(t)$, не зависящие от $x$. Для них (9.27) и (9.28) перейдут в

$$\mathscr{L}_0\left(x,\ 0,\ 0,\ \frac{\partial}{dt}\right)\mathbf{u}(t)=\mathbf{f}, \qquad (9.29)$$

$$\mathcal{C}_0\left(x,\ 0,\ \frac{d}{dt}\right)\mathbf{u}(t)\Big|_{t=0}=\boldsymbol{\varphi}. \qquad (9.30)$$

Для того чтобы можно было однозначно определить из этих равенств $\left.\dfrac{d^k u_j(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$ $(k\geqslant 0)$, необходимо, чтобы (9.29) и (9.30) составляли задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9.29), однозначно разрешимую при любых $\mathfrak{f}$ и $\varphi$ и любом фиксированном $x \in \Omega$.

Имеем

$$\det \mathscr{L}_0(x, 0, 0, p) = L(x, 0, 0, p) = \gamma(x) p^r,$$

причем в силу условия параболичности (1.1) $\gamma(x) \neq 0$.

Из теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [**27**]) известно, что число произвольных постоянных в общем решении системы (9.29) равно $r$ — степени определителя $L$. Следовательно, среди условий (9.30) должно быть $r$ независимых, а так как вектор $\varphi$ мы хотим задавать произвольно, то матрица $\mathcal{C}$ должна иметь ровно $r$ строк. Итак,

$$N_{\mathrm{I}} = r.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что для систем, параболических в смысле определения 4, вообще говоря, нельзя задавать начальные данные так же, как для систем Петровского, так как в систему могут входить очень высокие производные по $t$ от неизвестных функций. Это имеет место, например, для параболической системы с

$$\mathscr{L}_0(i\xi, p) = \begin{pmatrix} p + \xi^2 & p^{10} \\ 0 & p + \xi^2 \end{pmatrix}$$

$$(b = 1,\ r = 2,\ s_1 = 0,\ s_2 = -8,\ t_1 = 2,\ t_2 = 10).$$

Для вывода алгебраического условия, являющегося критерием однозначной разрешимости задачи (9.29), (9.30) при любых $\mathfrak{f}$ и $\varphi$, достаточно рассмотреть эту задачу при $\mathfrak{f} = 0$. Рассуждая точно так же, как при выводе условия дополнительности, мы увидим, что для того, чтобы начальные данные (9.24) обладали всеми желаемыми свойствами, необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

*строки матрицы*

$$\mathscr{D}(x, p) = \mathcal{C}_0(x, 0, p) \hat{\mathscr{L}}_0(x, 0, 0, p)$$

*линейно независимы по модулю полинома*

$$p^r = \frac{1}{\gamma(x)} L(x, 0, 0, p)$$

*при любом* $x \in \Omega$.

Как показано в работе [58₃], это условие является и достаточным для наличия у матрицы $\mathscr{C}$ желаемых свойств. Кроме того, в [58₃] доказаны следующие факты. Сформулированное условие (мы будем называть его условием дополнительности для матрицы $\mathscr{C}$) позволяет для заданной параболической системы и наборов чисел $s_k$ и $t_k$ для нее однозначно определить возможные числа $\rho_\alpha$, которые оказываются отрицательными ($\rho_\alpha \leqslant -2b$). Кроме того, это условие для некоторого широкого класса областей $\Omega$ (в частности, для всех областей, гомеоморфных шару) позволяет определить матрицу $\mathscr{C}_0(x, 0, p)$ с точностью до несущественных алгебраических преобразований. При других $\Omega$ построение матрицы $\mathscr{C}_0$ невозможно, и тогда приходится задавать начальные условия не в виде (9.24), а в некоторой другой форме ([58₃], дополнение 4).

В условие дополнительности не входит матрица

$$\mathscr{C}_0'(x, l\xi, p) = \mathscr{C}_0(x, l\xi, p) - \mathscr{C}_0(x, 0, p),$$

также содержащая главные члены. Эта матрица, так же как и младшие члены, может быть произвольной, и единственное, что мы от нее требуем, — это условие однородности (9.25) для ее элементов.

Итак, общая краевая задача для параболической системы состоит в нахождении вектора $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^m)$, для которого

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad ((x, t) \in Q_T), \\ &\mathscr{B}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u}\Big|_{S_T} = \Phi, \\ &\mathscr{C}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u}\Big|_{t=0} = \varphi, \end{aligned}\right\} \tag{9.31}$$

причем матрицы $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ удовлетворяют сформулированным выше условиям дополнительности. Оператор $\mathscr{C}$ определяется этим условием однозначно, с точностью до $\mathscr{C}_0'$, младших членов и несущественных алгебраических преобразований. Оператор $\mathscr{B}$ может быть весьма произвольным, но, как будет показано ниже, отказ от условия дополнительности для матрицы $\mathscr{B}_0$ может привести к некорректности соответствующей краевой задачи.

## § 10. Основные результаты о разрешимости задачи Коши и общих краевых задач для параболических систем

Сформулированные в § 9 для матриц $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ алгебраические условия являются достаточными для разрешимости задачи (9.31). Это было установлено в работе [58₃] с помощью первого метода, изложенного в главе IV.

Для формулировки результатов нам понадобятся пространства функций $H^{l,\frac{l}{2b}}(\bar{Q}_T)$ и $W_q^{2bm,\,m}(Q_T)$, во многом аналогичные многократно использованным выше пространствам $H^{l,\frac{l}{2}}(\bar{Q}_T)$ и $W_q^{2m,\,m}(Q_T)$. Нормы в них определяются следующим образом. Пусть для любого целого $j>0$

$$\langle u\rangle_{Q_T}^{(j)}=\sum_{2br+s=j}\langle \mathrm{D}_t^r\mathrm{D}_x^s u\rangle_{Q_T}^{(0)},$$

а для нецелого $l>0$

$$\langle u\rangle_{x,\,Q_T}^{(l)}=\sum_{2br+s=[l]}\langle \mathrm{D}_t^r\mathrm{D}_x^s u\rangle_{x,\,Q_T}^{(l-[l])},$$

$$\langle u\rangle_{t,\,Q_T}^{\left(\frac{l}{2b}\right)}=\sum_{0<l-2br-s<2b}\langle \mathrm{D}_t^r\mathrm{D}_x^s u\rangle_{t,\,Q_T}^{\frac{l-2br-s}{2b}},$$

$$\langle u\rangle_{Q_T}^{(l)}=\langle u\rangle_{x,\,Q_T}^{(l)}+\langle u\rangle_{t,\,Q_T}^{\left(\frac{l}{2b}\right)},$$

причем $\langle v\rangle_{Q_T}^{(0)}$, $\langle v\rangle_{x,\,Q}^{(\alpha)}$, $\langle v\rangle_{t,\,Q_T}^{(\alpha)}$ при $\alpha<1$ такие же, как в § 1 главы I. В пространстве $H^{l,\frac{l}{2b}}(\bar{Q}_T)$ вводится норма

$$|u|_{Q_T}^{(l)}=\langle u\rangle_{Q_T}^{(l)}+\sum_{j=0}^{[l]}\langle u\rangle_{Q_T}^{(j)}.$$

Норма

$$\|u\|_{q,\,Q_T}^{(2bm)}=\sum_{j=0}^{2bm}\sum_{2br+s=j}\|\mathrm{D}_t^r\mathrm{D}_x^s u\|_{q,\,Q_T}$$

является нормой в пространстве $W_q^{2bm,\,m}(Q_T)$. Ее главная часть обозначается следующим образом:

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q,\,Q_T}^{(2bm)}=\sum_{2br+s=2bm}\|\mathrm{D}_t^r\mathrm{D}_x^s u\|_{q,\,Q_T}.$$

Значение функции $u \in W_q^{2bm, m}(Q_T)$ и ее производных $D_t^r D_x^s u$ $(2br + s < 2bm)$ на поверхности $S_T$ принадлежат пространству $W_q^{k-\frac{1}{q}, \frac{1}{2b}\left(k-\frac{1}{q}\right)}(S_T)$, где $k = 2bm - 2br - s$.

Для того чтобы определить норму в пространстве $W_q^{l, \frac{l}{2b}}(S_T)$, нужно изменить данное в § 3 главы II определение нормы в пространстве $W_q^{l, \frac{l}{2}}(S_T)$, точно так же как была изменена норма $H^{l, \frac{l}{2}}(\bar{Q}_T)$ при определении $H^{l, \frac{l}{2b}}(\bar{Q}_T)$ (т. е. всюду число 2 заменить на $2b$).

Точно так же как в § 4 главы III (с очевидными изменениями), определяются пространства $\overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2b}}(\bar{Q}_T)$, $\overset{\circ}{W}{}_q^{2bm, m}(Q_T)$, $\overset{\circ}{W}{}_q^{s-\frac{1}{q}, \frac{1}{2b}\left(s-\frac{1}{q}\right)}(S_T)$, где $l$ — не целое, а $m$ и $s$ — целые положительные числа. Например, $\overset{\circ}{H}{}^{l, \frac{l}{2b}}(\bar{Q}_T)$ — это пространство функций из $H^{l, \frac{l}{2b}}(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющих нулевым начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \qquad \left(k = 0, \ldots, \left[\frac{l}{2b}\right]\right).$$

Переходим к формулировке основных результатов [58₃].

Теорема 10.1. *Пусть коэффициенты операторов* $L_{kj}$ *принадлежат классам* $H^{l-s_k, \frac{1}{2b}(l-s_k)}(\bar{Q}_T)$, *операторов* $B_{qj}$ — *классам* $H^{l-\sigma_q, \frac{1}{2b}(l-\sigma_q)}(\bar{S}_T)$, *операторов* $C_{\alpha j}$ — *классам* $H^{l-\rho_\alpha}(\bar{\Omega})$ *и* $S \in H^{l+t_{\max}}$, *где* $l$ — *нецелое число, удовлетворяющее условию*

$$l > \max(0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{br}).$$

*Тогда задача* (9.31) *имеет единственное решение в классе вектор-функций, у которых* $u^j \in H^{l+t_j, \frac{1}{2b}(l+t_j)}(\bar{Q}_T)$ *при любых* $f^j \in H^{l-s_j, \frac{1}{2b}(l-s_j)}(\bar{Q}_T)$, $\Phi \in H^{\sigma_q, \frac{1}{2b}(l-\sigma_q)}(\bar{S}_T)$,

$\varphi^\alpha \in H^{l-\rho_\alpha}(\bar{\Omega})$ *), *удовлетворяющих условиям согласования, необходимым для существования решения из указанного класса. Решение подчиняется неравенству*

$$\sum_{j=1}^{m} |u^j|_{Q_T}^{(l+t_j)} \leqslant c\left(\sum_{j=1}^{m} |f^j|_{Q_T}^{(l-s_j)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{q=1}^{br} |\Phi^q|_{S_T}^{(l-\sigma_q)} + \sum_{\alpha=1}^{r} |\varphi^\alpha|_{\Omega}^{(l-\rho_\alpha)}\right). \quad (10.1)$$

Указанное в теореме соотношение между гладкостью известных функций и решения является точным, а наложенные на коэффициенты ограничения являются необходимыми для того, чтобы каждый член любого уравнения системы принадлежал тому же классу, что и свободный член (то же самое верно для краевых и начальных условий).

Условия согласования для задачи (9.31) состоят в том, что функции $\left.\dfrac{\partial^k u^j}{\partial t^k}\right|_{t=0}$ $(k \geqslant 0)$, которые можно вычислить из системы и начальных данных, должны удовлетворять при $x \in S$ краевым условиям и соотношениям, получающимся в результате дифференцирования краевых условий по $t$. В теореме требуется, чтобы векторы $\mathbf{f}$, $\mathbf{\Phi}$, $\boldsymbol{\varphi}$ удовлетворяли условиям согласования минимального порядка, т. е. только тем условиям, которым удовлетворяют $\mathbf{f} = \mathscr{L}\mathbf{u}$, $\mathbf{\Phi} = \mathscr{B}\mathbf{u}|_{S_T}$ и $\boldsymbol{\varphi} = \mathscr{C}\mathbf{u}|_{t=0}$ при $u^j \in H^{l+t_j, \frac{1}{2b}(l+t_j)}(Q_T)$.

Сформулируем теперь аналогичную теорему для задачи Коши в области $D_{n+1}^{(T)}$:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}\mathbf{u} &= \mathbf{f}, \\ \mathscr{C}\mathbf{u}|_{t=0} &= \boldsymbol{\varphi}. \end{aligned}\right\} \quad (10.2)$$

Теорема 10.2. *Пусть $l > 0$ — нецелое число. Если коэффициенты операторов $L_{kj}$ принадлежат классам $H^{l-s_k, \frac{1}{2b}(l-s_k)}(\overline{D_{n+1}^{(T)}})$, а операторов $C_{\alpha j}$ — классам $H^{l-\rho_\alpha}(\bar{E}_n)$, то при любых $f^j \in H^{l-s_j, \frac{1}{2b}(l-s_j)}(\overline{D_{n+1}^{(T)}})$, $\varphi^\alpha \in H^{l-\rho_\alpha}(\bar{E}_n)$ задача* (10.1) *имеет единственное решение в классе*

*) Так как $s_j \leqslant 0$, $\rho_\alpha < 0$, то $l - s_i > 0$, $l - \rho_\alpha > 0$.

*вектор-функций* $\mathbf{u}=(u^1, \ldots, u^m)$ *с* $u^j \in H^{l+t_j, \frac{1}{2b}(l+t_j)}(\overline{D^{(T)}_{n+1}})$, *и это решение подчиняется неравенству*

$$\sum_{j=1}^{m} |u^j|^{(l+t_j)}_{D^{(T)}_{n+1}} \leqslant c\left(\sum_{j=1}^{m} |f^j|^{(l-s_j)}_{D^{(T)}_{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^{r} |\varphi^\alpha|^{(l-\rho_\alpha)}_{E_n}\right). \quad (10.3)$$

Соотношение между гладкостью заданных функций и решений задач (9.31) и (10.2) определяется числами $s_j$, $t_j$, $\rho_\alpha$, $\sigma_q$. В § 8 мы видели, что для некоторых систем числа $s_j$ и $t_j$ определяются неоднозначно. Для таких систем теоремы 10.1 и 10.2 верны при любых допустимых $s_j$ и $t_j$.

Рассмотрим в качестве примера задачу Коши для системы из двух уравнений теплопроводности, которая распадается на две отдельные задачи:

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} - \Delta u^1 = f^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial t} - \Delta u^2 = f^2,$$
$$u^1|_{t=0} = \varphi^1(x), \quad u^2|_{t=0} = \varphi^2(x).$$

Как было выяснено в § 8, для этой системы существует бесконечно много наборов чисел $s_1$, $s_2$, $t_1$, $t_2$, в частности,

$$s_1 = 0, \ s_2 = -k, \ t_1 = 2, \ t_2 = 2 + k,$$

где $k$ — произвольное целое неотрицательное число. При этом $\rho_1 = -2$, $\rho_2 = -2 - k$. Согласно теореме 10.2 при любых $f^1 \in H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{D^{(T)}_{n+1}})$, $f^2 \in H^{l+k, \frac{l+k}{2}}(\overline{D^{(T)}_{n+1}})$, $\varphi^1 \in H^{l+2}(\overline{E}_n)$, $\varphi^2 \in H^{l+2+k}(\overline{E}_n)$ существует решение задачи со следующими свойствами: $u^1 \in H^{l+2, \frac{l+2}{2}}(\overline{D^{(T)}_{n+1}})$, $u^2 \in H^{l+2+k, \frac{l+2+k}{2}}(\overline{D^{(T)}_{n+1}})$. Видно, что неоднозначность в определении чисел $s_j$ и $t_j$ связана с возможностью решать задачи Коши отдельно для функций $u_1$ и $u_2$ в разных классах: $H^{l+2, \frac{l+2}{2}}(\overline{D^{(T)}_{n+1}})$ и $H^{l+2+k, \frac{l+2+k}{2}}(\overline{D^{(T)}_{n+1}})$.

Доказательство теорем 10.1 и 10.2 проводится по точно такой же схеме, как и доказательство теорем 5.1—5.3 главы IV. Однако оно отличается некоторыми существенными деталями, например пространствами функций, в которых исследуются задачи (9.31) и (10.2). Поэтому мы изложим основные этапы рассуждения при доказательстве теоремы 10.1. В нем центральным моментом является изучение следующей задачи с нулевыми начальными данными: найти вектор-функцию $u=(u^1, \ldots, u^m)$ с $u^j \in \overset{\circ}{H}{}^{l+t_j, \frac{1}{2b}(l+t_j)}(\bar{Q}_\tau)$, где $\tau \leqslant T$, такую, что

$$\mathscr{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u}=\mathbf{f},$$
$$\mathscr{B}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u}|_{S_T}=\Phi \tag{10.4}$$

при $f^j \in \overset{\circ}{H}{}^{l-s_j, \frac{1}{2b}(l-s_j)}(\bar{Q}_\tau)$, $\Phi^q \in \overset{\circ}{H}{}^{l-\sigma_q, \frac{1}{2b}(l-\sigma_q)}(\bar{S}_\tau)$. Эта задача может быть также записана в виде

$$A\mathbf{u}=\mathbf{h},$$

при $A$ — оператор, действующий из пространства

$$\mathfrak{H}_1^{(l)}=\prod_{j=1}^{m}\overset{\circ}{H}{}^{l+t_j, \frac{1}{2b}(l+t_j)}(\bar{Q}_\tau)$$

в пространство

$$\mathfrak{H}_2^{(l)}=\prod_{j=1}^{m}\overset{\circ}{H}{}^{l-s_j, \frac{1}{2b}(l-s_j)}(\bar{Q}_\tau)\times\prod_{q=1}^{br}\overset{\circ}{H}{}^{l-\sigma_q, \frac{1}{2b}(l-\sigma_q)}(\bar{S}_\tau)$$

по формуле

$$A\mathbf{u}=(\mathscr{L}\mathbf{u}, \mathscr{B}\mathbf{u}|_{S_\tau}),$$

а $\mathbf{h}=(\mathbf{f}, \Phi)\in\mathfrak{H}_2^{(l)}$.

Теорема 10.3. *Пусть коэффициенты операторов $\mathscr{L}$ и $\mathscr{B}$ и граница $S$ удовлетворяют условиям теоремы* 10.1. *Если $\tau \leqslant \tau_0 \leqslant T$, где $\tau_0$ — некоторое число, зависящее от $\mathscr{L}$, $\mathscr{B}$ и различных характеристик $\Omega$ и $S$, то задача* (10.4) *однозначно разрешима и решение подчиняется неравенству*

$$\sum_{j=1}^{m}|u^j|_{Q_\tau}^{(l+t_j)}\leqslant c\left(\sum_{j=1}^{m}|f^j|_{Q_\tau}^{(l-s_j)}+\sum_{q=1}^{br}|\Phi^q|_{S_\tau}^{(l-\sigma_q)}\right). \tag{10.5}$$

Для доказательства этой теоремы строится оператор $R$, действующий из $\mathfrak{H}_2^{(l)}$ в $\mathfrak{H}_1^{(l)}$, ограниченный и такой, что при любых $\mathbf{h}\in\mathfrak{H}_2^{(l)}$, $\mathbf{v}\in\mathfrak{H}_1^{(l)}$

$$AR\mathbf{h}=\mathbf{h}+T\mathbf{h},$$
$$RA\mathbf{h}=\mathbf{v}+W\mathbf{v},$$

где $T$ и $W$ — операторы сжатия, если $\tau \leqslant \tau_0$. Оператор $R$ задается формулой (7.8) главы IV, в которой вместо функций $v^{(k)}$ фигурируют векторы $\mathrm{v}^{(k)}(x, t)$, определяемые через решения следующих модельных задач: задачи Коши с нулевыми начальными данными

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad f^j \in \overset{\circ}{H}{}^{l-s_j,\, \frac{1}{2b}(l-s_j)}\left(\overline{D_{n+1}^{(\tau)}}\right),\\ &\qquad u^j \in \overset{\circ}{H}{}^{l+t_j,\, \frac{1}{2b}(l+t_j)}\left(\overline{D_{n+1}^{(\tau)}}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (10.6)$$

и краевой задачи в области $R^{(\tau)}$

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad f_j \in \overset{\circ}{H}{}^{l-s_j,\, \frac{1}{2b}(l-s_j)}\left(\overline{R^{(\tau)}}\right),\\ &\mathscr{B}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u}\big|_{x_n=0} = \mathbf{\Phi}, \quad \Phi_q \in \overset{\circ}{H}{}^{l-\sigma_q,\, \frac{1}{2b}(l-\sigma_q)}\left(\overline{\tilde{D}_n^{(\tau)}}\right),\\ &\qquad u_j \in \overset{\circ}{H}{}^{l+t_j,\, \frac{1}{2b}(l+t_j)}\left(\overline{R^{(\tau)}}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (10.7)$$

Операторы $\mathscr{L}_0$ и $\mathscr{B}_0$ в этих задачах получаются из главных частей $\mathscr{L}$ и $\mathscr{B}$ замораживанием коэффициентов и, возможно, ортогональным преобразованием пространственных переменных $x$.

Решения задач (10.6), (10.7) выражаются через объемный и поверхностный потенциалы, ядрами которых являются элементы двух фундаментальных матриц решений параболической системы $\mathscr{L}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0$: матрицы $\Gamma(x, t)$ с $m$ строками и $m$ столбцами, удовлетворяющей системе

$$\mathscr{L}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\Gamma(x, t) = \delta(x, t)\,\mathscr{E}^{(m)}$$

($\mathscr{E}^{(m)}$ — единичная матрица порядка $m$) и матрицы $\mathscr{G}(x, t)$ с $br$ строками и $m$ столбцами, являющейся решением краевой задачи в полупространстве $x_n > 0$ с $\delta$-функцией в граничном условии:

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathscr{G}(x, t) = 0,\\ &\mathscr{B}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathscr{G}(x, t)\big|_{x_n=0} = \delta(x', t)\,\mathscr{E}^{(br)}. \end{aligned} \qquad (10.8)$$

Для элементов $\Gamma_{ij}$, $G_{iq}$ матриц $\Gamma$ и $\mathcal{G}$ справедливы следующие оценки:

$$|D_t^k D_x^s \Gamma_{ij}| \leqslant c_{ks}(t-\tau)^{\frac{1}{2b}(s_i+t_j-n-2b-2bk-s)} \exp\left(-C\frac{|x|^{\frac{2b}{2b-1}}}{t^{\frac{1}{2b-1}}}\right)$$

$$(i,\ j=1,\ \ldots,\ m), \tag{10.9}$$

$$|D_t^k D_x^s G_{iq}| \leqslant$$

$$\leqslant c_{ks}(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}(n-1+2b-t_i-\sigma_q+s+2bk)} \exp\left(-C\frac{|x|^{\frac{2b}{2b-1}}}{t^{\frac{1}{2b-1}}}\right)$$

$$(i=1,\ \ldots,\ m;\ q=1,\ \ldots,\ br;\ x_n>0). \tag{10.10}$$

Значительная часть трудностей, возникающих при исследовании параболических уравнений высокого порядка и особенно параболических систем, связана с доказательством этих оценок. Оценки (10.9) и (10.10) позволяют оценить объемный и поверхностный потенциалы $(\Gamma * \mathbf{f})$ и $(\mathcal{G} *_2 \mathbf{\Phi})$ примерно так же, как в главе IV, и доказать таким образом оценку (10.5) для решения задачи (10.7) и аналогичную оценку для решения задачи (10.6). Постоянные в этих оценках зависят от $\tau$, но они остаются ограниченными при конечных $\tau$.

Доказательство ограниченности оператора $R$, оценки норм операторов $T$ и $W$ и вывод теоремы 10.1 из теоремы 10.3 делается так же, как в главе IV.

Теорема 10.1 справедлива и для нецилиндрических $Q_T$, причем изложенный здесь метод ее доказательства сохраняется в случае нецилиндрической $Q_T$ без каких-либо существенных изменений [$58_3$].

Сформулируем теперь теорему о разрешимости задач (2.31) в классе вектор-функций $\mathbf{u}(x, t)$ с $u^j \in W_q^{l+t_j,\ \frac{1}{2b}(l+t_j)}(Q_T)$ при целых $l+t_j$ и $\frac{l+t_j}{2b}$. Из последнего условия видно, что мы должны ограничиться только такими системами, у которых $t_j = 2bt'_j$ при целых $t'_j$ (легко видеть, что у таких систем $s_j = 2bs'_j$ при целых $s'_j$).

Теорема 10.4. *Пусть* $l = 2bk$, $k \geqslant 0$ — *целое число, причем* $l > \sigma_{\max}$. *Пусть* $s_k = 2bs'_k$, $t_k = 2bt'_k$

*Предположим, что* $S \in C^{l+t_{\max}}$, *коэффициенты операторов* $L_{kj}$ *имеют ограниченные, а операторов* $L^0_{kj}$ — *непрерывные производные* $D_t^\mu D_x^\nu$ *при* $2b\mu + \nu \leqslant l - s_k$, *коэффициенты операторов* $B_{sj}$ *принадлежат классам* $H^{l-\sigma_s-\frac{1}{q}+\varepsilon,\ \frac{1}{2b}\left(l-\sigma_s-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)}(\overline{S}_T)$, *а операторов* $C_{\alpha j}$ — *классам* $H^{l-\rho_\alpha-\frac{2b}{q}+\varepsilon}(\overline{\Omega})$ ($\varepsilon$ — *сколь угодно малое положительное число*). *Предположим, что числа*

$$\frac{l-\sigma_s}{2b} - \frac{1}{q}\left(\frac{1}{2b}+1\right) \tag{10.11}$$

*нецелые. Тогда задача* (9.31) *имеет единственное решение в классе вектор-функций, у которых* $u^j \in W_q^{l+t_j,\ \frac{1}{2b}(l+t_j)}(Q_T)$ *при любых*

$$f^j \in W_q^{l-s_j,\ \frac{1}{2b}(l-s_j)}(Q_T), \quad \Phi^s \in W_q^{l-\sigma_s-\frac{1}{q},\ \frac{1}{2b}\left(l-\sigma_s-\frac{1}{q}\right)}(S_T),$$

$\varphi^\alpha \in B_q^{l-\rho_\alpha-\frac{2b}{q}}(\Omega)$, *удовлетворяющих условиям согласования, необходимым для существования решения из указанного выше класса.*

*Имеет место неравенство*

$$\sum_{j=1}^m \|u^j\|_{q,\,Q_T}^{(l+t_j)} \leqslant c\left(\sum_{j=1}^m \|f^j\|_{q,\,Q_T}^{(l-s_j)} + \sum_{s=1}^{br} \|\Phi^s\|_{q,\,S_T}^{\left(l-\sigma_s-\frac{1}{q}\right)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\alpha=1}^r \|\varphi^\alpha\|_{B_q^{l-\rho_\alpha-\frac{2b}{q}}(\Omega)}\right). \tag{10.12}$$

Пространства $B_q^{l-\rho_\alpha-\frac{2b}{q}}(\Omega)$ отличаются от $W_q^{l-\rho_\alpha-\frac{2b}{q}}(\Omega)$ только при целом $l-\rho_\alpha-\frac{2b}{q}$ и $q \neq 2$ (см. по этому поводу § 2 главы II). В случае $b > 1$ число $l-\rho_\alpha-\frac{2b}{q}$ может быть целым при $q \neq 2$ (в отличие от рассмотренного в главе IV случая).

Ограничение на числа (10.11) — это аналог условия $q \neq \frac{3}{2}$ в теореме 9.1 главы IV.

В теореме 10.4 завышены требования на коэффициенты при младших членах операторов $L_{kj}$, $B_{sj}$, $C_{\alpha j}$. На самом деле достаточно требовать, например, от коэффициентов при младших членах оператора $L_{kj}$, чтобы при $u^j \in W_q^{l+t_j,\, \frac{1}{2b}(l+t_j)}(\overline{Q}_T)$ $L_{kj}u^j \in W_q^{l-s_k,\, \frac{1}{2b}(l-s_k)}(Q_T)$. Как и в § 9 главы IV, можно показать, что для этого достаточно, чтобы каждый коэффициент при младших членах оператора $L_{kj}$ и, возможно, некоторые его производные имели конечные и стремящиеся к нулю при $\tau \to 0$ нормы (9.1) главы IV с некоторым $r > 1$, зависящим от того, при какой производной и от какой функции стоит данный коэффициент. То же относится к операторам $B_{sj}$ и $C_{\alpha j}$. Можно меньше требовать и от границы $S$.

Мы всегда предполагали, что матрица $\mathscr{B}$ удовлетворяет условию дополнительности. Если же это условие нарушается хотя бы в одной точке $(\zeta, p) \neq 0$, причем $\operatorname{Im}\zeta_j = 0$ и $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, то тогда оценки (10.1) и (10.12) с постоянными $c$, не зависящими от $u$, могут не иметь места. Рассмотрим в области $R^{(T)}$ задачу

$$\begin{gathered}\mathscr{L}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{f}(x, t),\\ \mathscr{B}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u}\Big|_{x_n=0} = \mathbf{\Phi}(x, t),\\ \mathscr{C}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{\varphi}(x),\end{gathered} \tag{10.13}$$

в которой операторы $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{B}_0$, $\mathscr{C}_0$ с постоянными коэффициентами содержат только старшие члены. Предположим, что условие дополнительности для матрицы $\mathscr{B}_0$ нарушается при некотором вещественном $\zeta_0$ и некотором $p_0$ с $\operatorname{Re} p_0 \geqslant 0$. В этом случае задача

$$\begin{gathered}\mathscr{L}_0\left(i\zeta_0, \frac{d}{dx_n}, p_0\right)\tilde{\mathbf{u}}(x_n) = 0,\\ \mathscr{B}_0\left(i\zeta_0, \frac{d}{dx_n}, p_0\right)\tilde{\mathbf{u}}(x_n)\Big|_{x_n=0} = 0,\\ \tilde{\mathbf{u}}(x_n) \xrightarrow[x_n\to+\infty]{} 0\end{gathered} \tag{10.14}$$

имеет отличное от нуля решение. Нетрудно убедиться в том, что при любом $\lambda > 0$ вектор $\mathbf{u}_\lambda(x, t) = (u_\lambda^1, \ldots, u_\lambda^m)$, где

$$u_\lambda^j(x, t) = \lambda^{-l-t_j} e^{p_0 \lambda^{2b}(t-T)} e^{i\lambda\zeta_0 x'} \tilde{u}^j(\lambda x_n)$$

является решением задачи (10.14) при $\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{\Phi} = 0$ и

$$\varphi(x) = (\varphi_{(\lambda)}^1, \ldots, \varphi_\lambda^r),$$

$$\varphi_\lambda^\alpha = \lambda^{-l+\rho_\alpha} e^{-p_0\lambda^{2b}T} e^{i\lambda\zeta_0 x'} \sum_{j=1}^m c_{\alpha j}^0\left(i\zeta_0, \frac{d}{dz}, p_0\right)\tilde{u}^j(z)\Big|_{z=\lambda x_n}.$$

Предположим сначала, что $\operatorname{Re} p_0 > 0$. В этом случае при больших $\lambda$

$$\sum_{\alpha=1}^r |\varphi_\lambda^\alpha|_{D_n}^{(l-\rho_\alpha)} \leqslant c e^{-k\lambda^{2b}}, \quad k > 0,$$

в то время как

$$\sum_{j=1}^m |u_\lambda^j(x, t)|_{R^{(T)}}^{(l+t_j)} \geqslant \sum_{j=1}^m |u_\lambda^j(x, T)|_{D_n}^{(l+t_j)} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^m \langle u_\lambda^j(x, T)\rangle_{D_n}^{(l+t_j)} = \sum_{j=1}^m \langle e^{i\zeta_0 x'}\tilde{u}^j(x_n)\rangle_{D_n}^{(l+t_j)} > 0.$$

Поэтому неравенство (10.1) для решения задачи (10.13) с постоянной, не зависящей от $\mathbf{u}$, не может иметь места. Для функций $u_\lambda^j$ при достаточно больших $\lambda$ не имеет места даже оценка

$$\sum_{j=1}^m \langle u_\lambda^j(x, T)\rangle_{D_n}^{(0)} \leqslant c \sum_{\alpha=1}^r |\varphi_\lambda^\alpha|_{D_n}^{(l-\rho_\alpha)}, \tag{10.15}$$

какую бы постоянную $c$ мы ни взяли и сколь бы малым ни было число $T > 0$. Это означает некорректность задачи (10.13).

Нетрудно проверить, что при $\operatorname{Re} p_0 = 0$ неравенство (10.1) для задачи (10.13) нарушается при больших $\lambda$ на векторе

$$\mathbf{U}_\lambda(x, t) = \mathbf{u}_\lambda(x, t)\zeta(t),$$

где $\zeta(t)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям $0 \leqslant \zeta(t) \leqslant 1$,

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \leqslant \frac{T}{3}, \\ 1 & \text{при} \quad t \geqslant \frac{2T}{3}. \end{cases}$$

Аналогичным образом строятся векторы, на которых нарушается неравенство (10.12) для задачи (10.13).

Таким образом, мы доказали необходимость условия дополнительности для справедливости оценок (10.1), (10.12) для решения задачи (10.13). Переход к более общей задаче (9.31) делается так же, как для эллиптических уравнений [1].

Итак, условие дополнительности выделяет класс хорошо поставленных задач для уравнений и систем параболического типа, для которых справедливы теоремы 3.1, 3.4. Это условие, в частности, выполняется для всех основных краевых задач для уравнений второго порядка, которые были рассмотрены в предыдущих главах, а также для задачи (5.15). Оно также выполняется в случае первой краевой задачи для сильно параболических систем; как показано в [$33_6$], для решений таких задач справедливо неравенство (10.12) при $q = 2$. Иначе обстоит дело в случае первой краевой задачи для систем, параболических по И. Г. Петровскому, даже первого порядка по $t$. Рассмотрим в области $R^{(T)}$ первую краевую задачу для системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{u} = \mathbf{f}(x, t), \\ \mathbf{u}\big|_{x_n=0} = \Phi^{(1)}(x', t), \ \ldots, \ \left.\frac{\partial^{b-1}\mathbf{u}}{\partial x_n^{b-1}}\right|_{x_n=0} = \Phi^{(b)}(x', t), \\ \mathbf{u}\big|_{t=0} = \varphi(x). \end{gathered} \tag{10.16}$$

Оператор $\mathcal{A}_0$ содержит только члены порядка $2b$.

Соответствующая задача (10.14) имеет вид

$$\begin{gathered} p\tilde{\mathbf{u}} + \mathcal{A}_0\left(i\zeta, \frac{d}{dx_n}\right)\tilde{\mathbf{u}} = 0, \\ \tilde{\mathbf{u}}\big|_{x_n=0} = \ldots = \left.\frac{d^{b-1}\tilde{\mathbf{u}}}{dx_n^{b-1}}\right|_{x_n=0} = 0, \\ \mathbf{u} \xrightarrow[x_n \to +\infty]{} 0. \end{gathered} \tag{10.17}$$

Если $m = 1$, то совершенно очевидно, что эта задача имеет только нулевое решение. То же самое имеет место и в случае $m > 1$, $n = 1$. Действительно, при $n = 1$

$$\mathcal{A}_0\left(i\zeta, \frac{d}{dx_n}\right)\tilde{\mathrm{u}} = A_0 \frac{d^{2b}\tilde{\mathrm{u}}}{dx^{2b}},$$

где $A_0$ — числовая матрица. Пусть $T$ — преобразование, приводящее матрицу $A_0$ к жордановой форме:

$$TA_0T^{-1} = A_0' = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \lambda_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \lambda_{m-1} \\ 0 & & & & \alpha_m \end{Vmatrix}.$$

В силу условия параболичности $\alpha_j \neq 0$.

Введем новый вектор

$$\tilde{\mathrm{v}}(x) = T\tilde{\mathrm{u}}(x).$$

Умножая (10.17) слева на $T$, получаем для $\tilde{v}$ задачу

$$p\tilde{\mathrm{v}} + A_0' \frac{d^{2b}\tilde{\mathrm{v}}}{dx^{2b}} = 0, \tag{10.18}$$

$$\tilde{\mathrm{v}}\big|_{x=0} = \ldots = \frac{d^{b-1}\tilde{\mathrm{v}}}{dx^{b-1}}\bigg|_{x=0} = 0, \quad \tilde{\mathrm{v}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0. \tag{10.19}$$

Так как

$$\det\left[pE + A_0'(i\tau)^{2b}\right] = \det\left[pE + A_0(i\tau)^{2b}\right] = \prod_{s=1}^{m}\left[p + (i\tau)^{2b}\alpha_s\right],$$

то каждый оператор

$$L^{(s)}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_s \frac{\partial^{2b}}{\partial x^{2b}}$$

является параболическим. Из (10.18) и (10.19) вытекает, что функция $\tilde{v}^m$ является решением задачи

$$L^{(m)}\left(\frac{d}{dx}, p\right)\tilde{v}^m = 0,$$

$$\tilde{v}^m\big|_{x=0} = \ldots = \frac{d^{b-1}\tilde{v}^m}{dx^{b-1}}\bigg|_{x=0} = 0, \quad \tilde{v}^m \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Поэтому $\tilde{v}^m = 0$, и предпоследнее уравнение в (10.18) имеет вид

$$L^{(m-1)}\left(\frac{d}{dx}, p\right)\tilde{v}^{m-1} + \lambda_{m-1}\tilde{v}^m = L^{(m-1)}\left(\frac{d}{dx}, p\right)\tilde{v}^{m-1} = 0.$$

Следовательно, $\tilde{v}^{m-1} = 0$ и т. д. Таким образом, задача (10.18), (10.19) и задача (10.17) имеют только нулевое решение.

При $n > 1$ это утверждение уже не имеет места. Рассмотрим задачу (10.17) для системы из двух уравнений, матрица $\mathcal{A}_0(i\zeta, i\tau)$ которой имеет вид

$$\mathcal{A}_0(i\zeta, i\tau) = \begin{pmatrix} (\tau - i\sqrt{1+\lambda}\,\zeta_{n-1})^2 + \zeta'^2 - \lambda\zeta_{n-1}^2 & -4(1+\lambda)\zeta_{n-1}^2 \\ -(\tau - i\sqrt{1+\lambda}\,\zeta_{n-1})^2 & (\tau + i\sqrt{1+\lambda}\,\zeta_{n-1})^2 + \zeta'^2 - \lambda\zeta_{n-1}^2 + 4\zeta_{n-1}^2(1+\lambda) \end{pmatrix} \tag{10.20}$$

$\left(\text{здесь } \zeta'^2 = \sum_{i=1}^{n-2} \zeta_i^2, \ \lambda \geqslant 0\right)$. Система эта параболическая, а $b = 1$, так как

$$\det\left(pE + \mathcal{A}_0(i\zeta, i\tau)\right) = \left(p + \zeta'^2 + \zeta_{n-1}^2 + \tau^2\right)^2 = (p + \zeta^2 + \tau^2)^2.$$

Условие дополнительности в этой задаче нарушается при $\zeta' = 0$, $p = \lambda\zeta_{n-1}^2$ и любом $\zeta_{n-1} > 0$, так как при указанных значениях $p$ и $\zeta$ задача (10.17) с матрицей $\mathcal{A}_0$ (10.20) имеет отличное от нуля решение

$$\tilde{\mathrm{u}}(x_n) = \left(x_n e^{-\sqrt{1+\lambda}\,\zeta_{n-1}x_n}, 0\right).$$

Таким образом, при $n > 1$ существуют параболические по И. Г. Петровскому системы, для которых первая краевая задача плохо поставлена.

Вернемся к вопросу о разрешимости краевой задачи (9.31) при выполнении условия дополнительности.

Для систем, параболических по И. Г. Петровскому, некоторые из изложенных выше результатов работы [$58_3$] были получены в других работах. Так, теорема 10.4 доказана другим методом в работах [$1_{1,2}$] М. С. Аграновича и М. И. Вишика, где общие краевые задачи для параболических по И. Г. Петровскому систем исследованы в пространствах $W_2^{2bl, l}$ с целым и нецелым $l > 0$. Вкратце этот метод состоит в следующем. Сначала рассматривается случай, когда коэффициенты операторов $\mathscr{L}$ и $\mathscr{B}$ зависят только от $x$. Такие задачи решаются с помощью преобразования Лапласа по $t$. Переход к общему случаю осуществляется последовательными шагами по малым промежуткам $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$.

Точные оценки решений краевых задач в нормах $W_2^{2bl, l}$ для параболических по Петровскому систем первого порядка по $t$ (без теоремы существования) были анонсированы Л. Н. Слободецким [$53_2$].

В случае $q=2$ для получения точных оценок используется равенство Парсеваля, что позволяет избежать необходимости получать оценки (10.9), (10.10).

Точные оценки в гёльдеровских нормах установлены для решений параболических по Петровскому систем вида (8.5) внутри области, в которой эти решения определены, в работе А. Фридмана [**$15_1$**]. А Фридман доказал эти оценки, обобщив метод, предложенный А. Даглисом и Л. Ниренбергом применительно к эллиптическим системам.

Сейчас мы переходим к краткому изложению результатов о разрешимости задачи Коши и краевых задач для параболических по Петровскому систем, полученных методами теории потенциала. Наиболее хорошо изучены этими методами системы вида (8.5).

Фундаментальная матрица решений $Z(x, \xi, t, \tau)$ таких систем впервые построена С. Д. Эйдельманом [$68_2$] в предположении, что старшие коэффициенты оператора $\mathscr{A}$ являются достаточно гладкими функциями. Эти результаты перенесены на случай, когда коэффициенты оператора $\mathscr{A}$ удовлетворяют только условию Гёльдера, в [$68_{2,\,\text{II}}$], [**$47_5$**]. В [$68_{2,\,\text{II}}$] построена также фундаментальная матрица для параболических по Петровскому систем общего вида. В [$68_{2,\,\text{II}}$] от коэффициентов оператора $\mathscr{A}$ требуется, чтобы они удовлетворяли условию Гёльдера только по переменным $x$, а по переменной $t$ были бы непрерывны. Дальнейшее продвижение в этом направлении достигнуто в заметке [40], где от коэффициентов оператора $\mathscr{A}$ требуется, чтобы они удовлетворяли более общему, чем условие Гёльдера, условию Дини.

Если коэффициенты оператора $\mathscr{A}$ удовлетворяют в $D_{n+1}^{(T)}$ условию Гёльдера по $x$ с показателем $\alpha$, а по $t$ непрерывны, то тогда элементы $Z_{ij}$ матрицы $Z$ подчиняются следующим неравенствам:

$$|D_x^k Z_{ij}(x, \xi, t, \tau)| \leqslant c(t-\tau)^{-\frac{n+k}{2b}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}}\right),$$

$$k \leqslant 2b;$$

$$|D_x^{2b} Z_{ij}(x, \xi, t, \tau) - D_{x'}^{2b} Z_{ij}(x', \xi, t, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c|x-x'|^{\beta}(t-\tau)^{-\frac{n+2b+\beta}{2b}}\left[\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(-C\frac{|x'-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}}\right)\right],$$

$$0 \leqslant \beta \leqslant \alpha.$$

Дифференциальные свойства функций $Z_{ij}$ улучшаются по мере улучшения дифференциальных свойств коэффициентов оператора $\mathcal{A}$: если коэффициенты имеют непрерывные производные $D_t^{k_0} D_x^k$, удовлетворяющие условию Гёльдера по $x$, то существуют производные $D_t^{m_0} D_x^m Z_{ij}(x, \xi, t, \tau)$ $(2bm_0 + m = 2b + r,\ r = 2bk_0 + k)$, а также $D_\xi^r Z_{ij}$ [68₁].

С помощью фундаментальной матрицы $Z$ исследована задача Коши

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \qquad \mathbf{u}|_{t=0} = \varphi(x) \tag{10.21}$$

в различных классах функций, в том числе в классах функций, экспоненциально растущих при $|x| \to \infty$ (см. [$68_1$, $53_{1,3}$]), в частности, получены точные оценки типа (10.3) для решения этой задачи. Детальное изучение свойств матрицы $Z$ позволило также исследовать устойчивость и поведение при $t \to +\infty$ решения задачи (10.21), изучить задачу Коши для операторов с растущими коэффициентами, доказать теоремы лиувиллевского типа для решений параболических систем. Все эти и многие другие результаты, часть из которых доказана и для параболических по Петровскому систем общего вида, изложены в монографии [$68_1$], где имеется подробная библиография.

Для краевых задач методами теории потенциала получены значительно менее полные результаты. Этими методами рассматривались задачи вида

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathcal{A}\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{u}=\mathbf{f},\\ \mathcal{B}\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{u}\Big|_{S_T}=\Phi,\\ \mathbf{u}\big|_{t=0}=\varphi(x)\end{gathered}\tag{10.22}$$

в предположении, что порядок операторов $B_{qj}$, который может зависеть от $q$, меньше, чем $2b$ — порядок оператора $\mathcal{A}$, и что выполнено условие Я. Б. Лопатинского: ранг матрицы (9.23) равен $bm$.

Общий план решения задачи (10.22) в указанных работах таков. Сначала с помощью матрицы $Z$ эта задача сводится к такой же задаче, но с $\mathbf{f}=0$ и $\varphi=0$. Решение же этой последней задачи разыскивается в виде суммы потенциалов

$$u^j(x,\ t)=\sum_{s=1}^{bm}\int_0^t d\tau\int_S G_{js}(x,\ \xi,\ t,\ \tau)\,\mu^s(\xi,\ \tau)\,dS_\xi,\tag{10.23}$$

где $G_{js}$ — ядра, обладающие следующими свойствами:

1) При каждом $s=1,\ \ldots,\ bm$ вектор $\mathbf{G}^{(s)}=(G_{1s},\ \ldots$ $\ldots,\ G_{ms})$ является решением однородной системы

$$\frac{\partial \mathbf{G}^{(s)}}{\partial t}+\mathcal{A}\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{G}^{(s)}=0$$

в области $Q_T$.

2) Главной частью $G_{js}$ по порядку особенности являются функции $G_{js}^{(0)}(x-\xi,\ t-\tau)$, образующие решение краевой задачи типа (10.8) в полупространстве $x\nu(\xi)>0$, ограниченной касательной плоскостью в точке $(\xi,\ \tau)\in S_T$ к поверхности $S_T$. Функции $G_{js}^{(0)}$ подчиняются неравенствам (10.10) в этом полупространстве:

$$\left|D_t^r D_x^s G_{jq}^{(0)}(x,\ t)\right|\leqslant$$
$$\leqslant c\,(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}(n-1+2b-\beta_q+s+2br)}\exp\left(-C\frac{|x|^{\frac{2b}{2b-1}}}{t^{\frac{1}{2b-1}}}\right),\tag{10.24}$$

где $\beta_q$ — порядок операторов $B_{qj}$.

Функции $\mu^s(\xi, t)$ в (10.23) определяются из системы вольтерровых интегральных уравнений, получаемой из краевого условия. Точный и развернутый вывод этих интегральных уравнений дан к настоящему времени лишь при одном из следующих предположений: 1) порядки $\beta_q$ всех операторов $B_{qj}$ одинаковы и 2) $n=1$, хотя функции $G_{js}$ с указанными выше свойствами построены без этих дополнительных предположений.

Метод теории потенциала явился первым методом, с помощью которого исследовались краевые задачи вида (10.22). Начиная с 1956 года, Т. Я. Загорский опубликовал ряд работ и монографию [20], в которых задача (10.22) рассматривается в ограниченных выпуклых областях. Однако в этих работах и в монографии имеются существенные погрешности (см. по этому поводу [$58_3$]). С. Д. Эйдельман [$68_1$] получил для ядер $G_{js}^{(0)}$ точные оценки (10.24), построил функции $G_{js}$ в невыпуклых областях и доказал разрешимость задачи (10.22) при указанных выше дополнительных предположениях. Кроме того, в заметке [36] С. Д. Эйдельмана и Г. Я. Липко анонсированы некоторые результаты о разрешимости краевых задач вида (10.22) в нецилиндрических областях и в областях с бесконечными границами.

Оценка (10.24) и все последующие результаты получены С. Д. Эйдельманом для таких систем, для которых выполняется условие дополнительности в случае первой краевой задачи. Пример (10.20) показывает, что этот класс систем не совпадает с классом всех параболических по Петровскому систем вида (8.5). Следует отметить, что это ограничение на класс систем никак не связано с представлением решения в виде (10.23) и с определением плотностей $\mu^s$. Оно связано с методом доказательства оценки (10.24). В работе [$58_3$] другим методом доказана аналогичная оценка (10.10) для более общих систем. Поэтому все последующие рассуждения и конечные результаты С. Д. Эйдельмана справедливы для любой параболической по Петровскому системы вида (8.5).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович М. С. и Вишик М. И.

1) Параболические граничные задачи, УМН **18**, вып. 1, 1963, 206—207.

2) Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН **19**, вып. 3, 1964, 53—161.

2. Александров А. Д.

1) Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле, ДАН СССР **134**, 1960, 1001—1004.

2) Исследования о принципе максимума. IV, Изв. вузов, Матем., № 3, 1960, 3—16; V, № 5, 1960, 16—26; VI, № 1, 1961, 3—20.

3) Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле, Вестник ЛГУ, № 13, 1963, 5—29.

3. Бабич В. М.

1) К вопросу о распространении функций, УМН **8**, вып. 2 (54), 1953, 111—113.

Бабич В. М. и Слободецкий Л. Н.

2) Об ограниченности интеграла Дирихле, ДАН СССР **106**, 1956, 604—606.

4. Баренблатт Г. И. и Вишик М. И.

О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа, ПММ **20**, 1956, 411—417.

5. Бернштейн С. Н.

1) Ограничение модулей последовательности производных решений уравнеиий параболического типа, ДАН СССР **18**, 1938, 385—388.

2) Собрание сочинений, т. III, М., Изд-во АН СССР, 1960.

6. Бесов О. В.

Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения, Труды МИАН **60**, 1961, 42—81.

7. Борок В. М.

1) Об одном характеристическом свойстве параболических систем, ДАН СССР **100**, 1956, 903—905.

2) О численных характеристиках систем, корректных по И. Г. Петровскому, Изв. вузов, Матем. **1**, 1959, 16—22.

8. Введенская Н. Д.

1) Пример неединственности обобщенных решений квазилинейных систем уравнений, ДАН СССР **136**, 1961, 532—533.

2) Некоторые примеры параболических систем уравнений, УМН **16**, № 5, 1961, 218—219.

9. Вентцель Т. Д.

1) Первая краевая задача для квазилинейного уравнения со многими пространственными переменными, Матем. сб. **41** (83), 1957, 499—520.

2) О некоторых квазилинейных параболических системах, ДАН СССР **117**, 1957, 21—24.

3) О некоторых квазилинейных параболических системах с растущими коэффициентами, ДАН СССР **140**, 1961, 284—286.

4) Квазилинейные параболические системы с растущими коэффициентами, Вести. Моск. ун-та, сер. матем.-мех., № 6, 1963, 34—44.

Вентцель Т. Д. и Олейник О. А.

5) Задача Коши и первая краевая задача для квазилинейного уравнения параболического типа, ДАН СССР **97**, 1954, 605—608.

6) Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейных уравнений параболического типа, Матем. сб. **41** (83), 1957, 105—128.

10. Вишик М. И.

1) О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, ДАН СССР **74**, 1950, 881—884; Матем. сб. **29**, 1951, 615—676

2) Смешанные краевые задачи для уравнений, содержащих первую производную по времени, и приближенный метод их решения, ДАН СССР **99**, 1954, 89—192.

3) Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения, Матем. сб. **39** (81), 1956, 51—148.

4) О краевых задачах для квазилинейных параболических систем уравнений и о задаче Коши для гиперболических уравнений, ДАН СССР **140** ,1961, 998—1001.

5) О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков, Матем. сб. **59**, 1962, 289—325.

Вишик М. И. и Агранович М. С.

6) См. Агранович М. С.

Вишик М. И. и Баренблатт Г. И.

7) См. Баренблатт Г. И.

Вишик М. И. и Ладыженская О. А.

8) Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений, УМН **11**, вып. 6, 1956, 41—97.

11. Волевич Л. Р.

1) Об общих системах дифференциальных уравнений, ДАН СССР **132**, 1960, 20—23.

2) Локальные свойства решений квазиэллиптических систем, Матем. сб. **59** (доп.), 1962, 3—52.

3) Об одной задаче линейного программирования, возникающей в дифференциальных уравнениях, УМН **18**, вып. 3, 1963, 155—162.

12. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е.

1) Обобщенные функции, М., Физматгиз, 1958, вып. 3.

2) Преобразование Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши, УМН **8**, вып. 6 (58), 1953, 3—54.

13. Годунов С. К.

О неединственности для параболических систем, ДАН СССР **145**, 1962, 498—500.

14. Головкин К. К.

1) К теоремам вложения, ДАН СССР **134**, 1960, 19—22.

2) Два класса неравенств для достаточно гладких функций $n$ переменных, ДАН СССР **138**, 1961, 22—25.

Головкин К. К. и Солонников В. А.

3) Оценки интегральных операторов в трансляционно инвариантных нормах, I. Труды МИАН **70**, 1964, 47—58; II. Труды МИАН, **92**, 1966.

15. Греков А. В.

Задача Дирихле для некоторых квазилинейных параболических уравнений, ДАН СССР **134**, 1960, 255—258.

16. Гюнтер Н. М.

Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, Москва, 1953 (перевод с фр. издания 1934).

17. Дубинский Ю. А.

1) Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях, Матем. сб. **67** (109) : 4, 1965, 609—642.

2) О нелинейных параболических уравнениях, имеющих недивергентную форму, ДАН СССР **163**, 1965, 805—808.

18. Дынин А. С.

Многомерные эллиптические краевые задачи с одной неизвестной функцией, ДАН СССР **141**, 1961, 285—287.

19. Дынкин Е. Б.

Марковские процессы, М., Физматгиз, 1963.

20. Загорский Т. Я.

Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, Львов, 1961.

21. Зельдович Ю. В. и Компанеец А. С.

К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры, Сб., посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе, М., 1950.

22. Иванов А. В.

1) К вопросу о свойствах обобщенных решений линейных уравнений эллиптического и параболического типов, Вестник ЛГУ, сер. матем., № 7, 1964, 5—15.

2) Об одном классе функций, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **73**, 1964, 159—171.

3) Априорные оценки для решений линейных уравнений второго порядка эллиптического и параболического типов, ДАН СССР **161**, 1965, 1270—1273.

4) О некоторых свойствах обобщенных решений параболических уравнений второго порядка, 1. Изв. АН СССР, 1967.

5) Исследование свойств обобщенных решений квазилинейных параболических уравнений 2-го порядка, Канд. диссертация, ЛГУ, 1966.

Иванов А .В., Ладыженская О. А., Уральцева Н. И., Трескунов А. Л.

6) Некоторые свойства обобщенных решений параболических уравнений второго порядка, ДАН СССР, **168**, 1966, 17—20; Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **92**, 1966, 57—92.

23. Ильин А. М.

1) О фундаментальном решении параболического уравнения, ДАН СССР **147**, № 4, 1962, 768—771.

Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.

2) Линейные уравнения второго порядка параболического типа, УМН **17**, вып. 3, 1962, 3—146.

24. Ильин В. А.

О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений, УМН **15**, вып. 2, 1960, 97—154.

25. Ильин В. П.

1) Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных методов, Труды МИАН **53**, 1959, 64—127.

2) Свойства некоторых классов дифференциальных функций многих переменных, заданных в $n$-мерной области. Труды МИАН **66**, 1962, 227—363.

Ильин В. П. и Солонников В. А.

3) О некоторых свойствах дифференцируемых функций многих переменных, Труды МИАН **66**, 1962, 205—226.

26. Калашников А. С., Ильин А. М., Олейник О. А.

1) См. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.

Калашников А. С., Олейник О. А., Чжоу Юй-линь.

2) Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации, Изв. АН СССР, сер. матем. **22**, 1958, 667—704.

27. Каменомостская С. Л.

1) О задаче Стефана, Научн. докл. Высшей школы **1**, вып. 1, 1958, 60—62.

2) О задаче Стефана, Матем. сб. **53**, № 4, 1961, 489—514.

28. Камынин Л. И.

1) О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами, Изв. АН СССР, сер. матем. **28**, 1964, 721—744 (см. также ДАН СССР **139**, 1961, 1048—1051).

Камынин Л. И. и Масленникова В. Н.

2) Граничные оценки решения III краевой задачи для параболического уравнения, ДАН СССР **153**, № 3, 1963, 526—529.

3) Граничные оценки решения задачи с косой производной для параболического уравнения в нецилиндрической области, ДАН СССР **160**, № 3, 1965, 527—529.

29. Компанеец А. С. и Зельдович Ю. В.

См. Зельдович Ю. В.

30. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Соболевский П. Е.

1) О дифференциальных уравнениях с неограниченными операторами в банаховом пространстве, ДАН СССР **111**, 1956, 19—22.

2) О дифференциальных уравнениях с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, ДАН СССР **112**, 1957, 990—993.

31) Крейн С. Г. и Соболевский П. Е.

1) Дифференциальные уравнения с абстрактными эллиптическими операторами в гильбертовом пространстве, ДАН СССР **118**, 1958, 233—236.

Крейн С. Г., Красносельский М. А. и Соболевский П. Е.

2) См. Красносельский М. А.

32. Кружков С. Н.

1) Об априорной оценке решений линейных параболических уравнений и решений краевых задач для некоторого класса квазилинейных параболических уравнений, ДАН СССР 138, 1961, 1005—1008.

2) Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений второго порядка, ДАН СССР **150**, 1963, 748—751.

3) Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений, Матем. сб. **65**, № 4, 1964, 522—570.

4) Задача Коши в целом для нелинейных уравнений и некоторых квазилинейных систем первого порядка со многими переменными, ДАН СССР **155**, 1964, 743—746.

Кружков С. Н., Олейник О. А.

5) Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными, УМН **16**, 5(101), 1961, 115—155.

33. Ладыженская О. А.

1) О единственности решения задачи Коши для параболического уравнения, Матем. сб. **27** (69), 1950, 175—184.

2) О замыкании эллиптического оператора, ДАН СССР **79**, 1951, 723—725.

3) Смешанная задача для гиперболических уравнений, М., Гостехиздат, 1953.

4) О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типа, ДАН СССР **97**, 1954, 395—398.

5) О решении нестационарных операторных уравнений различных типов, ДАН СССР **102**, 1955, 207—210.

6) О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики, Матем. сб. **45** (87), 1958, 2, 123—158.

7) О решении общей задачи дифракции, ДАН СССР **93**, 1954, 433—436.

8) Решение в целом первой краевой задачи для квазилинейных параболических уравнений, ДАН СССР **107**, 1956, 636—639; Труды Моск. матем. об-ва **7**, 1958, 149—177.

9) Простое доказательство разрешимости основных краевых задач и задачи о собственных значениях для эллиптических уравнений, Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр. № 11, 1955, 23—29.

10) Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными, УМН **12**, вып. 5, 1957, 123—149.

11) Об интегральных оценках, сходимости приближенных методов и решений в функционалах для линейных эллиптических операторов, Вестник ЛГУ, № 7, 1958, 60—69.

12) О разрешимости «в целом» краевых задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений и уравнений Навье — Стокса, Труды IV Всесоюзного матем. съезда 1961 г., I, 1963, 134—157.
Ладыженская О. А. и Вишик М. И.
13) См. Вишик М. И.
Ладыженская О. А. и Уральцева Н. Н.
14) Краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений, ДАН СССР **139**, 1961, 544—547; Изв. АН СССР, сер. матем., ч. I, **26**, 1962, 5—52; ч. II, **26**, 1962, 753—780.
15) Краевая задача для линейных и квазилинейных уравнений и систем параболического типа, Изв. АН СССР, сер. матем., ч. III, **27**, 1963, 161—240.
16) О непрерывности по Гёльдеру решений и их производных для линейных и квазилинейных уравнений эллиптического и параболического типов, ДАН СССР 155, 1964, 1258—1261; Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **73**, 1964, 172—220.
Ладыженская О. А., Ривкинд В. Я. и Уральцева Н. Н.
17) О классической разрешимости задач дифракции для уравнений эллиптического и параболического типов, ДАН СССР 158, 1964, 513—515; Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **92**, 1966, 116—146.
Ладыженская О. А., Иванов А. В., Уральцева Н. Н. и Трескунов А. Л.
18) см. Иванов А. В.
Ладыженская О. А., Кжививцкий А.
19) Метод сеток для нестационарных уравнений Навье-Стокса. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **92**, 1966, 93—99.
34. Ландис Е. М.
Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений, УМН **14**, вып. 1, 1959, 21—85.
35. Лидский В. Б.
1) О разложении в ряд Фурье по главным функциям несамосопряженного эллиптического оператора, Матем. сб. **57**, вып. 2, 1962, 137—150.
2) О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов, Труды Моск. матем. об-ва **11**, 1962, 3—35.
36. Липко Г. Я. и Эйдельман С. Д.
О краевых задачах для параболических систем в областях общего вида, ДАН СССР **150**, 1963, 58—61.
37. Лопатинский Я. Б.
Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, Укр. матем. журн. **5**, № 2, 1953, 123—151.
38. Лянце В. Э.
Об одной краевой задаче для параболических систем дифференциальных уравнений с сильно эллиптической правой частью, Матем. сб. 35 (77), 1954, 357—368; **39** (81), 1956, 525.
39. Масленникова В. Н. и Камынин Л. И.
См. Камынин Л. И.
40. Матийчук М. И. и Эйдельман С. Д.
О параболических системах с коэффициентами, удовлетворяющими условию Дини, ДАН СССР **165**, 1965, 482—485.

41. Мейман Н. Н.

1) К теории уравнений с частными производными, ДАН СССР **97**, 1954, 543—546.

2) Об уравнении теплопроводности, ДАН СССР **99**, 1954, 209—212.

42. Михайлов В. П.

1) О задаче Дирихле и первой смешанной задаче для параболического уравнения, ДАН СССР **140**, 1961, 303—306.

2) О задаче Дирихле для параболического уравнения, I, Матем. сб. **61**, вып. 1, 1963, 40—64; II. Матем. сб. **62**, вып. 2, 1963, 140—159.

43. Михлин С. Г.

Интегралы Фурье и кратные сингулярные интегралы, Вестник ЛГУ, № 7, 1957, 143—155.

44. Мюнтц Г. М.

1) Zum dynamischen Wärmeleitungsproblem, Math. Zeitschr. **38**, 3, 1934, 323—338.

2) Интегральные уравнения, Ленииздат, 1934.

45. Никольский С. М.

Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях, Матем. сб. 33 (75); 2 1953, 261—326.

46. Олейник О. А.

1) Об одном методе решения общей задачи дифракции, ДАН СССР **135**, 1960, 1054—1057.

2) Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами, Изв. АН СССР, сер. матем. **25**, 1961, 9—20.

3) О квазилинейных параболических уравнениях со многими независимыми переменными, ДАН СССР **138**, 1961, 43—46.

4) Об одном методе решения общей задачи Стефана, ДАН СССР **135**, 1960, 1054—1057.

Олейник О. А. и Вентцель Т. Д.

5) См. Вентцель Т. Д.

Олейник О. А. и Кружков С. Н.

6) См. Кружков С. Н.

Олейник О. А., Ильин А. М. и Калашников А. С.

7) См. Ильин А. М.

Олейник О. А., Калашников А. С. и Чжоу Юй-линь

8) См. Калашников А. С.

47. Петровский И. Г.

1) Лекции об уравнениях с частными производными, М., Физматгиз, 1961.

2) Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung, Compositio Matematica **1**, fass. 3, 1935, 383—419.

3) О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций, Бюлл. МГУ (А) **1**, вып. 7, 1938, 1—72.

4) Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей, УМН **8**, 1940, 161—170.

48. Рубинштейн Л. И.

1) О некоторых нелинейных задачах, порождаемых уравнением Фурье, Докт. диссертация, МГУ, 1957.

2) Двухфазная задача Стефана на отрезке при однофазовом начальном состоянии теплопроводящей среды, Уч. зап. Латвийского ун-та, Труды вычислит. центра 58, 1964, 111—148.

49. Рябенький В. С. и Филиппов А. Ф.

Об устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат, 1956.

50. Сабинина Е. С.

1) О задаче Коши для уравнения нестационарной фильтрации газа со многими пространственными переменными, ДАН СССР **136**, 1961, 1034—1037.

2) Об одном классе нелинейных вырождающихся параболических уравнений, ДАН СССР **143**, 1962, 794—797.

51. Самарский А. А.

1) Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области, Журнал вычисл. матем. и матем. физики **2**, 1962, 787—811.

Самарский А. А. и Тихонов А. Н.

2) О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами, ДАН СССР **108**, 1956, 393—396.

52. Саульев В. К.

Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, М., Физматгиз, 1960.

53. Слободецкий Л. Н.

1) Обобщенные решения параболических и эллиптических систем, Изв. АН СССР **21**, 1957, 809—834.

2) Оценка решений эллиптических и параболических систем, ДАН СССР **120**, 1958, 468—471.

3) О фундаментальном решении и задаче Коши для параболической системы, Матем. сб. **46** (88) : 2, 1958, 229—258.

4) Оценки в $L_p$ решений эллиптических систем, ДАН СССР **123**, 1958, 616—619.

Слободецкий Л. Н. и Бабич В. М.

5) См. Бабич В. М.

54. Смирнов В. И.

Курс высшей математики, т. IV, М., Физматгиз, 1958; т. V, М., Физматгиз, 1959.

55. Соболев С. Л.

1) Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.

2) Уравнения математической физики, М. — Л., ОГИЗ, 1947.

56. Соболевский П. Е.

1) О дифференциальных уравнениях параболического типа в гильбертовом пространстве и о приближенном их решении методом Бубнова — Галеркина. Канд. дисс., ЛГУ, 1958.

2) Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве, Труды Моск. матем. об-ва **10**, 1961, 287—350.

3) О локальной и нелокальной теореме существования для нелинейных параболических уравнений второго порядка, ДАН СССР **136**, 1961, 292—295.

Соболевский П. Е. и Крейн С. Г.

4) См. Крейн С. Г.

Соболевский П. Е., Красносельский М. А. и Крейн С. Г.

5) См. Красносельский М. А.

57. Соломяк М. З.

1) Применение теории полугрупп к дифференциальным уравнениям в пространстве Банаха, ДАН СССР **122**, 1958, 766—769.

2) Аналитический характер полугрупп, порожденных эллиптическими операторами в пространстве $L_p$, ДАН СССР **127**, 1959, 37—39.

3) Об условии Я. Б. Лопатинского разрешимости краевых задач, Вестник ЛГУ, № 1, 1965, 143—144.

58. Солонников В. А.

1) Об априорных оценках для некоторых краевых задач, ДАН СССР **138**, 1962, 781—784.

2) Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа, Труды МИАН **70**, 1964, 133—212.

3) О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида, Труды МИАН, **83**, 1965.

4) Об общих краевых задачах для систем дифференциальных уравнений эллиптического и параболического типов, Новосибирск, 1963, Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными.

5) О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида, Докт. диссертация, ЛГУ, 1964.

6) См. Головкин К. К., Солонников В. А.

7) См. Ильин В. П., Солонников В. А.

59. Степанов В. В.

Курс дифференциальных уравнений М. — Л., ГОНТИ, 1945.

60. Тихонов А. Н.

1) Теорема единственности для уравнения теплопроводности, Матем. сб. № 2, 1935, 199—216.

2) Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных, Бюлл. МГУ (А) **I**, вып. 9, 1937, 1—49.

3) О третьей краевой задаче для уравнения параболического типа, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 3, 1950, 193—198.

Тихонов А. Н. и Самарский А. А.

4) См. Самарский А. А.

61. Трескунов А. Л, Иванов А. В., Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.

См. Иванов А. В.

62. Уральцева Н. Н.

1) О регулярности решений многомерных эллиптических уравнений и вариационных задач, ДАН СССР **130**, 1960, 1206—1209.

2) Краевые задачи для квазилинейных эллиптических уравнений и систем с дивергентной главной частью, ДАН СССР **147**, 1962, 313—316.

Уральцева Н. Н. и Ладыженская О. А.

3) См. Ладыженская О. А.

Уральцева Н. Н., Иванов А. В., Ладыженская О. А., Трескунов А. В.

4) См. Иванов А. В.

Уральцева Н. Н., Ладыженская О. А., Ривкинд В.

5) См. Ладыженская О. А.

63. Филиппов А. Ф.

Об условиях существования решения квазилинейного параболического уравнения, ДАН СССР **141**, 1961, 568—570.

64. Фихтенгольц Г. М.

Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, М., Физматгиз, 1960.

65. Чжоу Юй-линь

1) Краевые задачи для нелинейных параболических уравнений, ДАН СССР **117**, 1957, 195—198; Матем. сб. **47** (89) : 4, 1959, 431—484.

Чжоу Юй-линь, Калашников А. С. и Олейник О. А.

2) См. Калашников А. С.

66. Чистякова Е. М.

Применение метода конечных разностей к решению смешанных задач для некоторых гиперболических и параболических систем, Канд. диссертация, Пединститут, Ленинград, 1956.

67. Шилов Г. Е.

1) Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, УМН **10**, вып. 4, 1955, 89—100.

Шилов Г. Е. и Гельфанд И. М.

2) См. Гельфанд И. М.

68. Эйдельман С. Д.

1) Параболические системы, М. Изд-во Наука, 1964.

2) О фундаментальных решениях параболических систем, I Матем. сб. **38** (80), вып. 1, 1956, 52—92; II, **53** (95), вып. 1, 1961, 73—136.

Эйдельман С. Д. и Липко Г. Я.

3) См. Липко Г. Я.

Эйдельман С. Д. и Матийчук М. Н.

4) См. Матийчук М. Н.

1. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.

Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, Comm. Pure Appl. Math. **12**, № 4, 1959, 623—727; II, Comm. Pure Appl. Math **17**, № 1, 1964, 35—92.

2. Aronszajn N.

Boundary value of functions with finite Direchlet integral, Conference on partial diff. equations, Univ. of Kansas, 1955, 77—93.

3. Barrar R. B.

Some estimates for solutions of parabolic equations, Jour. Math. Anal. and Appl. **3**, № 2, 1961, 373—397.

4. Browder F. E.

1) Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems, Proc. Nat. Acad. Sci., Wash. **45**, 1959, 365—372.

2) Nonlinear parabolic boundary value problems of arbitrary order, Bull. Amer. Math. Soc. **69**, № 6, 1963, 858—861.

3) Strongly non-linear parabolic boundary value problems, Amer. J. Math. **86**, № 2, 1964, 339—357.

4) Non-linear initial value problems, Ann. of Math. **82**, № 1, 1965, 51—88.

5) Existence and uniqueness theorems for solutions of nonlinear boundary value problems, Proc. Symp. Appl. Math., **42**, 1965, 24—49.

5. Calderon A. and Zygmund A.
On the existence of certain singular integrals, Acta Math. **88,** 1952, 85—139.
6. Ciliberto C.
1) Sulle equazioni non lineari di tipo parabolico in due variabili, Ricerche mat. **3,** 1954, 129—165.
2) Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per soluzioni delle equazione paraboliche in due variabili, Ricerche mat. **3,** 1954, 40—75.
3) Sulle equazioni quasi lineari di tipo parabolico in due variabili, Ricerche mat. **5,** № 1, 1956, 97—125.
4) Nuovi contributi alla teoria dei problemi al contorno per le equazioni paraboliche non lineari in due variabili, Ricerche mat. **5,** № 2, 1956, 206—225.
7. Courant R., Friedrichs K. und Lewy H.
1) Über der partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Math. Ann., **100,** 1928, 32—74. (Русский перевод: УМН, вып. 8, 1940, 125—160.)
Courant R. und Hilbert D.
2) Methoden der mathematischen Physik, vol. I, 1931. (Русский перевод, Москва, 1951.)
8. Douglas J.
A uniqueness theorem for the solution of a Stefan problem, Proc. Amer. Math. Soc. 8, 1957, 402—408.
9. Douglis A., Agmon S. and Nirenberg L.
See Agmon.
10. Doetsh G.
Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, Springer, 1937.
11. Dressel F.
The fundamental solution of the parabolic equation, I, Duke Math. Journ. **7,** № 4, 1940, 186—203; II, **13,** № 1, 1946, 61—70.
12. Faedo S.
Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantativa dei problemi di propagazione, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **1,** 1949, 1—40.
13. Feller W.
Zur Theorie der stochastischen Prozesse, Math. Ann. **113,** 1936, 113—160.
14. Forsythe G. E. and Rosenbloom P. Ch.
Numerical analysis and partial differential equations, New York — London, 1958.
15. Friedman A.
1) Interior estimates for parabolic systems of partial differential equations, J. Math. and Mech. **7,** № 3, 1958, 393—417.
2) Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, INC, 1964.
16. Friedrichs K., Courant R., Lewy H.
See Courant R.
17. Cagliardo E.
1) Problema al contorno per equazioni differentiali lineari di tipo parabolico in $n$ variabili. Ricerche mat. **5,** 1956, 169—205.

2) Teoremi di esistenza e di univita per problemi al contorno relativi ad equazioni paraboliche lineari e quasi lineari in $n$ variabili, Richerche mat. 5, 1956, 239—257.

3) Caratterizzioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in $n$ variabili, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 27, 1957, 284—305.

4) Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili, Richerche mat. 7, № 1, 1958, 102—137; 8, № 1, 1959, 24—51.

18. Gevrey M.

Sur les quations aux dérivées partielles du type parabolique, (I), (II), 1913, 405—471; 10, 1914, 105—143.

19. De Giorgi E.

Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari, Mem. Accad. Sci. Torino 3, 1957, 25—43.

20. Green J. W.

An expansion method for parabolic differential operators, J. Res. Nat. Bur. Stand. 51, 1953, 127—132.

21. Guglielmino Fr.

1) Sulla regolarizzazione delle soluzioni deboli dei problemi al contorno per operatori parabolici, Richerche mat. 12, 1963, 44—66.

2) Ulteriori contributi alla regolarizzazione delle soluzioni deboli dei problemi parabolici, Richerche mat. 12, 1963, 140—150.

3) Sulle equazione paraboliche del secondo ordine di tipo non-variazionale, Annali di Mat. Pura ed appl. 65, 1964, 127—151.

22. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.

Inequalities, 1934 (русский перевод: ГИИЛ, Москва, 1948).

23. Hilbert D. und Courant R.

See Courant R.

24. Hille E.

1) Functional Analysis and Semigroups, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1948, 31.

Hille E. and Phillips R. S.

2) Functional Analysis and Semi-Groups. Revised Edition, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1957, 31.

25. Holmgren E.

Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen, Öfversigt auf kongl. Vetenskaps — Acad. Förh., 1901, 91—103.

26. Hopf E.

1) Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordning von elliptischer Typus, Sitber. press Akad. Wiss. Berlin 19, 1927, 147—152.

2) Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachr. 4, 1951, 213—231.

27. Ince E. L.

Ordinary differential equations, Dover publications, New York, 1944.

28. John F.

On integration of parabolic equations by difference methods, Comm. Pure Appl. Math. 5, 1952, 155—211.

29. Kadlec J. and Vyborny R.

Strong maximum principle for weakly nonlinear parabolic equations, Comm. Math. Univ. Carolinae 6, 1, 1965, 19—20.

**30.** Kato T.

1) Integration of the equation of evolution in a Banach space, J. Math. Soc. Japan 5, 1953, 208—304.

2) On the linear differential equations in Banach spaces, Comm. Pure Appl. Math. **9**, 1956, 479—486.

3) Nonlinear evolution equations in Banach spaces (препринт, 1965 г.)

**31.** Kolodner I. I.

Free boundary problem for the heat equation with application to problems of a change of phase, Comm. Pure Appl. Math. **9**, 1956, 1—31.

**32.** Krzyzanski M.

Sur l'unicité des solutions des second et troisieme problèmes de Fourier relatifs a l'équation lineaire normale du type parabolique, Ann. Polon. Math. **7**, № 2, 1960, 201—208.

**33.** Lax P. D. and Milgram A. N.

Parabolic equations, Ann. Math. Studies, № 33, 1954, 167—189.

**34.** Leray J. and Lions J. L.

1) Bull. Soc. Math. France **93**, 1965, 97—107, 155—175.

Leray J. and Schauder J.

2) Topologie et equations fonctionnelles, Ann. Ec. Sup. **51**, 1934, 45—78. (Перевод: УМН **1**, 3—4, 1946.)

**35.** Levi E. E.

Sulle equazioni lineare totalemente elliticne alle derivate parziali, Rend. Circ. Matem. Palermo **24**, 1907, 275—317. (Перевод: УМН, вып. VIII, 1940, 249—292.)

**36.** Levy H., Courant R. and Friedrichs K.

See Courant R.

**37.** Lions J. L.

Equations differentielles-operationneles et problemes aux limites, Springer, 1961.

**38.** Lichtenstein L.

Die neue Entwicklung in der Theorie der partieller Differentialgleichungen of second order, Encykl. der Math. Wissen. $II_3$, 8, 1924, 1277—1334.

**39.** Milgram A. N. and Lax P. D.

See Lax.

**40.** Minty G.

1) Monotone nonlinear operators in Hilbert space, Duke Math. **29**, 1962, 341—346.

2) Two theorems on nonlinear functional equations in Hilbert space, Bull. Amer. Math. Soc. **69**, 1963, 691—692.

On a «monotonicity» method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **50**, 1963, 1038—1041.

**41.** Mizohata S.

Hypoellipticite des equations paraboliques, Bull. Soc. Math. France 85, 1957, 15—50.

**42.** Moser J.

1) A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. Pure and Appl. Math. **13**, № 3, 1960, 457—468.

2) A Harnack inequality for parabolic diff. equations, Comm Pure Appl. Math. **17**, № 1, 1964, 101—134.
43. N a s h J.
Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, Amer. J. Math. **80**, 1958, 931—954.
44. N i r e n b e r g L.
1) A strong maximum principle for parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math. **6**, № 2, 1953, 167—177.
2) On elliptic partial diff. equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. III, XIII, Fasc. II, 1959, 115—162.
N i r e n b e r g L., A g m o n S. and D o u g l i s A.
See Agmon.
45. P a g n i M.
Su un problema al contorno tipico per l'equazione del calore, I, II Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. III, II, 1957, Fasc. I—II, 73—115; Fasc. III—IV, 209—216.
46. P h i l l i p s R. S. and H i l l e E.
See Hille.
47. P o g o r z e l s k i W.
1) Etude de la solution fondamentale de l'equation parabolique, Ricerche mat. **5**, 1956, 25—57.
2) Problemes aux limites pour l'equation parabolique normale, Ann. Polon. Math. **4** (1), 1957, 61—92.
3) Исследование интегралов параболического уравнения и краевых задач в неограниченной области, Матем. сб. **47** (89) : 4, 1959, 397—430.
4) Etude d'une fonction de Green et du probleme aux limites pour l'equation parabolique normale, Ann. Polon. Math. **4**, № 3, 1958, 288—307.
48. P r o d i G.
Teoremi di esistenza per equazioni alle derivate parziali non lineari di tipo parabolico, Rend. Ist. Lomb. Sci. Lettere **86**, 1953, I, 3—26; II, 27—47.
49. R i c h t m y e r R. D.
Difference methods for initial value problems, New York, 1958.
50. R o s e n b l o o m P. Ch. and F o r s y t h e G. E.
See Forsythe.
51. R o t h e E.
Wärmeleitungsgleichung mit nichtconstanten koeffizienten, Math. Ann. **104**, 1931, 340—362.
52. S c h a u d e r J. and L e r a y J.
See Leray.
53. S c h w a r t z L.
Theorie des distributions, t. 1, Paris, Hermann, 1950 (deuxième édit. 1957); t. 2, Paris, Hermann, 1951.
54. S e s t i n i G.
1) Esistenza di una soluzione in problemi — analogi a quello di Stefan, Rivista Mat. Univ. Parma **3**, 1952, 103—112.
2) Esistenza ed unicita nel problema di Stefan, relativo a compi dotati di simmetria, Rivista Mat. Univ. Parma **3**, 1952, 103—112.

55. Shirota T.

1) The initial value problem for linear differential equations with variable coefficients, Proc. Japan Acad. **33**, I, 1957, 31—36; II, 103—104; III, 457—461.

2) On Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients, Osaka Math. J. **9**, 1957, 43—60.

56. Täcklind S.

Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique, Nord Acta Regial Soc. Sci. Uppsaliensis **4**, № 10, 1936.

57. Titchmarsh E. G.

The introduction in the theory of the Fourier's integral, Oxford, 1937.

58. Vyborny R.

1) О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений параболического типа, ДАН СССР **117**, 1957, 563—565.

Vyborny R. and Kadlec J.

2) See Kadlec J.

59. Yosida K.

1) On the differentiability and the representation of the parameter semi-groups of linear operators, J. Math. Soc. Japan. **1**, 1948, 15—21.

2) On the integration of diffusion equations in Riemannian Spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 1952, 864—879.

60. Zygmund A.

1) On a theorem of Marcinkiewicz, J. Math. pures appl. **35**, 1956, 223—248.

Zygmund A. and Calderon A.

2) See Calderon.