О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ, Н. Н. УРАЛЬЦЕВА

ЛИНЕЙНЫЕ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

517.2
Л. 15
УДК 517.947

Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Главная редакция физико-математической литературы, изд-во «Наука», 1973.

Книга посвящена линейным и квазилинейным эллиптическим уравнениям второго порядка. В ней проводятся качественные исследования решений этих уравнений и на их базе устанавливается разрешимость в целом классических краевых задач. Книга содержит изложение основных достижений, полученных в данной области и опубликованных лишь в журнальной литературе. В ней дается полное решение 19-й и 20-й проблем Гильберта. Многие результаты получены авторами книги и в развернутом виде изложены только здесь.

Во втором издании учтены результаты, полученные после написания первого издания, улучшено изложение ряда разделов, добавлены новые параграфы почти во все главы книги, в том числе включены приближенные методы решения краевых задач, наконец, исправлены замеченные недочеты первого издания.

Библ. — 235 названий.

Ольга Александровна Ладыженская,
Нина Николаевна Уральцева

Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа

М., 1973 г., 576 стр.

Редакторы *А. П. Осколков, М. М. Горячая*
Техн. редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *Т. С. Плетнева, Е. В. Сидоркина*

Сдано в набор 8/XII 1972 г. Подписано к печати 5/VI 1973 г.
Бумага $60 \times 90^1/_{16}$, тип. № 1. Физ. печ. л. 36. Условн. печ. л. 36.
Уч.-изд. л. 35,9. Тираж 5 000 экз. Т-08163.
Цена книги 2 р. 50 к. Заказ № 432.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

Л $\frac{0232-1777}{042(02)-73}$ 44-72

ОГЛАВЛЕНИЕ

1*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

С момента написания первого издания книги (дадим ему номер [I]) прошло около десяти лет. Опишем кратко, какое развитие получили вопросы, являющиеся предметом этой книги, и какие в связи с этим дополнения сделаны в данном издании.

1) Большой общности добились в направлении исследования краевых задач для линейных эллиптических уравнений и систем с «хорошими» коэффициентами. Для них сделано то же, что и для одного уравнения второго порядка: доказана нормальная разрешимость в пространствах $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ и $W_p^l(\Omega)$ при условиях, вызванных существом дела (см. работы С. Агмона, А. Дуглиса, Л. Ниренберга [1], В. А. Солонникова [35] и др.). Важным моментом при этом является идея Шаудера замораживания коэффициентов, сводящая проблему к изучению соответствующих задач для уравнений с постоянными коэффициентами. Это сведение возможно, если коэффициенты в главных членах непрерывны в обычном смысле для случая пространств $W_p^l(\Omega)$ и если все коэффициенты непрерывны по Гёльдеру в случае пространств $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$. Для указанных задач построены матрицы Грина, и для них и их производных даны предельно точные точечные оценки. В ряде важных случаев удалось вычислить индекс задач (см. привлекшую большое внимание работу М. Атии и И. Зингера и ее продолжения; ей предшествовали работы по вычислению индекса для задач на плоскости и некоторых частных задач в трехмерном пространстве).

Иная ситуация возникла при попытке распространить результаты §§ 13—15 гл. III об уравнениях с разрывными коэффициентами на эллиптические уравнения высоких порядков и системы (о желательности таких рассмотрений сказано в конце стр. 49 — начале стр. 50 [I] или, что то же, на стр. 57 данного издания). Оказалось, что они не сохраняют свою форму. Е. Де Джорджи [11_4] и В. Г. Мазья [22_3] построили однородные уравнения выше второго порядка, которые имеют разрывные решения с конечной энергетической нормой.

2) Для квазилинейных уравнений произвольного порядка $2l$ с дивергентной главной частью был дан в начале 60-х годов «прямой» метод доказательства разрешимости классических

краевых задач в пространствах $W_m^l(\Omega)$. (Он применим также и к системам таких уравнений.) Приближенные решения строятся известным способом (по методу Галеркина), сходимость же их к (обобщенному) решению исследуемой задачи устанавливается своеобразно, с использованием идеи Г. Минти о слабых предельных переходах под знаком выпуклых операторов (см. в связи с этим работы Ф. Браудера и др.). Эта идея, дополненная оригинальным рассуждением Ж. Лерэ и Ж. Лионса о предельном переходе в младших членах, позволила доказать разрешимость указанных краевых задач при условиях на поведение образующих уравнения функций для больших значений их аргументов, близких к необходимым. Прототипом этого метода, с одной стороны, является «прямой» метод разыскания функции, реализующей абсолютный минимум функционала $J(u) = \int\limits_{\Omega} F(x, u, u_x)\,dx$ при каком-либо краевом условии, а с другой — метод Галеркина для линейных задач. Сформировался он постепенно благодаря исследованиям ряда математиков (см. в связи с этим [**7**, **32**$_3$, **36**, 18] и др.). Мы излагаем его в § 9 гл. IV применительно к основному объекту данной книги — квазилинейным уравнениям второго порядка, имеющим дивергентную главную часть. В § 10 результаты § 9 сравниваются с результатами, получаемыми другими методами.

В первом издании книги (см. стр. 58 [I] или, что то же самое, стр. 63 данной книги) мы обращали внимание на важную и сложную проблему изучения гладкости обобщенных решений из $W_m^l(\Omega)$, $l > 1$, для квазилинейных уравнений и систем произвольного порядка $2l$ и доказательство допустимости такого расширения классической постановки краевых задач для них, т. е. доказательство теоремы единственности в классе таких решений для малых областей (к этому направлению относятся работы [**42**$_{1,2}$] Ин. Нэчаса). Решению этих вопросов для уравнений второго порядка посвящена значительная часть данной книги. Для уравнений высоких порядков и систем М. Миранда, Е. Джусти и В. Г. Мазьей обнаружен новый эффект. Эти уравнения при $n > 2$ (n — всюду размерность пространства аргументов) могут иметь негладкие обобщенные решения при гладких (и даже аналитических) функциях, образующих уравнения ([**22**$_2$, 22$_3$]). Более того, М. Миранда и Е. Джусти доказали, что при достаточно большом n построенное ими решение является единственным решением задачи и единственной функцией, на которой некоторый функционал принимает свое наименьшее значение. (Как доказывается в гл. V, это невозможно для функционалов вида $J(u) = \int\limits_{\Omega} F(x, u, u_x)\,dx$.) Ввиду этого приобретают еще большее значение результаты Ч. Морри [39_7] (см. также работу [22_1] Е. Джусти) о гладкости обобщенных решений $u(x)$ широких классов квазилинейных уравнений высоких порядков и систем таких уравнений на открытых множествах полной меры (но не во всех точках x!).

При их доказательстве Ч. Морри использовал одну важную идею Ф. Альмгрена, изучавшего тот же вопрос для обобщенных решений многомерных вариационных задач, обобщающих задачу Плато. Вообще мысль о том, что нелинейные эллиптические уравнения высоких порядков и системы с гладкими (и даже аналитическими) функциями могут иметь решения с особенностями на множествах нулевой меры, зародилась, по-видимому, в связи с многомерной задачей Плато. Физические эксперименты с мыльными пленками, являющимися «обобщенными решениями» задачи Плато, указывали, что такие решения могут иметь особые точки и даже линии. В работах Е. Райфенберга [47] и Ф. Альмгрена [4], предшествовавших упомянутой выше работе [39_7] Ч. Морри, доказывалась гладкость обобщенных решений задачи Плато и ее обобщений для почти всех значений аргумента. Примеры, построенные итальянскими математиками, показывают, что для всех значений аргумента это и неверно. Иными методами изучается задача о построении минимальной гиперповерхности в n-мерном евклидовом пространстве в работах Е. Де Джорджи [$11_{1,3}$] и М. Миранда [38_2].

Упомянутые здесь результаты не нашли отражения в данном издании. Их изложение потребует отдельных книг, ибо доказаны они с использованием средств, отличных от имеющихся в данной книге. Одна книга такого плана уже появилась — это книга [14_1] Г. Федерера. В ней нашли отражение исследования самого автора, В. Флеминга и др. (в частности, работа [14_2]). Методы исследования, развитые в этих работах, весьма своеобразны, геометричны и не везде прозрачны. Они не похожи на те, которыми работаем мы. Но нам кажется, что с течением времени (как это много раз наблюдалось в математике) многое прояснится и будет упрощено, и в этом упрощении сыграют свою роль методы, излагаемые в данной книге (см. в связи этим последние главы книги [39_6] Ч. Морри и работу [3] В. Алларда).

3) До конца 50-х годов основным объектом изучения были квазилинейные эллиптические уравнения $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, u_x)\, u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = 0$, для которых отношение $\dfrac{\max\limits_{|\xi|=1} a_{ij}(x, u, p)\,\xi_i\xi_j}{\min\limits_{|\xi|=1} a_{ij}(x, u, p)\,\xi_i\xi_j} \equiv \tau(x, u, p)$ не превосходит какой-либо непрерывной функ-

ции $\tau_0(x, u)$ при всех $p \in E_n$. Такие уравнения стали называть равномерно эллиптическими. Им посвящена и данная книга. В 60-х годах много усилий было направлено на изучение различных классов неравномерно эллиптических уравнений, т. е. уравнений, для которых $\tau(x, u, p)$ неограниченно растет при $|p| \to \infty$. К таким уравнениям относятся уравнения, определяющие среднюю кривизну гиперповерхности в евклидовом и римановом пространствах, в том числе уравнение минимальных поверхностей, уравнения Эйлера для параметрических вариационных задач и ряд других интересных уравнений дифференциальной геометрии.

Основной вопрос для неравномерно эллиптических уравнений состоит в априорной оценке $\max|\nabla u|$ для их решений $u(x)$. Если такая оценка получена, то все дальнейшие оценки для u уже имеются, ибо $\tau(x, u(x), u_x(x))$ ограничена на $u(x)$ и можно применять результаты о равномерно эллиптических уравнениях. Оценка $|\nabla u|$ разделяется на такие задачи: а) получение оценки $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$ и затем, с ее использованием, оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$; b) получение локальных оценок $|\nabla u|$, т. е. оценок $\max\limits_{\Omega'}|\nabla u|$ для $\forall\, \overline{\Omega}' \subset \Omega$, через какие-либо характеристики известных функций, $\max\limits_{\Omega}|u|$ и расстояние от Ω' до границы $\partial\Omega$. Метод оценки $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$ для равномерно эллиптических уравнений восходит в своей существенной части к работам С. Н. Бернштейна. Он допускал обобщения на некоторые классы неравномерно эллиптических уравнений (см. § 2 гл. VI). Иной метод оценки $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$, охвативший более широкие классы неравномерно эллиптических уравнений (в том числе и уравнение средней кривизны гиперповерхности), дан в недавнем мемуаре [$\mathbf{51}_{11}$] Дж. Серрина. Для таких уравнений могут играть роль геометрические характеристики граничной поверхности $\partial\Omega$ в пространстве x (например, ее выпуклость или величина средней кривизны — см. [28_2]). И. Я. Бакельманом для уравнений, определяющих среднюю кривизну поверхности, дан иной способ оценки $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$ ([$3_{2,3}$]).

Для оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ при уже известной оценке $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$ обычно применяют один из двух методов, изложенных в гл. IV и гл. VI нашей книги [I]. Метод, описанный в гл. VI, исходит из работы [21_8] 1956 г., в которой было показано, что получение такой оценки можно свести к построению решения $\varphi(t)$ некоторого обыкновенного дифференциального неравенства (или, в частности, обыкновенного дифференциального уравнения). В самой работе [21_8] рассматривался еще сравнительно узкий класс квазилинейных уравнений ([21_8] посвящена более сложному объекту — параболическим уравнениям, но то, что касается оценки $|u_x| \equiv |\nabla u|$, одинаково для обоих типов уравнений). Однако это было вызвано не возможностями предложенного там способа оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$, а неумением в то время получать оценку постоянной Гёльдера для ∇u. Известные работы Е. Де Джорджи [11_1] и Дж. Нэша [41] положили начало получению оценок постоянных Гёльдера для решений u и их производных ∇u. Отправляясь от этих работ и работы [21_8], оказалось возможным охватить весь класс квазилинейных равномерно эллиптических уравнений и изложить это в [I] в сравнительно доступной форме. Однако в гл. VI [I] изложение основной идеи оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ работы [21_8] сильно усложнено тем, что мы проводим ее сразу для обобщенных решений u, не имеющих производных u_{xx} в каждой точке x (для сравнения напомним, что эти предположения обычно делаются даже при получении значительно более простой оценки — оценки $\max\limits_{\Omega}|u|$ на основании принципа максимума). Такое нагромождение трудностей привело к тому, что исследователям, не связанным с нами непосредственно, пришлось переоткрывать для себя ту простую «рабочую» форму метода оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ (см. в связи с этим вышеупомянутые работы Дж. Серрина [51_{11}] и И. Я. Бакельмана [$3_{2,3}$]), которая изложена в [21_8] применительно к частному случаю и которой мы пользовались сами при изучении различных классов квазилинейных уравнений. В данном издании книги мы учли нашу методическую ошибку и изложили в гл. VI первый метод оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ в том виде, в котором он более доступен, предположив, что u есть классическое решение уравнения (для неклассических же решений см. гл. VI первого издания). Более того, мы показали (см. [21_{22-24}]), что он позволяет охватить наиболее широкие на сегодня классы квазилинейных неравномерно эллиптических уравнений второго порядка.

В гл. IV сохранена прежняя «интегральная» форма оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ для обобщенных решений. Некоторое упрощение достигнуто за счет дополнительного предположения, что исследуемое решение имеет ограниченные производные ∇u. Возможности этого метода оценки применительно к различным классам неравномерно эллиптических уравнений проанализированы в работах [$15_{2,3,4}$], [$24_{1,2,4}$].

В § 3 гл. VI изложена также оценка $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ для решений некоторого класса неравномерно эллиптических уравнений, данная А. В. Ивановым [14_3]. Упомянем еще исследования X. Дженкинса и Дж. Серрина по многомерному уравнению минимальных поверхностей ([$28_{1,2}$]).

В гл. IV и VI проведены локальные оценки градиентов $|\nabla u|$, причем в гл. VI это сделано и для неравномерно эллиптических уравнений. Локальные оценки градиентов, данные в гл. VI, также восходят к работе [21_8] 1956 г. и изложены теперь в форме, близкой к первоначальной. Они охватывают весь класс равномерно эллиптических уравнений и «почти» те же классы неравномерно эллиптических уравнений, для которых получена описанная выше оценка $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$. «Почти» состоит в дополнительном ограничении: порядок роста $\tau(x, u, p)$ по p должен быть меньше 2. Это ограничение исключает упоминавшиеся выше уравнение средней кривизны (в том числе уравнение минимальных поверхностей) и уравнения Эйлера для параметрических вариационных задач. Для них пришлось искать иные методы локальных оценок. Такие оценки даны нами в работе [21_{24}]. Ей предшествовали исследования Де Джорджи в соавторстве с Е. Бомбиери и М. Миранда по локальным оценкам $|\nabla u|$ для гладких решений уравнения минимальных поверхностей при любом $n \geqslant 2$ ([**11_5**, **6**]). Случай $n=2$ исследовался многими авторами (см. [**$16_{2,4,5}$**, 28_1] и др.). Работы [**11_5**, **6**, 21_{24}] здесь не излагаются, ибо это вывело бы нас за пределы аналитических фактов, изложенных в гл II. В частности, в них используется изопериметрическое неравенство Федерера — Флеминга, доказанное ими для интегральных потоков, и оригинальное обобщение теоремы вложения (3.1) из гл. II, доказанное М. Миранда [**38_1**].

Итак, гл. IV и VI и в данном издании книги посвящены в основном равномерно эллиптическим уравнениям. Для неравномерно эллиптических уравнений сделано лишь то, что не выходит за рамки методов и общих аналитических предложений гл. II первого издания. Этот объект требует дальнейшего изучения, в том числе построения примеров, очерчивающих границы, за которыми падает разрешимость «в целом» классических краевых задач (см. в связи с этим, например, [28_2]). Заметным продвижением в этом направлении является работа [**51_{11}**] Дж. Серрина, в которой дан оригинальный метод оценки $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$ и метод оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$, аналогичный первому методу, излагаемому в гл. VI. Сочетание результатов работы [**51_{11}**] по оценке $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$ и результатов, изложенных в данной книге, приводит к наиболее общим на данное время результатам по классической разрешимости «в целом» краевых задач для неравномерно эллиптических уравнений.

4) В первом издании книги мы не касались вырождающихся уравнений, хотя методы, изложенные в [I], с успехом используются для изучения этих объектов. В качестве иллюстрации возможностей этих методов мы включили во второе издание исследование вариационной задачи для функционала $\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^m dx$ и несколько более общих квазирегулярных функционалов вида $\int\limits_{\Omega} F(\nabla u)\,dx$. Этому посвящен § 7 гл. V. К нему примыкает § 6 гл. VIII, в котором исследуется один класс вырождающихся квазилинейных систем. Аналитическую основу для решения этих задач составляют результаты § 9 гл. II о гёльдеровости элементов класса $\tilde{\mathfrak{B}}_m^N$, являющегося некоторым обобщением классов $\mathfrak{B}_m$ и $\mathfrak{B}_m^{N_1}$. Упомянем некоторые из исследований по вырождающимся квазилинейным уравнениям. Это работы [13] Ю. А. Дубинского, в которых с помощью метода Минти — Браудера, описанного в п. 2), автор доказывает существование обобщенных решений задачи Дирихле для некоторых классов таких уравнений. В работе [$\mathbf{51}_8$] Дж. Серрина исследуются свойства обобщенных решений квазилинейных вырождающихся уравнений второго порядка. В работах [$34_{3,4}$] Т. Б. Соломяк исследуется один класс таких уравнений, связанных с задачами дозвуковых течений идеальной сжимаемой жидкости. Интересные задачи по вырождающимся уравнениям встречаются в теории пластичности. По ним имеется немалая специальная литература.

5) С вопросами о гладкости обобщенных решений, затронутыми в п. 2), связана группа исследований, посвященных изучению устранимых особенностей решений квазилинейных эллиптических уравнений. Классическим прототипом для работ этой группы явилась общеизвестная теорема об устранимости особой точки аналитической функции, ограниченной вблизи этой точки. Подобными вопросами много и успешно занимался Дж. Серрин ([$\mathbf{51}_{6-10}$] и др.). Некоторые из его результатов были обобщены В. Г. Мазьей [22_4] на случай уравнений выше второго порядка. Р. Финн, Дж. Серрин и др. исследовали поведение решений разных уравнений в окрестности бесконечно удаленной точки или вблизи особых точек. Р. Финн исследовал поведение решений уравнения минимальных поверхностей с правой частью ku при $n=2$ в окрестности угловой особой точки границы ([$\mathbf{16}_6$]).

6) Ряд задач механики и в последние годы теории управления требуют решения различных условных вариационных задач. Простейшими задачами этого типа являются задача на определение собственных чисел и собственных значений линей-

ного симметричного оператора (см. конец § 17 гл. III) и задача на определение

$$\inf J(u) \equiv \inf \int_{\Omega} F(x, u, u_x)\,dx$$

среди всех функций $u(x)$, обладающих некоторой гладкостью, удовлетворяющих какому-либо краевому условию и подчиняющихся дополнительному условию (1): $|u(x)| \leqslant M$ (см. о ней гл. V).

Существование обобщенных решений весьма разнообразных условных вариационных задач, в том числе и задач, сформулированных в последние годы, обычно доказывается сравнительно просто на основании тех же соображений о полуограниченности и полунепрерывности исследуемого функционала, которые изложены в § 2 гл. V для обычной вариационной задачи (конечно, есть задачи, в которых и эти кардинальные факты устанавливаются нестандартно для нашего времени, — см. гл. IV книги [39_6] Ч. Морри или работы Г. Фикера [**15**]). Несравнимо большие трудности наступают при исследовании гладкости этих обобщенных решений. Так, для второй из упомянутых задач первым важным этапом было доказательство гёльдеровой непрерывности ее обобщенного решения. Однако при решении этого вопроса наличие ограничения (1) преодолевалось сравнительно просто (см. конец § 4 гл. IV); при этом, как нетрудно видеть, условие (1) может быть заменено более общим условием (1'): $f_1(x) \leqslant u(x) \leqslant f_2\ x)$. Напротив, исследование дальнейшей гладкости обобщенных решений таких задач (собственно, его надо проводить лишь вблизи точек соприкосновения решения $u(x)$ с ограничивающими поверхностями $u = f_i(x)$) потребовало специальных рассмотрений (см. работы [$\mathbf{33_3}$]).

Весьма мало изучена гладкость обобщенных решений, возникающих при решении многомерных вариационных задач теории управления. В них и в ряде задач гидромеханики (см., например, [9]) мы наталкиваемся на квазилинейные уравнения, в которых некоторые из известных функций разрывны по своим аргументам u или u_x.

В работах Ж. Лионса, Г. Стампаккиа, Ф. Хартмана и др. (см. [$\mathbf{34_{2,3}}$, **24**] и др.) изучались также своеобразные вариационные задачи, решения которых удовлетворяют не уравнению Эйлера, а некоторым неравенствам (простейший пример тому дает та же вторая условная вариационная задача: на ее решении первая вариация неотрицательна — это неравенство-тождество заменяет собою уравнение Эйлера). В исследовании некоторых из таких задач полезны классы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, изученные в гл. II и многократно использованные в данной книге. Насколько нам известно, Ж. Лионсом написана книга, в которой подробно освещаются вариационные задачи, обсуждаемые в этом пункте *).

Читатель, познакомившийся с данной книгой, будет вполне подготовлен к чтению упомянутых работ. Исключение составляют работы по многомерной задаче Плато и ее обобщениям.

Помимо исследований, перечисленных в пп. 1) — 6), имеется немало публикаций, непосредственно связанных с [I]. Так, в некоторых из них тот или иной результат из [I] (чаще в какой-либо частной, но достаточно интересной ситуации) доказывается иначе, методом, более простым или более привычным для автора. В других анализируются возможности разных методов и приемов оценок решений, данных в [I], применительно к уравнениям, обобщающим рассмотренные в [I] в каком-либо направлении. Так, мы упоминали выше работы, в которых допускается рост $\tau(x, u, p)$ по p, или работы, в которых степенной характер роста по p образующих уравнения функций $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ (а именно такой порядок роста является основным в [I]) заменяется каким-либо другим. Немало имеется работ, где методы и результаты из [I] в сочетании с какими-либо дополнительными соображениями и приемами позволяют исследовать уравнения с вырождениями или отдельные классы систем квазилинейных уравнений.

Наконец, отметим работы Дж. Серрина [**51**$_{4,8}$] и Н. С. Трудингера [**54**], в которых результаты Ю. Мозера по неравенству Гарнака распространяются на квазилинейные уравнения с дивергентной главной частью, и работу [**35**] В. Литтмана, Г. Стампаккиа и Х. Вайнбергера, в которой строится и исследуется функция Грина для линейных уравнений с разрывными коэффициентами из гл. III. Все эти работы имеют прямое отношение к изучаемому здесь объекту и естественно вписываются в рамки объектов и методов данной книги. Только недостаток времени и места является причиной того, что они здесь не излагаются.

Перечислим, чем отличается второе издание от первого. Во-первых, мы устранили замеченные ошибки, опечатки и разные шероховатости. Первые были найдены нами сразу по выходе книги из печати, и их исправления были сообщены американскому издательству, переводившему нашу книгу на английский язык. К сожалению, эти исправления не были учтены ни в английском, ни во французском переводах, которые вышли со всеми недочетами русского издания. Во-вторых, мы внесли ряд улучшений и добавлений в изложение гл. II, в том числе выделили отдельно класс функций $\mathfrak{A}$ в соответствии с тем, как это

---

*) Добавление при корректуре. См. C. Duvaut, J.-L. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique, Paris, 1971.

сделано в нашей книге [21_{11}] по параболическим уравнениям, и добавили § 9 по классам $\mathfrak{B}_m^N$, используемым при исследовании квазирегулярных вариационных задач (§ 7 гл. V) и некоторых классов вырождающихся квазилинейных систем (§ 6 гл. VIII). В гл. III вставлены новые параграфы: § 16 о приближенных методах, § 17 о разложении произвольных функций в ряды по собственным функциям эллиптических операторов и § 18 о методе конечных разностей. Чтобы не увеличивать существенно объем книги, мы выбросили § 16 о задачах дифракции, стоящий в стороне от основного направления книги. Зато в § 13 добавлены оценки некоторых интегральных норм обобщенных решений, о которых в первом издании есть лишь упоминание, и принцип максимума для обобщенных решений. То и другое легко делается на основании аппарата, разработанного в гл. II.

В гл. IV добавлен § 9 о разрешимости краевых задач в пространствах $W_m^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ (т. е. о существовании обобщенных решений таких задач). В соответствии с этим несколько перестроен § 8 о классической разрешимости этих задач (теперь это § 10). Выделен в отдельный параграф и расширен материал, касающийся оценки максимумов модулей классических решений. Заново переписан параграф об оценке максимума модуля обобщенных решений, и добавлены к нему оценки интегральных норм, взятые из других параграфов гл. IV. В § 5 дано более полное доказательство существования обобщенных производных второго порядка у обобщенных решений и далеко не очевидные пояснения к одной фразе прежнего § 3, начинающейся словами: «Нетрудно убедиться, что ... ». Вообще материал §§ 3—5 несколько перетасован, что, мы надеемся, облегчит его понимание. Эту перестройку мы сделали в связи с замечанием в книге [39_6] Ч. Морри, где он, говоря о наших результатах по обобщенным решениям, деликатно указывает, что не смог воспроизвести доказательство одного факта, который мы утверждаем, но не даем никаких пояснений. Теперь эти пояснения даны, и они были необходимы. Итак, композиция гл. IV изменена довольно сильно, хотя методы и результаты, изложенные в ней, те же, что и в гл. IV 1-го издания. Исключение составляет § 9.

В гл. V заново переписаны §§ 1—3, так как прежнее изложение показалось нам неудачным, и добавлен § 7 о квазирегулярных задачах.

Бо́льшая часть гл. VI, касающаяся оценок градиентов решений и теорем существования (т. е. §§ 2 и 3), переделана и разбита на четыре параграфа. О характере этих изменений мы говорили выше в п. 3). Надеемся, что данное изложение материала будет восприниматься легче. Правда, при этом мы несколько огрубили результат, предположив, что $u(x)$ есть классическое решение, тогда как в первом издании предполагалось, что $u(x)$ есть обобщенное решение из $W_2^2(\Omega) \cap \mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$. Для классических решений мы смогли провести точечные оценки, тогда как для обобщенных в [I] пришлось проводить интегральные оценки, которые воспринимаются при чтении труднее. Такое огрубление результатов гл. VI первого издания не влияет на основные ее цели: исследование классической разрешимости задачи Дирихле. При этом исследовании все подвергаемые анализу решения заведомо принадлежат C^2.

В гл. VIII добавлен § 6 об одном классе вырождающихся квазилинейных систем, а в § 5 гл. IX приведено доказательство неравенства Гарнака для простейшего линейного уравнения с разрывными коэффициентами, установленного Мозером.

Наконец, в гл. X усилен основной результат о разрешимости квазилинейных уравнений при нелинейном краевом условии, содержащем производные u_{x_i} от решения $u(x)$: снято предположение о том, что задача имеет не более одного решения. Это потребовало некоторой перестройки в изложении всего материала и ряда дополнительных рассмотрений.

Авторы признательны В. Г. Мазье за полезные советы, А. П. Осколкову за прочтение рукописи и редакционные замечания и Л. С. Захаровой за помощь в оформлении книги.

Ленинград, сентябрь 1970 г. *Авторы*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Казалось, что к 50-м годам нашего века линейные эллиптические уравнения второго порядка в ограниченной области изучены если не с исчерпывающей, то с разумной полнотой и что основные вопросы для них получили достаточно простые решения. В работах Г. Жиро и Ю. Шаудера 30-х годов была доказана для них разрешимость основных краевых задач при условии достаточной гладкости коэффициентов и границы области.

Затем они были осмыслены с позиций функционального анализа. Начало этому пониманию положила работа [19_1] К. О. Фридрихса 1934 г. о полуограниченных расширениях симметрических эллиптических операторов. Она и дальнейшие исследования Г. Вейля, К. О. Фридрихса, С. Г. Михлина, М. И. Вишика, О. А. Ладыженской и др. конца 40-х годов показали, что решение основных краевых задач для эллиптических уравнений (мы всюду будем говорить лишь об уравнениях второго порядка) эквивалентно решению уравнений вида

$x+Ax=f$ с вполне непрерывным линейным оператором A в некоторых гильбертовых пространствах, построенных по квадратичной форме главной симметрической части дифференциального оператора. Такая точка зрения на краевые задачи помогла исследованию сходимостей приближенных методов Ритца, Галеркина и др. Правда, такой подход давал лишь существование так называемых обобщенных (плохих по дифференциальным свойствам) решений, про которые известно, что они имеют производные лишь первого порядка. Вопросы о существовании у них производных более высоких порядков (хотя бы второго) и, тем самым, вопрос об удовлетворении уравнению приходилось решать с привлечением вышеупомянутых работ Ю. Шаудера, Г. Жиро и др., так что стройного и простого исследования краевых задач в рамках только функционального анализа не получалось. Как оказалось, это было непосредственно связано с вопросом об области определения замыкания в L_2 эллиптических операторов, который был выдвинут И. М. Гельфандом на его известном семинаре как один из центральных вопросов по изучению эллиптических уравнений с позиций общей теории линейных операторов в гильбертовом пространстве.

Решение этого вопроса дано в 1950 г. одним из авторов книги в заметке [21_1] для оператора Лапласа и его итераций при разных краевых условиях (несколько позже другое решение этого вопроса было дано С. Г. Михлиным в [23_1] для оператора Лапласа в шаре при первом краевом условии), а в 1951 г. — Р. Каччопполи [8_2] для общего эллиптического оператора L второго порядка при первом краевом условии и О. А. Ладыженской [21_2] *) (см. также [$21_{3,5}$]) для таких же L и их итераций при первом, втором и третьем краевых условиях. Ответ оказался простым и в случае первой краевой задачи не зависящим от коэффициентов оператора; именно, в результате замыкания приходят к функциям, имеющим обобщенные производные из $L_2(\Omega)$ до второго порядка включительно. Это в определенном отношении завершало изучение основных краевых задач для эллиптических уравнений в ограниченной области с точки зрения функционального анализа.

В конце 40-х годов была исследована для этих задач сходимость метода конечных разностей (см. работы Д. М. Эйдуса [37]

*) Работы [8_2, 21_2] породили большой цикл работ по получению так называемых предельно точных оценок в L_2, L_p и в некоторых других функциональных пространствах для решений уравнений высоких порядков и систем эллиптического и параболического типов при различных краевых условиях. Сейчас этот цикл работ близок к своему естественному завершению. В работах Л. Хермандера показано, что такие предельно точные оценки имеют место, грубо говоря, только для операторов эллиптического и параболического типов.

и О. А. Ладыженской [$21_{3,6}$]), что дало как простой способ доказательства их разрешимости, так и реальный способ вычисления решений.

Итак, казалось, что линейные уравнения достаточно хорошо поняты и надо направить внимание на исследование нелинейных задач. Но в процессе работы над ними стало ясно, насколько несовершенны наши знания о линейных уравнениях (в случае любого числа независимых переменных) и прежде всего об истинной зависимости дифференциальных свойств решений от дифференциальных свойств коэффициентов уравнения. Среди всех прежних результатов для $n \geqslant 2$ имелся лишь один безупречный во всех отношениях — это теорема Шаудера (дополненная Каччопполи) о разрешимости задачи Дирихле в пространствах Гёльдера $C^{l+\alpha}$, $l \geqslant 2$ (обозначения — см. § 1 гл. I), для уравнений с коэффициентами и свободным членом из $C^{l-2+\alpha}$. В ней все предположения вызваны существом дела. Она гарантирует классическую разрешимость задачи Дирихле для уравнений, коэффициенты и свободный член которых суть непрерывные по Гёльдеру функции. Однако один этот результат не дает возможности исследовать сколько-нибудь общие классы нелинейных уравнений. Необходимо было изучить разрешимость краевых задач и дифференциальные свойства решений линейных уравнений с разрывными, хотя бы ограниченными, коэффициентами. Ранее полученные результаты и методы почти ничего не давали в этом направлении. Анализу этих вопросов для случая двух независимых переменных посвящены работы 40-х и 50-х годов Ч. Морри, Л. Берса, Л. Ниренберга, И. Н. Векуа и др. Их достаточно полное решение было получено с помощью весьма тонких средств — теории квазиконформных преобразований и теории обобщенных аналитических функций. К сожалению, эти методы не допускают обобщений на случай трех и большего числа измерений. Были основания ожидать, что и сами результаты для многомерных задач качественно отличаются от случая двух независимых переменных.

Новый этап в изучении многомерных линейных уравнений начался с работы [11_1] Е. Де Джорджи и работы [41] Дж. Нэша и нашел в определенном отношении свое завершение в работах Г. Стампаккиа [52_{1-4}], Ч. Морри [39_3] и авторов данной книги [21_{12-21}].

В работах [$21_{18,20,10}$] построены примеры, показывающие, что условия, при которых в этих работах установлены различные свойства обобщенных решений линейных уравнений с разрывными и, вообще говоря, неограниченными коэффициентами, являются точными.

Изложению результатов этих работ, а также результатов более ранних работ Ю. Шаудера, К. О. Фридрихса, С. Г. Михлина и О. А. Ладыженской по разрешимости краевых задач в пространствах $C^{l+\alpha}$, $l \geqslant 2$, и W_2^l, $l \geqslant 1$, посвящена третья глава. Ей предшествует вводная глава, в которой даются используемые в книге обозначения, излагаются примеры, достаточно точно очерчивающие рамки желаемой и возможной теории линейных и квазилинейных уравнений (которая затем и строится в предлагаемой книге), и излагаются основные результаты книги и их предполагаемое развитие. Во второй главе собраны различные аналитические предложения, родившиеся главным образом в связи с изучением дифференциальных уравнений, но формально с ними не связанные. Большая часть этой главы посвящена изучению так называемых классов $\mathfrak{B}_m$ — классов функций, подчиненных некоторым интегро-дифференциальным неравенствам. Оказалось, что именно эти классы функций тесно связаны с эллиптическими уравнениями второго порядка.

Однако, в основном книга посвящена квазилинейным уравнениям, которые имеют почти такую же длинную историю, как и линейные уравнения с переменными коэффициентами. Две гипотезы — 19-я и 20-я проблемы Гильберта — определили в нашем веке основное направление их исследования. В первой утверждалось, что все решения эллиптических уравнений суть аналитические функции независимой переменной, если только функции, образующие уравнения, суть аналитические функции своих аргументов. По мере перехода от уравнений с аналитическими функциями к уравнениям с функциями, дифференцируемыми то или иное число раз, эта гипотеза получила иную, более полную формулировку: дифференциальные свойства решений эллиптических уравнений внутри области их существования определяются дифференциальными свойствами функций, образующих эти уравнения, и не зависят ни от гладкости граничных значений, ни от того функционального пространства, в котором эти решения первоначально найдены.

В 20-й проблеме утверждалось, что вариационная задача на определение функции, удовлетворяющей заданному граничному условию и дающей наименьшее значение данному полуограниченному выпуклому функционалу (как говорят, регулярному функционалу) вида $\int\limits_\Omega F(x, u, u_x)\,dx$, всегда имеет решение, если его искать в д о с т а т о ч н о ш и р о к о м к л а с с е ф у н к ц и й. Эта проблема переплелась с проблемой решения и исследования краевых задач для квазилинейных уравнений второго порядка эллиптического типа, и применительно к этой более общей задаче 20-я гипотеза Гильберта трансформировалась в следующую: если имеется априорная ограниченность каких-либо слабых норм всех возможных решений краевой задачи (например, их максимумов модулей), то имеется и ее разрешимость.

Обе гипотезы требовали более точных формулировок, при этом естественным стремлением было согласование утверждений обеих проблем в том смысле, что класс «всех решений» в 19-й проблеме должен был совпадать с тем «достаточно широким классом функций», в котором находилось решение вариационной или краевой задачи. При решении этих проблем шли в двух противоположных направлениях. В 19-й проблеме пытались снизить требуемую от исследуемого решения априорную гладкость. Напротив, в 20-й проблеме старались доказать существование решений, обладающих по возможности наиболее хорошими дифференциальными свойствами.

Первой работой, посвященной 19-й проблеме Гильберта, была знаменитая работа [4_1] С. Н. Бернштейна (см. также [4_2]), в которой доказывалось, что трижды непрерывно дифференцируемые решения нелинейных эллиптических уравнений (мы всюду будем говорить лишь об эллиптических уравнениях второго порядка) являются аналитическими функциями своих аргументов.

В дальнейшем Г. Леви, Э. Хопфом и Ю. Шаудером было показано, что это верно для всех решений нелинейных уравнений, имеющих непрерывные по Гёльдеру производные второго порядка, и для всех решений вариационных задач, имеющих непрерывные по Гёльдеру производные первого порядка (для случая двух независимых переменных Ч. Морри доказал, что у решений вариационных задач условие непрерывности производных первого порядка можно заменить их ограниченностью).

Исследование 20-й проблемы шло главным образом по линии вариационных задач — для их решения были созданы так называемые прямые методы. Начало этому направлению положено работами Д. Гильберта, А. Лебега и Р. Куранта ([**26**, **10_1**, **31**]). Этими методами из общих и сравнительно простых соображений доказывается существование так называемых обобщенных решений — функций, обладающих обобщенными производными первого порядка, суммируемыми с некоторой степенью $m > 1$ (см. в связи с этим [**53**, **39_2**]). Верилось, что именно этот класс обобщенных решений и есть тот «достаточно широкий класс функций», о котором говорится в 20-й проблеме Гильберта. Однако этот класс, как мы видим, значительно шире того класса «всех» решений, для которого удавалось доказать справедливость 19-й проблемы Гильберта. Надо было или сузить его и в этом суженном классе доказать разрешимость вариационных задач, или доказать, что дифференциальные свойства обобщенных решений на самом деле лучше, чем дифференциальные свойства всех функций сравнения, что они определяются лишь дифференциальными свойствами интегранта и что такие решения единственны хотя бы в малом, т. е. их локальная вариация приводит к увеличению значения функционала.

Кроме прямых методов для исследования разрешимости краевых задач были созданы различные топологические методы. Из них наиболее общим и гибким является топологический метод Лерэ — Шаудера [32_4], которому предшествовали исследования С. Н. Бернштейна (см. [4_2]) по разрешимости задачи Дирихле для квазилинейных уравнений методом продолжения по параметру. С помощью этих методов было доказано, что разрешимость краевой задачи определяется возможностью получения априорных оценок определенного типа для всех возможных решений исследуемой задачи. Так, для доказательства классической разрешимости задачи Дирихле для квазилинейных уравнений надо иметь априорную оценку нормы Гёльдера первых производных от всех ее возможных классических решений.

Таким образом, к началу 40-х годов исследование разрешимости нелинейных задач и, в частности, 19-й и 20-й проблем Гильберта в их расширенной постановке было сведено к получению априорных оценок для классических решений и к исследованию дифференциальных свойств обобщенных решений вариационных задач, описанных выше. Довольно рано было понято, что их положительное решение зависит не только от гладкости входящих в задачу функций, а еще и от характера нелинейности — их поведения при неограниченном возрастании аргументов. Это имеет место даже при аналитичности образующих уравнение функций. Постепенно вырисовывались ограничения на поведение этих функций, которые необходимы для тех или иных целей, и исследователи стремились к доказательству их достаточности. Примерно до 1956 г. все исследования нелинейных задач «в целом» относились к случаю двух независимых переменных, и именно для него было выработано большое количество приемов и методов исследования (бóльшая часть их сугубо двумерна, не обобщается на случай трех и более независимых переменных): С. Н. Бернштейном были даны априорные оценки решений для уравнений, не содержащих явно саму неизвестную функцию; Ж. Лерэ, Л. Ниренберг и др. получили априорные оценки для несколько более широких классов таких уравнений; Л. Тонелли, Э. Хопф, Ч. Морри, А. Г. Сигалов, Л. Чезари, Л. Юнг, В. И. Плотников и др. исследовали вопросы непрерывности и классичности обобщенных решений двумерных вариационных задач при различных предположениях об интегранте. Однако даже для двумерных задач, несмотря на большое количество первоклассных работ, не было получено смыкания в исследовании 19-й и 20-й проблем Гильберта (это было сделано при дополнительных, явно излишних предположениях об интегранте). Исключение составил лишь случай $m=n=2$, исследованный Ч. Морри [**39**$_2$]. Не были получены и априорные оценки классических решений квазилинейных уравнений только при тех предположениях о данных функциях, которые считались естественными. В отношении исследования многомерных задач было сделано много меньше. Первыми в направлении изучения многомерных нелинейных задач «в целом» были работы [**11**$_1$, **41**, **21**$_{7,8}$, **9**, **16**$_7$] 1956—1958 гг. (Им предшествовал ряд работ, в которых рассматривались различные классы квазилинейных уравнений, в том или ином смысле близких к линейным.) Из них единственным законченным результатом о классической разрешимости нелинейной вариационной задачи был результат Е. Де Джорджи [**11**$_1$] и Дж. Нэша [**41**], касающийся простейшего функционала $\int\limits_\Omega F(u_x)\,dx$ в предположении, что

$$\nu\xi^2 \leqslant F_{p_ip_j}(p)\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2,$$

где ν и μ — не зависящие от $p=(p_1, \ldots, p_n)$ и $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ положительные постоянные. (Заметим, что для двух независимых переменных этот функционал был исследован С. Н. Бернштейном чуть ли не 60 лет тому назад.) Решение многомерной вариационной задачи для функционалов общего вида $\int\limits_\Omega F(x, u, u_x)\,dx$, причем при тех предположениях относительно $F(x, u, p)$, которые считаются «естественными», было дано авторами книги в 1959 г. (см. [**21**$_{12,13}$]). В этих работах было получено то желаемое смыкание в изучении 19-й и 20-й проблем Гильберта, о котором говорилось выше. Оказалось, что для регулярных вариационных задач в качестве «всех решений» и «достаточно широкого класса решений» в обеих проблемах надо брать один и тот же класс функций — обобщенные решения, даваемые прямыми методами. Их дифференциальные свойства зависят только от $F(x, u, p)$, и они единственны «в малом», т. е. их локальные вариации приводят к увеличению значения функционала. Иным способом близкие результаты по исследованию дифференциальных свойств обобщенных решений вариационных задач (правда, не для всего диапазона значений параметра m, характеризующего порядок роста $F(x, u, p)$ по p, и при предположениях, несколько более ограничительных, чем «естественные») получены в работах [**39**$_{4,5}$] Ч. Морри.

Одновременно с вариационной задачей авторами книги был изучен класс квазилинейных уравнений более общих, чем уравнение Эйлера, и занимающий особое место среди всех квазилинейных уравнений — класс уравнений с дивергентной главной частью. Для него с той же желаемой полнотой был исследован вопрос об обобщенных решениях и вопрос о классической разрешимости «в целом» задачи Дирихле. Мы излагаем здесь второй способ решения обеих этих проблем, позволивший до предела снизить также и требования на гладкость известных функций (он изложен в [21_{15}]).

После решения этих проблем была исследована разрешимость «в целом» задачи Дирихле для общих квазилинейных уравнений второго порядка и определенных классов линейных и квазилинейных систем таких уравнений [$21_{8,19}$, 36_3] и разрешимость «в целом» разных краевых задач для квазилинейных уравнений с дивергентной главной частью [36_2]. С помощью специально построенных примеров было показано [$21_{10,18,20}$], что те условия, при которых это сделано, вызваны существом дела. Бо́льшая часть этих последних результатов доказана сразу для решений параболических уравнений и изложена с доказательствами в [21_{19}].

Все эти работы [$21_{12,13,\ldots}$], принадлежащие авторам данной монографии, едины по своему методу. Основная идея метода состоит, во-первых, в замене уравнения интегральным тождеством и в переходе от него к интегро-дифференциальным неравенствам, содержащим в себе достаточное количество числовых параметров (второй шаг достигается каждый раз за счет специального выбора произвольной функции, входящей в интегральное тождество), и, во-вторых, в доказательстве ограниченности или гёльдеровости функций, подчиняющихся этим неравенствам. Оказалось, что таким неравенствам удовлетворяют не только сами решения эллиптических уравнений, но и их производные, и информация, заложенная в этих неравенствах, вполне достаточна для получения всех необходимых априорных оценок. Изучение функций, подчиненных этим неравенствам, породило теоремы вложения нового типа и совместно с первым этапом (их выводом) привело к сравнительно простому и единообразному решению перечисленных выше проблем. Первая теорема такого типа установлена в работе [11_1] Е. Де Джорджи.

Этот же метод дал возможность решить аналогичные проблемы и в более трудном случае параболических уравнений (см. [$21_{18,19,11}$]). Им пронизана почти вся книга. Исключение составляют: 1). §§ 1 — 12 гл. III, посвященной линейным уравнениям, в которых излагаются результаты Ю. Шаудера по разрешимости краевых задач в $C^{l+\alpha}$, $l\geqslant 2$, результаты К. О. Фридрихса, С. Г. Михлина и О. А. Ладыженской по разрешимости краевых задач в $W_2^l(\Omega)$, $l\geqslant 1$; 2) результаты Т. Радо и Дж. фон Неймана по седлообразным поверхностям; 3) § 2 гл. V о существовании обобщенных решений вариационных задач (в основном результат Ч. Морри) и 4) §§ 5, 6, 7 гл. IX, в которых описаны прием Ю. Мозера оценки нормы

Гёльдера решений линейных уравнений, оценка Л. Ниренберга константы Гёльдера для производных первого порядка от решений линейных уравнений при двух независимых переменных и прием Ч. Морри оценки нормы Гёльдера обобщенных решений двумерных вариационных задач при квадратичном росте интегранта. Результаты Л. Берса и Л. Ниренберга по линейным уравнениям с произвольными, не обязательно непрерывными коэффициентами при двух независимых переменных доказываются с помощью того же общего метода, о котором сказано выше, в § 17 гл. III, без привлечения квазиконформных преобразований и теории обобщенных аналитических функций.

Из работ С. Н. Бернштейна в книге использована, по существу, одна (зато весьма плодотворная) идея: рассматривать наряду с решениями уравнения некоторые их функции и соотношения, которым эти функции удовлетворяют вследствие данного уравнения. В книге нет изложения методов и аппарата, с помощью которых работают Ч. Морри, К. Миранда, Дж. Нэш, А. Д. Александров и Г. Стампаккиа. Она имеет мало точек соприкосновения с книгами, посвященными дифференциальным уравнениям, в том числе и с книгой К. Миранда, подводящей итог того, что было сделано к 1955 г. в отношении исследования линейных и нелинейных эллиптических уравнений второго порядка. В основном в ней подробно изложены исследования авторов, проведенные в последние годы. Большое влияние на них оказали работы [**11**$_1$] Е. Де Джорджи по оценке постоянной Гёльдера и работа [21$_8$] одного из авторов по оценке $\max|u_x|$ для решений u многомерных квазилинейных уравнений эллиптического и параболического типов.

Пусть читатель не посетует на некоторое однообразие приемов, с помощью которых мы решаем описанные выше проблемы, и посмотрит на это как на наличие единого стиля Добиться его было не легко.

Ленинград, 1964 г. *Авторы*

Глава I

ВВОДНАЯ ГЛАВА

Книга посвящена эллиптическим уравнениям и некоторым классам эллиптических систем второго порядка. Для них изучается разрешимость краевых задач в различных функциональных пространствах и проводятся исследования качественного и количественного характера, касающиеся дифференциальных свойств произвольных решений этих уравнений. Мы начинаем наше изложение с описания примеров, позволивших достаточно правильно очертить контуры возможной теории этих вопросов (§ 2), и с перечисления основных результатов данной книги и их желаемого развития (§ 3).

Введем сначала ряд понятий, обозначений и терминов, которые будут использованы на протяжении всей книги.

§ 1. Основные обозначения и термины

1. Сокращенные обозначения. E_n — n-мерное евклидово пространство; $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная точка в нем; всюду $n \geqslant 2$.

Ω — ограниченная область в E_n, т. е. произвольное открытое связное множество, содержащееся в каком-нибудь шаре достаточно большого радиуса.

S — граница Ω. Иногда мы будем обозначать ее через $\partial\Omega$.

$\bar{\Omega}$ — замыкание Ω, так что $\bar{\Omega}=\Omega \cup S$.

Ω' — произвольная строго внутренняя подобласть Ω, так что расстояние от Ω' до $\partial\Omega$ положительно.

$$K_\rho(x^0)=K_\rho=\{x \in E_n: |x-x^0|<\rho\}.$$

$$\Omega_\rho=K_\rho \cap \Omega, \quad S_\rho=K_\rho \cap S.$$

$\varkappa_n=\operatorname{mes} K_1$; ω_n — площадь поверхности шара K_1.

Если $u(x)$ — измеримая в Ω функция, K_ρ — некоторый шар, то

$$u^{(k)}(x)=\max\{u(x)-k;\ 0\},$$

$$A_k=\{x \in \Omega: u(x)>k\}, \quad A_{k,\rho}=\{x \in \Omega_\rho: u(x)>k\}.$$

Для любого $m \geqslant 1$ положим $m'=\frac{m}{m-1}$, $\bar{m}=\frac{nm}{n-m}$.

ν, μ, ε, δ, δ_k, θ, γ — положительные постоянные.

$\nu(t)$ — положительная невозрастающая непрерывная функция, определенная при $t \geqslant 0$.

$\mu(t)$ — положительная неубывающая непрерывная функция, определенная при $t \geqslant 0$.

δ_i^j — символ Кронекера, т. е. $\delta_i^i = 1$, $\delta_i^j = 0$ при $i \neq j$.

$\forall$ — любой.

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}, \quad x^2 = |x|^2, \qquad p = (p_1, \ldots, p_n),$$

$$|p| = \left(\sum_{i=1}^n p_i^2\right)^{1/2}, \quad p^2 = |p|^2, \quad u_{x_i}^2 = \left(u_{x_i}\right)^2, \quad \nabla u \equiv u_x = \left(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}\right),$$

$$|\nabla u| = |u_x| = \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)^{1/2}, \quad u_x^2 = |u_x|^2, \quad |u_{xx}| = \left(\sum_{i,\,j=1}^n u_{x_i x_j}^2\right)^{1/2},$$

$$u_{xx}^2 = |u_{xx}|^2, \quad a(x, u, p) = a(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n),$$

$$a(x, u, u_x) = a\left(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}\right).$$

Под символами $\max\limits_{\Omega} u(x)$ и $\min\limits_{\Omega} u(x)$ понимаем $\sup\limits_{\Omega} u(x)$ и $\inf\limits_{\Omega} u(x)$ соответственно, если $u(x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$, и $\operatorname{vrai}\sup\limits_{\Omega} u(x)$ и $\operatorname{vrai}\inf\limits_{\Omega} u(x)$, если $u(x)$ есть просто измеримая на Ω функция. Иногда, желая подчеркнуть, что непрерывность $u(x)$ не предполагается, мы пишем $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} u(x)$ и $\operatorname{vrai}\min\limits_{\Omega} u(x)$ вместо $\max\limits_{\Omega} u(x)$ и $\min\limits_{\Omega} u(x)$ соответственно; $\operatorname{osc}\{u(x); \Omega\}$ есть колебание $u(x)$ на Ω, т. е. $\max\limits_{\Omega} u(x) - \min\limits_{\Omega} u(x)$.

Символ $D^k u(x)$, где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс с $k_i \geqslant 0$, означает производную $u(x)$ вида $\dfrac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$, где $|k| = k_1 + \ldots$ $\ldots + k_n$ — порядок производной.

В уравнениях будут встречаться выражения $\dfrac{d}{dx_i}[a(x, u(x), u_x(x))]$, которые означают, что при вычислении производной $\dfrac{d}{dx_i}$ надо учитывать вхождение x_i не только в первую группу аргументов x, но и в две остальные, т. е. в функцию $u(x)$ и в $u_x(x)$, так что

$$\frac{d}{dx_i}[a(x, u(x), u_x(x))] = \frac{\partial a}{\partial x_i} + \frac{\partial a}{\partial u} u_{x_i} + \frac{\partial a}{\partial u_{x_k}} u_{x_k x_i}.$$

Здесь и всюду по парам одинаковых индексов подразумевается суммирование в пределах от 1 до n, в частности,

$$\frac{\partial a}{\partial u_{x_k}} u_{x_k x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial u_{x_k}} u_{x_k x_i}.$$

Иногда, когда это не вызывает путаницы, знак полного дифференцирований $\frac{d}{dx_i}$ будем заменять более распространенным знаком $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Так, например, в линейном уравнении члены $\frac{d}{dx_i}(a_{ij}(x) u_{x_j}(x))$ мы обычно записываем в виде $\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x) u_{x_j}(x))$, хотя и здесь при дифференцировании надо учитывать x_i в обоих аргументах: $a_{ij}(x)$ и $u_{x_j}(x)$.

В тексте будут встречаться различные постоянные, определяемые известными нам из условий величинами. Их мы будем обозначать строчной буквой c с различными индексами. Там, где это не может виести путаницы и где величина постоянных несущественна, индексы у c будут опускаться, так что в пределах даже одного доказательства буквой c с одним и тем же индексом или просто без индекса могут обозначаться разные постоянные. В других случаях, когда желательно подчеркнуть зависимость постоянной от той или иной величины, эта зависимость указывается явно.

Срезающая для Ω функция $\zeta(x)$ — это функция с носителем, лежащим в Ω, и со значениями между 0 и 1. Носитель ее — это замыкание множества точек, где $\zeta(x)$ отлична от нуля. Срезающая функция считается непрерывной с ограниченными первыми производными. Там, где она обладает другими дифференциальными свойствами, это особо оговаривается.

Финитная в Ω функция — функция, имеющая компактный носитель в Ω.

Классы $\mathfrak{A}_m(\Omega, \ldots)$, $\mathfrak{B}_m(\Omega, \ldots)$, $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\Omega, \ldots)$ и др. с различными параметрами определены и исследованы в §§ 5—9 гл. II.

Если L — оператор в каком-либо гильбертовом пространстве, то через $\bar{L}$ обозначается его замыкание. Область определения L обозначается через $D(L)$, а область значений — через $R(L)$.

$\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ — единичный вектор нормали к $\partial\Omega$ в точке x, внешней по отношению к Ω; $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ означает дифференцирование вдоль $\mathbf{n}$.

2. Определения основных функциональных пространств. $L_m(\Omega)$ — банахово пространство, состоящее из всех измеримых на Ω функций, суммируемых по Ω со степенью $m \geqslant 1$. Норма в нем определяется равенством $\| u \|_{m,\Omega} = \left(\int_\Omega | u |^m dx \right)^{1/m}$.

Измеримость и суммируемость всюду берется в смысле Лебега. Элементами $L_m(\Omega)$ являются классы эквивалентных между собою на Ω функций.

Под $\|u\|_{\infty,\Omega}$ понимаем $\operatorname{vrai}\sup\limits_{\Omega}|u(x)|$, а под $\|\mathbf{u}\|_{m,\Omega}$ понимаем $\||\mathbf{u}|\|_{m,\Omega}$, где $\mathbf{u}=(u_1, \ldots, u_N)$, а $|\mathbf{u}|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N} u_i^2}$.

Обобщенные производные понимаются так, как это используется теперь в большинстве работ по дифференциальным уравнениям. Различные, но эквивалентные их определения и основные свойства читатель может найти, например, в [31_2] и [32].

$W_m^l(\Omega)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $L_m(\Omega)$, имеющих обобщенные производные всех видов до порядка l включительно, суммируемые по Ω со степенью m. Норма в $W_m^l(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{m,\Omega}^{(l)}=\left(\int\limits_{\Omega}\sum_{|k|=0}^{l}|D^k u|^m\,dx\right)^{1/m}, \tag{1.1}$$

где суммирование производится по всевозможным значениям мультииндексов k при всех $|k|$ от 0 до l. Для областей с «не слишком плохой» границей $W_m^l(\Omega)$ совпадает с замыканием в норме (1.1) множества всех бесконечно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций. Это верно, например, для областей с границей класса C^1, для выпуклых областей и даже для строго липшицевых областей (их определение дается ниже) (см. § 4, гл. 3 [39_6]). Иногда вместо $W_m^l(\Omega)$ пишется W_m^l, особенно если область Ω подлежит дальнейшему уточнению.

$\dot{W}_m^l(\Omega)$ — множество элементов $W_m^l(\Omega)$ с носителями в Ω.

$\dot{W}_m^l(E_n)$ — множество элементов $W_m^l(E_n)$ с компактными носителями.

$\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$ — подпространство пространства $W_m^l(\Omega)$, плотным множеством в котором является совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций с носителями в Ω. Известно, что $\dot{W}_m^l(\Omega)\subset\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$.

$W_{2,0}^2(\Omega)$ — подпространство $W_2^2(\Omega)$, плотным множеством в котором являются все дважды непрерывно дифференцируемые в $\bar{\Omega}$ функции, обращающиеся в нуль на $\partial\Omega$.

$$W_{m,q}^1(\Omega)=W_m^1(\Omega)\cap L_q(\Omega).$$

$\overset{*}{W}{}_m^1(\Omega)=W_m^1(\Omega)\cap L_{\tilde{m}}(\Omega)$, где $\tilde{m}$ равно $mn/(n-m)$ при $m<n$, равно ∞ при $m>n$ и имеет произвольное конечное значение при $m=n$. В § 2 гл. II будет доказано, что для произвольной области Ω класс $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega) \supset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а для не слишком плохих областей Ω класс $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ совпадает с $W_2^1(\Omega)$. Последнее заведомо верно для областей Ω, являющихся объединением конечного числа строго липшицевых областей (см. стр. 30).

Будем говорить, что функция $u(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера (непрерывна по Гёльдеру) с показателем α, $\alpha \in (0, 1)$, и константой Гёльдера $\langle u\rangle_\Omega^{(\alpha)}$ в области $\overline{\Omega}$, если

$$\langle u\rangle_\Omega^{(\alpha)} \equiv \sup \rho^{-\alpha} \operatorname{osc}\{u;\ \Omega_\rho^i\} < \infty, \tag{1.2}$$

где sup взят по всем связным компонентам Ω_ρ^i всех Ω_ρ с $\rho \leqslant \rho_0$.

Если область «не очень плохая», например строго липшицева, то $\langle u\rangle_\Omega^{(\alpha)}$ можно определить и иначе, как

$$\langle u\rangle_\Omega^{(\alpha)} = \sup_{\substack{x,\ x' \in \Omega,\\ |x-x'| \leqslant \rho_0}} \frac{|u(x) - u(x')|}{|x-x'|^\alpha}. \tag{1.2'}$$

Для областей с двойным куском границы, например для области $\{x \in E_2;\ |x_1| < 1,\ |x_2| < 1$ и $x_2 \neq 0$ при $|x_1| \leqslant 1/2\}$, определения (1.2) и (1.2′) не эквивалентны. В этом случае мы будем придерживаться первого из них.

$C^\alpha(\overline{\Omega})$—банахово пространство, элементами которого являются все непрерывные в Ω функции $u(x)$, имеющие конечную величину $\langle u\rangle_\Omega^{(\alpha)}$. Норма в $C^\alpha(\overline{\Omega})$ определяется равенством

$$|u|_\Omega^{(\alpha)} = \sup_\Omega |u(x)| + \langle u\rangle_\Omega^{(\alpha)}. \tag{1.3}$$

Элементы $\dot{C}^{(\alpha)}(\overline{\Omega})$ можно считать доопределенными на $\partial\Omega$ по непрерывности изнутри, через классы эквивалентных в Ω путей. Тем самым $u(x)$ на $\partial\Omega$ может оказаться многозначной.

Функция $u(x)$ принадлежит $C^\alpha(\Omega)$, если она принадлежит $C^\alpha(\overline{\Omega}')$ при $\forall\overline{\Omega}' \subset \Omega$.

Функции $u(x)$, удовлетворяющие условию (1.2) с $\alpha = 1$, называются липшицевыми. Они образуют банахово пространство $\operatorname{Lip}(\overline{\Omega})$, норма в котором определяется так:

$$|u|_{\operatorname{Lip}\Omega} = \sup_\Omega |u(x)| + \langle u\rangle_\Omega^{(1)}. \tag{1.4}$$

$\operatorname{Lip}(\Omega)$ есть совокупность непрерывных в Ω функций, принадлежащих $\operatorname{Lip}(\overline{\Omega}')$ для $\forall\overline{\Omega}' \subset \Omega$.

$O^l(\overline{\Omega})$, $l = 1, 2, \ldots$, — совокупность непрерывных в Ω функций, у которых производные порядка $l-1$ принадлежат $\operatorname{Lip}(\overline{\Omega})$ и имеют первый дифференциал в каждой точке Ω.

$C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ — банахово пространство, элементами которого являются непрерывные в Ω функции, имеющие в Ω непрерывные производные до порядка l включительно и конечное значение величины

$$|u|_{\Omega}^{(l+\alpha)}=\sum_{|k|=0}^{l}\sup_{\Omega}|D^k u(x)|+\sum_{|k|=l}\langle D^k u(x)\rangle_{\Omega}^{(\alpha)}. \tag{1.5}$$

Равенство (1.5) определяет норму в $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$. Элементы $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ можно считать непрерывными и l раз непрерывно дифференцируемыми в $\overline{\Omega}$. Для этого надо доопределить $u(x)$ и ее производные на $\partial\Omega$ по непрерывности.

$C^{l+\alpha}(\Omega)$ — множество функций, принадлежащих $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega}')$ при $\forall\overline{\Omega}'\subset\Omega$.

Аналогично определяются банахово пространство $C^l(\overline{\Omega})$ и линейное множество $C^l(\Omega)$. Норма в $C^l(\overline{\Omega})$ определяется равенством

$$|u|_{\Omega}^{(l)}=\sum_{|k|=0}^{l}\sup_{\Omega}|D^k u(x)|. \tag{1.6}$$

$C^l(\overline{\Omega})$ состоит, короче говоря, из всех l раз непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций.

$\dot{C}^l(\Omega)$ — множество функций из $C^l(\overline{\Omega})$ с носителем в Ω.

$C^0(\overline{\Omega})$ и $C^0(\Omega)$ обозначим просто через $C(\overline{\Omega})$ и $C(\Omega)$ соответственно.

Пусть S_1 — часть границы S области Ω. Обозначим через $C^{l+\alpha}(\Omega\cup S_1)$ множество функций, принадлежащих $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega}_1)$, где Ω_1 — любая подобласть Ω, отстоящая от $S\setminus S_1$ на положительное расстояние.

3. Об областях, границах областей и следах функций на границах. Будем говорить, что граница S области Ω (или ее часть S_1) удовлетворяет условию (A), если существуют два положительных числа a_0 и θ_0 таких, что для любого шара K_ρ с центром на S (на S_1 соответственно) радиуса $\rho\leqslant a_0$ и любой из связных компонент Ω_ρ^i пересечения Ω_ρ шара K_ρ с Ω имеет место неравенство

$$\operatorname{mes}\Omega_\rho^i\leqslant(1-\theta_0)\operatorname{mes}K_\rho.$$

Обозначим через $C_{R,L}$ цилиндр $\left\{x\colon \sum_{i=1}^{n-1}x_i^2<R^2,\ -2LR<x_n<2LR\right\}$, а точку $x=0$ назовем его центром. Область Ω называется **строго липшицевой**, если для $\forall x^0\in\partial\Omega$ можно ввести координаты $y_k=c_{kl}(x_l-x_l^0)$, (c_{kl}) — ортогональная матрица, так, что пересечение $\partial\Omega$ с цилиндром $\overline{C}_{R,L}$, соответствующим координатам y, задается уравнением $y_n=\omega(y'_n)$, $y'_n\equiv(y_1, \ldots, y_{n-1})$, где $\omega(y'_n)$ есть липшицева функция для $|y'_n|\leqslant R$ с константой Липшица, не превосходящей L, а

$$\overline{\Omega}\cap\overline{C}_{R,L}=\{y\colon |y'_n|\leqslant R,\ \omega(y'_n)\leqslant y_n\leqslant 2LR\}.$$

Числа R и L для данной области Ω фиксированы. Произвольная выпуклая область является строго липшицевой.

Пусть $x^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — точка $\partial\Omega$, в которой поверхность $\partial\Omega$ имеет касательную плоскость. Назовем $(y_1, \ldots, y_n)$ местной системой координат с началом в точке x^0, если y и x связаны равенствами $y_i=a_{ik}(x_k-x_k^0)$, $i=1, \ldots, n$, где a_{ik} — ортогональная матрица, а ось y_n направлена по нормали к $\partial\Omega$ в точке x^0, внешней по отношению к Ω.

Область Ω называется областью класса $C^{l+\alpha}$, $l\geqslant 1$ (или C^l, или O^l, $l\geqslant 1$), если она строго липшицева, причем y, участвующие в этом определении, являются местными координатами, а функции $y_n=\omega(y'_n)$, определяющие уравнение поверхности $\partial\Omega$, принадлежат пространству $C^{l+\alpha}\{|y'_n|\leqslant R\}$ (C^l или O^l соответственно).

Мы используем также термин: Ω есть область класса $W_q^l\cap\mathrm{Lip}$. Под этим понимается следующее: приграничную полосу можно покрыть конечным числом областей Ω_i, $i=1, \ldots, N$, пересечения $\Omega_{i,\varepsilon}$ ε-окрестностей которых (при каком-нибудь $\varepsilon>0$) с Ω гомеоморфны полушару $\widehat{K}_\rho=\{y\colon |y|<1,\ y_n>0\}$, причем функции $x^i=x^i(y)$, осуществляющие этот гомеоморфизм, принадлежат $W_q^l(\widehat{K}_\rho)\cap\mathrm{Lip}(\overline{\widehat{K}}_\rho)$, якобианы $\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|$ и $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|$ ограничены каким-либо числом, а плоский кусок границы $\widehat{K}_\rho$ соответствует $\Omega_{i,\varepsilon}\cap\partial\Omega$. При $(l-1)q>n$ $\mathrm{Lip}(\overline{\widehat{K}}_\rho)\subset W_q^l(\widehat{K}_\rho)$ (см. § 2 гл. II), и потому в этом случае говорится об областях класса W_q^l и записывается так: $\Omega\subset W_q^l$.

Мы часто будем говорить: распрямим кусок границы S в окрестности какой-нибудь ее точки x^0, введя новые координаты. Это значит, что в окрестности точки x^0 вводятся новые регулярные координаты (вообще говоря, не декартовы) $z_i=z_i(x)$, $i=1, \ldots, n$, так, чтобы в них кусок границы S имел уравнение $z_n=0$ и часть области Ω, примыкающая к нему, располагалась в полупространстве $z_n\geqslant 0$. Регулярность новых координат $z_1, \ldots, z_n$ означает, что между новыми и старыми координатами существует взаимно однозначное непрерывное соответствие. Функции $z_i(x)$, $i=1, \ldots, n$, дифференцируемы, и якобиан $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$ отличен от нуля в рассматриваемой области x. Кроме того, функции $z_i(x)$, $i=1, \ldots, n$ (а потому и обратные им функции $x_i(z)$, $i=1, \ldots, n$), обладают той гладкостью, которая указывается особо. Координаты с такими свойствами для только что определенных нами поверхностей в окрестности $x^0 \in S$ можно ввести так: от x перейти к декартовым координатам y, а от y — к новым переменным z по формулам

$$z_i = y_i, \qquad i=1, \ldots, n-1,$$
$$z_n = -y_n + \omega(y_1, \ldots, y_{n-1}), \qquad |y'_n| \leqslant R.$$

Если часть S_1 границы области Ω обладает свойствами, описанными в определении строго липшицевых областей или областей классов $C^{l+\alpha}$, C^l, O^l, $l \geqslant 1$, то будем говорить, что S_1 есть строго липшицева поверхность или поверхность класса $C^{l+\alpha}$, C^l, O^l соответственно.

Пусть S_1 есть поверхность класса $C^{l_1+\alpha_1}$, $l_1 \geqslant 1$, и пусть на ней задана функция $\varphi(s)$. Будем говорить, что $\varphi(s)$ есть функция класса $C^{l+\alpha}(S_1)$, $l+\alpha \leqslant l_1+\alpha_1$, если она как функция координат $y'_n=(y_1, \ldots, y_{n-1})$, вводимых для $\forall x^0 \in S_1$, есть элемент $C^{l+\alpha}(\bar{D})$, где $\bar{D}$ есть $\{|y'_n| \leqslant R\}$ — основание цилиндра $C_{R,L}$, соответствующего точке x^0. Наибольшую из норм $|\varphi(y'_n)|_D^{(l+\alpha)}$, подсчитанных для всех точек $x^0 \in S_1$, берем за норму $|\varphi|_{S_1}^{(l+\alpha)}$. Аналогично определяются функции классов $\mathrm{Lip}(S_1)$, $C^l(S_1)$, $O^l(S_1)$.

Если $\varphi(x)$ задана на $\bar{\Omega}$ и $\varphi(x) \in C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$ $(C^l(\bar{\Omega})$, или $O^l(\bar{\Omega})$, или $\mathrm{Lip}(\bar{\Omega}))$, то на границе S области Ω, принадлежащей классу $C^{l_1+\alpha_1}$ (C^{l_1}, O^{l_1} или строго липшицевой) с $l_1 \geqslant \max\{1;\ l\}$, $l_1+\alpha_1 \geqslant l+\alpha$, $\varphi(x)$ определяет функцию $\varphi(s)=\varphi(x)|_{x=s\in S}$ класса $C^{l+\alpha}(S)$ $(C^l(S)$, $O^l(S)$ или $\mathrm{Lip}(S)$ соответственно). Верно и обратное: если $\varphi(s) \in C^{l+\alpha}(S)$ и $S \in C^{l+\alpha}$, $l \geqslant 1$, то $\varphi(s)$ можно продолжить на всю область Ω так, чтобы продолженная функция $\varphi(x)$ принадлежала $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$. Более того, это продолжение можно делать для всех функций $\varphi(s)$ из $C^{l+\alpha}(S)$ с помощью одной и той же конструкции, так что нормы $|\varphi(s)|_S^{(l+\alpha)}$ и $|\varphi(x)|_\Omega^{(l+\alpha)}$ будут эквивалентны. Именно такое продолжение $\varphi(s)$ на Ω мы и будем подразумевать, формулируя граничные условия с помощью функции $\varphi(x)$. Аналогичные факты верны и для классов C^l, O^l, $l \geqslant 1$, и Lip (последние — в строго липшицевых областях).

Если граница области Ω произвольная, то под $|\varphi|_S^{(\alpha)}$ будем понимать следующее:

$$|\varphi|_S^{(\alpha)} = \operatorname{vrai}\max_{s\in S} |\varphi(s)| + \sup\left(\rho^{-\alpha}\operatorname{osc}\{\varphi(s);\ S_\rho^i\}\right), \tag{1.7}$$

где sup взят по всем связным компонентам Ω_ρ^i пересечений $\Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega$ шаров K_ρ с центрами на S, $\rho \leqslant \rho_0$; S_ρ^i есть $S \cap \partial\Omega_\rho^i$.

Определим, что понимается под $\operatorname{vrai}\max_{\partial\Omega} u(x)$ и $\operatorname{vrai}\min_{\partial\Omega} u(x)$ для $u(x)$ из $W_m^1(\Omega)$, $m \geqslant 1$, в случае произвольной области Ω. Будем говорить, что $u(x)$ из $W_m^1(\Omega)$ имеет конечный $\operatorname{vrai}\max_{\partial\Omega} u$, если найдется функция $\varphi(x) \in W_m^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, для которой $u(x) - \varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$. Обозначим класс таких функций φ через $\mathfrak{M}$. Тогда, по определению,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{vrai}\max_{\partial\Omega} u &= \inf_{\varphi\in\mathfrak{M}} \left(\operatorname{vrai}\max_{\Omega} \varphi(x)\right), \\ \operatorname{vrai}\min_{\partial\Omega} u &= -\operatorname{vrai}\max_{\partial\Omega}(-u), \\ \operatorname{vrai}\operatorname{osc}\{u;\ \partial\Omega\} &= \operatorname{vrai}\max_{\partial\Omega} u - \operatorname{vrai}\min_{\partial\Omega} u. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Для строго липшицевых областей введенные нами определения (1.8) для элементов u из $W_m^1(\Omega)$ совпадают с обычными определениями для следов этих функций на $\partial\Omega$ (подробнее об этом см. § 2 гл. II). Аналогично определяем $\operatorname{vrai}\max_{S_1} u$ и $\operatorname{vrai}\min_{S_1} u$ для части S_1 границы Ω. Именно, $u(x)$ из $W_m^1(\Omega)$ имеет конечный $\operatorname{vrai}\max_{S_1} u$, если найдется функция $\varphi(x) \in W_m^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, для которой $u(x) - \varphi(x)$ обращается в нуль на S_1 в том смысле, что $u(x) - \varphi(x)$ принадлежит замыканию в норме $W_m^1(\Omega)$ множества элементов $W_m^1(\Omega)$, равных нулю в окрестности S_1. Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ множество таких $\varphi(x)$. Тогда, по определению,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{vrai}\max_{S_1} u &= \inf_{\varphi\in\mathfrak{M}_1} \left(\operatorname{vrai}\max_{\Omega} \varphi(x)\right), \\ \operatorname{vrai}\min_{S_1} u &= -\operatorname{vrai}\max_{S_1}(-u), \\ \operatorname{vrai}\operatorname{osc}\{u;\ S_1\} &= \operatorname{vrai}\max_{S_1} u - \operatorname{vrai}\min_{S_1} u. \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Иногда vrai max, vrai min и vrai osc заменяются на max, min и osc соответственно.

Если для функции $u(x)$ из $W_m^1(\Omega)$ конечна величина $|u|_S^{(\alpha)}$, определяемая равенством (1.7), то будем говорить, что $u(x)$ принадлежит $C^\alpha(S)$. В частности, если для некоторой $\varphi(x) \in W_m^1(\Omega) \cap C^\alpha(\overline{\Omega})$ разность $u(x) - \varphi(x)$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$, то $u(x) \in C^\alpha(S)$ и норма $|u|_S^{(\alpha)}$ не превосходит $|\varphi|_\Omega^{(\alpha)}$.

На протяжении всей книги у нас будут встречаться утверждения, что такая-то постоянная определяется такими-то величинами. При этом мы в подавляющем большинстве случаев не будем отмечать те зависимости, которые достаточно очевидны или нам не интересны. Например, мы часто не будем явно указывать на зависимость их от числа измерений n, хотя во многих местах эта зависимость есть. Зависимость от области будем отмечать лишь там, где приходится рассматривать области сколь угодно малых размеров и где зависимость от меры области существенна.

§ 2. О допустимых расширениях понятия решения для линейных и квазилинейных уравнений

Основным объектом изучения данной книги являются линейные и квазилинейные уравнения второго порядка эллиптического типа. Их целесообразно разделить на четыре группы: уравнения вида (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4). Относительно этих уравнений нас интересует главным образом выявление тех закономерностей и связей между известными функциями, образующими уравнения, и решениями этих уравнений, которые являются общими для всей совокупности уравнений того иного вида и которые могут быть охарактеризованы количественно с помощью числовых характеристик известных функций — их норм в пространствах $L_s(\Omega)$, $W_p^l(\Omega)$ или $C^{l+\alpha}(\Omega)$. Так что эти характеристики (как решений, так и функций, известных в той или иной задаче) не должны зависеть от конкретного уравнения и должны выражаться в терминах принадлежности к одному из только что указанных пространств.

Будем предполагать всюду *) уравнения равномерно эллиптическими. Что это значит, определено ниже с помощью неравенств (2.5)—(2.7).

Как показали последние десятилетия, нецелесообразно ограничивать себя рассмотрением лишь классических решений. С выяснения вопроса о том, какие расширения понятия решения для линейных и квазилинейных уравнений допустимы при тех или иных предположениях об образующих уравнения функциях, мы и начнем наши исследования.

*) Исключение составляют некоторые параграфы гл. V, VI, VII и VIII.

Обобщенные решения считаем допустимыми для данного класса уравнений, если для них сохраняются те теоремы единственности краевых задач, которые имели место для классических решений. Для эллиптических уравнений второго порядка в качестве «пробного камня» возьмем задачу Дирихле. Известно, что для этих уравнений в классе классических решений справедлива теорема единственности задачи Дирихле «в малом», т. е. задача Дирихле имеет не более одного классического решения, если область определения этих решений достаточно мала. (В нелинейном случае накладываются иногда ограничения на величину отклонения сравниваемых решений и их производных). Это свойство, присущее классическим решениям, сохраним и для вводимых обобщенных решений.

Итак, класс обобщенных решений эллиптических уравнений второго порядка назовем *допустимым*, если для него «в малом» имеет место теорема единственности задачи Дирихле.

Мы начнем поиски допустимых расширений понятия решения с линейных уравнений вида (2.1), коэффициенты которых a_{ij}, a_i, b_i, a суть разрывные функции. Для уравнений $\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j})=0$, являющихся их частным случаем, такой класс известен — это обобщенные решения из $W_2^1(\Omega)$. Для общих же уравнений вида (2.1) мы найдем те ограничения на a_i, b_i и a, которые необходимы для допустимости таких обобщенных решений.

Далее проанализируем случай уравнений (2.2) с дифференцируемыми коэффициентами $a_{ij}(x)$. Затем с этой же точки зрения исследуем квазилинейные уравнения вида (2.3) и (2.4). Оказывается, для нелинейных уравнений допустимость или недопустимость тех или иных расширений понятия решения зависит не только от гладкости образующих уравнения функций $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$, $a_{ij}(x, u, p)$ (как это имеет место в линейных уравнениях), но и от их поведения при $|u|\to\infty$ и $|p|\to\infty$. Такой предварительный анализ был нужен в нелинейных уравнениях даже для исследования разрешимости краевых задач в рамках классических постановок, ибо он установил и то, какие априорные оценки классических решений заведомо невозможны.

В данном параграфе мы заняты выявлением *необходимых* ограничений на данные задачи, для чего строим соответствующие примеры.

Необходимость выявляемых ниже ограничений понимается в том смысле, что если одно из этих ограничений ослабить (заменить, например, принадлежность к L_q принадлежностью к $L_{q'}$ с $q'<q$), то среди рассматриваемого класса уравнений найдется такое, которое имеет решение, не обладающее

обсуждаемым свойством (тем, для которого ищутся необходимые условия). Такая необходимость не исключает возможности, что для более узких классов уравнений, обладающих какими-либо специфическими особенностями, эти ограничения можно ослабить или заменить другими.

Здесь же будет приведена и другая серия примеров, которая даст условия, необходимые для того, чтобы любое допустимое обобщенное решение данного класса уравнений принадлежало пространствам C^{α}, или $C^{1+\alpha}$, или W_2^2 и т. д. и допускало оценки в нормах этих пространств.

Выявленные на этих примерах необходимые ограничения оказались и достаточными. Доказательство их достаточности занимает центральное место в данной книге. Приводимые ниже примеры дают точные контуры возможной теории краевых задач для уравнений с разрывными коэффициентами вида (2.1) и квазилинейных эллиптических уравнений в пространствах $W_2^1(\Omega)$, $W_2^2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)\cap C^{\alpha}(\Omega)$, $C^{l+\alpha}(\Omega)$ и др., где Ω — произвольная ограниченная область, при условии их равномерной эллиптичности.

Мы рассмотрим уравнения в следующих формах:

$$Lu \equiv \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\,u_{x_j} + a_i(x)\,u\right] + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,u_{x_i} + a(x)\,u = f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \tag{2.1}$$

$$Lu \equiv \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,u_{x_i} + a(x)\,u = f(x), \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(a_i(x,\,u,\,u_x)\right) + a(x,\,u,\,u_x) = 0 \tag{2.3}$$

и

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,\,u,\,u_x)\,u_{x_i x_j} + a(x,\,u,\,u_x) = 0, \tag{2.4}$$

при условии их равномерной эллиптичности. Это условие для уравнений (2.1) и (2.2) имеет вид

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \tag{2.5}$$

где ν и μ — положительные постоянные, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — здесь и ниже произвольные вещественные числа, а $\xi^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$; для уравнений (2.3) оно имеет вид

$$\nu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2 \leqslant \frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \leqslant \mu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2, \qquad (2.6)$$

а для уравнений (2.4) — вид

$$\nu(|u|)\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j \leqslant \mu(|u|)\xi^2, \qquad (2.7)$$

где m — число, большее 1.

Начнем с уравнения (2.1). Сопоставим ему интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega [(a_{ij}u_{x_j} + a_i u + f_i)\eta_{x_i} - (b_i u_{x_i} + au - f)\eta]\,dx = 0, \qquad (2.8)$$

где η — произвольная гладкая функция, равная нулю на границе S области Ω. Если $u(x)$ является, например, дважды непрерывно дифференцируемой в $\overline{\Omega}$ функцией и все коэффициенты в (2.1) гладкие, то легко видеть, что соотношения (2.1) и (2.8) для нее эквивалентны: из (2.1) следует (2.8), и из (2.8) следует (2.1). Однако тождество (2.8) имеет смысл для функций u, обладающих производными лишь первого порядка, и для недифференцируемых a_{ij}, a_i f_i, b_i, a, f. Главным членом в нем является $\int\limits_\Omega a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i}\,dx$; соответствующая ему квадратичная форма $\int\limits_\Omega a_{ij}\eta_{x_i}\eta_{x_j}\,dx$ определена в силу (2.5) на любой функции $\eta \in W_2^1(\Omega)$. Поэтому естественным классом обобщенных решений для уравнений (2.1) при условиях (2.5) является класс обобщенных решений из $W_2^1(\Omega)$. Определим их.

Обобщенным решением уравнения (2.1) *из класса* $W_2^1(\Omega)$ *) назовем любую функцию $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую тождеству (2.8) при любой η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Выясним, при каких предположениях относительно a_i, b_i, a, f_i и f тождество (2.8) имеет смысл, т. е. образующие его интегралы конечны при любых функциях u и η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (эти предположения будем формулировать в терминах принадлежности к пространствам $L_s(\Omega)$). Для этого используем теорему о вложимости пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ с $p = 2\hat{n}/(\hat{n}-2)$, где

$$\hat{n} = \begin{cases} n+\varepsilon, \quad \forall\varepsilon > 0, & \text{при} \quad n = 2, \\ n & \text{при} \quad n > 2 \end{cases}$$

*) Сокращенно: об. решением.

(см. § 2 гл. II). Показатель p в ней точен, т. е. не может быть увеличен. Благодаря этой теореме и неравенству Гёльдера (которое тоже точно) для конечности интегралов из (2.8) при $\forall u,\ \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ необходимо, чтобы

$$\left\| a_i^2,\ b_i^2,\ a \right\|_{q/2,\ \Omega} < \infty, \qquad q = \hat{n}, \tag{2.9}$$

и

$$\| f_i \|_{2,\ \Omega} < \infty, \quad \| f \|_{\frac{2\hat{n}}{\hat{n}+2},\ \Omega} < \infty. \tag{2.10}$$

Будем считать условия (2.9), (2.10) выполненными во всех дальнейших рассуждениях.

Выясним теперь, не приведет ли к повышению показателя $\hat{n}$ в условии (2.9) требование допустимости обобщенных решений из $W_2^1(\Omega)$. Это требование состоит в том, чтобы задача Дирихле для (2.1) имела не более одного обобщенного решения из $W_2^1(\Omega)$ для областей Ω «малой меры», причем малость $\operatorname{mes}\Omega$ должна определяться величинами норм $\| a_i \|_{s_1,\ \Omega}$, $\| b_i \|_{s_2,\ \Omega}$, $\| a \|_{s_3,\ \Omega}$, а также постоянными ν и μ из условия (2.5). Простым рассуждением мы покажем, что это приведет к необходимости считать в неравенстве (2.9) q бóльшим n и при $n > 2$. Для этого возьмем какой-либо оператор L вида (2.1) с гладкими коэффициентами в ограниченной области Ω, звездной по отношению к началу координат. Известно (см. гл. III), что для него спектральная задача

$$Lu - \lambda u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

имеет нетривиальные (т. е. отличные от тождественного нуля) решения. Возьмем одно из них $u = u(x)$ и соответствующее ему число λ. Чтобы не выходить, ради простоты, из вещественного пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *), предположим, что $a_i = -b_i$. В этом случае взятые нами u и λ будут вещественными. Рассмотрим семейство операторов $L_R - \frac{\lambda}{R^2} E$ **) в областях Ω_R, полученных подобным сжатием в R раз области Ω. Коэффициенты $a_{ij}^R(x)$, $a_i^R(x)$, $b_i^R(x)$, $a^R(x)$ оператора L_R определяются коэффициентами оператора L с помощью равенств

$$a_{ij}^R(x) = a_{ij}(R^{-1}x), \quad a_i^R(x) = \frac{1}{R} a_i(R^{-1}x), \quad b_i^R(x) = \frac{1}{R} b_i(R^{-1}x),$$

$$a^R(x) = \frac{1}{R^2} a(R^{-1}x), \quad x \in \Omega_R.$$

---

*) В общем случае все рассуждения надо проводить в комплексном гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

**) E — тождественный оператор.

Легко видеть, что нормы $\left\|(a_i^R)^2, (b_i^R)^2, a^R, \frac{\lambda}{R^2}\right\|_{n/2, \Omega_R}$ и постоянные $\nu^R = \nu$ и $\mu^R = \mu$ не зависят от R, в то время как однородные задачи Дирихле

$$L_R u - \frac{\lambda}{R^2} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega_R} = 0$$

в областях Ω_R имеют нетривиальные решения $u_R(x) = u(R^{-1}x)$. Отсюда следует, что по величинам норм $\|a_i^2, b_i^2, a\|_{n/2, \Omega}$ коэффициентов операторов L вида (2.1) и по величинам ν и μ из (2.5) нельзя определить такое число $m > 0$, что для всех областей Ω с $\operatorname{mes}\Omega \leqslant m$ (или хотя бы для всех шаров с мерой, не превосходящей m) задача Дирихле для L имеет не более одного решения.

Итак, мы показали, что для допустимости обобщенных решений из $W_2^1(\Omega)$ для уравнений вида (2.1) необходимо предположить

$$\|a_i^2, b_i^2, a\|_{q/2, \Omega} < \infty, \qquad q > n. \tag{2.9'}$$

В §§ 4—6 гл. III будет доказано, что условия (2.9′), (2.10) являются не только необходимыми, но и достаточными для фредгольмовой разрешимости основных краевых задач для уравнений (2.1) в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Замечание 2.1. В § 2 гл. I первого издания данной книги приведен пример уравнения вида (2.1), для коэффициентов которого конечны нормы (2.9) с $\forall q < n$ при $n \geqslant 3$ и с $q = 2$ при $n = 2$, для которого задача Дирихле имеет неединственное обобщенное решение из $W_2^1(K_R)$ в шарах K_R с любым $R < 1$. Это указывает на необходимость условия (2.9) и с точки зрения сохранения теоремы единственности «в малом» для задачи Дирихле для отдельно взятого уравнения вида (2.1). В связи с этим обратим внимание на такой факт: если уравнение (2.1) фиксировано и удовлетворяет условиям (2.9) и (2.10), то для него можно указать такое малое $m > 0$, что в областях $\Omega_1 \subset \Omega$ с $\operatorname{mes}\Omega_1 \leqslant m$ задача Дирихле имеет не более одного решения из $W_2^1(\Omega_1)$. Обусловлено это тем, что для фиксированой функции $a(x)$ из $L_p(\Omega)$ величины $\|a\|_{p, \Omega_1}$, $\Omega_1 \subset \Omega$, стремятся к нулю при $\operatorname{mes}\Omega_1 \to 0$, точнее, по $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое $m(\varepsilon) > 0$, что при $\operatorname{mes}\Omega_1 \leqslant m(\varepsilon)$ величина $\|a\|_{p, \Omega} \leqslant \varepsilon$. Однако $m(\varepsilon)$ определяется не только ε и $\|a\|_{p, \Omega}$ и для бесконечного семейства $\{a^k(x)\}$ с $\|a^k(x)\|_{p, \Omega} \leqslant C$, вообще говоря, нельзя по $\forall \varepsilon > 0$ подобрать $m(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $\|a^k\|_{p, \Omega_1} \leqslant \varepsilon$ при $\forall k$ и $\forall \Omega_1$ с $\operatorname{mes}\Omega_1 \leqslant \leqslant m(\varepsilon)$. В конце §§ 4, 5 гл. III будет доказано, что для фиксированного уравнения (2.1), удовлетворяющего условиям (2.9), (2.10), задача Дирихле является фредгольмово-разрешимой в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, если $n \geqslant 3$.

Перейдем к нахождению условий, необходимых для того, чтобы любое об. решение уравнения (2.1) было ограниченным на $\forall \overline{\Omega'} \subset \Omega$. Для этого рассмотрим функцию $u = \ln|\ln r|$, $r = |x|$, в шаре $K_R = K_R(0)$, $R < 1$, и убедимся, что она удовлетворяется уравнениям

$$\Delta u = f \quad \text{и} \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i, \tag{2.11}$$

где $f = \frac{n-2}{r^2 \ln r} - \frac{1}{r^2 \ln^2 r}$, $f_i = \frac{x_i}{r^2 \ln r}$. Легко видеть, что эта неограниченная функция u есть об. решение из $W_2^1(K_R)$ для этих уравнений. Но $f \in L_{n/2}(K_R)$, а $f_i \in L_n(K_R)$, и потому для того, чтобы $\forall$ об. решение из $W_2^1(\Omega)$ уравнений (2.1) было ограниченной функцией, необходимо, чтобы

$$\|f\|_{q/2,\,\Omega} < \infty, \quad \|f_i\|_{q,\,\Omega} < \infty, \qquad q > n. \tag{2.12}$$

Оказывается, что условия (2.12) не только необходимы, но и достаточны. Неравенства (2.9′) предполагаются выполненными здесь и ниже. Более того, при условиях (2.9′), (2.12) любое об. решение уравнения (2.1) принадлежит $C^\alpha(\Omega)$ с некоторым $\alpha > 0$, причем величины $\max\limits_{\Omega'}|u|$, $|u|_{\Omega'}^{(\alpha)}$ мажорируются постоянной $C(\Omega')$, определяемой $(q-n)^{-1}$, $\|u\|_{2,\,\Omega}$, нормами коэффициентов и свободных членов, выписанными в (2.9′) и (2.12), и расстоянием Ω' до $\partial\Omega$.

Замечание 2.2. В связи с замечанием 2.1 встает такой вопрос. Пусть для L выполнены условия (2.9) и (2.12). Будет ли $\forall$ об. решение его из $W_2^1(\Omega)$ ограниченным в $\overline{\Omega'} \subset \Omega$? Оказывается, нет. Для этого необходимо, чтобы

$$\left\| a_i^2,\ a \right\|_{q/2,\,\Omega} < \infty, \qquad q > n. \tag{2.9″}$$

Действительно, функцию $u = \ln|\ln r|$ можно рассмотреть в K_R, $R < 1$, и как об. решение уравнений

$$\Delta u - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i u}{r^2 \ln r \ln|\ln r|}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \Delta u - \frac{f(r)}{\ln|\ln r|} u = 0,$$

коэффициенты a_i и a которых принадлежат $L_n(K_R)$ и $L_{n/2}(K_R)$. Следовательно, выполнение (2.9) с $q = n$ не гарантирует нужного нам свойства об. решений. Если же имеют место неравенства (2.9), (2.12), (2.9″), то, как доказывается в конце § 13 гл. III, $\forall$ об. решение принадлежит $C^{\alpha}(\Omega)$. Однако оценки сверху его норм $\max\limits_{\Omega'}|u|$ и $|u|_{\Omega'}^{(\alpha)}$ зависят не только от постоянных ν, μ, q и норм известных функций, входящих в условия (2.5), (2.9), (2.12), (2.9″), но и от модулей непрерывности коэффициентов b_i в нормах $L_r(\Omega)$. (Они зависят также от $\|u\|_{2,\Omega}$ и расстояния Ω' до Ω.)

Если условия (2.12) выполнены с $q=n$, то, как мы видели выше на примере (2.11), уравнения (2.11) имеют неограниченные об. решения. Однако для этих решений $u(x)$ конечны интегралы вида $\int e^{c|u(x)|}dx$, $c>0$. В § 13 гл. III будет доказано, что и в общем случае для $\forall$ об. решения уравнения (2.1) конечны интегралы $\int\limits_{\Omega'} e^{c|u(x)|}dx$, $\forall\bar{\Omega}'\subset\Omega$, с некоторым $c>0$, если коэффициенты L удовлетворяют (2.9′) и $f\in L_{n/2}(\Omega)$, $f_i\in L_n(\Omega)$, $n\geqslant 3$ (для $n=2$ это свойство $u(x)$ следует из принадлежности $u(x)$ к $W_2^1(\Omega)$).

Если f и f_i суммируются со степенями q_1 и q_2 меньшими, чем $n/2$ и n соответственно, но бо́льшими, чем степени из (2.10), то оказывается, что любое об. решение будет суммироваться со степенью p, большей, чем показатель $2n/(n-2)$ вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ (и здесь считаем $n\geqslant 3$, ибо при $n=2$ все об. решения суммируются с любой конечной степенью). Покажем, что p не может быть больше $nq_1/(n-2q_1)$ и $nq_2/(n-q_2)$. В § 13 гл. III будет доказано, что этот пример дает точную зависимость p от q_1 и q_2, т. е. будет доказано, что любое об. решение уравнения (2.1) принадлежит $L_p(\Omega')$, $\forall\bar{\Omega}'\subset\Omega$, если

$$\|f\|_{q_1,\Omega}<\infty,\quad \|f_i\|_{q_2,\Omega}<\infty,\quad \frac{1}{q_1}=\frac{2}{n}+\frac{1}{p},\quad \frac{1}{q_2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{p},\quad n\geqslant 3. \tag{2.12′}$$

Пример этот следующий: функция $u=r^{-\lambda}$, $\lambda>0$, при $\lambda<\frac{n}{2}-1$ есть об. решение из $W_2^1(\Omega)$, $\Omega=\{x\colon r<1\}$, уравнений

$$\Delta u=-\lambda(-\lambda+n-2)r^{-\lambda-2}\equiv f,\ \Delta u=-\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i r^{-\lambda-2})_{x_i}\equiv\sum_{i=1}^{n}(f_i)_{x_i}.$$

Отсюда ясно, что если $(\lambda+2)q_1\geqslant n$, т. е. $f\,\overline{\in}\,L_{q_1}(\Omega)$, то $\lambda\geqslant\frac{n}{q_1}-2\equiv\frac{n}{p}$, т. е. $u\,\overline{\in}\,L_p$. Если же $(\lambda+1)q_2\geqslant n$, т. е. $f_i\,\overline{\in}\,L_{q_2}(\Omega)$, то $\lambda\geqslant\frac{n}{q_2}-1\equiv\frac{n}{p}$, т. е. $u\,\overline{\in}\,L_p$. Итак, если мы хотим, чтобы $u(x)$ принадлежало L_p с $p>n/(n-2)$, то необходимо, чтобы f и f_i удовлетворяли условиям (2.12′).

Выясним, какими свойствами должны обладать коэффициенты L из (2.1) для того, чтобы L были ограниченными операторами из $W_2^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Для этого естественно записать l в виде (2.2), т. е. $Lu\equiv a_{ij}u_{x_ix_j}+A_iu_{x_i}+Au$, где $A_i=a_i+$ $+b_i+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}$, а $A=a+\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$. Будем считать, что для A и A_i выполнено условие (2.9″), а для a_{ij} — условие (2.5). Из принадлежности u к $W_2^2(\Omega)$ следует, что $u_{x_i}\in L_{2\hat n/(\hat n-2)}(\Omega)$ ($\hat n$ определено выше), а $u\in L_{2n/(n-4)}$ при $n>4$, суммируется с любой конечной степенью при $n=4$ и u ограничена при $n\leqslant 3$. Ввиду этого

$$\|A_iu_{x_i}\|_{2,\Omega}\leqslant\|A_i\|_{q,\Omega}\|u_{x_i}\|_{2q/(q-2),\Omega}\leqslant c\|u\|_{2,\Omega}^{(2)}$$

при всех $n\geqslant 2$ (ибо $q>n$ и потому $2q/(q-2)<2n/(n-2)$) и

$$\|Au\|_{2,\Omega}\leqslant\|A\|_{q/2,\Omega}\|u\|_{2q/(q-4),\Omega}\leqslant c\|u\|_{2,\Omega}^{(2)}$$

при $n\geqslant 4$. При $n=2$ и 3 функция u ограничена, а A по условию (2.9′) суммируема со степенью $q/2$, $q>n$, которая может оказаться меньшей двух. Для принадлежности Au к $L_2(\Omega)$ надо потребовать, чтобы $A\in L_2(\Omega)$. Итак, оператор L будет ограниченным оператором из $W_2^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, если

$$\left.\begin{aligned}&\left\|a_i+b_i;\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right\|_{q,\Omega}<\infty,\qquad q>n,\\&\left\|a+\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right\|_{\hat q/2,\Omega}<\infty,\qquad \hat q=q>n\ \text{ при }\ n\geqslant 4,\quad \hat q=4\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{при}\ \ n=2,3.\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

В § 10 гл. III доказывается, что при выполнении условий (2.5), (2.13), действительно, каждое об. решение из $W_2^1(\Omega)$ уравнения (2.1) с $f+\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\in L_2(\Omega)$ принадлежит $W_2^2(\Omega')$, $\forall\overline{\Omega}'\subset\Omega$, и его норма $\|u\|_{2,\Omega'}^{(2)}$ мажорируется постоянной $c(\Omega')$, определяемой лишь $(q-n)^{-1}$, ν и μ из (2.5), $\|u\|_{2,\Omega}$, нормами из (2.13), $\left\|f+\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right\|_{2,\Omega}$ и расстоянием от Ω' до $\partial\Omega$. Первая половина этого утверждения сохраняется и при $q=n$ в (2.13), надо только при $n=4$ считать $\hat q>4$ (ясно, что это условие при $n=4$ необходимо для принадлежности Au к $L_2(\Omega)$). Вторая же половина видоизменяется: постоянная $c(\Omega')$ в этом случае зависит также от модулей непрерывности $a_i + b_i$, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$ и A в $L_n(\Omega)$ и $L_{\hat{q}/2,\Omega}$ соответственно.

Пусть условия (2.5), (2.13) для L из (2.1) выполнены. Выясним, при каких ограничениях на коэффициенты и свободные члены любое ограниченное решение уравнения (2.1) из $W_2^2(\Omega)$ принадлежит $C^{1+\alpha}(\Omega)$. Пример

$$\Delta r^{\lambda} = \lambda(n + \lambda - 2) r^{\lambda-2}$$

указывает на необходимость условия

$$\left\| f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right\|_{q,\Omega} < \infty, \qquad q > n, \tag{2.14}$$

причем величина $q - n > 0$ ответственна за величину показателя гёльдеровости α.

Если член $au + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} u$ из Lu отнести к свободному члену и учесть, что u ограничена, то требование (2.14) указывает на необходимость еще условия

$$\left\| a + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right\|_{q,\Omega} < \infty, \qquad q > n. \tag{2.15}$$

Оказывается, ограничений (2.13) — (2.15) и достаточно. Именно, в § 15 гл. III мы покажем, что при выполнении условий (2.13), (2.14) и (2.15) все обобщенные решения u уравнений (2.1) из $W_2^2(\Omega)$ принадлежат $C^{1+\alpha}(\Omega)$ и для них нормы $|u|_{\Omega'}^{(1+\alpha)}$, $\Omega' \subset \Omega$, можно оценить эффективно через постоянные ν, q, μ и нормы из условий (2.5), (2.13) — (2.15), $\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}$ и расстояние Ω' до Ω. Этими же величинами определяется и величина показателя $\alpha > 0$.

Не лишено интереса и следующее сопоставление условий (2.9′), (2.12) и (2.13) — (2.15), показывающее их естественную связь. Пусть u есть обобщенное решение (2.1) из $W_2^2(\Omega)$. Совокупность функций $u_0 = u$ и $u_k = u_{x_k}$, $k = 1, \ldots, n$, можно рассмотреть как обобщенное решение из $W_2^1(\Omega)$ следующей системы:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij} u_{0x_j}) + (a_i + b_i) u_i + \left(a + \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right) u_0 = f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} u_{kx_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} u_j\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[(a_i + b_i) u_i + \left(a + \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right) u_0\right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right),$$

которую короче можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}u_{kx_j}+A^k_{ij}u_j\right)+B^k_ju_j=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(f+\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)(1-\delta^0_k)+\left(f+\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)\delta^0_k\equiv\psi_k,\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{2.16}$$

Поскольку уравнения (2.1) являются частным случаем систем вида (2.16), то условия (2.9′), (2.12), необходимые для уравнений (2.1), будут необходимыми (для тех же целей, указанных выше) и для всего класса систем (2.16). Для (2.16) они имеют вид

$$\|A^k_{ij}\|_{q,\,\Omega}<\infty,\qquad \|B^k_j\|_{q/2,\,\Omega}<\infty, \tag{2.17}$$

$$\left\|f+\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right\|_{q,\,\Omega}<\infty,\qquad q>n. \tag{2.18}$$

Если учесть, как A^k_{ij} и B^k_j образованы из коэффициентов уравнения (2.1), то легко видеть, что условия (2.17), (2.18) соответствуют условиям (2.13) — (2.15).

В гл. VII будет доказано, что условия (2.17) достаточны для допустимости обобщенных решений из $\overset{1}{W}_2(\Omega)$, а условия (2.17) и (2.18) достаточны для принадлежности всех таких решений к C^α и для случая всего класса систем вида (2.16).

Переходим к уравнениям вида (2.2), считая $a_{ij}(x)$ в общем случае недифференцируемыми функциями, удовлетворяющими лишь неравенствам (2.5). Таким уравнениям невозможно сопоставить тождество типа (2.8), и потому для них нельзя рассматривать обобщенные решения u, имеющие производные лишь первого порядка. Их обобщенные решения должны иметь производные второго порядка. Но этого, оказывается, мало. Чтобы разобраться в данном вопросе, рассмотрим следующий пример.

Функция $u=r^\lambda$ в шаре $K_R=\{x\colon |x|<R\}$ удовлетворяет уравнению *)

$$Lu=a_{ij}u_{x_ix_j}=0, \tag{2.19}$$

где $a_{ij}=\delta^j_i+b\dfrac{x_ix_j}{r^2}$, $b=-1+\dfrac{n-1}{1-\lambda}$. Для нее $u_{x_i}=\lambda r^{\lambda-2}x_i$, $u_{x_ix_j}=\lambda r^{\lambda-4}\left[(\lambda-2)x_ix_j+\delta^j_ir^2\right]$. При $b>-1$, т. е. при $\lambda<1$,

---

*) Факт существования у (2.19) с $a_{ij}=\delta^j_i+b(r)\dfrac{x_ix_j}{r^2}$ решений вида $u=u(r)$ отмечен в работе [21₃].

уравнение (2.19) эллиптично (неравенства (2.5) выполнены). Производные $u_{x_i x_j}$ суммируются по K_R со степенью $p < n/(2-\lambda)$, а производные u_{x_i} — со степенью $q < n/(1-\lambda)$. При λ, близких к единице, p близко к n, а q — к бесконечности. Но такую функцию $u = r^\lambda$ при $\lambda < 1$ нельзя считать допустимым обобщенным решением уравнения (2.19), ибо уравнению (2.19) удовлетворяет и функция $v = R^\lambda$, совпадающая с r^λ на границе шара K_R. Исключить этот пример можно по-разному. Мы предлагаем для любого $n \geqslant 2$ рассматривать такие обобщенные решения u, которые имеют $\operatorname{vrai}\max|\nabla u| < \infty$ и принадлежат $W_2^2(\Omega)$. Для $n=2$ первое из этих условий можно отбросить (см. § 19 гл. III). Ниже, разбирая случай общего квазилинейного уравнения (2.4), мы опишем, какими свойствами обладают такие решения.

А. Д. Александров изучает обобщенные решения уравнений (2.2), для которых производные второго порядка суммируемы по Ω со степенью n. Для них им доказана единственность в малом при условии, что коэффициенты a_i и a в (2.2) суммируемы по Ω со степенью n, а a_{ij} удовлетворяют неравенству (2.5), причем показано, что для всего рассмотренного класса уравнений вида (2.2) эти предположения о a_{ij}, a_i и a нельзя ослабить. Эти результаты опубликованы в [$1_{6,7}$].

Пример (2.19) интересен и с точки зрения справедливости априорной оценки

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant c\left[\|Lu\|_{2,\Omega} + \|u\|_{2,\Omega}\right] \tag{2.20}$$

для любой функции u из $W_2^2(\Omega)$, равной нулю на S. Неравенство (2.20) при $n > 2$ и $S \in C^2$ установлено для оператора L из (2.2) при условии, что a_{ij} удовлетворяют неравенствам (2.5) и непрерывны, причем константа c в (2.20) зависит не только от ν и μ из (2.5), но и от модуля непрерывности a_{ij}.

Все попытки доказать это неравенство при $n > 2$ для любых ограниченных a_{ij} или хотя бы показать, что для гладких a_{ij} постоянная c зависит лишь ν и μ из (2.5), не увенчались успехом. Из примера (2.19) можно понять, что это и невозможно сделать.

Действительно, пусть Ω есть шар K_1.

Рассмотрим в нем семейство функций $u^\varepsilon = r^\lambda - 1$, $\lambda = 2 - \frac{n}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, {}^1/_4]$, считая $n \geqslant 3$. Они удовлетворяют в K_1 уравнению (2.19), для коэффициентов $a_{ij}^\varepsilon = \delta_i^j + \left(-1 + \frac{n-1}{1-\lambda}\right)\frac{x_i x_j}{r^2}$ которых выполнены неравенства (2.5) с ν и μ, не зависящими от $\varepsilon \in (0, 1/4]$. С другой стороны, $\|u^\varepsilon\|^{(2)}_{2,\Omega}$ имеет порядок ε^{-1}, в то время как нормы $\|u^\varepsilon\|_{2,\Omega}$ равномерно ограничены для $\varepsilon \in (0, 1/4]$. Следовательно, неравенство (2.20) не может быть справедливым с постоянной c, не зависящей от ε, для взятого нами набора функций u^ε и L_ε вида (2.19). (Для $n=2$ этот пример ничего не дает, ибо в этом случае $\lambda = 2 - \frac{n}{2} + \varepsilon > 1$, и потому уравнение (2.19) не эллиптическое. Это находится в согласии с тем, что для $n=2$ неравенство (2.20) имеет место при любых ограниченных a_{ij}, удовлетворяющих только неравенствам (2.5).)

Покажем, что постоянная c в (2.20) зависит не только от ν и μ из (2.5), но и от каких-либо характеристик гладкости a_{ij}, иными словами, что она не может быть общей для всей совокупности гладких коэффициентов a_{ij}, удовлетворяющих (2.5) с одними и теми же ν и μ. Действительно, усредним обе части уравнения (2.19), считая снова

$$u^\varepsilon = r^\lambda - 1,\ \lambda = 2 - \frac{n}{2} + \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, 1/4], \qquad n \geqslant 3, \quad \Omega = K_1,$$

с помощью какого-либо неотрицательного бесконечно дифференцируемого ядра $\omega_\rho(|x-y|)$ (см. [31₂], [32]) и результат запишем в виде

$$a^\varepsilon_{ij\rho}(x)\, u^\varepsilon_{x_i x_j}(x) = f^\varepsilon_\rho(x), \tag{2.21}$$

где

$$a^\varepsilon_{ij\rho}(x) = \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} \omega_\rho(|x-y|)\, a^\varepsilon_{ij}(y)\, dy,$$

а

$$f^\varepsilon_\rho(x) = \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} \omega_\rho(|x-y|)\, a^\varepsilon_{ij}(y)\left[u^\varepsilon_{x_i x_j}(x) - u^\varepsilon_{y_i y_j}(y)\right] dy.$$

Коэффициенты $a^\varepsilon_{ij\rho}$ бесконечно дифференцируемы, а $f^\varepsilon_\rho \in L_2(K_1)$ и $\|f^\varepsilon_\rho\|_{2,K_1} \to 0$ при $\rho \to 0$, когда $\varepsilon > 0$ фиксировано. Последнее следует из неравенства

$$\int\limits_{K_1} dx \left\{ \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} \omega_\rho(|x-y|)\, a^\varepsilon_{ij}(y)\left[u^\varepsilon_{x_i x_j}(x) - u^\varepsilon_{y_i y_j}(y)\right] dy \right\}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{K_1} dx \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} \omega_\rho(|x-y|)(a^\varepsilon_{ij}(y))^2 \times$$
$$\times dy \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} \omega_\rho(|x-y|)\left[u^\varepsilon_{x_i x_j}(x) - u^\varepsilon_{y_i y_j}(y)\right]^2 dy \leqslant$$
$$\leqslant c \int\limits_{|z|\leqslant\rho,\ |z+y|\leqslant 1} \int \omega_\rho(|z|)\left[u^\varepsilon_{x_i x_j}(z+y) - u^\varepsilon_{y_i y_j}(y)\right]^2 dy\, dz \leqslant$$
$$\leqslant c \max_{|z|\leqslant\rho} \int\limits_{|z+y|\leqslant 1} \left[u^\varepsilon_{x_i x_j}(z+y) - u^\varepsilon_{y_i y_j}(y)\right]^2 dy,$$

правая часть которого стремится к нулю при $\rho \to 0$, если $\varepsilon > 0$ фиксировано. Коэффициенты $a^{\varepsilon}_{ij\rho}$ удовлетворяют неравенствам (2.5), причем положительные постоянные ν и μ в них можно выбрать общими для всех $\rho \in (0, \rho_0]$, $\varepsilon \in (0, {}^1/_4]$. Для $a^{\varepsilon}_{ij\rho}$ при $\rho > 0$ и $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\|u^{\varepsilon}\|^{(2)}_{2, K_1} \leqslant c_{\rho, \varepsilon}\left(\|a^{\varepsilon}_{ij\rho}u^{\varepsilon}_{x_ix_j}\|_{2, K_1} + \|u^{\varepsilon}\|_{2, K_1}\right) = c_{\rho, \varepsilon}\left(\|f^{\varepsilon}_{\rho}\|_{2, K_1} + \|u^{\varepsilon}\|_{2, K_1}\right).$$

Однако из сказанного выше ясно, что постоянные $c_{\rho, \varepsilon}$ стремятся к бесконечности при $\varepsilon \to 0$ и $\rho = \rho(\varepsilon) \to 0$ и, следовательно, не могут определяться только ν и μ из (2.5) для $a^{\varepsilon}_{ij\rho}$.

Замечание 2.3. В последнем рассуждении в доказательстве того, что нельзя постоянную c в неравенстве (2.20) взять общей для всех гладких коэффициентов $a_{ij}(x)$, удовлетворяющих неравенствам (2.5) с какими-либо фиксированными $\nu > 0$ и $\mu > 0$, мы привлекли функции $u^{\varepsilon} \in W^2_2(K_1)$, которые не принадлежат $C^2(\overline{K}_1)$. Однако из этого уже следует, что интересующее нас неравенство (2.20) не имеет места и на множестве функций $u(x)$ из $C^{\infty}(\overline{K}_1)$, равных нулю на ∂K_1. Действительно, если бы такое неравенство было справедливым, то ввиду плотности в $W^2_{2,0}(K_1) = W^2_2(K_1) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(K_1)$ множества всех функций из $C^{\infty}(\overline{K}_1)$, равных нулю на ∂K_1, оно сохранилось бы и для элементов $u \in W^2_{2,0}(\Omega)$. Последнее же, как показано выше, не имеет места.

В первом издании книги мы высказали гипотезу о том, что задача Дирихле для уравнений (2.2) с разрывными коэффициентами a_{ij}, удовлетворяющими лишь условиям равномерной эллиптичности (2.5), «хорошо» разрешима в пространствах $W^2_n(\Omega)$. Такое предположение казалось нам правдоподобным ввиду следующих трех фактов: 1) при $n = 2$ справедливость его доказана; 2) при $n \geqslant 3$ в рассмотренном нами примере (2.19) функция $u = r^{\lambda}$ (а следовательно, и функция $u = r^{\lambda} - R^{\lambda}$, равная нулю на границе шара K_R) не принадлежит $W^2_n(\Omega)$ (для нее $u_{x_ix_j}$ суммируются со степенью $p < n$), и, следовательно, этот пример не противоречит нашей гипотезе; 3) результаты А. Д. Александрова по теоремам единственности решения задачи Дирихле для уравнений (2.2) в пространстве $W^2_n(\Omega)$, цитированные на стр. 45, создавали впечатление, что именно пространство $W^2_n(\Omega)$ является тем функциональным пространством, в котором следует рассматривать краевые задачи для уравнений (2.2) с произвольными разрывными коэффициентами a_{ij}. Однако пример, который мы сейчас приведем, показывает, что наши прогнозы не оправдались. Именно, покажем, что неравенство

$$\|u\|^{(2)}_{q,\,\Omega} \leqslant c\,(\|Lu\|_{q,\,\Omega} + \|u\|_{q,\,\Omega}) \tag{2.22}$$

несправедливо не только при $q=2$, но и при любом $q \geqslant 2$, в том числе и при $q=n$, если $n \geqslant 3$.

Функция

$$v^{(\lambda)}(x) = (x_1^2 - x_2^2)\,\rho^{-\lambda}, \quad \rho^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

есть решение уравнения $L_\lambda v^{(\lambda)} = a_{ij}^{(\lambda)} v^{(\lambda)}_{x_i x_j} = 0$, где

$$a_{ij}^{(\lambda)} = \begin{cases} \nu\delta_i^j + (1-\nu)\dfrac{x_i x_j}{\rho^2}, & i,\ j \leqslant 2, \\ \nu\delta_i^j, \quad i > 2 \quad \text{или} \quad j > 2, & \nu = \dfrac{(1-\lambda)(2-\lambda)}{2+\lambda}. \end{cases}$$

При $\lambda \in [0, 1)$ величина ν принадлежит интервалу $(0, 1]$, так что оператор L_λ — эллиптический. Фиксируем какое-либо значение $q > 2$. Семейство операторов L_λ с $\lambda \leqslant 2/q$ имеет равномерно ограниченные снизу постоянные эллиптичности $\nu \geqslant \geqslant \dfrac{(q-2)(q-1)}{q(q+1)} > 0$ и равномерно ограниченные сверху коэффициенты. Семейство функций $v^{(\lambda)}(x)$ в шаре K_1 таково, что $\|v^{(\lambda)}\|^{(2)}_{q,\,K_1} < \infty$ при $\lambda < 2/q$ и $\|v^{(\lambda)}\|^{(2)}_{q,\,K_1} \to \infty$ при $\lambda \to 2/q$, в то время как $\max\limits_{K_1} |v^{(\lambda)}, \nabla v^{(\lambda)}| \leqslant \mathrm{const}$ при всех $\lambda \in [0, 1]$. Функции $v^{(\lambda)}$ не равны нулю на ∂K_1, поэтому вместо них рассмотрим $u^{(\lambda)}(x) = v^{(\lambda)}(x)\,\zeta(x)$, где $\zeta(x)$ — срезающая функция на K_1, равная единице при $|x| \leqslant 1/2$ и $\zeta \in C^2(K_1)$.

Функции $u^{(\lambda)}(x)$ равны нулю на ∂K_1 и удовлетворяют уравнениям

$$L_\lambda u^{(\lambda)} = f^{(\lambda)},$$

где $f^{(\lambda)}(x) = 2a_{ij} v^{(\lambda)}_{x_i} \zeta_{x_j} + a_{ij} v^{(\lambda)} \zeta_{x_i x_j}$ ограничены равномерно относительно λ из $[0, 1]$.

Таким образом, $\|L_\lambda u^{(\lambda)}\|_{q,\,K_1} + \|u^{(\lambda)}\|_{q,\,K_1} \leqslant \mathrm{const}$, в то время как $\|u^{(\lambda)}\|^{(2)}_{q,\,K_1} \to \infty$ при $\lambda \to 2/q$.

Обратимся теперь к квазилинейным уравнениям. Начнем с уравнений (2.4) общего вида. Уже в линейном случае была выяснена необходимость требований ограниченности производных первого порядка для допустимых обобщенных решений, если относительно производных второго порядка этих решений известна, например, лишь принадлежность их к $L_2(\Omega)$. Мы покажем, что это же необходимо требовать и от обобщенных решений уравнений (2.4) даже при сколь угодно гладких функциях $a_{ij}(x, u, p)$, удовлетворяющих условиям (2.7).

Возьмем в шаре K_R функцию $u=r^\lambda$, $\lambda<1$. Как мы видели выше, она удовлетворяет уравнению (2.19), а потому и уравнению

$$\left(\delta_i^j+b\frac{u_{x_i}u_{x_j}}{|\nabla u|^2}\right)u_{x_ix_j}=0, \tag{2.23}$$

ибо $|\nabla u|^2=\lambda^2r^{2\lambda-2}$ и $x_i=\frac{u_{x_i}}{\lambda}r^{2-\lambda}$. Уравнение (2.23) равномерно эллиптично при $\lambda<1$. Однако функции $a_{ij}(p)=\delta_i^j+b\frac{p_ip_j}{|p|^2}$ недифференцируемы в точке $p=0$. Поэтому вместо них возьмем другие, гладкие функции $\hat{a}_{ij}(p)=\delta_i^j+b\frac{p_ip_j}{f(|p|^2)}$, где $f(t)$ есть бесконечно дифференцируемая положительная функция $t\geqslant 0$, равная t при $t\geqslant t_0>0$ и удовлетворяющая для всех $t\geqslant 0$ неравенству $f(t)\geqslant t$. Функция $u=r^\lambda$ удовлетворяет в шаре $\left\{r\leqslant\left(\frac{t_0}{\lambda^2}\right)^{1/(2\lambda-2)}\right\}$ уравнению

$$\hat{a}_{ij}(u_x)u_{x_ix_j}\equiv\left[\delta_i^j+b\frac{u_{x_i}u_{x_j}}{f(|\nabla u|^2)}\right]u_{x_ix_j}=0, \tag{2.24}$$

ибо в этом шаре для нее $|\nabla u|^2=\lambda^2r^{2\lambda-2}\geqslant\lambda^2\frac{t_0}{\lambda^2}=t_0$, поэтому $f(|\nabla u|^2)=|\nabla u|^2$ и уравнение (2.24) совпадает с (2.23). Неравенства (2.7) для $\hat{a}_{ij}$ выполняются, так что (2.24) равномерно эллиптично.

С другой стороны, уравнению (2.24) удовлетворяет функция $u=R^\lambda$, $R=\left(\frac{t_0}{\lambda^2}\right)^{1/(2\lambda-2)}$, совпадающая с r^λ на границе шара $r\leqslant R$, т. е. имеет место нарушение теоремы единственности в малом. Этот пример показывает, что даже при бесконечно дифференцируемых функциях $\hat{a}_{ij}(p)$ обобщенные решения для (2.4) из W_2^2, имеющие неограниченные производные первого порядка, неправомерны. (Заметим, что $u=r^\lambda$ принадлежит W_q^1 с $q<n/(1-\lambda)$ и W_p^2 с $p<n/(2-\lambda)$, $\lambda<1$.) Таким образом, допустимые обобщенные решения из W_2^2 уравнений (2.4) должны иметь ограниченные производные первого порядка. В гл. VI мы докажем, что такие обобщенные решения обладают всеми нужными свойствами: они «единственны в малом», и их дифференциальные свойства улучшаются по мере улучшения дифференциальных свойств функций $a_{ij}(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$, образующих уравнение (2.4). Это имеет место для всего класса (2.4). Однако если мы хотим, чтобы $\max\limits_{\Omega_1}|\nabla u|$, $\Omega_1\subset\Omega$, любого допустимого решения u уравнения вида (2.4) можно было оценить через $\max_{\Omega}|u|$, какие-либо числовые характеристики функций $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ и расстояние Ω_1 до S, когда Ω_1 — строго внутренняя подобласть, и расстояние Ω_1 до $S \setminus S'$ и какие-либо нормы S' и $u|_{S'}$, когда Ω_1 примыкает к части S' границы S, то на a_{ij}, a и их частные производные необходимо наложить некоторые ограничения, касающиеся их роста при $|p| \to \infty$. Следующий пример покажет, что если a_{ij} удовлетворяют неравенствам (2.7), то одним из необходимых условий является

$$|a(x, u, p)| \leqslant \mu(|u|)(1+|p|)^2, \tag{2.25}$$

если $a(x, u, p)$ не имеет неограниченных особенностей при $x \in \overline{\Omega}$ и конечных u и p. Именно, функции $u_\delta(x) = (x_1 + \delta)^\lambda$, $0 < \delta \leqslant 1/2$, в кубе $\overline{\Omega} = \{0 \leqslant x_k \leqslant {}^1/_2\}$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta u = c|\nabla u|^{2(1+\varepsilon)}, \tag{2.26}$$

где $\varepsilon = \frac{\lambda}{2(1-\lambda)}$, $c = \lambda^{-1-2\varepsilon}(\lambda - 1)$. Они бесконечно дифференцируемы, и при $0 < \lambda < 1$ их модули не превосходят 1. Часть границы S', принадлежащая плоскости $x_1 = 0$, и значения u_δ на ней имеют равномерно ограниченные нормы $|\cdot|^{(l+\alpha)}$ всех порядков при любом $\delta \in (0, 1/2]$. Тем не менее для u_δ нельзя оценить $\max_{\Omega_1}|\nabla u_\delta|$ для подобластей Ω_1, примыкающих к S', через $\max_{\Omega}|u_\delta|$, числа c и ε, полностью характеризующие $a(x, u, p) = cp^{2(1+\varepsilon)}$, и расстояние Ω_1 от $S \setminus S'$, ибо он неограниченно растет при $\delta \to 0$. Это обусловлено тем, что $a(x, u, p)$ при $|p| \to \infty$ растет быстрее $|p|^2$. Следовательно, такой рост a уже недопустим, что и выражено неравенством (2.25).

Рассмотрим теперь вопрос об обобщенных решениях квазилинейных уравнений (2.3) с дивергентной главной частью при условии их равномерной эллиптичности. Пусть сначала $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ не имеют неограниченных особенностей при конечных значениях x, u и p (в конце этого параграфа, в § 7 гл. IV и в гл. IX рассмотрен более общий случай). Уравнение (2.3) можно заменить тождеством

$$\int_{\Omega} \left[a_i(x, u, u_x)\eta_{x_i} - a(x, u, u_x)\eta\right] dx = 0, \tag{2.27}$$

в которое входят лишь производные первого порядка от u. Начнем с исследования ограниченных обобщенных решений, т. е. таких, для которых $\operatorname{vrai}\max_{\Omega}|u| < \infty$. Основным членом в (2.27) является $a_i(x, u, u_x)\eta_{x_i}$. Соответствующая ему квадратичная форма, определяющая тип уравнения, $\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j} p_i p_j$ при $|p| \to \infty$ растет, как $|p|^m$. Ввиду этого естественно рассматривать такие ограниченные обобщенные решения u, у которых производные u_{x_i} принадлежат $L_m(\Omega)$, т. е. которые принадлежат $W_m^1(\Omega)$. Обозначим этот класс функций через $\mathfrak{M}$. Интеграл $\int\limits_\Omega a_i(x, u, u_x)\eta_{x_i}\,dx$ определен для любых u и η из $\mathfrak{M}$. Этот же класс является классом допустимых функций, среди которых ищется решение вариационной задачи для функционала $J(u) = \int\limits_\Omega F(x, u, u_x)\,dx$, когда известно, что $F(x, u, p)$ растет при $p \to \infty$, как $|p|^m$. Чтобы в (2.27) интеграл $\int\limits_\Omega a(x, u, u_x)\eta\,dx$ был определен также на любых функциях u и η из $\mathfrak{M}$, необходимо потребовать для любых p выполнения неравенства

$$|a(x, u, p)| \leqslant \mu(|u|)(1 + |p|)^m. \tag{2.28}$$

Если (2.3) записать в развернутом виде, то ясно, что (2.28) есть следствие (2.25). Однако (2.25) требует большего; именно, для (2.3) оно приводит к условию, что порядки роста функций $a(x, u, p)$; $\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial u}|p|$, $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ по $|p|$ должны быть не более чем m, т. е.

$$|a(x, u, p)| + \left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|(1 + |p|) + \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right| \leqslant \mu(|u|)(1 + |p|)^m. \tag{2.29}$$

В гл. IV будет доказано, что условия (2.6), (2.29), выражающие собою равномерную эллиптичность (2.3) и необходимое согласование порядков роста по p функций $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ и их производных, достаточны для того, чтобы получить все нужные априорные оценки норм $|u|^{(1+\alpha)}$ решений уравнений (2.3) и доказать на их основе классическую разрешимость «в целом» краевых задач для (2.3).

Кроме того, для (2.3) исследованы обобщенные решения из $\mathfrak{M}$. В частности, доказано, что они удовлетворяют условию Гёльдера, если выполняется неравенство (2.28) и неравенства

$$\left.\begin{aligned} a_i(x, u, p)\,p_i &\geqslant \nu(|u|)|p|^m - \mu(|u|), \\ |a_i(x, u, p)| &\leqslant \mu(|u|)(1 + |p|)^{m-1}, \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

более слабые, чем (2.6); для них справедлива теорема единственности задачи Дирихле «в малом», если, кроме (2.6) и (2.29), выполнены соответствующие условия на производные $a(x, u, p)$ по u и p, именно если

$$\left|\frac{\partial a(x, u, p)}{\partial u}\right| + \left|\frac{\partial a(x, u, p)}{\partial p_i}\right|(1+|p|) \leqslant \mu(|u|)(1+|p|)^m. \quad (2.29')$$

Приведенные здесь примеры и рассуждения подтверждают необходимость ограничений типа (2.29′), (2.29) (при условии выполнения (2.6)), если рассматриваются обобщенные решения из $\mathfrak{M}$. Однако если желательно изучить более широкий класс обобщенных решений уравнений (2.3) — решения из $W_m^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)$, $q \geqslant mn/(n-m)$, с, вообще говоря, неограниченным $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} |u|$, то надо наложить другие, более жесткие, чем (2.29), требования на поведение функций $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ при больших u и $|p|$.

Для выяснения этих требований рассмотрим следующий пример.

Снова возьмем функцию $u = r^{\lambda}$ и уравнение (2.26). Если λ взять отрицательным, то ε будет меньше нуля, т. е. условие (2.28) выполняется (для (2.26) $m = 2$). Само решение принадлежит $W_2^1(K_R)$ $\left(\text{и даже } W_m^1(K_R) \text{ с } m < n/(1-\lambda)\right)$, если $n > 2$ и λ мало. И тем не менее для них нарушается теорема единственности «в малом». Отсюда ясно, что для правомерности обобщенных решений из $W_m^1(\Omega)$ для (2.3) при выполнении условий (2.6) от функции $a(x, u, p)$ надо требовать большего, чем (2.28).

На примере функции $u = r^{-\lambda}$, $\lambda > 0$, и уравнений

$$\Delta u = a(x, u, u_x) \quad (2.31)$$

найдем ограничения на $a(x, u, p)$ для $n > 2$ в виде

$$|a(x, u, p)| \leqslant \varphi(x)\left(1+|u|^{\alpha}\right)\left(1+|p|^{2-\varepsilon}\right), \quad \varphi(x) \in L_s(\Omega), \quad (2.32)$$

необходимые для того, чтобы для уравнений (2.31) были допустимы обобщенные решения из $W_2^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)$, $q \geqslant 2n/(n-2)$ (для (2.31) $m = 2$, а $2n/(n-2)$ есть предельный показатель вложимости W_2^1 в L_q). Определению подлежат постоянные s, α и ε. Считая функцию $u = r^{-\lambda}$, $\lambda > 0$, суммируемой со степенью $q \geqslant 2n/(n-2)$, рассмотрим ее как решение уравнений вида (2.31) с разными $a(x, u, p) = cr^{-\beta_0}|u|^{\beta_1}|p|^{\beta_2}$. Те показатели β_i, которые при этом получатся, надо исключить.

Функция $u = r^{-\lambda}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = \frac{c}{r^{2+\lambda}} = c_1 r^{-\beta_0} u^{\beta_1} |\nabla u|^{\beta_2}, \quad (2.33)$$

где

$$c=-\lambda(n-\lambda-2),\quad c_1=c\lambda^{-\beta_2},\quad \beta_0+\lambda\beta_1+(\lambda+1)\beta_2=\lambda+2.$$

Считаем $\beta_2>0$; β_0, $\beta_1\geqslant 0$. Самый большой показатель β_2 получим при $\beta_0=\beta_1=0$; он равен $\beta_2=\frac{\lambda+2}{\lambda+1}=1+\frac{1}{\lambda+1}$. Так как $u\in L_q$, то $\lambda<\frac{n}{q}$, и потому $\beta_2>1+\frac{q}{n+q}$. Мы исключим этот пример, потребовав

$$\beta_2<1+\frac{q}{n+q}. \tag{2.34}$$

(Недопустимость равенства видна на примере функции $u=\ln|\ln r|$, $n=2$.) Закрепим теперь $\beta_2>0$, положив $\beta_1=0$. Показатель

$$\beta_0=\lambda+2-(\lambda+1)\beta_2=2-\beta_2+\lambda(1-\beta_2).$$

Нижняя граница β_0 при $0<\lambda<n/q$ равна

$$\begin{array}{ll} 2-\beta_2 & \text{при}\quad \beta_2\leqslant 1,\\ 2-\beta_2+\frac{n}{q}(1-\beta_2) & \text{при}\quad \beta_2\geqslant 1. \end{array}$$

Чтобы исключить функцию $r^{-\lambda}$, потребуем, чтобы

$$\beta_0<\begin{cases} 2-\beta_2, & \beta_2\leqslant 1,\\ 2-\beta_2+\frac{n}{q}(1-\beta_2), & \beta_2\geqslant 1. \end{cases} \tag{2.35}$$

Фиксируем теперь какие-нибудь $\beta_2>0$ и $\beta_0\geqslant 0$, удовлетворяющие неравенствам (2.34) и (2.35) соответственно. Тогда

$$\beta_1=\frac{\lambda+2-(\lambda+1)\beta_2-\beta_0}{\lambda}=\frac{2-\beta_2-\beta_0}{\lambda}+1-\beta_2>$$
$$>\frac{2-\beta_2-\beta_0}{n}q+1-\beta_2.$$

Следовательно, к условиям (2.34) и (2.35) надо добавить еще ограничение на β_1:

$$\beta_1<\frac{2-\beta_2-\beta_0}{n}q+1-\beta_2=(2-\beta_2)\left(\frac{q}{n}+1\right)-1-\frac{\beta_0}{n}q,$$

чтобы для уравнения (2.23) исключить возможность решения $r^{-\lambda}$ с λ из $(0, n/q)$.

Итак, этот пример показывает, что в неравенстве (2.32) необходимо считать

$$\varepsilon=2-\beta_2>n/(n+q), \tag{2.36}$$

функцию $\varphi(x)$ суммируемой по Ω со степенью

$$s > \begin{cases} n/\varepsilon & \text{при} \quad \varepsilon \geqslant 1, \\ n\Big/\left[\varepsilon + \frac{n}{q}(\varepsilon - 1)\right] & \text{при} \quad \varepsilon < 1, \end{cases} \tag{2.37}$$

а показатель α подчиняющимся требованию

$$\alpha < \varepsilon \frac{n+q}{n} - 1 - \frac{q}{s}. \tag{2.38}$$

Оказывается, этих предположений и достаточно, причем не только для того, чтобы обобщенные решения $u(x)$ из $W_2^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ уравнений вида (2.31) были допустимы, но и для того, чтобы их $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u|$ можно было оценить через $\max\limits_{S}|u|$, $\|u\|_{q,\Omega}$, $\|\varphi\|_{s,\Omega}$ и константы c, α и ε, входящие в неравенство (2.32). Это будет доказано в гл. IV для общих уравнений вида (2.3).

§ 3. Основные результаты и их возможное развитие

В этом параграфе мы опишем кратко основные результаты, изложенные в данной книге. Бóльшая часть их доказана авторами и в основном опубликована в работах, перечисленных в списке литературы, помещенном в конце книги.

В гл. II приведены различные предложения классического и функционального анализа, используемые в книге. Некоторые из них хорошо известны и даны без доказательства, для других даны пояснения или доказательства. Однако в основном гл. II посвящена исследованию классов функций $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_m$ и $\mathfrak{B}_m^{N_1}$, введенных и изученных авторами в работах [21_{12-19}]. Эта часть гл. II является одной из наиболее важных для всего последующего материала книги, ибо оказалось, что именно к этим классам принадлежат как сами решения линейных и квазилинейных уравнений и систем, так и их производные. Функции классов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{B}_m^{N_1}$ удовлетворяют некоторым интегральным неравенствам, из которых выводится, что функции класса $\mathfrak{A}$ ограничены, а функции классов $\mathfrak{B}_m$ и $\mathfrak{B}_m^{N_1}$ непрерывны по Гёльдеру, и дается оценка их норм в пространствах C и C^{α} соответственно. Эти предложения имеют характер так называемых теорем вложения, однако теорем вложения нового типа, неизвестных ранее. Первой теоремой такого типа является теорема Де Джорджи [$\mathbf{11}_1$]. Ей предшествовали предложения об ограниченности или непрерывности обобщенных решений вариационных задач, установленные в работах Ч. Морри [$\mathbf{39}_{1,2}$] и А. Г. Сигалова [$28_{1,2}$].

В гл. III изучается разрешимость краевых задач (в основном первой — задачи Дирихле) для линейных уравнений в пространствах Гёльдера и в пространствах W_2^l. В §§ 1—3 излагаются результаты Шаудера — Каччопполи о разрешимости в пространствах $C^{l+\alpha}$, $l \geqslant 2$, первой краевой задачи и аналогичные результаты К. Миранда и Р. Фиоренца по другим краевым задачам.

Они, в основном, состоят в следующем: если коэффициенты и свободный член уравнения (2.2) суть гладкие функции — элементы $C^{l+\alpha}$, $l \geqslant 0$, то краевые задачи для них (с точностью до спектра) разрешимы в классическом смысле, точнее, в пространстве $C^{l+2+\alpha}$. Эти замечательные результаты предельны, неулучшаемы. До последнего времени они были уникальны по точности характеристики зависимости дифференциальных свойств решений от дифференциальных свойств коэффициентов уравнений. Однако они ничего не дают для уравнений, коэффициенты или свободные члены которых не являются гладкими функциями — не принадлежат $C^{l+\alpha}$, $l \geqslant 0$.

Для таких уравнений падают как сами результаты, так и методы их доказательства. Искать их решения в рамках классических постановок бесполезно: такие уравнения могут вообще не иметь дважды непрерывно дифференцируемых решений. Исследованию линейных уравнений с негладкими и, вообще говоря, неограниченными коэффициентами посвящена бо́льшая часть гл. III — §§ 4—17. В качестве характеристик свойств коэффициентов и свободных членов уравнений мы выбрали свойства принадлежности их, а также возможных их обобщенных производных к пространствам $L_p(\Omega)$. Относительно же решений таких уравнений устанавливаем их принадлежность к пространствам W_2^l, $l = 1, 2, C^l$ и $C^{l+\alpha}$, $l \geqslant 0$.

Как показывают примеры предыдущего параграфа, бо́льшая часть этих результатов неулучшаема (в терминах выбранных нами пространств). Это не исключает, разумеется, существования иных связей, выраженных в терминах иных функциональных пространств, между свойствами коэффициентов и свободных членов уравнений и их решениями.

В §§ 4—6 исследуется разрешимость краевых задач для уравнений дивергентного вида в пространстве W_2^1. Их результаты являются усилением результатов, полученных к 1950 г. благодаря работам К. О. Фридрихса [**19**], Г. Вейля [**56**], С. Г. Михлина [23_2], М. И. Вишика ([7_1] и др.) и др. Определение же решений краевых задач с помощью интегральных тождеств (различных по форме в зависимости от функционального пространства, к которому принадлежат эти решения) и связанный с этой формой определения решений метод их получения, излагаемый в §§ 4—6, были даны одним из авторов книги (см. [21_3]

и лекции О. А. Ладыженской). Центральная идея сведения краевой задачи к функциональному уравнению в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ принадлежит К. Фридрихсу [**19**$_1$], рассмотревшему (2.1) с $a_i = b_i = f_i \equiv 0$, $a(x) \leqslant 0$ при первом краевом условии.

В §§ 7—11 изучается разрешимость краевых задач в пространстве W_2^2. В §§ 7—10 и 12 излагаются с небольшими усилениями результаты из работ [$21_{2,3,5}$] О. А. Ладыженской.

Параграфы 13—15 содержат результаты недавнего времени. Они посвящены исследованию суммируемости с высокими степенями, ограниченности и непрерывности по Гёльдеру обобщенных решений линейных уравнений (2.1) и производных этих решений. Результаты этих параграфов являются частным случаем аналогичных фактов, установленных авторами книги для решений уравнений параболического типа [$21_{16,18}$] и для решений квазилинейных эллиптических уравнений (см. [21_{12-15}]). Они излагаются здесь самостоятельно с соответствующими упрощениями. Предложения, близкие к теоремам §§ 13, 14, установлены также Г. Стампаккиа [**52**$_{2,4,5}$] и Ч. Морри [**39**$_3$]. Начало получения результатов такого типа положено работами Е. Де Джорджи [**11**$_1$] и Дж. Нэша [**41**].

В §§ 16 и 18 излагаются теоретические основы приближенных методов решения краевых задач — метода Галеркина, метода Ритца, метода наименьших квадратов и метода конечных разностей. В § 17 приводятся некоторые результаты по разложениям произвольной функции в ряды по собственным функциям симметрических эллиптических операторов.

В двух последних параграфах, 19 и 20, особо обсуждается случай двух независимых переменных, занимающий специфическое место среди многомерных задач. Для него в работах ряда авторов и прежде всего С. Н. Бернштейна, Э. Хопфа, Ч. Морри, Л. Берса, Л. Ниренберга и И. Н. Векуа были установлены различные оценки и представления решений, позволившие к середине 50-х годов достаточно полно изучить линейные уравнения с разрывными ограниченными коэффициентами. Л. Берс и Л. Ниренберг сделали это с помощью аппарата обобщенных аналитических функций и квазиконформных преобразований. Мы доказываем их результаты, причем с некоторыми усилениями, используя, по существу, тот же метод, который позволил разобраться и в общем n-мерном случае.

Укажем некоторые из направлений в исследовании линейных уравнений, которые нам кажутся интересными и которые непосредственно связаны с обсуждаемым здесь кругом вопросов. Это, прежде всего, изучение уравнений вида (2.2) при $n \geqslant 3$ без предположений о непрерывности или какой-либо дифференцируемости коэффициентов a_{ij}. Излагаемые здесь результаты относятся к уравнениям вида (2.1), которые в случае недифференцируемых a_{ij} неэквивалентны уравнениям вида (2.2). Для таких уравнений (2.2) пока неясно, в каком функциональном пространстве задача Дирихле разрешима в смысле Фредгольма. Не столкнемся ли мы при этом с таким печальным обстоятельством, что этот класс зависит от коэффициентов уравнения? Было время, когда казалось, что самосопряженное расширение по Фридрихсу зависит от старших коэффициентов a_{ij} даже в случае их дифференцируемости. Но это опасение оказалось ошибочным (см. [21_2] и §§ 7—11 гл. III). Пример (2.19) гл. I и последующие рассуждения о невозможности оценок (2.20) и (2.22) показывают, что для (2.2) с разрывными a_{ij} разрешимости задачи Дирихле в $W_p^2(\Omega)$ при любом свободном члене $f(x)$ из $L_p(\Omega)$ нет, если $n > 2$. Относительно таких уравнений нам известны лишь результаты А. Д. Александрова [$1_{3,5,6,7}$], касающиеся теорем единственности и оценок $\max\limits_{\Omega}|u|$ их решений, принадлежащих пространству $W_n^2(\Omega)$, работа [3_1] И. Я. Бакельмана по оценке $\max\limits_{\Omega}|u|$ таких решений и исследования Кордеса [**9**], относящиеся к случаю малого разброса собственных значений формы $a_{ij}\xi_i\xi_j$. Второе направление в исследовании линейных эллиптических уравнений — это получение результатов, аналогичных результатам §§ 7—15 гл. III, для линейных эллиптических уравнений и систем высоких порядков с дивергентной главной частью с негладкими коэффициентами. При достаточно гладких коэффициентах метод «склейки» Шаудера (состоящий в сведении всех трудностей к уравнениям с постоянными коэффициентами) позволил обобщить результаты о разрешимости краевых задач в классах Гёльдера $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ и $W_p^l(\Omega)$, $p > 1$, на случай произвольных эллиптических систем m-го порядка, $m \leqslant l$. А что будет, когда такая «склейка» недопустима ввиду недостаточной гладкости коэффициентов? К каким функциональным пространствам будут принадлежать решения тех или иных краевых задач? Для сильно эллиптических систем известны результаты, аналогичные результатам §§ 4—6 гл. III. Результаты типа §§ 7—15 доказаны лишь для систем гл. VII.

Третье направление — это изучение краевых задач в неограниченных областях и отыскание красивых форм постановок краевых условий на бесконечности в случае, когда мы наталкиваемся на непрерывный спектр. Наиболее полные результаты в этом направлении получены пока лишь для уравнений вида $-\Delta u + q(x)u = f$ в областях, дополнением которых до всего пространства является ограниченное замкнутое множество.

Наконец, заметим, что проведенный в данной книге анализ уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами был направлен на выяснение тех условий на коэффициенты и свободные члены уравнений (условий, по возможности не только достаточных, но и необходимых!), при выполнении которых для всего класса таких уравнений имеет место разрешимость краевых задач во вполне определенном функциональном пространстве, не зависящем от конкретных коэффициентов или свободных членов этих уравнений. Однако этот анализ не дает ответа, например, на такой вопрос: пусть о функции $q(x)$ из $Lu = -\Delta u + q(x)u$ известна лишь ее локальная суммируемость; спрашивается, какими свойствами обладает L как оператор в гильбертовом пространстве $L_2(E_n)$? Из-за «плохих дифференциальных» свойств $q(x)$ он не определен естественным образом даже на гладких финитных функциях. Ясно, что как первоначальная область определения L, так и область определения его самосопряженных расширений будут зависеть от $q(x)$. Такие случаи мы исключили из наших рассмотрений, ставя перед собой совершенно иную цель—выделение тех операторов L, для которых все характеристики не зависят от конкретного вида образующих их коэффициентов.

Глава IV посвящена так называемым квазилинейным уравнениям с дивергентной главной частью. В ней проводится полный анализ свойств их решений, начиная от обобщенных и кончая классическими. Сначала исследования ведутся внутри области определения решения без каких-либо предположений о поведении решения вблизи границы. Затем исследуется поведение решения первой краевой задачи у границы. В главе X то же сделано и для других, более сложных краевых задач. Класс квазилинейных уравнений с дивергентной главной частью обладает большим своеобразием. Для него можно строить теорию обобщенных решений, имеющих лишь производные первого порядка, чего нельзя сделать для других, не принадлежащих к нему квазилинейных уравнений. Этот класс уравнений достаточно широк, к нему принадлежат уравнения Эйлера для вариационных задач и различные нелинейные уравнения механики.

Результаты гл. IV, IX и X обладают определенной законченностью. Все основные предположения, как показывают примеры предыдущего параграфа, вызваны существом дела. Результаты гл. IV в основном доказаны авторами книги и опубликованы в работах [$21_{12-15, 17}$]. Исключение составляет добавленный во втором издании книги § 9 о существовании обобщенных решений краевых задач. Результаты гл. X в развернутом виде были опубликованы впервые в [I]. Их сжатое изложение дано в [36_2]. Работам [$21_{12-15, 17}$] предшествовало довольно много работ, посвященных квазилинейным уравнениям, но во всех этих работах для случая $n > 2$ предполагалось, что уравнения в том или ином смысле мало отличаются от линейных. Для двух же независимых переменных сделано было много больше (см. работы С. Н. Бернштейна [4_2], Э. Хопфа [27], Шаудера и Лерэ [$32_{1,2,4}$], Л. Берса и Л. Ниренберга [5] и др.). Но и для этого случая излагаемые здесь предложения новы. С тем, что было сделано до работ, составивших основу данной книги, читатель может познакомиться по 1-му изданию книги [37] К. Миранда, в которой подытожен весь материал, накопившийся к 1955 г. по эллиптическим уравнениям, и по обзорным статьям А. Г. Сигалова, В. И. Плотникова и авторов книги [28_1, 26_2, $21_{10,12}$], посвященным вариационной задаче и эллиптическим уравнениям.

Исследования гл. IV, IX и X можно продолжить в разных направлениях. Наиболее интересным нам кажется изучение уравнений высоких порядков и систем с дивергентной главной частью в духе гл. IV. Именно в этом направлении проводятся исследования в гл. VII и VIII.

Другое развитие гл. III, IV, IX и X можно вести по линии замены избранных нами пространств L_p и W_m^l другими (в этом направлении см. работы [7_4, 34_2] и др.). Эти классы естественно связаны с уравнениями, но не являются единственно возможными. Именно их выбором обусловлены и наши требования, чтобы функции, образующие уравнение, росли по $|\nabla u|$ степенным образом.

Третье направление — это отказ от условия равномерной эллиптичности и согласования порядков роста (два таких случая рассмотрены в § 10 гл. IV и в §§ 3, 5, 6 гл. VI). Однако, если идти в эту сторону, то прежде всего стоит построить соответствующий полный набор примеров, который обрисовал бы ожидаемые при этом положения и факты, т. е. те факты, которые на самом деле имеют место, а не только те, которые получаются из принятого исследователем метода. Исследования в этом направлении ведутся (см. предисловие ко второму изданию).

Глава V посвящена регулярной вариационной задаче для функционалов вида

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u, u_x)\,dx, \tag{3.1}$$

с которой, собственно, и начались исследования, положенные в основу данной книги. Регулярность гарантирует эллиптичность соответствующего (3.1) уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dx_i} F_{u_{x_i}} - F_u = 0. \tag{3.2}$$

Основное направление в изучении этой задачи (так же как и в изучении нелинейных эллиптических уравнений вообще) связано с 19-й и 20-й проблемами Гильберта (см. [26_1]). В 19-й проблеме утверждается, что в с е решения уравнения (3.2) аналитичны по x, если $F(x, u, p)$ является аналитической функцией своих аргументов. В 20-й проблеме говорится, что вариационная задача на определение минимума функционала (3.1), полуограниченного снизу, при условии

$$u|_S = \varphi \tag{3.3}$$

всегда имеет решение, если его искать в *достаточно широком классе функций*.

Формулировки обеих проблем требовали принципиальных уточнений: во-первых, надо было понять, что значит «все» решения уравнения (3.2) в 19-й проблеме и что значит «достаточно широкий класс функций» в 20-й проблеме; во-вторых, надо было выяснить, не должна ли функция $F(x, u, p)$, кроме некоторой гладкости и выпуклости по p (последняя эквивалентна эллиптичности уравнения (3.2)), обладать какими-либо другими свойствами для того, чтобы утверждения этих проблем были справедливы.

С. Н. Бернштейн построил примеры (см. [4_2]), показавшие, что дополнительные ограничения на F действительно необходимы. Он сформулировал их в виде ряда условий на поведение $F(x, u, p)$ и ее частных производных при $|p| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} \to \infty$. Грубо говоря, они сводятся к тому, что F ведет себя при больших $|p|$ как полином относительно x, u, p степени m по p, большей 1. Назовем эти требования вместе с условиями некоторой гладкости, а также полуограниченности J снизу и выпуклости F по p *естественными*. К доказательству того, что *естественные* условия и достаточны, стремились все последующие исследователи.

К сороковому году трудами ряда математиков было установлено, что утверждение 20-й проблемы о существовании функции, реализующей минимум функционала (3.1), верно, если в качестве множества $\mathfrak{M}$ допустимых функций взять все функции, удовлетворяющие условию (3.3) и суммируемые вместе со своими обобщенными производными первого порядка с такими степенями, что интеграл (3.1) для них конечен (наиболее общие результаты в этом направлении были доказаны Ч. Морри). Функции класса $\mathfrak{M}$, реализующие минимум (или, общее, экстремум) $J(u)$, стали называть *обобщенными решениями задачи* (3.1), (3.3).

Однако такое расширение понятия решения задачи (3.1), (3.3) требовало всестороннего анализа, выяснения того, не теряются ли при этом основные качества любой хорошо поставленной краевой задачи и прежде всего теорема единственности решения задачи (3.1), (3.3) «в целом» или хотя бы «в малом». Кроме того, подлежало исследовать, улучшаются ли дифференциальные свойства этих решений (свойства гладкости) по мере улучшения дифференциальных свойств функции F и, в частности, будут ли они аналитическими функциями для аналитических F; иначе говоря, надо было доказать (или опровергнуть), что именно этот класс решений надо мыслить под словами «все» решения в 19-й проблеме Гильберта.

С. Н. Бернштейном для случая двух пространственных переменных была доказана аналитичность всех трижды непрерывно дифференцируемых решений уравнений (3.2) при аналитическом F. Трудами Э. Хопфа, Ю. Шаудера и Ч. Морри к 40-м годам условия гладкости были ослаблены до требования ограниченности производных первого порядка в случае $n=2$ и до гёльдеровости этих производных в случае $n>2$. Для таких решений была установлена и теорема единственности «в малом», и то, что их дифференциальные свойства зависят только от дифференциальных свойств F.

Однако теорема существования, о которой сказано выше, для общего случая давала лишь обобщенные решения — функции со значительно худшими свойствами. Таким образом, между теоремами существования и единственности, между классами функций, для которых удалось доказать 19-ю и 20-ю проблемы Гильберта, имелась большая брешь, заполнению которой и посвящена бо́льшая часть работ по вариационной задаче (3.1), (3.3). Это заполнение шло в основном по пути наложения различных дополнительных ограничений на F, при которых оказывалось возможным или доказать теорему существования сразу в классе достаточно хороших функций (С. Н. Бернштейн, Л. Тоннели, Э. Хопф и др.), или постепенно проследить за улучшением дифференциальных свойств обобщенных решений задачи (Ч. Морри, А. Г. Сигалов, В. И. Плотников и др.). Для общего случая (при $n=2$) А. Г. Сигаловым было установлено существование непрерывных обобщенных решений. Для случая $n=m=2$ Ч. Морри провел все желаемые исследования обобщенных решений. Все эти результаты относятся к двумерным задачам ($n=2$). Совсем медленно подвигалось изучение многомерного случая, когда $n>2$. Он потребовал создания новых методов. Первым законченным результатом по классической разрешимости задачи (3.1), (3.3) при $n>2$ явился результат Е. Де Джорджи [$\mathbf{11}_1$]; аналогичный результат мог быть получен также из работы Дж. Нэша [**41**] по линейным параболическим уравнениям. Он касался простейшего случая, когда $F(x, u, p)$ не зависит от x и u и имеет квадратичный рост по $|p|$. Для него задача имеет единственное решение «в целом».

Вскоре авторами данной книги было дано решение задачи (3.1), (3.3) в общем случае [21_{12-15}]. Именно было доказано, что для любого $n \geqslant 2$ и $m > 1$ только при естественных предположениях относительно функции F любое обобщенное решение u вариационной задачи из класса $\mathfrak{M}$ единственно «в малом» и его дифференциальные свойства полностью определяются дифференциальными свойствами F: если F как функция своих аргументов принадлежит $C^{l+\alpha}$, то и решение u принадлежит $C^{l+\alpha}$, в частности, при аналитической F оно аналитично. Этот результат заполнил ту брешь, о которой сказано выше, и привел к решению 19-й и 20-й проблем Гильберта для всего желаемого класса функционалов вида (3.1). Было дано два метода доказательства этих предложений. Первый метод, относящийся к 1959 г., изложен в работах $[21_{12,13}]$, второй — в работах $[21_{14,15,17}]$. Здесь мы излагаем второй, более красивый метод доказательства.

В $[21_{12-17}]$ проведено исследование главным образом ограниченных по модулю обобщенных решений. Именно для таких решений были сформулированы естественные ограничения на F, касающиеся поведения F при больших $|p|$ (но не $|u|$!).

Если же отказаться от априорной ограниченности обобщенных решений, т. е. расширить их класс, то необходимо усилить ограничения на F. Последнее можно делать в разной форме. Мы выбрали одну из них и построили примеры (см. $[21_{10,18,20}]$), показывающие, каких величин не должны превосходить константы (показатели), входящие в неравенства, характеризующие поведение F при больших $|p|$ и $|u|$. Выявленные на этих примерах необходимые условия и достаточны для допустимости уже неограниченных обобщенных решений из $W_m^1(\Omega)$, суммируемых с какой-либо заранее указанной степенью q. Все это сделано нами сразу не только для уравнений Эйлера, но и для всего класса уравнений гл. IV.

Собственно для решений задач на минимум функционала $I(u)$ в работе $[21_{12}]$ и в более ранних работах А. Г. Сигалова $[28_{1,2}]$, Ч. Морри $[39_2]$ и др. найдены различные случаи, когда можно дать эффективные оценки их максимумов модулей. Но ясно, что тут речь может идти лишь о достаточных условиях.

Отметим еще исследования Ч. Морри $[39_{4-6}]$, в которых дан иной способ исследования дифференциальных свойств обобщенных решений вариационных задач, правда, не для всего диапазона $n \geqslant 2$, $m > 1$ и при ограничениях несколько более сильных, чем естественные.

Нам представляется интересным исследование следующих вопросов, касающихся вариационных задач:

1) исследовать разрешимость и зависимость дифференциальных свойств решений вариационных задач, заданных

в параметрической форме, от дифференциальных свойств интегранта (несколько подробнее об этом рассказано в предисловии к данному изданию книги);

2) сформулировать точно и доказать проблемы Гильберта для F, зависящих от нескольких неизвестных функций и содержащих производные не только первого порядка;

3) полнее исследовать вопрос о существовании стационарных точек функционалов вида (3.1);

4) провести исследования, аналогичные исследованиям гл. V, для случаев нестепенного порядка роста F по $|p|$.

Особенно интересной нам кажется первая из сформулированных здесь проблем.

В гл. VI рассмотрены квазилинейные уравнения общего вида. Для этих уравнений также строится теория классических и обобщенных решений. Однако оказалось, что для них класс допустимых обобщенных решений существенно у́же класса допустимых обобщенных решений для уравнений дивергентного типа, рассмотренных в гл. IV, причем это сужение идет не только за счет естественного требования, чтобы они имели обобщенные производные второго порядка (ибо без этого нельзя в общем случае придать смысл тому, что u удовлетворяет уравнению), но и за счет дополнительных требований на поведение производных первого или второго порядка. Пример, построенный нами в § 2 данной главы, показывает, что если от производных второго порядка не требовать ничего, кроме их суммируемости со второй степенью, то при $n > 2$ относительно производных первого порядка необходимо предполагать их ограниченность (в противном случае нарушится теорема единственности даже для областей сколь угодно малых размеров). В описываемой главе мы доказываем, что эти ограничения на класс допустимых решений и достаточны. Для таких обобщенных решений разумно строится вся теория: краевые задачи имеют не более одного такого решения, если область достаточно мала, и дифференциальные свойства этих решений определяются лишь дифференциальными свойствами функций, образующих уравнение.

В гл. VI мы ограничили себя рассмотрением только первой краевой задачи. Ее основу составили работы [$21_{8,19}$, 36_3]. Для исследования общих квазилинейных уравнений пришлось еще больше расширить функциональные классы $\mathfrak{B}_m$, введенные нами при изучении вариационной задачи и уравнений дивергентного вида, ибо производные их решений (не говоря уже о самих решениях), вообще говоря, не удовлетворяют неравенствам, положенным в основу определения классов $\mathfrak{B}_m$. Однако оказалось, что некоторые функции, составленные из производных, удовлетворяют таким неравенствам. Из этих неравенств можно вывести, что каждая из производных в отдельности удовлетворяют условию Гёльдера.

Главы VII—VIII посвящены линейным и квазилинейным системам второго порядка эллиптического типа. Они составляют лишь часть всей совокупности эллиптических систем.

Этот класс систем был выделен нами по такому принципу: для любого решения $v_1(x), \ldots, v_N(x)$ системы, полученной из любой системы этого класса отбрасыванием всех членов, кроме старших, функция $z(x)=\sum_{i=1}^{N} v_i^2(x)$ (или, что то же, любая положительная возрастающая функция $\varphi(t)$ от $t=z(x)$) удовлетворяют «принципу максимума», т. е. ее наибольшее значение для любой области находится на границе этой области. Известно, что это свойство присуще одному эллиптическому уравнению второго порядка, и мы его положили в основу выделения определенного класса эллиптических систем. Системы этого класса имеют ту особенность, что все образующие их уравнения имеют одинаковые главные части. Оказалось, что для этого класса систем справедливы все основные предложения, доказанные нами в гл. III и IV для одного уравнения второго порядка. Однако их доказательство базируется на более сложных аналитических фактах (о гёльдеровости функций, принадлежащих к классам $\mathfrak{B}_m^{N_1}$). Все ограничения, при которых они доказаны, как показывают примеры, приведенные в § 2, вызваны существом дела.

В отношении дальнейшего исследования систем желательно понять (построив соответствующие примеры), для каких более широких классов эллиптических систем справедливы те или иные априорные оценки и теоремы, доказанные в этой книге.

Довольно полно изучен вопрос о существовании обобщенных решений краевых задач для квазилинейных уравнений и систем с дивергентной главной частью, обладающих обобщенными производными до порядка, равного половине порядка уравнения (системы) или на единицу превышающего его. Это сделано в последнее время в работах Т. Б. Соломяк, М. И. Вишика, Ф. Браудера и др. ([34_1, $7_{3,4}$, 7_1] и др.). Полученные при этом результаты являются естественными обобщениями результатов, изложенных в §§ 5—11, 16 гл. III и § 2 гл. V о существовании обобщенных решений из $W_m^1(\Omega)$ для уравнений второго порядка. Особенно простое доказательство существования таких решений дано в работе Браудера [7_2]. Вопросы о «допустимости» таких решений, т. е. о теоремах единственности для них «в малом», и вопросы об улучшении их дифференциальных свойств по мере улучшения дифференциальных свойств образующих их функций, и, в частности, вопрос об их классичности еще ожидают своего решения. (В предисловии к данному изданию мы перечисляем основные результаты по этим вопросам, полученные со времени написания первого издания книги.)

В гл. IX мы даем другой способ выводы оценок констант Гёльдера для решений и их производных для всех рассмотренных ранее уравнений, при этом объединяем вместе обе трудности: возможные особенности по x и максимальные возможные нелинейности по u и p (это объединение допустимо и в рамках основного метода; оно не было сделано лишь из чисто методических соображений).

Соответствующие оценки, полученные в гл. III для линейных уравнений и в гл. IV—VI для квазилинейных уравнений, являются двумя частными (крайними) случаями выводимых здесь. Предлагаемый второй метод несколько проще и «обычнее» основного (это особенно ясно видно в случае параболических уравнений, к которым он также применим). Все аналитические предложения, на которых он основывается, содержатся в первом. Облегчение достигается за счет повторного обращения к уравнению: в первом методе мы выводим из уравнения некоторые неравенства (*) (которые входят в определение классов $\mathfrak{B}_m$) и все дальнейшие предложения доказываем о функциях, подчиняющихся только этим неравенствам; во втором методе мы несколько раз обращаемся к уравнению, выводя из него неравенства, подобные неравенствам (*), как для самих решений, так и для некоторых выпуклых функций от них.

В §§ 5—7 гл. IX излагаются некоторые другие приемы оценок констант Гёльдера для решений отдельных классов линейных и квазилинейных уравнений.

Глава II

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В этой главе собраны предложения, касающиеся произвольных элементов ряда функциональных пространств и играющие для нас хотя и важную, но вспомогательную роль.

В § 1 приводятся неравенства Коши и Гёльдера и ряд следствий из них. Второй параграф посвящен теоремам вложения и соответствующим им неравенствам, в том числе и некоторым мультипликативным неравенствам.

В § 3 приводятся известные предложения, касающиеся различных видов сходимостей измеримых функций, и доказывается ряд утверждений относительно элементов пространств $L_m(\Omega)$ и $\overset{1}{W}_m(\Omega)$ и их «срезок» $u^{(k)}(x) = \max\{u(x) - k; 0\}$. Леммы 3.6 и 3.7 и предложения § 4 используются при доказательствах гёльдеровской непрерывности функций классов $\mathfrak{B}_m$ и установлении свойств гладкости и суммируемости с теми или иными степенями обобщенных решений.

Остальные параграфы (§§ 5—9) посвящены исследованию введенных нами классов $\mathfrak{A}_m$ и $\mathfrak{B}_m$. Элементами этих классов являются функции, удовлетворяющие некоторым системам интегро-дифференциальных неравенств. Для них доказывается, что элементы $\mathfrak{A}_m$ являются ограниченными (§ 5), а элементы классов $\mathfrak{B}_m$ — непрерывными в смысле Гёльдера (§§ 6—9). Одновременно с этим даются оценки $\max|u|$ для $u \in \mathfrak{A}_m$ и $\langle u\rangle^{(\alpha)}$ для $u \in \mathfrak{B}_m$, зависящие лишь от $\|u\|_{p,\Omega}$ и от числовых параметров, входящих в определение классов $\mathfrak{A}_m$ и $\mathfrak{B}_m$.

Предложения, доказанные в §§ 5—9, существенно используются в §§ 13—15 гл. III и в гл. IV—VIII, X, ибо в большинстве случаев решения u эллиптических уравнений и их производные u_{x_i} принадлежат классам $\mathfrak{A}_m$ или $\mathfrak{B}_m$.

§ 1. Некоторые простейшие неравенства

Мы будем часто использовать несколько хорошо известных алгебраических и функциональных неравенств. Из алгебраических неравенств нам потребуются следующие

1) неравенство Коши:

$$|a_{ij}\xi_i\eta_j| \leqslant \sqrt{a_{ij}\xi_i\xi_j}\,\sqrt{a_{ij}\eta_i\eta_j}, \tag{1.1}$$

справедливое для любой неотрицательной квадратичной формы $a_{ij}\xi_i\xi_j$ с $a_{ij}=a_{ji}$ и любых чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$;

2) неравенство Коши с ε:

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \tag{1.2}$$

справедливое при любом $\varepsilon > 0$ для произвольных a и $b \geqslant 0$;

3) более общее, чем (1.2), неравенство Юнга:

$$ab \leqslant \frac{1}{p}(\varepsilon_1 a)^p + \frac{1}{p'}\left(\frac{b}{\varepsilon_1}\right)^{p'}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{1.3}$$

справедливое при любых $\varepsilon_1 > 0$ и $p > 1$; запишем его в более удобной для нас форме:

$$ab \leqslant \varepsilon a^{1/\alpha} + \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\alpha)\, b^{1/(1-\alpha)}, \tag{1.3'}$$

где ε — произвольное положительное число, а α — любое из $(0, 1)$;

4) неравенства

$$(a+b)^m \leqslant 2^{m-1}(a^m+b^m), \tag{1.4}$$

$$(a+b)^m \leqslant (1+\varepsilon)\, a^m + c_{\varepsilon,m} b^m, \tag{1.5}$$

$$|a-b|^m \geqslant (1-\varepsilon)\, a^m - \tilde{c}_{\varepsilon,m} b^m, \tag{1.6}$$

справедливые при произвольных положительных a и b, $m \geqslant 1$ и любом $\varepsilon \in (0, 1)$.

Из функциональных неравенств, помимо неравенств

$$\|u(x)+v(x)\| \leqslant \|u(x)\| + \|v(x)\|, \quad |(u(x), v(x))| \leqslant \|u(x)\|\,\|v(x)\|,$$

первое из которых справедливо для норм любого банахова пространства, а второе — для скалярного произведения и нормы любого пространства Гильберта, будут использованы следующие:

5) неравенство Гёльдера:

$$\left|\int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx\right| \leqslant \left(\int_\Omega |u(x)|^q\, dx\right)^{1/q}\left(\int_\Omega |v(x)|^{q'}\, dx\right)^{1/q'} \tag{1.7}$$

при $\forall q \geqslant 1$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ *) и более общее неравенство:

$$\left|\int_\Omega \prod_{i=1}^{s} u_i(x)\, dx\right| \leqslant \prod_{i=1}^{s}\left(\int_\Omega |u_i|^{\lambda_i}\, dx\right)^{1/\lambda_i} \tag{1.8}$$

при любых $\lambda_i \geqslant 1$, $\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\lambda_i}=1$;

*) Напомним, что под $\|u\|_{\infty,\Omega}$ понимается $\operatorname{vrai}\max_{\Omega}|u(x)|$.

6) неравенство Коши:

$$\left|\int_\Omega \sum_i u_i v_i \, dx\right| \leqslant \left(\int_\Omega \sum_i u_i^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \sum_i v_i^2 \, dx\right)^{1/2}, \tag{1.9}$$

справедливые при произвольных измеримых функциях $u(x)$, $v(x)$, $u_i(x)$, $v_i(x)$, заданных в Ω и имеющих конечные нормы, стоящие в правой части.

Из (1.7) вытекают такие следствия:

$$\|u\|_{m,\Omega} \leqslant \|u\|_{\alpha q,\Omega}^{\frac{\alpha}{m}} \|u\|_{(m-\alpha)q',\Omega}^{1-\frac{\alpha}{m}} \tag{1.10}$$

с любыми $q \geqslant 1$ и α из $(0, m)$ и

$$\|u\|_{m,\Omega} \leqslant \operatorname{mes}^{\frac{1}{m}-\frac{1}{q}} \Omega \, \|u\|_{q,\Omega} \tag{1.11}$$

с $\forall q \geqslant m$.

§ 2. Пространства $W_m^l(\Omega)$. Теоремы вложения

В § 1 гл. I были определены пространства $L_m(\Omega)$ и $W_m^l(\Omega)$ при $m \geqslant 1$ и целых положительных l. Эти пространства были предметом многих специальных исследований (см. [32, 19, 31_2, 15, **20**, $\mathbf{44}_3$, 8] и др.). Мы приведем здесь те из свойств этих пространств, которые необходимы для целей данной книги. Они касаются следов элементов пространств $W_m^l(\Omega)$ на многообразиях размерности $r \leqslant n$ и связей сходимостей в этих пространствах при разных l, m и r.

Напомним, что $L_m(\Omega)$ (всюду $m \geqslant 1$) состоит из всех измеримых на Ω функций $u(x)$, для которых конечен интеграл

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\int_\Omega |u(x)|^m \, dx\right)^{1/m}, \tag{2.1}$$

определяющий норму в $L_m(\Omega)$.

В пространстве $L_m(\Omega)$ плотны функции из $C^\infty(\overline{\Omega})$. В качестве функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, аппроксимирующих $u(x) \in L_m(\Omega)$ в норме $L_m(\Omega)$, можно, например, взять усреднения

$$u_\rho(x) = \int_\Omega \omega_\rho(|x-y|)\, u(y)\, dy, \qquad \rho \to 0, \tag{2.2}$$

где $\omega_\rho(r) = \rho^{-n}\omega(r/\rho)$, $\omega(\tau)$ — неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция $\tau \geqslant 0$, равная нулю для $\tau \geqslant 1$ и такая, что $\omega_n \int\limits_{\tau \leqslant 1} \omega(\tau)\tau^{n-1}\, d\tau = 1$ (ω_n — площадь поверхности единичной сферы в E_n). В $L_m(\Omega)$ плотно также множество $\dot{C}^\infty(\Omega)$, в чем легко убедиться, взяв последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\zeta_k(x)$ из $\dot{C}^\infty(\Omega)$, аппроксимирующих $\zeta(x)\equiv 1$ в норме $L_m(\Omega)$, и построив для $\forall u(x)$ из $L_m(\Omega)$ приближения $(u\zeta_k)_\rho$ с ρ, меньшими расстояния носителя $\zeta_k(x)$ до $\partial\Omega$.

Пространство $W_m^l(\Omega)$ состоит из элементов $L_m(\Omega)$, которые имеют обобщенные производные $D^k u$, $|k|\leqslant l$, всех видов, принадлежащие $L_m(\Omega)$. Норма в $W_m^l(\Omega)$ чаще всего определяется равенством

$$\|u\|_{m,\Omega}^{(l)}=\left(\int\limits_\Omega \sum_{|k|=0}^{l} |D^k u(x)|^m\,dx\right)^{1/m}. \tag{2.3}$$

За обобщенными производными сохраняем обозначения классических производных. Обобщенная производная $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$ от $u(x)$ из $L_1(\Omega')$, $\forall\overline{\Omega}'\subset\Omega$, определяется как функция $r^{k_1\ldots k_n}$ из $L_1(\Omega')$, $\forall\overline{\Omega}'\subset\Omega$, удовлетворяющая тождеству

$$\int\limits_\Omega r^{k_1\ldots k_n}\eta\,dx=(-1)^{|k|}\int\limits_\Omega u\,\frac{\partial^k\eta}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\,dx \tag{2.4}$$

при всех $\eta\in\dot{C}^\infty(\Omega)$. Хорошо известно, что $W_m^l(\Omega)$ есть полное сепарабельное пространство Банаха. Любой элемент его $u(x)$ можно аппроксимировать функциями $u_k(x)$ из $C^\infty(\Omega)$ в нормах $W_m^l(\Omega')$, $\forall\overline{\Omega}'\subset\Omega$. В качестве $u_k(x)$ можно взять средние u_ρ из (2.2). В подпространстве $\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$ пространства $W_m^l(\Omega)$, определенном в § 1 гл. I как замыкание в норме $W_m^l(\Omega)$ множества $\dot{C}^\infty(\Omega)$, вместо (2.3) можно взять эквивалентную норму

$$\|u\|_{m,\Omega}^{(l)}=\sum_{|k|=l}\|D^k u\|_{m,\Omega}. \tag{2.5}$$

Эквивалентность норм (2.3) и (2.5) легко доказывается с помощью неравенства Пуанкаре $\int\limits_\Omega|v|\,dx\leqslant R\int\limits_\Omega|v_{x_1}|\,dx$, где Ω есть куб со стороной R, а $v(x)$ — функция из $C^1(\overline{\Omega})$, равная нулю на одной из $(n-1)$-мерных граней куба, лежащей в плоскости $x_1=\text{const}$. Само это неравенство элементарно получается из формулы Ньютона — Лейбница

$$v(x_1,x_1')=v(a,x_1')+\int\limits_a^{x_1} v_{x_1}(x_1,x_1')\,dx_1, \tag{2.6}$$

если точку (a,x_1') взять на той грани куба, где $v=0$, К $\overset{\circ}{W}{}^l_m(\Omega)$ принадлежат функции $\dot{W}^l_m(\Omega)$ (т. е. элементы $W^l_m(\Omega)$ с носителем в Ω), ибо для $u \in \dot{W}^l_m(\Omega)$ средние u_ρ из (2.2) сходятся к u в норме $W^l_m(\Omega)$ и $u_\rho \in \dot{C}^\infty(\Omega)$ при достаточно малых ρ.

Одной из важных формул является формула интегрирования по частям

$$\int_\Omega u_{x_i} v\,dx = -\int_\Omega u v_{x_i}\,dx + \int_S uv \cos(\mathrm{n}, x_i)\,ds, \tag{2.7}$$

где n — единичный вектор внешней нормали к S. Она заведомо верна для функций u и v из $\mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ в строго липшицевых областях (а следовательно, и в сумме таких областей). В конце параграфа мы укажем, для каких более широких классов функций u и v справедлива формула (2.7).

Если $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, а $v \in W^1_2(\Omega)$, то формула (2.7) для них имеет вид

$$\int_\Omega u_{x_i} v\,dx = -\int_\Omega u v_{x_i}\,dx \tag{2.8}$$

при произвольной области Ω. В этом легко убедиться, если вспомнить вышесказанное о возможностях аппроксимации элементов из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и $W^1_2(\Omega)$ гладкими функциями. Ниже, после формулировки теорем вложения, будет ясно, для каких более широких классов функций u и v верна формула (2.8).

В основном нас будут интересовать пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ и $W^1_m(\Omega)$. Для $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ верна теорема:

Теорема 2.1. *Для* $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$, $m \geqslant 1$, $\forall r \geqslant 1$, *справедливы следующие мультипликативные неравенства:*

$$\|u\|_{p,\Omega} \leqslant \beta \|\nabla u\|^\alpha_{m,\Omega} \|u\|^{1-\alpha}_{r,\Omega}, \tag{2.9}$$

где

$$\alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\bar{m}}\right)^{-1}, \qquad \bar{m} = \frac{nm}{n-m}, \tag{2.10}$$

и

1) *при* $m < n$ *число* p *может быть любым из* $[r, \bar{m}]$, *если* $r \leqslant \bar{m}$, *и любым из* $[\bar{m}, r]$, *если* $r \geqslant \bar{m}$, *а* $\beta = \left(\frac{n-1}{n}\bar{m}\right)^\alpha$; *при изменении* p *между* r *и* $\bar{m}$ *число* α *меняется между* 0 *и* 1, *включая оба конца; при* $r = p = \bar{m}$ *в качестве* α *можно взять любое число из* [0, 1];

2) *при* $m \geqslant n$ *число* p *может быть любым из* $[r, \infty)$, *а* $\beta = \max\left\{\frac{n-1}{n}p;\ 1 + \frac{m-1}{m}r\right\}^{\alpha}$. *При изменении* p *от* r *до* ∞ *число* α *меняется от нуля до* $\frac{nm}{nm + r(m-n)}$, *причем правый конец исключается. Если* $m > n$, *то* (2.9) *справедливо и при* $p = \infty$ *с некоторым* $\beta < \infty$, *не зависящим от* Ω (*при этом* $\alpha = \frac{nm}{nm + r(m-n)}$).

Напомним, что мы всюду считаем $n \geqslant 2$. Доказательство теоремы 2.1 можно найти, например, в книге [21_{11}, стр. 80—84].

Из (2.9) для функций u из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ вытекают неравенства

$$\|u\|_{2q/(q-2),\,\Omega} \leqslant c(q)\,\|\nabla u\|_{2,\,\Omega}^{n/q}\,\|u\|_{2,\,\Omega}^{1-n/q}, \tag{2.11}$$

где $q \geqslant n$ при $n > 2$ и $q > 2$ при $n = 2$, а $c(q) = [2(n-1)/(n-2)]^{n/q}$ при $n > 2$ и $c(q) = \max\{q/(q-2),\ 2\}^{2/q}$ при $n = 2$.

Далее, для $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$, $m \geqslant 1$, справедливы неравенства

$$\|u\|_{p,\,\Omega} \leqslant c\,\mathrm{mes}^{1/p - 1/\bar{m}}\,\Omega_0\,\|\nabla u\|_{m,\,\Omega}, \qquad \bar{m} = \frac{nm}{n-m}, \tag{2.12}$$

с $p \in [1, \bar{m}]$ при $m < n$ и с $p \in [1, \infty)$ при $m \geqslant n$, причем постоянная c равна $\frac{n-1}{n}\bar{m}$ при $m < n$ и $c = \max\left\{\frac{n-1}{n}p;\ 2 - \frac{1}{m}\right\}$ при $m \geqslant n$, а $\Omega_0 = \{x \in \Omega:\ u(x) \neq 0\}$. Неравенство (2.12) при $m > n$ справедливо и для $p = \infty$ с $c = \beta^{1/\alpha}$, где β и α взяты из (2.9), (2.10) для $p = \infty$ и $r = 1$.

Действительно, в силу неравенства Гёльдера и неравенства (2.9) с $r = 1$ при $p > 1$ имеем

$$\|u\|_{p,\,\Omega} \leqslant \beta\,\|\nabla u\|_{m,\,\Omega}^{\alpha}\,\|u\|_{1,\,\Omega_0}^{1-\alpha} \leqslant \beta\,\|\nabla u\|_{m,\,\Omega}^{\alpha}\,\|u\|_{p,\,\Omega}^{1-\alpha}\,(\mathrm{mes}\,\Omega_0)^{(1-\alpha)\left(1-\frac{1}{p}\right)},$$

и потому, учитывая $\frac{1}{\alpha} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{\bar{m}}\right) \in (0, \infty)$, получаем, (2.12) с $c = \beta^{1/\alpha}$. Из этого же неравенства с каким-либо допустимым $p > 1$ и неравенства Гёльдера вытекает (2.12) и для $p = 1$.

Неравенство (2.12) показывает, что $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ принадлежит $L_{\tilde{m}}(\Omega)$, где здесь и ниже используем обозначение

$$\tilde{m} = \begin{cases} \bar{m} = \dfrac{nm}{n-m} & \text{при } m < n, \\ \infty & \text{при } m > n, \\ \text{любое число} < \infty & \text{при } m = n, \end{cases}$$

причем норма $\|u\|_{\tilde{m},\,\Omega}$ оценивается через норму $\|\nabla u\|_{m,\,\Omega}$.

Неравенства (2.12) справедливы также для функций $u(x)$ из $W^1_m(\Omega)$, равных нулю лишь на части границы Ω. Мы используем это для частного случая, когда Ω есть половина шара и $u(x)$ равна нулю на сферической части границы. Этот случай с помощью продолжения $u(x)$ четным образом по отношению к плоской части границы на весь шар сводится к случаю, когда функция равна нулю на всей границе.

Частными случаями (2.12) являются неравенства

$$\|u\|_{2q/(q-2),\,\Omega} \leqslant c(q)\,(\operatorname{mes}\Omega)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\,\|\nabla u\|_{2,\,\Omega}, \tag{2.13}$$

где $q \geqslant n$ при $n > 2$ и $q > 2$ при $n = 2$, с постоянной $c(q)$, зависящей лишь от q и n и, вообще говоря, отличной от $c(q)$ из (2.11), и неравенство

$$\|u\|_{2,\,\Omega} \leqslant c_0 \operatorname{mes}^{1/n}\Omega\,\|\nabla u\|_{2,\,\Omega} \tag{2.14}$$

с c_0, не зависящей от Ω. Из (2.11), используя неравенство Юнга (1.3′), для $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ получим

$$\|u\|^2_{2q/(q-2),\,\Omega} \leqslant \varepsilon\|\nabla u\|^2_{2,\,\Omega} + c_\varepsilon\|u\|^2_{2,\,\Omega}, \tag{2.15}$$

где ε — любое положительное число, а $c_\varepsilon = \frac{q-n}{q}\left(\frac{n}{\varepsilon q}\right)^{n/(q-n)} \times$ $\times\,[c(q)]^{2q/(q-n)}$ — постоянная, не зависящая от Ω.

Переходим теперь к пространствам $W^1_m(\Omega)$, $m \geqslant 1$. Для произвольной области Ω каждый класс функций, эквивалентных на Ω $u(x)$ из $W^1_m(\Omega)$, имеет «хорошего» представителя $\bar u(x)$, равного $\lim\limits_{\rho\to 0} \operatorname{mes}^{-1}\Omega_\rho(x) \int\limits_{\Omega_\rho(x)} u(y)\,dy$ для $x \in \Omega$ ($\bar u(x)$ определен для почти всех x, и $\bar u(x) - u(x)$ равен нулю почти всюду в Ω). Функция $\bar u(x)$ при почти всех значениях $x'_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ абсолютно непрерывна по x_i на всех открытых интервалах, принадлежащих Ω, и может быть по непрерывности доопределена в концах этих интервалов (это так для всех $i = 1, \ldots, n$). Производная $\frac{\partial \bar u}{\partial x_i}$, вычисляемая как обычная производная от абсолютно непрерывной функции, существует для почти всех значений x_i на упомянутых интервалах и совпадает почти всюду в Ω с обобщенной производной u_{x_i}, так что $\frac{\partial \bar u}{\partial x_i} = u_{x_i} \in L_m(\Omega)$. Верно и обратное утверждение: если $u(x) \in L_m(\Omega)$, если для всех $i = 1, \ldots, n$ $u(x)$ при почти всех значениях x'_i абсолютно непрерывна по x_i (на каждом из открытых интервалов, принадлежащих Ω) и если $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, вычисляемые как обычные производные от абсолютно непрерывных функций, принадлежат $L_m(\Omega)$, то $u \in W_m^1(\Omega)$ и $u(x)$ есть «хороший» представитель класса функций, эквивалентных $u(x)$ на Ω.

Пусть теперь Ω — строго липшицева область. Для таких областей $\forall u(x) \in W_m^1(\Omega)$ можно продолжить на все пространство E_n в виде функции $U(x) \in \dot{W}_m^1(E_n)$ (точка наверху означает, что $U(x)$ имеет компактный носитель), причем

$$\|U\|_{m, E_n}^{(1)} \leqslant c_1(\Omega) \|u\|_{m, \Omega}^{(1)}, \tag{2.16}$$

где постоянная $c(\Omega)$ зависит от m и Ω, но не зависит от u. Если к тому же $u(x) \in L_r(\Omega)$, то $U \in L_r(E_n)$ и

$$\|U\|_{r, E_n} \leqslant c_2(\Omega) \|u\|_{r, \Omega}, \tag{2.17}$$

где постоянная $c_1(\Omega)$ зависит от r и Ω (см. стр. 74 [39_6], лемма Кальдерона). Такое продолжение можно сделать и так, чтобы все функции $U(x)$ имели носитель, содержащийся в фиксированной области $\tilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}$.

Из неравенств (2.16), (2.17) и неравенства (2.9) следует, что для $\forall u \in W_m^1(\Omega)$

$$\|u\|_{p, \Omega} \leqslant \|U\|_{p, E_n} \leqslant \beta \|\nabla U\|_{m, E_n}^{\alpha} \|U\|_{r, E_n}^{1-\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \beta c_1^{\alpha}(\Omega) c_2^{1-\alpha}(\Omega) \left(\|u\|_{m, \Omega}^{(1)}\right)^{\alpha} \|u\|_{r, \Omega}^{1-\alpha}, \tag{2.18}$$

или, короче,

$$\|u\|_{p, \Omega} \leqslant \hat{\beta} \left(\|u\|_{m, \Omega}^{(1)}\right)^{\alpha} \|u\|_{r, \Omega}^{1-\alpha}, \tag{2.19}$$

где $\hat{\beta} = \beta c_1^{\alpha}(\Omega) c_2^{1-\alpha}(\Omega)$. Постоянные p, m, r, α, β те же, что и в (2.9). Постоянная $c_1(\Omega)$ в (2.16), а следовательно и постоянная $\hat{\beta}$ в (2.19), зависит от выбора норм $\|\cdot\|_{m, \Omega}^{(1)}$. Доказано, что стандартной норме $\|u\|_{m, \Omega}^{(1)}$ эквивалентны нормы

$$\|\nabla u\|_{m, \Omega} + \gamma (\operatorname{mes} \Omega)^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{s}} \|u\|_{s, \Omega_1},$$

$$\forall s \in [1, m], \quad \forall \gamma = \mathrm{const} > 0, \quad \forall \Omega_1 \subseteq \Omega \quad \text{с} \quad \operatorname{mes} \Omega_1 > 0,$$

причем эти нормы однородны: при преобразовании подобия $x \to \lambda x$ они умножаются на $\lambda^{(n-m)/m}$. Более того, из (2.19) с $r = 1$ видно, что в этих нормах в качестве s можно брать любое $s \leqslant \tilde{m}$. Если в (2.16) и (2.19) под $\|\cdot\|_{m, \Omega}^{(1)}$ понимать одну из этих норм, то постоянные $c_l(\Omega)$ и $\hat{\beta}$ в них, очевидно, одинаковы для всех областей Ω, получающихся друг из друга преобразованием подобия. Для подпространства $\hat{W}_m^1(\Omega)$ пространства $W_m^1(\Omega)$, состоящего из элементов $W_m^1(\Omega)$, подчиненных условию $\int\limits_{\Omega_1} u\,dx = 0$, $\Omega_1 \subseteq \Omega$, $\operatorname{mes}\Omega_1 > 0$, в качестве эквивалентной нормы можно взять $\|\nabla u\|_{m,\Omega}$. Выведем из (2.19) ряд следствий.

При $r \in [1, \tilde{m}]$ и $\|u\|_{m,\Omega}^{(1)} = \|\nabla u\|_{m,\Omega} + \|u\|_{r,\Omega}$ из (2.19) следует

$$\|u\|_{p,\Omega} \leqslant \hat{\beta}\left(\|\nabla u\|_{m,\Omega} + \|u\|_{r,\Omega}\right) \tag{2.20}$$

с $\forall p \in [r, \tilde{m}]$. При $r = m = 2$ и $\|u\|_{2,\Omega}^{(1)} = \|\nabla u\|_{2,\Omega} + \|u\|_{2,\Omega}$ из (2.19) следует

$$\|u\|_{2q/(q-2),\Omega} \leqslant \hat{\beta}\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{\frac{n}{q}} \|u\|_{2,\Omega}^{1-\frac{n}{q}} + \|u\|_{2,\Omega}\right), \tag{2.21}$$

где $q \geqslant n$ при $n > 2$ и $q > 2$ при $n = 2$. Возведем обе части (2.21) в квадрат и, считая $q > n$, воспользуемся неравенством Юнга в форме (1.3′). Это приведет нас к неравенству

$$\|u\|_{2q/(q-2),\Omega}^2 \leqslant \varepsilon \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + c_\varepsilon \|u\|_{2,\Omega}^2 \tag{2.22}$$

с $\forall \varepsilon > 0$, $q > n$ и $c_\varepsilon = 2\hat{\beta}^2 + \left(\frac{n}{q\varepsilon}\right)^{n/(q-n)} \frac{q-n}{q} (2\hat{\beta}^2)^{q/(q-n)}$.

Рассмотрим еще (2.19) при $r = 1$, $\|u\|_{m,\Omega}^{(1)} = \|\nabla u\|_{m,\Omega} + \|u\|_{1,\Omega}$ и $p = mq/(q-m)$, считая $q > n \geqslant m > 1$. Показатель α при этом будет меньше 1, поэтому член $\hat{\beta}\|\nabla u\|_{m,\Omega}^{\alpha} \|u\|_{1,\Omega}^{1-\alpha}$ можно оценить с помощью неравенства Юнга (1.3′), отдавая произвольно малое $\varepsilon > 0$ множителю $\|\nabla u\|_{m,\Omega}$. Возведя (2.19) в степень m и оценивая правую часть указанным образом, придем к неравенству

$$\|u\|_{mq/(q-m),\Omega}^m \leqslant \varepsilon \|\nabla u\|_{m,\Omega}^m + c_\varepsilon \|u\|_{1,\Omega}^m, \tag{2.23}$$

где ε — любое положительное, c_ε зависит от Ω, n, m и q, а $q > n \geqslant m > 1$. Еще раз напомним, что постоянные $\hat{\beta}$, c_ε в неравенствах (2.19) — (2.23) разные: они зависят от выбора нормы $\|u\|_{m,\Omega}^{(1)}$. Посмотрим, что дают неравенства (2.20) и (2.22) для $u(x) \in W_2^2(\Omega)$. Неравенство (2.22) применительно к функциям u_{x_i} дает

$$\|u_{x_i}\|_{m,\Omega}^2 \leqslant \varepsilon \|\nabla u_{x_i}\|_{2,\Omega}^2 + c_\varepsilon \|u_{x_i}\|_{2,\Omega}^2, \tag{2.24}$$

где $m = 2q/(q-2)$, а q — любое, большее n. Рассмотрим сначала $n \geqslant 4$. Для них (2.20) с $m = 2q/(q-2)$, $r = 2$ и p, равным наибольшему из возможных показателей (т. е. $p=2qn/[qn-2(n+q)]$, причем это p больше нуля при $\forall q>n\geqslant 4$), имеет вид

$$\|u\|_{p,\Omega}\leqslant\hat{\beta}\left(\|u_x\|_{2q/(q-2),\Omega}+\|u\|_{2,\Omega}\right). \tag{2.25}$$

Из (2.24) и (2.25) при $n\geqslant 4$ следует

$$\|u\|^2_{p,\Omega}+\|\nabla u\|^2_{2q/(q-2),\Omega}\leqslant\varepsilon_1\|u_{xx}\|^2_{2,\Omega}+\tilde{c}_{\varepsilon_1}\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2 \tag{2.26}$$

с $p=2qn/[qn-2(n+q)]$, а тем самым и с $p=2q/(q-4)$ при $\forall q>n$ и $\forall\varepsilon_1>0$. Для $n=2$ или 3 из (2.20) и (2.22) следует неравенство, отличающееся от (2.26) только тем, что вместо $\|u\|^2_{p,\Omega}$ в нем можно поставить $\max\limits_{\Omega}u^2$. Объединим все эти случаи так:

$$|u|^2_{\Omega}+\|\nabla u\|^2_{2q/(q-2),\Omega}\leqslant\varepsilon\|u_{xx}\|^2_{2,\Omega}+c_\varepsilon\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2, \tag{2.27}$$

где $|u|^2_{\Omega}$ есть $\max\limits_{\Omega}u^2(x)$ при $n=2$ и $n=3$ и $|u|^2_{\Omega}=\|u\|^2_{p,\Omega}$ с $p=2qn/[qn-2(n+q)]$ (и тем более $p=2q/(q-4)$) при $n\geqslant 4$. Число q в (2.27) любое, большее n, а ε любое, большее 0.

В действительности имеет место неравенство несколько более сильное, чем (2.27), а именно:

$$|u|^2_{\Omega}+\|\nabla u\|^2_{2q/(q-2),\Omega}\leqslant\varepsilon\|u_{xx}\|^2_{2,\Omega}+c_\varepsilon\|u\|^2_{2,\Omega},\ \forall q>n. \tag{2.28}$$

Для u, равных нулю на S, это непосредственно выводится из (2.27), если заметить, что из равенства

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx=-\int_{\Omega}u\,\Delta u\,dx$$

следует оценка

$$\|\nabla u\|^2_{2,\Omega}\leqslant\int_{\Omega}\left(\frac{\varepsilon_1}{2}(\Delta u)^2+\frac{1}{2\varepsilon_1}u^2\right)dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{n\varepsilon_1}{2}\|u_{xx}\|^2_{2,\Omega}+\frac{1}{2\varepsilon_1}\|u\|^2_{2,\Omega}. \tag{2.29}$$

Для функций $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega)$ неравенство (2.28) легко выводится из (2.29) и из неравенств (2.9) и (2.15), примененных к u и u_x соответственно, причем постоянная c_ε в (2.28) в данном случае может быть взята не зависящей от Ω.

Для элементов $W^1_m(\Omega)$ с $m>n$ неравенство (2.19) гарантирует их ограниченность. Однако на самом деле они будут принадлежать пространству $C^{1-\frac{n}{m}}(\overline{\Omega})$ и для них верно неравенство

$$|u|_{\Omega}^{\left(1-\frac{n}{m}\right)} \leqslant c\|u\|_{m,\,\Omega}^{(1)}, \qquad m>n. \tag{2.30}$$

Этот факт следует из леммы Морри (лемма 4.1 гл. II). Действительно, надо $u(x)$ продолжить на все E_n в виде функции $U(x) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(E_n)$, подчиняющейся неравенству (2.16), и затем к $U(x)$ применить лемму 4.1 (с $m=1$), учтя, что в силу неравенства Гёльдера $\int\limits_{K_\rho} |\nabla u|\,dx \leqslant \left(\int\limits_{K_\rho} |\nabla u|^m dx\right)^{\frac{1}{m}} (\operatorname{mes} K_\rho)^{1-\frac{1}{m}} \leqslant c\rho^{n-\frac{n}{m}}$.

Выше было отмечено, что для строго липшицевых областей функции класса $W_m^1(\Omega)$ допускают распространение на все пространство E_n, причем так, что для продолженных функций имеет место неравенство (2.16). Из этого факта легко заключить, что в $W_m^1(\Omega)$ плотны функции $C^\infty(\overline{\Omega})$. Действительно, усреднения (2.2) функций $U(x)$, определенных в E_n, принадлежат $C^\infty(\overline{\Omega})$ и сходятся при $\rho \to 0$ к u в норме $W_m^1(\Omega)$.

Неравенства (2.30), (2.19) и все неравенства (2.20) — (2.29), вытекающие из (2.19), справедливы и для областей Ω, составленных из конечного числа строго липшицевых областей; точнее, $\overline{\Omega}$ есть $\bigcup\limits_{i=1}^{N} \overline{\Omega}_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$, $i \neq j$, Ω_i — строго липшицевы области. Примером такой области может служить квадрат с каким-либо выброшенным из него отрезком. Теоремы о продолжении и аппроксимации функций из $W_m^1(\Omega)$ бесконечно дифференцируемыми функциями для таких областей могут быть неверны, но неравенства (2.19) — (2.29) для них сохраняются. Действительно, для каждой Ω_i неравенства (2.19) имеют место. Возведя их в степень p и сложив по всем i от $i=1$ до $i=N$, в левой части получим $\|u\|_{p,\,\Omega}^p$, а в правой части, заменив в каждом члене $\|u\|_{m,\,\Omega_i}^{(1)}$ и $\|u\|_{r,\,\Omega_i}$ на бо́льшие величины $\|u\|_{m,\,\Omega}^{(1)}$ и $\|u\|_{r,\,\Omega}$ соответственно, получим $\sum\limits_{i=1}^{N} \left[\hat{\beta}_i \left(\|u\|_{m,\,\Omega}^{(1)}\right)^{\alpha} \|u\|_{r,\,\Omega}^{1-\alpha}\right]^p$, где $\hat{\beta}_i$ суть постоянные из (2.19) для каждой из Ω_i. Справедливость (2.30) для $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \overline{\Omega}_i$ очевидна. Неравенства (2.19)—(2.30) верны и для более широких классов областей Ω, например для областей, получаемых из рассмотренных нами областей с помощью регулярного липшицева преобразования $y=y(x)$ (т. е.

гомеоморфного преобразования Ω на D, для которого $y(x)\in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ и обратные функции $x(y)\in \mathrm{Lip}(\overline{D})$). Известно, что $\forall f(x)$ из $\mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ имеет почти всюду в Ω дифференциал и $f(x)\in W_\infty^1(\Omega)$ (теорема Радемахера; для строго липшицевых областей верно и обратное предложение: $W_\infty^1(\Omega)\subset \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$, так что $\mathrm{Lip}(\overline{\Omega})=W_\infty^1(\Omega)$). Благодаря этому, если $u(x)\in W_m^1(\Omega)$, то $v(y)=u(x(y))\in W_m^l(D)$ (и наоборот). Из (2.19) — (2.30) для $u(x)$ следуют такие же неравенства для $v(y)$ в области D.

На основе неравенств (2.19) — (2.30) и теоремы Ф. Реллиха о компактности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ легко доказывается следующая теорема С. Л. Соболева ([32]):

Теорема 2.2. *Для произвольной области* Ω *) *ограниченные множества функций* $u(x)$ *из* $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ *компактны в* $L_p(\Omega)$ *с* $p<nm/(n-m)$ *при* $m\leqslant n$ *и компактны в* $C^\alpha(\overline{\Omega})$ *с* $\alpha<1-\frac{n}{m}$ *при* $m>n$. *Для строго липшицевых областей и конечных сумм таких областей ограниченные множества функций* $u(x)$ *из* $W_m^1(\Omega)$ *компактны в* $L_p(\Omega)$ *с* $p<nm/(n-m)$ *при* $m\leqslant n$ *и компактны в* $C^\alpha(\overline{\Omega})$ *с* $\alpha<1-\frac{n}{m}$ *при* $m>n$.

Переходим теперь к рассмотрению следов элементов $W_m^1(\Omega)$, $m\geqslant 1$, на поверхностях размерности $n-1$. Для большей наглядности пусть сначала Ω есть куб: $\Omega=\{x\in E_n\colon 0<x_i<1,\ i=1,\ \ldots,\ n\}$. Обозначим через $\Omega_{i,k}$, $i=1,\ \ldots,\ n$, $k=0,\ 1$, его грани: $\Omega_{i,0}=\{x\colon x_i=0,\ 0<x_k<1,\ k\neq i\}$ и $\Omega_{i,1}=\{x\colon x_i=1,\ 0<x_k<1,\ k\neq i\}$, а через Ω_i — $(n-1)$-мерные кубы: $\Omega_i=\{x_i'\colon 0<x_k<1,\ k\neq i\}$. Для $\forall u\in W_m^1(\Omega)$ его представитель $\tilde u(x)$, равный $\lim\limits_{\rho\to 0}\mathrm{mes}^{-1}(K_\rho(x)\cap\Omega)\int\limits_{K_\rho(x)\cap\Omega}u(y)\,dy$ для $x\in\overline{\Omega}$, обладает следующими свойствами: при любом $i=1,\ \ldots\ n$, $\tilde u(x)$ абсолютно непрерывен по $x_i\in[0,\ 1]$ для почти всех значений x_i' из Ω_i (множество таких x_i' обозначим через $\tilde\Omega_i$). Для $\forall x_i\in[0,\ 1]$ он есть элемент $L_m(\Omega_i)$ и для $x_i'\in\tilde\Omega_i$

$$\tilde u(x_i',\ x_i)=\tilde u(x_i',\ x_i^0)+\int\limits_{x_i^0}^{x_i}\tilde u_\tau(x_i',\ \tau)\,d\tau$$

*) Напомним, что во всей книге мы рассматриваем лишь ограниченные области Ω.

при $\forall x_i$, x_i^0 из [0, 1]. Отсюда следует

$$\|\bar{u}(x_i', x_i) - \bar{u}(x_i', x_i^0)\|_{m, \Omega_i} = \left\| \int\limits_{x_i^0}^{x_i} \bar{u}_\tau(x_i', \tau)\, d\tau \right\|_{m, \Omega_i} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x_i^0}^{x_i} \|u_\tau(x_i', \tau)\|_{m, \Omega_i} d\tau \leqslant |x_i - x_i^0|^{1-\frac{1}{m}} \left(\int\limits_{x_i^0}^{x_i} \int\limits_{\Omega_i} |\bar{u}_{x_i}|^m dx \right)^{\frac{1}{m}}, \tag{2.31}$$

т. е. $\bar{u}(x_i', x_i)$ непрерывен по x_i в норме $L_m(\Omega_i)$. Более специальные рассмотрения показывают, что для $u \in W_m^1(\Omega)$ представители $\bar{u}(x_i', x_i) \in L_q(\Omega_i)$ при $\forall x_i \in [0, 1]$ с $q \leqslant m(n-1)/(n-m)$ при $m < n$ и с $\forall q < \infty$ при $m = n$, причем

$$\|\bar{u}(x_i', x_i)\|_{q, \Omega_i} \leqslant c \|u\|_{m, \Omega}^{(1)} \tag{2.32}$$

и при $|x_i - x_i^0| \to 0$

$$\|\bar{u}(x_i', x_i) - \bar{u}(x_i', x_i^0)\|_{q, \Omega_i} \leqslant c \left(\int\limits_{x_i^0}^{x_i} \|u_{x_i}\|_{m, \Omega_i}^m dx_i \right)^{1/m} \to 0. \tag{2.33}$$

Для $m > n$ элементы $W_m^1(\Omega)$ принадлежат $C^{1-\frac{n}{m}}(\bar{\Omega})$. При q, меньших указанных в (2.32), т. е. $q < m(n-1)/(n-m)$, $m \leqslant n$, справедливы также неравенства

$$\|\bar{u}\|_{q, \Omega_i} \leqslant \varepsilon \|\nabla u\|_{m, \Omega} + c_\varepsilon \|u\|_{r, \Omega} \tag{2.34}$$

с $\forall \varepsilon > 0$ и $r \geqslant 1$. Выведены и мультипликативные неравенства вида (2.18), в частности

$$\|\bar{u}\|_{p, \Omega_i} \leqslant c (\|u\|_{2, \Omega}^{(1)})^\alpha \|u\|_{2, \Omega}^{1-\alpha} \tag{2.35}$$

с $\alpha = \frac{n}{2} - \frac{n-1}{p}$, где p — любое из $[2(n-1)/n, 2(n-1)/(n-2)]$ при $n \geqslant 3$ и p — любое из $[1, \infty)$ при $n = 2$.

Если $u \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$, то на границе Ω $\bar{u}(x)$ «принимает» нулевые значения. При $m \leqslant n$ это надо понимать как

$$\|\bar{u}(x_i', x_i)\|_{q, \Omega_i} \to 0 \quad \text{при} \quad x_i \to 0 \quad \text{или} \quad x_i \to 1, \; i = 1, \ldots, n \tag{2.36}$$

(q те же, что и в (2.32)). Верно и обратное: если $u \in W_m^1(\Omega)$ и $\bar{u}$ на S равно нулю, то $u \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$.

Если вместо x в Ω взяты другие регулярные координаты $y = y(x) \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$ (так что обратные функции $x = x(y) \in \mathrm{Lip}(\bar{D})$), то все сказанное справедливо и для функций $v(y)=u(x(y))$ в области D, причем $\bar{v}(y)=\bar{u}(x(y))$. Ввиду этого для элементов $u(x)\in W_m^1(\Omega)$ в строго липшицевых областях представитель $\bar{u}(x)$ однозначно доопределяется по непрерывности для почти всех точек границы S области Ω. Функция $\bar{u}(x)$ на S принадлежит $L_q(S)$ с тем q, что и в формуле (2.32), и для нее верны аналоги неравенств (2.32) и (2.34), а именно:

$$\|\bar{u}\|_{q,S}\leqslant c\|u\|_{m,\Omega}^{(1)}, \tag{2.37}$$

где $q\leqslant m(n-1)/(n-m)$ при $m<n$, $\forall q<\infty$ при $m=n$ и $q=\infty$ при $m>n$, и

$$\|\bar{u}\|_{q,S}\leqslant\varepsilon\|\nabla u\|_{m,\Omega}+c_\varepsilon\|u\|_{r,\Omega} \tag{2.38}$$

с $\forall\varepsilon>0$, $r\geqslant 1$ и $q<m(n-1)/(n-m)$ при $m\in(1,n]$. На основе (2.38) и теоремы 2.2 нетрудно доказать следующую теорему С. Л. Соболева ([32]) (см. лекции О. А. Ладыженской):

Теорема 2.3. *Для строго липшицевых областей следы на границе функций $\bar{u}(x)$ из $W_m^1(\Omega)$ с $\|\bar{u}\|_{m,\Omega}^{(1)}\leqslant c$ образуют компактное в $L_q(S)$ множество, где q те же, что и в* (2.38).

В строго липшицевых областях представители $\bar{u}(x)$ элементов $u(x)$ из $\overset{c}{W}{}_m^1(\Omega)$ равны нулю на границе Ω, и, наоборот, если $u(x)\in W_m^1(\Omega)$ и $\bar{u}(x)|_S=0$, то $u\in\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ (отсюда следует, что такая $\bar{u}(x)$, продолженная нулем вне Ω, будет элементом $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\tilde{\Omega})$ в $\forall\tilde{\Omega}\supset\Omega$).

Вернемся теперь к формулам (2.8) и (2.7). Формула (2.8) или, что то же,

$$\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)\,dx=0 \tag{2.8$'$}$$

остается справедливой для произвольной области Ω, если $uv\in\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$. Произведение же $uv\in\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$, если $u\in\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$, $v\in W_p^1(\Omega)$, а m и p удовлетворяют условиям: 1) $\frac{1}{m}+\frac{1}{p}\leqslant 1+\frac{1}{n}$, если $m\in(1,n)$, $p\in(1,n)$, или 2) $\frac{1}{m}+\frac{1}{p}<1+\frac{1}{n}$, если $m>1$, $p\geqslant 1$ или $m\geqslant 1$, $p>1$, или 3) $p=1$, $m=n$ и $u\in L_\infty(\Omega)$ или $m=1$, $p=n$ и $v\in L_\infty(\Omega)$. Справедливость этих утверждений следует из теорем вложения — неравенств (2.9) и (2.18) и неравенства Гёльдера. При этом надо учесть, что неравенства (2.18) достаточно иметь лишь для подобластей $\Omega'\subset\Omega$ с хорошей границей, ибо в $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ плотны финитные функции из $W_m^1(\Omega)$, т. е. функции из $\dot{W}_2^1(\Omega)$.

Формула (2.7) остается справедливой в строго липшицевых областях для функций $u \in W_m^1(\Omega)$ и $v \in W_p^1(\Omega)$ с m и p, указанными для формулы (2.8′). Это следует из неравенств (2.18), (2.30) и (2.37) и возможности аппроксимации функций из $W_m^1(\Omega)$ и $W_p^1(\Omega)$ функциями из $C^1(\overline{\Omega})$ (или хотя бы функциями из $\mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$). Формула (2.7) сохраняется и для суммы строго липшицевых областей (см. выше их определение), ибо она получается из (2.7) для строго липшицевых областей простым сложением.

§ 3. О разных сходимостях и функциях классов $W_m^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$

Сформулируем прежде всего ряд известных предложений из теории функций вещественного переменного, которые будут использоваться на протяжении всей книги.

Лемма 3.1. *Если последовательность* $\{u_p(x)\}$, $p=1, 2, \ldots$, *элементов* $L_m(\Omega)$, $m \geqslant 1$, *сходится в норме* $L_m(\Omega)$ *к функции* $u(x)$, *то из нее можно выбрать подпоследовательность* $\{u_{p_k}(x)\}$, $k=1, 2, \ldots$, *сходящуюся к* $u(x)$ *почти всюду, т. е. такую, что на некотором множестве* $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ *с* $\operatorname{mes} \tilde{\Omega} = \operatorname{mes} \Omega$ *все* $u_{p_k}(x)$ *и* $u(x)$ *принимают конечные значения и* $|u_{p_k}(x) - u(x)| \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Если* $\{u_p(x)\}$ *сходятся к* $u(x)$ *почти всюду, то они сходятся к* $u(x)$ *и почти равномерно, т. е. по любому* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое множество* $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ *с* $\operatorname{mes} \Omega_\varepsilon \geqslant \operatorname{mes} \Omega - \varepsilon$, *на котором* $u_p(x)$ *сходятся к* $u(x)$ *равномерно.*

Здесь, как и во всей книге, мы чаще всего не оговариваем специально, что все функции и все множества, встречающиеся в ней, измеримы по Лебегу. Из леммы 3.1 легко выводится следующее предложение:

Лемма 3.2. *Если последовательность* $\{u_p(x)\}$, $p=1, 2, \ldots$, *сходится к* $u(x)$ *в норме* $L_1(\Omega)$ *и величины* $\|u_p\|_{q, \Omega}$, $q > 1$, $p=1, 2, \ldots$, *равномерно ограничены, то* $\{u_p(x)\}$ *сходится к* $u(x)$ *сильно в* $L_{\tilde{q}}(\Omega)$, $\forall \tilde{q} < q$, *и слабо в* $L_q(\Omega)$.

Если $f(x, u)$ *есть измеримая на* $\Omega \times E_1$ *функция, непрерывная по* u *для почти всех* x *из* Ω, *и если для последовательности функций* $\{u_p(x)\}$, *сходящейся почти всюду к* $u(x)$, *величины* $\|f(x, u_p(x))\|_{q, \Omega}$, $p=1, 2, \ldots$, *равномерно ограничены, то* $f(x, u_p(x))$, $p=1, 2, \ldots$, *сходятся к* $f(x, u(x))$ *в нормах* $L_{\tilde{q}}(\Omega)$, $\forall \tilde{q} < q$, *и слабо в* $L_q(\Omega)$. *Если к тому же величины* $\|f(x, u_p(x)\|_{q, \Omega^\varepsilon}$, $p=1, 2, \ldots$, *равномерно малы по множествам* $\Omega^\varepsilon \subset \Omega$ *малой меры, т. е. если по любому* $\delta > 0$ *найдется* $\varepsilon > 0$ *такое, что* *для произвольного множества* $\Omega^\varepsilon \subset \Omega$ *с* $\operatorname{mes}\Omega^\varepsilon \leqslant \varepsilon$ *величины* $\|f(x, u_p(x))\|_{q,\,\Omega^\varepsilon} \leqslant \delta$, $p=1, 2, \ldots$, *то* $f(x, u_p(x))$ *сходятся к* $f(x, u(x))$ *в норме* $L_q(\Omega)$.

Отметим еще следующий известный факт: пространству $L_q(\Omega)$, $q>1$, сопряжено пространство $L_{q'}(\Omega)$, $q'=\frac{q}{q-1}$, так что любой линейный функционал l в $L_q(\Omega)$ представим в виде

$$l(u)=\int\limits_{\Omega} \varphi_l(x)\,u(x)\,dx, \quad u(x)\in L_q(\Omega),$$

где $\varphi_l(x)\in L_{q'}(\Omega)$, и между линейными функционалами в $L_q(\Omega)$ и элементами $L_{q'}(\Omega)$ существует взаимно однозначное соответствие.

Переходим теперь к изучению пространства $W_m^1(\Omega)$.

Пусть $u(x)$ есть элемент $W_m^1(\Omega)$, $m\geqslant 1$. Обозначим через A_k множество точек x из Ω, в которых $u(x)>k$, а через $\overset{\circ}{A}_k$ — множество точек $x\in\Omega$, в которых $u(x)=k$. Известно, что эти множества измеримы, что $A_k=\bigcup\limits_{\forall\varepsilon>0} A_{k+\varepsilon}$, $A_k \cup \overset{\circ}{A}_k=\bigcap\limits_{\forall\varepsilon>0} A_{k-\varepsilon}$ и $\operatorname{mes}(A_k\setminus A_{k+\varepsilon})\to 0$, $\operatorname{mes}(A_{k-\varepsilon}\setminus A_k\cup\overset{\circ}{A}_k)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Построим по $u(x)$ функцию $u^{(k)}(x)=\max\{u(x)-k;\ 0\}$ (срезку). Имеет место

Лемма 3.3. *Если* $u\in W_m^1(\Omega)$, $m\geqslant 1$, *то* $u^{(k)}$ *также принадлежит* $W_m^1(\Omega)$, *причем* $u_{x_i}^{(k)}(x)$ *равна* $u_{x_i}(x)$ *при* $x\in A_k$ *и нулю в остальных точках.*

Этот факт легко доказывается исходя из сформулированных в § 2 свойств «хорошего» представителя $\bar u(x)$ элемента $u(x)$ и того, что таким представителем для $u^{(k)}(x)$ является функция $\max\{\bar u(x)-k;\ 0\}$. Из этих же свойств $\bar u(x)$ для $u(x)\in W_m^1(\Omega)$ следует, что если $\operatorname{mes}\overset{\circ}{A}_k>0$, то $\nabla u(x)=0$ на некотором подмножестве множества $\overset{\circ}{A}_k$, имеющем ту же меру, что и $\overset{\circ}{A}_k$.

Докажем теперь, что если последовательность функций $u_p(x)$, $p=1, 2, \ldots$, из $W_m^1(\Omega)$ сходится к функции $u(x)$ в норме $W_m^1(\Omega)$, то последовательность «подрезанных» функций $u_p^{(k)}(x)$ также сходится в $W_m^1(\Omega)$ к функции $u^{(k)}(x)$. Для этого предварительно убедимся в справедливости следующей леммы:

Лемма 3.4. *Если* $u_p(x)$, $p=1, 2, \ldots$, *сходятся в* $L_m(\Omega)$ *к* $u(x)$, *то* $u_p^{(k)}(x)$ *сходятся в* $L_m(\Omega)$ *к* $u^{(k)}(x)$. *Кроме того,*

$$\operatorname{mes}\left[A_k\setminus A_k^p\cap A_k\right]\to 0 \quad \textit{при} \quad p\to\infty$$

и

$$\operatorname{mes}[A_k^p \setminus A_k^p \cap (A_k \cup \mathring{A}_k)] \to 0 \quad \textit{при} \quad p \to \infty.$$

Здесь A_k^p *есть множество точек* $x \in \Omega$, *в которых* $u_p(x) > k$.

Из очевидного неравенства

$$|u_p^{(k)}(x) - u^{(k)}(x)| \leqslant |u_p(x) - u(x)|$$

ясно, что $u_p^{(k)}$ сходятся к $u^{(k)}$ в $L_m(\Omega)$. Далее, из сходимости $u_p(x)$ к $u(x)$ следует, что мера множества $\Omega^{p,\varepsilon}$ точек $x \in \Omega$, в которых $|u_p(x) - u(x)| \geqslant \varepsilon$, при любом $\varepsilon > 0$ стремится к нулю, когда $p \to \infty$. Кроме того, в силу определения множеств A_k и A_k^p имеем $A_{k+\varepsilon} \cap (\Omega \setminus \Omega^{p,\varepsilon}) \subset A_k^p$, $\varepsilon > 0$, а потому и

$$A_k \cap [A_{k+\varepsilon} \cap (\Omega \setminus \Omega^{p,\varepsilon})] = A_{k+\varepsilon} \cap (\Omega \setminus \Omega^{p,\varepsilon}) \subset A_k^p \cap A_k.$$

Представим $A_k \setminus A_k^p \cap A_k$ в виде

$$A_k \setminus A_k^p \cap A_k = (A_k \setminus A_{k+\varepsilon}) \cup (A_{k+\varepsilon} \cap \Omega^{p,\varepsilon}) \cup \\ \cup [A_{k+\varepsilon} \cap (\Omega \setminus \Omega^{p,\varepsilon})] \setminus A_k^p \cap A_k$$

и по произвольному числу $\delta > 0$ выберем сначала $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ такое, чтобы $\operatorname{mes}(A_k \setminus A_{k+\varepsilon}) \leqslant \delta/2$, а затем $p(\delta)$ такое, чтобы при всех $p \geqslant p(\delta)$ $\operatorname{mes}\Omega^{p,\varepsilon(\delta)} \leqslant \delta/2$. Тогда $\operatorname{mes}(A_k \setminus A_k^p \cap A_k)$ не будет превосходить δ при $p \geqslant p(\delta)$.

Для доказательства последнего утверждения воспользуемся тем, что $A_k^p \cap (\Omega \setminus \Omega^{p,\varepsilon}) \subset A_{k-\varepsilon}$, а потому и $A_k^p \cap (\Omega \setminus \Omega^{p,\varepsilon}) \subset \subset A_k^p \cap A_{k-\varepsilon}$. Представим $A_k^p \setminus A_k^p \cap (A_k \cup \mathring{A}_k)$ в виде

$$A_k^p \setminus A_k^p \cap (A_k \cup \mathring{A}_k) = [A_k^p \cap (\Omega \setminus \Omega^{p,\varepsilon})] \cup [A_k^p \cap \Omega^{p,\varepsilon}] \setminus [A_k^p \cap A_{k-\varepsilon}] \cup \\ \cup [A_k^p \cap (A_{k-\varepsilon} \setminus A_k \cup \mathring{A}_k)]$$

и по произвольному $\delta > 0$ подберем $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ так, чтобы $\operatorname{mes}(A_{k-\varepsilon} \setminus A_k \cup \mathring{A}_k) \leqslant \delta/2$, а затем $p(\delta)$ такое, чтобы при $p \geqslant p(\delta)$ $\operatorname{mes}\Omega^{p,\varepsilon(\delta)} \leqslant \frac{\delta}{2}$. Тогда $\operatorname{mes}(A_k^p \setminus A_k^p \cap (A_k \cup \mathring{A}_k))$ будет при $p \geqslant p(\delta)$ не больше δ. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть функции* $u_p(x)$, $p = 1, 2, \ldots$, *сходятся в* $W_m^1(\Omega)$ *к функции* $u(x)$. *Тогда функции* $u_p^{(k)}(x)$ *сходятся в* $W_m^1(\Omega)$ *к функции* $u^{(k)}$.

Мы уже знаем, что $u_p^{(k)}$ сходятся к $u^{(k)}$ в $L_m(\Omega)$, что $u_p^{(k)}$ и $u^{(k)}$ принадлежат $W_m^1(\Omega)$ и что $\frac{\partial u_p^{(k)}}{\partial x_i}$ $\left(\text{аналогично } \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x_i}\right)$ равна $\frac{\partial u_p}{\partial x_i}$

соответственно $\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)$ при $x \in A_k^p$ (при $x \in A_k$) и нулю при $x \in \Omega \setminus A_k^p$ (соответственно при $x \in \Omega \setminus A_k$). Нам надо доказать лишь, что $\frac{\partial u_p^{(k)}}{\partial x_i}$ сходятся в $L_m(\Omega)$ к $\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x_i}$. Для этого представим интеграл $\int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial u_p^{(k)}}{\partial x_i} - \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x_i} \right|^m dx$ в виде суммы интегралов от того же подынтегрального выражения по множествам $A_k \cap A_k^p$, $A_k \setminus A_k \cap A_k^p$, $A_k^p \setminus A_k^p \cap (A_k \cup \overset{\circ}{A}_k)$, $A_k^p \cap \overset{\circ}{A}_k$, $\Omega \setminus A_k^p \cup A_k$. На последнем множестве подынтегральное выражение равно нулю вследствие определения функций $u_p^{(k)}$. На первом множестве интеграл имеет вид $\int\limits_{A_k \cap A_k^p} \left| \frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^m dx$ и потому мал при больших p в силу сходимости u_{px_i} к u_{x_i} в норме $L_m(\Omega)$. Интеграл по множеству $A_k \setminus A_k \cap A_k^p$ мал при больших p, ибо в силу малости меры множества $A_k \setminus A_k \cap A_k^p$, будет мал интеграл $\int\limits_{A_k \setminus A_k \cap A_k^p} |u_{x_i}|^m dx$ и потому равномерно малы интегралы $\int\limits_{A_k \setminus A_k \cap A_k^p} |u_{px_i}|^m dx$ (ибо u_{px_i} сходятся к u_{x_i} в $L_m(\Omega)$). Выражение же $\left(\int\limits_{A_k \setminus A_k \cap A_k^p} \left| \frac{\partial u_p^{(k)}}{\partial x_i} - \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x_i} \right|^m dx \right)^{1/m}$ не превосходит

$$\left(\int\limits_{A_k \setminus A_k \cap A_k^p} |u_{px_i}|^m dx \right)^{1/m} + \left(\int\limits_{A_k \setminus A_k \cap A_k^p} |u_{x_i}|^m dx \right)^{1/m}$$

и потому действительно стремится к нулю при $p \to \infty$. Интеграл по множеству $B_k^p \equiv A_k^p \setminus A_k^p \cap (A_k \cup \overset{\circ}{A}_k)$ имеет вид $\int\limits_{B_k^p} \left| \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \right|^m dx$, причем по лемме 3.4 $\operatorname{mes} B_k^p \to 0$ при $p \to \infty$. Он будет мал, ибо мал $\int\limits_{B_k^p} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^m dx$ и u_{px_i} сходятся в $L_m(\Omega)$ к u_{x_i}. Наконец, интеграл по $A_k^p \cap \overset{\circ}{A}_k$ имеет вид

$$\int\limits_{A_k^p \cap \overset{\circ}{A}_k} \left| \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \right|^m dx = \int\limits_{A_k^p \cap \overset{\circ}{A}_k} \left| \frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^m dx$$

и будет мал в силу сходимости $u_{p x_i}$ к u_{x_i} в $L_m(\Omega)$.

Лемма 3.5 доказана.

Из леммы 3.5 и определения $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ вытекает

Следствие 3.1. Если $u \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$, то $u^{(0)}(x)$, равная $u(x)$ для x из Ω, в которых $u(x) > 0$, и равная нулю для всех остальных x из E_n, принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega_1)$ для $\forall \Omega_1 \supseteq \Omega$.

Лемма 3.6. *Если* $u \in W_m^1(\Omega)$ *и* $\operatorname{vrai}\max\limits_S u = M$, *то* $u^{(k)} \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ *при* $\forall k \geqslant M$.

Действительно, в силу определения $\operatorname{vrai}\max\limits_S u$ (см. § 1 гл. I) для $\forall \varepsilon > 0$ найдется функция $\varphi \in W_m^1(\Omega)$ с $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega \varphi \leqslant M + \varepsilon$ такая, что $v = (\varphi - u) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$. Возьмем последовательность $v_p \in \dot{C}^\infty(\Omega)$ и сходящуюся к v в норме $W_m^1(\Omega)$. Для нее срезки $u_p^{(k)}$ с $k \geqslant M + \varepsilon$ функций $u_p = \varphi - v_p$ обращаются в нуль в пограничных полосках и, следовательно, принадлежат $\dot{W}{}_m^1(\Omega)$. В силу леммы 3.5 $u_p^{(k)}$ сходятся к $u^{(k)}$ в норме $W_m^1(\Omega)$, и потому $u^{(k)} \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$. Это верно для $\forall k > M$. Функция $u^{(M)}$ также принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$, ибо, как нетрудно видеть из самого построения срезок, $u^{(k)}$ сходятся к $u^{(M)}$ в норме $W_m^1(\Omega)$ при $k \to M + 0$.

Замечание 3.1. Леммы 3.3—3.5 справедливы и для функций $\tilde{u}^{(k)}(x) = \min\{u(x); k\}$, ибо $\tilde{u}^{(k)}(x) = u(x) - u^{(k)}(x)$.

Аналогично доказывается

Лемма 3.7. *Пусть* $u \in W_m^1(\Omega)$ *и* $\operatorname{vrai}\max\limits_{S_\rho = S \cap K_\rho} u \leqslant M$ *для какого-либо шара* K_ρ. *Тогда функция*

$$\hat{u}^{(k)}(x) = \begin{cases} u^{(k)}(x) & \textit{для} \quad x \in \Omega_\rho \equiv K_\rho \cap \Omega, \\ 0 & \textit{для} \quad x \in K_\rho \setminus \Omega_\rho \end{cases}$$

при $\forall k > M$ *принадлежит* $W_m^1(K_\rho)$.

Действительно, из условий леммы следует, что для $\forall k > M$ существует функция $\varphi \in W_m^1(\Omega)$, с $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega \varphi \leqslant k$, такая, что для $v = u - \varphi$ имеются функции v_p, $p = 1, 2, \ldots$, из $W_m^1(\Omega)$, равные нулю в окрестности S_ρ и сходящиеся к v в норме $W_m^1(\Omega)$.

Срезки $u_p^{(k)}$ для функций $u_p = v_p + \varphi \in W_m^1(\Omega)$ и обращаются в нуль в тех же окрестностях S_ρ, что и функции v_p. Ясно, что функции $u_p^{(k)}$, продолженные нулем на K_ρ (обозначим их через $\hat{u}_p^{(k)}$), принадлежат $W_m^1(K_\rho)$ и $j_{pq} \equiv \|\hat{u}_p^{(k)} - \hat{u}_q^{(k)}\|_{m, K_\rho}^{(1)} = \|\hat{u}_p^{(k)} - \hat{u}_q^{(k)}\|_{m, \Omega_\rho}^{(1)}$. В силу леммы 3.5 $j_{pq} \to 0$ при $p, q \to \infty$, т. е. предельная для $\hat{u}_p^{(k)}$ функция $\tilde{u}^{(k)}$ принадлежит $W_m^1(K_\rho)$. С другой стороны, на Ω_ρ $\hat{u}_p^{(k)}$ сходятся к $u^{(k)}$, а на $K_\rho \setminus \Omega_\rho$ все $\hat{u}_p^{(k)} = 0$, следовательно, $\tilde{u}^{(k)} = \hat{u}^{(k)}$.

Замечание 3.2 к леммам 3.6 и 3.7. Если Ω — строго липшицева область, то $\operatorname{vrai}\max_S u$ для $u \in W_m^1(\Omega)$, определенный в § 1 гл. I, совпадает с обычным определением $\operatorname{vrai}\max_S \bar{u}$ по поверхности S следа представителя $\bar{u}$ элемента u из $\overset{\cdot}{W}{}_m^1(\Omega)$ на границе S. Это следует из того, что для таких областей принадлежность v к $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ эквивалентна принадлежности v (а потому и $\bar{v}$) к $W_m^1(\Omega)$ и равенству нулю следа $\bar{v}$ на S. Действительно, пусть $u \in W_m^1(\Omega)$, $\operatorname{vrai}\max_S u = M$, а $\operatorname{vrai}\max_S \bar{u} = \bar{M}$. Тогда для $\forall k > M$ найдется функция φ с $\operatorname{vrai}\max_\Omega \varphi \leqslant k$ и такая, что $v = u - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$. Ясно, что $\bar{u} = \bar{v} + \bar{\varphi}$ и след $\bar{u}$ на S равен следу $\bar{\varphi}$ на S, и потому $\bar{M} = \operatorname{vrai}\max_S \bar{u} = \operatorname{vrai}\max_S \bar{\varphi} \leqslant k$. Так как k — любое $> M$, то $\bar{M} \leqslant M$. Верно и обратное неравенство $M \leqslant \bar{M}$, ибо функция $\varphi(x) = \min\{\bar{u}(x); \bar{M}\}$ равна своему представителю $\bar{\varphi}$, имеет $\operatorname{vrai}\max_\Omega \bar{\varphi} \leqslant \bar{M}$, след $\bar{\varphi}$ на S равен $\bar{u}$ (почти всюду на S), и потому $\bar{u} - \bar{\varphi} \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$. Аналогично доказывается совпадение двух определений vrai max элементов $W_m^1(\Omega)$ для части $S_\rho = K_\rho \cap S$ границы, если Ω — строго липшицева область. Надо при этом использовать лишь то, что если $\bar{u}$ равно нулю на S_ρ, то существует последовательность функций $u_\rho \in W_m^1(\Omega)$, сходящихся к $\bar{u}$ в $W_m^1(\Omega)$ и равных нулю в окрестности S_ρ.

Лемма 3.8. *Пусть K_ρ — шар радиуса ρ. Для любой функции $u(x)$ из $W_1^1(K_\rho)$ и произвольного измеримого множества $E \subset K_\rho$ справедливо неравенство*

$$\int_E |u|\,dx \leqslant \beta \frac{\rho^n}{\operatorname{mes} E_0} \operatorname{mes}^{1/n} E \int_{K_\rho} |\nabla u(x)|\,dx, \tag{3.1}$$

где E_0 — множество точек x из K_ρ, в которых $u(x) = 0$, а β — абсолютная постоянная, зависящая от n.

Доказательство. Для почти всех x из K_ρ и y из E_0 верно соотношение

$$-u(x)=u(y)-u(x)=\int_0^{|x-y|}\frac{\partial u(x+r\omega)}{\partial r}\,dr,$$

где (r,ω) — сферические координаты с центром в точке x. Проинтегрируем это равенство по $y\in E_0$:

$$-u(x)\operatorname{mes}E_0=\int_{E_0}dy\int_0^{|x-y|}u_r(x+r\omega)\,dr,\qquad(3.2)$$

и оценим сверху правую часть следующим образом:

$$\left|\int_{E_0}dy\int_0^{|x-y|}u_r(x+r\omega)\,dr\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{y\in K_\rho}|x-y|^{n-1}d_y|x-y|\,d\omega\int_0^{|x-y|}|u_r(x+r\omega)|\,dr\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{2\rho}|x-y|^{n-1}d_y|x-y|\int_{K_\rho}\frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{n-1}}\,d\xi=\frac{(2\rho)^n}{n}\int_{K_\rho}\frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{n-1}}\,d\xi.$$

Отсюда и из (3.2) получаем неравенство

$$|u(x)|\operatorname{mes}E_0\leqslant\frac{(2\rho)^n}{n}\int_{K_\rho}\frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{n-1}}\,d\xi.$$

Проинтегрируем обе его части по множеству E:

$$\operatorname{mes}E_0\int_E|u|\,dx\leqslant\frac{(2\rho)^n}{n}\int_{K_\rho}|\nabla u(\xi)|\,d\xi\int_E\frac{dx}{|x-\xi|^{n-1}}.\qquad(3.3)$$

Интеграл $j=\int_E\frac{dx}{|x-\xi|^{n-1}}$ не превосходит $(\omega_n+1)\operatorname{mes}^{1/n}E$, где ω_n — площадь поверхности единичного n-мерного шара. Действительно, часть интеграла, соответствующая области интегрирования $E\cap\{|x-\xi|\leqslant\delta\}$, не превосходит

$$\int_{|x-\xi|\leqslant\delta}\frac{dx}{|x-\xi|^{n-1}}=\omega_n\delta.$$

Остальная часть интеграла, очевидно, не превосходит $\delta^{-n+1}\operatorname{mes}E$.

Возьмем $\delta = \mathrm{mes}^{1/n} E$; тогда ясно, что $j \leqslant (\omega_n + 1)\,\mathrm{mes}^{1/n} E$. В силу этого из (3.3) следует неравенство (3.1) с $\beta = \frac{2^n}{n}(\omega_n + 1)$.

Лемма 3.8 доказана. Из нее легко вывести два следствия. Первое из них является некоторой модификацией утверждения, доказанного Де Джорджи [11], и формулируется так:

Лемма 3.9. *Для любой функции $u(x)$ из $W_1^1(K_\rho)$ при произвольных k и l, $l > k$, верно неравенство*

$$(l-k)\,\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{n}} A_{l,\rho} \leqslant \beta \frac{\rho^n}{\mathrm{mes}\,(K_\rho \setminus A_{k,\rho})} \int\limits_{A_{k,\rho} \setminus A_{l,\rho}} |\nabla u(x)|\, dx \qquad (3.4)$$

с постоянной β из (3.1).

Здесь и ниже через $A_{t,\rho}$ обозначается множество точек x из K_ρ, для которых $u(x) > t$.

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно рассмотреть (3.1) для функции

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} 0 & u(x) \leqslant k, \\ u(x) - k, & k \leqslant u(x) \leqslant l, \\ l - k, & u(x) \geqslant l, \end{cases}$$

взяв в качестве E множество $A_{l,\rho}$, и учесть, что для $\bar{u}$

$$\int\limits_E |\bar{u}|\, dx = (l-k)\,\mathrm{mes}\, A_{l,\rho},$$

$$\int\limits_{K_\rho} |\nabla \bar{u}|\, dx = \int\limits_{A_{k,\rho} \setminus A_{l,\rho}} |\nabla u|\, dx, \qquad E_0 = K_\rho \setminus A_{k,\rho}.$$

Другим следствием (3.1) является неравенство

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} (u-k)^m\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \beta_m \left[\frac{\rho^n}{\mathrm{mes}\,(K_\rho \setminus A_{k,\rho})}\right]^m \mathrm{mes}^{m/n} A_{k,\rho} \int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^m\, dx, \qquad (3.5)$$
$$\beta_m = m^m \beta^m, \quad m \geqslant 1,$$

справедливое для произвольных функций $u(x)$ из $W_m^1(K_\rho)$ и любых значений k. Оно получается, если применить (3.1) к функции $v(x) = [\max\{u(x) - k,\ 0\}]^m$ и множеству $E = A_{k,\rho}$ и при $m > 1$ воспользоваться еще неравенством Гёльдера для оценки интеграла

$$\int\limits_{K_\rho} |\nabla v|\,dx = \int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla (u-k)^m|\,dx = \int\limits_{A_{k,\rho}} m(u-k)^{m-1}|\nabla u|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant m\left(\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^m\,dx\right)^{\frac{1}{m}}\left[\int\limits_{A_{k,\rho}} (u-k)^m\,dx\right]^{1-\frac{1}{m}}.$$

Замечание 3.3. Вместо шара K_ρ в лемме 3.9 и ее следствиях можно рассматривать области более общего вида. Например, нетрудно убедиться, проследив доказательство леммы 3.8, что в неравенствах (3.1), (3.4) и (3.5) можно шар K_ρ заменить произвольной выпуклой областью Ω диаметра 2ρ.

Для выпуклых областей Ω_ρ нам потребуется также неравенство

$$\|u^{(k)}\|_{p,\,\Omega_\rho} \leqslant c\,\mathrm{mes}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\bar m}} A_{k,\rho}\,\|\nabla u^{(k)}\|_{m,\,\Omega_\rho}, \tag{3.6}$$

$$c = c_0\rho^n(\mathrm{mes}\,\Omega_\rho \setminus A_{k,\rho})^{-1}, \quad \bar m = nm/(n-m),$$

аналогичное (2.12), но отличающееся тем, что в нем функция $u^{(k)}$, вообще говоря, не принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega_\rho)$. В (3.6) p — любое из $[1, \bar m]$ при $m<n$ и любое из $[1, \infty)$ при $m=n$, а постоянная c_0 определяется величинами n, m, p и областью Ω_ρ.

При $p \in [1, m]$ оценка (3.6) непосредственно следует из неравенства (3.5) для Ω_ρ и неравенства Гёльдера. При $p>m$ надо воспользоваться еще неравенством (2.18):

$$\|u^{(k)}\|_{p,\,\Omega_\rho} \leqslant c\left(\|\nabla u^{(k)}\|_{m,\,\Omega_\rho} + \mathrm{mes}^{-1/n}\Omega_\rho\,\|u^{(k)}\|_{m,\,\Omega_\rho}\right)^\alpha \|u^{(k)}\|^{1-\alpha}_{m,\,\Omega_\rho},$$

в котором постоянная c зависит от области Ω_ρ, но не меняется при преобразовании подобия области.

§ 4. Некоторые другие вспомогательные предложения

Докажем теперь один из давно известных признаков гёльдеровости функций, установленный Ч. Морри (см. [$39_{1,2}$]).

Лемма 4.1. *Пусть $u(x) \in W^1_m(\Omega)$, и пусть для любого шара $K_\rho \subset \Omega$*

$$\int\limits_{K_\rho} |\nabla u|^m\,dx \leqslant c\rho^{n-m+m\alpha}, \qquad 1 \geqslant \alpha > 0, \quad 1 \leqslant m \leqslant n. \tag{4.1}$$

Тогда для любого шара $K_{\rho/2}$, принадлежащего Ω вместе с концентрическим шаром $K_{3\rho/2}$,

$$\mathrm{osc}\,\{u(x),\ K_{\rho/2}\} \leqslant c_1\rho^\alpha$$

и

$$\operatorname{vrai}\max_{K_{\rho/2}} |u(x)| \leqslant \frac{1}{\operatorname{mes} K_{\rho/2}} \int_{K_{\rho/2}} |u(x')|\,dx' + c_1\rho^\alpha,$$

причем c_1 *определяется лишь постоянными* n, c, m *и* α.

Утверждение леммы, как нетрудно понять, достаточно доказать лишь для гладких функций. Для любой u из $W_m^1(\Omega)$ оно получится с помощью предельного перехода от гладких функций к $u(x)$. Итак, пусть $u(x)$ — гладкая функция. Возьмем две внутренние точки x и x', отстоящие друг от друга на расстояние ρ и отстоящие от границы S на расстояния не меньше ρ. Обозначим через

$$K = K(x, \rho), \quad K' = K(x', \rho) \quad \text{и} \quad K'' = K((x + x')/2, \rho/2)$$

шары с центрами в точках x, x' и $(x + x')/2$ и радиусами ρ, ρ и $\rho/2$. Очевидно, что при любой точке $y \in K''$ справедливо неравенство

$$|u(x) - u(x')| \leqslant |u(x) - u(y)| + |u(y) - u(x')| \leqslant$$
$$\leqslant \int_x^y \left|\frac{\partial u}{\partial l}\right| dl + \int_{x'}^y \left|\frac{\partial u}{\partial l}\right| dl,$$

где интегрирование и дифференцирование u в правой части проведено вдоль отрезков, соединяющих конечные точки x, y и x', y. Проинтегрируем обе части неравенства по $y \in K''$:

$$\varkappa_n \left(\frac{\rho}{2}\right)^n |u(x) - u(x')| \leqslant \int_{K''} dy \int_x^y \left|\frac{\partial u}{\partial l}\right| dl + \int_{K''} dy \int_{x'}^y \left|\frac{\partial u}{\partial l}\right| dl \leqslant$$
$$\leqslant \int_{|x-y| \leqslant \rho} dy \int_x^y |\nabla u|\,dl + \int_{|x'-y| \leqslant \rho} dy \int_{x'}^y |\nabla u|\,dl \equiv j_1 + j_2. \qquad (4.2)$$

Здесь $\varkappa_n$ — объем шара единичного радиуса.

Оба интеграла j_k, $k = 1, 2$, оценим одинаково. Именно, вводя сферические координаты r, ω с центром в точке x, интеграл j_1 запишем в виде

$$j_1 = \int_{r \leqslant \rho} \int_{|\omega|=1} r^{n-1}\,dr\,d\omega \int_0^r |\nabla u(x + l\omega)|\,dl =$$
$$= \int_{r \leqslant \rho} r^{n-1}\,dr \int_{l \leqslant r} \int_{|\omega|=1} |\nabla u(x + l\omega)|\,dl\,d\omega.$$

Функция $\varphi(r)=\int\limits_{l\leqslant r}\int\limits_{|\omega|=1}|\nabla u|\,l^{n-1}dl\,d\omega$ абсолютно непрерывна по r; ее производная $\varphi'(r)$ почти всюду совпадает с $r^{n-1}\int\limits_{|\omega|=1}|\nabla u(x+r\omega)|\,d\omega$, и для $\varphi(r)$ верна оценка

$$\varphi(r)=\int\limits_{K_r}|\nabla u|\,dy\leqslant\Bigl(\int\limits_{K_r}|\nabla u|^m\,dy\Bigr)^{\frac{1}{m}}(\varkappa_n r^n)^{1-\frac{1}{m}}\leqslant c_2 r^{n-1+\alpha},$$

где $c_2=c^{1/m}\varkappa_n^{(m-1)/m}$.

Ввиду этого

$$\int\limits_{l\leqslant r}\int\limits_{|\omega|=1}|\nabla u(x+l\omega)|\,dl\,d\omega=\int\limits_0^r\frac{\varphi'(l)}{l^{n-1}}dl=$$

$$=\int\limits_0^r\varphi(l)(n-1)\,l^{-n}dl+\frac{\varphi(l)}{l^{n-1}}\Big|_{l=0}^{l=r}\leqslant c_3 r^\alpha,$$

где $c_3=c_2\Bigl(1+\dfrac{n-1}{\alpha}\Bigr)$, и потому

$$j_1\leqslant c_3\rho^{n+\alpha}/(n+\alpha).$$

Аналогично оценивается j_2, и потому из (4.2) следует, что $|u(x)-u(x')|\leqslant c_1\rho^\alpha$, где $\rho=|x-x'|$, а $c_1=\dfrac{2^{n+1}c_3}{\varkappa_n(n+\alpha)}$. Отсюда имеем $|u(x)|\leqslant|u(x')|+c_1\rho^\alpha$ для $\forall x,\ x'\in K_{\rho/2}$. Усредняя это неравенство по $x'\in K_{\rho/2}$, придем ко второму утверждению леммы 4.1.

Нетрудно понять, что этот же метод доказательства гёльдеровости $u(x)$ внутри Ω может быть использован и для доказательства гёльдеровости функции $u(x)$ в замкнутой области, если только граница области Ω обладает некоторой регулярностью. Достаточные для этого свойства границы можно сформулировать, исходя из изложенного приема оценки $|u(x)-u(x')|$ через $|x-x'|^\alpha$. Мы этого здесь описывать не будем, а приведем лишь один частный случай, который будет использован в дальнейшем.

Лемма 4.2. *Предположим, что граница S имеет плоский кусок S_1. Пусть выполнены условия леммы* 4.1, *и пусть, кроме того, для шаров K_ρ, пересекающихся с границей в части S_1,*

$$\int\limits_{K_\rho\cap\Omega}|\nabla u|^m\,dx\leqslant c\rho^{n-m+m\alpha},\qquad 1\geqslant\alpha>0,\quad 1\leqslant m\leqslant n.$$

Тогда $u(x)$ ограничена и удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α в $\Omega\cup S_1$; точнее, если шар $K_{\rho/2}$ с центром в $\Omega\cup S_1$

и концентрический ему шар $K_{3\rho/2}$ *не имеют общих точек с* $S \setminus S_1$, *то*

$$\operatorname{osc}\{u(x);\ K_{\rho/2}\cap\Omega\} \leqslant c_1\rho^{\alpha}$$

и

$$\operatorname*{vrai\,max}_{K_{\rho/2}\cap\Omega} |u(x)| \leqslant (\operatorname{mes} K_{\rho/2}\cap\Omega)^{-1} \int\limits_{K_{\rho/2}\cap\Omega} |u(x')|\,dx' + c_1\rho^{\alpha}.$$

Постоянная c_1 *зависит лишь от* n, c, m *и* α.

Замечание к леммам 4.1 и 4.2. Условие относительно интеграла от $|\nabla u|$ в них можно заменить предположением, что $\int\limits_{K_\rho\cap\Omega} |x-x^0|^{-\alpha m}|\nabla u|^m\,dx \leqslant c\rho^{n-m}$, где $\alpha>0$, а x^0 — центр K_ρ.

Полезно следующее предложение (см. [39_2]):

Лемма 4.3. *Если для любого шара* $K_\rho\subset\Omega$ *и неотрицательной функции* $v(x)$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{K_\rho} v(x)\,dx \leqslant c\rho^{m+\alpha}, \qquad m\geqslant 0,\quad \alpha>0,\quad m+\alpha\leqslant n, \tag{4.3}$$

то для любого шара K_ρ, *отстоящего от границы* S *на расстояние, не меньшее* 2ρ, *и любой точки* $y\in K_\rho$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{K_\rho} |x-y|^{-m-\frac{\alpha}{2}} v(x)\,dx \leqslant c_1\rho^{\frac{\alpha}{2}}, \tag{4.4}$$

причем c_1 *определяется лишь* n, c, m *и* α.

Заметим, что из (4.4) очевидным образом следует (4.3), надо лишь точку y поместить в центр шара K_ρ и $|x-y|^{-m-\frac{\alpha}{2}}$ заменить меньшей величиной $\rho^{-m-\frac{\alpha}{2}}$.

Для доказательства утверждения леммы введем сферические координаты $|x-y|=r$, $\frac{x-y}{|x-y|}=\omega$ с началом в точке y и рассмотрим функцию

$$\varphi(\rho) = \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} v(x)\,dx = \int\limits_0^{\rho}\int\limits_{|\omega|=1} v r^{n-1}\,d\omega\,dr,$$

абсолютно непрерывную по ρ. Для почти всех ρ

$$\varphi'(\rho) = \rho^{n-1}\int\limits_{|\omega|=1} v(y+\rho\omega)\,d\omega.$$

С другой стороны, для шара $K_\rho = K_\rho(x^0)$, указанного в лемме 4.3, и x, $y \in K_\rho$ имеем

$$\int\limits_{|x-x_0|\leqslant\rho} |x-y|^{-m-\frac{\alpha}{2}} v(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|x-y|\leqslant 2\rho} r^{-m-\frac{\alpha}{2}+n-1} v(y+r\omega)\,d\omega\,dr = \int\limits_0^{2\rho} r^{-m-\frac{\alpha}{2}} \varphi'(r)\,dr.$$

Интегрируя справа по частям и используя оценку (4.3), получим

$$\int\limits_{|x-x_0|\leqslant\rho} |x-y|^{-m-\frac{\alpha}{2}} v(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{2\rho} \left(m+\frac{\alpha}{2}\right) r^{-m-\frac{\alpha}{2}-1} \varphi(r)\,dr + r^{-m-\frac{\alpha}{2}} \varphi(r)\Big|_{r=0}^{r=2\rho} \leqslant$$

$$\leqslant c\left[\left(m+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{2}{\alpha}+1\right](2\rho)^{\frac{\alpha}{2}} \equiv c_1\rho^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Лемма доказана. Из нее легко выводится

Следствие 4.1. Если в лемме 4.3 неравенства (4.3) с K_ρ, замененным на $\Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega$, выполняются и для шаров K_ρ, $\rho \leqslant a$, пересекающихся с границей S области Ω, то для любой Ω_ρ и произвольной точки y из Ω_ρ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\rho} |x-y|^{-m-\frac{\alpha}{2}} v(x)\,dx \leqslant c_1\rho^{\frac{\alpha}{2}}$$

с постоянной c_1, зависящей лишь от n, c, m, a и α.

Действительно, продолжая $v(x)$ нулем на более широкую область $\Omega_1 \supset \Omega$ и применяя к продолженной функции в области Ω_1 лемму 4.3, убеждаемся в справедливости высказанного утверждения.

При доказательстве теоремы единственности «в малом» для обобщенных решений вариационных задач и эллиптических уравнений с дивергентной главной частью нам потребуется следующее предложение (см. [21_{15}]; при $m=2$ оно доказано в [39_2]):

Лемма 4.4. *Пусть в какой-либо области R_ρ диаметра 2ρ задана функция $u(x) \geqslant 0$, подчиняющаяся при всех $y \in R_\rho$ неравенству*

$$\int\limits_{R_\rho} |x-y|^{-n+m-\frac{\alpha}{2}} u^m\,dx \leqslant c\rho^{\frac{\alpha}{2}}, \qquad 1 \geqslant \alpha > 0, \quad 1 \leqslant m \leqslant 2.$$

Тогда при любой функции $\xi(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_n(R_\rho)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{R_\rho} u^m(x)\,\xi^2(x)\,dx \leqslant c_1\rho^{2\alpha/m} \int\limits_{R_\rho} u^{m-2}(x)\,|\nabla\xi|^2\,dx,$$

в котором постоянная c_1 зависит от c, n, α и m *).

Пусть $n>2$. Для любой функции $\xi(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(R_\rho)$ справедливо представление

$$\xi(x)=\frac{1}{\tau_n}\int\limits_{R_\rho}\frac{\partial\xi(y)}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy,\quad \tau_n=(n-2)\,n\varkappa_n. \tag{4.5}$$

Это тождество, имеющее смысл при почти всех x из R_ρ, легко выводится из хорошо известного свойства ньютонова потенциала:

$$\Delta\int\frac{\xi(y)\,dy}{\tau_n\,|x-y|^{n-2}}=-\,\xi(x), \tag{4.6}$$

плотность которого $\xi(y)$, например, принадлежит $C^1(R_\rho)$.

Пусть сначала $\xi(y)$ есть непрерывно дифференцируемая, финитная в R_ρ функция. Для нее представление (4.6) преобразуем в представление (4.5) просто с помощью интегрирования по частям, если учтем, что $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{1}{|x-y|^{n-2}}=-\dfrac{\partial}{\partial y_i}\dfrac{1}{|x-y|^{n-2}}$ и что при интегрировании по частям все контурные интегралы пропадут из-за финитности $\xi(y)$. Для любой функции $\xi(y)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(R_\rho)$ возьмем последовательность финитных в R_ρ функций $\xi_p(y)$ из $C^1(R_\rho)$, сходящихся к $\xi(y)$ почти всюду и в норме $W^1_m(R_\rho)$, и перейдем к пределу по $p\to\infty$ в тождестве (4.5), написанном для $\xi_p(y)$. В результате этого убедимся, что (4.5) верно почти всюду для любой функции $\xi(y)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(R_\rho)$.

Из (4.5) имеем

$$|\xi(x)|\leqslant\frac{n-2}{\tau_n}\int\limits_{R_\rho}\frac{|\nabla\xi(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy,$$

откуда

$$\int\limits_{R_\rho}u^m(x)\,\xi^2(x)\,dx\leqslant\left(\frac{n-2}{\tau_n}\right)^2\int\limits_{R_\rho}u^m(x)\left(\int\limits_{R_\rho}\frac{|\nabla\xi(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy\right)^2dx\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n-2}{\tau_n}\right)^2\int\limits_{R_\rho}u^m(x)\int\limits_{R_\rho}\frac{|\nabla\xi(y)|^2\,dy}{u^{2-m}(y)\,|x-y|^{n-m+\frac{\alpha}{2}}}\int\limits_{R_\rho}\frac{u^{2-m}(y)\,dy}{|x-y|^{n+m-2-\frac{\alpha}{2}}}\,dx.$$

---

*) Утверждение леммы содержательно, если интеграл $\int\limits_{R_\rho}u^{m-2}|\nabla\xi|^2\,dx<\infty$.

Последний множитель при $1<m<2$ оценим, используя неравенство Гёльдера и условие леммы, так:

$$\int\limits_{R_\rho} \frac{u^{2-m}(y)\,dy}{|x-y|^{n+m-2-\frac{\alpha}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{R_\rho} \frac{u^m(y)\,dy}{|x-y|^{n-m+\frac{\alpha}{2}}} \right)^{\frac{2-m}{m}} \left(\int\limits_{R_\rho} \frac{dy}{|x-y|^{n-\frac{\alpha}{2m-2}}} \right)^{\frac{2m-2}{m}} \leqslant c_2 \rho^{\frac{2\alpha}{m}-\frac{\alpha}{2}}.$$

При $m=1$ или $m=2$ эта оценка интеграла видна непосредственно. Поэтому

$$\int\limits_{R_\rho} u^m(x)\,\xi^2(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_2\left(\frac{n-2}{\tau_n}\right)^2 \rho^{\frac{2\alpha}{m}-\frac{\alpha}{2}} \int\limits_{R_\rho} u^m(x) \int\limits_{R_\rho} \frac{|\nabla\xi(y)|^2 u^{m-2}(y)\,dy}{|x-y|^{n-m+\frac{\alpha}{2}}}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_2\left(\frac{n-2}{\tau_n}\right)^2 \rho^{\frac{2\alpha}{m}-\frac{\alpha}{2}} \int\limits_{R_\rho} |\nabla\xi(y)|^2 u^{m-2}(y)\,dy \left(\int\limits_{R_\rho} \frac{u^m(x)\,dx}{|x-y|^{n-m+\frac{\alpha}{2}}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant cc_2\left(\frac{n-2}{\tau_n}\right)^2 \rho^{\frac{2\alpha}{m}} \int\limits_{R_\rho} u^{m-2}|\nabla\xi(y)|^2\,dy.$$

Случай $n=2$ рассматривается аналогично.

В ряде мест мы используем следующее предложение:

Лемма 4.5. *Пусть непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $u(x)$ принадлежит $W_m^1(\Omega) \cap W_1^2(\Omega)$, $m \geqslant 1$, и имеет конечный интеграл $\int\limits_\Omega (1+|\nabla u|)^{m-2} u_{xx}^2 \xi^2\,dx$, где $\xi(x)$ — какая-либо гладкая в $\overline{\Omega}$ функция, и пусть произведение $u(x)\,\xi(x)$ обращается в нуль на границе S области Ω. Тогда интеграл $\int\limits_\Omega (1+|\nabla u|)^{m+2}\xi^2\,dx$ конечен и*

$$\int\limits_\Omega (1+|\nabla u|)^m |\nabla u|^2 \xi^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 8\,\mathrm{osc}^2(u;\,\Omega) \int\limits_\Omega \{[(m+2)^2+n+2](1+|\nabla u|)^{m-2} u_{xx}^2\xi^2 +$$

$$+ 2(1+|\nabla u|)^m |\nabla\xi|^2\}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (1+|\nabla u|)^m \xi^2\,dx. \quad (4.7)$$

Для доказательства рассмотрим интеграл

$$J_N = \int_\Omega [1+b(x)]^{m+2} u_{x_i} [u(x) - u(x_0)]_{x_i} (1+|\nabla u(x)|)^{-2} \xi^2(x)\,dx,$$

где $x_0 \in S$ и выбирается так, чтобы $[u(x)-u(x_0)]\,\xi(x)|_{x\in S}=0$, $b(x)=\min\{|\nabla u(x)|, N\}$, N — положительное число, которое мы устремим впоследствии к $+\infty$. Преобразуем J_N, перенося производную $\frac{\partial}{\partial x_i}$ с $u(x)-u(x_0)$ на остальные множители. Это даст

$$J_N = -\int_\Omega [u(x)-u(x_0)] \Big[(m+2)(1+b)^{m+1} b_{x_i} u_{x_i} (1+|\nabla u|)^{-2}\xi^2 + (1+b)^{m+2}\Delta u (1+|\nabla u|)^{-2}\xi^2 - 2(1+b)^{m+2} u_{x_i}(1+|\nabla u|)^{-3}\frac{u_{x_k}}{|\nabla u|} u_{x_k x_i}\xi^2 + 2(1+b)^{m+2} u_{x_i}(1+|\nabla u|)^{-2}\xi\xi_{x_i}\Big]dx,$$

при этом произведение $u_{x_i}u_{x_k}u_{x_k x_i}|\nabla u|^{-1}$ в точках, где $|\nabla u|=0$, считаем равным нулю. Правую часть оценим сверху, заменяя $|u(x)-u(x_0)|$ на $\operatorname{osc}\{u;\Omega\}$ и используя неравенство Коши (1.2). Малый множитель ε отдадим членам, подобным $(1+b)^{m+2}\times$ $\times|\nabla u|^2(1+|\nabla u|)^{-2}\xi^2$. Кроме того, учтем, что там, где $|\nabla u|>N$, производные b_{x_i} обращаются в нуль, а при $|\nabla u|\leqslant N$ функции $b(x)$ и $|\nabla u(x)|$ совпадают. Таким образом, получим:

$$J_N \leqslant \operatorname{osc}\{u;\Omega\}\int_\Omega \Big[(m+2)(1+b)^{m+1}|u_{xx}||\nabla u|\times (1+|\nabla u|)^{-2}\xi^2 + (1+b)^{m+2}|u_{xx}|(1+|\nabla u|)^{-2}\xi^2 + 2(1+b)^{m+2}|u_{xx}||\nabla u|(1+|\nabla u|)^{-3}\xi^2 + 2(1+b)^{m+2}|\nabla u|(1+|\nabla u|)^{-2}|\xi||\nabla\xi|\Big]dx \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{osc}\{u;\Omega\}\int_\Omega \Big[\frac{\varepsilon}{2}(1+b)^{m+2}|\nabla u|^2(1+|\nabla u|)^{-2}\xi^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(m+2)^2(1+b)^m u_{xx}^2(1+|\nabla u|)^{-2}\xi^2 + \frac{\varepsilon}{2}(1+b)^{m+2}\xi^2 + \frac{n}{2\varepsilon}u_{xx}^2(1+|\nabla u|)^{-4}(1+b)^{m+2}\xi^2 + \varepsilon(1+b)^{m+2}|\nabla u|^2(1+|\nabla u|)^{-2}\xi^2 + \frac{1}{\varepsilon}(1+b)^{m+2}u_{xx}^2(1+|\nabla u|)^{-4}\xi^2 + \varepsilon(1+b)^{m+2}|\nabla u|^2(1+|\nabla u|)^{-2}\xi^2 + \frac{1}{\varepsilon}(1+b)^{m+2}(1+|\nabla u|)^{-2}|\nabla\xi|^2\Big]dx.$$

Возьмем $\varepsilon=[4\operatorname{osc}\{u;\ \Omega\}]^{-1}$. После приведения подобных членов будем иметь

$$\frac{1}{4}J_N\leqslant 4\operatorname{osc}^2\{u;\ \Omega\}\int\limits_\Omega\Big[(1+b)^m u_{xx}^2(1+|\nabla u|)^{-2}\xi^2\frac{(m+2)^2+n+2}{2}+$$
$$+(1+b)^{m+2}(1+|\nabla u|)^{-2}|\nabla\xi|^2\Big]dx+\frac{1}{8}\int\limits_\Omega(1+b)^{m+2}(1+|\nabla u|)^{-2}\xi^2\,dx.$$

Устремляя в этом неравенстве N к $+\infty$, получим (4.7). Лемма доказана.

Замечание 4.1. Условие непрерывности $u(x)$ в лемме 4.5 можно отбросить, заменив его ограниченностью $u(x)$. В неравенстве (4.7) при этом надо считать

$$\operatorname{osc}\{u,\ \Omega\}=\operatorname{vrai}\max_\Omega u(x)-\operatorname{vrai}\max_\Omega u(x).$$

В ряде параграфов при исследовании дифференциальных свойств обобщенных решений мы будем использовать приемы, характерные для метода конечных разностей. Так, для функций класса $L_m(\Omega)$ мы будем рассматривать разностные отношения $u_{(i)}(x,\ h)=[u(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i+h,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n)-u(x)]\,h^{-1}\equiv$ $\equiv[u(x+he_i)-u(x)]\,h^{-1}$. Они определены почти всюду в $\forall\overline{\Omega}'$, содержащейся в Ω вместе со сдвигом на h в направлении оси x_i. Имеет место

Лемма 4.6. *Если $u(x),\ u_{x_i}(x)\in L_m(\Omega)$, то*

$$\|u_{(i)}(x,\ h_k)-u_{x_i}(x)\|_{m,\ \Omega'}\to 0,\qquad i=1,\ \ldots,\ n,$$

для любой последовательности $\{h_k\}$, сходящейся к нулю, и любой $\overline{\Omega}'\subset\Omega$. Для некоторой подпоследовательности $\{h_{k_j}\}$ функции $u_{(i)}(x,\ h_{k_j})$ сходятся к u_{x_i} почти всюду в Ω.

Если $u(x)\in L_m(\Omega)$ и если для некоторой последовательности $h_k\to 0$ равномерно ограничены интегралы

$$\int\limits_{\Omega'}|u_{(i)}(x,\ h_k)|^m\,dx\leqslant M,\qquad \overline{\Omega}'\subset\Omega,$$

то функция $u(x)$ имеет в Ω' обобщенную производную $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ и

$$\int\limits_{\Omega'}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^m dx\leqslant M.$$

Чтобы убедиться в сильной сходимости в $L_m(\Omega')$ разностных отношений $u_{(i)}(x,\ h_k)$ к $u_{x_i}(x)$ при $h_k\to 0$, заметим, что для всех достаточно малых сдвигов h_k в направлении оси x_l и почти всех $x \in \Omega'$ верно соотношение

$$u_{(l)}(x, h_k) - u_{x_l}(x) = \frac{1}{h_k}\int_0^1 \frac{du}{d\tau}(x + \tau h_k e_l)\, d\tau - u_{x_l}(x) =$$
$$= \int_0^1 \left[u_{x_l}(x + \tau h_k e_l) - u_{x_l}(x)\right] d\tau,$$

и потому

$$\left\| u_{(l)}(x, h_k) - u_{x_l}(x) \right\|_{m,\Omega'} \leqslant \int_0^1 \left\| u_{x_l}(x + \tau h_k e_l) - u_{x_l}(x) \right\|_{m,\Omega'} d\tau.$$

Но правая часть в этом неравенстве стремится к нулю при $h_k \to 0$ в силу непрерывности $u_{x_l}(x)$ в норме $L_m(\Omega')$, и, следовательно, $u_{(l)}(x, h_k)$ действительно сходятся к $u_{x_l}(x)$ в норме $L_m(\Omega')$. Отсюда следует возможность выбора подпоследовательности h_{k_j}, $j \to \infty$, для которой $u_{(l)}(x, h_{k_j})$ сходятся к $u_{x_l}(x)$ почти всюду в Ω. Для доказательства последнего утверждения леммы воспользуемся тем, что в силу равномерной ограниченности норм $\| u_{(l)}(x, h_k) \|_{m,\Omega'}$ из $\{h_k\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{h_{k_j}\}$, $j \to \infty$, для которой $u_{(l)}(x, h_{k_j})$ слабо сходятся в $L_m(\Omega')$ к некоторой функции $w(x)$, причем $\int_{\Omega'} |w|^m dx \leqslant M$. В том, что $w(x)$ есть обобщенная производная $\frac{\partial u}{\partial x_l}$, убеждаемся, переходя к пределу по $h_{k_j} \to 0$ в тождестве

$$\int_{\Omega'} u(x)\, v_{(l)}(x, h_{k_j})\, dx =$$
$$= -\int_{\Omega'} u_{(l)}(x, h_{k_j})\, v(x_1, \ldots, x_l + h_{k_j}, \ldots, x_n)\, dx, \tag{4.8}$$

верном при любой гладкой, финитной в Ω' функции $v(x)$ и всех достаточно малых h_{k_j}.

Итак, мы доказали существование производной $\frac{\partial u}{\partial x_l}$ и ее принадлежность к $L_m(\Omega')$. Отсюда и из первой части леммы следует, что вся последовательность $u_{(l)}(x, h_k)$ сходится к $\frac{\partial u}{\partial x_l}$ сильно в $L_m(\Omega'')$, $\forall \overline{\Omega}'' \subset \Omega'$. Лемма доказана.

Формула (4.8) будет использована нами и в дальнейшем. Ее естественно назвать «формулой суммирования по частям».

Выделим в виде отдельной леммы следующее известное предложение:

Лемма 4.7. *Пусть последовательность* y_l, $l=0, 1, 2, \ldots$, *неотрицательных чисел удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$y_{l+1} \leqslant cb^l y_l^{1+\varepsilon}, \qquad l=0, 1, \ldots, \tag{4.9}$$

с какими-либо положительными постоянными c, ε *и* $b>1$. *Тогда*

$$y_l \leqslant c^{\frac{(1+\varepsilon)^l-1}{\varepsilon}} b^{\frac{(1+\varepsilon)^l-1}{\varepsilon^2}-\frac{l}{\varepsilon}} y_0^{(1+\varepsilon)^l}. \tag{4.10}$$

В частности, если $y_0 \leqslant \theta = c^{-1/\varepsilon} b^{-1/\varepsilon^2}$, *то*

$$y_l \leqslant \theta b^{-l/\varepsilon}, \tag{4.11}$$

и, следовательно, $y_l \to 0$ *при* $l \to \infty$.

Для доказательства заметим, что если (4.10) выполнено для какого-либо значения $l \geqslant 0$, то оно будет верным и для значения $l+1$, так как

$$y_{l+1} \leqslant cb^l \left[c^{\frac{(1+\varepsilon)^l-1}{\varepsilon}} b^{\frac{(1+\varepsilon)^l-1}{\varepsilon^2}-\frac{l}{\varepsilon}} y_0^{(1+\varepsilon)^l} \right]^{1+\varepsilon} =$$
$$= c^{\frac{(1+\varepsilon)^{l+1}-1}{\varepsilon}} b^{\frac{(1+\varepsilon)^{l+1}-1}{\varepsilon^2}-\frac{l+1}{\varepsilon}} y_0^{(1+\varepsilon)^{l+1}}.$$

Очевидно также, что (4.10) выполняется при $l=0$. Отсюда заключаем, что оценка (4.10) справедлива при любом $l=0$, 1, 2, ...

При доказательстве непрерывности функций по Гёльдеру весьма полезно следующее предложение:

Лемма 4.8. *Пусть функция* $u(x)$ *измерима и ограничена в некотором шаре* K_{ρ_0} *или в его части* $\Omega_{\rho_0} = K_{\rho_0} \cap \Omega$. *Рассмотрим концентрические с* K_{ρ_0} *шары* K_ρ *и* $K_{b\rho}$, *где* $b>1$ — *фиксированная постоянная, и пусть при любом* $\rho \leqslant b^{-1}\rho_0$ *для* $u(x)$ *выполняется по крайней мере одно из соотношений*

$$\operatorname{osc}\{u;\ \Omega_\rho\} \leqslant c_1 \rho^\varepsilon \tag{4.12}$$

или

$$\operatorname{osc}\{u;\ \Omega_\rho\} \leqslant \vartheta \operatorname{osc}\{u;\ \Omega_{b\rho}\} \tag{4.13}$$

с некоторыми положительными постоянными c_1, $\varepsilon \leqslant 1$ *и* $\vartheta < 1$. *Тогда при* $\rho \leqslant \rho_0$ *справедлива оценка*

$$\operatorname{osc}\{u;\ \Omega_\rho\} \leqslant c\rho_0^{-\alpha}\rho^\alpha, \tag{4.14}$$

где

$$\alpha = \min\{\varepsilon,\ -\lg_b \vartheta\}, \quad c = b^\alpha \max\{c_1\rho_0^\varepsilon;\ \omega_0\},$$

а

$$\omega_0 = \operatorname{osc}\{u;\ \Omega_{\rho_0}\}.$$

Доказательство. Будем ради простоты говорить о шарах K_ρ, а не об областях Ω_ρ (это для доказательства несущественно). Возьмем последовательность концентрических с K_{ρ_0} шаров K_{ρ_k}, $\rho_k = b^{-k}\rho_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и обозначим через ω_k колебание $u(x)$ в K_{ρ_k}. Из условий леммы следует, что

$$\omega_k \leqslant \max\{c_1\rho_k^\varepsilon;\ \vartheta\omega_{k-1}\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.15}$$

и

$$\omega_0 \leqslant cb^{-\alpha}.$$

Отсюда для $y_k = b^{k\alpha}\omega_k$ при $k = 1, 2, \ldots$ имеем оценки

$$y_k \leqslant \max\{b^{k\alpha}c_1\rho_k^\varepsilon;\ b^{k\alpha}\vartheta\omega_{k-1}\} =$$
$$= \max\{c_1 b^{k(\alpha-\varepsilon)}\rho_0^\varepsilon;\ b^\alpha\vartheta y_{k-1}\} \leqslant \max\{cb^{-\alpha};\ y_{k-1}\} \tag{4.16}$$

и, кроме того,

$$y_0 = \omega_0 \leqslant cb^{-\alpha}. \tag{4.17}$$

Из (4.16) и (4.17) заключаем, что при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ верна оценка $y_k \leqslant cb^{-\alpha}$, т. е.

$$\omega_k \leqslant cb^{-\alpha}b^{-k\alpha} = cb^{-\alpha}\left(\frac{\rho_k}{\rho_0}\right)^\alpha. \tag{4.18}$$

Рассмотрим теперь произвольный концентрический с K_{ρ_0} шар K_ρ радиуса $\rho \leqslant \rho_0$. Тогда для некоторого $k \geqslant 1$ имеем $\rho_k \leqslant \rho \leqslant \rho_{k-1}$, и поэтому

$$\operatorname{osc}\{u;\ K_\rho\} \leqslant \operatorname{osc}\{u;\ K_{\rho_{k-1}}\} \leqslant cb^{-\alpha}\rho_0^{-\alpha}\rho_{k-1}^\alpha = c\rho_0^{-\alpha}\rho_k^\alpha \leqslant c\rho_0^{-\alpha}\rho^\alpha,$$

т. е. утверждение леммы доказано.

При получении оценок норм Гёльдера для вектор-функций мы будем использовать более общее предложение:

Лемма 4.9. *Предположим, что в Ω_{ρ_0} задана вектор-функция $\mathbf{u}(x) = (u^1(x), \ldots, u^N(x))$ и N_1 функций $w^1(x), \ldots, w^{N_1}(x)$, обладающих следующими свойствами: для любого концентрического с K_{ρ_0} шара $K_{b\rho}$, $b > 1$, $b\rho \leqslant \rho_0$, найдется функция $w^r(x)$ такая, что*

$$\operatorname{osc}\{w^r;\ \Omega_{b\rho}\} \geqslant \delta_1 \max_{l=1,\ldots,N} \operatorname{osc}\{u^l,\ \Omega_{b\rho}\}, \tag{4.19}$$

и имеет место хотя бы одно из неравенств

$$\operatorname{osc}\{w^r;\ \Omega_\rho\} \leqslant c_1\rho^\varepsilon \tag{4.20}$$

или

$$\operatorname{osc}\{w^r;\ \Omega_\rho\} \leqslant \vartheta \operatorname{osc}\{w^r;\ \Omega_{b\rho}\}. \tag{4.21}$$

Здесь b, δ_1, c_1, ε *и* ϑ — *фиксированные положительные постоянные, причем* $\vartheta < 1$, K_ρ — *шар, концентрический с* K_{ρ_0}, *а* $\Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega$.

Тогда при любом $\rho \leqslant \rho_0$ *верны оценки*

$$\operatorname{osc}\{u^i;\ \Omega_\rho\} \leqslant c\rho_0^{-\alpha}\rho^\alpha, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{4.22}$$

где

а

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{N_1}\min\{\varepsilon;\ -\lg_b \vartheta\}, \\ c &= \frac{b^{\alpha(N_1+1)}}{\delta_1}\max\left\{c_1\rho_0^\varepsilon;\ \omega_0 b^{\alpha N_1}\right\}, \\ \omega_0 &= \max_{l=1, \ldots, N_1} \operatorname{osc}\{w^l;\ \Omega_{\rho_0}\}. \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

Доказательство. Так же, как и в предыдущей лемме, возьмем последовательность концентрических шаров K_{ρ_k}, $\rho_k = b^{-k}\rho_0$, $k = 0, 1, \ldots$ Для каждого K_{ρ_k} имеется свой номер r_k такой, что для w^{r_k} выполняются следующие соотношения:

$$\operatorname{osc}\{w^{r_k};\ \Omega_{\rho_k}\} \geqslant \delta_1 \max_{i=1, \ldots, N} \operatorname{osc}\{u^i;\ \Omega_{\rho_k}\} \tag{4.24}$$

и

$$\operatorname{osc}\left\{w^{r_k};\ \Omega_{\rho_{k+1}}\right\} \leqslant \max\left\{c_1\rho_{k+1}^\varepsilon;\ \vartheta \operatorname{osc}\left\{w^{r_k};\ \Omega_{\rho_k}\right\}\right\}. \tag{4.25}$$

Возьмем шары K_{ρ_0}, K_{ρ_1}, $\ldots$, $K_{\rho_{N_2}}$, где N_2 — произвольное фиксированное число, не меньшее $2N_1$. Среди соответствующих им чисел r_0, r_1, $\ldots$, r_{N_2-1} найдется не менее $[N_2/N_1]$, совпадающих с каким-либо значением l из $(1, 2, \ldots, N_1)$. Пусть это будут числа $r_{p_1} = \ldots = r_{p_m} = l$, $m \geqslant \left[\frac{N_2}{N_1}\right]$. Рассмотрим w^{r_k} и K_{ρ_k} только с $k = p_j$, $j = 1, \ldots, m$. Обозначим

$$\omega_j = \operatorname{osc}\left\{w^l;\ \Omega_{\rho_{p_j}}\right\}.$$

В силу (4.25)

$$\omega_{j+1} \leqslant \operatorname{osc}\left\{w^l;\ \Omega_{\rho_{p_j+1}}\right\} \leqslant \max\left\{c_1\rho_{p_j+1}^\varepsilon;\ \vartheta\omega_j\right\}, \qquad j = 1, \ldots, m-1. \tag{4.26}$$

Умножая обе части (4.26) на $b^{\alpha N_1(j+1)}$ и обозначая $y_j = b^{\alpha N_1 j}\omega_j$, получим

$$y_{j+1} \leqslant \max\left\{c_1 b^{\alpha N_1(j+1) - \varepsilon(p_j+1)}\rho_0^\varepsilon;\ \vartheta b^{\alpha N_1} y_j\right\}. \tag{4.27}$$

Выберем α так, чтобы $\vartheta b^{\alpha N_1} \leqslant 1$ и $\alpha N_1(j+1) - \varepsilon(p_j+1) \leqslant (\alpha N_1 - \varepsilon)(j+1) \leqslant 0$. Для этого возьмем $\alpha = \frac{1}{N_1}\min\{\varepsilon;\ -\lg_b\vartheta\}$.

Тогда (4.27) примет вид

$$y_{j+1}\leqslant \max\{c_1\rho_0^{\varepsilon};\ y_j\},\qquad j=1,\ \ldots,\ m-1,$$

и, следовательно,

$$y_j\leqslant \max\{c_1\rho_0^{\varepsilon};\ y_1\}\leqslant \max\{c_1\rho_0^{\varepsilon};\ \omega_0 b^{aN_1}\},$$

а

$$\omega_j\leqslant b^{-aN_1 j}\max\{c_1\rho_0^{\varepsilon};\ \omega_0 b^{aN_1}\}\equiv c_2 b^{-aN_1 j},\qquad j=1,\ \ldots\ m.$$

Отсюда и из (4.24) получим

$$\operatorname{osc}\{u^i;\ \Omega_{\rho_{p_j}}\}\leqslant \frac{\omega_j}{\delta_1}\leqslant \frac{c_2}{\delta_1}b^{-aN_1 j}.$$

Так как $m\geqslant\left[\frac{N_2}{N_1}\right]>\frac{N_2}{N_1}-1$, то из последнего неравенства следует

$$\operatorname{osc}\{u^i;\ \Omega_{\rho_{N_2}}\}\leqslant \frac{c_2}{\delta_1}b^{-aN_1\left[\frac{N_2}{N_1}\right]}\leqslant \frac{c_2}{\delta_1}b^{aN_1}\left(\frac{\rho_{N_2}}{\rho_0}\right)^{a}.$$

Это неравенство справедливо для всех $i=1,\ \ldots,\ N$ и любого $N_2\geqslant 2N_1$. Если взять шар K_ρ с произвольным $\rho<\rho_0/b^{2N_1}$, то ρ будет заключено между $\rho_{k+1}=b^{-k-1}\rho_0$ и $\rho_k=b^{-k}\rho_0$ с некоторым $k\geqslant 2N_1$, и потому

$$\operatorname{osc}\{u^i;\ \Omega_\rho\}\leqslant \operatorname{osc}\{u^i;\ \Omega_{\rho_k}\}\leqslant \frac{c_2}{\delta_1}b^{aN_1}\left(\frac{\rho_k}{\rho_0}\right)^{a}\leqslant \frac{c_2}{\delta_1}b^{a(N_1+1)}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{a}.$$

Если же $\rho\geqslant\rho_0/b^{2N_1}$, то

$$\operatorname{osc}\{u^i;\ \Omega_\rho\}\leqslant \frac{1}{\delta_1}\operatorname{osc}\{w^i;\ \Omega_\rho\}\leqslant \frac{\omega_0}{\delta_1}\leqslant \frac{\omega_0}{\delta_1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}b^{2N_1}\right)^{a}\leqslant \frac{\omega_0}{\delta_1}b^{2N_1 a}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{a}.$$

Таким образом, при любых $\rho\leqslant\rho_0$ будем иметь оценку (4.22).

§ 5. Об оценках $\max|u(x)|$ и некоторых интегральных норм $u(x)$. Класс функций $\mathfrak{A}_m(\Omega_R,\ \gamma,\ l,\ a,\ \varepsilon,\ \hat{k})$

Установим несколько предложений, дающих возможность на основании некоторых интегральных неравенств заключить об ограниченности максимумов модулей, а также тех или иных норм Орлича для функций из $L_1(\Omega)$ и $W_m^1(\Omega)$, $1\leqslant m\leqslant n$ *). Различные варианты предложений такого типа были доказаны в работах [28_1, $\mathbf{11}_1$, $\mathbf{52}_{1,4}$, $21_{12,16,18,20}$ и др.] в связи с оценками

---

*) Для $m>n$ ограниченность $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} u(x)$ и даже $|u|_{\Omega}^{(a)}$ следует из принадлежности $u(x)$ к $W_m^1(\Omega)$ (см. теорему 2.2). Поэтому здесь и ниже в гл. II мы рассматриваем лишь случай $m\leqslant n$.

решений эллиптических и параболических уравнений и вариационных задач.

Лемма 5.1. *Пусть суммируемая в* Ω *функция* $u(x)$ *при любых* $k \geqslant k_0 \geqslant 0$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\int_{A_k} (u-k)\,dx \leqslant \gamma k^{\alpha} \operatorname{mes}^{1+\delta} A_k, \tag{5.1}$$

где $A_k = \{x\colon x \in \Omega,\ u(x) > k\}$, *а* k_0, γ, α *и* δ — *постоянные, причем* $\delta > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1+\delta$. *Тогда* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} u(x)$ *не превосходит некоторой постоянной, зависящей лишь от* γ, α, δ, k_0 *и* $\operatorname{mes}\Omega$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(k) = \int_{A_k} (u(x)-k)\,dx.$$

В силу определения и известных свойств интеграла Лебега

$$f(k) = -\int_k^{\infty} (t-k)\,d\operatorname{mes} A_t = \int_k^{\infty} \operatorname{mes} A_t\,dt$$

и для почти всех k верно равенство $f'(k) = -\operatorname{mes} A_k$. Поэтому (5.1) можно переписать в виде

$$-f'(k) f^{-1/(1+\delta)}(k) \geqslant \gamma^{-1/(1+\delta)} k^{-\alpha/(1+\delta)}, \qquad k \geqslant k_0. \tag{5.2}$$

Интегрируя это неравенство по k от k_0 до $k_{\max} = \operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} u(x)$ и учитывая, что $f(k_0) \leqslant \gamma k_0^{\alpha} \operatorname{mes}^{1+\delta}\Omega$, получаем желаемую оценку

$$k_{\max}^{1-\frac{\alpha}{1+\delta}} \leqslant k_0^{1-\frac{\alpha}{1+\delta}} + \frac{(1+\delta-\alpha)\gamma}{\delta} k_0^{\frac{\alpha\delta}{1+\delta}} \operatorname{mes}^{\delta}\Omega \quad \text{при} \quad \alpha < 1+\delta,$$

$$k_{\max} \leqslant k_0 \exp\left\{\frac{(1+\delta)\gamma}{\delta} k_0^{\delta} \operatorname{mes}^{\delta}\Omega\right\} \quad \text{при} \quad \alpha = 1+\delta.$$

Лемма 5.2. *Пусть в условиях леммы* 5.1 $\delta \in (-1, 0]$ *и* $0 \leqslant \alpha < 1+\delta$. *Тогда для* $u(x)$ *справедливы неравенства*

$$\int_{A_{k_0}} u^q\,dx \leqslant B \quad c \quad \forall q < \frac{-1+\alpha}{\delta} \tag{5.3}$$

при $\delta < 0$ *и*

$$\int_{A_{k_0}} e^{\beta u^{1-\alpha}}\,dx \leqslant B \tag{5.4}$$

с $\forall\beta$ *из* $\left(0, \frac{2^{\alpha-1}(1-2^{\alpha-1})}{\gamma(1-\alpha)}\right)$ *при* $\delta=0$. *Постоянные* B *определяются величинами* γ, α, δ, k_0, $\|u\|_{1, A_{k_0}}$, *а также* q *при* $\delta<0$ *и* β *при* $\delta=0$.

Для доказательства снова проинтегрируем неравенство (5.2). При этом в случае $\delta<0$ получим следующую оценку для функции $f(k)$:

$$-\frac{1}{\delta}f^{\frac{\delta}{1+\delta}}(k)\geqslant(1+\delta-\alpha)^{-1}\gamma^{-\frac{1}{1+\delta}}k^{1-\frac{\alpha}{1+\delta}}\Big|_{k_0}^{k},$$

и, тем самым,

$$f(k)\leqslant ck^{1+\frac{1-\alpha}{\delta}},\quad k\geqslant 2k_0,\quad c=\gamma^{-\frac{1}{\delta}}\left(\frac{\delta}{\alpha-1-\delta}\right)^{\frac{1+\delta}{\delta}}\left(1-2^{-\frac{1+\delta-\alpha}{1+\delta}}\right)^{-\frac{1+\delta}{\delta}}, \tag{5.5}$$

а при $\delta=0$ приходим к оценке

$$f(k)\leqslant f(k_0)\,e^{-c_1k^{1-\alpha}},\quad k\geqslant 2k_0,\quad c_1=\frac{1-2^{\alpha-1}}{\gamma(1-\alpha)}. \tag{5.6}$$

Отсюда, используя очевидное неравенство

$$f\left(\frac{k}{2}\right)\geqslant\int\limits_{A_k}\left(u-\frac{k}{2}\right)dx\geqslant\frac{k}{2}\operatorname{mes}A_k,$$

выводим оценку для меры множеств A_k:

$$\operatorname{mes}A_k\leqslant\begin{cases} c\left(\frac{k}{2}\right)^{(1-\alpha)/\delta}, & \delta<0,\\ 2f(k_0)\,k^{-1}e^{-c_1\left(\frac{k}{2}\right)^{1-\alpha}}, & \delta=0,\end{cases}$$

при произвольном $k\geqslant 4k_0$. Из нее и соотношения

$$\int\limits_{A_{k_0}}\varphi(u(x))\,dx=\int\limits_{k_0}^{\infty}\varphi'(k)\operatorname{mes}A_k\,dk,$$

справедливого для любой непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(u)$, следует суммируемость функций $\varphi(u)=u^q$ с $\forall q<(-1+\alpha)/\delta$ при $\delta<0$ и функций $\varphi(u)=e^{\beta u^{1-\alpha}}$ с $\forall\beta<c_12^{\alpha-1}$ при $\delta=0$, а также оценки (5.3) и (5.4).

Следствие 5.1. Для любой $u(x)$ из $W_n^1(\Omega)$ верны неравенства

$$\int\limits_{\Omega'}e^{\beta|u|}dx\leqslant B \tag{5.6'}$$

при $\forall\bar\Omega'\subset\Omega$ с постоянными $\beta>0$ и B, зависящими лишь от $\|u\|_{n,\Omega}^{(1)}$ и от расстояния Ω' до $\partial\Omega$. Если $\bar\Omega=\sum\limits_{i=1}^{N}\bar\Omega_i$ и Ω_i —

строго липшицевы области, то неравенство (5.6′) верно и для всей области Ω. Постоянные $\beta > 0$ и B определяются $\|u\|^{(1)}_{n,\Omega}$ и областью Ω.

В самом деле, умножим $u(x)$ на срезающую для Ω функцию $\zeta(x)$, равную 1 в Ω'. Ясно, что $\tilde{u} = |u|\zeta$ и $\tilde{u}^{(k)}$ при $k \geqslant 0$ принадлежат $\overset{\circ}{W}{}^1_n(\Omega)$. Применяя к $\tilde{u}^{(k)}$ неравенство (2.12) с $p = 1$, $m = n$, находим

$$\int_{A_k} (\tilde{u} - k)\,dx \leqslant c \operatorname{mes} A_k \|\tilde{u}_x\|_{n,\Omega} \leqslant c_1 \|u\|^{(1)}_{n,\Omega} \operatorname{mes} A_k,$$

где c_1 зависит от расстояния Ω' до $\partial\Omega$, т. е. для $u(x)$ выполнены неравенства (5.1) с $\alpha = 0$, $\delta = 0$, $\gamma = c_1\|u\|^{(1)}_{n,\Omega}$ и $\forall k \geqslant 0$. Лемма 5.2 гарантирует для $\tilde{u}(x)$ оценку $\int_\Omega e^{\beta\tilde{u}}\,dx \leqslant c_2$, а тем самым и желаемую оценку для u в $\overline{\Omega}' \subset \Omega$.

Если Ω — строго липшицева область, то функцию $u(x) \in W^1_n(\Omega)$ можно продолжить на более широкую область $\tilde{\Omega}$ с сохранением класса, причем так, что $\|u\|_{n,\tilde{\Omega}} \leqslant c_2\|u\|_{n,\Omega}$, где c_2 не зависит от u. Отсюда и из доказанного только что следствия 5.1 вытекает оценка (5.6) для $\Omega' = \Omega$. Из этой же оценки для строго липшицевых областей Ω следует ее справедливость и для суммы конечного числа таких областей.

Лемма 5.3. *Если функция $u(x)$ принадлежит $W^1_m(\Omega)$, $1 \leqslant m \leqslant n$, имеет ограниченный* $\operatorname{vrai}\max\limits_S u(x)$ *и при $k \geqslant k_0 \geqslant$* $\geqslant \operatorname{vrai}\max\limits_S u(x)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\int_{A_k} |\nabla u|^m\,dx \leqslant \gamma k^\alpha \operatorname{mes}^{1-\frac{m}{n}+\delta} A_k \tag{5.7}$$

с $\delta > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \delta + m$, то $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega u(x)$ *оценивается постоянной, зависящей лишь от γ, α, m, δ, k_0 и от* $\operatorname{mes}\Omega$.

Для доказательства заметим, что в силу леммы 3.6 функция $u^{(k)}(x) = \max\{u(x) - k;\ 0\}$ при $k \geqslant k_0$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ и, следовательно, к ней применимо неравенство (2.12). Воспользуемся (2.12) и неравенством Гёльдера

$$\int_{A_k} (u - k)\,dx \leqslant \left(\int_{A_k} (u-k)^m\,dx\right)^{\frac{1}{m}} \operatorname{mes}^{1-\frac{1}{m}} A_k \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int_{A_k} |\nabla u|^m\,dx\right)^{\frac{1}{m}} \operatorname{mes}^{1-\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} A_k.$$

Отсюда и из (5.7) следует, что для $u(x)$ при $k \geqslant k_0$ справедливы неравенства

$$\int_{A_k} (u-k)\,dx \leqslant c\gamma^{\frac{1}{m}} k^{\frac{\alpha}{m}} \operatorname{mes}^{1+\frac{\delta}{m}} A_k$$

с $\frac{\delta}{m} > 0$ и $\frac{\alpha}{m} \leqslant 1 + \frac{\delta}{m}$, так что оценка $\operatorname{vrai}\max_{\Omega} u(x)$ дается леммой 5.1.

Лемма 5.4. *Предположим, что* $\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{N} \bar{\Omega}_j$, *причем каждую из* Ω_j *можно невырожденным липшицевым преобразованием отобразить на выпуклую область* $\hat{\Omega}_j$. *Если* $u(x)$ *принадлежит* $W_m^1(\Omega)$ *и при* k, *больших некоторого* k_0, *удовлетворяет неравенствам* (5.7) *с* $\delta > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \delta + m$, *то* $\operatorname{vrai}\max_{\Omega} u(x)$ *оценивается постоянной, зависящей лишь от* γ, α, m, δ, k_0, *нормы* $\|u\|_{1, A_{k_0}}$ *и от области* Ω.

Доказывается эта лемма так же, как предыдущая; некоторое осложнение состоит лишь в том, что функции $u^{(k)}(x) = \max\{u(x) - k;\ 0\}$ при $k \geqslant k_0$, вообще говоря, не принадлежат $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ и поэтому нельзя непосредственно использовать неравенство (2.12). Тем не менее можно доказать, что при k, бо́льших некоторого k', зависящего от $\|u\|_{1, A_{k_0}}$ и области Ω, функции $u^{(k)}(x)$ удовлетворяют неравенству (2.12). Действительно, замыкание области Ω можно представить в виде $\bigcup_{j=1}^{N} \bar{\Omega}_j$ и каждую из Ω_j невырожденным липшицевым преобразованием $z = z^j(x)$ можно отобразить на выпуклую область $\hat{\Omega}_j$. Пусть d — максимальный диаметр областей $\hat{\Omega}_j$, $j = 1, \ldots, N$, а $a = \min_{j=1, \ldots, N} \operatorname{mes} \hat{\Omega}_j$. В силу очевидного соотношения

$$k \operatorname{mes} \hat{A}_k^j \equiv k \operatorname{mes}\{z \in \hat{\Omega}_j\colon\ u(z) > k\} \leqslant \int_{\hat{A}_k^j} u\,dz \leqslant c_1 \|u\|_{1, A_{k_0}}, \qquad k \geqslant k_0,$$

где c_1 зависит от $\max_j |z^j|_{\operatorname{Lip} \Omega_j}$, при $k \geqslant k' = \frac{2c_1}{a} \|u\|_{1, A_{k_0}}$ меры $\hat{A}_k^j$ не превосходят $a/2$, и потому $\operatorname{mes}(\hat{\Omega}_j \setminus \hat{A}_k^j) \geqslant a/2$, $j = 1, \ldots, N$. Ввиду этого для каждой $\hat{\Omega}_j$ из (3.6) следует оценка

$$\int_{\hat{A}_k^j} (u-k)^p\,dz \leqslant c_0^p \left(\frac{2d^n}{a}\right)^p \operatorname{mes}^{1-\frac{p}{m}} \hat{A}_k^j \,\|\nabla u^{(k)}\|_{m, \hat{A}_k^j}^p$$

с любым p из $[1, \bar{m}]$ при $m<n$ и с $p \in [1, \infty)$ при $m=n$. Переходя к старым переменным x и производя здесь суммирование по всем j, получим неравенство

$$\int_{A_k} (u-k)^p\, dx \leqslant c_2 \operatorname{mes}^{1-\frac{p}{\bar{m}}} A_k \| \nabla u^{(k)} \|^p_{m, A_k}, \qquad k \geqslant k', \tag{5.8}$$

с постоянной c_2, зависящей только от m, N, a, d и $\max_j |z^j(x)|_{\mathrm{Lip}\,\Omega_j}$, $\max_j |x^j(z)|_{\mathrm{Lip}\,\hat{\Omega}_j}$. Таким образом, функции $u^{(k)}(x)$ при $k \geqslant k'$ действительно удовлетворяют неравенству (2.12). Тем самым, лемму 5.4 можно считать доказанной. Из леммы 5.3 выводится следующая теорема:

Теорема 5.1. *Пусть функция $u(x)$ из $W^1_{m,q}(\Omega)$* *), $1 \leqslant m \leqslant n$, $q \geqslant 1$, *ограничена на S и при $k \geqslant \hat{k} \geqslant \operatorname{vrai}\max_S u$ удовлетворяет неравенствам*

$$\int_{A_k} |\nabla u|^m\, dx \leqslant \gamma \left(\int_{A_k} (u-k)^l\, dx \right)^{\frac{m}{l}} + \gamma k^\alpha (\operatorname{mes} A_k)^{1-\frac{m}{n}+\varepsilon}, \tag{5.9}$$

где γ, l, α и ε — положительные постоянные, причем

$$l < \bar{m} = \frac{nm}{n-m}, \qquad \varepsilon > 0, \quad m \leqslant \alpha < \varepsilon q + m. \tag{5.10}$$

Тогда $\operatorname{vrai}\max_\Omega u(x)$ не превосходит постоянной, зависящей лишь от $\operatorname{mes}\Omega$, m, q, $\hat{k}$, γ, l, α, ε, а также от нормы $\|u\|_{q, A_{\hat{k}}}$. Последнюю в случае $m<\alpha<\varepsilon\bar{m}+m$ можно заменить нормой $\|u\|_{1, A_{\hat{k}}}$, а при $\alpha = m$ — величиной $\left(\int_{A_{\hat{k}}} u^{\varepsilon_1}\, dx\right)^{1/\varepsilon_1}$ с произвольным $\varepsilon_1 > 0$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что в неравенстве (5.9) интеграл в правой части оценивается при больших k через левую часть (5.9) с малым множителем. Действительно, в силу неравенства (2.12) при $l<\bar{m}$ имеем

$$\|u-k\|_{l, A_k} \leqslant c (\operatorname{mes} A_k)^{\frac{1}{l}-\frac{1}{\bar{m}}} \|\nabla u\|_{m, A_k}. \tag{5.11}$$

С другой стороны,

$$k \operatorname{mes}^{1/q} A_k \leqslant L \equiv \|u\|_{q, A_{\hat{k}}}, \tag{5.12}$$

*) Напомним, что $W^1_{m,q}(\Omega)$ есть $W^1_m(\Omega) \cap L_q(\Omega)$.

так что при

$$k \geqslant k' = \max\{\hat{k};\ L(2\gamma c^m)^{\bar{m}l/[(\bar{m}-l)mq]}\} \tag{5.13}$$

из (5.8), (5.11) и (5.12) следуют неравенства

$$\int_{A_k} |\nabla u|^m dx \leqslant 2\gamma k^\alpha (\operatorname{mes} A_k)^{1-\frac{m}{n}+\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant 2\gamma k^m \left(L \operatorname{mes}^{-\frac{1}{q}} A_k\right)^{\alpha-m} (\operatorname{mes} A_k)^{1-\frac{m}{n}+\varepsilon} = \gamma_1 k^m (\operatorname{mes} A_k)^{1-\frac{m}{n}+\delta},$$

где $\delta = \varepsilon - \frac{\alpha - m}{q} > 0$, $\gamma_1 = 2\gamma L^{\alpha-m}$, $k \geqslant k'$. Таким образом, для $u(x)$ выполнены предположения леммы 5.3 с $\delta > 0$, $\alpha = m$, $k_0 = k'$ из (5.13), и поэтому $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} u(x)$ оценивается через m, k', δ, γ_1 и $\operatorname{mes}\Omega$.

Заметим, что в случае $\alpha = m$ последнее из условий (5.10) справедливо при $\forall q > 0$, поэтому при $\alpha = m$ все предыдущие оценки остаются верными, если в них положить $q = \varepsilon_1$, $L = \left(\int_{A_{\hat{k}}} u^{\varepsilon_1} dx\right)^{1/\varepsilon_1}$, $\forall \varepsilon_1 > 0$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, надо при $m < \alpha < \varepsilon\bar{m} + m$ оценить $L = \|u\|_{q, A_{\hat{k}}}$ через $\|u\|_{1, A_{\hat{k}}}$ для $\forall q < \bar{m}$. В силу (2.23) интегральный член в правой части неравенства (5.9) допускает оценку

$$\left(\int_{A_k} (u-k)^l dx\right)^{m/l} \leqslant \varepsilon_1 \int_{A_k} |\nabla u|^m dx + c_{\varepsilon_1}\left(\int_{A_k} (u-k)\, dx\right)^m$$

с любым $\varepsilon_1 > 0$. Возьмем $\varepsilon_1 = \frac{1}{2\gamma}$ и $k = \hat{k}$. Тогда отсюда и из (5.9) следует

$$\int_{A_{\hat{k}}} |\nabla u|^m dx \leqslant 2\gamma\left[c_{\frac{1}{2\gamma}} \|u - \hat{k}\|^m_{1, A_{\hat{k}}} + k^\alpha (\operatorname{mes} A_{\hat{k}})^{1-\frac{m}{n}+\varepsilon}\right] \leqslant$$

$$\leqslant c'\left(\|u\|^m_{1, A_{\hat{k}}} + 1\right).$$

Используя еще неравенство (2.12) и то, что $q < \bar{m}$, получаем

$$L = \|u\|_{q, A_{\hat{k}}} \leqslant c''\left(\|u - \hat{k}\|_{q, A_{\hat{k}}} + \hat{k}\operatorname{mes}^{1/q}\Omega\right) \leqslant$$

$$\leqslant c'''\left(\|\nabla u\|_{m, A_{\hat{k}}} + \hat{k}\operatorname{mes}^{1/q}\Omega\right) \leqslant c\left(\|u\|_{1, A_{\hat{k}}} + 1\right).$$

Теорема доказана.

Замечание 5.1. Утверждение теоремы остается в силе, если в неравенстве (5.9) правую часть заменить суммой

$$\gamma \sum_{i=1}^{N} \Big(\int_{A_k} (u-k)^{l_i}\, dx \Big)^{\frac{m}{l_i}} + \gamma \sum_{i=1}^{N_1} k^{\alpha_i} (\operatorname{mes} A_k)^{1-\frac{m}{n}+\varepsilon_i},$$

где $l_i < \bar{m}$, $\varepsilon_i > 0$, $m \leqslant \alpha_i < \varepsilon q + m$.

Используя вместо леммы 5.3 лемму 5.4, а вместо неравенства (2.12) неравенство (5.8), можно доказать такую теорему:

Теорема 5.2. *Если Ω подчиняется условиям леммы 5.4 и функция $u(x)$ из $W^1_{m,q}(\Omega)$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $q \geqslant 1$, при $k \geqslant \hat{k}$ удовлетворяет неравенствам (5.9), (5.10), то $\operatorname{vrai}\max_{\Omega} u(x)$ оценивается постоянной, зависящей от q, γ, l, α, ε, m, $\hat{k}$, $\operatorname{mes}\Omega$, нормы $\|u\|_{q, A_{\hat{k}}}$ и области Ω. При $\alpha < \varepsilon\bar{m} + m$ норму $\|u\|_{q, A_{\hat{k}}}$ можно заменить нормой $\|u\|_{1, A_{\hat{k}}}$.*

Переходим к получению локальных оценок $\operatorname{vrai}\max u$. Возьмем шар K_R и семейство концентрических с K_R шаров K_ρ и $K_{\rho-\sigma\rho}$ с $\frac{R}{2} \leqslant \rho - \sigma\rho < \rho \leqslant R$. Обозначим через $A_{k,\rho}$ множество точек из $\Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega$, в которых $u(x) > k$.

Будем говорить, что функция $u(x)$ из $W^1_m(\Omega)$, $1 \leqslant m \leqslant n$, принадлежит классу $\mathfrak{A}_m(\Omega_R, \gamma, l, \alpha, \varepsilon, \hat{k})$, если для любых $k \geqslant \hat{k}$ и всевозможных пар шаров K_ρ и $K_{\rho-\sigma\rho}$ указанного выше вида выполняются неравенства

$$\int_{A_{k,\rho-\sigma\rho}} |\nabla u|^m\, dx \leqslant \gamma \Big[(\sigma\rho)^{-m} R^{n-\frac{nm}{l}} \Big(\int_{A_{k,\rho}} (u-k)^l\, dx \Big)^{\frac{m}{l}} + k^\alpha \rho^{-\varepsilon n} \operatorname{mes}^{1-\frac{m}{n}+\varepsilon} A_{k,\rho} \Big] \tag{5.14}$$

с некоторыми положительными постоянными γ, ε, $m \leqslant \alpha < \varepsilon\bar{m} + m$, $l < \bar{m}$.

Если шар K_R принадлежит Ω, то класс $\mathfrak{A}_m(\Omega_R, \gamma, l, \alpha, \varepsilon, \hat{k})$ будем обозначать через $\mathfrak{A}_m(K_R, \gamma, l, \alpha, \varepsilon, \hat{k})$.

Теорема 5.3. *Для любой функции $u(x)$ из класса $\mathfrak{A}_m(K_R, \gamma, l, \alpha, \varepsilon, \hat{k})$ справедлива оценка*

$$\operatorname{vrai}\max_{K_{R/2}} u(x) \leqslant c, \tag{5.15}$$

где c зависит лишь от m, γ, l, α, ε, $\hat{k}$ и $a_l = R^{-n/l} \|u - \hat{k}\|_{l, A_{\hat{k},R}}$. Аналогичная оценка верна и для функций из $\mathfrak{A}_m(\Omega_R, \gamma, l, \alpha, \varepsilon, \hat{k})$, *если* $\operatorname{vrai}\max\limits_{S\cap K_R} u(x)\leqslant\hat{k}$ *или* Ω_R *удовлетворяет условиям леммы* 5.4. *При этом в* (5.15) *надо* $K_{R/2}$ *заменить на* $\Omega_{R/2}$. *Постоянная* c *зависит только от* m, γ, l, α, $\hat{k}$, ε *и* a_l, *если* $\operatorname{vrai}\max\limits_{S\cap K_R} u(x)\leqslant\hat{k}$; *в общем же случае* c *зависит и от* Ω_R.

Проверим справедливость первой части теоремы 5.3. Вторая доказывается аналогично, надо только в случае, если условие $\operatorname{vrai}\max\limits_{S\cap K_R} u\leqslant\hat{k}$ не выполнено, вместо неравенства (2.12) к функциям $u^{(k)}(x)$ применять неравенство (5.8) из доказательства леммы 5.4.

Приведем доказательство теоремы для случая $m<n$.

Прежде всего сделаем преобразование независимых переменных

$$x_i-x_i^0=Ry_i,\qquad i=1,\ \ldots,\ n,$$

так что шар $K_R(x^0)$ в новых переменных перейдет в K_1, а рассматриваемая функция (сохраним за ней то же обозначение $u(y)$) будет удовлетворять неравенствам

$$\int\limits_{A_{k,\,\rho-\sigma\rho}}|\nabla u|^m\,dy\leqslant\gamma_1\left[\sigma^{-m}\left(\int\limits_{A_{k,\rho}}(u-k)^l\,dy\right)^{\frac{m}{l}}+k^{\alpha}\operatorname{mes}^{1-\frac{m}{n}+\varepsilon}A_{k,\rho}\right],\tag{5.16}$$

$\frac{1}{2}\leqslant\rho-\sigma\rho<\rho\leqslant1$, где $\gamma_1=\gamma\max\{2^m;\ 2^{\varepsilon n}\}$.

Покажем, что можно так выбрать значение $k_0\geqslant\hat{k}$, чтобы $\operatorname{vrai}\max\limits_{K_{1/2}} u(y)\leqslant2k_0$. Для этого рассмотрим последовательность концентрических шаров K_{ρ_h}, где $\rho_h=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{h+1}}$, $h=0,1,2,\ldots$, и последовательность уровней $k_h=2k_0-\frac{k_0}{2^h}$, $h=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, где k_0 — пока произвольное число, удовлетворяющее условию $k_0\geqslant\hat{k}$, которое будет фиксировано ниже.

Введем обозначения:

$$J_h=\|u-k_h\|_{\bar{m},\,A_{k_h},\,\rho_h},\qquad h=0,\ 1,\ \ldots,$$

и

$$\zeta_h(y)=\zeta\left[2^{h+1}\left(|y|-\frac{1}{2}\right)\right],$$

где $\zeta(t)$ — непрерывно дифференцируемая невозрастающая функция аргумента $t\in(-\infty,\infty)$, равная единице при $t\leqslant1/2$ и нулю при $t \geqslant 3/4$. Функция $\zeta_h(y)$, как легко видеть, равна единице в шаре $K_{\rho_{h+1}}$ и равна нулю вне шара $K_{\bar\rho_h}$, $\bar\rho_h = \frac{1}{2}(\rho_h + \rho_{h+1})$.

Замечая, что

$$J_{h+1} \leqslant \| (u - k_{h+1}) \zeta_h \|_{\bar m,\, A_{k_{h+1}},\, \bar\rho_h},$$

воспользуемся для оценки J_{h+1} неравенством (2.12). Мы применим его к функции $\zeta_h u^{(k_{h+1})}$, которая принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_m(A_{k_{h+1}, \bar\rho_h})$. Это даст

$$J_{h+1} \leqslant c \| \nabla [(u - k_{h+1}) \zeta_h] \|_{m,\, A_{k_{h+1}},\, \bar\rho_h} \leqslant$$
$$\leqslant c \left[\| \zeta_h \nabla u \|_{m,\, A_{k_{h+1}},\, \bar\rho_h} + 2^{h+1} c' \| (u - k_{h+1}) \|_{m,\, A_{k_{h+1}},\, \bar\rho_h} \right], \qquad (5.17)$$

где $c' = \max\limits_{t \in [1/2,\, \infty]} |\zeta'(t)|$.

Далее, в силу (5.16) с $k = k_{h+1}$, $\rho = \rho_h$, $\rho - \sigma\rho = \bar\rho_h$ имеем

$$\| \nabla u \zeta_h \|_{m,\, A_{k_{h+1}},\, \bar\rho_h} \leqslant \| \nabla u \|_{m,\, A_{k_{h+1}},\, \bar\rho_h} \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_1^{\frac{1}{m}} \left[2^{h+3} \| u - k_{h+1} \|_{l,\, A_{k_{h+1}},\, \rho_h} + k_{h+1}^{\frac{\alpha}{m}} \operatorname{mes}^{\frac{1}{\bar m} + \frac{\varepsilon}{m}} A_{k_{h+1}, \rho_h} \right].$$

Отсюда и из (5.17), применяя неравенство Гёльдера, выводим

$$J_{h+1} \leqslant c \gamma_1^{\frac{1}{m}} 2^{h+3} J_h \operatorname{mes}^{\frac{1}{l} - \frac{1}{\bar m}} A_{k_{h+1}, \rho_h} +$$
$$+ c \gamma_1^{\frac{1}{m}} (2k_0)^{\frac{\alpha}{m}} \operatorname{mes}^{\frac{1}{\bar m} + \frac{\varepsilon}{m}} A_{k_{h+1}, \rho_h} + c c' 2^{h+1} J_h \operatorname{mes}^{\frac{1}{m} - \frac{1}{\bar m}} A_{k_{h+1}, \rho_h}. \qquad (5.18)$$

В правой части (5.18) оценим сверху меру множества A_{k_{h+1}, ρ_h} с помощью неравенства

$$J_h \geqslant \| u - k_h \|_{\bar m,\, A_{k_{h+1}},\, \rho_h} \geqslant (k_{h+1} - k_h) \operatorname{mes}^{\frac{1}{\bar m}} A_{k_{h+1}, \rho_h} =$$
$$= 2^{-(h+1)} \cdot k_0 \operatorname{mes}^{\frac{1}{\bar m}} A_{k_{h+1}, \rho_h}.$$

В результате получаем

$$J_{h+1} \leqslant c_1 b^h \left(k_0^{-\frac{\bar m}{l} + 1} J_h^{\frac{\bar m}{l}} + k_0^{\frac{\alpha}{m} - 1 - \frac{\varepsilon \bar m}{m}} J_h^{1 + \frac{\varepsilon \bar m}{m}} + k_0^{-\frac{\bar m}{m} + 1} J_h^{\frac{\bar m}{m}} \right). \qquad (5.19)$$

Здесь $b = 2^{\bar m}$, а постоянная c_1 определяется известными величинами: n, m, l, γ, α, ε и константой c из неравенства (2.12).

Величины J_h при всех $h=0, 1, 2, \ldots$ не превосходят $a_{\bar m} \equiv \equiv \| u(y)-\hat{k}\|_{\bar m, A_{k_0, \rho_0}}$, а потому из (5.19) следуют неравенства

$$J_{h+1} \leqslant c_2 b^h J_h^{1+\delta}, \qquad h=0,1,2,\ldots, \tag{5.20}$$

$$c_2 = c_1\left(k_0^{1-\frac{\bar m}{l}} a_{\bar m}^{\frac{\bar m}{l}-1-\delta} + k_0^{-\frac{1}{m}(m+\varepsilon\bar m-\alpha)} a_{\bar m}^{\frac{\varepsilon \bar m}{m}-\delta} + k_0^{-\frac{\bar m}{n}} a_{\bar m}^{\frac{\bar m}{n}-\delta}\right), \tag{5.21}$$

$$\delta = \min\left\{\frac{\bar m}{l}-1;\ \frac{\varepsilon \bar m}{m}\right\}.$$

Рассмотрим столь большие значения k_0, чтобы

$$c_2 \leqslant a_{\bar m}^{-\delta} b^{-1/\delta}. \tag{5.22}$$

Тогда для J_1 будем иметь из (5.20)

$$J_1 \leqslant c_2 a_{\bar m}^{1+\delta} \leqslant (bc_2)^{-1/\delta} b^{-1/\delta^2} \equiv \theta, \tag{5.23}$$

и потому в силу леммы 4.7

$$J_h \leqslant \theta b^{-(h-1)/\delta} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to \infty.$$

Следовательно,

$$\operatorname{vrai}\max_{K_1} u(y) \leqslant \lim_{h\to\infty} k_h = 2k_0,$$

где k_0 определяется условиями $k_0 \geqslant \hat{k}$ и (5.22); например, можно положить

$$k_0 = \max\left\{\hat{k};\ (3c_1 b^{1/\delta})^{l/(\bar m-l)} a_{\bar m};\ \ (3c_1 b^{1/\delta})^{m/(m+\varepsilon\bar m-\alpha)} a_{\bar m}^{\varepsilon \bar m/(m+\varepsilon \bar m-\alpha)};\right.$$
$$\left.(3c_1 b^{1/\delta})^{n/\bar m} a_{\bar m}\right\}. \tag{5.24}$$

Величину $a_{\bar m}$, входящую в оценку (5.24), можно в свою очередь оценить через $a_l \equiv \| u(y)-\hat{k}\|_{l, A_{\hat k, 1}}$, если воспользоваться неравенством (2.12) и условием (5.16) с $k=\hat{k}$, $\rho - \sigma\rho = \rho_0 = 3/4$, $\rho = 1$. Именно,

$$a_{\bar m} \leqslant c\,\|\nabla u\|_{m, A_{\hat k, \rho_0}} \leqslant c\gamma_1^{\frac{1}{m}}\left(4a_l + \hat{k}^{\frac{\alpha}{m}} \operatorname{mes}^{\frac{1}{\bar m}+\frac{\varepsilon}{m}} K_1\right), \tag{5.25}$$

где c — постоянная из (2.12).

Справедливость оценки (5.15) следует из (5.23) — (5.25).

Теорему 5.3 можно считать доказанной для случая $m<n$. Аналогично доказывается она и в случае $m=n$, надо только через J_h обозначить $\|u-k_h\|_{q, A_{k_h, \rho_h}}$ с каким-либо $q \geqslant l$, для которого $\alpha < \varepsilon q + m$.

Замечание 5.2. Из оценок (5.23) — (5.25) легко заключить, что при $\alpha = m$ постоянная $c = 2k_0$ в неравенстве (5.15) линейно зависит от величин $\hat{k}$ и a_l.

Замечание 5.3. Правую часть в неравенстве (5.14) можно заменить членом более общего вида

$$\gamma\left[(\sigma\rho)^{-m}R^{n}\sum_{i=1}^{N}\left(R^{-n}\int\limits_{A_{k,\rho}}(u-k)^{l_i}dx\right)^{\frac{m}{l_i}}+\sum_{i=1}^{N_1}\rho^{-\varepsilon_i n}k^{\alpha_i}\operatorname{mes}^{1-\frac{m}{n}+\varepsilon_i}A_{k,\rho}\right],$$

где $\varepsilon_i>0$, $l_i<\bar{m}$, $m\leqslant\alpha_i<\varepsilon_i\bar{m}+m$. Кроме того, можно предположить, что в неравенствах (5.14) диапазон изменения радиусов следующий: $(1-\sigma_0)R\leqslant\rho-\sigma\rho<\rho\leqslant R$, где σ_0 — некоторое число из $(0, 1)$. При этом для $\operatorname*{vrai\,max}\limits_{K_{R(1-\sigma_0)}} u(x)$ будет справедлива оценка, аналогичная (5.15). Это же замечание верно для шаров, пересекающихся с $\partial\Omega$.

Замечание 5.4. Нетрудно видеть, что функция $u(x)$ из $W^1_m(\Omega)$ принадлежит классу $\mathfrak{A}_m(\Omega_R, \gamma, m, m, \varepsilon, \hat{k})$ для любого шара K_R, если $u(x)$ при всех $k\geqslant\hat{k}$ удовлетворяет неравенствам

$$\int\limits_{A_{k,\rho}}|\nabla u|^m\zeta^m\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\gamma\left[\int\limits_{A_{k,\rho}}(u-k)^m(\zeta^m+|\nabla\zeta|^m)\,dx+k^m\operatorname{mes}^{1-\frac{m}{q}}A_{k,\rho}\right],\qquad(5.26)$$

в которых $\zeta(x)$ — срезающая функция для произвольного концентрического K_R шара K_ρ, $\rho\leqslant R$, γ и q — фиксированные постоянные, причем $q>n$.

Лемма 5.5. *Пусть функция $u(x)$ принадлежит $W^1_m(K_R)$ и для любой пары шаров K_ρ и $K_{\rho-\sigma\rho}$, $\frac{R}{2}\leqslant\rho-\sigma\rho<\rho\leqslant R$, концентрических с K_R, при произвольных уровнях $k\geqslant\hat{k}$ подчиняется неравенствам* (5.14) *с* $\alpha=\varepsilon=0$, $l<\bar{m}$. *Тогда для $u(x)$ справедлива оценка*

$$\int\limits_{K_{R/2}}e^{\beta u}\,dx\leqslant BR^n,\qquad(5.27)$$

причем постоянные β и B в (5.27) *зависят лишь от величин γ, $\hat{k}$, l, m и $a_l=R^{-n/l}\|u-\hat{k}\|_{l,A_{\hat{k},R}}$.*

Будем проводить те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 5.3, заменив последовательность уровней k_h из теоремы 5.3 другой последовательностью: $k_h=(h+1)k_0$, $h=0, 1, 2, \ldots$, а в остальном используя те же самые обозначения, что и в теореме 5.3. Тогда неравенство (5.17) останется прежним, а справа в (5.18) не будет множителя $k_0^{\alpha/m}$. Оценивая снизу меру A_{k_{h+1}, ρ_h} с помощью неравенства

$$J_h \geqslant (k_{h+1} - k_h) \operatorname{mes}^{\frac{1}{\bar{m}}} A_{k_{h+1}, \rho_h} = k_0 \operatorname{mes}^{\frac{1}{\bar{m}}} A_{k_{h+1}, \rho_h}, \tag{5.28}$$

мы получим вместо (5.19) следующее неравенство:

$$J_{h+1} \leqslant c_1 2^h \left(k_0^{-\frac{\bar{m}}{l}+1} J_h^{\frac{\bar{m}}{l}} + k_0^{-\frac{\bar{m}}{m}+1} J_h^{\frac{\bar{m}}{m}} \right) + c_1 k_0^{-1} J_h, \quad h = 0, 1, \ldots, \tag{5.29}$$

в котором постоянная c_1 определяется величинами m, l, γ, n и константой c из (2.12). Фиксируем число k_0 из условий $k_0 \geqslant \hat{k}$,

$$c_1 e^p \left(k_0^{1-\frac{\bar{m}}{l}} a^{\frac{\bar{m}}{l}} + k_0^{1-\frac{\bar{m}}{m}} a^{\frac{\bar{m}}{m}} + k_0^{-1} a \right) \leqslant 1, \tag{5.30}$$

где

$$p = \max\left\{ \frac{l}{\bar{m} - l};\ \frac{m}{\bar{m} - m} \right\}, \quad a = \max\{a_{\bar{m}};\ 1\}.$$

Тогда, как нетрудно подсчитать, из неравенств (5.29) и условия $J_0 \leqslant a$ следует оценка

$$J_h \leqslant e^{-ph}, \qquad h = 1, 2, \ldots \tag{5.31}$$

В силу (5.28) отсюда получаем

$$\operatorname{mes} A_{k_h, \rho_h} \leqslant k_0^{-\bar{m}} e^{-p\bar{m}h}, \qquad h = 1, 2, \ldots \tag{5.32}$$

Благодаря этому неравенству

$$\int\limits_{K_{1/2}} e^{\beta u(y)}\, dy \leqslant \sum_{h=1}^{\infty} \int\limits_{A_{k_h, \rho_h} \setminus A_{k_{h+1}, \rho_{h+1}}} e^{\beta u(y)}\, dy + e^{2\beta k_0} \operatorname{mes} K_1 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{h=1}^{\infty} e^{\beta k_{h+1}} \operatorname{mes} A_{k_h, \rho_h} + e^{2\beta k_0} \operatorname{mes} K_1 \leqslant$$

$$\leqslant k_0^{-\bar{m}} \sum_{h=1}^{\infty} e^{\beta(h+2) k_0 - p\bar{m}h} + e^{2\beta k_0} \operatorname{mes} K_1.$$

Поэтому при $\beta < p\bar{m}/k_0$ интеграл $\int\limits_{K_{1/2}} e^{\beta u(y)}\, dy = \int\limits_{K_{R/2}} e^{\beta u(x)}\, dx\, R^{-n}$ не превосходит числа $B = e^{2\beta k_0} \left[\frac{k_0^{-\bar{m}}}{1 - e^{-(p\bar{m} - k_0\beta)}} + \operatorname{mes} K_1 \right]$. Значение k_0, определяемое неравенствами (5.30), зависит от величины $a_{\bar{m}}$. Последнюю в силу (5.14) можно оценить через $a_{\bar{l}}$ так, как это сделано в теореме 5.3.

Лемма доказана.

Замечание 5.5. Если в неравенствах (5.14) показатель α отличен от нуля, причем $\alpha < m$, то вместо (5.27) будет выполняться оценка

$$\int_{K_{R/2}} e^{\beta u^{1-\frac{\alpha}{m}}} dx \leqslant BR^n.$$

Доказательство ее аналогично вышеприведенному, надо только уровни k_h выбирать иначе, чем выше, а именно:

$$k_h = (h+1)^{m/(m-\alpha)} k_0, \qquad h = 0, 1, \ldots$$

§ 6. Класс функций $\mathfrak{B}_m\left(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \delta, \frac{1}{q}\right)$

Параграфы 6—8 содержат большую часть новых аналитических средств, позволяющих установить гёльдеровость решений различных задач и их производных. Именно, в них мы даем интегральные критерии того, когда ограниченные функции из $W_m^1(\Omega)$, $1 < m \leqslant n$, удовлетворяют условию Гёльдера.

Первая теорема такого типа была установлена Де Джорджи в работе [11_1]. Приводимые ниже теоремы установлены в наших работах, посвященных изучению эллиптических и параболических уравнений. Способ их доказательства является развитием метода Де Джорджи. Чтобы облегчить их понимание, начнем изложение с одного важного частного случая, который обслуживает гл. III — V.

Будем говорить, что функция $u(x)$ принадлежит классу $\mathfrak{B}_m\left(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \delta, \frac{1}{q}\right)$, если $u(x) \in W_m^1(\Omega)$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} |u| \leqslant M$ и функции $w(x) = \pm u(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$\int_{A_{k,\rho-\sigma\rho}} |\nabla w|^m dx \leqslant$$
$$\leqslant \left[\gamma\sigma^{-m}\rho^{-m\left(1-\frac{n}{q}\right)} \max_{A_{k,\rho}} [w(x)-k]^m + \gamma_1\right] \operatorname{mes}^{1-\frac{m}{q}} A_{k,\rho}, \qquad (6.1)$$

в которых $A_{k,\rho} = \{x \in K_\rho : w(x) > k\}$; $K_{\rho-\sigma\rho}$ с $\sigma \in (0, 1)$ и K_ρ — произвольные концентрические шары, принадлежащие Ω; k — произвольное число, подчиняющееся лишь условию

$$k \geqslant \max_{K_\rho} w(x) - \delta M; \qquad (6.2)$$

M, m, γ, γ_1, δ, q — фиксированные положительные числа, причем $1 < m \leqslant n$, $q > n$, $0 < \delta \leqslant 2$.

Замечание 6.1. Легко проверить, что неравенства (6.1) с $\gamma=\gamma(c)$, $\gamma_1=(M^m+1)c_1$ вытекают из неравенств

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla w|^m \zeta^m\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_{A_{k,\rho}} (w-k)^m |\nabla\zeta|^m\, dx + c_1(k^m+1)\,\mathrm{mes}^{1-\frac{m}{q}} A_{k,\rho}, \tag{6.3}$$

в которых $\zeta(x)$ — произвольная срезающая функция для шара K_ρ.

Основной целью данного параграфа является доказательство вложимости $\mathfrak{B}_m(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ в $C^\alpha(\Omega)$ с некоторым положительным α, определяемым лишь параметрами m, γ, q и δ *).

Доказательство этого факта базируется на следующем важном вспомогательном предложении:

Лемма 6.1. *Пусть $w(x)$ — ограниченная функция из $W_m^1(\Omega)$ и K_R, $K_{R/2}$, $K_{R/4}$ — концентрические шары, принадлежащие Ω. Предположим, что для произвольных концентрических K_R шаров $K_{\rho-\sigma\rho}$ и K_ρ с $R/4 \leqslant \rho-\sigma\rho<\rho\leqslant R$ функция $w(x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$\int\limits_{A_{k,\rho-\sigma\rho}\setminus A_{l,\rho-\sigma\rho}} |\nabla w|^m\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left[\gamma\sigma^{-m}\rho^{-m\left(1-\frac{n}{q}\right)} \max_{A_{k,\rho}} [w(x)-k]^m + \gamma_1\right] \mathrm{mes}^{1-\frac{m}{q}} A_{k,\rho} \tag{6.4}$$

при любых значениях k из фиксированного диапазона

$$k \in [k', k''] \tag{6.5}$$

и любых

$$l \in \left[k, \frac{1}{2}\left(k+\max_{K_R} w(x)\right)\right], \tag{6.6}$$

причем

$$\mathrm{mes}\, A_{k', R/2} \leqslant (1-\delta_0)\,\mathrm{mes}\, K_{R/2}. \tag{6.7}$$

Здесь m, γ, γ_1, q, δ_0 — положительные постоянные, причем $1<m\leqslant n$, $q>n$. Обозначим $\omega=\max_{K_R} w(x)-k'$. Существует число $s = s(m, \gamma, q, \delta_0)>0$ такое, что если

$$k'' \geqslant \max_{K_R} w(x) - 2^{-s}\omega, \tag{6.8}$$

*) Зависимость различных величин от n в данном параграфе, как и в большинстве других, не отмечается.

то

$$\omega \leqslant 2^s \max\left\{\max_{K_R} w - \max_{K_{R/4}} w;\ \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{m}} R^{1-\frac{n}{q}}\right\}. \tag{6.9}$$

Для доказательства леммы 6.1 предварительно установим справедливость нижеследующих двух лемм.

Лемма 6.2. *Предположим, что функция* $w(x)$ *удовлетворяет неравенствам* (6.4) *при* $R/4 \leqslant \rho - \sigma\rho < \rho \leqslant R/2$, $k \in [k^0, k^0 + H/2]$, *где* $H = \max_{K_R} w(x) - k^0$, *и любых* l *из* (6.6). *Существует постоянная* $\theta > 0$, *зависящая лишь от* m, γ *и* q *из* (6.4), *такая, что если*

$$\operatorname{mes} A_{k^0, R/2} \leqslant \theta R^n, \tag{6.10}$$

то верно по крайней мере одно из неравенств:

$$\max_{K_{R/4}} w(x) \leqslant k^0 + \frac{H}{2} \tag{6.11}$$

либо

$$H \leqslant \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{m}} R^{1-\frac{n}{q}}. \tag{6.12}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность концентрических с K_R шаров K_{ρ_h},

$$\rho_h = \frac{R}{4} + \frac{R}{2^{h+2}}, \qquad h = 0, 1, \ldots,$$

и последовательность уровней

$$k_h = k^0 + \frac{H}{2} - \frac{H}{2^{h+1}}, \qquad h = 0, 1, \ldots,$$

и введем обозначения

$$y_h = R^{-n} \operatorname{mes} A_{k_h, \rho_h}, \qquad D_{h+1} = A_{k_h, \rho_{h+1}} \setminus A_{k_{h+1}, \rho_{h+1}}.$$

Ясно, что $k^0 \leqslant k_h \leqslant k^0 + \frac{H}{2}$, $k_{h+1} = k_h + \frac{H}{2^{h+2}} = \frac{1}{2}\left(k_h + k^0 + \frac{H}{2}\right)$, так что для значений $k = k_h$, $l = k_{h+1}$, $\rho = \rho_h$, $\rho - \sigma\rho = \rho_{h+1}$ при всех $h = 0, 1, \ldots$, справедливы неравенства (6.4). Из них следует, что

$$\int_{D_{h+1}} |\nabla w|^m\, dx \leqslant \gamma\left[2^{(h+3)m}\left(\frac{R}{4}\right)^{-m\left(1-\frac{n}{q}\right)} H^m + \frac{\gamma_1}{\gamma}\right] y_h^{1-\frac{m}{q}} R^{n-\frac{nm}{q}}. \tag{6.13}$$

Если неравенство (6.12) неверно, т. е. если $\frac{\gamma_1}{\gamma} < H^m R^{-m\left(1-\frac{n}{q}\right)}$, то из (6.13), применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int_{D_{h+1}} |\nabla w|\,dx \leqslant \left(\int_{D_{h+1}} |\nabla w|^m\,dx\right)^{\frac{1}{m}} \left(y_h R^n\right)^{1-\frac{1}{m}} \leqslant \gamma^{\frac{1}{m}} 2^{h+6} H R^{n-1} y_h^{1-\frac{1}{q}}. \tag{6.14}$$

Левую часть (6.14) оценим снизу по неравенству (3.4) с $k=k_h$, $l=k_{h+1}$, $\rho=\rho_{h+1}$, предположив выполненным условие (6.10) с $\theta \leqslant \frac{1}{2} 4^{-n} \varkappa_n$:

$$\int_{D_{h+1}} |\nabla w|\,dx \geqslant \beta^{-1}(k_{h+1}-k_h) R^{n-1} y_{h+1}^{1-\frac{1}{n}} \rho_{h+1}^{-n} \left(\operatorname{mes} K_{\rho_{h+1}} - \operatorname{mes} A_{k_h, \rho_{h+1}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \beta^{-1} 2^{-(h+2)+n} H R^{-1} y_{h+1}^{1-\frac{1}{n}} \left(\operatorname{mes} K_{R/4} - \operatorname{mes} A_{k^0, R/2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \beta^{-1} 2^{-(h+3+n)} H R^{n-1} y_{h+1}^{1-\frac{1}{n}} \varkappa_n.$$

Отсюда и из (6.14) следует оценка

$$y_{h+1} \leqslant c b^h y_h^{1+\varepsilon}, \qquad h=0, 1, \ldots, \tag{6.15}$$

с постоянными

$$\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{q} > 0, \quad b=4, \quad c = 2^{n+9} \beta \gamma^{1/m} \varkappa_n^{-1}. \tag{6.16}$$

Если предположить, что $y_0 \leqslant c^{-1/\varepsilon} b^{-1/\varepsilon^2}$, т. е. что выполнено условие (6.10) с $\theta \leqslant c^{-1/\varepsilon} b^{-1/\varepsilon^2}$, то в силу леммы 4.7 из неравенств (6.15) можно заключить о стремлении y_h к нулю при $h \to \infty$, а это означает, что

$$\operatorname{vrai}\max_{K_{R/4}} w(x) \leqslant \lim_{h\to\infty} k_h = k^0 + \frac{H}{2}.$$

Таким образом, утверждение леммы 6.2 доказано, причем можно положить

$$\theta = \min\left\{2^{-2n-1}\varkappa_n;\ c^{-1/\varepsilon} b^{-1/\varepsilon^2}\right\}, \tag{6.17}$$

где постоянные c, b и ε определены в (6.16).

Лемма 6.3. *По любым положительным постоянным* θ, γ, δ_0, $1 < m \leqslant n$ *и* $q > n$ *можно указать число* $s > 2$ *такое, что если функция* $w(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 6.1 *с*

$$k'' \geqslant \max_{K_R} w(x) - 2^{-s}\omega, \quad \text{где} \quad \omega \equiv \max_{K_R} w(x) - k', \tag{6.18}$$

и если

$$\omega > 2^s R^{1-\frac{n}{q}} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{6.19}$$

то для значения

$$k^0 = \max_{K_R} w(x) - 2^{-s+1}\omega \tag{6.20}$$

справедливо неравенство (6.10).

Доказательство. Предположим, что при некотором целом $s > 2$ выполнены неравенства (6.18) и (6.19) и $w(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы 6.1.

Введем обозначения

$$k_t = \max_{K_R} w - 2^{-t}\omega, \quad D_t = A_{k_t, R/2} \setminus A_{k_{t+1}, R/2}, \tag{6.21}$$
$$t = 0, 1, \ldots, s-1,$$

и рассмотрим неравенства (6.4) с $\rho = R$, $\rho - \sigma\rho = R/2$, полагая в них $k = k_t$, $l = k_{t+1}$, $t = 0, \ldots, s-2$. Последнее возможно, ибо в силу (6.18) при $t \in [0, s-2]$

$$k' \leqslant k_t \leqslant k'', \quad k_t < k_{t+1} = \max_{K_R} w - 2^{-(t+1)}\omega = \frac{1}{2}(k_t + \max_{K_R} w).$$

Из (6.4), учитывая (6.19), выводим

$$\int_{D_t} |\nabla w|^m dx \leqslant \gamma \left[2^m R^{-m\left(1-\frac{n}{q}\right)} \left(\frac{\omega}{2^t}\right)^m + \frac{\gamma_1}{\gamma}\right] (\varkappa_n R^n)^{1-\frac{m}{q}} \leqslant$$
$$\leqslant \gamma \left[\left(\frac{\omega}{2^{t-1}}\right)^m + \left(\frac{\omega}{2^s}\right)^m\right] \varkappa_n^{1-\frac{m}{q}} R^{n-m} \leqslant 2^{m+1}\gamma\varkappa_n^{1-\frac{m}{q}} \left(\frac{\omega}{2^t}\right)^m R^{n-m}. \tag{6.22}$$

С другой стороны, из неравенства (3.4) с $k = k_t$, $l = k_{t+1}$, $\rho = R/2$ и из условия (6.7) следует, что при $t \leqslant s-2$ верна такая оценка:

$$\operatorname{mes}^{1-\frac{1}{n}} A_{k_{s-1}, R/2} \leqslant \operatorname{mes}^{1-\frac{1}{n}} A_{k_{t+1}, R/2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\beta (R/2)^n}{(k_{t+1} - k_t)\left(\operatorname{mes} K_{R/2} - \operatorname{mes} A_{k_t, R/2}\right)} \int_{D_t} |\nabla w| dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2^{t+1}\beta}{\omega\delta_0\varkappa_n} \int_{D_t} |\nabla w| dx, \tag{6.23}$$

поскольку $\operatorname{mes} A_{k_t, R/2} \leqslant \operatorname{mes} A_{k', R/2} \leqslant (1-\delta_0) \operatorname{mes} K_{R/2}$. Возводя обе части неравенства (6.23) в степень m, применяя неравенство Гёльдера и учитывая затем (6.22), находим

$$\left(\operatorname{mes} A_{k_{s-1}, R/2}\right)^{m-\frac{m}{n}} \leqslant \left(2\varkappa_n^{-1}\beta\delta_0^{-1}\right)^m \left(\frac{2^t}{\omega}\right)^m \int_{D_t} |\nabla w|^m dx \, (\operatorname{mes} D_t)^{m-1} \leqslant$$
$$\leqslant cR^{n-m} (\operatorname{mes} D_t)^{m-1}, \qquad t = 0, \ldots, s-2, \tag{6.24}$$
$$c = 2^{2m+1}\gamma\beta^m\delta_0^{-m}\varkappa_n^{1-\frac{m}{q}-m},$$

откуда

$$(\operatorname{mes} A_{k_{s-1}, R/2})^{\frac{m(n-1)}{n(m-1)}} \leqslant c^{\frac{1}{m-1}} R^{\frac{n-m}{m-1}} \operatorname{mes} D_t.$$

Просуммируем эти неравенства по t от 0 до $s-2$, замечая, что $\sum\limits_t \operatorname{mes} D_t \leqslant \operatorname{mes} K_{R/2} = \varkappa_n \left(\frac{R}{2}\right)^n$. В результате для $\operatorname{mes} A_{k_{s-1}, R/2}$ получим оценку

$$(\operatorname{mes} A_{k_{s-1}, R/2})^{\frac{m(n-1)}{n(m-1)}} \leqslant \frac{\varkappa_n c^{\frac{1}{m-1}} 2^{-n}}{s-1} R^{\frac{m(n-1)}{m-1}}, \tag{6.25}$$

из которой следует, что для $k^0 = k_{s-1}$ выполняется неравенство (6.10): $\operatorname{mes} A_{k_{s-1}, R/2} \leqslant \theta R^n$ при

$$s = 2 + \left[\varkappa_n c^{\frac{1}{m-1}} 2^{-n} \theta^{-\frac{m(n-1)}{n(m-1)}}\right]. \tag{6.26}$$

Лемма 6.3 доказана.

Доказательство леммы 6.1. По заданным значениям m, γ и q из (6.4) фиксируем число $\theta > 0$ в соответствии с леммой 6.2. Затем по этому значению θ и постоянным m, γ, q и δ_0 из условий леммы 6.1 выберем число $s > 2$ в соответствии с леммой 6.3. Если окажется, что $\omega \leqslant 2^s R^{1-n/q} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{1/m}$, то оценка (6.9) доказана. Если это не так, т. е. если выполняется неравенство (6.19) и если верно (6.8), то в силу леммы 6.3 для $k^0 = \max\limits_{K_R} w - 2^{-s+1}\omega \geqslant k'$ справедливо неравенство (6.10). Кроме того, $H = \max\limits_{K_R} w - k^0 = 2^{-s+1}\omega > R^{1-n/q}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{1/m}$ и $k^0 + \frac{H}{2} \leqslant k''$. Поэтому на основании леммы 6.2 заключаем, что

$$\max_{K_{R/4}} w \leqslant k^0 + \frac{H}{2} = \max_{K_R} w - 2^{-s+1}\omega + 2^{-s}\omega = \max_{K_R} w - 2^{-s}\omega,$$

т. е. снова справедлива оценка (6.9).

Утверждение леммы 6.1 доказано.

Из леммы 6.1 вытекает следующее предложение:

Лемма 6.4. *Для любого элемента $u(x)$ из класса $\mathfrak{B}_m(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ и любых концентрических шаров $K_{R/4}$ и $K_R \subset \Omega$ справедливо по крайней мере одно из неравенств:*

$$\operatorname{osc}\{u;\ K_R\} \leqslant \tau 2^s R^{1-n/q} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{1/m} \tag{6.27}$$

или

$$\operatorname{osc}\{u;\ K_{R/4}\} \leqslant (1 - \tau^{-1} 2^{-s}) \operatorname{osc}\{u;\ K_R\}, \tag{6.28}$$

где $s = s(m, \gamma, q, 1/2)$ из леммы 6.1, а $\tau = \max\{2;\ 2/\delta\}$.

Доказательство. Поскольку $u(x) \in \mathfrak{B}_m(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$, то функции $w(x) = \pm u(x)$ удовлетворяют неравенствам (6.4) при любых $k \geqslant \max\limits_{K_\rho} w(x) - \delta M$, $l > k$. Положим

$$\omega = \tau^{-1} \operatorname{osc}\{u;\ K_R\}. \tag{6.29}$$

Тогда

$$k' \equiv \max_{K_R} w(x) - \omega \geqslant \max_{K_R} w(x) - \frac{1}{2} \operatorname{osc}\{u;\ K_R\} \tag{6.30}$$

и

$$k' \geqslant \max_{K_R} w(x) - \frac{\delta}{2} \operatorname{osc}\{u;\ K_R\} \geqslant \max_{K_R} w(x) - \delta M, \tag{6.31}$$

и потому для $w(x) = \pm u(x)$ справедливы неравенства (6.4) при всех $k \geqslant k'$, $l > k$. Очевидно, что имеет место по крайней мере одно из неравенств:

$$\operatorname{mes}\left\{x \in K_{R/2}:\ u(x) > \max_{K_R} u - \frac{1}{2} \operatorname{osc}\{u;\ K_R\}\right\} \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} K_{R/2} \tag{6.32}$$

или

$$\operatorname{mes}\left\{x \in K_{R/2}:\ u(x) < \min_{K_R} u + \frac{1}{2} \operatorname{osc}\{u;\ K_R\}\right\} \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} K_{R/2}. \tag{6.32'}$$

Другими словами, по крайней мере для одной из пары функций $w(x) = u(x)$ или $w(x) = -u(x)$ верно неравенство

$$\operatorname{mes}\left\{x \in K_{R/2}:\ w(x) > \max_{K_R} w - \frac{1}{2} \operatorname{osc}\{u;\ K_R\}\right\} \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} K_{R/2} \tag{6.33}$$

и в силу (6.30) для нее

$$\operatorname{mes} A_{k', R/2} \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} K_{R/2}, \tag{6.34}$$

т. е. выполняется условие (6.7) с $\delta_0 = 1/2$.

Итак, та из функций $w = \pm u(x)$, для которой имеет место (6.33), удовлетворяет всем условиям леммы 6.1 с постоянными m, γ и q, входящими в определение класса $\mathfrak{B}_m$, $\delta_0 = 1/2$, и $k'' = \max\limits_{K_R} w$. Поэтому в силу (6.9) верно хотя бы одно из неравенств:

$$\operatorname{osc}\{u;\ K_R\} = \tau\omega \leqslant \tau 2^s R^{1-n/q} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{1/m}$$

либо

$$\operatorname{osc}\{u;\ K_R\} \leqslant \tau 2^s (\max_{K_R} w - \max_{K_{R/4}} w) \leqslant$$
$$\leqslant \tau 2^s [\operatorname{osc}\{w;\ K_R\} - \operatorname{osc}\{w;\ K_{R/4}\}] = \tau 2^s [\operatorname{osc}\{u;\ K_R\} - \operatorname{osc}\{u;\ K_{R/4}\}],$$

т. е. справедлива либо оценка (6.27), либо (6.28). Лемма 6.4 доказана.

Из этой леммы и леммы 4.8 вытекает основное утверждение данного параграфа. Именно:

Теорема 6.1. *Пусть $u(x)$ — произвольная функция из $\mathfrak{B}_m(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ и K_{ρ_0} — шар, принадлежащий Ω. Тогда для любого шара K_ρ, $\rho \leqslant \rho_0$, концентрического с K_{ρ_0}, колебание $u(x)$ в K_ρ оценивается так:*

$$\operatorname{osc}\{u;\ K_\rho\} \leqslant c\rho_0^{-\alpha}\rho^{\alpha}, \tag{6.35}$$

где

$$\begin{gathered} \alpha = \min\left\{-\lg_4\left(1 - \tau^{-1}2^{-s}\right);\ 1 - \frac{n}{q}\right\}, \\ c = 4^{\alpha}\max\left\{2M;\ \tau 2^{s}\rho_0^{1-n/q}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{1/m}\right\}, \end{gathered} \tag{6.36}$$

$\tau = \max\{2;\ 2/\delta\}$, *а число $s > 0$ определено в лемме 6.4 и зависит лишь от параметров m, γ и q. Таким образом, класс $\mathfrak{B}_m(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ вкладывается в $C^{\alpha}(\Omega)$, причем α не зависит от M и γ_1.*

Отметим одно следствие из доказанной теоремы.

Следствие 6.1. Если функция $u(x)$ принадлежит $\mathfrak{B}_m(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$, то для любого шара $K_\rho \subset \Omega$ верна оценка

$$\int_{K_\rho} |\nabla u|^m\, dx \leqslant c_1\rho^{n-m+m\alpha}, \tag{6.37}$$

где постоянная c_1 определяется параметрами класса $\mathfrak{B}_m$ и расстоянием от K_ρ до S, а α то же, что и в (6.35).

Справедливость этого утверждения вытекает из неравенств (6.1) и (6.35).

§ 7. Классы функций $\mathfrak{B}_m\left(\Omega \cup S_1,\ M,\ \gamma,\ \gamma_1,\ \delta,\ \frac{1}{q}\right)$ и $\hat{\mathfrak{B}}_m\left(\Omega \cup S_1,\ M,\ \gamma,\ \gamma_1,\ \delta,\ \frac{1}{q}\right)$

Функции класса $\mathfrak{B}_m(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ могут, вообще говоря, портиться при приближении к границе. Мы выделим из него более узкие классы функций, удовлетворяющих неравенствам типа (6.1) не только для внутренних шаров, но и для шаров, пересекающих границу S области Ω или часть S_1 границы S, и покажем, что при некоторых условиях функции этих классов удовлетворяют условию Гёльдера и в областях, прилегающих к границе.

Обозначим через $\mathfrak{B}_m(\Omega \cup S_1, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ класс функций $u(x)$ из $\mathfrak{B}_m(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$, для которых $w = \pm u$ удовлетворяют неравенствам (6.1) и для шаров K_ρ, пересекающих S_1, но не пересекающих $S \setminus S_1$, при $k \geqslant \max\limits_{\Omega_\rho} w(x) - \delta M$ и $k \geqslant \max\limits_{S_\rho} w(x)$. Области интегрирования $A_{k,\rho}$ для пограничных шаров (т. е. шаров, пересекающих S_1) в (6.1) определяются как множества точек из $K_\rho \cap \Omega$, в которых $u(x) > k$.

В § 1 гл. I (стр. 30) было определено «условие (A)» для S или ее части S_1. Ради несущественных сокращений наших рассуждений будем считать, что пересечения Ω_ρ области Ω с шарами K_ρ, $\rho \leqslant a_0$, имеющими центры на S (или на S_1), состоят из одной компоненты.

Мы будем предполагать в данном параграфе, что часть S_1 или вся граница S области Ω удовлетворяет условию (A) с $a_0 \leqslant 1$. Покажем, что в этих случаях справедлива

Теорема 7.1. *Если S удовлетворяет условию* (A) *и функция $u(x)$ из $\mathfrak{B}_m(\Omega \cup S, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ на S удовлетворяет условию Гёльдера, точнее, если*

$$\operatorname{osc}\{u;\ S_\rho\} \leqslant L\rho^{\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0, \tag{7.1}$$

для шаров K_ρ с центром на S радиуса $\rho \leqslant a_0$, то $u(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера в $\overline{\Omega}$, т. е. для любого K_ρ

$$\operatorname{osc}\{u;\ \Omega_\rho\} \leqslant c\rho^{\alpha}, \tag{7.2}$$

причем постоянные c и α определяются параметрами $m, \gamma, \delta, 1/q$ класса $\mathfrak{B}_m$, ε из (7.1) *и постоянной θ_0 из условия* (A) *на S, а c зависит, кроме того, от γ_1, M, L и постоянной a_0 из условия* (A) *на S.*

Если только S_1 удовлетворяет условию (A), *а функция $u(x) \in \mathfrak{B}_m(\Omega \cup S_1, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ и удовлетворяет условию Гёльдера на S_1, т. е. если* (7.1) *верно лишь для шаров K_ρ, не пересекающих $S \setminus S_1$, то для таких шаров*

$$\operatorname{osc}\{u;\ \Omega_\rho\} \leqslant c\,(\rho/\rho_0)^{\alpha}, \tag{7.3}$$

где ρ_0 — расстояние от центра K_ρ до $S \setminus S_1$, а постоянные c и α определяются теми же величинами, что и выше.

Легко видеть, что достаточно получить оценку (7.2) для шаров K_ρ с $\rho \leqslant a_0$ и центрами на S, а оценку (7.3) для K_ρ с $\rho \leqslant \min\{\rho_0, a_0\}$ и центрами на S_1. Это вместе с теоремой 6.1 дает желаемые неравенства (7.2) и (7.3) для любого шара K_ρ. Рассмотрим, например, первую часть теоремы. Доказательство ее основано на следующем аналоге леммы 6.1 для приграничных шаров:

Лемма 7.1. *Пусть $S_1 \subset S$ удовлетворяет условию* (A). *Предположим, что в формулировке леммы* 6.1 *K_R — шар с центром* *на* S_1, $R\leqslant a_0$, *шары* K_ρ *заменены на* $\Omega_\rho=K_\rho\cap\Omega$ *и вместо условия* (6.7) *выполняется неравенство*

$$k'\geqslant\max_{S_R} w(x),\qquad S_R=S\cap K_R. \tag{7.4}$$

Для этого случая остается верным утверждение леммы 6.1 *с* $s=s(m,\gamma,q,\theta_0)$, *где* θ_0 — *постоянная из условия* (A).

Чтобы убедиться в справедливости этого предложения, заметим, что формулировка леммы 6.1 не изменится, если вместо $w(x)$ рассматривать функцию $\max\{w(x);\,k'\}$. Если теперь K_R — шар с центром на S_1 и выполнены условия леммы 7.1, то функция

$$\hat{w}(x)=\begin{cases}\max\{w(x);\,k'\}, & x\in\Omega_R,\\ k', & x\in K_R\setminus\Omega_R,\end{cases}$$

очевидно, принадлежит $W_m^1(K_R)$ и удовлетворяет условиям (6.4) — (6.6) леммы 6.1. Кроме того, в силу условия (A)

$$\operatorname{mes}A_{k',\,R/2}=\operatorname{mes}\{x\in K_{R/2}\colon\ \hat{w}(x)>k'\}\leqslant(1-\theta_0)\operatorname{mes}K_{R/2}, \tag{7.5}$$

т. е. для $\hat{w}(x)$ выполнено неравенство (6.7) с $\delta_0=\theta_0$. Следовательно, для $\hat{w}(x)$ справедливо заключение леммы (6.1) с $s=s(m,\gamma,q,\theta_0)$, и потому, если $k''\geqslant\max\limits_{\Omega_R}w-2^{-s}\omega$, то

$$\omega\leqslant2^s\max\left\{\max_{\Omega_R}w-\max_{\Omega_{R/4}}w;\ \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{1/m}R^{1-n/q}\right\}.$$

С помощью леммы 7.1 доказывается следующее предложение, аналогичное лемме 6.4:

Лемма 7.2. *Если выполнены условия первой части теоремы* 7.1, *то для любой пары концентрических шаров* $K_{R/4}$, K_R, $R\leqslant a_0$, *с центром на* S_1 *верно по крайней мере одно из неравенств*:

$$\operatorname{osc}\{u;\,\Omega_R\}\leqslant c_1R^{\varepsilon_1},\qquad \varepsilon_1=\min\left\{1-\frac{n}{q};\ \varepsilon\right\}, \tag{7.6}$$

либо

$$\operatorname{osc}\{u;\,\Omega_{R/4}\}\leqslant\left(1-\tau^{-1}2^{-s}\right)\operatorname{osc}\{u;\,\Omega_R\}, \tag{7.7}$$

где $\tau=\max\{4;\,2/\delta\}$, $s=s(m,\gamma,q,\theta_0)$ — *постоянная из леммы* 7.1, *а* $c_1=\max\left\{\gamma^{-\frac{1}{m}}\gamma_1^{\frac{1}{m}}\tau2^sa_0^{1-\frac{n}{q}-\varepsilon_1};\ 4La_0^{\varepsilon-\varepsilon_1}\right\}$.

Так же, как и в лемме 6.4, положим $\omega=\tau^{-1}\operatorname{osc}\{u;\,\Omega_R\}$. Если $\operatorname{osc}\{u;\,\Omega_R\}\leqslant4LR^\varepsilon$, то верно неравенство (7.6). Если же $\operatorname{osc}\{u;\,\Omega_R\}>4LR^\varepsilon$, то диапазон значений $u(x)$ на S_R отделен от $\max_{\Omega_R} u$ или от $\min_{\Omega_R} u = -\max_{\Omega_R}(-u)$, интервалом длины, не меньшей чем $\frac{1}{4}\operatorname{osc}\{u;\ \Omega_R\}$. Другими словами, по крайней мере для одной из функций $w(x) = u(x)$ или $w(x) = -u(x)$ выполнено неравенство $k' \equiv \max_{\Omega_R} w - \omega \geqslant \max_{\Omega_R} w - \frac{1}{4}\operatorname{osc}\{u;\ \Omega_R\} \geqslant \geqslant \max_{S_R} w$ и $k' \geqslant \max_{\Omega_R} w - \delta M$, и потому для этой функции при всех $l > k \geqslant k'$ справедливы неравенства (6.4). Лемма 7.1 гарантирует для нее оценку

$$2^{-s}\tau^{-1}\operatorname{osc}\{u;\ \Omega_R\} =$$
$$= 2^{-s}\omega \leqslant \max\left\{\operatorname{osc}\{w;\ \Omega_R\} - \operatorname{osc}\{w;\ \Omega_{R/4}\};\ R^{1-n/q}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{1/m}\right\} =$$
$$= \max\left\{\operatorname{osc}\{u;\ \Omega_R\} - \operatorname{osc}\{u;\ \Omega_{R/4}\};\ R^{1-n/q}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{1/m}\right\},$$

из которой снова следует неравенство (7.6) или (7.7).

Вернемся к теореме 7.1. Справедливость ее вытекает из лемм 7.2 и 4.8.

Теорема 7.1 будет использована в следующих главах для исследования поведения решений эллиптических уравнений и их производных вблизи границы в случае первой краевой задачи, когда для исследуемой функции известна гладкость ее на самой границе (условие (7.1)).

При рассмотрении других краевых задач вместо класса $\mathfrak{B}_m(\Omega \cup S_1,\ M,\ \gamma,\ \gamma_1,\ \delta,\ 1/q)$ приходится иметь дело с другим классом — $\hat{\mathfrak{B}}_m(\Omega \cup S_1,\ M,\ \gamma,\ \gamma_1,\ \delta,\ 1/q)$. Он состоит из всех функций $u(x)$ класса $\mathfrak{B}_m(\Omega,\ M,\ \gamma,\ \gamma_1,\ \delta,\ 1/q)$, для которых $w(x) = \pm u(x)$ удовлетворяют неравенствам (6.1) для шаров, пересекающих некоторую часть S_1 границы S, но не пересекающих $S \setminus S_1$, причем для приграничных шаров K_ρ, так же как и для внутренних, неравенства (6.1) выполняются при всех $k \geqslant \max_{K_\rho \cap \Omega} w(x) - \delta M$.

Ясно, что этот класс функций более узкий, чем $\mathfrak{B}_m(\Omega \cup S_1,\ M,\ \gamma,\ \gamma_1,\ \delta,\ 1/q)$. Для представителей $u(x)$ класса $\hat{\mathfrak{B}}_m(\Omega \cup S_1,\ M,\ \gamma,\ \gamma_1\ \delta,\ 1/q)$ гёльдеровость вблизи S_1 доказывается без каких-либо предположений о гладкости $u(x)$ на S_1. От поверхности S_1 достаточно требовать выполнения лишь следующих двух условий:

1) Для $\Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega$, где K_ρ — шар с центром в произвольной точке $x_0 \in S_1$ и радиусом $\rho \leqslant a$, не превосходящим расстояния ρ_0 от x_0 до $S \setminus S_1$, и для любой функции $u(x)$ из

$W_m^1(\Omega_\rho)$ должно быть справедливо утверждение леммы 3.9, т. е. должны иметь место неравенства

$$(l-k)\,\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{n}} A_{l,\rho} \leqslant \beta \frac{\rho^n}{\mathrm{mes}\,[\Omega_\rho \setminus A_{k,\rho}]} \int\limits_{A_{k,\rho} \setminus A_{l,\rho}} |\nabla u|\,dx \tag{7.8}$$

с произвольными числами l и k, $l > k$. Здесь $A_{k,\rho}$ — множество точек x из Ω_ρ, для которых $u(x) > k$. В § 3 доказано, что эти неравенства верны для случаев, когда Ω_ρ есть шар или выпуклая область.

2) $\mathrm{mes}\,\Omega_\rho \geqslant \theta\,\mathrm{mes}\,K_\rho$, $\theta = \mathrm{const} > 0$.

Имеет место

Теорема 7.2. *Если S_1 удовлетворяет условиям* 1) *и* 2), *то функции $u(x)$ из $\hat{\mathfrak{B}}_m(\Omega \cup S_1, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ удовлетворяют условию Гёльдера в $\Omega \cup S_1$, т. е. для любого шара K_ρ с расстоянием ρ_0 от центра до $S \setminus S_1$ выполняется неравенство* (7.3), *где постоянная $\alpha > 0$ определяется только параметрами m, δ, γ, $1/q$ класса $\hat{\mathfrak{B}}_m$ и постоянными β и θ из условий* 1) *и* 2), *а c зависит, кроме того, от γ, a и M.*

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 6.1, в которой получена внутренняя оценка. Надо только под $A_{k,\rho}$ понимать соответствующие множества не из K_ρ, а из $\Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega$. Единственными аналитическими неравенствами, на которые эта замена могла бы повлиять, являются неравенства (3.4) леммы 3.9. Заметим, что в теореме 6.1 они использовались лишь для таких значений k, для которых $\mathrm{mes}\,K_{R/2} - \mathrm{mes}\,A_{k,R/2} \geqslant \delta_0\,\mathrm{mes}\,K_{R/2}$ (см. (6.23)), и при этом несколько огрублялись:

$$(l-k)\,\mathrm{mes}^{1-\frac{1}{n}} A_{l,\rho} \leqslant \beta_1 \int\limits_{A_{k,\rho} \setminus A_{l,\rho}} |\nabla u|\,dx, \qquad \beta_1 > 0. \tag{7.9}$$

В данном случае, вследствие наших предположений об S_1, неравенства (7.9) справедливы при всех k, для которых $\mathrm{mes}\,\Omega_\rho - \mathrm{mes}\,A_{k,\rho} \geqslant \bar{\delta}\,\mathrm{mes}\,\Omega_\rho$, $\bar{\delta} > 0$.

§ 8. Классы функций $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\Omega, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$

При исследовании квазилинейных уравнений общего, недивергентного вида, а также при исследовании систем уравнений мы встретимся с необходимостью дальнейшего расширения классов $\mathfrak{B}_m(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$.

Будем говорить, что вектор-функция $\mathbf{u}(x) = (u^1(x), \ldots, u^N(x))$, определенная и ограниченная в области Ω, принадлежит классу

$\mathfrak{B}_m^{N_1}(\Omega, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$, если для нее можно построить N_1 функций $\varphi^1(u^1, \ldots, u^N), \ldots, \varphi^{N_1}(u^1, \ldots, u^N)$, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в области $\left\{|\mathbf{u}| = \sqrt{\sum_{i=1}^N u^{i2}} \leqslant \operatorname{vrai}\max_\Omega |\mathbf{u}(x)|\right\}$ и таких, что $w^l(x) = \varphi^l(u^1(x), \ldots, u^N(x))$, $l = 1, \ldots, N_1$, обладают следующими тремя свойствами:

1) $\operatorname{vrai}\max_\Omega |w^l(x)| \leqslant M_1$ и $w^l(x) \in W_m^1(\Omega)$.

2) Для любой пары концентрических шаров $K_{R/2}$ и $K_R \subset \Omega$ найдется номер r, для которого

$$\operatorname{osc}\{w^r(x); K_R\} \geqslant \delta_1 \max_{i=1, \ldots, N} \operatorname{osc}\{u^i; K_R\} \tag{8.1}$$

и

$$\operatorname{mes}\{x \in K_{R/2}\colon w^r(x) > \max_{K_R} w^r - \delta_2 \operatorname{osc}\{w^r; K_R\}\} \leqslant \\ \leqslant (1 - \delta_3) \operatorname{mes} K_{R/2}, \tag{8.2}$$

где δ_i, $i = 1, 2, 3$ — фиксированные положительные числа.

3) Для каждой из функций $w(x) = w^l(x)$, $l = 1, \ldots, N_1$, и $K_\rho \subset \Omega$ выполняются неравенства

$$\int_{A_{k, \rho - \sigma\rho}} |\nabla w|^m \, dx \leqslant \\ \leqslant \left[\frac{\gamma}{\sigma^m \rho^{m\left(1 - \frac{n}{q}\right)}} \max_{A_{k, \rho}} [w(x) - k]^m + \gamma_1\right] \operatorname{mes}^{1 - \frac{m}{q}} A_{k, \rho} \tag{8.3}$$

при произвольных σ из $(0,1)$ и при k, удовлетворяющих условию $\max_{A_{k, \rho}} w(x) - k \leqslant \delta M_1$, где $\delta \in (0, 2]$ — фиксированное для данного класса функций число. $A_{k, \rho}$ — множество точек из K_ρ, в которых $w(x) > k$; числа m, γ, γ_1 и q фиксированы, причем $q > n$, $n \geqslant m > 1$.

Заметим, что здесь, так же как и в § 6, нам достаточно иметь неравенства (8.1) — (8.3) лишь для шаров, радиусы которых не превосходят какого-либо числа $\bar{\rho}$. Нетрудно видеть, что класс функций $\mathfrak{B}_m(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ является классом $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\Omega, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$, для которого $\varphi^1(u) = u$, $\varphi^2(u) = -u$, $w^1(x) = u(x)$, $w^2(x) = -u(x)$, $N_1 = 2$, $M_1 = M$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \delta_3 = 1/2$, а γ, γ_1, δ и $1/q$ те же, что и для $\mathfrak{B}_m(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$.

В приложениях к дифференциальным уравнениям нам встретятся функции $\varphi^l(\mathbf{u})$ специального вида, а именно:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_+^l(\mathbf{u}) \equiv \varphi_+^l(u^1, \ldots, u^N) = \lambda \frac{u^l - M'}{M'' - M'} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{u^i - M'}{M'' - M'}\right)^2,\\ \varphi_-^l(\mathbf{u}) \equiv \varphi_-^l(u^1, \ldots, u^N) = \lambda \frac{M'' - u^l}{M'' - M'} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{u^i - M'}{M'' - M'}\right)^2,\end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

где $M' \leqslant \operatorname{vrai}\min\limits_{i,\Omega} u^i(x)$, $M'' \geqslant \operatorname{vrai}\max\limits_{i,\Omega} u^i(x)$, а число $\lambda > 4N$. Покажем, что функции $w_\pm^l(x) = \varphi_\pm^l(\mathbf{u}(x))$, $l = 1, \ldots, N$, обладают свойствами 1) и 2) при некоторых M_1, δ_1, δ_2, δ_3, если $\mathbf{u} \in W_m^1(\Omega)$ и $M' \leqslant u^l(x) \leqslant M''$.

Обозначим: $(u^l(x) - M')/(M'' - M') = v^l(x)$, $\sum\limits_{l=1}^N (v^l(x))^2 = v(x)$. Ясно, что $(M'' - u^l(x))/(M'' - M') = 1 - v^l(x)$ и $0 \leqslant v^l(x) \leqslant 1$.

Свойство 1), очевидно, выполняется для $M_1 = \lambda + N$. Свойству 2) будет удовлетворять одна из двух функций w_+^r или w_-^r с индексом r, взятым из условия

$$\omega^r \equiv \operatorname{osc}\{v^r; K_R\} = \max_{l=1,\ldots,N} \operatorname{osc}\{v^l; K_R\} \equiv \max_{l=1,\ldots,N} \omega^l. \tag{8.5}$$

Проверим это. Легко видеть, что

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{osc}\{v^l; K_R\} = \operatorname{osc}\{1 - v^l; K_R\},\\ &\operatorname{osc}\{v; K_R\} \leqslant 2N\omega^r,\\ &\operatorname{osc}\{w_\pm^r; K_R\} \leqslant \lambda\omega^r + 2N\omega^r = (\lambda + 2N)\omega^r,\\ &\operatorname{osc}\{w_\pm^r; K_R\} \geqslant \lambda\omega^r - 2N\omega^r = (\lambda - 2N)\omega^r.\end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

Кроме того, верно одно из двух: или

$$\operatorname{mes}\left\{x \in K_{R/2}\colon\ v^r(x) \leqslant \mu_+^r - \frac{1}{2}\omega^r\right\} \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} K_{R/2}, \tag{8.7}$$

или

$$\operatorname{mes}\left\{x \in K_{R/2}\colon\ 1 - v^r(x) \leqslant \mu_-^r - \frac{1}{2}\omega^r\right\} \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} K_{R/2}, \tag{8.8}$$

где $\mu_+^r = \max\limits_{K_R} v^r(x)$, а $\mu_-^r = \max\limits_{K_R}(1 - v^r(x))$, ибо в каждой точке $x \in K_{R/2}$ или $v^r(x) \leqslant \mu_+^r - \frac{1}{2}\omega^r$, или $v^r(x) > \mu_+^r - \frac{1}{2}\omega^r$; второе же неравенство эквивалентно такому: $1 - v^r < 1 - \mu_+^r + \frac{1}{2}\omega^r = \mu_-^r - \frac{1}{2}\omega^r$.

Пусть из двух неравенств (8.7) и (8.8) справедливо, например, первое. Покажем, что тогда условию 2) будет удовлетворять функция w_+^r (в противном случае ему удовлетворяла бы функция w_-^r). Неравенство (8.1) выполняется с $\delta_1 = (\lambda - 2N)/(M'' - M')$ (см. (8.6)). Для проверки (8.2) заметим, что для тех точек x из $K_{R/2}$, для которых верно (8.7), имеем

$$w_+^r(x) \leqslant \lambda\left(\mu_+^r - \frac{1}{2}\omega^r\right) + \max_{K_R} v =$$
$$= \lambda\left(\mu_+^r - \frac{1}{2}\omega^r\right) + \min_{K_R} v + \operatorname{osc}\{v;\ K_R\} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{K_R} w_+^r - \left(\frac{\lambda}{2} - 2N\right)\omega^r \leqslant \max_{K_R} w_+^r - \frac{\lambda/2 - 2N}{\lambda + 2N}\operatorname{osc}\{w_+^r;\ K_R\},$$

т. е., иными словами,

$$\operatorname{mes}\left\{x \in K_{R/2}:\ w_+^r(x) > \max_{K_R} w_+^r - \frac{\lambda/2 - 2N}{\lambda + 2N}\operatorname{osc}\{w_+^r;\ K_R\}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\operatorname{mes} K_{R/2}. \qquad (8.9)$$

Тем самым мы проверили, что условие (8.2) выполняется для функции w_+^r (или w_-^r) с $\delta_2 = \frac{\lambda/2 - 2N}{\lambda + 2N} > 0$, $\delta_3 = \frac{1}{2}$ и $\delta_1 = (\lambda - 2N)/(M'' - M') > 0$. Сформулируем доказанное утверждение в виде леммы:

Лемма 8.1. *Функции* $w_\pm^l(x) = \varphi_\pm^l(\mathrm{u}(x))$, *где функции* $\varphi_\pm^l(\mathrm{u})$ *определены равенствами* (8.4) *с* $M' \leqslant \operatorname{vrai}\min_{i,\Omega} u^i(x)$, $M'' \geqslant \operatorname{vrai}\max_{i,\Omega} u^i(x)$, $\lambda > 4N$, *обладают свойствами* 1), 2) *из определения класса* $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\Omega, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ *с* $M_1 = \lambda + N$, $\delta_1 = (\lambda - 2N)/(M'' - M')$, $\delta_2 = (\lambda - 4N)/(2\lambda + 4N)$, $\delta_3 = 1/2$, $N_1 = 2N$.

Для функций $\mathrm{u}(x)$ классов $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\Omega, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ справедлива следующая

Теорема 8.1. *Пусть* $\mathrm{u}(x) = (u^1, \ldots, u^N)$ — *произвольная функция класса* $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\Omega, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ *и* K_{ρ_0} — *шар радиуса* $\rho_0 \leqslant 1$, *принадлежащий* Ω. *Тогда для любого шара* K_ρ, $\rho \leqslant \rho_0$, *концентрического шару* K_{ρ_0}, *колебание* $u^i(x)$ *в* K_ρ *оценивается так:*

$$\operatorname{osc}\{u^i(x);\ K_\rho\} \leqslant c\,(\rho/\rho_0)^\alpha, \qquad i = 1, \ldots, N, \qquad (8.10)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{N_1}\min\left\{-\lg_4\left(1-\tau^{-1}2^{-s}\right);\ 1-\frac{n}{q}\right\}, \\ c &= \frac{4^{\alpha}(N_1+1)}{\delta_1}\max\left\{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{1/m}2^s\tau\rho_0^{1-n/q};\quad 2^{2\alpha N_1+1}M_1\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

причем $\tau=\max\{2/\delta,\ 1/\delta_2\}$, *а* $s=s(m,\ \gamma,\ q,\ \delta_3)>0$ — *постоянная из леммы* 6.1.

Доказательство этой теоремы, так же как и теоремы 6.1, опирается на лемму 6.1. Ее следует применять к функции $w(x)=w^r(x)$, соответствующей по условию 2) шарам $K_{R/2}$ и K_R, считая

$$k'\equiv\max_{K_R}w^r-\omega\equiv\max_{K_R}w^r-\tau^{-1}\operatorname{osc}\{w^r;\ K_R\}.$$

Функция $w^r(x)$ удовлетворяет неравенствам (6.4) при всех $k\geqslant k'$, $l>k$; условие (6.7) с $\delta_0=\delta_3$ для нее также выполнено в силу (8.2), ибо $k'\geqslant\max\limits_{K_R}w^r-\delta_2\operatorname{osc}\{w^r;\ K_R\}$. Оценка (6.9) для $\omega=$ $=\tau^{-1}\operatorname{osc}\{w^r;\ K_R\}$ влечет за собой справедливость следующей леммы:

Лемма 8.2. *Возьмем произвольную функцию* u *из* $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\Omega,\ M_1,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \gamma,\ \gamma_1,\ \delta,\ 1/q)$ *и соответствующие ей функции* $w^l(x)$. *Для любого шара* $K_{R/4}$, *принадлежащего* Ω *вместе с концентрическими ему шарами* $K_{R/2}$ *и* K_R, *и функции* $w^r(x)$, *соответствующей паре шаров* $K_{R/2}$ *и* K_R *по свойству* 2) (*т. е.* w^r *удовлетворяет неравенствам* (8.1), (8.2)), *имеет место по крайней мере одно из двух неравенств*:

$$\operatorname{osc}\{w^r;\ K_R\}\leqslant\left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{1/m}\tau 2^s R^{1-n/q} \tag{8.12}$$

или

$$\operatorname{osc}\left\{w^r;\ K_{R/4}\right\}\leqslant\left(1-\tau^{-1}2^{-s}\right)\operatorname{osc}\left\{w^r;\ K_R\right\}, \tag{8.13}$$

где τ *и* s *определены в теореме* 8.1.

Доказательство этой леммы то же, что и леммы 6.4, надо только вместо (6.33) использовать неравенство (8.2).

Вернемся к теореме 8.1. Ее утверждение есть следствие лемм 8.2 и 4.9. Как говорилось выше, эта теорема нужна при изучении гладкости решений общих эллиптических уравнений и систем внутри их области определения. Условия, которые были наложены на функции классов $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\Omega,M_1,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\gamma,\gamma_1,\delta,1/q)$, относились лишь к внутренним шарам. Никаких ограничений на их поведение на границе и вблизи нее не накладывалось. Теорема 8.1, равно как и теорема 6.1, имеет локальный характер: в качестве области Ω можно взять любую ее часть, и поведение функций $u^i(x)$ в одной части Ω не влияет на их поведение в другой части Ω.

Если мы хотим установить гёльдеровость функций классов $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\Omega, \ldots)$ в замкнутой области $\overline{\Omega}$ или в $\Omega_1 = \Omega \cup S_1$, то необходимо наложить на эти функции какие-то условия и в пограничных шарах. При исследовании решений первой краевой задачи для эллиптических уравнений и систем в $\overline{\Omega}$ мы встретимся с нижеследующими условиями.

Определим класс $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\overline{\Omega}, M_1, \delta_1, \ldots, \delta_6, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ как совокупность вектор-функций $\mathbf{u}(x) = (u^1(x), \ldots, u^N(x))$ из класса $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\Omega, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$, для которых соответствующие им функции $w^l(x)$ обладают еще следующими свойствами:

4) Для любого пограничного шара с центром на S найдется такой номер r, что

$$\operatorname{osc}\{w^r(x); \Omega_R\} \geqslant \delta_4 \max_{l=1, \ldots, N} \operatorname{osc}\{u^l; \Omega_R\}, \tag{8.14}$$

и если

$$\operatorname{osc}\{w^r(x); \Omega_R\} > \delta_5 \max_{l=1, \ldots, N_1} \operatorname{osc}\{w^l; S_R\}, \tag{8.15}$$

то

$$\max_{S_R} w^r(x) \leqslant \max_{\Omega_R} w^r(x) - \delta_6 \operatorname{osc}\{w^r; \Omega_R\}, \tag{8.16}$$

причем $\delta_4 > 0$, $\delta_5 > 1$, $\delta_6 \in (0, 1)$.

5) Неравенства (8.3) с $w = w^l$, $l = 1, \ldots, N_1$, выполняются для всех шаров K_ρ с центром на S и $\rho \leqslant a_0$ при

$$k \geqslant \max\{\max_{S_R} w(x); \max_{\Omega_R} w(x) - \delta M\}. \tag{8.17}$$

Мы покажем, что функции этого класса удовлетворяют условию Гёльдера в $\overline{\Omega}$, если только ему удовлетворяют значения w^l на S. Для этого сформулируем аналог лемм 6.2 и 7.1, пригодный в данном случае для пограничных шаров.

Лемма 8.3. *Возьмем произвольную функцию* $\mathbf{u}(x)$ *из* $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\overline{\Omega}, M_1, \delta_1, \ldots, \delta_6, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ *и соответствующие ей функции* $w^l(x)$, $l = 1, \ldots, N_1$. *Пусть* S *удовлетворяет условию* (A) *и* K_R *есть произвольный шар с центром на* S *и* $R \leqslant a_0$, *а* $K_{R/2}$ *и* $K_{R/4}$ — *два концентрических ему шара. В силу свойства* 4) *функций класса* $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\overline{\Omega}, \ldots, 1/q)$ *шару* K_R *соответствует функция* $w^r(x)$. *Для нее имеет место по крайней мере одно из неравенств*:

$$\operatorname{osc}\{w^r; \Omega_R\} \leqslant \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{1/m} \tau 2^s R^{1-n/q}$$

или

$$\operatorname{osc}\{w^r; \Omega_{R/4}\} \leqslant (1 - \tau^{-1} 2^{-s}) \operatorname{osc}\{w^r; \Omega_R\},$$

если только

$$\operatorname{osc}\{w^r;\ \Omega_R\} \geqslant \delta_5 \max_{l=1,\ \dots,\ N_1} \operatorname{osc}\{w^l;\ S_R\}. \tag{8.18}$$

Здесь $\tau = \max\{2/\delta;\ \delta_6^{-1}\}$, *а* $s = s(m, \gamma, q, \theta_0)$ — *постоянная из леммы* 7.2.

Эту лемму можно доказать так же, как и лемму 8.2, если вместо леммы 6.1 использовать лемму 7.1 и заметить, что, предполагая выполненным неравенство (8.18), мы будем иметь неравенство (8.16). Последнее гарантирует возможность использовать основные неравенства (8.3) для уровней $k \geqslant k' = \max\limits_{\Omega_R} w^r - \omega$, где $\omega = \tau^{-1} \operatorname{osc}\{w^r;\ \Omega_R\}$. Для этих уровней k условие (8.17) выполнено. Так как эти уровни берутся выше значений w^r на S_R, то для w^r выполнены все условия леммы 7.1. В остальном все доказательство такое же, как и для леммы 8.2.

Из лемм 4.9 и 8.3 выводится теорема 8.2 при тех же предположениях о S, что и в теореме 7.1.

Теорема 8.2. *Если вектор-функция* $\mathbf{u}(x)$ *принадлежит* $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\overline{\Omega}, M_1, \delta_1, \dots, \delta_6, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ *и* $w^l(x)$ *на* S *удовлетворяют условию Гёльдера, точнее, если*

$$\operatorname{osc}\{w^l;\ S_\rho\} \leqslant L\rho^\varepsilon, \qquad l = 1, \dots, N_1, \tag{8.19}$$

для шаров K_ρ *с центром на* S *радиуса* $\rho \leqslant a_0$, *то* $\mathbf{u}(x)$ *удовлетворяет условию Гёльдера в* $\overline{\Omega}$, *т. е. для любого* K_ρ *с* $\rho \leqslant a_0$ *имеют место оценки*

$$\operatorname{osc}\{u^i;\ \Omega_\rho\} \leqslant c\rho^\alpha, \qquad i = 1, \dots, N, \tag{8.20}$$

причем c *определяется лишь параметрами класса* $\mathfrak{B}_m^{N_1}$, L *и* ε *из* (8.19) *и постоянными* a_0 *и* θ_0 *из условия* (A) *на* S, *а* α *зависит лишь от* N_1, m, γ, δ_2, δ_3, δ_6, δ, q, θ_0 *и* ε.

Если условие (8.19) *выполнено не для всей* S, *а только для ее части* S_1, *то вместо* (8.20) *выполняются неравенства*

$$\operatorname{osc}\{u^i;\ \Omega_\rho\} \leqslant c\,(\rho/\rho_0)^\alpha, \qquad i = 1, \dots, N,$$

где ρ_0 — *расстояние от центра* K_ρ *до* $S \setminus S_1$, *а* c *и* α *такие же, как в* (8.20).

Так как внутренние шары уже рассмотрены в теореме 8.1, то для доказательства теоремы 8.2 достаточно рассмотреть лишь шары с центром на S. Для них, так же как и для внутренних шаров, надо воспользоваться леммой 4.9, а вместо леммы 8.2 применить лемму 8.3 и заметить, что если условие (8.18) леммы 8.3 не выполнено, т. е. если

$$\operatorname{osc}\{w^r;\ \Omega_R\} \leqslant \delta_5 \max_{l=1,\ \dots,\ N_1} \operatorname{osc}\{w^l;\ S_R\},$$

то это последнее неравенство сразу дает нужную оценку колебания w^r. Действительно, то, что стоит справа, не превосходит $\delta_5 L R^\varepsilon$, ибо функции $w^l(x)$ удовлетворяют условию (8.19) на границе S. Итак, теорему 8.2 можно считать доказанной.

При исследовании второй и третьей краевых задач для квазилинейных эллиптических систем мы будем иметь дело с функциями $\mathbf{u}(x)$, которые удовлетворяют всем требованиям класса $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\Omega, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ не только для внутренних шаров, но и для шаров, пересекающих некоторую часть S_1 границы S, при этом под $A_{k,\rho}$ понимаются множества точек x из Ω_ρ, где $w^l(x) > k$. Этот класс функций обозначим через $\widehat{\mathfrak{B}}_m^{N_1}(\Omega \cup S_1, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$. Для него справедлива

Теорема 8.3. *Если S_1 удовлетворяет требованиям* 1) *и* 2) *теоремы* 7.2, *то для любой* $\mathbf{u}$ *из* $\widehat{\mathfrak{B}}_m^{N_1}(\Omega \cup S_1, \ldots)$ *выполняется оценка* $\operatorname{osc}\{u^l; \Omega_\rho\} \leqslant c(\rho/\rho_0)^\alpha$, *в которой c и α определяются параметрами класса $\widehat{\mathfrak{B}}_m^{N_1}$ и постоянными β и θ из условий на S_1, а ρ_0 есть расстояние от центра K_ρ до $S \setminus S_1$, причем α не зависит от γ_1, δ_1 и M_1.*

Это утверждение доказывается так же, как и теорема о внутренних оценках для функций класса $\mathfrak{B}_m^{N_1}$, с учетом тех замечаний, что были сделаны к теореме 7.2. Прежде чем заканчивать данный параграф, убедимся еще в справедливости такой леммы:

Лемма 8.4. *Функции* $w_\pm^l(x) = \varphi_\pm^l(\mathbf{u}(x))$, *где функции* $\varphi_\pm^l(\mathbf{u})$ *определены равенствами* (8.4) *с* $M' \leqslant \operatorname{vrai}\min\limits_{l,\Omega} u^l(x)$, $M'' \geqslant \operatorname{vrai}\max\limits_{l,\Omega} u^l(x)$ *и* $\lambda = 10N$, *обладают свойствами* 1), 2), 4) *из определения класса* $\mathfrak{B}_m^{N_1}(\overline{\Omega}, M_1, \delta_1, \ldots, \delta_6, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ *с* $\delta_1 = 8N/(M'' - M')$, $\delta_2 = 1/4$, $\delta_3 = 1/2$, $\delta_4 = 8N/(M'' - M')$, $\delta_5 = 3$, $\delta_6 = 1/24$, $M_1 = 11N$, $N_1 = 2N$.

Лемма верна при любом λ, превосходящем некоторое число. Мы его зафиксировали в виде $10N$. При таком λ сравнительно красивы значения остальных параметров класса.

Справедливость свойств 1) и 2) для функций (8.4) была проверена в лемме 8.1. Нам осталось проверить лишь свойство 4).

Введем обозначения:

$$v^l(x) = \frac{u^l(x) - M'}{M'' - M'}, \quad v = \sum_{l=1}^{N} v^{l^2}, \quad w_\pm^l(x) = \varphi_\pm^l(\mathbf{u}(x)),$$

$$\omega^l = \operatorname{osc}\{v^l; \Omega_R\} = \frac{1}{M'' - M'} \operatorname{osc}\{u^l; \Omega_R\}.$$

Индекс r снова выберем из условия $\omega^r = \max\limits_{l=1,\ldots,N} \omega^l$. Тогда для v^l и $w_\pm^l$ в K_R верны те же соотношения (8.6), что и в лемме 8.1. Поэтому неравенство (8.14) выполняется с $\delta_4 = (\lambda - 2N)/(M'' - M')$. Переходим к доказательству (8.16).

Возьмем пока произвольное положительное число $\varepsilon < 1$. Верно одно из двух: или

$$(1-\varepsilon)\,\omega^r \geqslant \max_{l=1,\ldots,N} \operatorname{osc}\{v^l;\ S_R\}, \tag{8.21}$$

или

$$(1-\varepsilon)\,\omega^r < \max_{l=1,\ldots,N} \operatorname{osc}\{v^l;\ S_R\}. \tag{8.21'}$$

Второе из этих неравенств в силу (8.6) влечет за собою следующее:

$$\operatorname{osc}\left\{w_\pm^r;\ \Omega_R\right\} \leqslant (\lambda + 2N)\,\omega^r < \frac{\lambda+2N}{1-\varepsilon} \max_{l=1,\ldots,N} \operatorname{osc}\{v^l;\ S_R\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda+2N}{(1-\varepsilon)(\lambda-2N)} \max_{l=1,\ldots,N_1} \operatorname{osc}\left\{w_\pm^l;\ S_R\right\}. \tag{8.22}$$

Поэтому, если выполнено неравенство, обратное (8.22), т. е.

$$\operatorname{osc}\{w^r;\ \Omega_R\} \geqslant \frac{\lambda+2N}{(1-\varepsilon)(\lambda-2N)} \max_{l=1,\ldots,N_1} \operatorname{osc}\left\{w_\pm^l;\ S_R\right\} \tag{8.23}$$

для $w^r = w_+^r$ или $w^r = w_-^r$, то верно неравенство, обратное (8.21′), т. е. неравенство (8.21). Итак, из (8.23) следует (8.21). Пусть выполнено неравенство (8.23) или, что то же, неравенство (8.15) с $\delta_5 = \frac{\lambda+2N}{(1-\varepsilon)(\lambda-2N)}$. При этом условии мы хотим доказать, что для одной из функций w_+^r или w_-^r будет верно неравенство (8.16) с $\delta_6 > 0$.

Действительно, в силу (8.21) верно по крайней мере одно из двух: или

$$\max_{S_R} v^r \leqslant \max_{\Omega_R} v^r - \frac{\varepsilon}{2}\,\omega^r, \tag{8.24}$$

или

$$\min_{S_R} v^r \geqslant \min_{\Omega_R} v^r + \frac{\varepsilon}{2}\,\omega^r. \tag{8.25}$$

Из последнего следует:

$$\max_{S_R}(1 - v^r) = 1 - \min_{S_R} v^r \leqslant 1 - \left(\min_{\Omega_R} v^r + \frac{\varepsilon}{2}\,\omega^r\right) =$$
$$= \max_{\Omega_R}(1 - v^r) - \frac{\varepsilon}{2}\,\omega^r. \tag{8.26}$$

Если выполнено неравенство (8.24), то

$$\max_{S_R} w_+^r \leqslant \lambda\left(\max_{\Omega_R} v^r - \frac{\varepsilon}{2}\omega^r\right) + \max_{\Omega_R} v =$$

$$= \lambda \max_{\Omega_R} v^r - \lambda\frac{\varepsilon}{2}\omega^r + \operatorname{osc}\{v;\ \Omega_R\} + \min_{\Omega_R} v \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\Omega_R} w_+^r - \left(\frac{\lambda\varepsilon}{2} - 2N\right)\omega^r \leqslant \max_{\Omega_R} w_+^r - \frac{\lambda\varepsilon/2 - 2N}{\lambda + 2N}\operatorname{osc}\{w_+^r;\ \Omega_R\}, \qquad (8.27)$$

т. е. получаем желаемое неравенство (8.16) для w_+^r с $\delta_6 = \frac{\lambda\varepsilon/2 - 2N}{\lambda + 2N}$ (предполагается, что $\varepsilon > 4N/\lambda$).

Если выполнено (8.25) и, следовательно, (8.26), то аналогично только что проделанному выводу найдем, что неравенство (8.16) выполняется для w_-^r с тем же самым δ_6. Если ε положить равным $5N/\lambda$ и в качестве λ взять $10N$, то параметры $\mathfrak{B}_m^{N_1}$ примут те значения, которые указаны в лемме.

Лемма доказана.

§ 9. Класс $\tilde{\mathfrak{B}}_m^N\left(\Omega \cup S_1,\ \nu(\tau),\ M,\ \gamma,\ \gamma_1,\ \frac{1}{q}\right)$

Введем в рассмотрение еще один вариант классов $\mathfrak{B}$, который будет полезен при исследовании дифференциальных свойств решений нерегулярных вариационных задач (гл. V) и вырождающихся квазилинейных систем (гл. VII). Специфика этого случая состоит в том, что по сравнению с §§ 6—8 в неравенствах вида (6.1), (8.3) в подынтегральном выражении будет допускаться весовой множитель $\nu(|\mathbf{u}(x)|)$, который может обращаться в нуль при $\mathbf{u} = 0$. Именно, обозначим через $\tilde{\mathfrak{B}}_m^N(\Omega \cup S_1,$ $\nu(\tau)$, M, γ, γ_1, $1/q)$ класс вектор-функций $\mathbf{u}(x) = (u^1(x), \ldots, u^N(x)) \in \overset{1}{W}{}_m(\Omega)$ таких, что $\operatorname{vrai}\max_{\Omega} |\mathbf{u}(x)| \leqslant M$ и произвольные линейные комбинации вида $w(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k u^k(x)$, $\sum_{k=1}^{N} c_k^2 \leqslant 1$, удовлетворяют при любых значениях k неравенствам

$$\int_{A_{k,\rho-\sigma\rho}} \nu(|\mathbf{u}|)|\nabla w|^m\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \max_{A_{k,\rho}} \nu(|\mathbf{u}|)\left[\gamma\sigma^{-m}\rho^{-m\left(1-\frac{n}{q}\right)} \max_{A_{k,\rho}} (w(x) - k)^m + \gamma_1\right] \operatorname{mes}^{1-\frac{m}{q}} A_{k,\rho}. \qquad (9.1)$$

Здесь K_ρ и $K_{\rho-\sigma\rho}$, $\sigma \in (0, 1)$, — любые концентрические шары с центром в $\overline{\Omega}$, не пересекающие $S \setminus S_1$; $A_{k,\rho} = \{x \in \Omega_\rho;\ w(x) > k\}$;

m, M, γ, γ_1, q — фиксированные положительные числа, причем $1 \leqslant m \leqslant n$, $q > n$; $\nu(\tau)$ — неотрицательная неубывающая функция $\tau \geqslant 0$, удовлетворяющая неравенству

$$\nu(\tau_1) \leqslant (\tau_1/\tau_2)^{\lambda}\, \nu(\tau_2), \quad \forall \tau_1 \geqslant \tau_2 > 0, \tag{9.2}$$

с какой-либо постоянной $\lambda > 0$, причем $\nu(\tau) > 0$ при $\tau > 0$.

Имеет место следующая теорема *)

Теорема 9.1. *Для любой* $\mathbf{u}(x)$ *из* $\tilde{\mathfrak{B}}_m^N(\Omega, \nu(\tau), M, \gamma, \gamma_1, 1/q)$ *в произвольном шаре* $K_\rho = K_\rho(x^0) \subset \Omega$ *верна оценка*

$$\max_{i=1,\ldots,N} \operatorname{osc}\{u^i(x);\ K_\rho\} \leqslant c\rho_0^{-\alpha}\rho^{\alpha}, \tag{9.3}$$

где ρ_0 — *расстояние* x^0 *до* S, *постоянная* $\alpha > 0$ *определяется величиной* λ *из условия* (9.2), m, N, γ *и* q, *а* c *зависит, кроме того, от* M, γ_1 *и* ρ_0.

Если часть S_1 *границы* Ω *удовлетворяет условию* (A) *и* $\mathbf{u}(x) \in C^{\beta}(S_1) \cap \tilde{\mathfrak{B}}_m^N(\Omega \cup S_1, \nu(\tau), M, \gamma, \gamma_1, 1/q)$, *то оценка* (9.3) *выполняется и для шаров* $K_\rho(x^0)$, *пересекающихся с* S_1 (*но не с* $S \setminus S_1$), *причем в этом случае* c *зависит от расстояния* ρ_0 *от* x^0 *до* $S \setminus S_1$, λ, m, N, γ, γ_1, q, β, $|\mathbf{u}|_{S_1}^{(\beta)}$ *и постоянных* a_0 *и* θ_0 *из условия* (A), *а* $\alpha > 0$ *определяется величинами* λ, m, N, γ, q, β *и* θ_0.

Справедливость утверждений теоремы 9.1 вытекает из леммы 4.9 и нижеследующей леммы 9.1, доказательству которой посвящена остальная часть параграфа.

Лемма 9.1. *Пусть функция* $\mathbf{u}(x)$ *принадлежит классу* $\tilde{\mathfrak{B}}_m^N(\Omega, \nu(\tau), M, \gamma, \gamma_1, 1/q)$. *Рассмотрим* $3N$ *функций*

$$u^i(x);\ \pm 3Nu^i(x) + |\mathbf{u}(x)|, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{9.4}$$

где $|\mathbf{u}| = \sum_{k=1}^{N} |u^k|$. *Для каждой пары концентрических шаров* $K_R \subset \Omega$ *и* $K_{R/4} \subset \Omega$ *найдется по крайней мере одна функция* $w(x)$ *из семейства* (9.4) *такая, что*

$$\operatorname{osc}\{w;\ K_R\} \geqslant \delta_1 \max_{i=1,\ldots,N} \operatorname{osc}\{u^i;\ K_R\} \tag{9.5}$$

и

$$\operatorname{osc}\{w;\ K_{R/4}\} \leqslant \vartheta \operatorname{osc}\{w;\ K_R\} + c_1 R^{1-\frac{n}{q}}, \tag{9.6}$$

причем постоянные $\delta_1 > 0$ *и* $\vartheta \in (0, 1)$ *определяются величинами* λ, m, N, γ, q, *а* c_1 *зависит также от* M *и* γ_1.

Если $\mathbf{u} \in C^{(\beta)}(S_1) \cap \tilde{\mathfrak{B}}_m^N(\Omega \cup S_1, \nu(\tau), M, \gamma, \gamma_1, 1/q)$, S_1 *удовлетворяет условию* (A), *центр шара* K_R *принадлежит* S_1 *и*

*) В несколько иной форме она доказана в [36₄].

$K_R \cap (S \setminus S_1) = \varnothing$, то по крайней мере одна из функций w из семейства (9.4) *такова, что*

$$\operatorname{osc}\{w;\ \Omega_R\} \geqslant \delta_1 \max_{i=1,\ \ldots,\ N} \operatorname{osc}\{u^i;\ \Omega_R\} \tag{9.7}$$

и

$$\operatorname{osc}\{w;\ \Omega_{R/4}\} \leqslant \vartheta \operatorname{osc}\{w;\ \Omega_R\} + c_1 R^{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \min\left\{\beta,\ 1 - \frac{n}{q}\right\}, \tag{9.8}$$

где $\delta_1 > 0$ и $\vartheta \in (0,\ 1)$ определяются λ, m, N, γ, q, β и величиной θ_0 из условия (A), *а c_1 зависит, кроме того, от M, γ_1, $|\mathbf{u}|_{S_1}^{(\beta)}$ и a_0.*

Отметим, что часть из функций (9.4), точнее, функции $\pm 3Nu^i + |\mathbf{u}|$, $i = 1,\ \ldots,\ N$, вообще говоря, не подчиняются неравенствам (9.1). С другой стороны, введение именно таких функций связано с характером весового множителя $\nu(|\mathbf{u}|)$ в неравенствах (9.1).

Проведем сначала рассмотрения, касающиеся внутренних оценок. Фиксируем шар $K_R \subset \Omega$. Без ограничения общности можно предположить, что для каждой компоненты $u^i(x)$, $i = 1,\ \ldots,\ N$, бо́льшая часть ее колебания в шаре K_R приходится на область положительных значений (если для какого-либо i это не так, то надо $u^i(x)$ заменить на $-u^i(x)$, это не нарушает принадлежности вектор-функции $\mathbf{u}(x)$ классу $\mathfrak{B}_m^N$). Таким образом, можно считать, что для данного шара K_R при всех $i = 1,\ \ldots,\ N$ выполняются неравенства

$$m^i + \frac{\omega^i}{2} \geqslant 0, \tag{9.9}$$

где

$$\omega^i \equiv \operatorname{osc}\{u^i;\ K_R\}; \quad m^i \equiv \min\left\{0;\ \min_{K_R} u^i\right\} \leqslant 0. \tag{9.10}$$

Пусть

$$\max_{i=1,\ \ldots,\ N} \omega^i = \omega^r. \tag{9.11}$$

Среди функций (9.4) будем выбирать для дальнейшего рассмотрения либо одну из $u^i(x)$, $i = 1,\ \ldots,\ N$, либо функцию

$$w^r(x) \coloneqq 3Nu^r(x) + |\mathbf{u}(x)| \tag{9.12}$$

в зависимости от того, малы или нет величины $|m^i|$. Точнее, будет указана постоянная $t > 0$, определяемая лишь m, N, γ, q и λ из условий (9.1), (9.2), такая, что если

$$\max_{i=1,\ \ldots,\ N} |m^i| \leqslant 2^{-t} \omega^r, \tag{9.13}$$

то справедливость оценок (9.5), (9.6) будет доказана для $w = w^r(x)$, а если (9.13) не выполнено, то неравенства (9.5), (9.6) будут выведены для $w = u^l(x)$ с тем номером l, для которого

$$|m^l| = -m^l > 2^{-t}\omega^r. \tag{9.14}$$

Рассмотрим сначала второй случай.

Лемма 9.2. *Если при некотором l выполняется неравенство* (9.14) *с каким-либо $t \geqslant 2$, то функция $w = u^l(x)$ удовлетворяет неравенствам* (9.5), (9.6), *в которых $\delta_1 = 2^{-t+1}$, постоянная $\vartheta \in (0, 1)$ определяется лишь m, N, q, γ, λ и t, а c_1 зависит также от γ_1.*

Доказательство. Условие (9.9) вместе с (9.11) и (9.14) влечет оценку

$$\omega^l \geqslant 2^{-t+1}\omega^r, \tag{9.15}$$

т. е. оценку (9.5) с $\delta_1 = 2^{-t+1}$. Обратимся к неравенствам (9.1) для $w = \pm u^l(x)$ и докажем, что при некоторых значениях k из них следуют неравенства (6.4) леммы 6.1. Имеем

$$\max_{K_R} |\mathbf{u}| \leqslant \min_{K_R} |\mathbf{u}| + N\omega^r. \tag{9.16}$$

Кроме того, при $k \geqslant k'_+ \equiv \max\limits_{K_R} u^l - \frac{\omega^l}{4} = m^l + \frac{3}{4}\omega^l > 0$ в силу (9.9) и (9.15) можно оценить $|\mathbf{u}(x)|$ снизу на множествах $A_{k,\rho}$, соответствующих функции $w = u^l(x)$:

$$\min_{A_{k,R}} |\mathbf{u}| \geqslant \frac{1}{2}\left(\min_{A_{k,R}} |\mathbf{u}| + \min_{A_{k,R}} |u^l|\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\left(\min_{K_R} |\mathbf{u}| + m^l + \frac{3}{4}\omega^l\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\min_{K_R} |\mathbf{u}| + 2^{-t-1}\omega^r\right). \tag{9.17}$$

Вместе с (9.16) это дает при $k \geqslant k'_+$

$$\max_{A_{k,R}} |\mathbf{u}| \leqslant 2^{t+2}N \min_{A_{k,R}} |\mathbf{u}|,$$

и тем более для любых шаров $K_{\rho-\sigma\rho} \subset K_\rho \subset K_R$, концентрических с K_R, и $\forall k \geqslant k'_+$ получаем

$$\max_{A_{k,\rho}} |\mathbf{u}| \leqslant 2^{t+2}N \min_{A_{k,\rho-\sigma\rho}} |\mathbf{u}|. \tag{9.18}$$

Аналогичные оценки $|\mathbf{u}(x)|$ на множествах $A_{k,R}$, соответствующих функции $w = -u^l(x)$, при $k \geqslant k'_- \equiv \max\limits_{K_R}(-u^l) - 2^{-t-1}\omega^l = -m^l - 2^{-t-1}\omega^l > 2^{-t-1}\omega^r$ имеют вид

$$\min_{A_{k,R}} |\mathbf{u}| \geqslant \frac{1}{2}\left(\min_{K_R} |\mathbf{u}| + \min_{A_{k,R}} |u^l|\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\min_{K_R} |\mathbf{u}| + k\right) > \frac{1}{2}\left(\min_{K_R} |\mathbf{u}| + 2^{-t-1}\omega^r\right), \tag{9.19}$$

откуда в силу (9.16) вытекает соответствующая оценка (9.18) для $k \geqslant k'_-$.

Обращаясь теперь к неравенствам (9.1) для функций $w = \pm u^l$ и учитывая (9.18) и условие (9.2), выводим, что функция $w(x) = u^l(x)$ удовлетворяет при всех

$$k \geqslant k'_+ \equiv \max_{K_R} u^l - \frac{1}{4}\omega^l, \qquad \forall l > k, \tag{9.20}$$

неравенствам (6.4), в которых постоянные γ и γ_1 заменены на $\bar\gamma = (2^{t+2}N)^\lambda\gamma$ и $\bar\gamma_1 = (2^{t+2}N)^\lambda\gamma_1$ соответственно, а функция $w(x) = -u^l(x)$ удовлетворяет точно таким же неравенствам при

$$k \geqslant k'_- \equiv \max_{K_R}(-u^l) - 2^{-t-1}\omega^l, \qquad \forall l > k. \tag{9.21}$$

Далее, по крайней мере одна из пары функций $w = \pm u^l(x)$ удовлетворяет условию (6.7) леммы 6.1 с $k' = k'_\pm$ соответственно и с $\delta_0 = 1/2$. В самом деле, верно одно из соотношений:

$$\operatorname{mes}\{x \in K_{R/2}\colon u^l(x) \geqslant k'_+\} \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{mes} K_{R/2}$$

или

$$\operatorname{mes}\{x \in K_{R/2}\colon -u^l(x) > -k'_+\} < \frac{1}{2}\operatorname{mes} K_{R/2},$$

а из последнего следует, что

$$\operatorname{mes}\{x \in K_{R/2}\colon -u^l(x) > k'_-\} < \frac{1}{2}\operatorname{mes} K_{R/2},$$

так как $k'_- > -k'_+$.

Итак, либо для $w = u^l$, либо для $w = -u^l$ выполнены все предположения леммы 6.1 (с $k'' = \max\limits_{K_R} w$), а потому верно утверждение этой леммы — оценка (6.9) с постоянной $s = s(m,\ 2^{(t+2)\lambda}N^\lambda\gamma,\ q,\ 1/2) > 0$. Для функции $w = u^l$ из (6.9) следует неравенство

$$\frac{\omega^l}{4} = \max_{K_R} u^l - k'_+ \leqslant$$
$$\leqslant 2^s \max\left\{\operatorname{osc}\{u^l;\ K_R\} - \operatorname{osc}\{u^l;\ K_{R/4}\};\ \bar\gamma^{-\frac{1}{m}}\bar\gamma_1^{\frac{1}{m}}R^{1-\frac{n}{q}}\right\},$$

а для $w = -u^l$ — неравенство

$$2^{-t-1}\omega^l = \max_{K_R}(-u^l) - k'_- \leqslant 2^s \max\{\operatorname{osc}\{u^l;\ K_R\} -$$
$$- \operatorname{osc}\{u^l;\ K_{R/4}\};\ \bar\gamma^{-\frac{1}{m}}\bar\gamma_1^{\frac{1}{m}}R^{1-\frac{n}{q}}\},$$

так что в любом случае можно утверждать справедливость оценки

$$\operatorname{osc}\{u^t; K_{R/4}\} \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 - 2^{-t-s-1}\right) \operatorname{osc}\left\{u^t; K_R\right\} + 2^{t+s+1}\bar{\gamma}^{-\frac{1}{m}}\bar{\gamma}_1^{\frac{1}{m}} R^{1-\frac{n}{q}}, \qquad (9.22)$$

т. е. оценки (9.6) с $\vartheta = 1 - 2^{-t-s-1}$, $c_1 = 2^{t+s+1}\bar{\gamma}^{-1/m}\bar{\gamma}_1^{1/m}$.

Лемма 9.2 доказана.

Рассмотрим теперь возможность, противоположную той, которая имела место в лемме 9.2. Именно предположим, что для некоторого достаточно большого $t > 0$ оценка (9.14) не верна ни при каком $i = 1, \ldots, N$, т. е. выполняется неравенство (9.13). В этом случае мы докажем справедливость утверждения леммы 9.2 для $w = w^r = 3Nu^r + |\mathbf{u}|$. К сожалению, при этом нельзя будет применять лемму 6.1 непосредственно к функциям $w^r(x)$, потому что $w = w^r$, равно как и $w = |\mathbf{u}|$ не удовлетворяют неравенствам (9.1). В связи с этим введем для данного шара K_R вспомогательную функцию

$$\tilde{w}^r(x) = 3Nv^r(x) + v(x), \qquad (9.23)$$

где

$$v^i(x) = u^i(x) - m^i \geqslant 0, \quad v(x) = \sum_{i=1}^{N} v^i(x). \qquad (9.24)$$

Очевидно, что функции $w = \pm\tilde{w}^r$ при любых k подчиняются неравенствам (9.1) с постоянной $\tilde{\gamma}_1 = 3^m(N+1)^m$ вместо γ_1.

Колебания $\tilde{\omega} \equiv \operatorname{osc}\{\tilde{w}^r; K_R\}$ и $\operatorname{osc}\{w^r; K_R\}$ связаны с ω^r неравенствами

$$\left.\begin{aligned} &2N\omega^r \leqslant \operatorname{osc}\{w^r; K_R\} \leqslant 4N\omega^r, \\ &2N\omega^r \leqslant \tilde{\omega} \leqslant 4N\omega^r. \end{aligned}\right\} \qquad (9.25)$$

Кроме того, предположение (9.13) обеспечивает справедливость следующих соотношений:

$$v^i(x) - 2^{-t}\omega^r \leqslant |u^i(x)| \leqslant v^i(x) + 2^{-t}\omega^r, \qquad (9.26)$$

$$N|\mathbf{u}(x)| \geqslant \sum_{i=1}^{N} |u^i(x)| \geqslant \frac{1}{3N+1}(3N|u^r(x)| + |\mathbf{u}(x)|) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{4N}\left(\tilde{w}^r(x) - 2^{-t+2}N\omega^r\right), \qquad (9.27)$$

$$|\mathbf{u}(x)| \leqslant v(x) + 2^{-t}N\omega^r \leqslant \tilde{w}^r(x) + 2^{-t}N\omega^r. \qquad (9.28)$$

Отсюда и из (9.25) следуют неравенства

$$\frac{1}{4N^2}\left[\tilde{w}^r(x) - 2^{-t+1}\tilde{\omega}\right] \leqslant |\mathbf{u}(x)| \leqslant \tilde{w}^r(x) + 2^{-t-1}\tilde{\omega}. \qquad (9.29)$$

Заметим также, что если t велико, то колебание функции $w^r(x)$ в любом шаре $K_\rho \subset K_R$ мало отличается от колебания $\tilde{w}^r$ в K_ρ, ибо в силу (9.25), (9.26)

$$\left|\operatorname{osc}\{w^r;\ K_\rho\} - \operatorname{osc}\{\tilde{w}^r;\ K_\rho\}\right| \leqslant 2^{-t}\tilde{\omega}. \tag{9.30}$$

В частности, при $\rho = R$ это дает

$$\tilde{\omega} \leqslant (1 - 2^{-t})^{-1} \operatorname{osc}\{w^r;\ K_R\}. \tag{9.31}$$

Имеет место

Лемма 9.3. *Пусть выполнено предположение* (9.13) *с некоторым* $t > 3$. *Тогда функция* $w = \tilde{w}^r(x)$ *удовлетворяет при* $k \geqslant \max\limits_{K_R} \tilde{w}^r - \frac{\tilde{\omega}}{2}$, $l > k$, *неравенствам* (6.4) *с постоянными* γ *и* γ_1, *замененными на* $32^\lambda N^{2\lambda}\gamma$ *и* $3^m 32^\lambda N^{2\lambda}\gamma_1(N+1)^m$ *соответственно, а функция* $w = -\tilde{w}^r(x)$ *удовлетворяет таким же неравенствам при* $k \leqslant -2^{-t+3}\tilde{\omega}$, $l \in \left[k,\ \frac{1}{2}[k + \max\limits_{K_R}(-\tilde{w}^r)]\right]$.

Доказательство. Рассмотрим сначала функцию $w = \tilde{w}^r(x)$. При $k \geqslant \max\limits_{K_R} \tilde{w}^r - \frac{\tilde{\omega}}{2} = \min\limits_{K_R} \tilde{w}^r + \frac{\tilde{\omega}}{2}$ в силу (9.29) верны оценки

$$\max_{A_{k,R}} |\mathbf{u}(x)| \leqslant \max_{K_R} \tilde{w}^r + 2^{-t-1}\tilde{\omega} \leqslant \min_{K_R} \tilde{w}^r + 2\tilde{\omega},$$

$$\min_{A_{k,R}} |\mathbf{u}(x)| \geqslant \frac{1}{4N^2}\left[\min_{A_{k,R}} \tilde{w}^r - 2^{-t+1}\tilde{\omega}\right] = \frac{1}{4N^2}\left(k - 2^{-t+1}\tilde{\omega}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4N^2}\left(\min_{K_R} \tilde{w}^r + \frac{\tilde{\omega}}{2} - 2^{-t+1}\tilde{\omega}\right) \geqslant \frac{1}{4N^2}\left(\min_{K_R} \tilde{w}^r + \frac{\tilde{\omega}}{4}\right),$$

так что

$$\max_{A_{k,R}} |\mathbf{u}(x)| \leqslant 32N^2 \min_{A_{k,R}} |\mathbf{u}(x)|, \tag{9.32}$$

где $A_{k,R} = \{x \in K_R\colon\ \tilde{w}^r(x) > k\}$. Отсюда, из условия (9.2) и неравенств (9.1) для $w = \tilde{w}^r$ следует справедливость первого утверждения леммы 9.3.

Обратимся теперь к неравенствам (9.1) для функции $w = -\tilde{w}^r(x)$. Из них при $\forall l > k$ вытекают неравенства

$$\int\limits_{A_{k,\rho-\sigma\rho} \setminus A_{l,\rho-\sigma\rho}} \nu(|\mathbf{u}|)\,|\nabla\tilde{w}^r|^m\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \max_{A_{k,\rho}} \nu(|\mathbf{u}|)\left[\gamma\sigma^{-m\left(1-\frac{n}{q}\right)} \max\,[-\tilde{w}^r - k]^m +\right.$$

$$\left. + 3^m(N+1)^m\gamma_1\right] \operatorname{mes}^{1-\frac{m}{q}} A_{k,\rho}. \tag{9.33}$$

Здесь и ниже $A_{k,\rho}$ — множества, соответствующие $w = -\tilde{w}^r(x)$, которая в K_R неположительна. При значениях k и l из диапазонов

$$k \leqslant -2^{-t+3}\tilde{\omega} < 0, \quad l \in \left[k, \frac{1}{2}(k + \max_{K_R}(-\tilde{w}^r))\right] \tag{9.34}$$

можно вывести из (9.29) следующие оценки для величины $|\mathbf{u}(x)|$ на множествах, входящих в (9.33):

$$\max_{A_{k,R}} |\mathbf{u}(x)| \leqslant \max_{A_{k,R}} \tilde{w}(x) + 2^{-t-1}\tilde{\omega} = -k + 2^{-t-1}\tilde{\omega} \leqslant -2k,$$

$$\min_{A_{k,R}\setminus A_{l,R}} |\mathbf{u}(x)| \geqslant \frac{1}{4N^2}\left[\min_{A_{k,R}\setminus A_{l,R}} \tilde{w}^r(x) - 2^{-t+1}\tilde{w}\right] =$$

$$= \frac{1}{4N^2}\left[-l - 2^{-t+1}\tilde{\omega}\right] \geqslant \frac{1}{4N^2}\left[-\frac{k}{2} - 2^{-t+1}\tilde{\omega}\right] \geqslant -\frac{k}{16N^2},$$

так что

$$\max_{A_{k,R}} |\mathbf{u}(x)| \leqslant 32N^2 \min_{A_{k,R}\setminus A_{l,R}} |\mathbf{u}(x)|. \tag{9.35}$$

Отсюда, из (9.33), (9.34) и условия (9.2) вытекает справедливость второго утверждения леммы 9.3.

Лемма 9.4. *Обозначим через s число, определяемое леммой* 6.1 *в соответствии с постоянными* m, $32^\lambda N^{2\lambda}\gamma$, $\delta_0 = 1/2$, q. *Если имеет место оценка* (9.13) *с* $t = s + 4$, *то функция* $w = w^r = 3Nu^r + |\mathbf{u}|$ *подчиняется неравенствам* (9.5), (9.6) *с* $\delta_1 = 2N$, $\vartheta = (1 - 2^{-s-2})(1 - 2^{-s-4}) < 1$ *и с постоянной* c_1, *зависящей от* m, λ, N, γ, γ_1, q.

Заметим, что неравенство (9.5) для $w = w^r$ следует непосредственно из (9.25). Для доказательства (9.6) применим лемму 6.1 к одной из функций $w = \pm\tilde{w}^r$. Это возможно в силу леммы 9.3 и потому, что имеет место одно из двух соотношений:

$$\text{a)}\ \operatorname{mes}\left\{x \in K_{R/2}\colon \tilde{w}^r(x) > \max_{K_R} \tilde{w}^r - \frac{\tilde{\omega}}{2}\right\} \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{mes} K_{R/2}$$

или

$$\text{b)}\ \operatorname{mes}\left\{x \in K_{R/2}\colon \tilde{w}^r(x) \leqslant \max_{K_R} \tilde{w}^r - \frac{\tilde{\omega}}{2}\right\} \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{mes} K_{R/2}.$$

Действительно, в случае a) функция $w = \tilde{w}^r$ удовлетворяет условию (6.7) с $\delta_0 = 1/2$, а также неравенствам (6.4) с $\forall k \geqslant k' = \max\limits_{K_R} \tilde{w}^r - \frac{\tilde{\omega}}{2}$, $l > k$, и с постоянными $32^\lambda N^{2\lambda}\gamma$ и $3^m 32^\lambda N^{2\lambda}\gamma_1(N+1)^m$ вместо γ и γ_1. При этом лемма 6.1 дает следующую оценку для $\omega = \tilde{\omega}/2$:

$$\frac{1}{2}\operatorname{osc}\{\tilde{w}^r;\ K_R\} = \frac{\tilde{\omega}}{2} \leqslant$$

$$\leqslant 2^s \max\left\{\operatorname{osc}\{\tilde{w}^r;\ K_R\} - \operatorname{osc}\{\tilde{w}^r;\ K_{R/4}\};\ c_2 R^{1-\frac{n}{q}}\right\}, \tag{9.36}$$

$$c_2 = \gamma^{-\frac{1}{m}} 3\gamma_1^{\frac{1}{m}} (N+1),$$

откуда вытекает справедливость по крайней мере одного из неравенств:

$$\operatorname{osc}\{\tilde{w}^r;\ K_{R/4}\} \leqslant (1 - 2^{-s-1}) \operatorname{osc}\{\tilde{w}^r;\ K_R\} \tag{9.37}$$

или

$$\operatorname{osc}\{\tilde{w}^r;\ K_R\} \leqslant 2^{s+1} c_2 R^{1-\frac{n}{q}}. \tag{9.38}$$

В случае b) условия леммы 6.1 выполнены для функции $w = -\tilde{w}^r(x)$ при $k' = \max\limits_{K_R}(-\tilde{w}^r) - \frac{\tilde{\omega}}{2}$, $k'' = -2^{-s-1}\tilde{\omega}$ и тех же значениях остальных постоянных, что и выше. Поскольку выполнена и оценка (6.8): $k'' \geqslant \max\limits_{K_R}(-\tilde{w}^r) - 2^{-s}\omega$, где $\omega = \tilde{\omega}/2$, то из неравенства (6.9) леммы 6.1 снова следует справедливость оценки (9.36), а тем самым (9.37) или (9.38).

Теперь, принимая во внимание соотношение (9.30) с $\rho = R/4$ и (9.31), выводим из (9.37), (9.38) желаемую оценку (9.6) для функции $w^r(x)$:

$$\operatorname{osc}\{w^r;\ K_{R/4}\} \leqslant \operatorname{osc}\{\tilde{w}^r;\ K_{R/4}\} + 2^{-s-4}\tilde{\omega} \leqslant$$

$$\leqslant (1 - 2^{-s-1} + 2^{-s-4})\,\tilde{\omega} + 2^{s+1} c_2 R^{1-\frac{n}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant (1 - 2^{-s-2})(1 - 2^{-s-4})^{-1} \operatorname{osc}\{w^r;\ K_R\} + 2^{s+1} c_2 R^{1-\frac{n}{q}}. \tag{9.39}$$

Лемма 9.4 доказана.

Из нее и леммы 9.2 следует справедливость утверждения леммы 9.1, касающегося внутренних шаров $K_R \subset \Omega$.

Предположим теперь, что участок S_1 границы Ω удовлетворяет условию (A) и $u|_{S_1} \in C^\beta(S_1)$, $\beta > 0$. Очевидно, что для $\tilde{w}^r(x)$ верна оценка

$$\operatorname{osc}\{\tilde{w}^r;\ S_R\} \leqslant LR^\beta, \tag{9.40}$$

где $S_R = S_1 \cap K_R$, K_R — шар с центром на S_1, $L = 4N|\mathbf{u}|_{S_1}^{(\beta)}$. Рассуждая так же, как и выше, будем иметь дело либо с функциями $w^r(x)$ и $\tilde{w}^r(x)$, либо с одной из $u^i(x)$, $i = 1, \ldots, N$, в зависимости от того, верно или нет неравенство (9.13), где

$$\omega^r = \max_{i=1,\ldots,N} \operatorname{osc}\{u^i;\ \Omega_R\},\qquad m^i = \min\{0;\ \min_{\Omega_R} u^i(x)\},$$

$t = s + 4$. Здесь число $s > 0$ фиксируется так же, как и выше, в соответствии с леммой 6.1 и постоянными m, $32^\lambda N^{2\lambda}\gamma$, $\delta_0 = \theta_0$ и q, где θ_0 — константа из условия (A) (см. также лемму 7.1).

Пусть, например, выполнено условие (9.13). Тогда либо

$$\tilde{\omega} \equiv \operatorname{osc}\{\tilde{w}^r;\ \Omega_R\} \leqslant 2LR^\beta \tag{9.41}$$

и, следовательно, в силу (9.25) для $w = w^r$ имеет место оценка (9.8) с $c_1 = 4L$, либо верно одно из следующих неравенств:

$$\max_{S_R} \tilde{w}^r \leqslant \max_{\Omega_R} \tilde{w}^r - \frac{\tilde{\omega}}{4} \tag{9.42}$$

или

$$\min_{S_R} \tilde{w}^r \geqslant \min_{\Omega_R} \tilde{w}^r + \frac{\tilde{\omega}}{4}. \tag{9.43}$$

Последнее равносильно такому:

$$\max_{S_R}(-\tilde{w}^r) \leqslant \max_{\Omega_R}(-\tilde{w}^r) - \frac{\tilde{\omega}}{4}. \tag{9.43$'$}$$

Неравенства (9.42) и (9.43′) позволяют доказать лемму 9.3 для $w = \pm\tilde{w}^r$ с $k \geqslant \max\limits_{K_R} w - \frac{\tilde{\omega}}{4}$. Из нее, используя вместо леммы 6.1 лемму 7.1, можно, как это было сделано выше для внутреннего шара K_R, вывести оценки, аналогичные (9.37), (9.38), в которых $K_{R/4}$ и K_R заменены на $\Omega_{R/4}$ и Ω_R соответственно, а затем и оценку (9.8) для $w = w^r(x)$.

В том случае, когда предположение (9.13) с $t = s + 4$ неверно, внося аналогичные изменения в доказательство леммы 9.2, можно убедиться в справедливости неравенств (9.7) и (9.8) для $w = u^i(x)$ с тем номером i, для которого $|m^i| > 2^{-t}\omega^r$.

Этим завершается доказательство леммы 9.1, а тем самым и теоремы 9.1.

Глава III

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе основным объектом исследования являются линейные эллиптические уравнения второго порядка с неограниченными коэффициентами, точнее, уравнения, у которых старшие коэффициенты ограничены, а остальные коэффициенты и свободные члены суммируемы по области их задания с той или иной степенью. Для таких уравнений будет изучен вопрос о разрешимости основных краевых задач в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и будет показано, как дифференциальные свойства решений зависят от дифференциальных свойств известных в задачах функций. Именно, будет выяснено, когда они принадлежат пространствам $W_2^2(\Omega)$ и $C^{l+\alpha}(\Omega)$, $l=0, 1, 2, \ldots$

Как показывают примеры, построенные в § 2 гл. I, основные результаты данной главы имеют предельный характер, неулучшаемы в рамках взятых здесь пространств.

Один результат такого типа известен с 30-х годов — это знаменитая теорема Шаудера [49₁] о классической разрешимости задачи Дирихле. В ней установлена разрешимость задачи Дирихле в классах $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$, $l\geqslant 2$, при условии, что коэффициенты и свободный член принадлежат $C^{l-2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Ясно, что эти условия вызваны существом дела: они не могут быть ослаблены, если мы хотим, чтобы все решения всех таких уравнений принадлежали $C^{l+\alpha}$. С доказательства результатов Шаудера мы и начнем данную главу (§§ 1, 2). В § 3 формулируются аналогичные результаты К. Миранда и Р. Фиоренца по задаче с косой производной. Остальные параграфы гл. III посвящены исследованию разрешимости краевых задач для уравнений, коэффициенты которых уже не являются непрерывными функциями. Область Ω всюду считается ограниченной.

§ 1. О разрешимости задачи Дирихле в пространствах $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$, $l\geqslant 2$. Принцип максимума

Пусть коэффициенты уравнения

$$Lu\equiv a_{ij}(x)\,u_{x_ix_j}+a_i(x)\,u_{x_i}+a(x)\,u=f(x) \qquad (1.1)$$

и свободный член f определены в ограниченной области Ω и принадлежит пространству $C^{l-2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $l\geqslant 2$. На протяжении всей книги, если не оговорено противное, будем предполагать, что $a_{ij}=a_{ji}$ и уравнение строго эллиптично в $\overline{\Omega}$, т. е.

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant \nu\xi^2, \qquad \nu=\mathrm{const}>0. \tag{1.2}$$

Рассмотрим для уравнения (1.1) задачу Дирихле в области Ω, т. е. задачу об определении функции u, удовлетворяющей в Ω уравнению (1.1) и на границе S области Ω условию

$$u|_S=\varphi(s). \tag{1.3}$$

Имеет место следующая теорема Шаудера:

Теорема 1.1. *Если коэффициенты оператора L принадлежат $C^{l-2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и a_{ij} удовлетворяют неравенству* (1.2), *если S принадлежит $C^{l+\alpha}$ и если задача* (1.1), (1.3) *может иметь не более одного решения в $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$, то при любых $f\in C^{l-2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\varphi\in C^{l+\alpha}(S)$ задача* (1.1), (1.3) *действительно имеет решение из класса $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$, $l\geqslant 2$.*

Эта теорема, грубо говоря, утверждает, что разрешимость задачи (1.1), (1.3), так же как и в случае линейных алгебраических систем, есть следствие теоремы единственности. Одним из критериев того, что задача (1.1), (1.3) не может иметь более одного решения, является следующий:

$$\max_{\Omega} a(x)<0. \tag{1.4}$$

Действительно, при выполнении условия (1.4) и неравенства $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant 0$, как хорошо известно, для любого решения уравнения (1.1) из $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ *) верна оценка

$$\max_{\Omega}|u(x)|\leqslant \max\left\{\max_{S}|u|;\ \max_{\Omega}\left|\frac{f(x)}{a(x)}\right|\right\}. \tag{1.5}$$

Напомним ее вывод. Для доказательства достаточно рассмотреть лишь два случая: когда наибольшее значение $u(x)$ положительно и принимается внутри Ω и когда наименьшее значение $u(x)$ отрицательно и принимается внутри Ω. При других возможных случаях нужная оценка очевидна.

Пусть $u(x')=\max\limits_{\Omega} u(x)>0$ и $x'\in\Omega$. В этой точке все $u_{x_i}=0$, а

$$a_{ij}u_{x_ix_j}\leqslant 0. \tag{1.6}$$

---

*) Можно предполагать о решении $u(x)$ немного меньше, именно что оно принадлежит $O^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$.

Действительно, с помощью ортогонального преобразования $x_i - x'_i = c_{ik} y_k$, $i = 1, \ldots, n$, можно $a_{ij} u_{x_i x_j}$ в точке x' привести к виду

$$a_{ij} u_{x_i x_j} = \lambda_k u_{y_k y_k}, \tag{1.7}$$

где коэффициенты $\lambda_k = \sum\limits_{i,j} a_{ij} c_{ik} c_{jk}$ вследствие $a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$ неотрицательны. Так как в точке x' $u_{y_k y_k} \leqslant 0$, то из (1.7) следует (1.6). В силу этих фактов из уравнения (1.1) следует неравенство $a(x')\,u(x') \geqslant f(x')$, и потому

$$\max_{\Omega} u(x) = u(x') \leqslant \frac{f(x')}{a(x')} \leqslant \max_{\Omega} \frac{f(x)}{a(x)}.$$

Если же $\min\limits_{\Omega} u(x) = u(x'') < 0$, то в этой точке $u_{x_i} = 0$ и $a_{ij} u_{x_i x_j} \geqslant 0$. Отсюда и из уравнения (1.1) заключаем, что

$$a(x'')\,u(x'') \leqslant f(x''),$$

и потому

$$\min_{\Omega} u(x) = u(x'') \geqslant \frac{f(x'')}{a(x'')} \geqslant \min_{\Omega} \frac{f(x)}{a(x)}.$$

Из полученных неравенств следует оценка (1.5).

Оценка (1.5) показывает, что задача (1.1), (1.3) не может иметь двух разных классических решений, если выполнено условие (1.4). Действительно, разность $v(x)$ двух таких решений удовлетворяет однородному уравнению $Lv = 0$ и однородному граничному условию $v|_S = 0$. Применив к ней оценку (1.5), убедимся, что $v(x) \equiv 0$.

Единственность решения задачи (1.1), (1.3) имеет место и при $a(x) \leqslant 0$, если $a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant 0$ и один из коэффициентов $a_{ii}(x)$ — пусть $a_{11}(x)$ — строго положителен в $\overline{\Omega}$.

Это вытекает из нижеследующего неравенства (1.9), которое справедливо для любого решения $u(x)$ уравнения (1.1) из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Для доказательства (1.9) введем вместо $u(x)$ функцию $v(x)$:

$$u(x) = (\gamma - e^{-\beta x_1})\,v(x),$$

где γ и β — положительные числа. В силу (1.1) она удовлетворяет уравнению

$$(\gamma - e^{-\beta x_1})\,a_{ij} v_{x_i x_j} + [a_i(\gamma - e^{-\beta x_1}) + 2\beta \cdot a_{i1} e^{-\beta x_1}]\,v_{x_i} -$$
$$- [\beta e^{-\beta x_1}(a_{11}\beta - a_1) - a(\gamma - e^{-\beta x_1})]\,v = f. \tag{1.8}$$

Число β выберем так, чтобы $a_{11}(x)\,\beta - a_1(x)$ было положительно в $\overline{\Omega}$. Это, очевидно, возможно ввиду предположения

$\min\limits_{\Omega} a_{11}(x) > 0$. Затем выберем γ так, чтобы $\gamma - e^{-\beta x_1}$ было положительно в $\bar{\Omega}$. При таком выборе γ и β коэффициент при v в (1.8) отрицателен. Следовательно, для v справедливо неравенство (1.5). Учитывая связь между функциями u и v, придем к неравенству

$$\max_{\Omega} |u(x)| \leqslant \max_{\Omega} (\gamma - e^{-\beta x_1}) \max \left\{ \max_{S} \left| \frac{u}{\gamma - e^{-\beta x_1}} \right|, \right.$$
$$\left. \max_{\Omega} \frac{|f(x)|}{\beta e^{-\beta x_1} [a_{11}(x) \beta - a_1(x)] - a(x)(\gamma - e^{-\beta x_1})} \right\}. \quad (1.9)$$

Отсюда следует, что $u(x) \equiv 0$ при $f(x) \equiv 0$ и $u|_S \equiv 0$. Заметим, что если для $a(x)$ условие $a(x) \leqslant 0$ не выполнено, но ширина области Ω в направлении оси Ox_1 мала, то числа γ и β можно выбрать так, чтобы знаменатели в (1.9) были положительны и, следовательно, чтобы в этой области была верна теорема единственности.

Подытожим доказанные здесь критерии единственности в виде теоремы, причем учтем, что непрерывность коэффициентов и $f(x)$ при этом не использовалась.

Теорема 1.2. *Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет в Ω уравнению* (1.1), *коэффициенты которого в каждой точке Ω конечны и форма $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$ неотрицательна. Тогда, если $a(x) < 0$, то для u справедлива оценка* (1.5). *Если же $a_{11}(x) \geqslant \hat{a}_{11} > 0$, $-a_1(x) \geqslant \hat{a}_1 > -\infty$ и $a(x) \leqslant \bar{a} \leqslant 0$ или, общее, меньше некоторого положительного числа, определяемого $\hat{a}_{11}$, $\hat{a}_1$ и шириной Ω в направлении оси x_1, то для u справедлива оценка* (1.9).

Замечание 1.1. При выполнении условий второй части теоремы ограничение на a сводится к тому, чтобы существовали положительные параметры β и γ, при которых для $x \in \bar{\Omega}$ выполнялись бы неравенства $\gamma - e^{-\beta x_1} > 0$ и $\hat{a}_{11}\beta^2 + \hat{a}_1\beta - \bar{a}(\gamma e^{\beta x_1} - 1) > 0$. Ясно, что им всегда можно удовлетворить, если $\bar{a}$ не превосходит достаточно малого положительного числа или если ширина Ω в направлении оси x_1 достаточно мала (в последнем случае $\operatorname{osc}\limits_{\Omega} e^{\beta x_1}$ мала и потому $\gamma e^{\beta x_1} - 1$ может быть взята достаточно малой). Меняя знак β, можно условием $\min\limits_{\Omega} a_1(x) > -\infty$ заменить условие $\max\limits_{\Omega} a_1(x) < \infty$. При этом мы считаем $x = 0 \in \Omega$.

В конце параграфа мы приведем ряд других оценок $\max\limits_{\Omega} |u|$, а пока вернемся к теореме 1.1.

Шаудер доказал результаты более общие, чем теорема 1.1. Именно, он включил в уравнение (1.1) член λu (в общем случае λ — произвольное комплексное число, и тогда решениями уравнения $Lu-\lambda u=f$ являются комплекснозначные функции $u(x)=u_1(x)+iu_2(x)$ вещественного аргумента x) и доказал, что для задачи

$$Lu-\lambda u=f, \quad u|_S=\varphi \tag{1.10}$$

имеют место все теоремы Фредгольма, в частности, что спектр ее дискретен и конечнократен. Мы не будем приводить здесь полные формулировки этих теорем. В § 5 это сделано сразу для более общих уравнений и произвольных областей Ω в более широком функциональном пространстве (в $W_2^1(\Omega)$).

Все эти предложения доказаны Шаудером на основании следующего установленного им основного неравенства, справедливого для любой функции v из $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$ и любого эллиптического оператора L:

$$|v|_\Omega^{(l+\alpha)}\leqslant c(l)\left[|Lv|_\Omega^{(l-2+\alpha)}+\max_\Omega|v|+|v|_S^{(l+\alpha)}\right], \qquad l\geqslant 2. \tag{1.11}$$

Постоянная $c(l)$ здесь определяется лишь l, α, величиной ν из (1.2), нормами в $C^{l-2+\alpha}(\bar{\Omega})$ коэффициентов оператора L и границей S, которая предполагается принадлежащей классу $C^{l+\alpha}$. Последний член в (1.11) есть норма в $C^{l+\alpha}(S)$ значений v на S (см. ее определение в § 1 гл. I). Собственно, самим Шаудером неравенство (1.11) и сформулированные только что предложения были доказаны при несколько бо́льших предположениях о S и коэффициентах L (он требовал их принадлежности к $C^{l+\alpha+\varepsilon}$ и $C^{l-2+\alpha+\varepsilon}(\Omega)$, $\varepsilon>0$, соответственно), приведенные же усиления были сделаны рядом авторов (см. [8_1, 37_2, 12_1] и др.).

Член $\max\limits_\Omega|v|$ справа в (1.11) можно отбросить в тех случаях, когда известно, что для задачи (1.1), (1.3) имеет место теорема единственности, в частности, если выполнено неравенство (1.4).

Помимо (1.11) установлены внутренние оценки, которые не зависят от поведения v на S и от свойств самой границы S, и оценки v в любой части Ω_1 области Ω, примыкающей к границе S. Именно

$$|v|_{\Omega'}^{(l+\alpha)}\leqslant c(l,\Omega')\left[|Lv|_\Omega^{(l-2+\alpha)}+\max_\Omega|v|\right], \qquad l\geqslant 2, \tag{1.12}$$

где Ω' — любая строго внутренняя подобласть области Ω, а постоянная $c(l,\Omega')$ зависит от l, α, норм в $C^{l-2+\alpha}(\bar{\Omega})$ коэффициентов L, ν из (1.2) и расстояния Ω' до S, и

$$|v\zeta|_\Omega^{(l+\alpha)}\leqslant c(l,\zeta)\left[|Lv|_\Omega^{(l-2+\alpha)}+\max_\Omega|v|+|v|_{S\setminus S_1}^{(l+\alpha)}\right], \qquad l\geqslant 2, \tag{1.13}$$

где $\zeta(x)$ — произвольная функция из $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$, равная нулю в окрестности куска S_1 границы S. Постоянная $c(l, \zeta)$ зависит от l, α, норм коэффициентов L в $C^{l-2+\alpha}(\bar\Omega)$, ν, функции ζ, а также от свойств части $S \setminus S_1$ границы S (предполагается, что $S \setminus S_1$ принадлежит $C^{l+\alpha}$).

Мы изложим доказательство теоремы 1.1 и неравенств (1.11) — (1.13) для $l = 2$. Для $l > 2$ они легко выводятся из этих неравенств. Предположим сначала, что априорные оценки (1.11) — (1.13) уже имеются. Докажем тогда следующее условное предложение:

Лемма 1.1. *Пусть $S \in C^{2+\alpha}$, а коэффициенты L суть элементы $C^\alpha(\bar\Omega)$ и $a(x) \leqslant 0$. Пусть задача*

$$\Delta u = f(x), \quad u|_S = 0 \tag{1.14}$$

имеет решение в классе $C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$ для плотного в $C^\alpha(\bar\Omega)$ множества $f(x)$. Тогда задача (1.1), (1.3) *однозначно разрешима в $C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$ для любого $f(x)$ из $C^\alpha(\bar\Omega)$ и $\varphi(s)$ из $C^{2+\alpha}(S)$.*

Утверждение леммы достаточно доказать лишь для случая $\varphi(s) = 0$, ибо общий случай легко сводится к этому. Именно, функция $v(x) = u(x) - \tilde\varphi(x)$, где $\tilde\varphi(x)$ есть какая-либо функция из $C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$, равная $\varphi(s)$ на S, удовлетворяет уравнению $Lv = \hat f$ с $\hat f \in C^\alpha(\Omega)$ и $v|_S = 0$. Итак, рассмотрим задачу

$$Lu = f, \quad u|_S = 0. \tag{1.15}$$

Введем семейство операторов

$$L_\tau u = \Delta u + \tau(L - \Delta)u, \qquad \tau \in [0, 1],$$

и для них изучим краевую задачу

$$L_\tau u = f, \quad u|_S = 0. \tag{1.16}$$

В силу (1.9) для всех возможных решений $u(x, \tau)$ задачи (1.16) (мы все время будем иметь в виду разрешимость в $C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$, так что все рассматриваемые нами решения принадлежат этому пространству) справедлива оценка

$$\max_\Omega |u(x, \tau)| \leqslant M \max_\Omega |f(x)| \tag{1.17}$$

с постоянной M, не зависящей от τ из $[0, 1]$. Это так, ибо коэффициент $a_\tau(x)$ при u в $L_\tau(u)$ неположителен, для коэффициентов L_τ равномерно ограничены нормы в $C^0(\bar\Omega)$ и постоянная эллиптичности $\nu_1 = \min(1, \nu)$ в неравенствах

$$(1-\tau)\xi^2 + \tau a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant [(1-\tau) + \tau\nu]\,\xi^2 \geqslant \min(1, \nu)\,\xi^2$$

при всех τ из $[0, 1]$ строго больше нуля. Больше того, для всех $u(x, \tau)$ в силу (1.11) и (1.17)

$$|u(x, \tau)|_\Omega^{(2+\alpha)} \leqslant M_1 |L_\tau u|_\Omega^{(\alpha)} = M_1 |f|_\Omega^{(\alpha)} \tag{1.18}$$

с постоянной M_1, общей для всех τ из $[0, 1]$. При $\tau = 0$ задача (1.16) совпадает с задачей (1.14). Из условий леммы и неравенства (1.18) следует, что задача (1.14) имеет единственное решение при всех f из $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Иными словами, оператор Δ устанавливает взаимно однозначное соответствие между подпространством $C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ пространства $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, состоящим из элементов $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, равных нулю на S, и $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Обратный ему оператор обозначим через Δ^{-1}. С помощью него задачу (1.16) можно записать в виде

$$u + \tau\Delta^{-1}(L - \Delta)u = \Delta^{-1}f. \tag{1.19}$$

Это есть уравнение в пространстве $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ с ограниченным в этом пространстве оператором $\Delta^{-1}(L - \Delta)$. Ограниченность $\Delta^{-1}(L-\Delta)$ следует из (1.18) с $\tau=0$. Обозначим через $|\Delta^{-1}(L-\Delta)|$ норму оператора $\Delta^{-1}(L - \Delta)$ в пространстве $C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Уравнение (1.19) однозначно разрешимо для всех τ из $[0, \tau_1)$, где $\tau_1 = \dfrac{1}{|\Delta^{-1}(L-\Delta)|}$, и, следовательно, оператор L_τ при $\tau \in [0, \tau_1)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между полными пространствами $C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и $C_0^\alpha(\overline{\Omega})$. Пусть L_τ^{-1} — обратный ему оператор. С его помощью задача (1.16) может быть преобразована к эквивалентному ей уравнению

$$u + (\tau - \tau')L_{\tau'}^{-1}(L - \Delta)u = L_{\tau'}^{-1}f, \tag{1.20}$$

(τ' — любое число из $[0, \tau_1)$) в пространстве $C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Оператор $L_{\tau'}^{-1}(L - \Delta)$ ограничен в $C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, и потому уравнение (1.20) однозначно разрешимо при

$$0 \leqslant \tau - \tau' < \frac{1}{|L_{\tau'}^{-1}(L-\Delta)|}. \tag{1.21}$$

Так устанавливается существование обратного L_τ^{-1} при τ, подчиненных условию (1.21). Этот процесс можно продолжать и дальше. За конечное число шагов мы дойдем до $\tau = 1$, ибо нормы всех операторов $|L_\tau^{-1}(L - \Delta)|$ не превосходят одного и того же числа, определяемого M_1 из (1.18) и нормами в $C^\alpha(\Omega)$ коэффициентов L. В самом деле, для любого v из $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$

$$|(L - \Delta)v|_\Omega^{(\alpha)} \leqslant c|v|_\Omega^{(2+\alpha)},$$

а в силу (1.18)

$$|L_\tau^{-1}(L - \Delta)v|_\Omega^{(2+\alpha)} \leqslant M_1|(L - \Delta)v|_\Omega^{(\alpha)} \leqslant M_1c|v|_\Omega^{(2+\alpha)},$$

т. е.

$$|L_\tau^{-1}(L - \Delta)| \leqslant M_1c.$$

Таким образом, используя продолжение по параметру от $\tau=0$ до $\tau=1$, мы доказали однозначную разрешимость задачи (1.16) и, в частности, задачи (1.15) в пространстве $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ при любой f из $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. Лемма 1.1 доказана.

Из этой леммы следовала бы разрешимость задачи (1.1), (1.3) в случае $a(x) \leqslant 0$, если бы была известна указанная в лемме 1.1 разрешимость задачи (1.14). Эта задача была предметом многочисленных исследований, и ее решение с помощью электростатических потенциалов изложено в ряде работ и книг. Однако в наиболее известных из них ограничиваются доказательством того, что решение принадлежит $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ или в лучшем случае $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. В других же (см., например, монографию Н. М. Гюнтера [11]) принадлежность $u(x)$ к $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ устанавливается при предположениях о S более жестких, чем надо, причем рассуждения, приводящие к этому, длинны и кропотливы. Мы избежим их, применяя оценки (1.12) и (1.13) и рассуждая нижеследующим образом.

Докажем сначала разрешимость задачи (1.14) в пространстве $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ при любой $f \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ для случая, когда Ω есть шар, причем без ограничения общности будем считать, что $\Omega=\{x\colon |x|<1\}=K_1$. Решение этой задачи дается формулой

$$u(x)=\int_{\Omega} G(x, y) f(y)\, dy, \tag{1.22}$$

где

$$G(x, y)=\frac{-1}{(n-2)\,\omega_n}\left[|x-y|^{2-n}-|y|^{2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\right|^{2-n}\right] \tag{1.23}$$

— функция Грина. Мы рассматриваем здесь случай $n>2$. При $n=2$ все рассмотрения аналогичны.

Лемма 1.2. *Функция u, определяемая формулой* (1.22), *дает решение задачи* (1.14) *для шара* $\Omega=K_1$ *и подчиняется неравенству*

$$|u|_{\Omega}^{(2+\alpha)} \leqslant c_{n,\alpha} |f|_{\Omega}^{(\alpha)}.$$

Доказательство. Если точка x находится внутри области Ω, то $G(x, y)$ и все ее производные по x обращаются в нуль при $y \in \partial\Omega$. Поэтому функция

$$G^0(x, y)=\begin{cases} G(x,y) & \text{при } y \in \Omega, \\ 0 & \text{при } y \in E_n-\Omega \end{cases}$$

вместе со своими производными по x непрерывна по переменной y во всем пространстве E_n, кроме точки $y=x$, когда x

находится внутри Ω. Запишем потенциал (1.22) в виде

$$u(x) = \int\limits_{E_n} G^0(x, y) f^*(y)\, dy,$$

где f^* — какое-либо гладкое продолжение f во все пространство E_n. Применяя формулу дифференцирования интегралов типа потенциала (см. ниже вывод формулы (2.10)), получим

$$u_{x_i x_j}(x) = \gamma_{ij} f(x) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x-y| \geqslant \varepsilon} G^0_{ij}(x, y) f^*(y)\, dy, \tag{1.24}$$

где γ_{ij} — некоторые постоянные ($\gamma_{ij} = \delta_i^j n^{-1}$), а $G^0_{ij} = G^0_{x_i x_j}$.

Рассмотрим функции

$$w_\varepsilon^{ij}(x) = \int\limits_{|x-y| \geqslant \varepsilon} G^0_{ij}(x, y) f^*(y)\, dy.$$

Для любых точек $x, \bar{x} \in \Omega$, любого положительного достаточно малого ε и любого $\rho \geqslant 2|x - \bar{x}|$ имеем

$$\begin{aligned}
w_\varepsilon^{ij}(x) - w_\varepsilon^{ij}(\bar{x}) &= \\
&= \int\limits_{|x-y| \geqslant \rho} [G^0_{ij}(x, y) - G^0_{ij}(\bar{x}, y)][f^*(y) - f^*(\bar{x})]\, dy + \\
&+ \int\limits_{\varepsilon \leqslant |x-y| \leqslant \rho} G^0_{ij}(x, y)[f^*(y) - f^*(x)]\, dy - \\
&- \int\limits_{\substack{|x-y| \leqslant \rho \\ |\bar{x}-y| \geqslant \varepsilon}} G^0_{ij}(\bar{x}, y)[f^*(y) - f^*(\bar{x})]\, dy + \\
&+ f(\bar{x}) \int\limits_{|x-y| \geqslant \rho} [G^0_{ij}(x, y) - G^0_{ij}(\bar{x}, y)]\, dy + \\
&+ f(x) \int\limits_{\varepsilon \leqslant |x-y| \leqslant \rho} G^0_{ij}(x, y)\, dy - f(\bar{x}) \int\limits_{\substack{|x-y| \leqslant \rho \\ |\bar{x}-y| \geqslant \varepsilon}} G^0_{ij}(\bar{x}, y)\, dy = \\
&= \int\limits_{\substack{x-y \geqslant \rho \\ y \in \Omega}} [G_{ij}(x, y) - G_{ij}(\bar{x}, y)][f(y) - f(\bar{x})]\, dy + \\
&+ \int\limits_{\substack{\varepsilon \leqslant |x-y| \leqslant \rho \\ y \in \Omega}} G_{ij}(x, y)[f(y) - f(x)]\, dy - \\
&- \int\limits_{\substack{|x-y| \leqslant \rho \\ |\bar{x}-y| \geqslant \varepsilon,\ y \in \Omega}} G_{ij}(\bar{x}, y)[f(y) - f(\bar{x})]\, dy + \\
&+ f(\bar{x}) \left\{ \int\limits_{|x-y| \geqslant \varepsilon} G^0_{ij}(x, y)\, dy - \int\limits_{|\bar{x}-y| \geqslant \varepsilon} G^0_{ij}(\bar{x}, y)\, dy \right\} + \\
&\qquad + [f(x) - f(\bar{x})] \int\limits_{\varepsilon \leqslant |x-y| \leqslant \rho} G^0_{ij}(x, y)\, dy. \qquad (1.25)
\end{aligned}$$

Положим здесь $\rho=2|x-\bar x|$. Используя оценки

$$\left.\begin{aligned} &|D_x^k G(x, y)|\leqslant c(k, n)|x-y|^{-n+2-k},\\ &|D_x^k G(x, y)-D_{\bar x}^k G(\bar x, y)|\leqslant\\ &\quad c(k, n)|x-\bar x|(|x-y|^{-n+1-k}-|\bar x-y|^{-n+1-k}),\end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

вытекающие из (1.23) (эти оценки нужны при $k=2$), легко оценить первые три интеграла правой части (1.25) через $c|f|_\Omega^{(\alpha)}|x-\bar x|^\alpha$ с постоянной c, зависящей лишь от n и α.

Докажем, что

$$\left|\int\limits_{\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant\rho} G_{ij}^0(x, y)\,dy\right|\leqslant c(n). \tag{1.27}$$

Очевидно, что при этом без ограничения общности можно считать, что $\rho\leqslant 8^{-1}$, так как в противном случае можно было бы разбить рассматриваемый интеграл на два: по области $\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant 8^{-1}$ и по $8^{-1}\leqslant|x-y|\leqslant\rho$, причем оценка второго интеграла в силу (1.26) тривиальна.

Пусть сначала $|x|\leqslant 2^{-1}$. Тогда

$$\int\limits_{\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant\rho} G_{ij}^0(x, y)\,dy=\int\limits_{\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant\rho} G_{ij}(x, y)\,dy=$$
$$=-c\int\limits_{\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant\rho}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(|y|^{2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\right|^{2-n}\right)dy$$

(первый член функции Грина дает нулевой вклад). В силу $\rho\leqslant 4^{-1}$ и $|x|\leqslant 2^{-1}$ имеем $|x-y/|y|^2|\geqslant 2^{-1}$, так что оценка (1.27) очевидна.

Будем теперь считать, что $2^{-1}\leqslant|x|\leqslant 1$.

Введем следующие обозначения:

$$F_{\varepsilon,\rho}(x)=\int\limits_{\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant\rho} G^0(x, y)\,dy=\int\limits_{\varepsilon\leqslant|z|\leqslant\rho} G^0(x, z+x)\,dz,$$

$$F_{\varepsilon,\rho}^{i,j}(x)=\int\limits_{\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant\rho} G_{ij}^0(x, y)\,dy=\int\limits_{\varepsilon\leqslant|z|\leqslant\rho} G_{ij}^0(x, z+x)\,dz.$$

Число ρ мы будем считать сейчас произвольным, не зависящим от x. Имеем

$$\frac{\partial F_{\varepsilon,\rho}(x)}{\partial x_i}=\int\limits_{\varepsilon\leqslant|z|\leqslant\rho} G_i^0(x, z+x)\,dz+\int\limits_{\varepsilon\leqslant|z|\leqslant\rho}\frac{\partial G^0(x, z+x)}{\partial z_i}\,dz=$$
$$=\int\limits_{\varepsilon\leqslant|z|\leqslant\rho} G_i^0(x, z+x)\,dz+\int\limits_{|z|=\rho} G^0(x, z+x)\,n_i(z)\,ds_z-$$
$$-\int\limits_{|z|=\varepsilon} G^0(x, z+x)\,n_i(z)\,ds_z \tag{1.28}$$

(в силу непрерывности G^0 операция интегрирования по частям законна) и

$$\frac{\partial^2 F_{\varepsilon,\rho}(x)}{\partial x_i \partial x_j} = F^{ij}_{\varepsilon,\rho}(x) + \int\limits_{|z|=\rho} G_i^0(x, z+x)\, n_j(z)\, ds_z -$$
$$- \int\limits_{|z|=\varepsilon} G_i^0(x, z+x)\, n_j(z)\, ds_z +$$
$$+ \int\limits_{|z|=\rho} G_j^0(x, z+x)\, n_i(z)\, ds_z + \int\limits_{|z|=\rho} \frac{\partial G^0(x, z+x)}{\partial z_j}\, n_i(z)\, ds_z -$$
$$- \int\limits_{|z|=\varepsilon} G_j^0(x, z+x)\, n_i(z)\, ds_z - \int\limits_{|z|=\varepsilon} \frac{\partial G^0(x, z+x)}{\partial z_j}\, n_i(z)\, ds_z. \tag{1.29}$$

Здесь $n_i(z) = z_i/|z|$. Кроме (1.26) имеет место также оценка

$$\left| \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_j} \right| \leqslant c\,|x-y|^{1-n}.$$

Отсюда вытекает, что все поверхностные интегралы в правой части (1.29) ограничены при любых ρ и ε, и дело сводится к оценке производной

$$\frac{\partial^2 F_{\varepsilon,\rho}(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Для оценки этой производной заметим, что функция $F_{\varepsilon,\rho}(x)$ зависит только от $|x| = r$. Действительно, если $|x| = |\xi|$, то, делая замену переменных интегрирования $y_i = \sum\limits_j \alpha_{ij} y'_j$, где $A = (\alpha_{ij})$ — ортогональное преобразование, переводящее ξ в x, легко увидеть, что $F_{\varepsilon,\rho}(x) = F_{\varepsilon,\rho}(\xi)$.

Итак,

$$\frac{\partial^2 F_{\varepsilon,\rho}(x)}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{d^2 F_{\varepsilon,\rho}(x)}{dr^2}\frac{x_i x_j}{r^2} + \frac{dF_{\varepsilon,\rho}}{dr}\left(\frac{\delta_i^j}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3}\right). \tag{1.30}$$

Первые производные функции $F_{\varepsilon,\rho}$ в силу (1.28) и (1.26) ограничены постоянной, зависящей только от n. В силу (1.29) оператор Лапласа от $F_{\varepsilon,\rho}$, а потому и $\frac{d^2F_{\varepsilon,\rho}}{dr^2}$ также ограничен (при этом следует иметь в виду, что $\sum\limits_i F^{ii}_{\varepsilon,\rho} = 0$).

Таким образом, оценка (1.27) доказана для любого ρ, в том числе и для $\rho = 2|x - \bar{x}|$. Остается рассмотреть выражение в фигурных скобках в правой части (1.25). Покажем, что при $\varepsilon \to 0$ оно стремится к нулю. Функция $\int\limits_\Omega G(x, y)\, dy$ является решением задачи $\Delta u(x)=1$, $u|_{\partial\Omega}=0$ и потому может быть выписана в явном виде:

$$\int_\Omega G(x, y)\,dy=\frac{|x|^2-1}{2n}.$$

Применяя к ней формулу (1.24) с $f\equiv 1$, получаем соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon} G^0_{ij}(x, y)\,dy=0, \qquad \forall x\in\Omega. \tag{1.31}$$

Итак, доказана оценка

$$\left|\lim_{\varepsilon\to 0}\left[w^{ij}_\varepsilon(x)-w^{ij}_\varepsilon(\bar x)\right]\right|\leqslant c(n, \alpha)|f|^{(\alpha)}_\Omega|x-\bar x|^\alpha$$

и, следовательно,

$$\langle u_{xx}\rangle^{(\alpha)}_\Omega\leqslant c(n, \alpha)|f|^{(\alpha)}_\Omega.$$

Это неравенство составляет основу желаемой оценки. Остается оценить максимумы модуля функции u, ее первых и вторых производных. Оценка вторых производных вытекает из (1.24) и (1.31). Действительно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}=\gamma_{ij}f(x)+\int_\Omega G_{ij}(x, y)[f(y)-f(x)]\,dy+$$
$$+f(x)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon} G^0_{ij}(x, y)\,dy=$$
$$=\int_\Omega G_{ij}(x, y)[f(y)-f(x)]\,dy+\frac{1}{n}f(x)\delta^j_i,$$

откуда

$$\max_\Omega|u_{xx}|\leqslant c|f|^{(\alpha)}_\Omega.$$

Остальные оценки совсем элементарны.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь задачу (1.14) в произвольной области Ω с границей S из $C^{2+\alpha}$. Хорошо известно, что она имеет единственное решение $u(x)$ из $C(\bar\Omega)\cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ для всех $f(x)$ из $C^\infty(\bar\Omega)$. Мы хотим доказать, что оно принадлежит $C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$. Для этого возьмем какой-нибудь небольшой кусок S_1 границы S и преобразуем его с помощью регулярного (невырожденного) преобразования $y=y(x)$ в часть поверхности единичной сферы. Пусть функции $y_i=y_i(x)$, $i=1, \ldots, n$, устанавливают взаимно однозначное соответствие между некоторой областью $\Omega_1\subset\Omega$, примыкающей к S_1, и открытым шаром $K_1=\{y\colon |y|<1\}$. Обозначим через Γ границу K_1, а через Γ_1—ту ее часть, образ которой соответствует S_1. Считаем, что якобиан $\left|\frac{\partial y(x)}{\partial x}\right|$ строго больше нуля и функции $y_i(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_1)$.

Перейдем в Ω_1 к новым координатам $y = y(x)$. Уравнение $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f$ преобразуется при этом в эллиптическое уравнение $\hat{L}u = \hat{f}$, коэффициенты и свободный член которого $\hat{f}(y) = f(x(y))$ суть элементы $C^\alpha(\overline{K}_1)$. Коэффициент при неизвестной функции $\hat{u}$ в $\hat{L}$ равен 0, и условие эллиптичности по-прежнему выполнено. Функция $u = u(x)$, являющаяся решением задачи (1.14) в Ω, в новых координатах y дает функцию $\hat{u}(y) = u(x(y))$, которую можно рассмотреть как решение задачи

$$\hat{L}v(y) = \hat{f}, \quad v|_\Gamma = \hat{u}|_\Gamma \tag{1.32}$$

в шаре K_1 из класса $C(\overline{K}_1) \cap C^{2+\alpha}(K_1)$. Задача (1.32) в этом классе имеет единственное решение.

Возьмем на Γ последовательность достаточно гладких функций $\hat{u}_m$, $m = 1, 2, \ldots$ (например, из $C^{2+\alpha}(\Gamma)$), равномерно сходящихся на Γ к $\hat{u}|_\Gamma$ и равных нулю на Γ_1. По этим функциям найдем в K_1 решения $v_m(y)$ задач

$$\hat{L}v_m = \hat{f}(y), \quad v_m|_\Gamma = \hat{u}_m|_\Gamma. \tag{1.33}$$

В силу лемм 1.1 и 1.2 задачи (1.33) однозначно разрешимы в $C^{2+\alpha}(\overline{K}_1)$. При $m \to \infty$ их решения равномерно в $\overline{K}_1$ сходятся к $\hat{u}(y)$. Это следует из того, что $v_m(y) - \hat{u}(y)$ удовлетворяют однородному уравнению

$$\hat{L}(v_m - \hat{u}) = 0 \tag{1.34}$$

и граничному условию

$$(v_m - \hat{u})|_\Gamma = (\hat{u}_m - \hat{u})|_\Gamma \tag{1.35}$$

и потому в силу (1.9) подчиняются неравенству

$$\max_{y \in K_1} |v_m(y) - \hat{u}(y)| \leqslant c \max_{\Gamma} |\hat{u}_m - \hat{u}|, \tag{1.36}$$

правая часть которого стремится к нулю при $m \to \infty$. Кроме того, для v_m, как решений задач (1.33), справедливы неравенства

$$|v_m(y)\zeta(y)|_{K_1}^{(2+\alpha)} \leqslant c(2, \zeta)\,[\,|\hat{f}|_{K_1}^{(\alpha)} + \max_{K_1} |v_m|\,], \tag{1.37}$$

где $\zeta(y)$ — любая бесконечно дифференцируемая в $\overline{K}_1$ функция, равная нулю в окрестности куска границы $\Gamma \setminus \Gamma_1$. Из (1.36) и

(1.37) следует, что предельная для $v_m(y)$ функция $\hat{u}(y)$ принадлежит $C^{2+\alpha}(K_1 \cup \Gamma_1)$. Переходя к старым координатам, убеждаемся, что наше решение $u(x)$ принадлежит $C^{2+\alpha}(\Omega_1 \cup S_1)$. Так как такими кусками можно покрыть всю S, то тем самым мы доказали, что $u(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Итак, доказано, что задача (1.14) имеет решение из $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ для всех достаточно гладких f. Это вместе с леммой 1.1 доказывает следующую теорему:

Теорема 1.3. *Если коэффициенты L принадлежат $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, удовлетворяют неравенству* (1.2), $a(x) \leqslant 0$ *и S принадлежит $C^{2+\alpha}$, то задача* (1.1), (1.3) *однозначно разрешима в $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ при всех $f(x)$ из $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\varphi(s)$ из $C^{2+\alpha}(S)$.*

Если условие $a(x) \leqslant 0$ не выполнено, то известно, что для задачи могут не иметь места теорема единственности и теорема существования для всех $f(x)$. Чтобы выяснить всю картину разрешимости задачи (1.1), (1.3) при любом коэффициенте при $u(x)$, введем в уравнение член $-\lambda u$ и рассмотрим семейство задач

$$Lu - \lambda u = f, \quad u|_S = \varphi \tag{1.38}$$

с произвольным комплексным числовым параметром λ, считая (теперь уже без ограничения общности), что коэффициент $a(x)$ при u в Lu неположителен. Решение в этом случае будет комплекснозначной функцией $u(x)$ вещественной переменной x. Сохраним за пространствами, состоящими из комплекснозначных функций $v(x) = v_1(x) + iv_2(x)$ с $v_k(x)$, $k = 1, 2$, из $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$, те же обозначения $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$. Нормы в них определим так: $|v|_{\Omega}^{(l+\alpha)} = |v_1|_{\Omega}^{(l+\alpha)} + |v_2|_{\Omega}^{(l+\alpha)}$. Пусть коэффициенты L по-прежнему вещественны и удовлетворяют условиям теоремы 1.3; без ограничения общности считаем, что граничное условие сведено к нулевому. В силу теоремы 1.3 задача

$$Lu - \lambda u = f, \quad u|_S = 0 \tag{1.39}$$

сводится к задаче

$$u - \lambda L^{-1} u = L^{-1} f, \tag{1.40}$$

где L^{-1} — оператор, обратный оператору L, устанавливающему взаимно однозначное соответствие между $C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$.

Если (1.40) рассматривать как уравнение в пространстве $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, то в этом пространстве оператор L^{-1} вполне непрерывен. Действительно, он любое ограниченное в $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ множество переводит в множество, ограниченное в $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ (это следует из неравенства (1.18)), а последнее компактно в $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Но тогда к уравнению (1.40) применимы все теоремы Фредгольма (см., например, [31_2, 48, 13]). В частности, оно разрешимо при любой правой части тогда и только тогда, когда соответствующее однородное уравнение

$$u - \lambda L^{-1} u = 0 \tag{1.41}$$

не имеет никаких решений, кроме $u \equiv 0$. Те значения λ, при которых уравнение (1.41) имеет нетривиальные решения, образуют спектр задачи (1.1), (1.3). Теоремы Фредгольма гарантируют, что все такие λ можно занумеровать в порядке возрастания их модулей и каждое λ имеет конечную кратность, т. е. каждому из них соответствует конечное число линейно независимых решений. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ есть спектр задачи (1.1), (1.3). Если таких λ_k бесконечное множество, то $|\lambda_k| \to \infty$.

Мы не будем формулировать здесь другие утверждения теорем Фредгольма, которые касаются сопряженного к L оператора. Те же, которые отмечены выше, гарантируют разрешимость уравнений (1.40) или (1.41) в пространстве $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Но нетрудно видеть, что на самом деле все их решения принадлежат $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, если, конечно, предполагать, что $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Действительно, если $f(x)$ и решение $u(x)$ принадлежат $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, то $L^{-1}f$ и $L^{-1}u$ принадлежат $C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, а тогда в силу самого уравнения и $u(x) \in C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Ввиду этого мы можем от уравнений (1.40), (1.41) вернуться к задаче (1.15) и задаче

$$Lu - \lambda u = 0, \quad u|_S = 0 \tag{1.42}$$

на определение собственных значений λ и соответствующих им собственных функций — нетривиальных решений задачи (1.42). Из сказанного ясна, в частности, справедливость утверждений теоремы 1.1 при $l = 2$.

Остановимся еще на весьма важном свойстве эллиптических уравнений второго порядка, носящем название «принципа максимума». Впервые он был обнаружен на гармонических функциях и «в чистом виде» выражается в том, что отличная от тождественной постоянной гармоническая функция $u(x)$ в любой области Ω, в которой она принадлежит $C(\overline{\Omega})$, принимает свое наименьшее и наибольшее значения лишь на границе этой области, так что для $\forall x \in \Omega$

$$\min_{\partial\Omega} u(x) < u(x) < \max_{\partial\Omega} u(x). \tag{1.43}$$

Это свойство, как мы видим, дает априорную оценку для $u(x)$ в Ω через ее значения на $\partial\Omega$. Если функция $u(x)$ удовлетворяет неоднородному уравнению Лапласа: $\Delta u = f$, то для нее неравенства (1.43), вообще говоря, неверны. Однако вместо них справедливы другие неравенства, позволяющие оценить $\max_{\Omega} |u|$

через $\max\limits_{\Omega}|f|$, $\max\limits_{\partial\Omega}|u|$ и те или иные характеристики области, причем вывод их основан на тех же соображениях, что и вывод (1.43). В основе доказательства этих и аналогичных им утверждений для уравнений (1.1) лежит элементарный факт: если функция $u(x)$ имеет в какой-либо точке x^0 области Ω относительный максимум, то для нее в этой точке $u_{x_i}=0$, $u_{x_ix_i}\leqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, n$, и $a_{ij}u_{x_ix_j}\leqslant 0$ при любой неотрицательной форме $a_{ij}(x^0)\xi_i\xi_j\geqslant 0$ (в точке минимума $a_{ij}u_{x_ix_j}\geqslant 0$) (см. выше (1.6)). Покажем, как с помощью указанного факта выводятся оценки типа (1.43) для функций $u(x)$, удовлетворяющих неравенствам $Lu\geqslant f$ или $Lu\leqslant f$ и принадлежащих $C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ (или, чуть общее, $C(\bar{\Omega})\cap O^2(\Omega)$).

Лемма 1.3. *Если в Ω $L_1u\equiv a_{ij}u_{x_ix_j}+a_iu_{x_i}>0$ и $a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant 0$, то u не может иметь в Ω относительный максимум и для $\forall x\in\Omega$ $u(x)<\max\limits_{\partial\Omega}u(x)$.*

Действительно, в точке относительного максимума $a_{ij}u_{x_ix_j}\leqslant 0$, $a_iu_{x_i}=0$, так что $L_1u\leqslant 0$, а по условию $L_1u>0$ в Ω. Лемма доказана. (Заметим, что здесь и ниже функции a_{ij}, a_i, a, f считаются определенными и конечными во всех точках Ω и u удовлетворяет требуемому неравенству во всех точках $x\in\Omega$.)

Лемма 1.4. *Пусть в Ω $L_0u\equiv a_{ij}u_{x_ix_j}\geqslant 0$, $a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant 0$ и для $\forall\bar{\Omega}'\subset\Omega$ $\min\limits_{\Omega'}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}(x)\equiv\nu(\Omega')>0$. Тогда для $\forall x\in\bar{\Omega}$*

$$u(x)\leqslant\max_{\partial\Omega}u(x). \tag{1.44}$$

Возьмем «барьерную» функцию $\omega(x)=\varepsilon x^2$, $\varepsilon>0$. Для нее $L_0\omega=2\varepsilon\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}\geqslant 2\varepsilon\nu(\Omega')$. Поэтому $a_{ij}(u+\omega)_{x_ix_j}>0$ в Ω' и в силу леммы 1.3

$$u(x)+\omega(x)\leqslant\max_{\partial\Omega'}(u+\omega)\ \text{для}\ \forall x\in\bar{\Omega}'. \tag{1.45}$$

Устремляя в этом неравенстве ε к нулю, получим $u(x)\leqslant\max\limits_{\partial\Omega'}u$ для $\forall x\in\bar{\Omega}'$, а так как Ω' есть произвольная внутренняя подобласть Ω и $u\in C(\bar{\Omega})$, то верно и (1.44).

Лемма 1.5. *Пусть в Ω $L_1u\equiv a_{ij}u_{x_ix_j}+a_iu_{x_i}\geqslant 0$, $a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant 0$ и для $\forall\bar{\Omega}'\in\Omega$ $\min\limits_{\Omega'}a_{11}(x)>0$ и $\max\limits_{\Omega'}|a_1(x)|<\infty$. Тогда для u справедливо неравенство* (1.44).

Лемма 1.5 доказывается так же, как и лемма 1.4, только в качестве барьерной функции в Ω' надо взять $\omega=\varepsilon e^{\lambda x_1}$ и выбрать λ столь большим, чтобы $L_1\omega=(a_{11}\lambda^2+a_1\lambda)\,\varepsilon e^{\lambda x_1}>0$ в Ω' (величина λ зависит от Ω'). Это приведет к оценке $u(x)\leqslant\max\limits_{\partial\Omega'}u$ в Ω', а ввиду произвола Ω' и к (1.44).

Лемма 1.6. *Пусть в* Ω $L_2u\equiv a_{ij}u_{x_ix_j}+a_iu_{x_i}+au\geqslant 0$, $a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant 0$, $a\leqslant 0$, *и для* $\forall\overline{\Omega'}\subset\Omega$ $\min\limits_{\Omega'}a_{11}(x)>0$, $\max\limits_{\Omega'}|a_1(x)|<\infty$. *Тогда для* $\forall x\in\overline{\Omega}$

$$u(x)\leqslant\max\{0;\ \max_{\partial\Omega}u\}. \tag{1.46}$$

Рассмотрим множество $\Omega_0=\{x\colon x\in\Omega,\ u(x)>0\}$. Оно открыто, и на нем $L_1u\geqslant -au\geqslant 0$. В любой его связной компоненте выполнены условия леммы 1.5, а следовательно, и ее вывод. Но это, как легко видеть, и дает (1.46).

Замечание 1.2. Если в условиях лемм 1.3—1.6 на L_i знаки неравенств изменены на обратные, то вместо (1.44) придем к неравенству $u(x)\geqslant\min\limits_{\partial\Omega}u$, а вместо (1.46)—к $u(x)\geqslant\geqslant\min\{0;\ \min\limits_{\partial\Omega}u\}$. Доказывается это применением лемм 1.3—1.6 к функции $v(x)=-u(x)$. В частности, если в леммах 1.3—1.5 функция u удовлетворяет уравнению $L_iu=0$, то для нее справедливы оценки

$$\min_{\partial\Omega}u\leqslant u(x)\leqslant\max_{\partial\Omega}u. \tag{1.47}$$

Если же u удовлетворяет в лемме 1.6 уравнению $L_2u=0$, то для нее

$$\min\{0;\ \min_{\partial\Omega}u\}\leqslant u(x)\leqslant\max\{0;\ \max_{\partial\Omega}u\}. \tag{1.48}$$

Утверждения лемм 1.3—1.6 и составляют то, что принято называть принципом максимума. Рассмотрим теперь случаи, когда u удовлетворяет какому-либо неоднородному неравенству, в частности уравнению (1.1).

Лемма 1.7. *Пусть u удовлетворяет в Ω неравенству $Lu\geqslant f$, в котором* $a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant 0$, $a(x)\leqslant 0$, $\min\limits_{\Omega}a_{11}(x)\equiv\hat{a}_{11}>0$, $\min\limits_{\Omega}a_1(x)=\hat{a}_1>-\infty$, $\min\limits_{\Omega}a(x)=\hat{a}>-\infty$; *тогда для* $\forall x\in\overline{\Omega}$

$$u(x)\leqslant -m_1e^{\lambda x_1}+\max\{0;\ \max_{\partial\Omega}(u+m_1e^{\lambda x_1})\}, \tag{1.49}$$

где λ — неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству $\hat{a}_{11}\lambda^2+\hat{a}_1\lambda+\hat{a}\geqslant 1$, $m_1=\max\{0;\ -\max\limits_{\Omega}(fe^{-\lambda x_1})\}$. *Если же u удовлетворяет неравенству $Lu\leqslant f$, то*

$$u(x)\geqslant m_2e^{\lambda x_1}+\min\{0;\ \min_{\partial\Omega}(u-m_2e^{\lambda x_1})\} \tag{1.50}$$

с тем же λ и $m_2=\max\{0;\ \min\limits_{\Omega}(fe^{-\lambda x_1})\}$.

Возьмем $\omega(x) = me^{\lambda x_1}$, считая $m \geqslant 0$, а λ таким, как указано в лемме. Для нее $L\omega = (a_{11}\lambda^2 + a_1\lambda + a)\, me^{\lambda x_1} \geqslant (\hat{a}_{11}\lambda^2 + \hat{a}_1\lambda + \hat{a})\, me^{\lambda x_1} \geqslant me^{\lambda x_1}$. Число m выберем так, чтобы $me^{\lambda x_1} \geqslant -f(x)$ в Ω, а именно $m = m_1 = \max\{0; \max\limits_{\Omega}(-fe^{-\lambda x_1})\}$. Тогда $L(u+\omega) \geqslant 0$, и, следовательно, к функции $u + \omega$ применима лемма 1.6. Это приводит к оценке (1.49). Оценка (1.49) применительно к функции $v(x) = -u(x)$ дает неравенство (1.50) для $u(x)$.

Если $\max\limits_{\Omega} a(x) \equiv \bar{a} < 0$ и $Lu \geqslant f$, то для u имеет место более простая оценка:

$$u(x) \leqslant \max\{0; \max_{\partial\Omega} u; \max_{\Omega}(fa^{-1})\}. \tag{1.51}$$

Она следует из непосредственного рассмотрения $Lu \geqslant f$ в точке $x^0 \in \Omega$ возможного положительного максимума $u(x)$ (см. вывод (1.5)). Аналогично проверяется, что при $\bar{a} \equiv \max\limits_{\Omega} a(x) < 0$ для функции u, удовлетворяющей неравенству $Lu \leqslant f$, справедлива оценка

$$u(x) \geqslant \min\{0; \min_{\partial\Omega} u; \min(fa^{-1})\}. \tag{1.52}$$

В начале параграфа мы показали, что $\max\limits_{\Omega}|u|$ можно оценить и для $a(x)$, принимающих положительные значения, если только $\max\limits_{\Omega} a(x)$ невелик или если ширина Ω мала в направлении одной из осей x_k (см. теорему 1.2). Можно оценить $\max\limits_{\Omega}|u|$ и при несколько других условиях на коэффициенты L и Ω, выбирая иначе, чем при доказательстве теоремы 1.2, функцию ω при замене u на $v = u\omega^{-1}$.

§ 2. Априорная оценка Шаудера

Займемся теперь выводом неравенства (1.11). В основе всех его доказательств лежит идея Шаудера разбить всю область Ω на маленькие подобласти Ω_k, $k = 1, \ldots, N$, рассмотреть в каждой из Ω_k уравнение $Lu = f$ как уравнение

$$L^0 u \equiv a_{ij}(x^0)\, u_{x_i x_j} =$$
$$= f + [a_{ij}(x^0) - a_{ij}(x)]\, u_{x_i x_j} - a_i(x)\, u_{x_i} - a(x)\, u \equiv F(x)$$

с постоянными коэффициентами и получить для решений u таких уравнений оценку нормы $|u|_{\Omega_k}^{(2+\alpha)}$ через $|F|^{(\alpha)}$ и более слабые нормы u (вообще говоря, по несколько более широкой подобласти). Если коэффициенты $a_{ij}(x)$ непрерывны, то из этих оценок можно «склеить» желаемую оценку (1.11). В соответствии брать λ столь большим, чтобы $L_1\omega=(a_{11}\lambda^2+a_1\lambda)\,\varepsilon e^{\lambda x_1}>0$ в Ω' (величина λ зависит от Ω'). Это приведет к оценке $u(x)\leqslant\max\limits_{\partial\Omega'}u$ в Ω', а ввиду произвола Ω' и к (1.44).

Лемма 1.6. *Пусть в* Ω $L_2u\equiv a_{ij}u_{x_ix_j}+a_iu_{x_i}+au\geqslant 0$, $a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant 0$, $a\leqslant 0$, *и для* $\forall\overline{\Omega'}\subset\Omega$ $\min\limits_{\Omega'}a_{11}(x)>0$, $\max\limits_{\Omega'}|a_1(x)|<\infty$. *Тогда для* $\forall x\in\overline{\Omega}$

$$u(x)\leqslant\max\{0;\ \max_{\partial\Omega}u\}. \tag{1.46}$$

Рассмотрим множество $\Omega_0=\{x\colon\ x\in\Omega,\ u(x)>0\}$. Оно открыто, и на нем $L_1u\geqslant -au\geqslant 0$. В любой его связной компоненте выполнены условия леммы 1.5, а следовательно, и ее вывод. Но это, как легко видеть, и дает (1.46).

Замечание 1.2. Если в условиях лемм 1.3—1.6 на L_i знаки неравенств изменены на обратные, то вместо (1.44) придем к неравенству $u(x)\geqslant\min\limits_{\partial\Omega}u$, а вместо (1.46)—к $u(x)\geqslant$ $\geqslant\min\{0;\ \min\limits_{\partial\Omega}u\}$. Доказывается это применением лемм 1.3—1.6 к функции $v(x)=-u(x)$. В частности, если в леммах 1.3—1.5 функция u удовлетворяет уравнению $L_1u=0$, то для нее справедливы оценки

$$\min_{\partial\Omega}u\leqslant u(x)\leqslant\max_{\partial\Omega}u. \tag{1.47}$$

Если же u удовлетворяет в лемме 1.6 уравнению $L_2u=0$, то для нее

$$\min\{0;\ \min_{\partial\Omega}u\}\leqslant u(x)\leqslant\max\{0;\ \max_{\partial\Omega}u\}. \tag{1.48}$$

Утверждения лемм 1.3—1.6 и составляют то, что принято называть принципом максимума. Рассмотрим теперь случаи, когда u удовлетворяет какому-либо неоднородному неравенству, в частности уравнению (1.1).

Лемма 1.7. *Пусть u удовлетворяет в Ω неравенству $Lu\geqslant f$, в котором* $a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant 0$, $a(x)\leqslant 0$, $\min\limits_{\Omega}a_{11}(x)\equiv\hat a_{11}>0$, $\min\limits_{\Omega}a_1(x)=$ $=\hat a_1>-\infty$, $\min\limits_{\Omega}a(x)=\hat a>-\infty$; *тогда для* $\forall x\in\overline{\Omega}$

$$u(x)\leqslant -m_1e^{\lambda x_1}+\max\{0;\ \max_{\partial\Omega}(u+m_1e^{\lambda x_1})\}, \tag{1.49}$$

где λ — неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству $\hat a_{11}\lambda^2+\hat a_1\lambda+\hat a\geqslant 1$, $m_1=\max\{0;\ -\max\limits_{\Omega}(fe^{-\lambda x_1})\}$. *Если же u удовлетворяет неравенству $Lu\leqslant f$, то*

$$u(x)\geqslant m_2e^{\lambda x_1}+\min\{0;\ \min_{\partial\Omega}(u-m_2e^{\lambda x_1})\} \tag{1.50}$$

с тем же λ и $m_2=\max\{0;\ \min\limits_{\Omega}(fe^{-\lambda x_1})\}$.

Возьмем $\omega(x) = me^{\lambda x_1}$, считая $m \geqslant 0$, а λ таким, как указано в лемме. Для нее $L\omega = (a_{11}\lambda^2 + a_1\lambda + a)\, me^{\lambda x_1} \geqslant (\hat{a}_{11}\lambda^2 + \hat{a}_1\lambda + \hat{a})\, me^{\lambda x_1} \geqslant me^{\lambda x_1}$. Число m выберем так, чтобы $me^{\lambda x_1} \geqslant -f(x)$ в Ω, а именно $m = m_1 = \max\{0; \max\limits_{\Omega}(-fe^{-\lambda x_1})\}$. Тогда $L(u+\omega) \geqslant 0$, и, следовательно, к функции $u + \omega$ применима лемма 1.6. Это приводит к оценке (1.49). Оценка (1.49) применительно к функции $v(x) = -u(x)$ дает неравенство (1.50) для $u(x)$.

Если $\max\limits_{\Omega} a(x) \equiv \bar{a} < 0$ и $Lu \geqslant f$, то для u имеет место более простая оценка:

$$u(x) \leqslant \max\{0; \max_{\partial\Omega} u; \max_{\Omega}(fa^{-1})\}. \tag{1.51}$$

Она следует из непосредственного рассмотрения $Lu \geqslant f$ в точке $x^0 \in \Omega$ возможного положительного максимума $u(x)$ (см. вывод (1.5)). Аналогично проверяется, что при $\bar{a} \equiv \max\limits_{\Omega} a(x) < 0$ для функции u, удовлетворяющей неравенству $Lu \leqslant f$, справедлива оценка

$$u(x) \geqslant \min\{0; \min_{\partial\Omega} u; \min(fa^{-1})\}. \tag{1.52}$$

В начале параграфа мы показали, что $\max\limits_{\Omega}|u|$ можно оценить и для $a(x)$, принимающих положительные значения, если только $\max\limits_{\Omega} a(x)$ невелик или если ширина Ω мала в направлении одной из осей x_k (см. теорему 1.2). Можно оценить $\max\limits_{\Omega}|u|$ и при несколько других условиях на коэффициенты L и Ω, выбирая иначе, чем при доказательстве теоремы 1.2, функцию ω при замене u на $v = u\omega^{-1}$.

§ 2. Априорная оценка Шаудера

Займемся теперь выводом неравенства (1.11). В основе всех его доказательств лежит идея Шаудера разбить всю область Ω на маленькие подобласти Ω_k, $k = 1, \ldots, N$, рассмотреть в каждой из Ω_k уравнение $Lu = f$ как уравнение

$$L^0 u \equiv a_{ij}(x^0)\, u_{x_i x_j} =$$
$$= f + [a_{ij}(x^0) - a_{ij}(x)]\, u_{x_i x_j} - a_i(x)\, u_{x_i} - a(x)\, u \equiv F(x)$$

с постоянными коэффициентами и получить для решений u таких уравнений оценку нормы $|u|^{(2+\alpha)}_{\Omega_k}$ через $|F|^{(\alpha)}$ и более слабые нормы u (вообще говоря, по несколько более широкой подобласти). Если коэффициенты $a_{ij}(x)$ непрерывны, то из этих оценок можно «склеить» желаемую оценку (1.11). В соответствии с этой идеей доказательство неравенства (1.11) сводится к доказательству соответствующих оценок (предельно точных) для решений уравнений $L^0 u = F$ с постоянными коэффициентами или, что то же, уравнений Пуассона $\Delta u = F$. С получения этих оценок для решений уравнений $\Delta u = F$ мы и начнем вывод неравенств (1.7). Излагаемое здесь их доказательство было дано по нашей просьбе В. А. Солонниковым.

Мы будем использовать следующие известные (см. [37₁]) и сравнительно просто выводимые неравенства между различными нормами гёльдеровского типа, справедливые для произвольных функций u из $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$:

$$\left.\begin{aligned} |u|_{\Omega}^{(l)} &\leqslant c\left[|u|_{\Omega}^{(l+\alpha)}\right]^{\frac{1}{(1+\alpha)}}\left[|u|_{\Omega}^{(l-1)}\right]^{\frac{\alpha}{(1+\alpha)}},\\ \langle D^{l-1}u\rangle_{\Omega}^{(\alpha)} &\leqslant c\left[|u|_{\Omega}^{(l)}\right]^{\alpha}\left[|u|_{\Omega}^{(l-1)}\right]^{1-\alpha},\\ |u|_{\Omega}^{(l)} &\leqslant \varepsilon\sum_{|k|=l}|D^k u|_{\Omega}^{(\alpha)} + c_\varepsilon\max_{\Omega}|u|. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

Здесь c и c_ε зависят от области Ω, ε — произвольно малое положительное число, а $c_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Заметим еще, что если $u(x)$ равна нулю вне Ω и $u \in C^{l+\alpha}(E_n)$, то

$$|u|_{\Omega}^{(l+\alpha)} = |u|_{E_n}^{(l+\alpha)}, \quad |D^k u|_{\Omega}^{(\alpha)} = |D^k u|_{E_n}^{(\alpha)}, \qquad |k| \leqslant l.$$

Ограничимся случаем $n > 2$. Для $n = 2$ все делается принципиально так же. Некоторое качественное отличие поведения основного сингулярного решения на бесконечности (его рост) для нижеследующих рассуждений несущественно.

Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве E_n ньютонов потенциал

$$w(x) = \int_{E_n} \mathscr{E}(x-y) f(y)\,dy = \tau_n^{-1}\int_{E_n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy, \qquad (2.2)$$

где $\tau_n = n(n-2)\varkappa_n$, и в полупространстве $x_n \geqslant 0$ потенциал двойного слоя

$$v(x) = \int_{y_n=0} K(x-y)\,\varphi(y')\,dy' =$$

$$= \frac{2}{\tau_n}\int_{y_n=0} \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,\varphi(y')\,dy', \qquad (2.3)$$

где $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$, а $y = (y', y_n)$.

Мы будем пользоваться тем, что

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i}\mathscr{E}(x-y) = -\frac{\partial}{\partial y_i}\mathscr{E}(x-y),\\ &\frac{\partial}{\partial x_j}K(x-y) = -\frac{\partial}{\partial y_j}K(x-y),\\ &\quad\Delta_x\mathscr{E}(x-y) = \Delta_y\mathscr{E}(x-y) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq y,\\ &\quad\Delta_x K(x-y) = 0 \quad \text{при } x \neq y. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. *Пусть функция* $\varphi(x')$, *заданная на плоскости* $x_n = 0$, *дважды непрерывно дифференцируема, величина* $\sum_{i,j=1}^{n-1}\langle\varphi_{x_i x_j}(x')\rangle_{E_{n-1}}^{(\alpha)}$ *конечна и при больших* $|x'|$ *справедливы неравенства*

$$\left.\begin{aligned} &|\varphi(x')| \leqslant c_1|x'|^{\alpha}, \quad \sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \leqslant c_1|x'|^{\alpha-1},\\ &\sum_{i,j=1}^{n-1}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_j}\right| \leqslant c_1|x'|^{\alpha-2}, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

где $0 < \alpha < 1$. *Тогда потенциал двойного слоя* $v(x)$ *также дважды непрерывно дифференцируем в полупространстве* $x_n > 0$ *и там имеет место неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{n}\langle v_{x_i x_j}\rangle_{\{x_n \geqslant 0\}}^{(\alpha)} \leqslant c\sum_{i,j=1}^{n-1}\langle\varphi_{x_i x_j}\rangle_{\{x_n = 0\}}^{(\alpha)}$$

с постоянной c, *зависящей лишь от* n *и* α (*но не от* c_1 *из* (2.5)).

Доказательство. Оценим сначала величину $v_{x_i x_j}(x', x_n) - v_{x_i x_j}(\bar{x}', x_n)$, где $i, j \neq n$, а $x_n > 0$. Для этого, используя (2.4), с помощью интегрирования по частям представим $v_{x_i x_j}(x)$ так:

$$v_{x_i x_j}(x) = \int_{y_n=0} K(x-y)\,\varphi_{ij}(y')\,dy', \qquad \varphi_{ij} \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_i\,\partial y_j}.$$

В силу (2.5) интегрирование по частям возможно, и никаких дополнительных членов при этом не возникнет. Из полученной формулы вытекает, что

$$v_{x_i x_j}(x', x_n) - v_{x_i x_j}(\bar{x}', x_n) = \\ = \int_{E_{n-1}} K(z', x_n)\left[\varphi_{ij}(x'-z') - \varphi_{ij}(\bar{x}'-z')\right]dz',$$

и так как

$$\int\limits_{E_{n-1}} |K(z', x_n)|\,dz' = 1,$$

то

$$|v_{x_i x_j}(x', x_n) - v_{x_i x_j}(\bar{x}', x_n)| \leqslant |x' - \bar{x}'|^{\alpha} \langle \varphi_{ij} \rangle^{(\alpha)}_{E_{n-1}}. \tag{2.6}$$

Пользуясь уравнением Лапласа $v_{x_n x_n} = -\sum\limits_{i=1}^{n-1} v_{x_i x_i}$ и оценкой (2.6), получаем

$$|v_{x_n x_n}(x', x_n) - v_{x_n x_n}(\bar{x}', x_n)| \leqslant |x' - \bar{x}'|^{\alpha} \sum_{i=1}^{n-1} \langle \varphi_{ii} \rangle^{(\alpha)}_{E_{n-1}}. \tag{2.7}$$

Переходим к оценке величины

$$v_{x_n x_i}(x', x_n) - v_{x_n x_i}(\bar{x}', x_n),$$

где $i \neq n$.

В силу (2.4) $v_{x_i x_n}$ можно представить в виде

$$v_{x_i x_n}(x) = -\frac{2}{\tau_n} \int\limits_{y_n = 0} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x - y|^{n-2}} \psi(y')\,dy',$$

где $\psi = \sum\limits_{l=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_l^2}$.

Пусть K_M — шар $\{|y'| < M,\ y_n = 0\}$ достаточно большого радиуса, содержащий точки x' и $\bar{x}'$. Введем функцию

$$v_{in}^{(M)}(x) = -\frac{2}{\tau_n} \int\limits_{K_M} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x - y|^{n-2}} \psi(y')\,dy'.$$

Для любой фиксированной точки x справедливо $v_{x_i x_n} = \lim\limits_{M \to \infty} v_{in}^{(M)}(x)$. Представим разность $v_{in}^{(M)}(x', x_n) - v_{in}^{(M)}(\bar{x}', x_n)$ в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned} v_{in}^{(M)}(x', x_n) - v_{in}^{(M)}(\bar{x}', x_n) = \\ = -\frac{2}{\tau_n} \int\limits_{K_M} [\psi(y') - \psi(x')] \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x - y|^{n-2}}\,dy' + \\ + \frac{2}{\tau_n} \int\limits_{K_M} [\psi(y') - \psi(\bar{x}')] \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \frac{1}{|\bar{x} - y|^{n-2}}\,dy' + \\ + \frac{2}{\tau_n} \Bigg[\psi(\bar{x}') \int\limits_{K_M} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \frac{1}{|\bar{x} - y|^{n-2}}\,dy' - \\ - \psi(x') \int\limits_{K_M} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x - y|^{n-2}}\,dy' \Bigg]. \end{aligned}$$

Пусть $K_{2\rho}(x')$ — шар $\{\,|y'-x'|<2\rho,\ y_n=0\}$, где $\rho=|x'-\bar{x}'|$. В первых двух интегралах разобьем область интегрирования K_M на $K_{2\rho}(x')$ и $K_M\setminus K_{2\rho}(x')$, причем радиус M возьмем столь большим, что $K_{2\rho}(x')\subset K_M$. Интегралы в скобках преобразуем в интегралы по сфере $|y'|=M$. Это даст

$$
\begin{aligned}
&v_{in}^{(M)}(x',\,x_n)-v_{in}^{(M)}(\bar{x}',\,x_n)=\\
&=-\frac{2}{\tau_n}\int\limits_{K_{2\rho}(x')}[\psi(y')-\psi(x')]\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy'+\\
&+\frac{2}{\tau_n}\int\limits_{K_{2\rho}(x')}[\psi(y')-\psi(\bar{x}')]\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}}\,dy'-\\
&-\frac{2}{\tau_n}\int\limits_{K_M\setminus K_{2\rho}(x')}[\psi(y')-\psi(\bar{x}')]\times\\
&\qquad\qquad\times\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}-\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}}\right]dy'-\\
&-\frac{2}{\tau_n}[\psi(\bar{x}')-\psi(x')]\int\limits_{K_M\setminus K_{2\rho}(x')}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy'-\\
&-\frac{2}{\tau_n}\left[\psi(\bar{x}')\int\limits_{|y'|=M}\frac{n_i(y')}{|\bar{x}-y|^{n-2}}\,ds_{y'}-\psi(x')\int\limits_{|y'|=M}\frac{n_i(y')}{|x-y|^{n-2}}\,ds_{y'}\right]=\\
&=-\frac{2}{\tau_n}\int\limits_{K_{2\rho}(x')}[\psi(y')-\psi(x')]\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy'+\\
&+\frac{2}{\tau_n}\int\limits_{K_{2\rho}(x')}[\psi(y')-\psi(\bar{x}')]\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}}\,dy'-\\
&-\frac{2}{\tau_n}\int\limits_{K_M\setminus K_{2\rho}(x')}[\psi(y')-\psi(\bar{x}')]\times\\
&\qquad\qquad\times\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}-\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}}\right]dy'+\\
&+\frac{2}{\tau_n}\psi(\bar{x}')\left[\int\limits_{S_M}\frac{n_i(y')}{|x-y|^{n-2}}\,ds_{y'}-\int\limits_{S_M}\frac{n_i(y')}{|\bar{x}-y|^{n-2}}\,ds_{y'}\right]
\end{aligned}
$$

(появляющийся при интегрировании по частям интеграл по сфере $|x'-y'|=2\rho$ равен нулю). Здесь $n_i(y')$ суть компоненты единичного вектора внешней нормали к сфере $S_M=\{\,|y'|=M,\ y_n=0\}$. Теперь устремим $M\to\infty$. При этом все интегралы по сфере S_M пропадут, так как при достаточно больших M

$$\left|\int\limits_{S_M} \frac{n_i(y')}{|x-y|^{n-2}}\,ds_{y'} - \int\limits_{S_M} \frac{n_i(y')}{|\bar{x}-y|^{n-2}}\,ds_{y'}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{S_M} \frac{\big||x-y|^{n-2}-|\bar{x}-y|^{n-2}\big|\,ds_{y'}}{|x-y|^{n-2}\,|\bar{x}-y|^{n-2}} \leqslant c\,|x-\bar{x}| \int\limits_{S_M} \frac{ds_{y'}}{|x-y|^{n-1}} = \frac{c_1|x-\bar{x}|}{M}.$$

Итак, переходя к пределу при $M\to\infty$, получим

$$v_{x_ix_n}(x',x_n) - v_{x_ix_n}(\bar{x}',x_n) =$$

$$= -\frac{2}{\tau_n} \int\limits_{K_{2\rho}(x')} [\psi(y')-\psi(x')]\,\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy' +$$

$$+ \frac{2}{\tau_n} \int\limits_{K_{2\rho}(x')} [\psi(y')-\psi(\bar{x}')]\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}}\,dy' -$$

$$- \frac{2}{\tau_n} \int\limits_{\substack{|x'-y'|\geqslant 2\rho\\ y_n=0}} [\psi(y')-\psi(\bar{x}')]\times$$

$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}}\right\}dy'.$$

Оценим теперь каждый член правой части:

$$\left|\int\limits_{K_{2\rho}(x')} [\psi(y')-\psi(x')]\,\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy'\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\,\langle\psi\rangle^{(\alpha)}_{E_{n-1}} \int\limits_{K_{2\rho}(x')} \frac{|x'-y'|^{\alpha}}{|x-y|^{n-1}}\,dy' \leqslant c\rho^{\alpha}\,\langle\psi\rangle^{(\alpha)}_{E_{n-1}}.$$

Точно так же оценивается второй член.

Для третьего члена справедлива цепочка следующих неравенств:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}}\right| =$$

$$= (n-2)\left|\frac{x_i-y_i}{|x-y|^n} - \frac{\bar{x}_i-y_i}{|\bar{x}-y|^n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant (n-2)\left[\frac{|x_i-\bar{x}_i|}{|x-y|^n} + |\bar{x}_i-y_i|\cdot\left|\frac{1}{|x-y|^n}-\frac{1}{|\bar{x}-y|^n}\right|\right] \leqslant$$

$$\leqslant (n-2)\left[\frac{\rho}{|x-y|^n} + |\bar{x}-y|\,\frac{\big||\bar{x}-y|^n-|x-y|^n\big|}{|x-y|^n\,|\bar{x}-y|^n}\right] =$$

$$= (n-2)\left[\frac{\rho}{|x-y|^n} + \frac{\big||\bar{x}-y|-|x-y|\big|}{|x-y|^n\,|\bar{x}-y|^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}|\bar{x}-y|^k\,|x-y|^{n-1-k}\right].$$

Из $||\bar{x}-y|-|x-y||\leqslant\rho$ и $|x-y|\geqslant 2\rho$ имеем

$$|\bar{x}-y|\geqslant|x-y|-\rho\geqslant|x-y|-\frac{|x-y|}{2}=\frac{1}{2}|x-y|,$$

и потому

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}-\frac{\partial}{\partial\bar{x}_i}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}}\right|\leqslant\frac{c\rho}{|x-y|^n}. \tag{2.8}$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{\substack{|x'-y'|\geqslant 2\rho\\ y_n=0}}[\psi(y')-\psi(\bar{x}')]\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}-\frac{\partial}{\partial\bar{x}_i}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}}\right]dy'\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\rho\langle\psi\rangle^{(\alpha)}_{E_{n-1}}\int\limits_{\substack{|x'-y'|\geqslant 2\rho\\ y_n=0}}\frac{|\bar{x}'-y'|^{\alpha}}{|x-y|^n}dy'\leqslant$$

$$\leqslant c\rho\langle\psi\rangle^{(\alpha)}_{E_{n-1}}\int\limits_{\substack{|x'-y'|\geqslant 2\rho\\ y_n=0}}\frac{dy'}{|x-y|^{n-\alpha}}\leqslant c'\rho^{\alpha}\langle\psi\rangle^{(\alpha)}_{E_{n-1}}.$$

При этом мы воспользовались неравенством $|\bar{x}'-y'|\leqslant\leqslant|x'-y'|+\rho\leqslant\frac{3}{2}|x'-y'|$. Таким образом,

$$|v_{x_ix_n}(x',x_n)-v_{x_ix_n}(\bar{x}',x_n)|\leqslant c\rho^{\alpha}\langle\psi\rangle^{(\alpha)}_{E_{n-1}},$$

что и требовалось доказать.

Оценим теперь разности $v_{x_ix_j}(x',x_n)-v_{x_ix_j}(x',\bar{x}_n)$. Пусть $i\neq n$, $j\neq n$; тогда

$$v_{x_ix_j}(x',x_n)=$$

$$=\frac{2}{\tau_n}\int\limits_{y_n=0}\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}[\varphi_{y_iy_j}(y')-\varphi_{x_ix_j}(x')]\,dy'-\varphi_{x_ix_j}(x'),$$

так как

$$\frac{2}{\tau_n}\int\limits_{y_n=0}\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}dy'=-1\qquad(\text{если } x_n>0),$$

и, следовательно,

$$v_{x_ix_j}(x',x_n)-v_{x_ix_j}(x',\bar{x}_n)=$$

$$=\frac{2}{\tau_n}\int\limits_{y_n=0}\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}[\varphi_{y_iy_j}(y')-\varphi_{x_ix_j}(x')]\,dy'-$$

$$-\frac{2}{\tau_n}\int\limits_{y_n=0}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_n}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}}[\varphi_{y_iy_j}(y')-\varphi_{x_ix_j}(x')]\,dy'.$$

Пусть $\delta = |x_n - \bar{x}_n|$. Представим эту разность иначе:

$$v_{x_i x_j}(x', x_n) - v_{x_i x_j}(x', \bar{x}_n) =$$

$$= \frac{2}{\tau_n} \int\limits_{\substack{|x'-y'| \leqslant \delta \\ y_n=0}} \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} [\varphi_{y_i y_j}(y') - \varphi_{x_i x_j}(x')]\, dy' -$$

$$- \frac{2}{\tau_n} \int\limits_{\substack{|x'-y'| \leqslant \delta \\ y_n=0}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}} [\varphi_{y_i y_j}(y') - \varphi_{x_i x_j}(x')]\, dy' +$$

$$+ \frac{2}{\tau_n} \int\limits_{\substack{|x'-y'| \geqslant \delta \\ y_n=0}} [\varphi_{y_i y_j}(y') - \varphi_{x_i x_j}(x')] \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial x_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}} \right] dy'.$$

Первые два интеграла непосредственно оцениваются сверху через $c\delta^{\alpha} \langle \varphi_{y_i y_j} \rangle^{(\alpha)}_{E_{n-1}}$. Последний интеграл также не превосходит $c\delta^{\alpha} \langle \varphi_{y_i y_j} \rangle^{(\alpha)}_{E_{n-1}}$. Это ясно, если иметь в виду, что при $|x-y| \geqslant \delta$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}} \right| \leqslant \frac{c\delta}{|x-y|^n}.$$

Мы рассмотрели случай, когда $i \neq n$, $j \neq n$. Случай $i = j = n$ с помощью уравнения сводится к предыдущему. Пусть $i \neq n$, $j = n$; тогда

$$v_{x_i x_n}(x', x_n) = \frac{2}{\tau_n} \int\limits_{y_n=0} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \psi(y')\, dy',$$

$$\psi = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_k^2},$$

$$v_{x_i x_n}(x', x_n) - v_{x_i x_n}(x', \bar{x}_n) =$$

$$= \frac{2}{\tau_n} \int\limits_{y_n=0} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}} \right] \psi(y')\, dy'.$$

Интеграл

$$\int\limits_{y_n=0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}} \right] dy'$$

сходится и равен нулю. Поэтому

$$v_{x_i x_n}(x', x_n) - v_{x_i x_n}(x', \bar{x}_n) =$$

$$= \frac{2}{\tau_n} \int\limits_{\substack{|x'-y'| \leqslant \delta \\ y_n = 0}} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} [\psi(y') - \psi(x')]\, dy' -$$

$$- \frac{2}{\tau_n} \int\limits_{\substack{|x'-y'| \leqslant \delta \\ y_n = 0}} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}} [\psi(y') - \psi(x')]\, dy' +$$

$$+ \frac{2}{\tau_n} \int\limits_{\substack{|x'-y'| \geqslant \delta \\ y_n = 0}} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}} \right] \times$$

$$\times [\psi(y') - \psi(x')]\, dy'.$$

Каждый член этой суммы оценивается аналогично тому, как это было сделано выше при $i \neq n$, $j \neq n$.

Подытоживая все случаи, видим, что

$$|v_{x_i x_j}(x', x_n) - v_{x_i x_j}(\bar{x}', x_n)| \leqslant c\rho^\alpha \sum_{k, l=1}^{n-1} \langle \varphi_{x_k x_l} \rangle_{E_{n-1}}^{(\alpha)}, \quad \rho = |x' - \bar{x}'|,$$

$$|v_{x_i x_j}(x', x_n) - v_{x_i x_j}(x', \bar{x}_n)| \leqslant c\delta^\alpha \sum_{k, l=1}^{n-1} \langle \varphi_{x_k x_l} \rangle_{E_{n-1}}^{(\alpha)}, \quad \delta = |x_n - \bar{x}_n|,$$

при всех $i, j = 1, \ldots, n$.

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Пусть $f(y)$ — финитная функция из $C^\alpha(E_n)$. Тогда ньютонов потенциал*

$$w(x) = \tau_n^{-1} \int\limits_{E_n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy$$

непрерывен, имеет непрерывные производные до второго порядка включительно и

$$\langle D^2 w \rangle_{E_n}^{(\alpha)} \leqslant c \langle f \rangle_{E_n}^{(\alpha)}, \tag{2.9}$$

где постоянная c зависит лишь от n и α.

То, что потенциал $w(x)$ непрерывен и непрерывно дифференцируем, хорошо известно. Существование же и непрерывность по Гёльдеру производных второго порядка выводятся с помощью нижеследующих формул. Пусть сначала $f(y)$ есть финитная в E_n непрерывно дифференцируемая функция. Тогда в силу (2.4)

$$w_{x_i}(x)=\tau_n^{-1}\int\limits_{E_n}\frac{f_{y_i}(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy,$$

$$w_{x_ix_j}(x)=-\tau_n^{-1}\int\limits_{E_n}f_{y_i}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy=$$

$$=-\tau_n^{-1}\int\limits_{|x-y|\geqslant\rho}f_{y_i}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy-$$

$$-\tau_n^{-1}\int\limits_{|x-y|\leqslant\rho}\frac{\partial}{\partial y_i}[f(y)-f(x)]\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy.$$

Производя обратное интегрирование по частям, получим

$$w_{x_ix_j}(x)=\tau_n^{-1}\int\limits_{|x-y|\geqslant\rho}f(y)\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_j}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy+$$

$$+\tau_n^{-1}\int\limits_{|x-y|\leqslant\rho}[f(y)-f(x)]\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_j}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy-\gamma_{ij}f(x), \qquad (2.10)$$

где

$$\gamma_{ij}=(n-2)\,\tau_n^{-1}\int\limits_{|z|=1}\cos(n,z_i)\cos(n,z_j)\,ds=\delta_i^jn^{-1},$$

а ρ — произвольное положительное число. Из этой формулы видно, что D_x^2w существуют, и равенство (2.10) сохраняется для любой финитной функции $f(x)$ из $C^\alpha(E_n)$. Возьмем другую точку $\bar{x}$ и представим $w_{x_ix_j}(\bar{x})$ иначе, разбивая область интегрирования на шар $|x-y|<\rho$ и его внешность $|y-x|\geqslant\rho$, причем радиус шара ρ возьмем больше $|x-\bar{x}|$. Центр шара, в отличие от (2.10), поместим в точку x, а не в точку $\bar{x}$, для которой пишется представление на этот раз. Делая те же преобразования, что и в первом случае, получим формулу

$$w_{x_ix_j}(\bar{x})=\tau_n^{-1}\int\limits_{|x-y|\geqslant\rho}f(y)\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_j}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}}\,dy+$$

$$+\tau_n^{-1}\int\limits_{|x-y|\leqslant\rho}[f(y)-f(\bar{x})]\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_j}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}}\,dy-$$

$$-(n-2)\,\tau_n^{-1}f(\bar{x})\int\limits_{|x-y|=\rho}\frac{(y_i-\bar{x}_i)\cos(n,y_j)}{|\bar{x}-y|^{n-1}}\,ds_y. \qquad (2.11)$$

Вычтем из (2.10) равенство (2.11) и результат преобразуем так:

$$w_{x_ix_j}(x) - w_{x_ix_j}(\bar{x}) =$$

$$= \tau_n^{-1} \int\limits_{|x-y|\geqslant\rho} [f(y) - f(\bar{x})] \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}} \right] dy +$$

$$+ \tau_n^{-1} \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} [f(y) - f(x)] \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy -$$

$$- \tau_n^{-1} \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} [f(y) - f(\bar{x})] \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}} dy - \gamma_{ij}[f(x) - f(\bar{x})] +$$

$$+ f(\bar{x})\tau_n^{-1} \left\{ \int\limits_{|x-y|\geqslant\rho} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}} \right] dy + \right.$$

$$+ (n-2) \int\limits_{|x-y|=\rho} \frac{\cos(n, y_i)\cos(n, y_j)}{|\bar{x}-y|^{n-1}} ds_y -$$

$$\left. - (n-2) \int\limits_{|x-y|=\rho} \frac{(y_i - \bar{x}_i)\cos(n, y_j)}{|x-y|^{n-1}} ds_y \right\}.$$

Члены, стоящие в фигурной скобке, как легко понять, взаимно сокращаются; следовательно,

$$w_{x_ix_j}(x) - w_{x_ix_j}(\bar{x}) =$$

$$= \tau_n^{-1} \int\limits_{|x-y|\geqslant\rho} [f(y) - f(\bar{x})] \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}} \right] dy +$$

$$+ \tau_n^{-1} \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} [f(y) - f(x)] \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy -$$

$$- \tau_n^{-1} \int\limits_{|x-y|\leqslant\rho} [f(y) - f(\bar{x})] \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \frac{1}{|\bar{x}-y|^{n-2}} dy - \gamma_{ij}[f(x) - f(\bar{x})]. \tag{2.12}$$

Здесь ρ — произвольное число, большее $|x - \bar{x}|$. С помощью этого представления величина $\langle D^2 w\rangle_{E_n}^{(\alpha)}$ оценивается через $\langle f\rangle_{E_n}^{(\alpha)}$ так же, как это было сделано выше для $v_{x_ix_n}(x', x_n) - v_{x_ix_n}(x', \bar{x}_n)$. Повторять эти рассуждения мы не будем.

Из лемм 2.1 и 2.2 следует

Лемма 2.3. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны нулю вне сферы $|x| \leqslant R$, то для решения $u(x)$ задачи Дирихле*

$$\Delta u = f(x), \quad u|_{x_n=0} = \varphi(x') \tag{2.13}$$

в полупространстве $x_n \geqslant 0$, стремящегося к нулю при $|x| \to \infty$, справедлива оценка

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle u_{x_i x_j} \rangle^{(\alpha)}_{\{x_n \geqslant 0\}} \leqslant c \left[\langle f \rangle^{(\alpha)}_{\{x_n \geqslant 0\}} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \langle \varphi_{x_i x_j} \rangle^{(\alpha)}_{E_{n-1}} \right] \tag{2.14}$$

с постоянной c, зависящей лишь от n.

Представим решение $u(x)$ в виде суммы потенциалов. Для этого продолжим $f(x)$ на полупространство $x_n \leqslant 0$ четным образом, т. е. $f(x', -x_n) = f(x', x_n)$, и сохраним за так продолженной функцией прежнее обозначение.

Очевидно, $\langle f \rangle^{(\alpha)}_{\{x_n \geqslant 0\}} = \langle f \rangle^{(\alpha)}_{E_n}$. По $f(x)$ построим ньютонов потенциал $w(x) = \tau_n^{-1} \int\limits_{E_n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy$. Функция $v(x) = u(x) + w(x)$ будет удовлетворять уравнению Лапласа и при $x_n = 0$ обращаться в функцию $\varphi(x') + w(x', 0)$. При $|x| \to \infty$ она стремится к нулю. Поэтому

$$v(x) = -\int\limits_{y_n=0} K(x-y)\,[\varphi(y') + w(y', 0)]\, dy',$$

и решение $u(x)$ есть $v(x) - w(x)$. В силу лемм 2.1 и 2.2 для $u(x)$ справедлива оценка (2.14). Лемма 2.3 доказана.

Любую финитную функцию $u(x)$ из $C^{2+\alpha}(E_n)$ можно представить в виде ньютонова потенциала

$$u(x) = -\tau_n^{-1} \int\limits_{E_n} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy$$

с финитной плотностью Δu; поэтому (см. лемму 2.2) для нее

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle u_{x_i x_j} \rangle^{(\alpha)}_{E_n} \leqslant c \langle \Delta u \rangle^{(\alpha)}_{E_n}. \tag{2.15}$$

Переходим теперь к выводу неравенства (1.11). Пусть $u(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $S \in C^{2+\alpha}$, коэффициенты L принадлежат $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\varphi(s) = u|_S \in C^{2+\alpha}(S)$. Возьмем конечное число бесконечно дифференцируемых финитных неотрицательных функций $\zeta_1(x), \ldots$ $\zeta_N(x)$, дающих в сумме при $x \in \overline{\Omega}$ единицу, т. е.

$$\sum_{k=1}^{N} \zeta_k(x) = 1, \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.16}$$

и таких, что диаметры их носителей не превосходят некоторого малого числа δ. Величина δ будет уточнена ниже. Она определяется лишь известными нам величинами. В соответствии с (2.16) функцию $u(x)$ представим в виде

$$\sum_{k=1}^{N} u_k(x) = u(x), \quad \text{где} \quad u_k(x) = u(x)\,\zeta_k(x).$$

Обозначим Lu через $f(x)$. Умножая равенство $Lu = f$ на ζ_k, представим его в виде

$$Mu_k \equiv a_{ij}(x)\,u_{kx_ix_j} = F_k(x), \tag{2.17}$$

где $F_k(x) = f\zeta_k + a_{ij}\left(2u_{x_i}\zeta_{kx_j} + u\zeta_{kx_ix_j}\right) - a_i u_{x_i}\zeta_k - au\zeta_k$.

Если носитель Ω_k функции $\zeta_k(x)$ принадлежит Ω, то на $u_k(x)$, продолженную нулем вне Ω_k, можно смотреть как на финитную функцию из $C^{2+\alpha}(E_n)$, удовлетворяющую уравнению (2.17) со свободным членом $F_k(x)$. Если же носитель Ω_k лишь частично принадлежит Ω, то введем в нем новые регулярные координаты $y_l = y_l(x)$, $l = 1, \ldots, n$, так, чтобы часть S_k границы S, принадлежащая $\overline{\Omega}_k$, имела уравнение $y_n = 0$ и область $\Omega_k \cap \Omega$ принадлежала полупространству $y_n \geqslant 0$. Функции $y_k(x)$ должны быть элементами $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_k)$. В новых координатах функция $\hat{u}_k(y) = u_k(x(y))$ будет удовлетворять уравнению того же вида (2.17), именно

$$\hat{M}u_k \equiv \hat{a}_{ij}(y)\,u_{ky_iy_j} = \hat{F}_k(y), \tag{2.18}$$

где $\hat{a}_{ij}(y)$ и $\hat{F}_k(y)$ известным способом вычисляются по $a_{ij}(x)$ и $F_k(x)$.

Доопределим $\hat{u}_k(y)$ на все полупространство $y_n \geqslant 0$, полагая $\hat{u}_k(y) = 0$ для y из $\{y_n \geqslant 0\}$, не принадлежащих образу области $\Omega_k \cap \Omega$. За так продолженной функцией $\hat{u}_k(y)$ сохраним то же обозначение. Она удовлетворяет в области $y_n > 0$ уравнению (2.18), а при $y_n = 0$ — граничному условию

$$\hat{u}_k(y)\big|_{y_n=0} = \hat{\varphi}_k(y'), \tag{2.19}$$

где $\varphi_k(s) = \varphi(s)\,\zeta_k(s)$, а $\hat{\varphi}_k(y') = \varphi_k(s(y))$.

Представим уравнения (2.17) и (2.18) в ином виде:

$$M^0u_k = a_{ij}(x^0)\,u_{kx_ix_j} = F_k(x) + [a_{ij}(x^0) - a_{ij}(x)]\,u_{kx_ix_j} \tag{2.17'}$$

и

$$\hat{M}^0\hat{u}_k = \hat{a}_{ij}(y^0)\,\hat{u}_{ky_iy_j} = \hat{F}_k(y) + [\hat{a}_{ij}(y^0) - \hat{a}_{ij}(y)]\,\hat{u}_{ky_iy_j}, \tag{2.18'}$$

где x^0 и y^0 суть произвольные точки из Ω_k и $\hat{\Omega}_k$ соответственно. Введем вместо x и y новые прямоугольные координаты z с началом в точках x^0 и y^0 так, чтобы в них уравнения (2.17′) и (2.18′) привелись соответственно к

$$a'_{ij}(0)\,u_{kz_iz_j} \equiv \Delta u_k = F'_k(z) + \left[a'_{ij}(0) - a'_{ij}(z)\right] u_{kz_iz_j} \tag{2.17''}$$

и

$$\hat{a}'_{ij}(0)\,\hat{u}_{kz_iz_j} \equiv \Delta\hat{u}_k = \hat{F}'_k(z) + [\hat{a}'_{ij}(0) - \hat{a}'_{ij}(z)]\,\hat{u}_{kz_iz_j}, \quad (2.18'')$$

причем полупространство $\{y_n \geqslant 0\}$ во втором случае перешло бы в полупространство $\{z_n \geqslant 0\}$.

К решению уравнения (2.17″) применим оценку (2.15); тогда

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle u_{kz_iz_j}\rangle_{E_n}^{(\alpha)} \leqslant c\,\langle F'_k(z) + [a'_{ij}(0) - a'_{ij}(z)]\,u_{kz_iz_j}\rangle_{E_n}^{(\alpha)}.$$

Вспоминая вид $F'_k(z)$, характер переходов от x к $y(x)$ и от y к z и правила вычисления констант Гёльдера для произведения двух функций, отсюда получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle u_{kz_iz_j}\rangle_{E_n}^{(\alpha)} \leqslant c\max_{i,j,z}|a'_{ij}(0) - a'_{ij}(z)| \sum_{i,j=1}^{n} \langle u_{kz_iz_j}\rangle_{E_n}^{(\alpha)} + \\ + c_1|u(x)|_{\Omega_k}^{(2)} + c_1|f|_{\Omega_k}^{(\alpha)}. \quad (2.20)$$

Максимум $|a'_{ij}(0) - a'_{ij}(z)|$ берется по всем z из носителя u_k. Будем считать диаметр носителя настолько малым, что

$$c\max_{i,j,z}|a'_{ij}(0) - a'_{ij}(z)| \leqslant \frac{1}{2}. \quad (2.21)$$

Это и есть единственное ограничение на выбор диаметра δ внутренних областей Ω_k.

Для таких δ из (2.20) получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle u_{kz_iz_j}\rangle_{E_n}^{(\alpha)} \leqslant 2c_1|u(x)|_{\Omega_k}^{(2)} + 2c_1|f(x)|_{\Omega_k}^{(\alpha)}. \quad (2.22)$$

Для решений $u_k(z)$ уравнений (2.18″), удовлетворяющих граничному условию (2.19) (или, точнее, условию, получаемому из него при линейном переходе от y к z), применим лемму 2.3. Из неравенства (2.14) при условии (2.21) с постоянной c, взятой из (2.14), аналогично прежнему получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle \hat{u}_{kz_iz_j}\rangle_{\{z_n\geqslant 0\}}^{(\alpha)} \leqslant 2c_2\left[|u(x)|_{\Omega_k\cap\Omega}^{(2)} + |\varphi_k|_S^{(2+\alpha)} + |f|_{\Omega_k\cap\Omega}^{(\alpha)}\right]. \quad (2.23)$$

Если воспользоваться неравенствами (2.1), то вместо $\langle u_{kz_iz_j}\rangle_{E_n}^{(\alpha)}$ и $\langle \hat{u}_{kz_iz_j}\rangle_{\{z_n\geqslant 0\}}^{(\alpha)}$ в левых частях (2.22), (2.23) можно поставить нормы $|u_k|_{E_n}^{(2+\alpha)}$ и $|\hat{u}_k|_{\{z_n\geqslant 0\}}^{(2+\alpha)}$. Переходя затем к старым переменным x и складывая эти неравенства по всем k, придем к неравенству

$$|u(x)|_{\Omega}^{(2+\alpha)} \leqslant c_3\left(|u|_{\Omega}^{(2)} + |f|_{\Omega}^{(\alpha)} + |\varphi|_S^{(2+\alpha)}\right). \quad (2.24)$$

Из него и (2.1) следует желаемое иеравеиство (1.11).

Нетрудно проследить, что постоянную c в (1.11) можно выбрать не зависящей от размеров области Ω (для этого надо функции $\zeta_k(x)$ строить так, чтобы их носители Ω_k имели перекрытия в числе, не превосходящем какого-либо фиксированного числа $c(n)$, не зависящего от размеров Ω).

Докажем, наконец, неравенства (1.12), (1.13). Пусть S_1 — часть границы S, на которой функция $\varphi(s)$ «хорошая», т. е. принадлежит $C^{2+\alpha}(S_1)$. В частности, S_1 может совпадать со всей S или быть пустым множеством. Обозначим через d_x расстояние точки x до $S \setminus S_1$, а $\min(d_x, d_y)$ — через $d_{x,y}$. Введем следующие полунормы:

$$M_{l,\Omega}[u] = \sum_{|k|=l} \max_{x \in \Omega} d_x^l \left| D_x^k u \right|,$$

$$M_{l+\alpha,\Omega}[u] = \sum_{|k|=l} \max_{x,y \in \Omega} d_{x,y}^{l+\alpha} \frac{\left| D_x^k u(x) - D_y^k u(y) \right|}{|x-y|^\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Нам понадобятся эти нормы при $l = 0, 1, 2$. Для них справедливы следующие соотношения:

Лемма 2.4. *При любом положительном $\varepsilon \leqslant 1$ для любой функции $u(x) \in C^m(\overline{\Omega})$ справедливы неравенства*

$$M_{l,\Omega}[u] \leqslant \varepsilon M_{m,\Omega}[u] + c\varepsilon^{-l/(m-l)} M_{0,\Omega}[u], \qquad l < m, \qquad (2.25)$$

$$M_{l,\Omega}[u] \leqslant \varepsilon M_{m+\alpha,\Omega}[u] + c\varepsilon^{-l/(m+\alpha-l)} M_{0,\Omega}[u], \qquad l \leqslant m, \qquad (2.26)$$

с постоянными c, зависящими от l, m и α, но не зависящими от $u(x)$ и ε.

Доказательство этих фактов элементарно, но длинно (см. [37_1, 12_1]). Мы его приводить здесь не будем.

Введем еще одно обозначение:

$$N_{2+\alpha,\Omega}[u] = \sum_{l=0}^{2} M_{l,\Omega}[u] + M_{2+\alpha,\Omega}[u].$$

Докажем, что для любой функции $u(x)$ с конечной нормой $N_{2+\alpha,\Omega}[u]$ справедливо неравенство

$$N_{2+\alpha,\Omega}[u] \leqslant c \left[M_{\alpha,\Omega}[Lu] + M_{0,\Omega}[u] + |\varphi|_{S_1}^{(2+\alpha)} \right]. \qquad (2.27)$$

Постоянная c в нем определяется постоянной эллиптичности ν из (1.2), нормами коэффициентов L в $C^\alpha(\overline{\Omega})$ и нормой куска S_1 в $C^{2+\alpha}$. Функция $\varphi(s)$ есть $u(x)|_{x=s \in S_1}$. Неравенство (2.27) представляет собою несколько уточненную форму неравенства (1.13).

В силу (2.26) вместо нормы $N_{2+\alpha,\Omega}[u]$ достаточно оценить величину $M_{2+\alpha,\Omega}[u]$, которая по определению равна

$$M_{2+\alpha,\Omega}[u]=\max_{x,y\in\Omega} d_{x,y}^{2+\alpha}\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}(x)-u_{y_iy_j}(y)|}{|x-y|^{\alpha}}.$$

Возьмем две точки x и y из Ω, для которых

$$d_{x,y}^{2+\alpha}\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}(x)-u_{y_iy_j}(y)|}{|x-y|^{\alpha}}\geqslant\frac{1}{2}M_{2+\alpha,\Omega}[u]. \tag{2.28}$$

Могут представиться две возможности: или $|x-y|\geqslant\frac{1}{4}d_{x,y}$, или $|x-y|<\frac{1}{4}d_{x,y}$. В первом случае

$$\frac{1}{2}M_{2+\alpha,\Omega}[u]\leqslant 4^{\alpha}d_{x,y}^{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[|u_{x_ix_j}|+|u_{y_iy_j}|\right]\leqslant cM_{2,\Omega}[u]$$

и потому неравенство (2.27) будет простым следствием (2.26) при $l=m=2$. Во втором случае, при $|x-y|<\frac{1}{4}d_{x,y}$, пусть для определенности $d_{x,y}=d_x$. Возьмем шар K с центром в точке x и радиусом $\frac{3}{4}d_x$. Введем срезающую для него функцию $\zeta(z)\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, равную 1 при $|x-z|\leqslant\frac{1}{2}d_x$ и нулю при $|x-z|\geqslant\frac{3}{4}d_x$. Функция $v(z)=u(z)\zeta(z)$ удовлетворяет в $K\cap\Omega$ следующему уравнению:

$$a_{ij}v_{z_iz_j}+a_iv_{z_i}+av=F, \tag{2.29}$$

в котором $F=Lu\cdot\zeta+2a_{ij}u_{z_i}\zeta_{z_j}+a_{ij}u\zeta_{z_iz_j}+a_iu\zeta_{z_i}$. Продолжим ее нулем на всю $\overline{\Omega}$ и за так продолженной функцией сохраним то же обозначение $v(z)$. К ней применимо доказанное выше неравенство (1.11). Для всех возможных вариантов расположения K по отношению к S_1 (т. е. когда K пересекает S_1 и когда K не пересекает S_1) его можно записать, огрубляя, так:

$$\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}(x)-u_{y_iy_j}(y)|}{|x-y|^{\alpha}}=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n}|v_{x_ix_j}(x)-v_{y_iy_j}(y)|}{|x-y|^{\alpha}}\leqslant$$
$$\leqslant\{|F|_{K\cap\Omega}^{(\alpha)}+|\zeta\varphi|_{K\cap S_1}^{(2+\alpha)}+M_{0,\Omega}[u]\}. \tag{2.30}$$

Функцию $\zeta(z)$ считаем выбранной так, чтобы $|\zeta_{z_i}|\leqslant c/d_x$,

$\langle\zeta\rangle^{(\alpha)} < c/d_x^\alpha$, $\left|\zeta_{z_i z_j}\right| \leqslant c/d_x^2$ (это, очевидно, возможно). В результате простых подсчетов убедимся, что

$$|F|^{(\alpha)}_{K\cap\Omega} \leqslant c\left\{|Lu|^{(\alpha)}_{\Omega} + \frac{1}{d_x^\alpha} M_{0,\Omega}[Lu] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{d_x^\alpha} M_{0,\Omega}[u_{z_i z_j}] + \frac{1}{d_x^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^{n} M_{0,\Omega}[u_{z_i}] + \frac{1}{d_x^{2+\alpha}} M_{0,\Omega}[u]\right\}$$

и

$$|\zeta\varphi|^{(2+\alpha)}_{K\cap S_1} \leqslant \frac{c}{d_x^{2+\alpha}} |\varphi|^{(2+\alpha)}_{K\cap S_1}.$$

Подставляя эти неравенства в (2.30), умножая результат на $d_x^{2+\alpha}$ и учитывая (2.28), получим

$$\frac{1}{2} M_{2+\alpha,\Omega}[u] \leqslant c\left\{M_{\alpha,\Omega}[Lu] + \sum_{i=0}^{2} M_{i,\Omega}[u] + |\varphi|^{(2+\alpha)}_{S_1}\right\},$$

а это неравенство в силу (2.26) дает (2.27).

Это завершает доказательство всех утверждений, высказанных в начале параграфа для $l=2$. Для $l>2$ они выводятся элементарно из рассмотренного случая $l=2$.

§ 3. О разрешимости в $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ других краевых задач

Разрешимость второй и третьей краевых задач и задачи с косой производной при достаточно гладких данных исследуется в основном так же, как это сделано в предыдущем параграфе для первой краевой задачи. Аналитическую основу составляют априорные оценки шаудеровского типа, т. е. неравенства типа (1.11). Для второго и третьего краевых условий такие оценки были доказаны в 1955 г. К. Миранда [37₂]. Условия эти для оператора

$$Lu \equiv a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + a_i(x)\, u_{x_i} + a(x)\, u \tag{3.1}$$

имеют вид

$$Au \equiv a_{ij}(x)\, u_{x_i} \cos(n, x_j) + b(x)\, u = \varphi(x). \tag{3.2}$$

При $b(x) \equiv 0$ имеем второе краевое условие, при $b(x) \not\equiv 0$ — третье. Однако в отличие от первого краевого условия для существования таких априорных оценок для всего класса операторов вида (3.1) и граничных условий вида (3.2) на функции $a_{ij}(x)$ вблизи S необходимо накладывать ограничения более жесткие, чем те, которые требуются для внутренних оценок. В самом деле, если функция $u(x)$ принадлежит $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, а Lu принадлежит $C^\alpha(\overline{\Omega})$, то от коэффициентов L естественно требовать принадлежности их к $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. В этом случае каждый член из Lu, а потому и все Lu, будет функцией из $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. В краевое же условие (3.2) входят производные первого порядка от $u(x)$, они принадлежат $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$. Поэтому функция $\varphi(x)$ в общем случае должна быть элементом $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ (ибо, в частности, когда a_{ij} постоянны, а $b(x)\equiv 0$, функция φ есть линейная комбинация первых производных u). Для того чтобы все члены в (3.2) были элементами $C^{1+\alpha}(S)$, придется требовать принадлежности a_{ij} к $C^{1+\alpha}(S)$. Таким образом, имеется «разнобой» в требованиях на $a_{ij}(x)$ внутри Ω и на S. Но он неизбежен. Ввиду этого для исследования второй и третьей краевых задач в нелинейном случае знание относительно линейных задач лишь оценок Миранда (он оценил $|u|_{\Omega}^{(2+\alpha)}$ для произвольной функции u из $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ через $|Lu|_{\Omega}^{(\alpha)}$, $\max\limits_{\Omega}|u|$ и $|Au|_{S}^{(1+\alpha)}$) оказалось недостаточным. Для исследования нелинейных задач понадобился следующий более общий результат, доказанный в 1959 г. Р. Фиоренца [17]:

Теорема 3.1. *Пусть граница S области Ω есть поверхность класса $C^{2+\alpha}$, коэффициенты a_{ij}, a_i, а оператора L принадлежат $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ и выполнено условие эллиптичности*

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \nu\xi^2, \qquad \nu = \mathrm{const} > 0. \tag{3.3}$$

Пусть коэффициенты $b_i(x)$ и $b(x)$ граничного оператора $Bu \equiv b_i(x)u_{x_i} + b(x)u$ суть элементы $C^{1+\alpha}(S)$ и

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\cos(n, x_i)\Big|_S \geqslant \nu_0, \qquad \nu_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{3.4}$$

Тогда для любой функции $u(x)$ из $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
|u|_{\Omega}^{(2+\alpha)} \leqslant c \sum_{i,j=1}^{n} \Big\{\Big[\big(|a_{ij}|_{\Omega}^{(\alpha)} + |b_i|_S^{(\alpha)}\big)\big(\max_{\Omega}|Lu| + |Bu|_S^{(1)}\big) + {}\\
+ |Lu|_{\Omega}^{(\alpha)} + \max_S|Bu|\cdot|b_i|_S^{(1+\alpha)} + |Bu|_S^{(1+\alpha)}\Big] + {}\\
+ \max_{\Omega}|u|\Big[\max_S|b|\cdot|b_i|_S^{(1+\alpha)} + \big(|a_{ij}|_S^{(\alpha)} + |b_i|_S^{(\alpha)}\big)\big(|b|_S^{(1)} + \max_{\Omega}|a|\big) + {}\\
+ |b|_S^{(1+\alpha)} + |a|_{\Omega}^{(\alpha)} + \big(|b|_S^{(1)} + \max_{\Omega}|a|\big)^{(2+\alpha)/2} + 1\Big] + {}\\
+ |u|_{\Omega}^{(1)}\Big[|b|_S^{(\alpha)} + |b_i|_S^{(1+\alpha)} + |a_i|_{\Omega}^{(\alpha)} + {}\\
+ \big(|b_i|_S^{(1)} + \max_S|b| + \max_{\Omega}|a_i|\big)^{1+\alpha} + {}\\
+ \big(|a_{ij}|_{\Omega}^{(\alpha)} + |b_i|_S^{(\alpha)}\big)^{(1+\alpha)/\alpha} + 1\Big]\Big\},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

а также

$$
\begin{gathered}
|u|_{\Omega}^{(2+\alpha)} \leqslant c \sum_{i,\,j=1}^{n} \Big\{\Big[\big(|a_{ij}|_{\Omega}^{(\alpha)} + |b_i|_S^{(\alpha)}\big)\big(\max_{\Omega}|Lu| + |Bu|_S^{(1)}\big) + \\
+ |Lu|_{\Omega}^{(\alpha)} + \max_{\Omega}|Bu|\cdot|b_i|_S^{(1+\alpha)} + |Bu|_S^{(1+\alpha)}\Big] + \\
+ \max_{\Omega}|u|\Big[|b|_S^{(1+\alpha)} + |a|_{\Omega}^{(\alpha)} + \big(|b|_S^{(1)} + \max_{\Omega}|a|\big)^{(2+\alpha)/2} + \\
+ \big(|b|_S^{(\alpha)} + |b_i|_S^{(1+\alpha)} + |a_i|_{\Omega}^{(\alpha)}\big)^{(2+\alpha)/(1+\alpha)} + \\
+ \big(|b_i|_S^{(1)} + \max_S|b| + \max_{\Omega}|a_i|\big)^{2+\alpha} + \\
+ \big(|a_{ij}|_{\Omega}^{(\alpha)} + |b_i|_S^{(\alpha)}\big)^{(2+\alpha)/\alpha} + 1\Big]\Big\}, \qquad (3.6)
\end{gathered}
$$

где постоянные c зависят только от n, констант ν и ν_0 из условий (3.3), (3.4) *и от границы S, которая предполагается принадлежащей классу $C^{2+\alpha}$.*

Второе из этих неравенств имеет следующую структуру:

$$
|u|_{\Omega}^{(2+\alpha)} \leqslant c_1\big[|Lu|_{\Omega}^{(\alpha)} + |Bu|_S^{(1+\alpha)} + \max_{\Omega}|u|\big], \qquad (3.7)
$$

где постоянная c_1 не зависит от $u(x)$, а определяется лишь S и коэффициентами операторов L и B. В (3.5) и (3.6) эта зависимость c_1 от a_{ij}, a_i, a, b_i, b и S указана явно. Знание ее существенно при исследовании второй и третьей краевых задач для квазилинейных уравнений (см. гл. X) и несущественно в линейном случае.

С помощью оценки (3.7) нетрудно доказать, что для задачи

$$
Lu - \lambda u = f(x), \quad Bu|_S = \varphi(s), \qquad (3.8)
$$

где λ — комплексный параметр, имеет место следующая теорема:

Теорема 3.2. *Пусть относительно S и коэффициентов L и B выполнены условия теоремы* 3.1, $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi(s) \in C^{1+\alpha}(S)$. *Тогда задача* (3.8) *однозначно разрешима в $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ для любых f и φ из указанных классов при всех λ, за исключением не более чем счетного числа значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, составляющих спектр задачи* (3.8). *Для этих исключительных значений $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, единственной точкой накопления может быть $\lambda = \infty$. Каждое из λ_k имеет конечную кратность, т. е. соответствующая ему однородная задача*

$$
Lu - \lambda_k u = 0, \quad Bu|_S = 0 \qquad (3.9)
$$

имеет нетривиальные решения $u_k(x)$ *из* $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, *причем линейно независимых среди них будет конечное число. Эти же* λ_k, $k=1, 2, \ldots$, *с той же кратностью образуют спектр сопряженной к* (3.9) *задачи. Неоднородная задача* (3.8) *разрешима не при всех* f *и* φ: *должно выполняться несколько условий типа условий ортогональности к решениям однородной сопряженной к* (3.9) *задачи.*

Доказывается эта теорема в основном так же, как и соответствующие утверждения для первой краевой задачи в § 1. Но на этот раз надо продолжать по параметру не только оператор L, но и граничный оператор B. Схема этого следующая: обозначим через M_1 оператор, сопоставляющий каждому элементу $v(x)$ из $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ пару функций $\{Lv;\ Bv\}$, которую рассмотрим как элемент пространства $C^{\alpha}(\overline{\Omega})\times C^{1+\alpha}(S)$. Возьмем семейство операторов

$$M_\tau v=\{L_\tau v;\ B_\tau v\},\qquad \tau\in[0,\,1],$$

где $L_\tau v=(1-\tau)\,\Delta v+\tau Lv$, а $B_\tau v=(1-\tau)\left(\frac{\partial v}{\partial n}+v\right)+\tau Bv$.

При каждом τ из $[0, 1]$ оператор M_τ отображает пространство $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ в пространство $C^{\alpha}(\overline{\Omega})\times C^{1+\alpha}(S)$. Неравенство (3.7), точнее, неравенство $|v|_{\Omega}^{(2+\alpha)}\leqslant c_1\left(|L_\tau u|_{\Omega}^{(\alpha)}+|B_\tau u|_{S}^{(1+\alpha)}\right)$, справедливое в случае, когда коэффициент $a(x)$ при u удовлетворяет условию $a(x)\leqslant 0$ и $b(x)>0$, гарантирует равномерную ограниченность операторов $M_\tau^{-1}(M_1-M_0)$ в пространстве $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, коль скоро известно, что M_τ^{-1} существует и определен на всем $C^{\alpha}(\overline{\Omega})\times C^{1+\alpha}(S)$. Это вместе с тем, что оператор M_τ^{-1} при $\tau=0$ определен на плотном в $C^{\alpha}(\overline{\Omega})\times C^{1+\alpha}(S)$ множестве, гарантирует существование ограниченных операторов M_τ^{-1}, определенных на всем $C^{\alpha}(\overline{\Omega})\times C^{1+\alpha}(S)$, при всех τ из $[0, 1]$ и, в частности, дает однозначную разрешимость задачи

$$Lu=f,\quad Bu\,|_S=\varphi(s)\tag{3.10}$$

в $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ при любой f из $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ и φ из $C^{1+\alpha}(S)$. В общем случае любого $a(x)$ из $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ и $b(x)$ из $C^{1+\alpha}(S)$ имеет место альтернатива Фредгольма, сформулированная в теореме 3.2. Существование M_0^{-1} на плотном в $C^{\alpha}(\overline{\Omega})\times C^{1+\alpha}(S)$ множестве можно доказать или непосредственно на основании теории электростатических потенциалов, или так, как это сделано в § 1. Необходимые для второго пути оценки типа (1.13) со срезающей функцией $\zeta(x)$ имеют место и в рассматриваемом случае граничного условия $Bu\,|_S=\varphi$.

§ 4. Обобщенные решения из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$. Первое основное неравенство

Переходим теперь к изучению уравнений с неограниченными коэффициентами. Рассмотрим уравнения вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,u_{x_j} + a_i(x)\,u\right) + b_i(x)\,u_{x_i} + a(x)\,u = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f \quad (4.1)$$

при условии, что их старшие коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ ограничены и уравнение (4.1) строго эллиптично, т. е. при условии

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu,\ \mu = \mathrm{const} > 0. \quad (4.2)$$

В § 2 гл. I было выяснено, что если для таких уравнений мы хотим рассматривать обобщенные решения из $\overset{*}{W}{}_2(\Omega)$, то необходимо считать, что *)

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i^2,\ \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right\|_{q/2,\,\Omega}, \quad \|a\|_{q/2,\,\Omega} \leqslant \mu, \qquad q > n. \quad (4.3)$$

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то для таких уравнений неправомерна теория обобщенных решений из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$, ибо в этом случае нарушается теорема единственности «в малом» **).

Назовем *обобщенным решением из* $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ (сокращенно об. р.) *уравнения* (4.1) функцию $u(x)$, принадлежащую $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$L(u,\ \eta) \equiv \int_{\Omega} \left[\left(a_{ij}u_{x_j} + a_i u\right)\eta_{x_i} - \left(b_i u_{x_i} + au\right)\eta\right] dx =$$
$$= \int_{\Omega} \left(f_i\eta_{x_i} - f\eta\right) dx \quad (4.4)$$

при любой функции $\eta(x)$ из $\overset{\bullet}{C}{}^{\infty}(\Omega)$ (см. § 1 гл. I).

Легко видеть, что если функции f_i, f и коэффициенты уравнения (4.1) гладкие и функция $u(x)$ является его классическим решением или хотя бы принадлежит $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению (4.1) почти всюду, то она удовлетворяет и тожде-

---

*) По поводу случая $q = n \geqslant 3$ см. конец параграфа.

**) Класс $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ определен в § 1 гл. I. При $n \geqslant 3$ $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega) = W_2^1(\Omega) \cap L_{2n/(n-2)}(\Omega)$, при $n = 2$ $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ состоит из элементов $W_2^1(\Omega)$, суммируемых по Ω с любой степенью. Для не слишком плохих Ω $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$ (подробнее см. § 2 гл. II).

ству (4.4). Действительно, умножая (4.1) на η, интегрируя по Ω и преобразуя ряд членов с помощью интегрирования по частям, придем к соотношению (4.4). Верно и обратное: если функция $u(x)$ принадлежит $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяет тождеству (4.4) при любой $\eta \in \dot{C}^\infty(\Omega)$ и все остальные функции, входящие в (4.4), гладкие, то $u(x)$ удовлетворяет уравнению (4.1) почти всюду. Оба эти обстоятельства говорят о том, что понятие обобщенного решения уравнения (4.1) действительно является расширением старого понятия классического решения.

Чтобы тождество (4.4) имело смысл при любых $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, потребуем от f_i и f следующего:

$$\left.\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=1}^n f_i^2 \right\|_{1,\Omega}, \quad \|f\|_{2\hat{n}/(\hat{n}+2),\,\Omega} < \infty, \\ \text{где}\quad &\hat{n} = \begin{cases} n & \text{при } n > 2; \\ 2+\varepsilon & \text{при } n = 2; \quad \varepsilon > 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Нетрудно проверить, что при выполнении условий (4.2), (4.3) и (4.5) интегралы от всех членов тождества (4.4) конечны при любых u и η из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$, и потому в этом случае в данном выше определении обобщенного решения можно считать η любой функцией из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Введенное расширение понятия решения целесообразно с разных точек зрения. Во-первых, оно дает возможность изучать уравнения (4.1) с недифференцируемыми и даже с разрывными и неограниченными коэффициентами, для которых левая часть равенства (4.1) может не иметь смысла. Такие уравнения встречаются в ряде задач, например в задачах дифракции. Во-вторых, такие решения соответствуют одному из главных подходов функционального анализа к изучению линейных операторов. Именно, тождество (4.4) задает билинейную форму оператора L

$$L(u, \eta) \equiv \int_\Omega \left[(a_{ij} u_{x_j} + a_i u)\eta_{x_i} - (b_i u_{x_i} + a u)\eta \right] dx \tag{4.6}$$

на подлежащих определению элементах u и любом η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Из такого задания, как будет показано в следующем параграфе, сравнительно просто определяются u, если дополнительно известны их граничные значения. В-третьих, обобщенные решения из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ отвечают физической сущности задач, приводящих к уравнениям вида (4.1). Поясним это на примере задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f, \quad u|_S = 0. \tag{4.7}$$

Известно, что к этой задаче приходят при разыскании равновесного положения u упругой однородной мембраны, закрепленной на границе S так, что $u|_S = 0$, и находящейся под действием внешних сил f. Потенциальная энергия такой мембраны задается интегралом $I(u) = \int\limits_\Omega (|\nabla u|^2 + 2uf)\,dx$, а ее равновесное состояние, согласно принципу Гамильтона, определяется из условия, что функционал $I(u)$ на u достигает наименьшего возможного значения по сравнению со всеми v из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Отсюда следует, что для равновесного состояния $u(x)$

$$\delta I(u) \equiv 2\int\limits_\Omega (u_{x_i}\eta_{x_i} + f\eta)\,dx = 0 \tag{4.8}$$

для любой η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Таким образом, задача об отыскании равновесного положения мембраны, согласно принципу Гамильтона, сводится к нахождению функции u из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющей интегральному тождеству (4.8). Исторически сложившаяся традиция отыскания решения задачи на минимум интеграла $I(u)$ с помощью решения краевой задачи для соответствующего ей уравнения Эйлера существенно усложнила задачу, привнеся в нее дополнительное требование, не лежащее в физической сущности задачи, — требование того, чтобы решение обладало производными вдвое более высокого порядка, чем те, которые входят в энергетический интеграл $I(u)$. Такой отрыв от физики во многом обусловил трудности, лежащие на пути решения вариационных задач и связанных с ними уравнений Эйлера. Оказывается, задача об отыскании равновесного состояния мембраны значительно проще задачи (4.7) о разыскании классического решения соответствующего ей уравнения Эйлера. Предложенное выше расширение понятия решения уравнений (4.1) применительно к задаче (4.7) состоит в отказе от уравнения Эйлера и в возврате к тождеству (4.8), которое есть не что иное, как интегральное тождество (4.4) для уравнения Пуассона.

Выясним теперь, что надо понимать под обобщенным решением из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ первой краевой задачи для уравнения (4.1). Ясно, что для существования таких решений $u(x)$ необходимо, чтобы функция $\varphi(s)$, определяющая граничные значения $u(x)$, допускала продолжение $\varphi(x)$ на всю область Ω, которое принадлежало бы $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$. Итак, пусть $\varphi(x) \in \overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ и граничное условие для искомого решения есть

$$u|_S = \varphi|_S. \tag{4.9}$$

Так как наше решение u должно принадлежать $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$, то условие (4.9) разумно записать в виде $u(x)-\varphi(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Из сказанного ясна естественность следующего определения:

Обобщенным решением из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ *задачи* (4.1), (4.9) назовем функцию u, принадлежащую $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ и удовлетворяющую тождеству (4.4) или, что то же, тождеству

$$L(u,\eta)=(f_i,\eta_{x_i})-(f,\eta) \tag{4.10}$$

при любой $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и условию $u(x)-\varphi(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Так как обобщенных решений из других функциональных классов в ближайших двух параграфах не будет, то условимся называть их пока просто обобщенными решениями (уравнения или первой краевой задачи).

Краевая задача с условием (4.9) легко сводится к краевой задаче с однородным краевым условием. Именно, если вместо u введем функцию $v(x)$:

$$v(x)=u(x)-\varphi(x), \tag{4.11}$$

то для нее из (4.10) получим

$$L(v,\eta)=-L(\varphi,\eta)+(f_i,\eta_{x_i})-(f,\eta), \tag{4.12}$$

а из (4.9) — условие

$$v|_S=0, \tag{4.13}$$

которое понимаем в том смысле, что $v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Вместо функции u будем искать функцию v как функцию из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую тождеству (4.12). Найдя ее, мы найдем и функцию $u=v+\varphi$ — обобщенное решение задачи (4.1), (4.9).

Пусть условия (4.2), (4.3), (4.5) выполнены. Покажем, что при этих условиях и $\varphi(x)$ из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ выражение

$$l(\eta)\equiv-L(\varphi,\eta)+(f_i,\eta_{x_i})-(f,\eta) \tag{4.14}$$

есть линейный функционал над пространством $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и для него верна оценка

$$|l(\eta)|\leqslant\int_\Omega\Big(\sum_{i,j}|a_{ij}\varphi_{x_j}\eta_{x_i}|+\sum_i|a\nabla\varphi\eta_{x_i}|+\sum_i|b_i\varphi_{x_i}\eta|+|a\varphi\eta|+$$
$$+\sum_i|(f_i,\eta_{x_i})|+|(f,\eta)|\Big)dx\leqslant\{\mu[1+c(q,\Omega)]\left(\|\nabla\varphi\|_{2,\Omega}+\|\varphi\|_{2q/(q-2),\Omega}\right)+$$
$$+\|\mathbf{f}\|_{2,\Omega}+c(\hat{n},\Omega)\|f\|_{2\hat{n}/(\hat{n}+2),\Omega}\}\|\nabla\eta\|_{2,\Omega}\equiv$$
$$\equiv c(q,\Omega,\varphi,\mathbf{f},f)\|\nabla\eta\|_{2,\Omega}, \tag{4.15}$$

где $\mathbf{f}=(f_1, \ldots, f_n)$, $\|\mathbf{f}\|_{2,\Omega}=\sqrt{\int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^n f_i^2\,dx}$, а $c(q,\Omega)$ — постоянная из неравенства

$$\|\eta\|_{2q/(q-2),\,\Omega}\leqslant c(q)\,\mathrm{mes}^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\,\Omega\cdot\|\nabla\eta\|_{2,\,\Omega}\equiv$$
$$\equiv c(q,\,\Omega)\|\nabla\eta\|_{2,\,\Omega},\qquad q\geqslant\hat{n},\tag{4.16}$$

справедливого для любой функции $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (формула (2.13) гл. II).

Действительно, используя предположения (4.2), (4.3), (4.5), оценим $|l(\eta)|$ с помощью неравенства (4.16) и неравенства Гёльдера следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}|(f,\,\eta)|&\leqslant\|f\|_{2\hat{n}/(\hat{n}+2),\,\Omega}\|\eta\|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2),\,\Omega}\leqslant\\&\leqslant c(\hat{n},\,\Omega)\|f\|_{2\hat{n}/(\hat{n}+2),\,\Omega}\|\nabla\eta\|_{2,\,\Omega},\\|(f_i,\,\eta_{x_i})|&\leqslant\|\mathbf{f}\|_{2,\,\Omega}\|\nabla\eta\|_{2,\,\Omega},\end{aligned}\right\}\tag{4.17}$$

$$|L(\varphi,\,\eta)|\leqslant\mu\|\nabla\varphi\|_{2,\,\Omega}\|\nabla\eta\|_{2,\,\Omega}+$$
$$+\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n a_i^2\varphi^2\,dx\right)^{1/2}\|\nabla\eta\|_{2,\,\Omega}+\left(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n b_i^2\eta^2\,dx\right)^{1/2}\|\nabla\varphi\|_{2,\,\Omega}+$$
$$+\|a\|_{q/2,\,\Omega}\|\varphi\|_{2q/(q-2),\,\Omega}\|\eta\|_{2q/(q-2),\,\Omega}\leqslant\mu\|\nabla\varphi\|_{2,\,\Omega}\|\nabla\eta\|_{2,\,\Omega}+$$
$$+\mu\|\varphi\|_{2q/(q-2),\,\Omega}\|\nabla\eta\|_{2,\,\Omega}+\mu\|\eta\|_{2q/(q-2),\,\Omega}\|\nabla\varphi\|_{2,\,\Omega}+$$
$$+\mu\|\varphi\|_{2q/(q-2),\,\Omega}\|\eta\|_{2q/(q-2),\,\Omega}\leqslant$$
$$\leqslant\mu\|\nabla\eta\|_{2,\,\Omega}\left(\|\nabla\varphi\|_{2,\,\Omega}+\|\varphi\|_{2q/(q-2),\,\Omega}\right)[1+c(q,\,\Omega)].\tag{4.18}$$

Из этих неравенств следует оценка (4.15).

Переходим теперь к выводу первого основного неравенства (иначе говоря, энергетического неравенства) для эллиптических операторов. Для этого напомним, что для любой функции $v(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|v\|_{2q/(q-2),\,\Omega}^2\leqslant c^2(q)\left[\varepsilon\frac{n}{q}\|\nabla v\|_{2,\,\Omega}^2+\varepsilon^{-n/(q-n)}\left(1-\frac{n}{q}\right)\|v\|_{2,\,\Omega}^2\right],\tag{4.19}$$

где ε — произвольное положительное число, а $q>n$. Оно есть следствие неравенств (2.11) и (1.3) гл. II.

Представим коэффициент $a(x)$ в виде разности: $a(x)=a^+(x)-a^-(x)$, где $a^+(x)=\max\{a(x)-a_0;\;0\}$, $a^-(x)=-a_0+$

$+\max\{-a(x)+a_0;\ 0\}$, а $a_0=\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\int\limits_\Omega a(x)\,dx$. Ясно, что $a^-(x)\geqslant$ $\geqslant -a_0$. Введем обозначение

$$M=\max\left\{\left\|\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2\right\|_{q/2,\,\Omega};\ \|a^+\|_{q/2,\,\Omega}\right\} \tag{4.20}$$

(легко видеть, что $M\leqslant 4\mu$, где μ — постоянная из условий (4.3)).

Покажем, что квадратичная форма $L(v,\ v)$ обладает следующим свойством:

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия* (4.2) *и* (4.3). *Тогда для любой функции* $v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_\Omega \left[|\nabla v|^2+\frac{4}{\nu}a^-v^2\right]dx\leqslant \frac{4}{\nu}L(v,\ v)+c_1(q)\|v\|^2_{2,\,\Omega}, \tag{4.21}$$

где

$$c_1(q)=\frac{q-n}{n}\left[\frac{2M(2\nu+1)\,nc^2(q)}{\nu^2 q}\right]^{q/(q-n)}.$$

Действительно, благодаря условию эллиптичности (4.2) из определения (4.6) для $L(v,\ v)$ имеем

$$\int\limits_\Omega (\nu|\nabla v|^2+a^-v^2)\,dx\leqslant L(v,\ v)+$$

$$+\int\limits_\Omega \left(|a_i-b_i|\cdot|vv_{x_i}|+a^+v^2\right)dx\leqslant L(v,\ v)+$$

$$+\int\limits_\Omega \left\{\varepsilon|\nabla v|^2+\left[\frac{1}{4\varepsilon}\sum_i (a_i-b_i)^2+a^+\right]v^2\right\}dx, \tag{4.22}$$

где ε — произвольное положительное число. Оценивая последние члены с помощью неравенства Гёльдера и используя обозначение (4.20), получим

$$\int\limits_\Omega \left[\frac{1}{4\varepsilon}\sum_{i=1}^n (a_i-b_i)^2+a^+\right]v^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{4\varepsilon}\left\|\sum_{i=1}^n (a_i-b_i)^2\right\|_{q/2,\,\Omega}+\|a^+\|_{q/2,\,\Omega}\right]\left(\int\limits_\Omega |v|^{2q/(q-2)}\,dx\right)^{(q-2)/q}\leqslant$$

$$\leqslant M\left(\frac{1}{4\varepsilon}+1\right)\|v\|^2_{2q/(q-2),\,\Omega}.$$

Отсюда и из (4.22) при $\varepsilon=\nu/2$ получим

$$\int\limits_\Omega \left(|\nabla v|^2+\frac{2}{\nu}a^-v^2\right)dx\leqslant \frac{2}{\nu}L(v,\ v)+\frac{M(2\nu+1)}{\nu^2}\|v\|^2_{2q/(q-2),\,\Omega}. \tag{4.23}$$

Если последний член оценить с помощью неравенства (4.19) и взять $\varepsilon = \frac{\nu^2 q}{2M(2\nu+1)c^2(q)n}$, то после приведения подобных членов придем к (4.21).

Лемма 4.1 доказана.

Воспользуемся неравенством (4.21) для оценки обобщенного решения u задачи (4.1), (4.9). Из соотношений (4.12) и (4.13) для функций $v = u - \varphi$ и неравенства (4.21) имеем

$$\int_\Omega \left[|\nabla v|^2 + \frac{4}{\nu} a^- v^2\right] dx \leqslant \frac{4}{\nu} l(v) + c_1(q)\|v\|^2_{2,\Omega},$$

где $l(v)$ определено равенством (4.14). Отсюда благодаря оценке (4.15) будем иметь

$$\int_\Omega \left[|\nabla v|^2 + \frac{4}{\nu} a^- v^2\right] dx \leqslant \frac{4}{\nu} c(q, \Omega, \varphi, \mathbf{f}, f)\|\nabla v\|_{2,\Omega} + c_1(q)\|v\|^2_{2,\Omega} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{2,\Omega} + \frac{8}{\nu^2} c^2(q, \Omega, \varphi, \mathbf{f}, f) + c_1(q)\|v\|^2_{2,\Omega}.$$

Перенесем слагаемое $\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{2,\Omega}$ из правой части налево, приведем подобные члены и результат умножим на 2. Это даст

$$\int_\Omega \left[|\nabla v|^2 + \frac{8}{\nu} a^- v^2\right] dx \leqslant \frac{16}{\nu^2} c^2(q, \Omega, \varphi, \mathbf{f}, f) + 2c_1(q)\|v\|^2_{2,\Omega}. \quad (4.24)$$

Особый интерес представляют те случаи, когда в неравенстве (4.24) можно «убрать» член с $\|v\|^2_{2,\Omega}$, стоящий в правой части. Чтобы выявить их, воспользуемся неравенством (см. (2.14) гл. II)

$$\|v\|_{2,\Omega} \leqslant c_0 \operatorname{mes}^{1/n}\Omega\, \|\nabla v\|_{2,\Omega} \quad (4.25)$$

и тем, что $a^-(x) \geqslant -a_0$. Отсюда видно, что если

$$\delta \equiv \left[2c_1(q) + \frac{8}{\nu} a_0\right] c_0^2 \operatorname{mes}^{2/n}\Omega < 1, \quad (4.26)$$

то из (4.24) следует

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \leqslant \frac{16}{(1-\delta_0)\nu^2} c^2(q, \Omega, \varphi, \mathbf{f}, f), \quad \delta_0 = \max\{0;\ \delta\}. \quad (4.27)$$

Если $\varphi \equiv 0$, то v есть решение u уравнения (4.1) и неравенства (4.24) и (4.27) для него приобретают вид

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - \frac{8}{\nu} a_0 u^2\right] dx \leqslant \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + \frac{8}{\nu} a^- u^2\right] dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{16}{\nu^2}\left[\|\mathbf{f}\|_{2,\Omega} + c(\hat{n}, \Omega)\|f\|_{2\hat{n}/(\hat{n}+2),\Omega}\right]^2 + 2c_1(q)\|u\|^2_{2,\Omega} \quad (4.28)$$

и

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \leqslant \frac{16}{(1-\delta_0)\nu^2}\left[\|\mathbf{f}\|_{2,\Omega} + c(\hat{n}, \Omega)\|f\|_{2\hat{n}/(\hat{n}+2),\Omega}\right]^2 \tag{4.29}$$

соответственно. В общем случае при $\varphi \not\equiv 0$ для обобщенных решений $u = v + \varphi$ задачи (4.1), (4.9) неравенства (4.24), (4.27) дают оценки

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{8}{\nu} a_0 (u-\varphi)^2\right] dx \leqslant \frac{16}{\nu^2} c^2(q, \Omega, \varphi, \mathbf{f}, f) + \\ + \|\nabla\varphi\|^2_{2,\Omega} + 4c_1(q)\|\varphi\|^2_{2,\Omega} + \\ + 4c_1(q)\|u\|^2_{2,\Omega} \equiv c_1^2(q, \Omega, \varphi, \mathbf{f}, f) + 4c_1(q)\|u\|^2_{2,\Omega} \tag{4.30}$$

и при $\delta < 1$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \leqslant \frac{32}{(1-\delta_0)\nu^2} c^2(q, \Omega, \varphi, \mathbf{f}, f) + \\ + 2\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx \equiv c_2(q, \Omega, \varphi, \mathbf{f}, f). \tag{4.31}$$

В них постоянная $c(q, \varphi, \Omega, \mathbf{f}, f)$ взята из (4.15), а $c_1(q)$ — из (4.21). Неравенство (4.30) (а также его следствие (4.31)) называется *первым основным* или *энергетическим неравенством для решений задачи* (4.1), (4.9). При $\varphi \equiv 0$ вместо него можно пользоваться неравенством (4.28) (и (4.29) соответственно), которое также называется *энергетическим*.

Неравенство (4.26) заведомо выполнено в следующих двух случаях. Во-первых, для областей Ω достаточно малой меры, ибо $|a_0| \leqslant \operatorname{mes}^{-2/q}\Omega \cdot \|a\|_{q/2,\Omega}$. Во-вторых, для любых областей, если только

$$c_1(q) + \frac{4}{\nu} a_0 \leqslant 0. \tag{4.32}$$

Весьма существенно, что соотношение (4.26) имеет место для операторов $Lu - \lambda u$ при определенных λ, например при всех достаточно больших положительных λ. Это следует из того, что коэффициент при $u(x)$ в $Lu - \lambda u$ равен $a(x) - \lambda$ и $(a(x)-\lambda)_0 = a_0 - \lambda$. В дальнейшем вопрос о разрешимости первой краевой задачи будет рассмотрен для всей совокупности операторов $L - \lambda E$ при любом λ на комплексной плоскости. Но начать это изучение удобно с такого λ, при котором выполнено условие (4.32). Без ограничения общности можно считать, что это λ равно нулю, т. е. что неравенство (4.32) выполнено для самого оператора L. Изучению этого случая и посвящен следующий параграф.

Замечание 4.1. Если $a(x) \leqslant 0$, то разбивать $a(x)$ на два слагаемых указанным выше способом нецелесообразно. Выгоднее соответствующее ему слагаемое $-\int\limits_\Omega av^2\,dx$ оставить в левой части соотношения (4.22) и др. Если же $a(x)$ не удовлетворяет условию $a(x) \leqslant 0$, то $a(x)$ можно разбить, например, на положительную и отрицательную части, т. е. представить $a(x)$ в виде $a(x) = a^+(x) - a^-(x)$, где $a^+(x) = \max\{a(x);\ 0\}$, а $a^-(x) = \max\{-a(x);\ 0\}$, и в неравенстве (4.22) считать, что $a^+(x)$ и $a^-(x)$ взяты в соответствии с этим разбиением $a(x)$. Но тогда при добавлении в левую часть уравнения (4.1) члена $-\lambda u$ соответствующее ему в (4.22) слагаемое $\lambda\int\limits_\Omega v^2\,dx$ надо оставить в левой части. Это приведет к добавлению в левые части неравенств (4.21) и (4.24) слагаемых $4\nu^{-1}\lambda\int\limits_\Omega v^2\,dx$ и $8\nu^{-1}\lambda\int\limits_\Omega v^2\,dx$ соответственно. При достаточно большом λ эти интегралы превосходят члены $c_1(q)\|v\|^2_{2,\Omega}$ и $2c_1(q)\|v\|^2_{2,\Omega}$, стоящие в правых частях (4.21) и (4.24). Ввиду этого ясно, что для задач $Lu - \lambda u = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f$, $u|_S = \varphi$ при достаточно большом λ справедлива теорема единственности и для их решений имеют место оценки типа (4.31). Разбиение $a(x)$, взятое на стр. 185, имеет то преимущество перед указанным здесь, что для него справедливо соотношение $(a(x) - \lambda)_0 = a_0 - \lambda$, благодаря которому сразу видна выполнимость условия (4.32) для операторов $Lu - \lambda u$ при $\lambda \gg 1$.

В § 2 гл. I была показана необходимость предположения: $q > n$ в (4.3) для справедливости предложений, доказываемых в данной главе. Однако там же было отмечено, что при $n \geqslant 3$ предельный случай $q = n$ сохраняет некоторые черты, присущие задаче Дирихле в ее классической постановке. Покажем это. Пусть для L выполнено условие (4.2) и условие

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i^2,\quad \sum_{i=1}^n b_i^2,\ a \right\|_{n/2,\,\Omega} \leqslant \mu, \qquad n \geqslant 3. \tag{4.33}$$

Представим функции $b_i(x) - a_i(x)$ и $a^+(x) = \max\{a(x);\ 0\}$ в виде сумм:

$$b_i(x) - a_i(x) = c_i'(x) + c_i''(x), \quad a^+(x) = c'(x) + c''(x), \tag{4.34}$$

где $c_i'(x)$ и $c'(x)$ суть ограниченные функции, а $c_i''(x)$ и $c''(x)$ — элементы $L_n(\Omega)$ и $L_{n/2}(\Omega)$ соответственно, имеющие малые нормы.

Пусть

$$\max_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}[c_i'(x)]^2,\ |c'(x)|\right)\leqslant M_{\varepsilon'},\quad \left\|\sum_{i=1}^{n}(c_i'')^2,\ c''\right\|_{n/2,\,\Omega}\leqslant\varepsilon'. \tag{4.35}$$

Ясно, что в общем случае $M_{\varepsilon'}$ безгранично растет при стремлении ε' к нулю и характер этой зависимости $M_{\varepsilon'}$ от ε' не определяется только величиной μ из (4.33), а зависит от взятого L. Для L справедливо неравенство, аналогичное (4.21). Вывод его тот же, что и для (4.21): надо взять неравенство (4.22) и оценить его правую часть, используя разбиение (4.34). Это, как легко видеть, приведет нас к неравенству

$$\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^2+\frac{2}{\nu}a^-v^2\right)dx\leqslant\frac{2}{\nu}L(v,\,v)+$$
$$+\frac{2\nu+1}{\nu^2}M_{\varepsilon'}\|v\|_{2,\,\Omega}^2+\frac{2\nu+1}{\nu^2}\varepsilon'\|v\|_{2n/(n-2),\,\Omega}^2, \tag{4.36}$$

где $a^-(x)=\max\{-a(x);\ 0\}$. Последний член правой части не превосходит в силу (4.16) величины $\frac{2\nu+1}{\nu^2}\varepsilon' c^2(n)\|\nabla v\|_{2,\,\Omega}^2$. Поэтому, если ε' взять таким, чтобы

$$\varepsilon'\frac{2\nu+1}{\nu^2}c^2(n)\leqslant\delta_1<1, \tag{4.37}$$

то из (4.36) будем иметь желаемое неравенство:

$$\int_{\Omega}\left[(1-\delta_1)|\nabla v|^2+\frac{2}{\nu}a^-v^2\right]dx\leqslant\frac{2}{\nu}L(v,\,v)+\frac{2\nu+1}{\nu^2}M_{\varepsilon'}\|v\|_{2,\,\Omega}^2. \tag{4.38}$$

Из него, так же как (4.24) из (4.21), выводится первое основное неравенство для обобщенных решений v уравнения (4.1) из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega}\left[\frac{1-\delta_1}{2}|\nabla v|^2+\frac{2}{\nu}a^-v^2\right]dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{\nu^2(1-\delta_1)}\left[\|\mathbf{f}\|_{2,\,\Omega}+c(\hat{n},\,\Omega)\|f\|_{2n/(n+2),\,\Omega}\right]^2+\frac{2\nu+1}{\nu^2}M_{\varepsilon'}\|v\|_{2,\,\Omega}^2, \tag{4.39}$$

если заметить, что оценка (4.15) имеет смысл и при $q=n$. Отсюда легко следует соответствующая оценка для любого обобщенного решения уравнения (4.1) из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, аналогичная оценке (4.30). Если между числовыми параметрами, характеризующими уравнение (4.1), и $\Omega_1 \subset \Omega$ выполняется соотношение

$$\delta_2 \equiv \frac{2}{\nu}\left[\frac{2\nu+1}{2\nu} M_{\varepsilon'} - \min_{\Omega_1} a^-(x)\right] c_0^2 \operatorname{mes}^{2/n}\Omega_1 < \frac{1-\delta_1}{2}, \tag{4.40}$$

то из (4.39) следует, что для обобщенных решений $v(x)$ уравнения (4.1), принадлежащих $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_1)$, справедливо неравенство

$$\left.\begin{aligned} \int_{\Omega_1} |\nabla v|^2\, dx \leqslant \frac{2}{\delta_3 \nu^2 (1-\delta_1)} \left[\|\mathbf{f}\|_{2,\Omega_1} + c(\hat{n}, \Omega_1)\|f\|_{2n/(n+2),\Omega_1}\right]^2,\\ \delta_3 = \frac{1-\delta_1}{2} - \max\{0;\ \delta_2\}. \end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

Неравенство (4.41), так же как и (4.29), заведомо выполнено для областей Ω_1 достаточно малой меры, так как при этом выполнено (4.40). Однако в данном случае малость $\operatorname{mes}\Omega_1$ не определяется только μ из (4.5), (4.33), а зависит также и от ε' и $M_{\varepsilon'}$ из (4.35). Неравенство (4.41) для $\Omega_1 = \Omega$ с $\delta_3 = (1-\delta_1)/2$ выполняется также для операторов $L_\lambda u \equiv Lu - \lambda u$ с $\lambda \geqslant \lambda_0 = \frac{2\nu+1}{2\nu} M_{\varepsilon'}$, где ε' подчиняется (4.37). В этом легко убедиться, замечая, что в (4.38) $L(v, v) = L_\lambda(v, v) - \lambda\|v\|_{2,\Omega}^2$.

§ 5. Разрешимость первой краевой задачи в $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$

Неравенства (4.29), (4.41) позволяют утверждать следующую теорему единственности для задачи (4.1), (4.9):

Теорема 5.1. *Задача* (4.1), (4.9) *имеет не более одного обобщенного решения из* $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$, *если выполнены условия* (4.2), (4.3) *и* (4.26). *Для* $n \geqslant 3$ *эти условия можно заменить условиями* (4.2), (4.33), (4.37), (4.40).

В самом деле, для разности $u = u' - u''$ двух возможных обобщенных решений из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ этой задачи справедливы неравенства (4.29) или (4.41), в правых частях которых стоят нули (ибо для u свободный член и граничное условие однородны), поэтому $u(x)$ будет равно нулю.

Из этой теоремы, в частности, следует, что для любого дифференциального оператора L, определенного в Ω и удовлетворяющего условиям (4.2), (4.3), теорема единственности задачи Дирихле верна в любой достаточно малой (по мере) подобласти Ω_1 области Ω, причем величина $\operatorname{mes}\Omega_1$ определяется лишь постоянными q, ν и μ *). То же верно при $n \geqslant 3$ для любого L, коэффициенты которого удовлетворяют условиям (4.2), (4.33), но в этом случае $\operatorname{mes}\Omega_1$ зависит от взятого L. В областях $\Omega_1 \subset \Omega$ произвольных размеров теорема единственности задачи Дирихле имеет место для операторов $L - \lambda E$ с $\lambda \geqslant \lambda_0$, если L удовлетворяет условиям (4.2), (4.3) или (4.2), (4.33) и λ_0 достаточно велико. В первом случае λ_0 определяется лишь q, ν и μ; во втором — числом ν из (4.2) и ε' и $M_{\varepsilon'}$ из (4.35), точнее,

$$\lambda_0 = \frac{2\nu + 1}{2\nu} M_{\varepsilon'},$$

где ε' удовлетворяет неравенству (4.37).

Переходим теперь к исследованию разрешимости задачи Дирихле для (4.1). Мы это сделаем для всей совокупности операторов $L - \lambda E$, где λ — произвольное число на комплексной плоскости, без каких-либо ограничений малости на область Ω. Предположим, что для (4.1) выполнены условия (4.2), (4.3), (4.5). Без ограничения общности можно считать, что (4.26), а потому и теорема единственности, выполнены для самого оператора L. Тогда для возможного решения u задачи (4.1), (4.9) (во всем параграфе речь будет идти лишь об обобщенных решениях из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$) справедливо неравенство (4.31), а для любой функции $\eta(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — неравенство

$$\int\limits_\Omega |\nabla\eta|^2 dx \leqslant \frac{8}{\nu} L(\eta, \eta), \tag{5.1}$$

вытекающее из (4.21) и (4.26). Докажем теорему.

Теорема 5.2. *При выполнении условий* (4.2), (4.3), (4.26) *задача* (4.1), (4.9) *имеет обобщённое решение и из* $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ *при любых* $f(x)$ *из* $L_{2n/(n+2)}(\Omega)$, $\mathbf{f}(x)$ *из* $L_2(\Omega)$, $\varphi(x)$ *из* $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Для доказательства введем в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ новое скалярное произведение $[v, w] = \int\limits_\Omega (a_{ij} v_{x_i} w_{x_j} + a^- vw)\, dx$. Соответствующая ему норма $|\cdot|$, в силу наших предположений

*) Это так, ибо для величины $a_0 = \operatorname{mes}^{-1}\Omega \int\limits_\Omega a(x)\, dx$ верна оценка $|a_0| \leqslant \operatorname{mes}^{-2/q}\Omega \, \| a \|_{q/2,\, \Omega}$, и потому условие (4.26) заведомо выполняется для Ω, мера которых подчинена неравенству

$$\left[2c_1(q) \operatorname{mes}^{2/n}\Omega + \frac{8}{\nu} \| a \|_{q/2,\, \Omega} \operatorname{mes}^{\frac{2}{n} - \frac{2}{q}} \Omega \right] c_0^2 < 1.$$

об a_{ij} и a, эквивалентна норме пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Действительно, если $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то в силу (4.2), (4.26)

$$[v, v] \geqslant \frac{7}{8}\nu \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geqslant \nu_1 \left(\| v \|_{2,\Omega}^{(1)}\right)^2, \tag{5.2}$$

где $\nu_1 = \frac{7}{8}\nu\left(c_0^2 \operatorname{mes}^{2/n}\Omega + 1\right)^{-1}$. С другой стороны, из (4.2) и (4.3) следует

$$[v, v] \leqslant \int_\Omega \mu |\nabla v|^2 dx + \| a^- \|_{q/2, \Omega} \| v \|^2_{2q/(q-2), \Omega},$$

откуда в силу (4.19) имеем

$$[v, v] \leqslant c_1 \| v \|_{2,\Omega}^{(1)2}. \tag{5.3}$$

Вместо решения u задачи (4.1), (4.9) достаточно найти функцию $v = u - \varphi$ из условий (4.12), (4.13). Тождество (4.12) можно записать в виде

$$[v, \eta] + \int_\Omega \left(a_i v \eta_{x_i} - b_i v_{x_i} \eta - a^+ v \eta\right) dx = l(\eta), \tag{5.4}$$

где выражение $l(\eta)$ определено равенством (4.14). Покажем, что интеграл $I_1(v, \eta) = \int_\Omega \left(a_i v \eta_{x_i} - b_i v_{x_i} \eta - a^+ v \eta\right) dx$ при любом фиксированном v из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ определяет линейный функционал в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. В самом деле, линейность $I_1(v, \eta)$ относительно η очевидна, а ограниченность его видна из цепочки неравенств (4.18), которая приводит к оценке

$$|I_1(v, \eta)| \leqslant \mu \left[\| v \|_{2q/(q-2), \Omega} \| \nabla \eta \|_{2, \Omega} + \right.$$
$$\left. + \| \nabla v \|_{2, \Omega} \| \eta \|_{2q/(q-2), \Omega} \right] + M \| v \|_{2q/(q-2), \Omega} \| \eta \|_{2q/(q-2), \Omega}, \tag{5.5}$$

а потому, в силу (4.19), и к неравенству

$$|I_1(v, \eta)| \leqslant c_2(q) \| v \|_{2,\Omega}^{(1)} \| \eta \|_{2,\Omega}^{(1)} \tag{5.6}$$

с постоянной $c_2(q) = 2\mu c(q) + Mc^2(q)$ *).

В силу теоремы Ф. Риса о линейных функционалах (см. [31$_2$], стр. 396) функционал $I_1(v, \eta)$ может быть представлен, и притом единственным образом, в виде скалярного произведения

$$I_1(v, \eta) = [Av, \eta] \tag{5.7}$$

некоторого элемента Av из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ на η. Равенство (5.7) определяет оператор A на любом элементе v из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Этот оператор является ограниченным в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, ибо ввиду (5.2) и (5.6)

$$\left(\| Av \|_{2,\Omega}^{(1)}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\nu_1}[Av, Av] = \frac{1}{\nu_1} I_1(v, Av) \leqslant \frac{c_2(q)}{\nu_1} \| v \|_{2,\Omega}^{(1)} \| Av \|_{2,\Omega}^{(1)},$$

*) См. обозначение (4.20).

откуда

$$\| Av \|^{(1)}_{2,\Omega} \leqslant \frac{c_2(q)}{\nu_1} \| v \|^{(1)}_{2,\Omega}. \tag{5.8}$$

Докажем, что оператор A вполне непрерывен в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Пусть $\{v_m(x)\}$, $m=1, 2, \ldots$, есть последовательность элементов пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ с равномерно ограниченными нормами

$$\| v_m \|^{(1)}_{2,\Omega} \leqslant c, \qquad m=1, 2, \ldots$$

Тогда нормы элементов Av_m, $m=1, 2, \ldots$, в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ также будут равномерно ограничены. Так как оператор вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ при $p<2n/(n-2)$ вполне непрерывен (теорема 2.2 гл. II), то из $\{v_m\}$ и $\{Av_m\}$ можно выделить подпоследовательности, сильно сходящиеся в пространстве $L_p(\Omega)$ с $p=2q/(q-2)$ (напомним, что всюду $q>n$). Без ограничения общности будем считать, что сами последовательности $\{v_m\}$ и $\{Av_m\}$ сильно сходятся в $L_{2q/(q-2)}(\Omega)$. Из равенства

$$[Av_l - Av_m, Av_l - Av_m] = l_1(v_l - v_m, Av_l - Av_m), \tag{5.9}$$

равномерной ограниченности v_m и Av_m, $m=1, 2, \ldots$, в нормах $W^1_2(\Omega)$ и $L_{2q/(q-2)}(\Omega)$ и оценки (5.5) для правой части (5.9) видно, что

$$[Av_l - Av_m, Av_l - Av_m] \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\| v_l - v_m \|_{2q/(q-2),\Omega} + \| Av_l - Av_m \|_{2q/(q-2),\Omega}\right),$$

и, следовательно, $\{Av_m\}$ сходятся сильно в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Тем самым полная непрерывность A в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ доказана.

Правая часть в (5.4) при наших предположениях о φ, $\mathbf{f}$, f, как было показано в предыдущем параграфе (см. оценку (4.15)), является известным линейным функционалом в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, и потому ее также можно представить в виде скалярного произведения вполне определенного элемента F из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ на η, а именно:

$$l(\eta) = [F, \eta]. \tag{5.10}$$

Благодаря (5.7) и (5.10) тождество (5.4) можно записать в виде

$$[v + Av, \eta] = [F, \eta], \tag{5.11}$$

и так как оно должно выполняться на любой η из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, то (5.11) эквивалентно операторному уравнению в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$:

$$v + Av = F. \tag{5.12}$$

Так как A есть линейный вполне непрерывный оператор в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то для (5.12) справедливы теоремы Фредгольма. Первая из них утверждает, что уравнение (5.12) имеет решение v при любой F из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, если однородное уравнение

$$w + Aw = 0 \tag{5.13}$$

имеет только тривиальное решение $w \equiv 0$. Но любое решение уравнения (5.13) из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ есть не что иное, как обобщенное решение из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ задачи (4.1), (4.9) при $\varphi \equiv f \equiv \mathbf{f} \equiv 0$, ибо (5.13) эквивалентно интегральному тождеству $[w + Aw, \eta] = 0$, а это есть не что иное, как тождество $L(w, \eta) = 0$.

В силу теоремы 5.1 $w \equiv 0$, так что уравнение (5.12) действительно имеет решение v при любой F. Это решение и есть искомая функция v, ибо (5.12) эквивалентно (5.11), а (5.11) есть не что иное, как тождество (4.12). Она определяет решение u задачи (4.1), (4.9): $u(x) = v(x) + \varphi(x)$.

Теорема 5.2 доказана.

Рассмотрим теперь задачу

$$Lu - \lambda u = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f, \quad u|_S = \varphi \tag{5.14}$$

при любом комплексном λ. Предположения об известных величинах, входящих в (5.14), оставляем прежними. Гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ будем считать в данном параграфе комплексными и сохраним за скалярными произведениями и нормами в них старые обозначения. Так, например, (u, v) означает $\int\limits_\Omega u(x)\,\bar{v}(x)\,dx$, а $[u, v] = \int\limits_\Omega \left(a_{ij}u_{x_i}\bar{v}_{x_j} + a^- u\bar{v}\right)dx$.

В соответствии с данным в § 4 определением назовем *обобщенным решением задачи* (5.14) *из* $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ функцию u из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую тождеству

$$L(u, \bar{\eta}) + \lambda(u, \eta) = (f_i, \eta_{x_i}) - (f, \eta) \tag{5.15}$$

при любой η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и такую, что $u - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Выражение $L(u, \eta)$ то же, что и в (4.6). Для функции $v = u - \varphi$ тождество (5.15) порождает тождество

$$L(v, \bar{\eta}) + \lambda(v, \eta) = l_\lambda(\eta), \tag{5.16}$$

где

$$l_\lambda(\eta) = l(\eta) - \lambda(\varphi, \eta) =$$
$$= -L(\varphi, \bar{\eta}) + (f_i, \eta_{x_i}) - (f, \eta) - \lambda(\varphi, \eta). \tag{5.17}$$

Так же, как и выше, тождество (5.16) можно заменить эквивалентным ему операторным уравнением в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$:

$$v + Av + \lambda Bv = F_\lambda, \tag{5.18}$$

где оператор A определяется тождеством (5.7), точнее, тождеством $l_1(v, \bar{\eta}) = [Av, \eta]$, $\forall v$, $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, F_λ есть элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, определяемый тождеством

$$l_\lambda(\eta) = [F_\lambda, \eta], \tag{5.19}$$

а B — вполне непрерывный оператор в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, определяемый тождеством

$$[Bv, \eta] = (v, \eta). \tag{5.20}$$

Легко видеть, что B симметричен и положителен и, следовательно, имеет обратный на множестве $R(B)$ своих значений. Полная непрерывность B доказывается так же, как выше была доказана полная непрерывность A. Как доказано в теореме 5.2, оператор $E + A$ имеет в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ ограниченный обратный, поэтому уравнение (5.18) эквивалентно уравнению

$$v + \lambda(E + A)^{-1} Bv = (E + A)^{-1} F_\lambda. \tag{5.21}$$

Оператор $(E + A)^{-1} B$ вполне непрерывен, как произведение ограниченного оператора на вполне непрерывный, и потому для уравнения (5.21) справедливы все теоремы Фредгольма. Однородное уравнение

$$v + \lambda(E + A)^{-1} Bv = 0, \tag{5.22}$$

соответствующее (5.21), эквивалентно тождеству

$$L(v, \bar{\eta}) + \lambda(v, \eta) = 0. \tag{5.23}$$

Функцию v из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую (5.23) при любой η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, естественно назвать *обобщенной собственной функцией из* $\overset{\bullet}{W}{}_2^1(\Omega)$ *задачи*

$$Lv = \lambda v, \quad v|_S = 0, \tag{5.24}$$

а λ — *соответствующим ей собственным значением.*

По второй теореме Фредгольма все нетривиальные (отличные от тождественного нуля) линейно независимые решения уравнений (5.22) можно занумеровать в порядке возрастания модулей соответствующих им собственных значений $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Нетрудно показать, что все λ_k располагаются внутри некоторой параболы вида $\operatorname{Re}\lambda = -c\,|\operatorname{Im}\lambda|^{c_1}$, где c и c_1 определяются константами n, q и ν из (4.2), (4.3), причем $c > 0$, $c_1 > 1$.

Сформулируем установленные факты в виде теоремы.

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия теоремы 5.2. Тогда задача* (5.14) *имеет единственное обобщенное решение из* $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ *при любых* $\varphi \in \overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{f} \in L_2(\Omega)$, $f \in L_{2n/(n+2)}(\Omega)$ *для всех* λ *на комплексной плоскости, кроме не более чем счетного множества* $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *которое может иметь в качестве точки накопления только точку* $\lambda = \infty$ *). *Каждому* $\lambda = \lambda_k$ *соответствует конечное число линейно независимых решений из* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *уравнения* (5.24) *или, что то же, тождества* (5.23). *Эти исключительные* λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, *составляют спектр задачи* (5.14).

При $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *задача* (5.14) *имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$l_{\lambda_k}(w_k^i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, N_k, \tag{5.25}$$

где w_k^i *суть все решения из* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *уравнения*

$$(E + A^*)w + \bar{\lambda}_k B w = 0, \tag{5.26}$$

сопряженного уравнению (5.22). *Число условий* (5.25) *совпадает с числом линейно независимых решений уравнения* (5.22) *при* $\lambda = \lambda_k$.

Все утверждения теоремы 5.3 доказаны, кроме того, что условия разрешимости задачи (5.14) при $\lambda = \lambda_k$ имеют вид (5.25). Из третьей теоремы Фредгольма следует, что эти условия для (5.21) формулируются так:

$$\left[(E + A)^{-1} F_{\lambda_k}, z_k^i\right] = 0, \qquad i = 1, \ldots, N_k, \tag{5.27}$$

где z_k^i суть решения уравнения

$$z + \bar{\lambda}_k B\left[(E + A)^{-1}\right]^* z = 0, \tag{5.28}$$

сопряженного с (5.22).

Так как оператор B имеет обратный на $R(B)$ и все $\lambda_k \neq 0$, то (5.27) можно преобразовать, помня (5.19), к виду

$$0 = \left[F_{\lambda_k}, \left[(E + A)^{-1}\right]^* z_k^i\right] = \left[F_{\lambda_k}, -\frac{1}{\bar{\lambda}_k} B^{-1} z_k^i\right] = -\frac{1}{\lambda_k} l_{\lambda_k}(B^{-1} z_k^i).$$

Из (5.28) следует, что $B^{-1} z_k^i \equiv W_k^i$ суть все решения (5.26), и потому последнее равенство совпадает с (5.25). Уравнение (5.26), как легко видеть, эквивалентно условию $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и тождеству

$$\int_\Omega \left(a_{ij} w_{x_j} \bar{\eta}_{x_i} + a_i w_{x_i} \bar{\eta} - b_i w \bar{\eta}_{x_i} - a w \bar{\eta} + \bar{\lambda}_k w \bar{\eta}\right) dx = 0, \quad \forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

---

*) Специальные рассмотрения показывают, что собственных значений бесконечно много, так что $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$ (см. [31₁]).

которое соответствует уравнению

$$L^*w - \bar{\lambda}_k w \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}w_{x_j} - b_i w) - a_i w_{x_i} + aw - \bar{\lambda}_k w = 0.$$

Если $\lambda \overline{\in} \{\lambda_k\}$, то уравнение (5.21) разрешимо при $\forall F_\lambda$ и $|v| \leqslant \leqslant c_\lambda |F_\lambda|$. В частности, для решения задачи (5.14) с $\varphi = 0$ имеем

$$\| u \|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant cc_\lambda |F_\lambda| \leqslant cc_1 c_\lambda \left(\| f \|_{\frac{2n}{n+2},\Omega} + \| \mathbf{f} \|_{2,\Omega} \right). \tag{5.29}$$

Заметим, что зависимость $l_\lambda(\eta)$ от λ вызвана неоднородностью граничного условия из (5.14). Если $\varphi \equiv 0$, то $l_\lambda(\eta) = (f_i, \eta_{x_i}) - (f, \eta)$. Если к тому же $f_i \equiv 0$, то условие (5.25) будет означать обычную ортогональность f ко всем w_k^i:

$$l_{\lambda_k}(w_k^i) = -(f, w_k^i) = -\int_\Omega f\overline{w_k^i}\,dx = 0.$$

Так как коэффициенты L вещественные, то спектр задачи (5.14) содержит вместе с любым λ_k число $\bar{\lambda}_k$, причем если λ_k соответствует собственная функция $u_k(x)$, то $\bar{\lambda}_k$ соответствует собственная функция $\overline{u_k(x)}$. Это же верно и для сопряженной к (5.14) задачи $L^*w - \bar{\lambda}w = 0$, $w|_S = 0$. Ввиду этого условия разрешимости $\int_\Omega f\overline{w_k^i}\,dx = 0$ задачи (5.14) при $\lambda = \lambda_k$, $f_i = \varphi = 0$ можно трактовать как ортогональность вида $\int_\Omega f v_k^i\,dx = 0$, где v_k^i суть решения задачи $L^*v - \lambda_k v = 0$, $v|_S = 0$ при том же λ_k, что и в задаче (5.14).

Сформулируем еще следующее утверждение:

Теорема 5.4. *Пусть для всех операторов L_m, $m = 1, 2, \ldots$, вида* (4.1) *выполнены условия теоремы* 5.2 *с одними и теми же постоянными. Пусть $a_{ij}^m(x)$, оставаясь равномерно ограниченными, сходятся почти всюду к a_{ij}, а функции a_i^m, b_i^m, a^m, $\mathbf{f}^m$, f^m и φ^m сходятся к a_i, b_i, a, $\mathbf{f}$, f и φ в нормах пространств $L_q(\Omega)$, $L_q(\Omega)$, $L_{q/2}(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $L_{2n/(n+2)}(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega) \cap L_{2q/(q-2)}(\Omega)$ соответственно. Тогда обобщенные решения u^m из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ задач*

$$L^m u = \frac{\partial f_i^m}{\partial x_i} + f^m, \quad u|_S = \varphi^m|_S \tag{5.30}$$

сходятся сильно в $W_2^1(\Omega)$ к обобщенному решению из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ предельной задачи (4.1), (4.9).

Доказательство этого предложения весьма просто, и читатель проведет его сам, пользуясь следующими указаниями.

Каждая из задач (5.30) имеет в силу теоремы 5.2 единственное решение u^m. Для $v^m = u^m - \varphi^m$ справедливо тождество типа (4.12). То же верно и для $v = u - \varphi$, где u есть решение предельной задачи.

Из этих тождеств следует $L_m(v^m, \eta) - L(v, \eta) = l_m(\eta) - l(\eta)$. Полагая здесь $\eta = v^m - v$, мы после ряда элементарных преобразований и оценок того же типа, что и в § 4, придем к желаемому заключению о стремлении к нулю $\| v^m - v \|_{2,\Omega}^{(1)}$.

Рассмотрим еще предельный случай, когда $q = n \geqslant 3$. Пусть для (4.1) выполнены предположения (4.2), (4.5), (4.33), и пусть ради несущественных упрощений $\varphi(x) \equiv 0$, т. е. искомое решение $u(x)$ обращается на контуре S в нуль. Представим коэффициенты при младших членах в виде сумм:

$$a_i(x) = a_i'(x) + a_i''(x), \quad b_i(x) = b_i'(x) + b_i''(x),$$

$$a^+(x) \equiv \max\{a(x);\ 0\} = a^{+\prime}(x) + a^{+\prime\prime}(x),$$

в которых a_i'', b_i'', $a^{+\prime\prime}$ имеют малую норму в $L_n(\Omega)$, $L_n(\Omega)$, $L_{n/2}(\Omega)$ соответственно, а a_i', b_i' и $a^{+\prime}$ суть ограниченные функции, так что

$$\left.\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=1}^n (a_i'')^2;\ \sum_{i=1}^n (b_i'')^2,\ a^{+\prime\prime} \right\|_{n/2,\,\Omega} \leqslant \varepsilon'', \\ &\max_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^n (a_i')^2,\ \sum_{i=1}^n (b_i')^2,\ a^{+\prime} \right| \leqslant M_{\varepsilon''}. \end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

Тождество (5.15), соответствующее задаче (5.14), преобразуем так же, как и выше, к уравнению вида (5.18), точнее, к уравнению

$$u + A'u + A''u + \lambda Bu = F_\lambda, \tag{5.32}$$

причем $a^-(x) \geqslant 0$. Здесь оператор B и элемент F_λ определяются тождествами (5.20) и (5.19) соответственно, а операторы A' и A'' — тождеством (5.7), в котором для A' надо в $I_1(u, \eta)$ подставить вместо a_i, b_i и a^+ функции a_i', b_i' и $a^{+\prime}$, а для A'' — функции a_i'', b_i'' и $a^{+\prime\prime}$. Из доказанного выше следует, что оператор B симметричен, положителен и вполне непрерывен, оператор A' вполне непрерывен, а A'' ограничен и его норма стремится к нулю при стремлении к нулю ε''. Кроме того, операторы $E + A' + \lambda' B$ в силу теоремы 5.2 обратимы для $\lambda' \geqslant \lambda_0' \equiv \equiv (2\nu + 1)(2\nu)^{-1} M_{\varepsilon''}$ и, что важно, нормы обратных им операторов не превосходят некоторого числа μ_2, зависящего лишь от n и ν и не зависящего от $M_{\varepsilon''}$. Это последнее легко видеть из оценки (4.41) и того факта, что в ней δ_1 можно взять равным нулю (ибо для A' функции c_i'' и c'' равны нулю), а $\delta_3 = 1/2$.

Итак,

$$\|(E+A'+\lambda'B)^{-1}\| \leqslant \mu_2 \quad \text{для} \quad \lambda' \geqslant \lambda_0'.$$

Применим оператор $(E+A'+\lambda'B)^{-1}$ к обеим частям уравнения (5.32) и результат запишем в следующем виде:

$$u+(E+A'+\lambda'B)^{-1}A''u+(\lambda-\lambda')(E+A'+\lambda'B)^{-1}Bu = \\ =(E+A'+\lambda'B)^{-1}F. \qquad (5.33)$$

Выберем ε'' столь малым, чтобы норма оператора $\|A''\|$ была меньше $1/\mu_2$; тогда оператор $E+(E+A'+\lambda'B)^{-1}A''$ будет обратим и уравнение (5.33) может быть преобразовано к эквивалентному уравнению вида

$$u+(\lambda-\lambda')\left[E+(E+A'+\lambda'B)^{-1}A''\right]^{-1}(E+A'+\lambda'B)^{-1}Bu = \\ =\left[E+(E+A'+\lambda'B)^{-1}A''\right]^{-1}(E+A'+\lambda'B)^{-1}F. \qquad (5.34)$$

В нем оператор, стоящий при $(\lambda-\lambda')$, вполне непрерывен (ибо B вполне непрерывен, а остальные операторы ограничены), и, следовательно, для уравнения (5.34) справедливы все теоремы Фредгольма. Перефразируя их в терминах исходной задачи Дирихле, приходим к заключению:

Теорема 5.5. *Пусть для уравнения* (5.14) *выполнены условия* (4.2), (4.5), (4.33), *и пусть* $\varphi(x) \in \overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$. *Тогда для задачи* (5.14) *справедливы все заключения теоремы* 5.3.

§ 6. Вторая и третья краевые задачи

Разрешимость второй и третьей краевых задач для уравнения

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}u_{x_j}\right)+b_iu_{x_i}+au=f \qquad (6.1)$$

в пространстве $W_2^1(\Omega)$ для строго липшицевых областей *) исследуется в принципе так же, как и разрешимость первой краевой задачи в §§ 4, 5, надо только «правильно» определить, что значит решить эти задачи в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Для произвольной функции из $W_2^1(\Omega)$ не имеет смысла говорить, что она удовлетворяет условию

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial N}+\sigma u\right)\right|_S=\varphi(s), \qquad (6.2)$$

*) Для таких областей $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ совпадает с $W_2^1(\Omega)$.

где $\frac{\partial u}{\partial N}=a_{ij}u_{x_j}\cos(\mathbf{n}, x_i)$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S, а $\sigma(s)$ и $\varphi(s)$ — заданные на S функции, ибо ее производные первого порядка определены лишь почти всюду на n-мерной области Ω и могут быть не определены (или могут равняться ∞) на всей $(n-1)$-мерной поверхности S. Поэтому условию (6.2) надо, так же как и уравнению (6.1), придать другую форму, которая была бы пригодна для любой функции из $W_2^1(\Omega)$. Это можно сделать следующим образом.

Назовем *обобщенным решением из* $W_2^1(\Omega)$ *задачи* (6.1), (6.2) функцию $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую тождеству

$$L(u, \eta) \equiv \int_\Omega \left[a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} - \left(b_i u_{x_i} + au\right)\eta\right] dx =$$
$$= -\int_\Omega f\eta\, dx + \int_S (-\sigma u + \varphi)\,\eta\, ds \qquad (6.3)$$

при любой функции η из $W_2^1(\Omega)$.

Если бы все входящие в (6.3) функции были достаточно гладкими, то нетрудно было бы проверить, что, проводя в (6.3) интегрирование по частям в первой группе членов, мы пришли бы к тождеству

$$\int_\Omega (Lu - f)\,\eta\, dx - \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u - \varphi\right)\eta\, ds = 0, \qquad (6.4)$$

из которого, в силу достаточного произвола η, следуют и уравнение (6.1), и равенство (6.2). Верно и обратное: из (6.1), (6.2) следует (6.4), а потому и (6.3). Таким образом, данное нами определение обобщенного решения действительно является расширением классического понятия решения задачи (6.1), (6.2). Разрешимость задачи (6.1), (6.2) в классе $W_2^1(\Omega)$ устанавливается весьма просто. Пусть относительно коэффициентов L и функции f выполнены предположения (4.2), (4.3), (4.5). Докажем сначала первое основное неравенство. Для этого используем неравенство (4.23), верное при $\forall u \in W_2^1(\Omega)$. Из него, равенства (6.3) с $\eta = u$ и неравенства (2.22) гл. II следует:

$$\int_\Omega \left(\frac{\nu}{2}|\nabla u|^2 + a^- u^2\right) dx \leqslant L(u, u) + \varepsilon_1 \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + c_{\varepsilon_1}(b_i, a^+)\|u\|_{2,\Omega}^2 =$$
$$= -\int_\Omega fu\, dx + \int_S (-\sigma u^2 + \varphi u)\, ds + \varepsilon_1 \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + c_{\varepsilon_1}(b_i, a^+)\|u\|_{2,\Omega}^2, \qquad (6.5)$$

где ε_1 — произвольное малое положительное число, а $c_{\varepsilon_1}(b_i, a^+)$ —

известная нам положительная постоянная, стремящаяся к ∞ при $\varepsilon_1 \to 0$.

Если бы функции σ и φ равнялись тождественно нулю, то интеграл по S отсутствовал бы и из (6.5) следовало бы неравенство типа (4.24). В общем случае условия на σ и φ сводятся к тому, чтобы гарантировать для любой функции u из $W_2^1(\Omega)$ неравенства

$$\left| \int\limits_S \sigma u^2 \, ds \right| \leqslant \int\limits_\Omega [\varepsilon |\nabla u|^2 + c_\varepsilon(\sigma) u^2] \, dx, \tag{6.6}$$

$$\left| \int\limits_S \varphi u \, ds \right| \leqslant c(\varphi) \| u \|_{2, \Omega}^{(1)} \tag{6.7}$$

с произвольно малым ε и с конечными $c_\varepsilon(\sigma)$ и $c(\varphi)$ (постоянная $c_\varepsilon(\sigma)$ может произвольно расти при $\varepsilon \to 0$). Если условия на σ, φ формулировать в виде их принадлежности к пространствам $L_r(S)$, то, как показывают теоремы вложения (см. неравенства (2.37) и (2.38) гл. II), для этого надо предположить, что функция σ принадлежит пространству $L_p(S)$ с $p > n-1$, а $\varphi \in L_r(S)$, где $r \geqslant 2(n-1)/n$ при $n > 2$ и $r > 1$ при $n = 2$.

При выполнении этих условий из соотношений (6.5) — (6.7) после ряда простых оценок, аналогичных проведенным в § 4, получим

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\nu}{4} |\nabla u|^2 + a^- u^2 \right) dx \leqslant \frac{5}{\nu} \left[c^2(\hat{n}, \Omega) \| f \|_{2\hat{n}/(\hat{n}+2), \Omega}^2 + c^2(\varphi) \right] + \\ + \left[c_{\nu/20}(\sigma) + c_{\nu/20}(b_i, a^+) + \frac{\nu}{10} \right] \| u \|_{2, \Omega}^2. \tag{6.8}$$

Это неравенство имеет тот же характер, что и неравенство (4.24). На его основе с помощью теорем вложения § 2 гл. II доказывается, что для задачи (6.1), (6.2) в пространстве $W_2^1(\Omega)$ имеют место три теоремы Фредгольма, в частности, что при всех достаточно больших λ краевая задача (6.2) для уравнений $Lu - \lambda u = f$ однозначна разрешима при любых f, φ и σ с указанными выше свойствами. Мы не будем приводить здесь доказательства этих предложений, так как они вполне аналогичны данным в § 5 для первой краевой задачи.

§ 7. Внутренние оценки в L_2 производных второго порядка произвольной функции через значения эллиптического оператора от нее

В этом и следующем параграфах мы хотим доказать второе основное неравенство для эллиптических операторов, позволяющее оценивать нормы в L_2 производных второго порядка от произвольной функции u через нормы в L_2 самой функции u, значения эллиптического оператора от нее и нормы граничных значений u. Это неравенство было установлено независимо в работах [8_2, 21_{1-3}] для первого краевого условия (по поводу двумерного случая см. § 17 данной главы) и в работах [21_{1-3}] для других краевых условий. (В [21_{1-3}] установлены более общие факты: точные оценки норм u в $W_2^m(\Omega)$, где m — любое натуральное число, через нормы итераций $L^{(k)}u$ в $L_2(\Omega)$.)

Излагаемый ниже вывод его, равно как и все дальнейшие исследования по разрешимости краевых задач в пространстве $W_2^2(\Omega)$, взят из работ [$21_{1-3,5}$] одного из авторов книги. Начнем с получения внутренних оценок, которые не зависят от значений u на границе S. На этот раз изучаемые функции будут принадлежать пространству W_2^2 и оператор L (см. (4.1)) на них должен вычисляться непосредственно и давать функции из L_2. Для этого потребуем, помимо ограничений (4.2), (4.3), еще существование обобщенных производных $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$, $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ и принадлежность $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$ к $L_q(\Omega)$, а $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}+a$ к $L_{\hat q/2}(\Omega)$, где $\hat q=\max\{q, 4\}$ и $q>n$ *). Эти условия гарантируют нам, что каждый член выражения

$$Lu\equiv a_{ij}(x)\,u_{x_ix_j}+\hat a_i(x)\,u_{x_i}+\hat a(x)\,u, \tag{7.1}$$

где $\hat a_i=\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}+a_i+b_i$, $\hat a=\frac{\partial a_i}{\partial x_i}+a$, при любой u из $W_2^2(\Omega)$ дает функцию из $L_2(\Omega)$, так что L есть ограниченный оператор из $W_2^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и

$$\|Lu\|_{2,\Omega}\leqslant c\,\|u\|_{2,\Omega}^{(2)} \tag{7.2}$$

с постоянной c, зависящей лишь от μ из (4.2), Ω и норм $\|\hat a_i\|_{q,\Omega}$, $\|\hat a\|_{\hat q/2,\Omega}$ (область Ω считаем строго липшицевой).

Итак, запишем оператор L в виде (7.1) и предположим, что помимо условий (4.2), (4.3) выполнены еще условия

$$\left\|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right\|_{q,\Omega},\quad \left\|\frac{\partial a_i}{\partial x_i}+a\right\|_{\hat q/2,\Omega}\leqslant\mu, \tag{7.3}$$
$$i, j, k=1,\ldots,n,\quad q>n,\quad \hat q=\max\{q;\,4\}.$$

Рассмотрим сначала оператор L на функциях из $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, т. е. на финитных в Ω функциях из $W_2^2(\Omega)$. Докажем справедливость следующего предложения:

*) По поводу возможности замены q на n см. конец § 8.

Лемма 7.1. *Если относительно коэффициентов оператора L выполнены условия* (4.2), (4.3), (7.3), *то для любой функции $u \in \dot{W}_2^2(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\left[\| u \|_{2,\Omega}^{(2)}\right]^2 \leqslant \frac{2}{\nu^2} \| Lu \|_{2,\Omega}^2 + c \| u \|_{2,\Omega}^2 \tag{7.4}$$

с постоянной c, зависящей лишь от величин q, ν и μ из условий (4.2), (4.3), (7.3) *и не зависящей ни от u, ни от Ω.*

Во множестве $\dot{W}_2^2(\Omega)$ плотно (в смысле сходимости в $W_2^2(\Omega)$) множество $\dot{C}^\infty(\Omega)$ всех бесконечно дифференцируемых финитных в области Ω функций (действительно, обычные усреднения с бесконечно дифференцируемым ядром и достаточно малыми радиусами усреднения дают нужную аппроксимацию функции из $\dot{W}_2^2(\Omega)$). Поэтому неравенство (7.4) достаточно доказать лишь для функций u из $\dot{C}^\infty(\Omega)$; для любой же $u \in \dot{W}_2^2(\Omega)$ оно получится замыканием (7.4) в норме $W_2^2(\Omega)$. При этом надо лишь помнить, что оператор L, как оператор из $\dot{W}_2^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, ограничен.

Итак, пусть $u \in \dot{C}^\infty(\Omega)$. Рассмотрим интеграл

$$\int_\Omega (Lu)^2\,dx = \int_\Omega \Big[a_{ij}u_{x_ix_j}a_{kl}u_{x_kx_l} + 2a_{ij}u_{x_ix_j}\left(\hat{a}_k u_{x_k} + \hat{a}u\right) + \\ + \left(\hat{a}_k u_{x_k} + \hat{a}u\right)^2\Big]\,dx.$$

Первый член в правой части преобразуем с помощью двукратного интегрирования по частям следующим образом:

$$\int_\Omega (Lu)^2\,dx = \int_\Omega \left[-u_{x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}a_{kl}u_{x_kx_l}\right) + \ldots\right]dx = \\ = \int_\Omega \Big[a_{ij}a_{kl}u_{x_ix_k}u_{x_jx_l} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}a_{kl}\right)u_{x_i}u_{x_kx_l} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{ij}a_{kl}\right)u_{x_i}u_{x_lx_j} + 2a_{ij}u_{x_ix_j}\left(\hat{a}_k u_{x_k} + \hat{a}u\right) + \left(\hat{a}_k u_{x_k} + \hat{a}u\right)^2\Big]\,dx. \tag{7.5}$$

Покажем, что

$$I_1(x) \equiv a_{ij}(x)\,a_{kl}(x)\,u_{x_ix_k}u_{x_jx_l} \geqslant \nu^2 u_{xx}^2. \tag{7.6}$$

В самом деле, зафиксируем произвольно точку $x^0 \in \Omega$ и введем в ее окрестности новые прямоугольные координаты: $y_k = \alpha_{kl}(x_l - x_l^0)$. Ортогональную матрицу (α_{kl}) выберем так, чтобы она приводила квадратичную форму $a_{ij}(x^0)\xi_i\xi_j$ к диагональному виду, т. е. чтобы

$$a_{ij}(x^0)\,\alpha_{ki}\alpha_{lj} = \lambda_k(x^0)\,\delta_k^l,$$

где $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)$ — собственные числа формы $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$. Тогда, как легко видеть,

$$I_1(x^0) = \lambda_s(x^0)\lambda_t(x^0)u^2_{y_s y_t}(x^0).$$

В силу условия эллиптичности (4.2) или, что то же самое, предположения $\lambda_i(x) \geqslant \nu$, $i = 1, \ldots, n$, получим

$$I_1(x^0) \geqslant \nu^2 u^2_{yy}(x^0).$$

Но $u^2_{yy}(x^0) = u^2_{xx}(x^0)$, так что неравенство (7.6) установлено.

Ввиду этого из (7.5) следует

$$\nu^2 \int_\Omega u^2_{xx}\,dx \leqslant \int_\Omega (Lu)^2\,dx + \int_\Omega \Big[\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}a_{kl})u_{x_i}u_{x_k x_l} - \\ - \frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ij}a_{kl})u_{x_l x_j}u_{x_i} - 2a_{ij}u_{x_i x_j}\left(\hat{a}_k u_{x_k} + \hat{a}u\right) - \\ - \left(\hat{a}_k u_{x_k} + \hat{a}u\right)^2\Big]dx \equiv \int_\Omega (Lu)^2\,dx + I_2. \tag{7.7}$$

Целью дальнейших рассуждений является доказательство того, что при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$|I_2| \leqslant \int_\Omega \left[\varepsilon u^2_{xx} + c_\varepsilon(|\nabla u|^2 + u^2)\right]dx, \tag{7.8}$$

причем постоянная c_ε зависит лишь от ε (при этом $c_\varepsilon \to \infty$, когда $\varepsilon \to 0$) и постоянных q, ν и μ из условий (4.3) и (7.3).

Для доказательства неравенства (7.8) мы воспользуемся, кроме неравенства Гёльдера, неравенством (4.19) и неравенством (2.27) гл. II. С помощью этих неравенств оценка интеграла I_2 проводится стандартным способом. Оценим для примера несколько членов из I_2.

Пусть $I_3 = \int_\Omega \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} a_{kl} u_{x_i} u_{x_k x_l}\,dx$, причем суммирование здесь не предполагается. Легко видеть, что

$$|I_3| \leqslant \mu \int_\Omega \left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right| |u_{x_i}| |u_{x_k x_l}|\,dx \leqslant \\ \leqslant \mu \int_\Omega \left[\varepsilon_1 u^2_{x_k x_l} + \frac{1}{4\varepsilon_1}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right)^2 u^2_{x_i}\right]dx \leqslant \\ \leqslant \mu\varepsilon_1 \int_\Omega u^2_{x_k x_l}\,dx + \frac{\mu}{4\varepsilon_1}\left\|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right\|^2_{q,\Omega} \|u_{x_i}\|^2_{2q/(q-2),\Omega}, \qquad \varepsilon_1 > 0.$$

Воспользуемся для оценки третьего сомножителя второго члена в правой части последнего неравенства неравенством (4.19). Тогда получим

$$|I_3| \leqslant \mu\varepsilon_1 \int_\Omega u^2_{x_k x_l}\,dx + \\ + \frac{\mu^3}{4\varepsilon_1} c^2(q)\left[\varepsilon\frac{n}{q}\|\nabla u_{x_l}\|^2_{2,\Omega} + \varepsilon^{-n/(q-n)}\left(1-\frac{n}{q}\right)\|u_{x_l}\|^2_{2,\Omega}\right].$$

Полученная для интеграла I_3 оценка есть оценка типа (7.8), ибо ε и ε_1 — произвольные положительные числа.

Рассмотрим для примера еще такой член:

$$I_4 = \int_\Omega a_{ij}(x)\,u_{x_i x_j}\hat{a}u\,dx,$$

при каких-либо значениях индексов i и j. Очевидно, что

$$|I_4| \leqslant \mu\int_\Omega |u_{x_i x_j}|\,|\hat{a}|\,|u|\,dx \leqslant \mu\int_\Omega\left(\varepsilon_2 u^2_{x_i x_j} + \frac{1}{4\varepsilon_2}\hat{a}^2u^2\right)dx,\quad \varepsilon_2 > 0.$$

Пусть сначала $n=2,\,3$. Тогда, используя неравенство (2.27) гл. II, получим

$$I_4 \leqslant \mu\varepsilon_2\int_\Omega u^2_{x_i x_j}\,dx + \frac{\mu}{4\varepsilon_2}\max_\Omega u^2\int_\Omega \hat{a}^2\,dx \leqslant \\ \leqslant \mu\varepsilon_2\int_\Omega u^2_{x_i x_j}\,dx + \frac{\mu^3}{4\varepsilon_2}\left[\varepsilon\|u_{xx}\|^2_{2,\Omega} + c_\varepsilon\|u\|^2_{2,\Omega}\right].$$

Пусть теперь $n \geqslant 4$. Тогда, снова используя неравенство (2.27) гл. II, будем иметь

$$I_4 \leqslant \mu\varepsilon_2\int_\Omega u^2_{x_i x_j}\,dx + \frac{\mu}{4\varepsilon_2}\|\hat{a}\|^2_{q/2,\Omega}\|u\|^2_{2q/(q-4),\Omega} \leqslant \\ \leqslant \mu\varepsilon_2\int_\Omega u^2_{x_i x_j}\,dx + \frac{\mu^3}{4\varepsilon_2}\left[\varepsilon\|u_{xx}\|^2_{2,\Omega} + c_\varepsilon\|u\|^2_{2,\Omega}\right].$$

Остальные члены в I_2 оцениваются аналогично; при этом, оценивая интеграл $\int_\Omega \hat{a}^2u^2\,dx$, надо, как мы только что делали, различать случаи $n=2,\,3$ и $n \geqslant 4$.

Итак, неравенство (7.8) доказано. Из (7.7) и (7.8) следует

$$\nu^2\int_\Omega u^2_{xx}\,dx \leqslant \int_\Omega (Lu)^2\,dx + \varepsilon\int_\Omega u^2_{xx}\,dx + \tilde{c}_\varepsilon\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2.$$

Отсюда, выбирая, например, $\varepsilon = \nu^2/4$, получим

$$\int_\Omega u_{xx}^2\,dx \leqslant \frac{4}{3\nu^2}\int_\Omega (Lu)^2\,dx + \frac{4}{3\nu^2}c_{3\nu^2/4}\left(\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}\right)^2. \tag{7.9}$$

Соотношение (7.9) вместе с неравенством (2.28) гл. II и дает нам второе основное неравенство (7.4).

Сделаем ряд выводов из оценки (7.4). Покажем, прежде всего, что оператор L, определенный выше как дифференциальный оператор (7.1) на множестве $D(L) = \dot{W}_2^2(\Omega)$, допускает замыкание в $L_2(\Omega)$ (см. [31₂]). Действительно, пусть имеется последовательность элементов $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ из $\dot{W}_2^2(\Omega)$, сходящаяся в $L_2(\Omega)$ к нулю и такая, что для нее $\{Lu_k\}$ сходятся в $L_2(\Omega)$ к некоторому элементу f. Надо доказать, что тогда $f \equiv 0$.

Действительно, из неравенства (7.4), примененного к функции $u_k - u_l$, $k, l = 1, 2, \ldots$, следует, что последовательность $\{u_k\}$ будет сходиться в себе в норме $W_2^2(\Omega)$ и, следовательно, будет сходиться к своему пределу в норме $W_2^2(\Omega)$. Но пределом $\{u_k\}$ в $L_2(\Omega)$ является $u \equiv 0$, следовательно, $\{u_k\}$ будет сходиться к нулю и в норме $W_2^2(\Omega)$. Это в силу (7.2) гарантирует, что $\{Lu_k\}$ будет иметь своим пределом 0, т. е. $f \equiv 0$.

Итак, оператор L допускает замыкание. Больше того, из только что проведенного рассуждения следует, что $D(\bar{L})$, т. е. область определения замыкания $\bar{L}$, совпадает с $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, т. е. с замыканием множества $\dot{W}_2^2(\Omega)$ или, что то же, с замыканием $\dot{C}^\infty(\Omega)$ в норме $W_2^2(\Omega)$. Полезно заметить, что на любом гладком куске границы области Ω функции из $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ обращаются в нуль в среднем вместе со своими производными первого порядка (см. § 2 гл. II).

Как известно, возможность замыкания оператора L эквивалентна тому, что сопряженный к нему оператор L^* определен на плотном в $L_2(\Omega)$ множестве. Сопряженный к L оператор легко определить в явном виде, если предположить дополнительно к ранее сказанному, что коэффициенты a_i и b_i имеют производные $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$, $\frac{\partial b_i}{\partial x_i}$ из $L_{q/2}(\Omega)$. Именно, на $v(x) \in W_2^2(\Omega) \subset D(L^*)$ он определяется так:

$$L^*v = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}v_{x_i} - b_jv\right) - a_iv_{x_i} + av. \tag{7.10}$$

Действительно, сопряженный оператор L^* и его область определения $D(L^*)$ характеризуются тем, что для любого элемента u из $D(L) = \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ должно быть верно тождество

$$(Lu, v) = (u, L^* v). \tag{7.11}$$

Но тождество (7.11) на самом деле верно при любой $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, если L^* определить равенством (7.10), а $v \in W_2^2(\Omega)$. Из излагаемых ниже фактов нетрудно вывести, что при некоторой регулярности S область $D(L^*)$ совпадает с $W_2^2(\Omega)$.

§ 8. Второе основное неравенство для эллиптического оператора

Одним из главных вопросов, связанных с эллиптическим оператором L, является вопрос о разрешимости для него различных краевых задач. Эти задачи состоят в нахождении решений $u(x)$ уравнения

$$Lu = \psi(x) \tag{8.1}$$

в области Ω, удовлетворяющих тому или иному краевому условию на границе S области Ω. При этом основными краевыми условиями считаются следующие:

1) первое краевое условие:

$$u|_S = \varphi(s), \tag{8.2}$$

2) второе краевое условие:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_S = \varphi(s), \qquad \frac{\partial}{\partial N} \equiv a_{ij} \cos(\mathbf{n}, x_j) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{8.3}$$

3) третье краевое условие:

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(s) u\right)\right|_S = \varphi(s), \tag{8.4}$$

где $\varphi(s)$ и $\sigma(s)$ суть заданные на S функции.

С точки зрения применяемых нами методов удобнее неоднородные краевые условия (8.2)—(8.4) сводить предварительно к однородным. Для этого мы вместо искомой функции вводим новую неизвестную функцию v с помощью равенства $u(x) = v(x) + u_1(x)$, где $u_1(x)$ есть какая-либо функция из пространства $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющая одному из условий (8.2)—(8.4). Тогда v будет удовлетворять уравнению $Lv = \psi - Lu_1$, т. е. уравнению того же вида, что и уравнение (8.1), и соответствующему однородному краевому условию.

Итак, будем считать, что u удовлетворяет уравнению (8.1) и одному из однородных краевых условий, например условию

$$u|_S = 0. \tag{8.2'}$$

Задача (8.1), (8.2′) с точки зрения функционального анализа состоит в нахождении оператора L^{-1}, обратного оператору L, определенному на функциях, подчиненных условию (8.2′). В предыдущем параграфе мы определили оператор L на множестве $\dot{W}_2^2(\Omega)$. Так как функции из $\dot{W}_2^2(\Omega)$ равны нулю на границе S, то любая из них есть решение задачи (8.1), (8.2′) с соответствующей правой частью (именно $\psi \equiv Lu$). Однако такие функции ψ (ψ из $R(L)$, т. е. из области значений оператора (L) и даже ψ из $R(\overline{L})$ не заполняют всего пространства $L_2(\Omega)$. Действительно, если взять, например, какую-либо дважды непрерывно дифференцируемую функцию $v(x)$, равную нулю на S и такую, что $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S \not\equiv 0$, и поставить задачу: найти u из условий

$$Lu = Lv, \quad u|_S = 0, \tag{8.5}$$

то одним из решений этой задачи будет v. Если предположить, что для оператора L выполнено условие (4.26) или (4.32), то функция $u \equiv v$ будет единственным возможным решением задачи (8.5). Но, очевидно, $v \overline{\in} D(\overline{L}) = \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, и потому $Lv \overline{\in} R(\overline{L})$. Тем самым $R(\overline{L})$ не совпадает с $L_2(\Omega)$.

Итак, если мы хотим решить задачу (8.1), (8.2′) для всех $\psi \in L_2(\Omega)$ или хотя бы для плотного в $L_2(\Omega)$ множества, нам необходимо заняться расширением оператора L. Известно, что уже для простейшего эллиптического оператора — оператора Лапласа — дефектные числа оператора $\overline{\Delta}$ на $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ бесконечны и он допускает бесчисленное множество различных расширений. Краевые задачи для оператора L порождают различные расширения оператора L с его области определения $D(L) \equiv \dot{W}_2^2(\Omega)$ и, в определенном смысле, наоборот (в связи с этим см. работы [7_2] и [5_1]). Мы рассмотрим здесь лишь одну сторону вопроса, именно изучим те расширения оператора L с $\dot{W}_2^2(\Omega)$, которые связаны с основными краевыми условиями (8.2)—(8.4).

Расширение оператора L желательно провести так, чтобы область значений расширенного оператора $\hat{L}$ (или $\hat{L} + \lambda E$ при каком-нибудь λ) заполняла все пространство $L_2(\Omega)$, функции из области определения оператора $\hat{L}$ удовлетворяли бы в каком-либо смысле граничному условию исследуемой краевой задачи и оператор $\hat{L}$ (или $\hat{L} + \lambda E$) имел ограниченный обратный на $L_2(\Omega)$.

Ясно, что для любой из трех основных краевых задач (8.2)—(8.4) надо присоединить к области определения $D(L)$ оператора L прежде всего все достаточно гладкие функции, удовлетворяющие соответствующему однородному краевому условию, ибо такие функции являются решениями исследуемой краевой задачи.

Возьмем для определенности первую краевую задачу. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$ замыкание в норме $W^2_2(\Omega)$ множества всех функций из $C^2(\overline{\Omega})$, равных нулю на границе S. Обозначим через $\widehat{L}$ расширение оператора L за счет дополнения $D(L)$ до множества $W^2_{2,0}(\Omega)$. Оператор $\widehat{L}$ на $W^2_{2,0}(\Omega)$ по-прежнему имеет вид (7.1). В дальнейшем мы покажем, что оператор $\widehat{L}$ замкнут на множестве $W^2_{2,0}(\Omega)$. Здесь же мы докажем, что оператор $\widehat{L}$ допускает замыкание и все функции из области определения $D(\overline{\widehat{L}})$ оператора $\overline{\widehat{L}}$ имеют обобщенные производные второго порядка, квадратично суммируемые по любой строго внутренней подобласти Ω' области Ω. Оба эти утверждения легко выводятся из неравенства

$$\left(\| u\zeta^2 \|^{(2)}_{2,\Omega}\right)^2 \leqslant \frac{2}{\nu^2} \| \zeta^2 Lu \|^2_{2,\Omega} + c \int_\Omega u^2 (\zeta^4 + \zeta_x^4 + \zeta^2 \zeta_{xx}^2)\, dx, \tag{8.6}$$

справедливого для любой u из $W^2_2(\Omega)$. Здесь $\zeta(x)$ — какая-либо функция из $C^2(\overline{\Omega})$, равная нулю на S. Постоянная c в неравенстве (8.6) зависит лишь от постоянной эллиптичности ν и чисел q и μ из условий (4.2), (4.3), (7.3).

Неравенство (8.6) доказывается так же, как и неравенство (7.4), надо только вместо $\int\limits_\Omega (Lu)^2\, dx$ рассмотреть выражение $\int\limits_\Omega (Lu)^2 \zeta^4\, dx$ и старшие члены преобразовать следующим образом:

$$\int_\Omega a_{ij} a_{kl} u_{x_i x_j} u_{x_k x_l} \zeta^4\, dx =$$

$$= -\int_\Omega \left[a_{ij} a_{kl} u_{x_k x_l x_j} u_{x_i} \zeta^4 + \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} a_{kl} \zeta^4)\, u_{x_k x_l} u_{x_i} \right] dx =$$

$$= \int_\Omega \left[a_{ij} a_{kl} u_{x_i x_k} u_{x_j x_l} \zeta^4 - \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} a_{kl} \zeta^4)\, u_{x_k x_l} u_{x_i} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ij} a_{kl} \zeta^4)\, u_{x_l x_j} u_{x_i} \right] dx. \tag{8.7}$$

Главный положительный член $\int\limits_\Omega a_{ij} a_{kl} u_{x_i x_k} u_{x_j x_l} \zeta^4\, dx$, в силу доказанного в § 7 неравенства (7.6), не меньше $\nu^2 \int\limits_\Omega u_{xx}^2 \zeta^4\, dx$. Все остальные члены правой части (8.7) оцениваются сверху. Бо́льшая часть их отличается от соответствующих членов в выражении для $\int\limits_{\Omega} (Lu)^2\,dx$ только множителем ζ^4. Исключение составляют члены, содержащие производные ζ, именно члены

$$I = \int\limits_{\Omega} a_{ij}a_{kl}\left(u_{x_j x_l}\zeta_{x_k} - u_{x_k x_l}\zeta_{x_j}\right)4\zeta^3 u_{x_i}\,dx$$

(при $\zeta \equiv 1$ они отсутствуют). Для них справедлива оценка

$$|I| \leqslant c\int\limits_{\Omega}\left(\varepsilon u_{xx}^2\zeta^4 + \frac{4}{\varepsilon}|\nabla u|^2\zeta^2|\nabla\zeta|^2\right)dx,$$

где ε — произвольное положительное число, а постоянная c зависит лишь от $\max\limits_{\Omega}|a_{ij}|$.

Проводя все дальнейшие рассуждения и оценки буквально так же, как и выше при выводе неравенства (7.9), придем к неравенству

$$\int\limits_{\Omega} u_{xx}^2\zeta^4\,dx \leqslant \frac{4}{3}\nu^{-2}\int\limits_{\Omega}(Lu)^2\zeta^4\,dx + \\ + c\int\limits_{\Omega}\left[u_x^2\zeta^2(\zeta^2+\zeta_x^2) + u^2\zeta^2(\zeta^2+\zeta_x^2+\zeta_{xx}^2)\right]dx. \qquad (8.8)$$

С другой стороны, для интеграла $j \equiv \int\limits_{\Omega} u_x^2\zeta^2(\zeta^2+\zeta_x^2)\,dx$ справедлива оценка

$$j \leqslant \int\limits_{\Omega}\left[2\varepsilon n u_{xx}^2\zeta^4 + \frac{1}{2\varepsilon}u^2(\zeta^2+\zeta_x^2)^2 + 8u^2(2\zeta^2\zeta_x^2+\zeta_x^4+\zeta^2\zeta_{xx}^2)\right]dx \qquad (8.9)$$

с $\forall\varepsilon > 0$.

Для ее проверки надо провести в j интегрирование по частям, перенося с одного из множителей $u_{x_i}u_{x_i}$ производную $\frac{\partial}{\partial x_i}$ на все остальные, и затем воспользоваться неравенством Коши (1.2) из гл. II. Подставив (8.9) в (8.8), придем к неравенству

$$\int\limits_{\Omega} u_{xx}^2\zeta^4\,dx \leqslant \frac{4}{3\nu^2(1-2\varepsilon nc)}\int\limits_{\Omega}(Lu)^2\zeta^4\,dx + c_\varepsilon\int\limits_{\Omega}(\zeta^4+\zeta_x^4+\zeta^2\zeta_{xx}^2)u^2\,dx$$

с любым положительным $\varepsilon < (2nc)^{-1}$. Отсюда и из (8.9), как легко подсчитать, при определенном выборе ε следует (8.6).

Из неравенства (8.6) действительно следует, что оператор $\hat{L}$ допускает замыкание (это доказывается так же, как в конце § 7 доказывается утверждение о том, что оператор L допускает замыкание) и что функции из $D(\bar{\hat{L}})$ будут иметь обобщенные производные второго порядка, квадратично суммируемые по любой строго внутренней подобласти Ω' области Ω (ибо для любой такой подобласти Ω' мы можем подобрать $\zeta(x)$ так, чтобы $\zeta(x) \equiv 1$, когда $x \in \Omega'$). Эти утверждения верны для всех трех краевых задач (8.2) — (8.4), если $D(\hat{L})$ определить как замыкание в $W_2^2(\Omega)$ множества всех функций из $C^2(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих однородному граничному условию, ибо неравенство (8.6) верно для произвольной функции u из $W_2^2(\Omega)$.

Вернемся снова к первой краевой задаче (8.1), (8.2′) и покажем, что если граница S области Ω достаточно гладкая, то $D(\bar{\hat{L}}) = \overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$, т. е. что оператор $\hat{L}$ замкнут на $W^2_{2,0}(\Omega)$. Для этого распространим второе основное неравенство для эллиптических операторов на произвольные функции из $W^2_{2,0}(\Omega)$.

Предположим, что область Ω обладает следующими свойствами:

1) Ω есть строго липшицева область.

2) Для почти всех (в смысле меры на S) точек x^0 ее границы S существует касательная плоскость к S, и уравнение куска поверхности S в окрестности точки x^0 в местной декартовой системе координат (ось y_n направлена по внешней в точке x^0 нормали к S, а оси $y_1, \ldots, y_{n-1}$ лежат в касательной плоскости к S в точке x^0) имеет вид $y_n = \omega(y_1, \ldots, y_{n-1})$, причем функция ω дважды дифференцируема и собственные числа $\mu_1(x^0), \ldots, \mu_{n-1}(x^0)$ квадратичной формы $\sum_{k,\,l=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_k\, \partial y_l} \xi_k \xi_l$ в точке x^0 ограничены сверху неотрицательной постоянной, которую мы обозначим через K:

$$\sup_{k,\, x^0 \in S} \{\mu_k(x^0)\} \leqslant K. \tag{8.10}$$

Например, для n-мерных шаров произвольного радиуса R $\mu_k = -1/R$, $k = 1, \ldots, n-1$, и потому в качестве K можно взять 0 сразу для всех шаров. Другим примером таких областей могут служить невырожденные n-мерные многогранники (в том числе и невыпуклые) или области, полученные из них при дважды дифференцируемом преобразовании с ограниченными производными второго порядка и положительным якобианом.

Покажем теперь, что если область Ω удовлетворяет условиям 1) и 2), то неравенство (7.4) справедливо для всех функций из $C^2(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль на границе Ω.

Лемма 8.1. *Если область Ω удовлетворяет условиям 1) и 2), то для любой дважды непрерывно дифференцируемой в $\bar{\Omega}$ функции u, равной нулю на S, справедливо неравенство*

$$(\|u\|^{(2)}_{2,\Omega})^2 \leqslant \frac{2}{\nu^2}\|Lu\|^2_{2,\Omega} + c\|u\|^2_{2,\Omega}, \tag{8.11}$$

причем постоянная c зависит только от постоянной эллиптичности ν оператора L, чисел q и μ из условий (4.2), (4.3), (7.3) *) *и от области Ω и не зависит от функции u.*

Доказательство леммы состоит из двух частей. Первая часть совпадает с доказательством леммы 7.1 и сводится к получению неравенств (7.6) и (7.8). Именно, преобразуем так же, как и при доказательстве леммы 7.1, интеграл $\int\limits_\Omega (Lu)^2\,dx$. При этом, так как функция u на этот раз уже не финитна в области Ω, то при двукратном интегрировании по частям выделятся граничные интегралы и потому в правой части равенства (7.5) появится следующий интеграл:

$$\int\limits_S I_S\,ds \equiv \int\limits_S a_{ij}a_{kl}\left[u_{x_k x_l}u_{x_i}\cos(\text{n},\ x_j) - u_{x_j x_l}u_{x_i}\cos(\text{n},\ x_k)\right]ds.$$

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 7.1, получим (см. неравенства (7.6) и (7.8))

$$\nu^2\int\limits_\Omega u^2_{xx}\,dx + \int\limits_S I_S\,ds \leqslant \int\limits_\Omega (Lu)^2\,dx + \int\limits_\Omega\left[\varepsilon u^2_{xx} + c_\varepsilon(|\nabla u|^2 + u^2)\right]dx, \tag{8.12}$$

где ε — произвольное положительное число, c_ε — известная постоянная, зависящая от ε. Заметим, что равенство (7.5) с соответствующей поправкой на граничный интеграл $\int\limits_S I_S ds$, а потому и неравенство (8.12), справедливо для любой функции $u \in C^2(\bar{\Omega})$, хотя при выводе в качестве промежуточного этапа встречались и производные третьего порядка от u. Это так, ибо благодаря строгой липшицевости Ω любая функция из $C^2(\bar{\Omega})$ может быть аппроксимирована в норме $C^2(\bar{\Omega})$ функциями из класса $C^\infty(\bar{\Omega})$ (см. § 2 гл. II). Поэтому интересующие нас соотношения верны для любой $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Переходим теперь к рассмотрению I_S. Пусть x^0 — любая из тех точек поверхности S, в которых существуют производные

*) По поводу возможности замены q на n см. конец § 8.

$\frac{\partial^2\omega}{\partial y_i\,\partial y_j}$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n-1$. Возьмем ортогональную матрицу (c_{kl}) и с ее помощью перейдем в I_S от координат $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ к местной системе координат $(y_1,\ \ldots,\ y_n)$:

$$y_k=c_{kl}(x_l-x_l^0),\qquad k=1,\ \ldots,\ n, \tag{8.13}$$

где направление y_n совпадает с направлением внешней нормали в точке x^0. Благодаря ортогональности матрицы (c_{kl}) имеем

$$x_l-x_l^0=c_{kl}y_k,\qquad l=1,\ \ldots,\ n. \tag{8.14}$$

Из (8.14) следует, что

$$\cos(\mathrm{n},\ x_l)=c_{nl},\qquad l=1,\ \ldots,\ n.$$

Итак, в точке x^0 будем иметь

$$\begin{aligned}I_S(x^0)&=a_{ij}a_{kl}c_{mi}\frac{\partial u}{\partial y_m}c_{pk}c_{ql}\frac{\partial^2u}{\partial y_p\,\partial y_q}c_{nj}-\\&\quad-a_{ij}a_{kl}c_{mi}\frac{\partial u}{\partial y_m}c_{pj}c_{ql}\frac{\partial^2u}{\partial y_p\,\partial y_q}c_{nk}\equiv\\&\equiv b_{mn}b_{pq}\frac{\partial u}{\partial y_m}\frac{\partial^2u}{\partial y_p\,\partial y_q}-b_{mp}b_{nq}\frac{\partial u}{\partial y_m}\frac{\partial^2u}{\partial y_p\,\partial y_q},\end{aligned} \tag{8.15}$$

где $b_{pq}=a_{kl}c_{pk}c_{ql}$, $p,\ q=1,\ \ldots,\ n$. Воспользуемся теперь граничным условием $u|_S=0$. Вблизи точки x^0 с координатами $y_1=\ \ldots\ =y_n=0$ это условие имеет вид

$$u(y_1,\ \ldots,\ y_{n-1},\ \omega(y_1,\ \ldots,\ y_{n-1}))=0,$$

причем оно выполняется тождественно по $y_1,\ \ldots,\ y_{n-1}$ вблизи x^0. Продифференцируем это тождество по y_i и y_j, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n-1$, учитывая, что в точке x^0

$$\frac{\partial\omega}{\partial y_i}=0,\qquad i=1,\ \ldots,\ n-1.$$

Это дает в точке x^0

$$\frac{\partial u}{\partial y_i}=0,\quad \frac{\partial^2u}{\partial y_i\,\partial y_j}=-\frac{\partial u}{\partial y_n}\frac{\partial^2\omega}{\partial y_i\,\partial y_j}\equiv-\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial^2\omega}{\partial y_i\,\partial y_j}. \tag{8.16}$$

С помощью соотношений (8.16) упростим выражение (8.15):

$$I_S(x^0)=[b_{nn}b_{pq}-b_{np}b_{nq}]\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial^2u}{\partial y_p\,\partial y_q}. \tag{8.17}$$

При $p=n$ и произвольном q, при p произвольном и $q=n$ члены в квадратной скобке в (8.17) взаимно сокращаются, и потому (8.17) с учетом (8.16) принимает вид

$$I_S(x^0)=-\sum_{p,\ q=1}^{n-1}(b_{nn}b_{pq}-b_{np}b_{nq})\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2\frac{\partial^2\omega}{\partial y_p\,\partial y_q}. \tag{8.18}$$

Будем считать, что координаты $y_1, \ldots, y_{n-1}$ в касательной плоскости выбраны так, что все смешанные производные $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y_p \partial y_q}$, $p, q = 1, \ldots, n-1$, в точке x^0 равны нулю (этого, очевидно, всегда можно добиться за счет ортогонального преобразования координат $y_1, \ldots, y_{n-1}$). Тогда

$$I_S(x^0) = -\sum_{p=1}^{n-1} \left(b_{nn}b_{pp} - b_{np}^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_p^2}, \tag{8.19}$$

и потому в силу свойства 2) поверхности S и того, что $0 < b_{nn}b_{pp} - b_{np}^2 \leqslant \mu^2$, для $I_S(x^0)$ верно неравенство

$$I_S(x^0) \geqslant -K(n-1)\mu^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2, \tag{8.20}$$

где μ — постоянная из условия (4.2). Из этой оценки и неравенства (8.12) следует

$$\nu^2 \int\limits_\Omega u_{xx}^2\, dx \leqq \int\limits_\Omega (Lu)^2\, dx + \int\limits_\Omega \left[\varepsilon u_{xx}^2 + c_\varepsilon\, (|\nabla u|^2 + u^2)\right] dx + \\ + K(n-1)\mu^2 \int\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 ds. \tag{8.21}$$

Так как область Ω строго липшицева, то (см. неравенство (2.38) гл. II)

$$\int\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 ds \leqslant c_1 \int\limits_\Omega \left(\varepsilon_1 u_{xx}^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} |\nabla u|^2\right) dx,$$

причем постоянная c_1 зависит только от области Ω, а ε_1 — произвольное положительное число. Подставляя это в (8.21), получим

$$\nu^2 \int\limits_\Omega u_{xx}^2\, dx \leqslant \int\limits_\Omega (Lu)^2\, dx + \int\limits_\Omega \Big[\left(\varepsilon + \varepsilon_1 (n-1) K\mu^2 c_1\right) u_{xx}^2 + \\ + \left(c_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon_1}(n-1) K\mu^2 c_1\right) |\nabla u|^2 + c_\varepsilon u^2\Big] dx.$$

Отсюда, выбирая $\varepsilon = \varepsilon_1 (n-1) K\mu^2 c_1 = \nu^2/8$, будем иметь

$$\int\limits_\Omega u_{xx}^2\, dx \leqslant \int\limits_\Omega \left[\frac{4}{3\nu^2}(Lu)^2 + c_2 (|\nabla u|^2 + u^2)\right] dx.$$

Это вместе с неравенством (2.28) гл. II дает нам неравенство (8.11).

Замечание 8.1. Легко видеть, что если Ω — выпуклая область, то $K = 0$, $I_S \geqslant 0$, граничный интеграл $\int\limits_S I_S\, ds$ в неравенстве (8.12) можно просто отбросить и из полученного неравенства вывести непосредственно (8.11).

В частности, при выпуклой Ω и постоянных a_{ij}, удовлетворяющих условию $a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \nu\xi^2$, $\nu > 0$, для любой функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega u_{xx}^2\,dx \leqslant \frac{1}{\nu^2}\int\limits_\Omega (a_{ij}u_{x_ix_j})^2 dx. \tag{8.22}$$

Итак, мы доказали второе основное неравенство для эллиптических операторов. Это сделано для произвольной функции u из класса $C^2(\overline{\Omega})$, равной нулю на границе S. Но такие функции, по определению, плотны в $W^2_{2,0}(\Omega)$, и потому, по замыканию, неравенство (8.11) справедливо для произвольной функции u из класса $W^2_{2,0}(\Omega)$. А тогда из неравенства (8.11) вытекает следующая теорема:

Теорема 8.1. *Дифференциальный оператор $\hat{L}$ замкнут на множестве $W^2_{2,0}(\Omega)$.*

Итак, $D(\overline{\hat{L}}) = D(\hat{L}) = W^2_{2,0}(\Omega)$. Естественно ожидать, что $\hat{L}$ на $W^2_{2,0}(\Omega)$ и есть такое расширение оператора L с множества $\dot{W}^2_2(\Omega)$, которое соответствует первой краевой задаче для оператора L.

Если $\lambda = 0 \overline{\in} \{\lambda_k\}$ — спектру задачи (5.24), то для $\forall u \in W^2_{2,0}(\Omega)$ справедливо неравенство $\|u\|^{(1)}_{2,\Omega} \leqslant c_1\|Lu\|_{2,\Omega}$ (ибо такое u является об. решением из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ уравнения $Lu = f$ с $f = Lu \in L_2(\Omega)$, и для него верна оценка (5.29), т. е. $|u| \leqslant c_2\|Lu\|_{2,\Omega}$), и потому в этом (и только этом) случае неравенство (8.11) приобретает вид

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} \leqslant c\|Lu\|_{2,\Omega}, \tag{8.23}$$

где $c = \frac{2}{\nu^2} + c_1^2$. Одним из критериев того, что $\lambda = 0 \overline{\in} \{\lambda_k\}$, является выполнение неравенства (4.26).

Покажем, что неравенство (8.23) справедливо для оператора Лапласа Δ, т. е. для любой функции u из класса $W^2_{2,0}(\Omega)$:

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} \leqslant c\|\Delta u\|_{2,\Omega}. \tag{8.24}$$

Действительно, если область Ω удовлетворяет условиям леммы 8.1, то в силу неравенства (8.11)

$$(\|u\|^2_{2,\Omega})^2 \leqslant 2\|\Delta u\|^2_{2,\Omega} + c\|u\|^2_{2,\Omega}. \tag{8.25}$$

Но так как $u \in \overset{\circ}{W}{}_{2,0}^{2}(\Omega)$, то

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = -\int_\Omega u\,\Delta u\,dx \leqslant \int_\Omega \left[\frac{\varepsilon}{2}u^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(\Delta u)^2\right]dx, \qquad \varepsilon > 0,$$

что в силу неравенства (4.25) дает

$$\int_\Omega u^2\,dx \leqslant c_0^2 \operatorname{mes}^{2/n}\Omega\left(\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u^2\,dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega (\Delta u)^2\,dx\right).$$

Выбирая $\varepsilon = c_0^{-2}\operatorname{mes}^{-2/n}\Omega$, отсюда и из (8.25) получим неравенство (8.24).

Из леммы 8.1 вытекает

Следствие 8.1. Пусть $u \in W_2^2(\Omega)$ и относительно области $\overline{\Omega}$ и коэффициентов оператора L выполняются предположения леммы 8.1. Тогда

$$(\|u\|_{2,\Omega}^{2})^2 \leqslant \frac{4}{\nu^2}\|Lu\|_{2,\Omega}^2 + c\|u\|_{2,\Omega}^2 + c_1(\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(2)})^2, \tag{8.26}$$

где $\varphi(x)$ есть любая функция, для которой $u(x) - \varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_{2,0}^{2}(\overline{\Omega})$, а c и c_1 определяются теми же величинами, что и c в (8.11).

Неравенство (8.26) легко выводится из неравенства (8.11), примененного к функции $u - \varphi$, и неравенства (7.2) для φ.

В этом и предыдущем параграфах мы дали два типа оценок норм в W_2^2 произвольной функции $u(x)$: внутренние, без каких-либо предположений о гладкости границы S и граничных значений u, и оценки во всей области, для которых такого типа предположения делать необходимо. Полезно иметь также оценку нормы u в W_2^2 для области Ω, у которой лишь часть границы удовлетворяет условиям леммы 8.1. Именно, справедлива

Лемма 8.2. *Пусть часть S_1 границы области Ω есть строго липшицева поверхность, удовлетворяющая условию* 2) *леммы* 8.1, *а $\zeta(x)$ — какая-либо функция из пространства $C^2(\overline{\Omega})$, равная нулю вблизи $S \setminus S_1$. Тогда для любой функции $u(x)$ из $C^2(\Omega \cup S_1)$, равной нулю на S_1, справедливо неравенство* (8.6), *в котором постоянная c зависит лишь от величин ν, μ и q из* (4.2), (4.3), (7.3) *и S_1.*

Доказывается эта лемма принципиально так же, как лемма 8.1 и неравенство (8.6). Именно, берется интеграл $\int_\Omega \zeta^4 (Lu)^2\,dx$ и преобразуется так же, как при выводе неравенства (8.11). Так как ζ не равна нулю на S_1, то при интегрировании по частям выделится интеграл

$$\int_{S_1} \zeta^4 a_{ij} a_{kl} u_{x_l}\left[u_{x_k x_l}(\cos\mathbf{n}, x_j) - u_{x_l x_j}\cos(\mathbf{n}, x_k)\right]ds.$$

Его мы оценим так же, как интеграл $\int\limits_S I_S\,ds$ при доказательстве леммы 8.1, учитывая, что $\zeta=0$ на $S\setminus S_1$. Это и дает неравенство (8.6).

Леммы, аналогичные леммам 8.1 и 8.2 (и даже более общие оценки для производных u любого порядка $l\geqslant 2$), справедливы и для других граничных условий: для условий (8.3), (8.4) и условий «с косой производной» (см. по этому поводу работу [21$_3$] одного из авторов). Способ, изложенный здесь, пригоден и для этих случаев. Некоторое отличие имеется лишь в оценке граничного интеграла $\int\limits_S I_S\,ds$, который преобразуется примерно к тому же виду, но несколько иначе, с использованием других граничных условий. Граница S при этом должна быть из C^2.

Предположим, что участок S_1 границы Ω принадлежит классу W_q^2, $q>n$. В этом случае для любых функций $u(x)$ из $W_2^2(\Omega)$, равных нулю на S_1, также выполняется неравенство вида (8.6), точнее, неравенство, отличающееся от (8.6) лишь тем, что коэффициент $2\nu^{-2}$ при $\|\zeta^2Lu\|_{2,\Omega}^2$ следует заменить постоянной c_0, определяемой величиной ν и поверхностью S_1. То же можно сказать о неравенстве (8.11) в областях класса W_q^2, $q>n$. Остановимся на доказательстве первого из утверждений. Функцию $\zeta(x)$ будем предполагать равной нулю вблизи $S\setminus S_1$ и такой, что пересечение $\hat\Omega$ некоторой области, содержащей носитель $\zeta(x)$, с областью Ω можно отобразить невырожденным преобразованием $y=y(x)$ класса $W_q^2(\hat\Omega)$ на полушар $K_+=\{y\colon |y|<1,\ y_n>0\}$, так что $\partial\hat\Omega\cap S_1$ преобразуется в плоскую часть Σ границы K_+.

Пусть $x=x(y)$ — обратное преобразование для $y=y(x)$, $\xi(y)=\zeta(x(y))$, $v(y)=u(x(y))$.

Ясно, что оператор L в новых переменных перейдет в оператор $\tilde L$, коэффициенты которого $\tilde a_{ij}$, $\tilde a_i$, $\tilde b_i$ $\tilde a$ удовлетворяют неравенствам вида (4.2), (4.3), (7.3) с несколько другими постоянными $\tilde\nu$ и $\tilde\mu$. Далее, если $u\in W_2^2(\Omega)$ и $u|_{S_1}=0$, то $v(y)\in W_2^2(K_+)$ и $v|_\Sigma=0$. Продолжим $v(y)$ на остальную часть шара $K=\{y\colon |y|<1\}$ нечетно относительно Σ, т. е. полагая $v(y_1,\ldots,y_{n-1},-y_n)=-v(y)$, $y\in K_+$. Полученная таким образом функция $v(y)$ принадлежит $W_2^2(K)$, а ее усреднения $v_\rho(y)$ с бесконечно дифференцируемым ядром $\omega_\rho(|x-y|)$ принадлежат $C^\infty(K')$, равны нулю на $\Sigma\cap\partial K'$ и сходятся к $v(y)$ при $\rho\to 0$ в норме $W_2^2(K')$, где K' — любой концентрический с K шар меньшего радиуса. В силу леммы 8.2 для $v_\rho(y)\xi(y)$ с достаточно малым ρ справедливо неравенство

$$\left(\|\xi^2 v_{\rho yy}\|^{(2)}_{2,K_+}\right)^2 \leqslant 2\tilde{\nu}^{-2}\|\xi^2\tilde{L}v_\rho\|^2_{2,K_+} + \tilde{c}\int\limits_{K_+} v_\rho^2(\xi^4+\xi_y^4+\xi^2\xi_{yy}^2)\,dy.$$

Устремляя здесь ρ к нулю и переходя к переменным x, придем к желаемому неравенству

$$\left(\|\zeta^2 u_{xx}\|^2_{2,\Omega}\right)^2 \leqslant c_0\|\zeta^2 Lu\|^2_{2,\Omega} + c\int\limits_\Omega u^2(\zeta^4+\zeta_x^2+\zeta^2\zeta_{xx}^2)\,dx, \quad (8.6')$$

в котором постоянные c_0 и c определяются величинами ν, μ и q из условий (4.2), (4.3), (7.3), нормами в W_q^2 функций $y(x)$ и $x(y)$ и нижними гранями соответствующих им якобианов.

Если $\hat{\Omega}$ нельзя преобразовать к K_+ указанным образом, то покроем ее перекрывающимися областями $\Omega^1, \ldots, \Omega^N$, для каждой из которых Ω^m существует невырожденное преобразование $y = \overset{m}{y}(x)$ класса $W_q^2(\Omega^m)$, переводящее Ω^m в шар K, если $\overline{\Omega}^m \subset \hat{\Omega}$, или в полушар K_+, если $\overline{\Omega}^m \cap S_1$ не пусто. Пусть функция $\zeta_m(x)$ при преобразовании $x = \overset{m}{x}(y)$ переходит в срезающую для K функцию $\xi_m(y)$. Для каждой такой $\zeta_m(x)$ неравенство (8.6′) доказано. Если $\zeta(x)$ — произвольная гладкая функция, равная нулю вблизи $S\setminus S_1$, то можно подобрать соответствующие $\zeta_m(x)$, $m=1, \ldots, N$, так, чтобы $\sum\limits_{m=1}^N \zeta_m^2(x) = 1$, $\forall x\in\Omega$. Тогда, суммируя неравенства (8.6′), написанные для $\zeta_m^2 u_{xx}$, придем к (8.6′) с заданной $\zeta(x)$, причем постоянные c_0 и c в нем будут зависеть и от N.

В случае, если Ω есть область класса W_q^2, $q>n$, $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и $u|_S = 0$, то в (8.6′) можно положить $\zeta\equiv 1$, т. е. получим неравенство вида (8.11).

Сформулируем доказанные утверждения в виде леммы:

Лемма 8.3. *Если Ω принадлежит W_q^2, $q>n$, то для $\forall u\in W_2^2(\Omega)$, равной нулю на S, справедливо неравенство* (8.6′) *с* $\zeta(x)\equiv 1$. *Если $u(x)$ из $W_2^2(\Omega)$ обращается в нуль лишь на части S_1 границы Ω и $S_1\in W_q^2$, то для и верно* (8.6′) с $\zeta\in C^2(\overline{\Omega})$, *равной нулю вблизи $S\setminus S_1$. В обоих случаях постоянные c_0 и c в* (8.6′) *определяются величинами ν, μ и q из условий* (4.2), (4.3) *и* (7.3) *и областью Ω.*

Замечание 8.2. Неравенства (8.11), (8.6′) при $n\geqslant 3$ справедливы и при несколько меньших ограничениях на a_{ij}, $\hat{a}_i$ и $\hat{a}$, а именно, при конечности величин $\left\|\sum\limits_{i,j,k}\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right|\right\|_{n,\Omega} \equiv \mu_1(\Omega)$,

$\left\|\sum_{i=1}^{n}|\hat{a}_i|\right\|_{n,\Omega}\equiv\mu_2(\Omega)$, $\|\hat{a}\|_{\tilde{q}/2,\Omega}\equiv\mu_3(\Omega)$, где $\tilde{q}=\max\{n;4\}$ для $n\neq 4$ и $\tilde{q}=4+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, для $n=4$. Для доказательства этого надо покрыть Ω шарами $K_\rho(x^k)$, $k=1,\ldots,N$, причем для шаров, пересекающих S, взять их центры x^k на S и воспользоваться тем, что для областей $\Omega_k\equiv K_{2\rho}(x^k)\cap\Omega$ и $\forall v\in \overset{1}{W}_m(\Omega_k)$, равной нулю на $\partial\Omega_k\subset\bar{\Omega}$, в неравенствах (2.19) гл. II постоянную $\hat{\beta}$ можно выбрать не зависящей от $\rho\leqslant\rho_0$, взяв в качестве нормы $\|v\|^{(1)}_{m,\Omega}$ в (2.19) величину $\left\{\|\nabla v\|_{m,\Omega_k}+\operatorname{mes}^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}}\Omega_k\right\}\|v\|_{2,\Omega_k}$. Число ρ следует взять таким, чтобы $\mu_i(\Omega_k)$, $i=1,2,3$, были достаточно малыми. После этого надо получить оценки (8.6′) со срезающей для $K_{2\rho}(x^k)$ функцией $\zeta(x)$, равной единице в $K_\rho(x^k)$, $k=1,\ldots,N$. Делается это так же, как и для случая $q>n$, только оценка младших членов через старшие проводится не с помощью неравенства (2.27) гл. II с произвольно малым $\varepsilon>0$ при старших производных, а с помощью неравенства (2.19) гл. II с предельным показателем и с использованием того факта, что нормы всех коэффициентов этих членов по Ω_k достаточно малы. Суммируя затем оценки (8.6′), полученные для областей Ω_k, получим любое из желаемых неравенств: (8.11) или (8.6′). Внешний вид их тот же, что и для случая $q>n$. Однако постоянные c, входящие в них, на этот раз не определяются нормами коэффициентов, входящими в условия (4.2), (4.3), (7.3), а зависят еще от интегральных модулей непрерывности этих коэффициентов в соответствующих пространствах. Исключение составляет лишь случай $n=3$, когда постоянные c от модуля непрерывности функции $\hat{a}(x)$ в $L_2(\Omega)$ не зависят, ибо для оценки интеграла $\int_{\Omega_k}\hat{a}^2u^2\,dx$ при $n=3$ нужно по-прежнему использовать неравенство (2.27) гл. II с $\forall\varepsilon>0$ и потому нет необходимости требовать малости норм $\|\hat{a}\|_{2,\Omega_k}$.

Заметим, что в случае $q=n\geqslant 3$ коэффициенты a_{ij} не обязаны быть непрерывными и данный нами способ доказательства неравенств (8.6), (8.11) не использует непрерывности a_{ij}, но зато требует существования производных a_{ijx_l} из $L_n(\Omega)$. Этот случай подробно разбирается в работе [37_2]. Ниже, в § 11, будет описан другой способ вывода этих неравенств, существенно опирающийся на непрерывность коэффициентов a_{ij}, но не использующий существования производных a_{ijx_l}. В § 19 обсуждается случай $n=2$, обладающий специфическими свойствами.

Замечание 8.3. При исследовании сходимости приближенных решений краевых задач, вычисляемых по схеме Галеркина, оказалось полезным неравенство

$$\left(\|u\|_{2,\Omega}^{2}\right)^{2} \leqslant c \int_{\Omega} Lu \cdot Mu\, dx, \tag{8.27}$$

обобщающее неравенство (8.23) на случай двух разных эллиптических операторов. Это неравенство справедливо для любой функции u из $W_{2,0}^{2}(\Omega)$ и любых двух эллиптических операторов, если коэффициенты этих операторов удовлетворяют условиям (4.2), (4.3), (7.3) и если коэффициенты $a(x)$ и $\tilde{a}(x)$ в них при функции u не превосходят достаточно больших по модулю отрицательных чисел. В общем случае, если последнее условие не выполнено, то вместо неравенства (8.27) имеет место неравенство

$$\left(\|u\|_{2,\Omega}^{2}\right)^{2} \leqslant c \int_{\Omega} Lu \cdot Mu\, dx + c_1 \|u\|_{2,\Omega}^{2}. \tag{8.28}$$

Неравенство же (8.27) справедливо для операторов $Lu - \lambda u$ и $Mu - \mu u$ при λ и μ, превосходящих некоторые числа λ_0 и μ_0, определяемые коэффициентами L и M и областью Ω. Доказываются эти неравенства так же, как и неравенства (8.11) и (8.23), надо только вместо интеграла $\int_{\Omega} Lu \cdot Lu\, dx$ рассмотреть интеграл $\int_{\Omega} Lu \cdot Mu\, dx$, преобразовать его главные члены с помощью двукратного интегрирования по частям так же, как и выше, и воспользоваться известным предложением о возможности одновременного приведения двух положительно определенных квадратичных форм к сумме квадратов (см. [21_9, 33]).

§ 9. О разрешимости первой краевой задачи в пространстве $W_{2,0}^{2}(\Omega)$

Второе основное неравенство для эллиптических операторов L позволяет сравнительно просто исследовать разрешимость задачи Дирихле в пространстве $W_2^2(\Omega)$. Пусть относительно области Ω и оператора L выполнены условия, при которых доказана лемма 8.1. Рассмотрим в Ω задачу Дирихле

$$Lu = \psi(x), \quad u|_S = 0 \tag{9.1}$$

при $\psi(x) \in L_2(\Omega)$. Граничное условие без ограничения общности считаем сведенным к однородному. Предположим сначала, что для $\forall v \in W^2_{2,0}(\Omega)$

$$L(v, v) \geqslant \nu_1 \| v \|^2_{2,\Omega}, \qquad \nu_1 > 0. \tag{9.2}$$

В силу $|L(v, v)| \leqslant \| Lv \|_{2,\Omega} \| v \|_{2,\Omega}$ из (9.2) следует $\| v \|_{2,\Omega} \leqslant \leqslant \nu_1^{-1} \| Lv \|_{2,\Omega}$, и потому второе основное неравенство можно записать в виде

$$\| v \|^{(2)}_{2,\Omega} \leqslant c \| Lv \|_{2,\Omega}, \tag{9.3}$$

где v — произвольная функция из $W^2_{2,0}(\Omega)$.

Неравенства (7.2), (9.3) показывают, что дифференциальный оператор L устанавливает взаимно однозначное соответствие между областью своего определения $W^2_{2,0}(\Omega)$ (такой оператор мы условились обозначать $\hat{L}$) и множеством своих значений $R(\hat{L}) \subset L_2(\Omega)$. Покажем, что при определенной регулярности границы S множество $R(\hat{L})$ совпадает со всем $L_2(\Omega)$.

Будем говорить, что область Ω обладает свойством $\mathfrak{R}$, если задача

$$\Delta u = \psi, \quad u|_S = 0 \tag{9.4}$$

разрешима в $W^2_{2,0}(\Omega)$ для какого-либо плотного в $L_2(\Omega)$ множества $\mathfrak{M}$ функций $\psi(x)$.

Замечание 9.1. Если область Ω обладает свойством $\mathfrak{R}$ и удовлетворяет условиям леммы 8.1 (так что имеет место неравенство (8.24)), то задача (9.4) однозначно разрешима в $W^2_{2,0}(\Omega)$ для $\forall \psi \in L_2(\Omega)$.

Имеет место следующее предложение:

Теорема 9.1. *Пусть для L и Ω выполнены условия леммы* 8.1 *и неравенство* (9.2). *Пусть Ω обладает свойством $\mathfrak{R}$. Тогда задача* (9.1) *однозначно разрешима в $W^2_{2,0}(\Omega)$ при любой $\psi(x)$ из $L_2(\Omega)$.*

Доказывается эта теорема методом продолжения по параметру. Именно, вводится семейство операторов $L_\tau u = \Delta u + \tau(L - \Delta)u$, $\tau \in [0, 1]$, и для них устанавливается однозначная разрешимость задач

$$L_\tau u = \psi, \quad u|_S = 0 \tag{9.5}$$

в пространстве $W^2_{2,0}(\Omega)$, начиная с $\tau = 0$ и кончая $\tau = 1$. Делается это так же, как при доказательстве леммы 1.1 гл. III, только вместо пары пространств $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \leftrightarrow C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ надо взять пару пространств $W^2_{2,0}(\Omega) \leftrightarrow L_2(\Omega)$, а вместо неравенства Шаудера (1.18) — неравенство (9.3). Для возможности продолжения до $\tau = 1$ надо убедиться, что неравенства (7.2) и (9.3) справедливы для всех L_τ, $\tau \in [0, 1]$, с постоянными c и c_1, не зависящими от τ. То, что в (7.2) постоянную c_1 можно взять не зависящей от τ, очевидно. Для доказательства же неравенства

$$\| v \|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant \hat{c} \| L_\tau v \|_{2,\Omega} \tag{9.6}$$

с $\hat{c}$, не зависящей от $\tau \in [0, 1]$, учтем, что нормы коэффициентов L_τ, от которых зависит постоянная c в неравенстве (8.11), взятом для L_τ, мажорируются постоянной, не зависящей от τ. Нижняя граница собственных значений основной квадратичной формы $(1-\tau)\xi^2 + \tau a_{ij}\xi_i\xi_j$, соответствующей L_τ, не меньше $\nu_1 = \min\{1, \nu\}$, так что обе постоянные, входящие в неравенство (8.11) для L_τ, могут быть взяты не зависящими от τ. Кроме того, в силу (4.25) имеем

$$(-\Delta v, v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geqslant c_0^{-2} \operatorname{mes}^{-2/n} \Omega \int_\Omega v^2 dx \equiv \nu_0 \| v \|_{2,\Omega}^2,$$

и потому условие (9.2) справедливо для всех операторов L_τ, $\tau \in [0, 1]$, с одной и той же постоянной, ибо

$$L_\tau(v, v) = \tau L(v, v) + (1-\tau)(-\Delta v, v) \geqslant \min\{\nu_0; \nu_1\} \| v \|_{2,\Omega}^2. \tag{9.7}$$

Из (9.7) вытекает оценка $\| v \|_{2,\Omega} \leqslant \max\{\nu_0^{-1}; \nu_1^{-1}\} \| L_\tau v \|_{2,\Omega}$, а отсюда и из (8.11) для L_τ очевидным образом следует (9.6). С помощью (9.6) и (7.2) для L_τ теорема 9.1 доказывается буквально по той же схеме, что и лемма 1.1 данной главы, и мы ее здесь повторять не будем. Более того, из этого же доказательства следует справедливость и такого предложения:

Лемма 9.1. *Если для L и Ω выполнены условия леммы* 8.1 *и неравенство* (9.2), *то операторы* L_τ, $\tau \in [0, 1]$, *замкнуты на* $W_{2,0}^2(\Omega)$ *и их области значений совпадают друг с другом.*

Замечание 9.2. Легко понять, что вместо оператора Δ в условии $\mathfrak{R}$ и в доказательстве теоремы 9.1 можно взять любой из операторов с теми же свойствами, что и оператор L.

Замечание 9.3. Пространство $W_{2,0}^2(\Omega)$ было определено нами как замыкание в норме $W_2^2(\Omega)$ множества функций $u(x)$ из $C^2(\Omega)$, равных нулю на S. Из замечания 9.1 и единственности обобщенного решения задачи (9.4) в классе $W_2^1(\Omega)$ следует, что для областей Ω, удовлетворяющих условиям леммы 8.1 и обладающих свойством $\mathfrak{R}$, $W_{2,0}^2(\Omega)$ совпадает с $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \equiv \widehat{W}_{2,0}^2(\Omega)$.

Действительно, включение $W_{2,0}^2(\Omega) \subset \widehat{W}_{2,0}^2(\Omega)$ вытекает из определений этих пространств. Пусть $u(x)$ есть произвольный элемент $\widehat{W}_{2,0}^2(\Omega)$. Задача (9.4) для $\psi = \Delta u$ имеет в силу замечания 9.1 решение $v(x)$ из $W_{2,0}^2(\Omega)$. Но $v(x)$ и $u(x)$ суть обобщенные решения из $W_2^1(\Omega)$ задачи (9.4) с одним и тем же свободным членом $\psi = \Delta u \in L_2(\Omega)$. В силу теоремы единственности для задачи (9.4) в пространстве $W_2^1(\Omega)$ функции $u(x)$ и $v(x)$ совпадают, и, следовательно, $W_{2,0}^2(\Omega) = \hat{W}_{2,0}^2(\Omega)$.

Для областей класса C^2 совпадение $\hat{W}_{2,0}^2(\Omega)$ и $W_{2,0}^2(\Omega)$ легко проверить непосредственно, если учесть, что в случае полушара K_+ для $\forall u(x)$ из $W_2^2(K_+)$, равной нулю на $\partial K_+ \cap K$, и любой срезающей для всего шара функции $\zeta(x) \in C^2(\bar{K})$ произведение $\zeta(x)\, u(x)$ можно аппроксимировать в норме $W_2^2(K_+)$ дважды непрерывно дифференцируемыми в $\bar{K}_+$ функциями, равными нулю на ∂K_+ (см. доказательство леммы 8.3).

Для шаров и параллелепипедов условия леммы 8.1 заведомо выполнены. Для них выполнено и условие $\mathfrak{R}$, ибо известно, что из отличных от тождественного нуля решений задач

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi|_S = 0 \tag{9.8}$$

можно образовать ортонормированный базис $\{\varphi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, в пространстве $L_2(\Omega)$, причем все $\varphi_k(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$ (и даже $C^\infty(\Omega)$), а соответствующие им λ_k строго отрицательны. Благодаря этому задача (9.4) имеет решения $u(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \lambda_k^{-1} \varphi_k(x)$ из $W_{2,0}^2(\Omega)$ для любой $\psi(x)$ вида $\sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(x)$, т. е. для плотного множества функций $\psi(x)$ из $L_2(\Omega)$. Ввиду этого из теоремы 9.1 вытекает

Следствие 9.1. Если Ω есть шар или параллелепипед, а L удовлетворяет условиям теоремы 9.1, то задача (9.1) однозначно разрешима в $W_{2,0}^2(\Omega)$ при любой $\psi(x) \in L_2(\Omega)$.

Покажем теперь справедливость следующего факта:

Теорема 9.2. *Если выполнены все условия теоремы* 9.1, *кроме неравенства* (9.2), *то любое обобщенное решение из* $W_2^1(\Omega)$ *задачи* (9.1) *с* $\psi \in L_2(\Omega)$ *принадлежит* $W_{2,0}^2(\Omega)$.

Действительно, любое об. р. $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ задачи (9.1) можно рассмотреть и как об. р. из $W_2^1(\Omega)$ задачи

$$Lu - \lambda u = \psi - \lambda u, \quad u|_S = 0 \tag{9.1*}$$

с $\forall\lambda$. Выберем λ так, чтобы оператор $L - \lambda E$ удовлетворял условию (9.2), а функцию $\psi - \lambda u$ рассмотрим как свободный член в уравнении $(L - \lambda E)\, v = \tilde{\psi}$. Очевидно, $\tilde{\psi} \in L_2(\Omega)$, и потому к оператору $L - \lambda E$ применима теорема 9.1. Она гарантирует существование $v(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$. В силу теоремы 5.1 для $L - \lambda E$ $u \equiv v$.

Из теоремы 9.2 и того, что шары и параллелепипеды удовлетворяют условию $\Re$ и условиям леммы 8.1, следует:

Следствие 9.2. Если Ω есть шар или параллелепипед, а коэффициенты L удовлетворяют условиям леммы 8.1, то любое обобщенное решение $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ задачи (9.1) с $\psi \in L_2(\Omega)$ принадлежит $W^2_{2,0}(\Omega)$.

Пусть для Ω и L выполнены условия теоремы 9.2. Преобразуем диффеоморфно область Ω в область $\tilde{\Omega}$ с помощью функций $y = y(x)$, $y \in W^2_q(\Omega)$, $q > n$ (для $y(x)$ производные первого порядка ограничены в $\bar{\Omega}$ и $0 < c_1 \leqslant \det\left\|\frac{\partial y(x)}{\partial x}\right\| \leqslant c_2 < \infty$). Легко проверить, что при этом оператор L переходит в дифференциальный оператор $\tilde{L}$ по переменным y, удовлетворяющий условиям теоремы 9.2 в области $\tilde{\Omega}$, и, наоборот, если $\tilde{L}$ удовлетворяет в $\tilde{\Omega}$ условиям теоремы 9.2, то обратное преобразование $x = x(y)$ приведет нас к L, так же удовлетворяющему в Ω условиям теоремы 9.2.

Между пространствами $L_2(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $W^2_{2,0}(\Omega)$ и $L_2(\tilde{\Omega})$, $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\tilde{\Omega})$, $W^2_{2,0}(\tilde{\Omega})$ преобразование $y = y(x)$ устанавливает естественный изоморфизм (он осуществляется так: $u(x) \to u(x(y)) \equiv \tilde{u}(y)$, причем нормы $\|u\|^{(l)}_{2,\Omega}$, $0 \leqslant l \leqslant 2$, эквивалентны нормам $\|\tilde{u}\|^{(l)}_{2,\tilde{\Omega}}$, $0 \leqslant l \leqslant 2$, соответственно). Задача (9.1) в новых переменных примет вид

$$\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{\psi}(y), \quad y \in \tilde{\Omega}, \qquad \tilde{u}|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0. \tag{9.$\tilde{1}$}$$

Из всего сказанного следует, что если коэффициенты $\tilde{L}$ удовлетворяют в $\tilde{\Omega}$ условиям теоремы 9.2, то любое об. р. $\tilde{u}(y)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\tilde{\Omega})$ задачи (9.$\tilde{1}$) с $\tilde{\psi} \in L_2(\tilde{\Omega})$ принадлежит $W^2_{2,0}(\tilde{\Omega})$. Для $\tilde{u}(y)$ справедливо неравенство

$$\left(\|\tilde{u}\|^{(2)}_{2,\tilde{\Omega}}\right)^2 \leqslant \tilde{c}_1 \|\tilde{L}\tilde{u}\|^2_{2,\tilde{\Omega}} + \tilde{c}\|\tilde{u}\|^2_{2,\tilde{\Omega}}, \tag{8.$\widetilde{11}$}$$

получаемое из (8.11) простым преобразованием переменных (заметим, что условие 2), налагаемое на Ω в лемме 8.1, для $\tilde{\Omega}$ может оказаться невыполненным). Из этого рассуждения вытекает справедливость следующей теоремы:

Теорема 9.3. *Пусть область Ω пространства $x \in E_n$ получена из области $\tilde{\Omega}$ пространства $y \in E_n$, удовлетворяющей условиям леммы 8.1 и условию $\Re$, с помощью диффеоморфного преобразования $x = x(y) \in W^2_q(\tilde{\Omega})$, $q > n$, и пусть коэффициенты L удовлетворяют условиям (4.2), (4.3), (7.3). Тогда любое об. р. $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ задачи (9.1) с $\psi \in L_2(\Omega)$ принадлежит $W^2_2(\Omega)$.*

Для $u(x)$ *справедливо неравенство вида* (8.11) (*т. е. в* ($\widetilde{8.11}$) $\tilde{u}$ *и* $\tilde{L}\tilde{u}$ *надо заменить на* u *и* Lu, *а* $\tilde{\Omega}$ *на* Ω). *В частности, в качестве* $\tilde{\Omega}$ *можно взять шар или параллелепипед.*

Замечание 9.4. Все утверждения данного параграфа остаются справедливыми и для задачи

$$Lu = \psi, \quad u|_S = \varphi|_S, \tag{9.9}$$

если $\varphi|_S$ есть граничное значение функции $\varphi(x) \in W_2^2(\Omega)$. Действительно, эта задача легко сводится к задаче (9.1), если вместо $u(x)$ искать функцию $v(x) = u(x) - \varphi(x)$ и заметить, что $L\varphi \in L_2(\Omega)$ (см. (7.2)).

Скажем несколько слов об условии $\mathfrak{R}$. Для совпадения $R(\hat{L})$ с $L_2(\Omega)$ для всей совокупности эллиптических операторов L с хорошими коэффициентами оно, очевидно, необходимо, а при условиях леммы 8.1 и (9.2) и достаточно (теорема 9.1).

Условие $\mathfrak{R}$ справедливо далеко не для всех областей. Его выполнение или невыполнение, например, для областей с угловыми точками, как подметила О. В. Гусева, зависит от величин углов при этих точках. Поясним это на следующем примере. В качестве Ω возьмем круговой сектор $\{0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0\}$ на плоскости (x_1, x_2). Собственные функции оператора Лапласа для него при нулевом граничном условии имеют особенности в точке $r = 0$; при $\theta_0 \leqslant \pi$ особенности таковы, что собственные функции являются элементами $W_2^2(\Omega)$, а при $\pi < \theta_0 < 2\pi$ не принадлежат $W_2^2(\Omega)$. Следовательно, решения задачи (9.4) в секторе с углом $\theta_0 \in (\pi, 2\pi)$ не будут элементами $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ при любой ψ из $L_2(\Omega)$. Неравенство же (8.24) справедливо и для такого сектора. Из всего этого следует, что оператор Δ переводит $W_{2,0}^2(\Omega)$ в собственное подпространство $L_2(\Omega)$. Этот оператор допускает дальнейшее расширение с сохранением симметрии, и такое расширение необходимо, если мы хотим решить задачу (9.4) для любой ψ из $L_2(\Omega)$. Нетрудно показать, что оно единственно и осуществляется добавлением к множеству $W_{2,0}^2(\Omega)$ элементов вида $cr^{\pi/\theta_0}f(r) \times \sin\frac{\pi\theta}{\theta_0}$, где c — произвольная постоянная, а $f(r)$ — какая-нибудь дважды непрерывно дифференцируемая функция, равная 1 вблизи $r = 0$. Если же угол $\theta_0 \leqslant \pi$, то Δ (а потому и любой другой симметрический эллиптический оператор L) самосопряжен уже на множестве $W_{2,0}^2(\Omega)$. В следующих параграфах мы покажем, что дифференциальные свойства решений эллиптических уравнений суть локальные свойства, т. е. что они зависят от соответствующих характеристик L, ψ и S лишь в окрестности рассматриваемой точки. Используя это обстоятельство вместе с изложенным сейчас примером и неравенствами параграфа 8, а также некоторые факты теории расширения симметрических операторов, М. Ш. Бирман и Г. Е. Скворцов показали [5_2], что дефектные числа оператора L равны числу углов, больших π. Это дает возможность описать все самосопряженные расширения оператора L (при $n=2$).

§ 10. О принадлежности обобщенных решений из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ к $W_2^2(\Omega_1)$

Пусть коэффициенты оператора

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,u_{x_j} + a_i(x)\,u\right) + b_i(x)\,u_{x_i} + a(x)\,u$$

удовлетворяют условиям (4.2), (4.3), и пусть u есть обобщенное решение из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ уравнения

$$Lu = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f \equiv \psi(x) \tag{10.1}$$

для $f_i \in L_2(\Omega)$, $f \in L_{2\hat{n}/(\hat{n}+2)}(\Omega)$. Никаких предположений типа неравенств (9.2) или, общее, предположений о том, что $\lambda=0$ не есть точка спектра для L при каком-нибудь краевом условии, не делаем. Так, в частности, u может быть собственной функцией для L при каком-нибудь краевом условии. Целью данного параграфа является доказательство того, что если в какой-либо подобласти Ω' области Ω коэффициенты оператора L удовлетворяют еще условиям (7.3) и функция ψ принадлежит $L_2(\Omega')$, то решение u в этой подобласти имеет обобщенные производные второго порядка, квадратично суммируемые по $\forall \bar{\Omega}'' \subset \Omega'$, и удовлетворяет уравнению (10.1) для почти всех x из Ω'. Если же Ω' примыкает к достаточно гладкому куску S_1 границы Ω и значения u на этом куске совпадают со значениями какой-либо функции $\varphi(x) \in W_2^2(\Omega)$, то $u(x)$ будет иметь квадратично суммируемые производные второго порядка и вблизи S_1. В частности, если Ω' совпадает со всей Ω, граница S обладает определенной гладкостью и на S обобщенное решение u уравнения (10.1) из класса $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ совпадает с функцией $\varphi(x) \in W_2^2(\Omega)$, то u будет принадлежать $W_2^2(\Omega)$.

Пусть сначала Ω' есть внутренняя подобласть Ω. Возьмем произвольный шар K_ρ, принадлежащий Ω' и имеющий столь малый радиус ρ, что для оператора L в K_ρ выполняется условие

(4.26), а следовательно, и неравенство

$$L_\rho(\eta, \eta) \equiv \int_{K_\rho} (a_{ij}\eta_{x_j}\eta_{x_i} + a_i\eta\eta_{x_i} - b_i\eta\eta_{x_i} - a\eta^2)\,dx \geqq$$

$$\geqq c\left(\|\eta\|^{(1)}_{2, K_\rho}\right)^2 \qquad (10.2)$$

с постоянной $c > 0$ для любой $\eta \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(K_\rho)$.

Построим последовательность бесконечно дифференцируемых функций $u_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, сходящихся к решению u в нормах $W^1_2(K_\rho)$ и $L_{2q/(q-2)}(K_\rho)$ и рассмотрим в шаре K_ρ краевые задачи

$$Lv = \psi, \quad v|_{S_\rho} = u_m|_{S_\rho}, \qquad m = 1, 2, \ldots, \qquad (10.3)$$

где S_ρ — граница шара K_ρ. В силу результатов §§ 5 и 9 каждая такая задача имеет единственное решение v_m в пространстве $W^2_2(K_\rho)$ (см. теоремы 5.1, 5.2 и следствие 9.2).

Для функций v_m справедливо неравенство (4.31), причем правая часть его ограничена равномерно для всех $m = 1, 2, \ldots$, т. е.

$$\|v_m\|^{(1)}_{2, K_\rho} \leqslant c, \qquad m = 1, 2, \ldots \qquad (10.4)$$

Кроме того, для v_m справедливо и неравенство (8.6), причем его правая часть, в силу (10.4), также равномерно ограничена для всех $m = 1, 2, \ldots$, т. е.

$$\|v_m\zeta^2\|^{(2)}_{2, K_\rho} \leqslant c(\zeta). \qquad (10.5)$$

Здесь $\zeta(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, равная нулю на границе K_ρ.

Вследствие (10.4) и (10.5) из последовательности $\{v_m\}$ можно выделить подпоследовательность $\{v_{m_k}\}$, сходящуюся слабо в нормах $W^1_2(K_\rho)$ и $W^2_2\left(K_{\rho - \frac{\rho}{\tau}}\right)$ с любым $\tau = 2, 3, \ldots$ к некоторой функции v, также удовлетворяющей неравенствам (10.4), (10.5). Покажем, что v совпадает с u. Для функций u и v_{m_k} при любой η из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(K_\rho)$ справедливы соотношения $L_\rho(u, \eta) = \int_{K_\rho} \psi\eta\,dx$, $L_\rho(v_{m_k}, \eta) = \int_{K_\rho} \psi\eta\,dx$, откуда $L_\rho(u - v_{m_k}, \eta) = 0$. Положим здесь $\eta = u_{m_k} - v_{m_k}$. Тогда

$$L_\rho(u_{m_k} - v_{m_k}, u_{m_k} - v_{m_k}) + L_\rho(u - u_{m_k}, u_{m_k} - v_{m_k}) = 0.$$

Второй член при $k \to \infty$ стремится к нулю, а потому ввиду (10.2) и $\| u_{m_k} - v_{m_k} \|_{2, K_\rho}^{(1)} \to 0$. Тем самым доказано, что $u \equiv v$ в K_ρ.

Итак, для внутренних областей Ω' утверждение, сформулированное в начале параграфа, доказано. Пусть теперь подобласть Ω_1 примыкает к границе области Ω. Без ограничения общности будем считать, что Ω_1 имеет столь малую меру, что для оператора L в Ω_1 выполнено неравенство (4.26), а следовательно, и неравенство (4.31). Кроме того, предположим, что Ω_1 удовлетворяет условиям, наложенным на область в теореме 9.3. Это предположение накладывает ограничение на тот кусок S_1 границы S, который является общим для границ Ω и Ω_1. Будем считать, что $u|_{S_1} = 0$ (в противном случае мы вычли бы из $u(x)$ функцию $\varphi(x)$, совпадающую на S_1 с u и принадлежащую по условию к $W_2^2(\Omega_1)$, и все дальнейшие рассмотрения проводили бы для функции $u(x) - \varphi(x)$). Возьмем последовательность функций u_m, $m = 1, 2, \ldots$, равных нулю на S_1, принадлежащих $W_2^2(\Omega_1)$ и сходящихся к u в норме $W_2^1(\Omega_1)$, и рассмотрим в области Ω_1 задачи

$$Lv = \psi, \quad v|_{S'} = u_m|_{S'}, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{10.6}$$

где S' есть граница Ω_1. В силу теорем 5.2 и 9.3 задача (10.6) имеет единственное решение v_m из класса $W_2^2(\Omega_1)$, а в силу неравенств (4.31) и (8.6) для него справедливы оценки

$$\| v_m \|_{2, \Omega_1}^{(1)} \leqslant c, \quad \| v_m \zeta^2 \|_{2, \Omega_1}^{(2)} \leqslant c(\zeta) \tag{10.7}$$

с постоянными, не зависящими от m. Здесь $\zeta(x)$ есть произвольная дважды непрерывно дифференцируемая в области $\bar{\Omega}$ функция, равная нулю вблизи $S' \setminus S_1$, т. е. той части границы S', которая не принадлежит S. Отсюда, так же как и выше, заключим, что предельная для v_m функция удовлетворяет неравенствам (10.7) и совпадает в Ω_1 с решением u. Так проводится исследование дифференциальных свойств u вблизи границы. Это вместе с результатами исследования u внутри Ω позволяет сделать выводы и о том, когда решение u принадлежит к $W_2^2(\Omega)$. Подытожим все сказанное в виде теоремы.

Теорема 10.1. *Пусть $u(x)$ есть обобщенное решение из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ уравнения* (10.1), *коэффициенты и свободные члены которого удовлетворяют условиям*

$$\left.\begin{aligned} &\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu > 0; \\ &\Big\| \sum_{i=1}^n a_i^2, \ \sum_{i=1}^n b_i^2, \ a \Big\|_{q/2, \Omega} \leqslant \mu, \qquad q > n; \\ &\| f_i \|_{2, \Omega}, \ \| f \|_{2n/(n+2), \Omega} \leqslant \mu. \end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

Если для какой-либо внутренней подобласти Ω' области Ω коэффициенты оператора L, помимо (10.8), *удовлетворяют еще условиям*

$$\left\| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right\|_{q,\,\Omega}, \quad \left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a \right\|_{\hat{q}/2,\,\Omega'} \leqslant \mu, \tag{10.9}$$

где $\hat{q} \equiv \max(q, 4)$, *и*

$$\|\psi\|_{2,\,\Omega'} \equiv \left\| f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right\|_{2,\,\Omega'} \leqslant \mu < \infty, \tag{10.10}$$

то решение $u(x)$ *имеет в* Ω' *обобщенные производные второго порядка, удовлетворяет уравнению* (10.1) *при почти всех* x *из* Ω' *и*

$$\| u\zeta^2 \|^{(2)}_{2,\,\Omega'} \leqslant c(\nu, \mu, q, \zeta)\left[\| u\|_{2,\,\Omega'} + \|\psi\|_{2,\,\Omega'}\right], \tag{10.11}$$

где ζ — *срезающая для* Ω' *функция.*

Если граница области $\Omega_1 \subset \Omega$ *имеет с границей* S *области* Ω *общую часть* S_1, *причем* Ω_1 *удовлетворяет условиям, налагаемым на область в теореме* 9.3, *и если граничные значения* u *на* S_1 *задаются функцией* $\varphi(x)$, *принадлежащей* $W_2^2(\Omega_1)$, *то для решения* u *в подобласти* Ω_1 *справедливы только что высказанные утверждения с тем отличием, что функция* $\zeta(x)$ *в* (10.11) *обязана равняться нулю лишь в окрестности части границы* Ω_1, *не принадлежащей* S (*к выражению в квадратных скобках в* (10.11) *надо прибавить в этом случае* $\|\varphi\|^{(2)}_{2,\,\Omega_1}$).

Если условия (10.9), (10.10) *справедливы для* $\Omega' = \Omega$, *если* $\varphi(x)$, *задающая граничные значения* u, *принадлежит* $W_2^2(\Omega)$ *и если* Ω *может быть разбита на конечное число областей* Ω_i, $i = 1, \ldots, N$, *таких, что каждая* Ω_i *есть строго внутренняя подобласть области* $\tilde{\Omega}_i$, $i = 1, \ldots, N$, *пересечение которой с* Ω *удовлетворяет условиям теоремы* 9.3, *то* $u \in W_2^2(\Omega)$ *и для* $u(x)$ *справедлива оценка*

$$\| u \|^{(2)}_{2,\,\Omega} \leqslant c(\nu, \mu, q)\left[\| u\|_{2,\,\Omega} + \|\psi\|_{2,\,\Omega} + \|\varphi\|^{(2)}_{2,\,\Omega}\right]. \tag{10.12}$$

В частности, это верно для областей Ω *класса* W_q^2, $q > n$. *Все утверждения теоремы, кроме характера зависимостей постоянных в* (10.11) *и* (10.12) *от коэффициентов, верны и тогда, когда*

$$n \geqslant 3, \quad q = n, \quad \hat{q} = \begin{cases} \max(n, 4) & \textit{при} \quad n \neq 4, \\ 4 + \varepsilon,\ \varepsilon > 0, & \textit{при} \quad n = 4. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы следует из проведенных выше рассуждений, если заметить, что области, удовлетворяющие условиям теоремы 10.1, можно разбить на области такого же типа, но достаточно малой меры. Такое дополнительное разбиение Ω_l или Ω в общем случае надо сделать, ибо выше, при доказательстве принадлежности u к $W_2^2(\Omega_l)$, мы считали меру Ω_l столь малой, что для L в Ω_l выполнялось неравенство (4.26).

Можно обойтись и без дополнительных разбиений на маленькие области, но тогда вместо уравнений $Lv=\psi$ в задачах (10.3) и (10.6) надо взять уравнения $Lv-\lambda v=\psi-\lambda v\equiv\hat{\psi}$ с достаточно большим λ (λ, гарантирующим для $Lv-\lambda v$ теорему единственности в рассматриваемой области Ω_i). Подобный прием мы применили выше при доказательстве теоремы 9.2.

§ 11. О других способах доказательства второго основного неравенства

В §§ 7, 8 мы вывели второе основное неравенство дл эллиптических операторов вида $Lu\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j}+a_iu)+b_iu_{x_i}+ au$. Для таких операторов требование дифференцируемости коэффициентов a_{ij} и a_i вызвано существом дела. Однако если оператор имеет вид

$$Mu\equiv a_{ij}u_{x_ix_j}+a_iu_{x_i}+au, \tag{11.1}$$

то естественно было бы попробовать доказать второе основное неравенство

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(2)}\leqslant c\left(\|Mu\|_{2,\Omega}+\|u\|_{2,\Omega}\right) \tag{11.2}$$

для $u\in\overset{\circ}{W}{}_{2,0}^{2}(\Omega)$ без предположений о дифференцируемости коэффициентов M. Казалось бы, что такими предположениями должны быть, кроме условия эллиптичности, конечность $\max\limits_{\Omega}|a_{ij}|$ и конечность норм

$$\|a_i\|_{q,\Omega},\quad \|a\|_{\hat{q}/2,\Omega},\quad \hat{q}=\max(q,4),\qquad q>n.$$

Но пример (2.19) гл. I показывает, что для $n>2$ требование только ограниченности a_{ij} недостаточно. Покажем, что при непрерывных $a_{ij}(x)$ неравенство (11.2) уже имеет место, причем постоянная c в (11.2) зависит от модуля непрерывности a_{ij} *). Мы не будем приводить полное доказательство этого предложения. Его основная идея та же, что и идея Шаудера

*) В замечании 8.2 показано, что обсуждаемое неравенство справедливо и для L, коэффициенты которых удовлетворяют условиям (4.2), (4.3), (7.3) с $q=n$ (при $n>2$). Непрерывность коэффициентов L из этих условий не вытекает.

доказательства неравенства (1.11), дающего оценку $|u|_{\Omega}^{(2+\alpha)}$ *). Она состоит в сведении всего вопроса к соответствующим оценкам по малым областям для эллиптических операторов, в которых старшие коэффициенты a_{ij} заменены их значениями в какой-либо точке взятой малой области, и к последующей «склейке» этих оценок за счет непрерывности $a_{ij}(x)$. В соответствии с этой идеей общая схема доказательства неравенства (11.2) следующая. Пусть $u \in \overset{2}{W}_{2,0}(\Omega)$. Обозначим значение оператора M от u через $\psi(x)$. Покроем область Ω шарами $K_\rho(x^k)$, $k=1,\ldots,N$, малого радиуса ρ, и пусть $\Omega_k \equiv K_{2\rho}(x^k)\cap\Omega$.

В силу непрерывности коэффициентов $a_{ij}(x)$ их значения в каждой точке области Ω_k мало отличаются от их значений в точке x^k. Равенство $Mu=\psi$ запишем в виде

$$M_0u \equiv a_{ij}(x_0^k)\,u_{x_ix_j} = \psi - [a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0^k)]\,u_{x_ix_j} - a_iu_{x_i} - au \equiv F$$

и будем помнить, что коэффициент при $u_{x_ix_j}$ справа достаточно мал. Для операторов M_0 в Ω_k имеют место оценки типа (8.6) и тем более оценки

$$\|\zeta^2u\|_{2,\Omega_k}^{(2)} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\nu}\|M_0u\|_{2,\Omega_k} + c_1\|u\|_{2,\Omega_k}^{(1)} \qquad (11.3)$$

с постоянной c_1, зависящей лишь от известных нам норм коэффициентов и $\max\limits_{\Omega}|\zeta_x, \zeta_{xx}|$ (считаем, что $|\zeta|\leqslant 1$).

Правая часть в (11.3) не превосходит величины

$$\left(\varepsilon\frac{\sqrt{2}n}{\nu}\max_{i,j,x\in\Omega_k}\left|a_{ij}(x)-a_{ij}(x^k)\right|\right)\cdot\|\,|u_{xx}|\,\|_{2,\Omega_k} + c_\varepsilon\|u\|_{2,\Omega_k}^{(1)} + c_2\|\psi\|_{2,\Omega_k}$$

с $\forall\varepsilon>0$.

---

*) В заметке [49_2] эта идея описана Шаудером применительно к выводу неравенства (11.2) для случая плоских областей ($n=2$) и непрерывных коэффициентов a_{ij}. При этом Шаудер знал, что такие неравенства были доказаны ранее С. Н. Бернштейном (см. [4_2], а также [4_3]) для уравнений $\sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\,u_{x_ix_j} = f(x)$ в круге при произвольных измеримых коэффициентах $a_{ij}(x)$, удовлетворяющих условию $\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2$, и для общих уравнений $Mu=f$ с дифференцируемыми коэффициентами $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ и с $a(x)\leqslant 0$ в выпуклых областях. Сам Шаудер видел свою заслугу в устранении предположения Бернштейна о выпуклости области Упоминание о всех этих результатах отсутствует в отечественной литературе до середины 50-х годов. В § 19 мы покажем, как доказать неравенство (11.2) при $n=2$ для произвольной невыпуклой области, предполагая о a_{ij} лишь их ограниченность, а о a_i и a их принадлежность к $L_q(\Omega)$, $q>2$, и $L_2(\Omega)$ соответственно.

Суммируя (11.3) по всем областям Ω_k, $k=1, \ldots, N$, и помня, что для пограничных Ω_k функцию ζ можно брать отличной от нуля на части границы Ω_k, принадлежащей S (u на S считаем равной нулю), придем к неравенству

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} \leqslant c_3(\varepsilon + \max_{i,j,k} \max_{x\in\Omega_k} |a_{ij}(x) - a_{ij}(x^k)|) \cdot \||u_{xx}|\|_{2,\Omega} + \\ + c_\varepsilon (\|u\|^{(1)}_{2,\Omega} + \|\psi\|_{2,\Omega}). \quad (11.4)$$

Выбирая области Ω_k и ε столь малыми, чтобы выполнялось соотношение

$$c_3(\varepsilon + \max_{i,j,k} \max_{x\in\Omega_k} |a_{ij}(x) - a_{ij}(x^k)|) \leqslant \frac{1}{2}, \quad (11.5)$$

из (11.4) получим

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} \leqslant c(\|\psi\|_{2,\Omega} + \|u\|^{(1)}_{2,\Omega}). \quad (11.6)$$

Используя еще известное неравенство

$$\|u\|^{(1)}_{2,\Omega} \leqslant \varepsilon \left\|u^2_{xx}\right\|^{1/2}_{1,\Omega} + c_\varepsilon \|u\|_{2,\Omega} \quad (11.7)$$

с произвольным $\varepsilon > 0$, из (11.6) получим (11.2).

Этих объяснений достаточно, чтобы читатель сам мог провести все доказательство неравенства (11.2).

Сформулируем описанный результат в виде леммы:

Лемма 11.1. *Пусть область Ω удовлетворяет тем же условиям, что и в лемме 8.1 или в лемме 8.3. Если коэффициенты a_{ij} оператора M, определяемого выражением (11.1), непрерывны в $\bar{\Omega}$, а для a_i и a конечны нормы $\|a_i\|_{q,\Omega}$, $\|a\|_{\hat{q}/2,\Omega}$, $\hat{q} = \max\{q, 4\}$, $q > n$, то для любой функции u из $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$ справедливо неравенство (11.2) с постоянной c, зависящей от области Ω, величин ν и μ из неравенства $\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2$, модуля непрерывности a_{ij} и норм $\|a_i\|_{q,\Omega}$, $\|a\|_{\hat{q}/2,\Omega}$.*

Для случая $n=2$, как будет показано в § 19, условие непрерывности $a_{ij}(x)$ можно отбросить; для n, бо́льших двух, нельзя.

Придерживаясь изложенной здесь схемы вывода неравенства (11.2), можно доказать, что для эллиптических операторов M справедлив более общий факт:

$$\|u\|^{(2)}_{p,\Omega} \leqslant c_{p,r}(\|Mu\|_{p,\Omega} + \|u\|_{r,\Omega}), \qquad r \geqslant 1, \quad (11.8)$$

где p — любое число, большее 1, а $u(x)$ — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}^2_{p,0}(\Omega)$. Относительно коэффициентов M при этом надо предполагать, что $a_{ij}(x)$ непрерывны и подчиняются неравенствам (4.2), $a_i(x)$ суммируемы по Ω со степенью $\max(p; n)$ при

$p \neq n$ и $n+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, при $n = p$, а коэффициент $a(x)$ суммируем со степенью $\max(p; n/2)$ при $p \neq n/2$ и $n/2+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, при $p = n/2$.

Постоянная $c_{p,r}$ определяется n, r, p, ν, μ, модулем непрерывности $a_{ij}(x)$, нормами a_i и a в указанных только что пространствах $L_s(\Omega)$ и их модулями непрерывности в нормах этих пространств. Она зависит также от области Ω, которая предполагается принадлежащей W_q^2, $q = \max(p; n+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Доказательства неравенства (11.8) для случая ограниченных коэффициентов a_i, a даны в работах [23, 20].

§ 12. О принадлежности обобщенных решений из W_2^2 к $C^{l+\alpha}$, $l \geqslant 2$

Пусть функция $u(x)$ принадлежит $\mathfrak{M}$ и для почти всех x из Ω удовлетворяет уравнению

$$Lu \equiv a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + a_i(x)\, u_{x_i} + a(x)\, u = f(x), \tag{12.1}$$

коэффициенты и свободный член которого суть элементы $C^{l-2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $l \geqslant 2$, и $\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2$, $\nu > 0$. Здесь $\mathfrak{M}$ есть совокупность элементов $W_2^2(\Omega)$, имеющих конечный $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}$. Докажем, что $u(x)$ фактически принадлежит $C^{l+\alpha}(\Omega)$. Это достаточно сделать для произвольного шара K_ρ малого радиуса ρ. Величину радиуса ρ выберем по коэффициентам L следующим образом. Во-первых, ρ возьмем столь малым, чтобы для операторов

$$L^0 u \equiv a_{ij}(x^0)\, u_{x_i x_j} + a_i(x)\, u_{x_i} + a(x)\, u, \quad \text{где} \quad x^0 \in K_\rho,$$

и любой функции $v(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_{2,0}^2(K_\rho)$ выполнялось неравенство

$$\| v \|_{2, K_\rho}^{(2)} \leqslant c \| L^0 v \|_{2, K_\rho}. \tag{12.2}$$

Во-вторых, надо, чтобы для L^0 в K_ρ была верна оценка (1.9) и, тем самым, теорема единственности в классе $C^{l+\alpha}(\bar{K}_\rho)$. Наконец, ρ должно быть таким, чтобы

$$cn \max_{i,\, j;\; x \in K_\rho} | a_{ij}(x^0) - a_{ij}(x) | \leqslant \frac{1}{2}, \tag{12.3}$$

где c — постоянная из неравенства (12.2). Очевидно, всем этим требованиям мы удовлетворим, взяв достаточно малое ρ.

Возьмем последовательность бесконечно дифференцируемых и равномерно ограниченных в шаре K_ρ функций $\{u_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, сходящуюся в норме $W_2^2(K_\rho)$ к функции $u(x)$. Для каждой из u_m рассмотрим в K_ρ задачу

$$Lv_m = f, \qquad v_m|_{S_\rho} = u_m|_{S_\rho}, \tag{12.4}$$

где S_ρ — граница K_ρ. По доказанному выше задача (12.4) имеет единственное решение v_m из $C^{l+\alpha}(K_\rho)$ и для него верна оценка (1.9), дающая равномерную ограниченность $\max\limits_{K_\rho} |v_m(x)|$. Разность $w_m = u_m - v_m$ удовлетворяет уравнению $Lw_m = Lu_m - f$, которое запишем в виде

$$L^0 w_m = (L^0 - L) w_m + Lu_m - f, \tag{12.5}$$

и нулевому граничному условию $w_m|_{S_\rho} = 0$. Для нее неравенство (12.2) дает

$$\| w_m \|^{(2)}_{2, K_\rho} \leqslant c \left(\| (L^0 - L) w_m \|_{2, K_\rho} + \| Lu_m - f \|_{2, K_\rho} \right). \tag{12.6}$$

Но $(L^0 - L) w_m = [a_{ij}(x^0) - a_{ij}(x)] w_{m x_i x_j}$, и поэтому

$$\| (L^0 - L) w_m \|_{2, K_\rho} \leqslant n \max_{i, j;\, x \in K_\rho} | a_{ij}(x^0) - a_{ij}(x) | \cdot \| w \|^{(2)}_{2, K_\rho}.$$

В силу предположения (12.3) отсюда и из (12.6) будем иметь

$$\| w_m \|^{(2)}_{2, K_\rho} \leqslant 2c \| Lu_m - f \|_{2, K_\rho}. \tag{12.7}$$

Правая часть в этом неравенстве, как легко видеть, при $m \to \infty$ стремится к нулю, так что v_m сходится в $W^2_2(K_\rho)$ к u. Но для v_m, $m = 1, 2, \ldots$, справедливы равномерные по m оценки (см. (1.13) и (1.9))

$$| v_m \zeta |^{(l+\alpha)}_{K_\rho} \leqslant c(l, \alpha, \zeta) \left(| f |^{(l-2+\alpha)}_{K_\rho} + \max_{K_\rho} | v_m | \right), \tag{12.8}$$

где $\zeta(x)$ есть какая-нибудь финитная в K_ρ функция из $C^{l+\alpha}(K_\rho)$; постоянная $c(l, \alpha, \zeta)$ зависит от нее, l и α, но не зависит от m. Из (12.8) следует, что предельная для v_m функция u будет принадлежать $C^{l+\alpha}(K_\rho \setminus S_\rho)$ и подчиняться неравенствам (12.8). Желаемое утверждение доказано.

Аналогично, используя вместо (12.8) оценки (1.11) и (1.12), устанавливаем принадлежность $u(x)$ к $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ или к $C^{l+\alpha}(\Omega \cup S_1)$, если дополнительно известно, что граничные значения u на S (соответственно на части S_1 границы S) принадлежат $C^{l+\alpha}$, и если сама S (соответственно часть ее S_1) есть поверхность класса $C^{l+\alpha}$. Необходимые для этого небольшие дополнения в рассуждениях описаны в конце § 10.

Сформулируем доказанные утверждения в виде теоремы:

Теорема 12.1. *Пусть* $u(x) \in \mathfrak{M}$ *и почти всюду в* Ω *удовлетворяет эллиптическому уравнению* (12.1), *коэффициенты и* *свободный член которого суть функции* $C^{l-2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $l \geqslant 2$. *Тогда* $u(x)$ *есть функция из* $C^{l+\alpha}(\Omega)$. *Если к тому же граница* S (*или ее часть* S_1) *есть поверхность класса* $C^{l+\alpha}$ *и граничные значения и на* S (*соответственно на* S_1) *задаются функцией класса* $C^{l+\alpha}$, *то* $u(x)$ *принадлежит к* $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$ (*соответственно к* $C^{l+\alpha}(\Omega \cup S_1)$).

§ 13. Об ограниченности обобщенных решений из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ и оценке для них некоторых интегральных норм

Пусть $u(x)$ есть обобщенное решение из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ уравнения

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}u_{x_j} + a_i u\right) + b_i u_{x_i} + au = f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \tag{13.1}$$

и пусть коэффициенты L удовлетворяют условиям *)

$$\left.\begin{aligned} &\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu > 0, \\ &\left\| \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + |a| \right\|_{q/2,\,\Omega} \leqslant \mu_1, \qquad q > n. \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

В §§ 4,5 были установлены теоремы о разрешимости в $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ задачи Дирихле для (13.1) при условиях, что $f \in L_{2n/(n+2)}(\Omega)$, $f_i \in L_2(\Omega)$ и граничные значения u определяются функцией $\varphi(x) \in \overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$. В этом и следующем параграфе мы покажем, что при несколько лучших свойствах f и f_i любое такое решение принадлежит классу Гёльдера $C^{\alpha}(\Omega)$. В § 2 гл. I на построенных там примерах было выяснено, что необходимыми для этого условиями являются следующие:

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i^2, f \right\|_{q,\,\Omega} \leqslant \mu_1, \qquad q > n. \tag{13.3}$$

Мы докажем, что они же и достаточны для принадлежности u к $C^{\alpha}(\Omega)$. Более того, мы получим оценки величин $\max|u|$ и $|u|^{(\alpha)}$ через постоянные ν, μ и μ_1 из условий (13.2), (13.3) и $\|u\|_{2,\Omega}$. Оценки этих норм для всей Ω будут зависеть, разумеется, еще и от соответствующих характеристик поведения функции u на S.

Итак, пусть выполнены условия (13.2), (13.3) и u есть обобщенное решение уравнения (13.1) из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$, т. е. u принадле-

---

*) О случае $q = n \geqslant 3$ см. замечание 13.1.

жит $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ и удовлетворяет тождеству

$$\int_\Omega \left[\left(a_{ij}u_{x_j}+a_iu-f_i\right)\eta_{x_i}-\left(b_iu_{x_i}+au-f\right)\eta\right]dx=0 \tag{13.4}$$

при любой функции $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Возьмем здесь в качестве η функцию $\eta(x)=\zeta^2(x)\max\{u(x)-k;0\}$, где k — любое положительное число, а $\zeta(x)$ — любая срезающая для произвольного шара $K_\rho\subset\Omega$ функция. (Определение срезающей функции дано на стр. 27, в частности, $0\leqslant\zeta(x)\leqslant 1$.) Такая $\eta(x)$ является допустимой функцией, так как в силу леммы 3.3 гл. II $\eta(x)$ будет принадлежать классу $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Функция η отлична от нуля только на множестве $A_{k,\rho}$ точек x из K_ρ, где $u(x)>k$. Подставив эту функцию в (13.4), после простых вычислений получим

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,\rho}}\Big\{a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\zeta^2+a_{ij}u_{x_j}(u-k)\cdot 2\zeta\zeta_{x_i}+&\\ +(a_iu-f_i)\left[u_{x_i}\zeta^2+2\zeta\zeta_{x_i}(u-k)\right]-&\\ -\left(b_iu_{x_i}+au-f\right)(u-k)\zeta^2\Big\}\,dx=0.&\end{aligned} \tag{13.5}$$

Первый член в силу (13.2) не меньше $\nu|\nabla u|^2\zeta^2$. Его мы оставим слева и оценим снизу. Остальные члены (13.5) перенесем направо и оценим сверху, используя неравенства (1.1) и (1.2) гл. II и отдавая малое ε множителям, содержащим u_{x_i}. Это приведет нас к неравенству

$$\begin{aligned}\nu\int_{A_{k,\rho}}|\nabla u|^2\zeta^2\,dx\leqslant\int_{A_{k,\rho}}\Big[\varepsilon|\nabla u|^2\zeta^2+\frac{1}{\varepsilon}\mu^2|\nabla\zeta|^2(u-k)^2+&\\ +\frac{1}{4\varepsilon_1}\sum_{i=1}^n(a_iu-f_i)^2\zeta^2+\varepsilon_1|\nabla\zeta|^2(u-k)^2+\varepsilon|\nabla u|^2\zeta^2+&\\ +\frac{1}{4\varepsilon}\sum_{i=1}^n(a_iu-f_i)^2\zeta^2+\varepsilon|\nabla u|^2\zeta^2+&\\ +\frac{1}{4\varepsilon}\sum_{i=1}^n b_i^2(u-k)^2\zeta^2+|au-f|(u-k)\zeta^2\Big]\,dx.&\end{aligned} \tag{13.6}$$

Возьмем здесь $\varepsilon=\nu/6$, а $\varepsilon_1=\mu$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{2}\int_{A_{k,\rho}}|\nabla u|^2\zeta^2\,dx\leqslant\int_{A_{k,\rho}}\Big\{\left(\mu+\frac{6}{\nu}\mu^2\right)(u-k)^2|\nabla\zeta|^2+&\\ +\sum_{i=1}^n(a_i^2u^2+f_i^2)\zeta^2\left(\frac{1}{\mu}+\frac{3}{2\nu}\right)+\frac{3}{2\nu}\sum_{i=1}^n b_i^2(u-k)^2\zeta^2+&\\ +|a|\cdot|u|(u-k)\zeta^2+|f|(u-k)\zeta^2\Big\}\,dx.&\end{aligned} \tag{13.7}$$

Отсюда следует неравенство

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^2 \zeta^2\,dx \leqslant c_0 \int\limits_{A_{k,\rho}} (u-k)^2 |\nabla\zeta|^2\,dx + \\ + c \int\limits_{A_{k,\rho}} D\,[u^2 + (u-k)^2 + 1]\,\zeta^2\,dx, \qquad (13.8)$$

где $c_0 = \frac{2\mu}{\nu} + 12\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2$,

$$D = \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + b_i^2 + f_i^2) + |a| + |f|, \qquad (13.9)$$

а c — постоянная, зависящая лишь от ν и μ из (13.2). В силу предположений (13.2), (13.3) величина $\|D\|_{q/2,\,\Omega}$ конечна и определяется лишь μ_1 и q.

Последний интеграл в (13.8) оценим с помощью неравенства Гёльдера так:

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} D\,[u^2 + (u-k)^2 + 1]\,\zeta^2\,dx \leqslant \\ \leqslant \Bigg(\int\limits_{A_{k,\rho}} D^{q/2}\,dx\Bigg)^{2/q} \Bigg(\int\limits_{A_{k,\rho}} \{[2k^2 + 3(u-k)^2 + 1]\,\zeta^2\}^{q/(q-2)}\,dx\Bigg)^{(q-2)/q} \leqslant \\ \leqslant c_1 \Bigg\{\int\limits_{A_{k,\rho}} [(u-k)\,\zeta]^{2q/(q-2)}\,dx\Bigg\}^{(q-2)/q} + c_1 (k^2+1)\,\mathrm{mes}^{1-2/q} A_{k,\rho}, \qquad (13.10)$$

где c_1 определяется только ν, μ, μ_1 и q из (13.2) и (13.3).

Первое из слагаемых, стоящих справа в (13.10), в силу неравенства (2.13) гл. II допускает оценку

$$\Bigg\{\int\limits_{A_{k,\rho}} [(u-k)\,\zeta]^{2q/(q-2)}\,dx\Bigg\}^{(q-2)/q} \leqslant \\ \leqslant c_2(q)\,\rho^{n\varepsilon_1} \int\limits_{A_{k,\rho}} [|\nabla u|^2 \zeta^2 + (u-k)^2 |\nabla\zeta|^2]\,dx, \qquad (13.11)$$

где $\varepsilon_1 = \frac{2}{n} - \frac{2}{q} > 0$, а постоянная $c_2(q)$ зависит лишь от n и q. Если радиус ρ считать таким, что

$$c_2(q)\,c_1 c \rho^{n\varepsilon_1} \leqslant 1/2, \qquad (13.12)$$

то из (13.8) в силу (13.10) и (13.11) следует

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^2 \zeta^2\,dx \leqslant \gamma \int\limits_{A_{k,\rho}} (u-k)^2 |\nabla\zeta|^2\,dx + \gamma'(k^2+1)\,\mathrm{mes}^{1-\frac{2}{q}} A_{k,\rho}. \qquad (13.13)$$

Постоянная $\gamma = \frac{4\mu}{\nu} + 24\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 + 1$, а γ' определяется лишь величинами ν, μ, μ_1 и q. Неравенство (13.13) доказано для k и ρ, удовлетворяющих условию (13.12). Будем брать ζ равной единице внутри концентрического с K_ρ шара $K_{\rho-\sigma\rho}$, где σ — любое число из (0, 1), и удовлетворяющей условию $|\nabla\zeta| \leqslant \frac{c}{\sigma\rho}$. Тогда из (13.13) следуют неравенства (5.14) гл. II, так что из теоремы 5.3 гл. II заключаем, что для любой $\Omega' \subset \Omega$ $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'} u$ конечен и оценивается сверху только через γ, γ', q, $\|u\|_{2,\Omega}$ и расстояние Ω' до S.

Аналогичные рассмотрения для функции $-u(x)$ приводят к оценке снизу $\operatorname{vrai}\min\limits_{\Omega'} u$. Таким образом, оценивается $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'} |u|$.

Если мы хотим иметь ограниченность обобщенных решений $u(x)$ вблизи какой-либо части границы, надо потребовать конечности $\operatorname{vrai}\max u$ и $\operatorname{vrai}\min u$ на этом куске границы (определение vrai max и vrai min на S_1 см. § 1 гл. I). Пусть, например, $\operatorname{vrai}\max\limits_{S_1} u \leqslant M_0$. Тогда неравенства (13.13) верны для любых шаров K_ρ, не пересекающих $S \setminus S_1$, и любых уровней $k > M_0$. Это (в соответствии с теоремой 5.3 гл. II) дает возможность мажорировать $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega_1} u$ в областях Ω_1, отстоящих от $S \setminus S_1$ на положительное расстояние. Аналогично оценивается снизу $\operatorname{vrai}\min\limits_{\Omega_1} u$, если $\operatorname{vrai}\min\limits_{S_1} u > -\infty$. В частности, если $\operatorname{vrai}\max\limits_{S} |u| \leqslant M_0 < \infty$, то будет конечен и $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} |u|$. Это последнее следует не только из теоремы 5.3 гл. II, но и из более простой теоремы 5.1 гл. II. Именно, положим в (13.4) $\eta(x) = \max\{u(x) - k;\, 0\}$, $k > M_0$. Такая $\eta(x)$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. После ряда оценок, аналогичных проведенным выше (они упрощаются, ибо в них пропадают все члены, содержащие производные функции ζ, которая в данном случае всюду равна 1), получим неравенства

$$\int\limits_{A_k} |\nabla u|^2\, dx \leqslant \gamma \left[\int\limits_{A_k} (u-k)^2\, dx + (k^2+1) \operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q}} A_k \right]$$

с постоянной γ, зависящей лишь от q, ν, μ и μ_1. Здесь k — произвольное число, большее M_0, а A_k — множество точек x из Ω, в которых $u(x) > k$. Аналогичные неравенства устанавливаются и для функции $-u(x)$. Из них в силу теоремы 5.1

гл. II следует ограниченность $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u(x)|$ и возможность оценки этой величины через ν, μ, μ_1, q, M_0, $\operatorname{mes}\Omega$ и $\|u\|_{1,\Omega}$.

Теорема 13.1. *Пусть $u(x)$ есть обобщенное решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ уравнения (13.1), и пусть выполнены условия (13.2), (13.3). Тогда для любой $\Omega' \subset \Omega$ величина $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'}|u(x)|$ конечна и оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от ν, μ, μ_1, q, $\|u\|_{2,\Omega}$ и расстояния Ω' до границы S области Ω. Если к тому же $\operatorname{vrai}\max\limits_{S_1}|u(x)| \leqslant M_0$ для какой-нибудь части S_1 границы S, то $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega_1}|u(x)|$, где Ω_1 — подобласть Ω, отстоящая от $S \setminus S_1$ на положительное расстояние, конечен и оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от ν, μ, μ_1, M_0, q, $\|u\|_{2,\Omega}$ и расстояния Ω_1 до $S \setminus S_1$. Если $\operatorname{vrai}\max\limits_{S}|u(x)| \leqslant M_0$, то $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u(x)|$ конечен и оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от ν, μ, μ_1, q, M_0, а также от $\|u\|_{2,\Omega}$ или $\operatorname{mes}\Omega$ и $\|u\|_{1,\Omega}$.*

Замечание 13.1. Если при $n \geqslant 3$ уравнение (13.2) для b_i заменить предположением

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right\|_{n/2,\,\Omega} \leqslant \mu_2 < \infty, \tag{13.14}$$

то неравенства (13.13) будут иметь место для достаточно малых ρ, точнее, для ρ, удовлетворяющих, помимо (13.12), условию

$$\frac{\nu}{2} - \frac{3c_2(n)}{\nu} \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right\|_{n/2,\,K_\rho} > 0. \tag{13.15}$$

Это так, ибо для члена $I = \frac{3}{2\nu} \int\limits_{A_{k,\rho}} \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 (u-k)^2 \zeta^2\,dx$, в силу неравенства Гёльдера и неравенства (13.11) с $q = n$, справедлива оценка

$$I \leqslant \frac{3}{2\nu} \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right\|_{n/2,\,K_\rho} c_2(n) \left[\| |\nabla u| \zeta \|_{2,\,A_{k,\rho}}^2 + \| (u-k) |\nabla\zeta| \|_{2,\,A_{k,\rho}}^2 \right].$$

Однако в данном случае величина γ_1 и выбор ρ зависят и от $\Delta(\rho, x) = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 \right\|_{n/2,\,K_\rho}$, где x — центр шара K_ρ. Итак, если предположение (13.2) о $b_i(x)$ заменить при $n \geqslant 3$ предположением (13.14), то утверждения теоремы 13.1 остаются в силе, только величины $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega_1} |u(x)|$ будут зависеть еще и от $\omega(\rho) \equiv \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} \Delta(\rho, x)$. Как показывают примеры § 2 гл. I, эта зависимость действительно имеет место.

Покажем, что для обобщенных решений из $\overset{*}{W}{}_1^2(\Omega)$ эллиптических уравнений и неравенств справедлив принцип максимума. Сформулируем его в следующем виде:

Теорема 13.2. *Пусть функция $u(x)$ принадлежит $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству*

$$\int\limits_{\Omega} \left(a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} - b_i u_{x_i} \eta\right) dx \leqslant 0 \tag{13.16}$$

при любой неотрицательной $\eta(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, причем коэффициенты $a_{ij}(x)$ подчиняются условию (4.2), а $b_i(x) \in L_{\hat{n}}(\Omega)$, где $\hat{n} = n$ при $n > 2$ и $\hat{n} = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, при $n = 2$. Тогда

$$\operatorname{vrai}\max_{\Omega} u(x) \leqslant \operatorname{vrai}\max_{S} u(x). \tag{13.17}$$

Предположим противное: $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} u \equiv M > M_0 \equiv \operatorname{vrai}\max\limits_{S} u$. Рассмотрим неравенство (13.16) с $\eta = u^{(k)}(x)$, $M_0 < k < M$, замечая, что при этом подынтегральное выражение обращается в нуль при $x \in A_k \setminus \overset{\circ}{A}_M$, где $\overset{\circ}{A}_M = \{x \in \Omega:\ u(x) = M\}$. При такой η из (13.16) следует неравенство

$$\begin{gathered}\nu \int\limits_{A_k \setminus \overset{\circ}{A}_M} |\nabla u|^2 dx \leqslant \int\limits_{A_k \setminus \overset{\circ}{A}_M} b_i u_{x_i} (u - k)\, dx \leqslant \\ \leqslant \Big\| \sum_i b_i^2 \Big\|^{1/2}_{\hat{n}/2,\ A_k \setminus \overset{\circ}{A}_M} \|\nabla u\|_{2,\ A_k \setminus \overset{\circ}{A}_M} \|u - k\|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2),\ A_k \setminus \overset{\circ}{A}_M}.\end{gathered} \tag{13.18}$$

Последний множитель в правой части оценим сверху по неравенству (2.13) гл. II:

$$\begin{gathered}\|u - k\|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2),\ A_k \setminus \overset{\circ}{A}_M} \leqslant \|u - k\|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2),\ A_k} \leqslant c \|\nabla u\|_{2,\ A_k} = \\ = c \|\nabla u\|_{2,\ A_k \setminus \overset{\circ}{A}_M}.\end{gathered} \tag{13.19}$$

Из (13.18) и (13.19) следует, что для $k \in (M_0, M)$

$$\nu \leqslant c \Big\| \sum_i b_i^2 \Big\|^{1/2}_{\hat{n}/2,\ A_k \setminus \overset{\circ}{A}_M}.$$

Но это неравенство невозможно при k, близких к M, ибо $\operatorname{mes}(A_k \setminus \overset{\circ}{A}_M)$ стремится к нулю при $k \to M$, и потому

$\left\|\sum_i b_i^2\right\|_{\hat{n}/2,\ A_k \setminus \overset{\circ}{A}_M} \to 0$ при $k \to M$. Следовательно, предположение о том, что $M > M_0$, неверно, т. е. справедлива оценка (13.17).

Из теоремы 13.2 вытекает

Следствие 13.1. Пусть $u(x)$ есть обобщенное решение из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ уравнения (13.1), коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $a(x)$ которого удовлетворяют условиям теоремы 13.1, $b_i(x) \in L_{\hat{n}}(\Omega)$, $a(x) \leqslant 0$, а $a_i \equiv f_i \equiv f \equiv 0$. Тогда для почти всех $x \in \Omega$

$$\min\{0;\ \operatorname{vrai}\min_S u\} \leqslant u(x) \leqslant \max\{0;\ \operatorname{vrai}\max_S u\}. \tag{13.20}$$

Если $a \equiv 0$, то нуль из (13.20) можно отбросить.

Чтобы убедиться в справедливости этого предложения, достаточно применить теорему 13.2 к функциям $\pm u(x)$ в случае $a \equiv 0$ и к функциям $(\pm u)^{(0)}(x)$ в случае $a \leqslant 0$.

Если в условиях теоремы 13.1 несколько ослабить предположения о свободных членах $f_i(x)$ и $f(x)$, то вместо ограниченности решения u из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ можно доказать или его суммируемость с некоторой степенью p, большей $2\hat{n}/(\hat{n}-2)$, или даже экспоненциальную суммируемость в зависимости от $L_{q_k}(\Omega)$, к которым принадлежат f_i и f. Доказательство этих предложений содержится в двух нижеследующих теоремах.

Теорема 13.3. *Пусть* $u(x)$ *есть обобщенное решение из* $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ *уравнения* (13.1), *коэффициенты которого подчиняются условиям* (13.2), *а свободные члены — условиям*

$$\left.\begin{aligned} &\left\|\sum_{i=1}^n f_i^2\right\|_{q_1/2,\ \Omega} \leqslant \mu_1, \quad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p}, \\ &\|f\|_{q_2/2,\ \Omega} \leqslant \mu_1, \quad \frac{1}{q_2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2p}, \end{aligned}\right\} \tag{13.21}$$

где p — какое-либо число, большее $2n/(n-2)$ *). *Тогда* $u(x)$ *принадлежит* $L_p(\Omega')$ *для любой* $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ *и норма* $\|u\|_{p,\,\Omega}$ *оценивается через постоянные* ν, μ, μ_1, q и p *из условий* (13.2), (13.21), *расстояние* d *от* Ω' *до* S *и норму* $\|u\|_{2,\,\Omega}$. *Если на некотором участке* S_1 *поверхности* S $u(x)$ *совпадает со значениями функции* $\varphi(x)$, *удовлетворяющей условиям* $\varphi \in \overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\operatorname{vrai}\max_{S_1}|u| \leqslant M_0$ *или условию* $\varphi \in W_{q_1}^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)$, *то* $u \in L_p(\Omega_1)$ *для* $\forall \Omega_1 \subset \Omega$,

---

*) Предполагается, что $n > 2$. При $n = 2$ принадлежность $u(x)$ к $L_p(\Omega)$ с любым p и даже экспоненциальная суммируемость u следует из того, что $u \in W_2^1(\Omega)$ (см. следствие 5.1 гл. II).

отстоящей от $S \setminus S_1$ на какое-либо положительное расстояние d. Норма $\|u\|_{p,\Omega_1}$ мажорируется постоянной, определяемой ν, μ, μ_1, q, p, d, $\|u\|_{2,\Omega}$, а также величиной M_0 или нормами $\|\nabla\varphi\|_{q_1,\Omega}$, $\|\varphi\|_{p,\Omega}$ соответственно.

Для доказательства первой части теоремы рассмотрим тождество (13.4) с

$$\eta = u(x)\psi_M^{2s-2}\zeta^2, \quad \psi_M = \min\{|u(x)|;\ M\}, \tag{13.22}$$

где M — произвольное положительное число, s — целое число $\geqslant 1$, а $\zeta(x)$ — срезающая для $K_\rho = \Omega_\rho$ функция. Это дает

$$\int_{\Omega_\rho} \Big\{\Big(a_{ij}u_{x_j} + a_i u - f_i\Big)\Big[\Big(u\psi_M^{2s-2}\Big)_{x_i}\zeta^2 + 2u\psi_M^{2s-2}\zeta\zeta_{x_i}\Big] - \\ - \Big(b_i u_{x_i} + au - f\Big)u\psi_M^{2s-2}\zeta^2\Big\}\,dx = 0. \tag{13.23}$$

Первый член оценим снизу, используя то, что в точках, где $\psi_M(x) = |u(x)|$,

$$a_{ij}u_{x_j}\Big(u\psi_M^{2s-2}\Big)_{x_i} = (2s-1)|u|^{2s-2}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} \geqslant \\ \geqslant (2s-1)\nu|u|^{2s-2}|\nabla u|^2 = \frac{\nu(2s-1)}{s^2}\Big|\nabla\Big(u\psi_M^{s-1}\Big)\Big|^2,$$

а где $\psi_M(x) \neq |u(x)|$, там $a_{ij}u_{x_j}\Big(u\psi_M^{2s-2}\Big)_{x_i} = a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\psi_M^{2s-2} \geqslant \geqslant \nu\Big|\nabla\Big(\psi_M^{s-1}u\Big)\Big|^2$, и потому всюду $a_{ij}u_{x_j}\Big(u\psi_M^{2s-2}\Big)_{x_i} \geqslant \frac{\nu}{s}\Big|\nabla\Big(u\psi_M^{s-1}\Big)\Big|^2$.

Остальные члены в (13.23) оценим сверху, рассматривая аналогично только что проведенным рассуждениям все выражения в точках x, где $\psi_M(x) = |u(x)|$, и в точках, где $\psi_M(x) = M$, и затем выбирая мажоранту, общую для всех точек x. Это, как нетрудно подсчитать, приведет к следующим неравенствам:

$$\Big|a_i u\Big(u\psi_M^{2s-2}\Big)_{x_i}\zeta^2\Big| \leqslant 2\Big|a_i\Big(u\psi_M^{s-1}\Big)_{x_i}u\psi_M^{s-1}\zeta^2\Big|,$$

$$\Big|f_i\Big(u\psi_M^{2s-2}\Big)_{x_i}\zeta^2\Big| \leqslant 2\Big|f_i\Big(u\psi_M^{s-1}\Big)_{x_i}\Big|\Big|u\psi_M^{s-1}\Big|^{(s-1)/s}\zeta^2,$$

$$\Big|2\Big(a_{ij}u_{x_j} + a_i u - f_i\Big)u\psi_M^{2s-2}\zeta\zeta_{x_i}\Big| \leqslant 2\Big|a_{ij}\Big(u\psi_M^{s-1}\Big)_{x_j}u\psi_M^{s-1}\zeta\zeta_{x_i}\Big| + \\ + 2\Big|a_i\Big(u\psi_M^{s-1}\Big)^2\zeta\zeta_{x_i}\Big| + 2|f_i|\Big|u\psi_M^{s-1}\Big|^{(2s-1)/s}|\zeta\zeta_{x_i}|,$$

$$\Big|\Big(b_i u_{x_i} - f\Big)u\psi_M^{2s-2}\zeta^2\Big| \leqslant \Big|b_i\Big(u\psi_M^{s-1}\Big)_{x_i}u\psi_M^{s-1}\zeta^2\Big| + |f|\Big|u\psi_M^{s-1}\Big|^{(2s-1)/s}\zeta^2,$$

$$au^2\psi_M^{2s-2}\zeta^2 = a\Big(u\psi_M^{s-1}\Big)^2\zeta^2.$$

В их правых частях стоит всюду функция $u\psi_M^{s-1}$, которую мы обозначим через v. Подставляя полученные неравенства в (13.23) и оценивая интегралы в правой части по неравенству Коши с произвольным $\varepsilon > 0$, получим

$$\frac{\nu}{s}\int_{\Omega_\rho} |\nabla v|^2 \zeta^2\,dx \leqslant 2\int_{\Omega_\rho} \Big\{(|a_i|+|b_i|)|v_{x_i}v|\zeta^2 + \\ + |f_i v_{x_i}|^{(s-1)/s}\zeta^2 + \Big[|a_{ij}v_{x_j}\zeta_{x_i}| + (|a_i v| + |f_i|\,|v|^{(s-1)/s})|\zeta_{x_i}|\Big]|v\zeta| + \\ + \frac{1}{2}|f|\,|v|^{(2s-1)/s}\zeta^2 + \frac{1}{2}|a|v^2\zeta^2\Big\}dx \leqslant \\ \leqslant \int_{\Omega_\rho}\Big[3\varepsilon|\nabla v|^2\zeta^2 + \Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\sum_i(|a_i|+|b_i|)^2 v^2\zeta^2 + \Big(\frac{\mu^2}{\varepsilon}+2\Big)v^2|\nabla\zeta|^2 + \\ + \Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\sum_i f_i^2|v|^{2-\frac{2}{s}}\zeta^2 + |f|\,|v|^{2-\frac{1}{s}}\zeta^2 + |a|v^2\zeta^2\Big]dx.$$

Возьмем $\varepsilon = \nu/(4s)$, тогда после приведения подобных членов будем иметь неравенство

$$\int_{\Omega_\rho}|\nabla v|^2\zeta^2\,dx \leqslant c(s)\int_{\Omega_\rho}\Big(Dv^2\zeta^2 + v^2|\nabla\zeta|^2 + \\ + \sum_i f_i^2|v|^{2-\frac{2}{s}}\zeta^2 + |f|\,|v|^{2-\frac{1}{s}}\zeta^2\Big)dx, \tag{13.24}$$

$$D = \sum_{i=1}^n(|a_i|+|b_i|)^2 + |a|, \quad c(s) = 8s\nu^{-1}[1+(\mu^2+1)\,2s\nu^{-1}].$$

Члены, стоящие в правой части (13.24), оценим сверху, используя неравенства (1.3), (1.7), (2.15) гл. II и предположения теоремы о коэффициентах и свободных членах уравнения (13.1), следующим образом:

$$\int_{\Omega_\rho} Dv^2\zeta^2\,dx \leqslant \|D\|_{q/2,\,\Omega}\|v\zeta\|^2_{2q/(q-2),\,\Omega_\rho} \leqslant \frac{1}{2c(s)}\||\nabla v|\zeta\|^2_{2,\,\Omega_\rho} + \\ + c_1(s)\|v(|\nabla\zeta|+\zeta)\|^2_{2,\,\Omega_\rho},$$

$$\int_{\Omega_\rho}\sum_i f_i^2|v|^{2-\frac{2}{s}}\zeta^2\,dx \leqslant \Big\|\sum_i f_i^2\Big\|_{q_1/2,\,\Omega}\Big\|(v\zeta)^{2-\frac{2}{s}}\Big\|_{q_1/(q_1-2),\,\Omega_\rho} \leqslant \\ \leqslant \mu_1\|v\zeta\|^{2-\frac{2}{s}}_{r_1,\,\Omega_\rho} \leqslant \varepsilon_1\|v\zeta\|^2_{r_1,\,\Omega_\rho} + c_{\varepsilon_1},$$

$$\int_{\rho}|f|\,|v|^{2-\frac{1}{s}}\zeta^2\,dx \leqslant \|f\|_{q_2/2,\,\Omega}\Big\||v\zeta|^{2-\frac{1}{s}}\Big\|_{q_2/(q_2-2),\,\Omega_\rho} \leqslant \\ \leqslant \mu_1\|v\zeta\|^{2-\frac{1}{s}}_{r_2,\,\Omega} \leqslant \varepsilon_1\|v\zeta\|^2_{r_2,\,\Omega_\rho} + c_{\varepsilon_1},$$

где $r_1 = \frac{2q_1}{q_1-2}\left(1-\frac{1}{s}\right)$, $r_2 = \frac{2q_2}{q_2-2}\left(1-\frac{1}{2s}\right)$, а постоянная c_{ε_1} зависит лишь от ε_1, μ, μ_1, q и s. При $s \leqslant \frac{n-2}{2n} p$ показатели r_1 и r_2 не превосходят $2n/(n-2)$, и потому в силу неравенства (1.11) гл. II

$$\| v\zeta \|_{r_i, \Omega_\rho} \leqslant (\operatorname{mes} K_\rho)^{\frac{1}{r_i} - \frac{n-2}{2n}} \| v\zeta \|_{2n/(n-2), \Omega_\rho}.$$

Из этих оценок и неравенства (13.24) следует

$$\| |\nabla v| \zeta \|^2_{2, \Omega_\rho} \leqslant 2c(s) \Big\{ \| v |\nabla\zeta| \|^2_{2, \Omega_\rho} + 2c_{\varepsilon_1} + c_1(s) \| v(|\nabla\zeta| + \zeta) \|^2_{2, \Omega_\rho} +$$
$$+ \varepsilon_1 \left[(\operatorname{mes} K_\rho)^{\frac{1}{r_1} - \frac{n-2}{n}} + (\operatorname{mes} K_\rho)^{\frac{1}{r_2} - \frac{n-2}{n}} \right] \| v\zeta \|^2_{2n/(n-2), \Omega_\rho} \Big\}. \quad (13.25)$$

Воспользуемся еще неравенством (2.12) гл. II:

$$\| v\zeta \|^2_{2n/(n-2), \Omega_\rho} \leqslant c' \| \nabla (v\zeta) \|^2_{2, \Omega_\rho} \leqslant 2c' \left(\| |\nabla v| \zeta \|^2_{2, \Omega_\rho} + \| v |\nabla\zeta| \|^2_{2, \Omega_\rho} \right)$$

и выберем ε_1 в (13.25) из условия

$$4\varepsilon_1 c(s) c' \left[\sum_{i=1}^{2} (\operatorname{mes} K_\rho)^{\frac{1}{r_i} - \frac{n-2}{n}} \right] \leqslant \frac{1}{2}.$$

В результате получим оценку

$$\| v\zeta \|_{2n/(n-2), \Omega_\rho} \leqslant c\left(\| v(|\nabla\zeta| + \zeta) \|_{2, \Omega_\rho} + 1 \right) \quad (13.26)$$

для функции $v = u\psi_M^{s-1}$ при $1 \leqslant s \leqslant \frac{n-2}{2n} p$ с постоянной c, определяемой величинами μ, μ_1, ν, q и p из условий (13.2), (13.21) и мерой K_ρ.

Рассмотрим последовательность концентрических с K_ρ шаров K_{ρ_k}, $\rho_k = \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2^{k+1}}$, $k = 0, \ldots, N+1$, $N = \left[\lg_{n/(n-2)} \frac{p}{2} \right]$, и пусть $\zeta_k(x)$ — срезающая для K_{ρ_k} функция, равная единице в $K_{\rho_{k+1}}$, причем $\max\limits_{k=1, \ldots, N} \max\limits_{K_\rho} |\nabla\zeta_k| \leqslant c_0 - 1$. В неравенстве (13.26) будем брать s равным $\left(\frac{n}{n-2}\right)^k$, $\zeta = \zeta_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, так что $\left(\frac{n}{n-2}\right)^{N-1} \leqslant \frac{n-2}{n} \frac{p}{2}$. Это, как нетрудно видеть, дает возможность оценить последовательно нормы $\| u \|_{\left(\frac{2n}{n-2}\right)^k, \Omega_{\rho_k}}$ через $\| u \|_{2, \Omega}$. В самом деле, при $k = 0$ из (13.26) получаем

$$\| u \|_{2n/(n-2), \Omega_{\rho_1}} \leqslant c\left(c_0 \| u \|_{2, \Omega_\rho} + 1 \right) \leqslant c_1,$$

при $k=1$

$$\left\| u\psi_M^{n/(n-2)-1} \right\|_{2n/(n-2),\ \Omega_{\rho_2}} \leqslant c\left(c_0 \left\| u^{n/(n-2)} \right\|_{2,\ \Omega_{\rho_1}} + 1\right) =$$
$$= c\left(c_0 \| u \|^{n/(n-2)}_{2n/(n-2),\ \Omega_{\rho_1}} + 1\right) \leqslant c_2,$$

откуда, устремляя M к ∞, будем иметь

$$\| u \|_{2\left(\frac{n}{n-2}\right)^2,\ \Omega_{\rho_2}} = \| u^{n/(n-2)} \|^{(n-2)/n}_{\frac{2n}{(n-2)},\ \Omega_{\rho_2}} \leqslant c_2,$$

и так далее вплоть до $k=N-1$, когда будет оценена норма

$$\| u \|_{\hat{p},\ \Omega_{\rho_N}} \leqslant c_N. \tag{13.27}$$

Показатель $\hat{p}$ здесь равен $2\left(\frac{n}{n-2}\right)^N = 2\left(\frac{n}{n-2}\right)^{\left[\lg_{n/(n-2)}\frac{p}{2}\right]} \equiv$ $\equiv p\left(\frac{n}{n-2}\right)^{-\varkappa}$, где $\varkappa \in [0, 1)$, так что $\hat{p} \in \left(\frac{p(n-2)}{n}, p\right]$. В случае, если $\hat{p}=p$, то желаемая оценка $\| u \|_{p,\ \Omega_{\rho/2}}$ уже получена; если же $\hat{p}<p$, то воспользуемся еще раз неравенством (13.26), беря в нем $s=p(n-2)/(2n)$, $\zeta=\zeta_N$. Это даст

$$\left\| u\psi_M^{\frac{p(n-2)}{2n}-1} \right\|_{2n/(n-2),\ \Omega_{\rho/2}} \leqslant c\left(c_0 \left\| u^{\frac{p(n-2)}{2n}} \right\|_{2,\ \Omega_{\rho_N}} + 1\right) =$$
$$= c\left(c_0 \| u \|^{\frac{p(n-2)}{2n}}_{\frac{p(n-2)}{n},\ \Omega_{\rho_N}} + 1\right). \tag{13.28}$$

Показатель суммируемости $p(n-2)/n$ меньше $\hat{p}$, так что правая часть (13.28) оценивается через постоянную c_N из (13.27), и потому, переходя в (13.28) к пределу по $M \to \infty$, будем иметь оценку $\| u \|_{p,\ \Omega_{\rho/2}} \leqslant c_{N+1}$. Ввиду произвольности шара $K_\rho \subset \Omega$ это дает оценку $\| u \|_{p,\ \Omega'}$ для $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$.

Аналогично оценивается $\| u \|_{p,\ \Omega_1}$ в областях $\Omega_1 \subset \Omega$, прилегающих к $S_1 \subset S$, надо только все рассуждения проводить для функций $\max\{\pm u(x) - (M_0+1), 0\}$, если $\operatorname{vrai}\max\limits_{S_1} |\varphi| \leqslant M_0$, или свести предварительно граничное условие к нулевому, если $\varphi \in W^1_{q_1}(\Omega) \cap L_p(\Omega)$.

Замечание 13.2. Из доказательства теоремы 13.3 фактически следует более сильное утверждение о принадлежности

$|u|^{\frac{n-2}{2n}p}$ к $W_2^1(\Omega')$. В этом легко убедиться, если заметить, что в случае предельного показателя $s=\frac{n-2}{2n}p$ в правой части неравенства (13.25) стоит величина, оцененная нами независимо от M, а предел при $M\to\infty$ левой части равен $\left\|\,\left|\nabla\left(u^{\frac{n-2}{2n}p}\right)\right|\zeta\right\|_{2,\Omega_\rho}$.

Теорема 13.4. *Пусть коэффициенты уравнения* (13.1) *удовлетворяют условиям* (13.2), *а свободные члены — условиям* (13.21) *с* $p=\infty$. *Тогда для любого его обобщенного решения* $u(x)$ *из* $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{\Omega'} e^{\beta|u(x)|}\,dx\leqslant B, \tag{13.29}$$

где постоянные β *и* B *определяются величинами* ν, μ, μ_1 *и* q *из условий* (13.2), (13.21), *нормой* $\|u\|_{2,\Omega}$, *а также расстоянием* $\overline{\Omega'}\subset\Omega$ *до* S.

Если на части S_1 *границы* Ω $\operatorname{vrai}\max\limits_{S_1}|u|\leqslant M_0$, *то для* $u(x)$ *конечны интегралы* (13.29) *по* $\forall\Omega_1\subset\Omega$, *отстоящей от* $S\setminus S_1$ *на какое-либо положительное расстояние* d, *причем* β *и* B *определяются* d, ν, μ, μ_1, q, $\|u\|_{2,\Omega}$ *и* M_0.

Если $\operatorname{vrai}\max\limits_{S}|u|\leqslant M_0$, *то в качестве* Ω' *можно взять всю область* Ω, *причем* β *и* B *в этом случае зависят лишь от* ν, μ, μ_1, q, M_0, $\operatorname{mes}\Omega$ *и* $\|u\|_{1,\Omega}$ *).

Рассмотрим неравенство (13.7) с произвольным положительным k. Из него следует неравенство

$$\int\limits_{A_{k,\rho}}|\nabla u|^2\zeta^2\,dx\leqslant c_1\int\limits_{A_{k,\rho}}(u-k)^2|\nabla\zeta|^2\,dx+$$
$$+c_1\int\limits_{A_{k,\rho}}\left\{D'[u^2+(u-k)^2]\zeta^2+\sum_i f_i^2\zeta^2+|f|(u-k)\zeta^2\right\}dx, \tag{13.30}$$

где $D'=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2)+|a|$. Второй интеграл в правой части (13.30) оценим с помощью неравенств Гёльдера и Коши, используя

*) При доказательстве этой теоремы, так же как и теоремы 13.3, достаточно рассмотреть случай $n>2$.

условия теоремы:

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} D'[u^2+(u-k)^2]\zeta^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \|D'\|_{q/2,\,A_{k,\rho}}\Big[\|\zeta(u-k)\|^2_{2n/(n-2),\,A_{k,\rho}} \operatorname{mes}^{\frac{2}{n}-\frac{2}{q}} A_{k,\rho}+$$
$$+c_2k^2\operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q}} A_{k,\rho}\Big],$$

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} \sum_i f_i^2\zeta^2\,dx \leqslant \Big\|\sum_i f_i^2\Big\|_{n/2,\,A_{k,\rho}} \operatorname{mes}^{1-\frac{2}{n}} A_{k,\rho},$$

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} f(u-k)\zeta^2\,dx \leqslant \int\limits_{A_{k,\rho}} |f|\left[\frac{\varepsilon}{2}(u-k)^2+\frac{1}{2\varepsilon}\right]\zeta^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{n/2,\,A_{k,\rho}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\|\zeta(u-k)\|^2_{2n/(n-2),\,A_{k,\rho}}+\frac{1}{2\varepsilon}\operatorname{mes}^{1-\frac{2}{n}} A_{k,\rho}\right).$$

Учитывая $\|\zeta(u-k)\|_{2n/(n-2),\,A_{k,\rho}} \leqslant c'\left(\|\nabla((u-k)\zeta)\|_{2,\,A_{k,\rho}}\right)$, из этих оценок и неравенства (13.30) выводим

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^2\zeta^2\,dx \leqslant c_3\left(\operatorname{mes}^{\frac{2}{n}-\frac{2}{q}} A_{k,\rho}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\int\limits_{A_{k,\rho}} [|\nabla u|^2\zeta^2+(u-k)^2|\nabla\zeta|^2]\,dx+$$
$$+c_1\int\limits_{A_{k,\rho}} (u-k)^2|\nabla\zeta|^2\,dx+c_3k^2\operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q}} A_{k,\rho}+$$
$$+c_1\mu_1\left(\mu+\frac{1}{2\varepsilon}\right)\operatorname{mes}^{1-\frac{2}{n}} A_{k,\rho}, \tag{13.31}$$

где $c_3=c_1\mu_1(c_2+2c'^2)$. Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{2c_3}$, а k выберем столь большим, чтобы $\operatorname{mes}^{\frac{2}{n}-\frac{2}{q}} A_{k,\rho} \leqslant \frac{1}{4c_3}$. Для этого ввиду очевидной оценки $k\operatorname{mes}^{1/p}A_{k,\rho} \leqslant \|u\|_{p,\Omega}$ достаточно подчинить k ограничению

$$k \geqslant \hat{k}=2\sqrt{c_3}\,\|u\|_{p,\Omega}, \quad \frac{1}{p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{q}. \tag{13.32}$$

Кроме того, заметим, что в силу предыдущей теоремы норма $\|u\|_{p,K_\rho}$, $\bar{K}_\rho\subset\Omega$, при любом конечном p оценивается через известные величины, а

$$k^2\operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q}} A_{k,\rho} \leqslant \operatorname{mes}^{1-\frac{2}{n}} A_{k,\rho}\|u\|^2_{p,K_\rho} \leqslant c_4\operatorname{mes}^{1-\frac{2}{n}} A_{k,\rho},$$
$$\frac{1}{p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{q}.$$

Окончательно, приходим к неравенствам

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^2 \zeta^2\, dx \leqslant \gamma \left[\int\limits_{A_{k,\rho}} (u-k)^2 |\nabla \zeta|^2\, dx + \operatorname{mes}^{1-\frac{2}{n}} A_{k,\rho} \right] \tag{13.33}$$

при $k \geqslant \hat{k}$. Аналогичные неравенства выполняются для функции $-u(x)$.

Из (13.33) и леммы 5.5 гл. II следует справедливость первого утверждения теоремы 13.4. Второе утверждение доказывается так же, надо только шары K_ρ брать с центрами на S_1, а уровни k считать бóльшими $\max\{\hat{k}; M_0\}$. Наконец, для проверки последнего утверждения можно воспользоваться леммой 5.2 гл. II, для чего надо рассмотреть $u(x)$ не на $A_{k,\rho}$, а на A_k и воспользоваться неравенством (2.12) гл. II с $p=1$, $m=2$. Это позволяет вместо неравенства (13.33) получить неравенство $\int\limits_{A_k} (u-k)\, dx \leqslant c \operatorname{mes} A_k$, входящее в условие леммы 5.2.

Замечание 13.3. Если в условиях теоремы 13.3 считать, что неравенства (13.2) выполнены с $q=n$, то заключение этой теоремы остается в силе, только зависимость постоянных, оценивающих указанные в этой теореме нормы u, от коэффициентов L сложнее: эти постоянные зависят не только от нормы $\left\| \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + |a| \right\|_{n/2,\,\Omega}$, но и от функции

$$\omega(\rho) = \max_{x \in \bar{\Omega}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + |a| \right\|_{n/2,\, K_\rho(x) \cap \Omega}.$$

Справедливость этого утверждения легко усматривается из данного выше доказательства теорем 13.3 и 13.4. Действительно, достаточно все рассмотрения проводить по шарам столь малого радиуса, чтобы обеспечить нужную малость величины $\omega(\rho)$.

§ 14. О принадлежности обобщенных решений из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ к C^α

Покажем, что при выполнении условий (13.2), (13.3) любое обобщенное решение $u(x)$ из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ уравнения (13.1) принадлежит классу C^α с некоторым $\alpha > 0$. Для этого заметим, что из доказательства теоремы 13.1, точнее, неравенства (13.13), следует

Лемма 14.1. *Пусть выполнены условия* (13.2), (13.3) *и пусть* $u(x)$ *есть ограниченное обобщенное решение из* $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ *уравнения* (13.1). *Тогда* $u(x)$ *принадлежит классу* $\mathfrak{B}_2(\bar{\Omega}, M, \gamma, \gamma_1, 2, 1/q)$, *где* $M = \operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} |u(x)|$, *а* γ_1 — *постоянная, определяемая* *величинами* ν, μ, μ_1 *и* q *и величиной* M, *а* γ *зависит лишь от* $\nu^{-1}\mu$ *из* (13.2).

Из этой леммы, теоремы 13.1 и теорем 6.1 и 7.1 гл. II о функциях классов $\mathfrak{B}$ легко выводится

Теорема 14.1. *Пусть* $u(x)$ *есть обобщенное решение из* $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ *уравнения* (13.1), *коэффициенты которого и свободные члены* f_i *и* f *подчиняются условиям* (13.2) *и* (13.3). *Тогда* $u(x)$ *принадлежит классу* $C^{\alpha}(\Omega')$, *где* Ω' — *произвольная внутренняя подобласть области* Ω. *Показатель* α *определяется лишь* $\nu^{-1}\mu$ *и* q *из условий* (13.2), (13.3). *Норма* $|u|_{\Omega'}^{(\alpha)}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от величин* ν, μ, μ_1 *и* q *из условий* (13.2), (13.3), $\|u\|_{2,\Omega}$ *и расстояния* Ω' *до границы* S *области* Ω.

Если часть S_1 *границы* S *удовлетворяет условию* (A) *и* $u|_{S_1} \in C^{\beta}(S_1)$, *то для любой подобласти* Ω_1 *области* Ω, *отстоящей от* $S \setminus S_1$ *на положительное расстояние* d, $u(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}_1)$ *с* α, *зависящим лишь от* $\nu^{-1}\mu$, q, β *и постоянной* θ_0 *из условия* (A); $|u|_{\Omega_1}^{(\alpha)}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* ν, μ, μ_1, q, $\|u\|_{2,\Omega}$, $|u|_{S_1}^{(\beta)}$, β, d *и постоянных* θ_0 *и* a_0 *из условия* (A). *В частности, если вся граница* S *удовлетворяет условию* (A) *и* $u|_S \in C^{\beta}(S)$, *то* $u(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *и норма* $|u|_{\Omega}^{(\alpha)}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* ν, μ, μ_1, q, $\|u\|_{1,\Omega}$, $|u|_S^{(\beta)}$, β *и постоянных* θ_0 *и* a_0 *из условия* (A), *а также от* $\|u\|_{2,\Omega}$ *или* $\operatorname{mes}\Omega$ *и* $\|u\|_{1,\Omega}$.

Замечание 14.1. Здесь, так же как и в теореме 13.1, условие (13.2) о $b_i(x)$ можно заменить условием (13.14), но величины норм $|u|_{\Omega_1}^{(\alpha)}$ при этом будут зависеть и от $\omega(\rho)$.

Замечание 14.2. Утверждения, доказанные в §§ 13 и 14, являются следствиями того, что исследуемые функции $u(x)$ подчиняются неравенствам вида (13.13). В этих параграфах мы убедились, что функции $u(x)$, удовлетворяющие тождеству (13.4), подчиняются таким неравенствам. Однако если для функции $u(x) \in \overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ вместо (13.4) верно, например, неравенство

$$\int_{\Omega} \left[(a_{ij}u_{x_j} + a_i u - f_i)\eta_{x_i} - (b_i u_{x_i} + au - f)\eta\right] dx \geqslant 0 \qquad (14.1)$$

для всех неположительных $\eta(x)$ из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$, то она также удовлетворяет неравенствам (13.13), и потому ее максимум допускает оценку сверху через величины, указанные в § 13. В гл. V будет указан другой класс «субрешений» — функций, удовлетворяющих не уравнениям или заменяющим их тождествам, а некоторой системе неравенств, и для них будет доказана их гёльдеровость. Его небольшим обобщением является следующий класс «субрешений».

Пусть $u(x) \in \overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u(x)| \leqslant M$ и $u(x)$ удовлетворяет неравенствам (14.1) при всех $\eta(x)$, подчиняющихся условиям $-M \leqslant u(x) + t\eta(x) \leqslant M$, $t \in [0, 1]$. Оказывается, все такие $u(x)$ принадлежат C^{α}, $\alpha > 0$, и их нормы $|u|^{(\alpha)}$ допускают такую же оценку, как и нормы обобщенных решений уравнений (13.1). Доказательство этого аналогично доказательству теоремы 4.2 гл. V.

В связи с изложенным в параграфах 13 и 14, помимо исследований авторов, см. работы [39_3, 52_2] и более поздние работы [52].

§ 15. Об ограниченности $\max|\nabla u|$ и $|u_{x_i}|^{(\alpha)}$ для обобщенных решений из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$

Выясним, при каких предположениях относительно коэффициентов и свободных членов уравнения (13.1) любое его обобщенное решение из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ принадлежит $C^{1+\alpha}(\Omega)$. Из результатов, сформулированных в конце § 11, следует существование априорной оценки для $\|u\|_{q,\Omega}^{(2)}$, $q > n$, через $\|u\|_{2,\Omega}$, постоянные ν, μ и μ_1 из (13.2), постоянную μ_1 из

$$\left\| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k},\ \frac{\partial a_i}{\partial x_i},\ f,\ f_i,\ \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right\|_{q,\Omega} \leqslant \mu_1, \qquad q > n, \tag{15.1}$$

постоянные, характеризующие область Ω, и норму $\|\varphi\|_{q,\Omega}^{(2)}$ функции $\varphi(x)$, определяющей граничные значения $u(x)$. Оценка для $\|u\|_{q,\Omega}^{(2)}$, $q > n$, в свою очередь дает оценку для $|u|_{\Omega}^{(1+\alpha)}$, $\alpha = 1 - \frac{n}{q}$ (см. неравенство (2.30) гл. II). Из этих априорных оценок и доказанных выше теорем о разрешимости первой краевой задачи в пространствах $C^{(2+\alpha)}$ и $\overset{*}{W}{}_2^1$ нетрудно сделать заключение о справедливости следующего предложения:

Теорема 15.1. *Если коэффициенты уравнения* (13.1) *удовлетворяют условиям* (13.2) *и* (15.1), *Ω есть область класса W_q^2 и $\varphi(x) \in W_q^2(\Omega)$, то любое обобщенное решение $u(x)$ уравнения* (13.1) *из $\overset{*}{W}{}_2^1(\Omega)$ принадлежит $W_q^2(\Omega)$, а следовательно, и $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha = 1 - \frac{n}{q}$, и величины $\|u\|_{q,\Omega}^{(2)}$, $|u|_{\Omega}^{(1+\alpha)}$ оцениваются сверху постоянной, зависящей лишь от n, q, ν, μ, μ_1, $\|u\|_{2,\Omega}$, $\|\varphi\|_{q,\Omega}^{(2)}$ и от области Ω.*

Доказывается эта теорема по той же схеме, что и теорема 10.1.

Априорную оценку для $|u|^{(1+\alpha)}$ можно получить иным способом, близким к тому, который был применен в §§ 13, 14 для вывода оценок $\max|u|$ и $|u|^{(\alpha)}$. Покажем это. Продифференцируем уравнение (13.1) по x_k, $k=1, \ldots, n$, и результат запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}u_{kx_j}+\sum_{m=0}^{n}A_{im}^{k}u_m\right]=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\delta_i^k\left(f+\frac{\partial f_j}{\partial x_j}\right)\right], \qquad (15.2)$$
$$k=1, \ldots, n,$$

где $u_0=u$, $u_k=u_{x_k}$, $A_{im}^k=\frac{\partial a_{im}}{\partial x_k}+\delta_i^k(a_m+b_m)$, $\quad m=1, \ldots, n$, $A_{i0}^k=\delta_i^k\left(a+\frac{\partial a_j}{\partial x_j}\right)$, а δ_i^k — символ Кронекера. Совокупность соотношений (15.2) и (13.1) рассмотрим как систему уравнений для u_k, $k=0, 1, \ldots, n$. Ее характерной особенностью является то, что главная часть, состоящая из членов вида $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, диагональна и одинакова во всех уравнениях системы. Такие системы удалось исследовать столь же детально, как и одно уравнение второго порядка. Им посвящена гл. VII. Там будет выведена, в частности, оценка максимума $|\boldsymbol{u}|=\left(\sum_{k=0}^{n}u_k^2\right)^{1/2}$, которая применительно к данному случаю дает желаемую оценку для $\max_{\Omega'}|\nabla u|$, $\Omega'\subset\Omega$. Оценка $|\nabla u|$ вблизи границы не следует непосредственно из оценки гл. VII для $\max|\boldsymbol{u}|$, так как величина $\max_{\Omega}|\boldsymbol{u}|$ в гл. VII оценена через величину $\max_{S}|\boldsymbol{u}|$, которую мы не знаем для вектора $\boldsymbol{u}=(u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ (собственно, заранее неизвестна лишь величина $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\Big|_S$). Для ее получения необходимо проводить дополнительные рассмотрения в пограничных шарах. Из-за недостатка места мы вынуждены опустить их.

Оценки величин $\langle u_{x_i}\rangle_{\Omega'}^{(\alpha)}$, $\Omega'\subset\Omega$, также следуют из результатов гл. VII. Однако их можно вывести из теоремы § 14 данной главы. В самом деле, если величины $M=\max_{\Omega}|u|$, $M_1=$ $=\max_{\Omega}|\nabla u|$ уже известны, то соотношение (15.2) можно рассмотреть как уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{kx_j})=\frac{\partial F_k^i(x)}{\partial x_i} \qquad (15.3)$$

для u_k, для которого выполнены все условия § 14. Следовательно, для $u_k = u_{x_k}$, $k = 1, \ldots, n$, будут верны и заключения § 14 — лемма 14.1 и теорема 14.1. Они дают оценку для $\langle u_{x_i}\rangle^{(\alpha)}_{\Omega'}$, $\Omega' \subset \Omega$. Для оценки $\langle u_{x_i}\rangle^{(\alpha)}$ вблизи какого-либо куска S_1 границы S распрямим его, вводя новые координаты. Без ограничения общности будем считать, что S_1 лежит в плоскости $\{x_n = 0\}$ и Ω примыкает к ней сверху, со стороны $x_n > 0$. Для производных u_{x_τ}, $\tau = 1, \ldots, n-1$, граничные значения на S_1 известны, и потому к u_{x_τ} можно применить вторую часть теоремы 14.1 об оценке $\langle u_{x_\tau}\rangle^{(\alpha)}_{\Omega_\rho}$, $\tau = 1, \ldots, n-1$, вблизи S_1 (здесь Ω_ρ — половина шара K_ρ с центром на S_1 принадлежащая $\bar{\Omega}$). Для оценки же $\langle u_{x_n}\rangle^{(\alpha)}_{\Omega_\rho}$ заметим, что из принадлежности u_{x_τ}, $\tau = 1, \ldots, n-1$, к $\mathfrak{B}_2(\bar{\Omega}_\rho, \ldots)$ следует

$$\int_{\Omega_\rho} \sum_{i=1}^{n} u^2_{x_\tau x_i}\, dx \leqslant c\rho^{n-2+2\varepsilon}, \quad \alpha \geqslant \varepsilon > 0, \quad \tau = 1, \ldots, n-1,$$

а отсюда и из уравнения (13.1) — и $\int_{\Omega_\rho} u^2_{x_n x_n}\, dx \leqslant c_1\rho^{n-2+2\alpha}$. Из этих неравенств, как доказано в лемме 4.1 гл. II, следует принадлежность u_{x_n} к $C^{(\alpha)}(\Omega_\rho)$ и возможность желаемой оценки для $\langle u_{x_n}\rangle^{(\alpha)}_{\Omega_\rho}$. Таков второй путь вывода оценок для $\max |u_x|$ и $\langle u_{x_i}\rangle^{(\alpha)}$ для решений уравнений (13.1).

§ 16. О методах Галеркина, Ритца и методе наименьших квадратов

Для доказательства разрешимости краевых задач в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, а также для фактического определения их решений может быть использован метод Галеркина. Опишем его применительно к задаче

$$Lu = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f, \quad u|_S = 0. \tag{16.1}$$

Предположим выполненными условия теоремы 5.2, в частности неравенство (5.1). Возьмем в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ фундаментальную систему линейно независимых функций $\{\varphi_k(x)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, так что линейные комбинации их $\sum_{k=1}^{N} d_k\varphi_k(x)$ образуют плотное в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ множество. Приближенные решения u^N, $N = 1, 2, \ldots$, задачи (16.1) ищем в виде сумм $u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x)$, коэффициенты в которых определяются следующими равенствами:

$$L(u^N, \varphi_k) = (f_i, \varphi_{kx_i}) - (f, \varphi_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, N. \quad (16.2)$$

Иными словами, u^N определяется тем, что для него тождество (4.10), лежащее в основе определения обобщенного решения задачи (16.1), должно выполняться при любой функции η из конечномерного подпространства P_N пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, элементами которого являются суммы вида $\sum_{k=1}^{N} d_k\varphi_k(x)$. Само u^N также принадлежит P_N. Равенства (16.2) представляют собой систему N линейных алгебраических уравнений относительно N неизвестных $c_1^N, c_2^N, \ldots, c_N^N$. Ее разрешимость следует из наших предположений. Действительно, умножая каждое из уравнений (16.2) на свое c_k^N и складывая по всем k от 1 до N, получим

$$L(u^N, u^N) = \left(f_i, u_{x_i}^N\right) - (f, u^N). \quad (16.3)$$

Отсюда и из неравенства (5.1) следует тождественное обращение в нуль u^N, а следовательно, и всех c_k^N, $k = 1, 2, \ldots, N$, если правые части в (16.2) обращаются в нуль. Если же f_i и f не обращаются в нуль, то из (16.3) и (5.1) вытекает априорная оценка для u^N

$$\| u^N \|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant c\left(\| \mathbf{f} \|_{2,\Omega} + \| f \|_{2n/(n+2),\Omega}\right) \quad (16.4)$$

с постоянной c, не зависящей от номера N. Поэтому системы (16.2) действительно однозначно разрешимы при любых $\mathbf{f}$ и f из пространств $L_2(\Omega)$ и $L_{2n/(n+2)}(\Omega)$ соответственно и нормы $\| u^N \|_{2,\Omega}^{(1)}$ их решений равномерно ограничены. Покажем, что найденная нами последовательность приближенных решений u^N, $N = 1, 2, \ldots$, сходится к обобщенному решению u задачи (16.1). Существование последнего доказано в теореме 5.1. Это легко сделать и независимо, используя наличие приближенных решений $\{u\}^N$. Именно, из $\{u^N\}$ можно выбрать подпоследовательность u^{N_m}, $m = 1, 2, \ldots$, сходящуюся слабо в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ к некоторой функции u из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Благодаря этому по подпоследовательности N_m, $m = 1, 2, \ldots$, можно перейти к пределу в равенствах (16.2) и убедиться, что предельная функция $u(x)$ удовлетворяет им или, что то же самое, тождеству (4.10) при функциях $\eta = \varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ Так как $\{\varphi_k\}$ образуют фундаментальную систему в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то отсюда следует, что тождество

(4.10) будет выполняться для $u(x)$ при любой функции $\eta(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и, следовательно, $u(x)$ действительно является искомым решением задачи (16.1). Покажем, что $\{u^{N_m}\}$, $m=1, 2, \ldots$, сходится к u в норме пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Для этого вычтем из интегрального соотношения (16.3) для u^{N_m} интегральное тождество (4.10) для u с $\eta = u^{N_m}$ и результат $L(u^{N_m}-u, u^{N_m})=0$ запишем так:

$$L(u^{N_m}-u,\ u^{N_m}-u) = -L(u^{N_m}-u,\ u).$$

Правая часть последнего равенства стремится к нулю при $m\to\infty$ в силу слабой сходимости u^{N_m} к u в $W_2^1(\Omega)$, а левая часть не меньше $\nu_1\left(\|u^{N_m}-u\|_{2,\Omega}^{(1)}\right)^2$ с $\nu_1=\mathrm{const}>0$ (см. (5.1)). Поэтому $\|u^{N_m}-u\|_{2,\Omega}^{(1)}\to 0$ при $m\to\infty$. Таким образом, мы доказали, что любая слабо сходящаяся в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ подпоследовательность $\{u^{N_m}\}$ равномерно ограниченной в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ последовательности $\{u^N\}$ сходится сильно в норме $W_2^1(\Omega)$ к обобщенному решению $u(x)$ задачи (16.1). Но по предположению последнее единственно, следовательно, вся последовательность $\{u^N\}$, $N=1, 2, \ldots$, сходится к $u(x)$ сильно в $W_2^1(\Omega)$. Сформулируем доказанное предложение в виде теоремы.

Теорема 16.1. *Если выполнены предположения теоремы* 5.2, *то задача* (16.1) *однозначно разрешима в* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *при любых* $\mathbf{f}$ *из* $L_2(\Omega)$ *и* f *из* $L_{2\hat{n}/(\hat{n}+2)}(\Omega)$ *и ее решение есть сильный предел в* $W_2^1(\Omega)$ *галеркинских приближений* u^N, *однозначно определяемых алгебраическими системами* (16.2).

На самом деле имеет место более общий факт: если для задачи (16.1) справедлива теорема единственности в $W_2^1(\Omega)$ (так что $\lambda=0$ для нее не есть точка спектра), то приближения Галеркина u^N определяются системами (16.2) однозначно для всех достаточно больших N и при $N\to\infty$ сходятся в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ к решению u задачи (16.1). Это утверждение для случая ограниченных b_i и a и $a_i\equiv 0$ доказано в [23_2]. Для неограниченных коэффициентов оно доказывается, по существу, так же, надо только воспользоваться неравенством (2.13) гл. II так, как это сделано в §§ 4, 5.

Утверждения теоремы 16.1 остаются справедливыми и для других классических краевых условий — второго и третьего. Вспоминая данные в § 6 гл. III определения обобщенных решений из пространства $W_2^1(\Omega)$ задач (6.1), (6.2), легко понять, что метод Галеркина для них надо строить нижеследующим образом. Взять фундаментальную систему $\{\varphi_k(x)\}$ в пространстве $W_2^1(\Omega)$ и искать u^N в виде суммы $\sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x)$, коэффициенты в которой определяются из системы

$$L(u^N, \varphi_k) = -(f, \varphi_k) + \int_S (-\sigma u^N + \varphi)\varphi_k\, ds, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Однозначная разрешимость этих систем при любом N и сходимость к решению задачи доказываются так же, как и для первого краевого условия, надо только воспользоваться теоремами вложения пространства $W_2^1(\Omega)$ в $L_q(S)$ (см. § 2 гл. II).

Метод Галеркина в описанной выше его классической форме гарантирует сходимость приближений u^N лишь в норме $W_2^1(\Omega)$, даже если все данные задачи (16.1) и само решение u суть очень гладкие функции.

Однако эту форму можно изменить и добиться лучшей сходимости, если, конечно, данные задачи достаточно хорошие (см. [21$_9$] и др.). Связано это с наличием для эллиптических операторов неравенств вида (8.27) и более общих неравенств вида

$$\int_\Omega LuM^{(m)}u\, dx \geqslant \nu\left(\| u \|_{2,\Omega}^{(m+1)}\right)^2, \qquad \nu = \mathrm{const} > 0, \tag{16.5}$$

где $M^{(m)}u$ есть m-я итерация эллиптического оператора M второго порядка. Поясним, например, как добиться сходимости приближений в $W_2^2(\Omega)$ в задаче (16.1). Пусть для нее выполнены условия теоремы 9.1. Возьмем какой-нибудь эллиптический оператор M второго порядка, обладающий теми же свойствами, что и L (в частности, устанавливающий взаимно однозначное соответствие между пространствами $\overset{\circ}{W}{}_{2,0}^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$), и такой, что для L и M справедливо неравенство (8.27) с $c > 0$ *).

Возьмем в пространстве $W_{2,0}^2(\Omega)$ фундаментальную систему линейно независимых функций $\{\varphi_k(x)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ Оператор M переведет их в функции $\{M\varphi_k\}$, образующие фундаментальную систему в пространстве $L_2(\Omega)$. Будем приближенные решения u^N искать в виде суммы $u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x)$, а коэффициенты ее определять из системы

$$\int_\Omega Lu^N \cdot M\varphi_k\, dx = \int_\Omega \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f\right) M\varphi_k\, dx, \qquad k = 1, \ldots, N. \tag{16.6}$$

*) В качестве M можно взять, например, само L или $Mu - \mu u$ с любым эллиптическим оператором M, коэффициенты которого удовлетворяют требованиям (4.2), (4.3), (7.3), и достаточно большим μ.

Умножая каждое из уравнений (16.6) на свое c_k^N и складывая полученные равенства по k от 1 до N, придем к соотношению

$$\int_\Omega Lu^N \cdot Mu^N\,dx = \int_\Omega \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f\right) Mu^N\,dx,$$

из которого в силу неравенства (8.27) следует равномерная ограниченность норм $\| u^N \|^{(2)}_{2,\Omega}$ и теорема единственности (а потому и разрешимости) для системы (16.6). Рассуждая далее аналогично тому, как это было сделано выше в обычном методе Галеркина, докажем, что u^N сходятся к решению задачи (16.1) в норме пространства $W_2^2(\Omega)$.

Если оператор L является формально самосопряженным, т. е. имеет вид $Lu = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}u_{x_j}\right) + au$, то для него уравнение $Lu = f$ является уравнением Эйлера для функционала

$$I(u) = \int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} - au^2 + 2uf\right) dx. \tag{16.7}$$

Поставим задачу на определение функции $u(x)$, дающей квадратичному функционалу $I(u)$ наименьшее значение на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если такая функция u существует в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и функции a_{ij}, a и f удовлетворяют условиям (4.2), (4.3), (4.5), то на $u(x)$, как нетрудно показать, первая вариация функционала $I(x)$ равна нулю, т. е.

$$\delta I(u;\ \eta) = 2\int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_i} - au\eta + f\eta\right) dx = 0 \tag{16.8}$$

при любой функции η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Но соотношение (16.8) есть не что иное, как интегральное тождество, определяющее обобщенное решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ задачи

$$Lu = f, \quad u|_S = 0. \tag{16.9}$$

Таким образом, решение поставленной выше вариационной задачи является обобщенным решением из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ краевой задачи (16.9). Если $a(x) \leqslant 0$, то, как легко проверить, задача (16.9) может иметь не более одного обобщенного решения в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и это решение (его существование следует из результатов § 5) дает функционалу $I(u)$ наименьшее значение. Следовательно, в случае неположительного $a(x)$ задача на разыскание абсолютного минимума функционала $I(u)$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и задача на определение обобщенного решения из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ уравнения $Lu=f$ эквивалентны.

На этом основан следующий способ нахождения решения задачи (16.9), известный под названием метода Ритца. Берется фундаментальная система $\{\varphi_k(x)\}$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и конечномерные его подпространства P_N, натянутые на N первых элементов системы. На каждом из P_N ищется наименьшее значение $I(u)$. Оно реализуется на некотором элементе u^N подпространства P_N. Оказывается, последовательность u^N является минимизирующей для рассматриваемой вариационной задачи и ее пределом в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ является решение задачи. Все это нетрудно доказать непосредственно. Но мы этого делать не будем, а заметим лишь, что приближенные решения u^N вычисляются из системы алгебраических уравнений (эти уравнения выражают обращение в нуль вариации $I(u)$ на подпространстве P_N, т. е. $\delta I(u^N;\ \eta)=0$ при $\eta\in P_N$), совпадающей с системой (16.2) уравнений Галеркина, и, следовательно, сами u^N совпадают с приближенными решениями, вычисленными по схемам Галеркина. Таким образом, метод Ритца является частным случаем метода Галеркина.

Для решения задачи (16.1) применяют еще так называемый метод наименьших квадратов. Он состоит в нахождении функции, реализующей наименьшее значение функционала $I(u)=\int\limits_\Omega \left(Lu-f-\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)^2 dx$ на множестве всех функций u из $W^2_{2,0}(\Omega)$, по методу Ритца. Пусть $\{\varphi_k\}$ — фундаментальная система в $W^2_{2,0}(\Omega)$, а P_N — совокупность функций вида $\sum\limits_{k=1}^N d_k\varphi_k(x)$. Первая вариация $I(u)$ равна

$$\delta I(u;\ \eta)=2\int\limits_\Omega \left(Lu-f-\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)L\eta\, dx,\qquad \eta\in W^2_{2,0}(\Omega).$$

Приближение u^N, реализующее $\inf I(u)$ на P_N, определяется из системы $\delta I(u;\ \eta)=0$ для $\eta\in P_N$. Но эта система совпадает с системой (16.6) при $M=L$, т. е. метод наименьших квадратов есть частный случай метода Галеркина, описанного выше. Если L устанавливает взаимно однозначное соответствие между $W^2_{2,0}(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$, то u^N однозначно определяются для всех N и при $N\to\infty$ сходятся в норме $W_2^2(\Omega)$ к решению задачи (6.1).

Описанные здесь методы применимы и к другим краевым задачам.

§ 17. О разложении в ряды по собственным функциям самосопряженного оператора

Рассмотрим подробнее спектральные вопросы для симметрического оператора $Lu \equiv (a_{ij}u_{x_j})_{x_i} + au$ в ограниченной области Ω. Ради несущественных упрощений будем считать $a(x) \leqslant 0$. Пусть сначала a_{ij} и a удовлетворяют условиям (4.2) и (4.3). Согласно методу, изложенному в § 5, задачу

$$Lu = \lambda u, \quad u|_S = 0 \tag{17.1}$$

на определение λ и соответствующих им ненулевых решений u из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ можно преобразовать в спектральную задачу для некоторого вполне непрерывного оператора в комплексном гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. В данном случае это удобнее всего сделать, введя в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ скалярное произведение

$$[u, v] = \int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_i}\bar{v}_{x_j} - au\bar{v}\right) dx \tag{17.2}$$

(оно несколько отличается от скалярного произведения, введенного в § 5). Так же, как и в § 5, легко проверяется, что норма $|\cdot|$, соответствующая этому скалярному произведению, эквивалентна стандартной норме в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Интегральное тождество

$$L(u, \bar{\eta}) = -\lambda(u, \eta), \tag{17.3}$$

в котором $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а η есть произвольный элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, соответствующее задаче (17.1), записывается с помощью (17.2) так:

$$[u, \eta] = -\lambda(u, \eta), \tag{17.4}$$

где здесь и в (17.3) $(u, \eta) = \int_\Omega u\bar{\eta}\,dx$. Как показано во второй части § 5, тождество

$$(u, \eta) = [Bv, \eta], \quad \forall v, \ \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{17.5}$$

определяет (согласно теореме Рисса о форме линейного функционала) некоторый линейный оператор B в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Он определен на всем $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, вполне непрерывен, симметричен (а следовательно, и самосопряжен) и положителен *).

*) Последнее проверяется так: если $Bv = 0$, то из (17.5) следует $(v, \eta) = 0$ для $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а так как $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то из $(v, \eta) = 0$ следует, что $v = 0$. Неотрицательность же $[Bv, v]$ видна из самого определения (17.5) оператора B.

Благодаря (17.5) тождество (17.4) эквивалентно операторному уравнению

$$u = -\lambda Bu \tag{17.6}$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Из перечисленных свойств B и известных из функционального анализа предложений о вполне непрерывных самосопряженных операторах (см. [31₂, **48**, **13**]) следует, что B имеет дискретный положительный спектр, который может быть занумерован в порядке убывания спектральных значений: $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots$, каждое μ_k имеет конечную кратность, единственной точкой накопления для μ_k является $\mu = 0$, причем $\mu = 0$ не есть собственное значение (ввиду положительности B). Более того, система собственных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., соответствующих μ_1, μ_2, ..., может быть выбрана ортогональной, т. е.

$$[\varphi_k, \varphi_l] = 0 \quad \text{для} \quad k \neq l, \tag{17.7}$$

и она образует базис в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Как видно из (17.6), собственные числа μ_k оператора B связаны с собственными числами λ_k задачи (17.1) равенством $\lambda_k = -\mu_k^{-1}$, а собственные функции у них совпадают. Из сопоставления равенств (17.5) — (17.7) видим, что система $\{\varphi_k\}$ является ортогональной и в смысле скалярного произведения в $L_2(\Omega)$. Нормируем ее так:

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_k^l. \tag{17.8}$$

Тогда

$$[\varphi_k, \varphi_l] = -\lambda_k \delta_k^l. \tag{17.9}$$

Как указано выше, $\{\varphi_k\}$ есть базис в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а так как $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то $\{\varphi_k\}$ будет фундаментальной системой в $L_2(\Omega)$. Более того, ввиду (17.8) $\{\varphi_k\}$ есть базис в $L_2(\Omega)$. Из этих свойств системы $\{\varphi_k\}$ следует, что любая функция $f(x)$ из $L_2(\Omega)$ разлагается в ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\, \varphi_k(x), \tag{17.10}$$

сходящийся в $L_2(\Omega)$; если же $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то ряд (17.10) будет сходиться в норме $W_2^1(\Omega)$, причем он может быть записан и в виде

$$f(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} [f, \varphi_k]\, \varphi_k(x). \tag{17.11}$$

До сих пор мы считали $L_2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ комплексными гильбертовыми пространствами и соответствующие им скалярные произведения имели вид $(u, v)=\int\limits_{\Omega} u\bar{v}\,dx$ и (17.2). Но так как коэффициенты L и λ_k вещественны, то систему $\{\varphi_k\}$ можно взять вещественной (действительно, если $\varphi_k=\tilde{\varphi}_k+i\tilde{\tilde{\varphi}}_k$, то и $\tilde{\varphi}_k$ и $\tilde{\tilde{\varphi}}_k$ являются решениями из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ задачи (17.1) при $\lambda=\lambda_k$), и она будет ортогональной в смысле скалярных произведений вещественных пространств $L_2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, т. е.

$$\int\limits_{\Omega} \varphi_k\varphi_l\,dx=\delta_k^l, \qquad \int\limits_{\Omega} \left(a_{ij}\varphi_{kx_j}\varphi_{lx_i}-a\varphi_k\varphi_l\right)dx=-\lambda_k\delta_k^l. \tag{17.12}$$

В разложениях (17.10) и (17.11) по вещественной системе $\{\varphi_k\}$ надо считать $(f, \varphi_k)=\int\limits_{\Omega} f\varphi_k\,dx$, а $[f, \varphi_k]=\int\limits_{\Omega}\left(a_{ij}f_{x_j}\varphi_{kx_i}-af\varphi_k\right)dx$.

Будем предполагать с этого момента, что дальнейшие рассмотрения проводятся в вещественных пространствах и система $\{\varphi_k\}$ вещественна.

Пусть коэффициенты L и область Ω удовлетворяют требованиям теоремы 9.1. Тогда все собственные функции φ_k будут принадлежать пространству $W_{2,0}^2(\Omega)$ и будут удовлетворять уравнениям $L\varphi_k=\lambda_k\varphi_k$ почти всюду в Ω. Возьмем произвольную функцию f из $W_{2,0}^2(\Omega)$. Согласно вышесказанному ряд Фурье для нее (17.10) (или, что то же самое, ряд (17.11)) сходится к ней в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Представим ее коэффициенты Фурье в следующем виде:

$$f_k\equiv(f, \varphi_k)=\left(f, \lambda_k^{-1}L\varphi_k\right)=\lambda_k^{-1}\left(Lf, \varphi_k\right)\equiv\lambda_k^{-1}\hat{f}_k. \tag{17.13}$$

Это возможно, поскольку f и φ_k принадлежат $W_{2,0}^2(\Omega)$. Более того, из этого следует также, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\hat{f}_k^2=\|Lf\|_{2,\Omega}^2\leqslant c\left(\|f\|_{2,\Omega}^{(2)}\right)^2. \tag{17.14}$$

Введем в $W_{2,0}^2(\Omega)$ новое скалярное произведение $\{u, v\}=(Lu, Lv)$ и соответствующую ему норму $|u|^{(2)}\equiv\{u, u\}^{1/2}$. В силу второго основного неравенства, имеющего в нашем случае вид (9.2), эта норма эквивалентна первоначальной норме $W_{2,0}^2(\Omega)$. Поэтому достаточно доказать сходимость ряда (17.10) в норме $|\cdot|^{(2)}$. Но ряд (17.10) ортогонален по отношению к скалярному произведению $\{,\}$ и $\left(\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k\varphi_k(x)\right|^{(2)}\right)^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k^2\lambda_k^2$. В силу (17.13) и (17.14) этот ряд сходится. Подытожим доказанное в виде теоремы.

Теорема 17.1. *Если коэффициенты* a_{ij} *и* a *оператора* $Lu = (a_{ij}u_{x_j})_{x_i} + au$ *удовлетворяют условиям* (4.2), (4.3) *и* $a(x) \leqslant 0$, *то спектр задачи* (17.1) *состоит из невозрастающей последовательности отрицательных чисел* $0 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$, *стремящейся к* $-\infty$, *а соответствующие ему собственные функции* $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *образуют ортонормированный базис в* $L_2(\Omega)$ *и базис в* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, *ортогональный по отношению к скалярному произведению* $[\ ,\ ]$. *Если* a_{ij} *и* a *удовлетворяют дополнительно условиям* (7.3), *а* S — *условиям теоремы* 9.1, *то все* φ_k *принадлежат* $W_{2,0}^2(\Omega)$ *и образуют базис в* $W_{2,0}^2(\Omega)$, *ортогональный по отношению к скалярному произведению* $\{\ ,\ \}$.

Обратим внимание, что в этой теореме установлена возможность почленного дифференцирования рядов (17.10) один и два раза (в зависимости от свойств L, f и Ω) и сходимость получаемых при этом неортогональных рядов в $L_2(\Omega)$. Такого типа сходимости рядов Фурье по собственным функциям эллиптического оператора L в пространствах $W_2^m(\Omega)$ с любым целым $m \geqslant 1$ и при любом из краевых условий вида $u|_S = 0$ или $\left.\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\right|_S = 0$ были установлены одним из авторов данной книги и изложены в полном виде во второй главе книги [21_3]. Теорема 17.1 является одним из простейших случаев доказанных там предложений. Эти предложения точны в следующем смысле: относительно f требуется лишь ее принадлежность к тому пространству, к которому принадлежат собственные функции (а следовательно, и конечные отрезки ряда (7.10)) и в норме которого доказывается сходимость. Таким образом, разложения Фурье (7.10) очень точно улавливают свойства разлагаемой функции, если те и другие характеризовать в терминах пространств $W_2^m(\Omega)$.

Если предположение о неположительности $a(x)$ отбросить, то в теореме 17.1 может измениться лишь утверждение об отрицательности спектра. При любом $a(x)$ из $L_{q/2}(\Omega)$, $q > n$, несколько первых собственных значений могут быть положительными или равными нулю.

Система собственных функций $\{\varphi_k\}$, в соответствии со спектральной теорией вполне непрерывных положительных симметричных операторов (см. [$31_{1,2}$, 23_2, $\mathbf{10}_1$] и др.), может быть найдена в результате решения нижеследующих вариационных задач. Функция $\varphi_1(x)$ реализует минимум функционала

$$L(u,\ u) = \int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} - au^2\right) dx$$

на множестве всех элементов $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию

$$(u, u) = \int_\Omega u^2\, dx = 1, \tag{17.15}$$

причем $L(\varphi_1, \varphi_1) = -\lambda_1$. Вторая собственная функция φ_2 дает минимум $L(u, u)$ на множестве всех элементов $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих, помимо (17.15), условию $(u, \varphi_1) = 0$, причем $L(\varphi_2, \varphi_2) = -\lambda_2$. При нахождении φ_3 надо функции сравнения $u(x)$ подчинить еще условию $(u, \varphi_2) = 0$ и т. д. Так последовательно находятся все φ_k, $k = 1, 2, \ldots$ Однако возможно определить m-ю собственную функцию φ_m без предварительного знания предыдущих собственных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$. Это базируется на так называемом максимально-минимальном свойстве собственных функций, установленном Р. Курантом и изложенном в [$\mathbf{10}_1$] применительно к разным конкретным самосопряженным операторам. Это свойство состоит в том, что

$$-\lambda_m = \sup_{v_i \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} d\{v_1, \ldots, v_{m-1}\}, \tag{17.16}$$

где

$$d\{v_1, \ldots, v_{m-1}\} = \inf L(u, u), \tag{17.17}$$

причем inf находится на множестве всех функций u из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих условиям $(u, v_i) = 0$, $i = 1, \ldots, m-1$, $(u, u) = 1$. Супремум в (17.16) берется по всевозможным наборам v_i из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Решением этой минимаксной задачи является функция φ_m.

§ 18. Метод конечных разностей

Метод конечных разностей, с одной стороны, является весьма сильным инструментом для различных теоретических исследований, а с другой — одним из основных способов численного определения решений конкретных задач. Он явился первым методом, с помощью которого удалось сравнительно просто доказать разрешимость основных краевых задач для линейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и показать, что гладкость их решений повышается с повышением гладкости данных задачи, причем это улучшение имеет локальный характер (см. [21_3]). Здесь мы дадим краткое описание этого метода, приведем одну из простейших разностных схем для первой краевой задачи и докажем ее устойчивость и сходимость в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

В общих чертах метод конечных разностей состоит в том, что пространство E_n разбивается на элементарные клетки и все рассмотрения проводятся в вершинах этих клеток. Производные, входящие в уравнения, заменяются теми или иными разностными отношениями, которые образованы из значений неизвестных функций в вершинах клеток, и, в соответствии с этим, сами дифференциальные уравнения заменяются линейными алгебраическими системами. Из этих систем подлежат определению значения искомых функций в вершинах клеток. Эти значения образуют приближенное решение, которое обозначим через u_h (индекс h символизирует взятое разбиение E_n). По u_h строятся определенным образом те или иные интерполяции; простейшая из них — кусочно-постоянная, которую обозначим через $\tilde{u}_h(x)$.

Разностная схема считается «правильной», если u_h определяются однозначно (речь идет о случае, когда исходная задача однозначно разрешима) и если при размельчении решетки $\tilde{u}_h$ стремится в каком-либо смысле к искомому решению $u(x)$.

Так как любую производную даже при фиксированном разбиении можно аппроксимировать разными разностными отношениями, то данное только что описание метода конечных разностей заключает в себе большую неопределенность и требует дальнейшей детализации. Оказывается, не любая правильная аппроксимация дифференциального уравнения и граничного условия приводит к «правильной» разностной схеме, и перед исследователем прежде всего стоит задача выбрать среди множества возможных аппроксимаций те, которые в пределе (при размельчении разбиения E_n) приведут к решению $u(x)$ задачи. Одним из авторов данной книги в конце 40-х годов был сформулирован нижеследующий способ построения разностных схем. Надо взять интегральное тождество, определяющее обобщенное решение задачи с конечной энергетической нормой (для рассматриваемой нами задачи это тождество (4.12)), и его заменить суммой Римана, соответствующей взятому разбиению E_n. Производные, входящие в интегральное тождество, можно заменять различными разностными отношениями, но одинаковыми для всех членов тождества (разумеется, при этом должны участвовать значения искомых функций лишь в тех точках разбиения, которые принадлежат области задания уравнения и краевого условия). Так получаемая сумма Римана содержит произвольные величины — значения произвольной функции $\eta(x)$, входящей в интегральное тождество, в вершинах разбиения. В этой сумме надо провести перегруппировку членов, собирая вместе все слагаемые, содержащие в качестве множителя значение η в одной из вершин разбиения. Так получаемые частные суммы надо приравнять нулю, если стоящее при них η произвольно.

Для первой краевой задачи η произвольно во всех «внутренних» точках разбиения (в «граничных» же точках оно равно нулю), так что описанный рецепт дает столько уравнений, сколько внутренних точек. К этим уравнениям добавляются уравнения, определяющие u_h в «граничных» точках. Для второй и третьей краевых задач η произвольно всюду, и потому из интегрального тождества извлекается столько уравнений, сколько «внутренних» и «граничных» точек входит в наши рассмотрения.

Покажем, как эти общие соображения реализуются применительно к задаче (4.1), (4.9).

Предположим, ради экономии места, что коэффициенты уравнения (4.1) суть ограниченные функции, что $\varphi=0$ и $f\in L_2(\Omega)$. Общий случай, описанный в §§ 4, 5, рассматривается аналогично. Пусть, кроме того, выполнено условие

$$a_{ij}\xi_i\xi_j+(a_i-b_i)\,\xi_i\xi_0-a\xi_0^2\geqslant\nu\sum_{i=1}^n\xi_i^2, \tag{18.1}$$

$\nu=\mathrm{const}>0$, а $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ — произвольные вещественные числа (его можно было бы заменить условием типа (4.32) и даже условием, что рассматриваемая задача имеет единственное решение).

Обобщенное решение задачи

$$Lu\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}+a_iu\right)+b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+au=\frac{\partial f_i}{\partial x_i}+f,\quad u|_S=0 \tag{18.2}$$

из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, как мы знаем, есть элемент $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющий тождеству

$$L(u,\eta)\equiv\int_\Omega\left[\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}+a_iu\right)\frac{\partial\eta}{\partial x_i}-b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\eta-au\eta\right]dx=$$
$$=\int_\Omega\left(f_i\frac{\partial\eta}{\partial x_i}-f\eta\right)dx. \tag{18.3}$$

Считаем, что

$$\max_\Omega|a_{ij}, a_i, b_i, a|<\infty\quad\text{и}\quad\|f\|_{2,\Omega}, \|f_i\|_{2,\Omega}<\infty,\quad i, j=1, \ldots, n. \tag{18.4}$$

Разобьем все пространство E_n плоскостями $x_i=k_ih$, $k_i=0, \pm1, \pm2, \ldots, i=1, \ldots, n$, где h есть положительное число, называемое шагом получаемого разбиения или, что то же, шагом решетки. Кубы вида $\Omega_{k_1,\ldots,k_n}=\{x\colon k_ih<x_i<(k_i+1)h\}$ называются клетками или ячейками разбиения, а их вершины — точками или узлами решетки. Замкнутую область, состоящую из всех кубов $\overline{\Omega}_{k_1,\ldots,k_n}$, принадлежащих $\overline{\Omega}$, обозначим через $\overline{\Omega}_h$, ее внутренние точки — через Ω_h, а границу $\overline{\Omega}_h$ — через S_h, так что $\Omega_h+S_h=\overline{\Omega}_h$. Эти же обозначения Ω_h, S_h и $\overline{\Omega}_h$ сохраним и за совокупностями вершин решетки, принадлежащими области Ω_h, ее границе S_h или замкнутой области $\overline{\Omega}_h$ соответственно.

Для производной по x_i в данном параграфе используем символ $\frac{\partial}{\partial x_i}$; символ же u_{x_i} употребим для обозначения соответствующих разностных отношений, а именно:

$$u_{x_i}(x) = \frac{1}{h}[u(x+h\mathbf{e}_i) - u(x)] \tag{18.5$_1$}$$

и

$$u_{\bar{x}_i}(x) = \frac{1}{h}[u(x) - u(x-h\mathbf{e}_i)], \tag{18.5$_2$}$$

где $\mathbf{e}_i$ — орт, направленный вдоль оси x_i. Перейдем к составлению разностных схем по правилу, описанному выше. Именно, интегралы в (18.3) надо заменить суммами Римана, отвечающими взятому разбиению. Так как коэффициенты и свободные члены уравнения (18.2) не предполагаются непрерывными функциями, то в отдельных точках Ω и, в частности, в узлах решетки они могут быть не определены (или «не представительны»). Ввиду этого вместо a_{ij}, a_i и прочих известных функций следует брать не их значения в узлах решетки, а, например, их стекловские средние по кубам

$$\widetilde{\Omega}_{k_1, \ldots, k_n} = \left\{x\colon \left(k_i - \frac{1}{2}\right)h < x_i < \left(k_i + \frac{1}{2}\right)h\right\} \tag{18.6}$$

с центром в узлах решетки, т. е. $a_{ij}^h = h^{-n} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_{k_1, \ldots, k_n}} a_{ij}(x)\,dx$, и то же для других коэффициентов и свободных членов уравнения (18.2). Производные $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ заменим разностными отношениями вида (18.5$_1$) или (18.5$_2$) (можно взять и их полусуммы), но одинаковыми для u и η и всех $i=1, \ldots, n$. Возьмем для определенности замену (18.5$_1$). Эти разностные отношения и функции u и η рассматриваются только в вершинах решетки, и кубу $\Omega_{k_1, \ldots, k_n}$ сопоставляются u_{x_i} и η_{x_j}, вычисленные по правилу (18.5$_1$) в вершине $x=(k_1h, \ldots, k_nh)$. Итак, интегральное тождество (18.3) заменим сумматорным

$$L_h(u, \eta) \equiv h^n \sum_{\overline{\Omega}_h} \left[\left(a_{ij}^h u_{x_j} + a_i^h u\right)\eta_{x_i} - b_i^h u_{x_i}\eta - a^h u\eta\right] = \\ = h^n \sum_{\overline{\Omega}_h} \left(f_i^h \eta_{x_i} - f^h \eta\right). \tag{18.7}$$

В нем сумма распространена на вершины $\overline{\Omega}_h$, однако стоящие под знаком суммы члены, как легко понять, пока не определены для некоторых из точек S_h. Сделаем это так: продолжим коэффициенты и свободные члены уравнения (18.2) на все пространство E_n с сохранением описанных выше свойств, а функции u и η, входящие в (18.7), положим равными нулю во всех точках решетки, кроме точек Ω_h. В результате таких доопределений *) все члены сумм $\sum\limits_{\overline{\Omega}_h}$ теперь определены, и, более того, эти суммы можно считать распространенными на все точки бесконечной решетки E_{nh}.

В тождестве (18.7) функция η произвольна в точках решетки Ω_h, а функция u подлежит определению в этих точках. На S_h (и вне $\overline{\Omega}_h$) та и другая равны нулю. Тождество (18.7) эквивалентно линейной алгебраической системе, содержащей столько уравнений, сколько точек на решетке Ω_h. Чтобы выписать эти уравнения, надо собрать вместе члены, содержащие η в какой-либо точке Ω_h, и приравнять их сумму нулю. Это легко делается с помощью формулы «суммирования по частям»

$$h^n \sum_{\overline{\Omega}_h} uv_{x_i} = -h^n \sum_{\overline{\Omega}_h} u_{\bar{x}_i} v. \qquad (18.8)$$

Она справедлива для произвольных функций u и v, заданных на решетке, если только v равна нулю вне Ω_h. Применяя эту формулу к (18.7) и меняя знак, получим

$$h^n \sum_{\overline{\Omega}_h} L_h u \cdot \eta = h^n \sum_{\overline{\Omega}_h} \left(f^h_{i\bar{x}_i} + f^h\right)\eta, \qquad (18.9)$$

где $L_h u = \left(a^h_{ij} u_{x_j} + a^h_i u\right)_{\bar{x}_i} + b^h_i u_{x_i} + a^h u$. Так как значения η произвольны в точках Ω_h, то тождество (18.9) эквивалентно системе

$$L_h u = f^h_{i\bar{x}_i} + f^h, \qquad (18.10)$$

уравнения которой соответствуют точкам Ω_h. К ним надо присоединить уравнения

$$u|_{S_h} = 0. \qquad (18.11)$$

Число уравнений в системе (18.10), (18.11) равно числу точек решетки $\overline{\Omega}_h$, т. е. числу неизвестных — значений u в точках $\overline{\Omega}_h$. Покажем, что при условии (18.1) эта система однозначно определяет u при любом h. Для этого необходимо и достаточно, чтобы однородная система, соответствующая (18.10), (18.11),

*) Как будет видно из дальнейшего, в реальные вычисления войдут только значения коэффициентов L в Ω, продолжение же коэффициентов вне $\overline{\Omega}$ употреблено нами лишь для удобства записи на данном этапе.

имела только нулевое решение. Итак, пусть правые части в (18.10) равны нулю. Это соответствует тождеству (18.7) с правой частью, равной нулю. Положим в нем $\eta=u$; это даст равенство

$$L_h(u, u)=0. \tag{18.12}$$

Легко видеть, что в силу (18.1) при любом h

$$a_{ij}^h\xi_i\xi_j+(a_i^h-b_i^h)\xi_i\xi_j-a^h\xi_0^2\geqslant\nu\sum_{i=1}^n\xi_i^2, \tag{18.13}$$

и потому из (18.12) следует, что $\nu h\sum_{\overline{\Omega}_h}\sum_{i=1}^n(u_{x_i})^2=0$. Но это означает, что u постоянно на $\overline{\Omega}_h$, а так как на S_h u равно нулю, то $u\equiv 0$ всюду. Итак, теорема единственности для системы (18.10), (18.11) доказана, а тем самым доказана и ее разрешимость при любых f_i^h и f^h. Более того, для ее решения можно дать априорную оценку, не зависящую от h. Действительно, полагая в (18.7) $\eta=u$ и используя (18.13), получим

$$\nu h^n\sum_{\overline{\Omega}_h}u_x^2\leqslant h^n\sum_{\overline{\Omega}_h}\left(f_i^hu_{x_i}-f^hu\right), \tag{18.14}$$

где $u_x^2=\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2$. Воспользуемся разностным аналогом неравенства (2.14) гл. II

$$h^n\sum_{\overline{\Omega}_h}u^2\leqslant ch^n\sum_{\overline{\Omega}_h}u_x^2, \tag{18.15}$$

справедливым для любой функции u, заданной на решетке E_{nh} и равной нулю вне Ω_h. Постоянная c в нем определяется размерами Ω, но не зависит ни от u, ни от h. Если не гнаться за точностью зависимости c от Ω, то (18.15) можно доказать элементарно следующим образом. Пусть

$$\overline{\Pi}=\{x\colon\ x=(k_1h, \ldots, k_nh)\equiv(kh);\qquad -m_1\leqslant k_1\leqslant m_1, \ldots, -m_n\leqslant k_n\leqslant m_n\}$$

— параллелепипед, содержащий $\overline{\Omega}_h$. Очевидно следующее представление

$$u(kh)=h\sum_{l_1=-m_1}^{k_1-1}u_{x_1}(l_1h, k_2h, \ldots, k_nh).$$

Из него в силу неравенства Коши следует

$$u^2(kh)=\left(h\sum_{l_1=-m_1}^{k_1-1}u_{x_1}\right)^2\leqslant(2m_1h)\cdot h\sum_{l_1=-m_1}^{m_1}u_{x_1}^2,\qquad (kh)\in\overline{\Pi}.$$

Суммируя обе части этого неравенства по точкам $(kh) \in \overline{\Pi}$, придем к (18.15) с $c = (2m_1 h)^2$ и $u_{x_1}^2$ вместо u_x^2.

Итак, вернемся к неравенству (18.14). Оценим правую часть его, используя неравенство Коши (1.2) гл. II и (18.15), следующим образом:

$$\nu h^n \sum_{\overline{\Omega}_h} u_x^2 \leqslant h^n \sum_{\overline{\Omega}_h} \left[\frac{\varepsilon}{2} u_x^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} u^2 + \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{f}^h)^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} (f^h)^2\right] \leqslant$$
$$\leqslant h^n \sum_{\overline{\Omega}_h} \left[\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{c\varepsilon_1}{2}\right) u_x^2 + \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{f}^h)^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} (f^h)^2\right], \qquad (18.16)$$

где $(\mathbf{f}^h)^2 \equiv \sum_i (f_i^h)^2$. Из этого неравенства с $\varepsilon = c\varepsilon_1 = \nu/2$ и (18.15) выводим желаемую априорную оценку

$$h^n \sum_{\overline{\Omega}_h} (u^2 + u_x^2) \leqslant \frac{2(1+c)}{\nu^2} h^n \sum_{\overline{\Omega}_h} [(\mathbf{f}^h)^2 + c(f^h)^2]. \qquad (18.17)$$

Возьмем какую-либо последовательность $h_m \to 0$ и соответствующие ей решетки Ω_{h_m} и решения u_{h_m} системы (18.10), (18.11). Покажем, что $\{u_{h_m}\}$ сходятся к решению $u(x)$ задачи (18.2).

Для этого удобно, следуя [21$_3$], ввести различные интерполяции u_h, определенные на всей области Ω (мы считаем, что u_h равна нулю вне Ω_h). Одна из них, обозначаемая $u_h'(x)$, есть непрерывная на $\overline{\Omega}$ функция, равная u_h в точках решетки и в пределах каждого куба $\overline{\Omega}_{k_1, \ldots, k_n}$ линейная по каждой переменной при фиксированных остальных. Для точек $x \in \Omega_{k_1, \ldots, k_n}$ она определяется равенством

$$u_h'(x) = u_{x_1, \ldots, x_n} \prod_{s=1}^{n} (x_s - k_s h) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{n} u_{x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n} \prod_{\substack{s \neq r \\ s=1}}^{n} (x_s - k_s h) + \ldots + u_h,$$

причем разностные отношения $u_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}} \equiv \left(\left(u_{x_{i_1}}\right) \ldots\right)_{x_{i_m}}$ и последнее слагаемое вычислены в вершине (kh). Ясно, что функция $u_h'(x)$ определена на $\overline{\Omega}$, непрерывна, равна нулю на $\partial\Omega$ и имеет в Ω обобщенные производные первого порядка. Более того, для нее верно элементарно проверяемое неравенство

$$\int_{\Omega} \left[u_h'^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_h'}{\partial x_i}\right)^2\right] dx \leqslant 2^n h^n \sum_{\overline{\Omega}_h} (u_h^2 + u_{hx}^2). \qquad (18.18)$$

Построим по приближенным решениям u_{h_m} интерполяции $u'_{h_m}(x)$. В силу (18.17) и (18.18)

$$\|u'_{h_m}\|^{(1)}_{2,\Omega} \leqslant c_1, \qquad (18.19)$$

где постоянная c_1 может быть взята общей для всех $\{u_{h_m}\}$ (для этого надо учесть свойства усреднений, в частности то, что правая часть (18.17) при $h \to 0$ стремится к $\frac{2(1+c)}{\nu^2} \times \times \int\limits_\Omega (\mathrm{f}^2 + cf^2)\,dx$; см. § 4 гл. II).

Функции $u'_{h_m}(x)$ равны нулю на S_h и вне области Ω_h, так что $u'_{h_m} \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. В силу этого и оценки (18.19) существует подпоследовательность (обозначим ее по-прежнему через $\{h_m\}$), для которой u'_{h_m} сходятся слабо в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ к некоторой функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Докажем, что эта предельная функция $u(x)$ и есть искомое решение задачи (18.2). Для этого осталось показать, что она удовлетворяет тождеству (18.3), при этом достаточно в качестве $\eta(x)$ в (18.3) брать лишь гладкие финитные в Ω функции. Итак, пусть $\eta(x)$ — такая функция. При всех достаточно малых h она равна нулю на $\partial\Omega_h$ и потому ее значения на точках решетки Ω_h допустимы для сумматорного тождества (18.7). Запишем это тождество в виде интеграла

$$\int\limits_\Omega \left(\left[\widetilde{a^h_{il}}\tilde{u}_{x_j} + \widetilde{a^h_i}\tilde{u}\right)\tilde{\eta}_{x_i} - \widetilde{b^h_i}\tilde{u}_{x_i}\tilde{\eta} - \widetilde{a^h}\tilde{u}\tilde{\eta}\right] dx =$$
$$= \int\limits_\Omega \left(\tilde{f}^h_i \tilde{\eta}_{x_i} - \tilde{f}^h\tilde{\eta}\right) dx, \qquad (18.20)$$

используя простейшую кусочно-постоянную интерполяцию функций, заданных на сетке. Эта интерполяция, обозначенная для сеточной функции u_h через $\tilde{u}_h(x)$, есть ограниченная разрывная функция, равная в $\Omega_{k_1,\ldots,k_n}$ значению u_h в вершине (kh). Символ $\tilde{\eta}_{x_j}$ надо понимать как такую кусочно-постоянную интерполяцию сеточной функции η_{x_j}, определенной по значениям η в вершинах Ω_h, что $\tilde{\eta}_{x_j} = \widetilde{(\eta_{x_j})}$. В тождестве (18.20) у сеточных функций u и η надо было бы поставить внизу индекс h, указывающий, что они рассматриваются лишь на точках решетки Ω_h, но мы этого не делаем, чтобы не загромождать запись. Попробуем теперь перейти в тождестве (18.20) к пределу по выбранной выше подпоследовательности $h_m \to 0$ при фиксированной функции $\eta(x)$ с описанными выше свойствами. Ясно, что $\tilde{\eta}_h(x)$ и $\tilde{\eta}_{hx_j}(x)$ будет равномерно сходиться к $\eta(x)$ и $\frac{\partial \eta}{\partial x_j}$ соответственно. Функции $\tilde{a}^h_{ij}, \ldots, \tilde{a}^h$, оставаясь равномерно ограниченными, сходятся к $a_{ij}, \ldots, a$ почти всюду. Остается понять, к чему сходятся $\tilde{u}_{h_m}$ и $\tilde{u}_{hx_i}$. Оказывается, $\tilde{u}_{h_m}$ сходятся к той же функции $u(x)$, что и u'_{h_m}, причем имеет место сильная сходимость в $L_2(\Omega)$. Функции же $\tilde{u}_{hx_i}$ сходятся слабо в $L_2(\Omega)$ к $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Доказываются эти естественные факты нетрудно, надо только учесть при этом равномерную ограниченность $h^n \sum_{\overline{\Omega}_h} (u_h^2 + u_{hx}^2)$. Мы опустим эти простые рассуждения и отошлем читателя к § 6 гл. I книги [21_3], из которой взята вся излагаемая здесь конструкция построения и исследования разностных схем (см. § 2 гл. IV [21_3] и др.).

Ввиду всего вышесказанного в (18.20) можно перейти к пределу по $h_m \to 0$. В результате получается соотношение (18.3) с функцией $u(x)$, являющейся пределом как для $u'_{h_m}(x)$, так и для $\tilde{u}_{h_m}(x)$. Итак, мы убедились, что предельная для $u'_{h_m}(x)$ функция $u(x)$ есть искомое обобщенное решение задачи (18.2). Так как оно единственно, то нетрудно понять, что вся последовательность $\{u'_{h_m}(x)\}$ (а не только выбранная выше подпоследовательность) сходится к $u(x)$. Больше того, имея уже в руках решение $u(x)$, нетрудно показать, что $\tilde{u}_{h_m}$ и $\tilde{u}_{h_m x_i}$ сходятся к $u(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ сильно в $L_2(\Omega)$.

Итак, доказана

Теорема 18.1. *Пусть коэффициенты уравнения* (18.2) *суть ограниченные функции, удовлетворяющие условию* (18.1), *а для свободных членов выполняется условие* (18.4). *Тогда системы* (18.10), (18.11) *однозначно разрешимы при любом h и их решения u_h сходятся при $h \to 0$ к обобщенному решению $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ задачи* (18.2).

Как сказано выше, предположения о данных задачах можно ослабить до предположений §§ 4, 5 гл. III, не выходя за рамки изложенных здесь аналитических средств. Метод конечных разностей удобен и для исследования вопросов гладкости обобщенных решений (см. гл. IV из [21_3]). Ниже, в § 5 гл. IV, мы это проиллюстрируем на значительно более сложном объекте — квазилинейных эллиптических уравнениях.

Обоснование метода конечных разностей для решения краевых задач для эллиптических уравнений началось с работы

Л. А. Люстерника «Bemerkung zur Lösung des Dirichlet'schen Problems», Матем. сб. 33, 1926, 363—366, и работы [10_3] Р. Куранта, К. О. Фридрихса и Г. Леви, в которых рассмотрено уравнение Лапласа. Ему же посвящена и работа [25_2] И. Г. Петровского. Линейные эллиптические уравнения общего вида были рассмотрены Д. М. Эйдусом [37] и одним из авторов книги (см. [$21_{3,6}$] и др.). Имеется, кроме того, много работ, посвященных разным аспектам метода конечных разностей, связанным с вычислительной стороной дела, в том числе с оценками скорости сходимости (в связи с последним вопросом см. [27], [12] и др.).

§ 19. Случай двух независимых переменных

Изложенные в предыдущих параграфах результаты справедливы для любого числа независимых переменных, в том числе и для $n=2$. Однако для случая $n=2$ имеют место и некоторые более тонкие факты, несправедливые при $n>2$. Часть из них приведена в § 2 гл. I. К их числу относятся следующие. Пусть $u(x)$ есть решение в области Ω уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\,u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{2} a_i u_{x_i} + au = f(x), \tag{19.1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu = \mathrm{const} > 0, \tag{19.2}$$

$$|a_i|, \quad |a| \leqslant \mu_1. \tag{19.3}$$

Если решение u равно нулю на границе области Ω, то для него норма $\|u\|^{(2)}_{2,\Omega}$ оценивается сверху константой, зависящей лишь от ν, μ из (19.2), (19.3), $\|f\|_{2,\Omega}$ и $\|u\|_{2,\Omega}$. Этот факт для решений уравнений (19.1) с $a_i = a \equiv 0$ в круге был установлен С. Н. Бернштейном [$4_{2,3}$] *). Комбинируя прием предварительного преобразования уравнения (19.1), данный С. Н. Бернштейном, с приемом преобразования выделяющегося при интегрировании по частям контурного интеграла и его оценки, данным одним из авторов [$21_{2,3,5}$], мы докажем здесь сформулированное утверждение для любой области Ω, подчиняющейся тем же ограничениям, что и в § 8 для общего случая $n \geqslant 2$. Более того, мы максимально возможным образом ослабим и предпо-

*) См. в связи с этим сноску на стр. 232, где указана работа Ю. Шаудера, посвященная снятию предположений С. Н. Бернштейна о том, что Ω диффеоморфна кругу. Ю. Шаудер добивается этого ценой предположения о непрерывности коэффициентов L.

ложения о a_i и a, именно, заменим условие (19.3) предположениями

$$\|a_i\|_{q,\,\Omega}, \quad \|a\|_{2,\,\Omega} \leqslant \mu_1 < \infty, \qquad q > 2. \tag{19.4}$$

Справедлива следующая

Теорема 19.1. *Предположим, что* Ω *удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *леммы* 8.1. *Пусть функция* $u(x)$ *принадлежит* $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$ *и удовлетворяет почти всюду в* Ω *уравнению* (19.1), *коэффициенты которого подчинены условиям* (19.2), (19.4). *Тогда*

$$\|u\|^{(2)}_{2,\,\Omega} \leqslant \frac{2\mu}{\nu^2}\|f\|_{2,\,\Omega} + c\|u\|_{2,\,\Omega}, \tag{19.5}$$

где постоянная c *определяется величинами* ν, μ, q *и* μ_1 *из* (19.2), (19.4) *и областью* Ω.

Запишем уравнение (19.1) в виде

$$a_{ij}u_{x_ix_j} = F(x), \tag{19.6}$$

где $F(x) \equiv f(x) - a_iu_{x_i} - au$. Уравнение (19.6) умножим на $u_{x_1x_1}/a_{22}$ и результат представим так:

$$\frac{a_{11}}{a_{22}}u^2_{x_1x_1} + \frac{2a_{12}}{a_{22}}u_{x_1x_2}u_{x_1x_1} + u^2_{x_1x_2} = F\frac{u_{x_1x_1}}{a_{22}} + u^2_{x_1x_2} - u_{x_1x_1}u_{x_2x_2}. \tag{19.7}$$

В силу (19.2) левая часть (19.7), очевидно, не меньше $\frac{\nu}{\mu}\left(u^2_{x_1x_1} + u^2_{x_1x_2}\right)$, а модуль первого члена правой части равенства (19.7) не превосходит $\frac{\nu}{2\mu}u^2_{x_1x_1} + \frac{\mu}{2\nu}\frac{F^2}{a^2_{22}}$. Поэтому из (19.7) следует

$$\frac{\nu}{2\mu}\left(u^2_{x_1x_1} + u^2_{x_1x_2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\frac{\mu}{\nu^3}F^2 + u^2_{x_1x_2} - u_{x_1x_1}u_{x_2x_2}. \tag{19.8}$$

Рассмотрим интеграл

$$J_1 = \int\limits_\Omega \left(u_{x_1x_1}u_{x_2x_2} - u^2_{x_1x_2}\right)dx_1\,dx_2. \tag{19.9}$$

С. Н. Бернштейн доказал [$4_{2,\,3}$], что этот интеграл неотрицателен для любой функции u из $C_2(\overline{\Omega})$, равной нулю на S, если Ω есть круг. Покажем, что имеет место более общее предложение.

Лемма 19.1. *Для любой* u *из* $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$ *и произвольной области* Ω, *удовлетворяющей условиям леммы* 8.1, *справедливо соотношение*

$$J_1 = -\frac{1}{2}\int\limits_S \left.\frac{d^2\omega(y_1)}{dy_1^2}\right|_{y_1=0}\left(\frac{\partial u}{\partial y_2}\right)^2 ds, \tag{19.10}$$

где $y_2 = \omega(y_1)$ *есть уравнение* S *в местной системе координат, причем ось* y_1 *направлена по касательной к* S *в точке* $y_1 = y_2 = 0$, *а y_2 — по внешней по отношению к Ω нормали к S в той же точке. В частном случае, для выпуклых областей Ω, $-\left.\dfrac{d^2\omega(y_1)}{dy_1^2}\right|_{y_1=0} \geqslant 0$ и потому $J_1 \geqslant 0$.*

Формула (19.10) есть частный случай более общего предложения (8.19), доказанного в § 8. Действительно, J_1 можно представить в виде

$$J_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[(\Delta u)^2 - \sum_{i,\,j=1}^{2} u_{x_i x_j}^2\right] dx,$$

а этот интеграл с помощью двукратного интегрирования по частям, проведенного так, как это сделано в § 8, преобразуется к виду

$$2J_1 = \int\limits_{S} \delta_i^j \delta_k^l \left[u_{x_k x_l} u_{x_i} \cos(\mathbf{n}, x_j) - u_{x_j x_l} u_{x_i} \cos(\mathbf{n}, x_k)\right] ds, \tag{19.11}$$

из которого ясно, что $2J_1$ совпадает с интегралом $\int\limits_{S} I_S\, ds$ из § 8, вычисленным для $a_{ij} = \delta_i^j$, и потому для него верно равенство (8.19) или, что то же, (19.10).

По условию

$$\left.\frac{d^2\omega(y_1)}{dy_1^2}\right|_{y_1=0} \leqslant K \qquad (K \geqslant 0), \tag{19.12}$$

следовательно,

$$-J_1 \leqslant \frac{K}{2}\int\limits_{S}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 ds. \tag{19.13}$$

Проинтегрируем обе части неравенства (19.8) по Ω и используем (19.13):

$$\frac{\nu}{2\mu}\int\limits_{\Omega}\left(u_{x_1x_1}^2 + u_{x_1x_2}^2\right) dx \leqslant \frac{1}{2}\frac{\mu}{\nu^3}\int\limits_{\Omega} F^2\, dx + \frac{K}{2}\int\limits_{S}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 ds. \tag{19.14}$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\frac{\nu}{2\mu}\int\limits_{\Omega}\left(u_{x_2x_2}^2 + u_{x_1x_2}^2\right) dx \leqslant \frac{1}{2}\frac{\mu}{\nu^3}\int\limits_{\Omega} F^2\, dx + \frac{K}{2}\int\limits_{S}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 ds. \tag{19.15}$$

Из (19.14) и (19.15) следует

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i,\,j=1}^{2} u_{x_i x_j}^2\, dx \leqslant \frac{2\mu^2}{\nu^4}\int\limits_{\Omega} F^2\, dx + \frac{2\mu}{\nu}K\int\limits_{S}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 ds. \tag{19.16}$$

Из этого неравенства и (19.6) неравенство (19.5) выводится так же, как это было сделано в общем случае в § 8.

Итак, мы видим, что получение оценки (19.5) для эллиптического оператора общего вида (19.1) при $n=2$, по существу, сводится к аналогичному вопросу для оператора Лапласа. Это сведение сделано с помощью представления уравнения (19.1) в виде (19.7) и перехода от (19.7) к неравенству (19.8), в котором уже нет переменных коэффициентов $a_{ij}(x)$.

Этот прием, принадлежащий С. Н. Бернштейну, позволяет в случае $n=2$ получать желаемые оценки $u(x)$, не дифференцируя коэффициенты $a_{ij}(x)$. Ниже мы используем его для получения априорных оценок $\max\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|$ и $|u|_{\Omega}^{(1+\alpha)}$. Сейчас же отметим один частный случай оценки (19.16).

Следствие 19.1. Если Ω — выпуклая область и $u \in \overset{\circ}{W}{}_{2,0}^{2}(\Omega)$, то

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{2} u_{x_i x_j}^2\, dx \leqslant \frac{2\mu^2}{\nu^4} \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} u_{x_i x_j} \right)^2 ds, \tag{19.17}$$

где постоянные ν и μ взяты из неравенства (19.2).

Если граничные значения $u(x)$ совпадают с граничными значениями известной функции $\varphi(x) \in W_2^2(\Omega)$, то, применяя к функции $v(x) = u(x) - \varphi(x)$ неравенство (19.5), для $u(x)$ получим оценку

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant \frac{2\mu}{\nu^2}\|f\|_{2,\Omega} + c_1\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(2)} + c\|u\|_{2,\Omega}. \tag{19.18}$$

Если относительно граничных значений u и границы S не делать никаких предположений, то вместо $\|u\|_{2,\Omega}^{(2)}$ можно оценить норму $\|u\|_{2,\Omega'}^{(2)}$ для любой $\Omega' \subset \Omega$. Для этого умножим (19.8) на $\zeta^4(x)$, где $\zeta(x)$ — срезающая функция для области Ω, так что $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1$, $\zeta|_S = 0$ и $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$. Интеграл

$$\tilde{J}_1 = \int\limits_{\Omega} (u_{x_1x_1} u_{x_2x_2} - u_{x_1x_2}^2)\, \zeta^4\, dx$$

преобразуем с помощью двукратного интегрирования по частям к виду

$$\tilde{J}_1 = 4 \int\limits_{\Omega} (-u_{x_1} u_{x_2x_2} \zeta^3 \zeta_{x_1} + u_{x_1} u_{x_1x_2} \zeta^3 \zeta_{x_2})\, dx,$$

откуда

$$|\tilde{J}_1| \leqslant 2 \int\limits_{\Omega} \left[\varepsilon (u_{x_1x_2}^2 + u_{x_2x_2}^2) \zeta^4 + \frac{1}{\varepsilon} |u_{x_1}|^2 \zeta^2 |\nabla\zeta|^2 \right] dx, \tag{19.19}$$

где ε — произвольное положительное число. Поэтому

$$\frac{\nu}{2\mu}\int_\Omega (u^2_{x_1x_1}+u^2_{x_1x_2})\zeta^4\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\mu}{2\nu^3}\int_\Omega F^2\zeta^4\,dx + 2\int_\Omega \left[\varepsilon(u^2_{x_1x_2}+u^2_{x_2x_2})\zeta^4+\frac{1}{\varepsilon}u^2_{x_1}\zeta^2|\nabla\zeta|^2\right]dx.$$

Складывая это неравенство с аналогичным неравенством для производных $u_{x_1x_2}$ и $u_{x_2x_2}$ и выбирая $\varepsilon=(8\mu)^{-1}\nu$, после элементарных преобразований придем к неравенству

$$\int_\Omega \sum_{i,\,j=1}^{2} u^2_{x_ix_j}\zeta^2\,dx \leqslant \frac{4\mu^2}{\nu^4}\int_\Omega F^2\zeta^4\,dx+\frac{64\mu^2}{\nu^2}\int_\Omega |\nabla u|^2\zeta^2|\nabla\zeta|^2\,dx.$$

Рассуждая далее так же, как при выводе неравенства (8.6), придем к оценке вида (8.6):

$$\left(\|u\zeta^2\|^{(2)}_{2,\,\Omega}\right)^2 \leqslant \frac{8\mu^2}{\nu^4}\|\zeta^2 Lu\|^2_{2,\,\Omega}+c\int_\Omega u^2(\zeta^4+|\nabla\zeta|^4+\zeta^2\zeta^2_{xx})\,dx, \qquad (19.20)$$

в которой постоянная c зависит от ν, μ, q и μ_1 из (19.2) и (19.4). Неравенство (19.20) верно и для $\zeta(x)$, отличной от нуля вблизи какого-либо куска S_1 границы Ω, если этот кусок удовлетворяет условиям леммы 8.1, а $u\in C^2(\overline{\Omega})$ и равна нулю на S_1.

Замечание 19.1. Неравенства вида (19.5), (19.20) справедливы и для областей Ω класса W^2_q, $q>2$; при этом $u(x)$ может быть любой из $W^2_2(\Omega)$, равной нулю на S или S_1 соответственно. В этом случае коэффициентом при $\|Lu\|_{2,\,\Omega}$ и $\|\zeta^2 Lu\|^2_{2,\,\Omega}$ соответственно будет некоторая постоянная c_0, зависящая от тех же величин, что и c. Проверяются эти факты на основе доказанных выше утверждений точно так же, как лемма 8.3 выводилась из лемм 8.1 и 8.2.

Напомним, что через норму $\|u\|^{(2)}_{2,\,\Omega}$ оценивается норма $|u|^{(\alpha)}_\Omega$ с $\forall\alpha\in(0,1)$ и $\|u\|^{(1)}_{q,\,\Omega}$ с любым конечным q.

Замечание 19.2. Неравенство (19.5) справедливо не только при первом краевом условии $u|_S=0$, но и при любом другом «регулярном краевом условии», т. е. условии вида $\left(\frac{\partial u}{\partial l}+\sigma u\right)\Big|_S=0$, где $\frac{\partial}{\partial l}$ означает дифференцирование по какому-нибудь не касательному к S направлению, меняющемуся непрерывно дифференцируемым образом при перемещении вдоль S, а $\sigma(s)$ есть заданная, ограниченная на S функция. Схема доказательства (19.5) в этом случае та же, что и при условии $u|_S=0$. Основная аналитическая часть ее состоит в доказательстве того, что интеграл (19.9), сводящийся, как мы видели, к граничному интегралу (19.11), и при других «регулярных краевых условиях» преобразуется к интегралам по S, содержащим производные от u не выше первого порядка. Такие и значительно более общие преобразования граничных интегралов, возникающих при исследовании производных более высоких порядков, проведены в [21_3]. Подобные замечания о других краевых условиях справедливы и для проводимых ниже оценок норм гёльдеровского типа.

Перейдем теперь к оценкам $\max\limits_{\Omega}|u_{x_i}|$ и $|u|_{\Omega}^{(1+\alpha)}$ для решений уравнений (19.1).

Оценка константы Гёльдера для производных u_{x_i}, $i=1, 2$, была дана Л. Ниренбергом [44_1] с помощью весьма простого приема (его мы излагаем в § 6 гл. IX). Существенно сложнее, с привлечением квазиконформных преобразований и специальных представлений для решений двумерных эллиптических уравнений, была получена оценка $\max|\nabla u|$ (см. Л. Берс и Л. Ниренберг [$5_{1,2}$]). Оценки $|u|^{(1+\alpha)}$ имеются также в книге [6] И. Н. Векуа. Все эти способы сугубо двумерны.

Мы выведем все эти оценки с помощью нашего метода, изложенного выше для любого $n\geqslant 2$, причем ослабим предположения о функции $f(x)$ и коэффициентах оператора L максимально возможным образом. (Заметим, что возможность такого ослабления отмечена авторами работ [$5_{1,2}$].) Предположим, что $u(x)$ есть решение уравнения (19.1) из $W_2^2(\Omega)$, имеющее конечный $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$. Пусть коэффициенты $a_{ij}(x)$ удовлетворяют неравенствам (19.2) и

$$\|a_i,\ a,\ f\|_{q,\Omega}\leqslant\mu_1,\qquad q>2. \tag{19.21}$$

Начнем с оценки $|u_{x_i}|_{\Omega}^{(\alpha)}$, считая известными числа $M\geqslant\max\limits_{\Omega}|u|$, $M_1\geqslant\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$. Обозначим производную u_{x_1} через p_1 и перепишем неравенство (19.8) в виде

$$|\nabla p_1|^2\leqslant c_1F^2+c_2\left(u_{x_1x_2}^2-u_{x_1x_1}u_{x_2x_2}\right), \tag{19.22}$$

где c_1 и c_2 — известные постоянные, зависящие лишь от μ и ν из (19.2). Пусть $A_{k,\rho}$ есть множество точек x из произвольного круга K_ρ, в которых $p_1(x)>k$; если K_ρ не принадлежит целиком Ω, то $A_{k,\rho}$ выбирем из $K_\rho\cap\Omega$ и число k берем превосходящим $\max\limits_{K_\rho\cap S}p_1$. Умножим (19.22) на $\xi^2(x)$, где $\xi(x)$ — срезающая для K_ρ функция, и результат проинтегрируем по $A_{k,\rho}$.

Это дает

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla p_1|^2 \xi^2 \, dx \leqslant c_1 I_1 + c_2 I_2, \tag{19.23}$$

где $I_1 = \int\limits_{A_{k,\rho}} F^2 \xi^2 \, dx, \quad I_2 = \int\limits_{A_{k,\rho}} (p_{1x_2}^2 - p_{1x_1} u_{x_2x_2}) \xi^2 \, dx.$

В силу предположений (19.21) и ограниченности $|u|$ и $|\nabla u|$ для I_1 верна оценка (напомним, что всюду $0 \leqslant \xi \leqslant 1$)

$$I_1 \leqslant \| F^2 \|_{q/2, \Omega} \operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q}} A_{k,\rho} < \infty. \tag{19.24}$$

Интеграл же I_2 преобразуем с помощью двукратного интегрирования по частям следующим образом:

$$I_2 = -\int\limits_{A_{k,\rho}} \left[p_{1x_2x_2}(p_1 - k)\xi^2 + p_{1x_2}(p_1 - k) \cdot 2\xi\xi_{x_2} + p_{1x_1} u_{x_2x_2} \xi^2 \right] dx =$$

$$= \int\limits_{A_{k,\rho}} \left[u_{x_2x_2}(p_1 - k) 2\xi\xi_{x_1} - p_{1x_2}(p_1 - k) \cdot 2\xi\xi_{x_2} \right] dx. \tag{19.25}$$

Хотя на первом этапе этого преобразования используется существование у $u(x)$ производных третьего порядка, окончательное представление для I_2 справедливо, как нетрудно понять, для любой функции u из $W_2^2(\Omega)$. Производную $u_{x_2x_2}$ выразим из уравнения (19.1) и подставим в (19.25), после этого $|I_2|$ оценим сверху, используя (19.21) и неравенство Гёльдера:

$$|I_2| \leqslant 2 \int\limits_{A_{k,\rho}} (p_1 - k)\xi |\nabla\xi| \left[\left| \frac{F}{a_{22}} - 2\frac{a_{12}}{a_{22}} p_{1x_2} - \frac{a_{11}}{a_{22}} p_{1x_1} \right| + \right.$$

$$\left. + |p_{1x_2}| \right] dx \leqslant \frac{1}{2c_2} \int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla p_1|^2 \xi^2 \, dx +$$

$$+ 4c_2 \left(1 + \frac{5\mu^2}{\nu^2} \right) \int\limits_{A_{k,\rho}} (p_1 - k)^2 |\nabla\xi|^2 \, dx + c_3 \operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q}} A_{q,\rho}, \tag{19.26}$$

где c_3 зависит от $\|F\|_{q/2,\Omega}$, ν и μ. Подставляя (19.24) и (19.26) в (19.23), придем к неравенствам

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla p_1|^2 \xi^2 \, dx \leqslant \gamma \int\limits_{A_{k,\rho}} (p_1 - k)^2 |\nabla\xi|^2 \, dx + \gamma_1 \operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q}} A_{k,\rho}, \tag{19.27}$$

в которых постоянная γ определяется постоянными ν и μ из условия (19.2), а γ_1 зависит, кроме того, от μ_1 из (19.21) и величины $\max_\Omega |u, \nabla u|$. Аналогичные неравенства доказываются и для функции $-p_1 \equiv -u_{x_1}$. Следовательно, функция p_1 принадлежит классу $\mathfrak{B}_2(\Omega, M, \gamma, \gamma_1, 2, 1/q)$ и для нее верно заключение теоремы 6.1 гл. II, иначе говоря, для нее можно оценить нормы $|p_1|_{\Omega'}^{(\alpha)}$, $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, с некоторым $\alpha > 0$, зависящим лишь от ν, μ и q, через величины, которые мы считаем известными в данном рассуждении. Аналогично оцениваются $|u_{x_2}|_{\Omega'}^{(\alpha)}$, $\overline{\Omega}' \subset \Omega$.

Таким образом, доказана

Теорема 19.2. *Пусть $u(x)$ есть решение из $W_2^2(\Omega)$ с конечным* $\operatorname{vrai}\max_\Omega |\nabla u|$ *уравнения* (19.1), *коэффициенты которого удовлетворяют условиям* (19.2), (19.21). *Тогда нормы* $|u_{x_i}|_{\Omega'}^{(\alpha)}$, $i=1, 2$, $\forall \overline{\Omega'} \subset \Omega$, *с некоторым $\alpha > 0$, зависящим лишь от ν, μ и q, конечны и оцениваются сверху постоянной, определяемой $M \geqslant \max_\Omega |u|$, $M_1 \geqslant \operatorname{vrai}\max_\Omega |\nabla u|$, расстоянием Ω' до S и константами ν, μ, μ_1 и q из* (19.2) *и* (19.21).

Если предположить некоторую регулярность границы S и значений $u|_S$, то можно оценить $|u_{x_i}|_{\Omega}^{(\alpha)}$ для всей $\overline{\Omega}$. Без ограничения общности будем считать, что $u|_S = 0$. Пусть $\Omega \in W_q^2$, $q > 2$. Распрямим, вводя новые координаты $y_k = y_k(x) \in W_q^2$, $q > 2$, какой-нибудь кусок границы S_1 и рассмотрим в его окрестности сначала производную u лишь по касательному к нему направлению. Если S_1 имеет уравнение $y_2 = 0$, то возьмем u_{y_1}. На S_1 функция $\tilde{p}_1 \equiv u_{y_1}$ обращается в нуль. Для $\tilde{p}_1$ и $-\tilde{p}_1$ выводим, так же как и выше, неравенства (19.27), причем если K_ρ пересекает S_1, то берем лишь $k \geqslant 0$. Из теоремы 7.1 гл. II выводим оценку $|\tilde{p}_1|^{(\alpha)}$ вблизи S_1; точнее, для любого K_ρ, отстоящего от $S \setminus S_1$ на положительное расстояние и находящегося вблизи S_1 (там, где введены координаты y_1, y_2),

$$\omega_1(\rho) \equiv \operatorname{osc}\{\tilde{p}_1, K_\rho \cap \Omega\} \leqslant c_3\rho^\alpha. \tag{19.28}$$

Для оценки $\omega_2(\rho) \equiv \operatorname{osc}\{\tilde{p}_2 \equiv u_{y_2}, \Omega_\rho\}$ рассмотрим неравенство (19.27) для $\tilde{p}_1$ при $k = 0$ и соответствующее неравенство для $-\tilde{p}_1$ при $k = 0$. Складывая их и учитывая (19.28), найдем, что $\int_{\Omega_\rho} |\nabla \tilde{p}_1|\xi^2\, dx \leqslant c_4\rho^{2\beta}$, где $\beta = \min\left(\alpha, 1 - \frac{2}{q}\right)$, а потому и

$$\int_{\Omega_{\rho/2}} |\nabla \tilde{p}_1|^2\, dx \leqslant c_5\rho^{2\beta}, \tag{19.29}$$

Отсюда и из уравнения (19.1), записанного в координатах y_1, y_2, следует, что и

$$\int\limits_{\Omega_{\rho/2}} |\nabla \tilde{p}_2|^2\,dx \leqslant c_6\rho^{2\beta}. \tag{19.30}$$

Из этих же неравенств на основании леммы 4.2 гл. II следует, что производная $\tilde{p}_2 \equiv u_{y_2}$ также удовлетворяет условию Гёльдера и

$$\omega_2(\rho) \leqslant c_7\rho^{\beta}, \tag{19.31}$$

где все числа c_i — известные нам постоянные. Неравенства (19.28) и (19.31) дают оценку колебаний производных u_{y_1}, u_{y_2}, а следовательно, и u_{x_1}, u_{x_2} вблизи куска S_1. Преобразование от x_1, x_2 к y_1, y_2 должно быть вблизи S_1 обратимым, причем производные одних координат по другим должны быть непрерывными по Гёльдеру. В силу нашего предположения относительно Ω $\left(\Omega \in W_q^2;\ q > 2\right)$ такое преобразование можно сделать в окрестности любой точки границы и получить оценку $\left|u_{x_i}\right|_{\Omega}^{(\alpha)}$ для всей области Ω. Мы доказали следующую теорему:

Теорема 19.3. *Пусть* $u(x) \in W_2^2(\Omega)$ *совпадает на* S с $\varphi(x)$ *и удовлетворяет уравнению* (19.1), *для которого выполнены условия* (19.2) *и* (19.21). *Если* $\Omega \in W_q^2$, $\varphi \in W_q^2(\Omega)$, $q > 2$, *и* $\max\limits_{\Omega}|u| \leqslant M$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\nabla u| \leqslant M_1$, *то* $u \in C^{(1+\alpha)}(\bar{\Omega})$ *с* $\alpha > 0$, *зависящим лишь от* ν, μ *и* q; *величина* $|u|_{\Omega}^{(1+\alpha)}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей от* ν, μ, μ_1, q, M, M_1, $\|\varphi\|_{q,\Omega}^{(2)}$ *и от области* Ω.

Перейдем теперь к оценке $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$. Докажем теорему.

Теорема 19.4. *Пусть* $u(x) \in W_2^2(\Omega)$ *и удовлетворяет уравнению* (19.1), *для которого выполнены условия* (19.2), (19.21). *Для* $\forall\Omega' \subset \Omega$ *величина* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'}|\nabla u|$ *конечна и оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* ν, μ, μ_1 *и* q *из* (19.2), (19.21), *нормы* $\|u\|_{2,\Omega}$ *и расстояния* Ω' *до* S. *Если* $\Omega \in W_q^2$ *и* $u(x)$ *на* S *совпадает с* $\varphi(x) \in W_q^2(\Omega)$, $q > 2$, *то* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ *оценивается сверху постоянной, определяемой величинами* ν, μ, μ_1, q, *нормами* $\|u\|_{2,\Omega}$, $\|\varphi\|_{q,\Omega}^{(2)}$ *и областью* Ω.

Докажем сначала первое утверждение. В силу теоремы вложения (2.26) гл. II из (19.20) и (19.21) следует, что для $\forall r \geqslant 1$ и $\forall\bar{\Omega}' \subset \Omega$ верна оценка

$$\|u\|_{r,\Omega'}^{(1)} \leqslant c(r, \Omega'), \tag{19.32}$$

где $c(r, \Omega')$ — постоянная, зависящая от r, нормы $\|u\|_{2,\Omega}$, расстояния Ω' до S и постоянных ν, μ, μ_1, q из условий (19.2) и (19.21). Ввиду этого и условия (19.21) функция $F \equiv f - a_i u_{x_i} - au$ суммируется по Ω' со степенью q', сколь угодно близкой к q, но меньшей q, и

$$\|F\|_{q', \Omega'} \leqslant c_1(q', \Omega'), \qquad q' < q, \tag{19.33}$$

где $c_1(q', \Omega')$, — вообще говоря, отличная от $c(r, \Omega')$ из (19.32) известная нам постоянная, неограниченно растущая при $\Omega' \to \Omega$ и $q' \to q$.

В любом шаре $K_\rho \subset \Omega$ при произвольном k для p_1 было выведено неравенство (19.23). Для I_1 и I_2 в силу (19.33) справедливы оценки

$$I_1 \leqslant c(q', \Omega') \operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q'}} A_{k,\rho}, \qquad q' < q, \tag{19.34}$$

и

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2c_2} \int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla p_1|^2 \xi^2 dx + \\ + c' \int\limits_{A_{k,\rho}} (p_1 - k)^2 |\nabla \xi|^2 dx + c(q', \Omega') \operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q'}} A_{k,\rho}. \tag{19.35}$$

Из них и неравенства (19.23) получим

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla p_1|^2 \xi^2 dx \leqslant c \int\limits_{A_{k,\rho}} (p_1 - k)^2 |\nabla \xi|^2 dx + c(q', \Omega') \operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q'}} A_{k,\rho}. \tag{19.36}$$

Так как q' можно взять сколько угодно близким к q и $q > 2$, то, считая q' в (19.36) бо́льшим 2, на основании теоремы 5.3 гл. II из (19.36) получим оценку $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'} p_1(x)$ сверху. Проводя аналогичные рассмотрения для $-p_1$, получим оценку $\operatorname{vrai}\min\limits_{\Omega'} p_1$ снизу. Так же проводятся внутренние оценки для $p_2 \equiv u_{x_2}$. Первая часть теоремы доказана.

Для получения оценки $|\nabla u|$ вблизи границы поступим так же, как мы сделали выше при оценке колебаний u_{x_i} в окрестности S. Именно, распрямим какой-либо кусок S_1 границы S за счет введения новых регулярных координат y_1 и y_2 и перейдем в (19.1) к координатам y_1 и y_2. Предполагая, что производные $x_i(y_1, y_2)$, $i = 1, 2$, по y_k первого и второго порядка $\in L_q$, $q > 2$, мы получим для $u(y_1, y_2) = u(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2))$ уравнение, коэффициенты которого обладают теми же свойствами (19.2), (19.21), что и коэффициенты (19.1) (легко видеть, что ограниченность $\frac{\partial x_l(y)}{\partial y_k}$ следует из принадлежности $\frac{\partial^2 x_l(y)}{\partial y_k \partial y_j}$ к L_q, $q > 2$). Пусть $y_2 = 0$ есть уравнение куска границы S_1. Тогда $u_{y_1}|_{S_1} = 0$. Пусть пересечение K_ρ с S принадлежит S_1. Обозначим через $A_{k,\rho}$ множество точек y из $K_\rho \cap \Omega$, где $\tilde{p}_1 \equiv u_{y_1} > k$. Очевидно, для $\tilde{p}_1$ справедливо неравенство (19.23), если только считать, что все выражено в координатах y_1, y_2.

Для $k \geqslant 0$ интеграл

$$I_2 = \int\limits_{A_{k,\rho}} (\tilde{p}^2_{1y_2} - \tilde{p}_{1y_1} u_{y_2y_2}) \xi^2 \, dy \tag{19.37}$$

допускает представление типа (19.25), ибо выделяющийся при двукратном интегрировании по частям контурный интеграл

$$\int\limits_{A_{k,\rho} \cap S_1} \xi^2 \left[\tilde{p}_{1y_2} (\tilde{p}_1 - k) \cos(\mathbf{n}, y_2) - u_{y_2y_2} (\tilde{p}_1 - k) \cos(\mathbf{n}, y_1)\right] ds \tag{19.38}$$

будет равен нулю. Благодаря этому для I_2 при $k \geqslant 0$ верна оценка типа (19.35). Интеграл I_1 оценивается так же, как и в (19.34) для внутренних шаров, и потому для $\tilde{p}_1$ при $k \geqslant 0$ неравенства (19.36) будут справедливы и для шаров K_ρ, пересекающих S_1 (но не $S \setminus S_1$). Они позволяют оценить сверху $\tilde{p}_1 \equiv u_{y_1}$ для областей, примыкающих к S_1 (см. теорему 5.3 гл. II). Аналогично, рассматривая функцию $-\tilde{p}_1$, получим оценку u_{y_1} снизу и потому оценку $\max\limits_{\Omega_1} |u_{y_1}|$ для любой области Ω_1, примыкающей к S_1 (но отстоящей от $S \setminus S_1$ на положительное расстояние).

Для функции $\tilde{p}_2 \equiv u_{y_2}$ неравенства (19.36) также справедливы, причем даже для всех k. Действительно, соответствующий ей интеграл типа I_2 имеет вид

$$I_2' = \int\limits_{A_{k,\rho}} (u^2_{y_1y_2} - u_{y_1y_1} u_{y_2y_2}) \xi^2 \, dy = \int\limits_{A_{k,\rho}} (\tilde{p}^2_{2y_1} - \tilde{p}_{2y_2} u_{y_1y_1}) \xi^2 \, dy$$

и при преобразовании к виду

$$I_2' = \int\limits_{A_{k,\rho}} \left[u_{y_1y_1} (\tilde{p}_2 - k) 2\xi\xi_{y_2} - \tilde{p}_{2y_1} (\tilde{p}_2 - k) 2\xi\xi_{y_1}\right] dy$$

выделится граничный интеграл

$$\int\limits_{A_{k,\rho} \cap S_1} \xi^2 \left[\tilde{p}_{2y_1} (\tilde{p}_2 - k) \cos(\mathbf{n}, y_1) - u_{y_1y_1} (\tilde{p}_2 - k) \cos(\mathbf{n}, y_2)\right] ds,$$

который равен нулю для любых k (на S_1 подынтегральное выражение обращается в нуль благодаря множителям $\cos(\mathbf{n}, y_1)$ и $u_{y_1y_1}$). Все остальные оценки и соображения, приводящие к оценке $\max\limits_{\Omega_1}|u_{y_2}|$, те же, что и выше для u_{y_1}. Переходя к старым переменным x, получаем оценку $|\nabla u|=\sqrt{u_{x_1}^2+u_{x_2}^2}$ вблизи S_1. Так оценивается $|\nabla u|$ в $\overline{\Omega}$ при $u|_S=0$. Если $u|_S=\varphi|_S$, $\varphi\in W_q^2(\Omega)$, то этот случай сводится к предыдущему с помощью рассмотрения вместо $u(x)$ функции $v(x)=u(x)-\varphi(x)$. Тем самым, закончено доказательство и второй части теоремы 19.4.

Из теорем 19.1—19.4 вытекает следующая теорема:

Теорема 19.5. *Пусть $u(x)\in W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению* (19.1), *для которого выполнены условия* (19.2), (19.21). *Тогда $u\in C^{(1+\alpha)}(\Omega)$ с $\alpha>0$, зависящим лишь от ν, μ и q из условий* (19.2), (19.21). *Норма $|u|_{\Omega'}^{(1+\alpha)}$, $\forall\overline{\Omega}'\subset\Omega$, оценивается постоянной, определяемой величинами ν, μ, μ_1 и q из* (19.2), (19.21), *нормой $\|u\|_{2,\Omega}$ и расстоянием Ω' до S.*

Если $\Omega\in W_q^2$, $u|_S=\varphi|_S$ и $\varphi\in W_q^2(\Omega)$ $(q>2)$, то $u\in C^{(1+\alpha)}(\overline{\Omega})$ и $|u|_\Omega^{(1+\alpha)}$ оценивается постоянной, зависящей лишь от ν, μ, μ_1 q, $\|u\|_{2,\Omega}$, $\|\varphi\|_{q,\Omega}^{(2)}$ и области Ω. Показатель α в этом случае определяется постоянными ν, μ и q.

Пусть выполнены условия второй части теоремы (19.5); тогда уравнение (19.1) можно рассматривать как уравнение

$$a_{ij}(x)\,u_{x_ix_j}=F(x)\equiv f(x)-a_iu_{x_i}-au \tag{19.39}$$

с $F(x)\in L_q(\Omega)$, $q>2$. Если предположить еще, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ непрерывны в $\overline{\Omega}$, то, используя метод склейки Шаудера, коротко описанный в § 11, и рассуждения §§ 9, 10, можно доказать, что $u(x)$ будет принадлежать $W_q^2(\Omega')$, $\overline{\Omega}'\subset\Omega$, при любом поведении u на S или $W_q^2(\Omega)$, если функция $\varphi(x)$, определяющая граничные значения $u(x)$, принадлежит $W_q^2(\Omega)$.

Рассмотрим теперь вопрос о разрешимости первой краевой задачи для Lu, считая $a_{ij}(x)$ произвольными ограниченными функциями, удовлетворяющими лишь неравенству (19.2), а область Ω такой же, как в § 9. Для этого предварительно заметим следующее: если к Lu добавить слагаемое $-\nu_0a_{22}u$ с достаточно большим ν_0, то для $L_1u\equiv Lu-\nu_0a_{22}u$ и произвольной функции u из $\overset{\circ}{W}{}_{2,0}^2(\Omega)$ вместо (19.5) будем иметь неравенство

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(2)}\leqslant c\,\|L_1u\|_{2,\Omega} \tag{19.40}$$

с постоянной c, определяемой лишь постоянными ν_0, ν, μ, q и μ_1 из (19.2), (19.4) и областью Ω. Действительно, рассуждая так, как и при выводе неравенства (19.14), получим неравенство

$$\frac{\nu}{2\mu}\int_\Omega (u^2_{x_1x_1}+u^2_{x_1x_2})\,dx-\int_\Omega \nu_0 u u_{x_1x_1}\,dx=$$
$$=\frac{\nu}{2\mu}\int_\Omega (u^2_{x_1x_1}+u^2_{x_1x_2})\,dx+\nu_0\int_\Omega u^2_{x_1}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\mu}{2\nu^3}\int_\Omega F_1^2\,dx+\frac{K}{2}\int_S\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 ds, \qquad (19.41)$$

в котором $F_1=L_1u-a_iu_{x_i}-au$. Из соотношения же

$$u_{x_2x_2}-\nu_0u=\frac{1}{a_{22}}\left(L_1u-a_{11}u_{x_1x_1}-2a_{12}u_{x_1x_2}-a_iu_{x_i}-au\right)$$

имеем

$$\int_\Omega (u_{x_2x_2}-\nu_0u)^2\,dx=\int_\Omega (u^2_{x_2x_2}+2\nu_0u^2_{x_2}+\nu_0^2u^2)\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{3}{\nu^2}\int_\Omega (F_1^2+\mu^2u^2_{x_1x_1}+4\mu^2u^2_{x_1x_2})\,dx. \qquad (19.42)$$

Из (19.41), (19.42) и наших предположений о a_i, a и Ω уже ясно, что число ν_0 можно взять настолько большим, чтобы имело место неравенство (19.40) (величина ν_0 определяется числами ν, μ, μ_1, q из (19.2) и (19.4) и Ω).

Нас интересует первая краевая задача для оператора L. Включим ее в однопараметрическое семейство задач

$$L_1u-\lambda a_{22}u=f, \qquad u|_S=0, \qquad (19.43)$$

где λ — произвольный параметр, а число ν_0 в L_1 столь большое, что для всего семейства операторов

$$L_\tau u\equiv(1-\tau)\,a_{22}\,(\Delta u-\nu_0u)+\tau\,(Lu-\nu_0a_{22}u), \qquad 0\leqslant\tau\leqslant 1,$$

справедливо неравенство (19.40), т. е. что для любой функции u из $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega)$ и τ из $[0,1]$

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega}\leqslant c\,\|L_\tau u\|_{2,\Omega}. \qquad (19.44)$$

Как показано выше в § 9, благодаря неравенству (19.44) задачи

$$L_\tau u=f, \quad u|_S=0, \qquad 0\leqslant\tau\leqslant 1, \qquad (19.45)$$

однозначно разрешимы в $W^2_{2,0}(\Omega)$ при любой f из $L_2(\Omega)$, если только Ω удовлетворяет условиям теоремы 9.1 (или теоремы 9.3); иначе говоря, для таких Ω операторы L_τ, $\tau\in[0,1]$, устанавливают взаимно однозначное соответствие между полными пространствами $\overset{2}{W}_{2,0}(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$. Ввиду этого вопрос о разрешимости задачи (19.43) в пространстве $\overset{2}{W}_{2,0}(\Omega)$ эквивалентен вопросу о разрешимости в $\overset{2}{W}_{2,0}(\Omega)$ уравнения

$$u - \lambda L_1^{-1}(a_{22}u) = L_1^{-1}f, \tag{19.46}$$

где L_1^{-1} — оператор, обратный оператору L_1 задачи (19.45) при $\tau = 1$. Оператор $Au = L_1^{-1}(a_{22}u)$ является вполне непрерывным в $L_2(\Omega)$, что следует из (19.44) и полной непрерывности вложения $\overset{2}{W}_{2,0}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Поэтому для уравнения (19.46) в $L_2(\Omega)$ справедливы теоремы Фредгольма. В частности, уравнение (19.46) разрешимо в $L_2(\Omega)$ при любой правой части из $L_2(\Omega)$, если только однородное уравнение

$$u - \lambda L_1^{-1}(a_{22}u) = 0 \tag{19.47}$$

имеет в $L_2(\Omega)$ только тривиальное решение. Отсюда и из того факта, что каждое решение из $L_2(\Omega)$ уравнения (19.47) и уравнения (19.46) с f из $L_2(\Omega)$ является элементом $\overset{2}{W}_{2,0}(\Omega)$, следует

Теорема 19.6. *Пусть для L выполнены требования* (19.2), (19.4), *а Ω удовлетворяет условиям теоремы* 9.1 *или теоремы* 9.3. *Задача*

$$Lu = f, \quad u|_S = 0 \tag{19.48}$$

разрешима в $\overset{2}{W}_{2,0}(\Omega)$ при любой правой части f из $L_2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда имеет место для (19.48) *теорема единственности в пространстве $\overset{2}{W}_{2,0}(\Omega)$. Если дополнительно известно, что $f(x)$ и $a(x)$ принадлежат $L_q(\Omega)$ и $\Omega \in \overset{2}{W}_q$, $q > 2$, то любое решение u задачи* (19.48) *из $\overset{2}{W}_{2,0}(\Omega)$ принадлежит $C^{(1+\alpha)}(\bar{\Omega})$.*

Последнее утверждение теоремы взято из теоремы 19.5.

Из вывода неравенства (19.40) ясно, что задача (19.43) однозначно разрешима, например, при всех $\lambda \geqslant 0$.

§ 20. О двумерных седлообразных поверхностях

Рассмотрим эллиптические уравнения вида

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} = 0 \tag{20.1}$$

при условии

$$a_{ij}\xi_i\xi_j > 0 \tag{20.2}$$

при $|\xi| \neq 0$.

Их решения обладают рядом специфических свойств. Во-первых, для любой функции u, удовлетворяющей уравнению (20.1) в какой-либо области Ω, справедливы неравенства

$$\min_S u \leqslant u(x) \leqslant \max_S u \tag{20.3}$$

(см. лемму 1.4 гл. III), $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Другой особенностью решений u уравнений (20.1) является то, что для строго выпуклых областей Ω величина $\max_\Omega |\nabla u|$ определяется лишь граничными значениями функции u (именно $\max_S |\varphi'(s), \varphi''(s)|$, где $\varphi(s) = u(x)|_{x=s \in S}$) и не зависит от коэффициентов a_{ij}.

Мы наши условия на граничные значения $\varphi(x)$ решения $u(x)$ сформулируем в таком виде: предположим, что нормали к плоскостям евклидова пространства (x_1, x_2, u), проходящим через три любые точки P_1, P_2, P_3 граничной кривой $l = \{(x, u): x = s \in S, u = \varphi(s)\}$, образуют с осью u углы α, для которых $|\operatorname{tg} \alpha|$ не превосходит какой-либо постоянной M_1. Это же, очевидно, верно и для плоскостей, являющихся предельными для таких плоскостей, когда какая-либо пара точек из P_i или все три точки P_1, P_2, P_3 сливаются. Область Ω при этом считаем строго выпуклой. Это условие, известное в литературе как «условие трех точек», гарантирует для решения u уравнения (18.1), равного φ на S, оценку

$$\max_S |\nabla u| \leqslant M_1. \tag{20.4}$$

Действительно, возьмем на кривой l произвольную точку x^0 и касательную к ней в точке x^0. Проведем через эту касательную две плоскости $\Pi^+(x^0)$ и $\Pi^-(x^0)$, нормали к которым с осью u образуют углы $\alpha^\pm$, удовлетворяющие условию $|\operatorname{tg} \alpha^\pm| = M_1$. В силу нашего условия кривая l будет заключена между плоскостями $\Pi^+(x^0)$ и $\Pi^-(x^0)$, точнее, ордината u для точек (x, u) кривой l будет заключена между ординатами u для точек $\Pi^\pm(x^0)$ с теми же x. Но тогда это же будет верно и для всей поверхности $u = u(x)$, $x \in \bar{\Omega}$. Действительно, если бы это было не так, то существовала бы подобласть Ω_1 области Ω, на границе которой решение u совпадало бы с линейной функцией $u = f(x) \equiv \equiv b_1(x_1 - x_1^0) + b_2(x_2 - x_2^0) + \varphi(x^0)$, а внутри Ω_1 было бы больше или меньше ее. Но это невозможно, так как функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению (20.1); поэтому разность $f(x) - u(x)$ является решением того же уравнения, равным нулю на границе области Ω_1, а такое решение в силу отмеченного выше свойства (20.3) должно тождественно равняться нулю в Ω_1.

Из доказанного следует, для точек $x \in \Omega$ верно соотношение $|u(x) - u(x^0)|/|x - x^0| \leqslant M_1$, и если функция u дифференцируема в $\bar{\Omega}$, то $|\nabla u|$ в точке x^0 не превосходит M_1. Неравенство (20.4) доказано.

Покажем, что это же верно и для всей области, т. е.

$$\max_{\Omega} |\nabla u| \leqslant M_1. \tag{20.5}$$

Поверхности $u = u(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, соответствующие решениям $u(x)$ уравнения (20.1), являются так называемыми седлообразными поверхностями. Они обладают следующими свойствами:

1) Никакая плоскость не может срезать с них шапочку, проектирующуюся внутрь $\bar{\Omega}$. Это значит, что для любой линейной функции $f(x) \equiv b_1x_1 + b_2x_3 + b_3$ и любого решения $u(x)$ уравнения (20.1) замкнутые множества точек $x \in \bar{\Omega}$, где $u(x) \geqslant f(x)$ или где $u(x) \leqslant f(x)$, либо пусты, либо имеют пересечения с границей Ω.

2) Если кривая l, ограничивающая поверхность $u = u(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, где $u(x)$ есть решение (20.1), удовлетворяет «условию трех точек», сформулированному выше, то любая плоскость $u = f(x) \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3$ с наклоном, бо́льшим M_1 (т. е. модуль тангенса угла, образованного нормалью к ней с осью u, больше M_1), имеющая с поверхностью $u = u(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, хотя бы одну общую точку (x^0, u^0) с x^0 из Ω, пересекает l в двух разных точках, разбивая ее на две дуги, на одной из которых $u(x) > f(x)$, а на другой $u(x) < f(x)$. Множества точек x, где $u(x) > f(x)$ и где $u(x) < f(x)$, односвязны.

Собственно, из двух описанных свойств седлообразных поверхностей нам существенно второе (или, что то же, второе и первое для плоскостей с наклоном, бо́льшим M_1). Докажем его. Обозначим через $\bar{\Omega}'$ множество тех точек x из $\bar{\Omega}$, где $u(x) \geqslant f(x)$. Оно содержит точку x^0. Если бы расстояние $\bar{\Omega}'$ до S было положительным, то (в силу непрерывности $u(x)$ и $f(x)$) множество $\bar{\Omega}'_\varepsilon$, где $u(x) \geqslant f(x) - \varepsilon$, при достаточно малом положительном ε также не имело бы общих точек с S. Но функция $u(x) - f(x) + \varepsilon$ есть решение уравнения (20.1), равное нулю на границе области $\bar{\Omega}'_\varepsilon$, следовательно, она равна нулю и во всей $\bar{\Omega}'_\varepsilon$. Но это невозможно, так как в точке x^0 разность $u(x^0) - f(x^0) + \varepsilon = \varepsilon$ положительна. Полученное противоречие доказывает, что $\bar{\Omega}'$ имеет по крайней мере одну общую точку с S.

При этом мыслимы следующие варианты: а) граница Ω' имеет с S две общие точки, которые разбивают S на две открытые дуги: на одной из них $u(x) - f(x) > 0$, а на другой $u(x) - f(x) < 0$; б) граница Ω' имеет с S одну общую точку x'

(в ней $u(x') - f(x') = 0$), и на $S \setminus x'$ функция $u(x) - f(x) < 0$; в) граница Ω' имеет с S одну общую точку x', и на $S \setminus x'$ $u(x) - f(x) > 0$. Других вариантов быть не может, ибо по «условию трех точек» плоскость $u = f(x)$ не может иметь с l трех и более общих точек. Случай а) соответствует тому, что мы хотим доказать. Случай б) невозможен. Действительно, если бы он имел место, то функция $u(x)$ равнялась бы $f(x)$ в $\overline{\Omega}'$ и была бы меньше $f(x)$ в $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}'$. Повернем плоскость $u = f(x)$ вокруг прямой, проходящей в этой плоскости через точку (x^0, u^0), где $u^0 = u(x^0) = f(x^0)$, параллельно касательной к S в точке x'. Нетрудно понять, что если угол поворота θ взять достаточно малым и вращение совершить в том направлении, которое соответствует увеличению ординаты u плоскости в точке x', то для повернутой плоскости $u = f_\theta(x)$ для $x \in S$ будем иметь $f_\theta(x) > u(x)$. Но это, как показано в начале доказательства свойства 2), несовместимо с равенством $f_\theta(x^0) - u(x^0) = 0$.

Случай в) также невозможен, ибо, переходя от функций $u(x)$ и $f(x)$ к функциям $-u(x)$ и $-f(x)$, мы сведем его к случаю б).

Итак, показано, что любая плоскость $u = f(x)$, имеющая с поверхностью $u = u(x)$ общую точку (x^0, u^0), $x^0 \in \Omega$, с наклоном, бóльшим M_1, разбивает S на два открытых куска; на одном из них $u(x) > f(x)$, на другом $u(x) < f(x)$, а в двух точках, разделяющих эти куски, $u(x) = f(x)$. Область Ω при этом разбивается на два открытых односвязных множества: Ω_1, где $u(x) > f(x)$, и Ω_2, где $u(x) < f(x)$, разделенных замкнутым множеством Ω_0, где $u(x) = f(x)$. Односвязность Ω_1 и Ω_2 следует из того, что если $u(x) = f(x)$ на границе какой-либо связной области $\Omega' \subset \Omega$, то это равенство справедливо во всей Ω'.

Ниже нам потребуется следующий почти очевидный топологический факт. Возьмем какую-либо точку x^0 из Ω_1 (где $u(x) > f(x)$) и две точки x' и x'' из Ω_2 (где $u(x) < f(x)$). Соединим точки x' и x'' ломаной P, не выходя из области Ω_2. Вектор, соединяющий точку x^0 с точкой x при движении x от x' до x'' вдоль ломаной P, повернется на некоторый угол ω (как всегда, вращение против часовой стрелки считаем положительным, а по часовой стрелке — отрицательным). Величина этого угла ω (включая и его знак) не зависит от ломаной. Как нетрудно понять, это есть следствие односвязности области Ω_1.

Переходим теперь к доказательству соотношения (20.5). Предположим противное. Тогда в Ω найдутся две точки $\tilde{x}$ и $\tilde{\tilde{x}}$ такие, что

$$\frac{|u(\tilde{x}) - u(\tilde{\tilde{x}})|}{|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}|} > M_1. \tag{20.6}$$

Без ограничения общности будем считать, что точки $\tilde{x}$ и $\tilde{\tilde{x}}$ лежат на интервале $(0, a)$ оси x_1, причем концы этого интервала принадлежат границе S. Нас интересует взаимное расположение прямой N, соединяющей точки $(\tilde{x}, \tilde{u})$, $(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{u}})$, где $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, 0)$, $\tilde{\tilde{x}} = (\tilde{\tilde{x}}_1, 0)$, $\tilde{u} = u(\tilde{x})$, $\tilde{\tilde{u}} = u(\tilde{\tilde{x}})$, и линии l_1 пересечения поверхности $u = u(x)$ с координатной плоскостью $x_2 = 0$. Уравнение линии l_1 такое: $u = u(x_1, 0)$, $0 \leqslant x_1 \leqslant a$. Совпадать l_1 с N на всем отрезке $[0, a]$ или даже в двух его концах не может, так как в этих случаях, беря еще какую-либо точку на контурной кривой l, мы провели бы через N и эту точку плоскость большого наклона (для такой плоскости модуль тангенса угла между нормалью к ней и осью u превосходил бы M_1), что противоречит «условию трех точек» на l. Но в таком случае или 1) на интервале $\tilde{x}_1 < x_1 < \tilde{\tilde{x}}_1$ есть точка x_1^0, в которой ордината кривой l_1 больше ординаты прямой N, а на интервалах $0 < x_1 < \tilde{x}_1$ и $\tilde{\tilde{x}}_1 < x_1 < a$ есть точки x_1' и x_1'', в которых ордината кривой l_1 меньше ординаты прямой N, или, наоборот, 2) в точке x_1^0 ордината l_1 меньше ординаты N, а в точках x_1' и x_1'' ординаты l_1 больше ординат N, или 3) одного из этих двух расположений можно добиться небольшим параллельным сдвигом N или небольшим поворотом (при котором удовлетворяется еще (20.6), точнее, при котором тангенс угла наклона прямой N к оси x_1 остается больше M_1) и последующим параллельным сдвигом N. Мы предоставляем читателю убедиться в справедливости этого утверждения. Здесь же покажем, что на самом деле для наших седлообразных поверхностей невозможны и расположения 1) и 2). Для примера возьмем случай 1). Проведем через прямую N какую-нибудь плоскость П: $u = f(x) \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3$. Она разобьет Ω на три части: Ω_1, Ω_2 и Ω_0; в Ω_1 $u(x) > f(x)$, в Ω_2 $u(x) < f(x)$, в Ω_0 $u(x) = f(x)$. Точка $(x_1^0, 0) \in \Omega_1$, точки $(x_1', 0)$ и $(x_1'', 0)$ принадлежат Ω_2. Угол поворота ω вектора, соединяющего точку $(x_1^0, 0)$ с $(x_1', 0)$, при движении конца этого вектора вдоль произвольного полигона, лежащего в Ω_2, до точки $(x_1'', 0)$ равен $+\pi$ или $-\pi$. При непрерывном повороте плоскости П вокруг прямой N точки $(x_1^0, 0)$, $(x_1', 0)$, $(x_1'', 0)$ и полигон, соединяющий $(x_1', 0)$ и $(x_1'', 0)$, продолжают оставаться в областях типа Ω_1, где $u(x) > f(x)$, и Ω_2, где $u(x) < f(x)$, и потому число ω (а оно вообще при рассматриваемом расположении точек на одной прямой может иметь или значение $+\pi$, или значение $-\pi$) остается неизменным. С другой стороны, ясно, что плоскость П можно провести и так, чтобы $\omega = +\pi$, и так, чтобы $\omega = -\pi$. Полученное противоречие и доказывает невозможность расположения 1). Так же устанавливается невозможность расположения 2), а тем самым и абсурдность исходного предположения (20.6).

Сформулируем доказанные предложения в виде теоремы.

Теорема 20.1. *Для любого решения* $u(x)$ *эллиптического уравнения* (20.1), *непрерывного в* $\overline{\Omega}$ *и дважды дифференцируемого в* Ω, *справедливо соотношение* (20.3). *Если* Ω — *строго выпуклая область и кривая* l: $\{x = s \in S,\ u = \varphi(s)\}$ *в пространстве* (x, u), *ограничивающая поверхность* $u = u(x)$, *удовлетворяет «условию трех точек» с постоянной* M_1, *то* $u(x)$ *удовлетворяет в* $\overline{\Omega}$ *условию Липшица с постоянной* M_1; *если к тому же* $u(x)$ *дифференцируема в* $\overline{\Omega}$, *то* $\max\limits_{\overline{\Omega}} |\nabla u| \leqslant M_1$.

Это предложение имеется в работах [4_2, 43]. Данный здесь способ его доказательства принадлежит фон Нейману 43].

Глава IV

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДИВЕРГЕНТНОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

Мы начинаем исследование квазилинейных эллиптических уравнений с изучения специального класса этих уравнений — уравнений с дивергентной главной частью. Они имеют вид

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx_i} a_i(x, u, u_x) + a(x, u, u_x) = 0. \qquad (0.1)$$

Этот класс охватывает многие важные уравнения механики и геометрии. Например, он включает все линейные эллиптические уравнения вида (2.1) гл. I, квазилинейные уравнения вида

$$a_{ij}(x, u)\, u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = 0,$$

уравнения Эйлера регулярных вариационных задач для функционалов $\int\limits_\Omega F(x, u, u_x)\, dx$.

Для этого класса уравнений получены наиболее полные и законченные результаты по вопросам исследования дифференциальных свойств решений и разрешимости краевых задач. Для них можно определить обобщенные решения, имеющие производные только первого порядка. В § 2 гл. I были выяснены те ограничения на функции $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$, которые необходимы для того, чтобы для уравнений (0.1) были допустимы обобщенные решения $u(x)$ из $W_m^1(\Omega)$ с конечным $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega |u|$ и обобщенные решения из $W_{m,q}^1 = W_m^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)$. В данной главе мы докажем достаточность этих условий, а также проследим за тем, как улучшаются дифференциальные свойства таких обобщенных решений по мере улучшения дифференциальных свойств функций $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$. Начнем мы с изучения обобщенных решений $u(x)$, имеющих конечный $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega |u|$.

В данной главе и вообще во всех главах, посвященных нелинейным задачам, кроме гл. IX, мы будем предполагать, что функции, образующие уравнения, являются ограниченными функциями на любом компактном множестве изменения их аргументов. В частности, мы не будем допускать никаких особенностей этих функций по аргументу x, и потому результаты гл. III, относящиеся к линейным уравнениям с неограниченными коэффициентами, не будут вытекать из доказываемых ниже теорем о нелинейных уравнениях. Однако можно было бы, оставаясь в рамках методов, развиваемых в данной книге, рассмотреть квазилинейные уравнения с функциями $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$, имеющими особенности по x и включающими в себя как частный случай линейные уравнения гл. III. Мы не делаем этого здесь, так как хотим сосредоточить все внимание читателя на особенностях нелинейных задач и не хотим нагромождения дополнительных трудностей, связанных с наличием возможных особенностей функций $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ по x.

Такое обобщение можно сделать, используя данную здесь методику получения априорных оценок, которая состоит в общих чертах в том, что из интегрального тождества, заменяющего собою уравнение, выводятся неравенства типа (5.9) и (6.1) гл. II, из которых в свою очередь на основании теорем 5.1, 6.1 и 7.1 гл. II делается заключение об ограниченности и гёльдеровости тех или иных функций.

Параграфы 1—7 отражают в основном результаты работ $[21_{12-15, 17, 20}]$ авторов. В § 10 с помощью теорем Шаудера и Лерэ о неподвижных точках вполне непрерывных преобразований и априорных оценок, установленных в §§ 1—8, доказывается классическая разрешимость задачи Дирихле для уравнений (0.1). В § 9 исследуется разрешимость задачи Дирихле для уравнений (0.1) в классах $W^1_{m,q}$. Делается это с использованием метода Галеркина и ведущего свое начало от работ $[\mathbf{36}_{1,2}]$ Г. Минти способа выполнения слабых предельных переходов под знаком монотонного оператора (см. в связи с этим работы [7], $[\mathbf{32}_3]$, $[\mathbf{36}_3]$, [18] и др.). О вкладе других математиков в исследование уравнений (0.1) см. вводную главу.

§ 1. Ограниченные обобщенные решения. Непрерывность по Гёльдеру

Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx_i} a_i(x, u, u_x) + a(x, u, u_x) = 0. \tag{1.1}$$

Предположим, что функции $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ определены при $x \in \bar{\Omega}$ и произвольных u, p, измеримы и подчиняются условиям

$$a_i(x, u, p) p_i \geqslant \nu(|u|) |p|^m - \mu(|u|), \tag{1.2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2(x, u, p)\right)^{1/2} (1 + |p|) + |a(x, u, p)| \leqslant \mu(|u|)(1 + |p|)^m, \tag{1.3}$$

где $|p| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}$, $\nu(t)$ и $\mu(t)$ — известные функции, обладающие свойствами, перечисленными на стр. 26, а постоянная $m > 1$.

Ограниченным обобщенным решением (ог. об. решением) *уравнения* (1.1) будем называть функцию $u(x)$ из $W_m^1(\Omega)$ с $\operatorname{vrai}\max_\Omega |u| < \infty$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$L(u, \eta) \equiv \int_\Omega \left[a_i(x, u, u_x)\eta_{x_i} - a(x, u, u_x)\eta\right] dx = 0 \qquad (1.4)$$

при любой ограниченной функции $\eta(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$.

Выше, в § 2 гл. I, мы видели, что такой класс обобщенных решений естественным образом связан с рассматриваемым классом уравнений (1.1) — (1.3). На построенных там примерах было показано, что отказ от требования ограниченности модуля обобщенного решения $u(x)$ из $W_m^1(\Omega)$ при сохранении требований (1.2), (1.3) или ослабление условий (1.2), (1.3) при сохранении рассматриваемого класса ог. об. решений заведомо приведет к потере теоремы единственности в малом для задачи Дирихле. Однако заранее было неясно, не надо ли помимо условий типа (1.2), (1.3) накладывать какие-либо другие ограничения на характер нелинейности функций $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ по u и p для того, чтобы для уравнений (1.1) была правомерна в областях произвольной величины и формы теория только что определенных ог. об. решений. В данной главе будет доказано, что такие дополнительные ограничения не нужны. Точнее, будет доказано, что только при выполнении условий (1.2), (1.3) любое ог. об. решение будет удовлетворять условию Гёльдера, при выполнении условий (2.1), (2.2) оно будет единственным в малом, при выполнении условий (5.1), (5.2) оно будет принадлежать $W_2^2 \cap C^{1+\alpha}$, при дополнительной гладкости $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$, именно, когда a_i, a и частные производные a_i по x, u, p как функции (x, u, p) принадлежат $C^{1+\alpha}$, оно будет элементом $C^{2+\alpha}$, и т. д. Иными словами, будет доказано, что дифференциальные свойства ог. об. решений определяются дифференциальными свойствами функций $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ (они улучшаются по мере улучшения дифференциальных свойств этих функций), если только порядки роста по p при $|p| \to \infty$ функций

$$a_i, \quad a, \quad \frac{\partial a_i}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial a_i}{\partial u}, \quad \frac{\partial a_i}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial a}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial a}{\partial u}, \quad \frac{\partial a}{\partial x_k}$$

согласованы так, как это предписывают неравенства (1.2), (1.3), (2.1), (2.2), (5.1), (5.2). Такое согласование порядков для всего класса уравнений вида (1.1), как видно из примеров § 2 гл. I, необходимо.

Покажем прежде всего, что для ог. об. решений уравнения (1.1) можно оценить $\int |\nabla u|^m dx$ через $M \geqslant \operatorname{vrai}\max_{\Omega}|u|$ и известные постоянные. Именно, докажем следующую лемму:

Лемма 1.1. *Пусть $u(x)$ есть ог. об. решение уравнения* (1.1) *и* $\operatorname{vrai}\max_{\Omega}|u| \leqslant M$. *Тогда для любого шара K_ρ, $\rho \leqslant 1$, расположенного в Ω вместе с концентрическим ему шаром $K_{2\rho}$, интеграл $\int_{K_\rho} |\nabla u|^m dx$ не превосходит $c\rho^{n-m}$, где постоянная c зависит только от M, m и $\nu(M)$, $\mu(M)$ — из условий* (1.2), (1.3).

Если u на S совпадает с ограниченной функцией $\varphi(x)$ из $W_m^1(\Omega)$ (без ограничения общности будем считать, что $\operatorname{vrai}\max_{\Omega}|\varphi| \leqslant \operatorname{vrai}\max_{\Omega}|u|$), *то $\int_{\Omega} |\nabla u|^m dx$ не превосходит постоянной c, зависящей лишь от M, m, $\nu(M)$ и $\mu(M)$ из* (1.2), (1.3), $\|\varphi\|_{m,\Omega}^{(1)}$ *и* $\operatorname{mes}\Omega$.

Если к тому же $\varphi(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla\varphi|^m dx \leqslant c_1\rho^{n-m}, \quad \Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega, \tag{1.5}$$

для любого шара K_ρ, $\rho \leqslant 1$, то и интегралы $\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^m dx$ не превосходят $c\rho^{n-m}$, где c определяется M, m, $\nu(M)$ и $\mu(M)$ из (1.2), (1.3) *и c_1.*

Доказательство. Рассмотрим какие-либо концентрические шары $K_\rho \subset K_{2\rho} \subset \Omega$, $\rho \leqslant 1$, и произвольную срезающую для $K_{2\rho}$ функцию $\zeta(x)$, равную единице в K_ρ и нулю вне $K_{2\rho}$. В тождестве (1.4) возьмем функцию η равной $e^{\lambda u}\zeta^m$ с некоторым $\lambda > 0$:

$$\int_{\Omega} e^{\lambda u}\left(\lambda a_i u_{x_i}\zeta^m + a_i m\zeta^{m-1}\zeta_{x_i} - a\zeta^m\right) dx = 0. \tag{1.6}$$

Из этого равенства нужную нам оценку $\int_{K_\rho} |\nabla u|^m dx$ получим благодаря предположениям (1.2), (1.3), из которых следует

$$a_i u_{x_i} \geqslant \nu |\nabla u|^m - \mu,$$

$$\left|a_i m\zeta^{m-1}\zeta_{x_i}\right| \leqslant m\mu(1 + |\nabla u|)^{m-1}\zeta^{m-1}|\nabla\zeta| \leqslant$$
$$\leqslant (m-1)(1 + |\nabla u|)^m\zeta^m + \mu^m|\nabla\zeta|^m,$$

$$|a\zeta^m| \leqslant \mu(1 + |\nabla u|)^m\zeta^m, \quad \text{где} \quad \nu = \nu(M), \quad \mu = \mu(M).$$

Здесь при оценке второго члена использовано неравенство Юнга

$$ab \leqslant \frac{a^m}{m} + \frac{m-1}{m} b^{m/(m-1)}.$$

В силу этих неравенств из (1.6) получим

$$\nu\lambda \int_\Omega e^{\lambda u} |\nabla u|^m \zeta^m \, dx \leqslant c' \int_\Omega e^{\lambda u} [(1 + |\nabla u|^m) \zeta^m + |\nabla \zeta|^m] \, dx,$$

где c' зависит от ν, μ и m. Отсюда при $\lambda = 2c'/\nu$ получаем

$$\int_\Omega |\nabla u|^m \zeta^m \, dx \leqslant e^{4c'M/\nu} \int_\Omega (\zeta^m + |\nabla \zeta|^m) \, dx.$$

Выбирая $\zeta(x)$ так, чтобы $\max\limits_\Omega |\nabla \zeta| \leqslant 2\rho^{-1}$, выводим желаемую оценку

$$\int_{K_\rho} |\nabla u|^m \, dx \leqslant c\rho^{n-m},$$

где c зависит только от M, m, ν и μ.

Второе утверждение леммы 1.1 докажем, положив в (1.4) $\eta(x) = (e^{\lambda|u-\varphi|} - 1) \operatorname{sign}(u - \varphi)$. В третьем случае надо взять $\eta(x)$, равной $(e^{\lambda|u-\varphi|} - 1) \zeta \operatorname{sign}(u - \varphi)$, где $\zeta(x)$ — срезающая функция для произвольного шара $K_{2\rho}$, $\rho \leqslant 1$, равная единице в концентрическом с ним шаре K_ρ. После элементарных оценок, аналогичных проведенным выше, убедимся в справедливости второго и третьего утверждений леммы.

Докажем, что ог. об. решения непрерывны по Гёльдеру. Очевидно, для этого нужно рассмотреть лишь случай $m \leqslant n$, так как при $m > n$ гёльдеровость $u(x)$ следует из принадлежности $u(x)$ к $W_m^1(\Omega)$ (см. § 2 гл. II).

Пусть $u(x)$ есть ог. об. решение уравнения (1.1) с $m \leqslant n$, и пусть $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega |u(x)| \leqslant M$. Покажем, что $u(x)$ принадлежит некоторому классу $\mathfrak{B}_m(\overline{\Omega}, M, \gamma, \gamma, \delta, 1/q)$. Для этой цели положим в интегральном тождестве (1.4)

$$\eta(x) = \zeta^m(x) \max\{u(x) - k; 0\}, \tag{1.7}$$

где $\zeta(x)$ — срезающая функция для какого-либо шара K_ρ, а число k будем считать пока произвольным для внутренних шаров K_ρ и не меньшим максимума $u(x)$ на пересечении шара K_ρ с границей S, если это пересечение не пусто. В силу лемм 3.3, 3.7 гл. II функция (1.7) принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$, причем она отлична от нуля на множестве $A_{k,\rho}$ точек x из Ω_ρ, для которых $u(x) > k$. Поэтому тождество (1.4) будет иметь вид

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} \left[a_i(x, u, u_x) u_{x_i} \zeta^m + a_i (u-k) m\zeta^{m-1}\zeta_{x_i} - a(u-k)\zeta^m\right] dx = 0. \tag{1.8}$$

Воспользуемся условиями (1.2) и (1.3). Тогда из (1.8) получим неравенство

$$\nu \int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^m \zeta^m dx \leqslant \mu \int\limits_{A_{k,\rho}} [\zeta^m + m(1+|\nabla u|)^{m-1}\zeta^{m-1}|\nabla\zeta|(u-k) + (u-k)(1+|\nabla u|)^m \zeta^m]\, dx, \tag{1.9}$$

в котором постоянные $\nu = \nu(M)$, $\mu = \mu(M)$ берутся из условий (1.2) и (1.3). В правой части соотношения (1.9) член с $|\nabla\zeta|$ оценим по неравенству Юнга (см. (1.3) гл. II):

$$m(1+|\nabla u|)^{m-1}\zeta^{m-1}|\nabla\zeta|(u-k) \leqslant (m-1)\varepsilon(1+|\nabla u|)^m\zeta^m + \varepsilon^{1/(1-m)}(u-k)^m|\nabla\zeta|^m \leqslant \varepsilon 2^{m-1} m(1+|\nabla u|^m)\zeta^m + \varepsilon^{1/(1-m)}(u-k)^m|\nabla\zeta|^m, \tag{1.10}$$

и возьмем ε равным $\nu/(2^{m+1}\mu m)$. Тогда при таких значениях k, для которых

$$\max_{\Omega_\rho} u(x) - k \leqslant \frac{\nu}{2^{m+1}\mu} \equiv \delta M, \tag{1.11}$$

из (1.9) и (1.10) будет следовать неравенство

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^m \zeta^m dx \leqslant \gamma' \int\limits_{A_{k,\rho}} [(u-k)^m |\nabla\zeta|^m + \zeta^m]\, dx \tag{1.12}$$

с постоянной γ', зависящей лишь от ν, μ и m. Если теперь срезающую функцию $\zeta(x)$ брать равной единице в шаре $K_{\rho-\sigma\rho}$, $\sigma \in (0, 1)$, концентрическом шару K_ρ, и такой, что $|\nabla\zeta| \leqslant c/(\sigma\rho)$, то неравенства (1.12) дадут нам одну серию неравенств:

$$\int\limits_{A_{k,\rho-\sigma\rho}} |\nabla u|^m dx \leqslant \gamma\left[\frac{1}{(\sigma\rho)^m}\max_{A_{k,\rho}}[u(x)-k]^m + 1\right] \operatorname{mes} A_{k,\rho},$$

определяющих класс $\mathfrak{B}_m(\overline{\Omega}, M, \gamma, \gamma, \delta, 0)$ (ср. §§ 6, 7 гл. II).

Аналогичные неравенства для функции $-u(x)$ получим, если в (1.4) положим

$$\eta(x) = \zeta^m(x)\max\{-u(x) - k;\ 0\},$$

где значения k таковы, что

$$\max_{\Omega_\rho}[-u(x)] - k \leqslant \frac{\nu}{2^{m+1}\mu} \equiv \delta M,$$

а в шарах K_ρ, пересекающих границу S, кроме того,

$$k \geqslant \max_{S_\rho}[-u(x)], \quad S_\rho = K_\rho \cap S.$$

Мы доказали, что функция $u(x)$ принадлежит классу $\mathfrak{B}_m(\bar{\Omega}, M, \gamma, \gamma, \delta, 0)$, параметры которого γ и δ определяются константами m, $\nu(M)$ и $\mu(M)$ из условий (1.2) и (1.3). Поэтому на основании теорем 6.1 и 7.1 гл. II о функциях класса $\mathfrak{B}_m$ делаем следующий вывод (при $m \leqslant n$):

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия* (1.2) *и* (1.3). *Тогда любое ог. об. решение* $u(x)$ *уравнения* (1.1) *принадлежит классу* $C^\alpha(\Omega)$ *с показателем* $\alpha > 0$, *зависящим от* M *и постоянных* m, $\nu(M)$ *и* $\mu(M)$ *из* (1.2), (1.3), *причем для любой* $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ *норма* $|u|_{\Omega'}^{(\alpha)}$ *оценивается через* M, m, $\nu(M)$, $\mu(M)$ *и расстояние от* Ω' *до* S.

Если граница S *удовлетворяет условию* (A) *и если* $u|_S \in C^\beta(S)$, *то* $u(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ *и величина* $|u|_{\Omega}^{(\alpha)}$ *оценивается через* M, $\nu(M)$, $\mu(M)$, m, *постоянные* a_0 *и* θ_0 *из условия* (A), β *и норму* $|u|_S^\beta$, *причем* α *в этом случае зависит также от* θ_0 *и* β $(\alpha \leqslant \beta)$.

С помощью этой теоремы докажем нижеследующие леммы.

Лемма 1.2. *Пусть* Ω' — *строго внутренняя подобласть* Ω. *Для любого ог. об. решения* $u(x)$ *уравнения* (1.1) *при* $m \leqslant n$ *справедливы неравенства*

$$\int_{K_\rho} |\nabla u|^m dx \leqslant c\rho^{n-m+\alpha m}, \tag{1.13}$$

$$\int_{K_\rho} |x-y|^{-n+m-\frac{\alpha m}{2}} |\nabla u|^m dx \leqslant c\rho^{\frac{\alpha m}{2}}, \tag{1.14}$$

где шар K_ρ *вместе с концентрическим ему шаром* $K_{2\rho}$ *принадлежит* Ω', $\rho \leqslant 1$, *и* y — *произвольная точка из* K_ρ. *Показатель* α *берется из теоремы* 1.1, *а* c *определяется постоянными* M, m, $\nu(M)$, $\mu(M)$ *и расстоянием* Ω' *до* S.

Доказательство. Неравенства (1.13) и (1.14) достаточно установить лишь для малых ρ. Для них неравенство (1.13) следует из неравенства (1.12), если в последнем вместо шара K_ρ взять $K_{2\rho}$, функцию $\zeta(x)$ взять равной 1 в шаре K_ρ, концентрическом с $K_{2\rho}$, и такой, что $|\nabla\zeta| \leqslant 1/\rho$, а k положить равным наименьшему значению $u(x)$ в $K_{2\rho}$. Такое k взять можно, так как $\operatorname{osc}\{u; K_{2\rho}\} \leqslant c_1\rho^\alpha$ для $K_{2\rho} \subset \Omega'$, и потому при $c_1\rho^\alpha \leqslant \delta M$ требование (1.11) выполнено.

Неравенства же (1.14), как показано в лемме 4.3 гл. II, следуют из (1.13).

Лемма 1.3. *Пусть* $a_i(x, u, p)$ *и* $a(x, u, p)$ *удовлетворяют условиям* (1.2) *и* (1.3). *Тогда для любого ог. об. решения* $u(x)$ *уравнения* (1.1) *имеет место неравенство*

$$\int_{K_\rho} (1+|\nabla u|)^m \xi^2\,dx \leqslant c\rho^\alpha \int_{K_\rho} (1+|\nabla u|)^{m-2}|\nabla\xi|^2\,dx, \tag{1.15}$$

где $\xi(x)$ — *произвольная ограниченная функция из* $\overset{\circ}{W}{}^1_m(K_\rho)$, *если только шар* $K_{2\rho}$, *концентрический с шаром* K_ρ, *принадлежит* $\Omega' \subset \Omega$ *и радиус* ρ *не превосходит некоторого числа* $\rho_0 > 0$. *Постоянная с в* (1.15) *и* ρ_0 *определяются постоянными* M, m, $\nu(M)$ *и* $\mu(M)$ *из* (1.2), (1.3) *и расстоянием от* Ω' *до* S.

Доказательство. В случае $1 < m \leqslant 2$ утверждение леммы следует из неравенств (1.14) и из леммы 4.4 гл. II. Рассмотрим случай $m \geqslant 2$. Полагая в (1.4) $\eta(x) = [u(x) - u(x_0)]\,\xi^2(x)$, где x_0 — какая-либо точка K_ρ, и используя условия (1.2), (1.3), получим

$$\nu \int_{K_\rho} |\nabla u|^m \xi^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \mu \int_{K_\rho} \{\xi^2 + |u(x)-u(x_0)|[2(1+|\nabla u|)^{m-1}|\xi|\,|\nabla\xi| + (1+|\nabla u|)^m\xi^2]\}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \mu \int_{K_\rho} \{\xi^2 + |u(x)-u(x_0)|[2(1+|\nabla u|)^m\xi^2 + (1+|\nabla u|)^{m-2}|\nabla\xi|^2]\}\,dx,$$

и так как $\max\limits_{K_\rho}|u(x) - u(x_0)| \leqslant c_1\rho^\alpha$, то

$$\int_{K_\rho} |\nabla u|^m\xi^2\,dx \leqslant \frac{\mu}{\nu}\int_{K_\rho}\xi^2\,dx +$$
$$+ \frac{c_1\mu\rho^\alpha}{\nu}\int_{K_\rho}[2(1+|\nabla u|)^m\xi^2 + (1+|\nabla u|)^{m-2}|\nabla\xi|^2]\,dx. \tag{1.16}$$

По условию функция ξ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_m(K_\rho)$, $m \geqslant 2$, поэтому в силу (2.14) гл. II для ξ верно неравенство $\int\limits_{K_\rho}\xi^2\,dx \leqslant c_2\rho^2\int\limits_{K_\rho}|\nabla\xi|^2\,dx$.

Оценка (1.15) при достаточно малых ρ следует из двух последних неравенств.

Утверждения, аналогичные леммам 1.2 и 1.3, справедливы и для шаров K_ρ, пересекающих границу S. Действительно, пусть S удовлетворяет условию (A) и $u|_S = \varphi|_S$, причем $\varphi(x) \in W^1_m(\Omega) \cap C^\beta(\overline{\Omega})$.

По теореме 1.1 для любого шара K_ρ, $\rho \leqslant 1$,

$$\operatorname{osc}\{u;\ \Omega_\rho\} \leqslant c_1\rho^\alpha, \tag{1.17}$$

причем постоянная c_1 не зависит от расстояния центра шара до S.

Рассмотрим шар K_ρ, пересекающий какой-либо участок границы S, и пусть $\xi(x)$ есть произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega_\rho)$. Если $m \geqslant 2$, то, проводя те же рассуждения, что и для внутренних шаров в лемме 1.3, придем к неравенству

$$\int\limits_{\Omega_\rho} (1 + |\nabla u|)^m \xi^2 \, dx \leqslant c\rho^\alpha \int\limits_{\Omega_\rho} (1 + |\nabla u|)^{m-2} |\nabla\xi|^2 \, dx, \tag{1.18}$$

в котором c зависит лишь от M, $\nu(M)$, $\mu(M)$, m, a_0, θ_0 из условия (A), от нормы $|\varphi|_S^{(\beta)}$ и β. Радиус ρ в (1.18) не должен превышать при этом некоторого числа ρ_0, определяемого теми же величинами.

В случае $m \in (1, 2)$ доказательство неравенства (1.18) базируется на лемме 4.4 гл. II и следующем утверждении:

Лемма 1.2′. *Если S удовлетворяет условию* (A) *и функция $\varphi(x)$ принадлежит $W^1_m(\Omega) \cap C^\beta(\overline{\Omega})$ и подчиняется неравенствам*

$$\int\limits_{\Omega_\rho} |\nabla\varphi|^m \, dx \leqslant c_3\rho^{n-m+m\beta}, \tag{1.19}$$

то для любого ог. об. решения $u(x)$ уравнения (1.1), *удовлетворяющего условию*

$$u|_S = \varphi|_S\,^{*)}, \tag{1.20}$$

неравенства (1.13) *и* (1.14) *верны для произвольного шара K_ρ, причем интегралы в* (1.13) *и* (1.14) *берутся по Ω_ρ, а $\alpha > 0$ и c зависят от M, $\nu(M)$, $\mu(M)$, m из* (1.2), (1.3), *c_3, констант a_0 и θ_0 из условия* (A), *нормы $|\varphi|_\Omega^{(\beta)}$ и β.*

Убедимся в справедливости (1.13). Для этого положим в (1.4) $\eta(x) = [u(x) - \varphi(x)]\zeta^m(x)$, где $\zeta(x)$ — функция, срезающая для шара $K_{2\rho}$, концентрического шару K_ρ. Главным членом в получаемом равенстве будет $\int\limits_{\Omega_{2\rho}} a_i(x, u, u_x)\, u_{x_i}\zeta^m \, dx$.

Его оставим в левой части, а все остальные члены перенесем направо и оценим сверху, используя (1.17), (1.19) и (1.3)

---

*) Условие (1.20) означает, что $u(x) - \varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$.

из гл. II. В результате этого придем к неравенству (1.13). Неравенства же (1.14) являются следствиями (1.13).

На основании лемм 4.4 гл. II и 1.2′ заключаем, что при $m \in (1, 2)$ неравенства (1.18) будут выполняться, если S и $\varphi(x)$ подчинить условиям леммы 1.2′.

В §§ 2—6 мы устанавливаем еще ряд свойств ог. об. решений уравнений (0.1). Так как условия, налагаемые на функции $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ в этих параграфах, заведомо включают в себя условия (1.2), (1.3), то согласно теоремам § 1 любое ог. об. решение непрерывно в смысле Гёльдера. Это используется в дальнейшем, часто без специальных указаний.

§ 2. Единственность в малом

Предположим, что функции $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ при $x \in \overline{\Omega}$ и произвольных u, p дифференцируемы по переменным u, p, причем выполнено условие равномерной эллиптичности уравнения (1.1)

$$\nu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2 \leqslant \frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \leqslant \mu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2 \tag{2.1}$$

и неравенство

$$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|^2}\right)(1+|p|)+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial a}{\partial p_i}\right|^2}(1+|p|)+$$
$$+|a|+\left|\frac{\partial a}{\partial u}\right| \leqslant \mu(|u|)(1+|p|)^m. \tag{2.2}$$

Заметим, что из этих предположений следуют неравенства (1.2) и (1.3), ибо

$$a_i(x, u, p)\,p_i = p_i p_j \int_0^1 \frac{\partial a_i(x, u, \tilde{p})}{\partial \tilde{p}_j}\Bigg|_{\tilde{p}=\tau p} d\tau + p_i a_i(x, u, 0) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\nu(|u|)}{m-1}\left[(1+|p|)^{m-1}-1\right]|p| - \mu(|u|)|p| \geqslant \nu_1(|u|)|p|^m - \mu_1(|u|).$$

При этих условиях справедлива следующая теорема о единственности в малом ог. об. решений уравнения (1.1):

Теорема 2.1. *Два ог. об. решения $u'(x)$ и $u''(x)$, равные друг другу на поверхности шара $K_\rho \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$, совпадают в K_ρ, если только радиус ρ меньше некоторого числа ρ_0, определяемого величинами $M \geqslant \max\limits_{\Omega}|u', u''|$, $\nu(M)$, $\mu(M)$ и m из условий (2.1), (2.2) и расстоянием от Ω' до S.*

Доказательство. Для любой ограниченной функции $\eta(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_m(K_\rho)$ имеем

$$0 = L(u', \eta) - L(u'', \eta) = \int_0^1 \frac{d}{dt} L(u^t, \eta)\, dt,$$

где $u^t = (1-t)u'' + tu'$. Отсюда

$$0 = \int_{K_\rho} \left[\int_0^1 \frac{\partial a_i(x, u^t, u^t_x)}{\partial u^t_{x_j}} dt\, (u' - u'')_{x_j} + \int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial u^t} dt\, (u' - u'') \right] \eta_{x_i}\, dx -$$
$$- \int_{K_\rho} \left[\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial u^t_{x_j}} dt\, (u' - u'')_{x_j} + \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial u^t} dt (u' - u'') \right] \eta\, dx. \quad (2.3)$$

В силу предположений (2.1), (2.2) для $\tilde{a}_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial a_i(x, u^t, u^t_x)}{\partial u^t_{x_j}} dt$ верно неравенство

$$c_1 (1 + |\nabla u'| + |\nabla u''|)^{m-2} \xi^2 \leqslant \tilde{a}_{ij} \xi_i \xi_j \leqslant$$
$$\leqslant c_2 (1 + |\nabla u'| + |\nabla u''|)^{m-2} \xi^2, \qquad c_1, c_2 > 0, \quad (2.4)$$

а для

$$\tilde{a}_i = \int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial u^t} dt, \qquad \tilde{b}_i = \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial u^t_{x_i}} dt, \qquad \tilde{a} = \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial u^t} dt$$

— неравенства

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (|\tilde{a}_i| + |\tilde{b}_i|) \leqslant c_3 (1 + |\nabla u'| + |\nabla u''|)^{m-1}, \\ |\tilde{a}| \leqslant c_3 (1 + |\nabla u'| + |\nabla u''|)^m. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Все они легко выводятся из неравенств (2.1), (2.2). Положив в (2.3) $\eta = u' - u''$ и использовав приведенные здесь оценки, получим

$$c_1 \int_{K_\rho} (1 + |\nabla u'| + |\nabla u''|)^{m-2} |\nabla \eta|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant c_3 \int_{K_\rho} [(1 + |\nabla u'| + |\nabla u''|)^{m-1} |\eta| |\nabla \eta| + (1 + |\nabla u'| + |\nabla u''|)^m \eta^2]\, dx,$$

а следовательно, и неравенство

$$\int_{K_\rho} (1 + |\nabla u'| + |\nabla u''|)^{m-2} |\nabla \eta|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant c_4 \int_{K_\rho} (1 + |\nabla u'| + |\nabla u''|)^m \eta^2\, dx \quad (2.6)$$

с постоянной c_4, не зависящей от ρ. Рассмотрим отдельно случай $m \in (1, 2)$ и случай $m \geqslant 2$. Поскольку $|\nabla u'|$ и $|\nabla u''|$ подчиняются неравенствам (1.14), то при m из $(1, 2)$ в силу леммы 4.4 гл. II справедливо неравенство

$$\int\limits_{K_\rho} (1+|\nabla u'|+|\nabla u''|)^m \eta^2 \, dx \leqslant \\ \leqslant c\rho^{2\alpha} \int\limits_{K_\rho} (1+|\nabla u'|+|\nabla u''|)^{m-2} |\nabla \eta|^2 \, dx. \qquad (2.7)$$

Если ρ столь мало, что $c_4 c \rho^{2\alpha} < 1$, то из (2.6) и (2.7) следует равенство нулю η, т. е. совпадение u' с u''.

При $m \geqslant 2$ это же заключение будет верно для ρ, удовлетворяющих неравенству $2^m c_4 c \rho^\alpha < 1$, где постоянная c взята из неравенств (1.15) для u' и u''. Действительно, в этом случае из неравенств (1.15), справедливых для u' и u'', следует неравенство, получаемое из (2.7) заменой $\rho^{2\alpha}$ на $2^m\rho^\alpha$. А из такого неравенства и неравенства (2.6) вытекает совпадение u' с u'' при малых ρ.

Мы доказали свойство единственности в малом ог. об. решений уравнений (1.1) для любой строго внутренней подобласти $\Omega' \subset \Omega$. Предположим, что два решения u' и u'' на границе S совпадают с функциями φ' и φ'' соответственно, причем для S и граничных значений u' и u'' на S выполнены предположения леммы 1.2'. Тогда в силу леммы 1.2' и теоремы 1.1 постоянные в неравенствах (1.12) — (1.14), (1.17) и (1.18) равномерно ограничены, где бы ни был расположен шар K_ρ с $\rho \leqslant \rho_0$.

Пусть u' и u'' совпадают на границе области $\Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega$, $\rho \leqslant \rho_0$. Для них так же, как и выше, выводятся неравенства (2.6) и (2.7), причем интегралы в (2.6), (2.7) берутся по Ω_ρ, а постоянные c_4 и c уже не зависят от расположения шара K_ρ, а определяются лишь величинами $M \geqslant \max\limits_{\Omega} |u'(x), u''(x)|$, постоянными m $\nu(M)$, $\mu(M)$ из условий (2.1), (2.2), а также нормами $|\varphi', \varphi''|_\Omega^{(\beta)}$, константами c_3 и β из (1.19) для φ' и φ'' и константами a_0 и θ_0 из условия (A) на S. Поэтому можно утверждать, что если ρ не превосходит некоторого числа, зависящего от указанных постоянных, именно, если $\rho \leqslant \rho_0$ и $2^m c_4 c \rho^\alpha < 1$, то u' и u'' совпадают в Ω_ρ.

Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть ог. об. решения u' и u'' уравнения* (1.1) *удовлетворяют граничному условию* (1.20) *с $\varphi = \varphi'$ и $\varphi = \varphi''$*

соответственно, причем граница S и функции φ' и φ'' подчиняются требованиям леммы 1.2′. Тогда существует число $\rho_0 > 0$, зависящее только от $M \geqslant \max\limits_{\Omega} |u'(x), u''(x)|$, постоянных m, $\nu(M)$ и $\mu(M)$ из условий (2.1), (2.2) и постоянных из условий на φ', φ'' и S, такое, что если u' и u'' совпадают на границе области Ω_ρ и $\rho \leqslant \rho_0$, то $u' \equiv u''$ в Ω_ρ.

§ 3. Оценка $\max\limits_{\Omega'} |\nabla u|$

В этом параграфе мы покажем, как для решений $u(x)$ эллиптических уравнений с дивергентной главной частью (0.1) можно оценить максимумы модулей первых производных по любой внутренней подобласти Ω' через постоянные, характеризующие функции $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$, $\max\limits_{\Omega} |u|$ и расстояние от Ω' до S. Оценка $\operatorname{vrai}\max |\nabla u|$ во всей Ω дается ниже, в § 4. В обоих случаях существенно будет использовано то, что оценки $|u|_{\Omega'}^{(\alpha)}$ нам уже известны (см. теорему 1.1) и $u(x)$, тем самым, есть непрерывная функция.

Эти же вопросы исследуются в §§ 2—4 гл. VI для общих квазилинейных уравнений. Результаты гл. VI применимы, разумеется, и к уравнениям (0.1). Это надо иметь в виду, ибо в гл. VI рассмотрены также и случаи неравномерно эллиптических уравнений, которые здесь вне нашего поля зрения*). При этом выгоднее не формально применять окончательные результаты §§ 3, 4 гл. VI, а повторить их доказательства, учитывая дивергентную структуру уравнения (0.1) (см. в связи с этим также § 3 гл. IX). Это позволяет избежать требования двукратной дифференцируемости функций $a_i(x, u, p)$. Метод, применяемый в данном параграфе, имеет перед методом §§ 3, 4 гл. VI то преимущество, что он позволяет непосредственно рассматривать обобщенные решения, а при получении априорной оценки $\max\limits_{\Omega'} |\nabla u|$ в предположении принадлежности $u(x)$ к $W_2^2(\Omega) \cap \operatorname{Lip}(\overline{\Omega})$ не предполагать функцию $a(x, u, p)$ дифференцируемой.

Относительно функций $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$, входящих в уравнение (0.1), будем предполагать выполненными следующие условия: при $x \in \overline{\Omega}$ и произвольных u и p функция $a(x, u, p)$ измерима, функции $a_i(x, u, p)$ дифференцируемы по x, u и p,

---

*) Возможности данного здесь метода применительно к неравномерно эллиптическим уравнениям проанализированы в работах [15_{2-4}, $24_{1,2}$] и др.

и все они подчиняются неравенствам

$$\nu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2 \leqslant \frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \leqslant \leqslant \mu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2, \qquad (3.1)$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|^2 + a_i^2\right)\right]^{1/2}(1+|p|) + \left(\sum_{i,\,j=1}^{n}\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right|^2\right)^{1/2} + + |a| \leqslant \mu(|u|)(1+|p|)^m \qquad (3.2)$$

с $m>1$.

Из (3.1) и (3.2), в частности, следует (1.2):

$$a_i(x, u, p)\,p_i \geqslant \nu_1(|u|)\,|p|^m - \mu_1(|u|), \qquad \nu_1 > 0,$$

так что неравенства (1.2) и (1.3) имеют место. Нас интересуют ограниченные обобщенные решения из $W_m^1(\Omega)$. Однако сначала будем предполагать решение $u(x)$ более хорошим, именно, в этом и следующем параграфах будем считать, что $u \in W_2^2(\Omega') \cap \mathrm{Lip}(\overline{\Omega}')$ для $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$. Для таких решений оценим $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'}|\nabla u|$ через $M \geqslant \max\limits_{\Omega}|u|$, постоянные m, $\nu(M)$ и $\mu(M)$ из условий (3.1), (3.2) и расстояние Ω' до S. Далее, в § 5, это будет сделано для произвольного ог. об. решения из $W_m^1(\Omega)$.

Итак, пусть $u(x)$ есть ог. об. решение уравнения (0.1), удовлетворяющее указанным условиям. Оценим сначала интегралы $\int |\nabla u|^l\,dx$, $l>0$. При $l \leqslant m$ такая оценка дается леммой 1.1. При $l>m$ оценим их для произвольных шаров K_ρ достаточно малого радиуса ρ, величина которого будет фиксирована ниже в зависимости от m, $\nu(M)$ и $\mu(M)$ из (3.1), (3.2) и нормы $|u|_{\Omega'}^{(\alpha)}$. В данном параграфе мы рассматриваем интегралы $\int\limits_{K_\rho} |\nabla u|^l\,dx$ по внутренним шарам, точнее, по шарам, которые принадлежат области Ω вместе с концентрическими им шарами $K_{2\rho}$, отстоящими от S на положительное расстояние.

Положим в тождестве (1.4) функцию $\eta(x)$ равной $\xi_{x_r}(x)$, где $\xi(x)$ — произвольная, достаточно гладкая, финитная в Ω функция, а $r=1, \ldots, n$, и в первом члене проинтегрируем по частям. В результате получим тождество

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{da_i(x, u, u_x)}{dx_r}\,\xi_{x_i} + a(x, u, u_x)\,\xi_{x_r}\right)dx = 0, \qquad r=1, \ldots, n. \qquad (3.3)$$

Нетрудно убедиться, что при наших предположениях относительно $u(x)$ в качестве $\xi(x)$ в (3.3) можно взять функцию $\xi = b^s u_{x_r} \zeta^2$, $s \geqslant 0$, где $\zeta(x)$ — срезающая для шара $K_{2\rho}$ функция, а

$$b(x) = |\nabla u(x)|^2.$$

В результате подстановки этой функции в (3.3) будем иметь

$$\int\limits_{K_{2\rho}} \left[\left(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{x_r x_j} + \frac{\partial a_i}{\partial u} u_{x_r} + \frac{\partial a_i}{\partial x_r}\right)\left(u_{x_r x_i} b^s \zeta^2 + u_{x_r} s b^{s-1} b_{x_i} \zeta^2 + u_{x_r} b^s 2\zeta\zeta_{x_i}\right) + \right.$$
$$\left. + a\left(u_{x_r x_r} b^s \zeta^2 + u_{x_r} s b^{s-1} b_{x_r} \zeta^2 + u_{x_r} b^s 2\zeta\zeta_{x_r}\right)\right] dx = 0. \quad (3.4)$$

Проведем суммирование по r от 1 до n. В результирующем равенстве оставим слева два основных положительных члена, а остальные перенесем в правую часть и оценим сверху, используя условия (3.1), (3.2). Это приведет нас к неравенству

$$\int\limits_{K_{2\rho}} \left[\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{x_r x_i} u_{x_r x_j} b^s \zeta^2 + \frac{s}{2} \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} b_{x_i} b_{x_j} b^{s-1} \zeta^2\right] dx \leqslant$$
$$\leqslant c \int\limits_{K_{2\rho}} \left[b^s (1 + |\nabla u|)^m |u_{xx}| \zeta^2 + s b^{s-1} (1 + |\nabla u|)^{m+1} |\nabla b| \zeta^2 + \right.$$
$$\left. + 2b^s (1 + |\nabla u|)^{m+1} \zeta |\nabla\zeta| + 2b^s (1 + |\nabla u|)^{m-1} |u_{xx}| \zeta |\nabla\zeta|\right] dx. \quad (3.5)$$

Для оценки снизу положительных членов, стоящих в левой части, воспользуемся условием (3.1), члены же правой части оценим сверху по неравенству (1.2) гл. II, отдавая малое $\varepsilon > 0$ тем множителям, которые подобны членам левой части. В результате придем к неравенству

$$\int\limits_{K_{2\rho}} (1 + |\nabla u|)^{m-2} \left[b^s u_{xx}^2 \zeta^2 + s b^{s-1} |\nabla b|^2 \zeta^2\right] dx \leqslant$$
$$\leqslant c(s) \int\limits_{K_{2\rho}} \left[(1 + |\nabla u|)^{m+2} b^s \zeta^2 + (1 + |\nabla u|)^m (1 + b)^s (\zeta^2 + |\nabla\zeta|^2)\right] dx, \quad (3.6)$$

в котором $c(s)$ зависит лишь от s, m, $\nu(M)$, $\mu(M)$. Здесь и ниже при $s = 0$ и $b \geqslant 0$ величина b^s считается равной единице, а величина sb^{s-1} — нулю. Применим теперь к функциям $u(x)$ и

$\xi(x)=(1+b)^{s/2}\zeta$ неравенство (4.7) леммы 4.5 гл. II:

$$\int\limits_{K_{2\rho}} |\nabla u|^2 (1+|\nabla u|)^m (1+b)^s \zeta^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \operatorname{osc}^2\{u;\ K_{2\rho}\} \int\limits_{K_{2\rho}} \Big\{ (1+|\nabla u|)^{m-2} (1+b)^s u_{xx}^2 \zeta^2 +$$

$$+ (1+|\nabla u|)^m \sum_{i=1}^n \left[\frac{s}{2} (1+b)^{\frac{s}{2}-1} b_{x_i}\zeta + (1+b)^{\frac{s}{2}} \zeta_{x_i} \right]^2 \Big\}\,dx +$$

$$+ 2 \int\limits_{K_{2\rho}} (1+|\nabla u|)^m (1+b)^s \zeta^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \operatorname{osc}^2\{u;\ K_{2\rho}\} \int\limits_{K_{2\rho}} [(1+|\nabla u|)^{m-2} (1+b)^s u_{xx}^2 \zeta^2 +$$

$$+ s^2 (1+|\nabla u|)^{m-2} (1+b)^{s-1} |\nabla b|^2 \zeta^2 + 2 (1+|\nabla u|)^m (1+b)^s |\nabla \zeta|^2]\,dx +$$

$$+ 2 \int\limits_{K_{2\rho}} (1+|\nabla u|)^m (1+b)^s \zeta^2\,dx, \qquad s \geqslant 0. \tag{3.7}$$

При малых ρ величина $\operatorname{osc}\{u;\ K_{2\rho}\}$ мала, ибо по доказанному в § 1

$$\operatorname{osc}\{u;\ K_{2\rho}\} \leqslant c_2 \rho^\alpha. \tag{3.8}$$

В силу этого и установленной в лемме 1.1 оценки $\|\nabla u\|_{m,\,K_{2\rho}}$ из неравенств (3.6) и (3.7) можно заключить о том, что интегралы

$$\int\limits_{K_\rho} [|\nabla u|^{m+2+2s} + (1+|\nabla u|)^{m-2+2s} u_{xx}^2]\,dx \tag{3.9}$$

не превосходят постоянной $c(s)$, определяемой лишь величинами s, m, M, $\nu(M)$, $\mu(M)$ и расстоянием $K_{2\rho}$ до границы S.

В самом деле, просуммируем (3.6) и (3.7) в пределах от $s=0$ до $s=r$, после чего правую часть первого из полученных неравенств оценим сверху с помощью второго из полученных неравенств и учтем, что

$$\sum_{s=0}^r (1+b)^s \leqslant c(r) \sum_{s=0}^r b^s, \qquad \sum_{s=0}^r s^2 (1+b)^{s-1} \leqslant c(r) \sum_{s=0}^r s b^{s-1},$$

где $c(r)$ суть некоторые постоянные, зависящие лишь от r. Это дает нам следующие неравенства:

$$\int_{K_{2\rho}} (1+|\nabla u|)^{m-2}\left[u_{xx}^2\sum_{s=0}^{r} b^s + |\nabla b|^2 \sum_{s=0}^{r} s b^{s-1}\right]\zeta^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c(r)\int_{K_{2\rho}}\left[(1+|\nabla u|)^{m+2}\zeta^2\sum_{s=0}^{r} b^s + \right.$$

$$\left. + (1+|\nabla u|)^m(\zeta^2+|\nabla\zeta|^2)\sum_{s=0}^{r}(1+b)^s\right]dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1(r)\operatorname{osc}^2\{u;\,K_{2\rho}\}\int_{K_{2\rho}}\left[(1+|\nabla u|)^{m-2}u_{xx}^2\zeta^2\sum_{s=0}^{r}(1+b)^s + \right.$$

$$\left. + (1+|\nabla u|)^{m-2}|\nabla b|^2\zeta^2\sum_{s=0}^{r}s^2(1+b)^{s-1}\right]dx +$$

$$+ 4c(r)\int_{K_{2\rho}}(1+|\nabla u|)^m(\zeta^2+|\nabla\zeta|^2)\sum_{s=0}^{r}(1+b)^s\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_2(r)\rho^{2\alpha}\int_{K_{2\rho}}\left[(1+|\nabla u|)^{m-2}u_{xx}^2\zeta^2\sum_{s=0}^{r}b^s + \right.$$

$$\left. + (1+|\nabla u|)^{m-2}|\nabla b|^2\zeta^2\sum_{s=0}^{r}s b^{s-1}\right]dx +$$

$$+ 4c(r)\int_{K_{2\rho}}(1+|\nabla u|)^m(\zeta^2+|\nabla\zeta|^2)\sum_{s=0}^{r}(1+b)^s\,dx, \qquad r\geqslant 0. \tag{3.10}$$

При достаточно малых радиусах ρ, точнее, при ρ, удовлетворяющих условию

$$c_2(r)\rho^{2\alpha}\leqslant 1/2, \qquad r\geqslant 0, \tag{3.11}$$

из (3.10) следует

$$\int_{K_{2\rho}} (1+|\nabla u|)^{m-2}\left[u_{xx}^2\sum_{s=0}^{r} b^s + |\nabla b|^2 \sum_{s=0}^{r} s b^{s-1}\right]\zeta^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 8c(r)\int_{K_{2\rho}}(1+|\nabla u|)^m(\zeta^2+|\nabla\zeta|^2)\sum_{s=0}^{r}(1+b)^s\,dx \tag{3.12}$$

и

$$\int\limits_{K_{2\rho}} (1+|\nabla u)|)^{m+2}\zeta^2 \sum_{s=0}^{r} b^s\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_3(r) \int\limits_{K_{2\rho}} (1+|\nabla u|)^m (\zeta^2+|\nabla\zeta|^2) \sum_{s=0}^{r} (1+b)^s\,dx, \qquad r \geqslant 0. \qquad (3.13)$$

Обозначим через K^l, $l=1, 2, \ldots$, последовательность шаров, концентрических с $K_{2\rho}$ и имеющих радиусы $\rho+\frac{\rho}{2^l}$, $l=1, 2, \ldots$ Полагая в (3.13) и (3.12) $r=0$, получим желаемую оценку для $\int\limits_{K_{2\rho}} (1+|\nabla u|)^{m+2}\zeta^2\,dx$ и $\int\limits_{K_{2\rho}} (1+|\nabla u|)^{m-2} u_{xx}^2\zeta^2\,dx$, а следовательно, и для $\int\limits_{K^1} (1+|\nabla u|)^{m+2}dx$ и $\int\limits_{K^1} (1+|\nabla u|)^{m-2} u_{xx}^2\,dx$. Из неравенства (3.13) при $r=1$ и срезающей функции ζ, равной нулю вне шара K^1, выведем оценку для интеграла $\int\limits_{K^1} (1+|\nabla u|)^{m-2}\times$ $\times(1+b)\zeta^2\,dx$, что в свою очередь гарантирует оценку для $\int\limits_{K^2} (1+|\nabla u|)^{m+4}\,dx$. Продолжая это рассуждение, убедимся в возможности оценить интегралы (3.9) через известные нам величины. Для наших дальнейших целей число s в (3.9) достаточно взять равным $s_0=\left[\frac{n(m+4)-2m}{4}\right]$ в случае $m\geqslant 2$ и равным $s_1=\left[\frac{3n-m}{2}\right]$ при $m<2$.

Так как шар K_ρ в (3.9) был выбран при одном лишь условии, что концентрический с ним шар $K_{2\rho}$ принадлежит Ω и $K_{2\rho}$ отстоит от S на положительное расстояние, то мы вправе считать установленной оценку

$$\int\limits_{\Omega'} \left[|\nabla u|^{m+2+2s} + (1+|\nabla u|)^{m-2+2s} u_{xx}^2\right] dx \leqslant c(s, \Omega') \qquad (3.14)$$

для любой внутренней подобласти Ω' области Ω с постоянной $c(s, \Omega')$, зависящей лишь от s, M, $\nu(M)$, $\mu(M)$, m и расстояния от Ω' до S.

Переходим к оценке $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'}|\nabla u|$. Пусть $\zeta(x)$ — срезающая для Ω функция, равная единице в Ω' (напомним, что $0\leqslant\zeta\leqslant 1$). Будем считать сначала, что $m\geqslant 2$, и положим в (3.3)

$$\xi(x) = u_{x_r}(x)\,\zeta^2(x) \max\{|\nabla u(x)|^2\zeta^2(x)-l;\ 0\},$$

где $l \geqslant 0$. Суммируя полученные равенства по r от 1 до n, придем к соотношению

$$\int\limits_{|\nabla u|^2\zeta^2 > l} \left\{ \left[\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{x_r x_j} + \frac{\partial a_i}{\partial u} u_{x_r} + \frac{\partial a_i}{\partial x_r} \right] \left[u_{x_r x_i} \zeta^2 (|\nabla u|^2 \zeta^2 - l) + \right.\right.$$
$$\left. + (|\nabla u|^2 \zeta^2)_{x_i} \zeta^2 u_{x_r} + (|\nabla u|^2 \zeta^2 - l)\, 2\zeta \cdot \zeta_{x_i} u_{x_r} \right] +$$
$$+ a \left[(|\nabla u|^2 \zeta^2 - l) \zeta^2 u_{x_r x_r} + (|\nabla u|^2 \zeta^2)_{x_r} \zeta^2 u_{x_r} + \right.$$
$$\left.\left. + (|\nabla u|^2 \zeta^2 - l)\, 2\zeta \cdot \zeta_{x_r} u_{x_r} \right] \right\} dx = 0.$$

Производя здесь оценки с помощью неравенств (3.1), (3.2) и неравенства Коши с $\varepsilon > 0$, получим

$$\int\limits_{|\nabla u|^2\zeta^2 > l} (1 + |\nabla u|)^{m-2} \left\{ u_{xx}^2 (|\nabla u|^2 \zeta^2 - l) \zeta^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[(|\nabla u|^2)_{x_i} \right]^2 \zeta^4 \right\} dx \leqslant$$
$$\leqslant c \int\limits_{|\nabla u|^2\zeta^2 > l} (1 + |\nabla u|)^{m+4} (1 + |\nabla \zeta|^2)\, dx. \qquad (3.15)$$

Будем теперь рассматривать неотрицательную функцию $w(x) = |\nabla u(x)|^2 \zeta^2(x)$ и через A_k обозначим множество точек области Ω, для которых $w(x) > k$. Для нее

$$|\nabla w|^2 \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \left[(|\nabla u|^2)_{x_i} \right]^2 \zeta^4 + 8 |\nabla u|^4 \zeta^2 |\nabla \zeta|^2.$$

Отсюда и из (3.15) для любого $k > 0$ следует оценка (при $m \geqslant 2$)

$$\int\limits_{A_k} |\nabla w|^2 dx \leqslant c \int\limits_{A_k} (1 + |\nabla u|)^{m+4} dx \qquad (3.16)$$

с постоянной c, зависящей от $\max_{\Omega} |\nabla \zeta|$ и постоянных m, $\nu(M)$ и $\mu(M)$ из (3.1) и (3.2).

Правую часть (3.16) оценим по неравенству Гёльдера, используя оценку (3.14). Это даст

$$\int\limits_{A_k} |\nabla w|^2 dx \leqslant c \left(\int\limits_{A_k} (1 + |\nabla u|)^r dx \right)^{(m+4)/r} (\operatorname{mes} A_k)^{1-(m+4)/r} \leqslant$$
$$\leqslant c(s_0, \Omega'') (\operatorname{mes} A_k)^{1-(m+4)/r}, \qquad (3.17)$$

где $r = m + 2 + 2s_0$, а Ω'' — внутренняя подобласть Ω, вне которой $\zeta(x)$ равна нулю.

Поскольку $s_0 > \frac{(m+4)n - 2m}{4} - 1$, то $\frac{m+4}{r} < \frac{2}{n}$, и потому в силу леммы 5.3 гл. II из (3.17) следует оценка $\operatorname{vrai}\max_{\Omega'} |\nabla u|$ через известные нам величины.

В случае, когда $1 < m < 2$, нужно в тождестве (3.3) взять $\xi(x) = [1 + |\nabla u(x)|^2]^{(2-m)/2} u_{x_r}(x) \zeta^2(x) \max\{|\nabla u(x)|^2 \zeta^2(x) - l;\ 0\}$. Тогда получим

$$\int\limits_{|\nabla u|^2 \zeta^2 > l} (1 + |\nabla u|^2)^{(2-m)/2} \left\{ \left[\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{x_r x_j} + \frac{\partial a_i}{\partial u} u_{x_r} + \frac{\partial a_i}{\partial x_r} \right] \times \right.$$
$$\times \left[u_{x_r x_i} (|\nabla u|^2 \zeta^2 - l) \zeta^2 + (|\nabla u|^2 \zeta^2)_{x_i} \zeta^2 u_{x_r} + \right.$$
$$+ \frac{2-m}{2} (1 + |\nabla u|^2)^{-1} (|\nabla u|^2)_{x_i} (|\nabla u|^2 \zeta^2 - l) \zeta^2 u_{x_r} +$$
$$\left. + (|\nabla u|^2 \zeta^2 - l) 2\zeta\zeta_{x_i} u_{x_r} \right] + a \left[u_{x_r x_r} (|\nabla u|^2 \zeta^2 - l) \zeta^2 + \right.$$
$$+ (|\nabla u|^2 \zeta^2)_{x_r} \zeta^2 u_{x_r} + \frac{2-m}{2} (1 + |\nabla u|^2)^{-1} (|\nabla u|^2 \zeta^2 - l) \zeta^2 u_{x_r} (|\nabla u|^2)_{x_r} +$$
$$\left. \left. + (|\nabla u|^2 \zeta^2 - l) 2\zeta\zeta_{x_r} u_{x_r} \right] \right\} dx = 0.$$

По сравнению со случаем $m \geqslant 2$ мы имеем здесь дополнительные члены, содержащие производные от $(1 + |\nabla u|^2)^{(2-m)/2}$. Однако самый сильный из этих членов оказывается неотрицательным, а остальные оцениваются по неравенству Коши.

В результате вместо неравенства (3.15) будем иметь следующее:

$$\int\limits_{|\nabla u|^2 \zeta^2 > l} \left\{ u_{xx}^2 (|\nabla u|^2 \zeta^2 - l) \zeta^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[(|\nabla u|^2)_{x_i} \right]^2 \zeta^4 + \right.$$
$$\left. + \frac{2-m}{2} (|\nabla u|^2 \zeta^2 - l)(1 + |\nabla u|^2)^{-1} \zeta^2 \sum_{i=1}^{n} \left[(|\nabla u|^2)_{x_i} \right]^2 \right\} dx \leqslant$$
$$\leqslant c \int\limits_{|\nabla u|^2 \zeta^2 > l} (1 + |\nabla u|)^6 (1 + |\nabla \zeta|^2)\, dx. \qquad (3.18)$$

Дальше оценки проводятся точно так же, как выше при $m \geqslant 2$. Из этих рассуждений, леммы 1.1 и теоремы 1.1 следует

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (3.1), (3.2) *и* $u(x)$ *есть ог. об. решение уравнения* (0.1), *принадлежащее* $W_2^2(\Omega') \cap \mathrm{Lip}(\overline{\Omega}')$ *для* $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$. *Тогда величина* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'} |\nabla u|$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* $M \geqslant \max\limits_{\Omega} |u|$, m, $\nu(M)$, $\mu(M)$ *из условий* (3.1), (3.2) *и от расстояния* Ω' *до* S.

§ 4. Оценка $\max|\nabla u|$ во всей области Ω

Выше была дана оценка $\max\limits_{\Omega'} |\nabla u|$ по любой внутренней по отношению к Ω области Ω'. При этом никаких предположений относительно границы S и значений u на S не делалось.

В этом параграфе мы установим оценку $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ для решений первой краевой задачи для уравнения (0.1) в предположении, что $u(x)\in W_2^2(\Omega)\cap \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$, оценка $\mathrm{vrai}\max|\nabla u|\leqslant M_1$ на S (или части S) известна, а S (или ее часть) является достаточно гладкой. Оценка $\mathrm{vrai}\max\limits_{S}|\nabla u|$ будет дана позже, в § 2 гл. VI, сразу для решений квазилинейных уравнений общего вида

$$a_{ij}(x, u, u_x)u_{x_ix_j}+a(x, u, u_x)=0, \tag{4.1}$$

удовлетворяющих условию $u|_S=\varphi|_S$, где $\varphi(x)\in O^2(\overline{\Omega})$. Применительно к уравнениям (0.1) из теоремы 2.2 гл. VI вытекает следующее утверждение:

Лемма 4.1. *Пусть* $u(x)\in O^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, *удовлетворяет в* Ω *уравнению* (0.1), *а на* $S_1\subset S$ *краевому условию* (1.20) *с* $\varphi(x)\in O^2(\overline{\Omega}_1)$, *где* Ω_1 *есть подобласть области* Ω *и* $\partial\Omega_1\cap\partial\Omega=S_1$. *Пусть, далее,* $S_1\in O^2$ *и* $\max\limits_{\Omega}|u(x)|\leqslant M$. *Относительно функций* $a_i(x, u, p)$, *их производных* $\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j}$, $\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial u}$, $\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial x_i}$ *и* $a(x, u, p)$ *предположим, что при* $x\in\overline{\Omega}$, $|u|\leqslant M$ *и произвольных* p *они подчиняются неравенствам*

$$\nu(1+|p|)^{m-2}\xi^2\leqslant\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j\leqslant\mu(1+|p|)^{m-2}\xi^2, \tag{4.2}$$

$$\left|a(x, u, p)+\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial u}p_i+\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial x_i}\right|\leqslant\mu(1+|p|)^m \tag{4.3}$$

с какими-либо положительными постоянными ν, μ *и* m.

Тогда $\max\limits_{\bar{x}\in S_2,\ x\in\Omega_1}\frac{|u(x)-u(\bar{x})|}{|x-\bar{x}|}$ *для* S_2, *принадлежащей* S_1 *и отстоящей от* $\Omega\setminus\Omega_1$ *на положительное расстояние* d, *оценивается сверху постоянной* M_1, *зависящей лишь от* ν, μ, M, $|\varphi|_{\Omega_1}^{(2)}$, d *и нормы* S_1 *в* O^2. *Если* $\Omega_1=\Omega$ *и* S_1, *тем самым, есть* $\partial\Omega$, *то* $\max\limits_{\bar{x}\in S,\ x\in\Omega}\frac{|u(x)-u(\bar{x})|}{|x-\bar{x}|}$ *мажорируется постоянной, определяемой* ν, μ, M, $|\varphi|_{\Omega}^{(2)}$ *и нормой* $\partial\Omega$ *в* O^2.

Перейдем теперь к оценке $\max\limits_{\Omega_\rho}|\nabla u|$. Величины $\max\limits_{K_\rho}|\nabla u|$ для шаров K_ρ, отстоящих от S на положительное расстояние, оценены в § 3. Поэтому достаточно оценить лишь $\max\limits_{\Omega_\rho}|\nabla u|$ для шаров K_ρ с центрами на S. Все рассмотрения будут носить локальный характер и будут использовать некоторые сведения о $u(x)$ лишь вблизи исследуемого куска S_1 поверхности S.

Итак, пусть в некоторой подобласти $\Omega_1 \subset \Omega$, примыкающей к гладкому куску S_1 границы S, решение $u(x)$ имеет конечные нормы $\max\limits_{\Omega_1} |\nabla u|$ и $\|u\|^{(2)}_{2, \Omega_1}$, причем мажоранта M для $\max\limits_{\Omega_1} |u|$ и мажоранта для $|u|^{(\alpha)}_{\Omega_1}$ считаются известными. Кроме того, предположим, что $u|_{S_1} = 0$ (случай неоднородного условия $u|_{S_1} = \varphi|_{S_1}$ сводится к этому заменой $u(x)$ на $v(x) = u(x) - \varphi(x)$, если $\varphi(x)$ предположить, например, принадлежащей $C^2(\bar{\Omega})$ или даже $W^2_q(\Omega)$, $q > n$). Начнем с получения оценки

$$\int\limits_{\Omega_{2\rho}} \left[(1 + |\nabla u|)^{m-2} u^2_{xx} + (1 + |\nabla u|)^{m+2}\right] \zeta^2 \, dx \leqslant \\ \leqslant c \int\limits_{\Omega_{2\rho}} (1 + |\nabla u|)^m (\zeta^2 + |\nabla \zeta|^2) \, dx \qquad (4.4)$$

для $\Omega_{2\rho} = K_{2\rho} \cap \Omega \subset \Omega_1$, считая, что центр шара $K_{2\rho}$ лежит на S_1, а $\zeta(x)$ — срезающая для $K_{2\rho}$ функция.

Введем в окрестности S_1 такие координаты $y = y(x)$, в которых уравнение S_1 имеет вид $y_n = 0$, а функции $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}$ ограничены. Возьмем тождество (1.4), положим в нем $\eta = \frac{\partial \xi_\alpha(y)}{\partial y_\alpha}$, где $\xi_\alpha(y)$ — пока гладкая финитная в Ω функция, отличная от нуля лишь вблизи S_1, перейдем к интегрированию по переменным y и в первом члене проинтегрируем по частям, перенося $\frac{\partial}{\partial y_\alpha}$ на первый множитель. Это даст

$$\int\limits_{\Omega} \left[\frac{da_i}{dy_\alpha} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i} J + a_i \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right) J + \right. \\ \left. + a_i \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial J}{\partial y_\alpha} + a \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial y_\alpha} J\right] dy = 0\,^{*}), \qquad (4.5)$$

где $J = \operatorname{Det}\left(\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}\right)$. Нетрудно проверить, что тождество (4.5) остается справедливым, если в нем ξ_α положить равной $u_{y_\alpha} \zeta^2$, $\alpha \neq n$. Подставив эту функцию в (4.5) и просуммировав полученные равенства по α в пределах от 1 до $n-1$, мы получим равенство, в котором главным членом будет $\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{x_j y_\alpha} u_{y_\alpha x_i} \zeta^2 J$ или, точнее, $\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{y_\alpha x_i} u_{y_\alpha x_j} \zeta^2 J$ (последний

---

*) Чтобы не вводить новых обозначений, мы указываем области интегрирования для переменных x, а не y. Индекс α в (4.5) произвольно фиксирован, суммирования по нему нет.

от первого отличается «несущественным» слагаемым, возникающим из-за того, что дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial}{\partial y_\alpha}$ непереставновочны). Этот главный член оставим в левой части, а все остальные перенесем направо и оценим сверху, используя предположения (3.1), (3.2). В результате этого получим

$$\nu \int_{\Omega_{2\rho}} (1+|\nabla u|)^{m-2} \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} u^2_{y_\alpha x_i} \zeta^2 J\, dy \leqslant$$

$$\leqslant c \int_{\Omega_{2\rho}} \left[(1+|\nabla u|)^m \left(\sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} |u_{y_\alpha x_i}| \zeta^2 + |\nabla u| |\zeta| |\nabla\zeta| \right) + \right.$$

$$\left. + (1+|\nabla u|)^{m-1} \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} |u_{y_\alpha x_i}| |\zeta| |\nabla\zeta| \right] J\, dy. \quad (4.6)$$

Оценивая члены правой части с помощью неравенства Коши вида (1.2) гл. II и приводя затем подобные члены, мы из (4.6) выведем неравенство

$$\int_{\Omega_{2\rho}} (1+|\nabla u|)^{m-2} \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} u^2_{y_\alpha y_i} \zeta^2 J\, dy \leqslant$$

$$\leqslant c \int_{\Omega_{2\rho}} \left[(1+|\nabla u|)^{m+2} \zeta^2 + (1+|\nabla u|^m) |\nabla\zeta|^2 \right] J\, dy. \quad (4.7)$$

В левой части (4.7) вместо $\sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} u^2_{y_\alpha x_i}$ поставлено $\sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} u^2_{y_\alpha y_i}$. Это возможно, так как обе величины равносильны. В левой части (4.7) недостает члена с $u_{y_n y_n}$. Покажем, что его туда можно «вставить». Для этого возьмем уравнение (0.1), запишем его в координатах y и выразим из него $u_{y_n y_n}$ через остальные члены. Из этого выражения в силу предположений (3.1), (3.2), как легко проверить, следует неравенство

$$(1+|\nabla u|)^{m-2} |u_{y_n y_n}| \leqslant$$

$$\leqslant c \left[(1+|\nabla u|)^{m-2} \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} |u_{y_\alpha y_i}| + (1+|\nabla u|)^m \right], \quad (4.8)$$

из которого, в свою очередь, вытекает другое:

$$(1+|\nabla u|)^{m-2} u^2_{y_n y_n} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \left[(1+|\nabla u|)^{m-2} \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} u^2_{y_\alpha y_i} + (1+|\nabla u|)^{m+2} \right]. \quad (4.9)$$

Умножим (4.9) на $\zeta^2 J$, проинтегрируем по $\Omega_{2\rho}$ и сложим с (4.7). В результате получим

$$\int\limits_{\Omega_{2\rho}} (1+|\nabla u|)^{m-2} \sum_{i,\,j=1}^{n} u^2_{y_i y_j} \zeta^2 J\, dy \leqslant \\ \leqslant c_2 \int\limits_{\Omega_{2\rho}} \left[(1+|\nabla u|)^{m+2}\zeta^2 + (1+|\nabla u|)^m |\nabla\zeta|^2\right] J\, dy. \quad (4.10)$$

Это неравенство вместе с неравенством (4.7) гл. II гарантирует оценку (4.4) для всех достаточно малых $\rho \leqslant \rho_0$. Постоянная c в нем и ρ_0 определяются M, $\nu(M)$ и $\mu(M)$ из (3.1), (3.2), m, $|u|^{(\alpha)}_{\Omega_1}$ и нормой S_1 в O^2.

Получим теперь оценки вида (3.14) с любым $s \geqslant 1$ для $\Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega$, где K_ρ — шар, концентрический рассмотренному выше шару $K_{2\rho}$ с центром на S_1. По-прежнему будем считать, что $u|_{S_1} = 0$, и, кроме того, предположим, что $\operatorname{vrai}\max\limits_{S_1} |\nabla u| \leqslant M_1$. Возьмем в тождестве (3.3) функцию $\xi(x) = \tilde{b}^s(x)\, u_{x_r}(x)\, \zeta^2(x)$, $s \geqslant 1$, $r = 1, \ldots, n$, где

$$\tilde{b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\nabla u(x)| \leqslant M_1, \\ |\nabla u(x)|^2 - M_1^2 & \text{при } |\nabla u(x)| \geqslant M_1, \end{cases}$$

а $\zeta(x)$ — гладкая срезающая для шара $K_{2\rho}$ функция.

Легко видеть, что при $s \geqslant 1$ функция $\tilde{b}^s u_{x_r} \zeta^2$ обращается в нуль на границе Ω и в силу предположений о $u(x)$ является допустимой для тождества (3.3). Эта функция мало отличается от функции $b^s u_{x_r} \zeta^2$, которую мы брали при выводе внутренних оценок, и получаемые с нею соотношения в существенном такие же, как и выше. Именно, в результате подстановки $\tilde{b}^s u_{x_r} \zeta^2$ в (3.3) и оценок, аналогичных вышеприведенным, получим неравенства типа (3.6), в которых $b(x)$ заменено на $\tilde{b}(x)$, а $K_{2\rho}$ на $\Omega_{2\rho}$. Единственное важное отличие состоит в том, что эти неравенства (обозначим их через ($\widetilde{3.6}$)) выведены нами не для $s \geqslant 0$, как (3.6), а для $s \geqslant 1$. Для $s = 0$ присоединим к ним неравенство (4.4).

Справедливы также аналоги неравенств (3.7), именно неравенства ($\widetilde{3.7}$), получаемые из (3.7) заменой функции $b(x)$ на $\tilde{b}(x)$ и шара $K_{2\rho}$ на область $\Omega_{2\rho}$. То, что в данном случае $\zeta(x)$ обращается в нуль не на всей границе $\Omega_{2\rho}$, несущественно, ибо там, где $\zeta(x) \neq 0$ (на пересечении $K_{2\rho}$ с S_1), обращается в нуль функция u, и этого, как видно из леммы 4.5 гл. II, вполне достаточно.

Итак, в нашем распоряжении неравенство $(3.\tilde{6})$ для $s\geqslant 1$, неравенство (4.4) и неравенство $(3.\tilde{7})$ для $s\geqslant 0$. Из них так же, как и выше, выводится оценка интегралов

$$\int\limits_{\Omega_\rho}\left[|\nabla u|^{m+2+2s}+(1+|\nabla u|)^{m-2+2s}u_{xx}^2\right]dx\leqslant c(s). \qquad (4.11)$$

С помощью неравенств (4.11) величина $\max|\nabla u|$ в области $\Omega_{\rho/2}=K_{\rho/2}\cap\Omega$, где $K_{\rho/2}$ — шар, концентрический с K_ρ, оценивается таким же образом, как для внутренних подобластей. Надо лишь при подстановке в (3.3) функций

$$\xi(x)=u_{x_r}(x)\zeta^2(x)\max\{|\nabla u(x)|^2\zeta^2(x)-l;\ 0\}\quad\text{при}\quad m\geqslant 2$$

или

$$\xi(x)=u_{x_r}(x)\zeta^2(x)(1+|\nabla u(x)|^2)^{(2-m)/2}\times$$
$$\times\max\{|\nabla u(x)|^2\zeta^2(x)-l;\ 0\}\quad\text{при}\quad 1<m<2$$

брать значения $l\geqslant M_1^2$ (здесь $\zeta(x)$ — срезающая для K_ρ функция). Для таких l функции $\xi(x)$ обращаются в нуль на S и, следовательно, являются допустимыми для (3.3). Соответственно этому неравенства (3.17) будут выполняться не для всех положительных уровней k, а для k, больших некоторого $\tilde{k}>0$, зависящего от M_1. Этого, как видно из леммы 5.3 гл. II, достаточно, чтобы оценить $\max\limits_{\Omega_\rho}|\nabla u|^2\zeta^2$. Итак, доказана следующая лемма:

Лемма 4.2. *Пусть относительно* $a_i(x,u,p)$ *и* $a(x,u,p)$ *выполнены условия* (3.1) *и* (3.2), *а* $u(x)$ *есть ог. об. решение задачи* (0.1), (1.20), *принадлежащее* $W_2^2(\Omega)\cap\mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$. *Если* $\varphi(x)\in O^2(\overline{\Omega})$, $\operatorname{vrai}\max\limits_S|\nabla u|\leqslant M_1$ *и* $S\in O^2$, *то* $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega|\nabla u|$ *оценивается постоянной, зависящей лишь от* m, M, $\nu(M)$ *и* $\mu(M)$ *из* (3.1) *и* (3.2), M_1, $|\varphi|_\Omega^{(2)}$ *и* S.

Если только часть S_1 *границы* S *принадлежит* O^2,

$$\operatorname{vrai}\max_{S_1}|\nabla u|\leqslant M_1'\quad\text{и}\quad\varphi\in O^2(\overline{\Omega}_1),$$

где Ω_1 — *подобласть* Ω, *граница которой имеет с* S *общую часть, принадлежащую* S_1, *то для любой подобласти* Ω_2 *области* Ω_1, *отстоящей от части границы* Ω_1, *принадлежащей* Ω, *на какое-либо положительное расстояние* d, *величина* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega_2}|\nabla u|$ *не превосходит постоянной, зависящей лишь от* m, M, $\nu(M)$ *и* $\mu(M)$ *из* (3.1), (3.2), M_1', $|\varphi|_{\Omega_1}^{(2)}$, d *и поверхности* S_1.

Из лемм 4.1 и 4.2 следует

Теорема 4.1. *Пусть функции* $a_i(x, u, p)$ *и* $a(x, u, p)$ *при* $x \in \overline{\Omega}$, $|u| \leqslant M$ *и произвольных* p *удовлетворяют неравенствам* (3.1), (3.2), *а* $S \in O^2$. *Пусть* $u(x)$ *обладает свойствами, перечисленными в лемме* 4.1 *и лемме* 4.2, *и удовлетворяет уравнению* (0.1), *а на* S *удовлетворяет условию* $u|_S = \varphi(s)$, *где* $\varphi(x) \in O^2(\overline{\Omega})$. *Тогда* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$ *оценивается постоянной* M_1, *зависящей лишь от* M, m, $\nu(M)$ *и* $\mu(M)$ *из* (3.1), (3.2), $|\varphi|_{\Omega}^{(2)}$, *а также от поверхности* S.

§ 5. О существовании обобщенных производных второго порядка. Об ограниченности градиентов обобщенных решений

В §§ 3 и 4 были получены априорные оценки для $\max\limits_{\Omega'} |\nabla u|$ и $\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$ *в предположении ограниченности* $|\nabla u|$ *и существования у решения и производных второго порядка.* Здесь мы вернемся к рассмотрению ог. об. решений u из $\overset{1}{W}_m(\Omega)$. В § 1 было доказано, что любое ог. об. решение u принадлежит $C^{\alpha}(\Omega)$, если только a_i и a удовлетворяют условиям (1.2) и (1.3). Покажем, что при несколько более сильных ограничениях на функции a_i и a каждое такое u обладает обобщенными производными второго порядка и для него справедливы оценки, проведенные в § 3, в частности $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'} |\nabla u| \leqslant C(\Omega') < \infty$. Пусть при $x \in \overline{\Omega}$ и произвольных u и p функции $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ дифференцируемы по x, u и p и удовлетворяют неравенствам

$$\nu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2 \leqslant \frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \leqslant \mu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2, \quad (5.1)$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|^2 + a_i^2\right)\right]^{1/2}(1+|p|) + \left(\sum_{i,\, j=1}^{n}\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right|^2\right)^{1/2}(1+|p|) + |a| + \left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial a}{\partial p_i}\right|^2\right)^{1/2}(1+|p|) + \left|\frac{\partial a}{\partial u}\right| + \left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial a}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2} \leqslant \mu_1(|u|)(1+|p|)^m. \quad (5.2)$$

Легко видеть, что неравенства (1.2) и (1.3) следуют из этих предположений, и, следовательно, мы вправе считать, что о решении $u(x)$, помимо конечности норм $\|u\|^{(1)}_{m,\,\Omega}$ и $\max\limits_{\Omega}|u|\leqslant M$, известно: $u\in C^{\alpha}(\Omega')$ и $|u|^{(\alpha)}_{\Omega'}\leqslant M(\Omega')<\infty$ для $\forall\overline{\Omega}'\subset\Omega$.

Возьмем произвольный шар K_ρ, принадлежащий Ω вместе с концентрическим ему шаром $K_{2\rho}$, и функцию $\eta(x)=[f(u_{(k)}(x))\zeta^2(x)]_{(\bar{k})}$, где $\zeta(x)$ — гладкая срезающая для K_ρ функция, а $u_{(k)}$ и $[\ \ ]_{(\bar{k})}$ — правое и левое разностные отношения, определенные в § 1 гл. I, именно: $u_{(k)}(x)=h^{-1}[u(x+h\mathbf{e}_k)-u(x)]$, $u_{(\bar{k})}(x)=h^{-1}[u(x)-u(x-h\mathbf{e}_k)]$. Функция $f(t)$ равна t для $m\geqslant 2$ ($t\in(-\infty,\infty)$). При $m\in(1,2)$ $f(t)$ есть нечетная функция, равная при $t\geqslant 0$ интегралу $\int\limits_0^t f'(\tau)\,d\tau$, где $f'(\tau)$ есть 1 для $\tau\in[0,N]$ и $N^{2-m}\tau^{m-2}$ при $\tau\geqslant N$. Функция f зависит от параметра $N>0$, и потому ее лучше было бы обозначить, например, так: $f_N(t)$. Однако для упрощения записи индекс N в выкладках будем опускать. Функция $f(t)$ имеет производные f' и f'' (последняя при $m<2$ разрывна в точке $t=N$), причем $f'(t)>0$. Элементарно проверяется, что $0\leqslant tf(t)\leqslant c_m t^2 f'(t)$ для всех t, причем постоянная $c_m=1$ при $m\geqslant 2$ и $c_m=(m-1)^{-1}$ при $m\in(1,2)$. Кроме того, $\left(\frac{d}{dt}\sqrt{t^2 f'(t)}\right)^2\leqslant f'(t)$.

При $h\leqslant\rho$ взятая нами функция $\eta(x)$ допустима для тождества (1.4). Подставим ее в (1.4) и в обоих членах проведем «суммирование по частям» в соответствии с формулой (4.8) гл. II:

$$0=\int\limits_\Omega\{a_i(x,u,u_x)[f(u_{(k)})\zeta^2]_{(\bar{k})x_i}-a(x,u,u_x)[f(u_{(k)})\zeta^2]_{(\bar{k})}\}\,dx=$$
$$=-\int\limits_\Omega\{[a_i(x,u,u_x)]_{(k)}(f'u_{(k)x_i}\zeta^2+2f\zeta\zeta_{x_i})-[a(x,u,u_x)]_{(k)}f\zeta^2\}\,dx. \tag{5.3}$$

Но

$$[a_i(x,u,u_x)]_{(k)}=u_{(k)x_j}\int\limits_0^1\frac{\partial a_i(x^t,u^t,u^t_x)}{\partial u^t_{x_j}}\,dt+$$
$$+u_{(k)}\int\limits_0^1\frac{\partial a_i(x^t,u^t,u^t_x)}{\partial u^t}\,dt+\int\limits_0^1\frac{\partial a_i(x^t,u^t,u^t_x)}{\partial x^t_k}\,dt\equiv$$
$$\equiv\tilde{a}_{ij}u_{(k)x_j}+\tilde{a}_{i0}u_{(k)}+\tilde{b}_i,$$

$$[a(x,u,u_x)]_{(k)}=u_{(k)x_j}\int\limits_0^1\frac{\partial a}{\partial u^t_{x_j}}\,dt+u_{(k)}\int\limits_0^1\frac{\partial a}{\partial u^t}\,dt+\int\limits_0^1\frac{\partial a}{\partial x^t_k}\,dt\equiv$$
$$\equiv\tilde{a}_{0j}u_{(k)x_j}+\tilde{a}_{00}u_{(k)}+\tilde{b}_0,$$

где $u^t(x)=(1-t)\,u(x)+tu(x+he_k)$, $x^t=(1-t)\,x+t\,(x+he_k)$. Поэтому из (5.3) следует

$$\int_{K_\rho}\tilde a_{ij}u_{(k)\,x_i}u_{(k)\,x_j}f'\zeta^2\,dx=-\int_{K_\rho}\Big[2\tilde a_{ij}fu_{(k)\,x_j}\zeta\zeta_{x_i}+\\
+\tilde a_{i0}f'u_{(k)}u_{(k)\,x_i}\zeta^2+2\tilde a_{i0}fu_{(k)}\zeta\zeta_{x_i}+\tilde b_if'u_{(k)\,x_i}\zeta^2+\\
+2\tilde b_if\zeta\zeta_{x_i}-\tilde a_{0j}fu_{(k)\,x_j}\zeta^2-\tilde a_{00}fu_{(k)}\zeta^2-\tilde b_0f\zeta^2\Big]\,dx.$$

Из этого соотношения, учитывая предположения (5.1) — (5.2) и неравенства (2.4), (2.5), получим неравенство

$$\int_{K_\rho}P_k^{m-2}f'\,|\nabla u_{(k)}|^2\zeta^2\,dx\leqslant c_1\int_{K_\rho}\Big[P_k^{m-2}|f|\,|\nabla u_{(k)}|\,|\zeta|\,|\nabla\zeta|+\\
+P_k^{m-1}f'\,|\nabla u_{(k)}|\,|u_{(k)}|\,\zeta^2+P_k^{m-1}|f|\,|u_{(k)}|\,|\zeta|\,|\nabla\zeta|+\\
+P_k^{m-1}f'\,|\nabla u_{(k)}|\,\zeta^2+P_k^{m-1}|f|\,|\zeta|\,|\nabla\zeta|+P_k^{m-1}|f|\,|\nabla u_{(k)}|\,\zeta^2+\\
+P_k^{m}|f|\,|u_{(k)}|\,\zeta^2+P_k^{m}|f|\,\zeta^2\Big]\,dx,\qquad(5.4)$$

где $P_k=1+|\nabla u(x)|+|\nabla u(x+he_k)|$, а c_1 определяется постоянными из условий (5.1), (5.2). Каждый член правой части (5.4), содержащий $|\nabla u_{(k)}|$, оценим по неравенству (1.2) гл. II так, чтобы первое слагаемое было равно ε, умноженному на подынтегральное выражение, стоящее в левой части (5.4). Собирая затем эти первые слагаемые вместе и перенося их сумму налево, получим после приведения подобных членов половину интеграла, стоящего в левой части (5.4), если ε возьмем равным $(8c_1)^{-1}$. Слагаемые, оставшиеся после оценки членов с $|\nabla u_{(k)}|$, имеют вид $c_2\big[P_k^{m-2}(f^2/f')\,|\nabla\zeta|^2+P_k^mf'u_{(k)}^2\zeta^2+P_k^mf'\zeta^2+P_k^m(f^2/f')\,\zeta^2\big]\equiv c_2j_1$. Остальные четыре члена подынтегрального выражения, стоящего в правой части (5.4), можно оценить с помощью неравенства (1.2) гл. II с $\varepsilon=1$ так, чтобы они не превосходили слагаемых, входящих в выражение j_1. Наконец, заменим в j_1 дробь $f^2(u_{(k)})/(f'(u_{(k)})$ величиной, не меньшей $c_mu_{(k)}^2f'(u_{(k)})$. Все сказанное показывает, что из (5.4) следует неравенство

$$\int_{K_\rho}P_k^{m-2}f'\,|\nabla u_{(k)}|^2\zeta^2\,dx\leqslant c_3\int_{K_\rho}\big[P_k^{m-2}f'u_{(k)}^2\,|\nabla\zeta|^2+\\
+P_k^mf'u_{(k)}^2\zeta^2+P_k^mf'\zeta^2\big]\,dx\qquad(5.5)$$

с постоянной c_3, определяемой c_1 из (5.4) и m.

Для оценки интеграла $j_2=\int\limits_{K_\rho} P_k^m f' u_{(k)}^2\zeta^2\,dx$ при $m\geqslant 2$ используем лемму 1.3. А именно, запишем неравенство (1.15), во-первых, для решения $u(x)$ уравнения (1.1) и $\xi=\zeta\sqrt{f'u_{(k)}^2}$ и, во-вторых, для функции $v(x)\equiv u(x+he_k)$, являющейся решением уравнения

$$\frac{d}{dx_i}a_i(x+he_k,\ v(x),\ v_x(x))+a(x+he_k,\ v(x),\ v_x(x))=0,$$

имеющего те же свойства, что и уравнение (1.1), и той же функции $\xi=\zeta\sqrt{f'u_{(k)}^2}$. Сложим эти неравенства и воспользуемся элементарными неравенствами $(1+a+b)^m<2^{m-1}\times\times\left[(1+a)^m+(1+b)^m\right]$, $(1+a)^{m-2}+(1+b)^{m-2}\leqslant 2(1+a+b)^{m-2}$, справедливыми при $\forall a,\ b\geqslant 0,\ m\geqslant 2$. Это даст

$$\begin{aligned} j_2\equiv\int\limits_{K_\rho} P_k^m f' u_{(k)}^2\zeta^2\,dx\leqslant 2^{m-1}\int\limits_{K_\rho}[(1+|\nabla u|)^m+(1+|\nabla v|)^m]\,\xi^2\,dx\leqslant\\ \leqslant 2^{m-1}c\rho^\alpha\int\limits_{K_\rho}\left[(1+|\nabla u|)^{m-2}+(1+|\nabla v|)^{m-2}\right]|\nabla\xi|^2\,dx\leqslant\\ \leqslant 2^m c\rho^\alpha\int\limits_{K_\rho}P_k^{m-2}|\nabla\xi|^2\,dx\leqslant 2^{m+1}c\rho^\alpha\int\limits_{K_\rho}P_k^{m-2}\left[\left(\frac{d}{dt}\sqrt{t^2f'(t)}\right)^2\Big|_{t=u(k)}\times\right.\\ \left.\times|\nabla u_{(k)}|^2\zeta^2+f'u_{(k)}^2|\nabla\zeta|^2\right]dx\leqslant 2^{m+1}c\rho^\alpha\int\limits_{K_\rho}P_k^{m-2}f'(u_{(k)})\times\\ \times\left(|\nabla u_{(k)}|^2\zeta^2+u_{(k)}^2|\nabla\zeta|^2\right)dx. \qquad (5.6_1)\end{aligned}$$

При $m\in(1,\ 2)$ оценим интеграл j_2 так, как указано в лемме 4.4 гл. II, взяв в ней в качестве $u(x)$ функцию $P_k(x)$, в качестве ξ функцию $\zeta\sqrt{f'u_{(k)}^2}$, а в качестве α показатель αm. Условия этой леммы выполнены, ибо $P_k(x)\geqslant 0$ и в силу леммы 1.2 данной главы, примененной к решениям $u(x)$ и $v(x)$,

$$\begin{aligned}\int\limits_{K_\rho}|x-y|^{-n+m-\frac{\alpha m}{2}}P_k^m\,dx\leqslant\\ \leqslant 3^m\int\limits_{K_\rho}|x-y|^{-n+m-\frac{\alpha m}{2}}(1+|\nabla u|^m+|\nabla v|^m)\,dx\leqslant\\ \leqslant c_4\left[\rho^{m-\frac{\alpha m}{2}}+\rho^{\frac{\alpha m}{2}}\right]\leqslant 2c_4\rho^{\frac{\alpha m}{2}}.\end{aligned}$$

при $\rho \leqslant 1$. Оценка, даваемая леммой 4.4 гл. II для j_2, имеет тот же вид, что и последнее из неравенств (5.6_1), так что для любого $m > 1$ приходим к неравенству

$$j_2 \leqslant c_5 \rho^\alpha \int_{K_\rho} P_k^{m-2} f'(u_{(k)}) \left(|\nabla u_{(k)}|^2 \zeta^2 + u_{(k)}^2 |\nabla \zeta|^2 \right) dx, \qquad \rho \leqslant 1, \qquad (5.6_2)$$

с известной нам постоянной c_5. Для ρ, удовлетворяющих условию $c_3 c_5 \rho^\alpha \leqslant 1/2$, из (5.5) и (5.6_2) следует

$$\int_{K_\rho} P_k^{m-2} f' |\nabla u_{(k)}|^2 \zeta^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant c_6 \int_{K_\rho} \left(P_k^{m-2} f' u_{(k)}^2 |\nabla \zeta|^2 + P_k^m f' \zeta^2 \right) dx \equiv c_6 j_3(h), \qquad (5.7)$$

а отсюда и из (5.6_2) и

$$\int_{K_\rho} P_k^m f' u_{(k)}^2 \zeta^2 dx \leqslant c_7 j_3(h) \qquad (5.8)$$

Интеграл $j_3(h)$ при $h \to 0$ стремится к

$$j_4 \equiv \int_{K_\rho} \Big[(1 + 2|\nabla u|)^{m-2} f'(u_{x_k}) u_{x_k}^2 |\nabla \zeta|^2 +$$
$$+ (1 + 2|\nabla u|)^m f'(u_{x_k}) \zeta^2 \Big] dx.$$

Действительно, согласно лемме 4.6 гл. II $u_{(k)}$ сходится к u_{x_k} в норме $L_m(K_\rho)$ и почти всюду, а по теореме Д. Ф. Егорова и почти равномерно (т. е. равномерно на K_ρ, за исключением некоторых множеств сколь угодно малой меры). Кроме того, интегралы вида j_4, взятые по множествам малой меры, малы. Равномерно малы и интегралы вида $j_3(h)$, взятые по тем же множествам малой меры. Это так в силу сильной сходимости $u_{(k)}$ к u_{x_k} в $L_m(K_\rho)$ и выбора функции $f(t)$ (напомним, что для $m \geqslant 2$ $f(t) = t$, а для $m \in (1, 2)$ $0 \leqslant t^2 f'(t) \leqslant N^{2-m} |t|^m$ при $|t| > N$). Из всего сказанного следует, что $j_3(h) \to j_4$ при $h \to 0$, и, тем самым, $j_3(h)$ не превосходит некоторой постоянной.

Перейдем в (5.8) к пределу по $h \to 0$, используя для левой части известную лемму Фату о том, что для неотрицательных функций $F(x, h)$, сходящихся при $h \to 0$ почти всюду к $F(x)$ и имеющих равномерно ограниченные интегралы $\int_{K_\rho} F(x, h)\, dx$, справедливо неравенство $\int_{K_\rho} F(x)\, dx \leqslant \varliminf_{h \to 0} \int_{K_\rho} F(x, h)\, dx$. В результате получим неравенство

$$\int\limits_{K_\rho} (1+2|\nabla u|)^m f'(u_{x_k}) u_{x_k}^2 \zeta^2 \, dx \leqslant c_7 j_4, \tag{5.9}$$

из которого для $m \geqslant 2$ следует конечность интеграла $\int\limits_{K_\rho} |\nabla u|^m u_{x_k}^2 \zeta^2 \, dx$. Для $m \in (1, 2)$ перейдем в (5.9) к пределу по $N \to \infty$. Интеграл j_4 при этом будет иметь своим пределом интеграл

$$j_5 \equiv \int\limits_{K_\rho} \left[(1+2|\nabla u|)^{m-2} u_{x_k}^2 |\nabla \zeta|^2 + (1+2|\nabla u|)^m \zeta^2\right] dx.$$

Неравенство (5.9) приведет к неравенству

$$\int\limits_{K_\rho} (1+2|\nabla u|)^m u_{x_k}^2 \zeta^2 \, dx \leqslant c_7 j_5. \tag{5.10}$$

Суммируя (5.10) по k, получим

$$\int\limits_{K_\rho} (1+2|\nabla u|)^m |\nabla u|^2 \zeta^2 \, dx \leqslant$$
$$\leqslant c_7 \int\limits_{K_\rho} \left[(1+2|\nabla u|)^{m-2} |\nabla u|^2 |\nabla \zeta|^2 + \right.$$
$$\left. + n (1+2|\nabla u|)^m \zeta^2\right] dx \equiv c_7 j_6 \tag{5.11}$$

при любом $m > 1$.

Из (5.7) при $m \geqslant 2$ заключаем о равномерной ограниченности интегралов $\int\limits_{K_\rho} |\nabla u_{(k)}|^2 \zeta^2 \, dx$, что в силу леммы 4.6 гл. II гарантирует существование производных ∇u_{x_k} и сходимость почти всюду и почти равномерную $\nabla u_{(k)}$ к ∇u_{x_k} в K_ρ. Благодаря этому переход к пределу по $h \to 0$ в (5.7) и суммирование по k дает неравенство

$$\int\limits_{K_\rho} P^{m-2} u_{xx}^2 \zeta^2 \, dx \leqslant c_6 j_6, \quad \text{где} \quad P = 1 + 2|\nabla u|. \tag{5.12}$$

Чтобы доказать справедливость (5.12) для $m \in (1, 2)$, воспользуемся уже доказанной суммируемостью $|\nabla u|^{m+2} \zeta^2$ по K_ρ (см. (5.11)). Она гарантирует сходимость $u_{(k)}$ к u_{x_k} в нормах $L_{2+m}(K_{\rho-\varepsilon})$, $\forall \varepsilon > 0$ (см. лемму 4.6 гл. II). В неравенстве (5.7), как нетрудно видеть, в качестве функции $f(t)$ можно теперь взять $f(t) = t$ и для случая $m \in (1, 2)$. Ввиду этого положим в (5.7) $f' \equiv 1$ и перейдем к пределу по $h \to 0$, считая ζ равной нулю в пограничной полоске. Правая часть (5.7) при этом имеет своим пределом $c_6 j_5$, а левая часть (5.7), тем самым, не будет превосходить некоторой постоянной c_8. Это и неравенство Гёльдера

$$\int_{K_\rho} |\nabla u_{(k)}|^m \zeta^2\,dx \leqslant \left(\int_{K_\rho} P_k^m \zeta^2\,dx\right)^{(2-m)/2} \left(\int_{K_\rho} P_k^{m-2} |\nabla u_{(k)}|^2 \zeta^2\,dx\right)^{m/2}$$

гарантируют равномерную (по h) ограниченность интегралов $\int_{K_\rho} |\nabla u_{(k)}|^m \zeta^2\,dx$, из которой в силу леммы 4.6 гл. II следует существование производных ∇u_{x_k} и сходимость почти всюду и почти равномерно в K_ρ $\nabla u_{(k)}$ к ∇u_{x_k}. Благодаря этому переход к пределу по $h \to 0$ в (5.7) с $f' \equiv 1$ и суммирование по k от 1 до n приводят к неравенству (5.12). В нем мы должны считать ζ равной нулю вблизи ∂K_ρ. Но так как в остальном функция ζ произвольна, то легко понять, что (5.12), так же как и (5.11), остается справедливым и при любой гладкой ζ, равной нулю на ∂K_ρ.

Так как шар K_ρ выбран с одним лишь условием, что концентрический ему шар $K_{2\rho}$ принадлежит Ω, то из проведенных рассуждений следует существование у $u(x)$ обобщенных производных второго порядка в Ω и оценок (5.11) и (5.12) не только для шаров K_ρ, но и для любой $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ с ζ, равной нулю на $\partial\Omega'$. Кроме того, для всех $m > 1$ и $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$ доказана равномерная ограниченность интегралов

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\Omega'} \sum_{k=1}^n |u_{(k)}|^{m+2}\,dx \leqslant c(m, \Omega'),\\ &\int_{\Omega'} \sum_{k=1}^n P_k^{m-2} |\nabla u_{(k)}|^2\,dx \leqslant c(m, \Omega') \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

при всех достаточно малых h.

Перейдем к доказательству ограниченности ∇u и получению оценок $\operatorname{vrai}\max_{\Omega'} |\nabla u|$. Для этого мы покажем ниже, что в (3.3) в качестве функции ξ можно взять произведение $b_N^s(x)\,u_{x_r}(x)\,\zeta^2(x)$, $s \geqslant 0$, где $\zeta(x)$ — срезающая для шара $K_{2\rho}$ функция, а

$$b_N(x) = \min\{|\nabla u(x)|^2;\ N\}, \qquad N > 0.$$

Относительно $K_{2\rho}$ предполагаем, что концентрический ему шар $K_{4\rho}$ принадлежит Ω. Если в (3.3) положим ξ равной функции

$\xi_N = b_N^s u_{x_r} \zeta^2$ $\Big($заметим, что ξ_N имеет обобщенные производные $\frac{\partial}{\partial x_i}\xi_N\Big)$ и раскроем выражение для $\frac{\partial}{\partial x_i}\xi_N$, то придем к соотношению (3.4), в котором b заменено на b_N. Все полученные при этом члены будут суммируемы по $K_{2\rho}$. Более того, все неравенства, начиная от (3.5) и кончая (3.14), выведенные в § 3 из (3.3), сохраняются при замене b на b_N, причем постоянные c, входящие в эти неравенства, не зависят от N.

При проверке этих утверждений надо иметь в виду, что ∇b_N отличен от нуля только на том множестве, где $|\nabla u|^2 < N$, т. е. там, где $b_N = |\nabla u|^2$. Это, в частности, дает равенство

$$
\begin{aligned}
&sb_N^{s-1}(1+|\nabla u|)^{m+1}|\nabla b_N|\zeta^2 = \\
&\quad = sb_N^{s-1}\left[(1+|\nabla u|)^m \sqrt{b_N} + \left(1+\sqrt{b_N}\right)(1+|\nabla u|)^{m-1}\right]|\nabla b_N|\zeta^2,
\end{aligned}
$$

которое надо использовать для перехода от (3.5) к (3.6) при $b = b_N$. Так как постоянные в неравенствах (3.5) — (3.13) не зависят от N, то из (3.12) и (3.13), последовательно увеличивая r, начиная от $r = 0$, выведем желаемую конечность интегралов, входящих в (3.14), и саму оценку (3.14).

Для законности всех этих рассуждений надо доказать, что в (3.3) в качестве ξ можно взять $\xi_N = b_N^s u_{x_r}\zeta^2$ при $\forall s \geqslant 0$, $N > 0$ и любой гладкой ζ, равной нулю вне $K_{2\rho}$. Введем функции $\xi_{N,h} = \varphi_N(|\nabla_h u|^2)\, u_{(r)}\zeta^2$, где $\varphi_N(t)$ — неотрицательная, дважды непрерывно дифференцируемая функция $t \geqslant 0$, равная const при $t \geqslant N$, $|\nabla_h u|^2 = \sum_{k=1}^n u_{(k)}^2$, а ζ — дважды непрерывно дифференцируемая функция x, равна нулю вне $K_{2\rho}$, и функцию $F_{N_1}(t)$, равную 1 при $t \leqslant N_1$, нулю при $t \geqslant 2N_1$ и $N_1^{-1}(2N_1 - t)$ при $t \in [N_1, 2N_1]$. Исследуемое решение $u(x)$ удовлетворяет почти всюду уравнению (1.1). Умножим это уравнение на $(\xi_{N,h})_{x_r} \times$ $\times F_{N_1}\left(\sqrt{1 + \sum_{k=0}^n |\overset{+k}{\nabla u}|^2}\right)$, где $|\overset{+k}{\nabla u}(x)| = |\nabla u(x + h e_k)|$ при $k > 0$, а $|\overset{+0}{\nabla u}(x)| = |\nabla u(x)|$, и результат проинтегрируем по Ω:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[\frac{da_i(x, u, u_x)}{dx_i} + a(x, u, u_x)\right](\xi_{N,h})_{x_r} \times \\
&\qquad\qquad \times F_{N_1}\left(\sqrt{1 + \sum_{k=0}^n |\overset{+k}{\nabla u}|^2}\right) dx = 0. \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

Благодаря уже известным свойствам $u(x)$ и предположениям (5.1), (5.2) интеграл, входящий в (5.14), конечен. Более того, в (5.14) можно провести двукратное интегрирование по частям в следующем порядке:

$$0=\int\limits_{\Omega}\left[-a_i(\xi_{N,h})_{x_r x_i}F_{N_1}-a_i(\xi_{N,h})_{x_r}\frac{dF_{N_1}}{dx_i}+a(\xi_{N,h})_{x_r}F_{N_1}\right]dx=$$
$$=\int\limits_{\Omega}\left[\frac{da_i}{dx_r}(\xi_{N,h})_{x_i}F_{N_1}+a_i(\xi_{N,h})_{x_i}\frac{dF_{N_1}}{dx_r}-\right.$$
$$\left.-a_i(\xi_{N,h})_{x_r}\frac{dF_{N_1}}{dx_i}+a(\xi_{N,h})_{x_r}F_{N_1}\right]dx. \quad (5.15)$$

Интегралы, входящие в (5.14) и (5.15), сходятся благодаря функции $F_{N_1}\left(\sqrt{1+\sum\limits_{k=0}^{n}|\nabla\overset{+k}{u}|}\right)$, «срезающей» те множества, на которых $1+\sum\limits_{k=0}^{n}|\nabla\overset{+k}{u}(x)|^2\geqslant(2N_1)^2$. Действительно, там, где $1+$ $+\sum\limits_{k=0}^{n}|\nabla\overset{+k}{u}(x)|^2\leqslant(2N_1)^2$, функции $u_{xx}(x)$ и $u_{xx}(x+he_k)$, $k=$ $=1,\ldots,n$, а потому и функции $u_{(k)\,xx}(x)=\frac{1}{h}[u_{xx}(x+he_k)-$ $-u_{xx}(x)]$ квадратично суммируемы в силу (5.12), а функции $u_{(k)\,x_i}=\frac{1}{h}[u_{x_i}(x+he_k)-u_{x_i}(x)]$ ограничены (заметим, что пока h фиксировано). В равенстве

$$\int\limits_{\Omega}\left[\frac{da_i}{dx_r}(\xi_{N,h})_{x_i}F_{N_1}+a_i(\xi_{N,h})_{x_i}\frac{dF_{N_1}}{dx_r}-\right.$$
$$\left.-a_i(\xi_{N,h})_{x_r}\frac{dF_{N_1}}{dx_i}+a(\xi_{N,h})_{x_r}F_{N_1}\right]dx=0 \quad (5.16)$$

функция $\xi_{N,h}$ дифференцируется один раз. Ввиду этого нетрудно понять, что (5.16) справедливо не только при дважды непрерывно дифференцируемых функциях $\varphi_N(t)$, входящих в $\xi_{N,t}$, но и при $\varphi_N(t)$, равной t^s, $s\geqslant0$, при $t\leqslant N$ и равной N^s при $t\geqslant N$. Будем в дальнейшем считать, что $\varphi_N(t)=t^s$ при $t\leqslant N$ и $\varphi_N(t)=N^s$ при $t\geqslant N$. Покажем, что в (5.16) можно перейти к пределу по $h\to0$ и в результате получить равенство

$$\int\limits_{\Omega}\left[\frac{da_i}{dx_r}\xi_{Nx_i}F_{N_1}\left(\sqrt{1+(n+1)|\nabla u|^2}\right)+a_i\xi_{Nx_i}\frac{dF_{N_1}}{dx_r}-\right.$$
$$\left.-a_i\xi_{Nx_r}\frac{dF_{N_1}}{dx_i}+a\xi_{Nx_r}F_{N_1}\right]dx=0, \quad (5.17)$$

где $\xi_N=b_N^s u_{x_r}\zeta^2$, $b_N=\min\{|\nabla u|^2;\ N\}$. Действительно, подынтегральное выражение (5.16) сходится почти всюду к подынтегральному выражению (5.17). Ввиду этого достаточно убедиться, что интегралы (5.16), взятые по множествам $\Omega_\varepsilon \subset \Omega'$ малой меры, равномерно (по h) малы. Действительно,

$$\left|\frac{da_i}{dx_r}\right| \leqslant c\left(P^{m-2}|u_{xx}| + P^m\right), \quad P \equiv 1 + 2|\nabla u|,$$

$$\left|\left(\xi_{N,h}\right)_{x_i}\right| = \left|\varphi_N\left(|\nabla_h u|^2\right) u_{(r)\,x_i}\zeta^2 + \varphi_N'\left(|\nabla_h u|^2\right) 2\nabla_h u \nabla_h u_{x_i} u_{(r)}\zeta^2 + \right.$$
$$\left. + \varphi_N\left(|\nabla_h u|^2\right) u_{(r)} 2\zeta\zeta_{x_i}\right| \leqslant N^s\left|u_{(r)\,x_i}\right|\zeta^2 + 2sN^s\left|\nabla_h u_{x_i}\right|\zeta^2 +$$
$$+ N^s|u_{(r)}|\,2\zeta|\,\zeta_x| \leqslant c(N)\left[|\nabla_h u_x| + |\nabla_h u|\right]\zeta,$$

поэтому

$$j_1(N, N_1, h, \varepsilon) \equiv \int\limits_{\Omega_\varepsilon}\left|\frac{da_i}{dx_r}\left(\xi_{N,h}\right)_{x_i} F_{N_1}\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant c(N)\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\left(P^{m-2}|u_{xx}| + P^m\right)\left[|\nabla_h u_x| + |\nabla_h u|\right]\zeta \times$$
$$\times F_{N_1}\left(\sqrt{1 + \sum_{k=0}^{n}|\nabla \overset{+k}{u}|^2}\right) dx \leqslant$$
$$\leqslant c(N, N_1)\int\limits_{\Omega_\varepsilon(N_1)}\left(|u_{xx}| + 1\right)\left(|\nabla_h u_x| + |\nabla_h u|\right)\zeta\, dx,$$

где $\Omega_\varepsilon(N_1) = \left\{x \in \Omega_\varepsilon\colon\ 1 + \sum\limits_{k=0}^{n}|\nabla \overset{+k}{u}| \leqslant (2N_1)^2\right\}$. Оценивая правую часть по неравенству Коши, убедимся, что

$$|j_1| \leqslant c(N, N_1)\left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon(N_1)}\left(|u_{xx}| + 1\right)^2\zeta\, dx\right)^{1/2} \times$$
$$\times\left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon(N_1)}\left(|\nabla_h u_x| + |\nabla_h u|\right)^2\zeta\, dx\right)^{1/2}.$$

В силу (5.12) первый из интегралов правой части мал, если мала $\operatorname{mes}\Omega_\varepsilon$, причем интеграл не зависит от h. Второй же равномерно (по h) ограничен в силу (5.13). Аналогичные оценки показывают, что и все остальные интегралы (5.16), взятые по Ω_ε, равномерно (по h) малы при малой $\operatorname{mes}\Omega_\varepsilon$. Тем самым показано, что (5.16) при $h \to 0$ переходит в (5.17). Устремим теперь в (5.17) N_1 к ∞ и покажем, что в пределе получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{da_i}{dx_r}\xi_{N x_i} + a\xi_{N x_r}\right) dx = 0, \tag{5.18}$$

с теми же функциями ξ_N, что и в (5.17).

Подынтегральные выражения в (5.17) и (5.18) различны лишь на множествах $\Omega_{N_1} = \{x \in \Omega\colon 1 + (n+1)|\nabla u(x)|^2 > N_1^2\}$, поэтому для справедливости (5.18) достаточно убедиться в том, что интегралы (5.17), (5.18), взятые по Ω_{N_1}, стремятся к нулю при $N_1 \to \infty$.

Для $j_1(N, N_1) \equiv \int\limits_{\Omega_{N_1}} \left| \frac{da_i}{dx_r} \xi_{Nx_i} F_{N_1} \right| dx$ имеем

$$j_1(N, N_1) \leqslant c(N) \int\limits_{\Omega_{N_1}} (P^{m-2}|u_{xx}| + P^m)(|u_{xx}| + |\nabla u|)\zeta\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1(N) \int\limits_{\Omega_{N_1}} (P^{m-2}u_{xx}^2 + P^{m+2})\zeta\, dx.$$

Так как $\operatorname{mes}\Omega_{N_1} \to 0$ при $N_1 \to \infty$, то это вместе с (5.11), (5.12) гарантирует нужную малость $j(N, N_1)$ при достаточно больших N_1. Далее,

$$j_2(N, N_1) \equiv \int\limits_{\Omega_{N_1}} \left| a_i \xi_{Nx_i} \frac{dF_{N_1}}{dx_r} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant c(N) \int\limits_{\Omega_{N_1}} P^{m-1}(|u_{xx}| + |\nabla u|)\zeta |F'_{N_1}||u_{xx}|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1(N) N_1^{-1} \int\limits_{\Omega_{N_1}} (P^{m-2}u_{xx}^2 + P^m)\zeta\, dx \to 0, \qquad N_1 \to \infty.$$

Из этого соотношения, как показано на стр. 323, следует конечность интегралов, входящих в неравенство (3.14). Благодаря этому сохраняют силу все рассуждения и выводы § 3, проведенные после (3.14). Действительно, функции ξ, использованные при выводе неравенства (3.16) для $m \geqslant 2$ и неравенства (3.18) для $m \in (1,2)$, принадлежат $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega'')$, где $\overline{\Omega}'' \subset \Omega$. Такие же ξ являются допустимыми для тождества (3.3), ибо в силу предположений $\max\limits_{\Omega}|u| < \infty$, (3.1) и (3.2) и оценки (3.14) функции

$$\hat{a}_{ir}(x) \equiv \frac{da_i(x, u(x), u_x(x))}{dx_r} \quad \text{и} \quad \hat{a}(x) \equiv a(x, u(x), u_x(x))$$

квадратично суммируемы по $\forall \Omega'' \subset \Omega$.

Итак, доказана

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* (5.1), (5.2) *и u есть ог. об. решение уравнения* (0.1). *Тогда u имеет в Ω обобщенные производные второго порядка, принадлежащие $L_2(\Omega')$, $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$, а его производные первого порядка ограничены в любой $\overline{\Omega}' \subset \Omega$. Величины $\|u\|_{2,\Omega'}^{(2)}$ и* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'}|\nabla u|$ *не превосходят постоянных,* *определяемых* m, $M\geqslant\max\limits_{\Omega}|u|$, $\nu(M)$ *и* $\mu(M)$ *из* (3.1), (3.2) *и расстоянием от* Ω' *до* S.

Заметим, что в силу теорем § 1 u есть элемент $C^{\alpha}(\overline{\Omega}')$ и его нормы $|u|_{\Omega'}^{(\alpha)}$ и $\|u\|_{m,\Omega'}^{(1)}$ определяются M, постоянными из (1.2), (1.3) (и тем более из (3.1), (3.2)) и расстоянием от Ω' до S. Эти факты были использованы при доказательстве теоремы 5.1 и учтены в ее формулировке.

§ 6. Оценка норм $|u|^{(l+\alpha)}$, $l\geqslant 1$

Предположим, что $u(x)$ есть решение уравнения (0.1), принадлежащее классу $W_2^2(\Omega)$ и имеющее ограниченные первые производные. Покажем, что они непрерывны по Гёльдеру при условии, что уравнение (0.1) эллиптично на $u(x)$, т. е.

$$\nu\xi^2\leqslant\frac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial u_{x_j}}\xi_i\xi_j\leqslant\mu\xi^2, \qquad \nu>0. \tag{6.1}$$

Относительно функций $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ достаточно предположить, что $a_i(x, u, p)$ дифференцируемы по аргументам x, u, p, функция $a(x, u, p)$ измерима и

$$\max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial u}, \ \frac{\partial a_i}{\partial x_j}, \ a\right|\leqslant\mu_1<\infty, \ i, j=1, \ldots, n. \tag{6.2}$$

В интегральном тождестве (1.4) положим $\eta=\xi_{x_l}$, где $\xi(x)$ — достаточно гладкая функция, финитная в Ω, а l — одно из чисел $1, \ldots, n$. В результате интегрирования по частям получим равенство

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{x_lx_j}+\frac{\partial a_i}{\partial u}u_{x_l}+\frac{\partial a_i}{\partial x_l}\right)\xi_{x_i}+a\xi_{x_l}\right]dx=0. \tag{6.3}$$

Как легко видеть, оно будет справедливо в силу наших предположений при любой $\xi(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Запишем его в виде

$$\int_{\Omega}\left(a_{ij}u_{x_lx_j}+f_i^l\right)\xi_{x_i}\,dx=0, \tag{6.4}$$

где

$$a_{ij}(x)=\frac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial u_{x_j}}$$

и

$$f_i^l(x) = \frac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial u} u_{x_l}(x) + \\ + \frac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial x_l} + \delta_i^l a(x, u(x), u_x(x)).$$

В силу условия (6.2) и ограниченности $\operatorname{vrai}\max_{\Omega} |\nabla u| \leqslant M_2$ функции $f_i^l(x)$ ограничены по модулю некоторой постоянной $c(M_2, \mu_1)$. Поэтому каждую из производных u_{x_l}, $l = 1, \ldots, n$, можно рассматривать как решение линейного уравнения вида (4.1) гл. III с ограниченными измеримыми коэффициентами a_{ij} и f_i^l. Отсюда на основании теоремы 14.1 гл. III заключаем, что u_{x_l} принадлежат $C^\alpha(\Omega)$ и их нормы $\left| u_{x_l} \right|_{\Omega'}^{(\alpha)}$ для любой $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ можно оценить через M_2, ν, μ и μ_1 из (6.1), (6.2) и расстояние Ω' до S. Показатель α зависит лишь от μ/ν.

Чтобы получить такие же оценки для всей области Ω, предположим, что граница S принадлежит классу O^2, $\operatorname{vrai}\max_{\Omega} |\nabla u| \leqslant \leqslant M_2$ и $u(x)$ на S удовлетворяет условию (1.20) с $\varphi(x)$ из $W_q^2(\Omega)$ с $q > n$. Рассмотрим произвольный кусок $S_1 \subset S$ и введем, как обычно, координаты $y_1, \ldots, y_n$, в которых уравнение S_1 есть $y_n = 0$ и функции $\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_l \partial x_j}$ ограничены. В новых переменных уравнение (0.1) будет иметь вид

$$\frac{da_l}{dy_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_l} + a = 0. \tag{6.5}$$

Как мы видели выше, для u справедливо тождество (4.5) или, что то же, тождество

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial a_l}{\partial u_{x_j}} u_{x_j y_l} + \frac{\partial a_l}{\partial u} u_{y_l} + \frac{\partial a_l}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_l} J + \\ + a_l y_{k x_l y_l} \frac{\partial \xi}{\partial y_k} J + a_l \frac{\partial \xi}{\partial x_l} \frac{\partial J}{\partial y_l} + a \frac{\partial \xi}{\partial y_l} J \right] dy = 0,$$

причем, в качестве ξ здесь можно взять произвольную функцию из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, отличную от нуля лишь вблизи S_1. Тождеству можно придать вид

$$\int_\Omega \left(a_{ij} u_{y_l x_j} + f_i^l \right) \xi_{x_l} \, dx = 0, \tag{6.6}$$

где

$$a_{ij}(x) = \frac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial u_{x_j}}$$

и

$$f_i^l(x) = \frac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial u} u_{y_l} + \frac{\partial a_l}{\partial y_l} + a_j y_{kx_j y_l} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} - \\ - \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{x_k} x_{k y_l x_j} + a_i J^{-1} \frac{\partial J}{\partial y_l} + a \frac{\partial x_i}{\partial y_l}$$

суть ограниченные в Ω функции x, и рассмотреть u_{y_l} как обобщенное решение из $W_2^1(\Omega)$ линейного уравнения $\frac{d}{dx_i}\left(a_{ij}v_{x_j} + f_i^l\right) = 0$.

Пусть Ω_1 — часть области Ω, примыкающая к S_1 и отстоящая от $S \setminus S_1$ на положительное расстояние d.

Из теоремы 14.1 гл. III о линейных уравнениях следует, что $u_{y_l} \in C^\alpha(\overline{\Omega}_1)$, $l = 1, \ldots, n-1$, и их нормы $|u_{y_l}|_{\Omega_1}^{(\alpha)}$ можно оценить через известные нам постоянные. Условие упомянутой теоремы о том, чтобы граничные значения $u_{y_l}\big|_{S_1} = \varphi_{y_l}\big|_{S_1}$ принадлежали $C^\delta(S_1)$, тоже выполнено, ибо из принадлежности φ к $W_q^2(\Omega)$, $q > n$, следует по теоремам вложения принадлежность φ к $C^{1+\delta}(\overline{\Omega})$ с $\delta = 1 - \frac{n}{q}$.

В случае $l = n$ нельзя непосредственно использовать теорему о линейных уравнениях, так как нам ничего не известно о гладкости u_{y_n} на S_1. Поэтому поступим иначе — докажем, что для любого шара K_ρ с центром в Ω_1 и радиусом $\rho \leqslant d/4$ верно неравенство

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_{y_n}|^2 dy \leqslant \gamma \rho^{n-2+2\beta}, \qquad \beta > 0, \tag{6.7}$$

где $\Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega_1$. Тогда из леммы 4.2 гл. II будет следовать, что $|u_{y_n}|_{\Omega_1}^{(\beta)}$ оценивается через γ, d и $\max_{\Omega_1} |u_{y_n}|$.

Разрешая уравнение (6.5) относительно $u_{y_n y_n}$, получим $u_{y_n y_n} = \sum_i \sum_{l \neq n} b_{il} u_{y_l y_i} + b$ с ограниченными b_{il} и b. Отсюда видно, что для того, чтобы доказать (6.7), достаточно установить аналогичные неравенства для u_{y_l} с $l \neq n$, т. е.

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_{y_l}|^2 dy \leqslant \gamma' \rho^{n-2+2\beta}, \qquad l = 1, \ldots, n-1. \tag{6.8}$$

Итак, докажем справедливость оценок (6.8). Для этого в тождестве (6.6) для u_{y_l} с каким-нибудь $l \neq n$ положим $\xi = (u-\varphi)_{y_l}\zeta^2$, где ζ — срезающая для $K_{2\rho}$ функция, равная единице в K_ρ. Очевидно, что $\xi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_{2\rho})$. В результате будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_{2\rho}} \Big\{a_{ij}u_{y_lx_j}u_{y_lx_i}\zeta^2 - a_{ij}u_{y_lx_j}\varphi_{y_lx_i}\zeta^2 + a_{ij}u_{y_lx_j}\left(u_{y_l}-\varphi_{y_l}\right)2\zeta\zeta_{x_i} +$$

$$+ f_i^l\left[(u-\varphi)_{y_lx_i}\zeta^2 + (u-\varphi)_{y_l}2\zeta\zeta_{x_i}\right]\Big\}dx = 0.$$

Оценивая первый интеграл снизу по неравенству (6.1), а остальные члены по модулю с помощью неравенства Коши с $\varepsilon_1 \in (0, 1]$, будем иметь

$$\nu\int\limits_{\Omega_{2\rho}} |\nabla u_{y_l}|^2\zeta^2\,dx \leqslant \frac{c}{\varepsilon_1}\int\limits_{\Omega_{2\rho}}\sum_{i=1}^n \varphi^2_{y_lx_i}\zeta^2\,dx + \varepsilon_1\int\limits_{\Omega_{2\rho}}\sum_{i=1}^n u^2_{y_lx_i}\zeta^2\,dx +$$

$$+ \frac{c}{\varepsilon_1}\int\limits_{\Omega_{2\rho}}(u_{y_l}-\varphi_{y_l})^2|\nabla\zeta|^2\,dx + \frac{c}{\varepsilon_1}\operatorname{mes}\Omega_{2\rho}, \qquad (6.9)$$

где постоянная c определяется $\max\limits_{\Omega_{2\rho}}|a_{ij}, f_i^l|$. Заметим, что $\varphi_{y_l} \in C^\delta(\overline{\Omega})$ и по доказанному выше $u_{y_l} \in C^\alpha(\overline{\Omega}_{2\rho})$, $\alpha \leqslant \delta$, так что

$$\max_{\Omega_{2\rho}}|u_{y_l} - \varphi_{y_l}|^2 \leqslant c\rho^{2\alpha}.$$

Кроме того, $\max\limits_{\Omega_{2\rho}}|\nabla\zeta| \leqslant c/\rho$ и

$$\int\limits_{\Omega_{2\rho}}\sum_{l,\,i=1}^n \varphi^2_{y_lx_i}\zeta^2\,dx \leqslant c\left(\|\varphi\|^{(2)}_{q,\Omega}\right)^2 \operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q}}\Omega_{2\rho} \leqslant c_1\rho^{n-\frac{2n}{q}}.$$

Поэтому, полагая в (6.9) $\varepsilon_1 = \nu/2$, получим желаемое неравенство (6.8) с $\beta = \min\{\alpha, (q-n)/q\}$ и постоянной γ', зависящей лишь от $\|\varphi\|^{(2)}_{q,\Omega}$, $\max\limits_{\Omega}|a_{ij}, f_i^l|$ и константы ν из (6.1).

Сформулируем доказанные в этом параграфе предложения в виде теоремы.

Теорема 6.1. *Пусть $u(x)$ принадлежит $W_2^2(\Omega)$, имеет ограниченные на $\overline{\Omega}$ первые производные и удовлетворяет почти всюду в Ω уравнению* (0.1), *причем для a_i и a выполнены условия* (6.1) *и* (6.2). *Тогда производные u_{x_l}, $l = 1, \ldots, n$, принадлежат классу $C^\alpha(\Omega)$ с показателем $\alpha > 0$, определяемым лишь $\mu\nu^{-1}$ из условия* (6.1). *Нормы $|u|^{(1+\alpha)}_{\Omega'}$ для $\forall\overline{\Omega}' \subset \Omega$ мажорируются* *постоянной, зависящей лишь от* ν, μ, μ_1 *из условий* (6.1), (6.2), $M_2 \geqslant \operatorname{vrai}\max_\Omega |\nabla u|$ *и расстояния от* Ω' *до границы* Ω.

Если к тому же $u(x)$ *удовлетворяет граничному условию* (1.20) *с* $\varphi(x) \in W_q^2(\Omega)$, $q > n$, *и* S *принадлежит классу* O^2, *то производные* $u_{x_l}(x)$, $l = 1, \ldots, n$, *непрерывны по Гёльдеру в замкнутой области* $\bar{\Omega}$ *с показателем* $\beta > 0$, *определяемым* $\nu^{-1}\mu$ *и* q. *Норма* $|u|_\Omega^{(1+\beta)}$ *мажорируется постоянной, зависящей лишь от* ν, μ, μ_1, M_2, q, $\|\varphi\|_{q,\Omega}^{(2)}$ *и* S.

Замечание 6.1. Как легко видеть из доказательства теоремы 6.1, в ней можно ослабить требование (6.2) на a_i и a, именно, можно считать, что $\left\| \frac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial u}, \frac{\partial a_i}{\partial x_j}, a \right\|_{q,\Omega} \leqslant \mu_1 < \infty$, $q > n$, $i, j = 1, \ldots, n$ (см. по этому поводу гл. IX).

Из теорем 6.1 и 5.1 и замечания 6.2 вытекает справедливость такого предложения:

Теорема 6.2. *Пусть* $u(x)$ *есть ог. об. решение уравнения* (0.1), *а функции* $a_i(x, u, p)$ *и* $a(x, u, p)$ *удовлетворяют условиям* (5.1), (5.2). *Тогда* $u(x)$ *принадлежит* $C^{1+\alpha'}(\Omega') \cap W_2^2(\Omega')$ *для* $\forall \bar{\Omega}' \subset \Omega$ *и нормы* $u(x)$ *в* $C^{1+\alpha}(\Omega')$ *и* $W_2^2(\Omega')$ *оцениваются постоянными, определяемыми* m, $M \geqslant \max_\Omega |u|$, $\nu(M)$ *и* $\mu(M)$ *из* (3.1), (3.2) *и расстоянием от* Ω' *до* S. *Показатель* α *определяется* m и $\mu(M)\nu^{-1}(M)$.

Рассмотрим уравнение (0.1) и какое-либо его решение из $W_2^2(\Omega)$ с $\max_\Omega |u| \leqslant M$ и $\operatorname{vrai}\max_\Omega |\nabla u| \leqslant M_1$, для которого верно (6.1). Предположим, что $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ принадлежат классам $C^{1+\beta}$ и C^β соответственно в области $\mathfrak{M}_{M,M_1} = \{x \in \bar{\Omega}, |u| \leqslant M, |p| \leqslant M_1\}$. Запишем уравнение (0.1) в виде

$$a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + A(x) = 0,$$

где

$$a_{ij}(x) = \frac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial u_{x_j}},$$

$$A(x) = \frac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial u} u_{x_i}(x) + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a.$$

В силу теоремы 6.1 $u(x) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, и потому $a_{ij}(x)$ и $A(x)$ непрерывны по Гёльдеру в Ω с показателем $\alpha\beta$. Результаты § 12 гл. III о линейных уравнениях (теорема 12.1 гл. III) дают возможность утверждать, что $u(x) \in C^{2+\alpha\beta}(\Omega)$. Отсюда следует, что $a_{ij}(x)$ и $A(x)$ принадлежат $C^\beta(\Omega)$, поэтому, применяя еще раз теорему 12.1 гл. III, убеждаемся, что $u(x) \in C^{2+\beta}(\Omega)$ и его норма $|u|_{\Omega'}^{(2+\beta)}$ для любой $\overline{\Omega}'\subset\Omega$ оценивается через M, M_1, $|a_i|_{\mathfrak{M}_{M,M_1}}^{(1+\beta)}$, $|a|_{\mathfrak{M}_{M,M_1}}^{(\beta)}$, константу ν из неравенства (6.1) и расстояние Ω' до S. Если, кроме того, $S\in C^{2+\beta}$ и $u|_S\in C^{2+\beta}(S)$, то точно так же с помощью теоремы 6.1 гл. IV и теоремы 12.1 гл. III можно оценить норму $|u|_{\Omega}^{(2+\beta)}$. Аналогично устанавливается принадлежность $u(x)$ к $C^{l+\alpha}$ и $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ при любом $l>2$.

Резюмируя только что сказанное, можно утверждать справедливость такой теоремы:

Теорема 6.3. *Пусть* $u(x)$ *есть решение уравнения* (0.1) *из* $W_2^2(\Omega)$ *с* $\max\limits_{\Omega}|u(x)|\leqslant M$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|\leqslant M_1$. *Если уравнение* (0.1) *на* $u(x)$ *эллиптично (т. е. выполнено неравенство* (6.1)) *и если*

$$a_i(x,u,p)\in C^{l-1+\beta}(\mathfrak{M}_{M,M_1}),\quad a(x,u,p)\in C^{l-2+\beta}(\mathfrak{M}_{M,M_1}),\quad l\geqslant 2,$$

то $u(x)$ *принадлежит* $C^{l+\beta}(\Omega)$ *и для любой* $\overline{\Omega}'\subset\Omega$ *норма* $|u|_{\Omega'}^{(l+\beta)}$ *оценивается постоянной, зависящей лишь от* M, M_1, $|a_i|_{\mathfrak{M}_{M,M_1}}^{(l-1+\beta)}$, $|a|_{\mathfrak{M}_{M,M_1}}^{(l-2+\beta)}$, *константы* ν *из* (6.1) *и от расстояния* Ω' *до* S. *Если, кроме того,* $S\in C^{l+\beta}$ *и* $u|_S\in C^{l+\beta}(S)$, *то норма* $|u|_{\Omega}^{(l+\beta)}$ *оценивается постоянной, зависящей лишь от* M, M_1, $|a_i|_{\mathfrak{M}_{M,M_1}}^{(l-1+\beta)}$, $|a|_{\mathfrak{M}_{M,M_1}}^{(l-2+\beta)}$, ν, *нормы* $|u|_S^{(l+\beta)}$ *и* S.

Замечание 6.2. То, что в теореме 6.2 показатель Гёльдера для u_{x_l} можно выбрать не зависящим от расстояния Ω' до S, вытекает из следующего рассуждения. Мы доказали, что для $\forall \overline{K}_{\rho_1}(x^0)\subset\Omega$ $\operatorname{osc}\{u_{x_l};\ K_\rho(x^0)\}\leqslant c'\rho^{\alpha'}$, $\forall\rho\leqslant\rho_1$, где c' и α' зависят от расстояния $K_{\rho_1}(x^0)$ до S. В силу этого в $K_\rho(x^0)$ с $c'\sqrt{n}\rho^{\alpha'}\leqslant\min\left\{\frac{1}{2},\rho_1\right\}$ отношение $\max\limits_{K_\rho(x^0)}(1+|\nabla u(x)|)^{m-2}/\min\limits_{K_\rho(x^0)}(1+|\nabla u(x)|)^{m-2}\leqslant 2^{|m-2|}$. Отсюда и из (5.1) следует, что в этом шаре неравенство (6.1) выполняется с $\gamma\equiv\mu/\nu=2^{|m-2|}\mu(M)/\nu(M)$. Но тогда теорема 6.1 гарантирует для u_{x_l} показатель Гёльдера α, зависящий лишь от m и $\mu(M)/\nu(M)$.

Подытожим основные факты, установленные нами в §§ 1—6 для ог. об. решений уравнения (0.1).

В § 1 доказано, что ог. об. решения $u(x)$ из $W_m^1(\Omega)$ непрерывны по Гёльдеру, и даны оценки гёльдеровских норм $u(x)$ для внутренних подобластей $\overline{\Omega}'\subset\Omega$ и для всей Ω. В § 5 выяснено, при каких условиях такие решения обладают обобщенными производными второго порядка и имеют ограниченный $\max\limits_{\Omega'}|\nabla u|$.

Теорема 6.4. *Предположим, что в областях вида* $\mathfrak{M}_{MM_1}$ *с произвольными* M *и* $M_1 > 0$ *функции* $a_i(x, u, p)$ *принадлежат классу* $C^{l-1+\beta}$, $l \geqslant 2$, *а* $a(x, u, p)$ — *классу* $C^{l-2+\beta}$ *при* $l > 2$ *и* C^1 *при* $l = 2$ *соответственно и* $a_i(x, u, p)$ *и* $a(x, u, p)$ *удовлетворяют неравенствам* (5.1), (5.2). *Тогда любое ог. об. решение* $u(x)$ *из* $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ *уравнения* (0.1) *в любой* $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ *принадлежит* $C^{l+\beta}(\Omega')$.

Кроме теорем 6.2—6.4 из предложений, доказанных в §§ 1—6, вытекает следующая теорема об априорных оценках для решений уравнения (0.1):

Теорема 6.5. *Пусть решение* $u(x)$ *уравнения* (0.1) *принадлежит* $W_2^2(\Omega) \cap \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ *и* $\max\limits_{\Omega} |u(x)| \leqslant M$. *Пусть, далее, функции* $a_i(x, u, p)$ *и* $a(x, u, p)$ *удовлетворяют условиям* (3,1), (3.2). *Тогда* $u(x) \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}')$ *и нормы* $|u|_{\Omega'}^{(1+\alpha)}$ *и* $\|u\|_{2,\Omega'}^{(2)}$ *для* $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$ *мажорируются постоянными, зависящими лишь от* m, M, $\nu(M)$ *и* $\mu(M)$ *из* (3.1), (3.2) *и расстояния от* Ω' *до границы* S *области* Ω. *Показатель* α *определяется* m *и* $\mu(M)\nu^{-1}(M)$. *Если к тому же* $u(x) \in O^2(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \cap \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$, $S \in O^2$ *и* $u|_S = \varphi|_S$, $\varphi(x) \in O^2(\overline{\Omega})$, *то* $u(x) \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ *и нормы* $|u|_{\Omega}^{(1+\alpha)}$ *и* $\|u\|_{2,\Omega}^{(2)}$ *мажорируются постоянными, зависящими лишь от* m, M, $\nu(M)$ *и* $\mu(M)$ *из* (3.1), (3.2), $|\varphi|_{\Omega}^{(2)}$ *и* S.

Если, кроме того, $a_i(x, u, p)$ *и* $a(x, u, p)$ *на множестве* $\mathfrak{M}_{M, M_1} = \{x \in \overline{\Omega};\ |u| \leqslant M,\ |p| \leqslant M_1\}$, *где* $M_1 \geqslant \max\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|$, *принадлежат классам* $C^{l-1+\alpha}(\mathfrak{M}_{MM_1})$ *и* $C^{l-2+\alpha}(\mathfrak{M}_{MM_1})$, $l \geqslant 2$, *соответственно и* $S \in C^{l+\alpha}$, $\varphi(x) \in C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$, *то* $u(x) \in C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ *и* $|u|_{\Omega}^{(l+\alpha)}$ *оценивается постоянной, определяемой* m, M, $\nu(M)$ *и* $\mu(M)$ *из* (3.1), (3.2), *нормами* $a_i(x, u, p)$ *и* $a(x, u, p)$ *в* $C^{l-1+\alpha}(\mathfrak{M}_{MM_1})$ *и* $C^{l-2+\alpha}(\mathfrak{M}_{MM})$ *соответственно, нормой* $\varphi(x)$ *в* $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ *и* S.

Как отмечено в гл. I, условие $\varphi(x) \in C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$, $l \geqslant 1$, и $\varphi(x) \in O^2(\overline{\Omega})$ здесь и во всех других местах можно заменить условием $\varphi|_S \in C^{l+\alpha}(S)$ и $\varphi|_S \in O^2(S)$, если $S \in C^{l+\alpha}$ или O^2 соответственно.

§ 7. Оценки интегральных норм и максимума модуля для обобщенных решений

До сих пор мы рассматривали ограниченные обобщенные решения из $W_m^1(\Omega)$, $m > 1$ *), и предполагали известной оценку для $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} |u(x)|$ решений $u(x)$. В этом параграфе мы выде-

*) Утверждения данного параграфа распространяются и на случай $m = 1$, но поскольку во всех остальных параграфах $m > 1$, то и здесь мы будем считать $m > 1$.

лим ряд случаев, когда для таких решений, а также для обобщенных решений более широких классов — решений из $W_m^1(\Omega)$ или из $W_{m,q}^1(\Omega) = W_m^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ — можно оценить $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u(x)|$ или какую-либо интегральную норму. В большинстве случаев мы будем предполагать, что решение имеет ограниченный $\operatorname{vrai}\max|u|$ на границе области Ω. Для таких функций принадлежность их к пространству $W_m^1(\Omega)$ влечет за собой вложение $u(x) \in L_{\tilde m}(\Omega)$ с $\tilde m = \bar m = \frac{nm}{n-m}$ при $m < n$, $\forall \tilde m < \infty$ при $m = n$ и $\tilde m = \infty$ при $m > n$ (см. теорему 2.2 гл. II и лемму 3.6 гл. II). Исключение составляет теорема 7.4, в которой $u(x)$ на границе Ω совпадает с, вообще говоря, неограниченной функцией $\varphi(x)$. В ней мы предполагаем, что $\varphi \in W_m^1(\Omega) \cap L_{\tilde m}(\Omega)$.

В связи с этим естественно изучить следующие классы решений:

1) решения из $W_{m,q}^1(\Omega)$ при $m < n$ и каком-либо конечном $q \geqslant \bar m$;

2) решения из $W_m^1(\Omega)$, $m = n$, принадлежащие $L_{\tilde m}(\Omega)$ с любым $\tilde m < \infty$;

3) ограниченные обобщенные решения из $W_m^1(\Omega)$ при $m > 1$.

Обобщенные решения $u(x)$ *уравнения* (0.1) *из* $W_{m,q}^1(\Omega)$ $(W_m^1(\Omega))$ определяются как элементы $W_{m,q}^1(\Omega)$ $(W_m^1(\Omega))$, удовлетворяющие интегральному тождеству (1.4), т. е.

$$L(u, \eta) = \int\limits_{\Omega} \left[a_i(x, u, u_x)\eta_{x_i} - a(x, u, u_x)\eta\right] dx = 0 \qquad (7.1)$$

при $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}_{m,q} \equiv \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ $(\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega))$.

Напомним, что ограниченные обобщенные решения уравнения (0.1) определены в § 1.

Для того чтобы эти определения имели смысл, надо на функции $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ наложить такие ограничения, при которых интегралы, входящие в (7.1), были бы сходящимися при любых допустимых u и η. Эти ограничения для случая $m < n$ и $q < \infty$ имеют вид *)

$$|a_i(x, u, p)| \leqslant c|p|^{m-1} + c|u|^{q/m'} + \varphi_1(x), \qquad \varphi_1 \in L_{m'}(\Omega), \qquad (7.2)$$

$$|a(x, u, p)| \leqslant c|p|^{m/q'} + c|u|^{q-1} + \varphi_2(x), \qquad \varphi_2 \in L_{q'}(\Omega), \qquad (7.3)$$

где $q' = q/(q-1)$, $m' = m/(m-1)$.

---

*) В этом параграфе и § 9 мы допускаем особенности у функций $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ по x.

В случае $m=n$ неравенство (7.2) надо заменить на

$$|a_i(x,u,p)|\leqslant c|p|^{m-1}+c|u|^k+\varphi_1(x),\qquad \varphi_1\in L_{m'}(\Omega), \tag{7.$\tilde{2}$}$$

а неравенство (7.3) на неравенство

$$|a(x,u,p)|\leqslant c|p|^{m-\varepsilon}+c|u|^k+\varphi_2(x),\qquad \varphi_2\in L_{q_1}(\Omega), \tag{7.$\tilde{3}$}$$

и считать в них $k<\infty$, $\varepsilon>0$, $q_1>1$.

Наконец, в случае ограниченных обобщенных решений из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ с $m>1$ ограничения на $a_i(x,u,p)$ и $a(x,u,p)$ следующие:

$$|a_i(x,u,p)|\leqslant\mu_1(u)(|p|^{m-1}+\varphi_1(x)),\qquad \varphi_1\in L_{m'}(\Omega), \tag{7.$\tilde{\tilde{2}}$}$$

$$|a(x,u,p)|\leqslant\mu_2(u)(|p|^{m}+\varphi_2(x)),\qquad \varphi_2\in L_1(\Omega), \tag{7.$\tilde{\tilde{3}}$}$$

где $\mu_i(u)$ — непрерывные функции u. Докажем следующую теорему:

Теорема 7.1. *Пусть функции $a_i(x,u,p)$, $a(x,u,p)$ удовлетворяют условиям (7.2), (7.3) при $m<n$ или условиям (7.$\tilde{2}$), (7.$\tilde{3}$) при $m=n$. Пусть, далее, при $x\in\overline{\Omega}$, $|u|\geqslant k_0$ и $p\in E_n$ для них справедливы неравенства*

$$a_i(x,u,p)p_i\geqslant\nu|p|^m-\mu_1|u|^\alpha-|u|^m\varphi_3(x), \tag{7.4}$$

$$a(x,u,p)u\leqslant\mu_0|p|^m+\mu_1|u|^\alpha+|u|^m\varphi_3(x), \tag{7.5}$$

в которых $0<\mu_0<\nu$, $\varphi_3\in L_{q_1}(\Omega)$, $q_1>n/m$, и $m<\alpha<m+q\frac{m}{n}$ при $m<n$, $\alpha>m$ при $m=n$. Тогда любое обобщенное решение u из $W_{m,q}(\Omega)$ (при $m<n$) или из $W^1_m(\Omega)$ (при $m=n$) с $\operatorname{vrai}\max\limits_{\partial\Omega}|u|\leqslant M_0<\infty$ является ограниченной функцией и $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u|$ оценивается сверху постоянной c, определяемой лишь нормой $\|u\|_{r,\Omega}$ и величинами m, r, $(\nu-\mu_0)^{-1}$, μ_1, α, $\|\varphi_3\|_{q_1,\Omega}$, q_1, k_0, M_0 и $\operatorname{mes}\Omega$. Здесь в качестве r можно брать $\forall r\geqslant 1$, удовлетворяющее условию $(\alpha-m)\frac{n}{m}<r\leqslant q$ при $m<n$ и $\alpha-m<r$ при $m=n$.

Замечание 7.1. Мы ограничились здесь тотальной оценкой $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u|$, при получении которой требуется знать, что $\operatorname{vrai}\max\limits_{\partial\Omega}|u|\leqslant M_0$. Если это последнее не имеет места, то при выполнении остальных условий теоремы 7.1 можно оценить

$\operatorname{vrai}\max_{\Omega'}|u|$ для $\forall\Omega' \subset \Omega$. Как это сделать, читатель поймет, просмотрев доказательства теоремы 7.1 и теоремы 13.1 гл. III.

Пример (2.31) гл. I показывает, что показатели α и q_1^{-1} не могут быть увеличены.

Для доказательства теоремы 7.1 рассмотрим тождество (7.1), предполагая для определенности, что $m < n$. Функцию $\eta(x)$ в нем можно взять равной $u^{(k)}(x) = \max\{u(x) - k;\ 0\}$, где $k \geqslant \max\{M_0;\ k_0\}$, ибо она принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,\,q}(\Omega)$. При этом из (7.1) в силу предположений (7.4), (7.5) будут следовать неравенства

$$\int_{A_k} (\nu|\nabla u|^m - \mu_1|u|^\alpha - |u|^m\varphi_3)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{A_k} au\,\frac{u-k}{u}\,dx \leqslant \int_{A_k} (\mu_0|\nabla u|^m + \mu_1|u|^\alpha + |u|^m\varphi_3)\,dx, \tag{7.6}$$

где $A_k = \{x \in \Omega:\ u(x) > k\}$. Так как по условию $\mu_0 < \nu$, то из (7.6) выводим:

$$\int_{A_k} |\nabla u|^m\,dx \leqslant \frac{2}{\nu - \mu_0} \int_{A_k} (\mu_1|u|^\alpha + |u|^m\varphi_3)\,dx. \tag{7.7}$$

Оценим интегралы $j_1 = \int_{A_k} |u|^\alpha\,dx$ и $j_2 = \int_{A_k} |u|^m\varphi_3\,dx$, используя соотношение $\|u^{\alpha-m}\|_{r/(\alpha-m)} = \|u\|_r^{\alpha-m}$ и условия $q_1 > \frac{n}{m}$, $\frac{r}{\alpha-m} > \frac{n}{m}$:

$$j_1 \leqslant \|u^{\alpha-m}\|_{r/(\alpha-m),\,A_k}\|u^m\|_{r/[r-(\alpha-m)],\,A_k} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{m-1}\|u\|_{r,\,A_k}^{\alpha-m}\left(\|u-k\|_{l_1,\,A_k}^m + k^m\operatorname{mes}^{m/l_1}A_k\right), \tag{7.8$_1$}$$

$$j_2 \leqslant \|\varphi_3\|_{q_1,\,A_k}\|u^m\|_{q_1',\,A_k} \leqslant 2^{m-1}\|\varphi_3\|_{q_1,\,A_k}\left(\|u-k\|_{l_2,\,A_k}^m + k^m\operatorname{mes}^{m/l_2}A_k\right). \tag{7.8$_2$}$$

Здесь показатели $l_1 = mr/[r-(\alpha-m)]$ и $l_2 = mq_1/(q_1-1)$ в силу наших предположений принадлежат промежутку $(m, \bar{m})$. Отсюда и из (7.7) получаем неравенство

$$\int_{A_k} |\nabla u|^m\,dx \leqslant \sum_{l=1}^{2} c_l\left(\|u-k\|_{l_l,\,A_k}^m + k^m\operatorname{mes}^{m/l_l}A_k\right), \tag{7.9}$$

в котором $c_1 = 2^m(\nu - \mu_0)^{-1}\mu_1\|u\|_{r,\Omega}^{\alpha-m}$, $c_2 = 2^m(\nu-\mu_0)^{-1}\|\varphi_3\|_{q_1,\Omega}$. Как легко видеть, для $u(x)$ выполнены все условия теоремы 5.1 гл. II (точнее, замечания 5.1 к ней), и потому для $u(x)$ имеет место желаемая оценка сверху. Аналогично, рассматривая функцию $v(x) = -u(x)$, оценим $u(x)$ снизу. Все приведенные рассуждения остаются в силе и для случая $m = n$.

Теорема 7.1 доказана. Она выделяет класс уравнений вида (0.1), для которого любое обобщенное решение $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}(\Omega)$ с конечным $\operatorname{vrai}\max\limits_{\partial\Omega}|u|$ оказывается ограниченным. Проблема оценки $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u|$ для таких решений свелась к получению оценки $\|u\|_{r,\Omega}$. Оценить $\|u\|_{r,\Omega}$ только через известные в задаче Дирихле величины в общем случае нельзя. Примером тому могут служить линейные уравнения $Lu + \lambda u = f$, $u|_S = 0$; при собственных значениях λ задача имеет нетривиальные решения для $f \equiv 0$, так что никакую их норму нельзя оценить через какую-либо норму f. Можно дать некоторые достаточные условия, когда это возможно.

Пусть, например, a_i и a при $x \in \overline{\Omega}$ и $|u| > k_0$ удовлетворяют неравенствам

$$\left.\begin{aligned} a_i(x,u,p)p_i &\geqslant \nu|p|^m - \delta_1|u|^m - \varphi_4(x),\\ a(x,u,p)u &\leqslant \mu_0|p|^m + \delta_2|u|^m + \varphi_4(x), \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

в которых $0 \leqslant \mu_0 < \nu$, $\delta_1, \delta_2 \geqslant 0$, $\varphi_4 \in L_1(\Omega)$, $m > 1$. Тогда, аналогично (7.7), получим для $k_1 = \max(k_0, M_0)$ $(M_0 \geqslant \operatorname{vrai}\max\limits_{\partial\Omega}|u|)$

$$\begin{aligned} \int\limits_{A_{k_1}} |\nabla u|^m\,dx &\leqslant (\nu-\mu_0)^{-1}\int\limits_{A_{k_1}}[(\delta_1+\delta_2)|u|^m + 2\varphi_4]\,dx \leqslant \\ &\leqslant c^m\frac{\delta_1+\delta_2}{\nu-\mu_0}(1+\varepsilon)\operatorname{mes}^{m/n}A_{k_1}\int\limits_{A_{k_1}}|\nabla u|^m\,dx + \\ &+ (\nu-\mu_0)^{-1}\int\limits_{A_{k_1}}\left[(\delta_1+\delta_2)c_{\varepsilon,m}k_1^m + 2\varphi_4\right]dx, \qquad \forall\varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Постоянная c взята из неравенства (2.12) гл. II (она зависит только от n и m), а $c_{\varepsilon,m}$ из (1.5) гл. II. Если $\delta_1 + \delta_2$ настолько мало, что

$$1 - c^m\frac{\delta_1+\delta_2}{\nu-\mu_0}\operatorname{mes}^{m/n}\Omega > 0, \tag{7.12}$$

то из (7.11) следует оценка для $\|\nabla u\|_{m,A_{k_1}}$. Аналогично, проводя рассуждения с функцией $-u(x)$, получим оценку $\|\nabla u\|_{m,B_{k_1}}$ по множеству $B_{k_1} = \{x\colon u(x) < -k_1\}$, $k_1 = \max\{k_0; M_0\}$. Это и теорема вложения 2.1 гл. II гарантируют оценку $\|u\|_{\tilde{m}, \Omega}$ с $\tilde{m} = \bar{m} \equiv nm/(n-m)$ при $m < n$, с любым конечным $\tilde{m}$ при $m = n$ и с $\tilde{m} = \infty$ при $m > n$.

Если в неравенствах (7.10) вместо $|u|^m$ стоит $|u|^r$ с $r < m$, то δ_1 и δ_2 могут быть любыми. Действительно, если воспользоваться неравенством (1.3) гл. II: $|u|^r \leqslant \frac{r}{m}\delta^{m/r}|u|^m + \frac{m-r}{m}\delta^{-m/(m-r)}$ с $\forall\delta > 0$, то из данных условий будут следовать неравенства (7.10) с коэффициентами при $|u|^m$, равными $\delta_1 \frac{r}{m}\delta^{m/r}$ и $\delta_2 \frac{r}{m}\delta^{m/r}$ соответственно. Ввиду свободы выбора $\delta > 0$ мы удовлетворим условию типа (7.12), взяв δ достаточно малым.

Рассмотренные случаи относятся к обобщенным решениям u из $W^1_m(\Omega)$. Если $u \in W^1_{m,q}(\Omega)$, то можно привести еще такие достаточные условия:

$$\left.\begin{aligned} &a_i(x, u, p)p_i \geqslant \nu|p|^m - \delta_1|u|^m + \delta_3|u|^r - \varphi_4(x),\\ &a(x, u, p)u \leqslant \mu_0|p|^m + \delta_2|u|^m + \delta_4|u|^r + \varphi_4(x),\\ &\varphi_4 \in L_1(\Omega), \quad r \leqslant q. \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

Пусть здесь $\mu_0 < \nu$, а δ_1 и δ_2 удовлетворяют условию (7.12). Тогда так же, как и выше, оценивается норма $\|u\|_{\tilde{m}, \Omega}$, если $r > m$ и $\delta_3 \geqslant \delta_4$ или если $r < m$, а δ_3 и δ_4 произвольны.

Если же в условии (7.13) $\delta_3 > \delta_4$, то можно получить оценку нормы $\|u\|_{r, \Omega}$, предполагая лишь, что $\mu_0 \leqslant \nu$, а постоянные δ_1 и δ_2 равны нулю при $r < m$ и могут быть произвольными $\geqslant 0$ при $r > m$. Наконец, если $\delta_3 > \delta_4$, $r > m$, $\mu_0 < \nu$, то легко видеть, что вместе с нормой $\|u\|_{r, \Omega}$ мы оценим и норму $\|u\|_{\tilde{m}, \Omega}$.

Доказываются все эти утверждения аналогично предыдущему, надо только в случае необходимости использовать неравенство $|u|^r \leqslant \varepsilon|u|^m + c_{\varepsilon, r, m}$ при $r < m$ или $|u|^m \leqslant \varepsilon|u|^r + c_{\varepsilon, m, r}$ при $r > m$, подбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым. Ясно, что число таких «удачных» случаев можно приумножить. Итак, справедлива

Теорема 7.2. *Пусть функции $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ удовлетворяют неравенствам* (7.2), (7.3) *с $m < n$, $q \geqslant \bar{m}$ и при $x \in \bar{\Omega}$, $|u| \geqslant k_0$ подчиняются условию* (7.13) *с каким-либо $r \leqslant q$ и $\varphi_4 \in L_1(\Omega)$. Пусть $u(x)$ — обобщенное решение из $W^1_{m,q}(\Omega)$ с $\operatorname{vrai}\max\limits_{\partial\Omega}|u| \leqslant M_0$. Верны следующие утверждения:*

1) *Если $\mu_0 < \nu$, δ_1 и δ_2 подчиняются неравенству* (7.12), *$r > m$ и $\delta_3 \geqslant \delta_4$, то норма $\|u\|_{\tilde{m}, \Omega}$ оценивается сверху постоянной, определяемой лишь m, n, $\tilde{m}$, M_0, k_0, ν, μ_0, δ_1, δ_2, $\|\varphi_4\|_{1, \Omega}$ и* $\operatorname{mes}\Omega$.

2) *Если $\mu_0 < \nu$, выполнено неравенство* (7.12) *и $r < m$, то норма $\|u\|_{\tilde{m}, \Omega}$ оценивается сверху постоянной, зависящей от тех же величин, что и в пункте* 1), *а также от r, δ_3 и δ_4.*

3) *Если* $\mu_0 \leqslant \nu$ *и* $\delta_3 > \delta_4$, *то норма* $\|u\|_{r,\Omega}$ *в случае* $r < m$ *и* $\delta_1 = \delta_2 = 0$ *оценивается сверху постоянной, зависящей только от* m, n, M_0, k_0, δ_3, δ_4, $\|\varphi_4\|_{1,\Omega}$ *и* $\operatorname{mes}\Omega$, *а в случае* $r > m$ *и произвольных* δ_1 *и* δ_2 *постоянная, мажорирующая норму* $\|u\|_{r,\Omega}$, *зависит также от* r, δ_1 *и* δ_2.

4) *При* $\mu_0 < \nu$, $\delta_3 > \delta_4$, $r > m$ *и произвольных* $\delta_1, \delta_2 \geqslant 0$ *нормы* $\|u\|_{r,\Omega}$ *и* $\|u\|_{\tilde{m},\Omega}$ *оцениваются сверху через те же величины, что и в пункте* 2).

Теорема 7.3. *Утверждения* 1)—4) *теоремы* 7.2 *остаются справедливыми для решений* $u(x)$ *из* $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ *с* $m = n$ *и для ограниченных обобщенных решений из* $W^1_m(\Omega)$ *с* $m > 1$, *если условия* (7.2), (7.3) *заменить на* ($7.\tilde{2}$), ($7.\tilde{3}$) *и* ($7.\tilde{\tilde{2}}$), ($7.\tilde{\tilde{3}}$) *соответственно, а в* (7.13) *допускать* $\forall r \geqslant 1$.

Напомним, что в теоремах 7.2 и 7.3 $\tilde{m} = \bar{m} = nm/(n-m)$ при $m < n$, $\tilde{m}$ — $\forall$ положительное число при $m = n$ и $\tilde{m} = \infty$ при $m > n$.

Рассмотрим еще случай, когда $u(x)$ неограничена на $\partial\Omega$. Пусть u есть обобщенное решение уравнения (0.1) из класса $W^1_{m,q}(\Omega)$ с $m < n$ или из класса $W^1_m(\Omega)$ с $m = n$ и u совпадает на $\partial\Omega$ с $\varphi \in W^1_{m,q}(\Omega)$ или $W^1_n(\Omega) \cap L_{\tilde{m}}(\Omega)$, $\forall \tilde{m} < \infty$; соответственно. Рассмотрим интегральное тождество (7.1) с $\eta = u - \varphi$:

$$\int_\Omega \left[a_i(x, u, u_x)\left(u_{x_i} - \varphi_{x_i}\right) - a(x, u, u_x)(u - \varphi)\right] dx = 0. \tag{7.14}$$

Пусть для a_i, a при $x \in \bar{\Omega}$ и произвольных u и p выполнены неравенства (7.13), а также при $m < n$ неравенства

$$\left.\begin{aligned} |a_i(x, u, p)| &\leqslant c|p|^{m-1} + c|u|^{s/m'} + \varphi_5(x), && \varphi_5 \in L_{m'}(\Omega), \\ |a(x, u, p)| &\leqslant c|p|^{m/q'} + c|u|^{s/q'} + \varphi_6(x), && \varphi_6 \in L_{q'}(\Omega), \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

где $s = \max\{m, r\}$. При $m = n$ вместо (7.15) предполагаем

$$\left.\begin{aligned} |a_i(x, u, p)| &\leqslant c|p|^{m-1} + c|u|^{s/m'} + \varphi_5(x), && \varphi_5 \in L_{m'}(\Omega), \\ |a(x, u, p)| &\leqslant c|p|^{m-\varepsilon} + c|u|^{s-\varepsilon} + \varphi_6(x), && \varphi_6 \in L_{q_1}(\Omega), \end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

с какими-либо $\varepsilon > 0$, $q_1 > 1$ и тем же s. Исходя из (7.14), можно оценить $\|u\|_{\tilde{m},\Omega}$ или $\|u\|_{r,\Omega}$ при тех же условиях на входящие в (7.13) параметры, что и в пунктах 2), 4) теорем 7.2 и 7.3. Для этого надо воспользоваться известными алгебраическими неравенствами (1.5), (1.6) гл. II.

Именно, из (7.14) в силу (7.13) следует

$$(\nu-\mu_0)\int_\Omega |\nabla u|^m\,dx+(\delta_3-\delta_4)\int_\Omega |u|^r\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_\Omega\left[(\delta_1+\delta_2)|u|^m+2\varphi_4+a_i\varphi_{x_i}-a\varphi\right]dx. \qquad (7.17)$$

Благодаря (7.15) при $m<n$ имеем

$$\int_\Omega\left(a_i\varphi_{x_i}-a\varphi\right)dx\leqslant\left(c\|\nabla u\|_{m,\Omega}^{m-1}+c\|u\|_{s,\Omega}^{s/m'}+\|\varphi_5\|_{m',\Omega}\right)\|\nabla\varphi\|_{m,\Omega}+$$
$$+\left(c\|\nabla u\|_{m,\Omega}^{m/q'}+c\|u\|_{s,\Omega}^{s/q'}+\|\varphi_6\|_{q',\Omega}\right)\|\varphi\|_{q,\Omega}\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_1\|\nabla u\|_{m,\Omega}^m+\varepsilon_1\|u\|_{s,\Omega}^s+c_{\varepsilon_1},\qquad \forall\varepsilon_1>0. \qquad (7.18)$$

Постоянная c_{ε_1} определяется ε_1 ($c_{\varepsilon_1}\to\infty$ при $\varepsilon_1\to 0$) и известными величинами: c, m, q, $\|\nabla\varphi\|_{m,\Omega}$, $\|\varphi\|_{q,\Omega}$, $\|\varphi_5\|_{m',\Omega}$ и $\|\varphi_6\|_{q',\Omega}$.

Точно так же при $m=n$ выводим из (7.16)

$$\int_\Omega\left(a_i\varphi_{x_i}-a\varphi\right)dx\leqslant\left(c\|\nabla u\|_{m,\Omega}^{m-1}+c\|u\|_{s,\Omega}^{s/m'}+\|\varphi_5\|_{m',\Omega}\right)\|\nabla\varphi\|_{m,\Omega}+$$
$$+c\|\nabla u\|_{m,\Omega}^{m-\varepsilon}\|\varphi\|_{m/\varepsilon,\Omega}+c\|u\|_{s,\Omega}^{s-\varepsilon}\|\varphi\|_{s/\varepsilon,\Omega}+\|\varphi_6\|_{q_1,\Omega}\|\varphi\|_{q_1',\Omega}\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_1\|\nabla u\|_{m,\Omega}^m+\varepsilon_1\|u\|_{s,\Omega}^s+c_{\varepsilon_1},\qquad \forall\varepsilon_1>0. \qquad (7.19)$$

Подставим (7.18), (7.19) в (7.17) и приведем подобные члены:

$$(\nu-\mu_0-\varepsilon_1)\|\nabla u\|_{m,\Omega}^m+(\delta_3-\delta_4)\|u\|_{r,\Omega}^r\leqslant$$
$$\leqslant(\delta_1+\delta_2)\|u\|_{m,\Omega}^m+\varepsilon_1\|u\|_{s,\Omega}^s+c_{\varepsilon_1}+2\|\varphi_4\|_{1,\Omega}. \qquad (7.20)$$

В силу неравенств (1.5), (1.6) гл. II при $\forall\varepsilon_2>0$

$$|\nabla u|^m\geqslant(1-\varepsilon_2)|\nabla u-\nabla\varphi|^m-c_{\varepsilon_2,m}|\nabla\varphi|^m, \qquad (7.21)$$
$$|u|^m\leqslant(1+\varepsilon_2)|u-\varphi|^m+c_{\varepsilon_2,m}|\varphi|^m. \qquad (7.22)$$

Кроме того, примем во внимание оценку $\|u-\varphi\|_{m,\Omega}$ через $\|\nabla u-\nabla\varphi\|_{m,\Omega}$ (см. неравенство (2.12) гл. II). Эта теорема вложения вместе с (7.20), (7.21) и (7.22) позволяет заключить о справедливости следующей теоремы:

Теорема 7.4. *Пусть функции $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ удовлетворяют неравенствам* (7.13) *и, кроме того, неравенствам* (7.15) *при $m<n$ или неравенствам* (7.16) *при $m=n$. Предположим, что функция $\varphi(x)$ принадлежит $W^1_{m,q}(\Omega)$ с $1<m<n$, $q\geqslant\tilde{m}$ или $W^1_n(\Omega)\cap L_{\tilde{m}}(\Omega)$ с $\forall\tilde{m}<\infty$. Тогда для обобщенных решений $u(x)$ из класса $W^1_{m,q}(\Omega)$ при $m<n$ и из $W^1_m(\Omega)$ при $m=n$ соответ-*

ственно, совпадающих на $\partial\Omega$ *с указанной функцией* φ, *остаются справедливыми утверждения* 2) *и* 4) *теорем* 7.2 *и* 7.3 *об оценках норм* $\|u\|_{\bar{m},\Omega}$ *и* $\|u\|_{r,\Omega}$. *При этом вместо* M_0 *в оценки войдут величины* c, $\|\varphi_5\|_{m',\Omega}$, $\|\varphi_6\|_{q',\Omega}$ *из условий* (7.15) *и нормы* $\|\varphi\|_{q,\Omega}$, $\|\nabla\varphi\|_{m,\Omega}$ *в случае* $m<n$ *и величины* c, ε, $\|\varphi_5\|_{m',\Omega}$, $\|\varphi_6\|_{q_1,\Omega}$ *из условий* (7.16) *и нормы* $\|\varphi\|_{m/\varepsilon,\Omega}$, $\|\varphi\|_{s/\varepsilon,\Omega}$, $\|\varphi\|_{q_1',\Omega}$, $\|\nabla\varphi\|_{m,\Omega}$ *в случае* $m=n$.

Во всех теоремах 7.1 — 7.4 имеется ограничение $\nu>\mu_0$ (в некоторых случаях оно заменено на условие $\nu\geqslant\mu_0$). В § 9 будут доказаны теоремы существования обобщенных решений из $W^1_{m,q}$ задачи Дирихле для уравнений (0.1). Одно из главных условий состоит в том, что для $\forall u\in \overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$L(u,u)\geqslant f\left(\|\nabla u\|_{m,\Omega}+\|u\|_{q,\Omega}\right)-c, \tag{7.23}$$

где $f(\tau)>0$ — непрерывная функция $\tau\geqslant 0$, стремящаяся к бесконечности при $\tau\to\infty$. Если предположения на a_i и a формулировать в виде неравенств типа (7.4), (7.5), то для справедливости (7.23) необходимо предположить, что $\nu>\mu_0$.

Другие предположения теорем § 9 таковы, что они также приводят к неравенствам типа (7.4), (7.5) и (7.13) с $\nu>\mu_0$. Поясним это на случае $m<n$, $q=\bar{m}$ теоремы 7.1. На функции a_i и a в § 9 накладываются условия (7.2), (7.3) с заменой q на какое-либо $\tilde{q}<\bar{m}$. Тогда произведение $|a(x,u,p)u|$ можно оценить сверху суммой вида $\varepsilon|p|^m+c_\varepsilon|u|^{\tilde{q}}+|u|\varphi_2(x)$ с $\forall\varepsilon>0$, причем $\tilde{q}<\bar{m}=\dfrac{nm}{n-m}=m\dfrac{n+q}{n}$, т. е. $\tilde{q}$ удовлетворяет условию теоремы 7.1, наложенному на показатель α. Условие же эллиптичности и условие (7.2) с $\tilde{q}$ вместо q на a_i гарантируют (7.4) с некоторым $\nu>0$ и $\alpha=\tilde{q}$. Выбирая $\varepsilon<\nu$, мы удовлетворим обсуждаемому условию: $\nu>\mu_0=\varepsilon$.

Итак, предположение $\nu>\mu_0$ с точки зрения условий теорем § 9 не есть, по существу, дополнительное ограничение. Однако если мы уже знаем, что u есть ограниченное обобщенное решение уравнения (0.1) и нас интересует оценка для него какой-либо интегральной нормы или $\max\limits_{\Omega}|u(x)|$, причем функции $\varphi_i(x)$, входящие в наши условия, суммируются с достаточно высокими степенями, то условие $\nu>\mu_0$ можно снять. Предположения (7.2), (7.3) и ($7.\tilde{2}$), ($7.\tilde{3}$) заменяются более слабыми: ($7.\tilde{\tilde{2}}$) и ($7.\tilde{\tilde{3}}$) при любых $m>1$. Пусть u есть ограниченное обобщенное решение из $W^1_m(\Omega)$, $m>1$, причем $\operatorname{vrai}\max\limits_{\partial\Omega}|u|\leqslant M_0$, и пусть a_i и a удовлетворяют при $|u| \geqslant k_0 \geqslant M_0$ неравенствам (7.10), в которых $\nu > 0$, $\mu_0 \geqslant 0$, $\delta_i \geqslant 0$, а φ_4 суммируется с достаточно высокой степенью, величина которой будет уточнена ниже. Рассмотрим тождество (7.1) при $\eta(x) = u^{s-1}(x)(u^s(x) - k)$ для $x \in A_k \equiv \{x\colon\ x \in \Omega,\ u(x) > k^{1/s}\}$ и $\eta(x) = 0$ для $x \overline{\in} A_k$; число k считаем $\geqslant k_0^s$; число s в дальнейшем будет выбрано достаточно большим. Обозначим через $v(x)$ функцию, равную $u^s(x)$ для $x \in A_0$ и нулю для $x \overline{\in} A_0$. Подставим взятое η в (7.1):

$$\int\limits_{A_k} \left[s a_i u^{2s-2} u_{x_i} + (s-1) a_i u^{s-2}(v-k) u_{x_i} - a u^{s-1}(v-k)\right] dx = 0. \tag{7.24}$$

В силу (7.10) отсюда следует

$$\int\limits_{A_k} [s u^{2s-2} + (s-1) u^{s-2}(v-k)] [\nu |\nabla u|^m - \delta_1 u^m - \varphi_4] \, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{A_k} u^{s-2}(v-k)(\mu_0 |\nabla u|^m + \delta_2 u^m + \varphi_4) \, dx,$$

откуда, учтя $0 < v - k \leqslant u^s$, получим

$$\int\limits_{A_k} \left[\nu u^{2s-2} |\nabla u|^m + \frac{(s-1)\nu - \mu_0}{s} u^{s-2}(v-k) |\nabla u|^m\right] dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{A_k} \left[\left(\frac{2s-1}{s}\delta_1 + \frac{\delta_2}{s}\right) u^{2s-2+m} + 2u^{2s-2}\varphi_4\right] dx. \tag{7.25}$$

Введем обозначение: $w(x) = u^{\frac{2s-2}{m}+1}$ для $x \in A_0$. Ясно, что $w_{x_i} = \left(\frac{2s-2}{m} + 1\right) u^{(2s-2)/m} u_{x_i}$ и $|\nabla w|^m = \left(\frac{2s-2}{m} + 1\right)^m u^{2s-2} |\nabla u|^m$. Возьмем в (7.25) $s = 1 + \mu_0 \nu^{-1}$ *) и перепишем его в виде

$$\int\limits_{A_{\bar k}} |\nabla w|^m \, dx \leqslant \int\limits_{A_{\bar k}} (c_1 w^m + c_2 w^{(2s-2)m/(2s-2+m)} \varphi_4) \, dx, \tag{7.26}$$

где $c_1 = \frac{1}{\nu}\left(\frac{2s-2}{m} + 1\right)^m \left(\frac{2s-1}{s}\delta_1 + \frac{\delta_2}{s}\right)$, $c_2 = \frac{2}{\nu}\left(\frac{2s-2}{m} + 1\right)^m$, $\bar k = k^{\frac{2s-2}{ms} + \frac{1}{s}}$ и $A_{\bar k} = \{x\colon\ x \in \Omega,\ w(x) > \bar k\}$. Последнее слагаемое правой части оценим по неравенству Юнга так:

*) В качестве s можно брать любое число $\geqslant 1 + \mu_0 \nu^{-1}$.

$c_2 w^{(2s-2)m/(2s-2+m)} \varphi_4 \leqslant \varepsilon w^m + c_{m,s,\varepsilon}\varphi_4^{(2s-2+m)/m}$ и в соответствии с этим (7.26) заменим неравенством

$$\int_{A_{\bar k}} |\nabla w|^m\,dx \leqslant \int_{A_{\bar k}} \left[(c_1+\varepsilon)w^m + c_{m,s,\varepsilon}\varphi_4^{(2s-2+m)/m}\right]dx. \tag{7.27}$$

Из этого неравенства можно оценить $\int\limits_{A_{\bar k}} |\nabla w|^m\,dx$, если $c_1+\varepsilon$ или $\operatorname{mes} A_{\bar k}$ достаточно малы. Именно, как и выше в (7.11), заменим w^m на $(1+\varepsilon_1)(w-\bar k)^m + c_{m,\varepsilon_1}\bar k^m$ и используем теорему вложения (2.12) из гл. II. Это приведет к неравенству

$$\left[1-(c_1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)c^m \operatorname{mes}^{m/n} A_{\bar k}\right]\int_{A_{\bar k}} |\nabla w|^m\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{A_{\bar k}} \left[(c_1+\varepsilon)c_{m,\varepsilon_1}\bar k^m + c_{m,s,\varepsilon}\varphi_4^{(2s-2+m)/m}\right]dx, \tag{7.28}$$

где ε и ε_1 — произвольные положительные числа, а $\bar k \geqslant \bar k_0 \equiv \equiv k_0^{(2s-2+m)/m}$. Если

$$1 - c_1 c^m \operatorname{mes}^{m/n}\Omega \geqslant \delta_0 > 0, \tag{7.29}$$

то положим $\varepsilon_1 = \varepsilon$, где ε — наибольшее из чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$(\varepsilon + c_1\varepsilon + \varepsilon^2)c^m \operatorname{mes}^{m/n}\Omega \leqslant \delta_0/2, \qquad \varepsilon \leqslant 1. \tag{7.30}$$

Тогда коэффициент в левой части (7.28) будет не меньше $\delta_0/2$, и потому

$$\int_{A_{\bar k}} |\nabla w|^m\,dx \leqslant \gamma_1 \bar k^m \operatorname{mes} A_{\bar k} + \gamma_2 \|\varphi_4\|^{(2s-2+m)/m}_{(2s-2+m)/m,\,A_{\bar k}}, \tag{7.31}$$

где $\gamma_1 = 2\delta_0^{-1}(c_1+1)c_{m,\varepsilon}$, $\gamma_2 = 2\delta_0^{-1}c_{m,s,\varepsilon}$.

Итак, если $\varphi_4 \in L_{(2s-2+m)/m}(\Omega)$, то (7.31) дает оценку $\int\limits_{A_{\bar k}} |\nabla w|^m\,dx$ через известные нам величины. Отсюда, в свою очередь, следует оценка для $\|w\|_{\tilde m,\,A_{\bar k}}$, а тем самым и для $\|u\|_{\frac{\tilde m(2s-2+m)}{m},\,A_0}$ с $\tilde m = \dfrac{nm}{n-m}$ при $m<n$, $\forall \tilde m \geqslant 1$ при $m=n$ и $\tilde m = \infty$ при $m>n$. Аналогично оценивается $\|u\|_{\frac{\tilde m(2s-2+m)}{m},\,\{u<0\}}$. Заметим, что при уменьшении $\operatorname{mes}\Omega$ ε не уменьшается, и, следовательно, γ_1 и γ_2 не возрастают. Таким образом, мы получили оценку $\|u\|_{\frac{\bar m(2s-2+m)}{m},\,\Omega} \leqslant \bar M$, где $\bar M$ есть возрастающая функция $\operatorname{mes}\Omega$.

Предположим теперь, что $m \leqslant n$ и по-прежнему выполнено условие (7.29). Если функция $\varphi_4(x)$ суммируется со степенью $r > \frac{n(2s-2+m)}{m^2}$, то неравенства (7.31) позволяют оценить сверху $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} w$. Действительно, в силу неравенства Гёльдера имеем

$$\int\limits_{A_{\bar k}} \varphi_4^{(2s-2+m)/m}\,dx \leqslant \|\varphi_4\|_{r,\,A_{\bar k}}^{(2s-2+m)/m} \left(\operatorname{mes} A_{\bar k}\right)^{1-m/n+\delta}, \quad \delta > 0, \tag{7.32}$$

а отсюда и из (7.31) следует неравенство

$$\int\limits_{A_{\bar k}} |\nabla w|^m\,dx \leqslant \gamma_1 \bar k^m \operatorname{mes} A_{\bar k} + \gamma_3 \left(\operatorname{mes} A_{\bar k}\right)^{1-m/n+\delta}, \qquad \delta > 0, \tag{7.33}$$

где $\gamma_3 = \gamma_2 \|\varphi_4\|_{r,\,A_{\bar k_0}}^{(2s-2+m)/m}$. Воспользуемся теперь леммами 5.1 и 5.3 гл. II, принимая во внимание зависимость постоянных γ_1 и γ_3 от $\operatorname{mes}\Omega$. Из них следует, что $w(x)$ не превосходит постоянной $\bar k_{\max}$, определяемой $\bar k_0$, c, γ_1, γ_2, δ, m, $\|\varphi_4\|_{r,\,\Omega}$ и $\operatorname{mes}\Omega$, причем $\bar k_{\max}$ есть возрастающая функция $\operatorname{mes}\Omega$ и $\bar k_0$. Из оценки же $\max\limits_{\Omega} w(x)$ вытекает соответствующая оценка $\max\limits_{\Omega} u(x)$. Аналогично оценивается снизу $\min\limits_{\Omega} u(x)$.

Итак, доказана следующая

Теорема 7.5. *Пусть $u(x)$ есть ограниченное обобщенное решение из $W_m^1(\Omega)$, $m > 1$, уравнения (0.1). Пусть для функций $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ справедливы при $|u| \geqslant k_0 \geqslant \operatorname{vrai}\max\limits_{\partial\Omega}|u|$ неравенства (7.10) с некоторыми постоянными $\nu > 0$, μ_0, δ_1, $\delta_2 \geqslant 0$, удовлетворяющими условию (7.29), в котором c_1 та же, что в (7.26), $s = 1 + \mu_0\nu^{-1}$, а c взята из неравенства (2.12) гл. II с $p=m$. Тогда, если $\varphi_4 \in L_{(2s-2+m)/m}(\Omega)$, то величина $\|u\|_{(2s-2+m)\bar m/m,\,\Omega}$ оценивается сверху постоянной $\bar M$, определяемой m, ν, k_0, μ_0, δ_1, δ_2, $\|\varphi_4\|_{(2s-2+m)/m,\,\Omega}$ и $\operatorname{mes}\Omega$. Если $\varphi_4 \in L_r(\Omega)$ с $r > n(2s-2+m)/m^2$, $m \leqslant n$, то величина $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u|$ оценивается сверху постоянной $\bar M$, определяемой m, ν, μ_0, δ_1, δ_2, $\|\varphi_4\|_{r,\,\Omega}$, r, k_0 и $\operatorname{mes}\Omega$. В обоих случаях $\bar M$ есть возрастающая функция $\operatorname{mes}\Omega$ и k_0.*

Теорема 7.5 примечательна тем, что она дает оценку той или иной нормы u по областям Ω достаточно малой меры при выполнении лишь неравенств (7.10) с какими-либо входящими в них постоянными. Величина $\operatorname{mes}\Omega$ определяется только постоянными m, ν, μ_0, δ_1 и δ_2 (условие (7.29)). В § 9 она будет использована для доказательства теоремы о разрешимости задачи Дирихле.

Если считать известной величину $\|u\|_{q,\Omega}$ с каким-либо $q\geqslant 1$, то условие (7.29) в теореме 7.5 можно отбросить и оценить $\operatorname{vrai}\max_{\Omega}|u|$ через перечисленные в теореме 7.5 величины и норму $\|u\|_{q,\Omega}$. Более того, в этом случае неравенство (7.10) можно заменить менее ограничительными неравенствами (7.4), (7.5) с произвольными $\nu>0$, μ_0, μ_1, $m<\alpha<m\frac{n+q}{n}$ и $\varphi_3\in L_{q_1}(\Omega)$, $q_1>\max\{n/m;\ 1\}$. При $m\leqslant n$ эти утверждения доказываются, исходя из (7.24), так же, как в теореме 7.1. Именно, в силу условий (7.4), (7.5) мы получим из (7.24) неравенство, отличающееся от (7.25) лишь тем, что в правой части u^{2s-2+m} заменено на $u^{2s-2+\alpha}$, $u^{2s-2}\varphi_4$ на $u^{2s-2+m}\varphi_3$ и $\delta_1=\delta_2=\mu_1$. В соответствии с этим вместо (7.26) будем иметь неравенство

$$\int_{A_{\bar k}}|\nabla w|^m\,dx\leqslant\int_{A_{\bar k}}(c_1w^mu^{\alpha-m}+c_2w^m\varphi_3)\,dx \tag{7.34}$$

с теми же c_1 и c_2, что и в (7.26), $\bar k\geqslant\bar k_0\equiv k_0^{(2s-2+m)/m}$.

Интеграл в правой части (7.34) можно оценить так же, как это делалось в теореме 7.1 при выводе (7.9) из (7.7). Это приводит к неравенству типа (7.9) для $w(x)$:

$$\int_{A_{\bar k}}|\nabla w|^m\,dx\leqslant\sum_{i=1}^{2}c_i'\left(\|w-\bar k\|^m_{l_i,A_{\bar k}}+\bar k^m\operatorname{mes}^{m/l_i}A_{\bar k}\right),\quad \bar k\geqslant\bar k_0, \tag{7.35}$$

с $c_1'=2^mc_1\|u\|^{\alpha-m}_{q,\Omega}$, $c_2'=2^mc_2\|\varphi_3\|_{q_1,\Omega}$, $l_1=mq/[q-(\alpha-m)]$ и $l_2=mq_1/(q_1-1)$. Отсюда в силу теоремы 5.1 гл. II (точнее, замечания 5.1 к ней) следует оценка $\operatorname{vrai}\max_{\Omega}w$ через постоянные c_1', c_2', l_1, l_2, m, $\bar k_0'$ и величину $L=\left(\int_{A_{\bar k_0}}w^{\varepsilon_1}\,dx\right)^{1/\varepsilon_1}$ при каком-либо $\varepsilon_1>0$. В частности, можно взять $\varepsilon_1=mq/(2s-2+m)$, так что $L\leqslant\|u\|^{(2s-2+m)/m}_{q,\Omega}$.

Пусть $m>n$. В этом случае для оценки $\max_{\Omega}w$ достаточно оценить $\int_{A_{\bar k}}|\nabla w|^m\,dx$ при каком-либо $\bar k\geqslant 0$. Так же, как и выше, выводим неравенство (7.34) и оцениваем интеграл $j_2 = \int\limits_{A_{\bar k}} w^m \varphi_3\, dx$.

Интеграл $j_1 = \int\limits_{A_{\bar k}} w^m u^{\alpha - m}\, dx$ оцениваем иначе, именно:

$$j_1 \leqslant \varepsilon \int\limits_{A_{\bar k}} (w - \bar k)^{m + \frac{m^2 q}{n(2s-2+m)}} dx + c_\varepsilon \left(1 + \bar k^{-\frac{m(2s-2+\alpha)}{2s-2+m}}\right) \operatorname{mes} A_{\bar k}, \quad (7.36)$$

где ε — произвольное положительное число, и к интегралу в правой части применяем неравенство (2.9) гл. II:

$$\int\limits_{A_{\bar k}} (w - \bar k)^{m + \frac{m^2 q}{n(2s-2+m)}} dx \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_{A_{\bar k}} |\nabla w|^m dx \left(\int\limits_{A_{\bar k}} (w - \bar k)^{\frac{mq}{2s-2+m}} dx \right)^{m/n} \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_{A_{\bar k}} |\nabla w|^m dx \left(\int\limits_{\Omega} |u|^q dx \right)^{m/n}.$$

Далее, $\| w - \bar k \|^m_{l_2, A_{\bar k}}$ надо оценить сверху через $\int\limits_{A_{\bar k}} |\nabla w|^m dx$, пользуясь неравенством (2.12) гл. II, а затем полученные оценки j_1 и j_2 подставить в (7.34) и взять ε и $\bar k^{-1}$ столь малыми, чтобы коэффициенты при $\int\limits_{A_{\bar k}} |\nabla w|^m dx$ в правой части в сумме не превосходили $1/2$ (при этом малость $\operatorname{mes} A_{\bar k}$ следует из неравенства $\operatorname{mes}^{1/q} A_{\bar k} \leqslant \| u \|_{q, \Omega} \bar k^{-m/(2s-2+m)}$). Тогда после приведения подобных членов придем к оценке $\| \nabla w \|^m_{m, A_{\bar k}}$ через $\bar k$, $\operatorname{mes} A_{\bar k}$ и $\| \varphi_3 \|_{q_1, A_{\bar k}}$. Так как $m > n$ и $\max\limits_{\partial\Omega} w \leqslant \bar k_0$, то отсюда следует, что $\max\limits_{\Omega} w$ не превосходит некоторого числа, определяемого известными нам числами. Это дает оценку $u(x)$ сверху. Аналогично оценивается $u(x)$ снизу.

Сформулируем доказанное утверждение в виде теоремы.

Теорема 7.6. *Пусть функции* $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ *удовлетворяют условиям* $(7.\overset{=}{2})$, $(7.\overset{=}{3})$ *с* $m > 1$ *и при* $x \in \Omega$, $|u| \geqslant k_0$, $p \in E_n$ *для них справедливы неравенства* (7.4), (7.5) *с какими-либо постоянными* $\nu > 0$, μ_0, μ_1, $\alpha > m$ *и* $\varphi_3(x) \in L_{q_1}(\Omega)$, $q_1 > \max\{n/m;\ 1\}$. *Тогда для любого ограниченного обобщенного* *решения* $u(x)$ *из* $W^1_m(\Omega)$ *уравнения* (0.1) *величина* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u|$ *оценивается сверху постоянной, определяемой величинами* ν, μ_0, μ_1, α, m, q_1, $\|\varphi_3\|_{q_1,\Omega}$ *из условий* (7.4), (7.5), *а также* k_0, $\operatorname{vrai}\max\limits_{\partial\Omega}|u|$, $\operatorname{mes}\Omega$ *и нормой* $\|u\|_{q,\Omega}$ *с каким-нибудь* $q>n\left(\frac{\alpha}{m}-1\right)$.

§ 8. Оценка максимума модулей для классических решений

В этом параграфе мы приведем ряд достаточных условий, когда можно оценить $\max\limits_{\Omega}|u(x)|$ для классических решений u квазилинейных уравнений общего вида. Во второй половине параграфа этот же вопрос рассматривается для решений из $C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ уравнений (0.1), т. е. квазилинейных уравнений с дивергентной главной частью. То, что решения для (0.1) берутся неклассические, для дальнейших наших приложений в § 10 несущественно. Рассмотрения второй части продиктованы главным образом желанием освободиться от предположений о двукратной дифференцируемости $a_i(x, u, p)$ и дифференцируемости $a(x, u, p)$ по p, которую надо потребовать при непосредственном применении теоремы 8.1 или ее следствий 8.1—8.4 к уравнениям (0.1). Желанием снизить предположения о гладкости функций, образующих уравнения, обусловлено и наличие теорем 8.1′ и 8.2.

В основе получения оценок $\max\limits_{\Omega}|u(x)|$ лежит принцип максимума. В его классической форме он применялся для той же цели, начиная с работ Пикара и С. Н. Бернштейна и кончая работами (см. [51_{11}] и др.) самого последнего времени. Одно из главных мест среди них занимают результаты Э. Хопфа [27]. Утверждения первой половины данного параграфа имеют много общего с результатами, полученными ранее разными авторами, в том числе Э. Хопфом, Дж. Серрином [51_{11}], Редхеффером [46] и нами, и было бы затруднительно выяснять их связи. Материал второй части параграфа при всей его близости к предшествующему имеет и своеобразные особенности. Он получен на основе принципа максимума для обобщенных решений, который изложен в § 13 гл. III.

Рассмотрим семейство эллиптических операторов

$$L_v(u)\equiv a_{ij}(x, v, u_x)\,u_{x_ix_j}+A(x, v, u_x) \tag{8.1}$$

и соответствующее ему уравнение

$$L_u(u)\equiv L(u)=0. \tag{8.2}$$

Будем предполагать во всем параграфе форму $a_{ij}(x, u, p)\,\xi_i\xi_j$

положительно-определенной, хотя многие утверждения остаются справедливыми и для случая $a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$. Кроме того, функции $a_{ij}(x, u, p)$, $A(x, u, p)$, а также те их частные производные, существование которых будет оговариваться, считаем ограниченными на любом компакте вида $\mathfrak{M}_{M, M_1} = \{(x, u, p)\colon x \in \bar{\Omega}, |u| \leqslant M, |p| \leqslant M_1\}$. Эти свойства a_{ij} и A ниже не указываются, но подразумеваются выполненными. Докажем теорему:

Теорема 8.1. *Пусть функции $u(x)$ и $\omega(x)$ принадлежат $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Если они удовлетворяют в Ω неравенству*

$$j(u, \omega) \equiv L_u(u) - L_u(\omega) \geqslant 0 \tag{8.3}$$

во всех точках, где $u(x) - \omega(x) > b_1$, то

$$u(x) \leqslant \omega(x) + \max\{b_1; \max_{\partial\Omega}(u - \omega)\} \leqslant \\ \leqslant \max\{\omega(x) + b_1; \operatorname{osc}\{\omega; \Omega\} + \max_{\partial\Omega} u\}. \tag{8.4}$$

Если $\hat{\omega}(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и

$$j(u, \hat{\omega}) \leqslant 0 \tag{8.5}$$

во всех точках, где $u(x) - \hat{\omega}(x) < b_2$, то

$$u(x) \geqslant \hat{\omega}(x) + \min\{b_2; \min_{\partial\Omega}(u - \hat{\omega})\} \geqslant \\ \geqslant \min\{\hat{\omega}(x) + b_2; -\operatorname{osc}\{\hat{\omega}; \Omega\} + \min_{\partial\Omega} u\}. \tag{8.6}$$

Функции $a_{ij}(x, u, p)$ и $A(x, u, p)$ считаем при этом дифферен цируемыми по p.

Замечание 8.1. Утверждения теоремы 8.1 остаются в силе, если в правую часть (8.3) подставить члены вида $B_i(x, u, \omega, u_x, \omega_x) \times (u_{x_i} - \omega_{x_i})$ с какими-либо функциями $B_i(x, u, \omega, p, q)$, ограниченными на любом компакте. Это же усиление допустимо и в (8.5).

Представим $j(u, \omega)$, следуя § 2, в виде

$$j(u, \omega) = a_{ij}(x, u, u_x) v_{x_i x_j} + \left(\frac{\partial \tilde{a}_{ij}}{\partial u_{x_l}} \omega_{x_i x_j} + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial u_{x_l}}\right) v_{x_l} \equiv \\ \equiv a_{ij} v_{x_i x_j} + \hat{A}_l v_{x_l} \geqslant 0,$$

где $v(x) = u(x) - \omega(x)$, и рассмотрим это неравенство в области $\Omega_{b_1} \equiv \{x\colon x \in \Omega, v(x) > b_1\}$. Согласно лемме 1.5 гл. III $\max_{\Omega_{b_1}} v \leqslant \max_{\partial\Omega_{b_1}} v$, а это и доказывает (8.4). Аналогично проверяется справедливость (8.6).

Выведем из теоремы 8.1 ряд следствий.

Следствие 8.1. Пусть $u(x)$, a_{ij} и A обладают гладкостью, указанной в теореме 8.1, u есть решение уравнения (8.2) и

$$\operatorname{sign} u \cdot A(x, u, 0) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad |u| > M. \tag{8.7}$$

Тогда

$$\max_{\Omega} |u| \leqslant \max\{M; \max_{\partial\Omega} |u|\} \equiv \max(M; m). \tag{8.8}$$

Возьмем $\omega(x) = M$. Так как $L_u(\omega) = A(x, u, 0) \leqslant 0$ при $u > M$, то условие (8.3) выполнено с $b_1 = 0$, а это гарантирует оценку $u(x) \leqslant M + \max\{0; \max_{\partial\Omega}(u - M)\} = \max(M; m)$. В качестве $\hat{\omega}(x)$ надо взять $-M$. Это дает оценку $u(x)$ снизу.

Следствие 8.2. Пусть Ω содержится в некотором шаре K_R, причем центр K_R не принадлежит Ω, и пусть

$$\operatorname{sing} u \cdot \frac{A(x, u, p)}{|p|} \leqslant \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x, u, p)$$

$$\text{для} \quad |u| \geqslant M \quad \text{и} \quad |p| \geqslant l \quad (l > 0). \tag{8.9}$$

Тогда для классических решений u уравнения (8.2) с $\max_{\partial\Omega} |u| = m$ верна оценка

$$\max_{\Omega} |u| \leqslant \max\{M; m\} + 2lR. \tag{8.10}$$

Функции $a_{ij}(x, u, p)$ и $A(x, u, p)$ должны быть дифференцируемы по p.

Пусть центр шара K_R находится в начале координат. Он лежит вне Ω. Рассмотрим функцию

$$\omega(x) = M + lR(e - e^{|x|/R}). \tag{8.11}$$

Легко видеть, что $|\omega_x| = le^{|x|/R} \geqslant l$, $\omega(x) \geqslant M$ и при $u(x) > M$

$$L_u(\omega) = le^{|x|/R}\left\{\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{R}\right)\frac{a_{ij}(x, u, \omega_x)\, x_i x_j}{x^2} - \frac{1}{|x|}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x, u, \omega_x) + \right.$$

$$\left. + \frac{A(x, u, \omega_x)}{|\omega_x|}\right\} \leqslant le^{|x|/R}\left\{-\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x, u, \omega_x) + \frac{A(x, u, \omega_x)}{|\omega_x|}\right\} \leqslant 0.$$

Следовательно, для u и ω выполнено условие (8.3) при $u(x) - \omega(x) > b_1 = 0$ и потому $u(x) \leqslant \omega(x) + \max\{0; \max_{\partial\Omega}(u - \omega)\} \leqslant \max(M, m) + 2lR$. Аналогично получается оценка $u(x)$ снизу.

Следствие 8.3. Пусть $u(x)$, a_{ij} и A обладают гладкостью, указанной в теореме 8.1. Пусть, далее, для некоторого фиксированного направления $\boldsymbol{\nu}$ и всех u и $\rho > 0$ справедливо

$$\frac{|A(x, u, p)|}{\mathscr{E}(x, u, p)} \leqslant \Phi(\rho), \qquad p = \rho\boldsymbol{\nu}, \tag{8.12}$$

где $\mathscr{E}(x, u, p) \equiv a_{ij}(x, u, p) p_i p_j$, $\Phi(\rho)$ — положительная неубывающая непрерывная при $\rho > 0$ функция, такая что

$$\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho^2 \Phi(\rho)} = \infty. \tag{8.13}$$

Тогда $\max_\Omega |u|$ для классического решения $u(x)$ уравнения (8.2) не превосходит некоторой постоянной, определяемой лишь $m = \max_{\partial\Omega} |u|$, Φ и диаметром d области Ω.

Без ограничения общности будем считать, что ν совпадает с направлением оси x_n и Ω лежит в полосе $0 \leqslant x_n \leqslant d$. Рассмотрим дважды дифференцируемую функцию $\omega = \omega(x_n)$ с $\omega' > 0$. Для нее

$$L_u(\omega) = \mathscr{E}(x, u, p) \frac{\omega''}{(\omega')^2} + A(x, u, p), \qquad p = \omega' \nu.$$

Выберем положительные числа α и β ($\alpha < \beta$) так, чтобы $\int_\alpha^\beta \frac{d\rho}{\rho^2 \Phi(\rho)} = d$, и возьмем в качестве $\omega(x_n)$ функцию, имеющую параметрическое задание: $\omega = \int_\rho^\beta \frac{d\rho}{2\rho\Phi(\rho)} + m$, $x_n = \int_\rho^\beta \frac{d\rho}{\rho^2\Phi(\rho)}$, $\rho \in [\alpha, \beta]$. Легко подсчитать, что $\omega' \equiv \frac{d\omega}{dx_n} = \frac{1}{2}\rho$, а $\omega'' = -2(\omega')^2 \Phi(\rho)$. Отсюда и из (8.12) следует, что $L_u(\omega) < 0$ при $\forall u$ (иначе, при $u - \omega > b_1 = -\infty$). Но тогда по теореме 8.1

$$u(x) \leqslant \omega(x) \leqslant m + \int_\alpha^\beta \frac{d\rho}{\rho\Phi(\rho)} \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Аналогично получаем оценку $u(x)$ снизу.

Замечание 8.2. Условие (8.13) было использовано лишь для того, чтобы существовали положительные числа α и β, для которых $\int_\alpha^\beta \frac{d\rho}{\rho^2\Phi(\rho)} = d$. Оно может оказаться выполненным как за счет поведения $\Phi(\rho)$ при $\rho \to \infty$, так и за счет поведения $\Phi(\rho)$ при $\rho \to 0$.

Следствие 8.4. Пусть u есть классическое решение уравнения (8.2) с $a_{ij}(x, u, p)$, не зависящими явно от u, и $\frac{\partial A(x, u, p)}{\partial u} \leqslant 0$, и пусть a_{ij} и A дифференцируемы по p. Тогда, если есть функция $\omega(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая неравенству $L(\omega) \leqslant 0$, то для u верна оценка (8.4) с $b_1 = 0$. Если же $\hat{\omega}(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и $L(\hat{\omega}) \geqslant 0$, то для u верна оценка (8.6) с $b_2 = 0$. Если $A(x, u, p)$ также не зависит от u, то оценки (8.4) и (8.6) верны с $b_1 = -\infty$, $b_2 = +\infty$.

Для вывода следствия 8.4 из теоремы 8.1 достаточно заметить, что в силу наших условий $L_u(\omega) \leqslant L_\omega(\omega) \equiv L(\omega)$ при $u \geqslant \omega$ и $L_u(\hat{\omega}) \geqslant L_{\hat{\omega}}(\hat{\omega})$ при $u \leqslant \hat{\omega}$, а отсюда и из $L_u(u) = 0$ следуют посылки (8.3) и (8.5) теоремы 8.1 с $b_1 = b_2 = 0$.

В теореме 8.1 и ее следствиях предполагалось, что $a_{ij}(x, u, p)$ и $A(x, u, p)$ дифференцируемы по p. От этого ограничения можно избавиться, заменив знаки $\geqslant$ и $\leqslant$ в условиях этих предложений на знаки $>$ и $<$ соответственно. Именно, справедлива

Теорема 8.1′. *Теорема* 8.1 *остается в силе, если условие дифференцируемости a_{ij} и A отбросить, а в* (8.3) *и* (8.5) *поставить строгие неравенства.*

Для доказательства (8.4) достаточно убедиться, что $v(x) \equiv u(x) - \omega(x)$ не может внутри Ω достигать максимума, большего b_1. Действительно, в такой точке x_0 было бы $u_{x_i} = \omega_{x_i}$, $a_{ij}(x, u, u_x)(u - \omega)_{x_i x_j} \leqslant 0$, а благодаря этим соотношениям и (8.3) и

$$0 < L_u(u) - L_u(\omega) =$$
$$= a_{ij}(x, u, u_x)(u - \omega)_{x_i x_j} + A(x, u, u_x) - A(x, u, u_x) \leqslant 0,$$

т. е. противоречивое неравенство. Аналогично доказывается (8.6).

Из теоремы 8.1′ вытекают следствия:

Следствие 8.5. Утверждения следствий 8.1 — 8.4 и замечания 8.2 остаются справедливыми, если в них отбросить условие дифференцируемости a_{ij} и A по p, но (8.7) заменить условием

$$\operatorname{sign} u \cdot A(x, u, 0) < 0 \quad \text{для} \quad |u| > M, \tag{8.7′}$$

(8.9) — условием

$$\operatorname{sign} u \frac{A(x, u, p)}{|p|} < \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x, u, p)$$
$$\text{для} \quad |u| \geqslant M \quad \text{и} \quad |p| \geqslant l \quad (l > 0), \tag{8.9′}$$

а (8.12), (8.13) оставить в прежней форме.

Условия же следствия 8.4 надо заменить или условием строгого монотонного убывания $A(x, u, p)$ по u, или условием невозрастания по u плюс предположениями $L_\omega(\omega) < 0$ и $L_{\hat{\omega}}(\hat{\omega}) > 0$ соответственно.

Усиление (8.7′) по сравнению с (8.7) кажется незначительным. Однако оно исключает, например, класс уравнений (8.2), в которых $A(x, u, u_x) = A_i(x, u, u_x) u_{x_i} + a(x) u^{2m+1}$, где

$a(x)\leqslant 0$, а m — целое число. Ввиду этого наряду с (8.7′) может оказаться полезным такой критерий (в нем a_{ij} и A также не обязаны быть дифференцируемыми):

Следствие 8.6. Пусть u есть классическое решение уравнения (8.2), в котором функция $A(x, u, p)$ удовлетворяет условиям:

$$-A(x, u, p)\geqslant A_i(x, u, p)\,p_i, \qquad u\geqslant m_1\geqslant 0,$$

и

$$-A(x, u, p)\leqslant \hat{A}_i(x, u, p)\,p_i, \qquad u\leqslant m_2\leqslant 0,$$

в которых функции $A_i(x, u, p)$ и $\hat{A}_i(x, u, p)$ ограничены на любом компактном множестве изменения их аргументов. Тогда

$$\min\{m_2;\ \min_{\partial\Omega} u\}\leqslant u(x)\leqslant \max\{m_1;\ \max_{\partial\Omega} u\}. \tag{8.14}$$

Правое из неравенств (8.14) есть следствие леммы 1.5 гл. III применительно к функции u, как к функции, удовлетворяющей неравенству

$$a_{ij}(x, u, u_x)\,u_{x_ix_j}-A_i(x, u, u_x)\,u_{x_i}\geqslant 0$$

в области $\Omega_1=\{x\colon\ x\in\Omega,\ u(x)>m_1\}$. То же верно и для левого неравенства из (8.14).

Ясно, что функции $A(x, u, u_x)=A_i(x, u, u_x)\,u_{x_i}+a(x)\,u^{2m+1}$ при $a(x)\leqslant 0$ и целом m удовлетворяют условиям следствия 8.6.

Остановимся еще на случае эллиптических операторов

$$L(u)\equiv\frac{d}{dx_i}\,a_i(x, u, u_x)+a(x, u, u_x). \tag{8.15}$$

Если $a_i(x, u, p)$ — дифференцируемые функции (x, u, p), то (8.15) приводятся к виду (8.1) с

$$a_{ij}(x, u, p)=\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j}$$

и (8.16)

$$A(x, u, p)=\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial u}\,p_i+\frac{\partial a_i}{\partial x_i}+a$$

и к (8.15) применимы доказанные выше предложения. Однако, в теореме 8.1 и ее следствиях 8.1 — 8.4 требуется дифференцируемость a_{ij} и A по p, что приводит для (8.15) к условию существования у a_i производных второго порядка. Это весьма нежелательное предположение можно снять с помощью принципа максимума для обобщенных решений линейных уравнений (см. теорему 13.2 гл. III). Покажем, как это делается. Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} L_u(\omega) &\equiv \frac{d}{dx_i} a_i(x, u, \omega_x) + a(x, u, \omega_x), \\ L_u(\omega, \eta, \Omega) &\equiv \int_\Omega [-a_i(x, u, \omega_x)\eta_{x_i} + a(x, u, \omega_x)\eta]\, dx. \end{aligned}\right\} \quad (8.17)$$

Следуя § 2 данной главы, представим $L_u(u, \eta, \Omega) - L_u(\omega, \eta, \Omega)$ в виде

$$L_u(u, \eta, \Omega) - L_u(\omega, \eta, \Omega) = \\ = \int_\Omega \left[-\frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial u_{x_j}} v_{x_j}\eta_{x_i} + \frac{\partial \tilde{a}}{\partial u_{x_j}} v_{x_j}\eta \right] dx, \qquad v = u - \omega. \quad (8.18)$$

Далее,

$$L_u(\omega) = \frac{\partial a_i(x, u, \omega_x)}{\partial \omega_{x_j}} \omega_{x_i x_j} + \frac{\partial a_i(x, u, \omega_x)}{\partial u} u_{x_i} + \\ + \frac{\partial a_i(x, u, \omega_x)}{\partial x_i} + a(x, u, \omega_x) \equiv M_u(\omega) + \frac{\partial a_i(x, u, \omega_x)}{\partial u} v_{x_i}, \quad (8.19)$$

где $M_u(\omega) \equiv a_{ij}(x, u, \omega_x)\omega_{x_i x_j} + A(x, u, \omega_x)$, причем $a_{ij}(x, u, p)$ и $A(x, u, p)$ взяты из (8.16) (заметим, что $M_u(u) = L_u(u) = L(u)$).

Справедлива

Теорема 8.2. *Пусть $u(x) \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, а $\omega(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Если при каком-либо $b_1 \geqslant -\infty$ и $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_{b_1})$ справедливо неравенство*

$$j_1(u, \eta, \Omega_{b_1}) \equiv L_u(u, \eta, \Omega_{b_1}) - \int_{\Omega_{b_1}} M_u(\omega)\eta\, dx \geqslant 0, \quad (8.20)$$

где $\Omega_{b_1} = \{x\colon x \in \Omega,\ u(x) - \omega(x) > b_1\}$, то верно (8.4). Если $\hat{\omega}(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и при тех же $\eta(x)$ и каком-либо $b_2 \leqslant +\infty$ справедливо неравенство

$$j_2(u, \eta, \hat{\Omega}_{b_2}) \equiv L_u(u, \eta, \hat{\Omega}_{b_2}) - \int_{\hat{\Omega}_{b_2}} M_u(\hat{\omega})\eta\, dx \leqslant 0, \quad (8.21)$$

где $\hat{\Omega}_{b_2} = \{x\colon x \in \Omega,\ u(x) - \hat{\omega}(x) < b_2\}$, то верно (8.6). Функции $a_i(x, u, p)$ предполагаются дифференцируемыми по x, u, p, а $a(x, u, p)$ — дифференцируемой по p.

Для доказательства (8.4) представим $j_1(u, \eta, \Omega_{b_1})$, используя (8.18) и (8.19), в виде

$$j_1(u, \eta, \Omega_{b_1}) = \int\limits_{\Omega_{b_1}} \left[-\frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial u_{x_j}} v_{x_j} \eta_{x_i} + \left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial u_{x_j}} + \frac{\partial a_j(x, u, \omega_x)}{\partial u} \right) v_{x_j} \eta \right] dx. \tag{8.22}$$

Отсюда и из условия (8.20) следует, в силу теоремы 13.2 гл. III, неравенство (8.4). Аналогично доказывается (8.6).

Замечание 8.3. В правую часть неравенств (8.20) и (8.21) вместо нуля можно подставить $\int\limits_{\Omega_{b_1}} B_i(x, u, \omega, u_x, \omega_x) \times$ $\times (u_{x_i} - \omega_{x_i}) \eta \, dx$ с произвольными $B_i(x, u, \omega, p, q)$, ограниченными на каждом компакте.

Из теоремы 8.2 вытекает

Следствие 8.7. Пусть $u(x)$ и $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ обладают гладкостью, указанной в теореме 8.2, и $u(x)$ есть обобщенное решение уравнения $L(u) = 0$ с $L(u)$ из (8.15). Тогда, если для $A(x, u, p)$ из (8.16) выполнено одно из условий: (8.7), или (8.9), или (8.12) — (8.13), то для $u(x)$ справедливы оценки, указанные в следствиях 8.1 — 8.3 соответственно. Если $a_i(x, u, p)$ не зависят от u и $\frac{\partial a(x, u, p)}{\partial u} \leqslant 0$ и если есть функция $\omega(x) \in$ $\in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющая неравенству $L(\omega) \leqslant 0$, то для $u(x)$ справедлива оценка (8.4) с $b_1 = 0$; если же есть функция $\hat{\omega}(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой $L(\hat{\omega}) \geqslant 0$, то для $u(x)$ справедлива оценка (8.6) с $b_2 = 0$. Наконец, если $a(x, u, p)$ также не зависит от u, то оценка (8.4) верна с $b_1 = -\infty$, а оценка (8.6) — с $b_2 = +\infty$.

Выводятся эти утверждения из теоремы 8.2 так же, как следствия 8.1 — 8.4 из теоремы 8.1.

§ 9. О существовании обобщенных решений

Существование обобщенных решений из $W^1_{m, q} \equiv W^1_m(\Omega) \cap$ $\cap L_q(\Omega)$, $m > 1$, $1 \leqslant q < \infty$, задачи Дирихле для уравнений (0.1) можно доказать сравнительно просто, используя метод Галеркина. Правда, при этом будет наложено помимо «естественных» требований одно ограничение (неравенство (9.2)), которое для случая линейного оператора L означает, что весь спектр L (отвечающий данной области и первому краевому условию) находится в левой полуплоскости. (В § 16 гл. III это условие также предполагается выполненным — см. неравенство (5.1), но там оно может быть снято с помощью результатов § 5 о фредгольмовой разрешимости задачи Дирихле в пространстве $W_2^1(\Omega)$.) Для случая $m>n$ есть еще одно ограничение, не вызванное существом дела: рост $a(x, u, p)$ по p предполагается меньшим m.

В следующем параграфе, где дается другой метод доказательства разрешимости задачи Дирихле, эти условия заменяются менее ограничительными. Схема метода Галеркина для квазилинейных уравнений та же, что и для линейных. Но при проведении предельного перехода в интегральном тождестве, которому удовлетворяют приближенные решения $u^N(x)$ задачи, имеется одна специфическая трудность: нелинейность его членов по $u_x^N(x)$. Первоначально она была преодолена тем, что на функции $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ накладывались дополнительные ограничения, позволяющие дать априорную оценку для u_{xx}^N, из которой следует сходимость u_x^N (точнее, некоторой подпоследовательности) для почти всех x из Ω (см. [$34_{1,2}$, $7_{3,4}$]). Чуть позже в теорию дифференциальных уравнений пришла новая простая, но ценная идея выполнения слабых предельных переходов под знаком так называемых монотонных операторов, ведущая свое начало от работы [**36_1**] Минти (см. также [**$36_{2,3}$**, **7_2**]). Применительно к квазилинейным эллиптическим операторам она развивалась в ряде работ последнего десятилетия [**32_3**, **13_1**, **18**, **39_6**]. Для уравнений (0.1) она позволяет доказать разрешимость в $W_{m,q}^1$, имея в руках априорную оценку лишь нормы $\|u^N\|_{m,q,\Omega} \equiv \|\nabla u^N\|_{m,\Omega} + \|u^N\|_{q,\Omega}$. Рассмотрим ради несущественных упрощений случай однородного краевого условия, т. е. задачу

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx_i} a_i(x, u, u_x) + a(x, u, u_x) = 0, \tag{9.1$_1$}$$

$$u|_S = 0\,^{*)}. \tag{9.1$_2$}$$

Относительно $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ прежде всего потребуем, чтобы

1) они удовлетворяли неравенствам (7.2), (7.3) при $m<n$, неравенствам ($7.\tilde{2}$), ($7.\tilde{3}$) при $m=n$ и неравенствам ($7.\tilde{\tilde{2}}$), ($7.\tilde{\tilde{3}}$) при $m>n$. Это необходимо для сходимости интегралов, входящих в интегральное тождество (7.1), лежащее в основе определения обобщенных решений.

Далее наложим ограничение, о котором говорилось в начале параграфа и которое гарантирует априорную оценку как для решений задачи (9.1$_i$), так и для приближений u^N. Именно,

---

*) Другие классические краевые условия рассматриваются аналогично (см. соответствующие указания в § 6 гл. III).

2) для $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{m,q} \equiv \overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ должно иметь место неравенство

$$L(u, u) \geqslant f(\|u\|_{m, q, \Omega}) - c_1, \tag{9.2}$$

где $c_1 > 0$, а $f(\tau)$ — непрерывная положительная функция, стремящаяся к бесконечности при $\tau \to \infty$. Это условие принято сейчас называть условием коэрцитивности. Напомним, что

$$L(u, \eta) \equiv \int_\Omega [a_i(x, u, u_x)\eta_{x_i} - a(x, u, u_x)\eta]\, dx. \tag{9.3}$$

Из условия (9.2) следует, что для всех возможных решений u задачи (9.1_i), $i = 1, 2$, будет справедлива оценка

$$\|u\|_{m, q, \Omega} \leqslant c_2, \tag{9.4}$$

где постоянная c_2 есть наибольший из корней уравнения $f(\tau) = c_1$.

Наконец, будем считать, что $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ измеримы по $(x, u, p) \in \overline{\Omega} \times E_1 \times E_n$ и непрерывны по (u, p).

Покажем, что при выполнении перечисленных условий системы, определяющие галеркинские приближения u^N, разрешимы при любом N. Пусть $\{\psi_k(x)\}$ есть фундаментальная система линейно независимых функций в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$. Приближенное решение u^N по методу Галеркина ищется в виде $u^N = \sum_{k=1}^N c_k^N \psi_k(x)$ из уравнений

$$L(u^N, \psi_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{9.5}$$

которые представляют собою систему N нелинейных уравнений относительно N неизвестных c_k^N. Для доказательства разрешимости этой системы перепишем ее в виде одного функционального уравнения в банаховом пространстве P_N, элементами которого являются суммы $\eta = \sum_{k=1}^N d_k \psi_k(x)$ с произвольными числами d_k, а норма определяется равенством $\|\eta\|_{P_N} = \|\eta\|_{m, q, \Omega}$. Рассмотрим P_N как линейное N-мерное пространство E_N векторов $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_N)$ с нормой $\|\mathbf{d}\|_N = \|\eta\|_{P_N}$. Легко проверить, что $\|\cdot\|_N$ действительно есть норма в E_N. Введем в E_N гильбертову структуру со скалярным произведением

$$(\mathbf{c}, \mathbf{d})_N = \sum_{k=1}^N c_k d_k \tag{9.6}$$

и соответствующей нормой $|\mathbf{c}|_N = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} c_k^2}$. Как известно, в конечномерных линейных пространствах все нормы эквивалентны, в частности, и

$$\nu_N |\mathbf{d}|_N \leqslant \|\mathbf{d}\|_N \leqslant \mu_N |\mathbf{d}|_N, \qquad \nu_N > 0. \tag{9.7}$$

Не будем в дальнейшем различать эти две реализации пространства P_N: как совокупности функций $\eta = \sum_{k=1}^{N} d_k \psi_k(x)$ и как совокупности векторов $\mathbf{d}$ — и вместо $(\mathbf{c}, \mathbf{d})_N$ будем писать $(\xi, \eta)_N$, где $\xi = \sum_{k=1}^{N} c_k \psi_k(x)$, $\eta = \sum_{k=1}^{N} d_k \psi_k(x)$, а вместо $|\mathbf{c}|_N$ — число $|\xi|_N$. Умножим каждое из уравнений (9.5) на свое число d_k и все уравнения сложим в пределах от $k=1$ до $k=N$. Это даст тождество

$$L(u^N, \eta) = 0, \tag{9.8}$$

справедливое при всех элементах η из P_N. Левая часть его является линейным функционалом в P_N над η при любом фиксированном u^N из P_N, ибо, как нетрудно проверить, в силу предположений 1) и теорем вложения 2.1 гл. II

$$|L(u^N, \eta)| \leqslant f_1(|u^N|_N) |\eta|_N, \tag{9.9}$$

где $f_1(\tau)$ есть некоторая непрерывная функция $\tau \geqslant 0$. Ввиду этого по теореме Рисса $L(u^N, \eta)$ можно представить в виде скалярного произведения некоторого элемента $A(u^N)$ гильбертова пространства P_N на элемент η (точнее, $\mathbf{d}$) этого же пространства, т. е.

$$L(u^N, \eta) = (A(u^N), \eta)_N. \tag{9.10}$$

Элемент $A(u^N)$ определяется u^N однозначно. Благодаря нашим предположениям о функциях $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ и, в частности, их непрерывности по (u, p) оператор A, определенный на всем пространстве P_N, непрерывен. Действительно, пусть v_r, $r = 1, 2, \ldots$, и v принадлежат P_N и v_r сходятся к v в P_N. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$ и соответствующее ему множество $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ с $\operatorname{mes} \Omega_\varepsilon \geqslant \operatorname{mes} \Omega - \varepsilon$, на котором $|\psi_k(x)|$ и $|\nabla \psi_k(x)|$, $k = 1, \ldots, N$, не превосходят какого-либо числа c_ε. На Ω_ε функции v_r и ∇v_r равномерно сходятся к v и ∇v соответственно и

$$\max_{\Omega_\varepsilon} (|v_r(x) - v(x)| + |\nabla v_r(x) - \nabla v(x)|) < \delta_r, \qquad \delta_r \to 0$$

при $r\to\infty$. При $\forall\eta\in P_N$

$$(A(v_r)-A(v),\ \eta)_N=L(v_r,\ \eta)-L(v,\ \eta)=$$
$$=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\{[a_i(x,\ v_r,\ v_{rx})-a_i(x,\ v,\ v_x)]\eta_{x_i}-[a(x,\ v_r,\ v_{rx})-$$
$$-a(x,\ v,\ v_x)]\eta\}\,dx+\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}\{\ldots\}\,dx\equiv I^{(1)}_{\varepsilon,r}+I^{(2)}_{\varepsilon,r}.$$

Интеграл $I^{(1)}_{\varepsilon,r}\to 0$ при $r\to\infty$, а $I^{(2)}_{\varepsilon,r}$ в силу предположений 1) и равномерной ограниченности $\|v_r\|_{m,\,q,\,\Omega}+\|v\|_{m,\,q,\,\Omega}$ имеет оценку $I^{(2)}_{\varepsilon,r}\leqslant c\|\eta\|_{m,\,q,\,\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}$ с постоянной c, общей для всех v_r и v. Так как $\|\eta\|_{m,\,q,\,\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, то сумма $I^{(1)}_{\varepsilon,r}+I^{(2)}_{\varepsilon,r}$ может быть сделана при уменьшении ε и увеличении r меньше любого наперед заданного числа. В силу конечномерности пространства P_N слабая и сильная сходимость в нем равносильны, так что из доказанного следует, что $A(v_r)\to A(v)$ в норме P_N. Тем самым непрерывность оператора A доказана.

Так как η в (9.8) и (9.10) — произвольный элемент P_N, то тождество (9.8) эквивалентно в силу (9.10) операторному уравнению

$$A(u^N)=0 \tag{9.11}$$

в гильбертовом пространстве P_N. Рассмотрим однопараметрическое семейство операторов

$$A_\tau(\eta)=(1-\tau)\eta+\tau A(\eta),\qquad 0\leqslant\tau\leqslant 1.$$

Для них из (9.2) и (9.10) следует, что для $\forall\eta\in P_N$

$$(A_\tau(\eta),\ \eta)_N=(1-\tau)(\eta,\ \eta)_N+\tau(A(\eta),\ \eta)_N=$$
$$=(1-\tau)(\eta,\ \eta)_N+\tau L(\eta,\ \eta)\geqslant(1-\tau)(\eta,\ \eta)_N+\tau f(\|\eta\|_N)-\tau c_1,$$

а потому для η с $|\eta|_N$, равной достаточно большому числу R_N (оно определяется лишь N, c_1 и $f(t)$), величины $(A_\tau(\eta),\ \eta)_N$, $0\leqslant\tau\leqslant 1$, будут положительны. При $\tau=0$ оператор $A_0(\eta)$ определяет тождественное преобразование в P_N, так что уравнение $A_0(\eta)=0$ имеет в шаре $K_{R_N}\equiv\{\eta\colon |\eta|_N\leqslant R_N\}$ единственное решение $\eta\equiv 0$. Это вместе с доказанным выше неравенством $(A_\tau(\eta),\ \eta)_N>0$, $0\leqslant\tau\leqslant 1$, для $|\eta|_N=R_N$ гарантирует существование у уравнения $A_1(\eta)=0$ или, что то же, у уравнения (9.11) по крайней мере одного решения в K_{R_N} (см. теорему Брауэра, например, в [13], ч. I). Итак, доказана

Лемма 9.1. *При выполнении условий* 1) *и* 2) *и непрерывности функций* $a_i(x,\ u,\ p)$, $a(x,\ u,\ p)$ *по* $(u,\ p)$ *система уравнений Галеркина* (9.5) *имеет по крайней мере одно решение* u^N *из* P_N.

Займемся теперь предельным переходом по $N \to \infty$. Покажем, что при дополнительных предположениях, основное из которых гарантирует монотонность оператора $A(u)$ (или некоторых связанных с ним операторов) по u, каждая из предельных в смысле слабой топологии в $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$ точек u для $\{u^N\}$, $N=1, 2, \ldots$, является обобщенным решением из $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$ задачи (9.1).

Монотонность оператора $A(u)$ означает выполнение неравенства

$$(A(u)-A(v),\ u-v) \geqslant 0 \tag{9.12}$$

для любых элементов u и v пространства P, в котором рассматривается A. Скобки (w, v) в общем случае дают значение линейного функционала w на элементе v пространства P. Применительно к нашим операторам A, возникающим во всех пространствах P_N, $N=1, 2, \ldots$, это условие имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} \{[a_i(x, u, u_x) - a_i(x, v, v_x)](u_{x_i} - v_{x_i}) - \\ - [a(x, u, u_x) - a(x, v, v_x)](u-v)\}\, dx \geqslant 0 \tag{9.13}$$

при $\forall u, v \in P_N$.

Мы считаем это неравенство выполненным для всех элементов u и v из пространств P_N, $N=1, 2, \ldots$ Но так как сумма $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$ плотна в $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$, то (9.13) фактически будет иметь место для любых элементов u и v из $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$.

Покажем сначала, как выполнить предельный переход по $N \to \infty$ в том простейшем случае, когда условию монотонности удовлетворяет весь оператор $A(u)$, т. е. когда справедливо неравенство (9.13). Благодаря (9.2) для u^N справедлива оценка (9.4)

$$\| u^N \|_{m, q, \Omega} \leqslant c_2. \tag{9.14}$$

Поэтому последовательность $\{u^N\}$ имеет по крайней мере одну предельную точку u в смысле слабой топологии в $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$. Без ограничения общности будем считать, что вся последовательность $\{u^N\}$, $N=1, 2, \ldots$, сходится слабо в $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$ к некоторой функции u из $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$.

При такой сходимости u^N к u нельзя, вообще говоря, утверждать, что предельным соотношением для (9.8) будет $L(u, \eta)=0$, ибо u_x^N входят в (9.8) нелинейно. Тем не менее это верно благодаря предположению (9.13). Действительно, в силу (9.13)

$$\int\limits_\Omega \{[a_i(x, u^N, u_x^N) - a_i(x, \xi, \xi_x)](u_{x_i}^N - \xi_{x_i}) - \\ - [a(x, u^N, u_x^N) - a(x, \xi, \xi_x)](u^N - \xi)\} dx \geqslant 0 \qquad (9.15)$$

при любой функции ξ из $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$. Вычитая из (9.15) тождество (9.8) с $\eta = u^N - \xi$, где ξ — произвольно фиксированный элемент P_N, получим неравенство

$$-\int\limits_\Omega [a_i(x, \xi, \xi_x)(u_{x_i}^N - \xi_{x_i}) - a(x, \xi, \xi_x)(u^N - \xi)] dx \geqslant 0,$$

в котором можно перейти к пределу по $N \to \infty$ при закрепленном ξ из $\bigcup\limits_{k=1}^\infty P_k$. Это даст неравенство

$$-\int\limits_\Omega [a_i(x, \xi, \xi_x)(u_{x_i} - \xi_{x_i}) - a(x, \xi, \xi_x)(u - \xi)] dx \geqslant 0,$$

которое справедливо при любом ξ из $\bigcup\limits_{k=1}^\infty P_k$, а потому и при любом ξ из $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$. Положим в нем $\xi = \varepsilon\eta + u$, $\varepsilon > 0$, где η — произвольный элемент $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$, затем сократим на ε и перейдем к пределу по $\varepsilon \to 0$. Так как функции $a_i(x, u + \varepsilon\eta, u_x + \varepsilon\eta_x)$, $a(x, u + \varepsilon\eta, u_x + \varepsilon\eta_x)$ в силу наших предположений о $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ и леммы 3.2 гл. II сходятся слабо в $L_{m'}(\Omega)$ и $L_{q'}(\Omega)$ к $a_i(x, u, u_x)$ и $a(x, u, u_x)$ соответственно*), то в результате этого предельного перехода получим

$$\int\limits_\Omega [a_i(x, u, u_x)\eta_{x_i} - a(x, u, u_x)\eta] dx \geqslant 0. \qquad (9.16)$$

Это неравенство справедливо при любой функции η из $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$, а так как наряду с любой η из $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$ входит и функция $-\eta$, то в (9.16) имеет место знак равенства, т. е. тождество $L(u, \eta) = 0$.

Тем самым доказана

Теорема 9.1. *При выполнении условий леммы* 9.1 *и условия* (9.13) *задача* (9.1_i) *имеет по крайней мере одно решение из* $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$.

---

*) На самом деле имеет место сильная сходимость.

Условие (9.13) для произвольной Ω не следует из условия эллиптичности уравнения (0.1) даже при «хороших» функциях $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ и гладких функциях $u(x)$ и $v(x)$. Как видно из рассмотрений § 2, оно имеет место, вообще говоря, лишь для малых областей Ω. Покажем, что оно может быть заменено условием эллиптичности, но при этом предположения 1) при $m < n$ и $m > n$ должны быть несколько усилены.

Рассмотрим случай $m < n$ (остальные изучаются аналогично). Предположим, что вместо (7.2), (7.3) выполнены неравенства

$$|a_i(x, u, p)| \leqslant c|p|^{m-1} + c|u|^{\tilde{q}/m'} + \varphi_1(x), \qquad \varphi_1 \in L_{m'}(\Omega), \tag{9.17}$$

$$|a(x, u, p)| \leqslant c|p|^{m/\tilde{q}'} + c|u|^{\tilde{q}-1} + \varphi_2(x), \qquad \varphi_2 \in L_{\tilde{q}'}(\Omega), \tag{9.18}$$

с $\tilde{q} < \bar{q} = \max(\bar{m}, q)$, $\tilde{q}' = \tilde{q}/(\tilde{q}-1)$, $m' = m/(m-1)$. Условие же (9.13) заменим на следующее: при $x \in \bar{\Omega}$, $|u| \leqslant M_1$, $|q| \leqslant M$ и любых p

$$[a_i(x, u, p) - a_i(x, u, q)](p_i - q_i) \geqslant f_2(|p-q|, M_1, M_2, x), \tag{9.19}$$

где $f_2(r, M_1, M_2, x)$ — непрерывная функция своих аргументов, не убывающая по r и положительная при $r > 0$. Если функции $a_i(x, u, p)$ дифференцируемы по p, то (9.19) есть следствие условия эллиптичности (3.1), точнее, неравенства

$$\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \geqslant \nu(x, u)(1+|p|)^{m-2}\xi^2, \tag{9.20}$$

где $\nu(x, u)$ есть непрерывная положительная функция (x, u). Действительно, представим левую часть (9.19), следуя § 2, в виде

$$j \equiv [a_i(x, u, p) - a_i(x, u, q)](p_i - q_i) =$$
$$= \int_0^1 \frac{\partial a_i(x, u, q+t(p-q))}{\partial p_j}\,dt\,(p_i - q_i)(p_j - q_j)$$

и оценим ее снизу с помощью (9.20). При $m \geqslant 2$ ясно, что (9.19) будет выполняться с функцией $f_2(r, M_1, M_2, x) = r^2 \min\limits_{|u| \leqslant M_1} \nu(x, u)$. При $m \in (1, 2)$

$$j \geqslant \nu(x, u)\int_0^1 (1+|q+t(p-q)|)^{m-2}\,dt\,|p-q|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \nu(x, u)|p-q|^2\int_0^1 (1+|q|+t|p-q|)^{m-2}\,dt =$$
$$= \nu(x, u)\frac{|p-q|}{m-1}\left[(1+|q|+|p-q|)^{m-1} - (1+|q|)^{m-1}\right]$$

и, следовательно, (9.19) выполняется с функцией

$$f_2(r, M_1, M_2, x) = \min_{\substack{|u| \leqslant M_1 \\ |q| \leqslant M_2}} \nu(x, u) \frac{r}{m-1} [(1+|q|+r)^{m-1} - (1+|q|)^{m-1}].$$

Докажем, что при выполнении предположений (9.17)—(9.19) и (9.2) задача (9.1_i) имеет по крайней мере одно обобщенное решение из $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$. Для этого используем ту же, что и выше, схему метода Галеркина. Лемма 9.1 гарантирует существование приближенных решений u^N. Для них верна оценка (9.14). Она и теоремы вложения (см. §§ 2, 3 гл. II) гарантируют слабую компактность u^N_x в $L_m(\Omega)$, а u^N в $L_{\bar q}(\Omega)$, а также сильную компактность u^N в любом $L_{\tilde q}(\Omega)$ с $\tilde q < \bar q$. Будем ради простоты написания считать, что вся последовательность u^N, $N = 1, 2, \ldots$, сходится к некоторой функции u указанным образом и почти всюду в Ω. Ясно, что функция u есть элемент $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$ *). Докажем, что она есть обобщенное решение задачи (9.1_i). Функции $a_i(x, u^N(x), u^N_x(x)) \equiv A_{i,N}(x)$, как сложные функции x, равномерно ограничены в норме $L_{m'}(\Omega)$. В этом легко убедиться, используя (9.17) и (9.14). Ввиду этого они слабо компактны в $L_{m'}(\Omega)$, и потому $A_{i,N}(x)$ сходятся слабо в $L_{m'}(\Omega)$ к некоторым функциям $A_i(x)$ соответственно. Далее, функции $a_i(x, u^N(x), v_x(x)) \equiv \hat a_{i,N,v}(x)$ при произвольно фиксированной функции $v(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ сходятся почти всюду к $a_i(x, u(x), v_x(x))$ и равномерно ограничены в $L_{m'}(\Omega)$; более того, величины $\|\hat a_{i,N,v}\|_{m',\Omega'}$ равномерно малы для Ω' с малой $\operatorname{mes}\Omega'$. Ввиду этого $\hat a_{i,N,v}(x)$ сходятся к $a_i(x, u(x), v_x(x))$ в $L_{m'}(\Omega)$ (см. лемму 3.2 гл. II). Равномерная малость $\|\hat a_{i,N,v}\|_{m',\Omega'}$ при малой $\operatorname{mes}\Omega'$ есть следствие (9.14) и того, что показатель $\tilde q/m'$ у $|u|$ в (9.17) строго меньше предельного показателя $\bar q/m'$, так что при оценке соответствующего члена мажоранты (9.17) мы можем воспользоваться неравенством Гёльдера и «заработать» в качестве множителя $\operatorname{mes}\Omega'$ в некоторой положительной степени. Из (9.18) и (9.14) следует равномерная ограниченность норм в $L_{\bar q'}$ функций $A_N(x) \equiv a(x, u^N(x), u^N_x(x))$. Это дает слабую сходимость $A_N(x)$ в $L_{\bar q'}(\Omega)$ к некоторой функции $A(x) \in L_{\bar q'}(\Omega)$.

*) Здесь и далее каждый раз из компактной последовательности надо выбирать сходящуюся подпоследовательность. Но мы вместо этого, экономя место, будем считать, что все встречаемые ниже компактные последовательности являются сходящимися. Читатель легко поймет, как сделать последующие рассуждения вполне строгими.

Из всего сказанного следует, что в тождестве (9.8) можно перейти к пределу по $N\to\infty$ при закрепленной функции η из какого-либо P_N и в результате получить равенство

$$\int_\Omega [A_i\eta_{x_i} - A\eta]\,dx = 0. \tag{9.21}$$

Оно справедливо для любой $\eta\in\bigcup_{k=1}^{\infty}P_k$, а следовательно, и для любой $\eta\in \overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$. В силу условия (9.19)

$$\int_\Omega [a_i(x, u^N, u^N_x) - a_i(x, u^N, \xi_x)](u^N_{x_i} - \xi_{x_i})\,dx \geqslant 0$$

при $\forall\xi\in\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$. Вычтем из этого неравенства тождество (9.8) с $\eta = u^N-\xi$, где $\xi\in P_N$. В результате получим

$$\int_\Omega [a(x, u^N, u^N_x)(u^N-\xi) - a_i(x, u^N, \xi_x)(u^N_{x_i} - \xi_{x_i})]\,dx \geqslant 0.$$

В этом неравенстве благодаря установленным выше сильным и слабым сходимостям разных функций можно перейти к пределу по $N\to\infty$. Это дает

$$\int_\Omega [A(u-\xi) - a_i(x, u, \xi_x)(u_{x_i} - \xi_{x_i})]\,dx \geqslant 0. \tag{9.22}$$

Сложим (9.22) и (9.21), взяв в последнем $\eta = u-\xi$:

$$\int_\Omega [A_i - a_i(x, u, \xi_x)](u_{x_i} - \xi_{x_i})\,dx \geqslant 0. \tag{9.23}$$

Это неравенство справедливо при $\forall\xi$ из $\forall P_N$, а потому справедливо и при $\forall\xi\in\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$. Положим в (9.23) $\xi = u-\varepsilon\zeta$, $\varepsilon>0$, $\zeta\in\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$, сократим (9.23) на ε и устремим ε к нулю. В силу сильной сходимости ξ к u в $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$ в пределе получим неравенство

$$\int_\Omega [A_i - a_i(x, u, u_x)]\,\zeta_{x_i}\,dx \geqslant 0. \tag{9.24}$$

В нем ζ — произвольный элемент $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$, и так как наряду с ним в $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$ входит и $-\zeta$, то (9.24) справедливо со знаком равенства. Поэтому тождество (9.21) эквивалентно следующему:

$$\int_\Omega [a_i(x, u, u_x)\,\eta_{x_i} - A\eta]\,dx = 0. \tag{9.25}$$

До сих пор наши рассуждения были близки к доказательству теоремы 9.1. Докажем теперь, что

$$A(x) = a(x, u(x), u_x(x)). \tag{9.26}$$

Для этого используем предположение (9.19) во всей его полноте. Возьмем последовательность u_N, $N = 1, 2, \ldots$, сильно сходящуюся к u в норме $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$ и такую, что каждое $u_N \in P_N$. Это возможно ввиду наших предположений о системе $\{\psi_k(x)\}$ координатных функций. Вычтем из (9.25) тождество (9.8), считая $\eta = u_N - u^N = (u - u^N) + (u_N - u)$, и результат запишем так:

$$\int_\Omega [a_i(x, u^N, u_x) - a_i(x, u^N, u_x^N)]\left(u_{x_i} - u^N_{x_i}\right) dx +$$
$$+ \int_\Omega [a_i(x, u, u_x) - a_i(x, u^N, u_x)]\left(u_{x_i} - u^N_{x_i}\right) dx =$$
$$= \int_\Omega [A - a(x, u^N, u^N_x)](u_N - u^N)\, dx +$$
$$+ \int_\Omega [a_i(x, u, u_x) - a_i(x, u^N, u^N_x)]\left(u_{x_i} - u_{Nx_i}\right) dx. \tag{9.27}$$

Все интегралы, кроме первого, при $N \to \infty$ стремятся к нулю, ибо в каждом из них один из множителей стремится к нулю сильно в некотором $L_r(\Omega)$, а другой равномерно ограничен в $L_{r'}(\Omega)$. Поэтому и первый интеграл

$$j \equiv \int_\Omega [a_i(x, u^N, u^N_x) - a_i(x, u^N, u_x)]\left(u^N_{x_i} - u_{x_i}\right) dx \to 0 \tag{9.28}$$

при $N \to \infty$. Это вместе с условием (9.19) и сходимостью u^N почти всюду к $u \in L_q(\Omega)$ позволяет заключить, что u^N_x сходятся почти всюду к u_x. Из сходимости же почти всюду u^N к u и u^N_x к u_x и из непрерывности $a(x, u, p)$ по (u, p) следует, что $a(x, u^N(x), u^N_x(x))$ почти всюду сходятся к $a(x, u(x), u_x(x))$, т. е. равенство (9.26) действительно имеет место.

Итак, доказана

Теорема 9.2. *Пусть функции* $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ *непрерывны по* (u, p) *и удовлетворяют условиям* (9.2) *и* (9.17)—(9.19), *причем* $m \in (1, n)$. *Тогда задача* (9.1$_1$) *имеет по крайней мере одно обобщенное решение из* $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$.

Идея доказательства даваемого теоремой 9.2 обобщения теоремы 9.1 принадлежит Ж. Лерэ и Ж. Лионсу (см. ее изложение в книге [39$_6$] Ч. Морри, гл. V, § 12). Аналогично рассматриваются случаи $m = n$ и $m > n$. При $m = n$ условия (9.17), (9.18) надо заменить на (7.$\widetilde{2}$), (7.$\widetilde{3}$), причем пространство $\overset{\circ}{W}{}^1_{n,q}$ совпадает с $\overset{\circ}{W}{}^1_n(\Omega)$. При $m > n$ $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$ также совпадает с $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$, причем элементы $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ суть непрерывные по Гёльдеру функции x в $\overline{\Omega}$. Ввиду этого u^N будут сходиться к u равномерно. Условия (9.17), (9.18) в этом случае надо заменить предположениями

$$|a_i(x, u, p)| \leqslant \mu_1(u)\left(|p|^{m-1} + \varphi_1(x)\right), \qquad \varphi_1 \in L_{m'}(\Omega), \tag{9.29}$$

$$|a(x, u, p)| \leqslant \mu_2(u)\left(|p|^{m-\varepsilon} + \varphi_2(x)\right), \quad \varepsilon > 0, \quad \varphi_2 \in L_{q_1}(\Omega), \quad q_1 > 1, \tag{9.30}$$

где $\mu_i(u)$ — непрерывные функции u. *Если выполнены при этом остальные условия теоремы* 9.2, *то ее заключение справедливо и при* $m \geqslant n$.

Замечание 9.1. В случае неоднородного граничного условия

$$u|_S = \varphi|_S, \tag{9.31}$$

где $\varphi(x) \in W^1_{m,q}$, предположение (9.2) надо заменить на следующее:

$$L(u, u - \varphi) \geqslant f\left(\|u\|_{m,q,\Omega}\right) - F\left(\|\varphi\|_{m,q,\Omega}\right), \tag{9.32}$$

где $F(\tau)$ — какая-либо непрерывная функция $\tau \geqslant 0$, а приближенное решение u^N искать в виде $u^N = \varphi + v^N$, где $v^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \psi_k(x)$, а $\{\psi_k(x)\}$ — фундаментальная система в $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$. Коэффициенты c_k^N определяются из системы уравнений

$$L(u^N, \psi_k) \equiv L(\varphi + v^N, \psi_k) = 0, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Доказательство разрешимости этой системы и предельный переход проводятся так же, как и выше для однородного краевого условия.

Остановимся еще на вопросе о единственности решения задачи (9.1$_1$), (9.31) в классе $W^1_{m,q}$. В общем случае (см. гл. III) единственности нет даже для линейных уравнений в классах сколь угодно гладких решений. Поэтому речь может идти лишь об указании ряда достаточных условий, когда она имеет место. Для области Ω любого размера таким условием является выполнение неравенства

$$\int_\Omega \{[a_i(x, u, u_x) - a_i(x, v, v_x)](u_{x_i} - v_{x_i}) - \\ - [a(x, u, u_x) - a(x, v, v_x)](u - v)\}\,dx > 0 \tag{9.33}$$

для любых двух не равных тождественно друг другу элементов u и v из $\overset{\circ}{W}{}^1_{m,q}$, имеющих одинаковые значения на S. Ясно, что оно гарантирует теорему единственности. Его естественно назвать условием строгой монотонности (см. (9.12) и (9.13)).

Выражение, стоящее в фигурной скобке в (9.33) (обозначим его через $J(u, v)$), можно преобразовать, следуя § 2, к виду

$$J(v, u)=\int_0^1\left[\frac{\partial a_i(x, u^t, u^t_x)}{\partial u^t_{x_j}}(u_{x_i}-v_{x_i})(u_{x_j}-v_{x_j})+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial a_i}{\partial u^t}(u_{x_i}-v_{x_i})(u-v)-\frac{\partial a}{\partial u^t_{x_i}}(u_{x_i}-v_{x_i})(u-v)-\frac{\partial a}{\partial u^t}(u-v)^2\right]dt,$$

где $u^t=tu+(1-t)v$, если функции a_i и a дифференцируемы по u и p. Если предположить, что при $x\in\overline{\Omega}$ и произвольных u, p, ξ справедливо неравенство

$$\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j+\left(\frac{\partial a_i}{\partial u}-\frac{\partial a}{\partial p_i}\right)\xi_i\xi_0-\frac{\partial a}{\partial u}\xi_0^2\geqslant$$
$$\geqslant\nu_1(x, u, p)\sum_{i=1}^n\xi_i^2+\nu_2(x, u, p)\xi_0^2, \qquad (9.34)$$

где $\nu_i(x, u, p)$ суть непрерывные неотрицательные функции, причем $\nu_1(x, u, p)>0$ при $x\in\overline{\Omega}_1\subset\overline{\Omega}$, а $\nu_2(x, u, p)>0$ при $x\in\overline{(\Omega-\Omega_1)}$, то нетрудно понять, что неравенство (9.33) будет иметь место при $u(x)\not\equiv v(x)$ и $u|_S=v|_S$. Так что *условие* (9.34) *гарантирует теорему единственности.*

Теоремы 9.1 и 9.2 утверждают при определенных условиях разрешимость задачи (9.1_l) (и аналогично (9.1_1), (9.31)) в классе $W_{m,q}(\Omega)=\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)\cap L_q(\Omega)$. Теорема 7.1 гарантирует ограниченность любого из таких решений, причем условия теоремы 7.1 не могут быть в общем случае ослаблены. Теоремы §§ 1, 5, 6 данной главы и теоремы §§ 2 и 3 гл. IX дают достаточные условия того, когда каждое такое решение обладает той или иной гладкостью, в частности, когда оно будет элементом $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. В следующем параграфе будет исследован вопрос о классической разрешимости задачи (9.1_1), (9.31) без использования результатов данного параграфа. Условие (9.2) будет заменено менее ограничительным требованием ограниченности $\max\limits_{\Omega}|u(x)|$ или $\|u\|_{q,\Omega}$ всех возможных решений некоторого однопараметрического семейства задач типа (9.1_1), (9.31) (точнее см. § 10). Кроме того, обратим внимание на следующее различие условий, налагаемых на функции $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ в данном параграфе и в § 10. В § 10 рассматриваются классические решения $u(x)$, о которых в большинстве случаев заранее известно, что $\max_\Omega |u(x)|$ не превосходит некоторого числа M. Ввиду этого поведение функций $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ при $|u| \geqslant M$ не имеет значения. В данном же параграфе, напротив, все наши условия содержали те или иные требования на поведение a_i и a при больших $|u|$. Правда, от части этих требований можно нередко избавиться, если известно, что все возможные обобщенные решения задачи из $W^1_{m,q}$ ограничены. Поясним это на примере задачи

$$\left.\begin{aligned} &L(u) = \Delta u - ue^{\gamma u} + f(x) = 0, \qquad u|_S = 0,\\ &f \in L_{q_1}(\Omega), \quad q_1 > \frac{n}{m} = \frac{n}{2}, \quad n > 2, \quad \gamma = \mathrm{const} > 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.35}$$

Для нее

$$a_i p_i = p^2, \quad au = -u^2 e^{\gamma u} + fu \leqslant fu, \tag{9.36}$$

а

$$L(u, u) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2 e^{\gamma u} - fu)\, dx \geqslant \int_\Omega (|\nabla u|^2 - fu)\, dx \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - c_\Omega \|f\|^2_{q_1, \Omega}. \tag{9.37}$$

Неравенство (9.37) есть неравенство типа (9.2). Оно гарантирует априорную ограниченность $\|u\|^{(1)}_{2, \Omega}$. Из соотношений (9.36) видно, что для L выполнены условия (7.4), (7.5) теоремы 7.1, в которой дается оценка $\max_\Omega |u|$ через $\|u\|_{2, \Omega}$. Ясно, что и условие монотонности (9.19) для L имеет место. Однако функция $a(x, u, p) = -ue^{\gamma u} + f(x)$ растет с ростом u так, как не допускается уже условиями (7.2), (7.3), и потому теоремы 7.1 и 9.2 непосредственно к уравнению (9.35) неприменимы. Рассмотрим тогда вспомогательную задачу

$$\tilde{L}(u) = \Delta u + \tilde{a}(u) + f(x) = 0, \qquad u|_S = 0, \tag{9.38}$$

где $\tilde{a}(u) = -ue^{\gamma u}$ при $|u| \leqslant M$, $\tilde{a}(u) = -Me^{\gamma M}$ при $u \geqslant M$ и $\tilde{a}(u) = Me^{-M\gamma}$ при $u \leqslant -M$. В качестве M возьмем постоянную c из теоремы 7.1. Она определяется Ω и $\|f\|_{q_1, \Omega}$ и мажорирует $\operatorname{vrai}\max_\Omega |u(x)|$. К задаче (9.38) применима теорема 9.2, гарантирующая существование по крайней мере одного решения $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, и теорема 7.1, утверждающая, что для любого такого решения $\operatorname{vrai}\max_\Omega |u(x)| \leqslant M$. Но при $|u| \leqslant M$ уравнения (9.35) и (9.38) совпадают, следовательно, решения $u(x)$ задачи (9.38) являются решениями и задачи (9.35). При конструировании уравнения $\tilde{L}(u)=0$ мы следили за тем, чтобы постоянные, входящие в условия (9.2) и (7.4), (7.5) для L и $\tilde{L}$, были бы одинаковыми. Эти постоянные определяют мажоранты для $\|u\|_{q,\Omega}$ и $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u|$, т. е. число M, которое входит в определение функции $\tilde{a}(u)$.

Аналогичные рассуждения позволяют иногда ослабить требования §§ 7 и 9 на рост функции $a(x, u, p)$ по p (заменить их предположением (1.3)).

§ 10. Классическая разрешимость задачи Дирихле

В этом параграфе будут даны достаточные условия разрешимости задачи Дирихле

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx_i} a_i(x, u, u_x) + a(x, u, u_x) = 0, \qquad (10.1_1)$$

$$u|_S = \varphi|_S \qquad (10.1_2)$$

в пространстве $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *). Результаты данного параграфа предшествовали тем, которые изложены в § 9, и не могут быть в полной мере выведены из последних даже с использованием всего арсенала априорных оценок, изложенных в §§ 1—8. В конце § 9 было объяснено, как из разрешимости задачи (10.1_i) в $W^1_{m,q}$ и результатов §§ 1—8 можно выводить заключения о том, что каждое решение u этого класса обладает той или иной гладкостью, в частности, принадлежит $C^{2+\alpha}(\Omega)$. Однако возникающие при этом ограничения на $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ в общем случае несколько сильнее тех, при которых в данном параграфе будет доказана разрешимость в $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Помимо этого в § 9 есть еще одно условие — неравенство (9.2), которое в данном параграфе будет заменено менее ограничительным предположением 1): $\max\limits_{\Omega}|u(x, \tau)|$ не превосходит какой-либо постоянной для всех возможных решений $u(x, \tau)$ из $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ некоторого однопараметрического семейства задач вида (10.1_i)

$$L^{\tau}(u) = 0, \quad u|_S = \varphi(x, \tau)|_S, \qquad \tau \in [0, 1]. \qquad (10.2)$$

Относительно этого семейства задач предполагаем, что оно гладко зависит от τ (это будет уточнено ниже), при $\tau = 1$ задача (10.2) есть задача (10.1_i), а при $\tau = 0$ задача (10.2) имеет

*) Заметим, что результаты гл. III о линейных уравнениях гарантируют принадлежность любого решения u из $C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$ и даже из $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ задачи (10.1_1), (10.1_2) к классам $C^{l+\alpha}(\Omega)$ и $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$, $l \geqslant 2$, если a_i, a, S и φ обладают соответствующей гладкостью (см. § 12 гл. III и § 6 данной главы).

конечное число решений и их суммарный индекс отличен от нуля (см. [32_4]).

Сравним условия (9.2) и 1) на примере линейной задачи

$$M(u) \equiv (a_{ij}u_{x_j})_{x_i} + au = \lambda u + f(x), \quad u|_S = 0. \qquad (10.3)$$

Неравенство (9.2) для нее эквивалентно тому, что число λ должно быть больше всех собственных значений оператора M, соответствующего задаче (10.3) (напомним, что собственные значения M образуют последовательность, стремящуюся к $-\infty$). С другой стороны, рассмотрим следующее семейство задач:

$$(a_{ij}u_{x_j})_{x_i} + au = \lambda u + \tau f(x), \quad u|_S = 0, \qquad \tau \in [0, 1]. \qquad (10.4)$$

Если λ не есть точка спектра M, то, как следует из результатов гл. III, задачи (10.4) однозначно разрешимы для любой f и максимумы модулей их решений $u(x, \tau)$ не превосходят некоторой постоянной, определяемой a_{ij}, a, λ и f. При $\tau = 0$ задача (10.4) имеет единственное решение $u \equiv 0$ и его индекс равен ± 1. Таким образом, условие 1) для (10.3) выполнено, если λ не есть точка спектра M. Как видим, это условие существенно слабее условия (9.2). Более того, для линейных задач оно и необходимо, ибо, как доказано в § 5 гл. III, задача (10.3) разрешима при любой f тогда и только тогда, когда λ не есть точка спектра M.

Мы покажем, что условие 1) (вместе с (3.1) и (3.2) и некоторой гладкостью известных в задаче функций) достаточно для разрешимости задачи Дирихле и в общем случае нелинейных задач (10.1_i), только решений при этом может быть не одно, а несколько. В условии 1) имеется большой произвол в выборе семейства $L^\tau(u)$, причем младшие члены $L^\tau(u)$ можно брать комплексными. В этом параграфе, как и в большей части книги, мы ограничиваемся уравнениями с вещественными функциями, хотя основные результаты книги справедливы и для уравнений с комплексными функциями, образующими младшие члены уравнения.

Для исследования разрешимости задачи (10.1_i) можно воспользоваться, следуя Шаудеру и Лерэ, различными принципами неподвижной точки для вполне непрерывных преобразований. Мы рассмотрим два из них: принцип Лерэ — Шаудера и принцип Шаудера. Первый, будучи более общим, охватывает большее число случаев. Второй же (при несколько меньших возможностях) привлекает своей относительной простотой. Мы его изложим в конце параграфа (см. равенства (10.27) и далее).

Опишем сначала формальную схему сведения задачи (10.1_i) к задаче о разыскании неподвижных точек некоторых «хороших» преобразований. Возьмем семейство дифференциальных операторов вида (10.1_1):

$$L^{\tau}(u) \equiv \frac{d}{dx_i}(a_i(x, u, u_x, \tau)) + a(x, u, u_x, \tau),$$

где функции $a_i(x, u, p, \tau)$ и $a(x, u, p, \tau)$ гладко зависят от τ из $[0, 1]$ и при $\tau = 1$ совпадают с функциями $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ соответственно. Характер зависимости этих функций от τ уточним ниже, а пока предположим, что они обладают при $\tau \in [0, 1]$ теми же свойствами, что и при $\tau = 1$. Нелинейным задачам

$$L^{\tau}(u) = 0, \qquad u|_S = \tau\varphi|_S, \quad \tau \in [0, 1] \tag{10.5}$$

сопоставим линейные задачи

$$\frac{\partial a_i(x, v, v_x, \tau)}{\partial v_{x_j}} w_{x_i x_j} + A(x, v, v_x, \tau) = 0, \qquad w|_S = \tau\varphi|_S, \tag{10.6}$$

где

$$A(x, v, v_x, \tau) = a(x, v, v_x, \tau) + \frac{\partial a_i(x, v, v_x, \tau)}{\partial v} v_{x_i} + \frac{\partial a_i(x, v, v_x, \tau)}{\partial x_i},$$

состоящие в определении функции $w(x)$ в Ω по известной функции $v(x)$. Линейная задача (10.6) однозначно разрешима, если только входящие в нее известные функции обладают некоторой гладкостью. Она определяет нелинейный оператор

$$w(x) = \Phi(v, \tau), \tag{10.7}$$

сопоставляющий любому τ из $[0, 1]$ и $v(x)$ из некоторого пространства решения задачи (10.6). Неподвижные точки преобразования $\Phi(v, \tau)$, как нетрудно видеть, являются решениями задачи (10.5), и наоборот. Таким образом, задача (10.5) свелась к задаче на определение неподвижных точек преобразования $\Phi(v, \tau)$ или, что то же, на определение решений уравнения

$$u = \Phi(u, \tau). \tag{10.8}$$

Сформулируем теорему Лерэ — Шаудера о существовании решений функциональных уравнений вида (10.8).

Теорема 10.1. *Пусть H есть полное банахово пространство, а $\overline{\mathfrak{N}}$ — замыкание какого-либо связного ограниченного открытого множества $\mathfrak{N}$ в H. Пусть $\mathscr{E}$ есть топологическое произведение H на отрезок $[0 \leqslant \tau \leqslant 1]$ (так что элементами $\mathscr{E} = H \times [0, 1]$ являются пары (v, τ), где $v \in H$, а $\tau \in [0, 1]$), а $\overline{\mathfrak{N}}_1 = \overline{\mathfrak{N}} \times [0, 1]$. Уравнение (10.8) имеет по крайней мере одно решение в $\mathfrak{N}$ при всех $\tau \in [0, 1]$, если*

1) *преобразование $\Phi(u, \tau)$ определено и вполне непрерывно из $\overline{\mathfrak{N}}_1$ в H;*

2) *граница области* $\mathfrak{N}$ *не содержит решений уравнения* (10.8) *ни при каком* $\tau \in [0, 1]$;

3) *при* $\tau = 0$ *уравнение* (10.8) *имеет в* $\mathfrak{N}$ *конечное число решений и суммарный индекс их отличен от нуля.*

Условие полной непрерывности $\Phi(u, \tau)$ на $\overline{\mathfrak{N}}_1$ означает, что $\Phi(u, \tau)$ непрерывно в каждой точке $\overline{\mathfrak{N}}_1$ и множество значений $\Phi(u, \tau)$ на $\overline{\mathfrak{N}}_1$ компактно в H. Оно заведомо будет выполняться, если $\Phi(u, \tau)$ удовлетворяет условиям: a) непрерывно по (u, τ) на $\overline{\mathfrak{N}}_1$, b) при каждом фиксированном τ из $[0, 1]$ преобразует $\overline{\mathfrak{N}}$ в компактное множество и c) непрерывно по $\tau \in [0, 1]$ равномерно относительно $u \in \overline{\mathfrak{N}}$.

Индекс решения u_0 уравнения (10.8) при $\tau = \tau_0$ равен степени отображения $\Theta(u, \tau_0) \equiv u - \Phi(u, \tau_0)$, рассмотренного в малой окрестности точки u_0 пространства H. Если, например, $\Phi(u, \tau_0) \equiv 0$, то Θ есть тождественное преобразование и его степень отображения равна $+1$. Эта ситуация имеет место, например, для $\Phi(u, \tau) = \tau\Phi(u)$ при $\tau = 0$.

Наиболее трудно проверяемым условием этой теоремы применительно к дифференциальным уравнениям является пункт 2). Априорные оценки, которым посвящена большая часть книги, и получены нами прежде всего для того, чтобы проверить это условие.

Вернемся к задачам (10.5). Обозначим через $\mathfrak{M}_{M, M_1}$, как и выше, совокупность точек (x, u, p) евклидова пространства E_{2n+1} с $x \in \overline{\Omega}$, $|u| \leqslant M$, $|p| \leqslant M_1$. Предположим, что при $\forall M, M_1$ и $\forall \tau \in [0, 1]$ функции $a_i(x, u, p, \tau)$ и $a(x, u, p, \tau)$ суть элементы $C^{1+\alpha}(\mathfrak{M}_{M, M_1})$ и $C^{\alpha}(\mathfrak{M}_{M, M_1})$ соответственно, равномерно непрерывно зависящие от τ в нормах этих пространств. Пусть, кроме того, $\varphi \in C^{2+\alpha}(S)$ и $S \in C^{2+\alpha}$. В качестве пространства H возьмем $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ с каким-либо $\beta \in (0, 1)$, а в качестве $\mathfrak{N}$ — какой-либо шар в H с центром в нулевом элементе H. Если взять любую функцию $v(x)$ из $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ и подставить в уравнение (10.6), то его коэффициенты будут функциями из $C^{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. Мы потребуем, чтобы уравнение (10.6) было равномерно эллиптическим. Тогда по теореме Шаудера (см. § 1 гл. III) решение $w(x, \tau)$ задачи (10.6) существует, единственно и принадлежит $C^{2+\alpha\beta}(\overline{\Omega})$, так что $\Phi(v, \tau)$ при каждом τ преобразует функции $v(x)$ из $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ в функции $w(x, \tau)$ из $C^{2+\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. Более того, для решений $w(x, \tau)$ имеет место оценка

$$|w|_{\Omega}^{(2+\alpha\beta)} \leqslant c\left(\sum_{i, j}\left|\frac{\partial a_i}{\partial v_{x_j}}\right|_{\Omega}^{(\alpha, \beta)}\right) \cdot \left[|A|_{\Omega}^{(\alpha\beta)} + |\varphi|_{S}^{(2+\alpha\beta)}\right], \tag{10.9}$$

а потому и

$$|w|_{\Omega}^{(2+\alpha\beta)} \leqslant F\left(|v|_{\Omega}^{(1+\beta)}, |\varphi|_{S}^{(2+\alpha\beta)}\right), \tag{10.10}$$

где $F(\xi, \eta)$ — некоторая вполне определенная, непрерывная, монотонно возрастающая функция $\xi, \eta \geqslant 0$. Так как множество функций, ограниченное в норме $C^{2+\alpha\beta}(\bar{\Omega})$, компактно в пространстве $C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$, то из сказанного ясно, что преобразование $\Phi(v, \tau)$ переводит любое ограниченное в $\mathscr{E} \equiv C^{1+\beta}(\bar{\Omega}) \times [0 \leqslant \tau \leqslant 1]$ множество пар (v, τ) в множество, компактное в $C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$.

Покажем, что преобразование $\Phi(v, \tau)$ непрерывно по (v, τ). Пусть функции v' и числу τ соответствует решение $w'(x, \tau)$, а (v'', τ) — решение $w''(x, \tau)$. Нормы $|w', w''|_{\Omega}^{(2+\alpha\beta)}$ не превосходят, в силу (10.10), некоторого числа c. Для их разности $w = w' - w''$ из уравнения (10.6) выводим соотношение

$$\frac{\partial a_i(x, v', v'_x, \tau)}{\partial v'_{x_j}} w_{x_i x_j} = \left[\frac{\partial a_i(x, v'', v''_x, \tau)}{\partial v''_{x_j}} - \frac{\partial a_i(x, v', v'_x, \tau)}{\partial v'_{x_j}}\right] w''_{x_i x_j} +$$
$$+ A(x, v'', v''_x, \tau) - A(x, v', v'_x, \tau), \qquad w|_S = 0. \qquad (10.11)$$

Так как его можно рассматривать как линейное уравнение относительно функции w, то для w справедлива оценка типа (10.9). Если в ней $\alpha\beta$ заменить на $\gamma < \alpha\beta$, то правая часть в этом неравенстве стремится к нулю равномерно относительно τ, когда $|v' - v''|_{\Omega}^{(1+\beta)} \to 0$. Это доказывает непрерывность $\Phi(v, \tau)$ по v на $\overline{\mathfrak{R}}$, равномерную относительно $\tau \in [0, 1]$. Аналогично устанавливается непрерывность $\Phi(v, \tau)$ по τ, равномерная относительно v из $\overline{\mathfrak{R}}$. Это гарантирует непрерывность $\Phi(v, \tau)$ по (v, τ).

Переходим к условиям 2) и 3) теоремы Лерэ — Шаудера. Из них мы считаем выполненными условие 3) и условие

$$\max_{\Omega} |u(x, \tau)| \leqslant M \qquad (10.12)$$

для всех возможных решений $u(x, \tau)$ задачи (10.5) из класса $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Все такие решения $u(x, \tau)$, очевидно, являются решениями уравнения (10.8). Верно и обратное: если $u(x, \tau)$ есть решение уравнения (10.8) из пространства $C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$, то оно будет и решением уравнения (10.5) из $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

Действительно, в силу определения преобразования $\Phi(u, \tau)$ функция $\Phi(u, \tau)$ есть решение задачи (10.6), когда в коэффициенты уравнения (10.6) вместо $v(x)$ подставлено u. Так как получаемые при такой подстановке коэффициенты как функции x будут из $C^{\alpha\beta}(\bar{\Omega})$, то решение задачи (10.6) будет принадлежать $C^{2+\alpha\beta}(\bar{\Omega})$. Но $\Phi(u, \tau)$ совпадает с u, так что $u \in C^{2+\alpha\beta}(\bar{\Omega})$, и потому коэффициенты в уравнении (10.6), когда в них вместо v подставляется u, фактически принадлежат не только $C^{\alpha\beta}(\bar{\Omega})$, но и $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, и, следовательно, решение $u=\Phi(u, \tau)$ будет принадлежать $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Итак, решения уравнений (10.8) фактически являются более гладкими функциями x, чем функции из $C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$, именно, они принадлежат $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ и, кроме того, удовлетворяют уравнению (10.5).

Возвратимся к условию 2) теоремы Лерэ — Шаудера. Чтобы решения $u(x, \tau)$ уравнения (10.8) (или, что то же, задачи (10.5)) при изменении τ в пределах от 0 до 1 не вышли на границу области $\mathfrak{N}$, достаточно доказать, что для них нормы $|u(x, \tau)|_{\Omega}^{(1+\beta)}$ не превосходят какого-либо числа M_0. Тогда, беря $\mathfrak{N}$ так, чтобы оно содержало шар радиуса M_0, мы будем знать, что решения $u(x, \tau)$ не выходят на границу $\mathfrak{N}$. Таким образом, проверка условия 2) сводится к получению априорных оценок всех возможных решений задачи (10.5) в норме $C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$.

Теоремы 4.1, 6.1 показывают, что для такой априорной оценки $u(x, \tau)$ надо потребовать, чтобы функции $a_i(x, u, p, \tau)$ и $a(x, u, p, \tau)$ при $x\in\bar{\Omega}$, $|u|\leqslant M$, $\tau\in[0, 1]$ и произвольных p удовлетворяли неравенствам

$$\left.\begin{aligned} &\nu(1+|p|^2)^{(m-2)/2}\xi^2\leqslant\frac{\partial a_i(x, u, p, \tau)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j\leqslant\\ &\qquad\qquad\leqslant\mu(1+|p|^2)^{(m-2)/2}\xi^2,\\ &|a(x, u, p, \tau)|+\left(\sum_i\left[\left(\frac{\partial a_i}{\partial u}\right)^2+a_i^2\right]\right)^{1/2}(1+|p|^2)^{1/2}+\\ &\qquad+\left(\sum_{i,j}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)^2\right)^{1/2}\leqslant\mu(1+|p|^2)^{m/2}, \end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

где μ и ν — положительные константы, а $m>1$. При выполнении этих условий из теорем 4.1, 6.1 следует

$$\max_{\Omega}|\nabla u(x, \tau)|\leqslant M_1,\qquad \sum_{i=1}^{n}\langle u_{x_i}\rangle_{\Omega}^{(\beta)}\leqslant M_2, \tag{10.14}$$

где постоянные M_1, M_2 и β определяются лишь величинами n, M, m, ν и μ из (10.13) (зависимость от Ω и φ нас здесь не интересует). Индекс β, определяющий основное пространство $H=C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$, мы возьмем равным показателю β, входящему в оценку (10.14). Постоянные M, M_1 и M_2 нам известны, поэтому нет надобности считать преобразование $\Phi(v, \tau)$ определенным на всем пространстве $C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$, достаточно его рассмотреть лишь на множестве $\bar{\mathfrak{N}}$ функций $v(x)$, подчиненных неравенствам

$$\max_{\Omega}|v(x)|\leqslant M+\varepsilon,\qquad \max_{\Omega}|\nabla v(x)|\leqslant M_1+\varepsilon,$$
$$\sum_{i=1}^{n}\langle v_{x_i}\rangle_{\Omega}^{(\beta)}\leqslant M_2+\varepsilon, \tag{10.15}$$

где ε — произвольное положительное число. Сформулируем теперь первую теорему существования.

Теорема 10.2. *Предположим следующее*:

a) *При* $x\in\overline{\Omega}$, $|u|\leqslant M$, $\tau\in[0, 1]$ *и произвольных* p *функции* $a_i(x, u, p, \tau)$, $a(x, u, p, \tau)$ *измеримы*, $a_i(x, u, p, \tau)$ *дифференцируемы по* x, u, p *и удовлетворяют неравенствам* (10.13).

b) $a_i(x, u, p, \tau)$ *и* $a(x, u, p, \tau)$ *при* $\forall\tau\in[0, 1]$ *суть элементы* $C^{1+\alpha}(\mathfrak{M}_{M,M_1})$ *и* $C^{\alpha}(\mathfrak{M}_{M,M_1})$ *соответственно, равномерно непрерывные по* τ *на* $[0, 1]$ (M_1 — *постоянная из* (10.14), *определяемая теоремой* 4.1).

c) $S\in C^{2+\alpha}$, $\varphi\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Тогда, если модули всех возможных решений $u(x, \tau)$ *задач* (10.5) *из пространства* $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *при* $\tau\in[0, 1]$ *не превосходят числа* M *и задача* (10.5) *при* $\tau=0$ *имеет конечное число решений, суммарный индекс которых отличен от нуля, то задача* (10.5) *имеет по крайней мере одно решение* $u(x, \tau)$ *из* $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *для всех* τ *из* $[0, 1]$.

Поясним условие b) на примере функции $a(x, u, p, \tau)$: при $\forall\tau\in[0, 1]$ функция $a(x, u, p, \tau)\in C^{\alpha}(\mathfrak{M}_{M,M_1})$ и для $\forall\tau, \tau+\Delta\tau\in[0, 1]$

$$|a(x, u, p, \tau+\Delta\tau)-a(x, u, p, \tau)|_{\mathfrak{M}_{M,M_1}}^{(\alpha)}\leqslant\varepsilon(|\Delta\tau|),$$

где $\varepsilon(|\Delta\tau|)\to 0$ при $\Delta\tau\to 0$. Из этого условия, в частности, следует, что $a(x, u, p, \tau)$ есть непрерывная на $\mathfrak{M}_{M,M_1}\times[0, 1]$ функция (x, u, p, τ).

Для доказательства теоремы применим теорему Лерэ — Шаудера так, как мы только что описывали. В качестве пространства H возьмем $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ с показателем β из неравенства (10.14), гарантированного теоремой 6.1. Преобразование $\Phi(v, \tau)$, а следовательно, и уравнение (10.8) рассмотрим на множестве $\overline{\mathfrak{N}}_1=\overline{\mathfrak{N}}\times[0\leqslant\tau\leqslant 1]$ пространства $\mathscr{E}=H\times[0\leqslant\tau\leqslant 1]$, где $\overline{\mathfrak{N}}$ состоит из функций $v(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\max_{\Omega}|v|\leqslant M+\varepsilon,\qquad \max_{x\in\Omega}|\nabla v(x)|\leqslant M_1+\varepsilon,$$
$$\sum_{i=1}^{n}\langle v_{x_i}\rangle_{\Omega}^{(\beta)}\leqslant M_2+\varepsilon, \tag{10.16}$$

где ε — какое-нибудь положительное число. Нам желательно, чтобы функции $a_i(x, u, p, \tau)$, $a(x, u, p, \tau)$ удовлетворяли условию b) нашей теоремы на этом множестве $\overline{\mathfrak{N}}_1$. В силу b) мы можем добиться этого, изменяя, если надо, функции $a_i(x, u, p, \tau)$, $a(x, u, p, \tau)$ на множествах, где $M < |u| \leqslant M + \varepsilon$ или $M_1 < |p| \leqslant \leqslant M_1 + \varepsilon$. За так измененными функциями a_i и a сохраним прежние обозначения. То, что они, может быть, не совпадают с первоначальными a_i и a вне множества $\mathfrak{M}_{M, M_1}$, не повлияет на наш основной результат — определение решений $u(x, \tau)$ уравнения (10.8), ибо последние, если существуют, то удовлетворяют неравенствам $|u| \leqslant M$, $|\nabla u| \leqslant M_1$, т. е. принадлежат тому множеству значений аргументов функций a_i и a, на котором старые и измененные функции a_i и a совпадают.

Итак, преобразование $\Phi(v, \tau)$ рассматриваем на $\overline{\mathfrak{N}}_1$. Из приведенных выше рассуждений видно, что все требования теоремы Лерэ — Шаудера выполнены в силу условий теоремы: требование 1) следует из предположений a) — c), требование 3) есть следствие последнего предположения теоремы 10.2 (ибо решения уравнения (10.8) и задачи (10.5), как выяснено выше, совпадают), а требование 2) выполняется в силу предположения $\max\limits_{\tau \in [0, 1]} \max\limits_{\Omega} |u(x, \tau)| \leqslant M$ и условия a) (см. теоремы 4.1 и 6.1). Поэтому теорема 10.1 гарантирует существование при любом τ из $[0, 1]$ по крайней мере одного решения $u(x, \tau)$ уравнения (10.8) из $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$. Как показано выше, любое такое решение $u(x, \tau)$ фактически принадлежит $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет условиям (10.5), т. е. является искомым решением задачи Дирихле для уравнений (10.5). Теорема 10.2 доказана.

Можно указать разные случаи, когда все условия теоремы 10.2 выполнены. Начнем со следующего.

Пусть функции a_i дифференцируемы. Перепишем уравнение (10.1_1) так:

$$L(u) \equiv a_{ij}(x, u, u_x) u_{x_i x_j} + A(x, u, u_x) = 0, \qquad (10.1_1')$$

где

$$a_{ij}(x, u, p) = \frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j},$$

а

$$A(x, u, p) = a(x, u, p) + \frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial u} p_i + \frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial x_i}.$$

Рассмотрим следующее семейство операторов:

$$L^\tau(u) \equiv \tau L(u) + (1 - \tau)\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\mu} \left[(1 + |\nabla u|^2)^{(m-2)/2} u_{x_i}\right] - \hat{\mu} u \right\},$$
$$\tau \in [0, 1], \qquad (10.17)$$

где $\hat{\mu} = \text{const} > 0$, $\hat{\hat{\mu}} = \text{const} \geqslant 0$, и соответствующие им задачи

$$L^\tau(u) = 0, \qquad u|_S = \tau\varphi|_S. \tag{10.18}$$

Предположим, что для $A(x, u, p)$ выполнено или условие (8.7), или (8.9), или (8.12) + (8.13) и, как всюду, неравенство $a_{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j \equiv \frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j > 0$ при $|\xi| = 1$. Тогда, если функция $a(x, u, p)$ дифференцируема по p и $\hat{\hat{\mu}} = 0$, то для всех возможных решений $u(x, \tau)$ задач (10.18) следствие 8.7 гарантирует равномерную оценку $\max\limits_{\Omega}|u(x, \tau)| \leqslant M$ с известной нам постоянной M. Для справедливости этого достаточно убедиться, что квадратичная форма $\tilde{a}_{ij}(x, u, p, \tau)\xi_i\xi_j$, соответствующая $L^\tau(u)$, положительно-определенна. Но это так, ибо

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{ij}&(x, u, p, \tau)\xi_i\xi_j = \\ &= \tau a_{ij}\xi_i\xi_j + \hat{\mu}(1-\tau)(1+p^2)^{(m-4)/2}[(1+p^2)\xi^2 + (m-2)p_ip_j\xi_i\xi_j] \geqslant \\ &\qquad \geqslant \tau a_{ij}\xi_i\xi_j + \hat{\mu}(1-\tau)(1+p^2)^{(m-2)/2}\min\{1;\ m-1\}\xi^2 \geqslant \\ &\qquad\qquad \geqslant \min\{\nu;\ \hat{\mu}\min(1;\ m-1)\}(1+p^2)^{(m-2)/2}\xi^2.\end{aligned} \tag{10.19}$$

Далее, легко проверить, что если функции $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$, образующие уравнение (10.1$_1$), удовлетворяют условиям a) — b) теоремы 10.2, то этим же условиям удовлетворяют и функции

$$a_i(x, u, p, \tau) = \tau a_i(x, u, p) + (1-\tau)\hat{\mu}(1 + |\nabla u|^2)^{(m-2)/2}u_{x_i},$$
$$a(x, u, p, \tau) = \tau a(x, u, p),$$

образующие уравнение (10.18). Если число $\hat{\mu}$ взять, например, так:

$$\hat{\mu} = \frac{\nu}{\min\{m-1;\ 1\}}, \tag{10.20}$$

где ν и μ взяты из (10.13), то для функций $a_i(x, u, p, \tau)$ и $a(x, u, p, \tau)$ неравенства (10.13) будут выполняться с постоянными $\nu(\tau) = \nu$ и $\mu(\tau) \leqslant 2\mu + \hat{\mu}\cdot\max\{m-1;\ 1\}$. Ввиду сказанного из теоремы 10.2 вытекает

Теорема 10.3. *Предположим следующее:*

a) *При $x \in \bar{\Omega}$ и произвольных u и p функции $a_i(x, u, p)$ дифференцируемы по x, u, p, $a(x, u, p)$ дифференцируема по p, $\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j > 0$ при $|\xi| = 1$ и для $A(x, u, p)$ из (10.1$_1'$) выполнено одно из условий:* (8.7), *или* (8.9), *или* (8.12) + (8.13).

b) *При* $x \in \overline{\Omega}$, $|u| \leqslant M$ *(где* M *—верхняя граница* $\max\limits_{\Omega} |u(x, \tau)|$ *для всех возможных решений задачи* (10.18) *с* $\hat{\hat{\mu}} = 0$, *гарантированная следствием* 8.7) *и произвольных* p *функции* a_i *и* a *удовлетворяют неравенствам* (10.13).

c) *На множестве* $\mathfrak{M}_{M, M_1}$ *(где* M_1 *— постоянная из* (10.14), *определяемая теоремой* 4.1) *функции* a_i, $\frac{\partial a_i}{\partial p_j}$, $\frac{\partial a_i}{\partial u}$, $\frac{\partial a_i}{\partial x_l}$, *а непрерывны по Гёльдеру с показателем* $\alpha > 0$ *относительно* x, u *и* p.

d) $S \in C^{2+\alpha}$, $\varphi \in C^{2+\alpha}(S)$.

При выполнении этих условий задача (10.1_l) *имеет по крайней мере одно решение из* $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Для доказательства этого предложения включим параметр τ так, как указано в (10.17), (10.18), с $\hat{\hat{\mu}} = 0$. Тогда, как легко проверить, условия a) — c) теоремы 10.2 и условие равномерной ограниченности $\max\limits_{\Omega} |u(x, \tau)|$ для (10.18) следуют из условий a) — d) теоремы 10.3. Обратимся к последнему условию теоремы 10.2 — неравенству нулю суммарного индекса всех решений задачи (10.5) при $\tau = 0$. При $\tau = 0$ задача (10.18) имеет единственное решение: $u(x, 0) \equiv 0$. Кроме того, $w = \Phi(v, 0) \equiv 0$ при $\forall v \in C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$, ибо при $\tau = 0$ соответствующая задача (10.6) имеет вид

$$\hat{\mu}(1 + |\nabla v|^2)^{(m-2)/2} \Delta w + \\ + \hat{\mu}(m-2)(1 + |\nabla v|^2)^{(m-4)/2} v_{x_i} v_{x_l} w_{x_l x_i} = 0, \quad w|_S = 0, \qquad (10.21)$$

и так как $\hat{\mu} > 0$ и справедливо (10.19), то ее решение w действительно при любом v равно тождественно нулю. Поэтому преобразование $v - \Phi(v, 0)$ функции v является тождественным и его степень равна 1.

Итак, при $\tau = 0$ задача (10.18) имеет единственное решение $u(x, 0) \equiv 0$ и его индекс равен 1. Таким образом, выполнены все условия теоремы 10.2, а потому утверждение теоремы 10.3 о существовании хотя бы одного решения задачи (10.1_l) доказано.

В теореме 10.3 можно отбросить условие дифференцируемости $a(x, u, p)$ по p, но при этом в пункте a) надо видоизменить ограничения на $A(x, u, p)$ в соответствии со следствием 8.5. Именно, справедлива такая

Теорема 10.4. *Утверждение теоремы* 10.3 *остается в силе, если в ее условии* a) *отбросить предположение о дифференцируемости* $a(x, u, p)$, *но считать, что* $A(x, u, p)$ *из* $(10.1'_l)$

подчиняется одному из следующих условий: (8.7′), *или* (8.9′), *или* (8.12) + (8.13), *или условиям следствия* 8.6.

В случае, когда выполнено для $A(x, u, p)$ *условие* (8.7′) *или* $\operatorname{sign} u \cdot A(x, u, 0) < 0$, *число* $\hat{\hat{\mu}}$ *в* (10.17), (10.18) *надо взять положительным.*

Условие а) теорем 10.3 и 10.4 гарантирует оценку $\max\limits_{\Omega} |u(x, \tau)|$. Для получения этой оценки можно привлечь также теорему 8.2. Но для этого параметр τ надо включить так:

$$L^{\tau}(u) \equiv \frac{d}{dx_i} a_i(\tau x, \tau u, u_x) + \tau a(\tau x, \tau u, u_x) = 0, \qquad u|_S = \tau\varphi|_S$$

или, что то же,

$$L^{\tau}(u) \equiv a_{ij}(\tau x, \tau u, u_x) u_{x_i x_j} + \tau A(\tau x, \tau u, u_x) = 0, \qquad u|_S = \tau\varphi|_S. \tag{10.22}$$

Функции $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ (а тем самым a_{ij} и A) считаем определенными для $x \in \bar{\Omega}_1$, где $\bar{\Omega}_1$ состоит из точек x вида $x = \tau y$, $y \in \bar{\Omega}$, $\tau \in [0, 1]$, причем пусть точка $x = 0 \in \Omega$. Предположим, что существуют две функции $\omega(x)$ и $\hat{\omega}(x)$ из $C^2(\Omega_1) \cap C(\bar{\Omega}_1)$ с $\omega(0) = \hat{\omega}(0) = 0$, удовлетворяющие в Ω_1 неравенствам

$$M_u(\omega) \equiv a_{ij}(x, u, \omega_x)\omega_{x_i x_j} + A(x, u, \omega_x) \leqslant 0 \tag{10.23}$$

при $\forall u > 0$ и

$$M_u(\hat{\omega}) \geqslant 0 \tag{10.24}$$

при $\forall u < 0$. Легко видеть, что тогда для решения $u(x)$ уравнения (10.1$_1$) выполняются условия (8.20) и (8.21) теоремы 8.2 с $b_1 = b_2 = 0$. Так как $u(x, 0) \equiv 0$, то оценку $\max\limits_{\Omega} |u(x, \tau)|$ для решений задач (10.22) достаточно получить для $\tau \in (0, 1]$. Рассмотрим функции $Q(x, \tau) = \frac{1}{\tau}\omega(\tau x)$, $\tau \in (0, 1]$. Они определены для $x \in \bar{\Omega}$ и по модулю не превосходят некоторой постоянной c. Подсчитаем для них величину

$$M_u^{\tau}(Q) \equiv a_{ij}(\tau x, \tau u, Q_x) Q_{x_i x_j} + \tau A(\tau x, \tau u, Q_x). \tag{10.25}$$

Для этого обозначим τx через y. Тогда

$$Q_{x_k}(x, \tau) = \frac{\partial\omega(\tau x)}{\partial(\tau x_k)} = \omega_{y_k}(y), \qquad Q_{x_i x_j}(x, \tau) = \tau\omega_{y_i y_j}(y),$$

и потому

$$M_u^{\tau}(Q) = \tau\left[a_{ij}(y, \tau u, \omega_y)\omega_{y_i y_j} + A(y, \tau u, \omega_y)\right], \qquad y \in \Omega_1.$$

В силу (10.23) $M_u^\tau(Q)\leqslant 0$ при $\forall u>0$, $\tau\in(0,1]$, $x\in\Omega$. Применим теорему 8.2 к функциям $u(x,\tau)$, $Q(x,\tau)$ и оператору L^τ. Функция $u(x,\tau)$ удовлетворяет уравнению (10.22), т. е. $L^\tau(u)\equiv M_u^\tau(u)=0$, функция Q — неравенству $M_u^\tau(Q)\leqslant 0$ при $\forall u>0$, а тем самым и при $u(x,\tau)-Q(x,\tau)>b_1\equiv-\min\limits_\Omega Q(x,\tau)$. Следовательно, условие (8.20) для них выполнено с $b_1=-\min\limits_\Omega Q(x,\tau)$, и потому справедлива оценка (8.4), т. е.

$$u(x,\tau)\leqslant Q(x,\tau)+\max\{-\min_\Omega Q(x,\tau);\ \max_{\partial\Omega}(u-Q)\}\leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{osc}\{Q(x,\tau);\ \Omega\}+\max_{\partial\Omega}|u(x,\tau)|\leqslant\max_{\tau\in[0,1]}\operatorname{osc}\left\{\frac{\omega(x,\tau)}{\tau};\ \Omega\right\}+$$
$$+\max_{\partial\Omega}|\varphi|\equiv M.$$

Аналогично с использованием условия (10.24) устанавливается равномерная оценка снизу для $u(x,\tau)$. В частности, если $a_i(x,u,p)$ и $a(x,u,p)$ не зависят от u, то для оценки $\max\limits_\Omega|u(x,\tau)|$ можно привлечь последнее утверждение следствия 8.7. Именно, пусть существует классическое решение $\omega(x)$ уравнения (10.1_1). Тогда функции $Q(x,\tau)=\omega(x,\tau)/\tau$, $\tau\in(0,1]$ удовлетворяют уравнению $M_u^\tau(Q)=L^\tau(Q)=\frac{d}{dx_i}a_i(\tau x,Q_x)+$ $+\tau a(\tau x,Q_x)=0$, и потому для пары $u(x,\tau)$, $Q(x,\tau)$ справедливы оценки (8.4) и (8.6) с $b_1=-\infty$ и $b_2=+\infty$ соответственно, т. е. для $\tau\in(0,1]$

$$Q(x,\tau)+\min_{\partial\Omega}[u(x,\tau)-Q(x,\tau)]\leqslant u(x,\tau)\leqslant$$
$$\leqslant Q(x,\tau)+\max_{\partial\Omega}[u(x,\tau)-Q(x,\tau)],$$

причем $\max\limits_{\tau\in(0,1]}\max\limits_\Omega|Q(x,\tau)|<\infty$. При $\tau=0$ решение $u(x,0)\equiv 0$.

Проверка для уравнений (10.22) других условий, при которых можно оценить нормы $|u(x,\tau)|_\Omega^{(2+\alpha)}$, не вызывает затруднений. Именно, из неравенств (10.13) для $L(u)$ следует справедливость этих неравенств для всех $L^\tau(u)$, а из условия с) теоремы 10.3 для $a_i(x,u,p)$, $a(x,u,p)$ следует его выполнение и для функций, образующих операторы L^τ. Наконец, последнее условие теоремы 10.2 о разрешимости задачи (10.22) при $\tau=0$ тоже выполнено. Действительно, при $\tau=0$ задача (10.22) имеет вид

$$a_{ij}(0,0,u_x)u_{x_ix_j}=0,\qquad u|_S=0. \tag{10.26}$$

Ее единственным классическим решением является $u(x, 0)=0$. Более того, единственным классическим решением задачи

$$a_{ij}(0, 0, v_x)\, w_{x_i x_j}=0, \qquad w|_S=0$$

при $\forall v \in C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ является $w\equiv 0$, т. е. $\Phi(v, 0)\equiv 0$, и потому индекс решения $u(x, 0)$ задачи (10.26) равен 1. Таким образом, доказана

Теорема 10.5. *Утверждение теоремы* 10.3 *остается в силе, если в ее условии* а) *заменить предположения относительно функции* $A(x, u, p)$ *предположением о существовании функций* $\omega(x)$ *и* $\hat{\omega}(x)$ *класса* $C^2(\Omega_1)\cap C(\overline{\Omega}_1)$, *удовлетворяющих неравенствам* (10.23) *и* (10.24). *Кроме того, все условия теоремы* 10.3 *надо считать выполненными в области* $\overline{\Omega}_1=\{y\colon\ y=\tau x,\ x\in\overline{\Omega},\ \tau\in[0, 1]\}$.

Если функцию $a(x, u, p)$ *не предполагать дифференцируемой, то* (10.23) *и* (10.24) *надо считать выполненными со знаком строгих неравенств.*

Если $a_i(x, u, p)$ *и* $a(x, u, p)$ *не зависят от* u, *то условия* (10.23), (10.24) *можно заменить предположением о существовании хотя бы одного классического решения* $\omega(x)$ *уравнения* (10.1_1). *В этом случае задача* (10.1_l) *имеет единственное решение из* $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Замечание 10.1. В пунктах а) и b) теоремы 10.3 и соответствующих требованиях теорем 10.4 и 10.5 мы предполагали ту или иную гладкость функций $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ при всех значениях (u, p) или p. Однако на самом деле нам достаточно ее иметь лишь при $|u|\leqslant M$ и $|p|\leqslant M_1$, где M и M_1 — мажоранты для $\max\limits_{\Omega}|u|$ и $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$, вычисляемые по известным нам величинам.

Рассмотрим еще одно включение параметра τ в задачу (10.1_l), а именно:

$$L^\tau(u)\equiv\frac{d}{dx_i}a_i(x, u, u_x)+a(x, u, u_x, \tau)=0, \qquad u|_S=\tau\varphi|_S, \tag{10.27}$$

где $a(x, u, u_x, \tau)=(\tau-1)\dfrac{\partial a_i(x, u, u_x)}{\partial x_i}+\tau a(x, u, u_x)$. При $\tau=1$ задача (10.27) совпадает с задачей (10.1_l). Задачам (10.27) сопоставим линейные задачи

$$\frac{\partial a_i(x, v, v_x)}{\partial v_{x_j}}w_{x_i x_j}+\frac{\partial a_i(x, v, v_x)}{\partial v}w_{x_i}+$$
$$+\tau\left[\frac{\partial a_i(x, v, v_x)}{\partial x_i}+a(x, v, v_x)\right]=0, \qquad w|_S=\tau\varphi|_S, \tag{10.28}$$

определяющие по $v(x)$ и τ функцию $w(x, \tau)$. Примечательной особенностью преобразования (v, τ) в w является его линейность по τ: $w = \tau\Phi(v)$. Легко проверить, что неподвижные точки этого преобразования, т. е. решения уравнения $u = \tau\Phi(u)$, являются решениями задачи (10.27). Для обнаружения же неподвижных точек у преобразования $\tau\Phi(v)$ можно воспользоваться следующей теоремой Шаудера (см., например, [13]):

Теорема 10.6. *Пусть $A(v)$ есть вполне непрерывное (т. е. непрерывное и компактное) преобразование в банаховом пространстве H, переводящее какое-либо ограниченное, замкнутое, выпуклое множество $\mathfrak{N}$ в себя (т. е. $A(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N}$). Тогда в $\mathfrak{N}$ для A имеется хотя бы одна неподвижная точка v_0 (т. е. $A(v_0) = v_0 \in \mathfrak{N}$).*

Из этой теоремы легко выводится следующее известное

Следствие 10.1. Если $A(v)$ есть вполне непрерывное преобразование в банаховом пространстве H и если все возможные решения уравнений $v = \tau A(v)$, $\tau \in [0, 1)$, лежат внутри шара $K_R = \{v: |v|_H \leqslant R\}$ пространства H, то $A(v)$ имеет в K_R по крайней мере одну неподвижную точку.

Для доказательства построим по $A(v)$ новое преобразование $\tilde{A}(v)$ в K_R, сопоставляющее точке $v \in K_R$ элемент $A(v)$, если $|A(v)|_H \leqslant R$, и элемент $R|A(v)|_H^{-1} A(v)$, если $|A(v)|_H > R$. Ясно, что $\tilde{A}(v)$ вполне непрерывно и переводит K_R в себя. По теореме 10.6 найдется по крайней мере одна точка $v_0 \in K_R$, для которой $\tilde{A}(v_0) = v_0$. Покажем, что для нее $A(v_0) = v_0$. Действительно, если $|A(v_0)|_H \leqslant R$, то $\tilde{A}(v_0) = A(v_0)$, и потому $A(v_0) = v_0$. Если же $|A(v_0)|_H > R$, то v_0 есть решение уравнения $v_0 = \tilde{A}(v_0) = R|A(v_0)|_H^{-1} A(v_0)$, т. е. уравнения $v_0 = \tau A(v_0)$ с $\tau < 1$. Но последнее не допускается одним из условий следствия, и потому v_0 действительно есть решение уравнения $v_0 = A(v_0)$.

Замечание 10.2. Если о вполне непрерывном преобразовании A известно, что для всех возможных решений уравнений $v = \tau A(v)$, $\tau \in [0, 1]$, нормы $|v|_H \leqslant R$, то уравнение $v = A(v)$ имеет по крайней мере одно решение с $|v|_H \leqslant R$.

Действительно, для A и шара $K_{R+\varepsilon} = \{v: |v|_H \leqslant R + \varepsilon\}$ с произвольно малым $\varepsilon > 0$ следствие 10.1 гарантирует по крайней мере одно решение v уравнения $v = A(v)$ в шаре $K_{R+\varepsilon}$. Но в силу нашего предположения для него $|v|_H \leqslant R$, т. е. фактически оно лежит в K_R.

Замечание 10.3. В теореме 10.6 и следствии 10.1 преобразование A может быть заданным только на $\mathfrak{N}$ и K_R соответственно, а в замечании 10.2 — в шаре $K_{R+\varepsilon}$ с каким-либо $\varepsilon > 0$.

Вернемся теперь к задаче (10.27). В силу замечания 10.2 для разрешимости ее при $\tau=1$ достаточно установить, что все возможные ее решения $u(x, \tau)$, $\tau \in [0, 1]$, имеют норму $|u(x, \tau)|_H$, не превосходящую какого-либо числа R. В качестве пространства H, как и выше, будем брать пространство $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ с некоторым $\beta>0$. Полная непрерывность преобразования $\Phi(v)$, определяемого задачей (10.28), устанавливается так же, как и выше, с помощью результатов §§ 1, 2 гл. III о линейных уравнениях. Для получения же априорных оценок всех возможных решений $u(x, \tau)$ задач (10.27) надо привлечь результаты §§ 1—8 данной главы. Если оценка $\max\limits_{\Omega}|u(x, \tau)| \leqslant M$ для $\forall \tau \in [0, 1]$ уже имеется (или предполагается), то оценки более сильных норм $\max\limits_{\Omega}|\nabla u(x, \tau)|$, $|u(x, \tau)|_{\Omega}^{(1+\beta)}$, $|u(x, \tau)|_{\Omega}^{(2+\alpha)}$ выводятся для для решений $u(x, \tau)$ при тех же предположениях относительно $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$, φ и S, что и для $u(x, 1)$, т. е. для решений задачи (10.27) при $\tau=1$. Для возможности же получения эффективной оценки $\max\limits_{\Omega}|u(x, \tau)|$ надо налагать дополнительные условия, позволяющие применить то или иное утверждение §§ 7 или 8. Например, следствие 8.7 гарантирует оценку

$$\max_{\Omega}|u(x, \tau)| \leqslant \max\{M; \max_{S}|\varphi|\}$$

для всех возможных решений $u(x, \tau)$ задач (10.27), если при всех $|u|>M$ выполнено неравенство

$$\operatorname{sign} u\left[\frac{\partial a_i(x, u, 0)}{\partial x_i}+a(x, u, 0)\right] \leqslant 0$$

и функция $\dfrac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial x_i}+a(x, u, p)$ дифференцируема по p. Мы не будем перечислять здесь все ситуации, при которых можно оценить $\max\limits_{\Omega}|u(x, \tau)|$, пользуясь утверждениями §§ 7 и 8, ибо это нетрудно сделать самостоятельно.

Мы привели здесь ряд случаев, когда можно дать эффективную оценку $\max\limits_{\Omega}|u|$ для возможных решений u задачи (10.1_l). Число их можно приумножить, но ясно, что описать все подобные случаи невозможно.

Обратимся снова к общей теореме 10.2. Результаты § 7 показывают, что условие равномерной ограниченности $\max\limits_{\Omega}|u(x, \tau)|$ можно заменить условием равномерной ограниченности $\|u(x, \tau)\|_{q, \Omega}$ с каким-либо $q \geqslant 1$, но для этого необходимо неравенство (10.13) дополнить неравенствами (7.4), (7.5) (см. теорему 7.6). Далее, теоремы 7.3—7.5 дают достаточные условия того, когда норму $\|u\|_{q,\Omega}$ можно оценить через данные задачи. Различные сочетания теорем § 7 с изложенными здесь дают еще одну серию условных и безусловных теорем о разрешимости задачи (10.1_i). Мы не будем приводить формулировки этих теорем, надеясь, что при необходимости читатель это сможет сделать самостоятельно.

В предыдущих теоремах 10.2—10.5 было гарантировано существование классических решений задачи (10.1_i), точнее, решений из $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Для существования таких хороших решений наши предположения о гладкости функций a_i, a, φ и границы S были минимально возможными. Ослабление тех или иных предположений о гладкости S, φ или a_i, a приведет к ухудшению соответствующих дифференциальных свойств решений $u(x, \tau)$. Так, например, если снять условие гладкости с S и φ, то это приведет к потере гладкости u на S. Если отбросить условие непрерывности функций $\frac{\partial a_i}{\partial p_j}$, $\frac{\partial a_i}{\partial u}$, $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$, a по Гёльдеру, оставив вместо этого лишь условие их ограниченности (неравенства (10.13)), то решения u не будут принадлежать $C^{2+\alpha}$. Они будут иметь ограниченные производные первого порядка и обобщенные производные из $L_2(\Omega)$ второго порядка и будут удовлетворять уравнению (10.1_1) для почти всех x из Ω.

Все эти и подобные им теоремы о существовании решений более плохих, чем решения из $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, можно получить из теорем 10.2—10.5 путем аппроксимации a_i, a, S, φ гладкими функциями a_i^r, a^r, S_r, φ_r, удовлетворяющими условиям теорем 10.2—10.5, и последующего предельного перехода в последовательности решений u_r, $r = 1, 2, \ldots$, этих «сглаженных» задач (10.1_i) с использованием соответствующих теорем §§ 1—8 об априорных оценках решений u_r.

Покажем, как осуществить эту идею на примере некоторых из перечисленных случаев. Для большей ясности и простоты сделаем это при одном из тех условий, когда можно дать явную оценку $\max_{\Omega}|u|$. Пусть, например, для уравнения (10.1_1) выполнены неравенства (8.7′). Теорема 10.4 гарантирует для него разрешимость задачи Дирихле в классе $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ при S, $\varphi(x) \in C^{2+\alpha}$, $a_i \in C^{1+\alpha}$, $a \in C^{\alpha}$. Предположим, что условия S, $\varphi(x) \in C^{2+\alpha}$ теоремы 10.4 заменены более слабыми, именно: S удовлетворяет условию (A), а $\varphi(x) \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$. Покажем, что при сохранении всех остальных условий теоремы 10.4 имеет место теорема существования по крайней мере одного решения задачи (10.1_i) из $C^{\gamma}(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ с некоторым $\gamma > 0$.

Действительно, возьмем последовательность расширяющихся областей Ω_r, $r = 1, 2, \ldots$, с границами S_r из $C^{2+\alpha}$, сходящихся к Ω и удовлетворяющих условию (A) с одними и теми же постоянными a_0 и θ_0. В каждой из Ω_r имеем $\varphi(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_r)$.

В силу теоремы 10.4 задача (10.1_i) для каждой из областей Ω_r имеет по крайней мере одно решение $u_r(x)$ из $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_r)$. Для всей совокупности этих решений следствие 8.5 и теоремы §§ 1—6 дают оценку $|u_r|_{\Omega_r}^{(\gamma)} \leqslant c$ и для любой $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ при всех достаточно больших r оценку $|u_r|_{\Omega'}^{(2+\alpha)} \leqslant c(\Omega')$, где постоянные c, $c(\Omega')$ не зависят от r, а постоянная $c(\Omega')$ зависит от расстояния $\bar{\Omega}'$ до S.

Отсюда легко видеть, что для последовательности $\{u_r\}$ существует по крайней мере одна предельная функция $u(x)$, принадлежащая $C^{\gamma}(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ и удовлетворяющая (10.1_i). Ослабим теперь требования на a_i и a, именно, отбросим требование непрерывности по Гёльдеру функций $\frac{\partial a_i}{\partial p_j}$, $\frac{\partial a_i}{\partial u}$, $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$, a, но оставим все остальные предположения об a_i и a и предположение о непрерывности $a(x, u, p)$ по (x, u, p). Мы не можем использовать теперь оценки Шаудера для нормы Гёльдера производных $u(x)$ второго порядка, но все остальные оценки норм решений в $C^{1+\gamma}$ и W_2^2 — в нашем распоряжении. Аппроксимируем функции $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ функциями $a_i^r(x, u, p)$, $a^r(x, u, p)$, удовлетворяющими всем условиям теоремы 10.4. Кроме того, функции $a_i^r(x, u, p)$, $a^r(x, u, p)$ выберем так, чтобы они удовлетворяли неравенствам, указанным в теореме 10.4, с постоянными, не зависящими от r. В качестве сглаженных функций a_i^r и a^r, как нетрудно видеть, можно взять усреднения исходных функций a_i, a по всем переменным с бесконечно дифференцируемым неотрицательным ядром, зависящим от разностей аргументов. Правда, так усредненные функции будут определены не для всех x из $\bar{\Omega}$. (Что касается аргументов u и p, то мы считаем функции a_i и a определенными или доопределенными для всех u из E_1 и p из E_n так, что выполняются условия a) и b) теоремы 10.4.) Это обстоятельство можно исправить двумя разными способами: или предварительно доопределить функции a_i, a на более широкую область $\tilde{\Omega} \supset \Omega$ с сохранением всех их свойств, указанных в условиях теоремы, или рассматривать a_i^r, a^r при каждом r на своей области $\Omega_r \subset \Omega$ с гладкой границей, отстоящей от S на расстояние, не меньшее радиуса усреднения по x.

Выберем второй способ. Задача (10.1_l) в области Ω_r для усредненных a_i^r и a^r имеет по крайней мере одно решение u_r. Для всей совокупности этих решений будем иметь оценки

$$|u_r|_{\Omega_r}^{(\gamma)} \leqslant c, \quad |u_r|_{\Omega'}^{(1+\gamma')} \leqslant c(\Omega'), \quad \|u_r\|_{2,\Omega'}^{(2)} \leqslant c(\Omega')$$

с постоянными c, $c(\Omega')$ и γ', не зависящими от r. Постоянные $c(\Omega')$ и γ' зависят от расстояния $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ до S. Эти неравенства также позволяют выбрать из $\{u_r\}$, $r = 1, 2, \ldots$, подпоследовательность, равномерно сходящуюся к функции $u(x)$, принадлежащей $C^{\gamma}(\bar{\Omega}) \cap C^{1+\gamma'}(\bar{\Omega}') \cap W_2^2(\Omega')$ при любой $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ и удовлетворяющей почти всюду уравнению (10.1_1) и граничному условию (10.1_2).

Если в обоих только что рассмотренных случаях ослабления условий теорем 10.2—10.5 считать $S \in O^2$, а $\varphi \in O^2(\bar{\Omega})$, то для определяемых решений можно с помощью оценок §§ 4 и 6 доказать, что они суть элементы $C^{1+\bar{\gamma}}(\bar{\Omega}) \cap W_2^2(\Omega)$ с некоторым $\bar{\gamma} > 0$.

Так с использованием теорем 10.2—10.5 и априорных оценок из разных параграфов данной главы доказываются различные теоремы о существовании решений более плохих, чем решения из $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

Мы доказали из них следующие предложения:

Теорема 10.7. *Пусть выполнены все условия теоремы* 10.3 (*или* 10.4), *кроме пункта* d), *который заменен условием* d′) $S \in O^2$, $\varphi \in O^2(\bar{\Omega})$ *или условием* d″) S *удовлетворяет условию* (A), $\varphi \in C^{\beta}(\bar{\Omega})$. *Тогда задача* (10.1_i) *имеет по крайней мере одно решение, и которое в первом случае есть элемент* $C^{1+\bar{\gamma}}(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$, *а во втором — элемент* $C^{\gamma}(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ *с некоторыми* $\bar{\gamma}$ *и* γ, *бóльшими нуля.*

Пусть, кроме того, вместо условия c) *теоремы* 10.3 (*или теоремы* 10.4) *предполагается лишь непрерывность* $a(x, u, p)$ *по* (x, u, p). *Тогда задача* (10.1_i) *имеет по крайней мере одно решение из* $C^{1+\bar{\gamma}}(\bar{\Omega}) \cap W_2^2(\Omega)$, *если условие* d) *заменено условием* d′), *и из* $C^{\gamma}(\bar{\Omega}) \cap C^{1+\gamma'}(\bar{\Omega}') \cap W_2^2(\Omega')$, *где* Ω' — *любая строго внутренняя подобласть области* Ω, *а* γ' — *некоторый зависящий от* Ω' *положительный показатель, если условие* d) *заменено на* d″).

Такие же ослабления с такими же следствиями (относительно свойств решений задачи (10.1_i)) допускают и другие теоремы данного параграфа.

Условие a) теорем 10.3, 10.4 и 10.7, гарантирующее оценку $\max_{\Omega} |u(x, \tau)|$, можно заменить, например, условиями

$$\left.\begin{aligned} a_i(x, u, p)\, p_i \geqslant \nu |p|^m - \delta_1 |u|^m - \delta_3, \quad \nu > 0 \\ a(x, u, p)\, u \leqslant \mu_0 |p|^m + \delta_2 |u|^m + \delta_4 \end{aligned}\right\} \qquad (10.29)$$

с произвольными постоянными, если только $\operatorname{mes}\Omega$ достаточно мала. В теореме 7.5 указано явно ограничение на $\operatorname{mes}\Omega$, при выполнении которого для всех возможных решений $u(x, \tau)$ задач (10.18) можно дать оценку $\max\limits_{\tau\in[0,1]}\max\limits_{\Omega}|u(x, \tau)|$. Величина допустимой $\operatorname{mes}\Omega$ определяется постоянными m, ν, μ_0, δ_1 и δ_2, входящими в неравенства (10.29). Итак, справедлива

Теорема 10.8. *Утверждения теорем* 10.3 *и* 10.7 *сохраняются, если условие* a) *в них заменить следующим:* a′) *при* $x\in\overline{\Omega}$ *и произвольных* u *и* p *функции* $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ *удовлетворяют неравенствам* (10.29), *a* $\operatorname{mes}\Omega$ *достаточно мала (ее величина определяется постоянными* m, ν, μ_0, δ_1 *и* δ_2 *из* (10.29)).

Теоремы 10.1—10.8 вместе с оценками §§ 1—8 позволяют исследовать и те случаи, когда задача (10.1_l) имеет лишь обобщенные решения с производными первого порядка, причем получаемые на этом пути результаты не покрываются теоремами § 9. Однако мы не будем здесь этого делать ввиду громоздкости рассуждений.

Остановимся на вопросе о теореме единственности для задачи (10.1_l). Разность u двух возможных решений u' и u'' задачи (10.1_l) удовлетворяет однородному граничному условию $u|_S=0$ и соотношению

$$\left(\tilde{a}_{ij}u_{x_j}+\tilde{a}_iu\right)_{x_i}+\tilde{b}_iu_{x_i}+\tilde{a}u=0, \qquad (10.30)$$

в котором функции $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{a}$ те же самые, что и в тождестве (2.3) данной главы, и которое может быть рассмотрено как линейное уравнение относительно u. Ввиду этого для доказательства тождественного равенства нулю функции u могут быть привлечены теоремы гл. III о линейных уравнениях. Пусть относительно функций $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ известна ограниченность их и их частных производных по u и p на любом компактном множестве значений их аргументов. Тогда, если решения задачи (10.1_l) имеют конечный $\max\limits_{\Omega}|u', u'', \nabla u', \nabla u''|$, то коэффициенты уравнения (10.30) суть известные ограниченные функции и к (10.30) применимы теоремы §§ 4, 5 гл. III, в том числе и те, в которых гарантируется обращение u в нуль (теорема единственности). Если о решениях задачи известна ограниченность лишь их самих, но не их градиентов, то никакая гладкость известных функций $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ не гарантирует, вообще говоря, нужных нам свойств коэффициентов (10.30), и, чтобы доказать теорему единственности в классе таких решений, надо накладывать еще ограничения на поведение $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ при $|p|\to\infty$. Такого типа рассмотрения были проведены выше, в § 2 данной главы.

Если о решениях задачи (10.1_i) известна, например, их принадлежность к $C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ и если у функций $a_i(x, u, p)$ существуют производные второго порядка, ограниченные на каждом компактном множестве значений их аргументов, то разность двух возможных решений удовлетворяет также уравнению вида

$$\hat{a}_{ij}u_{x_ix_j}+\hat{a}_iu_{x_i}+\hat{a}u=0 \tag{10.31}$$

с ограниченными на $\forall\bar{\Omega}'\subset\Omega$ коэффициентами, и потому она равна тождественно нулю, если $\hat{a}\leqslant 0$ (см. § 1 гл. III).

Таковы способы доказательства теорем единственности для задачи (10.1_i). Мы не будем перечислять все те ситуации, когда тот или иной из них приводит к нужной цели. Отметим лишь, что единственность заведомо имеет место в вышеописанных случаях, если область Ω достаточно мала. Она будет иметь место также в первом и третьем случаях, если в левую часть уравнения (10.1_1) добавить слагаемое $-\lambda u$ и считать λ достаточно большим числом (действительно, член $-\lambda u$ добавится тогда в левые части уравнений (10.30) и (10.31), а это, как известно, гарантирует нужную нам единственность).

Рассмотрим один случай неравномерно эллиптических уравнений, именно, уравнения вида

$$\frac{d}{dx_i}a_i(u_x)=0 \tag{10.32}$$

с дифференцируемыми функциями $a_i(p)$, удовлетворяющими условию

$$\frac{\partial a_i(p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j>0 \tag{10.33}$$

при $|\xi|=1$ и произвольных p. Примером таких уравнений является уравнение минимальных поверхностей

$$\frac{d}{dx_i}\left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)=0.$$

Для него неравенство (10.33) имеет место, тогда как условие (2.1) не выполнено. Известно, что для классической разрешимости задачи Дирихле для этого уравнения необходимо, помимо гладкости $\varphi=u|_S$ и $\partial\Omega$, накладывать дополнительные условия на форму области Ω ([51]). Ввиду этого предположим, что Ω выпукла и функция $\varphi(s)$ и S удовлетворяют n-мерному аналогу «условия трех точек». Последнее означает следующее: $\varphi(s)$ непрерывна, и потому $\max\limits_S|\varphi(s)|=M<\infty$ и существует положительное число R, обладающее тем свойством, что если взять в пространстве (x, u) любую точку вида $(s, \varphi(s))$, где $s\in S$, провести через нее $(n-1)$-мерную плоскость, касающуюся

$(n-1)$-мерного многообразия $\Xi=\{s\in S,\ u=\varphi(s)\}$, и через эту плоскость провести две n-мерные плоскости $\Pi_\pm$, наклон которых к плоскости $u=0$ не меньше R, точнее, их уравнения имеют вид

$$u-\varphi(x^0)=\pm\sum_{k=1}^{n}c_k\left(x_k-x_k^0\right),\qquad x^0=s,\qquad \sqrt{\sum_{k=1}^{n}c_k^2}\geqslant R,\tag{10.34}$$

то все многообразие Ξ будет заключено в том двугранном угле между Π_+ и Π_-, в котором содержится множество $\{x\in\Omega,\ u=\varphi(x^0)\}$. Это условие будем называть «условием $n+1$ точки». Можно показать, что оно заведомо выполняется для строго выпуклых областей Ω, если граница S и функция $\varphi(s)$ достаточно гладкие.

Из § 1 гл. III следует, что для классических решений $u(x)$ задачи (10.32), (10.1_2) справедлива оценка

$$\max_{\Omega}|\,u(x)\,|\leqslant M.\tag{10.35}$$

Покажем, что для них

$$\max_{\Omega}|\,\nabla u\,|\leqslant R.\tag{10.36}$$

Поверхность $u=u(x)$, $x\in\overline{\Omega}$, заключена в любом из двугранных углов, описанных в «условии $n+1$ точки», ибо если бы это было не так, то по крайней мере одна из функций

$$v_\pm(x)=u(x)\mp\sum_{k=1}c_k\left(x_k-x_k^0\right)-\varphi(x^0)$$

имела бы положительный максимум или отрицательный минимум внутри области $\Omega_\pm\subset\Omega$, на границе которой она обращается в нуль. Но это невозможно, ибо $v_\pm$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial a_i(u_x)}{\partial u_{x_j}}v_{\pm x_ix_j}=0$. Если предположить, что $u\in C^1(\overline{\Omega})$, то отсюда следует, что $\max\limits_{S}|\,\nabla u\,|\leqslant R$. Далее, каждая производная $u_l\equiv u_{x_l}$ может быть рассмотрена в $\overline{\Omega}'\subset\Omega$ как обобщенное решение из $C^1(\overline{\Omega}')$ линейного невырожденного эллиптического уравнения

$$\frac{d}{dx_l}\left(a_{ij}(x)\,u_{lx_j}\right)=0\tag{10.37}$$

с ограниченными в $\overline{\Omega}'$ коэффициентами $a_{ij}(x)=\dfrac{\partial a_i(u_x(x))}{\partial u_{x_j}}$ (уравнение (10.37) есть результат дифференцирования (10.32) по x_l). В силу теоремы 13.2 гл. III $\max\limits_{\Omega'}|\,u_l(x)\,|\leqslant\max\limits_{\partial\Omega'}|\,u_l(x)\,|$, и так как $u_l(x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и это неравенство справедливо при $\forall\overline{\Omega}'\subset\Omega$, то оно сохранится и для Ω. Тем самым неравенство (10.36) доказано *). После этого при оценке более сильных норм решений $u(x)$ неравномерность эллиптичности уравнения (10.32) роли, очевидно, не играет, и теоремы § 6 гарантируют эти оценки, если $a_i(p)$, $u(x)$, $\varphi(x)$ и S обладают соответствующей гладкостью.

Для доказательства разрешимости задачи (10.32), (10.1_2) параметр τ включим только в граничное условие $u(x,\tau)|_S=\tau\varphi(x)|_S$. Ясно, что для $u(x,\tau)$, $\tau\in[0,1]$, справедливы оценки (10.35), (10.36) и те же оценки норм $|u(x,\tau)|_{\Omega}^{(l+\alpha)}$, что и для $u(x,1)$. При $\tau=0$ имеется только одно решение $u(x,0)\equiv 0$, и его индекс равен 1 (кстати, единственность имеет место при всех $\tau\in[0,1]$). Разрешимость задачи (10.32), (10.1_2) (равно как и ряда случаев, рассмотренных выше) можно доказать, и не прибегая к теореме Лерэ — Шаудера, а используя лишь теорему Шаудера 10.6 о существовании неподвижной точки вполне непрерывного преобразования замкнутого выпуклого множества в себя. При различных предположениях о гладкости данных исследуемой задачи получим разрешимость ее в том или ином классе. Приведем один из результатов.

Теорема 10.9. *Пусть Ω — выпуклая область и для $\varphi(s)=u|_S$ и S выполнено «условие $n+1$ точки» с числом R. Пусть функции $a_i(p)$ принадлежат $C^{l+\alpha}(\{p:|p|\leqslant R\})$, $l\geqslant 1$, и для $|p|\leqslant R$ удовлетворяют условию* (10.33). *Тогда задача* (10.32), (10.1_2) *имеет единственное решение и из $C^{l+1+\alpha}(\overline{\Omega})$, если $\varphi\in C^{l+1+\alpha}(\overline{\Omega})$ и $S\in C^{l+1+\alpha}$.*

Результаты §§ 2—4 гл. VI позволяют доказать разрешимость задачи Дирихле для более широкого класса неравномерно эллиптических уравнений. Более того, за период между первым и вторым изданиями данной книги появилось довольно много работ и других авторов, в которых исследованы различные классы неравномерно эллиптических уравнений (собственно, для них надо получить лишь априорную оценку $\max_{\Omega}|\nabla u|$, а оценки более сильных норм даются теоремами § 6). Однако этот объект мы здесь специально не рассматриваем.

Вернемся еще раз к вопросу о гладкости обобщенных решений $u(x)$ из $W^1_{m,q}(\Omega)$ уравнения (0.1). В §§ 1—7 дан прямой путь его исследования. Это же можно сделать, используя теорему 10.8 и теоремы § 2. Именно, пусть $u(x)$ есть произвольное обобщенное решение из $C^{\beta}(\overline{\Omega})\cap W^1_m(\Omega)$ уравнения (0.1) (вопрос о принадлежности решений $u(x)$ из $W^1_{m,q}$ к C^{β} исследован

*) Этот факт легко доказывается и без использования теоремы 13.2 гл. III. Так он и был установлен первоначально в заметке $[21_7]$.

в §§ 1 и 7). Рассмотрим его в шаре $K_\rho \subset \Omega$ достаточно малого радиуса ρ (величину ρ определим ниже по известным нам характеристикам уравнения и $M \geqslant \max\limits_{\Omega} | u(x) |$).

Относительно $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ предположим, что для них выполнены условия (2.1), (2.2), а тем самым и (1.2), (1.3). Изменим, если надо, $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ при $|u| \geqslant M+1$ так, чтобы при $x \in \overline{\Omega}$ и произвольных u, p

$$\left.\begin{aligned} \tilde{a}_i(x, u, p)\, p_i &\geqslant \nu_1 |p|^m - \mu_1, \\ \tilde{a}(x, u, p)\, u &\leqslant \mu_0 |p|^m + \mu_1, \end{aligned}\right\} \tag{10.38}$$

с какими-либо положительными μ_i, ν_1. Кроме того, для измененных a_i, a (мы их обозначили через $\tilde{a}_i$, $\tilde{a}$) должны оставаться справедливыми предположения (2.1), (2.2) (может быть, с несколько измененными функциями $\nu(|u|)$ и $\mu(|u|)$).

Исследуемую функцию $u(x)$ можно рассмотреть как обобщенное решение из $C^\beta(\overline{K}_\rho) \cap W_m^1(K_\rho)$ задачи

$$\frac{d}{dx_i}\tilde{a}_i(x, v, v_x) + \tilde{a}(x, v, v_x) = 0, \qquad v|_{\partial K_\rho} = u|_{\partial K_\rho}. \tag{10.39}$$

С другой стороны, согласно теореме 10.8 задача (10.39) имеет хорошее решение v, если только радиус ρ достаточно мал.

Величина ρ определяется постоянными m, ν_1, μ_0, μ_1 из (10.38). Далее, в силу теоремы 7.5 постоянные m, ν_1, μ_0, μ_1 из (10.38) и M определяют и мажоранту M_1 для $\max\limits_{K_\rho} | v(x) |$, где v есть любое из решений задачи (10.39), причем эта мажоранта не возрастает с уменьшением ρ. Согласно теоремам § 2 по величине M_1 можно определить $\bar{\rho}$ такое, что в шарах K_ρ с $\rho \leqslant \bar{\rho}$ будет иметь место теорема единственности для задачи (10.39) в классе ог. об. решений из $W_m^1(K_\rho)$, не превосходящих по модулю M_1. Беря в задаче (10.39) $\rho = \bar{\rho}$, получим, что исследуемое решение u совпадает в K_ρ с решением v, гарантированным теоремой 10.8. Гладкость v в K_ρ определяется гладкостью функций $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$. В теореме 10.8 прослежена гладкость вплоть до принадлежности v к $C^{2+\alpha}(K_\rho)$. Дальнейшее увеличение гладкости гарантировано теоремами § 6.

Глава V

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Постановка задач

Данная глава посвящена исследованию вариационных задач для функционалов вида

$$I(u) = \int\limits_{\Omega} F(x, u, u_x)\,dx \tag{1.1}$$

в ограниченной области Ω при граничном условии

$$u|_S = \varphi(s). \tag{1.2}$$

(Другие граничные условия классического типа рассматриваются аналогично.) Нас будут интересовать функции $u(x)$, на которых первая вариация $\delta I(u;\eta)$ функционала $I(u)$ обращается в нуль при всех допустимых вариациях $\eta(x)$, т. е. для которых

$$\delta I(u;\eta) \equiv \int\limits_{\Omega} \left[F_{u_{x_i}}(x, u, u_x)\,\eta_{x_i} + F_u(x, u, u_x)\,\eta\right] dx = 0. \tag{1.3}$$

Такие функции $u(x)$ называются стационарными точками функционала $I(u)$. Для них, в основном, рассматривается вопрос о их гладкости. Если функция $u(x)$ дает наименьшее значение функционалу $I(u)$ на множестве $\mathfrak{M}$, состоящем из всех функций, на которых $I(u)$ конечен и которые удовлетворяют условию (1.2), то при некоторых естественных предположениях относительно $F(x, u, p)$ первая вариация $I(u)$ на $u(x)$ будет равна нулю. В § 2 будет исследован вопрос о нахождении функций, реализующих $\inf\limits_{\mathfrak{M}} I(u)$.

Как известно, эти задачи тесно связаны с решением уравнения Эйлера

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx_i} F_{u_{x_i}} - F_u = 0 \tag{1.4}$$

при краевом условии (1.2). Любое не слишком плохое решение $u(x)$ уравнения (1.4) удовлетворяет тождеству (1.3), и, наоборот, любая достаточно хорошая функция $u(x)$, удовлетворяющая тождеству (1.3), является решением уравнения (1.4).

Соотношение (1.3) является не чем иным, как интегральным тождеством, определяющим обобщенные решения уравнения (1.4).

Одно из основных условий, при котором изучаются все эти вопросы, — это выпуклость функции $F(x, u, p)$ по переменным p. Оно может быть записано или в виде

$$E(x, u, p, \bar{p}) \equiv F(x, u, p) - F(x, u, \bar{p}) - \\ - F_{p_i}(x, u, \bar{p})(p_i - \bar{p}_i) > 0, \qquad p \neq \bar{p}, \quad (1.5)$$

где p и $\bar{p}$ — произвольные вектора из области задания функции $F(x, u, p)$, или в виде

$$F_{p_i p_j}(x, u, p)\,\xi_i \xi_j > 0, \quad (1.6)$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — произвольные вещественные параметры, не равные одновременно нулю, если функция F дважды дифференцируема по p.

Если F удовлетворяет неравенству (1.5) или (1.6), то говорят, что вариационные задачи р е г у л я р н ы. Неравенство (1.6) есть не что иное, как условие эллиптичности уравнения (1.4) или, что то же, уравнения

$$L(u) \equiv F_{u_{x_i} u_{x_j}}(x, u, u_x)\, u_{x_i x_j} + F_{u_{x_i} u} u_{x_i} + F_{u_{x_i} x_i} - F_u = 0. \quad (1.4')$$

Более жестким, чем условие (1.6), является неравенство

$$F_{p_i p_j}(x, u, p)\,\xi_i \xi_j + 2F_{p_i u}\xi_i \xi_0 + F_{uu}\xi_0^2 > 0, \quad (1.7)$$

где $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ такие же, как и в (1.6), называемое *усиленным условием регулярности*.

Опишем несколько подробнее связи, которые имеют место между вариационными задачами для (1.1) при условии (1.2) и краевой задачей (1.4), (1.2). Легко подсчитать, что

$$I(u + \eta) = I(u) + \delta I(u; \eta) + \delta^2 I(u + \theta\eta; \eta), \qquad \theta \in [0, 1], \quad (1.8)$$

где $\delta^2 I$ есть вторая вариация функционала I, вычисленная на некотором «промежуточном» значении ее первого аргумента. Она имеет вид

$$\delta^2 I(u; \eta) \equiv \frac{1}{2} \int_\Omega \left[F_{u_{x_i} u_{x_j}}(x, u, u_x)\, \eta_{x_i} \eta_{x_j} + 2F_{u_{x_i} u} \eta_{x_i} \eta + F_{uu} \eta^2 \right] dx.$$

В простейшем случае, когда функция F достаточно гладкая и выполнено условие (1.7), вариационная задача на определение стационарных точек функционала (1.1) при условии (1.2) и краевая задача (1.4), (1.2) имеют единственное общее решение $u(x)$ и это решение реализует абсолютный минимум функционала. Действительно, для любого решения $u(x)$ этих задач и любой допустимой вариации $\eta \not\equiv 0$ первая вариация $\delta I(u;\eta)=0$, а $\delta^2 I(u;\eta)>0$, и потому в силу (1.8)

$$I(u+\eta)>I(u). \tag{1.9}$$

Но это неравенство и означает, что $u(x)$ реализует абсолютный минимум $I(u)$ и единственно. Ввиду этого все обсуждаемые здесь задачи эквивалентны друг другу, если выполнено условие (1.7) и если F — достаточно гладкая функция. Если $F(x, u, p)$ не зависит от u, то условие (1.7) совпадает с условием (1.6). Именно этот случай был предметом исследований С. Н. Бернштейна (см. [4_2]) по двумерной вариационной задаче, которую он исследовал как краевую задачу для уравнения (1.4) с очень гладкой функцией F. К нему же относятся и исследования Де Джорджи [**11_1**] по многомерной вариационной задаче. Де Джорджи доказал классическую разрешимость вариационных задач (1.1), (1.2) или, что то же, задачи (1.4), (1.2) для функционалов (1.1) с достаточно гладкой F, зависящей только от p, причем такой, что

$$\nu\xi^2 \leqslant F_{p_ip_j}(p)\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \mu,\ \nu=\text{const}>0.$$

В общем случае, когда выполнено лишь соотношение (1.6) или (1.5), нельзя утверждать, что вариационная задача на определение $\inf I(u)$ и задача (1.4), (1.2) эквивалентны. Связь между задачей (1.4), (1.2) и задачей на определение стационарных точек для I нами уже понята: решения второй задачи суть обобщенные решения первой из того класса $\mathfrak{M}$, которому принадлежат функции сравнения, и наоборот. К задаче же на минимум они имеют следующее отношение: если $u(x)$ есть обобщенное решение задачи (1.4), (1.2) с $\max\limits_{\Omega}|u(x), \nabla u(x)|<\infty$ и $F(x, u, p)$ дважды непрерывно дифференцируема по u и p, то для локальных вариаций $\eta(x)$ с такими же, как у u, свойствами справедливо (1.9). Действительно, если $\eta(x)$ отлична от нуля лишь в области $\Omega_1 \subset \Omega$ достаточно малой меры, то, имея в виду неравенство (2.14) гл. II, получим

$$\delta^2 I(u+\theta\eta;\ \eta) \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_1}\left(\nu|\nabla\eta|^2 - 2c\sum_{i=1}^{n}|\eta_{x_i}\eta| - c\eta^2\right)dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_1}\left(\nu|\nabla\eta|^2 - \frac{\nu}{2}|\nabla\eta|^2 - \frac{2}{\nu}c^2n\eta^2 - c\eta^2\right)dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{\nu}{2} - \left(\frac{2c^2n}{\nu}+c\right)c_0^2\,\text{mes}^{2/n}\,\Omega_1\right]\int\limits_{\Omega_1}|\nabla\eta|^2dx > 0,$$

а потому и $I(u+\eta) > I(u)$. Из последнего неравенства следует, что задача (1.4), (1.2) в области Ω_1 имеет не более одного решения указанного класса. (Для нелокальных вариаций неравенство $I(u+\eta) > I(u)$ может не иметь места даже для гладких решений задачи (1.4), (1.2).) Однако если относительно обобщенного решения $u(x)$ задачи (1.4), (1.2) нам известна, например, лишь принадлежность его к $W_m^1(\Omega)$ и неизвестна конечность $\max\limits_{\Omega}|u, \nabla u|$, то вышеприведенное рассуждение о положительности $\delta^2 I(u+\theta\eta;\ \eta)$ падает, и вопрос о том, дает ли $u(x)$ «локальный» минимум $I(u)$, требует специального изучения даже для аналитических $F(x, u, p)$. С ним непосредственно связан вопрос о единственности обобщенного решения задачи (1.4), (1.2) и вариационной задачи на минимум для (1.1) в областях достаточно малой меры. Прежде всего, положительное решение его упиралось в доказательство правильности замены классической постановки вариационных задач обобщенной. Для случая $n=2$ и второго порядка роста $F(x, u, p)$ по p он был решен Ч. Морри в конце 30-х годов (см. [**39**$_{1,2}$]), для общего случая — авторами книги в конце 50-х годов ([$21_{12,13}$], см. также [21_{15}] и [**39**$_{4,5,6}$]). В §§ 3—5 показывается, что для обобщенных решений из $W_m^1(\Omega)$ вариационных задач действительно сохраняются свойства их классических решений: единственность «в малом» и неравенство (1.9) для малых локальных вариаций η.

Уравнение (1.4) является частным случаем уравнений с дивергентной главной частью, рассмотренных нами в гл. IV. Если функция $F(x, u, p)$ удовлетворяет лишь некоторым естественным условиям, то для уравнений (1.4) справедливы все утверждения, доказанные в гл. IV. Эти условия, грубо говоря, выражают выпуклость $F(x, u, p)$ по p, ограниченность снизу функционала $I(u)$ и полиномиальное поведение F и ее частных производных при больших $|u|$ и $|p|$, в том числе наличие мажоранты *)

$$|F(x, u, p)| \leqslant \begin{cases} \mu_1(|p|^m + |u|^{\tilde m}) + \psi(x), & 1 < m \leqslant n, \\ \mu(|u|)(|p|^m + \psi(x)), & m > n, \end{cases} \tag{1.10}$$

где $\psi(x)$ — какая-либо функция из $L_1(\Omega)$, $\mu_1=\mathrm{const}$, $\mu(\tau)$ — какая-либо неубывающая непрерывная функция $\tau \geqslant 0$, а $\tilde m = \bar m \equiv nm/(n-m)$ при $m<n$ и $\tilde m$ — произвольное число при $m=n$. Ниже они будут сформулированы более детально и дифферен-

*) Ради несущественных упрощений изложения будем предполагать в данной главе, что для области Ω имеет место совпадение $\overset{*}{W}{}_m^1(\Omega)$ с $W_m^1(\Omega)$ (см. стр. 28). В противном случае надо предполагать, что для $\varphi(s)$ есть продолжение $\varphi(x) \in \overset{*}{W}{}_m^1(\Omega)$, и от всех функций сравнения $u(x)$ требовать: $u-\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$.

цированно в соответствии с тем, какие будут устанавливаться свойства обобщенных решений. Благодаря мажоранте (1.10) функционал (1.1) имеет конечное значение на любой функции u из $W_m^1(\Omega)$ и для него наиболее естественным и широким классом $\mathfrak{M}$ функций сравнения в вариационной задаче (1.1), (1.2) является множество всех элементов $W_m^1(\Omega)$, равных на S функции $\varphi(s)$ из (1.2).

Теоремы § 10 гл. IV дают достаточные условия разрешимости задачи (1.4), (1.2) в классах гладких функций. Теоремы § 9 гл. IV дают для нее существование обобщенных решений из $W_{m,q}^1 \equiv W_m^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)$. Исследованиям, изложенным в § 9 гл. IV и выполненным в 60-е годы, предшествовали (и в существенном способствовали их получению) так называемые прямые методы вариационного исчисления. Эти методы позволяют найти решение задачи на абсолютный минимум функционала (1.1), минуя уравнение (1.4). Свое начало они ведут от знаменитой работы Д. Гильберта 1900 г., в которой впервые дается строго математическое обоснование идеи Римана находить решение задачи $\Delta u = 0$, $u|_S = \varphi(s)$ как функцию, на которой интеграл Дирихле $I(u) = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx$ принимает наименьшее значение (в качестве функций сравнения выбирались гладкие функции, равные $\varphi(x)$ на S). Эта работа Гильберта явилась отправной точкой для многих исследований нашего века и способствовала как успешному решению ряда важнейших задач вариационного исчисления и теории краевых задач, так и возникновению и изучению таких кардинальных понятий и предложений классического и функционального анализа, как обобщенные производные, пространства $W_m^l(\Omega)$, сильные и слабые предельные переходы, критерии слабой и сильной компактности в $W_m^l(\Omega)$ и пр. Мы не будем излагать здесь историю создания и развития прямых методов вариационного исчисления. (Некоторое представление об этом дает введение; более подробное освещение дано в [**39**$_{2,6}$], [28$_1$], [26$_2$] и др.) Более того, эта небольшая глава не претендует и на полноту изложения этого обширного материала, который накопился по вариационным задачам для функционалов (1.1) примерно за 70 лет. Наша цель — показать, во-первых, как при наличии теории пространств $W_m^1(\Omega)$ сравнительно просто, «в лоб», решается задача на определение функции $u(x)$, реализующей $\inf\limits_{\mathfrak{M}} I(u)$, и как устанавливается затем, что гладкость этой функции определяется не гладкостью всех допустимых функций сравнения (они суть любые функции из $W_m^1(\Omega)$, удовлетворяющие условию (1.2)), а функцией $F(x, u, p)$.

Попутно устанавливается, что локальное варьирование $I(u)$ приводит к увеличению значения I. Зависимость гладкости $u(x)$ только от свойств функции F доказывается для всех стационарных точек функционала I. Эти освещаемые в данной главе результаты являются положительным ответом на предположения, высказанные Д. Гильбертом в 19-й и 20-й проблемах.

Результаты о существовании по крайней мере одного обобщенного решения задачи на минимум для функционалов (1.1) при любых m и n в своей основной части были получены к концу 30-х годов Ч. Морри. Им предшествовали исследования других авторов, из которых отметим работы А. Лебега [**31**], Р. Куранта [**10_2**] и Л. Тонелли [**53**]. Мы излагаем эти результаты в § 2, следуя при доказательстве теоремы 2.1 рассуждениям автора заметки [17], выполненной по идеям руководителя А. Г. Сигалова. В остальных параграфах излагаются результаты, полученные нами в конце 50-х годов. Они касаются гладкости обобщенных решений. Этому же вопросу посвящены работы [**$39_{4,\,5}$**] Ч. Морри.

Сделаем ряд замечаний в связи с излагаемым в этой главе материалом. В качестве допустимого множества $\mathfrak{M}$ при определении $\inf I(u)$ мы взяли в § 2 совокупность всех элементов из $W_m^1(\Omega)$, удовлетворяющих граничному условию (1.2). Из этого же класса рассматриваются и стационарные точки функционала $I(u)$.

Можно было бы элементы $\mathfrak{M}$ подчинить каким-либо дополнительным ограничениям, например считать их элементами $W_{m,\,q}^1$ с $q > \bar{m}$ при $m < n$. Все доказанное ниже в гл. V справедливо, разумеется, и для такого $\mathfrak{M}$. Более того, при этом можно несколько ослабить предположения типа (1.10) на рост $F(x, u, p)$ по u аналогично тому, как это было описано в §§ 7 и 9 гл. IV. На элементы $\mathfrak{M}$ можно наложить ограничения иного типа, а именно:

$$f_1(x) \leqslant u(x), \quad x \in \Omega_1 \subset \Omega; \quad u(x) \leqslant f_2(x), \quad x \in \Omega_2 \subset \Omega, \quad (1.11)$$

где $f_i(x)$ — заданные функции. Доказательство существования функции $u(x)$, реализующей $\inf I(u)$, данное в § 2, сохраняется и для этого случая. Справедливы также утверждения §§ 3 и 4 об ограниченности и гёльдеровости $u(x)$ (для последнего требуется небольшая гладкость $f_i(x)$), несмотря на то, что первая вариация $\delta I(u;\ \eta)$ при таком выборе $\mathfrak{M}$, вообще говоря, не равна нулю, а удовлетворяет лишь неравенству $\delta I(u;\ \eta) \geqslant 0$. Однако этого достаточно, чтобы доказать ограниченность и гёльдеровость $u(x)$, используя методы и аппарат, содержащиеся в данной книге. Мы иллюстрируем это на типичном случае условной вариационной задачи, в которой $f_i(x) = \mathrm{const}$. В связи с условной задачей общего вида (1.11) укажем на интересную работу [**33_3**], в которой проводится дальнейший анализ гладкости ее обобщенных решений.

Заметим, наконец, что многое из излагаемого в данной главе применимо к другим краевым условиям (например, естественным) и к другим вариационным задачам (например, изопериметрическим).

§ 2. Нахождение функций, на которых функционал $I(u)$ принимает наименьшее значение

Пусть функция $F(x, u, p)$ непрерывна вместе со своими частными производными F_u и F_{p_i} на множестве $\{(x, u, p): x \in \bar{\Omega}, u \in (-\infty, \infty), p \in E_n\}$, и пусть для нее выполнено более слабое, чем (1.5), условие квазирегулярности вариационной задачи:

$$E(x, u, p, \bar{p}) \geqslant 0 \tag{2.1}$$

при $x \in \bar{\Omega}$ и любых u, p, $\bar{p}$. Кроме того, предположим, что

$$F(x, u, p) \geqslant 0 \tag{2.2}$$

и

$$I(u) \equiv \int_{\Omega} F(x, u, u_x)\, dx \geqslant f\left(\| u \|^{(1)}_{m, \Omega}\right) - \mu, \qquad m > 1, \tag{2.3}$$

где $f(\tau)$ — непрерывная функция τ, стремящаяся к ∞ при $\tau \to \infty$. Неравенство (2.3) должно выполняться для любой функции $u(x)$, принадлежащей классу $\mathfrak{M}$, состоящему из всех элементов $\overset{1}{W}_m(\Omega)$, принимающих на S значения $\varphi(s)$. Предположим, наконец, что существует по крайней мере одна функция $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$, на которой $I(\varphi) < \infty$. Тогда справедлива

Теорема 2.1. *При выполнении только что сформулированных условий существует по крайней мере одна функция $u(x)$ из $\overset{1}{W}_m(\Omega)$, равная $\varphi(s)$ на S, дающая функционалу $I(u)$ значение, не превосходящее значения I на любой другой функции класса $\mathfrak{M}$.*

Заметим, что если функция $F(x, u, p)$ вместо (2.2) удовлетворяет условию $F(x, u, p) \geqslant \psi(x)$, $\psi \in L_1(\Omega)$, то этот случай просто сводится к предыдущему. А именно, вместо $I(u)$ надо рассмотреть функционал $\tilde{I}(u) = \int_{\Omega} [F(x, u, u_x) - \psi(x)]\, dx$, который имеет те же экстремали, что и $I(u)$.

Для доказательства теоремы 2.1 рассмотрим $I(u)$ на тех функциях из $\mathfrak{M}$, на которых он конечен. В силу условий теоремы множество это не пусто и нижняя грань d значений $I(u)$ на этом множестве конечна и неотрицательна.

Возьмем какую-нибудь минимизирующую последовательность $u_1, u_2, \ldots$, т. е. последовательность функций из $\mathfrak{M}$, для которой $I(u_k) = d_k \to d$ при $k \to \infty$. Для них в силу (2.3) равномерно ограничены нормы в $W_m^1(\Omega)$:

$$\| u_k \|_{m,\,\Omega}^{(1)} \leqslant \mathrm{const}. \tag{2.4}$$

Выберем из $\{u_k\}$ подпоследовательность, которая сходится почти всюду в Ω, сильно в $L_m(\Omega)$, а также слабо в $W_m^1(\Omega)$ к некоторой функции $u(x)$. Это возможно ввиду (2.4). Предельная функция $u(x)$ также будет принадлежать классу $\mathfrak{M}$. Сохраним за подпоследовательностью то же обозначение $\{u_k\}$. Докажем, что $I(u) = \inf\limits_{\mathfrak{M}} I(v) = d$. По теореме Д. Ф. Егорова по любому $\varepsilon > 0$ можно выбрать множество $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, мера которого отличается от меры всего Ω не более чем на ε и такое, что на нем последовательность $\{u_k\}$ сходится к функции u равномерно. Далее, обозначим через Ω_N множество точек области Ω, на котором $|u| + |\nabla u| < N$. Так как $u \in W_m^1(\Omega)$, то $\mathrm{mes}(\Omega \setminus \Omega_N) \to 0$ при $N \to \infty$. Обозначим: $\Omega_\varepsilon \cap \Omega_N = \Omega_{\varepsilon,\,N}$. Из сказанного ясно, что

$$\mathrm{mes}(\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon,\,N}) \xrightarrow[N \to \infty]{\varepsilon \to 0} 0.$$

В силу условия выпуклости (2.1) будем иметь

$$\begin{aligned} R_k = \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,\,N}} [F(x, u_k, u_{kx}) - F(x, u, u_x)]\, dx \geqslant \\ \geqslant \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,\,N}} F_{u_{x_i}}(x, u_k, u_x)(u_k - u)_{x_i}\, dx + \\ + \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,\,N}} [F(x, u_k, u_x) - F(x, u, u_x)]\, dx. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Оба интеграла, стоящих справа, стремятся к нулю при $k \to \infty$, ибо функции $F_{u_{x_i}}(x, u_k, u_x)$ и $F(x, u_k, u_x)$ сходятся равномерно на $\Omega_{\varepsilon,\,N}$ к $F_{u_{x_i}}(x, u, u_x)$ и $F(x, u, u_x)$ соответственно, а функции u_{kx_i} сходятся слабо в $L_m(\Omega)$ к u_{x_i}. Поэтому

$$\varliminf_{k \to \infty} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,\,N}} F(x, u_k, u_{kx})\, dx \geqslant \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,\,N}} F(x, u, u_x)\, dx.$$

Интеграл, стоящий слева, ввиду неотрицательности F не превосходит d_k, так что $\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,\,N}} F(x, u, u_x)\, dx \leqslant d$. Так как ε и N

произвольны, то и $I(u) \leqslant d$. Но $d = \inf\limits_{v \in \mathfrak{M}} I(v)$, поэтому $I(u) = d$. Теорема доказана.

Условие (2.2) можно заменить другим условием, а именно: пусть при $m \leqslant n$

$$|F(x, u, p)| \leqslant \mu_1[|p|^m + |u|^{\hat{m}}] + \psi_1(x), \tag{2.6}$$

$$|F_{p_i}(x, u, p)| \leqslant \mu_2[|p|^{m-1} + |u|^{\hat{m}/m'}] + \psi_2(x), \tag{2.7}$$

где $\mu_i = \mathrm{const}$, $\hat{m} < \tilde{m}$, $m' = m/(m-1)$, $\psi_1 \in L_1(\Omega)$, $\psi_2 \in L_{m'}(\Omega)$, а при $m > n$

$$|F(x, u, p)| \leqslant \mu(|u|)[|p|^m + \psi_1(x)], \tag{2.8}$$

$$|F_{p_i}(x, u, p)| \leqslant \mu(|u|)[|p|^{m-1} + \psi_2(x)], \tag{2.9}$$

где $\mu(\tau)$, — как всюду, неубывающая непрерывная положительная функция $\tau \geqslant 0$, $\psi_1(x) \in L_1(\Omega)$, а $\psi_2 \in L_{m'}(\Omega)$. Покажем, что при такой замене условия (2.2) утверждение теоремы 2.1 остается в силе. Начало доказательства то же. Однако из оценки (2.4) извлечем бо́льшие следствия о $\{u_k\}$, чем раньше. А именно, u_k сходятся к u сильно в $L_{\hat{m}}(\Omega)$ при $m \leqslant n$ и равномерно при $m > n$ (здесь и ниже, имея компактную последовательность, надо выбирать из нее сходящуюся; будем считать, что такой выбор каждый раз подразумевается, но явно не указывается). В силу условий (2.6) или (2.8) соответственно интеграл $I(u)$ на предельной функции $u(x)$ существует и конечен. Неравенство вида (2.5) справедливо и для интегралов, распространенных на всю область Ω. Обозначим такое неравенство номером (2.5′). Функции $F_{u_{x_i}}(x, u_k, u_x)$ сходятся сильно в $L_{m'}(\Omega)$ к $F_{u_{x_i}}(x, u, u_x)$ (действительно, сходимость почти всюду имеет место; кроме того, интегралы от $\left|F_{u_{x_i}}(x, u_k, u_x)\right|^{m'}$ по множествам малой меры равномерно малы; это легко выводится из предположений (2.7) и (2.9) соответственно). Производные же u_{kx_i} сходятся к u_{x_i} слабо в $L_m(\Omega)$. Ввиду этого первый интеграл правой части (2.5′) стремится к нулю. Сходимость $F(x, u_k, u_x)$ к $F(x, u, u_x)$ почти всюду и равномерная малость интегралов от $|F(x, u_k, u_x)|$ и $|F(x, u, u_x)|$ по множествам малой меры, гарантируемая условиями (2.6) и (2.8) соответственно, обеспечивают сходимость к нулю и второго интеграла правой части (2.5′). Ну, а тогда из неравенства (2.5′) будет следовать, что $I(u) \leqslant \varliminf\limits_{k \to \infty} I(u_k) = d$, и потому $I(u) = d$. Итак, доказана

Теорема 2.2. *Утверждение теоремы* 2.1 *остается в силе, если ее условие* (2.2) *заменить условиями* (2.6), (2.7) *при* $m \leqslant n$ *и условиями* (2.8), (2.9) *при* $m > n$.

Заметим, что условия теоремы 2.2 гарантируют конечность $I(u)$ на любой функции $u(x)$ класса $\mathfrak{M}$.

Аналогично теоремам 2.1 и 2.2 доказывается следующая теорема для условной вариационной задачи:

Теорема 2.3. *Пусть N — какое-либо фиксированное число, и пусть при $|u| \leqslant N$ выполнены все условия теоремы* 2.1 *или неравенства* (2.8), (2.9) *теоремы* 2.2. *Тогда существует по крайней мере одна функция $u(x) \in \mathfrak{M}$, непревосходящая по модулю N, на которой $I(u)$ принимает свое наименьшее значение по сравнению со всеми остальными функциями $v(x)$ из $\mathfrak{M}$ с* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} |v| \leqslant N$.

Функции, существование которых гарантировано теоремами 2.1 — 2.3, назовем *обобщенными решениями из класса* $W_m^1(\Omega)$ или, короче, просто *обобщенными решениями соответствующих вариационных задач* (*на минимум*).

Будем теперь предполагать, что функционал $I(u)$ ограничен на любой функции u из $\mathfrak{M}$, точнее, будем считать, что для $F(x, u, p)$ справедливы неравенства

$$|F(x, u, p)| \leqslant \begin{cases} \mu[|p|^m + |u|^{\tilde{m}} + \psi_0(x)], & 1 < m \leqslant n, \qquad (2.10_1) \\ \mu(|u|)[|p|^m + \psi_0(x)], & m > n, \qquad (2.10_2) \end{cases}$$

где $\psi_0 \in L_1(\Omega)$, $\tilde{m} = \bar{m}$ для $m < n$ и $\tilde{m}$ — какое-либо число (как и всюду, не меньшее m) при $m = n$.

Покажем, что при некоторых ограничениях на F первая вариация функционала обращается в нуль на обобщенных решениях задачи на минимум для $I(u)$. Ограничения эти следующие: при $1 < m \leqslant n$

$$\left.\begin{aligned} &|F_u(x, u, p)| \leqslant \mu[\psi_1(x) + |u|^{\tilde{m}-1} + |p|^{m/\tilde{m}'}], \\ &|F_{p_i}(x, u, p)| \leqslant \mu[\psi_2(x) + |u|^{\tilde{m}/m'} + |p|^{m-1}]; \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

при $m > n$

$$\left.\begin{aligned} &|F_u(x, u, p)| \leqslant \mu(|u|)[\psi_3(x) + |p|^m], \\ &|F_{p_i}(x, u, p)| \leqslant \mu(|u|)[\psi_2(x) + |p|^{m-1}]. \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Здесь функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и $\psi_3(x)$ принадлежат пространствам $L_{\tilde{m}'}(\Omega)$, $L_{m'}(\Omega)$ и $L_1(\Omega)$ соответственно, а $\tilde{m}$ то же, что в (2.10_1).

Пусть $\eta(x)$ есть произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$, а $u(x)$ есть одна из тех функций класса $\mathfrak{M}$, на которых $I(u) = d =$

$=\inf\limits_{v\in\mathfrak{M}} I(v)$. Тогда $I(u+t\eta)\geqslant I(u)$ при всех t. Формально вычисленная производная $\frac{dI(u+t\eta)}{dt}$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}I(u+t\eta)=$$
$$=\int\limits_{\Omega}\left[F_{u_{x_i}}(x,\ u+t\eta,\ u_x+t\eta_x)\,\eta_{x_i}+F_u(\ldots)\,\eta\right]dx. \tag{2.13}$$

В силу предположений (2.11), (2.12) каждое слагаемое под знаком интеграла существует и оценивается сверху равномерно по $t\in[-1,\ 1]$ через функции, суммируемые по Ω. В самом деле, при $1<m\leqslant n$

$$|F_{u_{x_i}}\eta_{x_i}|\leqslant\frac{m-1}{m}\left|F_{u_{x_i}}\right|^{n'}+\frac{1}{m}\left|\eta_{x_i}\right|^m\leqslant$$
$$\leqslant c\left[|\psi_2|^{m'}+|u|^{\tilde m}+|\eta|^{\tilde m}+|\nabla u|^m+|\nabla\eta|^m\right],$$
$$|F_u\eta|\leqslant\frac{\tilde m-1}{\tilde m}|F_u|^{\tilde m'}+\frac{1}{\tilde m}|\eta|^{\tilde m}\leqslant$$
$$\leqslant c\left[|\psi_1|^{\tilde m'}+|u|^{\tilde m}+|\eta|^{\tilde m}+|\nabla u|^m+|\nabla\eta|^m\right],$$

а при $m>n$

$$\left|F_{u_{x_i}}\eta_{x_i}\right|\leqslant c\left[\mu^{m'}(\max_{\Omega,\,t}|u+t\eta|)\left(|\psi_2|^{n'}+|\nabla u|^m+|\nabla\eta|^m\right)+|\nabla\eta|^m\right],$$
$$|F_u\eta|\leqslant\max_{\Omega}|\eta|\,\mu\,(\max_{\Omega,\,t}|u+t\eta|)\,(|\psi_3|+|\nabla u|^m+|\nabla\eta|^m).$$

Из этих неравенств следуют соответствующие оценки для разностных отношений $\frac{1}{\Delta t}[F(x,\ u+(t+\Delta t)\eta,\ u_x+(t+\Delta t)\eta_x)-F(x,\ u+t\eta,\ u_x+t\eta_x)]$, которые для почти всех x сходятся при $\Delta t\to 0$ к подынтегральным выражениям в (2.13). Поэтому производная $\frac{d}{dt}I(u+t\eta)$ действительно существует и равна интегралу (2.13). Так как при $t=0$ функция $I(u+t\eta)$ принимает свое наименьшее значение, то в этой точке ее производная по t равна нулю, т. е.

$$\delta I(u;\ \eta)\equiv\int\limits_{\Omega}\left[F_{u_{x_i}}(x,\ u,\ u_x)\,\eta_{x_i}+F_u(x,\ u,\ u_x)\,\eta\right]dx=0. \tag{2.14}$$

Итак, доказана

Теорема 2.4. *Пусть функция $u(x)$ доставляет функционалу $I(u)$ минимум в классе $\mathfrak{M}$. Тогда для нее выполняется тождество* (2.14) *при любой $\eta(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$, если функция F удовлетворяет условиям* (2.10$_1$) *и* (2.11) *для случая $1<m\leqslant n$ и* (2.10$_2$), (2.12) *для случая $m>n$.*

В соответствии с определениями гл. III и IV назовем функцию $u(x)$ из $W_m^1(\Omega)$ *обобщенным решением уравнения Эйлера* (1.4), если она удовлетворяет тождеству (2.14) при любой функции $\eta(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$.

Замечание 2.1. Утверждения теоремы 2.4 остаются справедливыми, если относительно $u(x)$ известно, что она дает минимум $I(u)$ лишь при гладких малых локальных вариациях $\eta(x)$. В самом деле, для таких $\eta(x)$ (2.14) будет справедливо. Но тогда оно будет справедливо и для любой $\eta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$, ибо $\delta I(u;\ \eta)$ линейна по $\eta(x)$ и любой элемент $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ можно приблизить в норме $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ суммами вида $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k\eta_k(x)$, где $\eta_k(x)$ — гладкие функции с малым носителем и малым $\max\limits_{\Omega}|\eta_k(x),\ \nabla\eta_k(x)|$.

Замечание 2.2. Если при $m < n$ вместо (2.3) выполняется условие

$$I(u) \geqslant f(\|\nabla u\|_{m,\Omega};\ \|u\|_{q,\Omega}) - \mu, \tag{2,3'}$$

где $f(\tau,\ \xi)$ — непрерывная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $\tau^2+\xi^2 \to \infty$, а $q > \tilde{m}$, то естественно от класса $\mathfrak{M}$ функций сравнения потребовать дополнительно, чтобы они принадлежали $L_q(\Omega)$. Теоремы 2.1—2.4 остаются справедливыми и при таком выборе $\mathfrak{M}$. Больше того, условия (2.6), (2.7) и (2.10$_1$), (2.11) при этом могут быть ослаблены: показатель $\hat{m}$ в них можно заменить на $\forall\hat{q} < q$, а $\tilde{m}$ на q.

Теоремы § 9 гл. IV дают достаточные условия существования обобщенных решений из $W_{m,q}^1$ задачи (1.2), (1.4). Мы не будем приводить здесь результаты, вытекающие из этих теорем, применительно к уравнению (1.4), ибо никаких существенных упрощений в формулировке их условий при этом не получается.

Бо́льшая часть доказываемых ниже утверждений будет относиться к обобщенным решениям уравнений Эйлера, а не только к обобщенным решениям вариационной задачи на минимум, и основным соотношением, из которого мы извлечем все последующие свойства этих решений, будет соотношение (2.14). Только в § 3 две теоремы об оценках максимума модуля $u(x)$ будут относиться лишь к обобщенным решениям вариационной задачи на минимум.

Выясним, чем следует заменить соотношение (2.14) в случае условной вариационной задачи. Пусть $u(x)$ есть решение условной вариационной задачи. Возьмем лишь такие вариации $\eta(x)$, которые допустимы вместе с $t\eta(x)$, $t \in [0,\ 1]$. Для них

$$I(u+t\eta) \geqslant I(u).$$

Предполагая, что F при $m > 1$ удовлетворяет условиям (2.10$_2$) и (2.12), из последнего неравенства находим, что

$$\delta I(u;\ \eta) = \int\limits_{\Omega} \left[F_{u_{x_i}}(x,\ u,\ u_x)\,\eta_{x_i} + F_u(x,\ u,\ u_x)\,\eta\right] dx \geqslant 0. \quad (2.15)$$

Сформулируем это предложение в виде отдельной теоремы.

Теорема 2.5. *Пусть функция $u(x)$ есть обобщенное решение условной вариационной задачи. Тогда для нее выполняется неравенство* (2.15) *при любой $\eta(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$, удовлетворяющей неравенствам $-N \leqslant u(x) + t\eta(x) \leqslant N$, $t \in [0,\ 1]$, если только для $F(x,\ u,\ p)$ при $x \in \Omega$, $|u| \leqslant N$ и произвольном p справедливы неравенства* (2.10$_2$) *и* (2.12).

§ 3. Об оценке максимума модуля решений вариационных задач*)

В § 7 гл. IV доказаны теоремы, гарантирующие ограниченность обобщенных решений из $W^1_{m,q}$ задачи Дирихле для уравнений, включающих в себя уравнения (1.4). Они, очевидно, применимы к решениям вариационных задач, рассмотренных в § 2. Мы не будем их здесь повторять, а приведем две теоремы о решениях вариационной задачи на минимум. Близкие предложения доказывались А. Г. Сигаловым для решений двумерных вариационных задач ([28$_{1,2}$]).

Теорема 3.1. *Предположим, что $u(x)$ реализует абсолютный минимум функционала $I(u)$ в классе $\mathfrak{M}$ и* $\operatorname{vrai\,max}_{S} |\varphi| \leqslant M_0$. *Пусть функция $F(x,\ u,\ p)$ при $|u| \geqslant M_0$ удовлетворяет неравенствам*

$$\left.\begin{aligned} &F(x,\ u,\ p) \geqslant \nu |p|^m - \mu |u|^\alpha - |u|^m \psi(x), \\ &F(x,\ u,\ 0) \leqslant \mu |u|^\alpha + |u|^m \psi(x), \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

где $m \leqslant n$, $\nu > 0$, $\mu \geqslant 0$, $\alpha \in (m,\ \bar{m} = nm/(n-m))$, $\psi \in L_{q_1}(\Omega)$, $q_1 > n/m$. Тогда $\operatorname{vrai\,max}_{\Omega} |u(x)|$ *ограничен и оценивается постоянной, определяемой n, m, ν, μ, α, M_0, q_1, $\|\psi\|_{q_1,\Omega}$, $\|\nabla u\|_{m,\Omega}$ и* $\operatorname{mes}\Omega$.

Обозначим через A_k подмножество точек Ω, на котором $u(x) > k$, а через $u^k(x)$ — функцию, равную $u(x)$ на $\Omega \setminus A_k$ и k

---

*) В данном параграфе, так же как и в § 2, $\mathfrak{M}$ есть совокупность всех элементов $v(x)$ из $W^1_m(\Omega)$, совпадающих на S с $\varphi(x)$.

на A_k. При $k \geqslant M_0$ она входит в класс $\mathfrak{M}$ допустимых к сравнению функций, и так как $u(x)$ дает $\inf I(u)$, то

$$\int\limits_{A_k} F(x,\ u,\ u_x)\,dx \leqslant \int\limits_{A_k} F(x,\ k,\ 0)\,dx.$$

В силу (3.1) отсюда следует неравенство

$$\nu \int\limits_{A_k} |\nabla u|^m\,dx - \int\limits_{A_k} (\mu |u|^\alpha + |u|^m \psi)\,dx \leqslant \int\limits_{A_k} (\mu k^\alpha + k^m \psi)\,dx, \tag{3.2}$$

совпадающее, по существу, с неравенством (7.7) § 7 гл. IV, из которого была получена там оценка сверху $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} u(x)$. Действительно, в данном случае $u \in W_m^1(\Omega)$, тогда как в теореме 7.1 гл. IV рассматривается более общая ситуация, когда $u \in W_{m,q}$. Если в теореме 7.1 считать $q = \tilde{m}$ (где $\tilde{m}$ — показатель вложения $W_m^1(\Omega)$ в $L_{\tilde{m}}(\Omega)$) и заметить, что $m\dfrac{n+q}{n}$ при $q = \tilde{m}$ равно $\tilde{m}$, то станет ясно, что условия на α доказываемой теоремы и теоремы 7.1 при $q = \tilde{m}$ совпадают и неравенство (3.2) того же типа, что и (7.7).

Благодаря этому выводы, сделанные в § 7 гл. IV из (7.7), справедливы и для (3.2). Они приводят к желаемой оценке сверху $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} u(x)$, если учесть, что в данном случае считается известной оценка $\|\nabla u\|_{m,\,\Omega}$ (а тем самым и $\|u\|_{\tilde{m},\,\Omega}$).

Оценка $u(x)$ снизу выводится точно так же, надо только вместо A_k брать множества $\hat{A}_k$ точек $x \in \Omega$, для которых $-u(x) > k$.

Теорема 3.2. *Пусть функция $F(x,\ u,\ p)$ обладает следующим свойством: существует число $k > 0$ такое, что при всех $x \in \Omega$, $u > k$ справедливы неравенства*

$$F(x,\ u,\ 0) \geqslant F(x,\ k,\ 0),$$
$$F(x,\ u,\ p) > F(x,\ k,\ 0), \quad \text{если} \quad |p| > 0,$$

а при $x \in \Omega$, $u < -k$ — неравенства

$$F(x,\ u,\ 0) \geqslant F(x,\ -k,\ 0),$$
$$F(x,\ u,\ p) > F(x,\ -k,\ 0), \quad \text{если} \quad |p| > 0.$$

Тогда, если $\operatorname{vrai}\max\limits_{S} |\varphi(s)| \leqslant k$ *и $u(x)$ реализует минимум функционала* (1.1) *на множестве $\mathfrak{M}$, то $\max\limits_{\Omega} |u(x)|$ не превосходит k.*

Действительно, в данном случае для каждой допустимой функции $v(x)$ с $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|v|>k$ имеется допустимая функция

$$\tilde{v}(x)=\begin{cases} k, & v(x)>k, \\ v(x), & |v(x)|\leqslant k, \\ -k, & v(x)<-k, \end{cases}$$

на которой

$$\int\limits_{|v|\leqslant k} F(x, \tilde{v}, \tilde{v}_x)\,dx = \int\limits_{|v|\leqslant k} F(x, v, v_x)\,dx,$$

$$\int\limits_{|v|>k} F(x, \tilde{v}, \tilde{v}_x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{v>k} F(x, k, 0)\,dx + \int\limits_{v<-k} F(x, -k, 0)\,dx < \int\limits_{|v|>k} F(x, v, v_x)\,dx,$$

и, следовательно, $I(\tilde{v})<I(v)$. Ввиду этого $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u|\leqslant k$.

Заметим, что условиям этой теоремы удовлетворяют, например, функции F вида

$$F(x, u, p)=F_1(x, p)+\varphi_1(x)|u|^{\alpha},$$

где $\nu|p|^m\leqslant F_1(x, p)\leqslant\mu|p|^m$, ν, $\mu>0$, $\varphi_1(x)$ — неотрицательная функция, $\alpha=\mathrm{const}\geqslant 0$.

§ 4. Доказательство гёльдеровости обобщенных решений

Начиная с этого параграфа, мы будем исследовать лишь обобщенные решения $u(x)$ уравнений Эйлера (и тем самым вариационной задачи (1.1), (1.2)) с $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u|<\infty$ и будем сокращенно обозначать их «ог. об. р.». Допустимые вариации $\eta(x)$ тоже будем брать лишь с $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\eta(x)|<\infty$. Ввиду этого при $1<m\leqslant n$ условия (2.10_1), (2.11) можно заменить на условия вида (2.10_2), (2.12) соответственно. Ради простоты изложения будем считать, что функции $\psi_i(x)$, $i=2, 3$, в (2.12) ограничены, т. е.

$$\sum_i\left|F_{p_i}(x, u, p)\right|(1+|p|)+|F_u(x, u, p)|\leqslant\mu(|u|)(1+|p|)^m. \tag{4.1}$$

В данном параграфе, кроме неравенств (4.1), мы будем предполагать выполненным неравенство

$$F_{p_i}(x, u, p)\,p_i\geqslant\nu(|u|)|p|^m-\mu(|u|), \qquad m>1, \tag{4.2}$$

где $\nu(t)$ — как всегда, положительная невозрастающая функция $t\geqslant 0$. Это неравенство накладывает ограничение на поведение F

лишь при больших $|p|$. Если бы функция $F(x, u, p)$ была представима при больших $|p|$ в виде суммы

$$F(x, u, p) = F_m(x, u, p) + F'(x, u, p), \tag{4.3}$$

где $F_m(x, u, p)$ есть положительно-однородная функция p степени $m > 1$, а $|p|^{-m}|F'(x, u, p)| + |p|^{-m+1}|F'_{p_i}(x, u, p)| \to 0$ при $|p| \to \infty$, то (4.2) было бы следствием условия $F(x, u, p) \geqslant \geqslant \nu_1(|u|)|p|^m$, где $\nu_1(\tau) > 0$ при $\tau \geqslant 0$. Из этих предположений следует, что при больших $|p|$

$$F_m(x, u, p) \geqslant \frac{1}{2}\nu_1(|u|)|p|^m,$$

а

$$F_{p_i}(x, u, p)\, p_i = F_{mp_i} p_i + F'_{p_i} p_i = mF_m + F'_{p_i} p_i, \tag{4.4}$$

и потому (4.2) имеет место.

Из представления (4.3) можно видеть, почему существенно условие $m > 1$. Предположим, что F_m и F' можно дифференцировать дважды и что

$$|p|^{-m+2}\left|F'_{p_i p_j}\right| \to 0 \quad \text{при} \quad |p| \to \infty.$$

Тогда

$$F_{p_i p_j}(x, u, p)\, p_i p_j = m(m-1) F_m + F'_{p_i p_j} p_i p_j,$$

и так как первый член имеет больший порядок роста по $|p|$, чем второй, то коэффициент $m(m-1)$ при нем должен быть положительным, если мы хотим заниматься равномерно эллиптическими задачами.

Кроме того, заметим, что неравенство (4.2) есть следствие (4.1) и условия эллиптичности уравнения Эйлера в форме

$$F_{p_i p_j}(x, u, p)\, \xi_i \xi_j \geqslant \nu(|u|)(1 + |p|)^{m-2}\xi^2 \tag{4.5}$$

при $m > 1$ (см. по этому поводу начало § 2 гл. IV). Такова связь условия (4.2) с условием регулярности задачи и полуограниченностью F (точнее, с предположением $F(x, u, p) \geqslant \geqslant \nu_1(|u|)|p|^m$, $\nu_1(\tau) > 0$ при $\tau \geqslant 0$), указывающая на его естественность.

В данном параграфе мы будем предполагать выполненными относительно F лишь неравенства (4.1) и (4.2).

В этом и следующих двух параграфах мы хотим доказать, что для F, удовлетворяющих этим «естественным» условиям, обобщенные решения уравнений Эйлера (и, следовательно, обобщенные решения вариационных задач) на самом деле лучше по своим дифференциальным свойствам, чем произвольные функции сравнения, т. е. функции из $W_m^1(\Omega)$. Первой теоремой такого типа является следующая:

Теорема 4.1. *Пусть функция F удовлетворяет неравенствам* (4.1) *и* (4.2). *Тогда любое ог. об. р.* $u(x)$ *уравнений Эйлера* (1.4) *принадлежит классу* $C^{\alpha}(\Omega)$ *с некоторым* $\alpha>0$, *определяемым лишь константами* m, $M=\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u|$, *а также* $\nu(M)$ *и* $\mu(M)$ *из* (4.1), (4.2). *Норма* $|u|_{\Omega'}^{(\alpha)}$, $\overline{\Omega}'\subset\Omega$, *зависит от тех же величин и расстояния от* Ω' *до границы* S. *Если граница* S *удовлетворяет условию* (A), *а граничная функция* $\varphi(s)$ *удовлетворяет условию Гёльдера* $|\varphi|_S^{(\beta)}<\infty$, *то* $u\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *и норма* $|u|_{\Omega}^{(\alpha)}$ *определяется величинами* m, M, $\nu(M)$ *и* $\mu(M)$ *из* (4.1), (4.2), β, $|\varphi|_S^{(\beta)}$ *и константами* θ_0 *и* a_0 *из условия* (A). *Показатель* α, *помимо прежних величин, зависит еще от* β *и* θ_0.

Эта теорема является частным случаем теоремы 1.1 из гл. IV.

Аналогичное утверждение имеет место для условной вариационной задачи. Точнее:

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1, *и пусть* $u(x)$ *есть функция из* $\mathfrak{M}$ *с* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u|\leqslant N$, *для которой*

$$\delta I(u;\ \eta)\geqslant 0 \tag{4.6}$$

при любой функции $\eta(x)$ *из* $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$, *удовлетворяющей неравенствам*

$$-N\leqslant u(x)+t\eta(x)\leqslant N \tag{4.7}$$

при всех t *из* $[0,1]$. *Тогда для нее верны все утверждения теоремы* 4.1.

Напомним, что обобщенные решения $u(x)$ условной вариационной задачи удовлетворяют всем требованиям этой теоремы и потому для них верны ее утверждения.

Доказательство теоремы 4.2 почти такое же, как доказательство теоремы 4.1 или, точнее, теоремы 1.1 гл. IV. Надо только при выборе вариации $\eta(x)$ следить за выполнением условия (4.7). Утверждения теоремы будут доказаны, если мы установим, что $u(x)\in\mathfrak{B}_m(\overline{\Omega},N,\gamma,\gamma_1,\delta,0)$. В качестве $\eta(x)$ возьмем функцию $\eta(x)=-\zeta^m(x)\max\{u(x)-k;\ 0\}$, где $\zeta(x)$ — срезающая функция для шара K_ρ, а k — произвольное число из промежутка $[-N,N]$, если $K_\rho\subset\Omega$, и k принадлежит $[-N,N]$ и удовлетворяет неравенству $k\geqslant\max\limits_{K_\rho\cap S}u(x)$, если K_ρ пересекает границу S

Это возможно, ибо значения

$$u(x)+t\eta(x)=\begin{cases}(1-t\zeta^m)\,u(x)+t\zeta^m k & \text{при}\quad u\geqslant k,\\ u(x) & \text{при}\quad u<k\end{cases}$$

при любом x заключены между k и $u(x)$, т. е. между $-N$ и N. Подставляя эту функцию в неравенство (4.6), получим нужную нам оценку интеграла $\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^m \zeta^m dx$. Это делается так же, как и в случае безусловной вариационной задачи. Аналогичные оценки для функции $-u(x)$ получим, беря в качестве $\eta(x)$ функции $\eta(x)=\zeta^m(x)\max\{-u(x)-k;\ 0\}$ с $k\in[-N, N]$ и $k > \max\limits_{K_\rho \cap S}(-u(x))$.

Таким образом доказывается, что $u(x)$ принадлежит $\mathfrak{B}_m(\overline{\Omega}, N, \gamma, \gamma_1, \delta, 0)$. Отсюда на основании теорем 6.1 и 7.1 гл. II следует справедливость всех утверждений теоремы 4.2.

§ 5. Теорема единственности в малом для обобщенных решений

Для рассматриваемых нами обобщенных решений вариационных задач справедлива теорема единственности, причем такого же типа, как и для классических решений, именно:

Теорема 5.1. *Пусть $F(x, u, p)$ удовлетворяет неравенствам*

$$\left.\begin{aligned} &\nu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2 \leqslant F_{p_ip_j}(x, u, p)\,\xi_i\xi_j \leqslant \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant \mu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2, \\ &\left(|F_{p_i}| + |F_{p_iu}|\right)(1+|p|) + |F_u| + |F_{uu}| \leqslant \mu(|u|)(1+|p|)^m, \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

и пусть u' и u'' являются ог. об. р. уравнения Эйлера (1.4). *Тогда, если они равны друг другу на поверхности шара $K_\rho \subset \Omega$, радиус которого достаточно мал (его величина определяется только числами $M=\max\limits_{\Omega}|u', u''|$, m, $\nu(M)$ и $\mu(M)$ из* (5.1) *и расстоянием от K_ρ до S), то они совпадают во всем шаре K_ρ.*

Если функции $a_i(x, u, p)=F_{p_i}(x, u, p)$ и $a(x, u, p)= =-F_u(x, u, p)$, образующие уравнение Эйлера (1.4), *удовлетворяют дополнительно условиям теоремы* 7.1 *гл.* IV *с $q=\tilde{m}$, то теорема единственности в малом имеет место в классе произвольных обобщенных решений и из $W_m^1(\Omega)$ уравнения* (1.4) *с ограниченным* $\operatorname{vrai}\max\limits_{S}|u|$. *Радиус шара при этом зависит от норм решений в $W_m^1(\Omega)$, их максимумов модулей на S и расстояния K_ρ до S. Аналогичное утверждение верно для обобщенных решений из $W_m^1(\Omega)$, реализующих абсолютный минимум $I(u)$, если для F выполнены помимо* (5.1) *условия теорем* 3.1 *или* 3.2.

Эта теорема является частным случаем теоремы 2.1 гл. IV для ог. об. решений и следствием этой теоремы и теорем 7.1 гл. IV и 3.1 — 3.2 данной главы для произвольных обобщенных решений из $\overset{\cdot}{W}{}^{1}_{m}(\Omega)$. Из теоремы 2.2 гл. IV, теоремы 7.1 гл. IV и теорем §§ 3, 4 данной главы следует совпадение возможных решений и в областях, прилегающих к S.

Заметим, что теорема 5.1, равно как и большая часть других теорем гл. IV и V, сформулирована не во всей возможной общности. Именно, в этих главах, желая сосредоточить внимание читателя на новом обстоятельстве — нелинейности задачи по u, мы предположили ради чисто формальных упрощений функции $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$, $F(x, u, p)$ и частные производные F ограниченными функциями x. Вместо этого можно было бы считать их суммируемыми по Ω с достаточно высокими степенями и работать с ними так же, как это сделано в гл. III. Это привело бы к доказательству того, что ог. об. решения $u(x)$ принадлежат не $\mathfrak{B}_m(\overline{\Omega}, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 0)$, а $\mathfrak{B}_m(\overline{\Omega}, M, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$ с $q>n$. Но непрерывность по Гёльдеру имеет место в обоих случаях, меняются только постоянные, что несущественно.

Указанные усиления нетрудно сделать с помощью изложенного здесь метода. Несколько иначе это сделано в гл. IX.

§ 6. Дальнейшее исследование дифференциальных свойств обобщенных решений

Поскольку обобщенные решения вариационной задачи (1.1), (1.2) являются обобщенными решениями уравнений Эйлера, а уравнения Эйлера являются частным случаем эллиптических уравнений с дивергентной главной частью, то для них справедливы все результаты гл. IV. Поэтому мы не будем формулировать применительно к вариационной задаче все эти результаты, а ограничимся формулировкой лишь одного из них, гарантирующего классичность ог. об. решений или, точнее, принадлежность их к классу $C^{l+\alpha}$, $l\geqslant 2$. Результат этот предельно точен в отношении требований гладкости $F(x, u, p)$. Именно, мы доказываем, что u принадлежат $C^{l+\alpha}$, $l\geqslant 2$, если $F(x, u, p)$ как функция своих аргументов принадлежат тоже $C^{l+\alpha}$. Из вида уравнения Эйлера $F_{u_{x_i}u_{x_j}}u_{x_ix_j}+F_{uu_{x_i}}u_{x_i}+F_{x_iu_{x_i}}-F_u=0$ ясно, что наши предположения о гладкости F минимальны.

Кроме условий гладкости, на F накладываются еще предположения о росте F и ее частных производных при $|p|\to\infty$. Как показывают примеры § 2 гл. I, эти ограничения также вызваны существом дела. Они имеют вид

$$\nu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2 \leqslant F_{p_i p_j}(x, u, p)\xi_i\xi_j \leqslant \leqslant \mu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2, \quad (6.1)$$

$$\big[|F_{p_i}(x, u, p)| + |F_{p_i u}(x, u, p)|\big](1+|p|) + |F_{p_i x_i}(x, u, p)| + + |F_u(x, u, p)| + |F_{uu}(x, u, p)| + + |F_{u x_i}(x, u, p)|(1+|p|)^{-1} \leqslant \mu(|u|)(1+|p|)^m, \quad (6.2)$$

причем $m > 1$.

Если бы функция $F(x, u, p)$ была, например, при больших $|p|$ полиномом по всем своим аргументам, m-однородным по p, то все неравенства (6.1), (6.2) вытекали бы лишь из двух требований: положительности $F(x, u, p)$ и ее выпуклости по p_k. Неравенство (6.1) выражает собою условие «равномерной эллиптичности» уравнения Эйлера. Ограничения (6.1), (6.2) называются «естественными».

Одним из следствий теоремы 6.4 гл. IV является следующее:

Теорема 6.1. *Пусть* $F(x, u, p)$ *принадлежит классу Гёльдера* $C^{l+\alpha}$ ($x \in \bar{\Omega}$, $|u| \leqslant M$, $|p| \leqslant M_1$), $l \geqslant 2$, $\alpha > 0$, *при любом* $M_1 < \infty$ *и удовлетворяет неравенствам* (6.1), (6.2) *с* $\nu = \nu(M)$, $\mu = \mu(M)$. *Тогда любое обобщенное решение* $u(x)$ *уравнения Эйлера с* $\operatorname{vrai}\max_{\Omega} |u| \leqslant M$ *будет принадлежать классу* $C^{l+\alpha}(\Omega)$.

Из этой теоремы и теоремы об аналитичности любого достаточно гладкого решения уравнения Эйлера (1.4) для функции $F(x, u, p)$, аналитически зависящей от своих аргументов (по поводу этого последнего предложения см. работы [$4_{1,2}$, 25_1, **$33_{1,2}$**, **39_4**]), следует

Теорема 6.2. *Если* $F(x, u, p)$ *есть аналитическая функция своих аргументов, удовлетворяющая неравенствам* (6.1), (6.2), *то любое ог. об. решение* $u(x)$ *уравнения Эйлера* (1.4) *для нее аналитически зависит от* x.

Если не предполагать заранее ограниченности $\operatorname{vrai}\max_{\Omega} |u|$ для об. решения $u(x)$ уравнения (1.4), то для справедливости утверждения теоремы 6.2 на $F(x, u, p)$ необходимо наложить дополнительные ограничения. Эти ограничения сформулированы в теоремах § 7 гл. IV и § 3 данной главы.

На этом мы заканчиваем исследование вариационной задачи (1.1), (1.2) для функций $F(x, u, p)$ общего вида. Доказанные здесь теоремы дают точную формулировку и решение 19-й и 20-й проблем Гильберта для достаточно широкого класса функций F (см. § 3 гл. I). Из них видно, грубо говоря, что вариационная задача на разыскание минимума $I(u)$ «всегда разрешима», если ее ставить в пространстве $W_m^1(\Omega)$, ее решения обладают, вообще говоря, лучшими дифференциальными свойствами, чем произвольные функции из $W_m^1(\Omega)$, и эти свойства полностью определяются функцией F. Условия на функцию $F(x, u, p)$, при которых эти утверждения доказаны, нельзя ослабить, если их формулировать в принятой нами форме и не ограничиваться какими-либо специальными классами функций F, областей Ω и граничных функций φ.

§ 7. Обобщенные решения квазирегулярных задач

Выше при исследовании проблемы существования, ограниченности и непрерывности по Гёльдеру обобщенных решений вариационной задачи (1.1), (1.2) мы не требовали, чтобы задача была регулярной. Напротив, для доказательства единственности в малом, ограниченности $\max|\nabla u|$ и оценок более сильных норм обобщенных решений существенно было условие (6.1) регулярности задачи или, что то же, равномерной эллиптичности соответствующего уравнения Эйлера. Покажем, что для некоторых классов нерегулярных функционалов обобщенные решения обладают непрерывными по Гёльдеру первыми производными.

Для простоты изложения мы ограничимся рассмотрением функционалов вида

$$I(u)=\int_\Omega F(u_x)\,dx \tag{7.1}$$

с $F(p)\in C^{2+\beta}(E_n)$, удовлетворяющей при $\forall p\in E_n$ неравенствам

$$\mu_0|p|^m\leqslant F(p)\leqslant \mu_1(1+|p|)^m,\qquad m>2,\quad \mu_0,\ \mu_1>0. \tag{7.2}$$

Вместо условия регулярности (6.1) наложим следующее требование:

$$\mu_2|p|^{m-2}\xi^2\leqslant F_{p_ip_j}(p)\,\xi_i\xi_j\leqslant \mu_3|p|^{m-2}\xi^2,\qquad \mu_2,\ \mu_3>0, \tag{7.3}$$

из которого следует, что функционал $I(u)$ квазирегулярен (см. условие (2.1)) и при $|u_x|=0$ происходит вырождение эллиптичности соответствующего уравнения Эйлера. Простейший пример такого рода дает функция $F=|p|^m$, $m>2$; для него $F_{p_ip_j}=|p|^{m-2}\left[\delta_i^j+(m-2)\frac{p_ip_j}{|p|^2}\right]$, так что неравенство (7.3) выполняется с $\mu_2=1$, $\mu_3=m-1$. Заметим, что, разделив уравнение Эйлера на $|u_x|^{m-2}$, можно получить равномерно эллиптическое уравнение, но оно теряет при этом дивергентную форму и коэффициенты его становятся разрывными по u_x при $|u_x|=0$.

Пусть $u(x)$ есть ограниченное решение из $W_m^1(\Omega)$ уравнения Эйлера для (7.1), т. е. $u(x)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\delta I(u, \eta) \equiv \int_\Omega F_{u_{x_i}}(u_x)\,\eta_{x_i}\,dx = 0, \qquad \forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega). \tag{7.4}$$

В силу результатов § 4 $u \in C^\delta(\Omega)$. Если было бы уже известно, что $u(x)$ имеет квадратично суммируемые по Ω производные второго порядка и $\operatorname{vrai}\max_\Omega |\nabla u| < \infty$, то, беря в (7.4) $\eta = \xi_{x_l}$, $l = 1, \ldots, n$, с произвольной, гладкой, финитной в Ω функцией $\xi(x)$ и производя интегрирование по частям, мы пришли бы к тождествам

$$\delta I\left(u, \xi_{x_l}\right) = -\int_\Omega F_{u_{x_i}u_{x_j}}(u_x)\,u_{x_l x_j}\xi_{x_i}\,dx = 0, \qquad l = 1, \ldots, n. \tag{7.5}$$

Очевидно, здесь допустима $\forall \xi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Таким образом, в этом случае вектор-функцию $\mathbf{u}_x = \left(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}\right)$ можно было бы рассматривать как ограниченное обобщенное решение из $W_2^1(\Omega)$ квазилинейной системы

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\mathbf{u}_x)\,\mathbf{u}_{xx_j}\right) = 0 \tag{7.6}$$

с коэффициентами $a_{ij}(p) = F_{p_i p_j}(p)$, удовлетворяющими условию (7.3). Такие и более общие вырождающиеся системы изучаются ниже, в § 6 гл. VIII. В частности, из теоремы 6.1 гл. VIII вытекает, что для $\forall \bar{\Omega}' \subset \Omega$ норма $|\mathbf{u}_x|_{\Omega'}^{(\alpha)}$ оценивается постоянной, зависящей от m, μ_2, μ_3, $\max_\Omega |\mathbf{u}_x|$ и расстояния Ω' до $\partial\Omega$, причем величина $\alpha > 0$ определяется лишь постоянными m и μ_3/μ_2. Чтобы исследовать произвольные ограниченные решения из $W_m^1(\Omega)$, докажем следующую лемму:

Лемма 7.1. *Обобщенное решение задачи* (7.1), (1.2) *единственно в классе* $W_m^1(\Omega)$.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два возможных решения, $u = u_1 - u_2$. В силу (7.4) при $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ имеем

$$0 = \sigma I(u_1, \eta) - \sigma I(u_2, \eta) = \int_\Omega \hat{a}_{ij}(x)\,u_{x_j}\eta_{x_i}\,dx, \tag{7.7}$$

где функции $\hat{a}_{ij}(x) = \int_0^1 F_{u_{x_i}u_{x_j}}(tu_{1x} + (1-t)\,u_{2x})\,dt$ подчиняются неравенствам

$$2^{-m-1}\mu_2\left(|\nabla u_1|^{m-2}+|\nabla u_2|^{m-2}\right)\xi^2\leqslant \hat{a}_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j\leqslant$$
$$\leqslant 2^{m-2}\mu_3\left(|\nabla u_1|^{m-2}+|\nabla u_2|^{m-2}\right)\xi^2,\qquad \forall\xi\in E_n. \tag{7.8}$$

Полагая в (7.7) $\eta=u$ и учитывая (7.8), приходим к неравенству $\int\limits_\Omega\left(|\nabla u_1|^{m-2}+|\nabla u_2|^{m-2}\right)|\nabla u|^2\,dx\leqslant 0$, из которого следует совпадение $u_1(x)$ с $u_2(x)$ почти всюду в Ω. Лемма доказана.

Фиксируем какой-либо шар $K_R\subset\Omega$ и в нем рассмотрим вспомогательные вариационные задачи на отыскание абсолютного минимума функционалов

$$I^\varepsilon(v)=\int\limits_{K_R}F^\varepsilon(v_x)\,dx,\quad F^\varepsilon(p)=\varepsilon\left(1+p^2\right)^{m/2}+F(p), \tag{7.9}$$

в классе $\mathfrak{M}_u=\{v(x)\colon v-u\in \overset{\circ}{W}{}^1_m(K_R)\}$. В силу результатов §§ 1 — 6 при каждом $\varepsilon\in(0,\mu_0]$ существует единственное решение $u^\varepsilon(x)$ такой задачи, причем $u^\varepsilon(x)$ принадлежит $C^{2+\beta}(K_R)\cap$ $\cap\, C^\delta(\bar{K}_R)$ и удовлетворяет тождеству

$$\delta I^\varepsilon(u^\varepsilon,\eta)=\int\limits_{K_R}F^\varepsilon_{u_{x_i}}(\mathbf{u}^\varepsilon_x)\,\eta_{x_i}\,dx=0 \tag{7.10}$$

при $\forall\eta(x)\in\overset{\circ}{W}{}^1_m(K_R)$. Для $u^\varepsilon(x)$ справедливы равномерные относительно $\varepsilon\in(0,\mu_0]$ оценки

$$\int\limits_{K_R}|\nabla u^\varepsilon|^m\,dx\leqslant M,\quad |u^\varepsilon|^{(\delta)}_{K_\rho}\leqslant M_1, \tag{7.11}$$

$$|\mathbf{u}^\varepsilon_x|^{(\alpha)}_{K_\rho}\leqslant M_2, \tag{7.12}$$

где K_ρ — произвольный концентрический с K_R шар радиуса $\rho<R$, причем постоянная M_1 зависит от $|u|^{(\delta)}_{K_R}$, M равна

$$\frac{\mu_1}{\mu_0}\int\limits_{K_R}(1+|\nabla u|)^m\,dx+\int\limits_{K_R}(1+|\nabla u|^2)^{m/2}\,dx,$$

α зависит лишь от μ_3/μ_2 и m, а M_2 определяется величинами μ_3/μ_2, m, $\int\limits_{K_R}|\nabla u|^m\,dx$ и $(R-\rho)^{-1}$. Оценка $\|\nabla u^\varepsilon\|_{m,K_R}$ следует непосредственно из того, что u^ε дает минимум интегралу (7.9) в классе $\mathfrak{M}_u$, с учетом условия (7.2).

Для доказательства (7.12) обратимся к тождествам

$$\int\limits_{K_R}F^\varepsilon_{u_{x_i}u_{x_j}}(u^\varepsilon_x)\,u^\varepsilon_{x_lx_j}\xi_{x_i}\,dx=0,\qquad l=1,\ldots,n, \tag{7.13}$$

в которых $\xi(x)$ — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(K_R)$. Они выводятся из (7.10) точно так же, как (7.5) из (7.4). Из (7.13) видно, что вектор-функция $\mathbf{u}_x^\varepsilon = \left(u_{x_1}^\varepsilon, \ldots, u_{x_n}^\varepsilon\right)$ может быть рассмотрена как ограниченное обобщенное решение из $C^{1+\beta}(K_R)$, системы вида (7.6) с коэффициентами

$$a_{ij}(p) = F^\varepsilon_{p_i p_j}(p) = m\varepsilon(1+p^2)^{(m-2)/2}\left[\delta_i^j + (m-2)\frac{p_i p_j}{1+p^2}\right] + F_{p_i p_j}(p).$$

В силу предположения (7.3) они удовлетворяют неравенствам

$$\nu(|p|)\xi^2 \leqslant a_{ij}(p)\xi_i\xi_j \leqslant \max\left\{\frac{\mu_3}{\mu_2};\ m-1\right\}\nu(|p|)\xi^2, \quad (7.14)$$

где функция $\nu(|p|) = \mu_2|p|^{m-2} + \varepsilon(1+p^2)^{(m-2)/2}$, очевидно, подчиняется условию

$$\nu(t_2) \leqslant \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{m-2}\nu(t_1), \qquad \forall t_2 > t_1 > 0. \quad (7.15)$$

Неравенства (7.14), (7.15) и теоремы 6.1, 6.2 гл. VIII гарантируют справедливость оценки (7.12).

Из оценок (7.11), (7.12) можно заключить, что для некоторой последовательности $\varepsilon \to 0$ последовательность функций u^ε сходится к $u^0 \in \mathfrak{M}_u$ равномерно в $\overline{K}_R$, $u^\varepsilon_{x_i}$ слабо сходятся в $L_m(K_R)$ к $u^0_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, а в каждом внутреннем шаре K_ρ, $\rho < R$, производные $u^\varepsilon_{x_i}$ сходятся к $u^0_{x_i}$ равномерно. Ясно, что $u^0(x)$ есть обобщенное решение уравнения Эйлера для (7.1), $u^0(x) \in C^{1+\alpha}(\overline{K}_R)$ и для $u^0(x)$ верны оценки (7.11), (7.12).

В силу леммы 7.1 $u^0(x)$ совпадает в K_R с исследуемым решением $u(x)$.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 7.1. *Пусть $F(p)$ принадлежит $C^{2+\beta}(E_n)$ и при $\forall p \in E_n$ подчиняется условиям* (7.2), (7.3). *Тогда ограниченное обобщенное решение $u(x)$ из $W_m^1(\Omega)$ уравнения Эйлера, соответствующего интегралу* (7.1), *принадлежит классу $C^{1+\alpha}(\Omega)$ с $\alpha > 0$, определяемым лишь величинами m и μ_3/μ_2 из условия* (7.3). *Для $\forall \overline{\Omega'} \subset \Omega$ норма $|u|_{\Omega'}^{(1+\alpha)}$ оценивается сверху постоянной, зависящей только от m, μ_3/μ_2, μ_1/μ_0, $\int\limits_\Omega |\nabla u|^m dx$ и расстояния Ω' до границы Ω.*

Замечание 7.1. Утверждение, аналогичное теореме 7.1, можно доказать и для более общих функционалов (1.1), если предположить, что функция $F(x, u, p)$, помимо условий (7.2), (7.3), подчиняется следующим ограничениям:

$$\sum_i |F_{p_i}| \leqslant c|p|^{m-1}, \quad |F_u| \leqslant c|p|^m,$$

$$\sum_i |F_{ux_i}| + |F_{uu}| + \sum_{i,l} |F_{p_i x_l}| \leqslant c|p|^{m-2}(1+p^2),$$

$$\sum_i |F_{up_i}| \leqslant c|p|^{m-2}(1+|p|).$$

Например, в качестве такой F можно взять $F = F^0(p)\psi(x, u)$, где $\psi(x, u)$ — положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция, а $F^0(p)$ удовлетворяет условиям вида (7.2), (7.3). Рассмотрение этого общего случая требует небольших уточнений результатов §§ 1, 2 гл. IV и § 6 гл. VIII, и мы ради экономии места не будем на этом останавливаться.

Глава VI

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА

Квазилинейные уравнения с дивергентной главной частью, рассмотренные нами в гл. IV, не охватывают всего класса квазилинейных уравнений второго порядка, ибо не каждое квазилинейное уравнение

$$a_{ij}(x, u, u_x)\, u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = 0 \qquad (0.1)$$

может быть преобразовано к виду (1.1) гл. IV. Они занимают особое положение среди всех уравнений (0.1). Для них имеет смысл говорить об обобщенных решениях, обладающих лишь производными первого порядка, и начинать исследование именно с таких решений. Это и было сделано в гл. IV. Для уравнений (0.1) в общем случае решение $u(x)$ обязано иметь производные не только первого, но и второго порядка, ибо без этого непонятно, что значит, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению (0.1). Более того, как показывает построенный в § 2 гл. I пример, на производные u необходимо наложить еще дополнительные требования; в противном случае потеряется теорема единственности для задачи Дирихле в шарах сколь угодно малого радиуса. Мы эти необходимые требования взяли в таком виде: производные второго порядка квадратично суммируемы, а производные первого порядка ограничены; заменить последнее условие принадлежностью u_x к $L_q(\Omega)$ с каким-либо $q < \infty$, не усиливая требования на вторые производные, нельзя. В данной главе будет доказано, что эти требования на обобщенные решения и достаточны для того, чтобы строить всю теорию. Точнее, мы покажем, что дифференциальные свойства любого такого решения зависят лишь от дифференциальных свойств функций $a_{ij}(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ и это верно для всех уравнений вида (0.1), лишь бы они были эллиптическими на $u(x)$. В частности, будет доказано, что любое такое обобщенное решение $u(x)$ уравнения (0.1) принадлежит пространству $C^{2+\alpha}(\Omega)$, если функции $a_{ij}(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ на компакте $\mathfrak{M} = \{(x, u, p)\colon\ x \in \overline{\Omega},\ |u| \leqslant \max\limits_{\Omega} |u(x)|,\ |p| \leqslant \max\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|\}$ суть элементы $\dot{O}^1$ и C^α соответственно, и $u \in C^{l+\alpha}(\Omega)$, $l \geqslant 3$, если

a_{ij} и a принадлежат $C^{l-2+\alpha}(\mathfrak{M})$. Отсюда и из доказанных в гл. III фактов о линейных уравнениях следует, что для описанных здесь обобщенных решений уравнений (0.1) справедлива теорема единственности для задачи Дирихле в достаточно малых областях, если только функции a_{ij} и a суть элементы $O^1(\mathfrak{M})$. Эти предложения достаточно точно описывают границы справедливости 19-й гипотезы Гильберта применительно к квазилинейным эллиптическим уравнениям второго порядка. С доказательства этих предложений мы и начнем данную главу. Они относятся ко всему классу эллиптических квазилинейных уравнений (0.1).

Условие эллиптичности для (0.1) имеет вид

$$\nu(x, u, p)\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j \leqslant \mu(x, u, p)\xi^2, \tag{0.2}$$

где $\nu(x, u, p)$ и $\mu(x, u, p)$ — положительные непрерывные функции своих аргументов. Деление обеих частей уравнения на $\nu(x, u, p)$ приводит к неравенству (0.2) с $\nu \equiv 1$. Однако мы не будем считать, что такое деление (такая нормировка (0.1)) раз и навсегда выполнено, ибо для разных целей нам полезна разная «нормировка» уравнения (0.1).

До 60-х годов нашего века в основном изучались так называемые *равномерно эллиптические* уравнения, т. е. уравнения (0.1), для которых отношение $\tau(x, u, p) \equiv \frac{\mu(x, u, p)}{\nu(x, u, p)} \leqslant \mu_1 = \text{const}$ для $x \in \bar{\Omega}$ и произвольных u и p. Эти уравнения являются основным объектом изучения и для данной книги. Однако методы, развитые при их изучении, оказались применимыми и для довольно широких классов неравномерно эллиптических уравнений, т. е. уравнений, для которых отношение $\tau(x, u, p)$ неограниченно растет при $|u| + |p| \to \infty$. Во всех изучаемых нами случаях $\max\limits_{\Omega}|u(x)|$ для решений $u(x)$ не превосходит некоторого конечного числа (оно или находится явно через данные задачи, или предполагается существующим по условию). Ввиду этого все функции аргумента (x, u, p) (если не оговорено противное) рассматриваются лишь при $x \in \bar{\Omega}$ и $|u| \leqslant M$, в частности, и неограниченность $\tau(x, u, p)$ для неравномерно эллиптических уравнений интересует нас лишь в связи с неограниченностью $|p|$. Если $\tau(x, u, p)$ при $|p| \to \infty$ растет, как $c|p|^m$, то говорят, что порядок неравномерности эллиптичности уравнения (0.1) равен m. Поведение $\tau(x, u, p)$ при $|p| \to \infty$ существенно в вопросе получения априорной оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|$ для всех возможных решений $u(x)$ уравнений (0.1). Там же, где считается известной оценка сверху для $\max\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|$, случаи равномерно и неравномерно эллиптических уравнений, очевидно, неразличимы (так обстоит дело в § 1 при исследовании гладкости u_{x_i} и более старших производных u).

В § 2 мы рассматриваем вопрос о получении априорной оценки $\max_S |\nabla u|$ на границе S. Излагаемый метод восходит к работам С. Н. Бернштейна и дает нужный результат для всего класса равномерно эллиптических уравнений. Данная нами модификация его позволила охватить и некоторые классы неравномерно эллиптических уравнений. Другой способ оценки $\max_S |\nabla u|$ дан в работе [51_{11}] Дж. Серрина. Он позволил охватить новые классы неравномерно эллиптических уравнений.

Параграф 3 посвящен получению так называемой тотальной оценки $|\nabla u|$, т. е. оценки $\max|\nabla u|$ для всей области Ω, когда известны границы $M \geqslant \max_\Omega |u(x)|$ и $M_1 \geqslant \max_S |\nabla u(x)|$. В § 4 даются локальные оценки $\max_{\Omega'} |\nabla u(x)|$ для любой $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, при которых считается известной лишь мажоранта M для $\max_\Omega |u(x)|$. Метод получения этих оценок идет от работы [21_8] 1956 г. одного из авторов книги. В нем использована важная идея С. Н. Бернштейна: вместо $\max|\nabla u(x)|$ оценивать $\max|\nabla v(x)|$ для специально подобранной функции v, связанной с u равенством $u = \Phi(v)$. В работе [21_8] дается способ определения таких функций $\Phi(v)$, тогда как в работах С. Н. Бернштейна и в работах других авторов, использовавших эту идею С. Н. Бернштейна, берется та или иная конкретная функция $\Phi(v)$ без указания способа ее подбора и устанавливаются лишь тотальные оценки.

Более того, до работы [21_8] исследовался лишь случай $n=2$ и данные для него методы оценки $|\nabla u|$ существенно использовали особенности двумерной евклидовой плоскости. Подход к получению тотальных и локальных оценок $|\nabla u|$, данный в работе [21_8], позволил охватить наиболее широкие классы равномерно эллиптических уравнений, а в отношении тотальных оценок наиболее широкие классы неравномерно эллиптических уравнений. В первом издании данной книги мы придали ему «интегральную форму», позволившую исследовать обобщенные решения уравнений (0.1). Это значительно усложнило его. Здесь мы решили вернуться к его первоначальной форме, более простой для восприятия и работы. Небольшое дополнительное рассуждение позволило от решений u из C^3 перейти к решениям из C^2 (в работе [21_8] и во всех других работах, использовавших метод работы [21_8], в том числе и в работе Дж. Серрина [51_{11}], предполагается, что $u \in C^3$).

В конце § 3 изложена оценка $\max_\Omega |\nabla u|$, данная в работе [14_3] А. В. Иванова. Она относится к одному классу неравномерно эллиптических уравнений, выходящему за пределы классов, охватываемых теоремами 3.1—3.3.

В § 5 доказываются теоремы существования классических решений задачи Дирихле для уравнений (0.1). Делается это на основе теоремы Лерэ — Шаудера о неподвижных точках вполне непрерывных преобразований и полученных в предыдущих параграфах априорных оценок норм $|u|_\Omega^{(2+\alpha)}$ всех возможных решений задачи Дирихле для уравнений вида (0.1). Результаты §§ 1—5 справедливы при любом $n \geqslant 2$. Параграф 6 содержит ряд дополнительных результатов для случая $n=2$. Именно, в нем дан другой способ оценки $\max\limits_\Omega |\nabla u|$, использующий несколько иные, чем в § 3, предположения о поведении функций $a_{ij}(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ при $|p| \to \infty$. В соответствии с этим условия теорем существования, доказанных в § 6, несколько отличаются от условий § 5.

§ 1. Оценка нормы $|u|_\Omega^{(1+\alpha)}$ через норму $|u|_\Omega^{(1)}$

В этом параграфе будет доказано, что для всего класса квазилинейных эллиптических уравнений

$$Lu \equiv a_{ij}(x, u, u_x) u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = 0 \tag{1.1}$$

имеет место следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Пусть $u(x)$ есть обобщенное решение уравнения* (1.1) *из класса $W_2^2(\Omega)$ с* $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega |u| \leqslant M$ *и* $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega |\nabla u| \leqslant M_1$. *Если уравнение* (1.1) *эллиптично на нем, т. е.*

$$a_{ij}(x, u(x), u_x(x))\, \xi_i \xi_j \geqslant \nu \xi^2, \qquad \nu = \mathrm{const} > 0, \tag{1.2}$$

и если на множестве $\mathfrak{M}_{M, M_1} = \{(x, u, p)\colon x \in \bar{\Omega}, |u| \leqslant M, |p| \leqslant M_1\}$ функции $a_{ij}(x, u, p)$ дифференцируемы по всем своим аргументам, а $a(x, u, p)$, $a_{ij}(x, u, p)$ и частные производные $a_{ij}(x, u, p)$ по x_i, u, p_k ограничены какой-нибудь постоянной M_2, то $u(x)$ принадлежит классу $C^{1+\alpha}(\Omega)$ с некоторым $\alpha > 0$, причем α зависит лишь от ν, M_1 и M_2, а нормы $|u_{x_i}|_{\Omega'}^{(\alpha)}$ для $\forall \Omega' \subset \Omega$ зависят от тех же постоянных и расстояния Ω' до границы S. Если к тому же $S \in 0^2$ и $u(x)|_S = \varphi(x)|_S$, где $\varphi(x) \in W_q^2(\Omega)$, $q > n$, то $u(x) \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, причем α и $|u_{x_i}|_\Omega^{(\alpha)}$ определяются постоянными ν, M, M_1, M_2, $\|\varphi\|_{q, \Omega}^{(2)}$, q и границей S.

Докажем сначала первую часть теоремы. Без ограничения общности функции u_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, будем считать нормированными в том смысле, что их значения не выходят из отрезка $[0, 1]$: $0 \leqslant u_{x_i} \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В противном случае мы в уравнении (1.1) сделали бы замену исследуемой функции $u(x)$ на $v(x) = \left(u(x) + M_1 \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \Big/ (2M_1)$ и все рассуждения проводили бы с функцией v. Очевидно, что $v(x)$ есть решение квазилинейного уравнения того же вида (1.1) с аналогичными свойствами функций a_{ij}, a.

Пусть U есть вектор с составляющими $u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}$. Докажем, что он принадлежит классу $\mathfrak{B}_2^{2n}(\Omega, M_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \gamma, \delta, 1/q)$ с некоторыми M_3, δ_i, γ, δ, q, определяемыми постоянными ν, M_1, M_2.

В качестве функций $\varphi^l(U)$ возьмем

$$\varphi_+^l(U) = 10nu_{x_l} + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2,$$

$$\varphi_-^l(U) = 10n\left(1 - u_{x_l}\right) + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2, \qquad l = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Для них $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} |\varphi_\pm^l(U(x))| \leqslant 11n$, поэтому за M_3 можно взять $11n$. В силу леммы 8.1 гл. II нам достаточно доказать, что функции $w_\pm^l(x) = \varphi_\pm^l(U(x))$, $l = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют неравенствам (8.3) гл. II, входящим в определение класса $\mathfrak{B}_2^{2n}(\Omega, M_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \gamma, \delta, 1/q)$. Покажем, что эти неравенства справедливы для них с $q = \infty$. Для этого составим тождество

$$\int_\Omega \left[a_{ij}(x, u, u_x) u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x)\right] \eta_{x_l}(x)\, dx = 0, \tag{1.4}$$

где $\eta(x)$ — произвольная ограниченная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и с помощью двукратного интегрирования по частям главных членов преобразуем его к виду

$$0 = \int_\Omega \Big[-\Big(a_{ij} u_{x_l x_i x_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}} u_{x_m x_l} u_{x_i x_j} + $$
$$+ \frac{\partial a_{ij}}{\partial u} u_{x_l} u_{x_i x_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} u_{x_i x_j} \Big) \eta + a\eta_{x_l} \Big] dx =$$
$$= \int_\Omega \Big[a_{ij} u_{x_i x_j} \eta_{x_l} + \Big(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}} u_{x_m x_l} u_{x_i x_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial u} u_{x_l} u_{x_i x_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} u_{x_i x_j} -$$
$$- \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}} u_{x_m x_l} u_{x_i x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial u} u_{x_l} u_{x_i x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} u_{x_i x_j} \Big) \eta + a\eta_{x_l} \Big] dx. \tag{1.5}$$

Введем обозначения:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}} - \frac{\partial a_{im}}{\partial u_{x_j}} = a_{ij}^m, \quad \frac{\partial a_{lj}}{\partial u} u_{x_l} + \frac{\partial a_{lj}}{\partial x_l} = a^j,$$
$$-\frac{\partial a_{ij}}{\partial u} u_{x_l} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} = b_{ij}^l.$$

Тождество (1.5) перепишется так:

$$\int_{\Omega} \Big[a_{ij}u_{x_lx_j}\eta_{x_i} + \Big(a_{ij}^m u_{x_mx_i}u_{x_lx_j} + $$
$$+ a^j u_{x_lx_j} + b_{ij}^l u_{x_lx_j}\Big)\eta + a\eta_{x_l}\Big]\, dx = 0. \qquad (1.6)$$

Все коэффициенты в нем в силу предположений теоремы суть ограниченные функции. В него, равно как и в исходное тождество (1.4), входят производные от u не выше второго порядка, причем производные второго порядка входят в степени не выше второй и с ограниченными коэффициентами.

Ввиду этого тождества (1.4) и (1.6) справедливы для любого решения $u(x)$ из $W_2^2(\Omega)$ с конечным $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$, несмотря на то что при выводе (1.6) было использовано существование у $u(x)$ производных третьего порядка. Действительно, возьмем последовательность трижды непрерывно дифференцируемых функций $u^{(p)}(x)$, $p = 1, 2, \ldots$, с равномерно ограниченными $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\nabla u^{(p)}(x)|$, сходящихся к $u(x)$ в норме $W_2^2(\Omega)$. В качестве такой последовательности можно взять, например, усреднения функции $u(x)$ с бесконечно дифференцируемым ядром. Правда, усреднения $u_\rho(x)$ определены не во всей области Ω, а лишь для областей $\Omega' \subset \Omega$, расстояние которых до S не меньше ρ. Однако для первой части теоремы это не имеет значения, ибо решение $u(x)$ исследуется лишь внутри Ω, и поэтому функцию η в (1.4) и (1.6) можно брать равной нулю в целой пограничной полоске около S. Итак, возьмем функции $u^{(p)}$. Для них невязка

$$a_{ij}(x, u, u_x)\, u_{x_ix_j}^{(p)} + a(x, u, u_x) \equiv \varepsilon_p(x) \qquad (1.7)$$

стремится к нулю в $L_2(\Omega)$. Отсюда, а точнее, из аналога тождества (1.4)

$$\int_{\Omega} \Big(a_{ij}u_{x_ix_j}^{(p)} + a\Big)\eta_{x_l}\, dx = \int_{\Omega} \varepsilon_p \eta_{x_l}\, dx$$

получим тождество типа (1.6), в котором, как легко видеть, можно перейти к пределу по $p \to \infty$ и получить (1.6). Итак, тождество (1.6) доказано для ограниченных финитных η из $W_2^1(\Omega)$, а потому и для всех ограниченных η из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Возьмем в (1.6) $\eta = u_{x_l}(x)\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — ограниченная финитная функция из $W_2^1(\Omega)$, и полученные тождества просуммируем по l от 1 до n. Это даст

$$\int_\Omega \Big[a_{ij}u_{x_lx_j}u_{x_lx_i}\Phi + a_{ij}u_{x_lx_j}u_{x_l}\Phi_{x_i} + \\ + \left(a_{ij}^m u_{x_mx_l}u_{x_ix_j} + a^l u_{x_lx_j} + b_{ij}^l u_{x_ix_j}\right)u_{x_l}\Phi + \\ + a\,\Delta u\,\Phi + au_{x_l}\Phi_{x_l}\Big]\,dx = 0.$$

Введем еще следующие обозначения:

$$\sum_{l=1}^n u_{x_l}^2 = v, \quad a^l u_{x_l} + b_{ij}^l u_{x_l} + a\delta_j^l = b_{ij}, \quad au_{x_l} = a_l.$$

Тогда последнее тождество перепишется в виде

$$\int_\Omega \Big[a_{ij}u_{x_rx_j}u_{x_rx_i}\Phi + \frac{1}{2}a_{ij}v_{x_j}\Phi_{x_i} + \\ + \frac{1}{2}a_{ij}^m u_{x_mx_i}v_{x_j}\Phi + b_{ij}u_{x_ix_j}\Phi + a_r\Phi_{x_r}\Big]\,dx = 0. \tag{1.8}$$

Это тождество сложим с тождеством (1.6), в котором функцию η возьмем равной $5n\Phi$. Результат запишем как некоторое тождество для функции $w_+^l = 10nu_{x_l} + v$, именно:

$$\int_\Omega \Big[a_{ij}u_{x_rx_j}u_{x_rx_i}\Phi + \frac{1}{2}a_{ij}w_{+x_j}^l\Phi_{x_i} + \\ + \frac{1}{2}a_{ij}^m u_{x_mx_i}w_{+x_j}^l\Phi + c_{ij}^l u_{x_ix_j}\Phi + c_i^l\Phi_{x_i}\Big]\,dx = 0, \tag{1.9}$$

где $c_{ij}^l = b_{ij} + 5na^l\delta_i^l + 5nb_{ij}^l$, $c_i^l = a_i + 5na\delta_i^l$.

Из (1.9) нужное нам соотношение выводится так же, как это делалось выше, в §§ 14, 15 гл. III и §§ 1, 6 гл. IV. Именно, положим в (1.9) $\Phi(x) = 2\zeta^2(x)\max\{w_+^l(x) - k, 0\}$. Здесь $\zeta(x)$ — срезающая для шара $K_\rho \subset \Omega$ функция (как всегда, $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$). Обозначим через $A_{k,\rho}$ множество точек шара K_ρ, в которых $w_+^l(x) > k$. Результат подстановки такой $\Phi(x)$ в (1.9) после простых преобразований дает следующие тождества:

$$\int_{A_{k,\rho}} \Big[2a_{ij}u_{x_rx_i}u_{x_rx_j}(w_+^l - k)\zeta^2 + a_{ij}w_{+x_i}^l w_{+x_j}^l\zeta^2 + \\ + 2a_{ij}w_{+x_j}^l(w_+^l - k)\zeta\zeta_{x_i} + a_{ij}^m w_{+x_j}^l u_{x_mx_i}(w_+^l - k)\zeta^2 + \\ + 2c_{ij}^l u_{x_ix_j}(w_+^l - k)\zeta^2 + 2c_i^l w_{+x_i}^l\zeta^2 + 4c_i^l(w_+^l - k)\zeta\zeta_{x_i}\Big]\,dx = 0. \tag{1.10}$$

Положительными членами здесь являются первые два. Их мы оставляем слева и оцениваем снизу. Остальные члены перенесем направо и оценим сверху по неравенству Коши, помня, что ζ, w_+^l и все коэффициенты в (1.10) ограничены известными нам константами. В результате этого получим

$$\nu \int\limits_{A_{k,\rho}} [2u_{xx}^2(w_+^l - k)\zeta^2 + |\nabla w_+^l|^2 \zeta^2]\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \gamma' \int\limits_{A_{k,\rho}} \Big\{ \frac{1}{\varepsilon}(w_+^l - k)^2 |\nabla\zeta|^2 + \varepsilon |\nabla w_+^l|^2 \zeta^2 + {}$$
$$+ \varepsilon u_{xx}^2 (w_+^l - k)\zeta^2 + \frac{1}{\varepsilon}|\nabla w_+^l|^2 (w_+^l - k)\zeta^2 + \frac{1}{\varepsilon}\Big\} dx.$$

Здесь ε — произвольное положительное число, а γ' — известная постоянная. Если ε взять равным, например, $\nu/2\gamma'$, то отсюда будем иметь более простое неравенство:

$$\nu \int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla w_+^l|^2 \zeta^2\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \gamma'' \int\limits_{A_{k,\rho}} [(w_+^l - k)^2 |\nabla\zeta|^2 + |\nabla w_+^l|^2 (w_+^l - k)\zeta^2 + 1]\, dx,$$

где γ'' — тоже известная нам постоянная.

Будем брать теперь только такие k, которые близки к $\max\limits_{A_{k,\rho}} w_+^l$, именно, такие, для которых

$$\max_{A_{k,\rho}} w_+^l - k = \max_{K_\rho} w_+^l - k \leqslant \delta \operatorname{vrai} \max_{\Omega} |w_+^l| \leqslant 11n\delta = \frac{\nu}{2\gamma''}.$$

Для таких k из последнего неравенства выводим одну из основных для нас серий неравенств:

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla w_+^l|^2 \zeta^2\, dx \leqslant \gamma \Bigg[\int\limits_{A_{k,\rho}} (w_+^l - k)^2 |\nabla\zeta|^2\, dx + \operatorname{mes} A_{k,\rho} \Bigg] \tag{1.11}$$

и тем более

$$\int\limits_{A_{k,\rho-\sigma\rho}} |\nabla w_+^l|^2\, dx \leqslant \gamma \Big[\frac{1}{(\sigma\rho)^2} \max_{A_{k,\rho}} (w_+^l - k)^2 + 1 \Big] \operatorname{mes} A_{k,\rho}. \tag{1.12}$$

Аналогичные неравенства получаем для функций $w_-^l = 10n(1 - u_{x_l}(x)) + \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i}^2(x)$. Это завершает доказательство того, что вектор $U=(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ принадлежит к классу $\mathfrak{B}_2^{2n}(\Omega, M_3, \ldots, 0)$. Отсюда в силу теоремы 8.1 гл. II следует, что $u_{x_i} \in C^{\alpha}(\Omega)$. Первая часть теоремы доказана.

Переходим к изучению производных $u_{x_i}(x)$ вблизи границы S. Пусть $S \in O^2$, а $\varphi(x) \in W_q^2(\Omega)$, $q > n$. Распрямим какую-либо часть границы так, чтобы в новых координатах мы имели те же свойства для u и уравнения, что и в старых (для этого надо, чтобы переход от одних координат к другим и обратно совершался дважды дифференцируемыми функциями с равномерно ограниченными производными первого и второго порядков), и рассмотрим $u(x)$ вблизи этой части S_1. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — уже новые координаты и уравнение куска S_1 в них $x_n=0$. Рассмотрим $u(x)$ в какой-либо подобласти Ω_1 области Ω, прилегающей к S_1, причем функции u_{x_i} также считаем нормированными на «0—1», т. е. $0 \leqslant u_{x_i} \leqslant 1$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Возьмем вектор-функцию $U=(u_{x_1}(x), \ldots, u_{x_{n-1}}(x))$. Так же, как и выше, проверяется, что она принадлежит классу $\mathfrak{B}_n^{2n}(\Omega_1, \ldots)$, причем функции $\varphi_{\pm}^l(U)$ для нее берем в виде

$$\varphi_{+}^l(U)=10(n-1)u_{x_l}+\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i}^2,$$

$$\varphi_{-}^l(U)=10(n-1)(1-u_{x_l})+\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i}^2,$$

$l=1, 2, \ldots, n-1$, и поэтому $w_{\pm}^l(x)=\varphi_{\pm}^l(u_{x_1}(x), \ldots, u_{x_{n-1}}(x))$. Надо только при выводе неравенств (1.12) для $w_{\pm}^l(x)$ в членах, содержащих производную $u_{x_n x_n}$, заменить ее из уравнения (1.1) на $\dfrac{1}{a_{nn}(x, u, u_x)}\left[-a(x, u, u_x)-\sum_{i, j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_i x_j}-2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}u_{x_i x_n}\right]$ (это необходимо потому, что среди «главных» положительных членов, содержащих $u_{x_i x_j}$, не будет члена с $u_{x_n x_n}$). Таким образом, для шаров $K_\rho \subset \Omega_1$ и функций $w=w_{\pm}^l$, $l=1, 2, \ldots, n-1$, неравенства (1.12) выполняются для всех уровней k, близких к их максимуму в K_ρ: $\max\limits_{K_\rho} w-k \leqslant \delta \max\limits_{K_\rho} w$. Кроме того, функции $w_{\pm}^l$, $l=1, 2, \ldots, n-1$, удовлетворяют неравенствам (1.12) и для шаров K_ρ, пересекающих границу $\partial\Omega$ области Ω_1, если только уровни k при этом, помимо условия $k \geqslant \max\limits_{\Omega_1 \cap K_\rho} w-\delta \max\limits_{K_\rho} w$, удовлетворяют еще и условию $k \geqslant \max\limits_{K_\rho \cap \partial\Omega} w$. Вывод этих неравенств для пограничных шаров ничем не отличается от данного выше вывода для внутренних шаров. Из сказанного здесь, того, что функции u_{x_i}, $i=1, 2, \ldots, n-1$, удовлетворяют на S_1 условию Гёльдера, и теоремы 8.3 гл. II следует, что $\operatorname{osc}\{u_{x_i}, K_\rho \cap \Omega_1\} \leqslant C\rho^\alpha$, $\alpha>0$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, для шаров K_ρ, которые могут пересекать S_1, но отстоят от $\partial\Omega \setminus S_1$ на положительное расстояние.

Осталось оценить колебание u_{x_n} в таких шарах K_ρ. Для этого достаточно (см. лемму 4.2 гл. II) доказать, что

$$\int\limits_{K_\rho \cap \Omega_1} \sum_{i=1}^{n} u^2_{x_i x_n}\, dx \leqslant c\rho^{n-2+\varepsilon}, \qquad \varepsilon>0. \tag{1.13}$$

В силу уравнения (1.1) эти оценки достаточно установить лишь для $u_{x_i x_j}$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, \ldots, n-1$, т. е.

$$\int\limits_{K_\rho \cap \Omega_1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} u^2_{x_i x_j}\, dx \leqslant c\rho^{n-2+\varepsilon}, \qquad \varepsilon>0. \tag{1.14}$$

Для их получения выведем неравенства, близкие к (1.11). Самих неравенств (1.11) недостаточно, потому что они для приграничных шаров выведены не при всех $k \geqslant 0$, а лишь при $k \geqslant \max\limits_{K_\rho \cap S_1} w$. По условию функция $\varphi(x)$, задающая граничные значения u на S, принадлежит $W_q^2(\Omega)$, $q>n$. В силу теоремы 2.1 гл. II $\varphi(x) \in C^{1+\hat\alpha}(\bar\Omega)$ с $\hat\alpha = 1-\frac{n}{q}$. Обозначим: $v(x) = u(x) - \varphi(x)$. Эта функция удовлетворяет уравнению того же типа, что и функция u, только младший член в нем будет не ограниченной функцией, а функцией из $L_q(\Omega)$. Составим из ее производных функции

$$\left.\begin{aligned} \hat w^l_+ &= \mu v_{x_l} + \sum_{i=1}^{n-1} v^2_{x_i}, \qquad \mu = \text{const} > 1, \\ \hat w^l_- &= -\mu v_{x_l} + \sum_{i=1}^{n-1} v^2_{x_i}, \qquad l = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

Они равны нулю на S_1 и по доказанному выше удовлетворяют условию Гёльдера вблизи S_1. Для них верны неравенства типа (1.11), точнее, неравенства (1.11), в которых вместо 1 стоит $\operatorname{mes}^{-2/q} A_{k,\rho}$. Это дает при любых $k \geqslant 0$ и достаточно малых ρ оценки

$$\int\limits_{A_{k,\rho/2}} |\nabla \hat w|^2\, dx \leqslant \gamma' \rho^{n-2+2\alpha}, \qquad \hat w = \hat w^l_\pm, \quad l = 1, 2, \ldots, n-1,$$

с некоторым положительным $\alpha < \hat\alpha = 1 - \frac{n}{q}$.

При $k=0$ они дают

$$\int\limits_{A_{0,\,\rho/2}} |\nabla\hat{w}|^2\,dx \leqslant \gamma'\rho^{n-2+2\alpha}, \quad \hat{w}=\hat{w}^l_{\pm}, \quad l=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \tag{1.16}$$

где $A_{0,\,\rho/2}$ означает множество точек из $K_{\rho/2}\cap\Omega_1$, в которых $\hat{w}(x)>0$. В каждой точке $x\in K_{\rho/2}\cap\Omega_1$ для любого $l=1,\ \ldots,\ n-1$ по крайней мере одна из функций $\hat{w}^l_{\pm}(x)$ неотрицательна. Всю подобласть $K_{\rho/2}\cap\Omega_1$ можно покрыть конечным числом замкнутых областей $\Omega^1,\ \ldots,\ \Omega^L$ таких, что каждой Ω^i, $i\leqslant L$, сопоставляется набор из $n-1$ неотрицательных на Ω^i функций $\hat{w}$, причем в их число из каждой пары $\hat{w}^l_{\pm}$ входит лишь одна функция.

Берем одну из Ω^i и соответствующие ей функции $\hat{w}$ (которые на ней неотрицательны); пусть, например, это будут функции $\hat{w}^l_{+}$, $l=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. Для них в силу (1.16) имеем оценку

$$\int\limits_{\Omega^i} |\nabla\hat{w}^l_{+}|^2\,dx \leqslant \gamma'\rho^{n-2+2\alpha}, \qquad l=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \tag{1.17}$$

а в силу (1.15) систему равенств

$$\hat{w}^l_{+x_s} = \mu v_{x_l x_s} + \sum_{i=1}^{n-1} 2v_{x_i} v_{x_i x_s}, \qquad \begin{array}{l} l=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{array}$$

Эту систему равенств рассмотрим при закрепленном s как линейную систему $(n-1)$-го порядка относительно $v_{x_s x_l}$ с определителем $D=\left|\mu\delta_l^j+2v_{x_j}\right|$. При $\mu>2n\max\limits_{j}\max\limits_{\Omega}|v_{x_j}|$ определитель D отличен от нуля и величины $v_{x_l x_s}$, $l=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, однозначно определяются через $\hat{w}_{+x_s}$ и v_{x_l}, $l=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. Все это верно при любом s $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Отсюда и из (1.17) следует, что

$$\int\limits_{\Omega^i} \sum_{l=1}^{n-1} v^2_{x_l x_s}\,dx \leqslant \gamma''\rho^{n-2+2\alpha}, \qquad s=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Эти неравенства имеют место для всех Ω^i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ L$. Поэтому

$$\int\limits_{K_{\rho/2}\cap\Omega_1} \sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n-1} v^2_{x_l x_s} \leqslant \gamma'''\rho^{n-2+2\alpha},$$

Отсюда уже следуют соотношения (1.14) и (1.13) с $\varepsilon = 2\alpha$, ибо для $\varphi(x)$ верно такое же неравенство с $\alpha = (q-n)/q$. Из них, как сказано выше, получаем оценку колебания для u_{x_n} в $K_\rho \cap \Omega_1$: $\operatorname{osc}\{u_{x_n}, K_\rho \cap \Omega_1\} \leqslant c\rho^\alpha$ вблизи куска границы S_1. Ввиду достаточного произвола в выборе S_1 фактически оценены колебания всех производных u_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, в любой области $K_\rho \cap \Omega$ с $\rho \leqslant \rho_0$. Теорема доказана.

Эта теорема примечательна тем, что она относится ко всему классу квазилинейных эллиптических уравнений. Для случая $n = 2$ теорема была доказана сравнительно давно и просто (см. [**44**$_1$, **5**$_2$], а также § 19 гл. III и § 6 гл. IX), для произвольного же n упорно не поддавалась доказательству.

Итак, мы доказали, что любое решение $u(x)$ уравнения (1.1), принадлежащее $W_2^2(\Omega)$ и имеющее конечный $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$, принадлежит классу $C^{1+\alpha}(\Omega)$ с некоторым $\alpha > 0$, если для функций $a_{ij}(x, u, p)$ и a выполнены условия теоремы 1.1. Если относительно $a(x, u, p)$ предположить больше, именно, что $a(x, u, p)$ на множестве $\mathfrak{M}_{M, M_1}$ принадлежит пространству $C^\beta(\mathfrak{M}_{M, M_1})$, то решение $u(x)$ будет принадлежать классу $C^{2+\beta}(\Omega)$. Действительно, $u(x)$ можно рассмотреть как решение линейного уравнения

$$\tilde{a}_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \tilde{a}(x) = 0 \tag{1.18}$$

с коэффициентами $\tilde{a}_{ij}(x) = a_{ij}(x, u(x), u_x(x))$, $\tilde{a}(x) = a(x, u(x), u_x(x))$ из $C^{\alpha\beta}(\Omega)$. По теореме 12.1 гл. III $u(x)$ будет принадлежать $C^{2+\alpha\beta}(\Omega)$. Это в свою очередь гарантирует принадлежность $\tilde{a}_{ij}(x)$ и $\tilde{a}(x)$ к $C^\beta(\Omega)$, и из той же теоремы 12.1 гл. III следует, что $u(x) \in C^{2+\beta}(\Omega)$.

Такими же рассуждениями из теоремы 1.1 данного параграфа и теоремы 12.1 гл. III выводится дальнейшее увеличение гладкости $u(x)$ в Ω и в $\overline{\Omega}$ по мере увеличения гладкости функций a_{ij}, a, $u|_S$ и S. Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 1.2. *Пусть относительно $u(x)$ и функций $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда, если дополнительно $a \in C^\beta(\mathfrak{M}_{M, M_1})$, то $u(x)$ будет элементом $C^{2+\beta}(\Omega)$ при произвольных S и $\varphi = u|_S$ и $u(x) \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$ при φ и $S \in C^{2+\beta}$. Далее, если a_{ij} и $a \in C^{l-2+\beta}(\mathfrak{M}_{M, M_1})$, $l \geqslant 3$, то $u(x) \in C^{l+\beta}(\Omega)$ при произвольных S и φ и $u(x) \in C^{l+\beta}(\overline{\Omega})$ при φ и $S \in C^{l+\beta}$.*

§ 2. Оценка $|\nabla u|$ на границе

Пусть функции $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ из (0.1) ограничены на любом компактном множестве изменения их аргументов. Точнее, они интересуют нас лишь при $x \in \bar{\Omega}$ и $u \in [u^{(1)}, u^{(2)}]$, где $u^{(1)} \leqslant \min\limits_{\Omega} u(x)$, а $u^{(2)} \geqslant \max\limits_{\Omega} u(x)$, причем числа $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ в общем случае предполагаются уже известными (они не нужны тогда, когда можно обойтись без введения вспомогательной функции Φ; см. ниже). Мы получим локальные оценки максимума $|\nabla u|$ на S, т. е. мажоранты для $\max\limits_{S_\rho}|\nabla u|$, где S_ρ есть пересечение S с шарами $K_\rho(\bar{x})$, центры которых $\bar{x}$ лежат на S, используя информацию о решении $u(x)$ и уравнении (0.1) лишь в $\Omega_{2\rho} = \Omega \cap K_{2\rho}(\bar{x})$. Пусть $\bar{x}$ есть какая-либо точка S. Примем ее за начало координат и оси повернем так, чтобы ось x_n была направлена по внутренней нормали к S в точке $\bar{x} = (0)$. Пусть уравнение (0.1) пронормировано так, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x, u, p) = 1. \tag{2.1}$$

Форму $(A(p)\xi, \xi) \equiv (A\xi, \xi) \equiv a_{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j$ будем считать неотрицательной. В силу этого и (2.1) $|a_{ij}(x, u, p)| \leqslant 1$, $i, j = 1, \ldots, n$. На функцию $a(x, u, p)$ наложим условие

$$|a(x, u, p)| \leqslant c_1\mathscr{E}(p) + c_2, \tag{2.2}$$

где $\mathscr{E}(p) = (A(p)p, p) = a_{ij}(x, u, p)p_ip_j$. Пример (2.26) гл. I показывает, что в общем случае нельзя в (2.2) вместо $\mathscr{E}(p)$ подставить $|p|^\varepsilon\mathscr{E}(p)$ с $\varepsilon > 0$.

Пусть функция $u(x)$ принадлежит в $\Omega_\rho = \Omega \cap K_\rho(0)$ классу $C(\bar{\Omega}_\rho) \cap C^1(\Omega_\rho)$, ее производные первого порядка дифференцируемы в Ω_ρ и в каждой точке $x \in \Omega_\rho$ функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (0.1). Пусть, кроме того, $u(x)$ на S_ρ совпадает с $\varphi(x) \in O^2(\bar{\Omega}_\rho)$.

Рассмотрим сначала случай строго выпуклой области. Точнее, предположим, что Ω_ρ расположена в шаре $K_d(\bar{x}')$ радиуса d с центром на полуоси $x_n > 0$, касающемся плоскости $x_n = 0$ в точке $x = 0$.

Рассмотрим в Ω_ρ функцию $\bar{u}(x) = u(x) - \varphi(x)$. Для нее из (0.1) получаем уравнение

$$a_{ij}(x, u, u_x)\bar{u}_{x_ix_j} = -a(x, u, u_x) - a_{ij}(x, u, u_x)\varphi_{x_ix_j}, \tag{2.3}$$

причем

$$\bar{u}|_{S_\rho} = 0. \tag{2.4}$$

Введем вместо $\bar{u}$ новую функцию v с помощью равенства $\bar{u} = \Phi(v)$, где $\Phi(v)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая функция с $\Phi'(v) > 0$, $\Phi''(v) \leqslant 0$ и $\Phi(0) = 0$, которая будет конкретизирована ниже. Очевидно, $\bar{u}_{x_i} = \Phi' v_{x_i}$, $\bar{u}_{x_i x_j} = \Phi' v_{x_i x_j} + \Phi'' v_{x_i} v_{x_j}$. Подставим это выражение для $\bar{u}_{x_i x_j}$ в (2.3) и результат запишем в виде

$$\Phi' a_{ij} v_{x_i x_j} = -\Phi'' a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} - a - a_{ij} \varphi_{x_i x_j}. \tag{2.5}$$

В силу неотрицательности формы $(A\xi, \xi)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}(A(u_x) v_x, v_x) &= \frac{1}{(\Phi')^2}(Au_x - A\varphi_x, u_x - \varphi_x) = \\ &= \frac{1}{(\Phi')^2}[(Au_x, u_x) - 2(Au_x, \varphi_x) + (A\varphi_x, \varphi_x)] \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{(\Phi')^2}\left[(Au_x, u_x) - 2\sqrt{(Au_x, u_x)}\sqrt{(A\varphi_x, \varphi_x)} + (A\varphi_x, \varphi_x)\right] \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{(\Phi')^2}\left[\frac{1}{2}\mathscr{E}(u_x) - (A\varphi_x, \varphi_x)\right].\end{aligned} \tag{2.6}$$

Благодаря им, а также $|a_{ij}| \leqslant 1$ и (2.2), из (2.5) следует

$$\Phi' a_{ij} v_{x_i x_j} \geqslant \left(-\frac{\Phi''}{2(\Phi')^2} - c_1\right)\mathscr{E}(u_x) - c_2 - \sum_{ij}|\varphi_{x_i x_j}| + \frac{\Phi''}{(\Phi')^2}\varphi_x^2. \tag{2.7}$$

Возьмем в качестве $\Phi(v)$ одно из решений уравнения

$$-\frac{\Phi''}{(\Phi')^2} = 2c_1, \tag{2.8}$$

именно

$$\Phi(v) = \frac{1}{2c_1}\ln(1+v), \tag{2.9}$$

считая $c_1 > 0$ (случай $c_1 = 0$ можно было бы разобрать отдельно, но мы этого делать не будем). Оно удовлетворяет поставленным выше условиям: $\Phi' > 0$, $\Phi'' \leqslant 0$, $\Phi(0) = 0$. Так как $\Phi(v) = \bar{u} = u - \varphi$, то

$$\max_{\Omega_\rho}(1+v) = \max_{\Omega_\rho} e^{2c_1(u(x)-\varphi(x))} \leqslant e^{2c_1 \max_{\Omega_\rho}|u(x)-\varphi(x)|} \equiv c_3,$$

и потому $\max_{\Omega_\rho}(\Phi')^{-1} \leqslant 2c_1c_3$. Благодаря такому выбору Φ из (2.7) следует неравенство

$$a_{ij} v_{x_i x_j} \geqslant -c_4, \tag{2.10}$$

где $c_4 = 2c_1c_3\left[c_2 + 2c_1 \max_{\Omega_\rho}\varphi_x^2 + \max_{\Omega_\rho}\sum_{i,j}|\varphi_{x_i x_j}|\right]$. Кроме того, $v|_{S_\rho} = 0$.

Возьмем в качестве «барьерной» функции

$$w(x)=\frac{c_4}{2}\left[\left(x-\bar{x}'^2\right)-d\right]-c_5x_n, \tag{2.11}$$

в которой постоянная $c_5 \geqslant 0$ столь велика, что $(v+w)\big|_{\partial\Omega_\rho \setminus S_\rho} \leqslant 0$. В силу $\max\limits_{\Omega_\rho} v \leqslant c_3-1$ и того, что x_n для точек $\partial\Omega_\rho \setminus S_\rho$ не меньше $\rho^2/(2d)$, мы удовлетворим требованию $(v+w)\big|_{\partial\Omega_\rho \setminus S_\rho} \leqslant 0$, положив $c_5=2d(c_3-1)/\rho^2$. При таком c_5 функция $v(x)+w(x)$ неположительна на всей границе $\partial\Omega_\rho$, причем в точке $x=0$ равна нулю. Кроме того, для нее $a_{ij}(v+w)_{x_ix_j} \geqslant 0$ в Ω_ρ. В силу принципа максимума $v(x)+w(x)$ достигает своего максимального в $\bar{\Omega}_\rho$ значения в точке $x=0$. Поэтому разностное отношение $\Delta(v+w)/\Delta l$ в точке $x=0$ неположительно по любому направлению l, выходящему из точки $x=0$ в $\bar{\Omega}$. Отсюда, вспоминая выражение v через u и φ, получим оценку

$$\overline{\lim_{\Delta l\to 0}}\,\frac{\Delta u}{|\Delta l|}\bigg|_{x=0} \leqslant \frac{\partial\varphi}{\partial l}\bigg|_{x=0}+\left(\frac{2(c_3-1)}{\rho^2}+c_4\right)\frac{c_3 d}{2c_1}. \tag{2.12}$$

Аналогичные рассуждения с функцией $\hat{u}(x)=-u(x)$ как решением уравнения $a_{ij}(x,\,-\hat{u},\,-\hat{u}_x)\,\hat{u}_{x_ix_j}-a(x,\,-\hat{u},\,-u_x)=0$ приводят к оценке

$$\underline{\lim_{\Delta l\to 0}}\,\frac{\Delta u}{|\Delta l|}\bigg|_{x=0} \geqslant \frac{\partial\varphi}{\partial l}\bigg|_{x=0}-\left(\frac{2(c_3-1)}{\rho^2}+c_4\right)\frac{c_3 d}{2c_1}. \tag{2.13}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.1. *Пусть в* $\Omega_\rho=\Omega\cap K_\rho(\bar{x})$, $\bar{x}\in S$, *выполнены следующие предположения:*

a) $u(x)\in C(\bar{\Omega}_\rho)\cap C^1(\Omega_\rho)$, *ее производные первого порядка дифференцируемы в* Ω_ρ, $u(x)$ *удовлетворяет уравнению* (0.1) *во всех точках* Ω_ρ *и на* $S_\rho=S\cap K_\rho(\bar{x})$ *совпадает с* $\varphi(x)\in O^2(\bar{\Omega}_\rho)$.

b) *Функции* $a_{ij}(x,\,u,\,p)$, $a(x,\,u,\,p)$, *образующие уравнение* (0,1), *при* $x\in\bar{\Omega}_\rho$, *произвольных* p *и* $u\in[u^{(1)},\,u^{(2)}]$, *где* $u^{(1)} \leqslant \min\limits_{\Omega_\rho} u(x)$, $u^{(2)} \geqslant \max\limits_{\Omega_\rho} u(x)$, *удовлетворяют условиям* (2.1), (2.2) *и* $a_{ij}(x,\,u,\,p)\,\xi_i\xi_j \geqslant 0$.

c) *Область* Ω_ρ *принадлежит шару* $K_d(\bar{x}')$, *граница которого содержит точку* $\bar{x}\in S$ (точнее см. стр. 428).

Тогда для любого направления l, выходящего из точки $\bar{x}$ в Ω_ρ,

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_{\bar{x}} - \left[\frac{2(c_3-1)}{\rho^2}+c_4\right]\frac{c_3 d}{2c_1} \leqslant \varliminf_{\Delta l\to 0}\left.\frac{\Delta u}{|\Delta l|}\right|_{\bar{x}} \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{\Delta l\to 0}\left.\frac{\Delta u}{|\Delta l|}\right|_{\bar{x}} \leqslant \left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_{\bar{x}} + \left[\frac{2(c_3-1)}{\rho^2}+c_4\right]\frac{c_3 d}{2c_1},$$

где $c_3 = e^{2c_1 \max\limits_{\Omega_\rho}|u(x)-\varphi(x)|}$.

Условия теоремы 2.1 вызваны существом дела для всех равномерно эллиптических уравнений (0.1). Более того, форме $a_{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j$ разрешена неравномерность любого порядка и даже вырождение, лишь бы не обращались в нуль одновременно все ее собственные значения (условие (2.1)). Правда, падение роста $a_{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j$ в направлении $\xi = p$ влечет за собою соответствующие ограничения на рост $a(x, u, p)$ (условие (2.2)). Это последнее не выполняется, например, для случая уравнения

$$\left[(1+u_x^2)\delta_i^j - u_{x_i}u_{x_j}\right]u_{x_ix_j} = n\mathscr{H}(1+u_x^2)^{3/2}, \tag{2.14}$$

определяющего среднюю кривизну $\mathscr{H}$ поверхности $u = u(x)$, если $\mathscr{H} \not\equiv 0$. Действительно, для (2.14) $a_{ij}\xi_i\xi_j = \xi^2(1+u_x^2) - (u_x, \xi)^2$, т. е. $\mathscr{E}(u_x) = u_x^2$, тогда как a имеет третий порядок роста по $|u_x|$. Для уравнения (2.14) мы сталкиваемся как раз с самым неблагоприятным для теоремы 2.1 случаем, когда порядок роста формы $a_{ij}\xi_i\xi_j$ в направлении $\xi = u_x$ меньше, чем в любом другом направлении ξ. Напротив, для уравнения вида

$$\left(\delta_i^j + u_{x_i}u_{x_j}\right)u_{x_ix_j} + a(x, u, u_x) = 0 \tag{2.15}$$

направление $\xi = u_x$ дает максимальный порядок роста формы $a_{ij}\xi_i\xi_j$. Для него $\mathscr{E}(u_x) = u_x^2(1+u_x^2)$ и, следовательно, условия теоремы 2.1 допускают четвертый порядок роста a по $|u_x|$. Заметим, что форма $a_{ij}\xi_i\xi_j$ при $(\xi, u_x) = 0$ равна ξ^2, т. е. уравнение (2.15) не является равномерно эллиптическим.

Заменим теперь условие с) теоремы 2.1 следующим:

с′) *Существует шар $K_{\bar{d}}(\bar{x}'')$ (как всюду, к $K_{\bar{d}}(\bar{x}'')$ не причисляется его граница), не имеющий общих точек с Ω_ρ и содержащий точку $\bar{x} \in S$ на своей границе.*

Относительно функций a_{ij}, a, кроме условий теоремы 2.1, предположим

$$|p| \leqslant c_5\mathscr{E}(p) + c_6. \tag{2.16}$$

Перейдем от x к новым координатным функциям $y = y(x)$, соответствующим преобразованию инверсии относительно сферы $\partial K_{\bar d}(\bar x'')$. Область Ω_ρ при этом перейдет в область $\tilde\Omega_\rho$ изменения y. Она расположится внутри сферы $\partial K_{\bar d}(\bar x'')$, причем точка $\bar x \equiv \bar y$ останется неподвижной. Функции $y = y(x)$, $x \in \Omega_\rho$, и обратные им функции $x = x(y)$, $y \in \tilde\Omega_\rho$, будут, очевидно, ограничены вместе со своими производными первого и второго порядков некоторой постоянной c_7, определяемой лишь $\bar d$ и диаметром Ω_ρ. Преобразуем уравнение (0.1) к новым координатам:

$$b_{kl} u_{y_k y_l} + b = 0, \tag{2.17}$$

где $b_{kl} = a_{ij} \dfrac{\partial y_k}{\partial x_i} \dfrac{\partial y_l}{\partial x_j}$, $b = a + b_k u_{y_k}$, а $b_k = a_{ij} \dfrac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}$. Здесь и ниже мы сохраним за u (и другими функциями x) их прежние обозначения, хотя теперь они рассматриваются как сложные функции y (например, $u = u(x(y))$). Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 2.1, только вместо уравнения (0.1) мы имеем уравнение (2.17). Форма $(B\xi, \xi) \equiv b_{kl}\xi_k\xi_l$ обладает, по существу, теми же свойствами, что и $a_{ij}\xi_i\xi_j$. Меняется лишь нормировка: вместо (2.1) $\sum\limits_{k=1}^{n} b_{kk} \geqslant \nu_0 = \mathrm{const} > 0$ — и границы: $|b_{kl}| \leqslant \mu_0 = \mathrm{const} < \infty$. Функция же b отличается от a слагаемым $b_k u_{y_k}$. Чтобы иметь для b такого же типа оценку, что и в теореме 2.1 для a, мы и потребовали выполнения условия (2.16). Именно, в силу (2.2), (2.16) и указанных выше свойств координатных функций $y = y(x)$ для b справедлива оценка

$$\begin{aligned} |b| \leqslant |b_k u_{y_k}| + |a| \leqslant c_8 |u_x| + c_1 \mathscr{E}(u_x) + c_2 \leqslant \\ \leqslant (c_8 c_5 + c_1)\mathscr{E}(u_x) + c_2 + c_6 c_8 = c_9(Bu_y, u_y) + c_{10}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

где $c_9 = c_8 c_5 + c_1$, $c_{10} = c_2 + c_6 c_8$, а c_8 определяется постоянной c_7. Это неравенство отличается от (2.2) лишь заменой постоянных c_1 на c_9, а c_2 на c_{10}. Итак, для уравнения (2.17), его решения u и области $\tilde\Omega_\rho$ изменения аргументов y выполнены, по существу, все условия, благодаря которым выше были получены оценки (2.12) и (2.13) для верхнего и нижнего пределов отношения $(u(y) - u(\bar x))/|y - \bar x|$ при $y \to \bar x$ в точке $\bar x \in \partial S$. Возвращаясь к переменным x, получим оценки для пределов отношения $(u(x) - u(\bar x))/|x - \bar x|$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* a) *и* b) *теоремы* 2.1, *а вместо условия* c) — *условие* c′) *существует шар* $K_{\bar d}(\bar x'')$, *не имеющий с* Ω_ρ *общих точек и содержащий точку* $\bar x \in S$ *на своей границе.*

Пусть, кроме того, выполнено неравенство (2.16). *Тогда*

$$c_{11} \leqslant \varliminf_{|\Delta l| \to 0} \frac{\Delta u}{|\Delta l|}\Big|_{\bar x} \leqslant \varlimsup_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{|\Delta l|}\Big|_{\bar x} \leqslant c_{12}, \tag{2.19}$$

где постоянные c_{11} *и* c_{12} *определяются постоянными* c_1, c_2, c_5, c_6, $\bar d$, ρ *и* $|\varphi|^{(2)}_{\Omega_\rho}$.

Заметим, что условие c′) выполняется для всех точек границы S с некоторой постоянной $\bar d > 0$, если $S \in O^2$. Теорема 2.2 охватывает весь класс равномерно эллиптических уравнений, а также класс неравномерно эллиптических уравнений, у которых порядок неравномерности формы $a_{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j$ не выше 1 (т. е. более узкий класс, нежели теорема 2.1). Ограничения же на член a в обеих теоремах одинаковы.

Укажем на работу Дж. Серрина [51_{11}], в которой дан иной метод оценки $\max\limits_S |\nabla u|$, охватывающий другие классы неравномерно эллиптических уравнений. В частности, он позволил дать оценку $\max\limits_S |\nabla u|$ для уравнений (2.14), причем не только в выпуклых областях. Другой метод оценки $\max\limits_S |\nabla u|$ для уравнений (2.14) имеется в работах И. Я. Бакельмана [$3_{2,3}$].

§ 3. Тотальные оценки $\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$

В данном параграфе будет получена оценка сверху $\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$ для решений $u(x)$ уравнений (0.1) в предположении, что числа $u^{(1)} \leqslant \min\limits_{\Omega} u(x)$, $u^{(2)} \geqslant \max\limits_{\Omega} u(x)$ и $M_1 \geqslant \max\limits_S |\nabla u|$ нам известны. Для этого придется наложить ограничения на поведение функций $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ при $|p| \to \infty$. Будем предполагать функции $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ дифференцируемыми на множестве $\mathfrak{M}_1 \equiv \{(x, u, p)\colon\ x \in \bar\Omega,\ u \in [u^{(1)}, u^{(2)}],\ |p| \geqslant M_2\}$, где M_2 — какая-либо постоянная, не меньшая M_1. Кроме того, сами функции a_{ij}, a и их частные производные по x, u и p считаем ограниченными на любой компактной части $\mathfrak{M}_1$. Уравнение (0.1) должно быть эллиптическим на $\mathfrak{M}_1$, т. е. для него на $\mathfrak{M}_1$ выполнены неравенства (0.2) с положительными непрерывными функциями $\nu(x, u, p)$ и $\mu(x, u, p)$. Для целей данного параграфа и § 4 нам выгодно не нормировать уравнение (0.1) каким-либо одним способом, а сохранить возможность умножать уравнение (0.1) на произвольную гладкую положительную функцию

$f(x, u, u_x)$. Ввиду этого мы и предполагаем условие эллиптичности выполненным в форме (0.2).

Используем в данном параграфе и далее сокращенные обозначения $u_l = u_{x_l}$, $u_{lj} = u_{x_l x_j}$.

Рассмотрим сначала частную ситуацию, когда функции a_{ij} и a зависят только от u_x. Пусть $a_{ij}(p)$ и $a(p)$ дифференцируемы при всех p и ограничены вместе со своими производными первого порядка на любом компактном множестве p *). В этом случае для каждой из производных u_k справедлив принцип максимума в его простейшей форме. Действительно, продифференцируем уравнение (0.1) по x_k и результат запишем в виде $a_{ij}u_{kij} + A_l u_{kl} = 0$, где $u_{kij} = u_{x_k x_i x_j}$, а $A_l = \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_l} u_{ij} + \frac{\partial a}{\partial u_l}$. Если $u(x) \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, то a_{ij} и A_l ограничены в любой области $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, а $a_{ij}(u_x)\xi_i\xi_j \geqslant \nu_0\xi^2$ с $\nu_0 = \mathrm{const} > 0$ в $\bar{\Omega}$, и, следовательно, $\max\limits_{\Omega}|u_k| \leqslant \max\limits_{\partial\Omega}|u_k|$ (см. § 1 гл. III). Это же заключение справедливо и для $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Действительно, как показано в § 1 данной главы, $u(x)$ удовлетворяет тождеству (1.6), которое для нашего случая будет иметь вид

$$\int\limits_{\Omega} (a_{ij}u_{kj}\eta_i + \tilde{A}_j u_{kj}\eta)\, dx = 0,$$

где

$$\tilde{A}_j = \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_m} - \frac{\partial a_{im}}{\partial u_j}\right) u_{mi} - \frac{\partial a}{\partial u_j},$$

с любой $\eta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega')$, $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Это тождество показывает, что u_k может быть рассмотрено как обобщенное решение из $W_2^1(\Omega')$ (и даже из $C^1(\bar{\Omega}')$) соответствующего линейного уравнения, и потому для него $\max\limits_{\Omega'}|u_k| \leqslant \max\limits_{\partial\Omega'}|u_k|$ (см. теорему 13.2 гл. III). Устремляя Ω' к Ω и пользуясь непрерывностью u_k в $\bar{\Omega}$, убедимся, что $\max\limits_{\Omega}|u_k| \leqslant \max\limits_{\partial\Omega}|u_k|$.

Итак, доказана

Теорема 3.1. *Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет в Ω уравнению (0.1) с $a_{ij} = a_{ij}(p)$ и $a = a(p)$. Пусть функции $a_{ij}(p)$, $a(p)$ дифференцируемы по p при всех p и ограничены вместе со своими производными первого порядка на любом ком-*

---

*) Эти условия можно считать выполненными только для $|p| \geqslant M_2$. В этом случае рассуждения, следующие ниже, надо проводить не во всей области Ω, а в $\Omega_1 = \{x\colon x \in \Omega,\ |\nabla u(x)| > M_2\}$.

пактном множестве изменения p *). *Тогда при выполнении условия эллиптичности* (0.2) *для каждой из производных* u_{x_k} *верна оценка* $\max_\Omega |u_{x_k}| \leqslant \max_{\partial\Omega} |u_{x_k}|$.

Утверждение теоремы 3.1, давно известное для случая $u(x) \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$, несправедливо для более общих уравнений (0.1). Для них приходится оценивать не отдельные производные u_k, а $|\nabla u|$. Покажем, как это можно сделать в предположениях, описанных в начале параграфа. Пусть пока решение $u(x) \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$. Введем вместо $u(x)$ новую функцию $v(x)$, связанную с нею равенством $u = \Phi(v)$, где $\Phi(v)$ — монотонно возрастающая функция, для определения которой будет получено сравнительно простое дифференциальное неравенство. Подставим в (0.1) вместо u_{ij} их выражения через v_i и v_{ij}:

$$u_i = \Phi' v_i, \quad u_{ij} = \Phi' v_{ij} + \Phi'' v_i v_j,$$

и, поделив на Φ', запишем полученное равенство в виде

$$a_{ij}(x, u, u_x)\, v_{ij} = -\frac{1}{\Phi'}\left(a + \frac{\Phi''}{(\Phi')^2}\mathscr{E}\right), \tag{3.1}$$

где

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}(u_x), \text{ а } \mathscr{E}(p) \equiv a_{ij}(x, u, p)\, p_i p_j \equiv \mathscr{E}(x, u, p). \tag{3.2}$$

Вычислим от обеих частей (3.1) оператор

$$\begin{aligned} v_k \frac{d}{dx_k} &\equiv v_k \left(u_{kl}\frac{\partial}{\partial u_l} + u_k \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \\ &= v_k \left(\Phi' v_{kl}\frac{\partial}{\partial u_l} + \frac{\Phi''}{(\Phi')^2} u_k u_l \frac{\partial}{\partial u_l} + u_k \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \\ &= \frac{\Phi'}{2}\frac{\partial v_x^2}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial u_l} + \frac{\Phi''}{(\Phi')^3} u_x^2 u_l \frac{\partial}{\partial u_l} + \frac{1}{\Phi'}|u_x|\,\delta, \end{aligned}$$

где через δ обозначен оператор

$$\delta = \frac{u_k}{|u_x|}\frac{\partial}{\partial x_k} + |u_x|\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.3}$$

Обозначим v_x^2 через w и учтем, что $v_k v_{kij} = \frac{1}{2} w_{ij} - v_{ki} v_{kj}$, где $v_{kij} = v_{x_k x_i x_j}$.

Тогда результат применения оператора $v_k \frac{d}{dx_k}$ к (3.1) после ряда элементарных преобразований можно представить в виде

$$\frac{1}{2} a_{ij} w_{ij} - I_1 = A_l w_l, \tag{3.4$_1$}$$

*) Если предположить, что эти условия выполнены лишь при $|p| \geqslant M_2$, то все рассуждения надо проводить не в Ω, а в $\Omega_1 = \{x\colon x \in \Omega,\ |\nabla u(x)| > M_2\}$. В результате докажем, что $\max_\Omega |u_{x_k}| \leqslant \max\{M_2, \max_{\partial\Omega} |u_{x_k}|\}$.

где

$$
\begin{aligned}
I_1 \equiv \frac{u_x^2\mathscr{E}}{(\Phi')^4} I_2 = \frac{u_x^2\mathscr{E}}{(\Phi')^4}\Bigg[-\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)' + \left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)^2\left(2 - \frac{p\mathscr{E}_p}{\mathscr{E}}\right) + \\
+ (\Phi')^4 \frac{a_{ij}v_{ki}v_{kj}}{u_x^2\mathscr{E}} - \Phi''\left(\frac{\delta\mathscr{E}}{|u_x|\mathscr{E}} + \frac{pa_p - a}{\mathscr{E}}\right) - \\
- (\Phi')^2 \frac{\delta a}{|u_x|\mathscr{E}} - \Phi'\Phi'' \frac{pa_{ijp}}{\mathscr{E}} v_{ij} - (\Phi')^3 \frac{\delta a_{ij}}{|u_x|\mathscr{E}} v_{ij}\Bigg], \qquad (3.4_2)
\end{aligned}
$$

а

$$
A_l = -\frac{\Phi'}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_l} v_{ij} - \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial u_l} - \frac{\Phi''}{2(\Phi')^2}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial u_l}. \qquad (3.4_3)
$$

Здесь и ниже будет использовано обозначение:

$$
p\psi_p = p_k \frac{\partial \psi}{\partial p_k}, \quad \text{если} \quad \psi = \psi(x, u, p),
$$

и

$$
p\psi_p = u_k \frac{\partial \psi}{\partial u_k}, \quad \text{если} \quad \psi = \psi(x, u, u_x).
$$

Мы подберем функцию Φ так, чтобы в тех точках области $\Omega_1 = \{x\colon x \in \Omega, |u_x(x)| > M_2\}$, в которых $w(x)$ имеет максимум, величина I_1 была положительной. При такой $\Phi(v)$ из соотношения (3.4_1) следует, что w не может иметь в Ω_1 точек максимума, и, следовательно, $\max\limits_{\Omega_1} w(x) = \max\limits_{\partial\Omega_1} w(x)$. Но

$$
\max_{\partial\Omega_1} w(x) = \max_{\partial\Omega_1} \frac{u_x^2}{(\Phi'(v))^2} \leqslant \left(\frac{M_2}{\min\limits_{\Omega} \Phi'[\Phi^{-1}(u(x))]}\right)^2,
$$

и потому

$$
\max_{\Omega} u_x^2(x) \leqslant M_2^2 \left(\frac{\max\limits_{\Omega} \Phi'[\Phi^{-1}(u(x))]}{\min\limits_{\Omega} \Phi'[\Phi^{-1}(u(x))]}\right)^2. \qquad (3.5)
$$

Функция $\Phi(v)$ будет выбрана так, что $\Phi'(v) > 0$ и при изменении $u = \Phi(v)$ в диапазоне от $u^{(1)}$ до $u^{(2)}$ функция $v(x) = \Phi^{-1}(u(x))$ меняется в конечных пределах от $v^{(1)}$ до $v^{(2)}$. Благодаря этому правая часть (3.5) окажется ограниченной сверху известной нам постоянной.

Итак, вопрос получения оценки $\max\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|$ сведен к построению функции $\Phi(v)$ с указанными выше свойствами. Однако, прежде чем заняться разысканием функции $\Phi(v)$, покажем, как предположение о принадлежности $u(x)$ к $C^3(\Omega)$ заменить на принадлежность $u(x)$ к $C^2(\Omega)$. Для этого запишем соотношение

(3.4$_1$) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx_i}(a_{ij}w_j)-a_iw_i=I_1, \tag{3.6}$$

где $a_i=\frac{1}{2}\frac{da_{ij}}{dx_j}+A_i$.

Пусть $M_2>\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$. Тогда из принадлежности $u(x)$ к $C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$ следует, что $\bar\Omega_1\subset\Omega$ и a_{ij}, a_i и I_1, рассмотренные как сложные функции x, непрерывны в $\bar\Omega_1$, а $w\in C^1(\bar\Omega_1)$. Благодаря этому $w(x)$ можно рассматривать как обобщенное решение из $W_2^1(\Omega_1)$ (и даже из $C^1(\bar\Omega_1)$) линейного уравнения (3.6), т. е. считать, что оно вместо (3.6) удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Omega_1}\left(\frac{1}{2}a_{ij}w_j\eta_i+a_iw_i\eta+I_1\eta\right)dx=0 \tag{3.7}$$

при $\forall\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_1)$ (проверяется это так же, как аналогичный факт в § 1 данной главы). Пусть функция $\Phi(v)$ выбрана такой, как описано выше при выводе оценки (3.5). Покажем, что тогда $\max\limits_{\Omega_1}w=\max\limits_{\partial\Omega_1}w$. Действительно, предположим, что это не так, т. е. $\max\limits_{\Omega_1}w\equiv k>\max\limits_{\partial\Omega_1}w$. Пусть $\mathscr{E}_k=\{x\colon x\in\Omega_1,\ w(x)=k\}$. $\mathscr{E}_k$ — замкнуто в Ω_1, причем $I_1(x)>0$ при $x\in\mathscr{E}_k$. В силу непрерывности $I_1(x)$ оно положительно и в некоторой окрестности множества $\mathscr{E}_k$, и потому существует область Ω_1' с гладкой границей такая, что $\mathscr{E}_k\subset\Omega_1'\subset\Omega_1$, $\max\limits_{\partial\Omega_1'}w(x)<k$ и $I_1(x)>0$ при $x\in\Omega_1'$. Благодаря этому из (3.7) следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega_1'}\left(\frac{1}{2}a_{ij}w_j\eta_i+a_iw_i\eta\right)dx\leqslant 0 \tag{3.8}$$

для любой неотрицательной $\eta(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_1')$. Но (3.8) невозможно в силу принципа максимума для обобщенных решений из $W_2^1(\Omega_1')$ (см. теорему 13.2 гл. III). Итак, доказано, что $\max\limits_{\Omega_1}w(x)=\max\limits_{\partial\Omega_1}w(x)$, откуда, как выяснено выше, следует оценка (3.5).

Итак, получение оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|$ сведено к нахождению функции $\Phi(v)$. Как было сказано выше, она должна быть дважды непрерывно дифференцируемой на некотором конечном отрезке $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ и должна на нем удовлетворять условиям

$$\Phi'(v)>0,\qquad \int\limits_{v^{(1)}}^{v^{(2)}}\Phi'(v)\,dv=\Phi(v^{(2)})-\Phi(v^{(1)})=u^{(2)}-u^{(1)}\equiv\omega. \tag{3.9}$$

Кроме того, в точках Ω_1, где $w(x)$ имеет максимум, величина I_2 должна быть положительной. Пусть

$$\min_{\substack{\xi:\,|\xi|=1\\ (\xi,\,p)=0}} a_{ij}(x, u, p)\,\xi_i\xi_j \geqslant \nu_1(x, u, p), \tag{3.10}$$

где $\nu_1(x, u, p)$ — непрерывная положительная функция.

Пусть x^0 есть произвольная точка максимума $w(x)$ в $\overline{\Omega}_1$ и $x^0 \in \Omega_1$. В ней

$$w_i = 2v_k v_{ki} = \frac{2}{\Phi'} u_k v_{ki} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Поэтому в точке x^0

$$a_{ij}(x, u, u_x)\, v_{ki} v_{kj} \geqslant \nu_1(x, u, u_x)\, v_{xx}^2 \tag{3.11}$$

и

$$I_2 \geqslant -\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)' + \left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)^2\left(2 - \frac{p\mathscr{E}_p}{\mathscr{E}}\right) + (\Phi')^4 \frac{\nu_1 v_{xx}^2}{u_x^2 \mathscr{E}} -$$
$$- \Phi''\left(\frac{\delta\mathscr{E}}{|u_x|\mathscr{E}} + \frac{pa_p - a}{\mathscr{E}}\right) - (\Phi')^2 \frac{\delta a}{|u_x|\mathscr{E}} - \Phi'\Phi'' \frac{pa_{ijp}}{\mathscr{E}} v_{ij} -$$
$$- (\Phi')^3 \frac{\delta a_{ij}}{|u_x|\mathscr{E}} v_{ij} \equiv I_3(x, u, u_x, v_{ij}, \Phi'(v), \Phi''(v))\ ^{*}). \tag{3.12}$$

Из проведенных выше рассуждений можно сделать пока следующее заключение:

Теорема 3.2. *Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяет в Ω уравнению* (0.1) *и $u^{(1)} \leqslant \min\limits_{\Omega} u(x)$, $u^{(2)} \geqslant \max\limits_{\Omega} u(x)$, $M_1 \geqslant \max\limits_{\partial\Omega} |\nabla u|$.*

Пусть на множестве $\mathfrak{M}_1 = \{(x, u, p)\colon x \in \overline{\Omega},\ u \in [u^{(1)}, u^{(2)}],\ |p| \geqslant M_2 > M_1\}$ функции $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ дифференцируемы и на любой его компактной части ограничены вместе со своими частными производными первого порядка. Кроме того, предположим, что a_{ij} удовлетворяют (3.10) *на $\mathfrak{M}_1$ с некоторой положительной непрерывной функцией $\nu_1(x, u, p)$, и $a_{ij}(x, u, p)\,\xi_i\xi_j > 0$ для $|\xi| = 1$. Тогда, если существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(v)$, удовлетворяющая условиям* (3.9) *и такая, что при $(x, u, p) \in \mathfrak{M}_1$, $v \in [v^{(1)}, v^{(2)}]$ и произвольных v_{ij},*

---

*) Напомним, что I_1 и I_2 определены в равенстве (3.4$_2$). Зависимость I_3 от аргументов v_{ij}, Φ' и Φ'' — это та, которая выписана явно, зависимость же I_3 от аргументов x, u, u_x сложнее: она определяется функциями $a = a(x, u, u_x)$, $\mathscr{E} = \mathscr{E}(x, u, u_x) = a_{ij}(x, u, u_x)\, u_{x_i} u_{x_j}$ и др., причем u и u_x рассматриваются как независимые аргументы.

связанных с x, u, p *и* $\Phi(v)$ *лишь равенствами*

$$a_{ij}(x, u, p)\, v_{ij} = -\frac{1}{\Phi'(v)}\left[a(x, u, p) + \frac{\Phi''(v)}{(\Phi'(v))^2}\mathscr{E}(x, u, p)\right], \tag{3.13$_1$}$$

$$p_k v_{ki} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.13$_2$}$$

выполняется неравенство

$$I_3(x, u, p, v_{ij}, \Phi'(v), \Phi''(v)) > 0, \tag{3.14}$$

то для $\max_\Omega|\nabla u(x)|$ *справедлива оценка* (3.5).

Легко проверить, что $I_3(x, u, p, v_{ij}, \Phi'(v), \Phi''(v))$ не меняется при переходе от функций $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$, $\mathscr{E}(x, u, p)$ к fa_{ij}, fa, $f\mathscr{E}$ при любой гладкой $f = f(x, u, p) > 0$, если v_{ij} считать связанными с другими аргументами равенством (3.13$_1$). Иначе говоря, условия теоремы **3.2** инвариантны по отношению к нормировке уравнения (0.1). К сожалению, это свойство нарушается в формулировках даваемых ниже достаточных условий на a_{ij} и a, гарантирующих существование функции $\Phi(v)$. Предположим, что при $(x, u, p) \in \mathfrak{M}_1$ функции $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$, помимо (3.10), удовлетворяют условиям

$$2 - \frac{p\mathscr{E}_p}{\mathscr{E}} \geqslant c_1, \tag{3.15}$$

$$\sum_{i, j=1}^{n}(pa_{ijp})^2 \leqslant c_2\nu_1\mathscr{E}|p|^{-2}, \tag{3.16}$$

$$\sum_{i, j=1}^{n}(\delta a_{ij})^2 \leqslant c_3\nu_1\mathscr{E}, \tag{3.17}$$

$$\delta\mathscr{E} + (pa_p - a)|p| \geqslant c_4\mathscr{E}|p|, \tag{3.18}$$

$$-\delta a \geqslant c_5\mathscr{E}|p|, \tag{3.19}$$

где c_2 и c_3, очевидно, неотрицательны, а остальные постоянные c_i произвольны. В них $\mathscr{E} = \mathscr{E}(p) = a_{ij}(x, u, p)\, p_i p_j$, а $\nu_1 = \nu_1(x, u, p)$ взято из (3.10). Подчиним искомую функцию $\Phi(v)$ дополнительному условию: $\Phi''(v) \leqslant 0$. Тогда для I_3 в силу предположений (3.15)—(3.19) получим следующую оценку снизу:

$$\begin{aligned}
I_3 &\geqslant -\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)' + c_1\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)^2 + (\Phi')^4\frac{\nu_1 v_{xx}^2}{u_x^2\mathscr{E}} - c_4\Phi'' + \\
&\quad + c_5(\Phi')^2 - \Phi'\Phi''\frac{\sqrt{c_2\nu_1}\,|v_{xx}|}{\sqrt{\mathscr{E}}\,|u_x|} - (\Phi')^3\frac{\sqrt{c_3\nu_1}\,|v_{xx}|}{\sqrt{\mathscr{E}}\,|u_x|} \geqslant \\
&\geqslant -\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)' + \left(c_1 - \frac{c_2\nu_1}{4\varepsilon_1}\right)\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)^2 + (\nu_1 - 2\varepsilon_1)\frac{(\Phi')^4 v_{xx}^2}{u_x^2\mathscr{E}} - \\
&\qquad - c_4\Phi'' + \left(c_5 - \frac{c_3\nu_1}{4\varepsilon_1}\right)(\Phi')^2,
\end{aligned}$$

Здесь ε_1 — произвольное положительное число. Возьмем $\varepsilon_1 = \nu_1/2$ и вместо $I_3 > 0$ удовлетворим более сильному неравенству:

$$-\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)' + c'\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)^2 - c''\Phi'' - c'''(\Phi')^2 \geqslant 0, \tag{3.20}$$

в котором $c' = c_1 - \frac{c_2}{2}$, $c'' = c_4$, $c''' = -c_5 + \frac{c_3}{2} + \varepsilon$, а ε — произвольно малое положительное число. Из (3.20) следует $I_3 > 0$, ибо $\Phi'(v) > 0$. Если $c''' \leqslant 0$, то функция $\Phi(v) = v$ удовлетворяет всем требуемым условиям. Рассмотрим теперь случай, когда $c''' > 0$, помня, что, помимо требований (3.9), производная Φ'' должна быть неположительна. Если $c' > 1$, то вместо (3.20) мы удовлетворим более сильному требованию: неравенству (3.20), в котором c' заменена на 1. В этом случае, как будет видно из последующих рассмотрений, нужная нам функция $\Phi(v)$ существует при любых значениях остальных постоянных.

Итак, пусть в (3.20) $c' \leqslant 1$. Будем искать $\Phi(v)$ как решение уравнения

$$-\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)' + c'\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)^2 - c''\Phi'' - c'''(\Phi')^2 = 0. \tag{3.21}$$

Введем для этого функцию $\eta(v)$ с помощью равенства $\Phi'(v) = e^{\eta(v)}$. Для нее из (3.21) следует уравнение

$$-\eta'' + c'(\eta')^2 - c''e^{\eta}\eta' - c'''e^{2\eta} = 0. \tag{3.22}$$

Рассмотрим η как аргумент, а $\zeta = \eta' \equiv \frac{d\eta}{dv}$ как новую неизвестную функцию. Тогда для ζ из (3.22) выведем уравнение

$$-\zeta\frac{d\zeta}{d\eta} + c'\zeta^2 - c''e^{\eta}\zeta - c'''e^{2\eta} = 0, \tag{3.23}$$

а для $\alpha = -\zeta e^{-\eta}$ уравнение

$$\alpha\frac{d\alpha}{d\eta} = -(1 - c')\alpha^2 + c''\alpha - c'''. \tag{3.24}$$

Так как $\Phi''(v) = e^{\eta(v)}\frac{d\eta}{dv} = -\alpha e^{2\eta}$, то ввиду требования $\Phi''(v) \leqslant 0$ надо брать $\alpha \geqslant 0$. Проинтегрируем (3.24) в пределах от $\alpha = \alpha_0$ до $\alpha > \alpha_0$, взяв $\eta = 0$ при $\alpha = \alpha_0$:

$$F(\alpha, \alpha_0) \equiv \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\alpha\,d\alpha}{(1 - c')\alpha^2 - c''\alpha + c'''} = -\eta. \tag{3.25}$$

В качестве α_0 возьмем 0, если полином $p(\alpha) \equiv (1 - c')\alpha^2 - c''\alpha + c'''$ не имеет неотрицательных корней. Если же $p(\alpha)$ обращается в нуль при каком-либо $\alpha \geqslant 0$, то за α_0 возьмем число, чуть большее наибольшего из корней $p(\alpha)$, который мы обозначим через α_1 (так что $p(\alpha_1)=0$ и $\alpha_1\geqslant 0$). При изменении α от α_0 до ∞ переменная η меняется от 0 до ∞, если $c'=1$ и $c''>0$, и η меняется от 0 до $-\infty$ во всех остальных случаях. Исключим пока случай $c'=1$, $c''>0$. Соотношение (3.25) однозначно определяет $\alpha=\alpha(\eta)\geqslant\alpha_0$. По функции $\alpha(\eta)$ из уравнения $\zeta=\frac{d\eta}{dv}=-\alpha(\eta)e^{\eta}$ определим одно из его решений:

$$v=\int\limits_{\eta}^{0}\frac{d\eta}{\alpha(\eta)e^{\eta}}\equiv\Psi(\eta). \tag{3.26}$$

При изменении η от $-\infty$ до 0 переменная v меняется от $v_2\equiv\Psi(-\infty)$ до $v^{(1)}=0$, причем v_2 может оказаться как конечным положительным числом, так и ∞. Соотношение (3.26) однозначно определяет η как функцию v на интервале $[0, v_2)$. В силу $\Phi'(v)=e^{\eta(v)}$ функцию $\Phi(v)$ по $\eta(v)$ определим равенством

$$u=\Phi(v)=u^{(1)}+\int\limits_{0}^{v}e^{\eta(v)}\,dv,\qquad v\in[0, v_2). \tag{3.27}$$

Она удовлетворяет уравнению (3.21) и требованиям: $\Phi'(v)>0$, $\Phi''(v)\leqslant 0$. Однако есть еще одно требование — (3.9), которое, как мы увидим, наложит ограничение на постоянные c', c'', c''' и ω. Для этого, учитывая связи между Φ, η и α, подсчитаем интеграл

$$\int\limits_{0}^{v_2}\Phi'(v)\,dv=\int\limits_{0}^{v_2}e^{\eta(v)}\,dv=\int\limits_{0}^{-\infty}e^{\eta}\frac{dv}{d\eta}\,d\eta=-\int\limits_{0}^{-\infty}\frac{d\eta}{\alpha(\eta)}=$$
$$=-\int\limits_{\alpha_0}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\frac{d\eta}{d\alpha}\,d\alpha=\int\limits_{\alpha_0}^{\infty}\frac{d\alpha}{(1-c')\alpha^2-c''\alpha+c'''}.$$

Чтобы удовлетворить условию (3.9) с $v^{(2)}<\infty$ (в качестве $v^{(1)}$ берем 0), надо потребовать:

$$\int\limits_{\alpha_0}^{\infty}\frac{d\alpha}{(1-c')\alpha^2-c''\alpha+c'''}>\omega. \tag{3.28}$$

Если $c'=1$, то интеграл расходится и условие (3.28) удовлетворяется при любом $\omega<\infty$. Рассмотрим еще отброшенный случай, когда $c'=1$, а $c''>0$. Как сказано выше, для таких c' и c'' переменная η при изменении α от α_0 до ∞ меняется от 0 до ∞. В силу этого v, определяемая равенством (3.26), при изменении η от 0 до ∞ будет меняться от 0 до $-\infty$. Определим по $\eta(v)$ функцию $u=\Phi(v)$, вместо (3.27), равенством

$$u=\Phi(v)=u^{(2)}+\int\limits_0^v \Phi'(v)\,dv=u^{(2)}+\int\limits_0^v e^{\eta(v)}\,dv, \qquad v\in(-\infty, 0]. \tag{3.29}$$

Интеграл $\int\limits_0^{-\infty} \Phi'(v)\,dv=\int\limits_{\alpha_0}^{\infty}\frac{d\alpha}{-c''\alpha+c'''}$ расходится, и потому $\Phi(v)=u^{(1)}$ при некотором конечном $v=v^{(1)}$, каково бы ни было $u^{(1)}>-\infty$. Итак, в этом случае функцию $\Phi(v)$ рассматриваем на отрезке $[v^{(1)}, v^{(2)}=0]$, причем $v^{(1)}>-\infty$.

Итак, мы показали, что при $c'=1$ (и тем более $c'>1$) задача (3.20), (3.9) имеет решение $\Phi(v)$ с $\Phi''(v)\leqslant 0$. Если же $c'<1$, то для существования решения $\Phi(v)$ задачи (3.21), (3.9) с $\Phi''(v)\leqslant 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (3.28). Если знаменатель $p(\alpha)$ не имеет корней на $[0, \infty)$, то α_0 берем равным нулю. Если же $p(\alpha)=0$ при каком-либо $\alpha=\alpha_1\geqslant 0$, то условие (3.28) удовлетворяется (ибо α_0 можно брать как угодно близким к α_1). Обратим, наконец, внимание на то, что в c''' входит ε, которое мы можем выбрать сколь угодно малым положительным числом. Установленные нами критерии разрешимости задачи для Φ таковы, что в них, как нетрудно видеть, ε можно положить равным нулю. Итак, доказана

Теорема 3.3. *Пусть $u(x)$ и a_{ij}, a удовлетворяют условиям теоремы 3.2, а предположение о существовании функции $\Phi(v)$ заменено условиями (3.15)—(3.19). Пусть, далее, постоянные $c_1, \ldots, c_5$ удовлетворяют или 1) неравенству $c'''\equiv -c_5+\frac{c_3}{2}\leqslant 0$, или 2) неравенству $c'\equiv c_1-\frac{c_2}{2}\geqslant 1$, или 3) при $c'''>0$ и $c'<1$ полином $p(\alpha)\equiv(1-c')\alpha^2-c''\alpha+c'''$, где $c''=c_4$, имеет неотрицательный корень, или, наконец, 4) при $c'''>0$, $c'<1$ и $p(\alpha)>0$ для $\alpha\geqslant 0$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{d\alpha}{(1-c')\alpha^2-c''\alpha+c'''}>\omega\equiv u^{(2)}-u^{(1)}. \tag{3.30}$$

Тогда существует функция $\Phi(v)$ с $\Phi'(v)\leqslant 0$, удовлетворяющая (3.9) и (3.14), и для $\max\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|$ справедлива оценка (3.5).

Условие (3.30) можно рассматривать и как ограничение на колебание ω решения $u(x)$ в Ω при фиксированных постоянных $c_1, \ldots, c_5$.

Замечание 3.1. Нетрудно проверить, что если постоянные c', c'', c''' и ω удовлетворяют одному из четырех условий теоремы 3.3, то и достаточно близкие к ним постоянные будут удовлетворять одному из них (может быть, другому). Иначе говоря, условия 1) — 4) теоремы 3.3 таковы, что они выделяют в пространстве $(c', c'', c''', \omega) \in E_4$ открытое множество.

Замечание 3.2. Постоянные $c_1, \ldots, c_5$, а потому и постоянные $c' - c'''$ не меняются при умножении уравнения (0.1) на постоянную. Однако при замене a_{ij}, a на fa_{ij}, fa и, соответственно, $\mathcal{E}$ на $f\mathcal{E}$, а ν_1 на $f\nu_1$, где $f = f(x, u, u_x)$ — какая-либо гладкая положительная функция, постоянные $c_1, \ldots, c_5$, вообще говоря, изменятся. Этим обстоятельством надо пользоваться при проверке критериев 1) — 4) теоремы 3.3: может оказаться, что при удачном выборе f один из них удовлетворится, а при другом выборе f ни один из них не будет выполнен. Проиллюстрируем это на примере уравнения (2.14), считая $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, u)$. Для него $a_{ij} = (1 + p^2)\ \delta_i^j - p_i p_j$, $a = -n\mathcal{H}(1 + p^2)^{3/2}$, следовательно, $\mathcal{E} = p^2$, а $\nu_1 = 1 + p^2$. Легко проверить, что $2 - \frac{p\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}} = 0$, т. е. $c_1 = 0$, а $\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} (pa_{ij\,p})^2 = 4p^2(n - 1)$, так что c_2 можно взять равным $4(n - 1)$. Далее, $\delta\mathcal{E} = 0$; a при больших $|p|$ имеет вид

$$a = -n\mathcal{H}|p|^3\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{3/2} = -n\mathcal{H}|p|^3\left(1 + \frac{3}{2p^2} + \ldots\right),$$

и, следовательно, $pa_p - a = -2n\mathcal{H}|p|^3\left[1 + O\left(\frac{1}{p^4}\right)\right]$. Если не предполагать, что $\mathcal{H} \leqslant 0$, то неравенство (3.18) не выполняется ни при каких c_4 и условия теоремы 3.3 тем самым не удовлетворены. Тем не менее, если уравнение (2.14) поделить предварительно на $|u_x|^2$, то для полученного уравнения $\mathcal{E} \equiv 1$, а a равно $-n\mathcal{H}|p|\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{3/2}$, и, следовательно, $pa_p - a = 3n\mathcal{H}|p|^{-1}\left[1 + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right]$. Если предположить, что $|\mathcal{H}| \leqslant \mu_1$, то условие (3.18) выполняется. Постоянная c_3, очевидно, равна нулю. Сумма $\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} (pa_{ij\,p})^2 = 4n/p^4$, а $\nu_1 = (1 + p^2)/p^2$, поэтому c_2 можно взять сколь угодно малой, взяв M_2 достаточно большим (напомним, что все рассмотрения проводятся лишь для $|p| \geqslant M_2$). Постоянная $c_1 = 2$, и потому $c' = c_1 - \frac{c_2}{2}$ будет $\geqslant 1$ при $c_2 \leqslant 2$. Ввиду этого значения других постоянных $c_3 - c_5$ несущественны, лишь бы $|c_5| < \infty$. Для конечности c_5 достаточно предположить, что $|\mathcal{H}_x| \leqslant \mathrm{const}$, а $\mathcal{H}_u \geqslant 0$. Если $\mathcal{H}$ зависит и от p, то, как нетрудно подсчитать, для справедливости (3.18) достаточно предположить, что $|p\mathcal{H}_p| \leqslant \mathrm{const}\,|p|^{-1}$. Итак, мы убедились в возможности применить теорему 3.3 для получения оценки $\max_{\Omega} |\nabla u(x)|$, если относительно $\mathscr{H} = \mathscr{H}(x, u, p)$ выполнены условия:

$$|\mathscr{H}| \leqslant c|p|, \quad |\mathscr{H}_x| \leqslant c, \quad \mathscr{H}_u \geqslant 0, \quad |p\mathscr{H}_p| \leqslant c|p|^{-1} \tag{3.31}$$

для $(x, u, p) \in \mathfrak{M}_1$.

Замечание 3.3. Так как нас интересует вопрос о разыскании хотя бы одной функции $\Phi(v)$, удовлетворяющей условиям (3.9), (3.20) и $\Phi'' \leqslant 0$, а не вопрос об интегрировании уравнения (3.21) при дополнительных условиях (3.9) и $\Phi'' \leqslant 0$, то при некотором огрублении условий на $c_1, \ldots, c_5$ можно дать явное выражение для $\Phi(v)$ (это и делалось в наших прежних публикациях и работах других авторов, следовавших описанному здесь пути получения оценки $\max_{\Omega} |\nabla u|$, — см., например, [I], гл. VI, [51_{11}, $3_{2,3}$]). Так, например, если c' и c'' произвольно фиксированы, а c''' и ω^2 достаточно малы, то всем условиям удовлетворяет функция

$$u = \Phi(v) = \frac{3u^{(1)} - u^{(2)}}{2} + 3\omega e \int_0^v e^{-s^q} ds \tag{3.32}$$

с некоторым большим q (см. [I], стр. 405). Действительно, при изменении u от $u^{(1)}$ до $u^{(2)}$ интеграл $\int_0^v e^{-s^q} ds$ меняется в интервале $\left[\frac{1}{6e}, \frac{1}{2e}\right]$, так что

$$\int_0^{v^{(1)}} e^{-s^q} ds = \frac{1}{6e}, \qquad \int_0^{v^{(2)}} e^{-s^q} ds = \frac{1}{2e}.$$

При любом $q \geqslant 1$ значения функции e^{-s^q} заключены между e^{-1} и 1 на интервале $0 \leqslant s \leqslant 1$ и между 0 и 1 для всех $s \geqslant 1$; поэтому при всех $q \geqslant 1$

$$\frac{1}{6e} < \int_0^{v^{(1)}} ds = v^{(1)}$$

и

$$\frac{1}{2e} = \int_0^{v^{(2)}} e^{-s^q} ds = \int_0^{1/2} e^{-s^q} ds + \int_{1/2}^{v^{(2)}} e^{-s^q} ds > \frac{1}{2e} + \int_{1/2}^{v^{(2)}} e^{-s^q} ds,$$

т. е. $v^{(2)} < 1/2$. Итак, при всех $q \geqslant 1$

$$\frac{1}{6e} < v^{(1)} < v^{(2)} < \frac{1}{2}.$$

Далее,

$$\Phi' = 3\omega e^{1-v^q}, \quad \Phi'' = -3\omega q v^{q-1} e^{1-v^q},$$

$$\frac{\Phi''}{\Phi'} = -qv^{q-1}, \quad \left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)' = -q(q-1)v^{q-2}.$$

Для взятой $\Phi(v)$ неравенство (3.20) имеет вид

$$q^2 v^{q-2}\left[1 - \frac{1}{q} + c'v^q + c''3\omega\frac{v}{q}e^{1-v^q} - \right.$$
$$\left. - 9c'''\omega^2\frac{1}{q^2}v^{2-q}e^{2-2v^q}\right] \geqslant 0. \quad (3.33)$$

При $q \to \infty$ второй, третий и четвертый члены квадратной скобки стремятся к нулю. Возьмем $q \geqslant 2$ и такими, чтобы их сумма по модулю не превосходила, например, 1/2. Тогда, если $c'''\omega^2 \leqslant 2q^2(6e)^{-q}$, то неравенство (3.33) будет выполняться.

Подсчитаем, какой рост по $|p|$ функций $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ и их частных производных допускается требованиями (3.10), (3.15) — (3.19). Сделаем это для нашего основного объекта изучения — равномерно эллиптических уравнений. Для них справедливы неравенства (0.2), причем $\tau(x, u, p) \leqslant \text{const} < \infty$. Иными словами, функции $a_{ij}(x, u, p)$ при $|p| \to \infty$ ведут себя как функция $\nu(x, u, p)$. Функцию $\nu_1(x, u, p)$ из (3.10) можно считать, очевидно, заключенной в пределах $\nu(x, u, p) \leqslant \nu_1(x, u, p) \leqslant \mu(x, u, p)$. Функция $\mathscr{E}(p)$ растет при $|p| \to \infty$, как $\nu(x, u, p)|p|^2$. Как показывает пример (2.26) гл. I, для возможности оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|$ через известные в задаче Дирихле величины необходимо, чтобы порядок роста функции $a(x, u, p)$ не превосходил порядка роста $\mathscr{E}$, т. е. чтобы

$$|a(x, u, p)| \leqslant \mu_1 \nu(x, u, p)|p|^2, \qquad \mu_1 = \text{const}. \quad (3.34)$$

Если функции $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ при дифференцировании по p ведут себя как полиномы, т. е. дифференцирование по p_k понижает их порядок роста (по крайней мере) на единицу, то неравенства (3.15) и (3.16) являются следствием (0.2). Вспоминая определение оператора $\delta \doteq \frac{p_k}{|p|}\frac{\partial}{\partial x_k} + |p|\frac{\partial}{\partial u}$, легко подсчитать, что остальные неравенства (3.17) — (3.19) также будут следствиями (0.2) и (3.34), если при дифференцировании a_{ij}, a по u порядок роста по $|p|$ не возрастает, а при дифференцировании по x может даже возрастать, но не более чем на 1. Запишем эти условия на частные производные a_{ij} и a в виде неравенств

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial p}\right| |p|^2 + \left|\frac{\partial a}{\partial p}\right| \leqslant \mu_2 \nu |p|, \tag{3.35}$$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\right| \leqslant \mu_3 \nu, \tag{3.36}$$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x}\right| \leqslant \mu_4 \nu |p|, \tag{3.37}$$

$$-\frac{p_k}{|p|}\frac{\partial a}{\partial x_k} - |p|\frac{\partial a}{\partial u} \geqslant \mu_5 \nu |p|^3, \qquad \mu_i = \text{const}. \tag{3.38}$$

Если a_{ij} и a удовлетворяют неравенствам (0.2), (3.34) — (3.38), то тем более они удовлетворяют неравенствам (3.10) и (3.15) — (3.19) с c_i, вычисленными по μ_i. Теорема 3.3 гарантирует возможность оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|$, например, в случае 1) когда постоянные μ_3, μ_4 и $|\mu_5|$ при произвольно фиксированных других постоянных и ω достаточно малы, или 2) когда μ_5 есть достаточно большое положительное число, или 3) когда ω достаточно мало (более точно см. теорему 3.3). Нам неясно, вызваны ли ограничения теоремы 3.3 на величины постоянных, входящих во все эти неравенства, существом дела или избранным нами методом оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$.

В работе [14$_3$] А. В. Иванова дана оценка $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ для решений $u(x)$ из $C^3(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ неравномерно эллиптических уравнений (0.1), обладающих следующими специфическими особенностями. Квадратичная форма $(A\xi, \xi) \equiv a_{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j \equiv A^{\xi}(p)$ для них положительно определенна и удовлетворяет условиям

$$|A^{\xi}_{p_k}(p)| \equiv \left|\frac{\partial a_{ij}(x, u, p)}{\partial p_k}\xi_i\xi_j\right| \leqslant \mu_1 A^{\xi}(p)|p|^{-1}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.39}$$

$$|A^{\xi}_{u}(p)| \equiv \left|\frac{\partial a_{ij}(x, u, p)}{\partial u}\xi_i\xi_j\right| \leqslant \mu_2 A^{\xi}(p)|p|^{-1}, \tag{3.40}$$

$$|A^{\xi}_{x_k}(p)| \equiv \left|\frac{\partial a_{ij}(x, u, p)}{\partial x_k}\xi_i\xi_j\right| \leqslant \mu_2 A^{\xi}(p), \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{3.41}$$

при $|\xi| = 1$ и $(x, u, p) \in \mathfrak{M}_1$, причем постоянная μ_2 достаточно мала. Эти условия допускают неравномерный рост формы $A^{\xi}(p)$ по разным направлениям ξ, но требуют, грубо говоря, чтобы эта неравномерность по ξ была одинаковой для всех форм $A^{\xi}(p)$, $A^{\xi}_{p_k}(p)$, $A^{\xi}_{u}(p)$ и $A^{\xi}_{x_k}(p)$. Относительно $a(x, u, p)$ предполагается, что на $\mathfrak{M}_1$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{p_k}^2(x, u, p) + a_u(x, u, p) +} \\ + |p|^{-1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{x_k}^2(x, u, p)} \leqslant \mu_3 \operatorname{Sp} A(p) \qquad (3.42)$$

с достаточно малой постоянной μ_3. Здесь $A(p)$, как и выше, — матрица с элементами $a_{ij}(x, u, p)$.

Для оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ вычислим от обеих частей (0.1) оператор $u_k \frac{d}{dx_k}$ и результат запишем в виде

$$\frac{1}{2} a_{ij} v_{ij} = a_{ij} u_{ki} u_{kj} - \frac{1}{2}\left(a_{p_l} - a_{ijp_l} u_{ij}\right) v_l - \\ - \sqrt{v}\,[\delta a + (\delta a_{ij}) u_{ij}], \qquad (3.43)$$

где $v = u_x^2$ (в связи с этим см. начало параграфа; (3.43) есть частный случай (3.4_l) при $\Phi(v) = v$). Рассмотрим (3.43) в точке $x \in \Omega$, где $|\nabla u(x)| \geqslant M_2$. Сумма $a_{ij} u_{ki} u_{kj} = \operatorname{Sp}\{D^2 u A D^2 u\}$, где $A = \|a_{ij}\|$, $D^2 u = \|u_{ij}\|$, $D^2 u A D^2 u$ — произведение этих матриц, а символ $\operatorname{Sp} B$ здесь и выше означает след матрицы B.

Представим матрицу $D^2 u$ в виде $D^2 u = T\widetilde{D^2 u}T^*$, где $\widetilde{D^2 u} =$ $= \begin{Vmatrix} \tilde{u}_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{u}_{nn} \end{Vmatrix}$ — диагональная матрица, а T — ортогональная матрица $\|\tau_{ij}\|$, преобразующая матрицу $D^2 u$ в $\widetilde{D^2 u}$. Ввиду этого и инвариантности следа матрицы при ортогональных преобразованиях

$$a_{ij} u_{ki} u_{kj} = \operatorname{Sp}\{\widetilde{D^2 u}\tilde{A}\widetilde{D^2 u}\} = \tilde{a}_{ii}\tilde{u}_{ii}^2, \qquad (3.44)$$

где $\tilde{A} = T^* A T$. Аналогично этому представим сумму $a_{ijp_l} u_{ij}$:

$$a_{ijp_l} u_{ij} = \frac{\partial}{\partial p_l}(a_{ij} u_{ij}) = \frac{\partial}{\partial p_l} \operatorname{Sp}\{A D^2 u\} = \\ = \frac{\partial}{\partial p_l} \operatorname{Sp}\{\tilde{A}\widetilde{D^2 u}\} = \frac{\partial}{\partial p_l}(\tilde{a}_{ii}\tilde{u}_{ii}) = (\tilde{a}_{ii})_{p_l}\tilde{u}_{ii} \qquad (3.45)$$

(при этом мы использовали то, что элементы T определяются величинами u_{ij}, которые рассматриваются как независимые от аргументов x, u и p). Такое же представление справедливо, очевидно, и для

$$(\delta a_{ij}) u_{ij} = (\delta \tilde{a}_{ii}) \tilde{u}_{ii}. \qquad (3.46)$$

Коэффициент $\tilde{a}_{ii} = (T^*AT)_{ii} = a_{kl}\tau_{ki}\tau_{li} = (A\tau^i, \tau^i)$, где $\tau^i = (\tau_{1i}, \tau_{2i}, \ldots, \tau_{ni})$ — i-столбец T. В силу условия (3.39)

$$|\tilde{a}_{iip_l}| \leqslant \mu_1 \tilde{a}_{ii} |u_x|^{-1}. \tag{3.47}$$

Отсюда и из (3.45) следует

$$\frac{1}{2}|a_{ijp_l}u_{ij}v_l| \leqslant \frac{\mu_1}{2}\sum_{i,l}|\tilde{a}_{ii}\tilde{u}_{ii}|\frac{|v_l|}{|u_x|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\tilde{a}_{ii}\tilde{u}_{ii}^2 + c_1 \operatorname{Sp}\tilde{A}\frac{v_x^2}{u_x^2}\mu_1^2. \tag{3.48}$$

Из (3.46) и (3.40), (3.41), вспоминая определение (3.3) оператора δ, получим

$$|(\delta a_{ij})u_{ij}|\sqrt{v} \leqslant \frac{1}{2}\tilde{a}_{ii}\tilde{u}_{ii}^2 + c_2\mu_2^2 v \operatorname{Sp}\tilde{A}, \tag{3.49}$$

а благодаря (3.42)

$$-(\delta a)\sqrt{v} \geqslant -\mu_3 v \operatorname{Sp} A. \tag{3.50}$$

В силу $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp}\tilde{A}$, (3.44) и (3.48) — (3.50) из (3.43) следует неравенство

$$\frac{1}{2}a_{ij}v_{ij} + \frac{1}{2}a_{p_j}v_j \geqslant -c_1\mu_1^2\frac{v_x^2}{v}\operatorname{Sp} A - c_2\mu_2^2 v \operatorname{Sp} A - \mu_3 v \operatorname{Sp} A \geqslant$$
$$\geqslant -\varepsilon v \operatorname{Sp} A - c_1\mu_1^2\frac{v_x^2}{v}\operatorname{Sp} A, \tag{3.51}$$

в котором ε — достаточно малое число.

Представим v в виде $v = z\bar{v} = (\alpha - |x|^2)\bar{v}$, где α — достаточно большое число. (Начало координат считаем принадлежащим Ω и область Ω, как всюду, ограниченной.) Подставим выражения для v_i и v_{ij} через $\bar{v}$, $\bar{v}_i$ и $\bar{v}_{ij}$ в (3.51). После элементарных оценок получим

$$\frac{1}{2}za_{ij}\bar{v}_{ij} + \left[a_{ij}z_i + \frac{1}{2}a_{p_j}z + 2c_1\mu_1^2\frac{z}{\bar{v}}\bar{v}_j \operatorname{Sp} A\right]\bar{v}_j \geqslant$$
$$\geqslant -\bar{v}\left[2c_1\mu_1^2\frac{z_x^2}{z}\operatorname{Sp} A + \varepsilon z \operatorname{Sp} A + \frac{1}{2}a_{ij}z_{ij} + \frac{1}{2}a_{p_j}z_j\right] =$$
$$= -\bar{v}\left[8c_1\mu_1^2\frac{x^2}{\alpha - x^2}\operatorname{Sp} A + \varepsilon(\alpha - x^2)\operatorname{Sp} A - \operatorname{Sp} A + a_{p_j}x_j\right]. \tag{3.52}$$

Принимая во внимание условие (3.42) для a_{p_j}, видим, что при достаточно большом α и достаточно малых ε и μ_3 правая часть (3.52) неотрицательна. Это верно для всех точек $x \in \Omega$, где $M_2 \leqslant |\nabla u(x)| = \sqrt{z\bar{v}}$. Но тогда в силу принципа максимума

$$\max_{\Omega} \bar{v}(x) \leqslant \max\left\{\frac{M_2^2}{\min\limits_{\Omega} z(x)};\ \max_{\partial\Omega} \bar{v}(x)\right\}.$$

Отсюда следует желаемая оценка $\max\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|$. Итак, доказана

Теорема 3.4. *Пусть* $u(x) \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, *удовлетворяет эллиптическому уравнению* (0.1) *и* $u^{(1)} \leqslant u(x) \leqslant u^{(2)}$, $\max\limits_{\partial\Omega}|\nabla u(x)| \leqslant M_1$. *Предположим, что функции* $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ *обладают той же гладкостью, что и в предыдущих теоремах, и на* $\mathfrak{M}_1$ *удовлетворяют неравенствам* (3.39) — (3.42) *с достаточно малыми постоянными* μ_2 *и* μ_3. *Тогда* $\max\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|$ *оценивается сверху постоянной, определяемой постоянными, входящими в условия теоремы, и диаметром области* Ω.

Замечание 3.4. Из доказательства предыдущих теорем видно, что относительно $u(x)$ достаточно предположить $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.

В работе [14_3] с помощью изложенного способа оценки $\max\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|$ рассмотрен ряд других классов неравномерно эллиптических уравнений (0.1).

§ 4. Локальные оценки $|\nabla u|$

В этом параграфе мы покажем, что при несколько более жестких условиях на функции $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ можно оценить сверху $\max\limits_{\Omega'}|\nabla u(x)|$ для любой внутренней подобласти $\bar{\Omega}'$ области Ω через границы $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ изменения $u(x)$, постоянные, характеризующие поведение a_{ij} и a при больших $|p|$, и расстояние от Ω' до S (при стремлении этого расстояния к нулю оценка $\max\limits_{\Omega'}|\nabla u|$ неограниченно растет). От свойств S и значений ∇u на S эти оценки не зависят.

Относительно a_{ij} и a предполагаем ту же ограниченность и дифференцируемость на множестве $\mathfrak{M}_1$, что и в § 3. Условие эллиптичности (0.2) должно выполняться на $\mathfrak{M}_1$, причем так же, как и в § 3, функции $\nu(x, u, p)$ и $\mu(x, u, p)$ из (0.2) ни в какие оценки не входят: из (0.2) мы используем лишь факт положительной определенности формы $a_{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j$ и положительность $\min\limits_{(x, u, p) \in \mathfrak{M}_1} \min\limits_{|\xi|=1} a_{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j$ на любой компактной части $\mathfrak{M}_1'$ множества $\mathfrak{M}_1$. Условие (3.10) заменим несколько более сильным:

$$a_{ij}(x, u, p)\,\xi_i\xi_j \geqslant \left[\nu_1(x, u, p) - \mu_1(x, u, p)\left(\frac{p}{|p|}, \frac{\xi}{|\xi|}\right)\right]\xi^2, \qquad (4.1)$$

где ν_1 и μ_1 — непрерывные положительные функции, причем $\mu_1(x, u, p)/\nu_1(x, u, p) \leqslant \mu_2 = \mathrm{const}$. Кроме того, потребуем, чтобы

$$\mathscr{E}(p) \equiv a_{ij}(x, u, p)\,p_ip_j \geqslant \nu_0(x, u, p)\,|p|^k, \qquad k > 0, \qquad (4.2)$$

а $\nu_0(x, u, p)/\nu_1(x, u, p) \geqslant \nu_2 = \mathrm{const} > 0$. Пусть сначала $u(x) \in C^3(\Omega)$. Введем функцию v с помощью равенства $u = \Phi(v)$. Для нее верны соотношения (3.1) и (3.4$_i$). Рассмотрим теперь функцию $y \equiv v_x^2\zeta \equiv w\zeta$, где $\zeta(x)$ — неотрицательная функция из $C^2(\overline{\Omega})$ с компактным носителем в Ω. Для нее $y_i = w_i\zeta + w\zeta_i$, $y_{ij} = w_{ij}\zeta + w_i\zeta_j + w_j\zeta_i + w\zeta_{ij}$. Выразим из этих равенств w, $w_i\zeta$ и $w_{ij}\zeta$ через y и ее производные:

$$w = \frac{y}{\zeta}, \qquad w_i\zeta = y_i - y\frac{\zeta_i}{\zeta},$$

$$w_{ij}\zeta = y_{ij} - y_i\frac{\zeta_j}{\zeta} - y_j\frac{\zeta_i}{\zeta} + y\left(2\frac{\zeta_i\zeta_j}{\zeta^2} - \frac{\zeta_{ij}}{\zeta}\right),$$

и подставим эти выражения в равенство (3.4$_1$), умноженное на ζ. После элементарных преобразований получим уравнение для y:

$$\frac{1}{2}a_{ij}y_{ij} - \left(A_l + a_{kl}\frac{\zeta_k}{\zeta}\right)y_l =$$
$$= \frac{y\mathscr{E}}{(\Phi')^2}I_2 - \left(A_l\frac{\zeta_l}{\zeta} + a_{kl}\frac{\zeta_k\zeta_l}{\zeta^2} - \frac{1}{2}a_{kl}\frac{\zeta_{kl}}{\zeta}\right)y \equiv I_4, \qquad (4.3)$$

в котором I_2 и A_l те же, что и в (3.4$_2$), (3.4$_3$). Функция $y = w\zeta$ неотрицательна и обращается в нуль в пограничной полоске у $\partial\Omega$, следовательно, она принимает свое наибольшее значение (которое будем считать бóльшим нуля) лишь во внутренних точках области $\overline{\Omega}$.

Мы покажем, что при определенных условиях на функции a_{ij} и a можно так подобрать функцию $\Phi(v)$, что I_4 будет больше нуля в любой точке $x^0 \in \Omega$, где y достигает своего максимума, если этот максимум больше M_3^2, где M_3 — некоторое достаточно большое число. Если этот факт установлен, то из равенства (4.3) следует, что таких точек максимума, как x^0, быть не может и, следовательно, всюду $y(x) \leqslant M_3^2$.

Это непосредственно ясно для $u(x) \in C^3(\Omega)$ (для них $y(x) \in C^2(\overline{\Omega})$). Если же $u(x) \in C^2(\Omega)$, то y принадлежит только $C^1(\overline{\Omega})$ и не удовлетворяет (4.3) в обычном смысле. Однако

$y(x)$ может быть рассмотрено как обобщенное решение уравнения (4.3) из класса $W_2^1(\Omega)$ (и даже из класса $C^1(\Omega)$) и для него справедливо то же заключение: $y(x) \leqslant M_3^2$, что и для случая $y \in C^2(\Omega)$. Доказывается это так же, как аналогичный факт в § 3.

Будем считать $\zeta(x) \leqslant 1$. Тогда из неравенства $y(x^0) = w(x^0) \cdot \zeta(x^0) > M_3^2$ следует $w(x^0) > M_3^2$, а отсюда

$$|\nabla u(x^0)| > M_3 \Phi'(v(x^0)) \geqslant M_3 \min_{x \in \Omega} \Phi'(v(x)) \equiv M_3 \delta_1.$$

Величина δ_1 нам будет известна, и она положительна. Постоянную M_3 возьмем большей или равной $M_2 \delta_1^{-1}$, тогда $|\nabla u(x^0)| > M_2$, и, следовательно, в точке $x = x^0$, $u = u(x^0)$, $p = u_x(x^0)$ и в некоторой ее окрестности функции $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ обладают свойствами, указанными в начале § 3, а также подчиняются неравенствам (4.1), (4.2) и другим условиям, которые мы будем накладывать на них ниже (напомним, что все ограничения на $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ должны выполняться лишь для $(x, u, p) \in \mathfrak{M}_1$, причем аргумент u нигде не выходит за пределы отрезка $[u^{(1)}, u^{(2)}]$). В силу этого и под окрестностью точки $(x^0, u(x^0), u_x(x^0))$ мы понимаем пересечение настоящей δ-окрестности ее в пространстве (x, u, p) со слоем $u^{(1)} \leqslant u \leqslant u^{(2)}$.

Итак, получение оценки

$$y(x) \equiv v_x^2(x) \zeta(x) = \frac{u_x^2(x) \zeta(x)}{[\Phi'(v(x))]^2} \leqslant M_3^2 \tag{4.4}$$

сведено к вопросу разыскания функции $\Phi(v)$, для которой в любой точке x^0 $(x^0 \in \Omega)$ максимума $y(x)$ с $y(x^0) > M_3^2$ величина $I_4 > 0$. В этой точке $y_k = 2 v_i v_{ik} \zeta + v_x^2 \zeta_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, и потому

$$\left(\frac{u_x}{|u_x|}, \frac{v_{kx}}{|v_{kx}|}\right) = \left(\frac{v_x}{|v_x|}, \frac{v_{kx}}{|v_{kx}|}\right) = -\frac{\zeta_k}{2\zeta} \frac{|v_x|}{|v_{kx}|},$$

где $v_{kx} = (v_{k1}, \ldots, v_{kn})$. Благодаря этому и (4.1)

$$\begin{aligned} I_1 \equiv a_{ij} v_{ki} v_{kj} &\geqslant \nu_1 v_{xx}^2 - \frac{\mu_1}{2\zeta} |v_{xx}| |\zeta_k| |v_x| \geqslant \\ &\geqslant \nu_1 v_{xx}^2 - \frac{\mu_1}{2\zeta} |\zeta_x| \frac{|v_{xx}| |u_x|}{\Phi'} \geqslant \\ &\geqslant \nu_1 (1 - \varepsilon_1) v_{xx}^2 - \frac{\mu_1^2}{16 \varepsilon_1 \nu_1 (\Phi')^2} \frac{\zeta_x^2}{\zeta^2} u_x^2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

с произвольным $\varepsilon_1 > 0$. Это неравенство заменяет собою неравенство (3.11) и приводит вместо (3.12) к следующей оценке:

$$I_2 \geqslant I_3 - \varepsilon_1 (\Phi')^4 \frac{\nu_1 v_{xx}^2}{u_x^2 \mathscr{E}} - \frac{\mu_2^2}{16 \varepsilon_1 \nu_1} \frac{(\Phi')^2}{\mathscr{E}} \frac{\zeta_x^2}{\zeta^2}. \tag{4.6}$$

Функцию $\Phi(v)$ будем искать такой, чтобы

$$I_3 \equiv I_3(x, u, p, v_{ij}, \Phi'(v), \Phi''(v)) \geqslant \\ \geqslant \varepsilon\left[(\Phi')^2 + |\Phi''| + (\Phi')^4 \frac{\nu_1 v_{xx}^2}{u_x^2 \mathscr{E}}\right] \tag{4.7}$$

с каким-либо $\varepsilon > 0$ (I_3 определено в (3.12)).

Так как ε находится в нашем распоряжении, то задача определения $\Phi(v)$, по существу, такая же, как задача § 3 на определение $\Phi(v)$, для которой $I_3 > 0$. Ниже мы покажем, что условия теоремы 3.3, гарантировавшие существование такой функции $\Phi(v)$, при которой $I_3 > 0$, достаточны и для существования функции $\Phi(v)$, для которой выполняется неравенство (4.7) с некоторым малым ε. Предположим пока, что нужная нам функция $\Phi(v)$ уже найдена, т. е. для нее имеют место неравенство (4.7) с некоторым $\varepsilon > 0$ и соотношения (3.9).

Подчиним функции $a_{ij}(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ следующим ограничениям:

$$\left(\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}^2(x, u, p)\right)^{1/2} \leqslant c_6 \nu_1(x, u, p), \tag{4.8}$$

$$\left[\sum_i \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial p_i}\right)^2\right]^{1/2} \leqslant c_6 \sqrt{\nu_1 \mathscr{E}}, \tag{4.9}$$

$$\left[\sum_i \left(\frac{\partial a}{\partial p_i}\right)^2\right]^{1/2} \leqslant c_6 \sqrt{\nu_1 \mathscr{E}}, \tag{4.10}$$

$$\left[\sum_{i, j, l} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_l}\right)^2\right]^{1/2} \leqslant \frac{c_6 \nu_1}{|p|}, \tag{4.11}$$

где c_6 — какая-либо постоянная. Мы обозначили ее через c_6, ибо c_i с номерами $i = 1, \ldots, 5$ уже использованы в неравенствах (3.15) — (3.19) и эти неравенства в дальнейшем будут предполагаться выполненными. Благодаря (4.7) — (4.11) справедливы следующие оценки:

$$\left|\Phi' \frac{\zeta_l}{2\zeta} \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_l} v_{ij}\right| \leqslant \left(\sum_{i, j} \frac{\varepsilon_2 \nu_1 (\Phi')^2 v_{ij}^2}{u_x^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{i, j}\left(\sum_l \zeta_l \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_l}\right)^2 \frac{u_x^2}{4\varepsilon_2 \nu_1 \zeta^2}\right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \left(\frac{\varepsilon_2 \nu_1 (\Phi')^2 v_{xx}^2}{u_x^2}\right)^{1/2} \left(\zeta_x^2 \sum_{i, j, l}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_l}\right)^2 \frac{u_x^2}{4\varepsilon_2 \nu_1 \zeta^2}\right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \left(\frac{\varepsilon_2 \nu_1 (\Phi')^2 v_{xx}^2}{u_x^2}\right)^{1/2} \left(\frac{c_6^2 \nu_1 \zeta_x^2}{4\varepsilon_2 \zeta^2}\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon_2 \nu_1 (\Phi')^2 \frac{v_{xx}^2}{u_x^2} + \frac{c_6^2 \nu_1}{16\varepsilon_2} \frac{\zeta_x^2}{\zeta^2}, \tag{4.12}$$

и аналогично

$$\left|\frac{\zeta_l}{2\zeta}\frac{\partial a}{\partial u_l}\right| \leqslant \varepsilon_2\mathscr{E} + \frac{c_6^2\nu_1}{16\varepsilon_2}\frac{\zeta_x^2}{\zeta^2}, \tag{4.13}$$

$$\left|\frac{\zeta_l}{2\zeta}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial u_l}\right| \leqslant 2\varepsilon_2\mathscr{E} + \frac{c_6^2\nu_1}{32\varepsilon_2}\frac{\zeta_x^2}{\zeta^2}, \tag{4.14}$$

где ε_2 — произвольное положительное число. Далее,

$$\left|a_{kl}\frac{\zeta_k\zeta_l}{\zeta^2}\right| \leqslant c_6\nu_1\frac{\zeta_x^2}{\zeta^2} \tag{4.15}$$

и

$$\left|\frac{1}{2}a_{kl}\frac{\zeta_{kl}}{\zeta}\right| \leqslant \frac{c_6\nu_1}{2}\frac{|\zeta_{xx}|}{\zeta}. \tag{4.16}$$

Из этих неравенств следует

$$|j_2| = \left|A_l\frac{\zeta_l}{\zeta} + a_{kl}\frac{\zeta_k\zeta_l}{\zeta^2} - \frac{1}{2}a_{kl}\frac{\zeta_{kl}}{\zeta}\right| \leqslant \varepsilon_2\nu_1(\Phi')^2\frac{v_{xx}^2}{u_x^2} + {}$$
$$+ \varepsilon_2\mathscr{E} + 2\frac{|\Phi''|}{(\Phi')^2}\varepsilon_2\mathscr{E} + \nu_1\left(c_6 + \frac{c_6^2}{8\varepsilon_2}\right)\frac{\zeta_x^2}{\zeta^2} + {}$$
$$+ \frac{|\Phi''|}{(\Phi')^2}\frac{c_6^2\nu_1}{32\varepsilon_2}\frac{\zeta_x^2}{\zeta^2} + \frac{c_6\nu_1}{2}\frac{|\zeta_{xx}|}{\zeta}. \tag{4.17}$$

Используем (4.6), (4.7) и (4.17) для оценки снизу правой части уравнения (4.3), именно:

$$I_4 \geqslant \frac{y\mathscr{E}}{(\Phi')^2}\Bigg[\varepsilon(\Phi')^2 + \varepsilon|\Phi''| + (\varepsilon - \varepsilon_1)(\Phi')^4\frac{\nu_1 v_{xx}^2}{u_x^2\mathscr{E}} - {}$$
$$- \frac{\mu_2^2}{16\varepsilon_1}\frac{(\Phi')^2}{\mathscr{E}\nu_1}\frac{\zeta_x^2}{\zeta^2} - \varepsilon_2(\Phi')^4\frac{\nu_1 v_{xx}^2}{u_x^2\mathscr{E}} - \varepsilon_2(\Phi')^2 - 2\varepsilon_2|\Phi''| - {}$$
$$- \nu_1\left(c_6 + \frac{c_6^2}{8\varepsilon_2}\right)\frac{(\Phi')^2}{\mathscr{E}}\frac{\zeta_x^2}{\zeta^2} - |\Phi''|\frac{c_6^2}{32\varepsilon_2}\frac{\nu_1}{\mathscr{E}}\frac{\zeta_x^2}{\zeta^2} - \frac{c_6}{2}(\Phi')^2\frac{\nu_1}{\mathscr{E}}\frac{|\zeta_{xx}|}{\zeta}\Bigg].$$

Возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$. Тогда

$$I_4 \geqslant y\mathscr{E}\left[\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\nu_1}{\mathscr{E}}B_1\frac{\zeta_x^2}{\zeta^2} - \frac{\nu_1}{\mathscr{E}}B_2\frac{|\zeta_{xx}|}{\zeta}\right], \tag{4.18}$$

где $B_1 = c_6 + \frac{c_6^2}{4\varepsilon} + \frac{\mu_2^2}{8\varepsilon\nu_1^2} + \frac{c_6^2}{16\varepsilon}\frac{|\Phi''|}{(\Phi')^2}$, а $B_2 = \frac{c_6}{2}$. Число ε и функция $\Phi(v)$ уже выбраны, причем $0 < \delta_1 \leqslant \Phi'(v) \leqslant \delta_2 < \infty$. Поэтому B_1 и B_2 не превосходят некоторой постоянной, которую мы обозначим через c_7. Используем теперь предположения (4.2):

$$\mathscr{E} \geqslant \nu_2\nu_1 |u_x|^k = \nu_2\nu_1 (\Phi')^k |v_x|^k = \nu_2\nu_1 \frac{y^{k/2}(\Phi')^k}{\zeta^{k/2}}$$

и $y(x^0) > M_3^2$. Благодаря им из (4.18) следует

$$I_4 \geqslant y\mathscr{E}\left[\frac{\varepsilon}{2} - \frac{c_7}{\nu_2}\frac{(\Phi')^{-k}}{M_3^k}\zeta^{k/2}\left(\frac{\zeta_x^2}{\zeta^2} + \frac{|\zeta_{xx}|}{\zeta}\right)\right]. \tag{4.19}$$

Возьмем $\zeta(x) = \eta^{1/k}(x)$, где $\eta(x)$ — произвольная неотрицательная функция из $C^2(\overline{\Omega})$ с компактным носителем в Ω и $\eta(x) \leqslant 1$ *). Элементарный подсчет показывает, что для такой ζ

$$\left(\frac{\zeta_x^2}{\zeta^2} + \frac{|\zeta_{xx}|}{\zeta}\right)\zeta^{k/2} \leqslant c_8(\eta_x^2 + \eta|\eta_{xx}|) \leqslant c_9 \tag{4.20}$$

с постоянной c_8, зависящей лишь от k, и $c_9 = c_8 \max\limits_{\Omega}(\eta_x^2 + \eta|\eta_{xx}|)$. Подставим (4.20) в (4.19):

$$I_4 \geqslant y\mathscr{E}\left[\frac{\varepsilon}{2} - \frac{c_7c_9}{\nu_2}\frac{(\Phi')^{-k}}{M_3^k}\right]. \tag{4.21}$$

Из этой оценки ясно, что если M_3 взять равной

$$\left(\frac{4c_7c_9}{\varepsilon\nu_2}\right)^{1/k} \max_{\Omega} \Phi'^{-1}(v(x)) \equiv c_{10},$$

то $I_4 \geqslant \frac{\varepsilon}{4} y\mathscr{E} > 0$, что и требовалось.

Итак, мы пришли к желаемому заключению, допустив, что функция $\Phi(v)$ удовлетворяет требованиям (3.9) и (4.7). Сравнивая эту задачу с задачей (3.9), (3.14), видим, что она такая же, лишь на ε изменились коэффициенты при членах $(\Phi')^2$, $|\Phi''|$ и $(\Phi')^4 \frac{\nu_1 v_{xx}^2}{u_x^2\mathscr{E}}$. В силу произвольной малости ε достаточные условия теоремы 3.3 будут достаточными и для разрешимости задачи (3.9), (4.7) (см. в связи с этим замечание 3.1 к теореме 3.3).

Наши рассуждения сохраняют силу и для случая, когда носитель $\zeta(x)$ пересекает границу Ω по какой-либо части S_1, если только известно, что $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup S_1)$ и $\max\limits_{S_1}|\nabla u| \leqslant M_2$. Действительно, так как в анализируемой точке x^0 возможного максимума $y = v_x^2\zeta$ величина $|u_x(x^0)| > M_2$, то x^0 принадлежит Ω,

*) Из сопоставления условий (4.2) и (4.8) ясно, что $k \leqslant 2$, причем $k = 2$ соответствует случаю равномерно эллиптических уравнений.

а не S_1, и потому в ней сохраняются все проведенные выше оценки вплоть до оценки $y(x) \leqslant M_3^2$. Это завершает доказательство следующей теоремы:

Теорема 4.1. *Пусть $u \in C^2(\Omega)$ и удовлетворяет в Ω уравнению* (0.1), *причем $u^{(1)} \leqslant \min_\Omega u(x)$, а $u^{(2)} \geqslant \max_\Omega u(x)$. Пусть на множестве $\mathfrak{M}_1$ функции $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ дифференцируемы и на любой его компактной части ограничены вместе со своими частными производными первого порядка. Кроме того, предположим, что a_{ij} и a удовлетворяют на $\mathfrak{M}_1$ условиям* (4.1), (4.2), (4.8) — (4.11) *и $a_{ij}\xi_i\xi_j > 0$ при $|\xi| = 1$. Тогда, если существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(v)$, удовлетворяющая условиям* (3.9) *и такая, что при $(x, u, p) \in \mathfrak{M}_1$, $v \in [v^{(1)}, v^{(2)}]$ и произвольных v_{ij}, связанных с x, u, p и $\Phi(v)$ лишь равенствами* (3.13_1) *и* (3.13_2), *выполняется неравенство* (4.7) *с каким-либо $\varepsilon > 0$, то для ∇u справедлива оценка*

$$|\nabla u(x)|\, \eta^{2/k}(x) \leqslant M_4, \tag{4.22}$$

в которой постоянная M_4 определяется ε, $\Phi(v)$, постоянными k, μ_2, ν_2 и c_6 из условий (4.1), (4.2), (4.8) — (4.11) *и $\max_\Omega(\eta_x^2 + |\eta_{xx}|\,\eta)$, а $\eta(x)$ — произвольная неотрицательная функция из $C^2(\overline{\Omega})$ с компактным носителем в Ω и $\eta(x) \leqslant 1$.*

Если функции a_{ij} и a, помимо условий (4.1), (4.2), (4.8)—(4.11), *удовлетворяют еще на $\mathfrak{M}_1$ условиям* (3.15) — (3.19), *в которых функция $\nu_1(x, u, p)$ взята из неравенства* (4.1), *а постоянные $c_1, \ldots, c_6$ удовлетворяют критериям теоремы* 3.3, *то нужная нам функция $\Phi(v)$ существует при некотором $\varepsilon > 0$ и, следовательно, для $|\nabla u|$ справедлива оценка* (4.22).

Оценка (4.22) *сохраняется и для случая, когда носитель $\eta(x)$ пересекает границу Ω по какой-либо части S_1, если относительно $u(x)$ известно дополнительно, что $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup S_1)$ и $\max_{S_1} |\nabla u| \leqslant M_2$.*

Условия теоремы 4.1 отличаются от условий теорем 3.2 и 3.3 лишь одним существенным усилением: наличием множителя $|p|^k$, $k > 0$, в правой части неравенства (4.2). Из условий (4.2) и (4.8) следует, что порядок неравномерности уравнения (0.1) должен быть меньше 2. Это неприятное ограничение приводит к тому, что для уравнений (2.14) не выполняются условия теоремы 4.1. Для них пришлось искать другие методы локальных оценок ∇u (о них см. [**6**, $\mathbf{11}_5$, 21_{24}]).

Следствие 4.1. Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $\max_\Omega |u| \leqslant M$, $\max_S |\nabla u| \leqslant M_2$ и $\max_K \operatorname{osc}\{u(x);\ \Omega_\rho\} \leqslant \omega(\rho)$, причем $\omega(\rho) \to 0$ при ρ

$\rho \to 0$. Пусть на множестве $\mathfrak{M}_1$ функции $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ дифференцируемы, а на любой его компактной части ограничены вместе со своими частными производными первого порядка. Тогда, если a_{ij} и a на $\mathfrak{M}_1$ удовлетворяют неравенствам (4.1), (4.2), (4.8) — (4.11), (3.15) — (3.19) с какими-либо постоянными $c_1, \ldots, c_6$ и $a_{ij}\xi_i\xi_j > 0$ при $|\xi| = 1$, то $\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$ оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от M, M_2, $\omega(\rho)$, μ_2, ν_2 и $c_1, \ldots, c_6$.

Для доказательства утверждения надо покрыть $\overline{\Omega}$ конечным числом открытых шаров $K_\rho(x_i)$, $i = 1, \ldots, N$, радиуса ρ, причем ρ надо взять столь малым, чтобы $\omega(\rho)$ удовлетворяло условию (3.30). Тогда в каждом из шаров $K_{\rho-\varepsilon}(x_i)$, $\varepsilon > 0$, $\max |\nabla u|$ будет оцениваться некоторой известной нам постоянной $\hat{c}_i(\varepsilon)$, и так как при достаточно малом ε $\overline{\Omega} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} K_{\rho-\varepsilon}(x_i)$, то $\max\limits_{\Omega} |\nabla u| \leqslant \max\limits_{i=1, \ldots, N} \hat{c}_i(\varepsilon)$.

§ 5. Теоремы существования

В § 10 гл. IV мы показали, как умение получать априорные оценки всех возможных решений задачи Дирихле позволяет сделать вывод о ее разрешимости. Имеет при этом исследуемое уравнение дивергентную главную часть или нет, не существенно. Рассуждения, проведенные в § 10 гл. IV для уравнений с дивергентной главной частью, сохраняют свою силу и для общих квазилинейных уравнений

$$L(u) \equiv a_{ij}(x, u, u_x) u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = 0, \tag{5.1}$$

$$u|_S = \varphi|_S. \tag{5.2}$$

Отличие состоит лишь в условиях, при которых установлены априорные оценки решений тех и других уравнений. Ввиду этого мы не будем повторять здесь всех рассуждений § 10 гл. IV, а сформулируем лишь окончательные результаты (причем только основные из них), используя априорные оценки, полученные в данной главе для решений задачи (5.1), (5.2), и дадим к ним необходимые пояснения.

Во всех теоремах будет предполагаться, что функции $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ на любой компактной части множества $\mathfrak{M} = \{(x, u, p)\colon x \in \overline{\Omega},\ u \in E_1,\ p \in E_n\}$ ограничены и удовлетворяют неравенству

$$a_{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j > 0 \quad \text{при} \quad |\xi| = 1. \tag{5.3}$$

Эти условия в дальнейшем не всегда будут формулироваться явно.

Так же, как в § 10 гл. IV, задачу (5.1), (5.2) рассмотрим не изолированно, а вместе с однопараметрическим семейством задач того же типа:

$$\left.\begin{aligned} L^{\tau}(u) \equiv a_{ij}(x, u, u_x, \tau)\, u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x, \tau) = 0, \\ u|_S = \tau\varphi|_S, \qquad \tau \in [0, 1]. \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Пусть наша задача (5.1), (5.2) получается из (5.4) при $\tau = 1$. Рассмотрим вопрос о разрешимости задач (5.4) в пространстве $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Теорема 5.1. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

a) $S \in C^{2+\alpha}$, $\varphi(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

b) *Для всех возможных решений* $u(x, \tau)$ *из* $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *задач* (5.4) *справедливы оценки*

$$\max_{\Omega} |u(x, \tau)| \leqslant M \tag{5.5}$$

и

$$\omega(\rho, \tau) \equiv \max_{K_\rho} \operatorname{osc}\{u(x, \tau);\ \Omega_\rho\} \leqslant \tilde{M}(\rho) \to 0 \quad \textit{при} \quad \rho \to 0; \tag{5.6}$$

$\max\limits_{K_\rho}$ *в* (5.6) *взят по всем шарам* K_ρ *радиуса* ρ.

c) *При* $\tau \in [0, 1]$, $x \in \overline{\Omega}$, $|u| \leqslant M$ *и произвольных* p *функции* $a_{ij}(x, u, p, \tau)$, $a(x, u, p, \tau)$ *подчиняются неравенствам*

$$a_{ij}(x, u, p, \tau)\,\xi_i\xi_j > 0 \quad \textit{при} \quad |\xi| = 1 \tag{5.7}$$

и

$$|p| + |a(x, u, p, \tau)|\, T^{-1} \leqslant c_1 \mathscr{E}(p)\, T^{-1} + c_2, \tag{5.8}$$

где $\mathscr{E}(p) \equiv a_{ij}(x, u, p, \tau)\, p_i p_j$, $T = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}(x, u, p, \tau)$.

Предположения a) — c) *гарантируют априорную оценку* $\max\limits_{S} |\nabla u(x, \tau)| \leqslant M_1$ (см. теорему 2.2).

d) *На множестве* $\mathfrak{M}_1 \times [0, 1] \equiv \{(x, u, p, \tau)\colon x \in \overline{\Omega},\ |u| \leqslant M,$ $|p| \geqslant M_2,\ \tau \in [0, 1]\}$, $M_2 > M_1$, *функции* $a_{ij}(x, u, p, \tau)$, $a(x, u, p, \tau)$ *дифференцируемы по* x, u, p, *на любой его компактной части ограничены вместе с частными производными первого порядка и удовлетворяют неравенствам* (4.1), (4.2), (4.8) — (4.11), (3.15) — (3.19) *с какими-либо постоянными* $c_1, \ldots, c_6$.

Предположения a) — d) *гарантируют априорную оценку* $\max\limits_{\Omega} |\nabla u(x, \tau)| \leqslant M_3$ (см. следствие 4.1).

e) *Функции* $a_{ij}(x, u, p, \tau)$, $a(x, u, p, \tau)$ *равномерно непрерывны по* $\tau \in [0, 1]$, *как элементы* $C^{\alpha}(\mathfrak{M}_2)$, *где*

$$\mathfrak{M}_2 \equiv \{(x, u, p)\colon\ x \in \overline{\Omega},\ |u| \leqslant M,\ |p| \leqslant M_3\},$$

и частные производные a_{ij} *по* x, u *и* p *ограничены на* $\mathfrak{M}_2 \times [0, 1]$.

Тогда задачи (5.4) *имеют по крайней мере одно решение* $u(x, \tau)$ *из* $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *при* $\forall \tau \in [0, 1]$, *если при* $\tau = 0$ *имеется конечное число решений и их суммарный индекс отличен от нуля.*

Как указано в самой теореме, условия a) — c) гарантируют равномерную оценку $\max\limits_{S} |\nabla u(x, \tau)|$ (см. теорему 2.2); они и условие d) гарантируют оценку $\max\limits_{\Omega} |\nabla u(x, \tau)| \leqslant M_3$ (следствие 4.1). Из оценки $\max\limits_{\Omega} |\nabla u(x, \tau)|$ и условий a) и e) выводится оценка $|u(x, \tau)|_{\Omega}^{(2+\alpha)} \leqslant M_4$ (см. теоремы 1.1, 1.2 данной главы и теоремы §§ 1, 2 гл. III).

Эта равномерная оценка $|u|_{\Omega}^{(2+\alpha)}$ для всех возможных решений задач (5.4) и теорема Лерэ — Шаудера (теорема 10.1 гл. IV) позволяют заключить о разрешимости задачи (5.1), (5.2) (более подробно см. § 10 гл. IV).

Теорема 5.2. *Теорема* 5.1 *остается справедливой, если в ней в условии* c) *заменить неравенство* (5.8) *более слабым неравенством*

$$|a(x, u, p, \tau)|\, T^{-1} \leqslant c_1 \mathscr{E}(p)\, T^{-1} + c_2, \tag{5.9}$$

но предположить, что Ω *есть строго выпуклая область.*

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства предыдущей только в одном пункте: для оценки $\max\limits_{S} |\nabla u(x, \tau)|$ вместо теоремы 2.2 надо привлечь теорему 2.1.

В теоремах 5.1 и 5.2 есть одно неприятное условие: неравенство (5.6). Для уравнений общего вида (5.1) (в отличие от уравнений гл. IV) неизвестны способы получения априорной оценки $\operatorname{osc}\{u;\ \Omega_\rho\}$. Ввиду этого исключим это требование. Но тогда для оценки $\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$ нам придется привлечь теоремы § 3. Так, с использованием теорем § 3 вместо следствия 4.1 доказывается

Теорема 5.3. *Теоремы* 5.1 *и* 5.2 *остаются справедливыми, если в них отбросить условие* (5.6), *а в условии* d) *все неравенства заменить на неравенство* (3.10), *и на требование существования функции* $\Phi(v)$ *для уравнений* (5.4) *с описанными в теореме* 3.2 *свойствами, или на условия теоремы* 3.3 (*или* 3.4) *для функций* $a_{ij}(x, u, p, \tau)$, $a(x, u, p, \tau)$. *Функция* $\Phi(v)$ *и постоянные* $c_1, \ldots, c_5$ *не должны зависеть от* τ.

Рассмотрим два конкретных включения параметра τ. Одно из них имеет вид

$$\left.\begin{aligned} L^\tau(u) \equiv a_{ij}(x, u, u_x) u_{x_i x_j} + \tau a(x, u, u_x) = 0, \\ u|_S = \tau\varphi|_S, \qquad \tau \in [0, 1]. \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

Соответствующее ему преобразование $w = \Phi(v, \tau)$ определяется линейной задачей

$$a_{ij}(x, v, v_x) w_{x_i x_j} + \tau a(x, v, v_x) = 0, \qquad w|_S = \tau\varphi|_S. \tag{5.11}$$

Ясно, что w от τ зависит линейно, т. е. $w(\tau) = \Phi(v, \tau) = \tau\Theta(v)$. Для нахождения неподвижных точек преобразования $\Phi(v, \tau) = \tau\Theta(v)$, т. е. решений уравнения

$$u = \tau\theta(u), \qquad \tau \in [0, 1], \tag{5.12}$$

можно воспользоваться следствием 10.1 гл. IV из теоремы Шаудера (теорема 10.6 гл. IV). Для ее применимости достаточно убедиться, что нормы всех возможных решений задачи (5.12) в пространстве H не превосходят некоторой постоянной c. В качестве H возьмем банахово пространство $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ с некоторым $\beta > 0$. Функции $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$, $\varphi(x)$ и граница S предполагаются столь же гладкими, как и в теореме 5.1. Ввиду этого решения уравнений (5.12) будут принадлежать не только $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$, но и $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и будут решениями задач (5.10). Таким образом, вопрос о разрешимости задач (5.10) сведен к вопросу получения априорной оценки величины $\max\limits_{\tau\in[0,1]} |u(x, \tau)|_{\Omega}^{(1+\beta)}$ для всех их возможных решений из $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Относительно $j_1 \equiv \max\limits_{\tau\in[0,1]} \max\limits_{\Omega} |u(x, \tau)|$ надо или предполагать, что его ограниченность нам дана по условию, или считать выполненными условия одного из тех предложений, в которых даны достаточные условия для его оценки. Например, если для $L^1(u)$ выполнены условия одного из следствий 8.1—8.3, 8.5, 8.6 гл. IV, то они, очевидно, будут выполненными для всех $L^\tau(u)$, $\tau \in [0, 1]$, и для j_1 будет желаемая оценка. Итак, пусть мы получили, что $j_1 \leqslant M$. Для оценки $j_2 \equiv \max\limits_{\tau\in[0,1]} \max\limits_{S} |\nabla u(x, \tau)|$ привлечем теоремы § 2. Их условия таковы, что они выполняются для всех $L^\tau(u)$, $\tau \in [0, 1]$, если только они верны для $L^1(u)$. Обозначим через M_1 получаемую с помощью этих теорем оценку j_2. Переходим к оценке

$$j_3 \equiv \max_{\tau\in[0,1]} \max_{\Omega} |\nabla u(x, \tau)| \tag{5.13}$$

с помощью теорем § 3. Для применимости теоремы 3.1 надо считать функции a_{ij}, a не зависящими явно от x и u. В этом случае она гарантирует, что $j_3 \leqslant M_1$. Условия теоремы 3.2 применительно к оператору $L^\tau(u)$ уже будут зависеть от τ. Параметр τ войдет в выражение I_3 для $L^\tau(u)$. Однако вхождение τ в I_3 сравнительно простое: τ станет множителем при членах $-\Phi'' \frac{pa_p - a}{\mathscr{E}}$ и $-(\Phi')^2 \frac{\delta a}{|u_x| \mathscr{E}}$. Все остальные составляющие I_3 сохранят свой прежний вид, соответствующий $L^1(u)$. Параметр τ войдет и в равенство (3.13) в качестве множителя при $-a/\Phi'$. Для применимости теоремы 3.2 надо потребовать существования функции $\Phi(v)$, не зависящей от τ и такой, чтобы для нее $\min\limits_{\tau \in [0,\ 1]} I_3(\tau)$ был больше 0. Кроме того, она должна удовлетворять требованиям (3.9), в которых $u^{(1)} = -M$, $u^{(2)} = M$. Посмотрим, что дает теорема 3.3 для оценки j_3. Почти все ее условия не зависят от τ. Исключение составляют неравенства (3.18) и (3.19). Они должны быть заменены на следующие:

$$\delta\mathscr{E} + \tau(pa_p - a)|p| \geqslant \tilde{c}_4 \mathscr{E} |p|, \tag{5.14}$$

$$-\tau\delta a \geqslant \tilde{c}_5 \mathscr{E} |p| \text{ *)}. \tag{5.15}$$

Итак, теорема 3.3 обеспечивает оценку j_3, если постоянные c_1, c_2, c_3 и $c_4 = \tilde{c}_4$, $c_5 = \tilde{c}_5$ удовлетворяют ее требованиям с $\omega = 2M$. Условия же теоремы 3.4 таковы, что из выполнения их для $L^1(u)$ следует их справедливость для всех $L^\tau(u)$.

Наконец, теорема 1.1 дает оценку $j_4 \equiv \max\limits_{\tau \in [0,\ 1]} |u(x, \tau)|_\Omega^{(1+\beta)}$ с некоторым $\beta > 0$ без каких-либо дополнительных ограничений на a_{ij} и a. Подытожим сказанное в форме теоремы.

Теорема 5.4. *Пусть функции* $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ *непрерывны на* $\mathfrak{M}$ *и* a_{ij} *удовлетворяют условию* (5.3). *Кроме того, предположим выполненными следующие условия:*

a) $S \in C^{2+\alpha}$ *и* $\varphi(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

b) a_{ij} *и* a *удовлетворяют условиям одного из следствий* 8.1—8.3, 8.5, 8.6 *гл.* IV. (*Это дает мажоранту* M *для* $|u(x, \tau)|$.)

c) *Если* Ω — *произвольная область, то* a_{ij} *и* a *удовлетворяют неравенству* (5.8); *если* Ω — *строго выпуклая область, то только неравенству* (5.9). (*Это дает мажоранту* M_1 *для* $|\nabla u(x, \tau)||_S$.)

d) *На множестве* $\mathfrak{M}_1$, *определенном в теореме* 5.1, *функции* $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ *дифференцируемы по* x, u, p *и на любой компактной части его ограничены вместе с частными производными первого порядка. Функции* $a_{ij}(x, u, p)$ *удовлетворяют неравенству* (3.10) *с некоторой положительной непрерывной функцией* $\nu_1(x, u, p)$, *и для всего семейства операторов* $L^\tau(u)$, $\tau \in [0, 1]$,

*) Напомним, что c_4 и c_5, а также и $\tilde{c}_4$, $\tilde{c}_5$ не предполагаются непременно неотрицательными.

существует функция $\Phi(v)$ *с описанными в теореме* 3.2 *свойствами. В качестве* $u^{(1)}$ *и* $u^{(2)}$ *надо взять числа* $-M$ *и* M, *где* M — *мажоранта* j_1, *получаемая благодаря условию* b), *а в качестве* M_1 — *мажоранту* j_2, *получаемую благодаря условию* c). *Существование такой функции* $\Phi(v)$ *гарантируется выполнением условий теоремы* 3.3 *для функций* $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$, *если только в них постоянные* c_4 *и* c_5 *заменены на постоянные* $\tilde{c}_4$ *и* $\tilde{c}_5$ *из* (5.14) *и* (5.15) *соответственно. Вместо условий теоремы* 3.3 *можно предположить выполненными для* a_{ij}, *а условия теоремы* 3.4.

Тогда задачи (5.10) *разрешимы в классе* $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *при всех* $\tau \in [0,1]$. *Нормы* $|u(x, \tau)|_{\Omega}^{(2+\alpha)}$ *их решений ограничены некоторой постоянной, определяемой лишь известными из условий* a) — d) *величинами.*

Рассмотрим еще один способ включения параметра τ, а именно:

$$L^{\tau}(u) \equiv a_{ij}(\tau x, \tau u, u_x)\, u_{x_i x_j} + \tau a(\tau x, \tau u, u_x) = 0, \qquad u|_S = \tau\varphi|_S. \tag{5.16}$$

Он полезен для получения оценки $\max\limits_{\Omega}|u(x, \tau)|$ с помощью теоремы 8.1 или следствия 8.4 гл. IV. В этом случае надо предполагать, что оператор $L^1(u)$ определен для всех x, принадлежащих области $\overline{\Omega}_1$, содержащей наряду с точками $\overline{\Omega}$ и все точки вида τx, $x \in \overline{\Omega}$, $\tau \in [0, 1]$ (начало координат считаем лежащим в Ω). В § 10 гл. IV мы показали, как получается в этом случае оценка j_1. Нетрудно понять, как к этому семейству $L^{\tau}(u)$ применяются теоремы 2.1, 2.2, 3.2, 3.3 и 1.1, позволяющие оценить j_2, j_3 и j_4, а тем самым и доказать разрешимость задач (5.16).

В теоремах 5.1—5.4 установлена разрешимость задачи (5.1), (5.2) в пространстве $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Теоремы §§ 1, 4 позволяют исследовать разрешимость этой задачи в пространстве $C^{2+\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ при меньших предположениях относительно S и φ. Мы не будем излагать здесь этот вопрос, а отошлем читателя к § 3 гл. VI первого издания этой книги (см. теорему 3.3). По поводу теоремы единственности для задачи (5.1), (5.2) см. конец § 10 гл. IV.

§ 6. О двумерных задачах

Теоремы, доказанные в предыдущих параграфах, справедливы для любого $n \geqslant 2$. Однако для $n = 2$ можно указать ряд дополнительных случаев разрешимости задачи Дирихле. Приведем два из них: один для равномерно, а другой для неравномерно эллиптических уравнений. Итак, рассмотрим сначала задачу

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x, u, u_x)\, u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = 0, \qquad u|_S = 0\ ^*), \tag{6.1}$$

считая выполненным условие равномерной эллиптичности

$$\nu(|u|)\,\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, u, p)\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu(|u|)\,\xi^2, \tag{6.2}$$

где $\nu(\tau)$ и $\mu(\tau)$ обладают свойствами, описанными на стр. 26. Для доказательства разрешимости задачи (6.1) используем теорему Шаудера, точнее, ее следствие 10.1 и замечание 10.2 из гл. IV. Для этого включим задачу (6.1) в семейство задач

$$a_{ij}(x, u, u_x)\, u_{x_i x_j} + \tau a(x, u, u_x) = 0, \qquad u|_S = 0, \ \tau \in [0, 1]. \tag{6.3}$$

Согласно тому, что изложено в конце § 10 гл. IV (уравнение (10.27) и далее), для разрешимости задачи (6.1) в пространстве $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ достаточно знать, что все возможные решения $u(x, \tau)$ задач (6.3) из $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ имеют равномерно ограниченные нормы $|u|_{\Omega}^{(1+\beta)}$ с каким-нибудь $\beta > 0$. Допустим, что для всех $u(x, \tau)$ верна оценка

$$\max_{\Omega} |u(x, \tau)| \leqslant M, \tag{6.4}$$

и пусть при $x \in \Omega$, $|u| \leqslant M$ и любых p функция $a(x, u, p)$ подчиняется неравенству

$$|a(x, u, p)| \leqslant \delta(M)|p|^2 + \mu_1(M)\left[1 + |p|^{2-\delta_1}\right], \tag{6.5}$$

где δ_1 — какое-либо положительное число, а $M\delta(M)$ — достаточно малое число (его величина определяется значениями $\nu(M)$ и $\mu(M)$ из (6.2) и S — см. (6.10)).

Из неравенства (19.5) теоремы 19.1 гл. III в силу условий (6.4) и (6.5) следует

$$\begin{aligned}\|u(x, \tau)\|_{2,\Omega}^{(2)} &\leqslant c\,\|a(x, u, u_x)\|_{2,\Omega} + c_1 M \operatorname{mes}^{1/2}\Omega \leqslant \\ &\leqslant c\delta(M)\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^4\,dx\right)^{1/2} + c\mu_1(M)\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{4-2\delta_1}\,dx\right)^{1/2} + \\ &+ c\mu_1(M)\operatorname{mes}^{1/2}\Omega + c_1 M \operatorname{mes}^{1/2}\Omega, \qquad c = 2\mu(M)\,\nu^{-2}(M),\end{aligned} \tag{6.6}$$

где постоянная c_1 определяется $\nu(M)$, $\mu(M)$ и границей S.

---

*) Однородность краевого условия несущественна. Можно работать или непосредственно с неоднородным условием, или свести его предварительно к однородному.

Для оценки первого слагаемого правой части (6.6) воспользуемся неравенством

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^4\,dx\right)^{1/2} \leqslant (2+\sqrt{2})\max_\Omega |u| \left(\int_\Omega u_{xx}^2\,dx\right)^{1/2}, \tag{6.7}$$

которое выводится так (напомним, что $u|_S = 0$):

$$\int_\Omega |\nabla u|^4\,dx = \int_\Omega u_{x_i}u_{x_i}u_{x_k}u_{x_k}\,dx =$$
$$= -\int_\Omega u\left[\Delta u u_{x_i}u_{x_i} + 2u_{x_i}u_{x_k}u_{x_k x_i}\right]dx \leqslant$$
$$\leqslant (\sqrt{2}+2)\max_\Omega |u| \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^4\,dx}\sqrt{\int_\Omega u_{xx}^2\,dx}.$$

Для оценки второго слагаемого используем неравенство $ab \leqslant \leqslant \frac{(\varepsilon a)^q}{q} + \frac{1}{q'}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^{q'}$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1$, справедливое при любом $\varepsilon > 0$. Оно дает

$$\int_\Omega |\nabla u|^{4-2\delta_1}\,dx \leqslant \int_\Omega \left[\left(\varepsilon|\nabla u|^{4-2\delta_1}\right)^{4/(4-2\delta_1)} \frac{4-2\delta_1}{4} + \frac{\delta_1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2/\delta_1}\right]dx. \tag{6.8}$$

Подставляя (6.7) и (6.8) в (6.6), получим

$$\|u(x,\tau)\|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant \left[c\delta(M) + c\mu_1(M)\sqrt{1-\frac{\delta_1}{2}}\,\varepsilon^{1/(2-\delta_1)}\right]\sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^4\,dx} +$$
$$+ c\mu_1(M)\left(1+\sqrt{\frac{\delta_1}{2}}\,\varepsilon^{-1/\delta_1}\right)\operatorname{mes}^{1/2}\Omega + c_1 M \operatorname{mes}^{1/2}\Omega \leqslant$$
$$\leqslant \left[c\delta(M) + c\mu_1(M)\sqrt{1-\frac{\delta_1}{2}}\,\varepsilon^{1/(2-\delta_1)}\right](2+\sqrt{2})M\|u\|_{2,\Omega}^{(2)} + c_\varepsilon, \tag{6.9}$$

где $c_\varepsilon = \left[c\mu_1(M)\left(1+\sqrt{\frac{\delta_1}{2}}\,\varepsilon^{-1/\delta_1}\right) + c_1 M\right]\operatorname{mes}^{1/2}\Omega$.

Пусть

$$(2+\sqrt{2})\,cM\delta(M) < 1, \quad c = 2\mu_1(M)\,\nu^{-2}(M). \tag{6.10}$$

Возьмем в (6.9) ε таким, чтобы $(2+\sqrt{2})Mc\mu_1(M)\sqrt{1-\frac{\delta_1}{2}}\,\varepsilon^{1/(2-\delta_1)} \leqslant \leqslant 1-(2+\sqrt{2})Mc\delta(M) \equiv \delta_2$, $\delta_2 > 0$. Тогда (6.9) даст следующую оценку:

$$\|u(x,\tau)\|_{2,\Omega}^{(2)} \leqslant c_\varepsilon/\delta_2. \tag{6.11}$$

Эта оценка получена при условии (6.10), которое выше было сформулировано как условие «достаточной малости величины $M\delta(M)$».

Из неравенства (6.11) и теоремы об ограниченности вложения $W_2^2(\Omega)$ в $W_r^1(\overline{\Omega})$ с $\forall r<\infty$ (неравенство (2.28) гл. II) следуют оценки

$$\| u(x, \tau)\|_{r,\,\Omega}^{(1)} \leqslant c(r) \tag{6.12}$$

с постоянными $c(r)$, зависящими только от r, M, $c_8\delta_2^{-1}$ из (6.11) и области Ω. Из (6.12) и (6.5) в свою очередь следует оценка

$$\| a(x,\ u(x,\ \tau),\ u_x(x,\ \tau))\|_{q,\,\Omega} \leqslant c_1(q) \tag{6.13}$$

при $\forall q<\infty$. Фиксируем какое-либо $q>2$ и рассмотрим уравнения (6.3) как линейные уравнения относительно $u(x, \tau)$ с коэффициентами $\tilde{a}_{ij}(x, \tau) \equiv a_{ij}(x,\ u(x, \tau),\ u_x(x, \tau))$ и свободными членами $f(x, \tau)=\tau a(x,\ u(x, \tau),\ u_x(x, \tau))$ из $L_q(\Omega)$. В силу (6.2), (6.4) и (6.13) для решений этих уравнений справедлива теорема 19.5 гл. III, гарантирующая оценку

$$| u(x, \tau)|_{\Omega}^{(1+\beta)} \leqslant M_1 \tag{6.14}$$

с некоторым $\beta>0$. Итак, желаемая оценка получена. На ее основе, как показано в § 10 гл. IV, доказывается

Теорема 6.1. *Пусть для всех возможных решений $u(x, \tau)$ задач* (6.3) *из $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ справедлива оценка* (6.4) *и $S \in C^{2+\alpha}$. Пусть, далее, при $x \in \overline{\Omega}$, $|u| \leqslant M$ и $\forall p$ функции $a_{ij}(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ удовлетворяют условиям* (6.2), (6.5), *постоянные в которых подчинены требованию* (6.10), *и на компакте $\mathfrak{M}_{M,\,M_1} = \{(x, u, p)\colon x \in \overline{\Omega},\ |u| \leqslant M,\ |p| \leqslant M_1\}$ принадлежат $C^{\alpha}(\mathfrak{M}_{M,\,M_1})$ (M_1 — постоянная из* (6.14), *определяемая постоянными из условий* (6.2), (6.5)). *Тогда задача* (6.1) *имеет по крайней мере одно решение из $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.*

Рассмотрим теперь случай неравномерно эллиптических уравнений вида

$$a_{ij}(x,\ u,\ u_x)\, u_{x_i x_j} = 0.$$

Для них справедлива следующая теорема:

Теорема 6.2. *Задача*

$$\sum_{i,\,j=1}^{2} a_{ij}(x,\ u,\ u_x)\, u_{x_i x_j} = 0, \qquad u|_S = \varphi|_S \tag{6.15}$$

имеет по крайней мере одно решение u из $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, если Ω — строго выпуклая область, $\varphi \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $S \in C^{2+\alpha}$,

$$a_{ij}(x,\ u,\ p)\,\xi_i\xi_j > 0 \ ^{*)} \tag{6.16}$$

---

*) Достаточно требовать, чтобы это неравенство выполнялось лишь на множестве $\mathfrak{M}_{M,\,M_1}$.

и $a_{ij}(x, u, p)$ *на множестве* $\mathfrak{M}_{M, M_1}=\{(x, u, p)\colon x\in\overline{\Omega}, |u|\leqslant M, |p|\leqslant M_1\}$, *где* $M=\max\limits_S|\varphi|$, *а* M_1 — *некоторая постоянная, определяемая лишь* φ *и* S, *удовлетворяют условию Гёльдера по* (x, u, p) *с показателем* $\alpha>0$.

Для доказательства этого утверждения можно воспользоваться теоремой Шаудера (теоремой 10.6 гл. IV). Действительно, рассмотрим преобразование $w=\theta(v)$, определяемое задачей

$$a_{ij}(x, v, v_x)\,w_{x_ix_j}=0, \qquad w|_S=\varphi|_S. \tag{6.17}$$

Для $\forall v\in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ существует единственное решение w задачи (6.17) из пространства $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ (см. теорему 1.1. гл. III). Более того, для w в силу леммы 1.4 гл. III справедлива оценка

$$\max_\Omega|w|\leqslant\max_S|\varphi|\equiv M, \tag{6.18}$$

а в силу теоремы 20.1 гл. III — оценка

$$\max_\Omega|\nabla w|\leqslant M_1, \tag{6.19}$$

где M_1 определяется только φ и S.

Далее, теорема 19.3 гл. III гарантирует оценку

$$|w|_\Omega^{(1+\beta)}\leqslant M_2, \tag{6.20}$$

в которой $\beta>0$ и M_2 определяются M, M_1, φ, S и нижней и верхней границами квадратичной формы $a_{ij}(x, v(x), v_x(x))\,\xi_i\xi_j$ при $\xi^2=1$ *). Будем рассматривать $\theta(v)$ только на v, удовлетворяющих условиям

$$\max_\Omega|v(x)|\leqslant M, \qquad \max_\Omega|\nabla v(x)|\leqslant M_1. \tag{6.21}$$

Для таких $v(x)$ постоянная M_2 может быть взята не зависящей от $v(x)$, ибо таковыми могут быть выбраны нижняя и верхняя границы формы $a_{ij}(x, v(x), v_x(x))\,\xi_i\xi_j$ при $\xi^2=1$. Итак, при условиях (6.21) постоянная M_2 в (6.20) определяется M, M_1, φ и S.

Рассмотрим преобразование $\theta(v)$ на множестве

$$\mathfrak{M}=\{v\colon \max_\Omega|v|\leqslant M,\ \max_\Omega|\nabla v|\leqslant M_1,\ |v|_\Omega^{(1+\beta)}\leqslant M_2\}$$

---

*) В теореме 19.3 рассмотрен случай однородного граничного условия. Но наш случай (6.17) легко сводится к рассмотренному в теореме 19.3, если вместо w ввести новую функцию $\hat{w}(x)=w(x)-\varphi(x)$, где $\varphi(x)\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и совпадает с $\varphi(s)$ на S. Получаемое для $\hat{w}$ уравнение имеет свободный член $-a_{ij}(x, v, v_x)\,\varphi_{x_ix_j}$, ограниченный по модулю известным нам числом.

пространства $C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$. Это множество ограничено, замкнуто и выпукло в $C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$. Функция $\theta(v)$ преобразует его в себя (что видно из неравенств (6.18) — (6.20)). Преобразование $\theta(v)$ компактно, ибо оно переводит $\mathfrak{M}$ в множество, компактное в $C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$. Действительно, для решений задач (6.17), помимо оценок (6.18) — (6.20), справедлива оценка

$$|w|_{\Omega}^{(2+\alpha)} \leqslant M_3, \tag{6.22}$$

гарантированная теоремами §§ 1, 2 гл. III. Постоянная M_3 определяется, помимо M и M_1, числом α, нормой $|\varphi|_S^{(2+\alpha)}$, S, нормами $|a_{ij}(x, u, p)|_{\mathfrak{M}_{M, M_1}}^{(\alpha)}$ и нижней гранью $a_{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j$ при $\xi^2 = 1$ на $\mathfrak{M}_{M, M_1}$. Множество же функций $w(x)$, удовлетворяющих неравенству (6.22), компактно в пространстве $C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$. Непрерывность $\theta(v)$ на $\mathfrak{M}$ выводится на основании теорем §§ 1, 2 гл. III так же, как это было сделано в § 10 гл. IV (см. (10.9) и далее). Мы этот вывод повторять здесь не будем.

Итак, проверено, что $\theta(v)$ есть вполне непрерывное преобразование $\mathfrak{M}$ в себя. Но тогда теорема 10.6 гл. IV гарантирует существование по крайней мере одного решения задачи (6.15). Теорема 6.2 доказана. При несколько более сильных ограничениях на гладкость a_{ij} и φ (а именно: $a_{ij} \in C^{2+\alpha}$ и $\varphi \in C^{3+\alpha}$) она была установлена в работе [32_4] Ж. Лерэ и Ю. Шаудера, при сформулированных здесь условиях — в работе [44_1] Л. Ниренберга.

Глава VII

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В этой главе мы рассмотрим классы линейных систем эллиптического типа, для которых имеет место векторный аналог принципа максимума. Для них будут установлены те же результаты, что и выше для одного уравнения второго порядка (см. [21_{19}]).

То, что специфично для систем, будет излагаться подробно, то, что близко к случаю одного уравнения, — более схематично. Из краевых задач мы выбрали первую. Необходимые видоизменения в рассуждениях при изучении второй и третьей краевых задач для систем читатель сделает сам, прочтя соответствующие параграфы для одного уравнения второго порядка. Число независимых переменных n всюду больше либо равно 2.

§ 1. Обобщенные решения из $W_2^1(\Omega)$

Рассмотрим в ограниченной области Ω системы вида

$$L\mathbf{u} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\,\mathbf{u}_{x_j} + A_i(x)\,\mathbf{u}\right] + B_i(x)\,\mathbf{u}_{x_i} + B(x)\,\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i} + \mathbf{f}. \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{f}$ суть вектор-функции с N компонентами:

$$\mathbf{u} = (u^1(x), \ldots, u^N(x)), \quad \mathbf{f}_i = (f_i^1(x), \ldots, f_i^N(x)),$$
$$\mathbf{f} = (f^1(x), \ldots, f^N(x)),$$

а $A_i(x)$, $B_i(x)$ и $B(x)$ — квадратные матрицы с N^2 элементами, зависящими от x, $a_{ij}(x)$ — скалярные функции.

Здесь и ниже используем следующие обозначения скалярных произведений и норм векторов и вектор-функций:

$$\mathbf{v}\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{N} v^k w^k, \quad |\mathbf{v}| = \left[\sum_{k=1}^{N} (v^k)^2\right]^{1/2}, \quad |\nabla \mathbf{v}|^2 = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \left(v_{x_i}^k\right)^2,$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_\Omega \mathbf{v}(x)\,\mathbf{w}(x)\,dx, \quad \|\mathbf{v}\|_{q,\Omega} = \|\,|\mathbf{v}|\,\|_{q,\Omega},$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{2,\Omega}^{(1)} = \int_\Omega \left[\mathbf{v}(x)\,\mathbf{w}(x) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_{x_i}\mathbf{w}_{x_i}\right] dx,$$

$$\|\mathbf{v}\|_{2,\Omega}^{(1)} = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})_{2,\Omega}^{(1)}}, \quad \|\nabla \mathbf{v}\|_{2,\Omega} = \|\,|\nabla \mathbf{v}|\,\|_{2,\Omega}.$$

Принадлежность вектор-функции $\mathbf{v}(x)$ какому-либо функциональному пространству $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$, $C^{l+\alpha}(\Omega)$ и пр. означает, что каждая компонента вектора принадлежит этому пространству.

Будем предполагать, что коэффициенты a_{ij} системы (1.1) удовлетворяют неравенствам

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu,\ \mu = \mathrm{const} > 0, \tag{1.2}$$

при любых вещественных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, так что система (1.1) — эллиптического типа. Для нее рассмотрим задачу Дирихле

$$\mathbf{u}|_S = \varphi|_S, \tag{1.3}$$

считая $\varphi(s) = \varphi(x)|_S$, $\varphi(x) \in W_2^1(\Omega)$. Ради небольших упрощений в изложении будем предполагать, что для области Ω имеют место теоремы вложения § 2 гл. II.

Мы начнем исследование задачи (1.1), (1.3) с изучения ее разрешимости в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Как выяснено на примерах в § 2 гл. I, для разумности таких рассмотрений необходимо, чтобы элементы $a_i^{lm}(x)$, $b_i^{lm}(x)$ и $b^{lm}(x)$, $l, m = 1, \ldots, N$, матриц A_i, B_i и B суммировались по Ω со степенями q, q и $q/2$, где $q > n$, соответственно*). Если эти условия не выполнены, то в классе обобщенных решений из $W_2^1(\Omega)$ нарушается теорема единственности для задачи Дирихле в любой сколь угодно маленькой области Ω, т. е. теряется свойство, которое присуще этой задаче в ее классической постановке.

Итак, будем предполагать, что

$$\| a_i^{lm},\ b_i^{lm} \|_{q,\,\Omega}, \quad \| b^{lm} \|_{q/2,\,\Omega} < \mu_1, \qquad q > n. \tag{1.4}$$

Относительно $\mathbf{f}_i(x)$, $\mathbf{f}(x)$ и $\varphi(x)$ будем считать, что

$$\| \mathbf{f}_i \|_{2,\,\Omega}, \quad \| \mathbf{f} \|_{2\hat{n}/(\hat{n}+2),\,\Omega}, \quad \| \varphi \|_{2,\,\Omega}^{(1)} < \infty, \tag{1.5}$$

где $\hat{n} = n$ для $n > 2$ и $\hat{n} = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, для $n = 2$. Эти предположения относительно $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{f}$ и φ также необходимы для существования обобщенного решения из $W_2^1(\Omega)$ задачи (1.1), (1.3) (если, конечно, эти условия формулировать в терминах принадлежности данных функций к пространствам $L_p(\Omega)$).

Обобщенным решением из $W_2^1(\Omega)$ *системы* (1.1) называем вектор-функцию $\mathbf{u}(x)$ из $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному

---

*) Граничный случай $q = n$ для систем (1.1) имеет те же особенности, что и для одного эллиптического уравнения, и исследуется аналогично. Ввиду этого в данной главе мы его рассматривать не будем.

тождеству

$$\int_\Omega \left[\left(a_{ij}\mathbf{u}_{x_j} + A_i\mathbf{u} - \mathbf{f}_i\right)\eta_{x_i} - \left(B_i\mathbf{u}_{x_i} + B\mathbf{u} - \mathbf{f}\right)\eta\right] dx = 0 \qquad (1.6)$$

при любой $\eta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Обобщенным решением из $W_2^1(\Omega)$ *задачи* (1.1), (1.3) назовем то обобщенное решение системы (1.1) из этого класса, для которого $\mathbf{u}(x) - \varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Так же, как и для случая одного уравнения, доказывается теорема:

Теорема 1.1. *Пусть выполнены предположения* (1.2), (1.4), (1.5) *и* Ω — *ограниченная область. Тогда относительно разрешимости задачи* (1.1), (1.3) *в пространстве* $W_2^1(\Omega)$ *выполнены все теоремы Фредгольма.*

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы и ее подробную формулировку. Она базируется на первом основном неравенстве для решений системы (1.1), которое имеет вид

$$\|\nabla\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 \leqslant c_1(q)\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 + c\left(\sum_{i=1}^n \|\mathbf{f}_i\|_{2,\Omega}^2 + c_1(\hat{n}, \Omega)\|\mathbf{f}\|_{2\hat{n}/(\hat{n}+2),\Omega}^2\right) + \\ + c_1(q, \Omega)\left(\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)}\right)^2. \qquad (1.7)$$

Постоянная c в нем зависит лишь от n и ν из (1.2), $c_1(q)$ — от n, N, ν, μ, μ_1, q из (1.2), (1.4), а $c_1(q, \Omega)$ — еще и от Ω (зависимость от Ω обусловлена лишь использованием неравенства (2.21) гл. II для оценки $\|\varphi\|_{2q/(q-2),\Omega}^2$). В ряде случаев член $c_1(q)\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2$ можно исключить из правой части. Это возможно, например, когда $\operatorname{mes}\Omega \leqslant \delta$, где δ — достаточно малое число, или когда матрица B такова, что

$$B\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \leqslant -\mu_1|\mathbf{u}|^2, \qquad (1.8)$$

где μ_1 — достаточно большое число (величина δ определяется лишь n и $c_1(q)$).

Доказательство всех этих предложений принципиально не отличается от доказательства аналогичных фактов для одного уравнения второго порядка. В частности, для вывода (1.7) надо положить в (1.6) $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \varphi$, а $\eta = \mathbf{v}$ и воспользоваться предположениями (1.3) — (1.5).

Во всех случаях, когда в (1.7) можно исключить $\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2$ из правой части, имеет место теорема единственности для обобщенных решений из $W_2^1(\Omega)$. Действительно, для разности двух возможных обобщенных решений задачи (1.1), (1.3) мы имеем неравенство (1.7) с нулями в правой части (ибо для нее $\mathbf{f}_i \equiv \mathbf{f} \equiv \varphi \equiv 0$), что и указывает на совпадение решений.

§ 2. Оценка $\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|$

В этом параграфе мы займемся оценкой максимумов модулей решений $\mathbf{u}(x)$ системы (1.1). Как следует из примеров § 2 гл. I, для конечности $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|$, кроме условий (1.2), (1.4), необходимо, чтобы

$$\|\mathbf{f}_i\|_{q,\Omega},\ \|\mathbf{f}\|_{q/2,\Omega}\leqslant\mu_1 \quad \text{при} \quad q>n. \tag{2.1}$$

Будем считать эти условия выполненными.

Мы покажем, что если $\mathbf{u}(x)$ есть обобщенное решение (1.1) из $W_2^1(\Omega)$ и если для него конечны интегралы

$$\int\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|^4\,dx,\qquad \int\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|^2|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx, \tag{2.2}$$

то $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'}|\mathbf{u}|$ для любой внутренней подобласти Ω' области Ω оценивается через n, N, q, ν и μ из условий (1.2), (1.4), (2.1), $\int\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|^4\,dx$ и расстояние от Ω' до S. От величины интеграла $\int\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|^2|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx$ величина $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'}|\mathbf{u}|$ не зависит. Для оценки $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|$ по всей области Ω надо сделать дополнительные предположения о граничной функции $\varphi(x)$. Мы проведем эту оценку ради экономии места для случая $\varphi(x)\equiv 0$, т. е. для

$$\mathbf{u}|_S=0. \tag{2.3}$$

Более того, в этом случае предварительно докажем, что если $\mathbf{u}(x)$ есть обобщенное решение задачи (1.1), (2.3), то интегралы (2.2) для него будут конечны.

Начнем с доказательства конечности интегралов (2.2). Для этого положим в (1.6) $\eta(x)=\mathbf{u}(x)\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — произвольная функция, обладающая тем свойством, что $\mathbf{u}(x)\Phi(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Это даст тождество

$$\int\limits_{\Omega}\Big[a_{ij}\mathbf{u}_{x_i}\mathbf{u}_{x_j}\Phi+\frac{1}{2}a_{ij}v_{x_j}\Phi_{x_i}+(A_i\mathbf{u}-\mathbf{f}_i)(\mathbf{u}_{x_i}\Phi+\mathbf{u}\Phi_{x_i})-$$
$$-(B_i\mathbf{u}_{x_i}+B\mathbf{u}-\mathbf{f})\mathbf{u}\Phi\Big]dx=0, \tag{2.4}$$

где $v(x)=|\mathbf{u}(x)|^2$.

Возьмем в качестве Φ функцию

$$\Phi(x)\equiv\Phi^{(r)}(x)=\min\{v(x),\ r\},\qquad r>0.$$

(Легко видеть, что $\mathbf{u}(x)\Phi^{(r)}(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.) Первые два члена из (2.4) оставим в левой части и оценим их снизу, а остальные перенесем в правую часть и будем оценивать сверху:

$$\nu\int\limits_{\Omega}\left[|\nabla\mathbf{u}|^2\Phi^{(r)}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi^{(r)}|^2\right]dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega}\left[\sum_i\left(\sqrt{\sum_{l,m}(a_i^{lm})^2}\,|\mathbf{u}|+|\mathbf{f}_i|\right)\left(|\mathbf{u}_{x_i}|\Phi^{(r)}+|\mathbf{u}|\,|\Phi^{(r)}_{x_i}|\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_i\sqrt{\sum_{l,m}(b_i^{lm})^2}\,|\mathbf{u}_{x_i}|+\sqrt{\sum_{l,m}(b^{lm})^2}\,|\mathbf{u}|+|\mathbf{f}|\right)|\mathbf{u}|\,\Phi^{(r)}\right]dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega}\left[\varepsilon|\nabla\mathbf{u}|^2\Phi^{(r)}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_i\left(\sqrt{\sum_{l,m}(a_i^{lm})^2}\,\sqrt{v}+|\mathbf{f}_i|\right)^2\Phi^{(r)}+\right.$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}|\nabla\Phi^{(r)}|^2+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i,l,m}(b_i^{lm})^2v\Phi^{(r)}+\sqrt{\sum_{l,m}(b^{lm})^2}\,v\Phi^{(r)}+$$

$$\left.+|\mathbf{f}|\sqrt{v}\,\Phi^{(r)}\right]dx. \qquad (2.5)$$

При этих оценках мы использовали то, что

$$|\mathbf{u}|\,|\Phi^{(r)}_{x_i}|=\sqrt{\Phi^{(r)}}\,|\Phi^{(r)}_{x_i}|.$$

Возьмем $\varepsilon=\nu/2$ и приведем подобные члены. Остальные члены оценим по неравенству Гёльдера следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega}(a_i^{lm})^2v\Phi^{(r)}dx\leqslant\left(\int\limits_{\Omega}|a_i^{lm}|^q\,dx\right)^{2/q}\left(\int\limits_{\Omega}\left(\sqrt{v\Phi^{(r)}}\right)^{2q/(q-2)}dx\right)^{(q-2)/q},$$

$$\int\limits_{\Omega}(f_i^l)^2\,\Phi^{(r)}dx\leqslant\left(\int\limits_{\Omega}|f_i^l|^{4q/(q+2)}\,dx\right)^{1/2+1/q}\left(\int\limits_{\Omega}(\Phi^{(r)})^{2q/(q-2)}\,dx\right)^{(q-2)/2q},$$

$$\int\limits_{\Omega}|b^{lm}|\,v\Phi^{(r)}dx\leqslant\left(\int\limits_{\Omega}|b^{lm}|^{q/2}dx\right)^{2/q}\left(\int\limits_{\Omega}\left(\sqrt{v\Phi^{(r)}}\right)^{2q/(q-2)}dx\right)^{(q-2)/q},$$

$$\int\limits_{\Omega}(b_i^{lm})^2v\Phi^{(r)}dx\leqslant\left(\int\limits_{\Omega}|b_i^{lm}|^q\,dx\right)^{2/q}\left(\int\limits_{\Omega}\left(\sqrt{v\Phi^{(r)}}\right)^{2q/(q-2)}dx\right)^{(q-2)/q},$$

$$\int\limits_{\Omega}|f^l|\sqrt{v}\Phi^{(r)}dx\leqslant\left(\int\limits_{\Omega}|f^l|^{4q/(q+6)}dx\right)^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2q}}\left(\int\limits_{\Omega}\left(\sqrt{v\Phi^{(r)}}\right)^{2q/q-2}dx\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{q-2}{2q}}.$$

Для оценки правых частей воспользуемся неравенством (2.9) гл. II, точнее, его следствием (2.15)

$$\left(\int\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|^{2q\,(q-2)}\,dx\right)^{(q-2)/q}\leqslant\varepsilon\int\limits_{\Omega}|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx+c_\varepsilon\left(\int\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|\,dx\right)^2,\qquad\forall\varepsilon>0,$$

справедливым для любой функции $\mathbf{u}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и неравенством

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{v\Phi^{(r)}}\right)^2\leqslant4\Phi^{(r)}|\mathbf{u}_{x_i}|^2.$$

Из них следует

$$\left(\int_{\Omega}\left(\sqrt{v\Phi^{(r)}}\right)^{2q/(q-2)}dx\right)^{(q-2)/q}\leqslant\varepsilon\int_{\Omega}4\Phi^{(r)}|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx+c_\varepsilon\left(\int_{\Omega}v\,dx\right)^2.$$

Подставляя все эти оценки в (2.5) с достаточно малым ε, приводя затем подобные члены и учитывая предположения о коэффициентах и свободных членах системы, будем иметь

$$\int_{\Omega}\left[|\nabla\mathbf{u}|^2\Phi^{(r)}+|\nabla\Phi^{(r)}|^2\right]dx\leqslant$$
$$\leqslant c\left[\left(\int_{\Omega}|\mathbf{u}|^2dx\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{f}_i\|^4_{4q/(q+2),\,\Omega}+\|\mathbf{f}\|^4_{4q/(q+6),\,\Omega}\right],$$

а потому и

$$\int_{\Omega}\left[|\nabla\mathbf{u}|^2\Phi^{(r)}+|\Phi^{(r)}|^2\right]dx\leqslant$$
$$\leqslant c_1\left[\|\mathbf{u}\|^4_{2,\,\Omega}+\sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{f}_i\|^4_{4q/(q+2),\,\Omega}+\|\mathbf{f}\|^4_{4q/(q+6),\,\Omega}\right],$$

причем постоянная c_1 не зависит от r. Устремляя в последнем неравенстве r к ∞, убедимся, что

$$\int_{\Omega}\left[|\mathbf{u}|^2|\nabla\mathbf{u}|^2+|\mathbf{u}|^4\right]dx\leqslant$$
$$\leqslant c_1\left[\|\mathbf{u}\|^4_{2,\,\Omega}+\sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{f}_i\|^4_{4q/(q+2),\,\Omega}+\|\mathbf{f}\|^4_{4q/(q+6),\,\Omega}\right], \tag{2.6}$$

т. е. интегралы (2.2) для обобщенного решения $\mathbf{u}\in\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ задачи (1.1), (2.3) конечны. При этом относительно коэффициентов системы мы использовали те же предположения (1.2), (1.4), что и в § 1, а относительно $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{f}$ ограниченность норм

$$\|\mathbf{f}_i\|_{4q/(q+2),\,\Omega},\quad \|\mathbf{f}\|_{4q/(q+6),\,\Omega},\qquad q>n. \tag{2.7}$$

Переходим теперь к оценке $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'}|\mathbf{u}|$, не предполагая решение $\mathbf{u}$ непременно равным нулю на S, но считая известной ограниченность интегралов (2.2). В силу этой ограниченности в качестве Φ в (2.4) можно взять функцию

$$\Phi(x)=\max\{2[v(x)-k]\zeta^2(x),\ 0\},$$

где k — какое-либо неотрицательное число, а $\zeta(x)$ — гладкая неотрицательная функция со значениями между 0 и 1, равная нулю вне шара $K_\rho\subset\Omega$. В результате элементарных оценок по неравенству (1.2) гл. II получаем

$$\nu \int\limits_{A_{k,\rho}} [2|\nabla \mathbf{u}|^2 (v-k)\zeta^2 + |\nabla v|^2\zeta^2]\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \int\limits_{A_{k,\rho}} [|\nabla \mathbf{u}|^2 (v-k)\zeta^2 + |\nabla v|^2\zeta^2]\,dx +$$
$$+ c_\varepsilon \int\limits_{A_{k,\rho}} [(v-k)^2|\nabla\zeta|^2 + (D^2+E)(v^2+1)\zeta^2]\,dx. \qquad (2.8)$$

Здесь $A_{k,\rho}$ есть множество точек x из K_ρ, для которых $v(x) > k$, а

$$D(x) = \sum_{i,\,l,\,m} (|a_i^{lm}(x)| + |f_i^l(x)| + |b_i^{lm}(x)|),$$
$$E(x) = \sum_{l,\,m} |b^{lm}(x)| + \sum_l |f^l(x)|.$$

В силу условий (1.4), (2.1) нормы $\|D\|_{q,\,\Omega}$, $\|E\|_{q/2,\,\Omega}$ ограничены. Поэтому последний член допускает оценку

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} (D^2+E)(v^2+1)\zeta^2\,dx \leqslant c\left[\int\limits_{A_{k,\rho}} (\zeta v)^{2q/(q-2)}\,dx\right]^{(q-2)/q} +$$
$$+ c\,\mathrm{mes}^{1-2/q} A_{k,\rho} \leqslant 2c\left[\int\limits_{A_{k,\rho}} |\zeta(v-k)|^{2q/(q-2)}\,dx\right]^{(q-2)/q} +$$
$$+ c(2k^2+1)\,\mathrm{mes}^{1-2/q} A_{k,\rho}.$$

Учитывая ее и полагая в (2.8) $\varepsilon = \nu/2$, из (2.8) будем иметь при $k \geqslant 1$

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla v|^2\zeta^2\,dx \leqslant c_1\left[\int\limits_{A_{k,\rho}} (v-k)^2|\nabla\zeta|^2\,dx + \right.$$
$$\left. + \|\zeta(v-k)\|^2_{2q/(q-2),\,A_{k,\rho}} + k^2\,\mathrm{mes}^{1-\frac{2}{q}} A_{k,\rho}\right] \qquad (2.9)$$

с известной нам постоянной c_1.

Неравенство (2.13) гл. II применительно к функции $u = (v-k)\zeta$ дает

$$\|(v-k)\zeta\|^2_{2q/(q-2),\,A_{k,\rho}} \leqslant$$
$$\leqslant c_2\rho^{2n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{q}\right)} \int\limits_{A_{k,\rho}} [|\nabla v|^2\zeta^2 + (v-k)^2|\nabla\zeta|^2]\,dx. \qquad (2.10)$$

Для ρ, удовлетворяющих неравенству

$$c_1 c_2 \rho^{2n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{q}\right)} \leqslant \frac{1}{2}, \tag{2.11}$$

неравенство (2.9) порождает более простое:

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla v|^2 \zeta^2\, dx \leqslant \gamma \left[\int\limits_{A_{k,\rho}} (v-k)^2 |\nabla\zeta|^2\, dx + k^2 \operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q}} A_{k,\rho} \right]. \tag{2.12}$$

В этом неравенстве $k \geqslant 1$, ρ удовлетворяет (2.11) и $K_\rho \subset \Omega$. Постоянная γ определяется лишь n, N, q $(q > n)$, ν, μ из (1.2), (1.4) и (2.1). Следовательно, $v(x)$ принадлежит классу $\mathfrak{A}_2\left(K_\rho, \gamma, 2, 2, \frac{2}{n}-\frac{2}{q}, 1\right)$ (см. замечание 5.4 гл. II), и потому на основании теоремы 5.3 гл. II $\operatorname{vrai}\max\limits_{K_{\rho/2}} v$ в концентрическом шаре $K_{\rho/2}$ оценивается через γ, q и $\rho^{-n/2}\|v\|_{2,K_\rho} = \rho^{-n/2}\|\mathbf{u}\|^2_{4,K_\rho}$. Ввиду произвольности шара $K_\rho \subset \Omega$ отсюда вытекает оценка $\max\limits_{\Omega'} v = \max\limits_{\Omega'} |\mathbf{u}|^2$ для $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$ (она, разумеется, зависит от расстояния Ω' до S). Если $\mathbf{u}|_S = 0$, то неравенства (2.12) при тех же $k \geqslant 1$ верны и для шаров K_ρ, пересекающих S, т. е. $\mathbf{u} \in \mathfrak{A}_2(\Omega_\rho, \gamma, \ldots, 1)$. Доказывается это так же, как и для внутренних шаров. Из всех этих неравенств на основании теоремы 5.3 гл. II следует

Теорема 2.1. *Пусть для системы* (1.1) *выполнены условия* (1.2), (1.4), (2.1). *Тогда для обобщенного решения* $\mathbf{u}(x)$ *системы* (1.1) *из* $W_2^1(\Omega)$ *с конечными интегралами* (2.2) *величина* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'} |\mathbf{u}(x)|$ *оценивается через* n, N, q, ν, μ, μ_1 *из* (1.2), (1.4), (2.1), $\|\mathbf{u}\|_{4,\Omega}$ *и расстояние* Ω' *до* S. *Если же* $\mathbf{u}(x)$ *есть обобщенное решение задачи* (1.1), (2.3) *из* $W_2^1(\Omega)$, *то* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} |\mathbf{u}(x)|$ *оценивается через* n, N, q, ν, μ *и* μ_1 *из* (1.2), (1.4), (2.1) *и* $\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}$.

Заметим, что $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} |\mathbf{u}|$ при выполнении условий второй части теоремы проще оценить сразу для всей области Ω, не разбивая Ω на шары K_ρ малого радиуса. Для этого надо в тождестве (2.4) взять $\Phi(x) = \max\{2[v(x)-k], 0\}$, $v = |\mathbf{u}|^2$, считая $k > 0$. Срезающая функция ζ при этом не нужна. Производя оценки того же типа, что и выше, придем к неравенствам

$$\int\limits_{A_k} |\nabla v|^2\, dx \leqslant \gamma \left[\int\limits_{A_k} (v-k)^2\, dx + k^2 \operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q}} A_k \right] \tag{2.13}$$

для k, превосходящих 1. Здесь A_k есть множество точек $x \in \Omega$, в которых $v(x) > k$. На основании теоремы 5.1 гл. II из (2.13) следует желаемая оценка $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} v$.

§ 3. Оценка $|\mathbf{u}|_{\Omega}^{(\alpha)}$

Покажем, что при выполнении неравенств (1.2), (1.4), (2.1) можно оценить не только $\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|$, но и нормы Гёльдера для каждой компоненты $\mathbf{u}$ с некоторым положительным показателем $\alpha > 0$. Для этого достаточно доказать, что ограниченные обобщенные решения $\mathbf{u}(x)$ системы (1.1) из $W_2^1(\Omega)$ принадлежат классу $\mathfrak{B}_2^{2N}(\bar{\Omega}, \ldots)$.

Пусть $\mathbf{u}(x) \in W_2^1(\Omega)$ и $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}| \leqslant M$. Ради удобства будем считать, что $0 \leqslant u^l(x) \leqslant 1$, $l = 1, \ldots, N$. Этого всегда можно добиться, вводя в (1.1) вместо $u^l(x)$ функции $\hat{u}^l = (u^l + M)/(2M)$. Предположим, что это уже сделано.

В качестве функций $\varphi_{\pm}^l(\mathbf{u})$ для $\mathbf{u}(x)$ (см. определение классов $\mathfrak{B}_2^{2N}$ в § 8 гл. II) возьмем функции

$$\varphi_{+}^l(\mathbf{u}) = 10Nu^l + \sum_{r=1}^{N}(u^r)^2,$$

$$\varphi_{-}^l(\mathbf{u}) = 10N(1 - u^l) + \sum_{r=1}^{N}(u^r)^2, \qquad l = 1, \ldots, N.$$

В силу леммы 8.4 гл. II достаточно проверить, что функции $w_{\pm}^l(x) = \varphi_{\pm}^l(\mathbf{u}(x))$ удовлетворяют условиям 3) и 5), входящим в определение классов $\mathfrak{B}_2^{2N}$. Для этого сложим тождества (1.6) с $\boldsymbol{\eta} = 5N\Phi(x)\mathbf{e}^l$ и тождество (1.6) с $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — ограниченная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а $\mathbf{e}^l$ — единичный вектор, у которого компонента, стоящая на l-м месте, равна 1, а остальные $N - 1$ равны нулю. Это даст интегральное тождество для $w = w_{+}^l$:

$$\int\limits_{\Omega}\Big[a_{ij}\mathbf{u}_{x_j}\mathbf{u}_{x_i}\Phi + \frac{1}{2}a_{ij}w_{x_j}\Phi_{x_i} + (A_i\mathbf{u} - \mathbf{f}_i)(\mathbf{u}_{x_i}\Phi + \mathbf{u}\Phi_{x_i} + 5N\mathbf{e}^l\Phi_{x_i}) -$$
$$- (B_i\mathbf{u}_{x_i} + B\mathbf{u} - \mathbf{f})(\mathbf{u}\Phi + 5N\Phi\mathbf{e}^l)\Big]\,dx = 0. \tag{3.1}$$

Это тождество того же типа, что и (2.4). Положим в нем

$$\Phi(x) = \max\{2(w - k)\zeta^2, 0\}, \tag{3.2}$$

где k — произвольное число, $\zeta(x)$ — срезающая функция для произвольно взятого шара K_ρ, лежащего внутри Ω. Главными членами в нем будут $\int\limits_{A_{k,\rho}} 2a_{ij}u_{x_j}u_{x_i}(w-k)\zeta^2\,dx$ и $\int\limits_{A_{k,\rho}} a_{ij}w_{x_i}w_{x_j}\zeta^2\,dx$, где $A_{k,\rho}$ есть множество точек x из K_ρ, в которых $w(x)>k$. Все остальные оцениваются через них и члены вида $\int\limits_{A_{k,\rho}} (w-k)^2|\nabla\zeta|^2\,dx$ и $\operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q}} A_{k,\rho}$ с помощью неравенств (1.1) и (1.2) гл. II так же, как это сделано в § 14 гл. III для одного уравнения. При этом надо учесть, что $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|\leqslant M$.

В результате из (3.1) выводим неравенства

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla w|^2\zeta^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \gamma \int\limits_{A_{k,\rho}} (w-k)^2|\nabla\zeta|^2\,dx + \gamma_1 \operatorname{mes}^{1-\frac{2}{q}} A_{k,\rho}, \qquad \gamma=\frac{8\mu^2}{\nu^2}, \tag{3.3}$$

для $w=w^l_+$, $l=1,\ldots,N$, произвольных k и $K_\rho\subset\Omega$. Постоянная γ_1 определяется N, ν и μ_1 из (1.2), (1.4), (2.1) и M. Аналогично устанавливаются неравенства (3.3) для $w=w^l_-$, $l=1,\ldots,N$. Как легко видеть, из (3.3) следуют неравенства (8.3) гл. II. Это гарантирует принадлежность $\mathbf{u}(x)$ к классу $\mathfrak{B}_2^{2N}(\Omega, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \gamma_1, 2, 1/q)$, а следовательно (см. теорему 8.1 гл. II), и оценку $|\mathbf{u}|^{(\alpha)}_{\Omega'}$ для любой $\overline{\Omega}'\subset\Omega$. Для получения оценок норм Гёльдера $\mathbf{u}$ во всей Ω надо получить неравенства (3.3) для шаров K_ρ, пересекающих границу, с $k\geqslant\max\limits_{S_\rho} w$. Но такие неравенства действительно имеют место, и их вывод тот же, что и для $K_\rho\subset\Omega$, ибо функции Φ, определяемые равенствами (3.2), принадлежат $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ при $k\geqslant\max\limits_{S_\rho} w$, несмотря на то что ζ^2, вообще говоря, не обращается в нуль на S_ρ.

Таким образом, доказана

Теорема 3.1 *Пусть для системы* (1.1) *выполнены условия* (1.2), (1.4), (2.1). *Тогда любое ее ограниченное обобщенное решение* $\mathbf{u}(x)$ *из* $W^1_2(\Omega)$ *с* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|\leqslant M$ *принадлежит* $C^\alpha(\Omega)$ *с некоторым* $\alpha>0$, *причем* $|\mathbf{u}|^{(\alpha)}_{\Omega'}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* N, q, ν, μ *и* μ_1 *из* (1.2), (1.4), (2.1), M *и расстояния* Ω' *до* S. *Показатель* α *определяется* N, q *и* μ/ν *из* (1.2). *Если к тому же* S *удовлетворяет условию* (A) *и* $\mathbf{u}|_S\in C^\beta(S)$, *то* $\mathbf{u} \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *и* $|\mathbf{u}|_{\Omega}^{(\alpha)}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* N, q, ν, μ *и* μ_1 *из* (1.2), (1.4), (2.1), M, $|\mathbf{u}|_{S}^{(\beta)}$, β *и постоянных* a_0 *и* θ_0, *входящих в условие* (A). *Само* α *в этом случае определяется значениями* N, q, μ/ν, β *и* θ_0.

§ 4. Априорные оценки $|\mathbf{u}|_{\Omega'}^{(1+\alpha)}$ и $\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^{(2)}$

Оценим $|\nabla \mathbf{u}|_{\Omega'}^{(1+\alpha)}$ для любой внутренней подобласти $\Omega' \subset \Omega$ в предположении, что обобщенное решение $\mathbf{u}$ из $W_2^1(\Omega)$ системы (1.1) имеет обобщенные производные второго порядка и конечный интеграл

$$\int_{\Omega} \left[|\nabla \mathbf{u}|^4 + (1 + |\nabla \mathbf{u}|^2) \mathbf{u}_{xx}^2 \right] dx.$$

Коэффициенты a_{ij}, a_i^{ml} и f_i^l считаем дифференцируемыми и такими, что

$$\left\| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}, \frac{\partial a_i^{lm}}{\partial x_k}, \frac{\partial f_i^l}{\partial x_k} \right\|_{q,\Omega} \leqslant \mu_1, \qquad q > n. \tag{4.1}$$

Кроме того, предполагаем выполненными условие эллиптичности (1.2) и условие

$$\| a_i^{lm}, b_i^{lm}, b^{lm}, f_i^l, f^l \|_{q,\Omega} \leqslant \mu_1, \qquad q > n. \tag{4.2}$$

Оценка величины $\operatorname{vrai}\max_{\Omega} |\mathbf{u}| = M$ уже известна.

Продифференцируем формально систему (1.1) по x_k и результат запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(x) u_{x_j}^{lk} + a_i^{lk;\, mj} u^{mj} + f_i^{lk} \right] = 0. \tag{4.3}$$

Здесь

$$a_i^{lk;\, mj} = \delta_i^k b_j^{lm} + a_i^{lm} \delta_j^k + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \delta_l^m,$$

$$f_i^{lk} = \delta_i^k (-f^l + b^{lm} u^m) - \frac{\partial f_i^l}{\partial x_k} + \frac{\partial a_i^{lm}}{\partial x_k} u^m,$$

$$u^{lk} = u_{x_k}^l.$$

Соотношения (4.3) при $l = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, n$ представляют собою систему вида (1.1) относительно функций u^{lk}, $l = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, n$. Ее коэффициенты $a_{ij}(x)$, $a_i^{lk:\, mj}(x)$ и свободные члены $f_i^{lk}(x)$, как легко видеть, удовлетворяют предположениям теорем 2.1 и 3.1. Поэтому для их решений u^{lk}, которые также обладают требуемыми в теоремах 2.1, 3.1

свойствами, справедливы заключения теорем 2.1 и 3.1. Сформулируем это в виде теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (1.2), (4.1) *и* (4.2), *и пусть* $\mathbf{u}$ *есть обобщенное решение из* $W_2^2(\Omega)$ *системы* (1.1) *с конечным интегралом*

$$\int_\Omega \left[|\nabla \mathbf{u}|^4 + (1 + |\nabla \mathbf{u}|^2)\,\mathbf{u}_{xx}^2\right] dx.$$

Тогда норма $|\mathbf{u}|_{\Omega'}^{(1+\alpha)}$ *с некоторым* $\alpha > 0$ *для любой* $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* n, N, M, q, ν, μ, μ_1 *из* (1.2), (4.1), (4.2), $\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^4 dx$ *и расстояния* Ω' *до* S. *Число* α *определяется* N, q *и* $\mu\nu^{-1}$ *из условия* (1.2).

Оценим теперь $\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^{(2)}$ и $\|\nabla \mathbf{u}\|_{4,\Omega}$, предполагая о системе (1.1), что для нее выполнено условие (1.2) и

$$\left.\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k};\ a_i^{lm};\ b_i^{lm} \right\|_{q,\Omega} \leqslant \mu_2, \qquad q > n, \\ &\left\| b^{lm};\ \frac{\partial a_i^{lm}}{\partial x_i} \right\|_{q/2,\Omega} \leqslant \mu_2, \\ &\left\| \sum_i \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i},\ \mathbf{f} \right\|_{2,\Omega} \leqslant \mu_2, \qquad \hat{q} = \max(q, 4). \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Граничное условие ради простоты возьмем однородным:

$$\mathbf{u}|_S = 0. \tag{4.5}$$

Ограничения на S те же, что и в случае одного уравнения (§ 8 гл. III).

Рассмотрим систему (1.1) как набор отдельных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\, u_{x_j}^l\right) = F^l(x), \qquad l = 1, \ldots, N, \tag{4.6}$$

где

$$\mathbf{F}(x) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(A_i \mathbf{u} - \mathbf{f}_i) - B_i \mathbf{u}_{x_i} - B\mathbf{u} + \mathbf{f}, \qquad \mathbf{F} = (F^1, \ldots, F^N).$$

В силу леммы 8.1 гл. III для u^l, $l = 1, \ldots, N$, верно неравенство (8.11) гл. III. Суммируя по всем l, получим

$$\left(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^{(2)}\right)^2 \leqslant c\left[\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 + \|\mathbf{F}\|_{2,\Omega}^2\right] \tag{4.7}$$

с постоянной c, зависящей от S, ν и μ из (1.2) и $\left\|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right\|_{q,\Omega}$,

$q>n$. Величину $\|\mathbf{F}\|_{2,\Omega}$ нетрудно оценить сверху с помощью неравенства Гёльдера, используя предположения (4.4), следующим образом:

$$\|\mathbf{F}\|_{2,\Omega}\leqslant c\left[\|\nabla\mathbf{u}\|_{2q/(q-2),\Omega}+|\mathbf{u}|\right]+\left\|\sum_i\frac{\partial \mathrm{f}_i}{\partial x_i}\right\|_{2,\Omega}+\|\mathbf{f}\|_{2,\Omega}, \tag{4.8}$$

где $|\mathbf{u}|$ есть $\|\mathbf{u}\|_{2q/(q-4),\Omega}$ при $n\geqslant 4$ и $\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|$ при $n=2, 3$, а постоянная c определяется величинами μ_2 и q из (4.4). Но для любой функции $\mathbf{u}$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ верно неравенство

$$\|\nabla\mathbf{u}\|_{2q/(q-2),\Omega}+|\mathbf{u}|\leqslant\varepsilon\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^{(2)}+c_\varepsilon\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \tag{4.9}$$

с произвольно малым ε и с постоянной c_ε, зависящей от ε и Ω (см. (2.28) гл. II). Поэтому из (4.7) — (4.9), как легко видеть, следует оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^{(2)}\leqslant c\left[\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}+\left\|\sum_i\frac{\partial \mathrm{f}_i}{\partial x_i}\right\|_{2,\Omega}+\|\mathbf{f}\|_{2,\Omega}\right] \tag{4.10}$$

с постоянной c, зависящей лишь от N, q, ν, μ и μ_2 из (1.2), (4.4) и S. Ее мы и хотели доказать. Она аналогична оценке (8.11) гл. III, выведенной для одного уравнения, причем предположения о коэффициентах и свободных членах те же. Она верна и для случая общих эллиптических систем (см. работу [10] О. В. Гусевой и последующие работы Ф. Е. Браудера, Л. Н. Слободецкого, Л. Ниренберга, С. Агмона, А. Дуглиса и др.).

Для оценки $\int\limits_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^4dx$ умножим (4.6) на $-u^l|\nabla\mathbf{u}|^2$, просуммируем по l от 1 до N и результат проинтегрируем по Ω. В левой части полученного равенства проведем одно интегрирование по частям. Это даст следующее равенство:

$$\int\limits_\Omega\left[a_{ij}\mathbf{u}_{x_i}\mathbf{u}_{x_j}|\nabla\mathbf{u}|^2+a_{ij}(\mathbf{u}_{x_j}\mathbf{u})\,2\,(\mathbf{u}_{x_k}\mathbf{u}_{x_kx_i})\right]dx=$$

$$=-\int\limits_\Omega\mathbf{F}\mathbf{u}|\nabla\mathbf{u}|^2dx. \tag{4.11}$$

В силу (1.2) из (4.11) вытекает

$$\nu\int\limits_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^4dx\leqslant\int\limits_\Omega\left[\varepsilon|\nabla\mathbf{u}|^4+\frac{c}{\varepsilon}|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}_{xx}^2+\varepsilon|\nabla\mathbf{u}|^4+\frac{c}{4\varepsilon}|\mathbf{u}|^2|\mathbf{F}|^2\right]dx$$

с произвольным $\varepsilon>0$. Выбирая $\varepsilon=\nu/4$ и учитывая уже найденные оценки $\max\limits_\Omega|\mathbf{u}|=M$, $\int\limits_\Omega\mathbf{u}_{xx}^2dx$ и $\mathbf{F}$, из этого неравенства выводим

$$\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^4\,dx \leqslant cM^2\left[\|\mathbf{u}\|^2_{2,\,\Omega} + \left\|\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i}\right\|^2_{2,\,\Omega} + \|\mathbf{f}\|^2_{2,\,\Omega}\right], \quad (4.12)$$

где постоянная c зависит лишь от n, N, постоянных ν, μ, μ_1, q из неравенств (1.2), (4.4) и S.

Мы оценили $\|\mathbf{u}\|^{(2)}_{2,\,\Omega}$ и $\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^4\,dx$ в предположении, что $\mathbf{u}|_S = 0$. Можно было бы дать и внутренние оценки, точнее, оценки этих норм по $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, не делая никаких предположений о поведении $\mathbf{u}$ вблизи S (см. начало § 7 гл. III).

§ 5. О разрешимости задачи (1.1), (1.3) в классах $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$

Разрешимость задачи Дирихле в классах Гёльдера $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$, $l \geqslant 2$, для системы (1.1) доказывается так же, как и для одного уравнения в § 1 гл. III. Центральное место при этом принадлежит неравенствам

$$|\mathbf{u}|^{(l+\alpha)}_\Omega \leqslant c(l)\left[\sum_{i=1}^n |\mathbf{f}_i|^{(l-1+\alpha)}_\Omega + |\mathbf{f}|^{(l-2+\alpha)}_\Omega + \right.$$
$$\left. + |\mathbf{u}|^{(l+\alpha)}_S + \max_\Omega |\mathbf{u}|\right], \qquad l \geqslant 2, \qquad (5.1)$$

в которых постоянные $c(l)$ определяются значениями l, ν из (1.2), коэффициентами системы (1.1), точнее, величиной μ_1 из неравенства

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i},\ \frac{\partial a_i^{km}}{\partial x_i},\ a_{ij},\ a_i^{km},\ b_i^{km},\ b^{km}\right|^{(l-2+\alpha)}_\Omega \leqslant \mu_1, \qquad (5.2)$$

а также границей S класса $C^{l+\alpha}$.

Покажем, что неравенство (5.1) для системы (1.1) можно получить как следствие аналогичного неравенства (1.11) гл. III для одного уравнения того же вида. Для этого запишем систему (1.1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}u^k_{x_j}\right) = \tilde{f}^k, \qquad k = 1, \ldots, N, \qquad (5.3)$$

отнеся в правую часть все члены, кроме первых (старших). Неравенство (1.11) гл. III для каждого из уравнений (5.3) дает

$$|u^k|^{(l+\alpha)}_\Omega \leqslant c_1(l)\left[\,|\tilde{f}^k|^{(l-2+\alpha)}_\Omega + \max_\Omega |u^k| + |u^k|^{(l+\alpha)}_S\right]. \qquad (5.4)$$

Раскрывая в (5.4) выражение $|\tilde{f}^k|_\Omega^{(l-2+\alpha)}$ с учетом известных (кольцевых) свойств нормы $C^{l+\alpha}$

$$\left.\begin{aligned} |\mathbf{v}+\mathbf{w}|_\Omega^{(l+\alpha)} &\leqslant |\mathbf{v}|_\Omega^{(l+\alpha)} + |\mathbf{w}|_\Omega^{(l+\alpha)}, \\ |\mathbf{vw}|_\Omega^{(l+\alpha)} &\leqslant |\mathbf{v}|_\Omega^{(l+\alpha)} |\mathbf{w}|_\Omega^{(l+\alpha)} \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

и предположений (5.2), получим

$$|u^k|_\Omega^{(l+\alpha)} \leqslant c_1(l)\left[\sum_{i=1}^{N}|u^i|_\Omega^{(l-1+\alpha)} + \sum_{i=1}^{n}|\mathbf{f}_i|_\Omega^{(l-1+\alpha)} + \right.$$
$$\left. + |\mathbf{f}|_\Omega^{(l-2+\alpha)} + |u^k|_S^{(l+\alpha)} + \max_\Omega |u^k|\right]. \tag{5.6}$$

Используем еще одно свойство норм $C^{l+\alpha}$ (см. (2.1) гл. III):

$$|\mathbf{u}|_\Omega^{(l-1+\alpha)} \leqslant \varepsilon |\mathbf{u}|_\Omega^{(l+\alpha)} + c(\varepsilon, l)\max_\Omega |\mathbf{u}|, \tag{5.7}$$

где ε — произвольное положительное число, а $c(\varepsilon, l)$ — постоянные, растущие безгранично при $\varepsilon \to 0$. Неравенства (5.7) верны для произвольной функции $\mathbf{u}$ из $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$. Подставим оценку (5.7) в (5.6), затем (5.6) просуммируем по всем k в пределах от 1 до N и выберем ε достаточно малым. После приведения подобных членов это приведет к неравенству (5.1) с указанными выше свойствами постоянной $c(l)$. Ясно, что неравенства (5.1) предельно точны (в общем случае все условия, при которых они доказаны, необходимы). Благодаря им, используя метод продолжения по параметру, так же, как и для одного уравнения, доказывается справедливость теорем Фредгольма для задачи (1.1), (1.3). Сформулируем две из них.

Теорема 5.1. *Пусть* $S \in C^{l+\alpha}$, $l \geqslant 2$, *и выполняются условия* (1.2), (5.2). *Если при* $\mathbf{f} \equiv 0$, $\mathbf{f}_i \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\varphi \equiv 0$ *единственным решением задачи* (1.1), (1.3) *в классе* $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ *является* $\mathbf{u} \equiv 0$, *то задача* (1.1), (1.3) *имеет решение из* $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ *при любых* $\mathbf{f} \in C^{l-2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\mathbf{f}_i \in C^{l-1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$. *Существует не более чем счетное множество значений* $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *на комплексной плоскости* λ, *для которых задача*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\mathbf{u}_{x_j} + A_i\mathbf{u}) + B_i\mathbf{u}_{x_i} + B\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \qquad \mathbf{u}|_S = 0 \tag{5.8}$$

имеет в $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ *отличные от тождественного нуля решения. Это множество значений* $\{\lambda_k\}$ *образует спектр задачи* (1.1), (1.3). *Каждое из* λ_k *имеет конечную кратность. Все* λ_k *расположены* *внутри некоторой параболы с осью, направленной по вещественной оси и расширяющейся в сторону отрицательной вещественной полуоси.*

Так же как и для скалярного случая, специальные рассмотрения показывают, что спектральных значений $\{\lambda_k\}$ бесконечно много и $\operatorname{Re}\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$.

Легко указать ряд случаев, когда задача (1.1), (1.3) может иметь не более одного решения. Два из них даны в конце § 1 для обобщенных (и тем более гладких) решений.

§ 6. Дифференциальные свойства обобщенных решений

Теоремы § 1 и § 5, а также априорные оценки §§ 2—4 данной главы позволяют показать, что дифференциальные свойства обобщенных решений из $W_2^1(\Omega)$ системы (1.1) улучшаются по мере улучшения дифференциальных свойств данных задачи.

Свойство это, так же как и для одного уравнения второго порядка, локальное. Однако мы рассмотрим лишь случай, когда дифференциальные свойства данных задачи улучшаются сразу во всей области Ω. Более того, ограничим себя предположениями, что граничное условие однородно и выполнено неравенство (1.8) с достаточно большой постоянной μ_1 (такой, что оценка (1.7) справедлива без $\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}$ в правой части, и, следовательно, для задачи (1.1), (1.3) заведомо имеет место теорема единственности в $W_2^1(\Omega)$). Покажем, что из установленных в предыдущих параграфах предложений следует

Теорема 6.1. *Пусть* $\mathbf{u}(x)$ *есть единственно возможное обобщенное решение задачи*

$$L\mathbf{u} = -\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i}, \qquad \mathbf{u}|_S = 0 \tag{6.1}$$

из пространства $W_2^1(\Omega)$, *и пусть коэффициенты* L *удовлетворяют условиям*

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu > 0, \tag{6.2}$$

$$\|a_i^{lm}, b_i^{lm}\|_{q,\Omega}, \ \|b^{lm}\|_{q/2,\Omega} \leqslant \mu_2, \qquad q > n, \tag{6.3}$$

и неравенству (1.8) *с достаточно большим* μ_1. *Тогда, если* S *удовлетворяет условию* (A) *и*

$$\|\mathbf{f}_i\|_{q,\Omega}, \ \|\mathbf{f}\|_{q/2,\Omega} \leqslant \mu_2, \qquad q > n, \tag{6.4}$$

то $\mathbf{u}$ *принадлежит пространству* $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ *с некоторым* $\alpha > 0$ *и норма* $|\mathbf{u}|_{\Omega}^{(\alpha)}$ *оценивается постоянной, зависящей лишь от* N, *постоянных* ν, μ, μ_1, μ_2, q, $\operatorname{mes}\Omega$ *и постоянных* a_0 *и* θ_0 *из условия* (A). *Показатель* α *определяется* $\mu\nu^{-1}$, q *и* θ_0.

Если коэффициенты L *и свободный член системы удовлетворяют более сильным условиям:* (6.2) *и*

$$\left.\begin{aligned} &\| a_i^{lm}, b_i^{lm}, b^{lm}, f_i^l, f^l \|_{q,\Omega} \leqslant \mu_3, \\ &\left\| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}, \frac{\partial a_i^{lm}}{\partial x_k}, \frac{\partial f_i^l}{\partial x_k} \right\|_{q,\Omega} \leqslant \mu_3, \quad q > n, \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

а $S \in O^2$, *то решение* $\mathbf{u}$ *принадлежит* $W_2^2(\Omega) \cap C^{1+\beta}(\Omega)$. *Норма* $|\mathbf{u}|_{\Omega'}^{(1+\beta)}$, *где* Ω' — *любая строго внутренняя подобласть* Ω, *оценивается постоянной, зависящей лишь от* N, ν, μ, μ_1, μ_3, q, $\operatorname{mes}\Omega$ *и расстояния* Ω' *до* S. *Норма* $\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^{(2)}$ *мажорируется постоянной, определяемой* N, ν, μ, μ_1, μ_3, q, $\operatorname{mes}\Omega$ *и «нормой»* S *в пространстве* O^2.

Доказательство этой теоремы близко к доказательству теорем 10.1 и 15.1 гл. III, в которых аналогичные факты установлены для одного уравнения второго порядка. Ввиду этого мы только наметим общий план доказательства. Коэффициенты L и функции $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{f}$ аппроксимируем гладкими функциями, удовлетворяющими условиям теоремы 5.1 при $l = 2$ и сходящимися к своим пределам в нормах, соответствующих предположениям (6.2) — (6.4) или (6.2), (6.5).

Область Ω также аппроксимируем монотонно расширяющимися областями $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots$, границы которых принадлежат $C^{2+\gamma}$ и удовлетворяют условию (A) с одними и теми же постоянными a_0 и θ_0. (Для доказательства второй части теоремы 6.1 надо, чтобы «нормы» границ $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2, \ldots$, в пространстве O^2 были равномерно ограничены.) В каждой из Ω_r рассмотрим краевую задачу

$$L^{(r)}\mathbf{u} = -\mathbf{f}^{(r)} - \frac{\partial \mathbf{f}_i^{(r)}}{\partial x_i}, \qquad \mathbf{u}|_{S_r} = 0. \tag{6.6}$$

Нетрудно показать, что, начиная с достаточно большого номера аппроксимации r_0, все они однозначно разрешимы в $C^{2+\gamma}(\bar{\Omega}_r)$, $r \geqslant r_0$. Для их решений $\mathbf{u}^{(r)}$, $r \geqslant r_0$, теоремы §§ 1—4 дают равномерные оценки норм в $W_2^1(\Omega_r)$, $C^{\alpha}(\bar{\Omega}_r)$, $C^{1+\beta}(\bar{\Omega}')$, $W_2^2(\Omega_r)$. Из этих оценок следует, что для $\mathbf{u}^{(r)}$ существует предельная функция, эта функция есть обобщенное решение задачи (6.1) и она принадлежит $W_2^1(\Omega) \cap C^\alpha(\overline{\Omega})$ или $W_2^1(\Omega) \cap C^\alpha(\overline{\Omega}) \cap C^{1+\beta}(\overline{\Omega}') \cap \cap W_2^2(\Omega)$ соответственно. В силу предположения о единственности обобщенного решения задачи (6.1) эта функция совпадает с исследуемым обобщенным решением $\mathbf{u}(x)$.

Такова схема доказательства теоремы 6.1.

Заканчивая данную главу, отметим, что для системы (1.1) можно было бы провести исследование краевых задач столь же полное, как это сделано в других главах для одного уравнения второго порядка. Но нам кажется, что изложенного здесь вполне достаточно для того, чтобы читатель сам смог воспроизвести все необходимые рассуждения.

Глава VIII

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

В данной главе мы рассмотрим эллиптические системы вида

$$a_{ij}(x, \mathbf{u})\, u^l_{x_i x_j} + a^l(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x) = 0, \qquad l = 1, \ldots, N, \tag{0.1}$$

в которых неизвестна вектор-функция $\mathbf{u}(x) = (u^1, \ldots, u^N)$. Пример системы (см. Хайнц [25])

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2u^1}{dx^2} &= -\left[\left(\frac{du^1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du^2}{dx}\right)^2\right] u^1, \\ \frac{d^2u^2}{dx^2} &= -\left[\left(\frac{du^1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du^2}{dx}\right)^2\right] u^2, \end{aligned}\right\} \tag{0.2}$$

которой удовлетворяют функции $u^1(x) = \cos px$, $u^2(x) = \sin px$, указывает на невозможность получения априорной оценки $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \left|\frac{du^1}{dx}, \frac{du^2}{dx}\right|$ и даже нормы Гёльдера (u^1, u^2) через $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |u^1, u^2|$ для всех эллиптических систем вида (0.1) при квадратичном росте функций

$$a^l(x, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \quad \text{по} \quad |\mathbf{p}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{N} (p^l_k)^2}.$$

Это является отличительной чертой систем, ибо в случае одного уравнения вида (0.1) такие оценки возможны и сделаны нами выше при квадратичном росте $a(x, u, p)$ по $|p|$. (Более высокий рост по $|p|$ недопустим уже и для одного уравнения второго порядка.)

Однако если в системах (0.1) члены из a^l, растущие по $|\mathbf{p}|$, как $|\mathbf{p}|^2$, имеют специальный вид, именно $b_i(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})\, p^l_i$, а оставшиеся растут медленнее $|\mathbf{p}|^2$, то $\max|\nabla\mathbf{u}|$ можно оценить через $\max|\mathbf{u}|$ и известные характеристики системы.

Иными словами, для систем вида

$$a_{ij}(x, \mathbf{u})\, u^l_{x_i x_j} + b_i(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x)\, u^l_{x_i} + b^l(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x) = 0, \qquad l = 1, \ldots, N, \tag{0.3}$$

возможно оценить $\max|\nabla\mathbf{u}|$ через $\max|\mathbf{u}|$ при условии, что коэффициенты $b_i(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ растут при $|\mathbf{p}| \to \infty$ не быстрее $|\mathbf{p}|$, а $b^l(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ — медленнее $|\mathbf{p}|^2$. Более же сильные нормы решений: $|\mathbf{u}|^{(1+\alpha)}$, $|\mathbf{u}|^{(2+\alpha)}$ и пр. — оцениваются через $\max\limits_{\Omega}(|\mathbf{u}|, |\nabla\mathbf{u}|)$ для всего класса систем (0.1) без каких-либо предположений о функциях a_{ij}, a^l, кроме условий соответствующей гладкости коэффициентов и эллиптичности системы.

На основе этих априорных оценок будет исследована разрешимость в целом первой краевой задачи для системы (0.3). Лишь ради экономии места будем проводить все результаты для случая однородного граничного условия

$$\mathbf{u}|_S = 0. \tag{0.4}$$

§ 1. Априорные оценки норм $|\mathbf{u}|_{\Omega}^{(l+\alpha)}$, $l \geqslant 1$, через $\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}|$

Пусть $\mathbf{u}(x)$ есть классическое решение системы (0.1), т. е. $\mathbf{u}(x)$ принадлежит $C^2(\Omega)$ и удовлетворяет (0.1). Предположим, что нам известны величины $M \geqslant \max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|$ и $M_1 \geqslant \max\limits_{\Omega}|\nabla\mathbf{u}|$ и что функции $a_{ij}(x, \mathbf{u})$ дифференцируемы по x_k и u^l. Тогда систему (0.1) можно записать в виде

$$\frac{d}{dx_i}\left(a_{ij}(x, \mathbf{u})\, u^l_{x_j}\right) + \tilde{a}^l(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x) = 0, \qquad l = 1, \ldots, N, \tag{1.1}$$

где

$$\tilde{a}^l = a^l - \frac{da_{ij}}{dx_i} u^l_{x_j} = a^l - \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k} u^k_{x_i} u^l_{x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} u^l_{x_j},$$

и функции $\tilde{a}^l$ рассмотреть как свободные члены, для которых известны оценки $\max\limits_{x \in \Omega}|\tilde{a}^l(x, \mathbf{u}(x), \mathbf{u}_x(x))| \leqslant c(M, M_1)$. Для каждой функции u^l, $l = 1, \ldots, N$, будем иметь свое уравнение дивергентного вида с ограниченным свободным членом. Из результатов § 15 гл. III следует, что для каждой из u^l можно оценить нормы $|u^l|_{\Omega'}^{(1+\alpha)}$, $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, через

$$M_1, \; c(M, M_1), \; \operatorname{vrai} \max_{x \in \Omega,\, |u| \leqslant M} \left| a_{ij}(x, \mathbf{u}), \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k} \right|$$

и константу эллиптичности $\nu(M)$ из неравенства

$$\nu(|\mathbf{u}|)\,\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, \mathbf{u})\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu(|\mathbf{u}|)\,\xi^2. \tag{1.2}$$

После этого от (1.1) вернемся к системе (0.1) и рассмотрим ее как набор отдельных уравнений, для старших коэффициентов

$a_{ij}(x, \mathbf{u}(x))$ и свободных членов $a^l(x, \mathbf{u}(x), \mathbf{u}_x(x))$ которых известны оценки норм в $C^\alpha(\Omega)$. Теоремы §§ 12 и 1 гл. III гарантируют принадлежность $\mathbf{u}$ к $C^{2+\alpha}(\Omega)$ и дают оценку $|u^l|_{\Omega'}^{(2+\alpha)}$ через известные нам величины. Рассуждая таким образом и далее, получим оценки $|u^l|_{\Omega'}^{(k+\alpha)}$ для любых $k \geqslant 2$. В указанных параграфах гл. III исследовано поведение решений и получены соответствующие оценки и для замкнутой области Ω. Из результатов этих параграфов вытекают следующие предложения:

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathbf{u}(x)$ *есть решение системы* (0.1), *принадлежащее* $C^2(\Omega)$ *с* $\max\limits_\Omega |\mathbf{u}(x)| \leqslant M$, $\max\limits_\Omega |\nabla \mathbf{u}| \leqslant M_1$, *и система* (0.1) *эллиптична на нем, т. е.*

$$\nu \xi^2 \leqslant a_{ij}(x, \mathbf{u}(x)) \xi_i \xi_j \leqslant \mu \xi^2. \tag{1.3}$$

Пусть в $\mathfrak{M} = \{x, u, p: x \in \overline{\Omega}, |\mathbf{u}| \leqslant M, |\mathbf{p}| \leqslant M_1\}$ *функции* $a_{ij}(x, \mathbf{u})$ *дифференцируемы по* x_k *и* u^l *и они, их частные производные по* x_k *и* u^l *и функции* $a^l(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ *измеримы и ограничены какой-либо постоянной* M_2. *Тогда нормы* $|\mathbf{u}_{x_i}|_{\Omega'}^{(\alpha)}$, $i = 1, \ldots, n$, $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$, *при некотором* $\alpha > 0$ *можно оценить только через величины* N, M, M_1, M_2, ν *и расстояние* Ω' *до* S.

Если к тому же $\mathbf{u} \in C^2(\overline{\Omega})$, $\mathbf{u}|_S = 0$ *и* $S \in C^2$, *то нормы* $|\mathbf{u}_{x_i}|_\Omega^{(\alpha)}$, $i = 1, \ldots, n$, *оцениваются постоянной, зависящей от* N, M, M_1, M_2, ν *и* S. *Показатель* α *в обоих случаях определяется отношением* μ/ν *из* (1.3).

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathbf{u}(x)$ *есть решение системы* (0.1), *принадлежащее классу* $C^{k+2+\beta}(\Omega)$, $k \geqslant 0$, *и система* (0.1) *эллиптична на нем, т. е. выполнено неравенство* (1.3). *Пусть функции* $a_{ij}(x, \mathbf{u})$, $a^l(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ *принадлежат классу* $C^{k+\beta}(\mathfrak{M})$, *где* $\mathfrak{M}$ *определено в теореме* 1.1.

Тогда нормы $|\mathbf{u}|_{\Omega'}^{(k+2+\beta)}$, $\forall \overline{\Omega}' \subset \Omega$, *можно оценить только через* ν, N, M, M_1, $|\mathbf{u}|_{\Omega''}^{(1+\alpha)}$, $\overline{\Omega}' \subset \Omega'' \subset \Omega$, *расстояние от* Ω' *до границы подобласти* Ω'' *и нормы* $a_{ij}(x, \mathbf{u})$ *и* $a^l(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ *в пространстве* $C^{k+\beta}(\mathfrak{M})$.

Если к тому же $\mathbf{u}(x) \in C^{k+2+\beta}(\overline{\Omega})$, $\mathbf{u}|_S = 0$ *и* $S \in C^{k+2+\beta}$, *то норма* $|\mathbf{u}|_\Omega^{(k+2+\beta)}$ *не превосходит постоянной, зависящей от* ν, N, M, M_1, $|\mathbf{u}|_\Omega^{(1+\alpha)}$, *норм* $a_{ij}(x, \mathbf{u})$, $a^l(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ *в пространстве* $C^{k+\beta}(\mathfrak{M})$ *и от* S.

§ 2. Оценка $|\mathbf{u}|_{\Omega}^{(\alpha)}$

Все дальнейшие оценки и рассуждения будем проводить для систем вида (0.3), предполагая, что при $x \in \overline{\Omega}$, $|\mathbf{u}| \leqslant M$ и произвольных $\mathbf{p}$ выполнены неравенства

$$\nu(M)\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, \mathbf{u})\xi_i\xi_j \leqslant \mu(M)\xi^2, \tag{2.1}$$

$$|b_i(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})| \leqslant \mu(M)(1 + |\mathbf{p}|), \tag{2.2}$$

$$|\mathbf{b}(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})| \leqslant [\varepsilon(M) + P(\mathbf{p}, M)](1 + |\mathbf{p}|^2), \tag{2.3}$$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}(x, \mathbf{u})}{\partial x_k}; \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^l}\right| \leqslant \mu(M). \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{b}(x, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = (b^1(x, \mathbf{u}, \mathbf{p}), \ldots, b^N(x, \mathbf{u}, \mathbf{p}))$; $\varepsilon(M)$ — достаточно малая величина, определяемая лишь N, M и $\nu(M)$, а $P(\mathbf{p}, M) \to 0$ при $|\mathbf{p}| \to \infty$. Из сказанного выше ясно, что ограничения (2.1) — (2.4) вызваны существом дела.

Пусть $\mathbf{u}(x)$ есть решение системы (0.3), принадлежащее классу $C^2(\Omega)$, и $\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}| \leqslant M$. Покажем, что $\mathbf{u}$ принадлежит классу $\mathfrak{B}_2^{N_1}(\Omega, M_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma, \gamma_1, \delta, 1/q)$, параметры которого определяются известными нам величинами. Учитывая лемму 8.4 гл. II, введем $2N$ функций

$$\varphi_+^l(\mathbf{u}) = 10Nv^l + v, \quad \varphi_-^l(\mathbf{u}) = 10N(1 - v^l) + v, \quad l = 1, \ldots, N,$$

где $v^l = (2M)^{-1}(u^l + M)$, $\mathbf{v} = (v^1, \ldots, v^N)$, $v = |\mathbf{v}|^2$, и покажем, что функции $w_\pm^l(x) = \varphi_\pm^l(\mathbf{u}(x))$, $l = 1, \ldots, N$, удовлетворяют неравенствам, входящим в определение класса $\mathfrak{B}_2^{N_1}$ с $N_1 = 2N$.

Умножим систему (0.3) скалярно на вектор $-\boldsymbol{\eta}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω. После интегрирования по частям в первом члене получим

$$\int_\Omega \left[a_{ij}(x, \mathbf{u})\mathbf{u}_{x_i}\boldsymbol{\eta}_{x_j} + \left(\frac{da_{ij}}{dx_j} - b_i\right)\mathbf{u}_{x_i}\boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}\boldsymbol{\eta}\right] dx = 0. \tag{2.5}$$

Возьмем $\boldsymbol{\eta} = (2\mathbf{u} + 10N\mathbf{e}^l)\Phi(x)$, где $\Phi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а $\mathbf{e}^l$ — N-мерный вектор вида $\mathbf{e}^l = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ с l-й компонентой, отличной от нуля. Подставив этот вектор $\boldsymbol{\eta}$ в (2.5), запишем результат в виде

$$\int_\Omega \left[M^{-1}a_{ij}(x, \mathbf{u})\mathbf{u}_{x_i}\mathbf{u}_{x_j}\Phi + 2Ma_{ij}w_{+x_i}^l\Phi_{x_j} + 2Mc_iw_{+x_i}^l\Phi + c_+^l\Phi\right] dx = 0, \tag{2.6}$$

где $c_i = \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^m}u_{x_j}^m + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - b_i$, $c_+^l = -2\mathbf{b}v - 10Nb^l$.

Положим в (2.6) $\Phi(x)=\zeta^2(x)\max\{w_+^l(x)-k, 0\}$, где $\zeta(x)$ — срезающая для шара $K_\rho \subset \Omega$ функция. Тогда

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} \left[M^{-1}a_{ij}\mathbf{u}_{x_i}\mathbf{u}_{x_j}(w_+^l-k)\zeta^2+2Ma_{ij}w_{+x_i}^l w_{+x_j}^l\zeta^2\right]dx=$$

$$=-\int\limits_{A_{k,\rho}} (w_+^l-k)\left[4Ma_{ij}w_{+x_i}^l\zeta\zeta_{x_j}+2Mc_i w_{+x_i}^l\zeta^2+c_+^l\zeta^2\right]dx. \quad (2.7)$$

Здесь $A_{k,\rho}$ — множество точек x из шара K_ρ, где $w_+^l(x)>k$.

Левую часть оценим снизу, используя условие эллиптичности (2.1), а правую часть оценим сверху, используя предположения (2.1) — (2.4). Малость величины $\varepsilon(M)+P(\mathbf{p}, M)$ в (2.3) при больших $|\mathbf{p}|$ используем для того, чтобы оценить сверху правую часть в неравенстве

$$|c_+^l| \leqslant (1+11N)[\varepsilon(M)+P(\mathbf{u}_x, M)](1+|\mathbf{u}_x|^2)$$

через $M^{-1}\nu(M)|\mathbf{u}_x|^2+c_1$ с какой-нибудь постоянной c_1. Ясно, что для этого достаточно, чтобы

$$(1+11N)\varepsilon(M)<M^{-1}\nu(M). \quad (2.8)$$

Постоянная c_1 при этом будет зависеть от $P(\mathbf{p}, M)$.

В результате всех этих оценок, аналогичных тем, которые мы проводили неоднократно выше (см., например, § 1 гл. VI), придем к неравенствам

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla w_+^l|^2\zeta^2\,dx \leqslant \gamma\left[\int\limits_{A_{k,\rho}} (w_+^l-k)^2|\nabla\zeta|^2\,dx+\operatorname{mes} A_{k,\rho}\right], \quad (2.9)$$

$$l=1, \ldots, N,$$

для всех уровней k, удовлетворяющих условию $\max\limits_{K_\rho}(w_+^l-k)\leqslant\delta M_1$, где δ — достаточно малое, но фиксируемое по известным нам величинам положительное число, $M_1 \geqslant 11N \geqslant \max\limits_{\Omega}|w_\pm^l|$.

Такие же неравенства (2.9) выводятся и для w_-^l, $l=1, \ldots, N$. Из этих неравенств вытекают неравенства (8.3) гл. II, входящие в определение классов $\mathfrak{B}_2^{N_1}$ с $N_1=2N$. Таким образом, мы доказали, что $\mathbf{u}$ принадлежит $\mathfrak{B}_2^{2N}(\Omega, M_1, \ldots, \delta, 0)$ и его параметры определяются известными нам величинами.

Для оценки $|\mathbf{u}|^{(\alpha)}$ во всей области Ω надо доказать, что $\mathbf{u}\in\mathfrak{B}_2^{2N}(\overline{\Omega}, M_1, \ldots, \delta, 0)$. Возьмем произвольный шар K_ρ, пересекающий границу S. В нем для $w=w_\pm^l$ верно (2.7), а потому и (2.9), если только уровень k подчинить условию $k \geqslant \max\limits_{K_\rho \cap S} w(x)$, $k \geqslant \max\limits_{K_\rho \cap \Omega} w(x) - \delta M_1$. Это и показывает, что $\mathbf{u} \in \mathfrak{B}_2^{2N}(\overline{\Omega}, \ldots, 0)$. Отсюда и из свойств функций классов $\mathfrak{B}_2^{2N}(\Omega, \ldots)$, $\mathfrak{B}_2^{2N}(\overline{\Omega}, \ldots)$ следует

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbf{u}(x) \in C^2(\Omega)$, $\max\limits_{\Omega} |\mathbf{u}(x)| \leqslant M$ *и* $\mathbf{u}(x)$ *удовлетворяет системе* (0.3), *для коэффициентов которой выполнены неравенства* (2.1) — (2.4) *при* $x \in \overline{\Omega}$, $|\mathbf{u}| \leqslant M = \max\limits_{\Omega} |\mathbf{u}(x)|$ *и произвольных* $\mathbf{p}$, *причем постоянная* $\varepsilon(M)$ *в* (2.3) *подчиняется неравенству* (2.8). *Тогда для любой внутренней подобласти* $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ *норму* $|\mathbf{u}|_{\Omega'}^{(\alpha)}$ *можно мажорировать постоянной, определяемой величинами* N, M, $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\varepsilon(M)$, $P(\mathbf{p}, M)$ *из* (2.1) — (2.4) *и расстоянием* Ω' *до* S. *Показатель* α *определяется этими же величинами, кроме расстояния* Ω' *до* S. *Если* $\mathbf{u}$ *к тому же принадлежит* $\operatorname{Lip}(\overline{\Omega})$ *и* S *удовлетворяет условию* (A), *то для* $\mathbf{u}$ *можно оценить* $|\mathbf{u}|_{\Omega}^{(\alpha)}$ *через* N, M, $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\varepsilon(M)$, $P(\mathbf{p}, M)$ *из* (2.1) — (2.4), *норму* $|\mathbf{u}|_S^{(\beta)}$, β *и постоянные* a_0 *и* θ_0, *входящие в условие* (A). *Показатель* α *определяется* N, M, $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\varepsilon(M)$, $P(\mathbf{p}, M)$, β *и* θ_0.

Заметим, что утверждения теоремы, так же как и в случае одного уравнения из гл. IV, верны и для обобщенных решений системы (0.3) из пространства $W_2^1(\Omega)$. Однако мы во всей этой главе ограничим себя рассмотрением лишь классических решений. Теория обобщенных решений системы (0.3) строится аналогично тому, как это сделано в гл. IV для одного уравнения с дивергентной главной частью.

§ 3. Энергетическое неравенство и оценка $\max|\nabla\mathbf{u}|$ на границе

Пусть $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству (2.5) с ограниченными $\boldsymbol{\eta}(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega} |\mathbf{u}| \leqslant M$. Пусть относительно системы (0.3) выполнены те же условия (2.1)—(2.4), что и в § 2. Тогда для любого шара K_ρ имеет место оценка

$$\int\limits_{K_\rho \cap \Omega} |\nabla\mathbf{u}|^2 dx \leqslant c, \tag{3.1}$$

где c определяется лишь известными постоянными из (2.1) — (2.4), N и ρ. Действительно, возьмем в (2.5) $\boldsymbol{\eta} = 2\mathbf{u}(e^{\lambda v} - 1)\zeta^2$, где $v=|\mathbf{u}|^2$, $\lambda>0$ — большой числовой параметр, а $\zeta(x)$ — срезающая для $K_{2\rho}$ функция. Это дает

$$\int\limits_{\Omega\cap K_{2\rho}} \Big[2a_{ij}\mathbf{u}_{x_i}\mathbf{u}_{x_j}(e^{\lambda v}-1)\zeta^2+\lambda a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}e^{\lambda v}\zeta^2+2a_{ij}v_{x_i}(e^{\lambda v}-1)\zeta\zeta_{x_j}+ \\ +\left[\frac{da_{ij}}{dx_j}-b_i\right]v_{x_i}(e^{\lambda v}-1)\zeta^2-2\,\mathbf{bu}\,(e^{\lambda v}-1)\zeta^2\Big]dx=0. \qquad (3.2)$$

Учитывая наши предположения (2.1)—(2.4), в том числе достаточную малость $\varepsilon(M)$ в (2.3), и выбирая λ достаточно большим, из этого равенства получим оценку (3.1).

Итак, доказана

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathbf{u}\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *удовлетворяет тождеству* (2.5) *с* $\boldsymbol{\eta}\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\boldsymbol{\eta}|<\infty$ *и* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|\leqslant M$. *Пусть относительно системы* (0.3) *выполнены те же предположения, что и в теореме* 2.1. *Тогда для* $\mathbf{u}$ *и любого шара* K_ρ *справедлива оценка* (3.1) *с постоянной* c, *зависящей лишь от* N, M, ρ *и мажорант из* (2.1) — (2.4).

Займемся теперь оценкой $|\nabla\mathbf{u}|$ на S. Докажем, что имеет место

Лемма 3.2. *Пусть* $\mathbf{u}$ *есть решение системы* (0.3) *из* $C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ *с* $\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|\leqslant M$, *равное нулю на* S, *а для* (0.3) *справедливы неравенства* (2.1)—(2.3), (3,5). *Тогда* $\max\limits_{S}|\nabla\mathbf{u}|$ *оценивается постоянной, зависящей лишь от* N, M, *величин* $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\varepsilon(M)$, $P(\mathbf{p}, M)$ *из* (2.1) — (2.3) *и* S, *которая предполагается принадлежащей* O^2.

По условию $\mathbf{u}|_S=0$, следовательно, $|\nabla u^l|\,|_S=\left|\frac{\partial u^l}{\partial n}\right|\Big|_S$, где $\frac{\partial}{\partial n}$ есть производная по внешней к S нормали. Возьмем точку x_0 на S и номер r из $1, \ldots, N$ такие, что

$$\left|\frac{\partial u^r}{\partial n}\right|_{x_0}=\max_{l=1,\ldots,N}\max_S\left|\frac{\partial u^l}{\partial n}\right|\equiv M_1'.$$

Пусть для определенности $\left.\frac{\partial u^r}{\partial n}\right|_{x_0}<0$. Тогда возьмем функцию $w^r=u^r+v\equiv u^r+|\mathbf{u}|^2$. $\Big($В случае $\left.\frac{\partial u^r}{\partial n}\right|_{x_0}>0$ надо рассмотреть функцию $-u^r+v.\Big)$ Для нее $\left.\frac{\partial w^r}{\partial n}\right|_S=\left.\frac{\partial u^r}{\partial n}\right|_S$. Из (0.3) следует, что $L^r(\mathbf{u})+2\sum\limits_{l=1}^N u^lL^l(\mathbf{u})=0$, где $L^r(\mathbf{u})$ есть левая часть r-го уравнения системы (0.3). Это равенство можно записать в виде

$$a_{ij}(x, \mathbf{u})\, w^r_{x_i x_j} - 2a_{ij}\mathbf{u}_{x_i}\mathbf{u}_{x_j} + b_i w^r_{x_i} + c_r = 0, \tag{3.3}$$

где $c_r = 2\mathbf{b}(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x)\,\mathbf{u} + b^r(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x)$. Введем вместо w^r функцию v^r с помощью равенства $w^r = \varphi(v^r)$. Функцию $\varphi(y)$ выберем ниже, но так, что $\varphi'(y) > 0$. Подставим в (3.3) вместо $w^r_{x_i}$ величину $\varphi' v^r_{x_i}$, а вместо $w^r_{x_i x_j}$ величину $\varphi' v^r_{x_i x_j} + \varphi'' v^r_{x_i} v^r_{x_j}$ и полученное равенство поделим на φ'. Это дает

$$a_{ij}(x, \mathbf{u})\, v^r_{x_i x_j} + \frac{\varphi''}{\varphi'} a_{ij} v^r_{x_i} v^r_{x_j} - \frac{2}{\varphi'} a_{ij}\mathbf{u}_{x_i}\mathbf{u}_{x_j} + b_i v^r_{x_i} + \frac{1}{\varphi'} c_r = 0.$$

Отсюда в силу предположений (2.2), (2.3) будем иметь

$$-a_{ij} v^r_{x_i x_j} - \frac{\varphi''}{\varphi'} a_{ij} v^r_{x_i} v^r_{x_j} + \frac{2}{\varphi'} a_{ij}\mathbf{u}_{x_i}\mathbf{u}_{x_j} \leqslant$$
$$\leqslant \mu(M)(|\nabla\mathbf{u}| + 1)|\nabla v^r| + \frac{1}{\varphi'}(1 + |\nabla\mathbf{u}|^2)(\varepsilon + P)(2M + 1). \tag{3.4}$$

Если $\varepsilon(M)$ таково, что

$$(2M + 1)\,\varepsilon(M) \leqslant \nu(M), \tag{3.5}$$

то из (3.4) легко выводится неравенство

$$-a_{ij} v^r_{x_i x_j} - \frac{\varphi''}{\varphi'} a_{ij} v^r_{x_i} v^r_{x_j} \leqslant c\,[\varphi' |\nabla v^r|^2 + 1] \tag{3.6}$$

с известной нам постоянной c.

Подберем функцию $\varphi(y)$ так, чтобы

$$-\frac{\varphi''}{\varphi'}\nu(M) - c\varphi' \geqslant 0, \qquad \varphi(0) = 0,$$

где $\nu(M)$ взято из (2.1), а c — из (3.6). Этим условиям удовлетворяет функция

$$\varphi(y) = \frac{\nu(M)}{c}\ln(1 + y).$$

При такой $\varphi(y)$ неравенство (3.6) дает

$$-a_{ij} v^r_{x_i x_j} \leqslant c. \tag{3.7}$$

Функция v^r, так же как и w^r, равна нулю на S, и $\left.\frac{\partial v^r}{\partial \mathbf{n}}\right|_S = \frac{1}{\varphi'(v^r)} \left.\frac{\partial w^r}{\partial \mathbf{n}}\right|_S = \frac{c}{\nu(M)} \left.\frac{\partial u^r}{\partial \mathbf{n}}\right|_S$ достигает своего минимума на S в той же точке x_0, что и $\frac{\partial u^r}{\partial \mathbf{n}}$. Построим какую-либо барьерную функцию $\psi(x)$, т. е. функцию, удовлетворяющую соотношениям

$$-a_{ij}(x, u)\,\psi_{x_i x_j} < -c, \qquad \max_S \psi(x) = \psi(x_0).$$

В качестве такой функции можно взять, например, функцию $\psi(x) = me^{-\lambda\Phi(x)}$ с достаточно большими λ и m и с дважды непрерывно дифференцируемой функцией $\Phi(x)$, обладающей следующими свойствами:

1) $\Phi(x) > 0$ в Ω;

2) $|\nabla\Phi| \geqslant \text{const} > 0$ в $\bar{\Omega}$;

3) поверхность $\Phi(x) = 0$ содержит точку x_0.

Если область Ω расположена вся по одну сторону от плоскости, касающейся S в точке x_0, — пусть это будет плоскость $x_n = x_n^0$ — и Ω лежит в полупространстве $\{x_n \geqslant x_n^0\}$, то в качестве $\Phi(x)$ можно взять $\Phi(x) = x_n - x_n^0$. В противном случае надо с самого начала преобразовать область Ω так, чтобы она располагалась по отношению к точке x_0 указанным образом.

Для функции $v^r(x) + \psi(x)$ $-a_{ij}(v^r + \psi)_{x_i x_j} < 0$. Следовательно, ее максимум достигается на S. Но $\max_S(v^r + \psi) = \max_S \psi = \psi(x_0)$, и потому

$$\left.\frac{\partial(v^r + \psi)}{\partial n}\right|_{x_0 \in S} \geqslant 0.$$

Это в силу соотношений $\left.\frac{\partial v^r}{\partial n}\right|_S = \frac{c}{\nu(M)} \left.\frac{\partial u^r}{\partial n}\right|_S$ и $\max_{i=1,\dots,N} \max_S \left|\frac{\partial u^i}{\partial n}\right| = -\left.\frac{\partial u^r}{\partial n}\right|_{x_0}$ дает нужную оценку:

$$\max_{i=1,\dots,N} \max_S \left|\frac{\partial u^i}{\partial n}\right| = -\left.\frac{\partial u^r}{\partial n}\right|_{x_0} \leqslant \frac{\nu(M)}{c} \left.\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|_{x_0}.$$

Лемма 3.2 доказана.

§ 4. Оценка $\max_{\Omega} |\nabla u|$

Пусть $u(x)$ есть решение системы (0.3). В §§ 2—3 для него были получены априорные оценки $|u|_{\Omega}^{(\alpha)}$, $\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}$, $\max_S |\nabla u|$ через $\max_{\Omega} |u|$ и известные величины. Общая схема их получения та же, что и для одного уравнения второго порядка с дивергентной главной частью, но аналитические факты, лежащие в основе оценки $|u|_{\Omega}^{(\alpha)}$ (свойства классов $\mathfrak{B}_2^{N_1}$), более сложные. Дальнейшие оценки для u, именно оценки $\max_{\Omega'} |\nabla u|$ и $\max_{\Omega} |\nabla u|$, можно провести почти так же, как и для одного уравнения в §§ 3, 4 гл. IV. Поэтому мы дадим лишь основные указания, не проводя подробного вычисления всех постоянных. Итак, докажем теорему:

Теорема 4.1. *Пусть выполнены все условия первой части теоремы* 2.1. *Тогда* $\max_{\Omega'} |\nabla \mathbf{u}|$ *для любой* $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ *оценивается через те же величины, что и* $|\mathbf{u}|_{\Omega'}^{(\alpha)}$ *в теореме* 2.1, *и* $\operatorname{mes} \Omega$. *Если к тому же* $\mathbf{u} \in C^2(\overline{\Omega})$, $S \in O^2$, $\mathbf{u}|_S = 0$ *и верно* (3.5), *то можно оценить* $\max_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|$ *постоянной, зависящей лишь от* $N, M \geqslant \max_{\Omega} |\mathbf{u}|$, *постоянных из условий* (2.1) — (2.4), $\operatorname{mes} \Omega$ *и* S.

Положим в (2.5) $\eta = -(\mathbf{u}_{x_k} \xi)_{x_k}$, где $\xi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая в $\overline{\Omega}$ функция, равная нулю на S вместе со своими производными первого порядка, и полученные равенства просуммируем по k в пределах от 1 до n. После очевидных интегрирований по частям придем к тождеству

$$\int_{\Omega} \Big[a_{ij} \mathbf{u}_{x_k x_i} \mathbf{u}_{x_k x_j} \xi + \frac{1}{2} a_{ij} V_{x_i} \xi_{x_j} + \frac{d a_{ij}}{d x_k} \mathbf{u}_{x_i} \mathbf{u}_{x_k x_j} \xi + \\ + \frac{d a_{ij}}{d x_k} \mathbf{u}_{x_i} \mathbf{u}_{x_k} \xi_{x_j} - \Big(\frac{d a_{ij}}{d x_j} \mathbf{u}_{x_i} - b_i \mathbf{u}_{x_i} - \mathbf{b} \Big) \big(\Delta \mathbf{u} \xi + \mathbf{u}_{x_k} \xi_{x_k} \big) \Big] dx = 0, \tag{4.1}$$

где $V = |\nabla \mathbf{u}|^2$.

Положим в (4.1) $\xi = 2 V^s \zeta^2$, где $\zeta(x)$ — срезающая функция для шара $K_\rho \subset \Omega$, а V^s есть s-я степень V и $s = 0, 1, \ldots$ Первые два члена подынтегрального выражения дадут основные положительные члены. Их мы оставим слева и оценим снизу, а все остальные перенесем в правую часть и оценим сверху, используя предположения (2.1) — (2.4). Это приведет нас к неравенству

$$\int_{K_\rho} \Big\{ 2 \sum_{k=1}^{n} |\nabla \mathbf{u}_{x_k}|^2 V^s \zeta^2 + s V^{s-1} |\nabla V|^2 \zeta^2 \Big\} dx \leqslant \\ \leqslant c(s) \int_{K_\rho} \big(V^{s+1} |\nabla \zeta|^2 + V^{s+2} \zeta^2 + \zeta^2 |\nabla \zeta|^2 \big) dx \tag{4.2}$$

с некоторой постоянной $c(s)$, зависящей от известных нам констант и числа s (при $s \to \infty$ $c(s) \to \infty$).

С другой стороны,

$$\int\limits_{K_\rho} V^{s+2}\zeta^2\,dx = \int\limits_{K_\rho} V^{s+1}\zeta^2 \mathbf{u}_{x_k}\mathbf{u}_{x_k}\,dx =$$

$$= -\int\limits_{K_\rho} (\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)\left[V^{s+1}\zeta^2\,\Delta\mathbf{u} + (s+1)\,V^s\zeta^2\mathbf{u}_{x_k}2\,(\mathbf{u}_{x_p}\mathbf{u}_{x_p x_k}) + \right.$$

$$\left. + V^{s+1}2\zeta\zeta_{x_k}\mathbf{u}_{x_k}\right]dx \leqslant \max_{K_\rho} |\mathbf{u}-\mathbf{u}_0|\, c_1(s) \int\limits_{K_\rho}\left[V^{s+2}\zeta^2 + \right.$$

$$\left. + V^s \sum_{k=1}^{n} |\nabla \mathbf{u}_{x_k}|^2\zeta^2 + V^{s+1}|\nabla\zeta|^2\right]dx. \qquad (4.3)$$

Если в качестве $\mathbf{u}_0$ взять значение $\mathbf{u}$ в центре шара K_ρ, то в силу теоремы 2.1

$$\max_{K_\rho} |\mathbf{u}-\mathbf{u}_0| \leqslant c\rho^\alpha, \qquad \alpha > 0. \qquad (4.4)$$

Выбирая ρ достаточно малым (так, чтобы $cc_1(s)\rho^\alpha < 1$), из (4.3) получим

$$\int\limits_{K_\rho} V^{s+2}\zeta^2\,dx \leqslant c_1\rho^\alpha \int\limits_{K_\rho}\left[V^s\sum_{k=1}^{n}|\nabla\mathbf{u}_{x_k}|^2\zeta^2 + V^{s+1}|\nabla\zeta|^2\right]dx. \qquad (4.5)$$

Это неравенство вместе с (4.2) дает при всех малых ρ

$$\int\limits_{K_\rho}\left[2\sum_{k=1}^{n}|\nabla\mathbf{u}_{x_k}|^2 V^s\zeta^2 + V^{s+2}\zeta^2\right]dx \leqslant c_2(s)\int\limits_{K_\rho}(V^{s+1}|\nabla\zeta|^2 +$$

$$+ |\nabla\zeta|^2 + \zeta^2)\,dx. \qquad (4.6)$$

Неравенства (4.5), (4.6) справедливы для $s = 0, 1, \ldots$ Они вместе с исходным неравенством (3.1) позволяют последовательно по s дать оценки

$$\int\limits_{\Omega'} V^{s+1}\,dx \leqslant c(s, \Omega') \qquad (4.7)$$

для любой подобласти $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ и любого $s = 0, 1, \ldots$

Дальнейшие рассуждения также близки к соответствующим рассуждениям § 3 гл. IV. Именно, возьмем функцию

$$w(x) = V(x)\zeta^2 = |\nabla\mathbf{u}|^2\zeta^2,$$

где $\zeta(x)$ — срезающая функция для какой-либо $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, и рассмотрим равенство

$$\int\limits_{A_\lambda} \mathbf{L}(\mathbf{u})\frac{\partial}{\partial x_k}[(w-\lambda)\,\zeta^2\mathbf{u}_{x_k}]\,dx = 0,$$

где $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ — левая часть системы (0.3), а A_λ — множество точек $x \subset \Omega'$, в которых $w(x) > \lambda \geqslant 0$. После ряда преобразований и оценок, аналогичных сделанным в § 3 гл. IV, и учета неравенств (4.7) получим

$$\int_{A_\lambda} |\nabla w|^2 dx \leqslant c_\varepsilon \operatorname{mes}^{1-\varepsilon} A_\lambda \tag{4.8}$$

со сколь угодно малым ε (но с $c_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$). Для оценки $\max\limits_{\Omega'} w$ достаточно, чтобы ε в (4.8) был меньше $2/n$, а для этого надо использовать (4.7) с $s \leqslant \left[\frac{3n}{2}\right] + 1$. При таком ε из леммы 5.3 гл. II следует, что w ограничена в Ω' сверху константой, зависящей лишь от ε, c_ε, $\|w\|_{1,\Omega'}$ и $\operatorname{mes}\Omega'$.

Из всего сказанного следует справедливость первой части теоремы 4.1. Осталось провести аналогичную оценку в окрестности границы. Величина $\max\limits_{S} |\nabla \mathbf{u}| = M_2$ нам уже известа из леммы 3.2. Оценка $\|\mathbf{u}\|^{(1)}_{2,\Omega}$ дана для всей области Ω. Надо доказать (4.7) для шаров K_ρ, пересекающихся с границей S, точнее, для пересечений K_ρ с Ω. Для чисел $s \geqslant 1$ мы получим неравенства (4.2) — (4.6) так же, как и выше, если только в (4.1) вместо $\xi = 2V^s\zeta^2$ подставим

$$\xi(x) = \begin{cases} 2\left(V(x) - M_2^2\right)^s \zeta^2(x), & V(x) \geqslant M_2^2, \\ 0, & V(x) \leqslant M_2^2. \end{cases}$$

Это допустимо, ибо такое ξ равно нулю на всей границе области интегрирования $K_\rho \cap \Omega$. В случае же $s = 0$ возьмем в (4.1)

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, & V(x) \leqslant M_2^2, \\ 2\left(V(x) - M_2^2\right)\zeta^2(x), & M_2^2 \leqslant V(x) \leqslant M_2^2 + 1, \\ 2\zeta^2, & V(x) \geqslant M_2^2 + 1. \end{cases}$$

Это после ряда преобразований и оценок, аналогичных сделанным в § 4 гл. IV для случая одного уравнения, приводит к оценке (4.7) по $K_\rho \cap \Omega$, а следовательно, и к оценкам

$$\int_\Omega V^{s+1} dx \leqslant c(s), \qquad s = 0, 1, \ldots, \quad \max_\Omega |\nabla \mathbf{u}| \leqslant \text{const}.$$

Теорема доказана.

Замечание 4.1. Если в теореме 4.1 предположить известной оценку $|\mathbf{u}|^{(\alpha)}_\Omega$, то в неравенстве (2.3) $\varepsilon(M)$ можно считать произвольным числом, так что $\max\limits_\Omega |\nabla \mathbf{u}|$ можно оценить для любой системы вида (0.1) с квадратичным ростом функций $a^l(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ по $|\mathbf{p}|$.

§ 5. Теоремы существования

Полученные в §§ 1—4 для решений систем (0.3)

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) \equiv a_{ij}(x, \mathbf{u})\,\mathbf{u}_{x_i x_j} + b_i(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x)\,\mathbf{u}_{x_i} + \mathbf{b}(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x) = 0$$

априорные оценки позволяют исследовать разрешимость в целом первой краевой задачи для (0.3) (по поводу других краевых задач см. гл. X и [I]). Мы не будем приводить здесь формулировки результатов в той общности, которая дана в § 10 гл. IV (они такие же, как и для одного уравнения), а ограничимся одним из конкретных включений параметра τ в систему (0.3) и одним из тех случаев, когда можно дать эффективную оценку $\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|$. Именно, рассмотрим семейство систем

$$\mathbf{L}_\tau(\mathbf{u}) \equiv (1-\tau)\,\mathbf{L}_0(\mathbf{u}) + \tau\mathbf{L}(\mathbf{u}) = 0, \tag{5.1}$$

зависящее от параметра $\tau \in [0, 1]$, где

$$\mathbf{L}_0(\mathbf{u}) = \Delta\mathbf{u} - \mathbf{u}.$$

Предположим, что для (5.1) выполнены условия

$$\left.\begin{aligned} &a_{ij}(x, \mathbf{u})\,\xi_i\xi_j \geqslant 0,\\ &\mathbf{b}(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})\,\mathbf{u} \equiv b^l(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})u^l < 0, \ |\mathbf{u}| \geqslant R, \ x \in \Omega, \ \forall \mathbf{p} \in E_{nN}. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Тогда, как нетрудно видеть, для любого классического решения $\mathbf{u}(x, \tau)$ системы (5.1) верна оценка

$$\max_{\Omega}|\mathbf{u}(x, \tau)| \leqslant M = \max\left\{\max_{S}|\mathbf{u}|, \ R\right\}. \tag{5.3}$$

Действительно, умножим (5.1) скалярно на $2\mathbf{u}$ и результат запишем в виде уравнения для $v = |\mathbf{u}(x, \tau)|^2$:

$$\left[(1-\tau)\,\delta_i^j + \tau a_{ij}(x, \mathbf{u})\right]\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_j} - 2\mathbf{u}_{x_i}\mathbf{u}_{x_j}\right] + \\ + \tau b_i\,\frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\left[(1-\tau)\,v - \tau\mathbf{b}\mathbf{u}\right] = 0. \tag{5.4}$$

Если $v(x)$ достигает своего максимума в какой-нибудь внутренней точке $x_0 \in \Omega$ и $v(x_0) > R^2$, то в этой точке $v_{x_i} = 0$, первый член из (5.4) неположителен, а последний—отрицателен в силу условия (5.2). Полученное противоречие доказывает (5.3).

После того, как оценен $\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}(x, \tau)|$, мы можем получить все дальнейшие оценки для $\mathbf{u}(x, \tau)$ при условиях, сформулированных в §§ 1—4, если заметим, что эти условия (неравенства (2.1)—(2.4)) будут справедливы и для всего семейства $L_\tau(\mathbf{u})$, $\tau \in [0, 1]$, с положительными постоянными, не зависящими от τ.

В частности, эти постоянные определяют оценку сверху $\max\limits_{\Omega}|\nabla \mathbf{u}|$ для всех возможных решений $\mathbf{u}(x, \tau)$ системы (5.4), равных нулю на S:

$$\max_{\Omega}|\nabla \mathbf{u}(x, \tau)| \leqslant M_1, \qquad \tau \in [0, 1]. \tag{5.5}$$

Все это дает возможность утверждать справедливость следующей теоремы:

Теорема 5.1. *Пусть при* $x \in \overline{\Omega}$, $|\mathbf{u}| > R$ *и* $\forall \mathbf{p} \in E_{nN}$ *выполнены неравенства* (5.2). *Пусть при* $x \in \overline{\Omega}$, $|\mathbf{u}| \leqslant M$, *где* M *взято из* (5.3), *и произвольных* $\mathbf{p}$ *выполнены неравенства* (2.1)—(2.4) *с* $\varepsilon(M)$, *подчиняющимся условиям* (2.8), (3.5). *Пусть на множестве* $\mathfrak{M} = \{x \in \overline{\Omega}, |\mathbf{u}| \leqslant M, |\mathbf{p}| \leqslant M_1\}$, *где* M_1 *взято из* (5.5), *функции* $b_i(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})$, $\mathbf{b}(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ *непрерывны по Гёльдеру с показателем* β *и* $S \in C^{2+\beta}$. *Тогда система* (0.3) *при условии* $\mathbf{u}|_S = \psi \in C^{2+\beta}(S)$ *имеет по крайней мере одно решение* $\mathbf{u} \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$. *Если к тому же* a_{ij}, b_i *и* $\mathbf{b}$ *на* $\mathfrak{M}$ *принадлежат классам* $C^{k+\beta}(\mathfrak{M})$, $k \geqslant 1$, $\psi \in C^{k+2+\beta}(S)$ *и* $S \in C^{k+2+\beta}$, *то решения* $\mathbf{u}$ *будут принадлежать* $C^{k+2+\beta}(\overline{\Omega})$.

§ 6. Вырождающиеся системы

Остановимся на изучении одного класса квазилинейных систем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, \mathbf{u})\, u^l_{x_j}\right) + b_i(x, \mathbf{u})\, u^l_{x_i} + b^l(x, \mathbf{u}) = 0, \quad l = 1, \ldots, N, \tag{6.1}$$

допускающих вырождение эллиптичности при $|\mathbf{u}| = 0$. Именно, предположим, что здесь $a_{ij}(x, \mathbf{u})$, $b_i(x, \mathbf{u})$, $b^l(x, \mathbf{u})$ — скалярные функции $x \in \overline{\Omega}$, $\mathbf{u} \in E_N$, непрерывные относительно $\mathbf{u}$ и удовлетворяющие условиям

$$\nu(|\mathbf{u}|)\,\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, \mathbf{u})\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\nu(|\mathbf{u}|)\,\xi^2, \qquad \forall \xi \in E_n, \tag{6.2}$$

$$[\nu(|\mathbf{u}|)]^{-1} \sum_{i=1}^{n} |b_i(x, \mathbf{u})|^2 + \left(\sum_{l=1}^{N} |b^l(x, \mathbf{u})|^2\right)^{1/2} \leqslant \nu(|\mathbf{u}|)\,\varphi(x), \tag{6.3}$$

$$\varphi(x) \in L_{q/2}(\Omega), \qquad q > n, \tag{6.4}$$

где μ — постоянная, а $\nu(t)$ — непрерывная неотрицательная возрастающая функция $t \in [0, \infty)$ такая, что при некотором $\lambda > 0$

$$\nu(t_2) \leqslant \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\lambda} \nu(t_1), \qquad \forall t_2 > t_1 > 0, \tag{6.5}$$

и $\nu(t) > 0$ при $t > 0$.

Для решений системы (6.1) установим сначала априорные оценки норм $|\mathbf{u}|^{(\alpha)}_{\Omega'}$ в любой подобласти $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ и в $\Omega' = \Omega$, а затем с помощью этих оценок исследуем разрешимость задачи

Дирихле для (6.1) в классе непрерывных по Гёльдеру функций. В нижеследующих двух теоремах мы предполагаем, что $\mathbf{u}(x)$ есть ограниченное обобщенное решение системы (6.1) из класса $W_2^1(\Omega)$, т. е. что для любых $\eta(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_\Omega \left[a_{ij}(x, \mathbf{u})\, u^l_{x_j}\eta_{x_i} - b_i(x, \mathbf{u})\, u^l_{x_i}\eta - b^l(x, \mathbf{u})\,\eta\right] dx = 0, \quad l = 1, \ldots, N. \tag{6.6}$$

Теорема 6.1. *Пусть при $x \in \overline{\Omega}$ и $|\mathbf{u}| \leqslant M$ выполняются* (6.2)—(6.5) *и* $\mathbf{u}(x)$ *есть решение из* $W_2^1(\Omega)$ *системы* (6.1) *с* $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega |\mathbf{u}| \leqslant M$. *Тогда* $\mathbf{u}(x)$ *принадлежит* $C^\alpha(\Omega)$ *с некоторым* $\alpha > 0$, *определяемым величинами* N, λ, μ *и* q. *Для любой* $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ *норма* $|\mathbf{u}|^{(\alpha)}_{\Omega'}$ *оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от* N, λ, μ, q, M, $\|\varphi\|_{q/2,\,\Omega}$ *и от расстояния* Ω' *до* S.

Если к тому же S *удовлетворяет условию* (A) *и* $\mathbf{u} \in C^\beta(S)$, *то* $\mathbf{u} \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ *с* α, *зависящим от* N, λ, μ, q, β *и постоянной* θ_0, *входящей в условие* (A), *и норму* $|\mathbf{u}|^{(\alpha)}_\Omega$ *можно оценить через эти же постоянные и величины* M, $\|\varphi\|_{q/2,\,\Omega}$, $|\mathbf{u}|^{(\beta)}_S$ *и* a_0.

Для доказательства проверим, что $\mathbf{u}(x)$ принадлежит классу $\mathfrak{B}_m^N$, введенному и изученному в § 9 гл. II. Линейные комбинации вида $w(x) = \sum\limits_{l=1}^N c^l u^l(x)$ с $\sum\limits_{l=1}^N (c^l)^2 \leqslant 1$ в силу (6.6) удовлетворяют тождеству

$$\int_\Omega \left[a_{ij}(x, \mathbf{u})\, w_{x_j}\eta_{x_i} - b_i(x, \mathbf{u})\, w_{x_i}\eta - c^l b^l(x, \mathbf{u})\,\eta\right] dx = 0 \tag{6.7}$$

при $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Подставим сюда $\eta = w^{(k)}(x)\,\zeta^2(x)$, где $\zeta(x)$ — произвольная срезающая функция для шара K_ρ, k — любое число в случае $K_\rho \subset \Omega$ и $k \geqslant \operatorname{vrai}\max\limits_{S \cap K_\rho} w(x)$ в общем случае. Производя в полученном равенстве оценки с помощью условий (6.2)—(6.5), придем к неравенствам

$$\int_{A_{k,\rho}} \nu(|\mathbf{u}|)\, |\nabla w|^2 \zeta^2 dx \leqslant \leqslant \max_{A_{k,\rho}} \nu(|\mathbf{u}|) \left[\gamma \int_{A_{k,\rho}} (w-k)^2 |\nabla\zeta|^2\, dx + \gamma_1 \operatorname{mes}^{1-2/q} A_{k,\rho}\right] \tag{6.8}$$

с $\gamma = 8\mu$, $\gamma_1 = (4M^2+1)\|\varphi\|^2_{q/2,\,\Omega}$, из которых следует, что $\mathbf{u} \in \mathfrak{B}_2^N(\overline{\Omega}, \nu(t), M, \gamma, \gamma_1, 1/q)$. Учитывая условие (6.5), на основании теоремы 9.1 гл. II заключаем о справедливости утверждений теоремы 6.1.

Теорема 6.2. *Предположим, что при* $x \in \overline{\Omega}$ *и* $\forall \mathbf{u} \in E_N$ *функции* $a_{ij}(x, \mathbf{u})$, $b_i(x, \mathbf{u})$, $b^l(x, \mathbf{u})$ *подчиняются условиям* (6.2)—(6.5). *Тогда для любого ограниченного обобщенного решения* $\mathbf{u}(x)$ *из* $W_2^1(\Omega)$ *системы* (6.1) *и* $\forall \overline{\Omega'} \subset \Omega$ *величина* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'}|\mathbf{u}|$ *оценивается сверху постоянной, зависящей только от* $\nu(1)$, λ, μ, q, $\|\varphi\|_{q/2, \Omega}$, $\int\limits_\Omega |\mathbf{u}|^2 \nu(|\mathbf{u}|)\,dx$ *и от расстояния* Ω' *до границы* Ω, *а* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|$ *оценивается через* $\nu(1)$, λ, μ, q, $\|\varphi\|_{q/2, \Omega}$, $\int\limits_\Omega |\mathbf{u}|^2 \nu(|\mathbf{u}|)\,dx$ *и* $\operatorname{vrai}\max\limits_{S}|\mathbf{u}|$.

Доказательство. Пусть сначала $K_R \subset \Omega$ — произвольный шар, такой, что концентрический ему шар $K_{R/2}$ лежит в Ω', $\zeta(x)$ — срезающая функция для K_R. Полагая в (6.6) $\eta = \frac{u^l}{|\mathbf{u}|}|\mathbf{u}|^{(k)}\zeta^2$, $k > 1$, и производя суммирование по l от 1 до N, придем к соотношению

$$\int\limits_{\{x\in\Omega:\,|\mathbf{u}(x)|>k\}} \Big[a_{ij}u^l_{x_i}u^l_{x_j}\frac{|\mathbf{u}|-k}{|\mathbf{u}|}\zeta^2 + \frac{k}{|\mathbf{u}|}a_{ij}|\mathbf{u}|_{x_i}|\mathbf{u}|_{x_j}\zeta^2 + $$
$$+ 2a_{ij}|\mathbf{u}|_{x_j}(|\mathbf{u}|-k)\zeta\zeta_{x_i} - \Big(b_i|\mathbf{u}|_{x_i} + \frac{b^l u^l}{|\mathbf{u}|}\Big)\zeta^2(|\mathbf{u}|-k)\Big]\,dx = 0.$$

Отсюда с помощью условий (6,2)—(6.5) выводим

$$\int\limits_{\{x\in\Omega:\,|\mathbf{u}(x)|>k\}} \nu(|\mathbf{u}|)(|\mathbf{u}|_x)^2\zeta^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_{\{x\in\Omega:\,|\mathbf{u}(x)|>k\}} \nu(|\mathbf{u}|)[4\mu|\nabla\zeta|^2(|\mathbf{u}|-k)^2 +$$
$$+ 2(|\mathbf{u}|-k)^2\varphi(x)\zeta^2 + \varphi(x)\zeta^2]\,dx. \quad (6.9)$$

Рассмотрим функцию $v(x) = \Phi(|\mathbf{u}(x)|)$, где $\Phi(t) = t\sqrt{\nu(t)}$. Легко видеть, что условие (6.5) гарантирует оценки

$$\sqrt{\nu(t)} \leqslant \Phi'(t) \leqslant \frac{\lambda+2}{2}\sqrt{\nu(t)}, \quad |v_{x_i}| \leqslant \frac{\lambda+2}{2}\sqrt{\nu(|\mathbf{u}(x)|)}\,\big||\mathbf{u}|_{x_i}\big|,$$

$$v(x) - \Phi(k) = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\tau}\Phi(\tau|\mathbf{u}(x)| + (1-\tau)k)\,d\tau =$$
$$= (|\mathbf{u}(x)| - k)\int\limits_0^1 \Phi'(\tau|\mathbf{u}(x)| + (1-\tau)k)\,d\tau \geqslant$$
$$\geqslant (|\mathbf{u}(x)| - k)\int\limits_{1/2}^1 \sqrt{\nu(\tau|\mathbf{u}(x)|)}\,dt \geqslant 2^{-(\lambda+2)/2}(|\mathbf{u}(x)| - k)\sqrt{\nu(|\mathbf{u}(x)|)};$$

поэтому из неравенств (6.9) следуют аналогичные неравенства для функции $v(x)$:

$$\int_{A_{k,R}} |\nabla v|^2\zeta^2\,dx \leqslant c_1\Big[\int_{A_{k,R}} (v-k)^2|\nabla\zeta|^2\,dx +$$

$$+\|(v-k)\zeta\|^2_{2q/(q-2),\,A_{k,R}} + k^2\operatorname{mes}^{1-2/q}A_{k,R}\Big], \quad \forall k > \sqrt{\nu(1)}, \tag{6.10}$$

где $c_1 = 2^{\lambda+3}(\lambda+2)^2(\mu + \|\varphi\|_{q/2,\,\Omega})$, $A_{k,R} = \{x \in K_R\colon v(x) > k\}$. Если шар K_R пересекает границу Ω, то при выводе (6.9) надо считать $k \geqslant \operatorname{vrai}\max\limits_{K_R\cap S}|\mathbf{u}|$ и соответственно неравенства (6.10) будут выполняться при $k \geqslant \max\{\sqrt{\nu(1)};\ \operatorname{vrai}\max\limits_{K_R\cap S} v\}$. Воспользуемся очевидной оценкой $k^2\operatorname{mes}A_{k,R} \leqslant \int_\Omega v^2\,dx$ и неравенством (2.13) гл. II:

$$\|(v-k)\zeta\|_{2q/(q-2),\,A_{k,R}} \leqslant c\operatorname{mes}^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}A_{k,R}\|\nabla[(v-k)\zeta]\|_{2,\,A_{k,R}}.$$

Ясно, что отсюда и из (6.10) при $K_R \subset \Omega$ и

$$k \geqslant k_0 \equiv \max\left\{(4c^2c_1)^{nq/4(q-n)}\left(\int_\Omega |\mathbf{u}|^2\nu(|\mathbf{u}|)\,dx\right)^{1/2};\ \sqrt{\nu(1)}\right\}$$

следуют неравенства

$$\int_{A_{k,R}} |\nabla v|^2\zeta^2\,dx \leqslant \gamma\left[\int_{A_{k,R}} (v-k)^2|\nabla\zeta|^2\,dx + k^2\operatorname{mes}^{1-(2/q)}A_{k,R}\right]$$

с $\gamma = 2c_1\left(1 + 2c^2\operatorname{mes}^{\frac{2}{n}-\frac{2}{q}}K_R\right)$. В общем случае эти же неравенства справедливы для $\forall k > \max\{k_0;\ \operatorname{vrai}\max\limits_{S\cap K_R} v\}$.

Итак, доказано, что функция $v(x)$ принадлежит классу $\mathfrak{A}_2\left(\Omega_R,\ \gamma,\ 2,\ 2,\ \frac{2}{n}-\frac{2}{q},\ \hat{k}\right)$, где $\hat{k} = k_0$, если $K_R \subset \Omega$, и $\hat{k} = \max\{k_0;\ \operatorname{vrai}\max\limits_{S_R} v\}$ в случае произвольного шара K_R. Применяя к $v(x)$ теорему 5.3 гл. II, приходим к оценке $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega_{R/2}} v$ сверху через постоянную, зависящую лишь от γ, q, $\hat{k}$ и $R^{-n}\|v\|^2_{2,\,\Omega_R} = R^{-n}\int_{\Omega_R}|\mathbf{u}|^2\nu(|\mathbf{u}|)\,dx$. Отсюда следуют и желаемые оценки для $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega'}|\mathbf{u}|$ и $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\mathbf{u}|$.

Рассмотрим вопрос о разрешимости задачи Дирихле для системы (6.1), считая, что функции $a_{ij}(x, \mathbf{u})$, $b_i(x, \mathbf{u})$ и $b^l(x, \mathbf{u})$

подчиняются условиям (5.2), (6.2), (6.3) с $\varphi \in L_\infty(\Omega)$ и $\nu(0)=0$. Пусть граничное условие имеет вид

$$\mathbf{u}|_S = \psi(s). \tag{6.11}$$

Функцию $\mathbf{u}(x)$ будем называть обобщенным решением задачи (6.1), (6.11), если: 1) $\mathbf{u}(x)$ принадлежит $C^\beta(\bar\Omega)$ с каким-либо $\beta>0$ и удовлетворяет условию (6.11); 2) на множестве $A_0 = \{x\in\Omega\colon |\mathbf{u}(x)|>0\}$ $\mathbf{u}(x)$ обладает обобщенными производными первого порядка и $\int\limits_{A_0} \nu(|\mathbf{u}|)|\mathbf{u}_x|^2\,dx<\infty$; 3) при $\forall\eta\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $\mathbf{u}(x)$ удовлетворяет интегральному тождеству (6.6), в котором выражения $\nu(|\mathbf{u}(x)|)\,\mathbf{u}_{x_i}(x)$ считаются равными нулю при $|\mathbf{u}(x)|=0$.

Теорема 6.3. *Пусть выполнено условие* (5.2), S *удовлетворяет условию* (A), $\psi\in C^\alpha(S)$. *Предположим, что на множестве* $\mathfrak{M}=\{x,\ \mathbf{u}\colon x\in\bar\Omega,\ \mathbf{u}\in E_N;\ |\mathbf{u}|\leqslant M\}$, *где* M — *постоянная из оценки* (5.3), *функции* $a_{ij}(x,\mathbf{u})$, $b_i(x,\mathbf{u})$ *и* $b^l(x,\mathbf{u})$ *принадлежат классам* $C^{1+\alpha}(\mathfrak{M})$, $C^\alpha(\mathfrak{M})$ *и* $C^\alpha(\mathfrak{M})$ *соответственно и подчиняются неравенствам* (6.2), (6.3), *в которых* $\varphi\in L_\infty(\Omega)$, *а* $\nu(t)$ — *непрерывная возрастающая функция* $t\in[0,\infty)$, *равная нулю при* $t=0$ *и удовлетворяющая условию* (6.5) *с* $\lambda>1+\alpha$. *Тогда существует обобщенное решение задачи* (6.1), (6.11).

Предположим сначала, что $S\in C^{2+\alpha}$ и $\psi\in C^{2+\alpha}(S)$, и рассмотрим невырожденные системы

$$L_\tau u^l = \left(a_{ij}^{(\tau)}u_{x_j}^l\right)_{x_i} + b_i^{(\tau)}u_{x_i}^l + b^{(\tau)l} = 0,\qquad l=1,\ \ldots,\ N\qquad (\tau>0), \tag{6.12}$$

где $a_{ij}^{(\tau)}=\tau\delta_i^j + a_{ij}(x,\mathbf{u})$, $b_i^{(\tau)}=b_i(x,\mathbf{u})$, $b^{(\tau)l}=b^l(x,\mathbf{u})$. Они удовлетворяют всем условиям теоремы 5.1, и потому при $\forall\tau>0$ существует решение $\mathbf{u}_\tau(x)\in C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$ задачи (6.1), (6.11), причем для $\mathbf{u}_\tau$ в силу (5.3) и теоремы 6.1 верны равномерные относительно $\tau\in(0,1]$ оценки

$$\max_\Omega|\mathbf{u}_\tau(x)|\leqslant M,\qquad |\mathbf{u}_\tau(x)|_\Omega^{(\beta)}\leqslant c_1, \tag{6.13}$$

$$\int\limits_\Omega[\tau+\nu(|\mathbf{u}_\tau|)]|\mathbf{u}_{\tau x}|^2\,dx\leqslant c_2. \tag{6.14}$$

Отсюда следует, что $\tau\int\limits_\Omega u_{\tau x}^l\eta_{x_i}^l\,dx\to 0$ при $\tau\to 0$ и существует подпоследовательность τ_m (сохраним за ней то же обозначение) такая, что функции $\sqrt{\nu(|\mathbf{u}_\tau|)}\,u_{\tau x_i}^l$ сходятся слабо в $L_2(\Omega)$ к некоторым $\omega_i^l(x)\in L_2(\Omega)$, причем на множествах $A_k=\{x\in\Omega\colon |\mathbf{u}(x)|>k\}$,

$\forall k > 0$, а следовательно, и на A_0 $\omega_i^l = \sqrt{\nu(|\mathbf{u}|)}\, u_{x_i}^l$. Переходя к пределу по $\tau_m \to 0$ в интегральном тождестве, соответствующем (6.12), (6.11), получаем

$$\int_\Omega \left[\frac{a_{ij}(x, \mathbf{u})}{\sqrt{\nu(|\mathbf{u}|)}}\, \omega_j^l \eta_{x_i}^l + \frac{b_i(x, \mathbf{u})}{\sqrt{\nu(|\mathbf{u}|)}}\, \omega_i^l \eta^l + b^l(x, \mathbf{u})\, \eta^l\right] dx = 0, \quad l = 1, \ldots, N. \tag{6.15}$$

Здесь подынтегральное выражение в силу (6.2), (6.3) равно нулю при $x \overline{\in} A_0$, и, следовательно, (6.15) равносильно интегральному тождеству (6.6), если в последнем область интегрирования Ω заменить на A_0. Легко видеть, что $\mathbf{u}(x)$ удовлетворяет всем требованиям, накладываемым на обобщенное решение задачи (6.1), (6.11).

Мы доказали теорему 6.3 при дополнительном предположении о гладкости S и $\psi(S)$. Эти ограничения нетрудно снять, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 10.7 гл. IV.

Предположение $\lambda > 1 + \alpha$ в теореме 6.3 связано с условием $a_{ij}(x, \mathbf{u}) \in C^{1+\alpha}(\mathfrak{M})$, которое использовалось для доказательства разрешимости задачи (6.12), (6.11). Если в условии (6.5) считать $\lambda \leqslant 1$, то, очевидно, функции $a_{ij}(x, \mathbf{u})$ не будут обладать непрерывными по Гельдеру производными при $\mathbf{u} = 0$. В связи с этим представляет интерес следующее предложение:

Теорема 6.4. *Предположим, что* $a_{ij}(x, \mathbf{u}) = a_{ij}(x, |\mathbf{u}|)$, $b_i(x, \mathbf{u}) = b_i(x, |\mathbf{u}|)$, $b^l(x, \mathbf{u}) = b(x, |\mathbf{u}|)\, u^l$, *причем* $b(x, t) > 0$ *при* $t > R$. *Пусть выполнены условия* (6.2), (6.3), (6.5) *с* $\varphi \in L_\infty(\Omega)$, $\forall \lambda > 0$ *и непрерывной возрастающей функцией* $\nu(t)$, *равной нулю при* $t = 0$. *Тогда, если* S *удовлетворяет условию* (A), $\psi \in C^\alpha(S)$ *и если функции* $a_{ij}(x, t)$, $b_i(x, t)$ *и* $b(x, t)$ *принадлежат классам* $C^{1+\alpha}$, C^α *и* C^α *соответственно на множестве* $\overline{\Omega} \times (0, M]$ (M — *постоянная из* (5.3)), *то существует обобщенное решение задачи* (6.1), (6.11).

Для доказательства этой теоремы параметр $\tau > 0$, снимающий вырождение системы, включается в (6.12) следующим образом: $a_{ij}^{(\tau)}(x, \mathbf{u}) = a_{ij}(x, \sqrt{|\mathbf{u}|^2 + \tau})$, и аналогично определяются $b_i^{(\tau)}$, $b^{(\tau)}$. Предварительно функции $a_{ij}(x, t)$, $b_i(x, t)$ и $b(x, t)$ надо доопределить на множестве $\overline{\Omega} \times (M, M + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ так, чтобы сохранялись свойства их гладкости, а b было бы на нем положительным. Тогда для τ из $(0, \varepsilon]$ существуют решения $\mathbf{u}_\tau(x)$ задач (6.12), (6.11), для них верны равномерные по τ оценки (6.13) и равномерно ограничены интегралы $\int_\Omega \nu(|\mathbf{u}_\tau|)|\mathbf{u}_{\tau x}|^2 dx$. Отсюда так же, как в теореме 6.3, выводится сходимость $\mathbf{u}_\tau$ к обобщенному решению задачи (6.1), (6.11).

Глава IX

О НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ПРИЕМАХ ПОЛУЧЕНИЯ ОЦЕНОК КОНСТАНТ ГЁЛЬДЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

В этой главе мы прежде всего дадим другой способ получения оценок констант Гёльдера для решений (и их производных) линейных и квазилинейных уравнений с дивергентной главной частью и для производных от решений общих квазилинейных уравнений при тех же минимальных предположениях об образующих уравнения функциях, при которых это было сделано в предыдущих главах.

Более того, мы объединим вместе обе трудности: неограниченные особенности по x коэффициентов в случае линейных уравнений и нелинейности (по u и p) в случае квазилинейных уравнений с дивергентной главной частью, рассмотрев уравнения вида

$$\frac{d}{dx_i}(a_i(x, u, u_x)) + a(x, u, u_x) = 0 \tag{0.1}$$

с функциями $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$, имеющими особенности не только при u и p, равных ∞, но и при $x \in \Omega$. Для того чтобы были возможны обсуждаемые здесь априорные оценки, эти особенности функций a_i и a по x, u и p должны быть согласованы друг с другом. Общая тенденция такова: чем сильнее нелинейности, тем слабее должны быть особенности по x. Рассмотренные в гл. III и IV уравнения представляют собой два крайних случая: 1) когда $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ линейны по u и p и имеют по x максимальные возможные особенности и 2) когда $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ ограничены по x и имеют максимальный рост по u и p.

Из результатов по оценкам констант Гёльдера, которые будут доказаны здесь, соответствующие результаты гл. III и IV получаются как два частных (крайних) случая. Такого же типа обобщение дадим и для квазилинейных уравнений общего вида. Все эти обобщения, как указывалось выше, возможны и в рамках основного метода, изложенного в предыдущих главах и опирающегося на свойства функций классов $\mathfrak{B}_m$. Предлагаемый в данной главе метод оценки констант Гёльдера несколько проще и обычнее основного. Все аналитические факты, составляющие его, содержатся в §§ 1—5 гл. II. Упрощение же достигается за счет повторного обращения к уравнению. В основном методе мы используем уравнение лишь один раз, выводя из него неравенства (6.1) гл. II, лежащие в основе определения классов $\mathfrak{B}_m$. После этого дальнейшее изучение относится уже к произвольным функциям, удовлетворяющим этим неравенствам, а не только к решениям эллиптических уравнений, и потому получаемые при этом результаты имеют более общую значимость, чем вывод априорных оценок для решений эллиптических уравнений. В данном же методе из уравнения извлекаются две серии неравенств: одна для самого решения $u(x)$ (или его производной), другая, аналогичная неравенствам (6.1) гл. II, для некоторых специально подобранных выпуклых функций $v=\varphi(u)$ от $u(x)$, из ограниченности которых можно заключить о гёльдеровской непрерывности $u(x)$ (идея введения таких функций принадлежит Ю. Мозеру [40_1]). Вывод этих неравенств несколько сложнее вывода неравенств (6.1) гл. II. Зато получение необходимых из них следствий (об ограниченности функций, входящих в эти неравенства), несомненно, проще, чем доказательство гёльдеровости функций классов $\mathfrak{B}_m$.

Мы проиллюстрируем этот метод сначала на примере простейшего уравнения эллиптического типа $\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)u_{x_j})=0$, а затем применим его и к общему случаю. При этом ограничимся внутренними оценками. Оценки вблизи границы читатель может сделать сам. Все необходимые для этого аналитические предложения даны в гл. II.

Кроме того, мы изложим некоторые другие красивые приемы оценок констант Гёльдера для решений отдельных классов эллиптических уравнений, а именно: способ Ч. Морри [39_2] для двумерных задач вариационного исчисления, способ Л. Ниренберга [44_1] оценки постоянной Гёльдера для производных u_{x_i} от решений двумерных квазилинейных уравнений общего вида и способ Ю. Мозера [40_1] оценки нормы Гёльдера $|u|^{(\alpha)}_{\Omega'}$, $\bar{\Omega}'\subset\Omega$, для решений уравнений (1.1) и доказательства неравенства Гарнака.

§ 1. Случай простейшего уравнения

Пусть $u(x)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_\Omega a_{ij}(x)u_{x_j}\eta_{x_i}\,dx=0 \tag{1.1}$$

при $\forall\eta(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Считаем, что

$$\nu\xi^2\leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\mu\xi^2;\qquad \nu,\ \mu=\mathrm{const}>0, \tag{1.2}$$

а $u(x)\in W_2^1(\Omega)$ и $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega|u|=M<\infty$. Известно (см. лемму 4.8 гл. II), что для получения оценки $\langle u\rangle^{(\alpha)}_{\Omega'}$, $\bar{\Omega}'\subset\Omega$, достаточно, например, показать, что для любых двух концентрических шаров $K_R \subset K_{2R} \subset \Omega$ имеет место соотношение

$$\operatorname{osc}\{u;\ K_R\} \leqslant \vartheta \operatorname{osc}\{u;\ K_{2R}\} \tag{1.3}$$

с постоянной ϑ, меньшей 1 и не зависящей ни от $u(x)$, ни от R.

Без ограничения общности будем считать, что колебание $u(x)$ в K_{2R} равно 1 и $0 \leqslant u(x) \leqslant 1$. Для $u(x)$ в K_R выполнено по крайней мере одно из двух: или $\operatorname{mes}\left\{x \in K_R,\ u(x) \leqslant \frac{1}{2}\right\} \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} K_R$, или $\operatorname{mes}\left\{x \in K_R,\ 1 - u(x) \leqslant \frac{1}{2}\right\} \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} K_R$. Пусть выполнено, например, первое. Тогда все дальнейшие рассуждения будем проводить с функцией $u(x)$ и использовать лишь то, что она удовлетворяет неравенству

$$\int_{K_{2R}} a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i}\, dx \leqslant 0 \tag{1.4}$$

с любой неотрицательной $\eta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(K_{2R})$. В противном случае мы рассмотрели бы функцию $w(x) = 1 - u(x)$ и для нее использовали бы то же неравенство (1.4) с $\eta(x) \geqslant 0$.

Возьмем функцию $v(x) = \psi(u(x))$, где $\psi(u) = -\ln 2(1 - u + \varepsilon)$, а ε — положительное число, которое в дальнейшем устремим к нулю. Если мы покажем, что $v(x)$ в K_R ограничена сверху некоторой постоянной M_1, не зависящей от ε, то в K_R будем иметь $2(1 - u + \varepsilon) \geqslant e^{-M_1}$, а следовательно, и $u(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2} e^{-M_1}$, т. е. (1.3) будет справедливо с $\vartheta = 1 - \frac{1}{2} e^{-M_1}$. Для доказательства ограниченности $v(x)$ положим в (1.4) $\eta(x) = \psi'(u)\xi = \xi(x)/[1 - u(x) + \varepsilon]$, где $\xi(x)$ — финитная в K_{2R} неотрицательная функция. Это даст

$$\int_{K_{2R}} \left(a_{ij} u_{x_j} \psi'' u_{x_i} \xi + a_{ij} u_{x_j} \psi' \xi_{x_i}\right) dx \leqslant 0$$

или, что то же,

$$\int_{K_{2R}} \left(a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} \xi + a_{ij} v_{x_j} \xi_{x_i}\right) dx \leqslant 0. \tag{1.5}$$

Возьмем здесь в качестве ξ функцию $\zeta^2(|x - x_0|/R)$, где $\zeta(\tau)$ равна 1 при $\tau \in [0, 3/2]$ и линейно спадает до нуля к $\tau = 2$. В силу предположений (1.2) отсюда заключим, что

$$\int_{K_{3/2 R}} |\nabla v|^2\, dx \leqslant \frac{16\mu}{\nu R^2} \operatorname{mes} K_{2R}. \tag{1.6}$$

С другой стороны, нам известно, что $v(x)$ ограничена снизу числом $-\ln 2(1+\varepsilon)$ и неположительна на множестве, мера которого не меньше $\frac{1}{2}\operatorname{mes} K_R$. Это вместе с (1.6) гарантирует оценку (см. (3.5) гл. II с $k=0$)

$$\int\limits_{K_{3/2 R}} v^2\,dx \leqslant c_1 R^n, \tag{1.7}$$

где c_1 — постоянная, определяемая лишь ν, μ и n.

Положим теперь в (1.5) $\xi(x)=\zeta^2(x)\max\{v(x)-k;\,0\}$, где k — произвольное число, а $\zeta(x)$ — срезающая функция для шара K_ρ с $\rho \in \left[R,\ \frac{3}{2}R\right]$, и отбросим первый неотрицательный член. Это даст

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} \left[a_{ij}v_{x_j}v_{x_i}\zeta^2 + a_{ij}v_{x_j}(v-k)\,2\zeta\zeta_{x_i}\right]dx \leqslant 0, \tag{1.8}$$

где $A_{k,\rho}$ — множество точек x из K_ρ, в которых $v(x)>k$. Из (1.8), используя (1.2), получим

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla v|^2\zeta^2\,dx \leqslant \gamma \int\limits_{A_{k,\rho}} (v-k)^2|\nabla\zeta|^2\,dx. \tag{1.9}$$

А отсюда и из (1.7), как известно (см. теорему 5.3 гл. II), следует, что

$$\operatorname*{vrai\,max}_{K_R} v(x) \leqslant M_1,$$

где M_1 определяется лишь ν, μ и n. Итак, желаемое утверждение доказано.

Можно видоизменить конец данного доказательства так, чтобы вместо теоремы 5.3 гл. II об ограниченности функций v, удовлетворяющих неравенствам (1.9), можно было воспользоваться более простой леммой 5.3 гл. II. Но при этом придется привлечь изящную, но довольно трудно доказываемую лемму Йона — Ниренберга [29] о том, что из неравенств типа (1.6), (1.7) для произвольных шаров следует суммируемость $v(x)$ по $K_{3/2 R}$ с любой степенью и оценка:

$$\int\limits_{K_{3/2 R}} |v|^s\,dx \leqslant c_s R^n. \tag{1.10}$$

Пусть (1.10) известно. Покажем, как из (1.10) и (1.5) при $\xi \geqslant 0$ можно оценить верхнюю границу $v(x)$ в K_R, используя лемму 5.3 гл. II. Без ограничения общности это рассуждение достаточно провести лишь для $R=1$. Положим в (1.5) $\xi(x)=\zeta^2(x)\max\{w(x)-k;\ 0\}$, где $w(x)=v(x)\zeta^2(x)$, а $\zeta(x)$ — срезающая функция для шара $K_{3/2}$. Это дает

$$\int_{A_k}\left[a_{ij}v_{x_j}v_{x_i}\zeta^2(w-k)+a_{ij}v_{x_j}w_{x_i}\zeta^2+a_{ij}v_{x_j}2\zeta\zeta_{x_i}(w-k)\right]dx\leqslant 0, \tag{1.11}$$

где A_k есть множество точек шара $K_{3/2}$, в которых $w(x)>k\geqslant 0$. Член $a_{ij}v_{x_j}w_{x_i}\zeta^2$ представим в виде $a_{ij}w_{x_i}\left(w_{x_j}-2v\zeta\zeta_{x_j}\right)$ и (1.11) запишем так:

$$I_k\equiv\int_{A_k}\left[a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}\zeta^2(w-k)+a_{ij}w_{x_i}w_{x_j}\right]dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_{A_k}\left[2a_{ij}w_{x_i}v\zeta\zeta_{x_j}-2a_{ij}v_{x_j}\zeta\zeta_{x_i}(w-k)\right]dx. \tag{1.12}$$

Отсюда, используя неравенство Коши (1.1) гл. II, получим

$$I_k\leqslant\int_{A_k}\left[\frac{1}{2}a_{ij}w_{x_i}w_{x_j}+2a_{ij}v^2\zeta^2\zeta_{x_i}\zeta_{x_j}+\right.$$
$$\left.+a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}\zeta^2(w-k)+a_{ij}\zeta_{x_i}\zeta_{x_j}(w-k)\right]dx,$$

а после приведения подобных членов и

$$\int_{A_k}a_{ij}w_{x_i}w_{x_j}\,dx\leqslant 2\int_{A_k}a_{ij}\zeta_{x_i}\zeta_{x_j}(2v^2\zeta^2+v\zeta^2-k)\,dx. \tag{1.13}$$

Возьмем в качестве $\zeta(x)$ функцию, равную 1 в K_1, с $|\nabla\zeta|\leqslant 2$. Для такой $\zeta(x)$ из (1.13) в силу условия (1.2) следует

$$\nu\int_{A_k}|\nabla w|^2dx\leqslant 8\mu\int_{A_k}(2v^2+v)\,dx,$$

а это и (1.10), справедливое при любом $s>0$, гарантируют справедливость неравенств

$$\int_{A_k}|\nabla w|^2dx\leqslant c\left(\int_{A_k}(1+v^s)\,dx\right)^{2/s}\operatorname{mes}^{1-2/s}A_k\leqslant$$
$$\leqslant c_s\operatorname{mes}^{1-2/s}A_k\quad\text{при}\quad k\geqslant 1, \tag{1.14}$$

с любым $s>0$. Нам достаточно знать, что в (1.14) можно взять $s>n$. При таком s, как утверждается в лемме 5.3 гл. II, из (1.14) следует ограниченность $w(x)$ сверху в шаре $K_{3/2}$, а тем самым и ограниченность $v(x)$ в K_1.

Обе из изложенных только что схем применимы и для общего случая. Как это сделать, читатель увидит в следующих параграфах, где мы приводим первую из них, как несколько более простую и короткую.

§ 2. Оценки постоянных Гёльдера для решений уравнений с дивергентной главной частью (линейных и квазилинейных)

Рассмотрим эллиптические уравнения вида

$$\frac{d}{dx_i}(a_i(x, u, u_x)) + a(x, u, u_x) = 0 \tag{2.1}$$

при таких предположениях относительно функций $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$, которые охватывают сразу и случай линейных уравнений с неограниченными коэффициентами, и случай квазилинейных уравнений с максимально возможным ростом функций a_i и a по p, т. е. оба крайних случая, изученных нами в гл. III, IV. Величину $M = \max\limits_{\Omega} |u|$ считаем уже известной.

Предположения об $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ следующие: они измеримы при $x \in \Omega$, $|u| \leqslant M$, $p \in E_n$ и удовлетворяют неравенствам

$$a_i(x, u, p)\, p_i \geqslant \nu |p|^m - \varphi_0(x), \qquad \nu = \text{const} > 0, \tag{2.2}$$

$$\Big[\sum_i (a_i(x, u, p))^2\Big]^{1/2} \leqslant \mu |p|^{m-1} + \varphi_1(x), \qquad \mu = \text{const}, \tag{2.3}$$

$$|a(x, u, p)| \leqslant \mu |p|^m + \varphi_2(x), \tag{2.4}$$

где $m \in (1, n]$, а $\varphi_i(x)$ неотрицательны и

$$\|\varphi_0, \varphi_2\|_{q/m,\, \Omega}, \quad \|\varphi_1\|_{q/(m-1),\, \Omega} \leqslant \mu, \qquad q > n. \tag{2.5}$$

В случае линейных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{ij}(x)\, u_{x_j} + a_i(x)\, u + f_i(x)\big) + b_i(x)\, u_{x_i} + a(x)\, u + f(x) = 0$$

условия (2.2) — (2.5) могут быть выражены в виде

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu > 0,$$

$$\|a_i, b_i, f_i\|_{q,\, \Omega}, \quad \|a, f\|_{q/2,\, \Omega} \leqslant \mu, \qquad q > n.$$

Будем заниматься, в основном, внутренними оценками. Для того чтобы оценить сверху величину $\langle u \rangle_{\Omega'}^{(\alpha)}$, $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, достаточно, согласно лемме 4.8 гл. II, показать, что для любого шара K_R, лежащего в Ω вместе с концентрическим ему шаром K_{2R}, справедливо неравенство

$$\operatorname{osc}\{u;\, K_R\} \leqslant \vartheta \operatorname{osc}\{u;\, K_{2R}\} + R^{\varepsilon} \tag{2.6}$$

с постоянными $r>0$, $\vartheta<1$. Здесь и ниже все постоянные будут определяться лишь n, $M=\max\limits_{\Omega}|u|$ и ν, μ, m и q из условий (2.2) — (2.5). Радиусы R будем считать $\leqslant 1$.

Относительно функции $u(x)$ предположим, что она есть ограниченное обобщенное решение из $W_m^1(\Omega)$ уравнения (2.1), т. е. что она принадлежит $W_m^1(\Omega)$, имеет $\max\limits_{\Omega}|u|=M<\infty$ и удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Omega}\left[a_i(x, u, u_x)\eta_{x_i}-a(x, u, u_x)\eta\right]dx=0 \tag{2.7}$$

при любой ограниченной функции $\eta(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$. Мы рассматриваем здесь лишь случай $m\leqslant n$, ибо для $m>n$ гёльдеровость $u(x)$ и оценка $\langle u\rangle_{\Omega'}^{(\alpha)}$ следуют непосредственно из теорем вложения (см. (2.30) гл. II).

Из (2.7) в силу (2.2) — (2.5) при указанных только что $\eta(x)$ имеем

$$\int\limits_{\Omega} a_i(x, u, u_x)\eta_{x_i}\,dx\leqslant\int\limits_{\Omega}[\mu|\nabla u|^m+\varphi_2]|\eta|\,dx. \tag{2.8}$$

Докажем, что из (2.8) с $\eta(x)\geqslant 0$ при условиях (2.2) — (2.5) следует

$$\nu\int\limits_{K_{2R}} e^{\left(1+\frac{\mu m}{\nu}\right)u}|\nabla u|^m\zeta^m\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\mu e^{\left(1+\frac{\mu m}{\nu}\right)M}\operatorname{mes}K_{2R}\left[2\max_{K_{2R}}|\nabla\zeta|^m+\left(1+\frac{\mu m}{\nu}+m\right)\operatorname{mes}^{-m/q}K_{2R}\right], \tag{2.9}$$

где $\zeta(x)$ — срезающая для $K_{2R}\subset\Omega$ функция.

Для этого положим в (2.8) $\eta(x)=e^{\lambda u(x)}\zeta^m(x)$, где λ — достаточно большое число, которое будет выбрано ниже:

$$\int\limits_{K_{2R}} e^{\lambda u}\left[\lambda a_i u_{x_i}\zeta^m+ma_i\zeta^{m-1}\zeta_{x_i}\right]dx\leqslant\int\limits_{K_{2R}}(\mu|\nabla u|^m+\varphi_2)e^{\lambda u}\zeta^m\,dx. \tag{2.10}$$

Отсюда в силу (2.2) — (2.4) следует

$$\lambda\nu\int\limits_{K_{2R}} e^{\lambda u}|\nabla u|^m\zeta^m\,dx\leqslant\int\limits_{K_{2R}} e^{\lambda u}[\mu|\nabla u|^m\zeta^m+\varphi_2\zeta^m+$$
$$+\lambda\varphi_0\zeta^m+m(\mu|\nabla u|^{m-1}+\varphi_1)\zeta^{m-1}|\nabla\zeta|]\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{K_{2R}} e^{\lambda u}[\mu|\nabla u|^m\zeta^m+m\mu|\nabla u|^{m-1}\zeta^{m-1}|\nabla\zeta|]\,dx+$$
$$+\max_{K_{2R}}e^{\lambda u}\int\limits_{K_{2R}}[\lambda\varphi_0\zeta^m+\varphi_2\zeta^m+m\varphi_1\zeta^{m-1}|\nabla\zeta|]\,dx. \tag{2.11}$$

Последний интеграл, стоящий справа, оценим с помощью неравенства Гёльдера следующим образом:

$$J_0 = \int_{K_{2R}} \varphi_0 \zeta^m \, dx \leqslant \| \varphi_0 \|_{q/m,\, K_{2R}} \operatorname{mes}^{1-m/q} K_{2R}, \tag{2.12}$$

$$J_2 = \int_{K_{2R}} \varphi_2 \zeta^m \, dx \leqslant \| \varphi_2 \|_{q/m,\, K_{2R}} \operatorname{mes}^{1-m/q} K_{2R}, \tag{2.13}$$

$$J_1 = \int_{K_{2R}} \varphi_1 \zeta^{m-1} |\nabla \zeta| \, dx \leqslant$$
$$\leqslant \max_{K_{2R}} |\nabla \zeta| \cdot \| \varphi_1 \|_{q/(m-1),\, K_{2R}} \operatorname{mes}^{1-(m-1)/q} K_{2R}. \tag{2.14}$$

Для оценки интеграла $J_3 = \int e^{\lambda u} |\nabla u|^{m-1} \zeta^{m-1} |\nabla \zeta| \, dx$ воспользуемся неравенством Юнга в следующей форме:

$$J_3 \leqslant \int_{K_{2R}} \left(\frac{m-1}{m} |\nabla u|^m \zeta^m e^{\lambda u} \varepsilon^{m/(m-1)} + \frac{1}{m} |\nabla \zeta|^m e^{\lambda u} \varepsilon^{-m} \right) dx, \tag{2.15}$$

где ε — произвольное положительное число, которое для вывода (2.9) можно положить равным 1. Подставляя эти оценки в (2.11), получим после приведения подобных членов

$$(\lambda \nu - \mu m) \int_{K_{2R}} e^{\lambda u} |\nabla u|^m \zeta^m \, dx \leqslant$$
$$\leqslant e^{\lambda u} \Bigl[\mu \int_{K_{2R}} |\nabla \zeta|^m \, dx + (\lambda + 1) \mu \operatorname{mes}^{1-m/q} K_{2R} +$$
$$+ \mu m \max_{K_{2R}} |\nabla \zeta| \operatorname{mes}^{1-(m-1)/q} K_{2R} \Bigr]. \tag{2.16}$$

Последнее слагаемое справа оценим по неравенству Юнга так:

$$\max_{K_{2R}} |\nabla \zeta| \operatorname{mes}^{1-(m-1)/q} K_{2R} \leqslant$$
$$\leqslant \left[\frac{1}{m} \max_{K_{2R}} |\nabla \zeta|^m + \frac{m-1}{m} \operatorname{mes}^{-m/q} K_{2R} \right] \operatorname{mes} K_{2R}. \tag{2.17}$$

Возьмем λ таким, чтобы коэффициент при интеграле, стоящем слева в (2.16), был положительным, например равным ν (при этом $\lambda = 1 + \mu m/\nu$); тогда из (2.16) и (2.17) будем иметь

$$\nu \int_{K_{2R}} e^{\lambda u} |\nabla u|^m \zeta^m \, dx \leqslant$$
$$\leqslant e^{\lambda M} \operatorname{mes} K_{2R} \bigl[2\mu \max_{K_{2R}} |\nabla \zeta|^m + \mu (\lambda + m) \operatorname{mes}^{-m/q} K_{2R} \bigr], \tag{2.18}$$

откуда ясна справедливость (2.9). Для дальнейшего нам достаточно несколько более грубое неравенство (при $R \leqslant 1$)

$$\int_{K_{2R}} |\nabla u|^m \zeta^m \, dx \leqslant cR^n \left(R^{-m} + \max_{K_{2R}} |\nabla \zeta|^m\right), \tag{2.19}$$

которое, как видно из приведенного вывода (2.9), справедливо при $q \geqslant n$. Постоянная c определяется лишь m, M, ν и μ из (2.2) — (2.5). Итак, доказана

Лемма 2.1. *Если функция* $u(x) \in W_m^1(K_{2R})$ $(1 < m \leqslant n)$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{K_{2R}} |u| = M$ *и для* $u(x)$ *справедливы неравенства* (2.8) *при любой ограниченной неотрицательной функции* $\eta(x)$ *из* $\overset{\circ}{W}{}_m^1(K_{2R})$ *и если имеют место неравенства* (2.2) — (2.5) *с* $q \geqslant n$, *причем нормы* φ_i *в* (2.5) *вычислены по шару* K_{2R}, *то для* $u(x)$ *справедливы оценки* (2.9) *и* (2.19), *где* $\zeta(x)$ — *произвольная срезающая для* K_{2R} *функция, а* $R \leqslant 1$.

Переходим теперь к доказательству (2.6). Покажем, что справедлива следующая

Лемма 2.2. *Если* $u(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 2.1 *и*

$$\operatorname{mes}\{x \in K_R,\ u(x) \leqslant \max_{K_{2R}} u(x) - \delta_2 \operatorname{osc}(u;\ K_{2R})\} \geqslant \delta_3 \operatorname{mes} K_R, \tag{2.20}$$

где δ_2 *и* δ_3 — *два каких-нибудь положительных числа, и если выполнены предположения леммы* 2.1 *при* $q > n$, *то*

$$\operatorname{osc}\{u;\ K_R\} \leqslant (1 - \delta_1) \operatorname{osc}\{u;\ K_{2R}\} + R^r, \tag{2.21}$$

где $r = 1 - \frac{n}{q}$, *с некоторым* $\delta_1 > 0$, *определяемым лишь* δ_2, δ_3, m, M, ν, μ, q *из* (2.2) — (2.5).

Доказательство. Пусть $\operatorname{osc}\{u;\ K_{2R}\} = \omega$. Без ограничения общности будем считать, что $0 \leqslant u(x) \leqslant \omega$ в K_{2R} (ибо формулировка леммы 2.2 инвариантна относительно замены u на $u + c$). Тогда $\operatorname{osc}\{u;\ K_R\} \leqslant \max\limits_{K_R} u(x)$, и потому достаточно оценить $\max\limits_{K_R} u$ через правую часть (2.21), считая $\omega \geqslant R^r$. Рассмотрим в K_{2R} функцию $v(x) = \psi(u(x))$, где $\psi(u) = -\ln \frac{\omega - u + R^r}{\delta_2 \omega}$. Для нее верна оценка $v(x) > -\ln \frac{1}{\delta_2}$. Если мы покажем, что при любом $x \in K_R$ функция $v(x)$ ограничена сверху каким-либо числом M_1, не зависящим от R, т. е. если $-\ln \frac{\omega - u(x) + R^r}{\delta_2 \omega} \leqslant M_1$ в K_R, то отсюда получим $\frac{\delta_2 \omega}{\omega - u(x) + R^r} \leqslant e^{M_1}$, т. е. оценку (2.21) с $\delta_1 = \delta_2 e^{-M_1}$.

Итак, наша цель — найти оценку сверху для $v(x)$ в K_R. Мы сделаем это с помощью теоремы 5.3 гл. II. Но для того, чтобы ею воспользоваться, надо знать оценку нормы $\| v \|_{m, K_{3/2 R}}$. Покажем сначала, что для $v(x)$ справедливо неравенство

$$\int_{K_{2R}} |\nabla v|^m \zeta^m \, dx \leqslant cR^n \left(\max_{K_{2R}} |\nabla \zeta|^m + R^{-m}\right), \tag{2.22}$$

аналогичное неравенству (2.19) для $u(x)$, причем постоянная c зависит лишь от m, M, q, ν и μ. Вывод его несколько отличается от вывода (2.19), ибо на этот раз мы считаем оценку сверху $\max\limits_{K_{2R}} |v|$ неизвестной. Зато известна оценка (2.19), которую мы используем ниже.

Положим в (2.8) $\eta(x) = \dfrac{\zeta^m(x)}{(\omega - u(x) + R^r)^{m-1}} \equiv \dfrac{\zeta^m}{B^{m-1}}$, где $\zeta(x)$ — срезающая для K_{2R} функция. Это возможно, ибо такое $\eta(x)$ обладает всеми требуемыми свойствами (в частности, $\eta(x) \geqslant 0$). Это дает

$$\int_{K_{2R}} a_i(x, u, u_x) \left[(m-1) B^{-m} u_{x_i} \zeta^m + m B^{1-m} \zeta^{m-1} \zeta_{x_i}\right] dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{K_{2R}} \left(\mu |\nabla u|^m + \varphi_2\right) B^{1-m} \zeta^m \, dx.$$

Отсюда в силу неравенств (2.2) — (2.4) и определения v имеем

$$\int_{K_{2R}} (m-1) \nu |\nabla v|^m \zeta^m \, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{K_{2R}} \left[(m-1) \varphi_0 \zeta^m B^{-m} + m \zeta^{m-1} |\nabla \zeta| B^{1-m} \left(\mu |\nabla u|^{m-1} + \varphi_1\right) + \right.$$
$$\left. + \zeta^m B^{1-m} \left(\mu |\nabla u|^m + \varphi_2\right)\right] dx. \tag{2.23}$$

Интегралы, стоящие справа, оценим примерно так же, как интегралы J_i выше (см. (2.12) — (2.15)). Именно, благодаря неравенству Гёльдера

$$J_0' = \int_{K_{2R}} \varphi_0 \zeta^m B^{-m} \, dx \leqslant$$
$$\leqslant R^{-rm} \| \varphi_0 \|_{q/m, K_{2R}} \operatorname{mes}^{1-m/q} K_{2R} \leqslant cR^{n-m}, \tag{2.24}$$

$$J_2' = \int_{K_{2R}} \varphi_2 \zeta^m B^{1-m} \, dx \leqslant$$
$$\leqslant R^{-r(m-1)} \| \varphi_2 \|_{q/m, K_{2R}} \operatorname{mes}^{1-m/q} K_{2R} \leqslant cR^{n-m+r}, \tag{2.25}$$

$$J_1' = \int\limits_{K_{2R}} \varphi_1 \zeta^{m-1} |\nabla\zeta| B^{1-m} dx \leqslant$$
$$\leqslant \max_{K_{2R}} |\nabla\zeta| R^{-r(m-1)} \|\varphi_1\|_{q/(m-1), K_{2R}} \operatorname{mes}^{1-(m-1)/q} K_{2R} \leqslant$$
$$\leqslant c \max_{K_{2R}} |\nabla\zeta| R^{n-m+1} \leqslant cR^n \left(\frac{m-1}{m} R^{-m} + \frac{1}{m} \max_{K_{2R}} |\nabla\zeta|^m\right), \quad (2.26)$$
$$J_3' = \int\limits_{K_{2R}} |\nabla u|^{m-1} B^{1-m} \zeta^{m-1} |\nabla\zeta| dx = \int\limits_{K_{2R}} |\nabla v|^{m-1} \zeta^{m-1} |\nabla\zeta| dx,$$

откуда в силу неравенства Юнга при любом $\varepsilon > 0$

$$J_3' \leqslant \int\limits_{K_{2R}} \left(\frac{m-1}{m} |\nabla v|^m \zeta^m \varepsilon^{m/(m-1)} + \frac{1}{m} |\nabla\zeta|^m \varepsilon^{-m}\right) dx. \quad (2.27)$$

С помощью этого же неравенства Юнга с $\varepsilon > 0$ оценим

$$J_4' = \int\limits_{K_{2R}} |\nabla u|^m B^{1-m} \zeta^m dx = \int\limits_{K_{2R}} |\nabla v|^{m-1} \zeta^{m-1} |\nabla u| \zeta \, dx,$$

именно:

$$J_4' \leqslant \int\limits_{K_{2R}} \left(\frac{m-1}{m} |\nabla v|^m \zeta^m \varepsilon^{m/(m-1)} + \frac{1}{m} |\nabla u|^m \zeta^m \varepsilon^{-m}\right) dx. \quad (2.28)$$

Полученные оценки (2.24) — (2.28) подставим в (2.23) и приведем подобные члены, считая $\varepsilon \leqslant 1$ и $R \leqslant 1$:

$$\left[(m-1)\nu - \left(m - \frac{1}{m}\right) \varepsilon^{m/(m-1)} \mu\right] \int\limits_{K_{2R}} |\nabla v|^m \zeta^m dx \leqslant$$
$$\leqslant c_1 R^n \left(R^{-m} + \max_{K_{2R}} |\nabla\zeta|^m \varepsilon^{-m}\right) + \frac{\mu}{m} \varepsilon^{-m} \int\limits_{K_{2R}} |\nabla u|^m \zeta^m dx. \quad (2.29)$$

Выбирая ε так, чтобы коэффициент слева был равен, например, $\frac{m-1}{2}\nu$, и используя уже установленную выше оценку (2.19), из (2.29) получим (2.22).

Из неравенства (2.22), ограниченности $v(x)$ снизу $\left(v(x) > -\ln \frac{1}{\delta_2}\right)$ и того, что в силу предположения (2.20) $v(x)$ неположительна на множестве, мера которого не меньше $\delta_3 \operatorname{mes} K_R$, следует

$$\int\limits_{K_{3/2 R}} |v|^m dx \leqslant c_1 R^n \quad (2.30)$$

с постоянной c_1, определяемой лишь m, M, ν, μ, δ_2 и δ_3 (см. неравенство (3.5) гл. II).

Покажем, что $v(x)$ удовлетворяет следующей серии неравенств:

$$\int_{A_{k,\rho}} |\nabla v|^m \zeta^m\,dx \leqslant \gamma\left[\int_{A_{k,\rho}} (v-k)^m |\nabla\zeta|^m\,dx + \rho^{-rm}\operatorname{mes}^{1-m/q} A_{k,\rho}\right] \tag{2.31}$$

при всех k, превосходящих некоторое число k_0, и $\rho \leqslant \rho_0$. Здесь $A_{k,\rho}$ есть множество точек x из шара K_ρ, в которых $v(x) > k$, а $\zeta(x)$ — срезающая для K_ρ функция. Постоянная γ определяется лишь m, M, ρ_0, ν и μ, а k_0 — постоянными δ_2, M и ν. Для проверки (2.21) неравенство (2.31) достаточно установить лишь для шаров K_ρ, концентрических K_{2R}, с ρ из $\left[R, \frac{3}{2}R\right]$ и $R \leqslant 1$. Для доказательства (2.31) возьмем в (2.8)

$$\eta(x) = \zeta^m(x)\,B^{1-m}\max\{v(x)-k,\,0\},$$

где $B(x) = \omega - u(x) + R^r$, а $\zeta(x)$ — срезающая для K_ρ функция. Такая $\eta(x)$ допустима. Результат представим в виде

$$\int_{A_{k,\rho}} \left[a_i B^{1-m} v_{x_i}\zeta^m + (m-1)\,a_i B^{-m} u_{x_i}(v-k)\,\zeta^m\right] dx \leqslant \int_{A_{k,\rho}} -m a_i B^{1-m}(v-k)\,\zeta^{m-1}\zeta_{x_i}\,dx + \int_{A_{k,\rho}} (\mu|\nabla u|^m + \varphi_2)\,B^{1-m}(v-k)\,\zeta^m\,dx. \tag{2.32}$$

Отсюда, принимая во внимание (2.2) — (2.4), получим

$$\nu\int_{A_{k,\rho}} [|\nabla v|^m\zeta^m + (m-1)|\nabla v|^m (v-k)\,\zeta^m]\,dx \leqslant \int_{A_{k,\rho}} [\varphi_0 B^{-m}\zeta^m + (m-1)\,\varphi_0 B^{-m}(v-k)\,\zeta^m + m(\mu|\nabla u|^{m-1} + \varphi_1)\,B^{1-m}(v-k)\,\zeta^{m-1}|\nabla\zeta| + (\mu|\nabla u|^m + \varphi_2)\,B^{1-m}(v-k)\,\zeta^m]\,dx. \tag{2.33}$$

Интегралы, стоящие справа, оценим, в основном, так же, как выше интегралы J_i и J_i'. Некоторое отличие вносит множитель

$(v-k)$. Именно, применяя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$J_0'' = \int\limits_{A_{k,\rho}} \varphi_0 B^{-m}\zeta^m [1+(m-1)(v-k)]\,dx \leqslant$$
$$\leqslant R^{-rm}\left[\|\varphi_0\|_{q/m} \operatorname{mes}^{(1-m)/q} A_{k,\rho} + {}\right.$$
$$\left. + (m-1)\|\varphi_0\|_{q/m}\|(v-k)\zeta\|_m \operatorname{mes}^{1-m/q-1/m} A_{k,\rho}\right].$$

Множитель $\|(v-k)\zeta\|_m$ оценим с помощью неравенства (2.12) гл. II:

$$\|(v-k)\zeta\|_{m,A_{k,\rho}} \leqslant$$
$$\leqslant c\operatorname{mes}^{1/n} A_{k,\rho}\left(\||\nabla v|\zeta\|_{m,A_{k,\rho}} + \|(v-k)|\nabla\zeta|\|_{m,A_{k,\rho}}\right),$$

а затем содержащий его член оценим по неравенству Юнга с $\varepsilon > 0$:

$$J_0'' \leqslant \|\varphi_0\|_{q/m}\left[R^{-rm}\operatorname{mes}^{1-\frac{m}{q}} A_{k,\rho} + (m-1)c(\||\nabla v|\zeta\|_m + {}\right.$$
$$\left. + \|(v-k)|\nabla\zeta|\|_m) R^{-rm}\operatorname{mes}^{1-\frac{m}{q}-\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} A_{k,\rho}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \mu\left[R^{-rm}\operatorname{mes}^{1-\frac{m}{q}} A_{k,\rho} + (m-1)c\frac{\varepsilon^m}{m}\||\nabla v|\zeta\|_m^m + {}\right.$$
$$+ \frac{(m-1)c}{m}\|(v-k)|\nabla\zeta|\|_m^m + {}$$
$$\left. + c\frac{(m-1)^2}{m}\left(1+\varepsilon^{-\frac{m}{m-1}}\right)R^{-\frac{rm^2}{m-1}}\operatorname{mes}^{\frac{m}{m-1}\left(1-\frac{m}{q}-\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} A_{k,\rho}\right] \leqslant$$
$$\leqslant c_\varepsilon R^{-rm}\operatorname{mes}^{1-\frac{m}{q}} A_{k,\rho} + c_1\varepsilon^m\||\nabla v|\zeta\|_m^m + c_1\|(v-k)|\nabla\zeta|\|_m^m. \tag{2.34}$$

Для оценки интеграла $J_2'' = \int \varphi_2 B^{1-m}(v-k)\zeta^m\,dx$ используем неравенства, только что выведенные. По сравнению с J_0'' интеграл J_2'' имеет лишь «лишний» множитель $B = \omega - u + R^r$, который мы, ввиду его ограниченности, вынесем за скобки, так что из (2.34) следует

$$J_2'' \leqslant (\omega + R^r)\left[c_\varepsilon R^{-rm}\operatorname{mes}^{1-\frac{m}{q}} A_{k,\rho} + c_1\varepsilon^m\||\nabla v|\zeta\|_m^m + {}\right.$$
$$\left. + c_1\|(v-k)|\nabla\zeta|\|_m^m\right]. \tag{2.35}$$

Почти так же оценивается и J_1''

$$J_1'' = \int\limits_{A_{k,\rho}} \varphi_1 B^{1-m}(v-k)\zeta^{m-1}|\nabla\zeta|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant R^{-r(m-1)}\int\limits_{A_{k,\rho}} \varphi_1(v-k)|\nabla\zeta|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant R^{-r(m-1)}\|\varphi_1\|_{q/(m-1)}\|(v-k)|\nabla\zeta|\|_m \operatorname{mes}^{1-\frac{m-1}{q}-\frac{1}{m}} A_{k,\rho},$$

откуда, применяя неравенство Юнга, получим

$$J_1'' \leqslant \mu \left[\frac{1}{m} \| (v-k) | \nabla\zeta | \|_m^m + \frac{m-1}{m} R^{-rm} \operatorname{mes}^{1-\frac{m}{q}} A_{k,\rho} \right]. \quad (2.36)$$

Интеграл

$$J_3'' = \int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^{m-1} B^{1-m} (v-k) \zeta^{m-1} |\nabla\zeta| \, dx = \\ = \int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla v|^{m-1} (v-k) \zeta^{m-1} |\nabla\zeta| \, dx$$

оценим так же, как выше J_3', присоединяя $(v-k)$ к $|\nabla\zeta|$, именно:

$$J_3'' \leqslant \int\limits_{A_{k,\rho}} \left(\frac{m-1}{m} |\nabla v|^m \zeta^m \varepsilon^{m/(m-1)} + \frac{1}{m} (v-k)^m |\nabla\zeta|^m \varepsilon^{-m} \right) dx. \quad (2.37)$$

Осталось оценить еще один интеграл:

$$J_4'' = \int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^m (v-k) \zeta^m B^{1-m} \, dx = \int\limits_{A_{k,\rho}} (|\nabla v| \zeta)^m (v-k) B \, dx.$$

Функция $\Phi(x, k, \omega) = [v(x) - k] B(x) = [v(x) - k] \delta_2 \omega e^{-v(x)}$ для всех $\omega \leqslant 2M$ и $x \in A_{k,\rho}$ не превосходит функции $\Phi(k) = 2M\delta_2 e^{-1-k}$, стремящейся к нулю при $k \to \infty$. Поэтому

$$J_4'' \leqslant \Phi(k) \int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla v|^m \zeta^m \, dx. \quad (2.38)$$

Подставляя неравенства (2.34) — (2.38) в (2.33) и приводя подобные члены, получим (помня, что $R \leqslant 1$, а $r \geqslant 0$)

$$(\nu - (2M+2) c_1 \varepsilon^m - \mu (m-1) \varepsilon^{m/(m-1)} - \mu\Phi(k)) \int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla v|^m \zeta^m \, dx + \\ + \nu \int\limits_{A_{k,\rho}} (m-1) |\nabla v|^m (v-k) \zeta^m \, dx \leqslant \\ \leqslant [(2M+2) c_1 + \mu + \mu\varepsilon^{-m}] \int\limits_{A_{k,\rho}} (v-k)^m |\nabla\zeta|^m \, dx + \\ + [(2M+2) c_\varepsilon + \mu (m-1)] R^{-rm} \operatorname{mes}^{1-m/q} A_{k,\rho}. \quad (2.39)$$

Выберем ε, например, так, чтобы $(2M+2) c_1 \varepsilon^m + \mu (m-1) \times \varepsilon^{m/(m-1)} = \nu/4$, а числа k будем считать превосходящими число k_0, которое выберем из условия

$$\mu\Phi(k_0) \leqslant \frac{\nu}{4}. \quad (2.40)$$

Как легко видеть, для $k \geqslant k_0$ и $R \leqslant \rho \leqslant {}^3/_2 R \leqslant {}^3/_2$ из (2.39) следуют (2.31).

Итак, для функции v установлены неравенства (2.30) и (2.31) в предположении, что $r = 1 - \frac{n}{q} \geqslant 0$ (т. е. что $q \geqslant n$) и что $k \geqslant k_0$, $R \leqslant \rho \leqslant {}^3/_2 R \leqslant {}^3/_2$. Входящие в них постоянные не зависят ни от R, ни от ρ, ни от ω. Они определяются лишь m, M, ν, μ, δ_2 и δ_3.

На основании теоремы 5.3 гл. II (точнее, замечаний 5.3, 5.4 к ней) из (2.30), (2.31) следует, что при $q > n$ $\max\limits_{K_R} v(x)$ ограничен сверху постоянной M_1, определяемой лишь c_1 из (2.30), γ из (2.31), а также k_0, n, m и q, т. е., в конечном счете, n, m, M, q, ν, μ, δ_2 и δ_3. Лемма 2.2 доказана.

Из этой леммы следует, что если $u(x)$ удовлетворяет неравенствам (2.8) при любой ограниченной $\eta(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(K_{2R})$ и $\max\limits_{K_{2R}} |u| = M$, то для нее верно соотношение (2.6).

Действительно, рассмотрим две функции: $w_1(x) = u(x)$ и $w_2(x) = -u(x)$. По крайней мере для одной из них

$$\operatorname{mes}\left\{x \in K_R\colon w_i(x) \leqslant \max_{K_{2R}} w_i(x) - \frac{1}{2}\operatorname{osc}(w_i; K_{2R})\right\} \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{mes} K_R. \quad (2.41)$$

Если (2.41) справедливо при $i = 1$, то лемма 2.2 гарантирует справедливость неравенства (2.6) с $\vartheta = 1 - \delta_1$ при $\delta_2 = \delta_3 = 1/2$.

Если (2.41) справедливо при $i = 2$, то лемму 2.2 можно применить к функции w_2. Действительно, условие (2.20) для нее выполнено с $\delta_2 = \delta_3 = 1/2$. Из других предположений леммы надо убедиться лишь в том, что $w_2(x)$ удовлетворяет неравенствам (2.8) с $\eta(x) \geqslant 0$. Но это так, ибо из справедливости неравенств (2.8) для $u(x)$ при $\eta(x)$ любого знака следует, что для $w_2(x)$ имеют место неравенства

$$\int\limits_\Omega \tilde{a}_i(x, w_2, w_{2x})\, \eta_{x_i}\, dx \leqslant \int\limits_\Omega [\mu |\nabla w_2|^m + \varphi_2] |\eta|\, dx, \quad (2.42)$$

в которых функции $\tilde{a}_i(x, w, p) = -a_i(x, -w, -p)$ удовлетворяют, как легко видеть, тем же условиям (2.2) — (2.5), что и $a_i(x, u, p)$.

Итак, лемма 2.2 применима к $-u(x)$, а это приводит, как и выше в первом случае, к неравенству (2.6) с тем же $\vartheta = 1 - \delta_1$. Сформулируем доказанное утверждение в виде леммы.

Лемма 2.3. *Если $u(x) \in W^1_m(K_{2R})$ $(1 < m \leqslant n)$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{K_{2R}} |u| = M$ и для функции $u(x)$ справедливы неравенства (2.8) при любой ограниченной функции $\eta(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_m(K_{2R})$, причем для*

$a_i(x, u, p)$ и φ_2 выполнены условия (2.2), (2.3), (2.5) *с $q > n$ и нормы φ_i в* (2.5) *вычислены по шару K_{2R}, то при некотором $\delta_1 > 0$*

$$\operatorname{osc}\{u; K_R\} \leqslant (1-\delta_1)\operatorname{osc}\{u; K_{2R}\} + R^r, \qquad r = 1 - n/q.$$

Постоянная δ_1 здесь определяется лишь n, m, M, q, ν и μ из (2.2), (2.3) и (2.5). Вместо указанного требования о справедливости (2.8) для $u(x)$ при любых знакопеременных $\eta(x)$ можно предположить, что для каждой из двух функций $w(x) = \pm u(x)$ справедливо свое неравенство вида

$$\int_\Omega a_i^\pm(x, w, w_x)\,\eta_{x_i}\,dx \leqslant \int_\Omega [\mu\,|\nabla w|^m + \varphi_2]\,\eta\,dx, \qquad (2.43)$$

в которых функции $a_i^\pm(x, w, p)$ и φ_2 удовлетворяют условиям (2.2), (2.3), (2.5), а $\eta(x)$ — неотрицательные ограниченные элементы $\overset{\circ}{W}{}_m^1(K_{2R})$.

Из этой леммы и леммы 4.8 гл. II следует

Теорема 2.1. *Пусть $u(x) \in W_m^1(\Omega)$, $1 < m \leqslant n$, $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega |u| = M$ и для функций $w(x) = \pm u(x)$ справедливы неравенства* (2.43), *в которых функции $a_i^\pm(x, w, p)$ удовлетворяют условиям* (2.2), (2.3), (2.5), *а $\eta(x)$ — произвольная неотрицательная ограниченная функция из $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$. Тогда для любого шара $K_\rho \subset \Omega$*

$$\operatorname{osc}\{u; K_\rho\} \leqslant c\rho_0^{-\alpha}\rho^\alpha. \qquad (2.44)$$

Здесь c и α — положительные постоянные, определяемые лишь M, n, m, q, ν и μ, а ρ_0 — расстояние от центра K_ρ до границы области Ω.

В частности, утверждение теоремы справедливо для ограниченных обобщенных решений уравнения (2.1) из $W_m^1(\Omega)$, т. е. для $u(x) \in W_m^1(\Omega)$, имеющих $\operatorname{vrai}\max\limits_\Omega |u| = M < \infty$ и удовлетворяющих тождеству (2.7) при всех ограниченных $\eta(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$, если для $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ выполнены условия (2.2) — (2.5).

Оценка $\langle u\rangle_\Omega^{(\alpha)}$ для всей области Ω гарантируется следующей теоремой:

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, *и пусть S удовлетворяет условию* (A), *а $u|_S = \varphi(s)$ — условию Гёльдера с показателем $\beta > 0$. Тогда существуют такие $\alpha > 0$ ($\alpha \leqslant \beta$) и $c > 0$, зависящие только от M, n, m, q, ν, μ и β,* *постоянных* a_0 *и* θ_0 *из условия* (A) *и* $|u|_S^{(\beta)}$, *что*

$$\langle u\rangle_\Omega^{(\alpha)} \leqslant c. \tag{2.45}$$

Доказывается эта теорема так же, как и теорема 2.1. Необходимые видоизменения рассуждений читатель может найти в § 14 гл. III и в § 1 гл. IV.

§ 3. Об оценке колебаний производных от решений уравнений с дивергентной главной частью

Если $u(x)$ удовлетворяет уравнению (2.1), то каждую из его производных $u_k(x) \equiv u_{x_k}(x)$ можно рассматривать как решение уравнения того же типа. В самом деле, продифференцируем (2.1) по x_k и получаемый при этом результат запишем в виде

$$\frac{d}{dx_i}\left[\frac{\partial a_i(x, u, u_x)}{\partial u_{x_j}} u_{kx_j} + \frac{\partial a_i}{\partial u} u_k + \frac{\partial a_i}{\partial x_k} + a(x, u, u_x)\delta_i^k\right] = 0. \tag{3.1}$$

Соотношение (3.1) есть линейное относительно u_k уравнение вида (2.1) с

$$a_i(x, v, p) = a_{ij}(x) p_j + \tilde{a}_i(x) v + f_i(x), \qquad a(x, v, p) \equiv 0,$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}(x) &= \frac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial u_{x_j}}, \qquad \tilde{a}_i(x) = \frac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial u}, \\ f_i(x) &= \frac{\partial a_i(x, u(x), u_x(x))}{\partial x_k} + a(x, u(x), u_x(x))\delta_i^k. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Ввиду этого из теоремы 2.1 следует

Теорема 3.1. *Пусть* $u(x) \in W_2^2(\Omega)$, $\operatorname{vrai}\max_\Omega |\nabla u| = M_1 < \infty$ *и* $u(x)$ *почти всюду удовлетворяет уравнению* (2.1). *Пусть для него функции, определенные в* (3.2), *подчиняются неравенствам*

$$\left.\begin{aligned} &\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, && \nu, \mu > 0, \\ &\|\tilde{a}_i(x), f_i(x)\|_{q,\Omega} \leqslant \mu, && q > n. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Тогда для любого $K_\rho \subset \Omega$

$$\operatorname{osc}\{u_{x_i}; K_\rho\} \leqslant c\rho_0^{-\alpha}\rho^\alpha, \tag{3.4}$$

где ρ_0 *есть расстояние от центра* K_ρ *до границы* S, *а* c *и* α — *положительные постоянные, определяемые лишь* M_1, n, q, ν *и* μ *из* (3.3).

§ 4. Недивергентные уравнения

В данном параграфе рассмотрим в области Ω квазилинейные уравнения второго порядка общего вида

$$L(u) \equiv a_{ij}(x, u, u_x) u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = 0 \tag{4.1}$$

и для них дадим оценку постоянных Гёльдера $\langle u_{x_i}\rangle_{\Omega'}^{(\alpha)}$, $i = 1, \ldots, n$, через $\max\limits_{\Omega}|u| = M$, $\max\limits_{\Omega}|\nabla u| = M_1$, константы, характеризующие функции $a_{ij}(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$, и расстояние Ω' до границы S. Единственное предположение относительно (4.1) (не считая условий некоторой регулярности a_{ij} и a) — это его эллиптичность на исследуемом решении $u(x)$. Этот результат доказан нами в § 1 гл. VI. Из § 1 гл. VI мы возьмем общий план получения оценок для $\langle u_{x_i}\rangle_{\Omega'}^{(\alpha)}$, но изменим его конец, заменив доказательство гёльдеровости вектор-функций классов $\mathfrak{B}_m^{N_1}$ несколько более обычными и короткими рассуждениями, подобными тем, какие даны ранее. Итак, докажем теорему, являющуюся небольшим усилением теоремы 1.1 гл. VI.

Теорема 4.1. *Пусть $u(x)$ есть решение уравнения* (4.1), *принадлежащее $W_2^2(\Omega)$, причем* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|\nabla u| \leqslant M_1$. *Пусть функции $a_{ij}(x, u, p)$ дифференцируемы по x, u, p в окрестности многообразия $\{x \in \overline{\Omega},\ u = u(x),\ p = u_x(x)\}$ и*

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, u(x), u_x(x))\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu, \mu = \mathrm{const} > 0. \tag{4.2}$$

Пусть, кроме того, при $u = u(x)$, $p = u_x(x)$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}\right| \leqslant \mu, \quad \left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}, a\right| \leqslant \varphi(x), \quad \|\varphi\|_{q,\Omega} \leqslant \mu, \quad q > n. \tag{4.3}$$

Тогда $u(x)$ принадлежит $C^{1+\alpha}(\Omega)$ с некоторым $\alpha > 0$ и для любой подобласти $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ нормы $|u_{x_i}|_{\Omega'}^{(\alpha)}$, $i = 1, \ldots, n$, оцениваются через n, M_1, q, ν и μ и расстояние Ω' до границы Ω. Постоянная α определяется лишь n, M_1, q, ν и μ.

Без ограничения общности будем считать функции $u_{x_i}(x)$, $i = 1, \ldots, n$, «нормированными на 0 и 1», т. е. такими, что $0 \leqslant u_{x_i} \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, $x \in \Omega$. Покажем, что для функций

$$\left.\begin{aligned} w_+^l(x) &= 10nu_{x_l}(x) + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x), \\ w_-^l(x) &= 10n(1 - u_{x_l}(x)) + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x), \qquad l = 1, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

при любой неотрицательной функции $\eta(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливы неравенства

$$\int_\Omega \left[\tilde{a}_{ij}(x)\, w^l_{x_j} + 2c^l_i(x)\right] \eta_{x_i}\, dx \leqslant \gamma \int_\Omega \left[\,|\nabla w^l|^2 + \varphi(x)\right] \eta\, dx, \tag{4.5}$$

в которых $\tilde{a}_{ij}(x) = a_{ij}(x, u(x), u_x(x))$, а $\left\|c^l_i\right\|_{q,\Omega}$ и $\|\varphi\|_{q/2,\Omega}$ ограничены сверху постоянными, определяемыми, как и γ, числами M_1 и μ из (4.3). Неравенства (4.5) суть следствия тождества (1.9), установленного нами в § 1 гл. VI, именно, тождества

$$\int_\Omega \left[\tilde{a}_{ij} u_{x_s x_j} u_{x_s x_i} \eta + \left(\frac{1}{2}\tilde{a}_{ij} w^l_{x_j} + c^l_i\right)\eta_{x_i}\right] dx =$$
$$= -\int_\Omega \left(\frac{1}{2} a^m_{ij} u_{x_m x_i} w^l_{x_j} \eta + c^l_{ij} u_{x_l x_j} \eta\right) dx, \tag{4.6}$$

где $\eta(x)$ — произвольная ограниченная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$,

$$\left.\begin{aligned} a^m_{ij} &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_m}} - \frac{\partial a_{im}}{\partial u_{x_j}}, \qquad c^l_i = a u_{x_l} + 5na\delta^l_i,\\ c^l_{ij} &= a\delta^i_j + a^j\left(u_{x_l} + 5n\delta^l_i\right) + b^k_{ij}\left(u_{x_k} + 5n\delta^k_l\right),\\ a^j &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial u} u_{x_i} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}, \qquad b^k_{ij} = -\frac{\partial a_{ij}}{\partial u} u_{x_k} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

В силу предположений теоремы коэффициенты c^l_{ij} и c^l_i суммируемы по Ω со степенью q, а $\tilde{a}_{ij}$ и a^m_{ij} ограничены. Оценим члены, стоящие под интегралом в правой части (4.6), так (суммирование по повторяющимся индексам не предполагается):

$$\left.\begin{aligned} \left|a^m_{ij} u_{x_m x_i} w^l_{x_j} \eta\right| &\leqslant \varepsilon u^2_{x_m x_i}\eta + \frac{\mu^2}{4\varepsilon}\left(w^l_{x_j}\right)^2\eta,\\ \left|c^l_{ij} u_{x_l x_j}\eta\right| &\leqslant \varepsilon\left|u_{x_l x_j}\right|^2\eta + \frac{1}{4\varepsilon}(c^l_{ij})^2\eta \leqslant \varepsilon\left|u_{x_l x_j}\right|^2\eta + \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\varphi}(x)\eta, \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

где функция $\tilde{\varphi}(x)$ имеет конечную норму $\|\tilde{\varphi}\|_{q/2,\Omega}$, не превосходящую известной нам величины. Подставляя эти оценки в (4.6), выбирая ε достаточно малым и приводя подобные члены, получим для неотрицательных $\eta(x)$ неравенства (4.5). Эти неравенства являются частным случаем неравенств (2.8). Они совпадают с (2.8), взятыми для $m=2$ и $a_i(x, u, p) = \tilde{a}_{ij}(x, u(x), u_x(x))p_j + 2c^l_i(x, u(x), u_x(x))$. Остальные предположения о функциях φ_i и a_i также соответствуют друг другу. Однако имеется одно принципиальное отличие: неравенства (2.8) справедливы сразу для пары функций $u(x)$ и $-u(x)$, неравенства же (4.5) имеют место лишь для $w^l(x)$ (но не для $-w^l(x)$). Однако (4.5) верны как для $w_+^l(x)$, так и для $w_-^l(x)$ и роль пары $\pm u(x)$ на этот раз будут играть функции $w_\pm^l(x)$. Как видно из рассуждений § 2, выполнение неравенств для обеих функций $\pm u(x)$ было использовано лишь в одном месте: там, где делался выбор между этими двумя функциями в зависимости от того, какое из двух неравенств $\operatorname{mes}\left\{x \in K_R\colon u(x) \leqslant \frac{\omega}{2}\right\} \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} K_R$ или $\operatorname{mes}\left\{x \in K_R\colon u(x) \geqslant \frac{\omega}{2}\right\} \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} K_R$ заведомо выполняется. Если, например, выполнялось первое неравенство, то все дальнейшие рассуждения проводились с функцией $+u(x)$, и это неравенство использовалось лишь для того, чтобы заключить, что из неравенства (2.22) следует неравенство (2.30).

В данном случае будем поступать так. Возьмем два произвольных концентрических шара $K_R \subset K_{2R} \subset \Omega$. Среди функций $u_{x_i}(x)$, $i = 1, \ldots, n$, выберем ту, которая в K_{2R} имеет наибольшую осцилляцию; пусть $\operatorname{osc}\{u_{x_r}; K_{2R}\} \equiv \omega^r = \max\limits_{i=1, \ldots, n} \omega^i$. Согласно лемме 8.1 гл. II $\operatorname{osc}\{w_\pm^r; K_{2R}\} \geqslant \delta_0 \omega^r$ и хотя бы для одной из функций $w_\pm^r$ выполняются неравенства

$$\operatorname{mes}\{x \in K_R\colon w^r(x) \leqslant \max_{K_{2R}} w^r - \delta_2 \operatorname{osc}\{w^r; K_{2R}\}\} \geqslant \delta_3 \operatorname{mes} K_R, \tag{4.9}$$

где δ_0, δ_2 и δ_3 — некоторые вполне определенные положительные числа. Пусть это верно, например, для w_+^r. Тогда для w_+^r выполнены все условия леммы 2.2, и поэтому

$$\operatorname{osc}\{w_+^r; K_R\} \leqslant (1 - \delta_1) \operatorname{osc}\{w_+^r; K_{2R}\} + R^r, \qquad r = 1 - n/q,$$

с некоторым $\delta_1 > 0$. А отсюда на основании леммы 4.9 гл. II заключаем о гёльдеровости u_{x_i} и возможности получить оценку сверху для $\langle u_{x_i} \rangle_{\Omega'}^{(\alpha)}$, $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Теорема 4.1 доказана.

§ 5. Способ Ю. Мозера оценки $|u|_{\Omega'}^{(\alpha)}$ для решений линейных уравнений. Неравенство Гарнака

Ю. Мозер в работе [40$_1$] предложил для уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) u_{x_j}\right) = 0 \tag{5.1}$$

способ оценки $|u|_{\Omega'}^{(\alpha)}$, $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, их обобщенных решений из $W_2^1(\Omega)$ через $\|u\|_{2, \Omega}$, числа ν и μ из неравенства

$$\nu \xi^2 \leqslant a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqslant \mu \xi^2 \tag{5.2}$$

и расстояние от Ω' до границы S, отличный от данных ранее способов Е. Де Джорджи и Дж. Нэша.

Изложим этот способ оценки $|u|_{\Omega'}^{(\alpha)}$, предполагая ради простоты, что о решении u заранее известна его ограниченность, и считая $n > 2$. Итак, пусть $u(x)$ принадлежит $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяет тождеству

$$\int_\Omega a_{ij}(x)\, u_{x_j} \eta_{x_i}\, dx = 0 \tag{5.3}$$

при любой $\eta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $\max_\Omega |u| < \infty$. Положим в (5.3)

$$\eta(x) = \varphi'(u(x))\, \xi(x), \tag{5.4}$$

где $\xi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\max_\Omega |\xi| < \infty$, а $\varphi(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция t с $\varphi''(t) \geqslant 0$. Это дает

$$\int_\Omega \left(\frac{\varphi''(u)}{\varphi'^2(u)}\, a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} \xi + a_{ij} v_{x_j} \xi_{x_i} \right) dx = 0, \tag{5.5}$$

где $v(x) = \varphi(u(x))$. Отсюда при $\xi(x) \geqslant 0$ следует

$$\int_\Omega a_{ij}(x)\, v_{x_j} \xi_{x_i}\, dx \leqslant 0. \tag{5.6}$$

Назовем функции $v(x)$, удовлетворяющие неравенству (5.6) при любой неотрицательной функции $\xi(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, *субрешениями* (5.1).

Легко проверить, что для решений $u(x)$ и неотрицательных субрешений $v(x)$ уравнения (5.1) справедливо неравенство

$$\int_{K_\rho} |\nabla v|^2 \zeta^2\, dx \leqslant \frac{4\mu}{\nu} \int_{K_\rho} v^2 |\nabla \zeta|^2\, dx, \tag{5.7}$$

где K_ρ — произвольный шар, принадлежащий Ω, $\zeta(x)$ — срезающая для K_ρ функция. Чтобы убедиться в этом, надо положить в (5.3) (соответственно в (5.6)) $\eta(x) = u(x)\zeta^2(x)$ ($\xi(x) = v(x)\zeta^2(x)$) и провести элементарные оценки с помощью неравенств Коши (1.1), (1.9) гл. II.

Оценим сначала $\max_{K_R} |u(x)|$, $\overline{K}_R \subset \Omega$. Для этого учтем, что функции $v(x) = |u(x)|^{1+\varepsilon}$ при $\varepsilon > 0$ являются неотрицательными субрешениями (5.1). Действительно, функции $v_\delta = (u^2 + \delta)^{(1+\varepsilon)/2}$ являются субрешениями при любой $\delta > 0$. Устремляя δ к нулю в (5.6) для v_δ, убедимся, что (5.6) справедливы и для v. Ввиду этого для $v(x)$ верна оценка (5.7), т. е. при любом $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{K_\rho} |\nabla |u|^{1+\varepsilon}|^2 \zeta^2 \, dx \leqslant \frac{4\mu}{\nu} \int\limits_{K_\rho} |u|^{2(1+\varepsilon)} |\nabla\zeta|^2 dx. \tag{5.8}$$

Кроме того, нам понадобится теорема вложения (2.12) гл. II в следующей форме:

$$\left(\fint\limits_{K_\rho} w^{2k} \, dx \right)^{1/k} \leqslant \beta\rho^2 \fint\limits_{K_\rho} |\nabla w|^2 \, dx, \tag{5.9}$$

где $k = \frac{n}{n-2}$, а $\fint\limits_{K_\rho} w \, dx = (\operatorname{mes} K_\rho)^{-1} \int\limits_{K_\rho} w \, dx$. Она справедлива для любой функции $w(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(K_\rho)$.

Возьмем последовательность концентрических шаров $K_h = K_{R_h}$, $R_h = R\left(1 + \frac{1}{2^h}\right)$, $h = 0, 1, 2, \ldots$, $K_{2R} \subset \Omega$, и соответствующие им последовательности функций $v_h = |u|^{k^h}$, $h = 0, 1, 2, \ldots$, и срезающих функций $\zeta_h(x)$ таких, что $\zeta_h(x)$ равна 1 в K_{h+1}, нулю вне K_h и $\max\limits_{K_h} |\nabla\zeta_h| \leqslant 2^{h+1} R^{-1}$. Обозначим: $\fint\limits_{K_h} v_h^2 \, dx = \Phi_h$.

В силу определения v_h и неравенства (5.9) имеем

$$\Phi_{h+1}^{1/k} = \left(\fint\limits_{K_{h+1}} v_h^{2k} \, dx \right)^{1/k} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\fint\limits_{K_h} |v_h \zeta_h|^{2k} dx \right)^{1/k} \leqslant \beta R_h^2 \fint\limits_{K_h} |\nabla (v_h \zeta_h)|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\beta R_h^2 \fint\limits_{K_h} (|\nabla v_h|^2 \zeta_h^2 + v_h^2 |\nabla \zeta_h|^2) \, dx. \tag{5.10}$$

Правую часть (5.10) оценим с помощью (5.8), взятого для $1 + \varepsilon = k^h$ и $\rho = R_h$. Это даст

$$\Phi_{h+1}^{1/k} \leqslant 2\beta R_h^2 \left(\frac{4\mu}{\nu} + 1 \right) \fint\limits_{K_h} v_h^2 |\nabla\zeta_h|^2 \, dx \leqslant 2^{2h+5} \beta \left(\frac{4\mu}{\nu} + 1 \right) \fint\limits_{K_h} v_h^2 \, dx,$$

т. е. рекуррентное соотношение

$$\Phi_{h+1} \leqslant c \cdot 4^{hk} \Phi_h^k, \qquad h = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.11}$$

где $c=\left[2^5\beta\left(\frac{4\mu}{\nu}+1\right)\right]^k$. Отсюда следует (см. лемму 4.7 гл. II), что

$$\Phi_h \leqslant c^{\frac{k^h-1}{k-1}}(4^k)^{\frac{k^h-1}{(k-1)^2}-\frac{h}{k-1}}\Phi_0^{k^h},$$

а потому и

$$\operatorname*{vrai\,max}_{K_R}|u(x)|=\varlimsup_{h\to\infty}\left(\int\limits_{K_h}|u|^{2k^h}dx\right)^{1/2k^h}\leqslant(2^nc_1)^{(n-2)/4}\left(\int\limits_{K_{2R}}u^2\,dx\right)^{1/2}, \tag{5.12}$$

где $c_1=\max\{1;\ c\}$.

Итак, доказана

Теорема 5.1. *Для ограниченных обобщенных решений $u(x)$ уравнений* (5.1) *из $W_2^1(\Omega)$ верна оценка* (5.12), *где постоянная c_1 зависит лишь от ν, μ и n.*

Замечание 5.1. Предположение об априорной ограниченности u можно отбросить.

Замечание 5.2. Нетрудно убедиться, проследив данный только что вывод неравенства (5.12), что если $v(x)$ есть неотрицательное субрешение уравнения (5.1), то для него верна оценка

$$\operatorname*{vrai\,max}_{K_R} v(x)\leqslant(2^nc_1)^{(n-2)/4}\left(\int\limits_{K_{2R}}v^2\,dx\right)^{1/2} \tag{5.13}$$

с той же постоянной c_1, что и в (5.12).

Оценим теперь для решения $u(x)$ уравнения (5.1) постоянную Гёльдера. Возьмем три концентрических шара $K_R\subset K_{2R}\subset K_{3R}$, принадлежащих Ω. Пусть $\omega_2=\operatorname{vrai\,max} u(x)$, а $\omega_1=\operatorname{vrai\,min} u(x)$ на шаре K_{3R}. Всегда справедливо по крайней мере одно из неравенств:

$$\operatorname{mes}\left\{x\in K_{2R}:\ u(x)\leqslant\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right\}\geqslant\frac{1}{2}\operatorname{mes}K_{2R} \tag{5.14$_1$}$$

или

$$\operatorname{mes}\left\{x\in K_{2R}:\ \omega_1+\omega_2-u(x)\leqslant\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right\}\geqslant\frac{1}{2}\operatorname{mes}K_{2R}. \tag{5.14$_2$}$$

Если мы покажем, что из (5.14$_1$) и (5.3) для $u(x)$ следует

$$\max_{K_R}u(x)\leqslant\omega_2-\delta\omega,\quad \delta>0,\quad \omega=\omega_2-\omega_1, \tag{5.15}$$

то этот результат, примененный к функции $v(x)=\omega_1+\omega_2-u(x)$ в тех же шарах, гарантирует, что из (5.14$_2$) и (5.3) будет следовать $\max\limits_{K_R}[\omega_1+\omega_2-u(x)]\leqslant\omega_2-\delta\omega$, и тем самым будет доказано, что из (5.3) следует

$$\operatorname{osc}\{u;\ K_R\}\leqslant(1-\delta)\operatorname{osc}\{u;\ K_{3R}\}. \tag{5.16}$$

Это же в силу леммы 4.8 гл. II позволяет получить оценку $\langle u\rangle_{\Omega'}^{(\alpha)}$.

Итак, пусть для $u(x)$ справедливо (5.14_1). Рассмотрим функцию $w(x)=\varphi(u(x))=\ln\frac{\omega+2\delta_1}{\omega_2-u(x)+\delta_1}$, где δ_1 — положительное число, которое в дальнейшем будет устремлено к нулю. Она является положительным субрешением уравнения (5.1), ибо $\varphi''(u)=1/(\omega_2-u+\delta_1)^2>0$. Поэтому в силу замечания 5.2 к теореме 5.1 для нее справедливо неравенство (5.13):

$$\operatorname{vrai}\max_{K_R} w(x)\leqslant c_2\left(\int\limits_{K_{2R}} w^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{5.17}$$

Для оценки интеграла, стоящего справа, выпишем тождество (5.5), которому удовлетворяет $w(x)$. Оно имеет вид

$$\int\limits_{\Omega}\left(a_{ij}(x)\,w_{x_j}w_{x_i}\xi+a_{ij}w_{x_j}\xi_{x_i}\right)dx=0. \tag{5.18}$$

Возьмем здесь $\xi(x)=\zeta^2(|x-x^0|)$, где $\zeta(t)$ равна 1 при $t\leqslant 2R$, нулю при $t\geqslant 3R$ и $(3R-t)/R$ при $2R\leqslant t\leqslant 3R$, а x^0 — центр шара K_{3R}. Тогда из (5.18) в силу (5.2) легко выводится, что

$$\int\limits_{K_{2R}}|\nabla w|^2\,dx\leqslant\int\limits_{K_{3R}}|\nabla w|^2\zeta^2\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{4\mu}{\nu}\int\limits_{K_{3R}}|\nabla\zeta|^2\,dx\leqslant\frac{4\mu}{\nu}R^{-2}\operatorname{mes}K_{3R}. \tag{5.19}$$

С другой стороны, в тех точках K_{2R}, где $u(x)\leqslant\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, функция $w(x)\leqslant\ln\frac{\omega+2\delta_1}{\frac{\omega}{2}+\delta_1}=\ln 2$, а так как мера таких точек, по предположению (5.14_1), не меньше $\frac{1}{2}\operatorname{mes}K_{2R}$, то неравенство (3.5) гл. II дает

$$\int\limits_{A_{\ln 2,\,2R}}[w(x)-\ln 2]^2\,dx\leqslant\beta' R^2\int\limits_{A_{\ln 2,\,2R}}|\nabla w|^2\,dx, \tag{5.20}$$

где β' — некоторая постоянная, зависящая лишь от n. Здесь $A_{\ln 2,\,2R}$ есть множество точек x из K_{2R}, где $w(x)>\ln 2$. В силу (5.19) и (5.20)

$$\int\limits_{K_{2R}} w^2\,dx\leqslant c_3R^n, \tag{5.21}$$

а отсюда и из (5.17) получаем

$$\operatorname{vrai}\max_{K_R} w(x)\leqslant c_4, \tag{5.22}$$

причем постоянная c_4, равно как и все остальные постоянные, вошедшие в наши оценки, определяется лишь n, ν и μ и не зависит от R, $u(x)$ и $\delta_1 > 0$. Устремляя δ_1 к нулю, убедимся, что

$$\operatorname{vrai}\max_{K_R} \ln \frac{\omega}{\omega_2 - u(x)} \leqslant c_4,$$

т. е. (5.15) имеет место с $\delta = e^{-c_4}$.

Это заканчивает доказательство соотношения (5.16).

Метод Ю. Мозера отличается от метода, изложенного в § 1, доказательством ограниченности вспомогательной выпуклой функции $v = \varphi(u)$. Ю. Мозер получает для этого рекуррентное соотношение (5.11) для интегралов $\Phi_h = \int\limits_{K_h} |v|^{2k^h} dx$, из которого делает заключение о равномерной ограниченности $\Phi_h^{1/2k^h}$, $h = 1, 2, \ldots$, а следовательно, и $\operatorname{vrai}\max\limits_{K_R} |v|$. Мы же получаем для v неравенства (1.9), содержащие произвольный параметр k, и из них выводим ограниченность $\operatorname{vrai}\max\limits_{K_R} |v|$. Исследование уравнений общего вида (0.1) можно проводить двумя путями, используя основную идею одного или второго метода. Как это сделать на первом пути, показано в §§ 2—4. Второй путь можно взять совпадающим с первым во всех частях, кроме доказательства ограниченности v. Для нахождения же границ $|v|$ можно получить рекуррентное соотношение $\Phi_{h+1} \leqslant c^h (\Phi_h + 1)^k$, близкое к (5.11) (в нем c — постоянная, определяемая известными параметрами), из которого легко заключить об ограниченности $|v|$. Сделать это нетрудно, используя соотношения и неравенства, выведенные в §§ 2—4. Однако вся совокупность преобразований и оценок оказывается более громоздкой, чем на первом пути, подробно изложенном в §§ 2—4.

Развивая далее свой метод, Ю. Мозер доказал, что для положительных в Ω решений из $W_2^1(\Omega)$ уравнений (5.1), коэффициенты a_{ij} которых подчиняются лишь условиям (5.2), справедливо неравенство Гарнака

$$\min_{\Omega'} u(x) \geqslant c \max_{\Omega'} u(x), \tag{5.23}$$

где положительная постоянная c зависит только от n, ν, μ и расстояния Ω' до границы Ω (см. [40_2]). Основу доказательства неравенства Гарнака составляют два момента: во-первых, применение неравенства (5.12) или, что то же самое, неравенства (5.13) к неотрицательным субрешениям уравнения (5.1) и, во-вторых, использование следующей леммы Йона — Ниренберга [29], которую мы сформулируем в удобной для нас форме:

Лемма 5.1. *Пусть функция $v(x)$ суммируема в кубе K_{2R} с длиной ребра $2R$ и для любого куба $K_\rho \subset K_{2R}$ удовлетворяет неравенствам*

$$\int_{K_\rho} (v - v_\rho)\, dx \leqslant c \operatorname{mes} K_\rho \tag{5.24}$$

с некоторой постоянной c, где $v_\rho = \operatorname{mes}^{-1} K_\rho \int_{K_\rho} v(x)\, dx$. Тогда существуют положительные постоянные δ_0 и B, зависящие лишь от c и n, такие, что

$$\int_{K_{2R}} e^{\delta_0 v(x)}\, dx \int_{K_{2R}} e^{-\delta_0 v(x)}\, dx \leqslant B \operatorname{mes}^2 K_{2R}. \tag{5.25}$$

Нетрудно проверить, что если $u(x)$ — положительное решение (5.1), то $v = u^s$ будет субрешением уравнения (5.1) при любом $s > 1$ и $s < 0$. В частности, беря $v = u^{-\delta}$, где $\delta > 0$ сколь угодно мало, получим из (5.13)

$$\min_{K_R} u = (\max_{K_R} v)^{-1/\delta} \geqslant (2^n c_1)^{(2-n)/4\delta} \left(\fint_{K_{2R}} u^{-2\delta}\, dx \right)^{-1/2\delta}. \tag{5.26}$$

Докажем, что для достаточно малых δ

$$\left(\fint_{K_{2R}} u^{2\delta}\, dx \right)^{1/2\delta} \leqslant c_2 \left(\fint_{K_{2R}} u^{-2\delta}\, dx \right)^{-1/2\delta}. \tag{5.27}$$

Для этого положим в (5.5) $v = \varphi(u) = \ln u$, а в качестве ξ возьмем срезающую функцию для произвольного куба $K_{2\rho} \subset \Omega$, $\rho \leqslant 2R$, равную единице в концентрическом с $K_{2\rho}$ кубе $K_\rho \subset K_{2R}$, такую, что $|\nabla \xi| \leqslant \rho^{-1}$. Это даст оценку

$$\int_{K_\rho} |\nabla v|^2\, dx \leqslant \frac{4\mu}{\nu} \int_{K_{2\rho}} |\nabla \xi|^2\, dx \leqslant \frac{2^{n+2}\mu}{\nu} \rho^{-2} \operatorname{mes} K_\rho.$$

Отсюда и из неравенства Пуанкаре следует, что

$$\int_{K_\rho} |v - v_\rho|^2\, dx \leqslant c_3 \operatorname{mes} K_\rho.$$

Тем самым доказано, что функция $v = \ln u$ удовлетворяет условиям леммы 5.1, и потому при некотором $\delta_0 > 0$, определяемом постоянной c_3,

$$\int_{K_{2R}} e^{\delta_0 \ln u(x)}\, dx \int_{K_{2R}} e^{-\delta_0 \ln u(x)}\, dx \leqslant B \operatorname{mes}^2 K_{2R}.$$

Тем самым неравенство (5.27) установлено при $\delta=\delta_0/2$ в предположении, что концентрический с K_{2R} куб $K_{4R}\subset\Omega$. Применяя неравенство Гёльдера, нетрудно заключить, что тогда оно справедливо и при любом $\delta\leqslant\delta_0/2$.

Покажем, что для наибольшего δ, удовлетворяющего условиям: $\delta\leqslant\frac{\delta_0}{2}$ и $\lg_k\frac{1}{2\delta}=\left[\lg_k\frac{1}{2\delta}\right]+\frac{1}{2}$, справедливо неравенство

$$\max_{K_R} u(x)\leqslant c_4\left(\int_{K_{2R}} u^{2\delta}(x)\,dx\right)^{1/2\delta}, \tag{5.28}$$

в котором c_4 зависит лишь от ν, μ и n. Для этого заметим, что при выводе оценки (5.12) для u фактически использовалась лишь следующая информация относительно v_h: сама функция u и все ее степени вида $v_h=u^{k^h}$, $k=n/(n-2)$, $h=0, 1, \ldots$, будучи субрешениями уравнения (5.1), подчиняются неравенствам (5.7). Рассмотрим функцию $v_h=(u^\delta)^{k^h}$. Для нее соотношение (5.5) при $\xi=v_h\zeta^2$, где ζ — срезающая для $\forall K_\rho\subset K_{2R}$ функция, принимает вид

$$\int_{K_\rho}\left(\frac{2\delta k^h-1}{\delta k^h}a_{ij}v_{hx_i}v_{hx_j}\zeta^2+a_{ij}v_{hx_j}v_h 2\zeta\zeta_{x_i}\right)dx=0.$$

Если $2\delta k^h-1\neq 0$, то отсюда и из (5.2) следуют неравенства, аналогичные (5.7):

$$\int_{K_\rho}|\nabla v_h|^2\zeta^2\,dx\leqslant\frac{4\mu}{\nu c_5(\delta)}\int_{K_\rho}v_h^2|\nabla\zeta|^2\,dx,$$

где $c_5(\delta)=4\min\limits_{h=0,1,\ldots}[1-(2\delta k^h)^{-1}]^2$. Ясно, что при δ, указанном выше, $c_5(\delta)=4\min\limits_{h=0,1,\ldots}\left(1-k^{-h+\frac{1}{2}+\left[\lg_k\frac{1}{2\delta}\right]}\right)^2>0$. Ввиду сказанного выше при таком δ будет справедлива оценка вида (5.12): $\max\limits_{K_R}u^\delta\leqslant c_6\left(\int\limits_{K_{2R}}u^{2\delta}\,dx\right)^{1/2}$ с постоянной c_6, зависящей лишь от ν, μ и n. Тем самым неравенство (5.28) установлено, и постоянная c_4 в нем равна $c_6^{1/\delta}$. Из него, (5.26) и (5.27) следует справедливость неравенства Гарнака (5.23) с постоянной, зависящей лишь от n, ν и μ в любом кубе K_R, принадлежащем области Ω вместе с концентрическим ему кубом K_{4R}. Но тогда, как нетрудно убедиться, неравенство (5.23) будет верно для произвольной области $\overline{\Omega}'\subset\Omega$, причем постоянная c в нем будет определяться величинами n, ν, μ из (5.2) и расстоянием Ω' до границы Ω.

Из неравенства Гарнака легко вывести оценку постоянной Гёльдера для решений $u(x)$ уравнения (5.1). В самом деле, для произвольного куба $K_{4R} \subset \Omega$ рассмотрим положительное решение $v(x) = u(x) - \omega_1 + \varepsilon$ уравнения (5.1), где $\omega_1 = \min\limits_{K_{4R}} u$, $\varepsilon > 0$. В силу (5.23) для концентрического K_{4R} куба K_R имеем неравенства

$$\operatorname{osc}\{v;\ K_R\} \leqslant (1-c)\max_{K_R} v \leqslant (1-c)\max_{K_{4R}} v = \\ = (1-c)(\operatorname{osc}\{v;\ K_{4R}\} + \varepsilon)$$

с постоянной $c \in (0, 1)$, зависящей лишь от n, ν и μ. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует оценка $\operatorname{osc}\{u;\ K_R\} \leqslant \leqslant (1-c)\operatorname{osc}\{u;\ K_{4R}\}$, которая в силу леммы 4.8 гл. II дает оценку $\langle u\rangle_{\Omega'}^{(\alpha)}$ с $\alpha = -\ln_4(1-c)$.

§ 6. Оценка Ниренберга

Изложим здесь простой и красивый способ оценки постоянной Гёльдера первых производных от решений квазилинейных эллиптических уравнений

$$L(u) \equiv \sum_{i,\ j=1}^{2} a_{ij}(x,\ u,\ u_x)\, u_{x_i x_j} + a(x,\ u,\ u_x) = 0, \tag{6.1}$$

данный Л. Ниренбергом в работе [44₁]. Он сугубо двумерный и не переносится на случай уравнений с тремя и бо́льшим числом независимых переменных. Пусть на исследуемом решении $u(x)$, которое ради простоты предположим дважды непрерывно дифференцируемым,

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x,\ u(x),\ u_x(x))\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \qquad \nu > 0, \tag{6.2}$$

$$|\,a(x,\ u(x),\ u_x(x))\,| \leqslant \mu. \tag{6.3}$$

Функции $a_{ij}(x,\ u(x),\ u_x(x))$ и $a(x,\ u(x),\ u_x(x))$ переменной x будем записывать просто a_{ij} и a. Возьмем выражение $I = a_{ij}u_{x_i x_j}\left(\dfrac{u_{x_1x_1}}{a_{22}} + \dfrac{u_{x_2x_2}}{a_{11}}\right)$ и представим его в виде

$$I = \left(\frac{a_{11}}{a_{22}} u^2_{x_1x_1} + \frac{2a_{12}}{a_{22}} u_{x_1x_1}u_{x_1x_2} + u^2_{x_1x_2}\right) + \\ + \left(u^2_{x_1x_2} + 2\frac{a_{12}}{a_{11}} u_{x_1x_2}u_{x_2x_2} + \frac{a_{22}}{a_{11}} u^2_{x_2x_2}\right) + 2\left(u_{x_1x_1}u^2_{x_2x_2} - u^2_{x_1x_2}\right).$$

В силу (6.1) и (6.2) и этого представления I получим

$$\frac{\nu}{\mu}\left(u^2_{x_1x_1} + 2u^2_{x_1x_2} + u^2_{x_2x_2}\right) \leqslant 2\left(u^2_{x_1x_2} - u_{x_1x_1}u_{x_2x_2}\right) - a\left(\frac{u_{x_1x_1}}{a_{22}} + \frac{u_{x_2x_2}}{a_{11}}\right). \tag{6.4}$$

Возьмем круг $K_\rho \subset \Omega$ и будем считать, что начало координат находится в его центре, так что $K_\rho = \{r \equiv |x| < \rho\}$. Пусть $\zeta(x) = \zeta(r)$ есть какая-нибудь срезающая функция для круга K_ρ с $|\nabla\zeta| \leqslant c\rho^{-1}$. Умножим обе части неравенства (6.4) на $r^{-\alpha}\zeta^2(r)$, затем проинтегрируем по K_ρ и правую часть оценим сверху следующим образом:

$$\frac{\nu}{\mu} I_1 \equiv \frac{\nu}{\mu} \int\limits_{K_\rho} r^{-\alpha}\zeta^2(r)\, u_{xx}^2\, dx \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int\limits_{K_\rho} r^{-\alpha}\zeta^2 \left(u_{x_1x_2}^2 - u_{x_1x_1} u_{x_2x_2}\right) dx + \frac{\nu}{2\mu} I_1 + \frac{\mu^3}{\nu^3} \int\limits_{K_\rho} r^{-\alpha}\zeta^2\, dx. \tag{6.5}$$

Во втором члене интеграла

$$I_2 = \int\limits_{K_\rho} r^{-\alpha}\zeta^2 \left(u_{x_1x_2}^2 - u_{x_1x_1} u_{x_2x_2}\right) dx$$

проведем интегрирование по частям один раз по x_1, а другой — по x_2. После приведения подобных членов получим

$$I_2 = \int\limits_{K_\rho} \left[(r^{-\alpha}\zeta^2)_{x_1} u_{x_1} u_{x_2x_2} - (r^{-\alpha}\zeta^2)_{x_2} u_{x_1x_2} u_{x_1}\right] dx =$$
$$= \int\limits_{K_\rho} (-\alpha r^{-\alpha-1}\zeta^2 + 2r^{-\alpha}\zeta\zeta') \frac{1}{r} \frac{\partial u_{x_2}}{\partial\theta} u_{x_1}\, dx, \tag{6.6}$$

где $\frac{\partial u_{x_2}}{\partial\theta} = r\left[\frac{\partial r}{\partial x_1} u_{x_2x_2} - \frac{\partial r}{\partial x_2} u_{x_2x_1}\right]$ есть частное дифференцирование по углу θ в полярной системе координат r, θ. Второй член интеграла (6.6) оценим так:

$$|I_3| = \left| \int\limits_{K_\rho} 2r^{-\alpha}\zeta\zeta' \left[\frac{x_1}{r} u_{x_2x_2} - \frac{x_2}{r} u_{x_1x_2}\right] u_{x_1}\, dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{K_\rho} r^{-\alpha} \left[\varepsilon\zeta^2 u_{xx}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \zeta'^2 u_{x_1}^2\right] dx,$$

где ε — любое, большее нуля, а первый член (6.6) предварительно представим в виде

$$I_4 = -\alpha \int\limits_0^\rho \int\limits_0^{2\pi} r^{-\alpha-1}\zeta^2(r) \frac{1}{r} \frac{\partial u_{x_2}}{\partial\theta} u_{x_1} r\, dr\, d\theta =$$
$$= -\alpha \int\limits_0^\rho \int\limits_0^{2\pi} r^{-\alpha-1}\zeta^2(r) \frac{1}{r} \frac{\partial u_{x_2}}{\partial\theta} [u_{x_1}(r, \theta) - u_{x_1}(r, 0)]\, r\, dr\, d\theta,$$

что возможно, ибо $\int_0^{2\pi} \frac{\partial u_{x_2}}{\partial \theta}\, d\theta = 0$, и используем оценку

$$\int_0^{2\pi} [u_{x_1}(r, \theta) - u_{x_1}(r, 0)]^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\theta} \frac{\partial u_{x_1}(r, \varphi)}{\partial \varphi}\, d\varphi \right)^2 d\theta \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u_{x_1}(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 d\theta \leqslant (2\pi)^2 r^2 \int_0^{2\pi} |\nabla u_{x_1}|^2\, d\theta.$$

Это даст

$$|I_4| \leqslant \frac{\alpha}{2} \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} r^{-\alpha} \zeta^2 \{ r^{-2} [u_{x_1}(r, \theta) - u_{x_1}(r, 0)]^2 + |\nabla u_{x_2}|^2 \}\, r\, dr\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{2} \int_0^{\rho} r^{-\alpha} \zeta^2 \left\{ (2\pi)^2 \int_0^{2\pi} |\nabla u_{x_1}|^2\, d\theta + \int_0^{2\pi} |\nabla u_{x_2}|^2\, d\theta \right\} r\, dr \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi^2 \alpha \int_{K_\rho} r^{-\alpha} \zeta^2 u_{xx}^2\, dx.$$

Подставляя полученные для $|I_3|$ и $|I_4|$ оценки в (6.6), получим

$$|I_2| \leqslant \int_{K_\rho} \left[(\varepsilon + 2\pi^2 \alpha) r^{-\alpha} \zeta^2 u_{xx}^2 + \varepsilon^{-1} r^{-\alpha} \zeta'^2 u_{x_1}^2 \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant (\varepsilon + 2\pi^2 \alpha) I_1 + \varepsilon^{-1}\, 2\pi\, \frac{c^2 M_1^2}{2 - \alpha}\, \rho^{-\alpha}, \qquad (6.7)$$

где $M_1 = \max\limits_{K_\rho} |\nabla u|$. Эту оценку, в свою очередь, подставим в (6.5) и выберем ε и α столь малыми, чтобы

$$\frac{\nu}{2\mu} - 2(\varepsilon + 2\pi^2 \alpha) > 0. \qquad (6.8)$$

При таких ε и α будем иметь

$$I_1 \leqslant \left(\frac{4\pi c^2 M_1^2 \rho^{-\alpha}}{(2 - \alpha)\varepsilon} + \frac{\mu^3}{\nu^3} \frac{2\pi}{2 - \alpha} \rho^{2-\alpha} \right) \left[\frac{\nu}{2\mu} - 2(\varepsilon + 2\pi^2 \alpha) \right]^{-1} \equiv c(\rho),$$

т. е. для любого $K_{\rho/2}$ и концентрических ему кругов K_ρ, K_d

$$\int_{K_{\rho/2}} r^{-\alpha} u_{xx}^2\, dx \leqslant \int_{K_d} r^{-\alpha} \zeta^2 u_{xx}^2\, dx \leqslant c(d) \qquad (6.9)$$

при $\rho \leqslant d$. Это же неравенство (см. замечание к леммам 4.1, 4.2 гл. II) дает возможность оценить константы Гёльдера $\langle u_{x_i}\rangle_{\Omega'}^{(\alpha/2)}$, $i=1, 2$, для любой $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ (в (6.9) $\zeta=1$ в $K_{\rho/2}$).

Для кругов K_ρ, пересекающих границу, общая схема доказательства та же: оценивается интеграл I_1 по $K_\rho \cap \Omega$. При этом предполагается, что известны верхние границы модуля первой и второй производных u по дуге s границы S.

При интегрировании по частям в I_2 выделяются члены по пересечению круга K_ρ с границей S. Для их оценки удобнее с самого начала распрямить кусок границы, в окрестности которого исследуется u, и все рассуждения проводить в новой системе координат. Пусть такое преобразование уже сделано и интересующий нас кусок S_ρ границы S лежит на оси x_2. После интегрирования по частям выделится интеграл

$$I_5 = \int_{S_\rho} r^{-\alpha}\zeta^2 u_{x_1} u_{x_2x_2}\, dx_2.$$

Но он не превосходит известной нам величины

$$M_1 \cdot \max_{S_\rho} |u_{x_2x_2}| \frac{2\rho^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Встретится еще одно отличие при оценке интеграла I_4. Оно вызвано тем, что на этот раз интеграл $\int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \frac{\partial u_{x_2}(r, \theta)}{\partial \theta} d\theta$ будет браться, вообще говоря, по разомкнутому контуру и потому не обязан обращаться в нуль. Однако концы этого контура принадлежат S_ρ и удалены друг от друга не больше чем на $2r$, поэтому

$$\left| \int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \frac{\partial u_{x_2}(r, \theta)}{\partial \theta} d\theta \right| \leqslant |u_{x_2}(r, \theta_1(r)) - u_{x_2}(r, \theta_2(r))| \leqslant 2r \max_{S_\rho} |u_{x_2x_2}|.$$

Этой информации достаточно, чтобы вывести по вышеуказанному плану желаемую оценку для I_1.

Итак, получена оценка для $\langle u_{x_i}\rangle_{\Omega'}^{(\alpha/2)}$, $\forall\, \overline{\Omega'} \subset \Omega$, $i=1, 2$, через $\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$, ν и μ из (6.2), (6.3) и расстояние от Ω' до S и оценка $\langle u_{x_i}\rangle_{\Omega}^{(\alpha/2)}$ через $\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$, ν и μ из (6.2), (6.3) и норму в C^2 граничных значений u в предположении, что $S \subset C^2$.

§ 7. Способ Морри оценки постоянной Гёльдера для решений двумерных вариационных задач

Пусть интегрант функционала

$$I(u)=\int_{\Omega} F(x,\ u,\ u_x)\,dx \tag{7.1}$$

удовлетворяет при $x\in\overline{\Omega}$ и произвольных u и p неравенствам

$$\nu|\,p\,|^2\leqslant F(x,\ u,\ p)\leqslant\mu\,|\,p\,|^2, \tag{7.2}$$

где ν и μ — положительные числа. Пусть $u(x)$ есть обобщенное решение из $W_2^1(\Omega)$ вариационной задачи на минимум для $I(u)$ при каком-нибудь граничном условии, так что $u(x)$ дает наименьшее значение функционалу (7.1) среди всех функций $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих этому граничному условию (которое, в частности, может и отсутствовать). Докажем, что при этом $u(x)$ будет непрерывна по Гёльдеру. Ограничимся внутренними оценками. Возьмем произвольный круг $K_R\subset\Omega$ и концентрические ему круги K_ρ с $\rho\leqslant R$. Функция $u^\rho(x)$, равная вне K_ρ функции $u(x)$, а в круге K_ρ совпадающая с гармонической функцией $v^\rho(x)$, принимающей на границе K_ρ те же значения, что и $u(x)$, будет допустимой функцией сравнения (это есть следствие известных предложений о свойствах элементов пространства $W_2^1(\Omega)$). Поэтому

$$I(u)\leqslant I(u^\rho). \tag{7.3}$$

Отсюда, из (7.2) и определения функции u^ρ следует, что

$$\nu\int_{K_\rho}|\,\nabla u\,|^2\,dx\leqslant\int_{K_\rho}F(x,\ u,\ u_x)\,dx\leqslant\int_{K_\rho}F\left(x,\ v^\rho,\ v_x^\rho\right)dx\leqslant\mu\int_{K_\rho}|\,\nabla v^\rho\,|^2\,dx,$$

или, короче,

$$\int_{K_\rho}|\,\nabla u\,|^2\,dx\leqslant\beta\int_{K_\rho}|\,\nabla v^\rho\,|^2\,dx,\qquad 0<\rho\leqslant R, \tag{7.4}$$

где $\beta=\mu/\nu$. Введем в K_R полярные координаты r, θ с началом координат в центре K_R. Разложим u и v^ρ в ряды Фурье по θ:

$$u(r,\ \theta)=\frac{a_0(r)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k(r)\cos k\theta+b_k(r)\sin k\theta\right],\qquad r\leqslant R,$$

$$v^\rho(r,\ \theta)=\frac{a_0(\rho)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^k\left[a_k(\rho)\cos k\theta+b_k(\rho)\sin k\theta\right],\qquad r\leqslant\rho\leqslant R.$$

Легко видеть, что

$$\psi(\rho) \equiv \int_{K_\rho} |\nabla u|^2 dx = \int_{K_\rho} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\right] r\,dr\,d\theta =$$

$$= \pi \int_0^\rho \left\{ \frac{[a_0'(r)]^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k'(r))^2 + (b_k'(r))^2] + \right.$$

$$\left. + r^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 [a_k^2(r) + b_k^2(r)] \right\} r\,dr,$$

$$\int_{K_\rho} |\nabla v^\rho|^2 dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k [a_k^2(\rho) + b_k^2(\rho)].$$

Из этих равенств и (7.4) следует

$$\psi(\rho) \leqslant \beta\pi \sum_{k=1}^{\infty} k [a_k^2(\rho) + b_k^2(\rho)] \leqslant \beta\rho\psi'(\rho), \qquad \rho \leqslant R. \tag{7.5}$$

Проинтегрируем это неравенство, точнее, представим его в виде $\frac{d}{d\rho}(\rho^{-1/\beta}\psi(\rho)) \geqslant 0$ и проинтегрируем в пределах от r до R: $R^{-1/\beta}\psi(R) - r^{-1/\beta}\psi(r) \geqslant 0$. Это неравенство дает желаемую оценку

$$\psi(r) \leqslant \left(\frac{r}{R}\right)^{1/\beta} \psi(R), \tag{7.6}$$

из которой в силу леммы 4.1 гл. II следует неравенство $\operatorname{osc}\{u; K_{\rho/2}\} \leqslant c\rho^{1/2\beta}$ и возможность оценить $|u|_{\Omega'}^{(\alpha)}$, $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, с $\alpha = 1/2\beta$ через $\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}$, β и расстояние от Ω' до границы S.

Изложенный здесь способ оценки $|u|_{\Omega'}^{(\alpha)}$ принадлежит Ч. Морри [39_2]. Он прост и красив, но применим лишь к случаю $m = n = 2$.

Глава X

ДРУГИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Формулировка задач и общая схема их решения

В предыдущих главах в основном рассматривалась первая краевая задача. Другим краевым задачам посвящены лишь §§ 3 и 6 гл. III для линейных уравнений. Однако бо́льшая часть данных выше различных априорных оценок решений линейных и квазилинейных уравнений не зависит от граничных условий (это так называемые внутренние оценки) и потому относится в равной мере ко всем краевым задачам. Ввиду этого для исследования других краевых задач достаточно изучить поведение их возможных решений лишь в окрестности границы. В линейном случае и даже в нелинейном случае, когда производные от решения u входят в граничное условие линейно, все исследование можно провести в основном по той же схеме, что и для первой краевой задачи. Как это можно сделать, читатель увидит ниже. Сложнее обстоит дело со случаем общего нелинейного краевого условия. Для его изучения пришлось прибегнуть, кроме теоремы Лерэ — Шаудера, к другой топологической теореме о существовании решений абстрактных уравнений определенного класса.

Понимая, что уже пора заканчивать данную книгу, мы ограничиваемся изложением лишь наиболее трудного и специфического случая, когда краевое условие зависит от u_x нелинейно. Для случая же линейной зависимости граничного условия от u_x даем необходимые указания, которые позволят читателю самому провести все рассуждения, используя априорные оценки, приводимые ниже.

Начнем с предварительного анализа интересующих нас краевых задач и с описания основного плана их решения. В ограниченной области Ω рассмотрим задачи следующего вида:

$$L(u) \equiv a_{ij}(x, u, u_x) u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = 0, \tag{1.1}$$

$$L^{(S)}(u) \equiv \left[b(x, u, u_x) + b_i(x, u) u_{x_i} + b_0(x, u)\right]\Big|_S = 0, \tag{1.2}$$

в предположении, что уравнение (1.1) равномерно эллиптично и при произвольно фиксированных u и p в каждой точке $x \in S$ вектор $\mathbf{l}(x, u, p)$ с составляющими $b_{p_i}(x, u, p) + b_i(x, u)$ не лежит в касательной к S плоскости. Точнее, будем считать, что

$$\left[b_{p_i}(x, u, p) + b_i(x, u)\right] \cos(\mathbf{n}, x_i) \geqslant \nu_1(|u|, |p|), \qquad \nu_1 > 0. \tag{1.3}$$

Так же, как и в случае первой краевой задачи, вопрос о разрешимости задач (1.1), (1.2) постараемся свести к вопросу о существовании неподвижных точек у некоторых преобразований, обладающих рядом хороших свойств. Для этого запишем граничное условие (1.2) в виде

$$\left\{\left[\int_0^1 \left.\frac{\partial b(x, u, p)}{\partial p_i}\right|_{p=tu_x} dt + b_i(x, u)\right] u_{x_i} + u\right\}\Bigg|_S =$$
$$= \{-b(x, u, 0) - b_0(x, u) + u\}|_S \tag{1.4}$$

и рассмотрим следующие задачи:

$$\hat{a}_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \hat{a}(x) = 0, \quad \hat{b}_i(x) u_{x_i} + u|_S = \hat{\varphi}(x)|_S, \tag{1.5}$$

где

$$\hat{a}_{ij}(x) = a_{ij}(x, v(x), v_x(x)), \quad \hat{a}(x) = a(x, v(x), v_x(x)),$$
$$\hat{b}_i(x) = \int_0^1 \left.\frac{\partial b(x, v(x), p)}{\partial p_i}\right|_{p=tv_x(x)} dt + b_i(x, v(x)),$$
$$\hat{\varphi}(x) = -b(x, v(x), 0) - b_0(x, v(x)) + v(x),$$

а $v(x)$ — произвольная функция из $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$. Задача (1.5) линейна в отношении неизвестной функции $u(x)$. Известно, что для нее справедлива теорема единственности и что $u(x)$ однозначно определяется по $v(x)$. Обозначим это, вообще говоря, нелинейное соответствие (преобразование) так:

$$u = \Phi(v). \tag{1.6}$$

Неподвижные точки этого преобразования будут решениями задачи (1.1), (1.2). Посмотрим, какими свойствами обладает преобразование Φ. Если $v(x) \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, а все известные функции $a_{ij}(x, u, p)$, $a(x, u, p)$, $b(x, u, p)$, $b_i(x, u)$, $b_0(x, u)$ и $\varphi(x)$ достаточно гладкие, то функции $\hat{a}_{ij}(x)$ и $\hat{a}(x)$ принадлежат $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ и, следовательно, есть основания ожидать, что задача (1.5) будет иметь решение $u(x)$ из $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Однако функции $\hat{b}_i(x)$ в общем случае принадлежат лишь C^{α} (ибо они образованы из v_{x_i}), и потому относительно решения задачи (1.5) нельзя утверждать, что оно будет элементом пространства $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ или хотя бы $C^{1+\alpha+\varepsilon}(\overline{\Omega})$, $\varepsilon > 0$ (см. § 3 гл. III). Тем самым нельзя утверждать, что преобразование Φ вполне непрерывно (существенно улучшает $v(x)$), и, следовательно, нельзя применить к нему, например, критерий Лерэ — Шаудера о существовании неподвижных точек. Есть один случай, когда это сделать возможно, — это случай $b(x, u, u_x) \equiv 0$. Для него $\hat{b}_i(x) = b_i(x, v(x))$ и $\hat{\varphi}(x)$ являются элементами $C^{1+\alpha}$ и к задаче (1.5) применимы теоремы из § 3 гл. III, гарантирующие принадлежность решения $u(x)$ к $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Для этого случая все рассуждения можно строить так же, как и для первой краевой задачи. Основной аналитической частью является получение априорных оценок решений этой задачи в норме $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$. Такие оценки будут установлены сразу для решений общей задачи (1.1), (1.2).

Для исследования общей задачи (1.1), (1.2) мы будем использовать следующую теорему о разрешимости абстрактных уравнений в банаховых пространствах (см. [37_1, § 41]):

Теорема 1.1. *Пусть X и Y — два банаховых пространства, I — отрезок $[0, 1]$, а x, y и τ — элементы X, Y и I соответственно. Предположим, что Φ — непрерывное отображение прямого произведения $X \times I$ в Y, имеющее производную $\Phi_x(x, \tau)$, непрерывную по (x, τ) в операторной топологии $L\{X \to Y\}$, и удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *Для любого решения x уравнения*

$$\Phi(x, \tau) = 0, \tag{1.7}$$

отвечающего произвольному τ из I, оператор $\Phi_x(x, \tau)$ имеет ограниченный обратный $\Phi_x^{-1}(x, \tau)$: $Y \to X$.

2) *Множество всех решений уравнения* (1.7), *отвечающих всем $\tau \in I$, компактно в X.*

3) *При некотором фиксированном τ из I существует единственное решение x уравнения* (1.7).

Тогда при каждом $\tau \in I$ уравнение (1.7) *однозначно разрешимо в X.*

Для доказательства теоремы убедимся, что множество $I_0 \subset I$, состоящее из точек τ, для которых уравнение (1.7) однозначно разрешимо, открыто и замкнуто, — тогда в силу условия 3) I_0 совпадает со всем промежутком I. Пусть $\tau_n \in I_0$ и τ_n стремятся к τ_0 при $n \to \infty$, а x_n — решения уравнения $\Phi(x_n, \tau_n) = 0$. Условие 2) позволяет выделить из $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность: $x_{n_k} \to x$ при $n_k \to \infty$. Переходя к пределу в равенстве $\Phi(x_{n_k}, \tau_{n_k}) = 0$, получим $\Phi(x, \tau_0) = 0$, т. е. уравнение (1.7) разрешимо и при $\tau = \tau_0$. Легко видеть, что других решений у него нет. В самом деле, если бы для некоторого $x' \neq x$ выполнялось равенство $\Phi(x', \tau_0) = 0$, то в силу условия 1) по теореме о неявной функции (см. [13]) существовали бы сколь угодно близкие к x' решения уравнения (1.7) при всех τ, достаточно близких к τ_0, а это невозможно, ибо при $\tau=\tau_{n_k}$ решение x_{n_k} единственно и $\tau_{n_k}\to\tau_0$, $x_{n_k}\to x$ при $n_k\to\infty$. Итак, доказано, что $\tau_0\in I_0$, т. е. множество I_0 замкнуто.

Проверим теперь, что оно открыто. Пусть $\tau_0\in I_0$ и $\Phi(x_0,\tau_0)=0$. Прежде всего заметим, что по теореме о неявной функции уравнение (1.7) разрешимо при τ, близких к τ_0. Надо доказать, что решение уравнения (1.7) единственно при всяком τ из некоторой окрестности τ_0. Предположим противное, что существует последовательность $\tau_n\to\tau_0$ при $n\to\infty$ такая, что для каждого τ_n есть по крайней мере два различных решения x'_n и x''_n уравнения (1.7). Без ограничения общности можно считать, что каждая из этих последовательностей имеет предел. Этот предел равен x_0 — единственному решению уравнения (1.7) при $\tau=\tau_0$. Обозначим через A_n линейный оператор $A_n=\int\limits_0^1[\Phi_x(x_0,\tau_0)-$ $-\Phi_x(tx''_n+(1-t)x'_n,\tau_n)]\,dt$, действующий из X в Y. Легко видеть, что норма A_n стремится к нулю при $n\to\infty$ и

$$A_n(x''_n-x'_n)=\Phi_x(x_0,\tau_0)(x''_n-x'_n)-\Phi(x''_n,\tau_n)+\Phi(x'_n,\tau_n)=$$
$$=\Phi_x(x_0,\tau_0)(x''_n-x'_n).$$

Отсюда в силу условия 1) вытекает равенство

$$\Phi_x^{-1}(x_0,\tau_0)A_n(x''_n-x'_n)=x''_n-x'_n,$$

которое при достаточно больших n невозможно, ибо $\|\Phi_x^{-1}(x_0,\tau_0)A_n\|\to0$ при $n\to\infty$. Полученное противоречие показывает, что существует окрестность τ_0, в которой уравнение (1.7) однозначно разрешимо, т. е. множество I_0 открыто. Теорема 1.1 доказана.

Близкое утверждение в книге К. Миранда [37_1] использовалось для доказательства теоремы существования и единственности задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений. (Подчеркнем, что, в отличие от принципа Лерэ — Шаудера, теорема 1.1 неприменима к задачам, в которых имеет место неединственность решения.) К исследованию краевых задач других видов оно применялось Р. Фиоренца [17].

Чтобы свести решение задачи (1.1), (1.2) к теореме 1.1, введем два банаховых пространства: в качестве X возьмем $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ (его элементы будем здесь обозначать через $u(x)$), а в качестве Y — пространство пар элементов $y=\{f,\varphi\}$, где $f(x)\in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\varphi(s)\in$ $\in C^{1+\alpha}(S)$, с нормой $\|y\|_Y=|f|_\Omega^{(\alpha)}+|\varphi|_S^{(1+\alpha)}$.

Исследуемую задачу (1.1), (1.2) включим в семейство задач, зависящих от параметра $\tau \in [0, 1]$. Для простоты ограничимся случаем линейной зависимости от τ:

$$\left.\begin{aligned} L_\tau(u) &\equiv \tau L(u) + (1-\tau) L_0(u) = 0, && x \in \Omega, \\ L_\tau^{(S)}(u) &\equiv \tau L^{(S)}(u) + (1-\tau) L_0^{(S)}(u) = 0, && x \in S, \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

где L_0 и $L_0^{(S)}$ — дифференциальные операторы такого же вида, как L и $L^{(S)}$ соответственно, причем при $\tau = 0$ задача (1.8) однозначно разрешима в $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Преобразование Φ определим следующим образом: $\forall (u, \tau) \in \in X \times I$ сопоставим элемент $y = \{L_\tau(u),\ L_\tau^{(S)}(u)\} \in Y$ и потребуем такую гладкость известных функций, чтобы Φ было непрерывно дифференцируемо по u. Условие 3) теоремы 1.1 выполнено. Чтобы удовлетворить условию 1), предположим, что на любом решении $u(x, \tau) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ задачи (1.8) соответствующая задача в вариациях неограниченно разрешима, т. е. при $\forall f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^{1+\alpha}(S)$ существует единственное решение $w(x)$ из $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ задачи

$$\left.\begin{aligned} & a_{ij}^\tau(x, u, u_x) w_{x_i x_j} + \left(\frac{\partial a_{ij}^\tau}{\partial u_{x_k}} u_{x_i x_j} + \frac{\partial a^\tau}{\partial u_{x_k}}\right) w_{x_k} + \\ & \qquad + \left(\frac{\partial a_{ij}^\tau}{\partial u} u_{x_i x_j} + \frac{\partial a^\tau}{\partial u}\right) w = f(x), \qquad x \in \Omega, \\ & \left(\frac{\partial b^\tau(x, u, u_x)}{\partial u_{x_i}} + b_i^\tau(x, u)\right) w_{x_i} + \\ & \qquad + \left(\frac{\partial b^\tau}{\partial u} + \frac{\partial b_i^\tau}{\partial u} u_{x_i} + \frac{\partial b_0^\tau}{\partial u}\right) w = \varphi(x), \qquad x \in S, \end{aligned}\right\} \qquad (1.9)$$

где

$$a_{ij}^\tau = \tau a_{ij} + (1-\tau) a_{ij}^0, \quad a^\tau = \tau a + (1-\tau) a^0, \quad b_i^\tau = \tau b_i + (1-\tau) b_i^0, \qquad (1.10)$$
$$i = 0, \ldots, n, \quad b^\tau = \tau b + (1+\tau) b^0.$$

Левые части в (1.9) определяют значение оператора $\Phi_u(u, \tau)$ на элементе w. (1.9) представляет собой линейную относительно w задачу вида (3.8) гл. III. Если коэффициенты в граничном условии (1.9) и их частные производные по x, u, p и коэффициенты уравнения (1.9) как функции (x, u, p) непрерывны по Гёльдеру с показателем α по переменным x и с показателем $\alpha' > \alpha$ по переменным u, p, то оператор $\Phi_u(u, \tau)$ непрерывен относительно (u, τ). В силу теоремы 3.2 гл. III оператор $\Phi_u(u, \tau)$ при $u = u(x, \tau)$ имеет ограниченный обратный в том и только том случае, если однородная задача (1.9) имеет лишь тривиальное решение $w=0$.

Итак, исследование разрешимости задачи (1.1), (1.2) сведено к выяснению условий, при которых выполняется предположение 2) теоремы 1.1, т. е. множество всех решений $u(x, \tau)$ из $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ задачи (1.8), отвечающих всем τ из $[0, 1]$, компактно в пространстве $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Это предположение можно ослабить. Именно, следуя К. Миранда [37_1] и используя установленные Р. Фиоренца [17] оценки для решений линейных задач (см. § 3 гл. III), можно заменить требование компактности решений в $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ компактностью в $C^1(\overline{\Omega})$. Сформулируем это в виде теоремы.

Теорема 1.2. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

a) *На множествах* $\mathfrak{M}_{MM_1}=\{x, u, p\colon x\in\overline{\Omega}, |u|\leqslant M, |p|\leqslant M_1\}$ *с произвольными* $M>0$ *и* $M_1>0$ *функции* $a_{ij}(x, u, p)$ *и* $a(x, u, p)$ *и их частные производные первого порядка по* u *и* p_k, *функции* $b(x, u, p)$, $\dfrac{\partial b}{\partial u}$, $\dfrac{\partial b}{\partial p_i}$ *и их частные производные первого порядка по* x_k, u, p_k, *а также функции* $b_i(x, u)$ *и* $\dfrac{\partial b_i(x, u)}{\partial u}$, $i=0, \ldots, n$, *и их частные производные по* x_k, *и удовлетворяют условию Гёльдера по* x *с показателем* α *и условию Гёльдера по* (u, p) *с показателем* $\alpha'>\alpha$.

b) S *есть поверхность класса* $C^{2+\alpha}$.

c) *Уравнение* (1.1) *эллиптично, т. е. на* $\forall u\in\mathfrak{M}_{MM_1}$

$$a_{ij}(x, u, p)\xi_i\xi_j\geqslant\nu(M, M_1)\xi^2, \qquad \nu>0.$$

d) *Функции* $b(x, u, p)$ *и* $b_i(x, u)$ *удовлетворяют условию* (1.3)

Пусть, кроме того, имеются дифференциальные операторы L_0 *и* $L_0^{(S)}$ *такого же вида, как* L *и* $L^{(S)}$ *в* (1.1), (1.2), *для которых соответствующие им функции* a_{ij}^0, a^0, b^0, b_i^0, $i=0, \ldots, n$, *подчиняются условиям* a), c), d), *причем при* $\tau=0$ *задача* (1.8) *имеет единственное решение в* $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Если на любом решении $u(x, \tau)\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *задачи* (1.8) *соответствующая задача в вариациях* (1.9) *неограниченно разрешима и если для всех возможных решений* $u(x, \tau)$ *задачи* (1.8), *отвечающих всем* $\tau\in[0, 1]$, *величины* $\max\limits_{\Omega}|u(x, \tau)|$ *и* $\max\limits_{\Omega}|\nabla u(x, \tau)|$ *равномерно ограничены и производные* $u_{x_i}(x, \tau)$, $i=1, \ldots, n$, *равностепенно непрерывны по* x *в* $\overline{\Omega}$, *то задача* (1.8) *имеет при каждом* τ *из* $[0, 1]$ *единственное решение* $u(x, \tau)\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Из сказанного выше и предположений теоремы 1.2 следует, что преобразование Φ, определяемое задачей (1.8), удовлетворяет требованиям пунктов 1) и 3) теоремы 1.1. Займемся проверкой пункта 2), т. е. докажем, что множество решений задачи (1.8), соответствующих всем $\tau \in [0, 1]$, компактно в $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Из условий теоремы 1.2 следует, что из любой последовательности решений задачи (1.8) можно выделить подпоследовательность $u_k(x, \tau_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящуюся в норме $C^1(\overline{\Omega})$. Надо доказать, что $u_k(x, \tau_k)$ образуют сходящуюся последовательность в $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Без ограничения общности можно считать, что $\tau_k \to \tau_0$ при $k \to \infty$.

Обратимся к неравенствам (2.1) гл. III. Первое из них при $l = 2$ дает

$$|u|_{\Omega}^{(2)} \leqslant c\left[|u|_{\Omega}^{(2+\alpha)}\right]^{1/(1+\alpha)}\left[|u|_{\Omega}^{(1)}\right]^{\alpha/(1+\alpha)}, \qquad (1.11)$$

а второе при $l = 2$

$$\langle u_x\rangle_{\Omega}^{(\delta)} \leqslant c\left[|u|_{\Omega}^{(2)}\right]^{\delta}\left[|u|_{\Omega}^{(1)}\right]^{1-\delta}, \quad \delta \in (0,1). \qquad (1.12)$$

Таким образом, для рассматриваемой последовательности u_k справедливы оценки

$$|u_k|_{\Omega}^{(2)} \leqslant c_1\left[|u_k|_{\Omega}^{(2+\alpha)}\right]^{1/(1+\alpha)}, \quad \langle u_{kx}\rangle_{\Omega}^{(\delta)} \leqslant c_1\left[|u_k|_{\Omega}^{(2+\alpha)}\right]^{\delta/(1+\alpha)} \qquad (1.13)$$

с постоянной c_1, зависящей лишь от области Ω и от $|u_k|_{\Omega}^{(1)}$ (последние по предположению равномерно ограничены для всей последовательности $\{u_k\}$).

Рассмотрим разность $u = u' - u''$ двух произвольных функций из последовательности $\{u_k\}$, соответствующих значениям τ' и τ''. Она удовлетворяет линейному уравнению

$$\tilde{L}u \equiv L_{\tau'}(u') - L_{\tau''}(u'') \equiv \tilde{a}_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \tilde{a}_i(x)u_{x_i} + \tilde{a}(x)u = \tilde{f}(x) \qquad (1.14)$$

и граничному условию

$$\tilde{L}^{(S)}u \equiv L_{\tau''}^{(S)}(u') - L_{\tau''}^{(S)}(u'') \equiv \tilde{b}_i(x)u_{x_i} + \tilde{b}(x)u = \tilde{\varphi}(x), \qquad (1.15)$$

где

$$\tilde{a}_{ij}(x) = a_{ij}^{\tau'}(x, u'(x), u'_x(x)),$$

$$\tilde{a}_i(x) = u''_{x_jx_k}(x)\int_0^1 \frac{\partial a_{jk}^{\tau'}(x, u^t, u_x^t)}{\partial u_{x_i}^t}\,dt + \int_0^1 \frac{\partial a^{\tau'}(x, u^t, u_x^t)}{\partial u_{x_i}^t}\,dt,$$

$$\tilde{a}(x) = u''_{x_ix_j}(x)\int_0^1 \frac{\partial a_{ij}^{\tau'}(x, u^t, u_x^t)}{\partial u^t}\,dt + \int_0^1 \frac{\partial a^{\tau'}(x, u^t, u_x^t)}{\partial u^t}\,dt,$$

$$\tilde{b}_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial b^{\tau'}(x, u^t, u_x^t)}{\partial u_{x_i}^t}\,dt + b_i^{\tau'}(x, u'(x)),$$

$$\tilde{b}(x)=\int\limits_0^1 \frac{\partial b^{\tau'}(x, u^t, u_x^t)}{\partial u^t}\,dt+u''_{x_i}\int\limits_0^1 \frac{\partial b_i^{\tau'}(x, u^t)}{\partial u^t}\,dt+\int\limits_0^1 \frac{\partial b_0^{\tau'}(x, u^t)}{\partial u^t}\,dt,$$

$$\tilde{f}(x)=(\tau''-\tau')\left[a_{ij}(x, u'', u''_x)-a_{ij}^0(x, u'', u''_x)\right]u''_{x_ix_j}+$$
$$+(\tau''-\tau')\left[a(x, u'', u''_x)-a^0(x, u'', u''_x)\right],$$

$$\tilde{\varphi}(x)=(\tau''-\tau')\left[b(x, u'', u''_x)-b^0(x, u'', u''_x)+\right.$$
$$\left.+b_i(x, u'')u''_{x_i}-b_i^0(x, u'')u''_{x_i}+b_0(x, u'')-b_0^0(x, u'')\right],$$

причем
$$u^t(x)=tu'(x)+(1-t)u''(x).$$

Используя (1.13) и условие a) теоремы 1.2, нетрудно подсчитать, что для коэффициентов $\tilde{L}$ и $\tilde{L}^{(S)}$ и свободных членов $\tilde{f}$ и $\tilde{\varphi}$ задачи (1.14), (1.15) верны оценки

$$\left.\begin{aligned}
&\max_\Omega |\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{b}|\leqslant c,\\
&\langle\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{b}\rangle_\Omega^{(\alpha)}\leqslant c\left[1+|u'|_\Omega^{(2+\alpha)}+|u''|_\Omega^{(2+\alpha)}\right]^{\alpha/(1+\alpha)},\\
&\max_\Omega|\tilde{a}_i, \tilde{a}|+|\tilde{b}_i, \tilde{b}|_\Omega^{(1)}\leqslant c\left[1+|u'|_\Omega^{(2+\alpha)}+|u''|_\Omega^{(2+\alpha)}\right]^{1/(1+\alpha)},\\
&|\tilde{a}_i, \tilde{a}|_\Omega^{(\alpha)}+|\tilde{b}_i, \tilde{b}|_\Omega^{(1+\alpha)}\leqslant c\left[1+|u'|_\Omega^{(2+\alpha)}+|u''|_\Omega^{(2+\alpha)}\right],\\
&\max_\Omega|\tilde{\varphi}|\leqslant c|\tau'-\tau''|,\\
&|\tilde{\varphi}|_\Omega^{(1)}+\max_\Omega|\tilde{f}|\leqslant c|\tau'-\tau''|\left[1+\left(|u''|_\Omega^{(2+\alpha)}\right)^{1/(1+\alpha)}\right],\\
&|\tilde{f}|_\Omega^{(\alpha)}+|\tilde{\varphi}|_\Omega^{(1+\alpha)}\leqslant c|\tau'-\tau''|\left(1+|u''|_\Omega^{(2+\alpha)}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (1.16)$$

Здесь и ниже постоянная c не зависит от k. Задача (1.14), (1.15) есть линейная относительно $u(x)$ задача вида (3.1), (3.2) гл. III, и потому, принимая во внимание условия b) — d), к $u(x)$ можно применить оценку (3.5) гл. III и в результате, учитывая (1.16), получить неравенство

$$|u|_\Omega^{(2+\alpha)}\leqslant c\left(1+|u'|_\Omega^{(2+\alpha)}+|u''|_\Omega^{(2+\alpha)}\right)\left[|u|_\Omega^{(1)}+|\tau'-\tau''|\right]. \quad (1.17)$$

Из (1.17) прежде всего можно заключить, что равномерно ограничены нормы $|u_k|_\Omega^{(2+\alpha)}$. Действительно, так как последовательность $\{u_k\}$ сходится в норме $C^1(\overline{\Omega})$ и $|\tau_k-\tau_0|\to 0$ при $k\to\infty$, то для k, бóльших некоторого $k_0>0$, имеем

$$c\left[|u_k-u_{k_0}|_\Omega^{(1)}+|\tau_k-\tau_{k_0}|\right]\leqslant\frac{1}{2}$$

и потому в силу (1.17)

$$|u_k|_{\Omega}^{(2+\alpha)} \leqslant |u_k - u_{k_0}|_{\Omega}^{(2+\alpha)} + |u_{k_0}|_{\Omega}^{(2+\alpha)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(1 + |u_k|_{\Omega}^{(2+\alpha)} + |u_{k_0}|_{\Omega}^{(2+\alpha)}\right) + |u_{k_0}|_{\Omega}^{(2+\alpha)},$$

откуда следует оценка

$$|u_k|_{\Omega}^{(2+\alpha)} \leqslant 1 + 3|u_{k_0}|_{\Omega}^{(2+\alpha)}, \qquad \forall k > k_0. \tag{1.18}$$

Из ограниченности же норм $|u_k|_{\Omega}^{(2+\alpha)}$ и неравенства (1.17) немедленно вытекает, что $|u_k - u_l|_{\Omega}^{(2+\alpha)} \to 0$ при k, $l \to \infty$, что и требовалось доказать.

Теорема 1.2 доказана.

Эта теорема сводит исследование разрешимости краевых задач (1.1), (1.2) к получению априорных оценок норм $|u|_{\Omega}^{(1+\beta)}$ с каким-нибудь $\beta > 0$ или хотя бы оценок $|u|_{\Omega}^{(1)}$ и модуля непрерывности первых производных решений $u(x)$.

В следующих параграфах мы покажем, что для уравнений с дивергентной главной частью и нелинейных граничных условий, обобщающих второе и третье краевые условия для линейных задач (см. (8.3), (8.4) гл. III), такие оценки удалось установить [36_2]. Более того, в этом случае оказалось возможным избавиться от весьма жесткого требования неограниченной разрешимости задачи в вариациях, соответствующей (1.8), и тем самым установить существование решения и в тех случаях, когда решение не обязательно единственно.

§ 2. Априорные оценки норм $|u|_{\Omega}^{(1+\beta)}$

Рассмотрим квазилинейное уравнение с дивергентной главной частью

$$L_1(u) \equiv \frac{d}{dx_i}(a_i(x, u, u_x)) + a(x, u, u_x) = f(x) \tag{2.1}$$

при граничном условии

$$[a_i(x, u, u_x)\cos(\mathbf{n}, x_i) + \varphi(x, u)]|_S = \varphi_0(x)\,^{*)}, \tag{2.2}$$

где функции $\varphi(x, u)$ и $\varphi_0(x)$ считаются определенными при всех $x \in \overline{\Omega}$.

Представляет интерес доказать теоремы существования для задачи (2.1), (2.2) при естественных ограничениях на a_i и a того же типа, что и в случае задачи Дирихле (см. гл. IV). Для этой цели, как выяснено выше, требуется получить априорные

*) Выделение «свободных членов» в уравнении и граничном условии удобно для формулировки ограничений на входящие в них функции.

оценки решений в норме $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ при естественных ограничениях на a_i и a. Для любой внутренней подобласти $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ такие оценки уже установлены в §§ 1—6 гл. IV, так что здесь мы займемся оценками вблизи границы S, предполагая, что на S выполняется условие (2.2).

Оставив пока в стороне вопрос об оценке максимума модуля самого решения $u(x)$, получим последовательно оценки $\langle u\rangle_{\Omega}^{(\alpha)}$, $\max\limits_{\Omega}|\nabla u|$ и $\langle u_{x_k}\rangle_{\Omega}^{(\alpha)}$, считая, что $\max\limits_{\Omega}|u(x)| \leqslant M$ и $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$.

Предположим, что функции $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ при $x \in \bar{\Omega}$, $|u| \leqslant M$ и произвольных p дифференцируемы по своим аргументам и подчиняются естественным ограничениям

$$\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \geqslant \nu(|u|)(1+|p|)^{m-2}\xi^2, \qquad m>1, \tag{2.3}$$

$$\left|\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\right|(1+|p|)^2+\left(|a_i|+\left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|+\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right|+\left|\frac{\partial a}{\partial p_i}\right|\right)(1+|p|)+$$
$$+|a|+\left|\frac{\partial a}{\partial u}\right|+\left|\frac{\partial a}{\partial x_j}\right| \leqslant \mu(|u|)(1+|p|)^m. \tag{2.4}$$

Кроме того, считаем, что $S \in O^2$, функция $\varphi(x, u)$ принадлежит $O^2(\{x, u\colon x \in \bar{\Omega}, |u| \leqslant M\})$, $f \in L_\infty(\Omega)$, $\varphi_0 \in O^1(\bar{\Omega})$.

Фиксируем произвольно какой-нибудь участок S_1 границы S и требуемые оценки установим в небольшой области Ω_1, примыкающей к S_1. Для этого предварительно «распрямим» S_1, делая преобразование независимых переменных $y_i = y_i(x)$, $i=1, \ldots, n$. Пусть в новых координатах S_1 задается уравнением $y_n = 0$. Уравнение (2.1) и условие (2.2) примут вид

$$\frac{da_i(x, u, u_x)}{dy_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}+a(x, u, u_x)=f(x), \tag{2.1$'$}$$

$$\left\{a_i(x, u, u_x)\frac{\partial y_n}{\partial x_i}+\psi(y, u)\right\}\Big|_{S_1}=0. \tag{2.2$'$}$$

где

$$\psi(y, u)=\sqrt{\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial y_n}{\partial x_l}\right)^2}\,[\varphi(x, u)-\varphi_0(x)].$$

Из (2.1$'$) и (2.2$'$) выводим, что $u(x)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega}\left[a_i(x, u, u_x)\eta_{y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}+a_i\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i\,\partial y_l}\eta-a\eta+f\eta\right]dy+$$
$$+\int\limits_{S_1}\eta\psi(y, u)\,ds=0 \tag{2.5}$$

при любой η из $W_2^1(\Omega)$, равной нулю вне $\Omega_2 \supset \Omega_1$. Тогда, преобразовывая в (2.5) граничный интеграл к объемному, приходим к интегральному тождеству

$$\int_\Omega \left[a_i \eta_{y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial y_l} \eta - (a-f)\eta + \frac{d\psi}{dy_n}\eta + \eta_{y_n}\psi\right] dy = 0. \quad (2.6)$$

Положим в (2.6) $\eta = \zeta^m \max\{u-k, 0\}$, где k — любое число, а $\zeta(y)$ — срезающая функция для $\forall$ шара K_ρ с центром на S_1, лежащего в Ω_1, где введены координаты y. Тогда в силу (2.3), (2.4) так же, как и в § 1 гл. IV, при $k \geqslant \max\limits_{K_\rho \cap \Omega} u - \delta M$ получаем неравенство

$$\int\limits_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^m \zeta^m \, dy \leqslant \gamma \left[\int\limits_{A_{k,\rho}} (u-k)^m |\nabla\zeta|^m \, dy + \operatorname{mes} A_{k,\rho}\right]. \quad (2.7)$$

Здесь $A_{k,\rho}$ — множество из пересечения K_ρ с Ω, на котором $u(y) > k$, а $\delta > 0$ — некоторое число, определяемое M и постоянными из неравенств (2.3), (2.4) и условий на φ, φ_0 и S.

Аналогично, полагая в (2.6) $\eta = \zeta^m \max\{-u-k, 0\}$, придем при $k \geqslant \max\limits_{K_\rho \cap \Omega}(-u) - \delta M$ к неравенствам (2.7) для функции $-u(y)$. Заметим, что в случае первой краевой задачи неравенства (2.7) для u и $-u$ были доказаны при дополнительных ограничениях на k: $k \geqslant \max\limits_{K_\rho \cap S} u$ и $k \geqslant \max\limits_{K_\rho \cap S}(-u)$ соответственно. Здесь этих ограничений нет. Из (2.7) на основании теоремы 7.2 гл. II выводится оценка нормы $|u|^{(\alpha)}$ вблизи S_1.

Предположим, что мы уже оценили $\max\limits_{\Omega} |\nabla u|$. Получим тогда оценку $\langle u_{x_i}\rangle_{\Omega_1'}^{(\beta)}$, $\bar{\Omega}_1' \subset \Omega \cup S_1$. Для этого положим в тождестве (2.6) $\eta = \xi_{y_r}$, $r \neq n$, где ξ — произвольная достаточно гладкая функция, равная нулю вне Ω_2, и результат преобразуем так:

$$\int_\Omega \left[\frac{da_i}{dy_r} \xi_{y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial y_r} \xi_{y_l} - \right.$$
$$\left. - \left(a_i \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial y_l} - a + f + \frac{d\psi}{dy_n}\right)\xi_{y_r} + \frac{d\psi}{dy_r}\xi_{y_n}\right] dy = 0, \qquad r \neq n. \quad (2.8)$$

Это тождество, очевидно, будет оставаться верным при любой $\xi(y)$ из $W_2^1(\Omega)$, равной нулю вне Ω_2.

Фиксируем одну из касательных к S_1 координат y_r $(r \neq n)$, и пусть $A_{k,\rho}$ — множества, отвечающие функции u_{y_r}. Беря в (2.8) сначала $\xi = \zeta^2 \max\{u_{y_r} - k, 0\}$, а затем $\xi = \zeta^2 \max\{-u_{y_r} - k, 0\}$

с любым k и учитывая ограниченность $\max_\Omega |\nabla u|$ и условия (2.3) и (2.4), выводим неравенства

$$\int_{A_{k,\rho}} |\nabla u_{y_r}|^2 \zeta^2 \, dy \leqslant \gamma \int_{A_{k,\rho}} (u_{y_r} - k)^2 |\nabla \zeta|^2 \, dy + \gamma \operatorname{mes} A_{k,\rho}, \tag{2.9}$$

$$r = 1, \ldots, n-1,$$

и аналогичные неравенства для $-u_{y_r}$. Они справедливы при любых k. Отсюда и из теоремы 7.2 гл. II получаем оценку $\langle u_{y_r} \rangle_{\Omega_1}^{(\beta)} \leqslant c$, $r \neq n$, с некоторыми c и $\beta > 0$, зависящими от $\max_\Omega |\nabla u|$. После этого оценка в $C^\beta(\overline{\Omega}_1)$ для производной по нормали к S_1 устанавливается с помощью уравнения (2.1′) и неравенств (2.9). Действительно, из (2.9) при $k = \min_{K_\rho \cap \Omega} u_{y_r}$ следует, что для шаров $\overline{K}_\rho$, лежащих в области Ω_2, верна оценка

$$\int_{K_\rho \cap \Omega} |\nabla u_{y_r}|^2 \, dy \leqslant \gamma \rho^{n-2+2\beta}, \qquad r \neq n. \tag{2.10}$$

С другой стороны, разрешая уравнение (2.1′) относительно $u_{y_n y_n}$, находим, что $u_{y_n y_n} = \sum_{r \neq n} b_{lr} u_{y_r y_l} + b$ с ограниченными b_{lr} и b. Отсюда видно, что неравенства (2.10) верны и при $r = n$, и, следовательно, в силу леммы 4.2 гл. II величина $\langle u_{y_n} \rangle_{\Omega_1}^{(\beta)}$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega \cup S_1$, оценивается через известные нам постоянные и расстояние Ω_1 до $S \setminus S_1$.

Обратимся к оценке $\max |\nabla u|$ в примыкающей к S_1 части Ω_1 области Ω. Оценке $\max_{\Omega_1} |\nabla u|$, так же как и в случае первой краевой задачи, будет предшествовать, во-первых, оценка интегралов

$$\int_{\Omega_1} |\nabla u|^l \, dy \tag{2.11}$$

с достаточно большим (но конечным) l и, во-вторых, оценка максимума модуля градиента $u(x)$ на S. Последняя в первой краевой задаче основывалась на том, что из граничного условия были известны на S первые производные u по касательным направлениям.

В данном случае, если бы удалось оценить максимум на S_1 производных u по касательным направлениям, то производную по нормали, а тем самым и $\max_{S_1} |\nabla u|$ можно было бы сразу оценить, исходя из граничного условия. Действительно, (2.2′) дает

$$\left[\int_0^1 \frac{\partial a_l(x, u, tu_x)}{\partial (tu_{x_j})}\,dt u_{y_l}\frac{\partial y_n}{\partial x_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} + a_l(x, u, 0)\frac{\partial y_n}{\partial x_l} + \psi(y, u)\right]\Bigg|_{S_1} = 0, \tag{2.12}$$

откуда с помощью условий (2.3) и (2.4) легко выводится оценка $\left.\frac{\partial u}{\partial y_n}\right|_{S_1}$ через $\max\limits_{S_1}|u|$ и $\max\limits_{r\neq n}\max\limits_{S_1}|u_{y_r}|$.

Итак, требуется оценить интегралы (2.11) и максимум модулей касательных производных u_{y_r}, $r \neq n$, на S_1. Начнем с оценок интегралов (2.11).

Прежде всего, рассматривая (2.7) с $k = \min\limits_{\Omega_1\cap K_\rho} u(x)$ и учитывая установленную выше оценку $\langle u\rangle_{\Omega}^{(\alpha)}$, находим, что

$$\int\limits_{\Omega_1\cap K_\rho} |\nabla u|^m\,dy \leqslant c\rho^{n-m+m\alpha} \tag{2.13}$$

при $\rho\leqslant\bar\rho$, где $\bar\rho$ и c определяются лишь M и известными нам постоянными.

Для получения оценок (2.11) с $l > m$ приходится использовать, кроме (2.6), еще тождество (2.8), причем в последнем надо предварительно провести интегрирование по частям:

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{da_l}{dy_r} + g_l^r\frac{\partial x_l}{\partial y_l} + \frac{d\psi}{dy_r}\frac{\partial x_l}{\partial y_n}\right)\xi_{x_l} - \xi\frac{d\left(a - \psi_u u_{y_n}\right)}{dy_r}\right]dy = 0, \tag{2.14}$$

$$r = 1, \ldots, n-1.$$

Здесь $g_l^r = -\left(a_l y_{kx_l y_k} + f + \psi_{y_n}\right)\delta_r^l + a_l\dfrac{\partial^2 y_l}{\partial x_l\,\partial y_r}$ растет не быстрее $(m-1)$-й степени $|\nabla u|$ при больших $|\nabla u|$.

Введем следующие обозначения:

$$v = \sum_{k=1}^{n-1} u_{y_k}^2 + 1, \quad w = \sum_{k=1}^{n} u_{y_k}^2 + 1.$$

В тождестве (2.6) положим

$$\eta = [u(y) - u(y_0)]\,v^{s+1}w^q\zeta^2, \quad s,\ q \geqslant 0,$$

где $\zeta(y)$ — срезающая функция для шара K_ρ с центром $y_0 \in S_1$ и радиусом $\rho\leqslant\bar\rho$, меньшим расстояния y_0 до $S\setminus S_1$. Тогда

(2.6) будет иметь вид

$$\int\limits_{\Omega_\rho} \{a_i u_{x_i} v^{s+1} w^q \zeta^2 + (u - u(y_0)) [a_i (s+1) v^s v_{x_i} w^q \zeta^2 +$$
$$+ a_i v^{s+1} q w^{q-1} w_{x_i} \zeta^2 + a_i v^{s+1} w^q 2\zeta\zeta_{x_i} + b v^{s+1} w^q \zeta^2 +$$
$$+ \psi (s+1) v^s v_{y_n} w^q \zeta^2 + \psi v^{s+1} q w^{q-1} w_{y_n} \zeta^2 + \psi v^{s+1} w^q 2\zeta\zeta_{y_n}] +$$
$$+ \psi u_{y_n} v^{s+1} w^q \zeta^2\} \, dy = 0, \quad (2.15)$$

где $b = a_i \dfrac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \, \partial y_l} - a + f + \psi_u u_{y_n} + \psi_{y_n}$. Из наших предположений следует, что

$$| b(x, u, p) | \leqslant \mu_0(| u |)(1 + | p |)^m. \quad (2.16)$$

Произведем в (2.15) оценки с помощью условий (2.3), (2.4) и (2.16), замечая, что в силу (2.3)

$$a_i(x, u, p) p_i > \nu_0(| u |) | p |^m - \mu_0(| u |), \qquad \nu_0 > 0. \quad (2.17)$$

В результате получим неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\rho} v^{s+1} w^{q+\frac{m}{2}} \zeta^2 \, dy \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \max_{\Omega_\rho} | u - u(y_0) | \int\limits_{\Omega_\rho} \Big\{ [(s+1) v^s w^q | \nabla v | \zeta^2 + q v^{s+1} w^{q-1} | \nabla w | \zeta^2 +$$
$$+ 2 v^{s+1} w^q \zeta | \nabla \zeta |] w^{\frac{m}{2} - \frac{1}{2}} + v^{s+1} w^{q+\frac{m}{2}} \zeta^2 \Big\} dy + c_1 \int\limits_{\Omega_\rho} v^{s+1} w^{q+\frac{1}{2}} \zeta^2 \, dy,$$

в котором c_1 определяется постоянными $\mu(M)$, $\mu_0(M)$ и $\nu_0(M)$ из (2.4), (2.16) и (2.17), а также $\max\limits_{x \in \Omega_\rho, |u| \leqslant M} | \psi_u, \psi_{y_k} |$ и границей S. К членам в правой части применим неравенство Коши (1.2) гл. II с $\varepsilon = 1$ и воспользуемся тем, что $\max\limits_{\Omega_\rho} | u - u(y_0) | \leqslant c_2 \rho^\alpha$. Тогда при $\rho < (3c_1 c_2)^{-1/\alpha}$ будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_\rho} v^{s+1} w^{q+\frac{m}{2}} \zeta^2 \, dy \leqslant c\rho^\alpha \int\limits_{\Omega_\rho} \Big[(s+1)^2 v^{s-1} w^{q+\frac{m-2}{2}} | \nabla v |^2 \zeta^2 +$$
$$+ q^2 v^{s+1} w^{q+\frac{m}{2}-3} | \nabla w |^2 \zeta^2 + 2 v^{s+1} w^{q+\frac{m}{2}-1} | \nabla \zeta |^2 \Big] dy + c(\rho) \quad (2.18)$$

с известной нам постоянной $c(\rho)$, конечной при $\rho > 0$.

Рассмотрим теперь тождество (2.14), считая в нем ξ равными $u_{y_r}v^s w^q\zeta^2$ с $r\neq n$:

$$\int_{\Omega_\rho}\Big[\Big(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{x_jy_r}+\frac{\partial a_i}{\partial u}u_{y_r}+\frac{\partial a_i}{\partial y_r}\Big)(u_{y_rx_i}v^s w^q\zeta^2+$$
$$+u_{y_r}sv^{s-1}v_{x_i}w^q\zeta^2+u_{y_r}v^s qw^{q-1}w_{x_i}\zeta^2+u_{y_r}v^s w^q 2\zeta\zeta_{x_i})+$$
$$+g_i^r\frac{\partial x_i}{\partial y_l}\frac{d}{dx_i}(u_{y_r}v^s w^q\zeta^2)-\Big(\frac{\partial a}{\partial u_{x_i}}u_{x_iy_r}+\frac{\partial a}{\partial u}u_{y_r}+\frac{\partial a}{\partial y_r}-$$
$$-\psi_{uy_r}u_{y_n}-\psi_{uu}u_{y_n}u_{y_r}-\psi_u u_{y_ny_r}\Big)u_{y_r}v^s w^q\zeta^2+$$
$$+(\psi_{y_r}+\psi_u u_{y_r})\frac{\partial x_i}{\partial y_n}\frac{d}{dx_i}(u_{y_r}v^s w^q\zeta^2)\Big]dy=0,\qquad r=1,\ \ldots,\ n-1.$$

Произведем суммирование по r от 1 до $n-1$ и выделим два положительных члена:

$$\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{y_rx_j}u_{y_rx_i}v^s w^q\zeta^2=\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}(u_{x_jy_r}-u_{y_l}y_{lx_jy_r})u_{y_rx_i}v^s w^q\zeta^2,$$
$$\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{y_rx_j}u_{y_r}sv^{s-1}v_{x_i}w^q\zeta^2=\frac{s}{2}\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}v^{s-1}v_{x_i}v_{x_j}w^q\zeta^2.$$

Их оценим с помощью неравенства (2.3), а остальные перенесем в правую часть и оценим по модулю, замечая, что в силу условий на S, $f(x)$, $\varphi_0(x)$ и $\varphi(x,u)$ и (2.4)

$$\Big|\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{y_rx_j}u_{y_r}\Big|\leqslant cw^{(m-2)/2}|\nabla v|,$$
$$\Big|\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{y_l}\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_j\,\partial y_r}+\frac{\partial a_i}{\partial u}u_{y_r}+\frac{\partial a_i}{\partial y_r}+g_i^r\Big|\leqslant cv^{1/2}w^{(m-1)/2},$$
$$\Big|\frac{\partial a}{\partial u_{x_i}}u_{x_iy_r}+\frac{\partial a}{\partial u}u_{y_r}+\frac{\partial a}{\partial y_r}-\psi_{uy_r}u_{y_n}-\psi_{uu}u_{y_n}u_{y_r}-\psi_u u_{y_ny_r}\Big|\leqslant$$
$$\leqslant cw^{(m-1)/2}\sum_{r\neq n}|u_{y_rx}|+cv^{1/2}w^{m/2}.$$

Это даст

$$\nu\int_{\Omega_\rho}w^{(m-2)/2}\Big[\sum_{r\neq n}u_{y_rx}^2v^s w^q\zeta^2+\frac{s}{2}v^{s-1}w^q|\nabla v|^2\zeta^2\Big]dy\leqslant$$
$$\leqslant c\int_{\Omega_\rho}\Big\{qw^{(m-2)/2}|\nabla v|v^s w^{q-1}|\nabla w|\zeta^2+w^{(m-2)/2}|\nabla v|v^s w^q\zeta|\nabla\zeta|+$$
$$+v^{1/2}w^{(m-1)/2}\Big(\sum_{r\neq n}|u_{y_rx}|v^s w^q\zeta^2+sv^{s-1/2}|\nabla v|w^q\zeta^2+$$
$$+qv^{s+1/2}w^{q-1}|\nabla w|\zeta^2+v^{s+1/2}w^q\zeta|\nabla\zeta|\Big)+$$
$$+w^{(m-1)/2}\sum_{r\neq n}|u_{y_rx}|v^{s+1/2}w^q\zeta^2+v^{s+1}w^{q+m/2}\zeta^2\Big\}dy.$$

Применяя теперь неравенство (1.2) гл. II, получим при $q = s = 0$ неравенство

$$\int_{\Omega_\rho} w^{(m-2)/2} \sum_{r \neq n} u_{y_r x}^2 \zeta^2 \, dy \leqslant c \int_{\Omega_\rho} (v w^{m/2} \zeta^2 + v w^{(m-2)/2} |\nabla\zeta|^2) \, dy \tag{2.19}$$

и при произвольных $s > 0$, $q \geqslant 0$ неравенства

$$\int_{\Omega_\rho} w^{(m-2)/2} \left[\sum_{r \neq n} u_{y_r x}^2 v^s w^q \zeta^2 + \frac{s}{2} v^{s-1} w^q |\nabla v|^2 \zeta^2 \right] dy \leqslant$$
$$\leqslant c \int_{\Omega_\rho} \left[\frac{q^2}{s} w^{q+m/2-3} v^{s+1} |\nabla w|^2 \zeta^2 + v^{s+1} w^{q+(m-2)/2} |\nabla\zeta|^2 + \right.$$
$$\left. + (1+s) v^{s+1} w^{q+m/2} \zeta^2 \right] dy. \tag{2.20}$$

Из (2.19) и неравенства (2.18) с $q = s = 0$ следует, что для достаточно малых ρ, не превосходящих некоторого числа ρ_0, определяемого α и константами из (2.18) и (2.19), справедлива оценка

$$\int_{\Omega_\rho} \left(w^{(m-2)/2} \sum_{r \neq n} u_{y_r x}^2 \zeta^2 + v w^{m/2} \zeta^2 \right) dy \leqslant c \int_{\Omega_\rho} v w^{m/2-1} |\nabla\zeta|^2 \, dy + c(\rho),$$

и поскольку $v w^{m/2-1} \leqslant w^{m/2}$, то отсюда на основании (2.13) можно заключить, что

$$\int_{\Omega_\rho} \left(w^{(m-2)/2} \sum_{r \neq n} u_{y_r x}^2 + v w^{m/2} \right) \zeta^2 \, dy \leqslant c_1(\rho). \tag{2.21}$$

Пусть теперь $s > 0$. Нетрудно видеть, что

$$|\nabla w|^2 \leqslant c w \sum_{r \neq n} u_{y y_r}^2 + c w^3. \tag{2.22}$$

Действительно, $w_{y_i} = 2 \sum_{l=1}^{n} u_{y_l} u_{y_l y_i}$; поэтому $|\nabla w|^2 \leqslant 4 w u_{yy}^2$, и производную $u_{y_n y_n}$ можно выразить из уравнения через остальные и убедиться, что в силу (2.3) и (2.4)

$$|u_{y_n y_n}| \leqslant c' \sum_{r \neq n} |u_{y_r y}| + c' w. \tag{2.23}$$

Используя (2.22), легко заключить из (2.18) и (2.20), что при достаточно малых ρ (меньших некоторого $\rho_0 > 0$) и при таких q, для которых отношение q^2/s много меньше единицы, будут верны неравенства

$$\int\limits_{\Omega_\rho}\left[v^{s+1}w^{q+m/2}\zeta^2+v^s w^{q+(m-2)/2}\sum_{r\neq n}u^2_{y_r x}\zeta^2\right]dy\leqslant$$
$$\leqslant c(s,q)\int\limits_{\Omega_\rho}v^{s+1}w^{q+(m-2)/2}|\nabla\zeta|^2\,dy+c(s,q),\quad 0<\rho\leqslant\rho_0, \tag{2.24}$$

причем постоянные $c(s, q)$ и ρ_0 в них зависят от s, q и S.

Рассмотрим последовательность областей Ω_{ρ_s}, $\rho_s=\frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{2^{s+1}}$, $s=1, 2, \ldots$, и пусть ζ_s — срезающая функция для шара K_{ρ_s}, равная единице в $K_{\rho_{s+1}}$. Считая сначала q равным нулю, выводим из (2.24) и (2.21), что

$$\int\limits_{\Omega_{\rho_s}}v^{s+1}w^{m/2}\zeta_s^2\,dy\leqslant c(s)$$

при любых $s>0$. После этого, проводя в (2.24) индукцию по $q=0, 1, \ldots$, убеждаемся в ограниченности интегралов

$$\int\limits_{\Omega_{\rho/2}}\left(v^{s+1}w^{q+m/2}+v^s w^{q+(m-2)/2}\sum_{r\neq n}u^2_{y_r x}\right)dy\leqslant c(s,q), \tag{2.25}$$

причем постоянная $c(s, q)\to\infty$ при $s, q\to\infty$. Принимая во внимание (2.23), окончательно можно написать

$$\int\limits_{\Omega_{\rho/2}}(1+|\nabla u|)^l\left(1+u^2_{yy}\right)dy\leqslant c(l). \tag{2.26}$$

Займемся теперь оценкой $\max|u_{y_r}|$, $r\neq n$, вблизи S_1. Для этого будем оценивать максимум функции $z=v\zeta^2$, где $\zeta(y)$ — срезающая функция для шара $K_{\rho/2}$, рассмотренного выше.

В случае $m\geqslant 2$ это можно сделать таким же способом, каким в § 3 гл. IV оценивался $|\nabla u|$ внутри Ω. Именно, положим в тождестве (2.8)

$$\xi=u_{y_r}\zeta^2\max\{z(y)-k, 0\},\qquad r\neq n,\quad k\geqslant 0,$$

и обозначим через A_k множество точек $y\in\Omega$, для которых $z(y)>k$. После суммирования по r от 1 до $n-1$ получим

$$\int\limits_{A_k}\left[\left(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{x_j y_r}+\frac{\partial a_i}{\partial u}u_{y_r}+\frac{\partial a_i}{\partial y_r}\right)\left(u_{y_r x_i}(z-k)\zeta^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+u_{y_r}z_{x_i}\zeta^2+u_{y_r}(z-k)2\zeta\zeta_{x_i}\right)+\ \ldots\right]dy=0, \tag{2.27}$$

и так как $u_{y_r x_j} u_{y_r} \zeta^2 = \frac{1}{2} v_{x_j} \zeta^2 = \frac{1}{2}(z_{x_j} - 2v\zeta\zeta_{x_j})$, то из (2.27) на основании условий (2.3), (2.4) можно заключить, что при $m \geqslant 2$

$$\int\limits_{A_k} |\nabla z|^2 dy \leqslant c \int\limits_{A_k} (1 + |\nabla u|)^{m+4} (1 + |\nabla \zeta|^2) dy \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \int\limits_{A_k} (1 + |\nabla u|)^{m+4} dy.$$

Постоянная c_1 зависит от $\nu(M)$ и $\mu(M)$ из условий (2.3), (2.4), а также от радиуса $\rho/2$ шара $K_{\rho/2}$. Однако последнее в данном случае несущественно, поскольку шар $K_{\rho/2}$ считается фиксированным.

Применяя затем к интегралу $\int\limits_{A_k} (1 + |\nabla u|)^{m+4} dy$ неравенство Гёльдера с показателями $p = l/(m+4)$ и $p' = l/(l-m-4)$, где $l > (m+4)n/2$, и учитывая доказанное выше неравенство (2.26), приходим к неравенствам

$$\int\limits_{A_k} |\nabla z|^2 dy \leqslant c \operatorname{mes}^{1/p'} A_k, \quad \frac{1}{p'} = 1 - \frac{m+4}{l} > 1 - \frac{2}{n},$$

из которых в силу леммы 5.4 гл. II следует оценка $\max\limits_{\Omega} z = \max\limits_{\Omega} v\zeta^2$ при $m \geqslant 2$.

В случае $1 < m < 2$ для того, чтобы оценить $\max\limits_{\Omega} z$, положим в (2.8)

$$\xi = u_{y_r} v^s w \zeta^2 \max\{z(y) - k, 0\}.$$

Основными членами в полученном подынтегральном выражении будут

$$I_1 = \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{y_r x_j} u_{y_r x_i} v^s w (z-k) \zeta^2,$$

$$I_2 = \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{y_r x_j} u_{y_r} s v^{s-1} v_{x_i} w (z-k) \zeta^2 = \frac{s}{2} \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} v_{x_i} v_{x_j} v^{s-1} w (z-k) \zeta^2,$$

$$I_3 = \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{y_r x_j} u_{y_r} v^s w_{x_i} (z-k) \zeta^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} v_{x_j} w_{x_i} v^s (z-k) \zeta^2,$$

$$I_4 = \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{y_r x_j} u_{y_r} v^s w z_{x_i} \zeta^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} z_{x_i} z_{x_j} v^s w - \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} z_{x_i} v^{s+1} w \zeta \zeta_{x_j},$$

из которых первые два положительны, а последний имеет ту же структуру, что и соответствующее выражение в (2.27). Член I_3, содержащий w_{x_i}, оценим по неравенствам Коши (1.1), (1.2) гл. II, используя при этом (2.22) и условия (2.3), (2.4):

$$|I_3| \leqslant \frac{s}{4} \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} v_{x_i} v_{x_j} v^{s-1} w (z-k) \zeta^2 +$$

$$+ \frac{c}{4s} \sum_{i,\, j=1}^{n} \left| \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} \right| \left(w \sum_{r \neq n} u_{y_r x}^2 + w^3 \right) \frac{v^{s+1}}{w} (z-k) \zeta^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} I_2 + \frac{c\mu n^2}{4s\nu} I_1 + \frac{c\mu n^2}{4s} (1 + |\nabla u|)^{m-2} w^2 v^{s+1} (z-k) \zeta^2.$$

Здесь $\nu = \nu(M)$, $\mu = \mu(M)$ — постоянные из условий (2.3), (2.4). Если s взять достаточно большим, так чтобы $c\mu n^2/(4s\nu) < 1$, то теперь уже довольно просто вывести неравенства

$$\int_{A_k} (1 + |\nabla u|)^{m-2} v^s w |\nabla z|^2 \, dy \leqslant c_1 \int_{A_k} (1 + |\nabla u|)^{m+6+2s} \, dy,$$

а следовательно, и неравенства

$$\int_{A_k} |\nabla z|^2 \, dy \leqslant c_1 \int_{A_k} (1 + |\nabla u|)^{m+6+2s} \, dy. \tag{2.28}$$

Они, так же как и выше, в силу (2.26) с $l > \frac{m+6+2s}{2} n$ обеспечивают оценку $\max\limits_{\Omega} z = \max\limits_{\Omega} \left(\sum\limits_{r=1}^{n-1} u_{y_r}^2 + 1 \right) \zeta^2$.

Итак, доказано, что $\max\limits_{\Omega_1} |u_{y_r}| \leqslant M_1$ при $r \neq n$, тем самым, как было выяснено выше, оценен $\max\limits_{S_1} |\nabla u|$. Кроме того, имеются неравенства (2.26). Все это дает возможность провести оценку $\max |\nabla u|$ вблизи S_1 так, как это было сделано в первой краевой задаче (см. § 4 гл. IV).

Сформулируем доказанные здесь утверждения об оценках $u(x)$ в виде теоремы.

Теорема 2.1. *Предположим, что функции* $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ *при* $x \in \overline{\Omega}$, $|u| \leqslant M$ *и произвольных* p *дифференцируемы по своим аргументам и удовлетворяют неравенствам* (2.3) *и* (2.4); $f(x) \in L_\infty(\Omega)$; $\varphi(x, u) \in O^2(\overline{\Omega} \times [-M, M])$; $\varphi_0 \in O^1(\overline{\Omega})$ *и*

$$\max_{\Omega} |\varphi, \varphi_{x_i u}, \varphi_{uu}, \varphi_{x_i}, \varphi_u, \varphi_0, \varphi_{0x_i}| \leqslant \mu(|u|). \tag{2.29}$$

Пусть граница S *области* Ω *принадлежит* O^2.

Тогда для любого дважды непрерывно дифференцируемого решения $u(x)$ *задачи* (2.1), (2.2), *для которого* $\max\limits_{\Omega} |u| \leqslant M$, *норма* $|u|_{\Omega}^{(1+\beta)}$ *оценивается при некотором* $\beta > 0$ *постоянной,* *зависящей лишь от M, постоянных m, $\nu(M)$ и $\mu(M)$ из* (2.3), (2.4) *и* (2.29) *и границы S. Этими величинами определяется и показатель β.*

Оценить максимумы модулей решений $u(x)$ задачи (2.1), (2.2) через данные задачи в общем случае, как известно, невозможно. Приведем два случая, когда такие оценки имеют место.

Теорема 2.2. *Пусть при достаточно больших $|u| \geqslant R$ выполняются неравенства*

$$\frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \geqslant 0 \text{ при } x \in S, \ |p| < \infty \text{ и } x \in \Omega, \quad p = 0, \tag{2.30}$$

$$\operatorname{sign} u \cdot \left[\frac{\partial a_i(x, u, 0)}{\partial x_i} + a(x, u, 0) - f(x)\right] < 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2.31}$$

$$\operatorname{sign} u \cdot [a_i(x, u, 0)\cos(\mathbf{n}, x_i) + \varphi(x, u) - \varphi_0(x)] > 0, \quad x \in S. \tag{2.32}$$

Тогда для любого решения $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ задачи (2.1), (2.2) $\max\limits_{\Omega}|u| \leqslant R$. *Предполагается, что S принадлежит O^2, существуют производные $\dfrac{\partial a_i}{\partial p_j}$, $\dfrac{\partial a_i}{\partial u}$, $\dfrac{\partial a_i}{\partial x_i}$ и они ограничены при конечных значениях u и $p = 0$.*

Доказательство этой теоремы несложно. Оно опирается на принцип максимума для эллиптических уравнений. Сначала с помощью (2.31) и (2.30) проверяется, что внутри Ω решение не может иметь максимумов, больших R, и минимумов, меньших $-R$. После этого оценивается $\max\limits_{S}|u|$. Поясним последний этап.

Пусть максимум функции $u(x)$ больше R и достигается в точке A_0 границы S. Преобразуем, вводя координаты $y_1, \ldots, y_n$, кусок S_1 границы в окрестности A_0 в плоскость $y_n = 0$ так, чтобы внешняя нормаль в точке A_0 совпадала с осью y_n. Тогда граничное условие (2.2) примет вид

$$\left[\tilde{a}_{ij}(x, u, u_x)\frac{\partial y_k}{\partial x_j}u_{y_k}\cos(\mathbf{n}, x_i) + a_i(x, u, 0)\cos(\mathbf{n}, x_i) + \right.$$
$$\left. + \varphi(x, u) - \varphi_0(x)\right]\Big|_{S_1} = 0,$$

где

$$\tilde{a}_{ij} = \int\limits_0^1 \frac{\partial a_i(x, u, tu_x)}{\partial(tu_{x_j})}dt, \quad \cos(\mathbf{n}, x_i)|_{S_1} = \frac{\partial y_n}{\partial x_i}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial y_n}{\partial x_k}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

В точке A_0 обращаются в нуль производные вида u_{y_r} с $r \neq n$, а $u_{y_n} \geqslant 0$. Поэтому в силу условия (2.30) имеем в точке A_0

$$a_i(x, u, 0)\cos(\mathbf{n}, x_i) + \varphi(x, u) - \varphi_0(x) \leqslant 0,$$

но это противоречит (2.32).

Аналогичные рассуждения в точке минимума $u(x)$ приводят к оценке u снизу.

Теорема 2.3. *Если $a_i(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$ удовлетворяют условиям теоремы 7.6 гл. IV, $f \in L_{q_1}(\Omega)$, $\varphi_0 \in W^1_{q_1}(\Omega)$ с $q_1 > \max\{n/m; 1\}$ и если при $x \in S$ и $|u| \geqslant R$ выполняется неравенство $u\varphi(x, u) \geqslant 0$, то для любого ограниченного обобщенного решения $u(x)$ из $W^1_m(\Omega)$ задачи* (2.1), (2.2) $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u|$ *оценивается постоянной, зависящей лишь от R, $\operatorname{mes}\Omega$, $\|f\|_{q_1, \Omega}$, $\|\varphi_0\|^{(1)}_{q_1, \Omega}$, q_1, нормы $\|u\|_{q, \Omega}$ с каким-либо $q > n\left(\frac{\alpha}{m} - 1\right)$, а также от величин ν, μ_0, μ_1, α, m, k_0, $\|\varphi_3\|_{q_1, \Omega}$ из условий* (7.4), (7.5) *гл.* IV.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 7.6 гл. IV. Можно привести различные критерии типа теоремы 7.5 гл. IV, гарантирующие оценку нормы $\|u\|_{q, \Omega}$. Мы здесь на этом останавливаться не будем.

§ 3. Теоремы существования

Оценок, установленных в § 2, достаточно, чтобы на основании теоремы 1.2 доказать существование решения задачи (2.1), (2.2). Будем предполагать, что $a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial p_j}$, $\frac{\partial a_i}{\partial u} p_i + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a$, $b_0(x, u) \equiv \varphi(x, u) - \varphi_0$ и S удовлетворяют условиям а)-с) теоремы 1.2, $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ и, кроме того, $a_i(x, u, p)\cos(\mathbf{n}, x_i)$ подчиняются ограничениям, наложенным в пункте а) теоремы 1.2 на функцию $b(x, u, p)$. Предположим, далее, что при $x \in \overline{\Omega}$, $|u| \leqslant M$ с произвольным $M > 0$ функции $a_i(x, u, p)$, $a(x, u, p)$ и $\varphi(x, u)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Для доказательства разрешимости задачи (2.1), (2.2) рассмотрим семейство задач, зависящих от параметра $\tau \in [0, 1]$:

$$\left.\begin{aligned} L_\tau(u) \equiv \tau\left[\frac{da_i(x, u, u_x)}{dx_i} + a(x, u, u_x)\right] + (1-\tau)\left[\frac{da_i^0(u_x)}{dx_i} - u\right] = \\ = \tau f(x), \qquad x \in \Omega, \\ L_\tau^{(S)}(u) = \left[\tau a_i(x, u, u_x) + (1-\tau)\, a_i^0(u_x)\right]\cos(\mathbf{n}, x_i) + \\ + \tau\varphi(x, u) + (1-\tau)\, u = \tau\varphi_0(x), \qquad x \in S, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

где $a_i^0(u_x) = \left(1 + u_x^2\right)^{(m-2)/2} u_{x_i}$.

При $\tau=0$ задача (3.1) удовлетворяет условиям теоремы 2.2 с $\forall R>0$, и потому $u\equiv 0$ является ее единственным решением в классе $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$.

Предположим, что для всех решений $u(x,\tau)$ задачи (3.1), $\tau\in[0,1]$, можно дать равномерную относительно $\tau\in[0,1]$ оценку $\max\limits_{\Omega}|u(x,\tau)|\leqslant M$. Тогда в силу теоремы 2.1 справедлива оценка $|u(x,\tau)|_{\Omega}^{(1+\beta)}\leqslant c$ с некоторыми $\beta>0$ и c, зависящими от M и общими для всех $\tau\in[0,1]$. Ввиду этого теорема 1.2 гарантирует существование единственного решения $u(x,\tau)\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ задачи (3.1) при $\forall\tau\in[0,1]$ при условии, что соответствующие задачи в вариациях неограниченно разрешимы в классе $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема 3.1. *Предположим следующее*:

a) *На множествах* $\mathfrak{M}_{MM_1}=\{x,u,p\colon x\in\overline{\Omega},\ |u|\leqslant M,\ |p|\leqslant M_1\}$ *с произвольными положительными* M *и* M_1 *функции* $a_i(x,u,p)$, $\dfrac{\partial a_i(x,u,p)}{\partial u}$, $\dfrac{\partial a_i(x,u,p)}{\partial p_j}$ *и их частные производные по* x_k, *и* p_k, *а также функции* $a(x,u,p)$, $\dfrac{\partial a}{\partial u}$, $\dfrac{\partial a}{\partial p_i}$, φ, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial x_i}$ *удовлетворяют условию Гельдера с показателем* α *по переменным* x *и условию Гельдера с показателем* $\alpha'>\alpha$ *по переменным* u, p.

b) *Выполнены неравенства* (2.3), (2.4), (2.29).

c) $S\in C^{2+\alpha}$, $f(x)\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_0(x)\in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$.

d) *Для всех решений* $u(x,\tau)$ *класса* $C^2(\overline{\Omega})$ *задачи* (3.1) *верна оценка* $\max\limits_{\Omega}|u(x,\tau)|\leqslant M$ *с постоянной* M, *не зависящей от* τ *из* $[0,1]$.

e) *На любом решении* $u(x,\tau)$ *задачи* (3.1) *соответствующие задачи в вариациях неограниченно разрешимы.*

Тогда при каждом $\tau\in[0,1]$ *существует единственное решение задачи* (3.1) *и, в частности, задачи* (2.1), (2.2), *принадлежащее* $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Покажем, что от условия e) можно освободиться, если доказывать только существование решения.

Предварительно установим следующее вспомогательное предложение, касающееся разрешимости нелинейных краевых задач более простого вида:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dA_i^{\tau}(x,u_x)}{dx_i}-u\equiv\tau\frac{dA_i(x,u_x)}{dx_i}+(1-\tau)\frac{da_i^0(u_x)}{dx_i}-u=\tau F(x),\\ x\in\Omega,\\ A_i^{\tau}(x,u_x)\cos(\mathbf{n},x_i)+u=\tau\Phi(x),\qquad x\in S.\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Пусть на множествах* $\mathfrak{M}_{M_1}=\{x, p: x\in\bar\Omega, |p|\leqslant M_1\}$ *с произвольным* $M_1>0$ *функции* $A_i(x, p)$, $\frac{\partial A_i}{\partial p_j}$, $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 A_i}{\partial p_j\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 A_i}{\partial p_j\partial p_k}$ *удовлетворяют условию Гельдера с показателем* γ *по* x *и условию Гельдера с показателем* $\gamma'>\gamma$ *по* p, *причем*

$$\frac{\partial A_i(x, p)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j\geqslant\nu(M_1)\xi^2,\qquad \nu>0. \tag{3.3}$$

Тогда, если $S\in C^{2+\gamma}$, *то при любых* $F\in C^\gamma(\bar\Omega)$, $\Phi\in C^{1+\gamma}(\bar\Omega)$ *и* $\tau\in[0, 1]$ *существует единственное решение* $u(x, \tau)\in C^{2+\gamma}(\bar\Omega)$ *задачи* (3.2).

Заметим, что (3.2) есть упрощенный вариант задачи (3.1) с $a=-\varphi=-u$ и a_i, не зависящими явно от u. Теорема 2.2 гарантирует для решений $u(x, \tau)$ задачи (3.2) оценку $\max\limits_\Omega|u(x, \tau)|\leqslant R$, где постоянная $R=\max\left\{\max\limits_\Omega\left|\frac{\partial A_i(x, 0)}{\partial x_i}-F(x)\right|;\ \max\limits_S|A_i(x, 0)\times\right.$ $\times\cos(\mathbf{n}, x_i)-\Phi(x)|\}$ не зависит от $\tau\in[0, 1]$. Поэтому в силу теоремы 3.1 для доказательства леммы 3.1 остается убедиться в том, что соответствующие (3.2) задачи в вариациях неограниченно разрешимы или, что то же, однородные задачи в вариациях имеют лишь тривиальное решение. Последние имеют вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dx_i}\left[\left(\tau\frac{\partial A_i(x, u_x)}{\partial u_{x_j}}+(1-\tau)\frac{\partial a_i^0(u_x)}{\partial u_{x_j}}\right)w_{x_j}\right]-w=0,\quad x\in\Omega,\\&\left[\tau\frac{\partial A_i(x, u_x)}{\partial u_{x_j}}+(1-\tau)\frac{\partial a_i^0(u_x)}{\partial u_{x_j}}\right]w_{x_j}\cos(\mathbf{n}, x_i)+w=0,\quad x\in S.\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Тождественное равенство нулю решений $w(x, \tau)$ этой задачи вытекает из соответствующего ей интегрального тождества

$$\int\limits_\Omega\left[\left(\tau\frac{\partial A_i}{\partial u_{x_j}}+(1-\tau)\frac{\partial a_i^0}{\partial u_{x_j}}\right)w_{x_j}\eta_{x_i}+w\eta\right]dx+\int\limits_S w\eta\,ds=0, \tag{3.5}$$

справедливого при $\forall\eta\in W_2^1(\Omega)$. Полагая в нем $\eta=w$ и учитывая условие (3.3) на $\frac{\partial A_i}{\partial u_{x_j}}$ и аналогичное свойство $\frac{\partial a_i^0}{\partial u_{x_j}}$, заключаем, что $w\equiv0$.

Итак, лемму 3.1 можно считать доказанной.

Вернемся к общей задаче (3.1). Предполагаются выполненными лишь условия a) — d) теоремы 3.1.

Из теоремы 2.1 следует, что при некотором $\beta > 0$ для всех возможных решений задачи (3.1) справедлива оценка $|u|_{\Omega}^{(1+\beta)} \leqslant M_2$. Пусть $v(x)$ — произвольная функция из $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$. Сопоставим задаче (3.1) задачу (3.2) с

$$\left.\begin{aligned} &A_i(x, u_x) = a_i(x, v(x), u_x),\\ &\quad F(x) = f(x) - a(x, v(x), v_x(x)) - v(x),\\ &\quad \Phi(x) = \varphi_0(x) - \varphi(x, v(x)) + v(x). \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Легко проверить, что в силу предположения a) функции $A_i(x, p)$, $F(x)$ и $\Phi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 3.1 с $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$, и потому лемма 3.1 гарантирует при любой фиксированной $v \in C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ существование единственного решения $u(x, \tau) \in C^{2+\gamma}(\overline{\Omega})$ задачи (3.2), (3.6) при каждом τ из $[0, 1]$. Таким образом, задача (3.2), (3.6) определяет в пространстве $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ преобразование

$$u = \Psi(v, \tau), \tag{3.7}$$

зависящее от параметра $\tau \in [0, 1]$. Неподвижные точки этого преобразования и будут искомыми решениями задачи (3.1).

Для доказательства существования у $\Psi(v, \tau)$ неподвижных точек обратимся к теореме Лерэ-Шаудера 8.1 гл. IV. В качестве множества $\mathfrak{N}$ в ней следует взять шар $|v|_{\Omega}^{(1+\beta)} \leqslant M_2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, в пространстве $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$, так что неподвижные точки Ψ не попадают на границу шара.

Чтобы проверить выполнение условий теоремы Лерэ-Шаудера, установим оценку разности двух решений задачи (3.2), (3.6), отвечающих двум различным функциям v из $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ и различным значениям параметра τ. Это сделаем, как и при доказательстве теоремы 1.2, с помощью оценок § 3 гл. III для линейных задач.

Лемма 3.2. *Для разности*

$$u = u' - u'' \equiv \Psi(v', \tau') - \Psi(v'', \tau'')$$

при $\forall \gamma \leqslant \alpha\beta$ *справедливо неравенство*

$$|u|_{\Omega}^{(2+\gamma)} \leqslant c|v' - v''|_{\Omega}^{(1+\gamma)} + c\left(1 + |u'|_{\Omega}^{(2+\gamma)} + \right.$$

$$\left. + |u''|_{\Omega}^{(2+\gamma)}\right)\left[|u' - u''|_{\Omega}^{(1)} + |\tau' - \tau''| + |v' - v''|_{\Omega}^{(1)}\right], \tag{3.8}$$

где постоянная c определяется только нормами $|v'|_{\Omega}^{(1+\beta)}$, $|v''|_{\Omega}^{(1+\beta)}$ $|u'|_{\Omega}^{(1)}$ *и* $|u''|_{\Omega}^{(1)}$ *) *и не зависит от* τ *из* $[0, 1]$.

Рассмотрим функцию $u = u' - u''$ как решение линейной задачи типа (1.14), (1.15):

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{a}_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \frac{d\tilde{a}_{ij}(x)}{dx_i} u_{x_j} - u = -\tilde{f}(x), && x \in \Omega, \\ &\tilde{a}_{ij}(x)\cos(\mathbf{n}, x_i)\, u_{x_j} + u = -\tilde{\varphi}(x), && x \in S, \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

где

$$\tilde{a}_{ij}(x) = \int_0^1 \frac{\partial a_i^{\tau'}\left(x, v^t(x), u_x^t(x)\right)}{\partial u_{x_j}^t}\, dt,$$

$$\tilde{f}(x) = \left(v'_{x_i} - v''_{x_i}\right)\int_0^1 \left[\frac{\partial a_i^{\tau'}\left(x, v^t, u_x^t\right)}{\partial v^t} + \frac{\tau'\, \partial a\left(x, v^t, v_x^t\right)}{\partial v_{x_i}^t}\right] dt +$$
$$+ (v' - v'')\int_0^1 \left[\frac{\partial^2 a_i^{\tau'}\left(x, v^t, u_x^t\right)}{\partial v^t \partial u_{x_j}^t} u_{x_i x_j}^t + \frac{\partial^2 a_i^{\tau'}}{\partial v^t} v_{x_i}^t + \frac{\partial^2 a_i^{\tau'}}{\partial v^t \partial x_i} + 1 + \right.$$
$$\left. + \frac{\tau'\, \partial a\left(x, v^t, v_x^t\right)}{\partial v^t}\right] dt + (\tau' - \tau'')\left[\frac{da_i\left(x, v'', u_x''\right)}{dx_i} - \frac{da_i^0\left(x, u_x''\right)}{dx_i} - \right.$$
$$\left. - f(x) + a\left(x, v'', v_x''\right)\right],$$

$$\tilde{\varphi}(x) = (v' - v'')\int_0^1 \left[\frac{\partial a_i^{\tau'}\left(x, v^t, u_x^t\right)}{\partial v^t}\cos(\mathbf{n}, x_i) + \frac{\partial \varphi\left(x, v^t\right)}{\partial v^t}\right] dt +$$
$$+ (\tau' - \tau'')\left[a_i\left(x, v'', u_x''\right)\cos\left(\mathbf{n}, x_i\right) - a_i^0\left(x, u_x''\right)\cos\left(\mathbf{n}, x_i\right) - \right.$$
$$\left. - \varphi_0(x) + \varphi(x, v'') - v\right],$$

$$u^t(x) = tu'(x) + (1 - t)\, u''(x), \quad v^t(x) = tv'(x) + (1 - t)\, v''(x). \tag{3.10}$$

Принимая во внимание условие а) теоремы 3.1 и используя, как в доказательстве теоремы 1.2, неравенства (1.11), (1.12), можно вывести для коэффициентов и свободных членов в уравнении и граничном условии (3.9) следующие оценки,

*) Мы не отмечаем здесь и ниже в доказательстве леммы зависимость c от характеристик известных функций.

аналогичные (1.16):

$$\left.\begin{aligned}
&\max_{\Omega}|\tilde{a}_{ij}(x)|\leqslant c,\ \langle a_{ij}\rangle_{\Omega}^{(\gamma)}\leqslant c\,[1+|u'|_{\Omega}^{(2+\gamma)}+|u''|_{\Omega}^{(2+\gamma)}]^{\gamma/(1+\gamma)},\\
&\max_{\Omega}\left|\frac{d\tilde{a}_{ij}(x)}{dx_l}\right|\leqslant c\left[1+|u'|_{\Omega}^{(2+\gamma)}+|u''|_{\Omega}^{(2+\gamma)}\right]^{1/(1+\gamma)},\\
&\qquad\left\langle\frac{da_{ij}}{dx_l}\right\rangle_{\Omega}^{(\gamma)}\leqslant c\left[|u'|_{\Omega}^{(2+\gamma)}+|u''|_{\Omega}^{(2+\gamma)}+1\right],\\
&\qquad\max_{\Omega}|\tilde{\varphi}|\leqslant c\,[\max_{\Omega}|v'-v''|+|\tau'-\tau''|],\\
&\max_{\Omega}|\tilde{f}|+\max_{\Omega}|\nabla\tilde{\varphi}|\leqslant c\,(\max_{\Omega}|v'-v''|+|\tau'-\tau''|)\times\\
&\qquad\times\left(1+|u'|_{\Omega}^{(2+\gamma)}+|u''|_{\Omega}^{(2+\gamma)}\right)^{1/(1+\gamma)}+c\,|v'-v''|_{\Omega}^{(1)},\\
&\langle\tilde{f}\rangle_{\Omega}^{(\gamma)}+\langle\tilde{\varphi}\rangle_{\Omega}^{(1+\gamma)}\leqslant\\
&\leqslant c\left(|v'-v''|_{\Omega}^{(1)}+|\tau'-\tau''|\right)\left[|u'|_{\Omega}^{(2+\gamma)}+|u''|_{\Omega}^{(2+\gamma)}+1\right]+\\
&\qquad\qquad+c\,|v'-v''|_{\Omega}^{(1+\gamma)}.
\end{aligned}\right\}\quad(3.11)$$

Здесь постоянная c зависит лишь от $|u'|_{\Omega}^{(1)}$, $|u''|_{\Omega}^{(1)}$, $|v'|_{\Omega}^{(1+\beta)}$ и $|v''|_{\Omega}^{(1+\beta)}$.

Для решения $u(x)$ линейной задачи (3.9) справедливо неравенство (3.5) гл. III. Из него в силу (3.11) следует желаемое неравенство (3.8).

Обратимся к доказательству непрерывности преобразования Ψ по (v,τ). Для этого предположим, что при $k\to\infty$ последовательность $\{v_k(x)\}$ сходится к функции $v_0(x)$ в норме $C^{1+\beta}(\Omega)$, а $\tau_k\to\tau_0$. Через $u_k(x)$ и $u_0(x)$ будем обозначать соответствующие решения задачи (3.2), (3.6). Из условий b) — c) теоремы 3.1 и из теорем 2.1, 2.2 следует, что последовательность $\{u_k(x)\}$ компактна в $C^1(\overline{\Omega})$. Пусть $\{u_{k'}(x)\}$ — какая-либо подпоследовательность $\{u_k\}$. Из нее в свою очередь можно выбрать подпоследовательность $\{u_{k''}\}$, сходящуюся в норме $C^1(\overline{\Omega})$. Применим теперь неравенство (3.8) к двум каким-либо функциям $u''=u_{m''}$, $u'=u_{k''}$ этой подпоследовательности. В результате получим неравенство

$$\begin{aligned}
|u_{k''}-u_{m''}|_{\Omega}^{(2+\gamma)}\leqslant c\left(1+|u_{k''}|_{\Omega}^{(2+\gamma)}+|u_{m''}|_{\Omega}^{(2+\gamma)}\right)\Big[|u_{k''}-u_{m''}|_{\Omega}^{(1)}+\\
+|\tau_{k''}-\tau_{m''}|+|v_{k''}-v_{m''}|_{\Omega}^{(1+\gamma)}\Big].\quad(3.12)
\end{aligned}$$

Отсюда так же, как в конце § 1 из (1.16), выводим, что

$$|u_{k''} - u_{m''}|_{\Omega}^{(2+\gamma)} \to 0 \quad \text{при} \quad k'',\ m'' \to \infty.$$

Предельный переход по данной подпоследовательности в задаче (3.2), (3.6) показывает, что единственной предельной функцией для $u_{k''}$ может быть лишь $u_0(x, \tau)$, т. е. $|u_{k''} - u_0|_{\Omega}^{(2+\gamma)} \to 0$ при $k'' \to \infty$. Так как подпоследовательность $\{u_{k'}\}$ выбиралась из $\{u_k\}$ произвольно, то, очевидно, и вся последовательность $\{u_k\}$ сходится к $u_0(x, \tau)$ в норме $C^{2+\gamma}(\overline{\Omega})$. Таким образом, непрерывность преобразования $\Psi(v, \tau)$ по (v, τ) установлена.

Докажем, что Ψ преобразует $\mathfrak{R}\times[0, 1]$ в компактное в $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ множество. Для этого рассмотрим произвольную последовательность $u_k = \Psi(v_k, \tau_k)$, где $v_k \in \mathfrak{R}$, $\tau_k \in [0, 1]$, $k = 1, 2, \ldots$ Так как $\mathfrak{R}$ — шар в пространстве $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$, то $\{v_k\}$ компактна в $C^{1+\beta'}(\overline{\Omega})$ с $\forall\beta' < \beta$, и потому из доказанного выше следует, что последовательность $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, компактна в $C^{2+\gamma'}(\overline{\Omega})$, $\gamma' = \alpha\beta$, и тем более компактна в $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$. Итак, доказано, что преобразование $\Psi(v, \tau)$ в пространстве $C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ непрерывно и компактно, т. е. вполне непрерывно. Из всех условий теоремы Лерэ — Шаудера осталось убедиться, что при $\tau = 0$ суммарный индекс неподвижных точек отличен от нуля.

Мы уже видели выше, что при $\tau = 0$ единственным решением задачи (3.1) или, что то же, единственной неподвижной точкой преобразования $\Psi(v, 0)$ является функция $u \equiv 0$. Замечая, что при $\tau = 0$ задача (3.2), (3.6), определяющая преобразование $\Psi(v, 0)$, совпадает с задачей (3.1) с $\tau = 0$, выводим, что $\Psi(v, 0) \equiv 0$ при $\forall v \in C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$, и, следовательно, $v - \Psi(v, 0)$ — тождественное преобразование. Это означает, что индекс неподвижной точки $u \equiv 0$ преобразования $\Psi(v, 0)$ равен единице.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 10.1 гл. IV, и потому при каждом $\tau \in [0, 1]$ существует неподвижная точка $u(x, \tau)$ преобразования $\Psi(v, \tau)$. Из доказанного выше следует, что $u(x, \tau)$ принадлежит $C^{2+\gamma}(\overline{\Omega})$ и является решением задачи (3.1).

Итак, доказана следующая

Теорема 3.2. *При выполнении условий* a) — d) *теоремы* 3.1 *при каждом* τ *из* $[0, 1]$ *существует решение* $u(x, \tau)$ *задачи* (3.1), *принадлежащее* $C^{2+\gamma}(\overline{\Omega})$ *с некоторым* $\gamma > 0$, *зависящим от постоянной* M *из* d).

ЛИТЕРАТУРА

I. Л а д ы ж е н с к а я О. А., У р а л ь ц е в а Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», 1964.

1. А л е к с а н д р о в А. Д.
   1) Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, Гостехиздат, М., 1948.
   2) Некоторые теоремы об уравнениях в частных производных второго порядка, Вестник ЛГУ, № 8 (1954), 3—17.
   3) Теоремы единственности для поверхностей «в целом», I—VII, Вестник ЛГУ, № 19 (1956), 5—17; № 7, серия матем., мех., астр., вып. 2 (1957), 15—44; № 7, серия матем., мех., астр., вып. 2 (1958), 14—26; № 13, серия матем., мех., астр., вып. 3 (1958), 27—34; № 19, серия матем., мех., астр., вып. 4 (1958), 5—8; № 1, серия матем., мех., астр., вып. 1 (1959), 5—13; № 7, серия матем., мех., астр., вып. 2 (1960), 5—13.
   4) Задача Дирихле для уравнений $\operatorname{Det}\|Z_{ij}\|=\varphi(Z_1, \ldots, Z_n, X_1, \ldots, X_n)$, Вестник ЛГУ, № 1, серия матем., мех., астр., вып. 1 (1958), 5—24.
   5) Исследования о принципе максимума, I—VI, Изв. вузов, Матем., № 5 (1958), 126—157; № 3 (1959), 3—12; № 5 (1959), 16—32; № 3 (1960), 3—15; № 5 (1960), 16—26; № 1 (1961), 3—20.
   6) Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле, ДАН СССР **134**, № 5 (1960), 1001—1004.
   7) Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле, Вестник ЛГУ, № 13, серия матем., мех., астр., вып. 3 (1963), 5—29.
   8) Общий метод оценки решения дифференциального уравнения, Сиб. матем. журн. 7 (1966), 486—498.
   9) Мажорирование решений линейных уравнений второго порядка, Вестник ЛГУ, № 1, серия матем., мех., астр., вып. 1 (1966), 5—25.
   10) О мажорантах решений и условиях единственности для решений эллиптических уравнений, Вестник ЛГУ, № 7, серия матем., мех., астр., вып. 2 (1966), 1—20.
   11) Принцип максимума, ДАН СССР **173**, № 2 (1967), 247—250.
2. Б а б и ч В. М.
   1) К вопросу о распространении функций, УМН 8, вып. 2 (54) (1953), 111—113.

   Б а б и ч В. М. и С л о б о д е ц к и й Л. Н.
   2) Об ограниченности интеграла Дирихле, ДАН СССР **106**, № 4 (1956), 604—606.
3. Б а к е л ь м а н И. Я.
   1) К теории квазилинейных эллиптических уравнений, Сиб. матем. журн. 2, № 2 (1961), 179—186.
   2) Гиперповерхности с данной средней кривизной и квазилинейные эллиптические уравнения с сильными нелинейностями, Матем. сб. **75** (117), № 4 (1968), 604—638.
   3) Средняя кривизна и квазилинейные эллиптические уравнения, Сиб. матем. журн. **9**, № 5 (1968), 1014—1040.
4. Б е р н ш т е й н С. Н.
   1) Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre, Math. Ann. **59** (1904), 20—76.

2) Собрание сочинений, т. III, Изд. АН СССР, Москва, 1960.
3) О некоторых априорных оценках в обобщенной задаче Дирихле, ДАН СССР **122** (1959), 735—738.

5. Бирман М. Ш.
1) К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов, Матем. сб. 38 (**80**) (1956), 431—450.
Бирман М. Ш. и Скворцов Г. Е.
2) О квадратичной суммируемости старших производных решения задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей, Изв. вузов, Матем., № **5** (**30**) (1962), 12—21.

6. Векуа И. Н.
Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, Москва, 1959.

7. Вишик М. И.
1) Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений, Матем. сб. **25** (**67**) (1949), 189—234.
2) Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений, Труды Моск. матем. об-ва **1** (1952), 187—246.
3) Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющих дивергентную форму, Труды Моск. матем. об-ва **12** (1963), 125—184.
4) О первой краевой задаче для квазилинейных эллиптических уравнений и систем высших порядков. Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными. Август 1963 г., Новосибирск.

8. Головкин К. К.
К теоремам вложения, ДАН СССР **134**, № 1 (1960), 19—22.

9. Гольдштик М. А.
Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости, ДАН СССР **147**, № 6 (1962), 1310—1313.

10. Гусева О. В.
О краевых задачах для сильно эллиптических систем, ДАН СССР **102** (1955), 1069—1072.

11. Гюнтер Н. М.
Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики, Гостехиздат, 1953.

12. Демьянович Ю. К.
Метод сеток для некоторых задач математической физики, ДАН СССР **159**, № 2 (1964), 250—253.

13. Дубинский Ю. А.
1) Первая краевая задача для вырождающихся квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений, ДАН СССР **156**, № 5 (1964), 1018—1021.
2) Некоторые интегральные неравенства и разрешимость для вырожденных эллиптических систем дифференциальных уравнений, Матем. сб. **64** (1964), 458—480.

14. Иванов А. В.
1) Локальные оценки максимума модуля первых производных решений квазилинейных неравномерно эллиптических уравнений дивергентного вида, Записки науч. семинаров ЛОМИ **7** (1968), 87—125.
2) Локальные оценки максимума модуля первых производных решений квазилинейных неравномерно эллиптических и неравномерно параболических уравнений и систем общего вида, Труды МИАН им. В. А. Стеклова **110** (1970), 45—64.
3) О задаче Дирихле для квазилинейных неравномерно эллиптических уравнений 2-го порядка, Труды МИАН им. В. А. Стеклова **116** (1971), 34—54.

15. Ивочкина Н. М.

1) Задача Дирихле для квазилинейных двумерных эллиптических уравнений 2-го порядка, Проблемы матем. анализа, ЛГУ, вып. 2 (1969), 140—153.

Ивочкина Н. М. и Осколков А. П.

2) Нелокальные оценки первых производных решений задачи Дирихле для неравномерно эллиптических квазилинейных уравнений, Записки науч. семинаров ЛОМИ 5 (1967), 37—109.

3) Нелокальные оценки первых производных решений первой краевой задачи для неравномерно эллиптических и неравномерно параболических недивергентных уравнений, Записки науч. семинаров ЛОМИ 11 (1968), 6—72.

4) Нелокальные оценки первых производных решений первой краевой задачи для некоторых классов неравномерно эллиптических и неравномерно параболических уравнений и систем, Труды МИАН им. В. А. Стеклова 110 (1970), 65—101.

16. Ильин В. П.

1) О теореме вложения для предельного показателя, ДАН СССР 96, № 5 (1954), 905—908.

2) Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных методов, Труды МИАН им. В. А. Стеклова 53 (1959), 64—127.

17. Казимиров В. И.

О полунепрерывности интегралов вариационного исчисления, УМН 11, вып. 3 (69) (1955), 125—129.

18. Качуровский Р. И.

Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах, УМН 23, вып. 2 (140) (1968), 121—168.

19. Кондрашов В. И.

О некоторых оценках семейств функций, подчиненных интегральным неравенствам, ДАН СССР 18 (1938), 235—240.

20. Кошелев А. И.

Об ограниченности в L_p производных решений эллиптических дифференциальных уравнений, Матем. сб. 38 (80), № 3 (1956), 278—312.

21. Ладыженская О. А.

1) О методе Фурье для волнового уравнения, ДАН СССР 75 (1950), 765—768.

2) О замыкании эллиптического оператора, ДАН СССР 79 (1951), 723—725.

3) Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., Гостехиздат, 1953.

4) О решении общей задачи дифракции, ДАН СССР 96, № 3 (1954), 433—436.

5) Простое доказательство разрешимости основных краевых задач и задачи о собственных значениях для линейных эллиптических уравнений, Вестник ЛГУ, № 11 (1955), 23—29.

6) Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными, УМН 12, вып. 5 (77) (1957), 123—148.

7) О дифференциальных свойствах обобщенных решений некоторых многомерных вариационных задач, ДАН СССР 120, № 5 (1958), 956—959.

8) Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений, ДАН СССР 107 (1956), 636—639; Труды Моск. матем. об-ва 7 (1958), 149—177.

9) Об интегральных оценках, сходимости приближенных методов и решениях в функционалах для линейных эллиптических операторов, Вестник ЛГУ, № 7, серия матем., мех., астр., вып. 2 (1958), 60—69.

10) О разрешимости «в целом» краевых задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений и уравнений Навье — Стокса, Труды IV Всесоюзного математического съезда 1961 г., т. I, 1963, 134—157.

Ладыженская О. А., Солонников В. А. и Уральцева Н. Н.

11) Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», М., 1967.

Ладыженская О. А. и Уральцева Н. Н.

12) Квазилинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи со многими независимыми переменными, УМН **16**, вып. 1 (97) (1961), 19—90 (доклад, прочитанный в Ленингр. матем. об-ве 24. 9. 1959 г.).

13) О вариационной задаче и квазилинейных эллиптических уравнениях со многими независимыми переменными, ДАН СССР **135**, № 6 (1960), 1330—1334.

14) О дифференциальных свойствах ограниченных обобщенных решений многомерных квазилинейных эллиптических уравнений и вариационных задач, ДАН СССР **138**, № 1 (1961), 29—32.

15) On the smoothness of weak solutions of quasilinear equations in several variables and of variational problems, Comm. Pure and Appl. Math. **14**, № 3 (1961), 481—495.

16) Краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений, ДАН СССР **139**, № 3 (1961), 544—547.

17) О регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений, ДАН СССР **140**, № 1 (1961), 45—47.

18) Краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений, ч. I, Изв. АН СССР, сер. матем. **26** (1962), 5—52; ч. II, там же, 753—780.

19) Краевая задача для линейных и квазилинейных уравнений и систем параболического типа, ч. III, Изв. АН СССР, сер. матем. 27 (1963), 161—240.

20) О допустимых расширениях понятия решения для линейных и квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка, Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., № 1 (1963), 10—25.

21) О непрерывности по Гёльдеру решений и их производных для линейных и квазилинейных уравнений эллиптического и параболического типов, ДАН СССР **155**, № 6 (1964), 1258—1261.

22) О некоторых классах неравномерно эллиптических уравнений, Записки науч. семинаров ЛОМИ **11** (1968), 129—149.

23) О тотальных оценках первых производных по x решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений, Записки науч. семинаров ЛОМИ **14** (1969), 127—155.

24) Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations, Comm. Pure and Appl. Math. **23**, № 4 (1970), 677—703.

22. Мазья В. Г.

1) Некоторые оценки для решений эллиптических уравнений второго порядка, ДАН СССР **137**, № 5 (1965), 1057—1059.

2) О слабых решениях задач Дирихле и Неймана, Труды Моск. матем. об-ва **20** (1969), 137—172.

3) Примеры нерегулярных решений квазилинейных эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами, Функц. анализ и его приложения 2, вып. 3 (1968), 53—57.

4) Классы множеств и мер, связанные с теоремами вложения. Теоремы вложения и их приложения, Труды симп. по теоремам вложения 1966 г., Баку (1970), 142—159.

23. Михлин С. Г.

1) О некоторых оценках, связанных с функцией Грина, ДАН СССР **78**, № 3 (1951), 443—446.

2) Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, М. — Л., 1952.

24. Осколков А. П.

1) О некоторых оценках для неравномерно эллиптических уравнений и систем, Труды МИАН им. В. А. Стеклова 92 (1966), 203—232.
2) Априорные оценки первых производных решений задачи Дирихле для неравномерно эллиптических квазилинейных уравнений, Труды МИАН им. В. А. Стеклова 102 (1967), 105—127.
3) Замечание об оценке постоянной Гёльдера для некоторых неравномерно эллиптических квазилинейных уравнений, Записки науч. семинаров ЛОМИ 7 (1968), 178—183.
4) О некоторых классах неравномерно эллиптических квазилинейных уравнений, Записки науч. семинаров ЛОМИ 14 (1969), 156—172.

Осколков А. П. и Ивочкина Н. М. см. Ивочкина Н. М.

25. Петровский И. Г.

1) Об аналитичности решений уравнений с частными производными, Матем. сб. 5, № 1 (1939), 3—68.
2) Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей, УМН 8 (1941), 161—170.

26. Плотников В. И.

1) О дифференцируемости решений регулярных вариационных задач в непараметрической форме, Матем. сб. 47 (89): 3 (1959), 355—396.

Плотников В. И., Сигалов А. Г. и Уральцева Н. Н.

2) Квазилинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи, Труды IV Всесоюзного математического съезда т. 1 (1963), 199—213.

27. Ривкинд В. Я.

1) Об оценках скорости сходимости решений разностных уравнений к решению эллиптического уравнения с разрывными коэффициентами и об одном методе решения задачи Дирихле, ДАН СССР 149, № 6 (1963).
2) Приближенный метод решения задачи Дирихле и об оценках скорости сходимости решений разностных уравнений к решениям эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, Вестник ЛГУ, № 13, серия матем., мех., астр., вып. 3 (1964), 37—52.

28. Сигалов А. Г.

1) Двумерные задачи вариационного исчисления, УМН 6, 2 (1951), 16—101.
2) Двумерные задачи вариационного исчисления в параметрической форме, Труды Моск. матем. об-ва 2 (1953), 201—233.
3) Двумерные задачи вариационного исчисления в непараметрической форме, преобразованные в параметрическую форму, Матем. сб. 38 (80), (1956), 183—202.

Сигалов А. Г., Плотников В. И. и Уральцева Н. Н. см. Плотников В. И.

29. Скворцов Г. Е. и Бирман М. Ш. см. Бирман М. Ш.

30. Слободецкий Л. Н. и Бабич В. М. см. Бабич В. М.

31. Смирнов В. И.

1) Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1951.
2) Курс высшей математики, т. V, Физматгиз, 1960.

32. Соболев С. Л.

Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.

33. Соболевский П. Е.

Об уравнениях с операторами, образующими острый угол, ДАН СССР 116, № 5 (1957), 754—757.

34. Соломяк Т. Б.

1) Краевые задачи для одного класса квазилинейных уравнений и систем эллиптического типа, Изв. вузов, серия матем., № 5 (12) (1959), 184—196.

2) О разрешимости краевых задач для одного класса квазилинейных эллиптических уравнений с сильными нелинейностями, ДАН СССР **146**, № 6 (1962), 1282—1285.

3) Задача Дирихле для одного класса вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений, Изв. вузов, серия Матем., № 2 (1970), 76—85.

4) Приложение теории вырождающихся уравнений к обратным задачам дозвуковых течений сжимаемых жидкостей. Сб. докладов Всесоюзной науч. конференции «Краевые задачи и их приложения в механике жидкостей и газов», Казань, 1970.

35. Солонников В. А.

1) Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле Даглиса — Ниренберга, Изв. АН СССР **28**, № 3 (1964), 665—706.

2) Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле Даглиса — Ниренберга, Труды МИАН им. В. А. Стеклова **92** (1966), 233—297.

3) Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем, Труды МИАН им. В. А. Стеклова **102** (1967), 137—160.

4) О матрицах Грина для эллиптических краевых задач, I, Труды МИАН им. В. А. Стеклова **110** (1970); II, Труды МИАН им. В. А. Стеклова **116** (1971), 181—216.

Солонников В. А., Ладыженская О. А. и Уральцева Н. Н. см. Ладыженская О. А.

36. Уральцева Н. Н.

1) О регулярности решений многомерных эллиптических уравнений и вариационных задач, ДАН СССР **130**, № 6 (1960), 1206—1209.

2) Краевые задачи для квазилинейных эллиптических уравнений и систем с дивергентной главной частью, ДАН СССР **147**, № 2 (1962), 313—316.

3) Общие квазилинейные уравнения второго порядка и некоторые классы систем уравнений эллиптического типа, ДАН СССР **146**, № 4 (1962), 778—781.

4) Вырождающиеся квазилинейные эллиптические системы, Записки науч. семинаров ЛОМИ **7** (1968), 184—222.

Уральцева Н. Н. и Ладыженская О. А. см. Ладыженская О. А.

Уральцева Н. Н., Плотников В. И. и Сигалов А. Г. см. Плотников В. И.

37. Эйдус Д. М.

О решении краевых задач методом конечных разностей, ДАН СССР **83**, № 2 (1952), 191—194.

1. Agmon S., Douglis A. and Nirenberg L.

Estimates near the boundary for the solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary values, I, Comm. Pure and Appl. Math. **12** (1959), 623—727; II, Comm. Pure and Appl. Math. **17** (1964), 35—92.

2. Aronszajn N.

Boundary values of fonctions with finite Dirichlet integral. Conference on partial differential equations, Studies on eigenvalue problems, № 14 (Univ. of Kansas, 1955).

3. Allard W. K.

On boundary regularity for Plateau's problem, Bull. Amer. Math. Soc. **75**, № 3 (1969), 522—523.

4. Almgren F. J.

Existence and regularity almost everywhere of solutions of elliptic variational problems among surfaces of varying topological type and singularity structure, Ann. of Math. 87, 2 (1968), 321—391.

5. B e r s L. and N i r e n b e r g L.
1) On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications, Convegno intern. sulle equazioni lineari alle derivate parziali, Trieste, 1954, 111—140.
2) On linear and nonlinear elliptic boundary value problems in the plane, Convegno intern. sulle equazioni lineari alle derivate parziali, Trieste, 1954, 141—167.
6. B o m b i e r i E., D e G i o r g i E. and M i r a n d a M.
Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche, Arch. Rat. Mech. Anal. **32**, **4** (1969), 255—267.
7. B r o w d e r F. E.
1) Functional analysis and partial differential equations, I., Math. Ann. **138** (1959), 55—79.
2) Variational boundary value problems for quasilinear elliptic equations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **50**, № 1 (1963), 31—36; № 4 (1963), 592—598; № 5 (1963), 794—798.
8. C a c c i o p p o l l i R.
1) Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con n variabili indipendenti, Rend. Acc. Lincei **19** (1934), 83—89.
2) Limitazioni integrali per le soluzioni di un'equazioni lineare ellittica a derivate parziali, Giorn. Mat. Battaglini **80** (1950/51), 186—212.
9. C o r d e s H. O.
Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen, Math. Ann. **130** (1956), 278—312.
10. C o u r a n t R.
C o u r a n t R. and H i l b e r t D.
1) Methods of Mathematical Physics, vol. 1 (1933); vol. 2 (1937, 1962).
2) Dirichlet's principle, conformal mappings and minimal surfaces, New York, 1950.
C o u r a n t R., F r i e d r i c h s K. O. and L e v y H.
3) Über die partiellen Differentialgleichungen der Physik, Math. Ann. **100** (1928/29), 32—74.
11. D e G i o r g i E.
1) Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari, Mem. Acc. Sci. Torino **3** (1957), 1—19.
2) Un'estensione del teorema di Bernstein, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa **19** (1965), 79—85.
3) Frontiere orientate die misura minima, Seminario Mat. Scuola Norm. Pisa, 1960/61.
4) Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico, Boll. Unione mat. ital. I (1968), 135—137.
5) Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali, Atti del Convegno di Analisi Funzionale, Roma, 1968.
6) See Bombiery E.
12. D o u g l i s A.
D o u g l i s A. and N i r e n b e r g L.
1) Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations, Comm. Pure and Appl. Math. 8 (1955), 503—538.
D o u g l i s A., A g m o n S. and N i r e n b e r g L.
2) See Agmon S.
13. D u n f o r d N. and S c h w a r t z J.
Linear operators, part I: General Theory, 1958; part II: Spectral Theory. Self Adjoint operators in Hilbert space, 1963.
14. F e d e r e r H.
1) Geometric measure theory, 1969.

F e d e r e r H. and F l e m i n g W. H.
2) Normal and integral currents, Ann. of Math. 72 (1960), 458—520.
15. F i c h e r a G.
1) Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, Mem. Acc. Lincei 7 (1964), 91—140.
2) Elastostatics problems with unilateral constraints: The Signorini problem with ambiguous boundary conditions, Sem. 1962/63, Ist. Naz. Alta Mat. Roma 2 (1965), 613—679.
16. F i n n R.
1) Isolated singularities of solutions of non linear partial diff. equations, Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 385—404.
2) On equations of minimal surface type, Ann. of Math. 60 (1954), 397—416.
3) Growth properties of solutions of non linear elliptic equations, Comm. Pure and Appl. Math. 9 (1956), 415—423.
4) New estimates for equations of minimal surface type, Arch. Rat. Mech. Anal. 14 (1963), 337—375.
5) Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of prescribed mean curvature, J. Anal. Math. 14 (1965), 135—160.
F i n n R. and C o n c u s P.
6) On a class of capillary surfaces, J. Anal. Math., 23 (1970), 65—70.
F i n n R. and G i l b a r g D.
7) Three-dimensional subsonic flows and asymptotic estimates for elliptic partial differential equations, Acta Math. 98 (1957), 265—296.
17. F i o r e n z a R.
Sui problemi di derivata oblique per le equazioni ellitiche, Ricerche di Mat. Napoli 8 (1959), 83—110.
18. F l e m i n g W. H. and F e d e r e r H.
See Federer H.
19. F r i e d r i c h s K. O.
1) Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Math. Ann. 109, Hf. 4—5 (1934), 465—487, 685—713.
2) The identity of weak and strong extensions of differential operators, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944), 132—151.
F r i e d r i c h s K. O., C o u r a n t R. and L e v y H.
3) See Courant R.
20. G a g l i a r d o E.
1) Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili, Ricerche Mat. 7, № 1 (1958), 102—137.
2) Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili, Ricerche Mat. 8, № 1 (1959), 24—51.
3) Caratterizzazione delle trace sulla frontiera relativa ad alcune classi di funzioni in piu variabili, Rendiconti del Sem. Mat. Univ. Radova 27 (1957), 284—305.
21. G i l b a r g D.
1) Boundary value problems for non linear elliptic equations in n variables, Symp. Non-Linear Problems, Univ. Wisconsin Press, 1962, 151—159.
G i l b a r g D. and F i n n R.
2) See Finn R.
G i l b a r g D. and S e r r i n J.
3) On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations, J. Anal. Math. 4 (1954/56), 309—340.
22. G i u s t i E.
1) Sulla regolarita parziale delle soluzioni di sistemi ellittici quasi-lineari di ordine arbitrario, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa 23, № 1 (1969), 115—141.

G i u s t i E. and M i r a n d a M.
2) Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni, Boll. Unione mat. ital. II (1968).
3) Sulla regolarita delle soluzioni deboli dei sistemi ellitici, Ist. Mat. L. Tonelli, Univ. Pisa, 1968, 1—13.
4) Sulla regolarita delle soluzioni di una classe di sistemi ellittici quasilinear, Archive Rat. Mech. and Anal. 31, № 3 (1968), 173—184.

23. G r e c o D.
Nuove formale integrali di maggiorazione per le soluzioni di un'equazione lineare di tipo ellittico ed applicazioni alla teoria del potenziale, Ricerche Mat. 5 (1956), 126—149.

24. H a r t m a n Ph. and S t a m p a c c h i a G.
On some non-linear elliptic differential-functional equations, Acta Math. **115** (1966), 271—310.

25. H e i n z E.
On certain non-linear elliptic differential equations and univalent mappings, J. Anal. Math. **5** (1956/57), 197—272.

26. H i l b e r t D.
1) Mathematische Probleme, Ges. Abh. III, 1935.
2) Über das Dirichletshe prinzip, Jahresber. D. Math. verein 8 (1900), 184—188; Math. Ann. **59** (1904), 161—186.

27. H o p f E.
Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung von Elliptischen Typus, Sber. Preuss. Acad. Wiss. **19** (1927), 147—152.

28. J e n k i n s H. and S e r r i n J.
1) Variational problems of minimal surface type, I, Archive Rat. Mech. Anal. **12** (1963), 185—212.
2) The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions, J. reine und angew. Math. **229** (1968), 170—187.

29. J o h n F. and N i r e n b e r g L.
On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure and Appl. Math. **17**, № 3 (1961), 415—426.

30. K a d l e c J.
1) On the maximum principle for second order elliptic equations and the method of Wiener, Czech. Math. J. **14** (1964), 154—155.
K a d l e c J. and N e č a s J.
2) Sulla regolarita delle soluzioni di equazioni ellittische negli spazi $H^{k,\lambda}$, Ann. Sc. Norm. super. Pisa, **21** (1967), 527—545.

31. L e b e s g u e H.
1) Integrale, longueur, aire (thesis), Ann. mat. pura ed appl. **7** (1902), 231—359.
2) Sur le probleme de Dirichlet, Rend. Circ. Mat. Palermo **24** (1907), 371—402.

32. L e r a y J.
1) Majoration des derivees secondes des solutions d'un probleme de Dirichlet, J. Math. Pures et Appl. **17** (1938), 89—104.
2) Discussion d'un probleme de Dirichlet, J. Math. Pures et Appl. **18** (1939), 249—284.
L e r a y J. and L i o n s J. L.
3) Quelques resultats de Visik sur les problemes elliptiques non lineaires par les methodes de Minty — Browder, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 97—107.
L e r a y J. and S c h a u d e r J.
4) Topologie et equations fonctionnelles, Ann. Ec. norm. Super. **51** (1934), 45—78.

33. Lewy H.
1) Über den analytischen Charakter der Lösungen elliptischen Differentialgleichungen, Göttingen. Nachr., 1927, 178—186.
2) Neuer Beweis des analytischen Charakters der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen, Math. Ann. **101** (1929), 609—619; **107** (1934), 804.
Lewy H. and Stampacchia G.
3) On the regularity of the solutions of a variational inequality, Comm. Pure and Appl. Math. **22** (1969), 153—188.
34. Lions J. L.
Lions J. L. and Leray J.
1) See Leray J.
Lions J. L. and Stampacchia G.
2) Inequations variationelles non coercives, C. R. Acad. Sci. Paris **261** (1965), 25—27.
3) Variational inequalities, Comm. Pure and Appl. Math. **20** (1967), 453—519.
35. Littman W., Stampacchia G. and Weinberger H. F.
Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa **17** (1963), 43—77.
36. Minty G.
1) Monotone nonlinear operators in Hilbert space, Duke Math. J. **29** (1962), 341—346.
2) Two theorems on nonlinear functional equations in Hilbert space, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 691—692.
3) On a «monotonicity» method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **50** (1963), 1038—1041.
37. Miranda C.
1) Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, Springer, Berlin, 1955; Second revised edition Springer, Berlin, 1970.
2) Sur problema misto per le equazioni lineari ellittiche, Ann. Mat. Pura ed Appl. **39** (1955), 279—303.
38. Miranda M.
1) Disuguaglianze di Sobolev sulle ipersuperfici minimali, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **38** (1967), 69—91.
2) Sul minimo dell' integrale del gradiente di una funzione, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa **19**, 4 (1965), 627—665.
Miranda M., Bombieri E. and De Giorgi E.
See Bombieri E.
Miranda M. and Giusti E.
See Giusti E.
39. Morrey C. B.
1) On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), 126—166.
2) Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics, Univ. of California Publ. **1** (1943), 1—130.
3) Second order elliptic equations in several variables and Holder continuity, Math. Z. **72** (1959), 146—164.
4) Existence and differentiability theorems for variational problems for multiple integrals, Univ. of Wisconsin Press, Madison Wis. 1961, 241—270.
5) Quelques resultats recents du calcul des variations, Colloques Internationeaux du Centre National de la Recherche Scientifique, 117, Paris, Juin 1962, 25—30.
6) Multiple integrals in the calculus of variations, Springer-Verlag, 1966.
7) Partial regularity results for non-linear elliptic systems, Univ. of California, June 1967, 1—34.

40. Moser J.
1) A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. Pure and Appl. Math. 13, 3 (1960), 457—468.
2) On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. Pure and Appl. Math. 14 (1961), 577—591.
41. Nash J.
Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, Amer. J. Math. 80, 4 (1958), 931—954.
42. Nečas J.
1) Sur l'existence de la solution reguliere pour le probleme de Dirichlet de l'equation elliptique non-lineare d'ordre $2k$, Rend. Ac. Lincei 42 (1967), 347—354.
2) Sur la regularite des solutions variationnelles des equations elliptique non-lineaires d'ordre $2k$ en deux variables, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa 21 (1967), 427—457.
Nečas J. and Kadlec J.
3) See Kadlec J.
43. Von Neumann J.
Über einen Hilfsatz der Variationsrechnung, Abhandl. Math. Seminar Hamburg 8 (1931), 28—31.
44. Nirenberg L.
1) On nonlinear elliptic partial differential equations and Holder continuity, Comm. Pure and Appl. Math. 6 (1953), 103—156.
2) Remarks on strongly elliptic partial differential equations, Comm. Pure and Appl. Math. 8 (1955), 648—674.
3) On elliptic partial differential equations, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, 13 (1959), 115—162.
Nirenberg L., Agmon S. and Douglis A.
4) See Agmon S.
Nirenberg L. and Bers L.
5) See Bers L.
Nirenberg L. and Douglls A
6) See Douglis A.
Nirenberg L. and John F.
7) See John F.
45. Rado T.
On the problem of Plateau, Ergeb. Math. 2, Berlin, Springer-Verlag, 1933.
46. Rendheffer R.
An extension of certain maximum principles, J. reine und angew. Math 211 (1962), 70—77.
47. Reifenberg E. R.
1) Solution of the Plateau problem for m-dimensional surfaces of varying topological type, Acta Math. 104 (1960), 1—92.
2) An epiperimetric inequality related to the analyticity of minimal surfaces, Ann. of Math. 80 (1964), 1—14.
3) On the analyticity of minimal surfaces, Ann. of Math. 80 (1964), 15—21.
48. Riesz F. and Sz.-Nagy B.
Leçons d'analyse functionnele, Budapest, Akad. kiadó, 1955.
49. Schauder J.
1) Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Z. 38 (1934), 257—282.
2) Sur les equations lineaires du type elliptique a coefficientes continus, C. R. Acad. Scl. Paris 199 (1934), 1366—1368.
3) Sur les equations quasilineaires du type elliptique a coefficients continus, C. R. Acad. Scl. Paris 199 (1934), 1566—1568.

4) Numerische Abschatzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen, Studia Math. **5** (1934), 34—42.
5) Equations du type elliptique, problemes lineaires, Enseign. Math. **35** (1936), 126—139.

Schauder J. and Leray J.
6) See Leray J.

50. Schwartz J. and Dunford N.
See Dunford N.

51. Serrin J.
1) On the Harnack inequality for linear elliptic equations, J. Anal. Math. **4** (1955/56), 297—308.
2) On a fundamental theorem of the calculus of variations etc., Acta Math. **102** (1959), 1—32.
3) On the definition and properties of certain variational integrals, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 139—167.
4) A Harnack inequality for non linear equations, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 481—486.
5) A priori estimates for solutions of the minimal surface equations, Arch. Rat. Mech. Anal. **14** (1963), 376—383.
6) Pathological solutions of elliptic differential equations, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa **18** (1964), 385—387.
7) Removable singularities of solutions of elliptic equations, I, II, Arch. Rat. Mech. Anal. **17** (1964), 67—78; **20** (1965), 163—169.
8) Local behavior of solutions of quasi-linear elliptic equations, Acta Math. **111** (1964), 247—302.
9) Singularities of solutions of quasilinear equations, Proc. Symp. Appl. Math. Amer. Math. Soc. **17** (1965), 68—88.
10) Isolated singularities of solutions of quasilinear equations, Acta Math. **113** (1965), 219—240.
11) The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables, Philos. Trans. Roy. Soc. London **264** (1969), 413—496.

Serrin J. and Gilbarg D.
12) See Gilbarg D.

Serrin J. and Jenkins H.
See Jenkins H.

52. Stampacchia G.
1) Contributi alla regolarizzazione della soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni del secondo ordine ellittiche, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa **12** (1958), 223—245.
2) Problemi al contorno ellittici, con dati discontini, dotat di soluzioni holderiane, Ann. Mat. Pura ed Appl. **51** (1960), 1—38.
3) On some regular multiple integral problems in the calculus of variations, Comm. Pure and Appl. Math. **16** (1963), 383—421.
4) Some limit cases of L_p estimates for solutions of second order elliptic equations, Comm. Pure and Appl. Math. **16** (1963), 505—510.
5) Le probleme de Dirichlet pour les equations elliptique du second ordre a coefficientes discontinues, Ann. Inst. Fourier Grenoble **15** (1965). 189—258.

Stampacchia G. and Hartman Ph.
See Hartman Ph.

Stampacchia G. and Lewy H.
See Lewy H.

Stampacchia G. and Lions J. L.
See Lions J. L.

Stampacchia G., Littman W. and Weinberger H. F.
See Littman W.

53. Tonelli L.
1) Fondamenti del calcolo delle variazioni, vols. 1—3, Zanichelli, Bologna, 1923.
2) Sulla quadratura delle superficie, Atti Reale Acad. Lincei, Ser. 6, **3** (1926), 633—638.
3) Sur la semi-continuite des integrales double de calcul des variations, Acta Math. **53** (1929), 325—346.
4) L'estremo assoluto degli integrali doppi, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, S. 2, **3** (1933), 89—130.

54. Trudinger N. S.
On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations, Comm. Pure and Appl. Math. **20** (1967), 721—748.

55. Weinberger H. F., Littman W. and Stampacchia G.
See Littman W.

56. Weyl H.
The method of orthogoonal projection in potential theory, Duke Math. J. **7** (1940), 411—444.