



# THE DYNAMICAL THEORY OF SOUND

BY  
SIR HORACE LAMB,  
Sc.D., LL.D., F.R.S.

HONORARY FELLOW OF TRINITY COLLEGE  
AND RAYLEIGH LECTURER IN MATHEMATICS,  
IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE;  
FORMERLY PROFESSOR OF MATHEMATICS  
IN THE VICTORIA UNIVERSITY OF MANCHESTER

SECOND EDITION

L O N D O N  
EDWARD ARNOLD & Co.  
1931

Г. ЛЭМБ

# ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЗВУКА

Перевод с английского

Н. С. АГЕЕВОЙ

под редакцией

М. А. ИСАКОВИЧА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1960

## АННОТАЦИЯ

В монографии рассмотрены основные задачи классической акустики. Трактовка вопросов, разбираемых в книге,—математическая. Хотя развитие акустики в последние десятилетия выдвинуло целые новые области, почти или совсем не затронутые в этой книге, но то, что в ней имеется, не требует переработки. Книгу можно отнести к числу классических, которые будут читаться наряду с новыми и новейшими книгами, посвященными тому же вопросу.

*Г. Лэмб.*

Динамическая теория звука.

Редактор *В. А. Григорова.*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.*

Корректор *И. С. Цветкова.*

---

Сдано в набор 8/XI 1959 г. Подписано к печати 17/II 1960 г. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Физ. печ. л. 11,625. Условн печ. л. 19,06. Уч.-изд. л. 18,05.  
Тираж 5500 экз. Т-01030. Цена книги 11 р. Заказ №1385.

---

Государственное издательство физико-математической литературы.  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза.  
Москва, Трехпрудный пер., 9.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие редактора перевода</i> . . . . .	9
<i>Предисловие автора</i> . . . . .	10
<b>В в е д е н и е</b> . . . . .	13
1. Гармонические колебания и чистые тоны . . . . .	13
2. Музыкальные ноты . . . . .	16
3. Музыкальные интервалы. Диатоническая гамма . . . . .	17

### ГЛАВА I

#### ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

4. Маятник . . . . .	21
5. Гармоническое колебание . . . . .	22
6. Другие примеры . . . . .	24
7. Динамика системы с одной степенью свободы. Свободные колебания . . . . .	26
8. Вынужденные колебания маятника . . . . .	31
9. Вынужденные колебания произвольной системы с одной степенью свободы. Резонанс . . . . .	36
10. Суперпозиция гармонических колебаний . . . . .	38
11. Свободные колебания при наличии трения . . . . .	40
12. Общий случай диссипативной системы с одной степенью свободы. Влияние периодических вынуждающих сил . . . . .	44
13. Влияние затухания на резонанс . . . . .	50
14. Системы с многими степенями свободы. Примеры. Двойной маятник . . . . .	53
15. Общие уравнения системы со многими степенями свободы . . . . .	61
16. Периоды свободных колебаний системы со многими степенями свободы. Свойство стационарности . . . . .	64
17. Вынужденные колебания системы со многими степенями свободы. Принцип взаимности . . . . .	69
18. Сложение гармонических колебаний, происходящих в различных направлениях . . . . .	70
19. Переход к непрерывным системам . . . . .	73
20. Об использовании комплексных величин . . . . .	75
21. Замечания по истории вопроса . . . . .	80

## ГЛАВА II

## СТРУНЫ

22. Уравнение движения. Энергия . . . . .	82
23. Волны на неограниченной струне . . . . .	84
24. Отражение. Периодическое движение ограниченной струны . . . . .	89
25. Нормальные колебания ограниченной струны. Гармоники . . . . .	94
26. Струна, возбужденная щипком или ударом . . . . .	99
27. Колебания скрипичной струны . . . . .	102
28. Вынужденные колебания струны . . . . .	106
29. Ограничения в теории струн . . . . .	108
30. Колебания нагруженной струны . . . . .	109
31. Висящая цепь . . . . .	111
31а. Приближенное определение периодов свободных колебаний . . . . .	114
31в. Эоловы тоны . . . . .	116

## ГЛАВА III

## ТЕОРЕМА ФУРЬЕ

32. Ряд по синусам . . . . .	118
33. Ряд по косинусам . . . . .	124
34. Полная формулировка теоремы Фурье. Разрывы функции . . . . .	124
35. Закон убывания коэффициентов ряда . . . . .	127
36. Физическое приближение. Случай струны, возбужденной щипком . . . . .	129
37. Применение к скрипичной струне . . . . .	132
38. Струна, возбужденная ударом . . . . .	133
39. Общая теория нормальных функций. Гармонический анализ . . . . .	135

## ГЛАВА IV

## СТЕРЖНИ

40. Элементарная теория упругости. Деформация . . . . .	141
41. Напряжения . . . . .	143
42. Упругие константы. Потенциальная энергия деформации . . . . .	145
43. Продольные колебания стержней . . . . .	150
44. Плоские волны в упругой среде . . . . .	155
45. Изгибные колебания стержня . . . . .	158
46. Свободно-свободный стержень . . . . .	162
47. Закрепленно-свободный стержень . . . . .	166
48. Сводка результатов. Вынужденные колебания . . . . .	170
49. Применения колеблющихся стержней . . . . .	172
50. Влияние постоянного натяжения . . . . .	173
51. Колебания кольца. Нормальные колебания типа изгиба и типа растяжения . . . . .	174

## ГЛАВА V

## МЕМБРАНЫ И ПЛАСТИНКИ

52. Уравнение движения мембраны. Энергия . . . . .	181
53. Прямоугольная мембрана. Нормальные колебания . .	184
54. Круглая мембрана. Нормальные колебания . . . . .	187
55. Однородный изгиб пластинки . . . . .	194
56. Колебания пластинки. Общие результаты . . . . .	197
57. Колебания искривленных оболочек . . . . .	201

## ГЛАВА VI

## ПЛОСКИЕ ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

58. Упругость газов . . . . .	203
59. Плоские волны. Скорость звука . . . . .	207
60. Энергия звуковых волн . . . . .	211
61. Отражение . . . . .	216
62. Колебания столба воздуха . . . . .	219
63. Волны конечной амплитуды . . . . .	224
64. Вязкость . . . . .	234
65. Влияние теплопроводности . . . . .	240
66. Затухание волн в узких трубах и щелях . . . . .	243

## ГЛАВА VII

## ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН

67. Определения. Поток. Дивергенция . . . . .	252
68. Уравнения движения . . . . .	255
69. Потенциал скорости . . . . .	257
70. Общее уравнение звуковых волн . . . . .	260
71. Сферические волны . . . . .	262
72. Волны, возникающие в результате заданного началь- ного возмущения . . . . .	269
73. Источники звука. Отражение . . . . .	272
74. Рефракция, обусловленная различиями температуры	274
75. Рефракция, обусловленная ветром . . . . .	277
75a. Акустические свойства помещений . . . . .	281
75b. Принцип Доплера . . . . .	282

## ГЛАВА VIII

## ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ. ДИФРАКЦИЯ

76. Сферические волны. Точечные источники звука . . . .	283
76a. Отражение от плоской поверхности . . . . .	289
77. Осциллирующая сфера . . . . .	292
78. Действие сосредоточенной периодической силы . . . .	297
79. Излучение волн колеблющимся твердым телом . . . .	298
80. Передача колебаний газу . . . . .	300
81. Рассеяние звуковых волн на препятствии . . . . .	304
82. Прохождение звука через отверстие . . . . .	308
83. Различие между дифракционными эффектами для зву- ка и для света. Роль длины волны . . . . .	311

## ГЛАВА IX

## ТРУБЫ И РЕЗОНАТОРЫ

84. Нормальные колебания в прямоугольных и сферических сосудах . . . . .	318
85. Колебания в цилиндрическом сосуде . . . . .	324
86. Свободные колебания резонатора. Потери . . . . .	325
87. Поправка к теории органной трубы . . . . .	331
88. Действие постороннего источника на резонатор. Реакция на источник . . . . .	337
89. Принцип действия органной трубы. Колебания, создаваемые посредством нагрева . . . . .	344
90. Теория язычковых труб . . . . .	346
90а. Многорезонансные системы . . . . .	351
90b. Резонатор с нагретой проволокой . . . . .	352

## ГЛАВА X

## ФИЗИОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

91. Анализ слухового ощущения. Музыкальные ноты . . . . .	354
92. Влияние обертонов на тембр . . . . .	356
93. Интерференция чистых тонов. Влияние на определение интервалов . . . . .	358
94. Теория слуха по Гельмгольцу . . . . .	360
95. Комбинационные тоны . . . . .	363
96. Влияние комбинационных тонов на музыкальные интервалы . . . . .	368
97. Восприятие направления прихода звука . . . . .	369
Предметный указатель . . . . .	371

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Настоящая книга, как говорит и сам автор, может служить введением в фундаментальную «Теорию звука» Рэля. В ней кратко, но весьма ясно разобраны основные задачи классической акустики. Хотя книга была издана последний раз в 1931 г., она не устарела. Бурное развитие акустики за последние двадцать лет выдвинуло целые новые области, почти или совсем не затрагиваемые в этой книге, но то, что в ней имеется, не требует переработки. Особняком стоит последняя глава: данное в ней изложение физиологической акустики отражает уже прошедший этап науки о слухе. Но этот этап, представляющий несомненный исторический интерес, изложен в ней так компактно, что сохранение этой главы в переводе представилось целесообразным.

*М. А. Исакович*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Исчерпывающий обзор теории звука должен был бы затронуть много областей науки: физику, физиологию, психологию, эстетику. Настоящая работа ставит себе более скромные цели: она посвящена в основном рассмотрению предмета с механической точки зрения. В связи с этим рассмотрение в значительной степени носит математический характер, однако я старался ограничиться методами и процессами по возможности простыми и прямо ведущими к цели, учитывая в то же время природу разбираемых вопросов. Поэтому я надеюсь, что эту книгу действительно можно считать элементарной и что она может служить ступенькой к изучению работ Гельмгольца и лорда Рэля, которым я обязан почти всем тем, что я знаю в этой области.

Ограничения примененных методов заставили кое-чем пожертвовать. Некоторые интересные вопросы пришлось опустить, другие — только наметить, но я надеюсь, что остается все же достаточно для получения связной картины данного предмета, во всяком случае в его наиболее важных отраслях. В последней части книги возникает ряд вопросов, разбор которых с позиций строгих законов математической физики вряд ли возможен. Неизбежно обращение к интуиции, и если, с целью включения соответственных вопросов в данную книгу, я позволял себе эту вольность в несколько большей степени, чем это обычно делается, я хочу сказать в оправдание, что этот недостаток позволяет зато сконцентрировать внимание на тех сторонах вопроса, которые наиболее существенны с физической точки зрения.

Хотя то там, то здесь приведены отдельные замечания по истории вопроса, не было сделано попытки приводить систематические ссылки на литературу. Читатель, имеющий

в виду дальнейшее изучение предмета, естественно обратиться в первую очередь к монографии лорда Рэля, где можно найти исчерпывающие ссылки на литературу вместе с ценным критическим обсуждением. Быть может позволено будет сослаться еще на статью под названием «Schwingungen elastischer Systeme, insbesondere Akustik», помещенную в четвертом томе *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* (Leipzig, 1906).

Я считал подробное описание экспериментальных методов лежащим вне сферы моей компетенции. Я надеюсь, однако, что никто не приступит к изучению этого предмета в том виде, как он здесь изложен, не имея некоторого непосредственного знакомства с основными явлениями. К счастью, в этом можно многого достигнуть, пользуясь только простыми и общедоступными приспособлениями; нет недостатка, кроме того, и в превосходных прикладных руководствах.

Для настоящего издания книга была целиком просмотрена, и ряд ошибок был исправлен. Я воспользовался также случаем восполнить некоторые упущения и отметить ряд наиболее важных новых приложений.

*Г. Лэмб*

## ВВЕДЕНИЕ

### 1. Гармонические колебания и чистые тоны

В любом явлении, относящемся к звуку, мы интересуемся, во-первых, колеблющимся телом, например струной, камертоном или столбом воздуха, создающими возмущение; во-вторых, передачей колебаний через воздушную среду; затем ощущениями, которые каким-то особым образом возникают в результате воздействия волн на барабанную перепонку уха, и, наконец, интерпретацией этих ощущений, руководимой главным образом, а может быть и исключительно, опытом. Примерно в таком естественном порядке и будет рассматриваться излагаемый предмет в этой книге; однако последние разделы, касающиеся физиологических и психологических вопросов, могут быть затронуты лишь вскользь.

Так как данная книга рассчитана в основном на читателя, уже имеющего некоторые знания в разбираемой области, достаточно вкратце повторить некоторые вопросы (которые могут оказаться знакомыми в большей или меньшей степени), имея в виду уточнение часто встречающихся терминов. Многие из затрагиваемых здесь вопросов будут, конечно, более подробно рассмотрены ниже.

Границу между физикой и физиологией можно, так сказать, провести у барабанной перепонки; что касается физического подхода к вопросу, то при нормальных (в отличие от патологических) условиях причиной любых испытываемых нами звуковых ощущений являются, в конечном счете, изменения давления в слуховом канале наружного уха. Эти изменения удобно представлять себе графически (аналогично представлению обычных изменений барометрического давления) в виде кривой, абсциссы которой представляют время, а ординаты—отклонения давления в ту



или другую сторону от среднего значения; единственным отличием от барометрической записи будет огромное увеличение горизонтальных и вертикальных масштабов.

Конечно, разнообразие подобных кривых бесконечно, и невозможно предположить, чтобы устройство уха позволяло различать каждую отдельную кривую или даже каждый из многочисленных классов, в которые их можно объединить. Поэтому необходимо, насколько это возможно, разложить как виды колебаний, так и возникающие ощущения на более простые элементы, которые бы соответствовали друг другу.

Что касается видов колебаний, то существует один вид разложения, который сразу привлекает внимание по динамическим соображениям. В механике основным типом колебаний является так называемое «гармоническое» колебание, графически изображаемое синусоидальной кривой (рис. 3, стр. 24). Мы встречаемся с таким колебанием в случае маятника и во всех других случаях свободно колеблющегося тела или механической системы, обладающей только одной степенью свободы. Более того, можно показать, что если трением можно пренебречь, то самое сложное колебание любой системы можно рассматривать как составленное из ряда гармонических колебаний, каждое из которых при соответственных условиях могло бы быть возбуждено независимо. Причина особой роли гармонических колебаний в механике заключается в том, что это единственный тип колебаний, характер которого абсолютно не изменяется при передаче от одной системы к другой. Это положение будет более подробно рассмотрено в следующей главе.

Анализ ощущений—вещь значительно более тонкая. Большим шагом вперед в акустике явилось окончательно сформулированное Омом<sup>1)</sup> в 1843 г. положение, что простейшие и основные типы ощущения звука—это те ощущения, которые соответствуют гармоническим колебаниям. Это утверждение подразумевает, что все другие звуковые ощущения в действительности являются слож-

---

<sup>1)</sup> G. S. Ohm (1787—1854), профессор физики в Мюнхене в 1849—1854 гг., известный также как автор закона электропроводности—так называемого «закона Ома».

ными и состоят из элементарных ощущений, соответствующих различным гармоническим составляющим, на которые может быть разложено данное колебание. Это утверждение нуждается в некоторых уточнениях, в частности, относительно степени независимости близких элементарных ощущений; однако пока нет нужды на этом останавливаться. Закон слухового ощущения Ома следует в основном считать доказанным, главным образом в результате работ Гельмгольца<sup>1)</sup>. Ощущение, соответствующее гармоническому колебанию, называют «простым тоном» или «чистым тоном», или просто «тоном». Наилучшее приближение к нему дает звук, издаваемый камертоном с резонатором или закрытой органной трубой большого диаметра.

Поскольку форма кривой, изображающей гармоническое колебание, вполне определена, различие между двумя простыми тонами может быть обусловлено только различием их частот или их амплитуд. «Частота», т. е. число полных колебаний в секунду, определяет «высоту», причем большей «высоте» соответствует большая частота. Нижняя и верхняя границы частот для звуков, воспринимаемых человеческим ухом, — примерно 24 и 24 000. Диапазон используемых в музыке тонов значительно уже, примерно от 40 до 4000. Для тонов одной и той же высоты мощность, воздействующая на ухо, или относительная «интенсивность», определяется амплитудой, или, точнее, ее квадратом, однако следует учесть, что здесь подразумевается интенсивность звука в смысле физики, а не субъективного ощущения. Для тонов разной высоты возможно лишь неопределенное сравнение громкостей, причем связь с физической величиной мощности может оказаться очень малой. Вблизи порогов слышимости ощущение может быть слабым даже при относительно большой мощности звука.

<sup>1)</sup> Hermann Helmholtz (1821—1894), последовательно профессор физиологии (Кенигсберг, 1849), анатомии (Бонн, 1855), физиологии (Гейдельберг, 1858) и физики (Берлин, 1871). Мы часто будем ссылаться на его классический труд «Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik», Brunschwic, 1862. Английский перевод с третьего издания (1870) был напечатан под заглавием «Sensations of Tones», A. J. Ellis, Лондон, 1875. (Есть русский перевод: Г е л ь м г о л ь ц Г., «Учение о слуховых ощущениях как физиологическая основа для теории музыки», перевод с 3-го немецкого издания, 594 стр., СПб., 1875.—Ред.)

## 2. Музыкальные ноты

Из хаоса более или менее сложных звуков выделяется специальный класс так называемых музыкальных «нот». Эти звуки характеризуются тем, что получаемое ощущение равномерно, непрерывно и может (во всяком случае в воображении) бесконечно продолжаться без заметного изменения. Природа соответственных колебаний установлена надежным образом. Если мы будем исследовать любое устройство, при помощи которого удастся получать ноту хорошего музыкального тембра, то мы увидим, что колебание можно разложить на ряд простых гармонических составляющих, частоты которых находятся в некоторых особых соотношениях, а именно, пропорциональны числам 1, 2, 3, ... Отдельные члены ряда могут отсутствовать; существует также практическая граница значений со стороны больших чисел, однако никаких других отношений не должно быть. Ясно, что при указанном соотношении частот результирующий вид колебания обязательно имеет *периодический* характер и движение повторяется через промежутки, в точности равные периоду, за который первый член ряда проходит через все свои фазы. Надо, однако, помнить, что человеческое ухо не воспринимает периодический характер как таковой, и не надо думать, что каждое периодическое колебание обязательно вызовет удовлетворительное музыкальное ощущение. Суперпозиция простых гармонических колебаний, создающих периодические колебания некоторых типов, иллюстрируется на нескольких графиках, приведенных ниже, в главе III.

Одна музыкальная нота может отличаться от другой по высоте, тембру и громкости. Обычно воспринимается высота первого гармонического колебания ряда, т. е. колебания с наименьшей частотой; однако, если амплитуда этой первой составляющей относительно мала и, особенно, если она попадает близко к нижней границе частот слышимой области, то в качестве высоты ноты воспринимается высота второй компоненты.

Под «тембром» ноты понимается то безошибочно воспринимаемое свойство, которое отличает ноту одного инструмента от ноты той же высоты другого инструмента.

Каждый музыкальный инструмент обладает, как правило, своим специфическим тембром<sup>1)</sup>, который редко можно спутать с тембром другого инструмента. Каждый, например, сразу узнает различный характер звуков флейты, скрипки, трубы и человеческого голоса. Совершенно очевидно, что различие в тембре, если оно не обусловлено привходящими обстоятельствами<sup>2)</sup>, можно приписать только различию вида колебаний и, таким образом, различию относительных амплитуд и фаз простых гармонических составляющих. Согласно Гельмгольцу, влияние фазы неощутимо. Некоторые авторы оспаривали это высказывание, однако несомненно, что в большинстве случаев разница в тембре зависит только от относительных амплитуд.

Сравнение громкости возможно, строго говоря, только для звуков одного тембра и близкой высоты.

Из изложенного выше следует, что в той мере, в какой действителен закон Ома, ощущение от музыкальной ноты должно быть сложным и состоять из более простых ощущений или тонов, соответствующих различным простым гармоническим элементам в данном типе колебаний. Эта точка зрения должна бороться с сильным и до некоторой степени инстинктивным предвзятым убеждением в противном, и обычно требуется некоторая тренировка, прежде чем удастся убедиться в этом на собственном опыте. Позднее мы вернемся к этому вопросу; сейчас же только заметим, что элемент ощущения, соответствующий наиболее низкой простой гармонической составляющей, называется «основным тоном», а остальные называются его «обертонами» или «гармониками».

### 3. Музыкальные интервалы. Диатоническая гамма

Существуют некоторые специальные, привычные для тренированного слуха соотношения двух нот или двух простых тонов. Это—различные консонансы и другие «интервалы». Физически они характеризуются тем, что

<sup>1)</sup> По-французски *timbre*, по-немецки *Klangfarbe*, по-английски *quality*.

<sup>2)</sup> Такими, как вид возникновения и прекращения звука, которые, например, различны для скрипки и фортепьяно.

частоты, соответствующие высотам тонов, находятся в определенных отношениях, являющихся отношениями двух малых целых чисел. Ниже приведены названия наиболее важных консонирующих интервалов и соответственные числовые соотношения:

Унисон . . . . .	1:1	Октава . . . . .	1:2
Квинта . . . . .	2:3	Кварта . . . . .	3:4
Мажорная терция . . . . .	4:5	Минорная секста . . . . .	5:8
Минорная терция . . . . .	5:6	Мажорная секста . . . . .	3:5

Конечно, ухо не может оценить сами числовые соотношения; однако каждый интервал более или менее точно «определен» в том смысле, что всякую незначительную расстройку любой из нот можно сразу обнаружить по *биениям* и возникающему ощущению негладкости звука. Объяснение этих особенностей придется пока отложить.

Названия различных интервалов возникли в каком-то смысле случайно и относятся к относительному положению нот в обычной «диатонической гамме». Эта гамма основана на «мажорном аккорде», представляющем собой комбинацию из трех нот, образующих мажорную и минорную терции; это значит, что их частоты относятся как 4:5:6. Если начать с некоторой произвольной ключевой ноты, которую мы назовем  $C$ , то две ноты, лежащие на квинту выше и ниже нее, называются соответственно доминантой ( $G$ ) и субдоминантой ( $F'$ ). Образую мажорный аккорд от  $C$ , получаем ноты  $E = \frac{5}{4}C$  и  $G = \frac{3}{2}C$ . Далее, если мы образуем мажорный аккорд от  $G$ , то получим ноты  $B = \frac{5}{4}G = \frac{15}{8}C$  и  $d = \frac{3}{2}G = \frac{9}{4}C$ . Последняя выходит за пределы октавы, начинающейся с  $C$ ; соответственная нота внутри октавы будет  $D = \frac{9}{8}C$ . Наконец, образуя мажорный аккорд от  $F'$ , получаем  $A, = \frac{5}{4}F' = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}C = \frac{5}{6}C$  (для которой октавой будет  $A = \frac{5}{3}C$ ) и само  $C$ . Таким образом, мы получаем гамму из семи нот, частоты

которых пропорциональны приведенным здесь числам:

<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$
24	27	30	32	36	40	45

Этот ряд продолжают вверх и вниз октавами; в качестве названий этих нот повторяются те же буквы; различные октавы различаются шрифтами и верхними или нижними индексами. Точная высота ключевой ноты пока что произвольна, она определяет высоту любой другой ноты октавы (и, обратно, сама определяется этой высотой). Среди музыкантов в различных странах и в разные времена высота ключевой ноты выбиралась по-разному, причем общая тенденция шла в сторону увеличения высоты. Немецкие физики, включая и Гельмгольца, пользовались в качестве эталона частотой 440 колебаний в секунду для некоторого *A*<sup>1)</sup>. Исходя из этой величины, имеем следующие частоты для некоторой области диапазона высот:

$C$   $D$   $E$   $F$   $G$   $A$   $B$   $c$   $d$   $e$   $f$   $g$   $a$   $b$   
 66  $74\frac{1}{4}$   $82\frac{1}{2}$  88 99 110  $123\frac{3}{4}$  132  $148\frac{1}{2}$  165 176 198 220  $247\frac{1}{2}$

$c'$   $d'$   $e'$   $f'$   $g'$   $a'$   $b'$   $c''$   $d''$   $e''$   $f''$   $g''$   $a''$   $b''$   
 264 297 330 352 396 440 495 528 594 660 704 792 880 990

Под обычными музыкальными символами мы поместили соответственные буквенные обозначения, используемые немецкими авторами<sup>2)</sup>. Их можно продолжить в сторону

<sup>1)</sup> Тогда  $c' = 264$ . Мастера, изготовляющие физические приборы, часто берут  $c' = 256$ , что удобно ввиду возможности последовательного деления нацело на 2.

<sup>2)</sup> За исключением ноты *B*, которая немецкими авторами обычно обозначается буквой *H*. (Прим. ред.)

увеличивающейся высоты, применяя дополнительные верхние индексы ( $c'''$ ,  $c^{IV}$ , ...), и в сторону понижения высоты, применяя нижние индексы ( $C$ ,  $C_{II}$ , ...).

Если бы при построении гаммы мы пользовались вместо мажорного аккорда минорным, состоящим из минорной и мажорной терций (в направлении повышения), образованных нотами, частоты которых находятся в отношениях 10:12:15, нам потребовались бы три ноты, не вошедшие в приведенную выше схему. Если бы, исходя в качестве ключа из любой уже полученной ноты (отличной от  $C$ ), мы построили бы мажорную или минорную гамму, то потребовались бы еще добавочные ноты. В случае скрипки или голоса, или некоторых духовых инструментов, допускающих непрерывное изменение высоты, это не создает затруднений. Однако для фортепьяно или органа увеличение числа фиксированных нот далее некоторого умеренного предела невозможно. Найдено, однако, что при незначительном искажении правильных числовых соотношений можно с достаточной степенью точности удовлетворить всем требованиям, составив каждую октаву из двенадцати нот, обозначаемых таким образом:

$$C \ C \# \ D \ D \# \ E \ F \ F \# \ G \ G \# \ A \ A \# \ B.$$

Этот процесс, заключающийся в компромиссной подгонке частот, называют «темперированием». В обычной системе «равного темперирования» интервалы между последовательными нотами уравнены и октава делится на 12 ступеней, причем каждая ступень соответствует отношению числа колебаний, равному  $2^{1/12}$ ; так, отношение для нот  $G$  и  $C$  делается равным  $2^{7/12} = 1,4983$  (вместо 1,5).

# ГЛАВА I

## ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

### 4. Маятник

Колеблющееся тело, например струна, стержень или пластинка, может породить звук только путем воздействия на окружающую среду, которая в свою очередь окажет некоторое обратное воздействие на это тело. Однако во многих случаях эта обратная реакция так незначительна, что ее действие становится заметным только после большого числа колебаний. Поэтому для простоты сначала пренебрежем ею и при исследовании характера колебаний механической системы будем считать систему совершенно изолированной.

Теория колебаний как исторически, так и по существу начинается с маятника. При помощи этого простого прибора мы можем проиллюстрировать во всех основных чертах многие важные законы акустики; действительно, различие масштабов амплитуд и периодов, как оно ни огромно, несущественно в вопросах динамики.

Пусть частица массы  $M$ , подвешенная в неподвижной точке  $O$  на легкой нити длины  $l$ , совершает малые колебания в вертикальной плоскости вблизи своего положения равновесия. Если отклонение нити от вертикального положения никогда не превышает нескольких градусов, то можно пренебречь (в первом приближении) вертикальным перемещением частицы, а натяжение ( $P$ ) нити можно приравнять весу частицы  $Mg$ . Поскольку на горизонтальное смещение ( $x$ ) влияет только

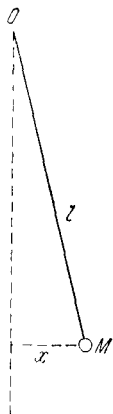


Рис. 1.



горизонтальная компонента натяжения нити, имеем:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -P \frac{x}{l} = -Mg \frac{x}{l}. \quad (1)$$

Если положить

$$n^2 = \frac{g}{l}, \quad (2)$$

то получим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0, \quad (3)$$

решение которого имеет вид

$$x = A \cos nt + B \sin nt, \quad (4)$$

где постоянные  $A$  и  $B$  могут иметь любые значения. Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что это решение удовлетворяет уравнению (3); а так как решение содержит две произвольные постоянные  $A$  и  $B$ , мы можем согласовать его с любыми заданными начальными условиями для перемещения и скорости. Так, если при  $t=0$  имеем  $x=x_0$ ,  $\frac{dx}{dt} = u_0$ , то получим:

$$x = x_0 \cos nt + \frac{u_0}{n} \sin nt. \quad (5)$$

Конечно, при применении вышеприведенных формул к колебаниям маятника необходимо, чтобы начальные условия были совместимы с сделанным предположением о «малости» колебаний. Так, мы должны предположить, что в формуле (5) оба отношения  $x_0/l$  и  $u_0/nl$  малы. Согласно равенству (2) последнее отношение равно  $\sqrt{u_0^2/gl}$ , так что  $u_0$  должно быть мало по сравнению со скоростью, приобретенной телом при свободном падении с высоты, равной половине длины маятника.

## 5. Гармоническое колебание

Если в формуле (4) § 4 положить

$$A = a \cos \varepsilon, \quad B = -a \sin \varepsilon, \quad (1)$$

что всегда можно сделать путем соответственного выбора величин  $a$  и  $\varepsilon$ , то получим:

$$x = a \cos (nt + \varepsilon). \quad (2)$$

Специальный тип колебаний, представляемый этой формулой, имеет фундаментальное значение. Такое колебание называется «гармоническим» или (иногда) «простым». Для наилучшего представления этого колебания вообразим движение геометрической точки  $Q$ , описывающей с постоянной угловой скоростью  $n$  окружность радиуса  $a$ . Ортогональная проекция  $P$  точки  $Q$  на неподвижный диаметр  $AOA'$  будет двигаться, следуя в точности формуле (2), при условии, что движение началось в соответственный момент времени. Угол  $nt + \varepsilon$  ( $=AOQ$ ) называется «фазой», а величины  $a$  и  $\varepsilon$  называются соответственно «амплитудой» и «начальной фазой». Промежуток времени  $2\pi/n$  между двумя последовательными прохождениями в одном направлении через начало координат называется «периодом». В акустике, где нам приходится иметь дело с очень быстрыми колебаниями, принято вместо периода указывать обратную ему величину—«частоту»  $N$ , т. е. число полных колебаний в секунду; имеем:

$$N = \frac{n}{2\pi} \text{ )}.$$

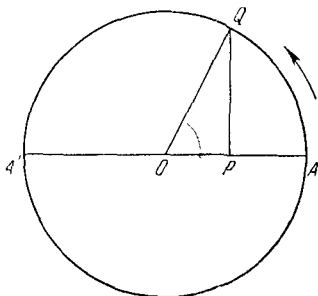


Рис. 2.

В случае маятника, для которого  $n = \sqrt{g/l}$ , период равен  $2\pi\sqrt{l/g}$ . Как и в случае всех других динамических систем, которые нам еще придется рассматривать, период не зависит от амплитуды, пока она мала<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Иногда ощущается необходимость в отдельном названии для угловой скорости  $n$  во вспомогательном круге. В теории приливов Кельвином был введен термин *быстрота* (speed). В акустике вместо него можно, пожалуй, предложить термин *rapidity*. (В русском языке принят термин «циклическая частота» или «круговая частота». — *Ред.*)

<sup>2)</sup> Это наблюдение сделано в 1583 г. Галилеем; маятником служила висящая в Пизанском соборе лампада.

Скорость точки  $P$  в любом положении дается формулой

$$\frac{dx}{dt} = -na \sin(nt + \varepsilon) = -n \cdot PQ, \quad (3)$$

что видно также, если взять компоненту скорости ( $na$ ) точки  $Q$  в направлении  $OA$ .

Для всех случаев прямолинейного движения точки чрезвычайно полезен графический метод изображения движения в виде кривой, при котором по оси абсцисс отложено

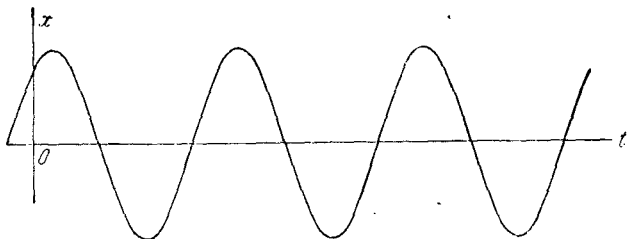


Рис. 3.

время  $t$ , а по оси ординат—перемещение  $x$ . Эта кривая называется «графиком пути» или «графиком пространство—время». В экспериментальной акустике разработан целый ряд механических и оптических устройств, при помощи которых можно получать такие кривые. Для рассматриваемого случая гармонического колебания из уравнения (2) видно, что получаемая кривая представляет собой хорошо известную «синусоиду».

## 6. Другие примеры

Характерной чертой теории колебаний маятника является то, что сила, действующая на частицу, всегда обращена к положению равновесия и (с достаточной степенью точности) пропорциональна величине отклонения от этого положения. Все случаи подобного рода описываются одним и тем же дифференциальным уравнением

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx, \quad (1)$$

откуда следует, что соответственные колебания имеют вид (2) § 5, причем  $n^2 = K/M$ . Движение, следовательно,

имеет гармонический характер; частота равна

$$N = \frac{n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}; \quad (2)$$

она определяется исключительно характером системы и не зависит от амплитуды. Следует обратить особое внимание на структуру этой формулы ввиду наличия многих других, аналогичных ей: частота изменяется пропорционально корню квадратному из отношения двух величин, из которых одна ( $K$ ) служит мерой *упругости* или степени *устойчивости равновесия* системы, а другая является коэффициентом, характеризующим *инерцию*.

Рассмотрим, например, вертикальные колебания массы  $M$ , подвешенной в неподвижной точке на спиральной пружине. Согласно закону упругости Гука мы полагаем, что сила, с которой действует пружина, равна приращению ее длины, умноженному на некоторую постоянную  $K$ , которую можно назвать «жесткостью» данной пружины. В положении равновесия натяжение пружины в точности уравнивает силу тяжести  $Mg$ . Если  $M$  смещается вниз на расстояние  $x$ , возникает дополнительная сила  $Kx$ , направленная в сторону положения равновесия; таким образом, получается уравнение движения вида (1). В данном случае инерцией самой пружины пренебрегают<sup>1)</sup>.

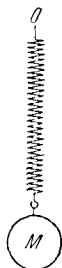


Рис. 4.

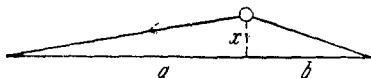


Рис. 5.

Далее, рассмотрим массу  $M$ , укрепленную на проволоке, туго натянутой между двумя неподвижными точками; натяжение проволоки пусть будет равно  $P$ . Пренебрежем силой тяжести и инерцией самой проволоки. Предположим также, что поперечное смещение ( $x$ ) настолько мало, что изменение натяжения составляет пренебрежимо малую долю  $P$ . Если  $a$  и  $b$  обозначают расстояния прикрепленной к проволоке массы от обоих концов этой проволоки, получим для движения этой массы

<sup>1)</sup> Соответственная поправка рассматривается в § 7.

уравнение

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -P \frac{x}{a} - P \frac{x}{b}, \quad (3)$$

имеющее тот же вид, что и уравнение (3) § 4, где нужно положить  $n^2 = P(a+b)/Mab$ . Отсюда следует, что частота будет равна

$$N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{P}{M} \frac{a+b}{ab}}. \quad (4)$$

Этот случай представляет для нас интерес, так как позволяет легко осуществить колебания обычных звуковых частот. Так, если натяжение равно 10 кг и масса 5 г прикреплена в середине проволоки длиной в 50 см, получаем  $N=63$ .

## 7. Динамика системы с одной степенью свободы. Свободные колебания

Все приведенные выше примеры относятся к прямолинейному движению частицы; однако точно такой же тип колебаний встречается в любом случае динамической системы с одной степенью свободы, совершающей свободные колебания малой амплитуды вблизи конфигурации устойчивого равновесия.

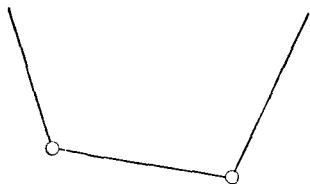


Рис. 6.

Говорят, что система обладает «одной степенью свободы», если всевозможные конфигурации, которые она способна принимать, можно различать, приписывая соответственные значения только одной переменной величине, или «обобщенной координате». Так, положение цилиндра (любого сечения), катящегося по горизонтальной плоскости, определяется углом, на который он повернулся относительно некоторого начального положения. Система из двух частиц, прикрепленных к различным точкам струны, концы  $A, B$  которой закреплены, имеет одну степень свободы, если ее смещения ограничены вертикальной плоскостью, проходящей через  $A, B$ , так как эту конфигурацию можно определить наклоном любого из двух отрез-

ков струны относительно горизонтали. Таким же образом конфигурация паровой машины и всего приводимого ею в движение оборудования определяется угловой координатой маховика. Разнообразие систем подобного рода бесконечно; однако, если исключить силы трения и другие диссипативные силы, то все эти системы, будучи каким-либо образом приведены в движение и затем предоставлены самим себе, движутся, подчиняясь уравнению сохранения энергии. Для случая малых колебаний вблизи положения устойчивого равновесия дифференциальное уравнение движения, как мы увидим, всегда сводится к тому же уравнению (1) § 6.

Обозначим через  $q$  переменную обобщенную координату, определяющую конфигурацию системы с одной степенью свободы. Как и в случае, изображенном на рис. 6, эту координату можно выбрать по-разному, но конкретный характер выбора несуществен. Из определения системы ясно, что каждая частица может двигаться только по фиксированной траектории. Если в результате бесконечно малого изменения координаты  $\delta q$  частица  $m$  проходит элемент своего пути  $\delta s$ , то  $\delta s = a \delta q$ , где  $a$  — коэффициент, обычно различный для различных частиц, а также зависящий от той конкретной конфигурации  $q$ , которая подверглась изменению. Отсюда, разделив на приращение времени  $\delta t$ , получаем для скорости этой частицы  $v = a \frac{dq}{dt}$ , или, в обозначениях флюксий,  $v = a \dot{q}$ <sup>1)</sup>.

Отсюда следует, что кинетическая энергия, обычно обозначаемая через  $T$ , будет равна

$$T = \frac{1}{2} \sum (mv^2) = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad (1)$$

где

$$a = \sum (ma^2), \quad (2)$$

а суммирование производится по всем частицам системы.

<sup>1)</sup> Употребление точек для обозначения дифференцирования по  $t$  возобновил в своей «Аналитической механике», (1788) сначала Лагранж, а позднее Томсон и Тэт. Мы пишем  $\dot{q}$  вместо  $\frac{dq}{dt}$  и  $\ddot{q}$  вместо  $\frac{d^2q}{dt^2}$ .

Коэффициент  $a$  является, вообще говоря, функцией  $q$ ; его можно назвать «коэффициентом инерции» для данной конфигурации  $q$ . Например, в случае катящегося цилиндра, о котором мы говорили выше, если  $q$ —угловая координата, то коэффициент  $a$ —это момент инерции (обычно переменный) относительно линии соприкосновения цилиндра с горизонтальной плоскостью.

Потенциальная энергия системы, поскольку она зависит от конфигурации системы, является функцией только координаты  $q$ . Если обозначить ее через  $V$ , то закон сохранения энергии дает:

$$\frac{1}{2} a \dot{q}^2 + V = \text{const}, \quad (3)$$

при условии, что система свободна от действия внешних сил. Значение постоянной, конечно, определяется начальными условиями. Если продифференцировать уравнение (3) по  $t$ , то полученное уравнение можно будет почленно поделить на  $\dot{q}$ , что даст:

$$a \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{da}{dq} \dot{q}^2 + \frac{dV}{dq} = 0. \quad (4)$$

Это выражение можно рассматривать как уравнение свободного движения системы, из которого исключены неизвестные реакции между ее частями. Для случая малых колебаний уравнение сильно упрощается.

Для существования положения равновесия уравнение (4) должно удовлетворяться при  $q = \text{const}$ . Это требует выполнения равенства  $\frac{dV}{dq} = 0$ ; значит, равновесная конфигурация характеризуется тем, что при малых отклонениях от положения равновесия потенциальная энергия «стационарна». Прибавляя или отнимая некоторую постоянную, можно выбрать  $q$  таким образом, чтобы оно обращалось в нуль при рассматриваемой нами равновесной конфигурации; тогда, разлагая в степенной ряд по малой величине  $q$ , имеем:

$$V = \text{const} + \frac{1}{2} c q^2 + \dots \quad (5)$$

Ввиду стационарности  $V$  в положении равновесия, в раз-

ложении отсутствует член с первой степенью  $q$ . Постоянная  $c$  положительна, если равновесная конфигурация устойчива, и тогда  $V$  имеет минимум <sup>1)</sup>. Ее можно назвать «коэффициентом устойчивости».

Подставив в уравнение (4) выражение для  $V$  из (5) и опустив члены второго порядка относительно  $q$  и  $\dot{q}$ , получим:

$$a\ddot{q} + cq = 0, \quad (6)$$

где  $a$  теперь можно считать постоянной величиной, имеющей значение, соответствующее конфигурации равновесия.

Так как (6)—уравнение того же типа, что и (1) § 6, при

$$n^2 = \frac{c}{a}, \quad (7)$$

то  $q$  является гармонической функцией, которую можно записать так:

$$q = C \cos (nt + \varepsilon). \quad (8)$$

Частота оказывается равной

$$N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{a}}. \quad (9)$$

Далее, поскольку смещение от положения равновесия любой частицы системы при ее движении по своей траектории пропорционально  $q$  (в приведенных выше обозначениях оно равно  $aq$ ), мы видим, что каждая частица совершает гармонические колебания с указанной частотой и отдельные частицы движутся синхронно, одновременно проходя через средние положения. Кроме того, амплитуды колебаний разных частиц находятся в постоянном отношении друг к другу; произвольны только абсолютная величина амплитуды и фаза колебания; они зависят от заданных начальных условий.

<sup>1)</sup> В противоположном случае приведенное ниже решение уравнения (6) будет содержать вместо круговых функций экспоненциальные функции с вещественным показателем, указывающие на неустойчивость.



Кинетическая и потенциальная энергия будут соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} a \dot{q}^2 = \frac{1}{2} n^2 a C^2 \sin^2(nt + \varepsilon), \\ V &= \frac{1}{2} c q^2 = \frac{1}{2} c C^2 \cos^2(nt + \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

а их сумма при учете (7) составит:

$$T + V = \frac{1}{2} n^2 a C^2 = \frac{1}{2} c C^2. \quad (11)$$

Так как очевидно, что средние значения  $\sin^2(nt + \varepsilon)$  и  $\cos^2(nt + \varepsilon)$  равны между собой и поэтому каждое равно  $\frac{1}{2}$ , то энергия системы в среднем является наполовину кинетической и наполовину потенциальной.

Для приложения теории к частным случаям требуется только вычислить коэффициенты  $a$  и  $c$ , причем (в задачах механики) вычисление последнего обычно более сложно. В случае тела, подвешенного на проволоке и совершающего крутильные колебания вокруг оси проволоки,  $a$  есть момент инерции относительно этой оси, а  $c$ —коэффициент крутильного момента, т. е.  $cq$ —это крутильный момент, возникающий при повороте тела на угол  $q$ .

Далее, если в задаче о массе, подвешенной на пружине (рис. 4), предположить, что вертикальное перемещение любой точки пружины пропорционально расстоянию  $z$  от точки подвеса при отсутствии растяжения, то кинетическая энергия определится выражением

$$2T = M \dot{q}^2 + \int_0^l \left( \frac{z}{l} \right)^2 \dot{q}^2 \varrho dz = \left( M + \frac{1}{3} \varrho l \right) \dot{q}^2, \quad (12)$$

где  $\varrho$ —линейная плотность,  $l$ —длина пружины в нерастянутом состоянии и  $q$ —смещение груза. Следовательно, масса пружины может быть учтена, если представить, что подвешенная масса увеличилась на одну треть массы пружины.

## 8. Вынужденные колебания маятника

До сих пор рассматривались только «свободные» колебания, т. е. предполагалось, что на систему не действовали никакие силы, кроме сил, обусловленных устройством самой системы и ее взаимодействием с окружающей средой. Теперь перейдем к изучению влияния вынуждающих сил, в частности сил, зависящих от времени по гармоническому закону. С такими случаями приходится иметь дело при воздействии одного колеблющегося тела на другое при условии, что обратной реакцией на первое тело можно пренебречь.

Для определенности возьмем случай прямолинейного движения материальной точки; обобщение на другие случаи (§ 9) затруднений не представит. Уравнение (1) § 6 заменится теперь таким уравнением:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx + F \cos pt. \quad (1)$$

Здесь последний член представляет собой вынуждающую силу, амплитуда  $F$  и частота  $p/2\pi$  которой считаются заданными <sup>1)</sup>. Введем обозначения

$$\frac{K}{M} = n^2, \quad \frac{F}{M} = f. \quad (2)$$

Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = f \cos pt. \quad (3)$$

Как легко проверить подстановкой, полное решение этого уравнения есть

$$x = A \cos nt + B \sin nt + \frac{f}{n^2 - p^2} \cos pt. \quad (4)$$

Первые два слагаемых с их произвольными постоянными  $A$  и  $B$  представляют свободное колебание типа, разобранный в § 5, происходящее с собственной частотой системы  $n/2\pi$ . На него наложено «вынужденное колебание», выраженное последним слагаемым. Это — гармоническое колебание; частота его равна частоте  $p/2\pi$

<sup>1)</sup> Несколько более общий случай задания силы в виде  $F \cos(pt + \alpha)$  может быть сведен к предыдущему изменением начала отсчета времени.

вынуждающей силы, а фаза совпадает с фазой силы или противоположна ей в зависимости от того, меньше вынужденная частота, чем собственная ( $p < n$ ), или больше нее ( $p > n$ ).

Все вышеизложенное легко проиллюстрировать при помощи маятника. Если, вместо того чтобы закрепить верхний конец нити, перемещать его по горизонтали, то,

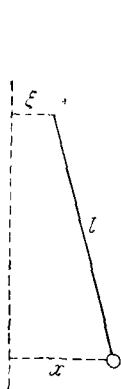


Рис. 7.

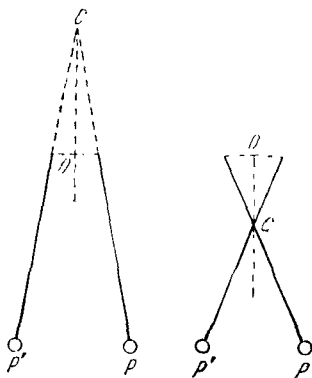


Рис. 8.

обозначая смещение конца нити в момент времени  $t$  через  $\xi$  (рис. 7), получим вместо уравнения движения (1) § 4 следующее уравнение:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -Mg \frac{x - \xi}{l}, \quad (5)$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + n^2 x = n^2 \xi. \quad (6)$$

Это равносильно случаю неподвижного закрепления верхнего конца нити и воздействию на чечевицу маятника горизонтальной силы, которая вызвала бы ускорение  $n^2 \xi$ . Если рассмотреть частный случай

$$\xi = a \cos pt, \quad (7)$$

то получим формулу (3), где  $f$  заменено на  $n^2 a$ . На рис. 8 показаны вынужденные колебания для случаев  $p < n$  и  $p > n$ . Маятник колеблется так, как если бы точка  $C$

была точкой подвеса, причем отрезок  $CP$  соответствует длине математического маятника, период свободных колебаний которого равен периоду вынужденных колебаний  $2\pi/p$ .

Этот пример заимствован у Юнга <sup>1)</sup>, использовавшего его для иллюстрации динамической теории приливов, где возникает тот же вопрос о фазах. Вообразим канал, опоясывающий экватор; ширина канала не превышает нескольких градусов широты, а глубина сравнима с действительной глубиной океана. Согласно теории Юнга приливы в нем носят «обратный» характер, т. е. в области, лежащей непосредственно под луной, будет наблюдаться отлив, а на расстоянии  $90^\circ$  долготы к востоку и к западу от нее — прилив. Причина этого явления заключается в том, что период возмущающей силы (12 лунных часов) меньше соответственного периода свободных колебаний, вследствие чего фазы оказываются противоположными.

Произвольные постоянные в полном решении (4) определяются начальными условиями. Предположим, например, что колеблющееся тело начинает двигаться из состояния покоя, соответствующего  $x=0$  в момент  $t=0$ . Как можно непосредственно проверить, получается:

$$x = \frac{f}{p^2 - n^2} (\cos nt - \cos pt). \quad (8)$$

Когда вынужденная частота  $p/2\pi$  почти совпадает с периодом собственных колебаний, последний член в формуле (4) становится очень большим, и тем самым предположение о малости величины  $x$ , обычно являющееся исходным при выводе уравнения (1) (как в случае математического маятника), может оказаться нарушенным. Поэтому результаты, выражаемые формулой (4), нельзя принимать без некоторых ограничений; однако они, во всяком случае, дают нам некоторые указания на причину, по которой приближенное равенство между периодами свободных и вынужденных колебаний всегда сопровождается резким ростом амплитуды.

<sup>1)</sup> Thomas Young (1773—1829), знаменит своими исследованиями о свете и в других областях физики. Элементарная теория свободных и вынужденных колебаний изложена им в статье «Теория приливов, с учетом сопротивления», *Nicholson's Journal*, 1813; *Miscellaneous Works*, London, 1855, т. II, стр. 262.

В случае точного совпадения обоих периодов ( $p=n$ ) решение уравнения (4) теряет всякий физический смысл, однако рассмотрение любой частной задачи с определенными начальными условиями можно провести полностью. Так, для начальных условий, соответствующих (8), формула примет вид

$$x = \frac{f}{p+n} \frac{\sin \frac{1}{2}(p-n)t}{\frac{1}{2}(p-n)} \sin \frac{1}{2}(p+n)t. \quad (9)$$

По мере приближения  $p$  к  $n$  это выражение стремится к предельной форме

$$x = \frac{f}{2n} t \sin nt. \quad (10)$$

Такое движение можно (грубо) описать как гармоническое колебание, амплитуда которого растет пропорционально  $t$ . По указанной выше причине формула пригодна только для ранней стадии движения.

Вкратце остановимся на рассмотрении вынуждающей силы более общего характера. Дифференциальное уравнение запишем в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = f(t). \quad (11)$$

Решение этого уравнения методом вариации постоянной или каким-либо другим способом описывается в учебниках по дифференциальным уравнениям. Как легко проверить, решение будет иметь вид

$$x = \frac{1}{n} \sin nt \int f(t) \cos nt dt - \frac{1}{n} \cos nt \int f(t) \sin nt dt. \quad (12)$$

Явно вводить члены вида  $A \cos nt + B \sin nt$ , представляющие собой свободные колебания, нет никакой нужды, поскольку они уже присутствуют в решении благодаря произвольным постоянным неопределенных интегралов.

Если сила  $f(t)$  имеет заметное значение только для некоторого конечного промежутка времени и если колеблющаяся частица первоначально находилась в покое

в положении равновесия, то можно написать:

$$x = \frac{1}{n} \sin nt \int_{-\infty}^t f(t) \cos nt dt - \frac{1}{n} \cos nt \int_{-\infty}^t f(t) \sin nt dt, \quad (13)$$

поскольку при этом  $x=0$  и  $\frac{dx}{dt}=0$  для  $t = -\infty$ . Соответственно колебания, продолжающиеся после прекращения заметного действия силы, будут выражаться формулой

$$x = A \cos nt + B \sin nt, \quad (14)$$

где

$$A = -\frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin nt dt, \quad B = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos nt dt. \quad (15)$$

Пусть, например,

$$f(t) = \frac{\mu}{\pi} \frac{\tau}{t^2 + \tau^2}. \quad (16)$$

Здесь представлена сила, имеющая заметное значение лишь в течение некоторого большего или меньшего промежутка времени по обе стороны от момента  $t=0$ , в зависимости от значения  $\tau$ ; полная величина импульса силы равна  $\mu$ <sup>1)</sup>. Взяв достаточно малое значение  $\tau$ , можно получить как угодно близкое приближение к случаю мгновенного импульса силы. Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos nt dt}{t^2 + \tau^2} = \frac{\pi}{\tau} e^{-n\tau}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nt dt}{t^2 + \tau^2} = 0^2), \quad (17)$$

получаем:

$$x = \frac{\mu e^{-n\tau}}{n} \sin nt. \quad (18)$$

Экспоненциальный множитель определяет эффект конечной ширины импульса. Этот эффект тем больше, чем больше частота свободных колебаний.

<sup>1)</sup> График этой функции приведен (для других целей) на рис. 14, стр. 52.

<sup>2)</sup> Вычисление первого из этих интегралов приводится в любом учебнике по интегральному исчислению.

### 9. Вынужденные колебания произвольной системы с одной степенью свободы. Резонанс

Обобщение полученных результатов не представляет никаких затруднений. Если заданные внешние силы действуют на систему с одной степенью свободы, обобщенная координата которой есть  $q$ , то работу, произведенную ими при бесконечно малом изменении конфигурации и пропорциональную  $\delta q$ , можно обозначить через  $Q\delta q$ . Величина  $Q$  называется «обобщенной силой», действующей на систему «относительно обобщенной координаты  $q$ ». Например, если  $q$ —угловая координата тела, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, то  $Q$ —*момент* внешних сил относительно этой оси.

Отсюда следует, что при любом реальном движении системы мощность внешних сил равна  $Q\dot{q}$ . Уравнение энергии принимает теперь следующую форму:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = Q\dot{q}, \quad (1)$$

откуда, подставляя в него значение  $T$  из уравнения (1) § 7, получаем:

$$a\ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{da}{dq} \dot{q}^2 + \frac{dV}{dq} = Q. \quad (2)$$

Рассматривая малые колебания около положения равновесия, можно, как и прежде, пренебречь членами второго порядка. Подставляя значение  $V$  из уравнения (5) § 7, получим:

$$a\ddot{q} + cq = Q. \quad (3)$$

Если  $Q$ —гармоническая сила, например сила, пропорциональная  $\cos pt$ , то вынужденное колебание выразится формулой

$$q = \frac{Q}{c - p^2 a}, \quad (4)$$

что является просто обобщенной формой последнего члена в уравнении (4) § 8.

Следует отметить два специальных случая. Когда  $p$  очень мало, формула (4) превращается в равенство  $q = Q/c$ . Это значение можно назвать статическим или «равновес-

ным» значением смещения<sup>1)</sup>); это — статическое смещение, которое было бы создано постоянной силой, равной мгновенному значению  $Q$ . Другими словами, это то смещение, которое сила создала бы в системе, лишенной инерции ( $a=0$ ). Обозначая эту равновесную величину через  $\bar{q}$ , можно переписать (4) в виде

$$q = \frac{\bar{q}}{1 - \frac{p^2}{n^2}}, \quad (5)$$

где  $n$ , как и в § 7, обозначает частоту свободных колебаний.

С другой стороны, когда  $p$  очень велико по сравнению с  $n$ , то (4) приближенно превращается в

$$q = -\frac{Q}{p^2 a}. \quad (6)$$

Большое значение  $p/n$  почти соответствует случаю системы, не обладающей потенциальной энергией, в которой существенное значение имеет только ее инерция.

Если на систему действуют две или более гармонических вынуждающих сил, результирующее вынужденное колебание получается путем простого сложения. Так, например, вынуждающая сила

$$Q = f_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) + f_2 \cos(p_2 t + \alpha_2) + \dots \quad (7)$$

вызовет вынужденное колебание

$$q = \frac{f_1}{n^2 - p_1^2} \cos(p_1 t + \alpha_1) + \frac{f_2}{n^2 - p_2^2} \cos(p_2 t + \alpha_2) + \dots \quad (8)$$

Заметим, что из-за различия знаменателей амплитуды отдельных членов этого выражения не пропорциональны амплитудам соответственных членов в выражении для  $Q$ .

Это является иллюстрацией к замечанию, сделанному в § 1, о том, что одни только колебания гармонического типа не изменяют своего вида при передаче; характер сложного колебания, представляемого формулой (8),

<sup>1)</sup> Этот термин взят из теории приливов, где равновесная высота прилива определяется как высота, которая была бы обусловлена возмущающими силами, если бы они постоянно сохраняли свои мгновенные значения.



отличен от характера вынуждающей силы. В частности, если одна из вынуждающих частот  $p_1, p_2, \dots$  почти совпадает с собственной частотой  $n$  системы, то соответствующая компонента вынужденного колебания будет значительно превосходить остальные. В этом и заключается теория «резонанса» в той мере, как ее возможно развить без учета диссипативных сил.

## 10. Суперпозиция гармонических колебаний

К задаче о суперпозиции гармонических движений, происходящих по одной и той же прямой, приводит целый ряд практически важных случаев. Например, высота прилива в данной точке является алгебраической суммой нескольких гармонических компонент; при этом (для многих пунктов) наибольшими компонентами будут те, у которых периоды составляют половину лунного или половину солнечного дня соответственно.

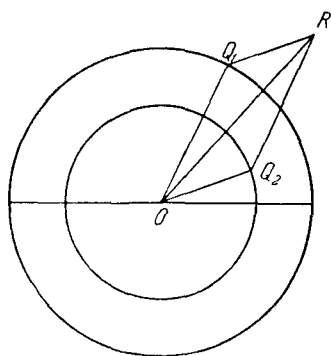


Рис. 9.

Суперпозицию двух гармонических колебаний можно проиллюстрировать геометрическим методом, аналогично построению рис. 2. Если две

точки  $Q_1$  и  $Q_2$  описывают концентрические окружности (рис. 9), имея угловые скорости  $n_1$  и  $n_2$ , то проекции этих точек на неподвижный диаметр будут совершать гармонические колебания вида

$$x_1 = a_1 \cos(n_1 t + \varepsilon_1), \quad x_2 = a_2 \cos(n_2 t + \varepsilon_2), \quad (1)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — радиусы окружностей, а  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — начальные углы, образуемые радиусами  $OQ_1$  и  $OQ_2$  с осью  $x$ . Результат сложения выразится следующим образом:

$$x = x_1 + x_2 \quad (2)$$

и величина  $x$  оказывается равной проекции диагонали  $OR$  параллелограмма со сторонами  $OQ_1$  и  $OQ_2$ .

Если  $n_1 = n_2$ , то составляющие колебания имеют одинаковый период, угол  $Q_1 O Q_2$  постоянен и результирующее движение является гармоническим колебанием с тем же периодом.

Если же  $n_1$  и  $n_2$  не равны, то угол  $Q_1 O Q_2$  изменяется от 0 до  $180^\circ$  и значение  $OR$  колеблется между величинами  $a_1 \pm a_2$ . В «приливных часах» Кельвина «стрелки»  $OQ_1$  и  $OQ_2$  делают полный оборот за половину лунного и половину солнечного дня соответственно, а сторонами параллелограмма  $Q_1 R$  и  $Q_2 R$  служат стержни, соединенные со стрелками и друг с другом. В этом случае проекция  $R$  указывает высоту прилива, обусловленную наложением лунных и солнечных полусуточных приливов.

Если периоды  $2\pi/n_1$  и  $2\pi/n_2$  весьма близки, но не в точности равны друг другу, то при одном обороте  $OQ_1$  или  $OQ_2$  угол  $Q_1 O Q_2$  изменяется очень мало и результирующее колебание можно приближенно описать как гармоническое, с амплитудой, меняющейся в пределах  $a_1 \pm a_2$ . Период изменений амплитуды равен промежутку времени, в течение которого стрелка  $OQ_1$  обгонит вторую стрелку на четыре прямых угла; это дает период  $2\pi/(n_1 - n_2)$ . Отсюда следует, что частота изменения амплитуды равна разности между частотами обеих составляющих колебаний. В этом лежит причина чередования «сигизийных» и «квадратурных» приливов, обусловленного совпадением или противоположностью фаз лунных и солнечных полусуточных приливов. В акустике мы встречаемся с весьма существенным явлением «биений» между двумя тонами, незначительно отличающимися по высоте. Различие между максимальной и минимальной амплитудами наибольшее, когда амплитуды первичных колебаний  $a_1$  и  $a_2$  равны. Тогда

$$\begin{aligned}
 x &= a \cos(n_1 t + \varepsilon_1) + a \cos(n_2 t + \varepsilon_2) = \\
 &= 2a \cos \left\{ \frac{1}{2} (n_1 - n_2) t + \frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right\} \times \\
 &\quad \times \cos \left\{ \frac{1}{2} (n_1 + n_2) t + \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right\}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Такое явление можно, приближенно, как и прежде, называть гармоническим колебанием с периодом  $2\pi / \frac{1}{2} (n_1 + n_2)$

и амплитудой, колеблющейся в пределах между 0 и  $2a$  за время  $\pi/\frac{1}{2}(n_1-n_2)$ . Графическое изображение этого



Рис. 10.

случая для  $n_1 : n_2 = 41 : 39$  показано на рис. 10 ( $t$ —абсцисса и  $x$ —ордината).

### 11. Свободные колебания при наличии трения

Использованное нами в §§ 4—10 представление о полностью изолированной динамической системе, на которую не действуют никакие диссипативные силы, конечно, является идеализированным. В действительности энергия свободных колебаний постепенно расходуется, вернее, переходит в другие виды энергии; однако с точки зрения акустики этот процесс происходит довольно медленно, в том смысле, что за один период тратится чрезвычайно малая доля общей энергии.

Чтобы выразить влияние потерь энергии (безразлично, будут ли они обусловлены устройством самой системы или передачей энергии внешней среде), введем силы сопротивления, пропорциональные скорости движения. Заранее предполагается, что эти силы являются функциями от скорости<sup>1)</sup>; при малых же колебаниях достаточно рассматривать только члены первой степени.

Таким образом, уравнение свободного движения точки около положения равновесия принимает вид

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - R \frac{dx}{dt}, \quad (1)$$

где  $R$  — коэффициент сопротивления. Если мы положим

$$\frac{K}{M} = n^2, \quad \frac{R}{M} = k, \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Мы увидим далее (гл. VIII), что в результате сопротивления среды могут возникнуть дополнительные силы, зависящие от ускорения. Эти силы равносильны небольшому увеличению инерции и не оказывают влияния на потери. Пока нет необходимости учитывать эти силы,

то получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + n^2x = 0. \quad (3)$$

Можно свести решение этого уравнения к решению уравнения (3) § 4 следующим искусственным приемом<sup>1)</sup>. Положим

$$x = ye^{-\frac{1}{2}kt}, \quad (4)$$

тогда после подстановки получим:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left( n^2 - \frac{1}{4}k^2 \right) y = 0. \quad (5)$$

Здесь следует различать три случая. Если трение относительно мало или, более точно, если  $k < 2n$ , можно положить:

$$n'^2 = n^2 - \frac{1}{4}k^2, \quad (6)$$

и тогда

$$y = A \cos n't + B \sin n't \quad (7)$$

будет решением уравнения (3), откуда

$$x = e^{-\frac{1}{2}kt} (A \cos n't + B \sin n't). \quad (8)$$

Меняя произвольные постоянные и положив

$$\tau = \frac{2}{k}, \quad (9)$$

получим:

$$x = ae^{-t/\tau} \cos(n't + \varepsilon). \quad (10)$$

Это решение можно назвать затухающим гармоническим колебанием, амплитуда которого ( $ae^{-t/\tau}$ ) асимптотически стремится к нулю по мере увеличения  $t$ . Время  $\tau$ , за которое амплитуда уменьшается в отношении  $1/e$ , называют «модулем затухания»<sup>2)</sup>. На рис. 11 графически изображена зависимость между  $x$  и  $t$ . Пунктирные линии изображают участки экспоненциальных кривых  $x = \pm ae^{-t/\tau}$ .

<sup>1)</sup> Другой метод решения приведен в § 20.

<sup>2)</sup> В русской литературе этот термин неупотребителен. Употребляемый обычно термин «коэффициент затухания» относится к величине, обратной «модулю затухания». (Прим. ред.)

Для наглядности здесь взято значение скорости затухания, значительно превышающее значения, встречающиеся при любых обычных акустических явлениях.

Мы видели, что чисто гармоническое колебание можно рассматривать как ортогональную проекцию равномерного движения по окружности. Аналогичное изображение затухающего колебания (10) можно получить, заменив

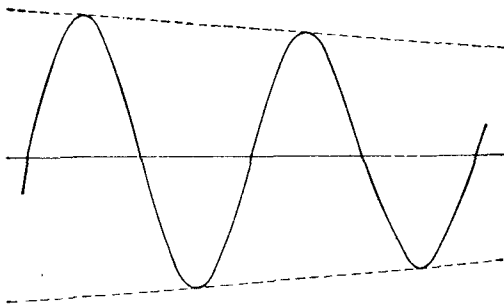


Рис. 11.

окружность логарифмической спиралью, описываемой с постоянной угловой скоростью  $n'$  вокруг полюса  $O$  в направлении уменьшения радиуса-вектора  $r$ <sup>1)</sup>. Действительно, формулу (10) можно записать в виде  $x = r \cos \theta$ , где положено

$$r = ae^{-t/\tau}, \quad \theta = n't + \varepsilon. \quad (11)$$

Исключая  $t$ , получаем:

$$r = \alpha e^{-\beta\theta}, \quad (12)$$

где  $\beta = (n'\tau)^{-1}$ ,  $\alpha = ae^{\beta\varepsilon}$ . Это — уравнение логарифмической спирали в полярных координатах. Соответствующая кривая рис. 12 вычерчена в том же масштабе, что и кривая рис. 11.

Для большинства практически встречающихся в акустике случаев величина  $k/2n$  или  $1/n\tau$  очень мала. Тогда

<sup>1)</sup> Эта теорема была сформулирована в 1867 г. Тэтом (P. G. Tait, 1831—1901, профессор натуральной философии в Эдинбурге в 1860—1901 гг.).

разность между  $n$  и  $n'$  — малая величина второго порядка, которой обычно можно пренебречь; другими словами, трение не оказывает заметного влияния на *период*. Следует отметить, что величина  $1/n\tau$ , квадратом которой

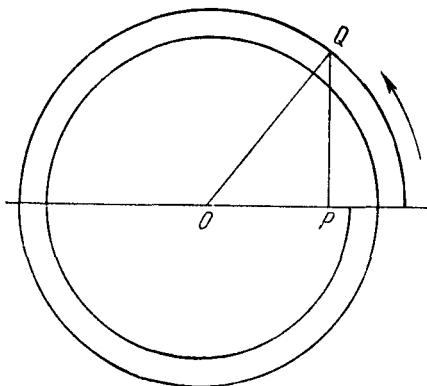


Рис. 12.

мы пренебрегаем, представляет собой отношение периода  $2\pi/n$  к времени  $2\pi\tau$ , в течение которого амплитуда уменьшается в отношении  $e^{-2\pi} = \frac{1}{535}$ .

Если  $k$  больше, чем  $2n$ , то решение уравнения (3) принимает другой вид; получается:

$$y = Ae^{\sqrt{\frac{1}{4}k^2 - n^2} t} + Be^{-\sqrt{\frac{1}{4}k^2 - n^2} t}, \quad (13)$$

откуда

$$x = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}, \quad (14)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} = \frac{1}{2} k \mp \sqrt{\frac{1}{4} k^2 - n^2}. \quad (15)$$

Частица асимптотически стремится к равновесию, не совершая колебаний. Действительно, можно легко показать, что она не больше одного раза проходит через свое положение равновесия. Такой тип движения осуществляется

при качаниях маятника в очень вязкой жидкости, в аperiодических гальванометрах и других электрических приборах, однако для акустики он представляет мало интереса.

Если равенство  $k = 2n$  выполняется точно, то решение уравнения (3) принимает вид

$$x = (A + Bt)e^{-nt} \quad (16)$$

и качественно картина остается аналогичной предыдущему случаю.

## 12. Общий случай диссипативной системы с одной степенью свободы.

### Влияние периодических вынуждающих сил

Влияние рассеяния энергии на свободное движение любой системы с одной степенью свободы может быть учтено предположением о наличии потерь механической энергии, пропорциональных квадрату обобщенной скорости; тогда, пользуясь обозначениями § 7, имеем:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} a \dot{q}^2 + \frac{1}{2} c q^2 \right) = -b \dot{q}^2, \quad (1)$$

откуда

$$a \ddot{q} + b \dot{q} + cq = 0. \quad (2)$$

Это, конечно, равносильно введению силы трения  $Q = -b\dot{q}$  в уравнение (3) § 9.

Уравнение (1) имеет ту же форму, что (3) § 11, и если положить

$$n^2 = \frac{c}{a}, \quad \tau = \frac{2a}{b}, \quad (3)$$

то их решения совпадут.

Когда потери энергии малы, скорость, с которой уменьшается амплитуда колебания, можно определить независимым методом (предложенным Стоксом<sup>1)</sup>), кото-

<sup>1)</sup> George Gabriel Stokes (1819—1903), профессор математики в Кембридже на Луказианской кафедре (1849—1903).

рым мы часто будем пользоваться. Поскольку период практически не зависит от вязкости, процесс в течение большого числа циклов может быть представлен следующей формулой:

$$q = C \cos (nt + \varepsilon), \quad (4)$$

при условии постепенного изменения величин  $C$  и  $\varepsilon$  в соответствии с изменением движения. Согласно (11) § 7, средняя энергия в течение этого времени будет приблизительно равна  $\frac{1}{2} n^2 a C^2$ , а скорость рассеяния энергии будет:

$$b\dot{q}^2 = \frac{1}{2} n^2 b C^2 \left\{ 1 - \cos 2 (nt + \varepsilon) \right\},$$

что дает в среднем  $\frac{1}{2} n^2 b C^2$ . Приравнявая среднюю скорость рассеяния энергии среднему значению потерь, получаем:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} n^2 a C^2 \right) = - \frac{1}{2} n^2 b C^2, \quad (5)$$

откуда

$$\frac{dC}{dt} + \frac{1}{2} \frac{b}{a} C = 0, \quad (6)$$

или

$$C = C_0 e^{-t/\tau}, \quad (7)$$

где  $\tau = 2a/b$ , как в (3).

Если, кроме диссипативных сил, заданы еще некоторые внешние силы, уравнение энергии принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} a \dot{q}^2 + \frac{1}{2} c q^2 \right) = - b \dot{q}^2 + Q \dot{q}, \quad (8)$$

откуда

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q. \quad (9)$$

Из этого уравнения сразу находим силу, необходимую для поддержания заданного гармонического колебания,



Условия, определяющие амплитуду и фазу этого вынужденного колебания, требуют тщательного рассмотрения. Амплитуда достигает максимума при наименьшем значении  $R^2$ , т. е. при

$$p = n \left( 1 - \frac{b^2}{2ac} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

и максимальная амплитуда равна при этом

$$\frac{C}{nb} \left( 1 - \frac{b^2}{4ac} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

В большинстве интересующих нас случаев  $b^2/ac$ —малая величина второго порядка малости. Тогда с высокой степенью точности можно считать максимум равным  $C/nb$  и полагать, что он наступает при  $p=n$ .

Далее, из уравнений (15) и (16) следует, что  $q$  отстает по фазе от вынуждающей силы на угол  $\alpha$ , лежащий между 0 и  $\frac{\pi}{2}$  или между  $\frac{\pi}{2}$  и  $\pi$ , в зависимости от того, будет ли  $p^2$  меньше или больше  $c/a$ , т. е. в зависимости от того, будет ли частота вынужденных колебаний меньше или больше частоты собственных колебаний. Если, сохраняя постоянное значение  $p$ , уменьшать коэффициент сопротивления  $b$ , то  $\alpha$  стремится к пределу 0 или  $\pi$  соответственно, согласно § 8, в котором мы установили, что при отсутствии сопротивления наблюдается точное совпадение или противоположность фаз. Если, однако, сохраняя постоянное значение  $b$ , стремиться  $p$  к значению  $n (= \sqrt{c/a})$ , определяющему частоту при отсутствии сопротивления, то  $\alpha$  стремится к пределу  $\frac{\pi}{2}$  и фазы  $q$  и  $Q$  отличаются на величину, соответствующую четверти периода. Это значит, что тогда максимальные значения вынуждающей силы достигаются одновременно с максимальными значениями скорости  $\dot{q}$ .

Эти соотношения можно яснее представить себе, рассматривая маятник, чечевице которого через равные промежутки времени попеременно сообщаются положительные и отрицательные мгновенные импульсы. Из рис. 13 очевидно, что импульс в направлении движения вызывает опережение или отставание по фазе свободного

колебания в зависимости от того, предшествует ли этот импульс или следует (в пределах четверти периода) за моментом максимального значения скорости. Так, если частица находится в точке  $P$  и движется к точке  $O$ , то при увеличении ее скорости в отношении  $PQ$  к  $PQ_1$  происходит опережение по фазе на угол  $QQOQ_1$ , в то время как аналогичный импульс в  $P'$  вызовет отставание по фазе на угол  $Q'OQ'_1$ .

Для того чтобы избежать какого-либо воздействия на фазу, необходимо, чтобы импульс сообщался в момент

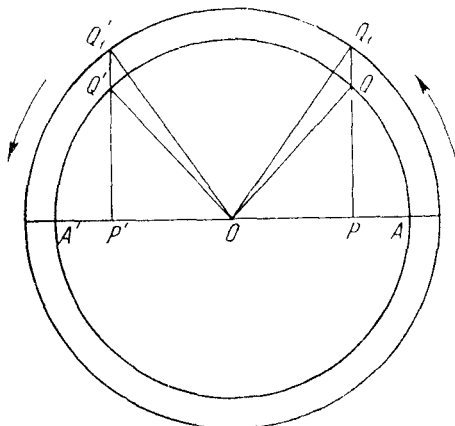


Рис. 13.

прохождения через точку  $O$ . Если представить себе, что при каждом прохождении через точку  $O$  чечевице маятника сообщается небольшой вспомогательный импульс, как в случае обычного часового спуска, мы получим иллюстрацию условий максимального резонанса: период вынуждающей силы в точности равен периоду собственных колебаний и сила синфазна со скоростью. Амплитуда определяется из соображений о равенстве работы, произведенной импульсами, работе, затраченной на трение. Результат существенно не изменяется, если импульсы симметрично распределены вокруг  $O$ , как в случае гармонической вынуждающей силы, поскольку опережение по фазе по одну сторону от  $O$  уничтожается запаздыванием по фазе по другую сторону.

Предположим теперь, что вспомогательные импульсы каждый раз сообщаются чечевице при прохождении ею симметрично расположенных точек  $P$  и  $P'$  в направлении к центру. Каждый импульс обуславливает опережение по фазе, и период уменьшается. Такая картина иллюстрирует случай вынуждающей силы, период которой меньше периода собственных колебаний и максимальные и минимальные значения которой *предшествуют* максимальным и минимальным значениям скорости. Если же импульсы сообщаются чечевице маятника при прохождении через  $P$  и  $P'$  при движении *от центра*, то происходит повторяющееся запаздывание по фазе, и период *увеличивается*. Это соответствует случаю вынуждающей силы, период которой *больше* периода собственных колебаний; на этот раз максимальные и минимальные значения силы *следуют* за соответственными значениями скорости. Читателю рекомендуется подробно разобраться в приведенном тут вкратце рассуждении и рассмотреть результат замены ряда изолированных импульсов непрерывной силой, изменяющейся по гармоническому закону. Исходя из аналогичных соображений, можно также объяснить тот факт, что малая сила трения, пропорциональная скорости, не оказывает заметного влияния на период свободных колебаний.

Вернемся к аналитической трактовке. Для того чтобы вынуждающая сила могла сообщить системе некоторое количество энергии, возмещающее непрерывные потери вследствие рассеяния, необходимо наличие разности фаз между силой и перемещением. Если, как в § 9, существует полное совпадение (или противоположность) фаз  $q$  и  $Q$ , то сила, по выражению, принятому в астрономии, «находится в квадратуре» по отношению к скорости  $\dot{q}$ , т. е. их фазы различаются на  $\frac{1}{2}\pi$  и полная работа, выполненная за целый период, равна нулю. В рассматриваемом же случае мощность вынуждающей силы в каждый момент времени равна

$$\begin{aligned} Q\dot{q} &= -\frac{pC^2}{R} \sin(pt - \alpha) \cos pt = \\ &= \frac{pC^2}{2R} \{\sin \alpha - \sin(2pt - \alpha)\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Среднее значение мощности составляет:

$$\frac{pC^2}{2R} \sin \alpha = \frac{C^2}{2b} \sin^2 \alpha. \quad (20)$$

То же выражение можно, конечно, получить в качестве среднего значения для  $b\dot{q}^2$ , поскольку количество энергии, сообщаемое вынуждающей силой, должно в среднем в точности возмещать количество энергии, непрерывно теряемой в результате рассеяния, так как средняя энергия, запасенная в системе, постоянна.

Из выражений (16) и (20) следует, что потери максимальны при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  или при  $p = n$ , т. е. когда частота вынужденных колебаний совпадает с частотой свободных колебаний при отсутствии сопротивления. Максимальное значение, равное  $\frac{1}{2} C^2/b$ , конечно, тем больше, чем меньше значение  $b$ .

### 13. Влияние затухания на резонанс

Резкое возрастание амплитуды и потерь, всегда возникающее, когда период вынужденных колебаний равен или почти равен периоду собственных колебаний, характеризует собой явление «резонанса», о котором уже упоминалось в § 8 и многие акустические примеры которого встретятся нам в дальнейшем. Механической иллюстрацией этого явления может служить математический маятник, точке подвеса которого сообщается малое возвратно-поступательное движение соответственного периода, или, еще лучше, колебание двойного маятника (§ 14), т. е. устройства, в котором два груза подвешены в различных точках нити, закрепленной в неподвижной точке и висящей вертикально. Когда верхний груз ( $M$ ) велик, а нижний ( $m$ ) сравнительно мал, то груз  $M$  будет колебаться почти в точности как чечевица простого маятника, поскольку реакция груза  $m$  будет мала. При этих условиях колебания груза  $m$  практически совпадают с колебаниями маятника, точке подвеса которого сообщается гармоническое колебательное движение (§ 8), и при соответственном подборе длины нижней части нити амплитуда колебаний  $m$  может сильно увеличиться.

Остается рассмотреть еще один существенный момент. Когда отношение  $p/n$  между частотой вынужденных и собственных колебаний отклоняется в ту или другую сторону от единицы, величина потерь уменьшается по сравнению с максимальным значением тем быстрее, чем меньше значение коэффициента трения  $b$ . Другими словами, чем интенсивнее резонанс в случае точного совпадения частот, тем уже область, в которой величина колебаний остается близкой к максимальному значению. Например, для того, чтобы заметным образом возбудить камертон, — даже если он снабжен резонансным ящиком, — колебаниями другого камертона, расположенного поблизости, требуется очень точная настройка, тогда как столб воздуха в почти полностью закрытом сосуде (например, в колбе или в органной трубе) сильно реагирует на колебания в значительно более широком диапазоне частот. Для уяснения этого вопроса заметим, что выражение для рассеяния энергии (20) в § 12 можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{C^2}{2b} \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2} C^2 \frac{p^2 b}{(c - p^2 a)^2 + p^2 b^2} = \\ &= \frac{C^2}{4 \sqrt{ac}} \frac{\beta}{\beta^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{p}{n} - \frac{n}{p} \right)^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где, в обозначениях (3) § 12,

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{nb}{c} = \frac{1}{n\tau}. \quad (2)$$

Второй множитель достигает максимального значения  $1/\beta$  при  $p=n$  и, очевидно, при отклонении  $p/n$  от единицы уменьшается тем быстрее, чем меньше значение  $\beta$ . Этот вопрос можно хорошо проиллюстрировать графически, построив кривую зависимости потерь от частоты. При этом в качестве абсциссы следует взять вместо отношения  $p/n$  его логарифм, так как в этом случае равным отрезкам оси  $x$  будут соответствовать равные интервалы (в музыкальном смысле). Следовательно, можно написать:

$$\left. \begin{aligned} x &= \log \frac{p}{n}, \\ y &= \frac{\beta}{\beta^2 + \text{sh}^2 x}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Если, однако, как это обычно имеет место, заметный резонанс соответствует лишь небольшой области значений  $p/n$ , можно воспользоваться более простым выражением:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{p}{n} - 1, \\ y &= \frac{\beta}{\beta^2 + x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Кривая, представляемая последним уравнением, симметрична относительно оси  $y$  и асимптотически приближается

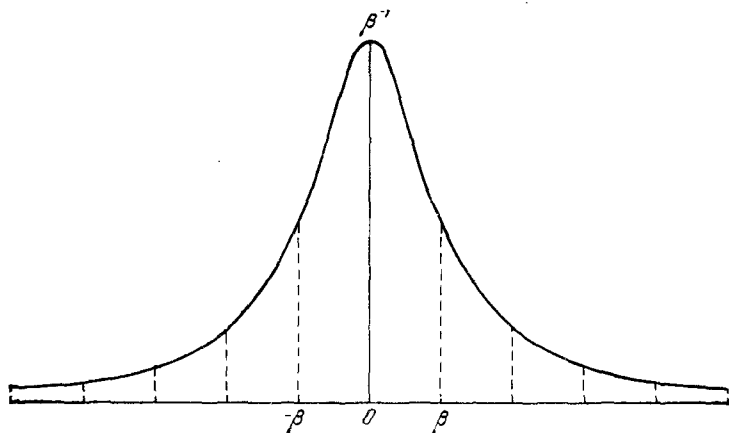


Рис. 14.

к оси  $x$  по мере увеличения  $x$ . Очевидно, что при увеличении  $\beta$  в любом отношении новая кривая получится путем увеличения всех абсцисс в том же отношении и уменьшения всех ординат, также в этом же отношении; при этом площадь ( $\pi$ ), ограниченная кривой и осью  $x$ , останется неизменной. Интенсивность уменьшается до половины своего максимального значения, когда  $x^2 = \beta^2$ , или когда

$$\frac{p}{n} = 1 \pm \frac{1}{n\tau}. \quad (5)$$

Так, при затухании, которое обусловило бы уменьшение амплитуды свободных колебаний в отношении  $1/e$  в те-

чение 10, 100 и 1000 периодов <sup>1)</sup>, значения отношения  $p/n$ , при которых интенсивность достигала бы половины своей максимальной величины, были бы соответственно  $1 \pm 0,016$ ,  $1 \pm 0,0016$  и  $1 \pm 0,00016$ . На рис. 14 показана кривая, изображающая уравнение (4).

Приведенные выше рассуждения относятся непосредственно к вопросу о диссипации энергии, имеющему в данном случае наибольшее значение. Рассмотрение вопроса об изменении квадрата амплитуды или количества запасенной в системе энергии приводит к весьма близким результатам, особенно для случаев малого затухания.

## 14. Системы с многими степенями свободы.

### Примеры. Двойной маятник

Приступим к рассмотрению систем, имеющих любое конечное число степеней свободы. Говорят, что система обладает  $m$  степенями свободы, если для различения всевозможных конфигураций, которые может принять эта система, необходимо и достаточно задать значения  $m$  независимых переменных, или «координат». Это представление, впервые выдвинутое на первый план Кельвином <sup>2)</sup>, имеет широкое применение в технике и в теоретической механике. Например, для телескопа с пассажным или экваториальным штативом  $m=2$ ; для гироскопа или, вообще, для любого твердого тела, свободно вращающегося вокруг неподвижной точки,  $m=3$ ; для жесткой системы, способной двигаться в двух измерениях,  $m=3$ ; для жесткой системы, способной свободно двигаться в пространстве,  $m=6$ . В каждом частном случае выбор координат можно осуществить бесконечным множеством способов, но их число всегда остается определенным. Так, в прикладной механике существует теорема о том, что жесткую систему, способную двигаться только в одной плоскости, можно закрепить,

<sup>1)</sup> В опыте Рэлея число периодов для определенного камертона с частотой 256 колебаний в секунду равнялось примерно 5900. При использовании резонатора число периодов сократилось до 3300; «Теория звука», т. 2, § 384.

<sup>2)</sup> William Thomson, Lord Kelvin (1824—1907), профессор натуральной философии в Глазго (1846—1899). Этот вопрос рассматривается в «Натуральной философии» Томсона и Тэта, 2-е изд., §§ 195—201 (1879).

связав при помощи трех шарнирных стержней любые три точки этой системы с любыми тремя неподвижными точками плоскости <sup>1)</sup>. Аналогично любую жесткую трехмерную систему можно неподвижно закрепить при помощи шести шарнирных стержней, связывающих шесть точек этой системы с шестью точками, неподвижными относительно земли.

Переходя к колебаниям системы со многими степенями свободы вблизи положения равновесия, начнем, как и прежде, с рассмотрения нескольких частных случаев.

Обратимся сначала к колебаниям частицы, помещенной в чашку с гладкими стенками любой непрерывной формы. Пользуясь соответственными связями, можно заставить частицу колебаться только в какой-либо заданной вертикальной плоскости, проходящей через низшую точку  $O$  чашки. Например, такое движение можно осуществить, заключив эту частицу между двумя лишенными трения направляющими плоскостями, расположенными бесконечно близко друг к другу. Вообще говоря, на одну из направляющих плоскостей будет действовать поперечная сила, однако она исчезает, если данная плоскость проходит в точке  $O$  через одно из направлений главной кривизны. Следовательно, возможны два вида свободных гармонических колебаний, происходящих во взаимно-перпендикулярных направлениях с частотами

$$n_1 = \sqrt{\frac{g}{R_1}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{g}{R_2}}, \quad (1)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны главных сечений, проходящих через точку  $O$ . Так как, по предположению, колебания малы, их можно налагать одно на другое; тогда, если обозначить через  $x$  и  $y$  прямоугольные координаты в горизонтальной плоскости, проходящей через  $O$ , решение примет вид

$$\left. \begin{aligned} x &= A_1 \cos n_1 t + A_2 \sin n_1 t, \\ y &= B_1 \cos n_2 t + B_2 \sin n_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

---

<sup>1)</sup> Если только направления этих трех стержней не совпадают (или не параллельны). В приведенном ниже случае необходимы оговорки более сложного характера, однако такие подробности нас сейчас не интересуют.



Поскольку эти выражения содержат четыре произвольные постоянные, можно так подобрать решение, чтобы оно удовлетворяло заданным начальным значениям  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ .

Этот случай можно очень хорошо проиллюстрировать при помощи маятника Блэкберна <sup>1)</sup> (рис. 15). К нити  $ACB$ , неподвижно закрепленной в точках  $A$  и  $B$ , в точке  $C$  подвешен на нити  $CP$  груз. Так как, по предположению, нить лишена инерции, точка  $P$  всегда будет находиться в одной плоскости с  $A, B, C$ . При этих условиях геометрическое место точек, описываемых  $P$ , будет представлять собой кольцеобразную поверхность, образованную вращением вокруг оси  $AB$  окружности, описанной в плоскости  $ACB$  радиусом  $CP$  из точки  $C$ . Главными радиусами кривизны для нижней точки  $P$  будут  $R_1 = CP$  и  $R_2 = EP$ , где  $E$  — точка  $AB$ , расположенная на вертикали, проведенной через точку  $P$ . Соответственные колебания происходят в плоскости  $ABP$  и в плоскости, перпендикулярной к ней.

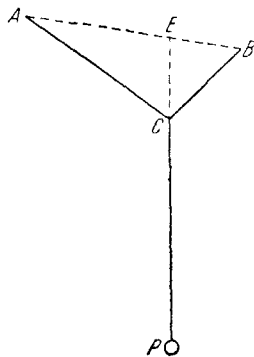


Рис. 15.

Другим весьма простым примером является случай двух равных частиц  $M$ , симметрично прикрепленных на расстояниях  $a$  от концов туго натянутой нити, общую длину которой примем равной  $2(a+b)$ , где  $2b$  — длина средней части нити. Очевидно, что одним из гармонических колебаний системы будет такое движение, при котором отклонения обеих частиц всегда равны и имеют один и тот же знак (рис. 16). Если  $P$  — натяжение нити, то уравнение колебания каждой частицы будет иметь вид

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -P \frac{x}{a}, \quad (3)$$

а частота, следовательно, будет равна

$$n_1 = \sqrt{\frac{P}{Ma}}. \quad (4)$$

При втором типе колебания оба отклонения равны по

<sup>1)</sup> Н. Blackburn, профессор математики в Глазго (1849—1879).

величине, но противоположны по знаку, так что средняя точка нити неподвижна (рис. 17). Таким образом, условия в точности совпадают с условиями в § 6 и частота равна

$$n_2 = \sqrt{\frac{P}{M} \frac{(a+b)}{ab}}. \quad (5)$$

Как и следовало ожидать,  $n_2$  больше  $n_1$ . Если обозначить

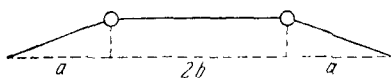


Рис. 16.

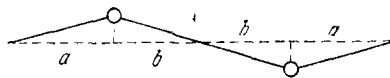


Рис. 17.

отклонение обеих частиц через  $x$  и  $y$ , то при суперпозиции обоих колебаний получим:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(n_1 t + \varepsilon_1) + B \cos(n_2 t + \varepsilon_2), \\ y &= A \cos(n_1 t + \varepsilon_1) - B \cos(n_2 t + \varepsilon_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где все четыре постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  произвольны.

В случае трех прикрепленных к нити частиц характер различных колебаний не так непосредственно ясен, даже в случае симметричного расположения частиц. Предположим, что массы частиц равны и что частицы делят нить на четыре равных отрезка  $a$ . Обозначая отклонения частиц через  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} &= -P \frac{x}{a} - P \frac{x-y}{a}, \\ M \frac{d^2 y}{dt^2} &= -P \frac{y-x}{a} - P \frac{y-z}{a}, \\ M \frac{d^2 z}{dt^2} &= -P \frac{z}{a} - P \frac{z-y}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если положить для краткости  $\mu = P/Ma$ , эти уравнения можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\mu x - \mu y &= 0, \\ -\mu x + \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\mu y - \mu z &= 0, \\ -\mu y + \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\mu z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Чтобы убедиться в существовании колебаний, при которых все частицы движутся по гармоническому закону с одинаковым периодом и с одинаковой фазой, допустим, что имеют место равенства

$$x = A \cos (nt + \varepsilon), \quad y = B \cos (nt + \varepsilon), \quad z = C \cos (nt + \varepsilon). \quad (9)$$

После подстановки этих значений в уравнения (8) оказывается, что они удовлетворяются при условии выполнения следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} (n^2 - 2\mu) A + \mu B &= 0, \\ \mu A + (n^2 - 2\mu) B + \mu C &= 0, \\ \mu B + (n^2 - 2\mu) C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Эти три уравнения определяют оба отношения  $A : B : C$  и значение  $n^2$ . Исключая эти отношения, получим:

$$(n^2 - 2\mu)(n^4 - 4\mu n^2 + 2\mu^2) = 0. \quad (11)$$

Это уравнение третьей степени относительно  $n^2$ . Одним из корней будет  $n_1^2 = 2\mu$ ; тогда, согласно уравнениям (10),  $B_1 = 0$ ,  $A_1 = -C_1$  и, следовательно,

$$x = A_1 \cos (n_1 t + \varepsilon_1), \quad y = 0, \quad z = -A_1 \cos (n_1 t + \varepsilon_1). \quad (12)$$

Можно было заранее предвидеть существование такого колебания и сразу определить его частоту, как и в предыдущем примере. Остальные два корня уравнения (11) будут:

$$n_2^2 = (2 + \sqrt{2})\mu, \quad n_3^2 = (2 - \sqrt{2})\mu;$$

при подстановке в уравнение (10) получаем:

$$A_2 = C_2, \quad B_2 = -\sqrt{2}A_2 \quad \text{и} \quad A_3 = C_3, \quad B_3 = \sqrt{2}A_3$$

соответственно. Колебания будут, следовательно, иметь вид

$$\left. \begin{aligned} x &= A_2 \cos (n_2 t + \varepsilon_2), \\ y &= -\sqrt{2}A_2 \cos (n_2 t + \varepsilon_2), \\ z &= A_2 \cos (n_2 t + \varepsilon_2) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

и

$$\left. \begin{aligned} x &= A_3 \cos(n_3 t + \varepsilon_3), \\ y &= \sqrt{2} A_3 \cos(n_3 t + \varepsilon_3), \\ z &= A_3 \cos(n_3 t + \varepsilon_3). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

На рис. 18 приведены все три типа колебаний. Полное решение уравнения получается путем суперпозиции решений (12), (13) и (14) и содержит шесть произвольных постоянных  $A_1, A_2, A_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

В заключение разберем задачу о двойном маятнике, пользуясь при этом только общим методом. Пусть масса  $M$  подвешена к неподвижной точке на нити длиной  $a$  и вторая масса  $m$  подвешена к  $M$  на нити длиной  $b$  (рис. 19). Для простоты предположим, что колебания происходят только в одной верти-

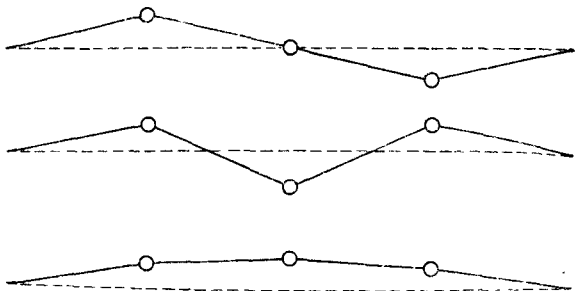


Рис. 18.

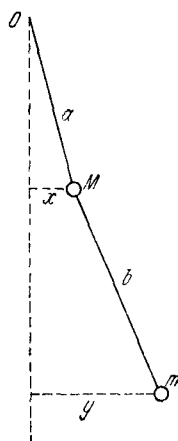


Рис. 19.

кальной плоскости. Так как, по предположению, горизонтальные смещения  $x, y$  частиц  $M$  и  $m$  малы, то натяжения верхней и нижней частей нити будут приближенно равны  $(M + m)g$  и  $mg$ . Уравнения движения, следовательно, примут вид

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} &= -(M + m)g \frac{x}{a} + mg \frac{y - x}{b}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -mg \frac{y - x}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Чтобы найти возможные гармонические колебания си-

стемы, положим

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos (nt + \varepsilon), \\ y &= B \cos (nt + \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Уравнения удовлетворяются, если

$$\left. \begin{aligned} \left\{ (1 - \mu) n^2 - g \left( \frac{1}{a} + \frac{\mu}{b} \right) \right\} A + \mu \frac{g}{b} B &= 0, \\ \frac{g}{b} A + \left( n^2 - \frac{g}{b} \right) B &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где введено обозначение

$$\mu = \frac{m}{M+m}. \quad (18)$$

Исключая отношение  $A : B$ , получаем уравнение второй степени относительно  $n^2$ :

$$(1 - \mu) n^4 - g \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) n^2 + \frac{g^2}{ab} = 0. \quad (19)$$

Условие вещественности корней

$$g^2 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 + 4\mu \frac{g^2}{ab} > 0, \quad (20)$$

очевидно, удовлетворяется всегда. Далее, легко заметить, что оба корня положительны, так что  $n$  тоже вещественно.

Задача включает целый ряд интересных специальных случаев, но мы отметим только один-два. Если отношение

$\mu = \frac{m}{M+m}$  мало, то корни уравнения (19) будут приближенно равны  $n_1^2 = g/a$  и  $n_2^2 = g/b$  соответственно. В первом случае  $M$  колеблется как чечевица математического маятника длиной  $a$ , а колебание  $m$  можно рассматривать как вынужденное колебание соответственной частоты; этот случай уже рассматривался в § 13. Для второго вида колебания, как видно из второго уравнения (17), отношение  $A : B$  мало;  $M$  почти покоится, а  $m$  колеблется как чечевица математического маятника длиной  $b$ .

Так как выражение в левой части уравнения (20) не может обратиться в нуль, обе частоты никогда не могут полностью совпадать, однако частоты приблизительно равны, если  $a$  очень близко к  $b$ , а  $\mu$  мало. При этом может

иметь место очень интересное явление. Так как колебание каждой массы получается путем суперпозиции двух гармонических колебаний почти одинакового периода, то могут наблюдаться сильные изменения результирующих смещений; если амплитуды обоих колебаний равны между собой, то, как показано в § 10, наблюдаются промежутки времени, когда тело почти покоится. Движение как бы передается через правильные промежутки времени попеременно от  $m$  к  $M$  и от  $M$  к  $m$ <sup>1)</sup>.

С другой стороны, если  $M$  мало по сравнению с  $m$ , то  $\mu$  приблизительно равно единице, а корни уравнения (19) приближенно равны  $n^2 = g/(a+b)$  и  $n^2 = \frac{mg}{M} \frac{(a+b)}{ab}$  соответственно. Первый корень приближенно дает  $B/A = (a+b)/a$ , так что обе массы всегда находятся почти на одной прямой с точкой подвеса, а  $m$  колеблется как чечевица маятника с длиной  $a+b$ . При втором нормальном колебании отношение  $B/A$  мало, т. е.  $m$  находится почти в состоянии покоя, а  $M$  колеблется как частица, подвешенная к нити, натянутой с силой  $mg$  между неподвижными точками (ср. § 6).

Другой интересный случай получается, если принять  $a$  бесконечно большим. Тогда один из корней уравнения (19) обращается в нуль, а второй оказывается равным

$$n^2 = \frac{g}{(1-\mu)b} = \frac{g}{b} \left( 1 + \frac{m}{M} \right), \quad (21)$$

откуда  $A/B = -m/M$ . Это означает, что если точка подвеса математического маятника поддается в горизонтальном направлении, но силы упругости при этом не возникают, то частота увеличивается в некотором отношении, причем это увеличение, конечно, тем меньше, чем больше инерция точки подвеса. Это, однако, легче установить непосредственно.

<sup>1)</sup> Здесь, конечно, не было учтено влияние потерь энергии. Если на  $m$  действует трение и, в особенности, если время затухания меньше времени цикла изменения амплитуды, вычисленного согласно приведенной выше теории, то картина меняется и получается более точная иллюстрация теории резонанса (§ 12). Существует, однако, постоянное, хотя бы и медленное уменьшение количества первоначальной энергии массы  $M$ .

### 15. Общие уравнения системы со многими степенями свободы

Мы можем изложить здесь общую теорию малых колебаний системы со многими степенями свободы лишь в общих чертах. В случае одной степени свободы (§ 7) оказалось возможным построить теорию, исходя из одного только уравнения энергии; при наличии более чем одной зависимой переменной этого уравнения недостаточно и приходится снова обратиться к динамике. Для простоты изложения предположим, что имеются только две степени свободы, однако изложение не будет содержать чего-либо, препятствующего непосредственному распространению его на общий случай.

Итак, представим себе систему, в которой каждая рассматриваемая конфигурация может быть определена при помощи двух независимых переменных («координат»)  $q_1, q_2$ . Если в какой-либо конфигурации  $(q_1, q_2)$  одна и только одна из координат, например  $q_1$ , получит бесконечно малое приращение  $\delta q_1$ , то каждая частица  $m$  системы совершит перемещение  $\delta s_1 = \alpha_1 \delta q_1$  в некотором направлении. Аналогично, если приращение получит только координата  $q_2$ , то  $m$  переместится на расстояние  $\delta s_2 = \alpha_2 \delta q_2$  в некотором направлении, вообще говоря, отличном от направления первого перемещения. Результирующее перемещение  $\delta s$ , обусловленное наличием обоих приращений, будет определяться формулой

$$\begin{aligned} \delta s^2 &= \delta s_1^2 + 2\delta s_1 \delta s_2 \cos \theta + \delta s_2^2 = \\ &= \alpha_1^2 \delta q_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \cos \theta \delta q_1 \delta q_2 + \alpha_2^2 \delta q_2^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\theta$  обозначает угол между направлениями  $\delta s_1, \delta s_2$ . Разделив это выражение на  $\delta t^2$ , получим квадрат скорости  $v$  любой частицы  $m$  при любом движении системы, проходящей через конфигурацию  $(q_1, q_2)$ , выраженный через обобщенные «компоненты скорости»  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ ; именно:

$$v^2 = \alpha_1^2 \dot{q}_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \cos \theta \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \alpha_2^2 \dot{q}_2^2. \quad (2)$$

Полная кинетическая энергия системы дается формулой

$$2T = \Sigma (mv^2) = a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2, \quad (3)$$

где

$$a_{11} = \Sigma (m\alpha_1^2), \quad a_{12} = \Sigma (m\alpha_1\alpha_2 \cos \theta), \quad a_{22} = \Sigma (m\alpha_2^2), \quad (4)$$

причем суммирование  $\Sigma$  распространяется на все частицы  $m$  системы. Коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  являются, вообще, функциями  $q_1$  и  $q_2$ ; они называются «коэффициентами инерции» для рассматриваемой конфигурации системы.

Пусть теперь  $F_1$  обозначает компоненту в направлении  $\delta s_1$  результирующей силы, действующей на  $m$ , и пусть  $F_2$  — соответственная компонента для направления  $\delta s_2$ . Работа, произведенная над системой при любом бесконечно малом перемещении, будет, следовательно, равна

$$\Sigma (F_1 \delta s_1 + F_2 \delta s_2) = \Sigma (F_1 \alpha_1) \delta q_1 + \Sigma (F_2 \alpha_2) \delta q_2. \quad (5)$$

При отсутствии внешних сил эта работа производится за счет уменьшения потенциальной энергии  $V$  системы. При наличии внешних сил ими производится добавочная работа; мы будем предполагать, что ее можно выразить в форме

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2.$$

Коэффициенты  $Q_1$ ,  $Q_2$  называются, по очевидной аналогии, обобщенными «компонентами (внешней) силы». Отсюда

$$\Sigma (F_1 \alpha_1) \delta q_1 + \Sigma (F_2 \alpha_2) \delta q_2 = -\delta V + Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2, \quad (6)$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \Sigma (F_1 \alpha_1) &= -\frac{\partial V}{\partial q_1} + Q_1, \\ \Sigma (F_2 \alpha_2) &= -\frac{\partial V}{\partial q_2} + Q_2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

При изучении малых колебаний мы предполагаем, что  $q_1$ ,  $q_2$  — бесконечно малые величины, обращающиеся в нуль в положении равновесия, и, соответственно, что и вынуждающие силы  $Q_1$ ,  $Q_2$  также малы. Тогда величины  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и, следовательно,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  и  $a_{22}$  можно считать постоянными. Скорость частицы  $m$  складывается из компонент  $\alpha_1 \dot{q}_1$ ,  $\alpha_2 \dot{q}_2$  в направлениях  $\delta s_1$ ,  $\delta s_2$  соответственно; и если пренебречь квадратами бесконечно малых вели-



чин, то ускорение частицы будет аналогичным образом слагаться из компонент  $\alpha_1 \ddot{q}_1$ ,  $\alpha_2 \ddot{q}_2$ <sup>1)</sup>. Проектируя силы, действующие на  $m$ , на направление  $\delta s_1$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} & m (\alpha_1 \ddot{q}_1 + \alpha_2 \ddot{q}_2 \cos \theta) = F_1 \\ \text{и аналогично} & \\ & m (\alpha_1 \ddot{q}_1 \cos \theta + \alpha_2 \ddot{q}_2) = F_2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Умножая первое из этих уравнений на  $\alpha_1$ , второе — на  $\alpha_2$  и суммируя их по всем частицам системы, получаем, пользуясь обозначениями (4):

$$\left. \begin{aligned} & a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_1} + Q_1 \\ \text{и аналогично} & \\ & a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2} + Q_2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $a_{21}$ , конечно, тождественно равно  $a_{12}$ .

При отсутствии внешних сил эти уравнения, по предположению, удовлетворяются при  $\ddot{q}_1 = 0$ ,  $\ddot{q}_2 = 0$ . Поэтому положение равновесия характеризуется тем свойством, что

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0; \quad (10)$$

другими словами, при всех бесконечно малых отклонениях от этого положения потенциальная энергия стационарна. Отсюда следует, что если разложить  $V$  в ряд по степеням  $q_1$ ,  $q_2$ , то члены первого порядка будут отсутствовать и с достаточной степенью точности можно написать, опуская постоянный член:

$$2V = c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2. \quad (11)$$

Величины  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{22}$  называют «коэффициентами устойчивости».

<sup>1)</sup> Первая из этих двух величин (ограничиваясь членами первого порядка) является ускорением, вычисленным в предположении, что изменяется только  $q_1$ , а вторая — ускорением, вычисленным при изменении одного только  $q_2$ . Получение результирующего ускорения путем суперпозиции этих двух значений возможно только в предположении бесконечной малости движений.

Пользуясь (11), можем записать (9) в виде

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= Q_1, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= Q_2, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $c_{21} = c_{12}$ .

Возвращаясь теперь к любой из конкретных задач § 14, мы видим, что, действительно, все уравнения движения имели именно эту форму. Например, в случае двойного маятника имеем:

$$2T = M\dot{x}^2 + m\dot{y}^2, \quad 2V = Mg\frac{x^2}{a} + mg\left\{\frac{x^2}{a} + \frac{(y-x)^2}{b}\right\}. \quad (13)$$

Поэтому, если положить

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= x, & q_2 &= y, \\ a_{11} &= M, & a_{12} &= 0, & a_{22} &= m, \\ c_{11} &= \frac{(M+m)g}{a} + \frac{mg}{b}, & c_{12} &= -\frac{mg}{b}, & c_{22} &= \frac{mg}{b}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

то получаются формулы вида (12).

Общий случай  $m$  степеней свободы почти ничем не отличается от приведенного, за исключением длины формул. Мы получим тогда  $m$  уравнений вида

$$\begin{aligned} a_{s1}\ddot{q}_1 + a_{s2}\ddot{q}_2 + \dots + a_{sm}\ddot{q}_m + c_{s1}q_1 + c_{s2}q_2 + \dots \\ \dots + c_{sm}q_m = Q_s, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $s$  — любое из целых чисел 1, 2, 3, ...,  $m$ .

## 16. Периоды свободных колебаний системы со многими степенями свободы. Свойство стационарности

В случае свободных колебаний  $Q_1 = 0$ ,  $Q_2 = 0$  и уравнения (12) § 15 решаются точно таким же способом, как и в рассмотренных выше отдельных примерах. Полагая

$$q_1 = A_1 \cos(nt + \varepsilon), \quad q_2 = A_2 \cos(nt + \varepsilon), \quad (1)$$

получаем:

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - n^2 a_{11}) A_1 + (c_{12} - n^2 a_{12}) A_2 &= 0, \\ (c_{21} - n^2 a_{21}) A_1 + (c_{22} - n^2 a_{22}) A_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Исключая отношение  $A_1 : A_2$ , находим:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - n^2 a_{11} & c_{12} - n^2 a_{12} \\ c_{21} - n^2 a_{21} & c_{22} - n^2 a_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Следует отметить, что детерминант этой матрицы симметричен. Оба корня уравнения дают допустимые значения  $n^2$ . Взяв какой-либо один из них, получим решение, в котором отношение  $A_1 : A_2$  можно определить при помощи любого из уравнений (2). Поэтому найденный таким образом тип колебаний зависит от двух произвольных постоянных, а именно: от абсолютной величины одной из амплитуд, например  $A_1$ , и от начальной фазы  $\varepsilon$ . Второй корень уравнения (3) приводит к другому решению аналогичного характера.

Распространение этого метода на общий случай производится очевидным образом, однако уместно привести формальный перечень результатов. В любой консервативной системе с  $m$  степенями свободы существует, вообще говоря,  $m$  независимых «нормальных свободных колебаний» вблизи положения устойчивого равновесия. Частоты этих колебаний находятся из уравнения  $m$ -го порядка относительно  $n^2$ , содержащего симметричный детерминант аналогично уравнению (3), и, таким образом, зависят только от свойств самой системы. В каждом из этих нормальных колебаний система колеблется так, как если бы она обладала только одной степенью свободы, так что амплитуды колебаний для координат  $q_1, q_2, \dots, q_m$  находятся в постоянном отношении; поэтому сказанное в § 7 приложимо и здесь. Направления, в которых происходят колебания различных частиц, и соответственные относительные амплитуды имеют при каждом из этих нормальных колебаний определенные значения, хотя обычно различные для разных нормальных колебаний; единственными произвольными элементами являются абсолютные амплитуды и начальные фазы.

Так как уравнения движения линейны, поскольку в них были отброшены произведения и квадраты координат и их производных по времени, то возможна суперпозиция различных решений путем простого сложения соответственных выражений. Это положение было в достаточной

степени проиллюстрировано выше на ряде примеров. Складывая таким образом  $m$  различных нормальных колебаний, из которых каждое имеет свою произвольную амплитуду и фазу, получаем решение, содержащее  $2m$  произвольных постоянных, т. е. как раз то число их, которое позволяет представить колебание, обладающее произвольными начальными значениями координат  $q_1, q_2, \dots, q_m$  и скоростей  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m$ . Другими словами, можно считать, что наиболее общий вид свободного колебания системы вокруг положения устойчивого равновесия складывается из  $m$  нормальных колебаний, обладающих соответственными амплитудами и начальными фазами. Этот принцип был впервые высказан Д. Бернулли <sup>1)</sup> (1741).

В частных случаях может оказаться, что два (или более) периода нормальных колебаний системы совпадают. Тогда характер нормальных колебаний оказывается не вполне определенным. Наиболее простым примером является колебание сферического маятника или частицы колеблющейся внутри сферической чашки с гладкой поверхностью. В этом случае можно считать, что направления движения при нормальных колебаниях задаются *любыми* двумя горизонтальными прямыми, проведенными через положение равновесия. С теоретической точки зрения эти совпадения можно считать случайными, поскольку они нарушаются при сколь угодно малом изменении устройства системы (например, при небольшой эллиптичности чашки в приведенном выше случае), однако на практике они часто приводят к интересным результатам (см. ниже, § 53).

Остается рассмотреть еще одну существенную характеристику нормальных колебаний, впервые отмеченную Рэлеем в 1883 г. Если в результате введения связей без трения (т. е. не производящих работы) система будет вынуждена совершать нормальное колебание, лишь незначительно отличающееся от одного из исходных нормальных

---

<sup>1)</sup> Daniel Bernoulli (1700—1782), один из младших представителей знаменитой семьи швейцарских математиков. В 1725—1733 гг. профессор математики в Санкт-Петербурге, в 1750—1782 гг. профессор физики в Бале. Его основные работы относятся к гидродинамике, теории колеблющихся струн и изгибу упругих балок.

колебаний, то период изменится лишь на малую величину *второго* порядка. Другими словами, периоды различных колебаний «стационарны» по отношению к малому изменению их характера под действием идеальных связей. Рассмотрим, например, такое нормальное колебание, при котором изменяется только координата  $q_1$ . Тогда в уравнении (2)  $a_{12}=0$ ,  $c_{12}=0$  и частота нормального колебания определится формулой  $n^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}$ . Если уравнение связи имеет вид  $q_2 = \lambda q_1$ , то условие равенства нулю работы реакции связи имеет вид  $Q_1 \dot{q}_1 + Q_2 \dot{q}_2 = 0$  или  $Q_1 + \lambda Q_2 = 0$ , откуда получаем уравнение

$$(a_{11} + \lambda^2 a_{22}) \ddot{q}_1 + (c_{11} + \lambda^2 c_{22}) \dot{q}_1 = 0, \quad (4)$$

дающее для частоты ( $p$ ) формулу

$$p^2 = \frac{c_{11} + \lambda^2 c_{22}}{a_{11} + \lambda^2 a_{22}}. \quad (5)$$

Если  $\lambda$  мало, эта частота отличается от  $n^2$  на малую величину второго порядка. Хотя это доказательство ограничивается случаем двух степеней свободы, его легко обобщить. Благодаря свободе выбора координат можно всегда считать, что при нормальном колебании данного типа изменяется только одна координата  $q_1$ , а уравнения связи имеют вид  $q_2 = \lambda q_1$ ,  $q_3 = \mu q_1$ ,  $q_4 = \nu q_1, \dots$

Для иллюстрации сказанного снова обратимся к наглядному примеру частицы, находящейся на гладкой поверхности. Если наложена связь, ограничивающая движение] частицы вертикальным сечением, проходящим через низшую точку поверхности, то период будет равен  $2\pi\sqrt{R/g}$ , где  $R$ —радиус кривизны сечения; в главных же сечениях  $R$  имеет, как известно, максимальное или минимальное значение.

Далее, из уравнения (5) видно, что измененный введением связи период (как и в этом частном случае) лежит между периодами двух нормальных колебаний; это свойство тоже можно обобщить.

Отсюда следует, что даже если затруднительно точно установить характер какого-либо определенного нормального колебания, все же обычно можно с большой точностью

определить его частоту путем рассмотрения гипотетического колебания, которое можно было бы, исходя из каких-либо независимых соображений, считать достаточно хорошим приближением к истинному колебанию. При этом в случае, когда ищется нормальное колебание наименьшей частоты, полученное значение будет верхним пределом. Возьмем, например, три одинаковые частицы, укрепленные на равных расстояниях на туго натянутой струне (§ 14), и рассмотрим гипотетическое симметричное колебание, при котором  $x = z = \lambda y$ . Кинетическая энергия системы определяется в этом случае формулой

$$2T = M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = M (1 + 2\lambda^2) \dot{y}^2, \quad (6)$$

так что коэффициент инерции будет равен  $M(1 + 2\lambda^2)$ . Для потенциальной энергии получаем, вычисляя работу, потребовавшуюся для растяжения нити (как в § 22), или каким-либо другим способом:

$$\begin{aligned} 2V &= \frac{P}{a} \{x^2 + (y - x)^2 + (z - y)^2 + z^2\} = \\ &= \frac{P}{a} (4\lambda^2 - 4\lambda + 2) y^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда находим, что коэффициент устойчивости равен  $\frac{P}{a} (4\lambda^2 - 4\lambda + 2)$ . Для частоты ( $p$ ) получаем:

$$p^2 = \frac{P}{Ma} \frac{4\lambda^2 - 4\lambda + 2}{1 + 2\lambda^2}.$$

Эта величина стационарна для  $\lambda = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$ , а соответственные частоты равны значениям, полученным в § 14. В этом случае заранее было очевидно, что подходящим гипотетическим типом колебания явится симметричное нормальное колебание.

Для целей этой книги нет необходимости подробно рассматривать теорию диссипации энергии в системе со многими степенями свободы. Общий эффект тот же, как и в § 12; свободные колебания постепенно затухают; однако, если диссипативные силы относительно малы, то *периоды* при этом заметно не изменяются.

### 17. Вынужденные колебания системы со многими степенями свободы. Принцип взаимности

Для иллюстрации теории вынужденных колебаний достаточно предположить, что в уравнении (12) § 15  $Q_1$  пропорционально  $\cos pt$ , а  $Q_2=0$ . Уравнения удовлетворяются, если предположить, что как  $q_1$ , так и  $q_2$  пропорциональны  $\cos pt$ , и если будут выполнены условия

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - p^2 a_{11}) q_1 + (c_{12} - p^2 a_{12}) q_2 &= Q_1, \\ (c_{21} - p^2 a_{21}) q_1 + (c_{22} - p^2 a_{22}) q_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эти выражения определяют (постоянные) отношения  $q_1/Q_1$  и  $q_2/Q_1$ , а именно:

$$q_1 = \frac{c_{22} - p^2 a_{22}}{\Delta(p^2)} Q_1, \quad q_2 = -\frac{c_{12} - p^2 a_{12}}{\Delta(p^2)} Q_1, \quad (2)$$

где  $\Delta(p^2)$ —детерминант, написанный в левой части (3) § 16, в котором  $n^2$  заменено на  $p^2$ . Отсюда следует общий вывод, что если на какую-либо часть системы действует периодическая сила гармонического типа, то каждая часть системы будет совершать гармонические колебания того же периода, совпадающие по фазе; однако амплитуды колебаний различных частей системы будут, конечно, различны. Если период вынужденных колебаний почти совпадает с периодом одного из нормальных колебаний свободной системы, то, вообще, амплитуда вынужденных колебаний сильно увеличится вследствие малости знаменателя в формулах (2). Для исчерпывающей трактовки этого явления нужно, как и в § 12, принять во внимание диссипативные силы.

Из формул (2) следует замечательная теорема взаимности, впервые доказанная Гельмгольцем для воздушных колебаний и позднее в значительной степени обобщенная Рэлеем. Рассмотрим другой случай вынужденных колебаний (соответственные величины будем отмечать штрихом), для которого  $Q'_1=0$ , а  $Q'_2$  пропорционально  $\cos pt$ ; тогда

$$q'_1 = -\frac{c_{21} - p^2 a_{21}}{\Delta(p^2)} Q'_2. \quad (3)$$

Сравнивая с (2), видим, что

$$q_2 : Q_1 = q'_1 : Q'_2. \quad (4)$$

Интерпретация этого выражения наиболее проста, когда обобщенные «силы»  $Q_1$  и  $Q'_2$  одинаковы по своему характеру, например, если обе являются обычными статическими силами или обе представляют собой пару сил; тогда, полагая  $Q_1 = Q'_2$ , получим  $q_2 = q'_1$ . Это значит, что колебания второго типа, обусловленные заданной периодической силой первого типа, совпадают по амплитуде и по фазе с колебаниями первого типа, обусловленными равной силой второго типа. В § 28 будет приведен пример, взятый из теории колебания струн. Данное здесь доказательство легко распространить на общий случай  $m$  степеней свободы.

### 18. Сложение гармонических колебаний, происходящих в различных направлениях

Возвратимся к вопросу о сложении гармонических колебаний, хотя и не настолько существенному здесь, как в оптике, но все же требующему некоторого дальнейшего внимания. Если в системе, совершающей свободные колебания, обратить внимание на какую-либо отдельную частицу, мы увидим, что направления, в которых она колеблется при различных типах нормальных колебаний, вообще говоря, различны. Суперпозиция этих колебаний, конечно, происходит тогда по законам геометрического сложения, или сложения векторов.

Будет достаточно рассмотреть случай двух степеней свободы, где мы имеем независимые гармонические колебания в направлениях, соответствующих смещениям  $\delta s_1$  и  $\delta s_2$ , как в § 15. В результате сложения получается плоская траектория, обычно сложного характера. Например, в случае маятника Блэкбёрна (§ 14) имеем:

$$x = A \cos(n_1 t + \epsilon_1), \quad y = B \cos(n_2 t + \epsilon_2), \quad (1)$$

где  $x$  и  $y$  — прямоугольные координаты. В этом случае орбита вписана в прямоугольник, ограниченный прямыми  $x = \pm A$ ,  $y = \pm B$ . Если  $n_1$ ,  $n_2$  соизмеримы, то по истечении некоторого промежутка времени, равного наименьшему



кратному обоим периодам, значения  $x$ ,  $y$  и  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  повторяются и траектория оказывается замкнутой. Получаемые таким (или каким-либо другим) способом фигуры связаны с именем Лиссажу <sup>1)</sup>, который имел очень много последователей в этой области, весьма привлекательной с экспериментальной точки зрения.

Наиболее прост случай  $n_1 = n_2$ . Исключив из уравнения (1)  $t$ , получаем:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (2)$$

Это — уравнение эллипса; если начальные фазы  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  совпадают или различаются на  $\pi$ , эллипс вырождается в прямую (рис. 20). Наиболее простой механической иллюстрацией этого явления служит сферический маятник. Когда

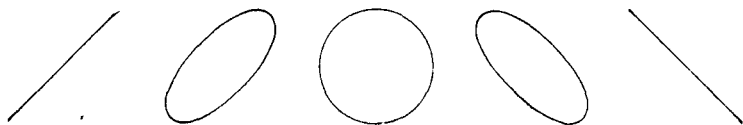


Рис. 20.

отношение периодов соответствует октаве ( $n_1 = 2n_2$ ), получается кривая, имеющая две петли; она может вырождаться в одну из двух параболических дуг (рис. 21). Пользуясь таблицами тригонометрических функций, легко, при помощи (1), вычертить фигуру Лиссажу для этого и для других случаев соизмеримости периодов. На рис. 22 приведено простое геометрическое построение, в котором вспомогательные окружности разделены на отрезки, соответствующие равным промежуткам времени для обоих складываемых гармонических колебаний. Если начать с какой-либо вершины какого-либо из прямоугольников на чертеже и двигаться по диагоналям, то траектория пройдет через ряд последовательных точек фигуры Лиссажу, отвечающих равным промежуткам времени.

<sup>1)</sup> J. A. Lissajous (1822—1880), профессор физики в лицее св. Людовика (1850—1874), ректор Академии в Шамбери (1874—1875) и в Безансоне (1875—1879). Его основной мемуар «Оптическое исследование колебательных движений» был напечатан в 1873 г.

Можно упомянуть и о другой трактовке этих фигур, также принадлежащей Лиссажу. Если заменить  $n_1 t$  на  $\theta$ , то при подходящем выборе начала отсчета  $t$  и при условии

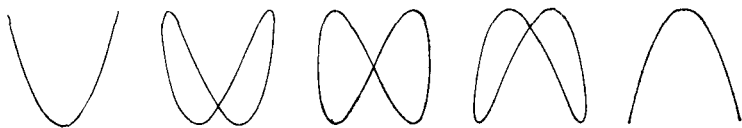


Рис. 21.

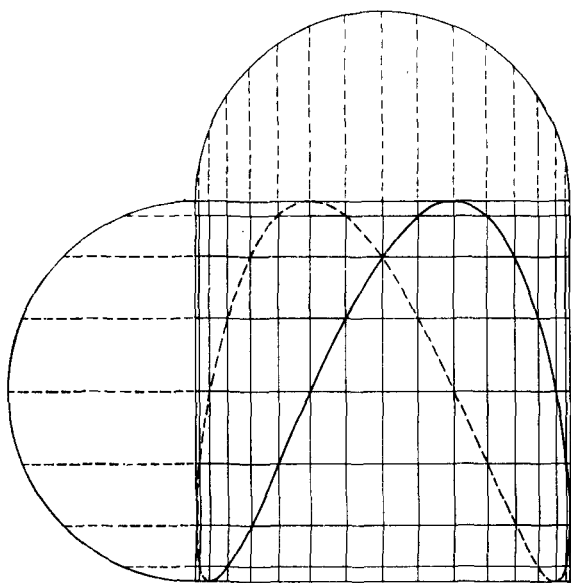


Рис. 22.

соизмеримости периодов можно написать формулы, эквивалентные (1):

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \cos \frac{p}{q} (\theta - \alpha), \quad (3)$$

где  $p/q$ —несократимая дробь. Добавляя уравнение

$$z = a \sin \theta, \quad (4)$$

получим вместе с (3) систему, изображающую синусоиду, нанесенную на поверхность кругового цилиндра

$$x^2 + z^2 = a^2 \quad (5)$$

и пробегаящую  $p$  витков при последовательных  $q$  обходах вокруг цилиндра. Кривая Лиссажу представляет собой ортогональную проекцию этой кривой на плоскость ( $z=0$ ), проходящую через ось цилиндра. Иллюстрацией служит рис. 22, где ветвь кривой, изображенную пунктиром, можно рассматривать как проекцию той части синусоиды, которая расположена на задней стороне искривленной поверхности. Изменение разности фаз в (1) эквивалентно изменению угла  $\alpha$  и может быть получено соответственным по величине поворотом цилиндра вокруг своей оси. Это опять можно проиллюстрировать на рис. 22, если начать чертить кривую, несколько отступив направо или налево.

Когда отношение периодов почти, но не в точности равно отношению двух целых чисел, фигура последовательно проходит через различные фазы, соответствующие случаю соизмеримости периодов <sup>1)</sup>. Так, в случае приблизительного унисона, или интервала, приближенно равного октаве, цикл содержит фазы, показанные на рис. 21, 22, за которыми следуют те же фазы в обратном порядке. Аналогичные результаты получаются при непрерывном вращении цилиндра Лиссажу.

## 19. Переход к непрерывным системам

Место, которое мы уделили изучению динамических систем с конечным числом степеней свободы, оправдывается тем соображением, что здесь мы встречаемся в наиболее простых и легко воспринимаемых формах с законами, действующими во всей теоретической акустике. В следующих главах мы будем рассматривать такие системы, как струны, стержни, мембраны, столбы воздуха, в которых

<sup>1)</sup> В своем методе Лиссажу оптически складывал колебания двух камертонов. Фигуры, полученные, когда тоны звучащих камертонов образуют какой-либо простой музыкальный интервал, дают прекрасное подтверждение числовых соотношений, приведенных в § 3. В случае унисона, если камертон не очень точно настроен, цикл изменений синхронен с биениями, которые воспринимаются слухом (см. § 10).

число степеней свободы бесконечно. При математическом рассмотрении вопроса иногда оказывается возможным перейти от одного из этих классов явлений к другому при помощи некоторого предельного процесса, как это сделал Д. Бернулли (1732), рассмотревший колебания висящей цепи как предельный случай задачи о большом числе одинаковых частиц, прикрепленных на равных расстояниях к натянутой струне, массой которой можно пренебречь. Во всяком случае не может быть никакого сомнения в том, что сохраняется справедливость изложенных общих законов. Следует обратить внимание на то, что непрерывные системы обладают бесконечным числом нормальных типов колебаний. Обычно принято располагать их в восходящем порядке частот; наиболее медленное колебание по-прежнему можно назвать «основным»; оно обычно является наиболее важным колебанием системы.

Прежде чем покончить с общей теорией, желательно еще раз подчеркнуть первостепенное значение гармонического типа колебаний в вопросах динамики. Мы видели, что оно является типичным для системы с одной степенью свободы, лишенной трения, или (в более общей форме) для системы, колеблющейся так, как если бы она обладала только одной степенью свободы, как в случае нормального колебания. Гармоническое колебание является также единственным типом *вынужденных* колебаний, в точности воспроизводимых, в большем или меньшем масштабе, во всех частях системы. Если сила совершенно произвольного характера действует на какую-либо точку системы, то колебания, вызванные ею в других частях системы, как правило, не похожи ни на эту силу, ни друг на друга; только в случае периодической силы, зависящей от времени по гармоническому закону, вынужденные колебания в точности подобны друг другу и происходят синфазно с действующей силой. Далее, оказывается, что при приближении к критической частоте вынуждающая сила создает вынужденные колебания с резко увеличенной амплитудой только в том случае, когда она сама подчиняется простому гармоническому закону или содержит соответствующую гармоническую компоненту. Именно эти обстоятельства помогли Гельмгольцу обосновать свою теорию слуха, к которой мы обратимся впоследствии.

## 20. Об использовании комплексных величин

Решение динамических уравнений часто можно значительно упростить, используя так называемые «комплексные» величины. Поскольку мы будем иногда пользоваться этим методом, следует вкратце объяснить лежащие в его основе принципы.

Читатель знаком с геометрическим изображением «комплексной» величины  $a+ib$  (где  $a$  и  $b$ —действительные, а  $i$  обозначает  $\sqrt{-1}$ ) в виде вектора, исходящего из начала координат и заканчивающегося в точке с прямоугольными координатами  $(a, b)$ ; он также знаком с тем фактом, что сложение комплексных чисел производится так же, как геометрическое или векторное сложение. Символ  $a+ib$ , примененный в качестве *оператора* умножения к любому вектору, обозначает тот же процесс, при помощи которого из вектора  $1$  можно получить вектор  $a+ib$ , а именно, изменение длины вектора в некотором отношении  $r$  и его поворот на некоторый угол  $\alpha$ . Эти величины определяются выражениями

$$r \cos \alpha = a, \quad r \sin \alpha = b, \quad \} \quad (1)$$

или

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{b}{a}, \quad \} \quad (2)$$

причем квадрант, в котором лежит  $\alpha$ , определяется знаком при  $\cos \alpha$  или  $\sin \alpha$ , согласно (1). Таким образом,

$$a + ib = r(\cos \alpha + i \sin \alpha). \quad (3)$$

Следовательно, символ  $\cos \alpha + i \sin \alpha$  обозначает операцию поворота вектора на угол  $\alpha$  без изменения его длины; в частности, символ  $i$  обозначает операцию поворота на прямой угол в положительном (обратном ходу часовой стрелки) направлении.

Символ

$$\omega = \cos \theta + i \sin \theta \quad (4)$$

можно изобразить в виде единичного вектора  $OP$ , идущего из  $O$  в направлении  $\theta$ . Если рассматривать  $\omega$  как функцию  $\theta$  и если  $\omega + \delta\omega$  изображается вектором  $OP'$ ,

то угол  $POP'$  будет равен  $\delta\theta$ . Вектор  $PP'$ , изображающий  $\delta\omega$ , будет, следовательно, иметь длину  $\delta\theta$ , а поскольку он повернут на  $90^\circ$  относительно  $OP$ , то его символом будет  $i\delta\theta\omega$ . Отсюда

$$\frac{d\omega}{d\theta} = i\omega. \quad (5)$$

Легко показать, что единственным решением этого уравнения, удовлетворяющим необходимому условию  $\omega=1$  при  $\theta=0$ , будет:

$$\omega = e^{i\theta}, \quad (6)$$

где  $e^{i\theta}$ , по условию, определяется обычным рядом для экспоненциальной функции. Таким образом,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (7)$$

Мы можем добавить, что «теорему сложения» показательных функций можно теперь непосредственно вывести из геометрического построения.

Мы нашли нужным повторить эти элементарные соображения потому, что они имеют интересные иллюстрации в рассматриваемой нами области. Так, пусть  $x, y$  — ортогональные координаты; если положить

$$z = x + iy, \quad (8)$$

то формула

$$z = Ce^{int} \quad (9)$$

(где  $C$  может, конечно, быть комплексным) обозначает, что вектор  $C$  повернут за время  $t$  на угол  $nt$  в положительном направлении. Следовательно, это уравнение описывает равномерное движение по кругу, происходящее с угловой скоростью  $n$  в положительном направлении. Радиус этого круга определяется «абсолютным значением»  $C$ , которое часто обозначается через  $|C|$ ; так, если

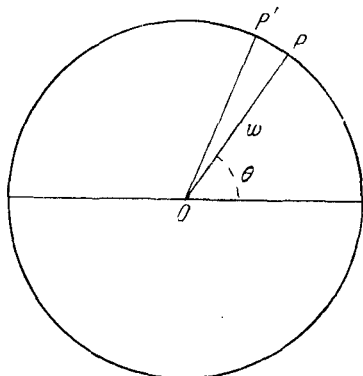


Рис. 23.

$C = A + iB$ , где  $A$  и  $B$  — действительные, то имеем:  $|C| = \sqrt{A^2 + B^2}$ . Таким же образом уравнение

$$z = C' e^{-int} \quad (10)$$

описывает равномерное движение по кругу, происходящее с угловой скоростью  $n$  в отрицательном (по ходу часовой стрелки) направлении.

Обратимся теперь к применениям комплексных величин к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. С нашей точки зрения наиболее простым случаем является уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0, \quad (11)$$

рассмотренное в § 4. Чтобы иметь возможность интерпретировать каждый шаг наших рассуждений, присоединим к нему, как мы это делали в теории сферического маятника, независимое уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0. \quad (12)$$

Оба уравнения можно объединить в одно:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + n^2z = 0. \quad (13)$$

Можно считать, что оно непосредственно, без помощи уравнений (11) и (12), дает закон ускорения для сферического маятника и аналогичных задач. Для решения уравнения (13) полагаем  $z = Ce^{\lambda t}$  и находим, что уравнение удовлетворяется при  $\lambda^2 + n^2 = 0$  или  $\lambda = \pm in$ . Поскольку различные решения можно складывать, получаем решение

$$z = Ce^{int} + C'e^{-int}, \quad (14)$$

содержащее две комплексные произвольные постоянные  $C, C'$ . Эти постоянные можно определить таким образом, чтобы в момент времени  $t=0$  значения  $z$  и  $\dot{z}$  совпадали с векторами, представляющими начальное положение и начальную скорость точки  $(x, y)$ . Из уравнения (14) следует, что наиболее общий тип движения точки, удовлетворяющего уравнению (13), можно получить путем

суперпозиции двух равномерных круговых движений в противоположных направлениях. Та же задача (в сущности) рассматривалась в § 18, где было найдено, что траектория точки является эллипсом. Такое разложение «эллиптически поляризованного гармонического» колебания на два круговых колебания в противоположных направлениях имеет важные приложения в оптике.

Решение уравнения (11) можно вывести из (14), если взять «вещественные» части слева и справа, т. е. если рассмотреть проекцию движения на ось  $x$ . Поскольку  $C$ ,  $C'$  имеют вид

$$C = A + iB, \quad C' = A' + iB', \quad (15)$$

с первого взгляда может показаться, что решение будет содержать *четыре* произвольные постоянные. Однако они скомбинированы так, что, по существу, они эквивалентны только двум постоянным. Действительно,

$$x = (A + A') \cos nt - (B - B') \sin nt. \quad (16)$$

Это обусловлено тем, что кинематически проекции на прямую правосторонних и левосторонних круговых движений неотличимы друг от друга. Отсюда следует важное практическое заключение: мы получили бы такое же общее решение уравнения (11), если бы ограничились каким-либо *одним* из решений (13), например

$$z = Ce^{int}, \quad (17)$$

и взяли его вещественную часть

$$x = A \cos nt - B \sin nt. \quad (18)$$

Совершенно очевидно, что это заключение не ограничивается случаем того дифференциального уравнения (11), с которого мы начали наше рассуждение. Мы прибегли к вспомогательному уравнению (12) только для того, чтобы избавиться и от следов того, что на самом деле можно было бы назвать «мнимым». Всегда можно мысленно прибегнуть к помощи такого уравнения, однако бесполезно и сложно формально вводить его в расчеты. Если для любого линейного дифференциального уравнения для переменных  $x$  и  $t$  с постоянными *вещественными*



коэффициентами мы будем искать решение в виде  $x = Ce^{\lambda t}$ , то комплексные значения  $\lambda$  (если таковые имеются) встретятся в виде пар сопряженных решений вида  $m \pm in$ . Мы можем утверждать, что с достаточной степенью общности получим часть решения, соответствующую этой паре корней, если используем только *один* из них, например, напомним

$$x = Ce^{(m+in)t}, \quad (19)$$

и возьмем вещественную часть этого решения.

Приложим, например, эти рассуждения к уравнению колебания вблизи положения равновесия при наличии сопротивления движению (§ 11):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + \mu x = 0. \quad (20)$$

Положив  $x = Ce^{\lambda t}$ , имеем:

$$\lambda^2 + k\lambda + \mu = 0, \quad (21)$$

откуда

$$\lambda = -\frac{1}{2}k \pm in', \quad (22)$$

где

$$n' = \sqrt{\mu - \frac{1}{4}k^2}, \quad (23)$$

при условии, что  $k^2 < 4\mu$ . Согласно изложенному выше, достаточно взять решение

$$x = Ce^{-\frac{1}{2}kt + in't},$$

или в действительной форме

$$x = e^{-\frac{1}{2}kt} (A \cos n't - B \sin n't), \quad (24)$$

что эквивалентно формуле (8) § 11.

Можно использовать тот же метод при решении уравнения для вынужденных колебаний, например уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + \mu x = f \cos pt. \quad (25)$$

Вместо этого уравнения возьмем следующее:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + k \frac{dz}{dt} + \mu z = f e^{ipt}; \quad (26)$$

подразумеваемое при этом дополнительное уравнение имеет вид (25), в котором с правой стороны  $f \cos pt$  заменено на  $f \sin pt$ . Частным решением этого уравнения является

$$z = C e^{ipt} \quad (27)$$

при условии

$$(\mu - p^2 + ikp) C = f. \quad (28)$$

Отсюда

$$z = \frac{f e^{ipt}}{\mu - p^2 + ikp}. \quad (29)$$

Если положить

$$\mu - p^2 = R \cos \alpha, \quad kp = R \sin \alpha, \quad (30)$$

последнее уравнение превращается в

$$z = \frac{f}{R} e^{i(pt - \alpha)}, \quad (31)$$

вещественная часть которого есть

$$x = \frac{f}{R} \cos(pt - \alpha). \quad (32)$$

Следует обратить внимание на краткость данного метода по сравнению с процедурой § 12.

## 21. Замечания по истории вопроса

Теория колебаний имеет длинную и довольно сложную историю, в которой взаимодействие чистой математики и механики значительно способствовало развитию обеих наук. Различные весьма интересные задачи были решены Бернулли, Эйлером <sup>1)</sup> и другими математиками, но только

<sup>1)</sup> Leonhard Euler, родился в Бале в 1707 г., умер в Санкт-Петербурге в 1783 г. Ему принадлежит очень большое число трудов почти во всех разделах математики и механики; он в основном установил употребляющиеся в настоящее время обозначения.

Лагранж<sup>1)</sup> дал общую теорию малых колебаний системы с конечным числом степеней свободы, изложив ее при помощи обобщенных координат. Работа Лагранжа написана намеренно несколько абстрактно по форме<sup>2)</sup>; полная динамическая интерпретация явления выпала на долю Томсона и Тэта («Натуральная философия», 1867), которым мы обязаны также современной терминологией в этой области. Теория была значительно развита Рэлеем и систематически использована им в акустике, а также в других областях физики, в его различных работах, большинство которых (вплоть до 1896 г.) включены в его «Теорию звука»<sup>3)</sup>.

---

1) Joseph Louis Lagrange, родившийся в Турине в 1736 г., умерший в Париже в 1813 г., «величайший математик со времени Ньютона».

2) «В этой работе нет чертежей. Излагаемые мною методы не требуют геометрических или механических построений или рассуждений, а только алгебраических действий, подчиненных планомерному и однообразному ходу». (Предисловие к «Аналитической механике», 1788.)

3) Первое издание—Лондон, 1877 г.; второе издание—Лондон, 1894—1896 гг. См. также его «Scientific Papers», Кембридж, 1899—1922.

(Первое русское издание «Теории звука» вышло в 1940—1944 гг. под редакцией С. М. Рытова и К. Ф. Теодорчика; Гостехиздат, т. I, 1940; т. II, 1944. Второе издание вышло под редакцией С. М. Рытова, т. I и т. II, Гостехиздат, 1955.—Прим. ред.)

## ГЛАВА II

### СТРУНЫ

#### 22. Уравнение движения. Энергия

Теперь мы перейдем к более подробному изучению колебаний в непрерывных системах различных типов. Среди этих колебаний первое место, по многим причинам, следует уделить поперечным колебаниям натянутой однородной струны. Исторически это была первая задача такого рода, подвергшаяся теоретическому рассмотрению. Математическая сторона исследования несложна, и различные моменты общей теории, вкратце изложенные в предыдущей главе, находят здесь свои интересные иллюстрации, к тому же легко подтверждаемые экспериментально. Кроме того, последовательность собственных периодов свободных колебаний образует тот специальный «гармонический» ряд, который уже давно признавался каким-то образом необходимым для создания хорошего музыкального тембра, хотя истинная причина этого, являющаяся в конечном счете предметом физиологии, была исследована только недавно. Математическая теория подсказала, кроме того, ряд замечательных теорем, относящихся к разложению колебаний произвольного типа на простые гармонические составляющие; эти теоремы имеют глубокое значение. Наконец, следует заметить, что в распространении возмущения вдоль однородной струны мы имеем первый, и наиболее простой, тип волнового движения.

Будем считать, что струна обладает постоянной линейной плотностью  $\rho$  и растянута силой натяжения  $P$ . Направление оси  $x$  выберем вдоль положения равновесия струны; через  $y$  обозначим поперечное отклонение в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Предполагается, что угол наклона

$\frac{\partial y}{\partial x}$  кривой, образованной струной в любой момент времени, настолько мал, что изменением натяжения можно пренебречь. При этих условиях уравнением движения элемента  $\delta x$  будет

$$\varrho \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \delta (P \sin \psi), \quad (1)$$

где  $\psi$  — угол наклона касательной относительно оси  $x$ . Действительно, правая часть представляет собой разность проекций в направлении  $y$  натяжений на обоих концах элемента. На основании только что сделанного предположения можем положить  $\sin \psi = \operatorname{tg} \psi = \frac{\partial y}{\partial x}$ , так что уравнение (1) превращается в

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где

$$c^2 = \frac{P}{\varrho}. \quad (3)$$

Легко видеть, что постоянная  $c$  имеет размерность скорости.

Кинетическая энергия любого участка струны выражается интегралом

$$T = \frac{1}{2} \varrho \int \dot{y}^2 dx, \quad (4)$$

взятым в соответственных пределах. Потенциальную энергию можно вычислить двумя способами. Во-первых, можно представить себе, что струна переводится из состояния покоя в положение равновесия в состояние покоя в любом другом заданном положении при помощи приложенных к ней поперечных сил. Для простоты предположим, что на любой стадии этого процесса все ординаты находятся в постоянном отношении ( $k$ ) к своему конечному значению  $y$ , так что последовательные формы струны отличаются только по амплитуде. Сила, которая должна быть приложена к элементу  $\delta x$ , для того чтобы уравновесить натяжения на его концах, есть

$$-\frac{\partial}{\partial x} (P \sin \psi) \delta x;$$

здесь  $\sin \psi$  следует теперь положить равным  $k \frac{dy}{dx}$ ; при увеличении  $k$  на  $\delta k$  приращение смещения равно  $y \delta k$ . Полная работа, выполненная над этим элементом, поэтому будет равна

$$-Pyy'' \delta x \int_0^1 k dk = -\frac{1}{2} Pyy'' \delta x,$$

где штрихи указывают на дифференцирование по  $x$ . Согласно этому потенциальная энергия будет равна

$$V = -\frac{1}{2} P \int yy'' dx. \quad (5)$$

Пользуясь вторым методом, мы вычисляем работу, произведенную при растяжении струны против натяжения  $P$ . Увеличение длины элемента  $\delta x$  приближенно равно

$$\sqrt{1 + y'^2} \delta x - \delta x = \frac{1}{2} y'^2 \delta x,$$

так что

$$V = \frac{1}{2} P \int y'^2 dx. \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) дают одинаковые результаты, когда интегрирование выполнено по всей возмущенной длине струны. Действительно, при интегрировании по частям получаем:

$$-\int yy'' dx = -[yy'] + \int y'^2 dx, \quad (7)$$

где первый член справа относится к значениям на пределах интегрирования. Он исчезает на концах возмущенного участка, так как здесь  $y = 0$ .

### 23. Волны на неограниченной струне

Решение уравнения (2) § 22 имеет вид

$$y = f(ct - x) + F(ct + x), \quad (1)$$

где функции  $f$  и  $F$  произвольны. Легко проверить непосредственной подстановкой, что это решение действительно удовлетворяет дифференциальному уравнению;

мы скоро увидим, что при помощи двух содержащихся в нем произвольных функций можно представить эффект любого заданного начального распределения смещений ( $y$ ) и скоростей ( $\dot{y}$ ). Это решение было опубликовано Даламбером <sup>1)</sup> в 1747 г.

Оба члена в уравнении (1) допускают простую интерпретацию. Рассматривая первый член в отдельности, мы видим, что для этого члена значение  $y$  сохраняется при увеличении на одинаковую величину  $x$  и  $ct$ ; поэтому данная величина смещения струны в точке  $x$  в момент  $t$  оказывается в более поздний момент  $t+\tau$  в точке  $x+ct$ . Следовательно, формула

$$y = f(ct - x) \quad (2)$$

представляет собой волну, которая распространяется, не изменяясь по форме, со скоростью  $c$  в положительном направлении оси  $x$ . Аналогично формула

$$y = F(ct + x) \quad (3)$$

таким же образом представляет волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси  $x$ . Оказывается, что и в наиболее общем виде свободное движение струны можно рассматривать как результат суперпозиции двух таких волн.

Следует отметить структуру выражения  $\sqrt{P/\rho}$  для скорости распространения волн. Как и во всех аналогичных случаях, скорость распространения волны имеет вид корня квадратного из отношения двух величин, одна из которых представляет (в общем смысле) упругость, а вторая—инерцию среды, в которой распространяется волна.

Профессор Тэт <sup>2)</sup> дал простой вывод этой формулы для скорости распространения волн. Представим себе струну, протягиваемую с постоянной скоростью  $v$  через изогнутую трубку с гладкими стенками, причем части струны вне трубки—прямые и расположены на одной прямой.

<sup>1)</sup> J. le Rond d'Alembert (1717—1783), энциклопедист и математик; сделал существенный вклад в динамику и гидродинамику.

<sup>2)</sup> Encyc. Brit., 9-е изд., статья «Mechanics».

Поскольку тангенциальное ускорение отсутствует, натяжение  $P$  одинаково для всей струны. Результирующая натяжений, приложенных к концам какого-либо элемента  $\delta s$  струны в любом месте трубки, будет равна  $P \frac{\delta s}{R}$ , где  $R$ —радиус кривизны в данной точке, и будет направлена по нормали к струне. Если скорость  $v$  удовлетворяет равенству  $v^2 = P/\rho$ , то эта результирующая уравновесит «центробежную силу»  $\rho \delta s \frac{v^2}{R}$ . При этих условиях можно устранить трубку, поскольку она не будет оказывать давления на струну; мы получим неподвижное возмущение на движущейся струне. Если сообщить теперь всей системе скорость  $v$  в направлении, противоположном скорости протягивания струны, то получим волну, которая распространяется со скоростью  $\sqrt{P/\rho}$ , не изменяясь по форме, по струне, находящейся в целом в состоянии покоя. Отметим, что это доказательство не требует предположения о малой величине смещения.

Движение неограниченной струны при произвольных начальных условиях

$$y = \varphi(x), \quad \dot{y} = \psi(x) \quad [t = 0] \quad (4)$$

можно вывести из уравнения (1), однако мы ограничимся просто написанием готового решения:

$$y = \frac{1}{2} \{ \varphi(x - ct) + \varphi(x + ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(z) dz. \quad (5)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что (5) удовлетворяет (4).

Если начальное возмущение ограничено конечным участком струны, то движение, в конце концов, разбивается на две отдельные волны, распространяющиеся, не изменяясь по форме, в противоположных направлениях. Для этих волн в отдельности имеем:

$$\dot{y} = \mp cy', \quad (6)$$

как это можно сразу установить, рассматривая два последовательных положения профиля волны. Так, пусть кривые  $A, B$  на рис. 24 изображают положения про-



филя волны в моменты  $t$  и  $t + \delta t$ ; тогда  $PQ = c \delta t$ ,  $RP = -\dot{y} \delta t$ ,  $\frac{RP}{PQ} = y'$ , откуда и получается первое из соотношений (6). К тому же результату придем, конечно и при дифференцировании (2). Обратное, легко видеть, например, из (5), что при начальных условиях, удовлетворяющих во всех точках одному из соотношений (6), образуется только одна бегущая волна.

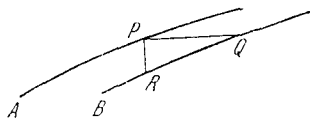


Рис. 24.

Если дать струне начальное смещение, но не сообщить при этом никакой начальной скорости, то выражение (5) сведется к

$$y = \frac{1}{2} \{ \psi(x - ct) + \psi(x + ct) \}. \quad (7)$$

Формы профиля обеих составляющих волн совпадают с начальным профилем, но достигают в соответственных точках лишь половинной величины. Легко видеть и без расчетов, что при этом удовлетворяется условие нулевой начальной скорости.

Из формулы (6) вытекает, что для любой одиночной бегущей волны выражения (4) и (6) § 22 для кинетической и потенциальной энергии дают равные между собой величины. Рэлей показал, что эту весьма общую характеристику волнового движения можно вывести другим способом. Действительно, представим себе, что начальные условия соответствуют покою струны и, следовательно, вначале вся энергия  $E$  была потенциальной. Амплитуды обеих возникающих волн оказываются в соответственных точках равными половине амплитуды исходного возмущения, и потенциальная энергия каждой равна поэтому  $\frac{1}{4} E$ . Полная энергия каждой волны должна равняться  $\frac{1}{2} E$ , отсюда следует, что кинетическая энергия каждой волны должна равняться  $\frac{1}{4} E$ .

При математическом исследовании нередко учитывают эффект рассеяния энергии, вводя предположение о наличии

сопротивления, действующего на каждый элемент струны и пропорционального скорости элемента, так что дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - k \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (8)$$

В теории струнных инструментов эта поправка не имеет значения, так как непосредственное влияние воздуха совершенно ничтожно; однако решение уравнения (8) при малых значениях  $k$  представляет некоторый интерес для теории волн, и его поэтому уместно здесь привести. Если пренебречь квадратом  $k$ , уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( y e^{\frac{1}{2} kt} \right) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( y e^{\frac{1}{2} kt} \right). \quad (9)$$

Оно имеет тот же вид, что и уравнение (2) § 22, и поэтому

$$y = e^{-\frac{1}{2} kt} f(ct - x) + e^{\frac{1}{2} kt} F(ct + x). \quad (10)$$

Это уравнение изображает две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях со скоростью  $c$ ; однако теперь амплитуда каждой из волн постепенно уменьшается с течением времени, на что указывает экспоненциальный множитель. Далее, поскольку функции, входящие в решение, произвольны, мы можем заметить  $f(ct - x)$  и  $F(ct + x)$  функциями

$$e^{\frac{1}{2} k \left( t - \frac{x}{c} \right)} f(ct - x) \quad \text{и} \quad e^{\frac{1}{2} k \left( t + \frac{x}{c} \right)} F(ct + x)$$

соответственно, так что решение можно также переписать в виде

$$y = e^{-\frac{1}{2} \frac{kx}{c}} f(ct - x) + e^{\frac{1}{2} \frac{kx}{c}} F(ct + x). \quad (11)$$

Этот вид записи удобен для случая, когда в данной точке струны поддерживается заданное движение. Так, если задано, что  $y = \varphi(t)$  при  $x = 0$ , то волны, распространяющиеся вправо от начала координат, даются

формулой

$$y = e^{-\frac{1}{2} \frac{kx}{c}} \varphi \left( t - \frac{x}{c} \right). \quad (12)$$

Экспоненциальный множитель указывает на уменьшение амплитуды по мере того, как волны достигают участков струны, все более и более удаленных от начала координат.

## 24. Отражение. Периодическое движение ограниченной струны

Если некоторая точка струны, например начало координат  $O$ , закреплена, то в этой точке должно выполняться условие  $y = 0$  для всех значений  $t$ . Отсюда согласно (1) § 23

$$f(ct) + F(ct) = 0 \quad \text{или} \quad F(z) = -f(z).$$

Решение поэтому принимает вид

$$y = f(ct - x) - f(ct + x). \quad (1)$$

Например, для части струны, лежащей слева от  $O$ , это дает суперпозицию прямой, или «падающей», волны, представленной первым членом, и «отраженной» волны, представленной вторым членом. Амплитуда отраженной волны равна, в соответственных точках, амплитуде падающей волны, так что энергия не изменяется, но знак  $y$  меняется на обратный. Вообще очевидно, что если возбудить на бесконечной струне две волны, антисимметричные относительно  $O$  и распространяющиеся в противоположных направлениях, то точка струны, находящаяся в  $O$ , останется неподвижной, даже если она свободна. Следовательно, взаимное наложение таких волн в точности воспроизводит условия отражения в неподвижной точке. Следует отметить, что при отражении на неподвижную точку действует поперечная сила.

В случае конечной струны, концы которой находятся, например, в точках  $x=0$ ,  $x=l$ , имеем еще одно условие:

$$f(ct - l) - f(ct + l) = 0 \quad (2)$$

для всех значений  $t$ . Если произвести замену перемен-

ных  $z=ct-l$ , то получим:

$$f(z) = f(z + 2l), \quad (3)$$

так что  $f(z)$  является периодической функцией, значения которой повторяются при увеличении  $z$  на  $2l$ . Отсюда следует, что движение струны периодически по времени, причем период  $2l/c$  представляет собой время, которое потребовалось бы для того, чтобы волна дважды прошла

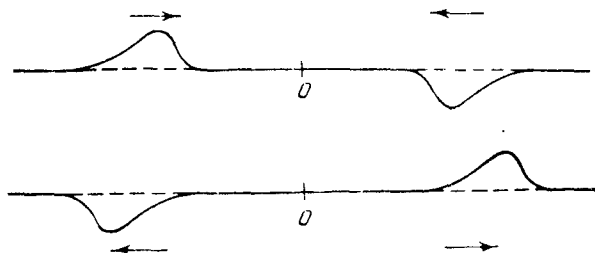


Рис. 25.

всю длину струны. И действительно, очевидно, что возмущение, начавшее распространяться из любой точки  $P$  струны в любом направлении, после двух последовательных отражений снова пройдет через  $P$  в том же направлении, как и в первый раз, с амплитудой, равной начальной, и с тем же знаком.

Когда начальные условия относятся только к смещениям, а начальные скорости равны нулю, то последовательные формы, которые принимает струна в течение одного периода, можно получить графическим методом. Представим себе, что начальная форма струны есть  $y=\varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  первоначально определено только для значений  $x$  в интервале от 0 до  $l$ , продолжена бесконечно в обе стороны согласно соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \varphi(-x) &= -\varphi(x), \\ \varphi(l+x) &= -\varphi(l-x). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Если предположить, что полученные таким образом кривые распространяются соответственно в одну и в другую сторону со скоростью  $c$ , и если взять для каждого момента времени среднее арифметическое ординат,

то согласно (7) § 23 ясно, что образованные этим путем изменяющиеся формы будут представлять возможное движение неограниченной струны, причем точки  $x=0$ ,  $x=\pm l$ ,  $x=\pm 2l$ , ... будут оставаться неподвижными. Участок между  $x=0$  и  $x=l$  будет, следовательно, удовлетворять всем условиям задачи. Процесс иллюстрирует-

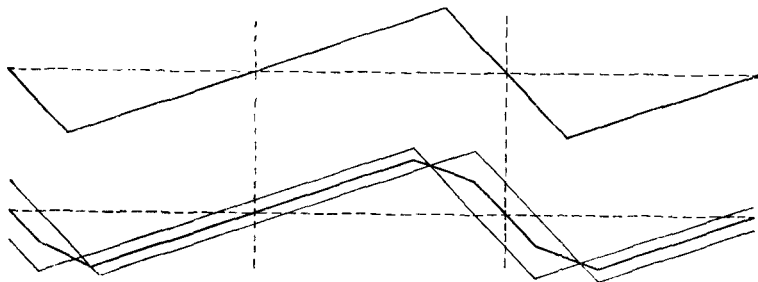


Рис. 26.

ся рис. 26. Здесь начальная форма состоит из двух прямолинейных отрезков, пересекающихся под некоторым углом друг к другу; внизу изображен результат движения по истечении промежутка времени, равного  $l/8c$ .

Этим способом можно начертить (следуя Юнгу) последовательные формы, которые принимает струна, возбужденная «щипком», т. е. оттянутая в одной точке в сторону из состояния равновесия и затем освобожденная без начальной скорости; однако в этом случае можно существенно упростить построение. Легко видеть, что профиль струны в любой момент времени состоит, вообще говоря, из трех участков. Наклоны внешних участков равны наклонам двух участков, на которые струна была разделена первоначально, тогда как наклон среднего участка представляет собой среднее арифметическое этих наклонов, взятое с учетом знака. Прямая, представляющая эту среднюю часть, движется параллельно самой себе с постоянной скоростью взад и вперед между двумя вершинами параллелограмма, двумя смежными сторонами которого служат начальные участки струны.

На рис. 27, соответствующем рис. 26, предполагается, что щипок произведен на расстоянии четверти длины от одного из концов, а изображенные фазы следуют друг за другом на расстоянии  $\frac{1}{16}$  полного периода; последовательные формы, принимаемые струной, обозначены

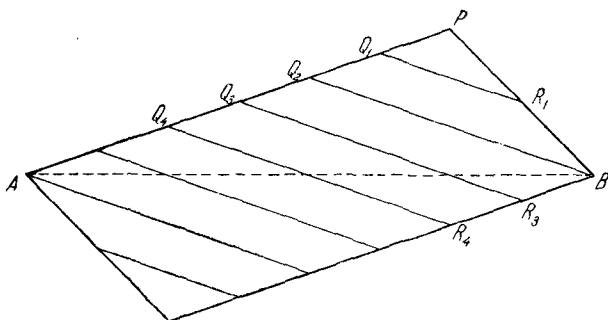


Рис. 27.

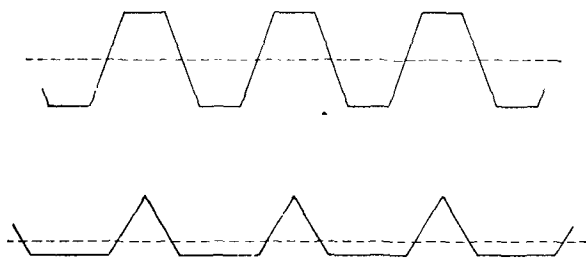


Рис. 28.

через  $APB$ ,  $AQ_1R_1B$ ,  $AQ_2B$ ,  $AQ_3R_3B$ ,  $AQ_4R_4B$  и т. д. Из рассмотрения фигур видно, что после щипка каждая точка струны колеблется с постоянной скоростью взад и вперед между двумя крайними положениями, в которых она попеременно остается в покое в течение, вообще говоря, неравных промежутков времени. На рис. 28 приведен график зависимости смещение—время для сред-

ней точки и точки приложения щипка для условий, соответствующих рис. 27.

Для точки приложения щипка один из промежутков времени, соответствующих состоянию покоя, исчезает <sup>1)</sup>.

В акустике нас, разумеется, интересуют главным образом колебания ограниченной струны. Струну обычно довольно сильно натягивают между двумя точками, ограничивающими колеблющийся участок. По крайней мере в одной из этих точек струна опирается на подставку, укрепленную на резонансной доске, назначением которой является передача колебаний окружающему воздуху. Непосредственное образование воздушных волн струной совершенно ничтожно, но переменное давление, оказываемое струной на подставку, приводит в вынужденные колебания всю поверхность резонансной доски. При этом, конечно, возникает некоторая обратная реакция на струну, однако, в соответствии со сказанным в § 4, в первом приближении этой реакцией обычно можно пренебречь.

Для экспериментальных целей используется устройство, носящее название «монохорда». Здесь резонансная доска служит верхней поверхностью прямоугольного «резонансного ящика». Расстояние между подставками можно изменять и измерять; натяжение, осуществляемое грузом, подвешиваемым к одному из концов проволоки, перекинутой через гладкий блок, можно, во всяком случае приближенно, считать известным. Для сравнения рядом с первой струной может быть натянута одна или несколько дополнительных проволок, регулировку натяжения которых можно осуществлять, как в фортепьяно, путем поворота колков, к которым прикреплены их концы.

---

<sup>1)</sup> Теоретические формы таких колебаний были экспериментально проверены для начальных стадий движения Кригер-Менцелем и Рапсом (Krigar-Menzel and Raps, Wied. Ann., т. L, 1893). После нескольких периодов форма колебания постепенно претерпевает изменение. Это изменение приписывается наличию незначительной податливости точек закрепления струны, вследствие чего нормальные частоты становятся не вполне соизмеримыми и результирующее колебание поэтому не строго периодически. Построение на рис. 27 также заимствовано у этих авторов.

## 25. Нормальные колебания ограниченной струны. Гармоники

Описанные выше исследования приведены нами ввиду их исторического значения и ввиду аналогий с другими типами волновых движений, с которыми мы встретимся в дальнейшем. С чисто акустической точки зрения они представляют лишь второстепенный интерес. Ухо ничего не узнает о конкретных геометрических формах, которые принимает струна; оно знает лишь частоты и интенсивности простых гармонических составляющих, на которые можно разложить колебание.

Чтобы определить нормальные колебания ограниченной струны, можно воспользоваться общей методикой, разобранный в главе I. При любом таком нормальном колебании  $y$  изменяется как простая гармоническая функция времени, например как  $\cos(nt + \epsilon)$ . Тогда  $\ddot{y} = -n^2y$  и уравнение (2) § 22 принимает вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{n^2}{c^2} y = 0. \quad (1)$$

Решением этого уравнения с учетом множителя, зависящего от времени, будет:

$$y = \left( A \cos \frac{nx}{c} + B \sin \frac{nx}{c} \right) \cos(nt + \epsilon). \quad (2)$$

Если струна закреплена в точках  $x = 0$  и  $x = l$ , то должно быть  $A = 0$ ,  $\sin \frac{nl}{c} = 0$ , откуда

$$\frac{nl}{c} = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Это решение дает возможные значения  $n$ . Поэтому для любого нормального типа колебаний имеем:

$$y = C_s \sin \frac{s\pi x}{l} \cos \left( \frac{s\pi ct}{l} + \epsilon_s \right), \quad (4)$$

где  $s$  — целое число, а амплитуда  $C_s$  и начальная фаза  $\epsilon_s$  произвольны. Наиболее низкое или основное нормальное колебание, определяющее высоту звучащей ноты, соответ-



стует  $s = 1$ . При этом струна колеблется, сохраняя форму отрезка синусоиды, между крайними положениями, показанными на рис. 29 сверху. Это колебание происходит с частотой

$$N = \frac{n}{2\pi} = \frac{c}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{P}{\rho}}, \quad (5)$$

которая, таким образом, обратно пропорциональна длине струны и корню квадратному из линейной плотности

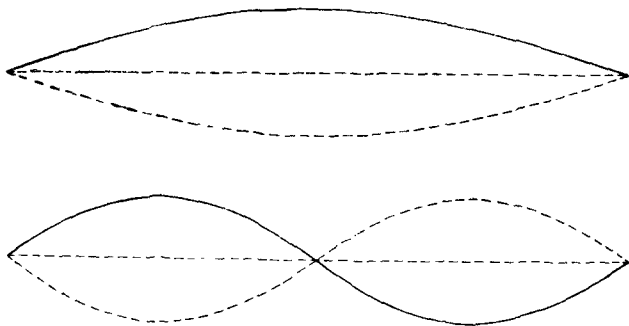


Рис. 29.

и прямо пропорциональна корню квадратному из натяжения. Эти закономерности, сформулированные в результате экспериментов задолго до того, как была разработана математическая теория струны, известны как законы Мерсенна <sup>1)</sup>. Определение абсолютной высоты по формуле (5) нельзя выполнить с очень большой точностью из-за трудностей, связанных с измерением натяжения, которое может несколько различаться по обе стороны от подставки вследствие трения.

Положение об уменьшении частоты при увеличении длины и линейной плотности струны находит хорошо знакомую иллюстрацию в фортепьяно, в котором для более низких нот употребляются более длинные и более тяжелые струны. Если бы высоту регулировали только

<sup>1)</sup> М. Merenne (1588—1648), францисканский монах, школьный товарищ и друг Декарта, поддерживавший оживленную переписку с ним и другими учеными своего времени.

длиной, то струны, соответствующие наиболее низким нотам фортепьяно, были бы по крайней мере в 100 раз длиннее струн, соответствующих самым высоким нотам. Для того чтобы в пределах практически возможных длин и при не слишком малом натяжении получить достаточно низкие ноты, струну нагружают слоем туго навитой на нее проволоки. Это увеличивает инерцию струны, не ухудшая существенно ее гибкости, которая является важным свойством струны. Влияние натяжения иллюстрируется процессом настройки, при которой подтягивают струны, если они растянулись или подались колки и инструмент спустил тон.

При втором, после основного, нормальном колебании средняя точка  $x = \frac{l}{2}$  находится в состоянии покоя (рис. 29, внизу). При нормальном колебании номера  $s$ , частота которого согласно уравнению (3) в  $s$  раз больше основной частоты, помимо концов струны есть еще  $s-1$  внутренних точек, находящихся в состоянии покоя, или «узлов». Посередине между ними расположены точки с максимальной амплитудой, или «пучности». Каждый из отрезков, на которые узлы делят струну, колеблется так, как колебалась бы в основном тоне струна длиной в  $1/s$  длины исходной струны.

Как уже было сказано (§ 2), последовательность гармонических колебаний, частоты которых относятся как простые числа 1, 2, 3, ..., имеет важные свойства как с точки зрения музыки, так и с точки зрения физиологии. Конечно, наличие такой последовательности в колеблющихся системах представляет редкое исключение. Даже в рассматриваемом случае, если в струне заметно нарушена однородность или идеальная гибкость, то сразу происходит отклонение от этой шкалы частот<sup>1)</sup>.

В § 16 из физических соображений мы пришли к заключению о том, что в любой пространственно ограничен-

<sup>1)</sup> Тот факт, что последовательность нот, музыкально связанных друг с другом, связана с длинами струн, пропорциональными величинам  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ , был известен уже грекам и послужил основанием для названия «гармонический» в приложении к числовым рядам.

ной системе движение, создаваемое любыми начальными условиями, совместными с ее устройством, можно получить путем суперпозиции разных нормальных колебаний с соответственно подобранными амплитудами и начальными фазами. Отсюда мы заключаем, что самый общий случай движения конечной струны можно представить формулой

$$y = \sum C_s \sin \frac{s\pi x}{l} \cos \left( \frac{s\pi ct}{l} + \epsilon_s \right) \quad (6)$$

при условии подходящего выбора постоянных  $C_s$ ,  $\epsilon_s$ ; суммирование должно распространяться на все целые положительные значения  $s$ . Другой эквивалентный вид записи будет:

$$y = \sum \left( A_s \cos \frac{s\pi ct}{l} + B_s \sin \frac{s\pi ct}{l} \right) \sin \frac{s\pi x}{l}, \quad (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_s &= C_s \cos \epsilon_s, \\ B_s &= -C_s \sin \epsilon_s. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Если струна начинает двигаться из состояния покоя в заданном положении в момент  $t=0$ , то коэффициенты  $B_s$  равны нулю; если она приводится в движение из положения равновесия ( $y=0$ ) с заданными скоростями, то нулю равны коэффициенты  $A_s$ .

Так как значение каждого члена в выражениях (6) и (7) всегда повторяется при увеличении  $t$  на  $2l/c$ , то колебание периодически, как было уже доказано в § 24. Во всех других отношениях движение струны, возбужденной произвольным образом будет, с нашей теперешней точки зрения, носить характер сложного движения, поскольку оно получается путем сложения бесконечного ряда отдельных гармонических колебаний. Получающаяся нота складывается, таким образом, из ряда чистых тонов, в который входят (обычно) основной тон, его октава, дуодецима, двойная октава и т. д.

Не очень легко возбудить струну таким образом, чтобы полученное движение оказалось строго гармоническим и, следовательно, вызывающим ощущение чистого тона. Однако, как будет подробнее показано в § 39, можно

подавить все тона ниже любого заданного номера ( $s$ ), останавливая колебания в узле гармоник номера  $s$ , например, прикосновением войлочного штифта. Остальные узловые точки этой гармонической составляющей явятся точками покоя, тогда как посередине между ними будут наблюдаться энергичные колебания. Этот замечательный опыт легко осуществить при помощи монохорда.

Легко подсчитать энергию любого нормального колебания. Действительно, имеем:

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \dot{y}^2 dx = \frac{s^2 \pi^2 \rho c^2}{4l} C_s^2 \sin^2 \left( \frac{s\pi ct}{l} + \varepsilon_s \right), \quad (9)$$

$$V = \frac{1}{2} P \int_0^l y'^2 dx = \frac{s^2 \pi^2 P}{4l} C_s^2 \cos^2 \left( \frac{s\pi ct}{l} + \varepsilon_s \right). \quad (10)$$

Согласно (3) § 22 коэффициенты оказываются равными, и полная энергия данного нормального колебания есть

$$T + V = \frac{s^2 \pi^2 P}{4l} C_s^2. \quad (11)$$

Далее, легко доказать, что полная энергия струны является суммой энергий, соответствующих различным нормальным колебаниям, а именно,

$$T + V = \frac{\pi^2 P}{4l} \sum s^2 C_s^2 = \frac{\pi^2 P}{4l} \sum s^2 (A_s^2 + B_s^2). \quad (12)$$

Это является общим свойством нормальных колебаний всякой колеблющейся системы. Доказательство в данном случае основано на том, что

$$\int_0^l \sin \frac{s\pi x}{l} \sin \frac{s'\pi x}{l} dx = 0, \quad (13)$$

если  $s, s'$  — два неравных целых числа (см. (4) § 32).

## 26. Струна, возбужденная щипком или ударом

Вопрос об относительных амплитудах различных нормальных колебаний, конечно, чрезвычайно важен, так как от них зависит тембр ноты (§ 2). Обычно струну возбуждают одним из трех способов, а именно: щипком (как на арфе, цитре и т. д.), ударом молоточка (фортепьяно) или движением смычка (скрипка, виолончель и т. д.).

Если в точке, отстоящей на расстоянии  $a$  от конца струны  $x = 0$ , оттянуть струну на малое расстояние  $\beta$  и затем отпустить, то, как можно показать, значения коэффициентов в уравнении (7) § 25 будут:

$$A_s = \frac{2\beta l^2}{s^2 \pi^2 a (l-a)} \sin \frac{s\pi a}{l}, \quad B_s = 0, \quad (1)$$

откуда

$$y = \frac{2\beta l^2}{\pi^2 a (l-a)} \sum \frac{1}{s^2} \sin \frac{s\pi a}{l} \sin \frac{s\pi x}{l} \cos \frac{s\pi ct}{l}. \quad (2)$$

Метод расчета будет объяснен в следующей главе (см. § 36). Мы знаем, что гармоника порядка  $s$  вообще отсутствует, если  $\sin(s\pi a/l) = 0$ , т. е. если точка приложения щипка совпадает с одним из узлов данного нормального колебания; это явление было отмечено Юнгом (1841). Таким образом, если струна возбуждается щипком посередине, то все четные гармоники отсутствуют. Формула (1) совместно с (12) § 25 показывает, что (если не учитывать тригонометрический множитель, значение которого лежит между 0 и 1) интенсивности последовательных гармоник изменяются пропорционально  $1/s^2$ . Поэтому при фактическом колебании струны высшие гармоники будут представлены относительно слабо.

Оценить эффект удара молоточком значительно труднее; он зависит от характера и продолжительности соприкосновения. В действительности, строго говоря, эта задача является задачей о вынужденных колебаниях (§ 28). Однако в несколько идеализированном случае кратковременного удара (прекратившегося прежде, чем возмущение успело распространиться со скоростью  $c$  на какую-либо заметную долю струны) мы можем рассматривать этот случай как задачу о свободных колебаниях с начальной скоростью, отличной от нуля только

на коротком участке струны. Решением будет:

$$A_s = 0, \quad B_s = \frac{2\mu}{\pi qc} \sin \frac{s\pi a}{l}, \quad (3)$$

где  $a$ —расстояние от начала координат до точки приложения удара, а  $\mu$ —полный импульс, сообщенный ударом. Отсюда

$$y = \frac{2\mu}{\pi qc} \sum \frac{1}{s} \sin \frac{s\pi a}{l} \sin \frac{s\pi x}{l} \sin \frac{s\pi ct}{l}. \quad (4)$$

Так же как и в предыдущей задаче, нормальное колебание номера  $s$  отсутствует, если удар приходится на один из узлов. Согласно (12) § 25, интенсивности последовательных нормальных колебаний теперь—величины одного порядка с точностью до тригонометрического множителя. Этот результат уже указывает на нереальный характер сделанного идеализирующего предположения. Однако мы можем во всяком случае заключить, что при очень коротком ударе высшие гармоники играют относительно гораздо бóльшую роль, чем в предыдущей задаче.

В действительности удар даже в случае металлического молоточка далеко не мгновенен и время соприкосновения хотя и коротко в повседневном смысле, но во всяком случае сравнимо с периодом колебаний струны<sup>1)</sup>. Эффект импульса конечной продолжительности был рассчитан Гельмгольцем, которому принадлежит бóльшая часть современной теории этого вопроса. Он полагал, что воздействие на струну начинается в момент  $t=0$  и длится в течение времени  $\tau$ , возрастая от нуля до максимального значения и снова падая до нуля по закону  $\sin \frac{\pi t}{\tau}$ . Несколько более простой результат получается, если предположить, что сила действует на струну по закону

$$Y = \frac{2}{\pi} \frac{\mu \tau}{t^2 + \tau^2}, \quad (5)$$

где  $\mu$  есть интеграл по времени от силы, взятой от  $t = -\infty$  до  $t = +\infty$ . Недостатком такого закона изменения силы, график которого представлен на рис. 14 (стр. 52), является отсутствие определенных моментов начала и конца воздействия; однако, поскольку истинная закономерность

<sup>1)</sup> Kaufmann, Wied. Ann., т. LIV (1895).

неизвестна, он может служить для иллюстративных целей. Промежуток времени, в течение которого сила имеет заметную величину, имеет порядок  $\tau$  и может быть как угодно сужен путем уменьшения  $\tau$ . Подробные расчеты целесообразно отнести в следующую главу (§ 38). Решение имеет вид

$$A_s = 0, \quad B_s = \frac{2\mu}{\pi qc} \frac{1}{s} e^{-\frac{s\pi c\tau}{l}} \sin \frac{s\pi a}{l}. \quad (6)$$

При бесконечно малом  $\tau$  это решение совпадает с (3). При конечном  $\tau$  интенсивности высших гармоник изменяются как  $e^{-2s\pi c\tau/l}$  (если снова не учитывать тригонометрический множитель).

Хотя в указанном законе сила менее резко меняется с течением времени, здесь сохранено предположение о сосредоточении силы в одной точке. Если представить себе, что сила распределена непрерывно на коротком участке струны, то это еще более усилит относительный вес низших гармоник (см. § 38).

Здесь мы проиллюстрировали общую закономерность, к которой еще вернемся в следующей главе и согласно которой высшие гармоники возбуждаются с тем большей относительной интенсивностью, чем менее плавно первоначальное возбуждение. С точки зрения музыки гармоники выше шестой следует подавлять, поскольку они настолько близки друг к другу, что диссонируют. Поэтому молоточки фортепьяно покрывают несколькими слоями мягкого материала, чтобы обеспечить более плавное изменение силы во время удара.

Большое значение имеет также точка приложения удара. Для получения ноты богатого музыкального тембра необходимо наличие большого числа низших гармоник; поэтому следует избегать удара в средней части струны. С другой стороны, как уже было сказано, гармоники порядка выше шестого вредны. Оба требования удовлетворяются, если точку нанесения удара выбрать на расстоянии около одной седьмой длины струны от одного из ее концов. Тогда те парциальные тоны, узлы которых расположены в этой точке или вблизи нее, либо совсем не будут возбуждаться, либо будут обладать сравнительно малой интенсивностью.

## 27. Колебания скрипичной струны

Теория колебаний струны, возбужденной действием смычка, довольно сложна, однако основные моменты этой теории были выяснены Гельмгольцем. Поскольку высота тона оказывается соответствующей собственной частоте струны, колебания можно, в известном смысле, считать «свободными»; функция смычка заключается в поддержании движения путем сообщения струне энергии, возмещающей происходящие потери энергии. В скрипке и в других инструментах, у которых струны сделаны из легкого материала и опираются на подставку, укрепленную на поверхности, очень легко приводимой в движение (крышка резонансной полости), эти потери могут быть относительно велики. Действие смычка, по-видимому, состоит в том, что благодаря трению он в течение некоторого времени увлекает за собой струну; затем струна отрывается от смычка и отходит назад под действием собственной упругости; после некоторого промежутка времени смычок снова захватывает струну и ведет ее вперед, и т. д.<sup>1)</sup> причем полный цикл занимает один период свободного колебания.

Чтобы получить данные для математического исследования, Гельмгольц начал с экспериментального изучения характера колебаний в различных точках. Он пользовался оптическим устройством того же типа, что и Лиссажу (§ 18); в этом устройстве прямолинейное колебание наблюдаемой точки складывается с независимым колебанием, которое происходит под прямым углом к нему и период которого соизмерим, или почти соизмерим, с периодом колебания струны. Микроскоп, ось которого расположена горизонтально, направлен на наблюдаемую точку струны; сама струна расположена вертикально. Окуляр микроскопа неподвижен, объектив же прикреплен к одной из ветвей камертона и колеблется в вертикальном направлении. Когда колеблется один камертон, колеба-

---

<sup>1)</sup> Для того, чтобы производилась положительная работа, требуется, чтобы на первой стадии сила трения была больше, чем на второй. Это согласуется с известным законом, что трение при относительном покое больше трения движения. Данное замечание сделано Рэлеем.



ния блика на струне вытягиваются в вертикальный отрезок; когда колеблется одна струна, виден горизонтальный отрезок. Когда оба колебания происходят одновременно, то при точно соизмеримых периодах должна получиться замкнутая кривая. Например, если бы период камертона был в точности соизмерим с периодом струны, а колебания наблюдаемой точки были бы гармоническими, то получалась бы какая-либо фаза соответственной фигуры Лиссажу (§ 18); если же соотношение между периодами не точно соизмеримо, то кривая последовательно пройдет через все фазы такой фигуры. В действительном

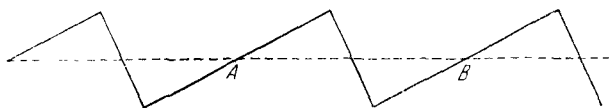


Рис. 30.

опыте формы кривых оказываются несколько измененными, и эти изменения позволяют сделать заключения об истинном характере исследуемых колебаний.

Для облегчения интерпретации кривых пользуются идеализированным изображением последовательных фаз в виде ортогональных проекций кривой, нанесенной на вращающийся цилиндр. Оказалось, что кривая зависимости пути, пройденного наблюдаемой точкой струны, от времени имеет простую форму, изображенную на рис. 30. Характер изменения фигур Лиссажу можно проиллюстрировать на случае одинаковой частоты (унисона) камертона и струны. Если участок ломаной линии на рис. 30, лежащий между точками *A* и *B*, обернуть вокруг цилиндра, окружность основания которого равна *AB*, то проекции ломаной на плоскости, проходящие через ось цилиндра, будут включать кривые типа, приведенного на рис. 31<sup>1)</sup>.

Период колебаний наблюдаемой точки складывается из двух промежутков времени, обычно неравной длитель-

<sup>1)</sup> В проделанных Гельмгольцем опытах частота колебаний струны в четыре раза превышала частоту камертона. Тогда при описанном методе изображения окружность цилиндра содержит четыре периода зигзагообразной линии рис. 30.

ности, в течение которых точка движется взад и вперед, соответственно, с постоянными, но, вообще говоря, неравными скоростями. Далее, установлено, что отношение обоих промежутков времени равно отношению двух отрезков, на которые струна делится в этой точке. Эти результаты подтверждены позднейшими исследователями, получившими график временной зависимости пути, проходящего точкой более непосредственным способом<sup>1)</sup>.

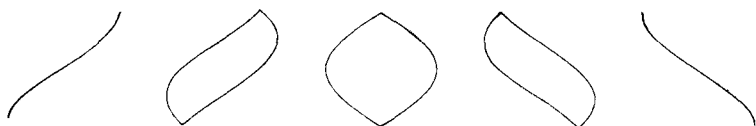


Рис. 31.

Для получения четких кривых следует принять некоторые меры предосторожности. Кое-что зависит от умелого пользования смычком и, по-видимому, от качества инструмента. Чтобы избежать незначительных искажений графика, смычок должен касаться струны в узле одной из гармоник, а наблюдаемая точка должна находиться в другом узле той же гармоники.

За исключением тех двух моментов в каждом периоде, когда происходит внезапное изменение скорости, ускорение наблюдаемой точки ( $P$ ) равно нулю. Из уравнения (2) § 22 следует, что вблизи  $P$  кривизна струны должна быть равна нулю, и, значит, в любой момент форма, принимаемая струной, составлена из прямолинейных отрезков. Оказывается, что можно удовлетворить всем условиям задачи, предположив, что форма струны всегда состоит из двух таких отрезков, пересекающихся в некоторой переменной точке  $Q$ . Пусть на рис. 32  $AB$  ( $=l$ ) — невозмущенное положение струны и пусть  $\alpha$  ( $=AN$ ) и  $\beta$  ( $=NQ$ ) суть координаты точки  $Q$  в системе координат с началом в точке  $A$  и с осью абсцисс, совпадающей с  $AB$ . Уравнения обоих участков струны будут:

$$y_1 = \frac{\beta x}{\alpha}, \quad y_2 = \frac{\beta(l-x)}{l-\alpha}, \quad (1)$$

<sup>1)</sup> K r i g a r - M e n z e l and R a p s, Wied. Ann., т. XLIV (1891).

и разность между скоростями точек, лежащих вблизи точки  $Q$ , по обе стороны от нее, равна

$$\dot{y}_1 - \dot{y}_2 = \frac{-l\beta\dot{\alpha}}{\alpha(l-\alpha)}. \quad (2)$$

За время  $\delta t$  точка  $Q$  проходит участок струны  $\dot{\alpha} \delta t$ , так что скорость массы  $\rho \dot{\alpha} \delta t$  увеличивается на приведенную

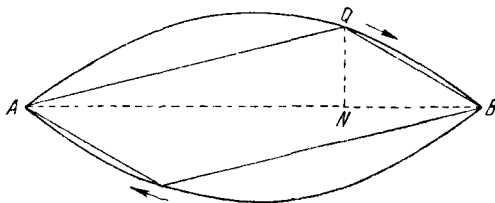


Рис. 32.

выше величину. Это есть результат воздействия поперечной силы

$$Py'_2 - Py'_1 = -\frac{Pl\beta}{\alpha(l-\alpha)}, \quad (3)$$

где  $P$  — натяжение, действующее в течение времени  $\delta t$ . Приравнявая изменение количества движения импульсу силы, находим:

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{P}{\rho} = c^2. \quad (4)$$

Точка  $Q$  разрыва наклона струны должна поэтому перемещаться направо или налево со скоростью  $c$ .

Предположим, что точка  $Q$  начинает свое перемещение из  $A$  в момент  $t=0$  и что  $\beta$  вначале положительно. Наблюдения Гельмгольца показали, что скорость в точке  $x$ , а именно

$$\dot{y}_2 = (l-x) \frac{d}{dt} \left( \frac{\beta}{l-\alpha} \right) = (l-x) c \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\beta}{l-\alpha} \right), \quad (5)$$

постоянна в течение промежутка времени  $x/c$ , откуда

$$\beta = C\alpha(l-\alpha); \quad (6)$$

аддитивная постоянная отсутствует, так как  $\beta$  должно обращаться в нуль вместе с  $\alpha$ . Это — уравнение дуги

параболы, проходящей через точки  $A, B$ . Поэтому все условия задачи будут удовлетворены, если предположить, что точка  $Q$  движется взад и вперед вдоль двух таких дуг со скоростью  $c$  так, как это показано на рис. 32. Подставляя значение максимального смещения  $\beta_0$ , получим  $C = \pm \frac{4\beta_0}{l^2}$ , и уравнение обоих участков струны в любой момент времени примет вид

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{4\beta_0}{l^2} (l - \alpha) x, \\ y_2 &= \frac{4\beta_0}{l^2} \alpha (l - x). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Остается разложить это колебание на его гармонические составляющие. Подробности этих вычислений приведены в § 37. Они дают следующий результат:

$$y = \frac{8\beta_0}{\pi^2} \sum \frac{1}{s^2} \sin \frac{s\pi x}{l} \sin \frac{s\pi ct}{l}, \quad (8)$$

где суммирование производится по всем целым положительным значениям  $s$ . Сравнивая с решением (7) § 25, имеем:

$$\left. \begin{aligned} A_s &= 0, \\ B_s &= \frac{8\beta_0}{\pi^2 s^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Как эти результаты, так и все исследование не принимает в расчет положения точки, в которой приложен смычок. Однако совершенно очевидно, что положение смычка должно оказывать какое-то влияние на характер колебаний; действительно, обнаружено, что отсутствуют те нормальные колебания, узлы которых расположены в этой точке. Поэтому-то несколько идеализированная форма колебаний, которая взята за основу для вычислений, может быть получена в чистом виде только в соответственных узлах.

## 28. Вынужденные колебания струны

Наиболее простой случай вынужденных колебаний осуществляется путем сообщения струне в некоторой точке ( $x = a$ ) заданного гармонического движения

$$y = \beta \cos (pt + \alpha). \quad (1)$$

Участки струны по обе стороны от этой точки следует рассматривать отдельно. Решениями будут:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{\sin \frac{px}{c}}{\sin \frac{pa}{c}} \beta \cos (pt + \alpha) & [0 < x < a], \\ y_2 &= \frac{\sin \frac{p(l-x)}{c}}{\sin \frac{p(l-a)}{c}} \beta \cos (pt + \alpha) & [a < x < l], \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

так как они удовлетворяют общему дифференциальному уравнению (2) § 22, для  $x=0$  и  $x=l$  дают  $y_1=0$  и  $y_2=0$ , а для  $x=a$  сводятся к (1). Амплитуды  $y_1$  и  $y_2$  сильно возрастают (вследствие малости знаменателя), когда  $pa/c$  или  $p(l-a)/c$  приблизительно равны величине, кратной  $\pi$ , т. е. когда период вынужденных колебаний  $2\pi/p$  приближается к периоду собственных колебаний струны длиной  $a$  или  $l-a$  соответственно. Чтобы получить для этих случаев результат, имеющий практическое значение, следует учесть диссипативные силы.

Рассмотренный случай можно осуществить, прижимая ножку камертона к фортепьянной струне. Звук сильно возрастает каждый раз, когда какая-либо из собственных частот участка струны между точкой соприкосновения и любым из ее концов совпадает с частотой собственных колебаний камертона. Этот метод предложен Гельмгольцем как способ получения чистых тонов, так как высшие собственные частоты камертона не гармоничны по отношению к основной частоте и поэтому не усиливаются.

Если на струну действует поперечная сила и на единицу длины приходится сила  $Y$ , то (2) § 22 заменяется уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Y. \quad (3)$$

Вообще,  $Y$  может зависеть одновременно и от  $x$  и от  $t$ .

Случай периодической силы  $F \cos (pt + \alpha)$ , сосредоточенной на бесконечно малом отрезке струны вблизи  $x=a$ , можно вывести из формул (2). Величину  $\beta$  можно выразить через  $F$ , исходя из условия точного уравновешивания силы натяжения струны в этой точке;

при  $x=a$  должно быть:

$$F \cos (pt + \alpha) = Py'_1 - Py'_2. \quad (4)$$

Отсюда получаем:

$$y_1 = \frac{\sin \frac{px}{c} \sin \frac{p(l-a)}{c}}{\frac{p}{c} \sin \frac{pl}{c}} \frac{F}{P} \cos (pt + \alpha). \quad (5)$$

Выражение для  $y_2$  отличается только тем, что  $x$  и  $a$  меняются местами; мы имеем здесь пример теоремы взаимности § 17, согласно которой колебания точки  $x$ , обусловленные периодической силой, приложенной в  $a$ , должны быть равны колебаниям точки  $a$ , обусловленным равной силой (с тем же периодом), приложенной в  $x$ .

Как правило, амплитуда сильно возрастает, когда величина  $\sin \frac{pl}{c}$  мала, т. е. когда период вынуждающих колебаний приближается к одному из периодов собственных колебаний всей струны. В случае, когда одновременно  $\sin \frac{pa}{c} = 0$  и  $\sin \frac{pl}{c} = 0$ , имеет место неопределенность; точка  $x=0$  при этом совпадает с узлом.

## 29. Ограничения в теории струн

В §§ 26, 27 мы рассматривали относительные амплитуды различных гармоник при различных способах возбуждения струны; не следует, однако, полагать, что соответственные относительные интенсивности точно воспроизводятся в образующихся звуковых волнах, полученных не непосредственно, а при помощи деки. Если пренебречь обратной реакцией на струну, которая может оставаться несущественной в течение большого числа колебаний, то можно принять, что, как это видно из соответственных формул, струна действует на каждую подставку с силой, пропорциональной величине  $\frac{\partial y}{\partial x}$  в точке опоры на подставку <sup>1)</sup>. При дифференцировании в коэффициенте гар-

<sup>1)</sup> Так, из рис. 27 видно, что в случае струны, возбужденной щипком, давление на обоих концах колеблется между двумя постоянными значениями противоположного знака.

моники номера  $s$  появляется множитель  $s$ , и таким образом роль высших гармоник увеличивается. С другой стороны, амплитуда колебаний деки под действием гармонической силы заданной амплитуды несколько изменяется с частотой, согласно общему закону, проиллюстрированному в § 9<sup>1)</sup>. По всей вероятности, это способствует относительному увеличению роли низших гармоник. Изменение собственных частот струны вследствие податливости подставок рассматривалось Рэлеем<sup>2)</sup>; вероятно, на практике оно очень незначительно.

Следует упомянуть еще о другой причине, несколько изменяющей полученные нами результаты, а именно, о неидеальной гибкости струны или проволоки. В случае более высоких гармоник отрезки, на которые делится струна, могут оказаться настолько малы, что становятся существенными изгибные моменты, стремящиеся увеличить частоту вследствие роста потенциальной энергии, соответствующей данной деформации. Этот вопрос будет рассматриваться ниже (§ 50). Далее, следует учитывать, что резкие изломы формы струны, принимаемые нами в теории струны, возбужденной щипком или действием смычка, не реализуются вполне точно. Исследования типа проведенных в §§ 26, 27 надо считать приближенными. Однако они вполне пригодны, когда речь идет об определении амплитуд низших, наиболее существенных, гармоник.

### 30. Колебания нагруженной струны

Мы закончим эту главу рассмотрением одной или двух задач, которые, будучи интересными сами по себе, могут снова показать нам, что гармоническая шкала частот является все же исключительным явлением даже при колебаниях струн.

Возьмем сначала случай однородной струны, нагруженной в середине массой  $M$ . Очевидно, что нормальные

<sup>1)</sup> Некоторые интересные опыты, относящиеся к этому вопросу, сделаны Бартоном и Гарреттом. Barton and Garrett, Phil. Mag. (6), т. X (1905). См. также Barton, Text-Book of Sound, London, 1908, § 361.

<sup>2)</sup> «Теория звука», § 135.

колебания ненагруженной струны, узлы которых находятся в этой точке, останутся неизменными. Оставляя их в стороне, будем рассматривать лишь те колебания, при которых в каждый момент соблюдается полная симметрия относительно середины струны. Если поперечное смещение массы  $M$  равно  $\beta \cos(nt + \varepsilon)$ , то для первой половины струны имеем:

$$y_1 = \frac{\sin \frac{nx}{c}}{\sin \frac{nl}{2c}} \beta \cos(nt + \varepsilon). \quad (1)$$

Уравнение движения для массы  $M$  будет иметь вид

$$M\ddot{y}_1 = -2Py'_1, \quad (2)$$

где после дифференцирования следует положить  $x = \frac{1}{2}l$ .

Это дает:

$$\frac{nl}{2c} \operatorname{tg} \frac{nl}{2c} = \frac{l}{b}, \quad (3)$$

где введено обозначение  $b = \frac{M}{\rho}$ ;  $b$  есть длина такого отрезка струны, масса которого была бы равна массе прикрепленного груза. Следовательно, частоты определяются выражением

$$\frac{nl}{2c} = x_1, x_2, x_3, \dots, \quad (4)$$

где  $x_1, x_2, x_3, \dots$  суть корни трансцендентного уравнения

$$x \operatorname{tg} x = \frac{l}{b}. \quad (5)$$

Аналогичные уравнения встречаются во многих отраслях математической физики; их часто можно приближенно решить графическим методом. Так, в настоящем случае, если мы начертим графики уравнений

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad y = \frac{b}{l} x, \quad (6)$$

то абсциссы точек пересечений дадут корни уравнений. Если  $b/l$  мало по сравнению с единицей, то эти корни близки соответственно к величинам  $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots$  и



несколько меньше их; поэтому частоты будут несколько меньше, чем частоты симметричных нормальных колебаний ненагруженной струны. По мере увеличения  $b$  все частоты уменьшаются. Физической причиной этого явления, конечно, является увеличение инерции. Наконец,

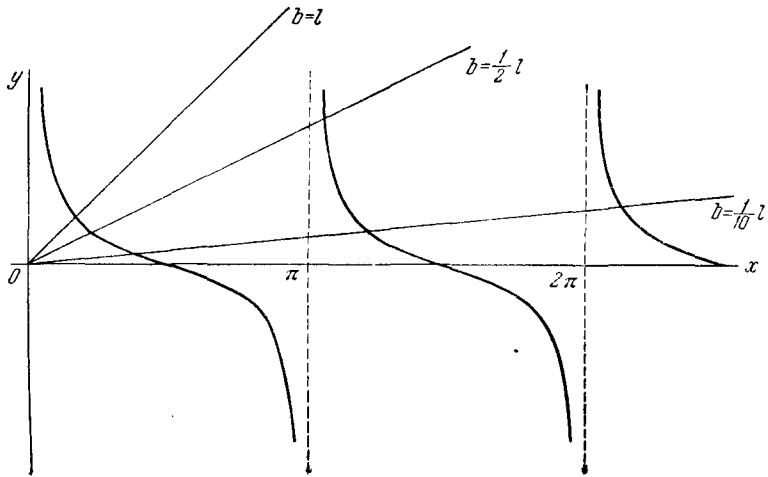


Рис. 33.

если  $M$  очень велико по сравнению с массой  $\rho l$  струны, то  $l/b$  мало и наименьший корень уравнения (5) приближенно получается из  $x^2 = \frac{l}{b}$ , откуда

$$n = \frac{2c}{\sqrt{lb}} = 2 \sqrt{\frac{P}{Ml}}, \quad (7)$$

что согласуется с (4) § 6.

### 31. Висящая цепь

Отличие от сплошных систем, разбиравшихся выше, еще резче выступает в случае малых колебаний однородной цепи, вертикально подвешенной за верхний закрепленный конец. Эта задача не является непосредственно важной для акустики, но она интересна с исторической точки

зрения <sup>1)</sup> и во многих отношениях поучительна с точки зрения общей теории.

Пусть начало координат совпадает с положением равновесия свободного конца. Натяжение на расстоянии  $x$  над этой точкой будет  $P = g\rho x$ ; вертикальным смещением будем пренебрегать, как величиной второго порядка. Отсюда, если обозначить через  $y$  горизонтальное отклонение, получаем:

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial y}{\partial x} \right), \quad (1)$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial y}{\partial x} \right). \quad (2)$$

Для определения нормальных колебаний положим, что  $y$  изменяется пропорционально  $\cos(nt + \varepsilon)$ ; тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \frac{n^2}{g} y = 0. \quad (3)$$

Можно найти решение этого уравнения в виде ряда, однако решение принимает несколько более компактный вид, если ввести вместо  $x$  новую независимую переменную. Скорость распространения волны по струне с постоянным по длине натяжением, равным натяжению цепи в точке  $x$ , равна  $\sqrt{P/\rho}$  или  $\sqrt{gx}$ . Обозначим через  $\tau$  время, за которое точка, движущаяся вдоль цепи так, что ее скорость в каждой точке равна этой местной скорости распространения волн, пройдет расстояние от нижнего конца до точки  $x$ ; тогда

$$\tau = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{gx}} = 2\sqrt{x/g}, \quad x = \frac{1}{4} g\tau^2. \quad (4)$$

Производя замену независимой переменной в (3) на  $\tau$ , получим:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial y}{\partial \tau} + n^2 y = 0. \quad (5)$$

<sup>1)</sup> По-видимому, в этом случае впервые были определены различные нормальные колебания сплошной системы (Даниил Бернулли, 1732). Первое появление бесселевых функций тоже связано с этим случаем.

Для наших целей нам сейчас не нужно полное решение, а требуется лишь решение, остающееся конечным при  $\tau = 0$ . Таким решением является:

$$y = C \left( 1 - \frac{n^2 \tau^2}{2^2} + \frac{n^4 \tau^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dots \right), \quad (6)$$

где  $C$  произвольно; это можно проверить дифференцированием и подстановкой в (5). Функция, определяемая рядом, заключенным в скобки, называется «бесселевой функцией нулевого порядка» и обозначается через  $J_0(n\tau)$ <sup>1)</sup>. Таким образом, вводя явно зависящий от времени множитель, найдем:

$$y = C J_0(n\tau) \cos(n\tau + \varepsilon). \quad (7)$$

Значение  $\tau$ , соответствующее верхнему концу цепи ( $x = l$ ), будет:

$$\tau_1 = 2 \sqrt{l/g}, \quad (8)$$

а условие закрепления этого конца выразится уравнением

$$J_0(n\tau_1) = 0. \quad (9)$$

Это уравнение определяет искомые значения  $n$ . Первые несколько корней даются числами:

$$\frac{n\tau_1}{\pi} = 0,7655, 1,7571, 2,7546, \dots; \quad (10)$$

эти числа стремятся к  $s - \frac{1}{4}$ , где  $s$  (номер решения) — целое число. При нормальных колебаниях, следующих за первым, значения  $\tau$ , соответствующие низшим корням, дают расположение узлов. Так, при втором нормальном колебании узел расположен в точке  $\frac{\tau}{\tau_1} = 0,7655/1,7571$  или  $\frac{x}{l} = \frac{\tau^2}{\tau_1^2} = 0,190$ . Период самого низкого колебания равен  $\frac{2\pi}{n} = 5,225 \sqrt{l/g}$ , тогда как период колебаний жесткого стержня той же длины был бы равен  $5,130 \sqrt{l/g}$ .

<sup>1)</sup> Подробные таблицы бесселевых функций, вычисленные Мейсселем и др., приведены в книге G r a u and M a t h e w s, Treatise on Bessel Functions, London, 1895. Удобные сокращенные таблицы даны у D a l e, Five-Figure Tables of Mathematical Functions, London, 1903.

Это сравнение подтверждает общую закономерность, приведенную в § 16, согласно которой наложение любой связи обуславливает увеличение частоты наиболее низких колебаний. На рис. 34 изображены (в разных масштабах) первые два нормальных колебания; две узловые точки представляют точки подвеса для этих двух случаев.

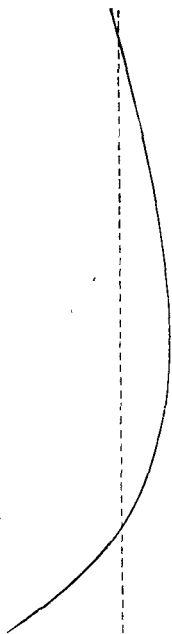


Рис. 34.

### 31а. Приближенное определение периодов свободных колебаний

Можно применить некоторые результаты, полученные в этой главе, для дальнейшей иллюстрации приближенных методов Рэля, о которых уже шла речь в § 16. Будем предполагать, что путем наложения воображаемых связей без трения в системе оставлена одна-единственная степень свободы, так что в каждый момент времени конфигурация системы зависит только от одной координаты ( $q$ ); таким образом, тип колебаний оказывается заданным. Частота, полученная в этом предположении, окажется для случая самого низкого нормального колебания верхним пределом истинного значения частоты, причем при удачном выборе типа колебаний приближение оказывается хорошим.

Возьмем сначала случай однородной струны (§ 25) длины  $l$  и, обозначив через  $x$  расстояние от средней точки, положим:

$$x = \frac{1}{2} l \sin \theta, \quad (1)$$

так что  $\theta$  будет лежать в интервале от  $-\frac{1}{2}\pi$  до  $+\frac{1}{2}\pi$ .

Наиболее простое представление симметричного отклонения от положения равновесия имеет вид

$$y = q \left( 1 - \frac{4x^2}{l^2} \right) = q \cos^2 \theta, \quad (2)$$

что в каждый момент времени дает форму параболы для профиля струны. Тогда

$$T = \varrho \int_0^{\frac{1}{2}l} \dot{y}^2 dx = \frac{1}{2} \varrho l \dot{q}^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^5 \theta d\theta = \frac{4}{15} \varrho l \dot{q}^2, \quad (3)$$

$$V = P \int_0^{\frac{1}{2}l} y'^2 dx = \frac{8P}{l} q^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \frac{8}{3} \frac{P}{l} q^2. \quad (4)$$

В обозначениях § 12 коэффициенты инерции и устойчивости будут соответственно равны

$$\alpha = \frac{4}{15} \varrho l, \quad c = \frac{8}{3} \frac{P}{l}, \quad (5)$$

а частоту ( $n/2\pi$ ) получим из формулы

$$n^2 = \frac{c}{\alpha} = \frac{10}{3} \frac{P}{\varrho l^2}. \quad (6)$$

Мы видели, что истинным значением числового коэффициента  $P$  является  $\pi^2$  ( $= 9,87$ ); следовательно, значение частоты превышает истинное значение меньше чем на 1%.

Значительно более близкое приближение можно получить, если вместо (2) взять формулу

$$y = q \cos^2 \theta (1 + \beta \sin^2 \theta), \quad (7)$$

где  $\beta$  — постоянная, которую мы выберем позднее. Такое предположение дает:

$$\alpha = \frac{4}{315} (21 + 6\beta + \beta^2) \varrho l, \quad c = \frac{8}{105} (35 + 14\beta + 11\beta^2) \frac{P}{l}, \quad (8)$$

и, следовательно,

$$n^2 = \frac{35 + 14\beta + 11\beta^2}{21 + 6\beta + \beta^2} \frac{6P}{\varrho l^2}. \quad (9)$$

Мы знаем, что при любом значении  $\beta$  получится решение с избытком; поэтому выберем  $\beta$  так, чтобы первая дробь имела минимальное значение. В учебниках анализа

доказывается, что стационарные значения функции

$$u = \frac{A + 2H\beta + B\beta^2}{a + 2h\beta + b\beta^2} \quad (10)$$

даются квадратным уравнением

$$(ab - h^2)u^2 - (aB + bA - 2hH)u + (AB - H^2) = 0. \quad (11)$$

В данном случае это уравнение принимает вид

$$3u^2 - 56u + 84 = 0. \quad (12)$$

Мы должны взять наименьший корень, а именно

$$u = 1,6444958.$$

Отсюда из (9) получаем:

$$n^2 = 9,869748 \frac{P}{ql^2}. \quad (13)$$

Поскольку  $\pi^2 = 9,8696$ , ошибка весьма мала.

Тот же метод можно применить и к случаю висящей цепи (§ 31). Положив

$$y = q \left( \frac{x}{l} + \beta \frac{x^2}{l^2} \right), \quad (14)$$

где  $x$  теперь отсчитывается от вершины, находим:

$$T = \frac{1}{2} g \int_0^l \dot{y}^2 dx = \frac{1}{60} glq^2 (10 + 15\beta + 6\beta^2), \quad (15)$$

$$V = \frac{1}{12} g l q^2 (3 + 4\beta + 2\beta^2). \quad (16)$$

Отсюда

$$n^2 = \frac{5(3 + 4\beta + 2\beta^2)g}{10 + 15\beta + 6\beta^2} \frac{1}{l}. \quad (17)$$

Минимальное значение оказывается равным 1,4459. Соответствующее значение периода ( $2\pi/n$ ) будет, следовательно,  $5,226 \sqrt{l/g}$ , что почти совпадает с точным результатом.

### 31b. Эоловы тоны

Когда струя воздуха падает под прямым углом на натянутую струну или проволоку (особенно когда струя воздуха усиливается, пройдя через узкую щель, вдоль которой расположена струна), часто возникает музы-

кальная нота. Это является примером вынужденных колебаний несколько другого рода, чем те, которые мы рассматривали выше. Трение ветра о каждую сторону струны обуславливает возникновение вихрей, следующих друг за другом через правильные промежутки времени. Наблюдения аналогичных случаев в большем масштабе показали, что обе системы вихрей не симметричны и вихри срываются с обеих сторон струны попеременно. Получается переменная сила, действующая на струну *под прямым углом* к направлению ветра. Если период этой силы не очень отличается от периода собственных колебаний проволоки, последняя может прийти в сильные колебания. До сих пор еще не получено теоретическое соотношение между частотой  $N$ , скоростью ветра  $V$  и диаметром струны  $D$ . В результате опытов была получена эмпирическая формула

$$N = 0,195 \frac{V}{D} .$$

---

## ГЛАВА III

### ТЕОРЕМА ФУРЬЕ

#### 32. Ряд по синусам

Исследование поперечных колебаний струн уже подвело нас к замечательной теореме из области чистой математики, на которой мы должны сейчас остановиться подробнее. Теоретическое рассмотрение нормальных колебаний привело к заключению, что свободное движение струны длиной  $l$ , приведенной в движение произвольным образом, может быть выражено рядом вида

$$y = \sum \left( A_s \cos \frac{s\pi ct}{l} + B_s \sin \frac{s\pi ct}{l} \right) \sin \frac{s\pi x}{l} \quad (1)$$

( $s = 1, 2, 3, \dots$ ) при соответственных значениях  $A_s$  и  $B_s$ . В частности, если предположить, что в начальный момент  $t = 0$  струна имела произвольную форму  $y = f(x)$  и находилась в покое, то можно определить коэффициенты  $A_s$  так, чтобы равенство

$$f(x) = \sum A_s \sin \frac{s\pi x}{l} \quad (2)$$

выполнялось для значений  $x$  от  $x = 0$  до  $x = l$ . Это является частным случаем «теоремы Фурье»<sup>1)</sup>. Поскольку величину  $l$  можем выбрать произвольно, удобно для общего

---

<sup>1)</sup> J. B. J. Fourier (1768—1830). История этой теоремы тесно переплетается с историей теории струн и теории теплопроводности. Исследования самого Фурье изложены в его «Теории теплоты» («Théorie de la Chaleur», Paris, 1822). Очерк этой истории приведен в книге H. S. Carslaw «Fourier's Series and Integrals», London, 1906. Более полно этот вопрос излагает Буркхардт (H. Burkhardt) в своей работе «Entwickelungen nach oscillierenden Funktionen...», Leipzig, 1908.



рассмотрения выбрать  $l = \pi$ . Тогда, согласно теореме Фурье, произвольную функцию  $f(x)$  можно будет выразить для значений  $x$  от 0 до  $\pi$  в виде ряда 72

$$f(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \dots + A_s \sin sx + \dots \quad (3)$$

Ход рассуждений, который привел нас к этим результатам, имеет скорее физический, чем математический характер. Мы не упомянули также об ограничениях, которые налагаются на характер произвольной функции  $f(x)$  уже на основе одних только физических соображений. Оставляя пока в стороне эти вопросы и временно постулируя справедливость теоремы, приступим к определению коэффициентов. Если помножить обе части равенства (3) на  $\sin sx$  и проинтегрировать от  $x=0$  до  $x=\pi$ , то справа получим ряд, общий член которого будет иметь вид

$$\begin{aligned} A_r \int_0^{\pi} \sin rx \sin sx \, dx &= \\ &= \frac{1}{2} A_r \int_0^{\pi} \{ \cos (r-s)x - \cos (r+s)x \} \, dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Когда целые числа  $r, s$  не равны между собой, интеграл обращается в нуль, поскольку при интегрировании каждый из косинусов один или несколько раз проходит через весь цикл своих значений, как положительных, так и отрицательных. Однако в случае  $r = s$  первый косинус обращается в единицу и после интегрирования получается  $\frac{1}{2} \pi A_s$ . Таким образом,

$$A_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin sx \, dx. \quad (5)$$

Приведем несколько примеров вычисления коэффициентов. Рассмотрим для начала случай

$$f(x) = x(\pi - x). \quad (6)$$

Эта функция изображается дугой параболы. Путем последо-

вательного интегрирования по частям получим:

$$A_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin sx \, dx = \frac{4}{\pi s^3} (1 - \cos s\pi). \quad (7)$$

$A_s$  равно нулю или  $8/\pi s^3$ , в зависимости от того, является ли целое число  $s$  четным или нечетным. Разложение в ряд принимает вид

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3^3} \sin 3x + \frac{1}{5^3} \sin 5x + \dots \right). \quad (8)$$

Положив здесь  $x = \frac{1}{2}\pi$ , получаем формулу

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots \quad (9)$$

известную из других источников. Равенство (8) можно также проверить графически. Расхождение между графиками  $x(\pi - x)$  и функцией, представленной первыми тремя членами правой части равенства, оказывается настолько незначительным, что было бы едва заметно на чертеже, выполненном в масштабе, соответствующем размерам страниц этой книги.

В качестве другого примера возьмем функцию  $f(x)$ , график которой состоит из двух отрезков, проходящих соответственно через точки  $x=0$ ,  $x=\pi$  и пересекающихся под некоторым углом в точке  $x=a$ . Если положить ординату точки пересечения равной единице, имеем:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{a} & [0 < x < a], \\ f(x) &= \frac{\pi - x}{\pi - a} & [a < x < \pi]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

После некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{2}{\pi a} \int_0^a x \sin sx \, dx + \frac{2}{\pi(\pi - a)} \int_a^{\pi} (\pi - x) \sin sx \, dx = \\ &= \frac{2}{a(\pi - a)} \frac{1}{s^2} \sin sa. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{2}{\alpha(\pi - \alpha)} \left( \sin \alpha \sin x + \frac{1}{2^2} \sin 2\alpha \sin 2x + \right. \\ \left. + \frac{1}{3^2} \sin 3\alpha \sin 3x + \dots \right). \quad (12)$$

Для проверки этого результата положим  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ;  $x = \frac{1}{2}\pi$ ; это дает равенство

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots, \quad (13)$$

справедливость которого известна из других источников. Этот пример интересен в связи с теорией струны, возбужденной щипком (§§ 26, 36). На рис. 35 приведен график  $f(x)$  совместно с графиком функции, представленной первыми восемью членами ряда правой части (12) для случая  $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ . В этом случае четвертый и восьмой члены отсутствуют, так как они соответствуют нормальным колебаниям, узлы которых расположены в точке приложения щипка.

Пусть теперь

$$f(x) = \pi - x. \quad (14)$$

Получаем:

$$A_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin sx \, dx = \frac{2}{s}. \quad (15)$$

Следовательно, разложение в ряд имеет вид

$$\pi - x = 2 \left( \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right). \quad (16)$$

Положив  $x = \frac{1}{2}\pi$ , получим:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots; \quad (17)$$

это — известная формула Эйлера. Формула (16) очевидно справедлива и для  $x = \pi$ ; однако, положив  $x = 0$ , мы увидим, что эта формула справедлива не всегда. Необходимые

изменения формулировки изложены в § 34. Заметим еще, что в этом случае ряд сходится гораздо медленнее, чем в предыдущей задаче; это иллюстрируется рис. 36, где вычерчены график функции  $\pi - x$  и график суммы первых восьми членов ряда. Если взять достаточно большое

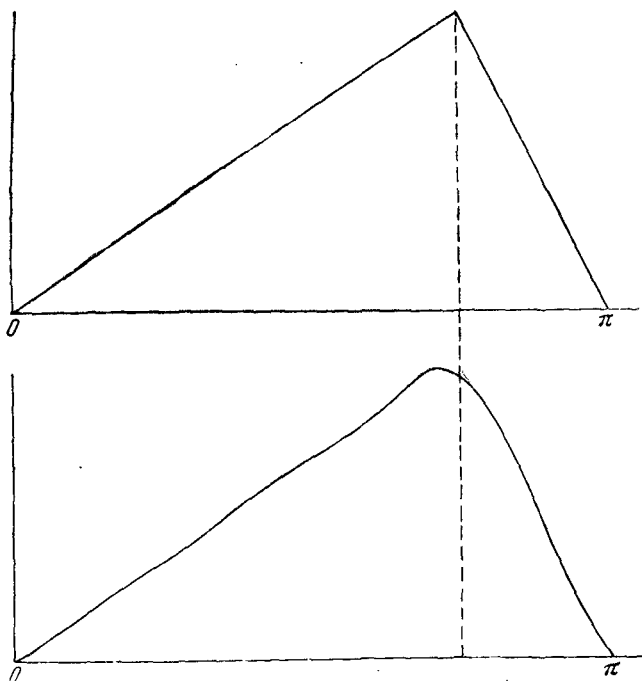


Рис. 35.

число членов, то для любого значения  $x$ , отличного от нуля, можно получить как угодно близкое приближение; однако, чем меньше значение  $x$ , тем большее число членов потребуется для получения желаемой степени точности.

Приведенные выше примеры и графики говорят в пользу рассматриваемой теоремы, однако они в то же время указывают на необходимость некоторых ограничений. Теорема допускает независимое математическое доказательство при некоторых специальных оговорках о харак-

тере «произвольной» функции  $f(x)$ . Мы, однако, не будем заниматься этим вопросом, а удовлетворимся следующей формулировкой:

Если образовать сумму первых членов ряда (2) и написать

$$f_m(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \dots + A_m \sin mx, \quad (18)$$

где

$$A_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin sx \, dx, \quad (19)$$

то можно доказать, что для любого заданного значения  $x$  в интервале от 0 до  $\pi$  сумма  $f_m(x)$  стремится к пределу  $f(x)$

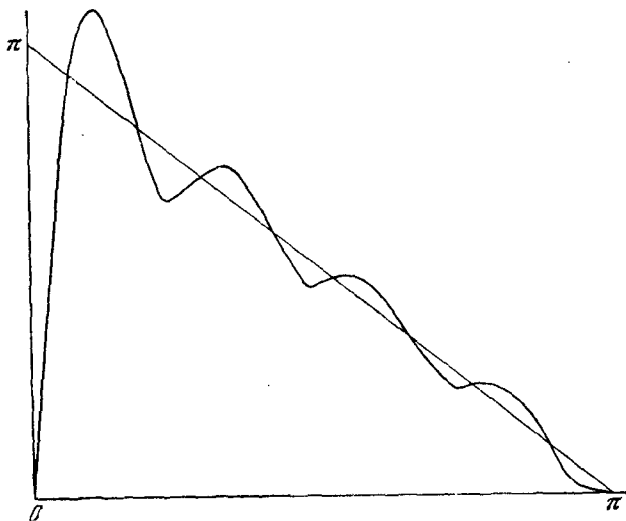


Рис. 36.

при увеличении  $m$ , при условии, что функция  $f(x)$  непрерывна во всем этом интервале, имеет только конечное число максимумов и минимумов и обращается в нуль при  $x=0$  и  $x=\pi$ .

Следует заметить, что указанные здесь условия удовлетворяются для любой функции, изображающей в реальном

случае начальную форму или распределение начальных скоростей для натянутой струны. Мы видим также, что затруднение, встретившееся в случае формулы (16), объясняется тем, что функция не обращается в нуль при  $x=0$ . Ниже, в § 34, будет указано обобщение, пригодное для такого рода случаев.

### 33. Ряд по косинусам

Теория продольных колебаний стержней или воздушных столбов приводит к аналогичной теореме, относящейся к разложению произвольной функции в ряд по косинусам. Теорему можно сформулировать следующим образом.

Положим

$$f_m(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_m \cos mx, \quad (1)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \quad (2)$$

и для всех  $s > 0$

$$A_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos sx dx. \quad (3)$$

Тогда можно показать, что при увеличении  $m$  сумма  $f_m(x)$  стремится к пределу  $f(x)$ , при условии, что  $f(x)$  непрерывна на всем интервале от 0 до  $\pi$  и имеет конечное число максимумов и минимумов. В данном случае нет ограничений относительно значений  $f(0)$  и  $f(\pi)$ . Если бы задача об определении влияния начальных условий на продольные колебания свободного на концах стержня была так же интересна, как и в случае струны, мы должны были бы пользоваться разложением в ряд именно по косинусам.

### 34. Полная формулировка теоремы Фурье. Разрывы функции

Возникает вопрос о том, что представляет собой ряд по синусам или по косинусам, продолженный на бесконечность, когда  $x$  лежит вне интервала от 0 до  $\pi$ . Ответ вытекает из того обстоятельства, что оба ряда являются

периодическими функциями  $x$  с периодом  $2\pi$ , причем первый из них является нечетной, а второй—четной функцией от  $x$ <sup>1)</sup>. Это иллюстрируется приведенными на рис. 37 графиками, на которых функция  $f(x)$ , заданная первоначально только в интервале от 0 до  $\pi$ , продолжена в одном случае как нечетная, а в другом—как четная периодическая функция от  $x$ . Из графика видно, что в первом

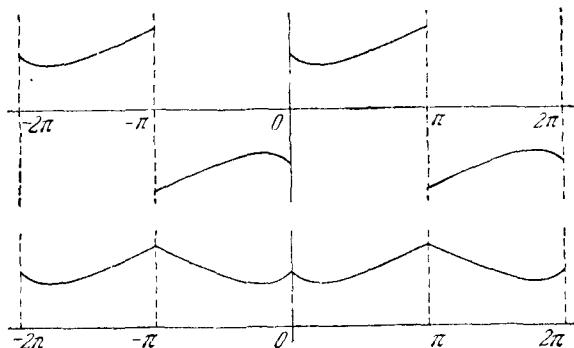


Рис. 37.

случае требование обращения функции в нуль в точках  $x=0$  и  $x=\pi$  необходимо, чтобы избежать разрывов.

Поскольку любую функцию  $f(x)$ , заданную произвольным образом, например, для значений  $x$ , лежащих в интервале  $(-\pi, \pi)$ , можно разложить на сумму четной и нечетной функций:

$$f(x) = \frac{1}{2} \{f(x) + f(-x)\} + \frac{1}{2} \{f(x) - f(-x)\}, \quad (1)$$

мы приходим к следующей, более общей теореме:

Сумма

$$f_m(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_m \cos mx + \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots + B_m \sin mx, \quad (2)$$

<sup>1)</sup> «Нечетная» функция—это такая функция, которая изменяет свой знак одновременно с  $x$ , как, например,  $x^3$  или  $\sin x$ . «Четная» функция—это функция, величина которой не изменяется при изменении знака  $x$ , как, например,  $x^2$  или  $\cos x$ .

где

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \{f(x) + f(-x)\} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (3)$$

и для всех  $s > 0$

$$\left. \begin{aligned} A_s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{f(x) + f(-x)\} \cos sx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos sx dx, \\ B_s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{f(x) - f(-x)\} \sin sx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin sx dx, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

при увеличении  $m$  стремится к пределу  $f(x)$  при условии, что  $f(x)$  непрерывна в интервале от  $x = -\pi$  до  $x = \pi$ , имеет конечное число максимумов и минимумов, а также при условии, что  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Для значений  $x$ , лежащих за пределами выбранного интервала, пределом будет при этих условиях периодическая функция с периодом  $2\pi$ .

Это и является наиболее общей формулировкой теоремы Фурье, включающей все остальные формулировки в качестве частных случаев.

Мы бы пришли к этим заключениям непосредственно, если бы исходили из физических соображений при рассмотрении «продольных» колебаний столба воздуха в замкнутой круговой трубе.

До сих пор мы предполагали, что периодическая функция  $f(x)$  не только конечна, но и непрерывна даже при продолжении за пределы исходного интервала. Однако с некоторой оговоркой, которую мы сейчас сформулируем, теорема справедлива, даже если  $f(x)$  имеет конечное число изолированных точек разрыва. В этом случае ряд  $f_m(x)$  попрежнему сходится при увеличении  $m$  к значению  $f(x)$



повсюду, за исключением точек разрыва. Если же  $a$ —точка, в которой  $f(x)$  меняет свое значение скачком, то сумма  $f_m(a)$  стремится к пределу

$$\frac{1}{2} \{f(a-0) + f(a+0)\},$$

где  $f(a-0)$  и  $f(a+0)$ —значения  $f(x)$  на бесконечно малых расстояниях слева и справа соответственно от точки  $a$ . Например, в случае ряда по синусам (3) § 32, если  $f(x)$  не обращается в нуль при  $x=0$  или  $x=\pi$ , то в этих точках периодической функции существует разрыв; например, ряд  $f_m(0)$  стремится к пределу, равному нулю, который является средним арифметическим значений функции, продолженной по обе стороны от точки  $x=0$ . Это иллюстрируется рис. 36.

### 35. Закон убывания коэффициентов ряда

Следует сделать несколько замечаний о законе убывания последовательных членов ряда. Сразу очевидно, что при сформулированных выше условиях значения коэффициентов  $A_s$  и  $B_s$  должны безгранично убывать при увеличении  $s$  из-за все более и более быстрого чередования знаков у множителей  $\sin sx$  и  $\cos sx$  и связанного с этим взаимного уничтожения различных элементов в определенных интегралах (5) § 32 и (3) § 33.

Более точные результаты были сформулированы Стоксом. Нижеследующее относится к функции, продолженной так, как было сказано выше; при этом для каждого из частных случаев необходимо проследить, не появляются ли разрывы функции  $f(x)$  или ее производных на концах различных отрезков.

Если  $f(x)$  имеет (в пределах одного периода) конечное число изолированных точек разрыва, то коэффициенты в конечном счете начинают стремиться к нулю как члены последовательности

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \quad (1)$$

Это иллюстрируется на примере (16) § 32 и рис. 36.

Если функция  $f(x)$  повсюду непрерывна, но ее первая производная  $f'(x)$  имеет конечное число изолированных точек разрыва, то сходимость коэффициентов ряда в конечном счете соответствует последовательности

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots \quad (2)$$

Это иллюстрируется (12) § 32 и рис. 35.

Если  $f(x)$  и  $f'(x)$  непрерывны, но  $f''(x)$  имеет разрывы в изолированных точках, то последовательность, сходящаяся так же быстро, как ряд коэффициентов, имеет вид

$$1, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{4^3}, \dots, \quad (3)$$

как в случае (8) § 32. И, вообще, если  $f(x)$  и ее производные, до порядка  $n-1$  включительно, непрерывны, тогда как производная  $n$ -го порядка имеет (в пределах одного периода) конечное число изолированных точек разрыва, то ряд из коэффициентов убывает так же, как последовательность

$$1, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{4^{n+1}}, \dots$$

Вкратце укажем основные черты весьма простого доказательства для случая ряда по синусам. После интегрирования по частям имеем:

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin sx \, dx = \\ &= -\frac{1}{s} \left[ \frac{2}{\pi} f(x) \cos sx \right] + \frac{2}{s\pi} \int_0^{\pi} f'(x) \cos sx \, dx, \quad (4) \end{aligned}$$

где член, содержащий интеграл, следует вычислять отдельно для каждого из отрезков, лежащих между точками разрыва  $f(x)$  (если таковые имеются), встречающимися в интервале от  $x=0$  до  $x=\pi$ . Если, например, как в (14) § 32, единственная точка разрыва совпадает с  $x=0$ , то этот член равен  $2f(0)/s\pi$ . В любом случае для всех значений  $s$  существует верхняя граница значений коэффициента при  $1/s$  в первом члене справа в (4); мы обозна-

чим этот предел через  $M$ . Определенный интеграл во втором слагаемом стремится к нулю при увеличении  $s$  вследствие знакопеременного характера множителя  $\cos sx$ . Поэтому  $A_s$  асимптотически стремится к  $M/s$ . Если  $f(x)$  не имеет разрывов даже в точках  $x=0$  и  $x=\pi$ , то первое слагаемое в приведенном выше выражении для  $A_s$  обращается в нуль и, снова интегрируя, найдем:

$$A_s = \frac{1}{s^2} \left[ \frac{2}{\pi} f'(x) \sin sx \right] - \frac{2}{s^2 \pi} \int_0^{\pi} f''(x) \sin sx dx. \quad (5)$$

В первом члене следует обратить внимание на точки разрыва  $f'(x)$ , если таковые существуют. Обозначив через  $M$  верхний предел значений коэффициента при  $1/s^2$ , мы видим, что  $A_s$  асимптотически стремится к  $M/s^2$ , так как второй член в (5) снова стремится к нулю по сравнению с первым вследствие знакопеременности подынтегрального выражения. Дальнейший ход рассуждения теперь достаточно очевиден.

### 36. Физическое приближение.

#### Случай струны, возбужденной щипком

Мы считали целесообразным сформулировать теорему Фурье с известной осторожностью, хотя и не входя в детали математических доказательств, значительная сложность которых связана с наличием целого ряда различных ограничений.

С физической точки зрения вопрос можно, по-видимому, адекватно рассмотреть значительно более простым способом. Чтобы показать это, лучше всего взять какую-либо конкретную задачу, например задачу о струне, возбужденной щипком (§ 26). Дифференциальное уравнение и условия на концах будут удовлетворены конечной суммой

$$y = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi ct}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi ct}{l} + \dots \\ \dots + A_m \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi ct}{l}, \quad (1)$$

каждый член которой представляет отдельное нормальное

колебание. В этом случае начальная скорость равна нулю, а начальная форма струны дается суммой

$$y = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + A_m \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (2)$$

Возникает вопрос о способе определения коэффициентов  $A_1, A_2, \dots, A_m$  так, чтобы возможно точнее представить формулой (2) заданную начальную форму струны:

$$y = f(x). \quad (3)$$

Есть целый ряд оснований, по которым, с физической точки зрения, мы можем удовлетвориться приближенным решением задачи. Оставляя в стороне такие вопросы, как сопротивление воздуха и податливость подставок на концах струны, следует помнить, что, исходя в рассуждениях из воображаемой математической материальной линии, в которой может возникать только натяжение, мы слишком сильно идеализировали реальные условия. Во всяком случае для нормальных колебаний высших номеров неабсолютная гибкость струны и неопределенность истинного характера условий на концах лишают это представление полной адекватности реальному случаю, и решение не может претендовать на точное определение нормальных колебаний таких номеров. Далее, принятая начальная форма струны, при которой два прямых отрезка ее встречаются под углом, может быть осуществлена лишь приближенно; при попытке подойти ближе к осуществлению такого начального условия на реальной проволоке получим остаточный сгиб или излом.

Определение коэффициентов конечного ряда (2) зависит от желаемого характера приближения. Например, можно разделить струну на  $m + 1$  равных частей и выбрать коэффициенты таким образом, чтобы в  $m$  точках деления функции (2) и (3) были равны между собой. Тогда кривые, изображаемые этими формулами, будут пересекаться еще в  $m$  точках, кроме конечных точек. Можно поступить иначе и добиваться наименьшего значения суммы квадратов ошибок, связанных с заменой (3) на (2). Если для краткости записи заменим  $l$  на  $\pi$ , то найдем, что следует выбрать коэффициенты таким образом, чтобы

интеграл

$$\int_0^{\pi} \{f(x) - (A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \dots + A_m \sin mx)\}^2 dx \quad (4)$$

принял минимальное значение. Дифференцируя относительно  $A_s$ , получаем

$$\int_0^{\pi} \{f(x) - (A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \dots + A_m \sin mx)\} \times \\ \times \sin sx dx = 0, \quad (5)$$

или согласно (4) § 32

$$A_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin sx dx. \quad (6)$$

Следовательно, этот так называемый метод наименьших квадратов дает для коэффициентов ряда (2), состоящего из конечного числа членов, точно те же значения, которые были получены методом Фурье<sup>1)</sup>. Каждый коэффициент определяется независимо, и добавление в (2) следующих членов улучшает приближение, но не влияет на величину уже полученных коэффициентов. Возвращаясь к произвольной длине интервала, найдем, что формула (6) заменяется на

$$A_s = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{s\pi x}{l} dx. \quad (7)$$

В случае струны, возбужденной щипком, мы стремимся приблизиться к форме

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{\beta x}{a} [0 < x < a], \\ y &= \frac{\beta(l-x)}{l-a} [a < x < l]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Решение можно непосредственно получить из (11) § 32, если заменить  $x$  на  $\pi x/l$  и, следовательно,  $a$  на  $\pi a/l$  и  $\pi$

<sup>1)</sup> Эта теорема дана А. Теплером (1876).

на  $l$  и ввести коэффициент  $\beta$ . Таким образом,

$$A_s = \frac{2\beta l^2}{s^2 \pi^2 a (l-a)} \sin \frac{s\pi a}{l} \quad (9)$$

в согласии с (1) § 26. Характер приближения иллюстрируется рис. 35.

### 37. Применение к скрипичной струне

Чтобы применить рассмотренный метод к задаче о скрипичной струне (§ 27), возьмем в качестве начального момента времени  $t$  тот момент, когда точка  $Q$  на рис. 32, выходя из  $A$ , начинает описывать верхнюю часть дуги параболы. В этот момент повсюду  $y=0$ , в то время как

$$\dot{y} = \frac{4\beta_0 c}{l^2} (l-x) \quad [t=0]. \quad (1)$$

Ввиду сказанного рассмотрим конечный ряд

$$y = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi c t}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{2\pi c t}{l} + \dots \\ \dots + A_m \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m\pi c t}{l}. \quad (2)$$

Этот ряд удовлетворяет дифференциальному уравнению и при  $t=0$  дает  $y=0$ . Остается только определить постоянные таким образом, чтобы ряд

$$B_1 \sin \frac{\pi x}{l} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + B_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (3)$$

где

$$B_s = \frac{s\pi c}{l} A_s, \quad (4)$$

как можно более точно изображал начальное распределение (1) скоростей. Определение  $B_s$  было фактически уже выполнено в (15) § 32. Вводя необходимые изменения обозначений, получаем:

$$A_s = \frac{8\beta_0}{\pi^2} \frac{1}{s^2} \quad (5)$$

в согласии с § 27. График начального распределения ско-

рости и приближение, полученное при помощи первых восьми членов ряда (3), приведены на рис. 36.

Следует заметить, что наше приближение имеет даже преимущество по сравнению с результатами, получаемыми при продолжении ряда до бесконечности. Бесконечный ряд дает для начальной скорости разрывное выражение в точке  $x = 0$ , так как скорость принимает значение, равное нулю, при  $x = 0$ , но равна  $4\beta_0 c/l$ , когда  $x$  отличается от нуля на сколь угодно малую величину. В этом отношении идеализированное изображение движения в § 27 несовершенно; параболу на рис. 32 следовало бы несколько видоизменить так, чтобы получить касание к прямой  $AB$  на ее концах.

### 38. Струна, возбужденная ударом

В качестве последнего примера возьмем случай струны, приведенной в колебание ударом, как в § 26. Начнем с рассмотрения силы, непрерывно распределенной в пространстве и непрерывно длящейся во времени; дифференциальное уравнение движения, как и в § 28, будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{Y}{q}. \quad (1)$$

Предположим, прежде всего, что имеет место равенство

$$\frac{Y}{q} = f_1(t) \sin \frac{\pi x}{l} + f_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + f_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (2)$$

где коэффициенты суть известные функции от  $t$ . Тогда уравнение (1) удовлетворится при

$$y = \eta_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \eta_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + \eta_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (3)$$

при условии, что удовлетворяется уравнение

$$\frac{\partial^2 \eta_s}{\partial t^2} + \frac{s^2 \pi^2 c^2}{l^2} \eta_s = f_s(t). \quad (4)$$

Решение этого уравнения было приведено в § 8. Если предположить, что при  $t = -\infty$   $\eta_s = 0$ ,  $\dot{\eta}_s = 0$ , а  $f_s(t)$  имеет конечное значение только в конечном интервале

значений  $t$ , то окончательное значение  $\eta_s$  будет равно

$$\eta_s = \frac{l}{\pi c} \sin \frac{\pi c t}{l} \int_{-\infty}^{\infty} f_s(t) \cos \frac{\pi c t}{l} dt - \\ - \frac{l}{\pi c} \cos \frac{\pi c t}{l} \int_{-\infty}^{\infty} f_s(t) \sin \frac{\pi c t}{l} dt. \quad (5)$$

В качестве частного случая возьмем:

$$f_s(t) = \frac{C_s}{\pi} \frac{\tau}{t^2 + \tau^2}. \quad (6)$$

Тогда согласно (8) § 18 имеем:

$$\eta_s = \frac{C_s l}{\pi c} e^{-\pi c \tau t / l} \sin \frac{\pi c t}{l}. \quad (7)$$

Конкретная зависимость  $Y$  от  $t$  дается для любой точки струны последним множителем в формуле (6); однако мы до сих пор не сделали никаких специальных предположений о распределении силы вдоль струны. Интегрируя  $Y$  по времени, найдем:

$$\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} Y dt = C_1 \sin \frac{\pi x}{l} + C_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + C_m \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (8)$$

Попытаемся теперь определить значения коэффициентов таким образом, чтобы это выражение имело заметное значение только вблизи точки  $x = a$ . Положим

$$\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} Y dt = \varphi(x), \quad (9)$$

где  $\varphi(x)$  равно нулю всюду, кроме интервала  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Тогда формула (7) § 36 дает:

$$C_s = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{s\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \varphi(x) \sin \frac{s\pi x}{l} dx. \quad (10)$$



Если  $\varepsilon$  мало, то полученный таким образом ряд сначала сходится очень медленно, и чтобы получить достаточное приближение, необходимо взять очень большое число членов. Для членов низших номеров имеем приближенно:

$$C_s = \frac{2}{l} \sin \frac{s\pi a}{l} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \varphi(x) dx = \frac{2\mu}{ql} \sin \frac{s\pi a}{l}, \quad (11)$$

где

$$\mu = q \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \varphi(x) dx, \quad (12)$$

т. е.  $\mu$  представляет собой полный импульс. Соответствующий член в выражении (3) для  $y$  будет равен

$$\frac{2\mu}{qlc} \frac{1}{s} e^{-s\pi c\tau/l} \sin \frac{s\pi a}{l} \sin \frac{s\pi x}{l} \sin \frac{s\pi ct}{l}. \quad (13)$$

Однако, как бы ни было мало  $\varepsilon$ , пока оно не равно нулю, при увеличении  $s$  значение  $C_s$ , полученное из (10), будет стремиться к нулю из-за все более полного взаимного уничтожения положительных и отрицательных элементов в подынтегральном выражении. Это указывает на влияние того факта, что импульс приложен к малому, но конечному отрезку струны.

Чтобы получить случай мгновенного сосредоточенного импульса, следует положить  $\tau=0$  (ср. § 26).

### 39. Общая теория нормальных функций. Гармонический анализ

То большое место, которое было уделено изложению теоремы Фурье, полностью оправдывается ее важностью, особенно в связи с теорией струн, однако следует помнить, что с точки зрения теории колебаний эта теорема представляет собой лишь одну из бесконечного множества теорем, которые можно было бы обосновать, исходя из аналогичных физических соображений. Каждая колебательная система имеет свой собственный набор так называемых «нормальных функций», которые определяют конфигурацию системы при различных нормальных колебаниях. В случае однородной струны или

открытой с обоих концов органной трубы они оказываются простыми функциями вида  $\sin \frac{s\pi x}{l}$  или  $\cos \frac{s\pi x}{l}$  соответственно. В теории поперечных колебаний стержней и в теории колебаний мембраны мы встречаемся с более сложными видами функций. И даже в упомянутых выше случаях тип функции сразу усложняется, если нарушить требование постоянства линейной плотности или поперечного сечения струн. В некоторых весьма интересных задачах, например в задаче о колебании прямоугольной пластинки, точный вид функций еще не известен. Однако из теории известно, что такие функции во всяком случае существуют. Исходя из принципа, что любое свободное колебание системы состоит из той или иной комбинации различных нормальных колебаний, следует заключить, что любое произвольное начальное положение, а следовательно, и любую произвольную функцию от положения системы можно выразить рядом по нормальным функциям. Преимущественное значение теоремы Фурье объясняется с этой точки зрения лишь тем фактом, что она является наиболее простым примером такой закономерности для случая сплошной системы, а также примером, в котором физическая интуиция получила исчерпывающее подтверждение в виде независимого математического доказательства. Можно также прибавить, что расчет для заданных начальных условий представляет большой интерес только для случая колебаний струн.

Однако с другой точки зрения особое значение имеет именно разложение функций в ряд по синусам или косинусам; это относится к вопросу о разложении функций от *времени*. В § 19 мы уже останавливались на причине этого с точки зрения динамики.

Если известно, что функция  $f(t)$  периодическая и период ее равен  $\tau$ , то согласно теореме Фурье она разлагается в ряд

$$\begin{aligned}
 f(t) = & A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + A_2 \cos \frac{2 \cdot 2\pi t}{\tau} + \\
 & + A_3 \cos \frac{3 \cdot 2\pi t}{\tau} + \dots + B_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} + B_2 \sin \frac{2 \cdot 2\pi t}{\tau} + \\
 & + B_3 \sin \frac{3 \cdot 2\pi t}{\tau} + \dots, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где

$$A_0 = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt, \quad (2)$$

а для  $s > 0$

$$A_s = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cos \frac{2s\pi t}{\tau} dt, \quad B_s = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \sin \frac{2s\pi t}{\tau} dt. \quad (3)$$

Конечно, это является простым повторением формулировки теоремы § 34 при соответственных изменениях обозначений. Заметим, что  $A_0$  представляет среднее значение данной функции.

Мы уже получали формулы типа (1), выражающие движение любой заданной точки свободно колеблющейся струны; период колебания оказывался равным  $\tau = \frac{2l}{c}$ .

Другим важным акустическим применением является использование теоремы Фурье в исследовании периодической воздушной струи, как, например, в сирене или в язычковых трубах органа (§ 90). Далее, в случае электромагнитного возбуждения камертонов переменный ток может сильно возбуждать не только камертон той же частоты, но и камертоны, собственные частоты которых соответственно в два, три и т. д. раз больше частоты тока. Такое явление обусловлено тем, что возмущающая сила имеет вид (1); под действием такой силы наступает селективный резонанс (см. § 9).

Лорд Кельвин и другие предложили целый ряд механических устройств для разложения заданной периодической кривой на ее гармонические составляющие и, обратно, для сложения ряда отдельных синусов и косинусов с периодами  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  С точки зрения акустики, пожалуй, наиболее интересен прибор, построенный профессором Майкельсоном и рассчитанный на 80 гармонических компонент<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Phil. Mag. (5), т. XLV (1898); в статье содержится целый ряд чрезвычайно интересных примеров и результатов. Конструкция прибора описана также в его книге «On Light Waves and their Uses», Chicago, 1903. (Имеется русский перевод: А. А. Майкельсон, «Световые волны и их применения», изд. 2-е, ГТТИ, 1934 г.—Ред.)

Нет, вероятно, необходимости подчеркивать, что разложение периодической функции  $t$  в виде (1) является единственным; действительно, коэффициенты, даваемые (2) и (3), имеют вполне определенные значения. В частности, ряд описанного выше типа может обратиться в нуль для всех значений  $t$  только в том случае, если обращаются в нуль в отдельности все его коэффициенты. Так, если в любой заданной точке  $x$  свободно колеблющейся струны приостановить колебания, например прикосновением войлочного штифта, то в общей формуле (7) § 25 коэффициенты при  $\cos \frac{s\pi ct}{l}$  и  $\sin \frac{s\pi ct}{l}$  должны обращаться в нуль, т. е. мы должны иметь:

$$A_s \sin \frac{s\pi x}{l} = 0, \quad B_s \sin \frac{s\pi x}{l} = 0 \quad (4)$$

для всех значений  $s$ . Если только  $x$  не соизмеримо с  $l$ , то для этого необходимо, чтобы выполнялись равенства  $A_s = 0$  и  $B_s = 0$ , и вся струна придет в состояние покоя. В случае соизмеримости  $x$  и  $l$  условия (4) удовлетворяются независимо от значений  $A_s$  и  $B_s$  для всех случаев, когда  $\sin \frac{s\pi x}{l} = 0$ , т. е. оказываются незатронутыми те нормальные колебания, один из узлов которых находится в точке прикосновения штифта к струне.

Возникает вопрос о влиянии неперiodических сил на динамическую систему. По причине, на которую мы уже много раз указывали, во всех случаях, когда это возможно, удобно разложить силу в ряд типа

$$A \cos pt + B \sin pt. \quad (5)$$

Каждый элемент  $A \cos pt$  или  $B \sin pt$  обуславливает в системе свой собственный эффект, а именно колебание той же фазы и того же периода; конфигурация и амплитуда колебания будут зависеть от частоты  $p$ . В некоторых случаях такое разложение возникает совершенно естественно, как, например, в теории приливов. Возмущающее действие Солнца и Луны при учете их переменного склонения и неравенства их движений по орбите можно достаточно точно представить рядом типа (5). Оказывается, что высота прилива в любом данном месте должна выражаться рядом

такого же типа, в котором величины  $p$  известны. В случае реального океана, с его различными глубинами и неправильными очертаниями границ, теоретическое вычисление коэффициентов невозможно; однако их значения можно с большей или меньшей точностью вывести *a posteriori* из сравнения теоретической формулы с результатами наблюдений; найденные таким образом значения можно в дальнейшем использовать для предсказания величины приливов<sup>1)</sup>.

Когда возмущающая сила совершенно нерегулярна по своему характеру и не содержит явным образом периодических составляющих, вопрос более сложен. Существует особая форма теоремы Фурье, специально пригодная для такого рода случаев, однако ее применение обычно затруднительно, и проще, как и в § 38, воспользоваться выражением (12) § 8. Возражение о необходимости сведений о всей предыстории системы для возможности использования этой формулы можно отклонить, вводя в рассмотрение затухание, которое в действительности всегда существует. Уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + n^2x = f(t) \quad (6)$$

можно записать в виде

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + n'^2 \right) e^{\frac{1}{2}kt} x = e^{\frac{1}{2}kt} f(t), \quad (7)$$

если положить

$$n'^2 = n^2 - \frac{1}{4}k^2. \quad (8)$$

Тогда согласно упомянутой выше формуле

$$\begin{aligned} x = & \frac{1}{n'} e^{-\frac{1}{2}kt} \sin n't \int e^{\frac{1}{2}ht} f(t) \cos n't dt - \\ & - \frac{1}{n'} e^{-\frac{1}{2}kt} \cos n't \int e^{\frac{1}{2}ht} f(t) \sin n't dt. \end{aligned} \quad (9)$$

<sup>1)</sup> Элементарное изложение этого вопроса см. в книге: G. H. Darwin, «The Tides», Лондон, 1898. (Имеется русский перевод: Дж. Г. Дарвин, «Приливы и родственные им явления в солнечной системе». Перевод с англ. В. В. Серафимова, М., Гос. Изд., 1923 г.—*Ред.*)

Если  $x = 0$  и  $\dot{x} = 0$  для  $t = -\infty$ , то интегрирование производится в пределах от  $-\infty$  до  $t$ . Например, при  $t = 0$  получаем для  $x$  значение

$$x = -\frac{1}{n'} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{1}{2}ht} f(t) \sin n't dt. \quad (10)$$

Благодаря наличию экспоненциального множителя подынтегральная функция имеет, как правило, существенную величину лишь в пределах некоторой области отрицательных значений  $t$ . Другими словами, влияние силы, действие которой предшествовало некоторому определенному моменту времени, практически исчезает.

---

## ГЛАВА IV

### СТЕРЖНИ

#### 40. Элементарная теория упругости. Деформации

Нам потребуются некоторые элементарные понятия из теории упругости. Что касается геометрического рассмотрения деформаций, то обычно начинают с изучения равномерной, или «однородной», деформации тела. Она вполне определяется тем свойством, что любые две линии данного тела, бывшие первоначально прямыми и параллельными друг другу, остаются прямыми и параллельными, хотя их положение относительно других линий тела обычно изменяется. Поэтому параллелограммы остаются параллелограммами, из чего легко заключить, что длина всех параллельных прямых отрезков изменяется в одинаковом отношении. Это отношение, однако, будет различным для разных направлений в данном теле.

Можно показать, что в каждом теле существуют три взаимно-перпендикулярных направления, которые остаются взаимно-перпендикулярными после деформации. Эти направления носят название «главных осей деформации». Для наших целей нет необходимости строго доказывать существование таких осей; в тех простых случаях, с которыми нам придется встретиться, это будет само собою очевидно. Из данной теоремы вытекает, что любая сферическая область, выделенная в теле, превращается в результате деформации в эллипсоид, направления осей которого совпадают с направлениями главных осей деформации.

Пусть  $PQ$  и  $P'Q'$  обозначают произвольный отрезок в теле до и после деформации; тогда отношение

увеличения длины к первоначальной длине

$$\varepsilon = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} \quad (1)$$

называется «деформацией растяжения» или «относительным удлинением». Для разных направлений отрезка эта величина, вообще, будет различной. При деформации твердых тел  $\varepsilon$  — всегда очень малая величина. Мы будем обозначать относительные удлинения в направлении главных осей через  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

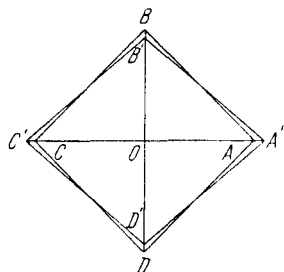


Рис. 38.

Отношение увеличения объема к первоначальному объему называется «объемным расширением». Обозначая его через  $\Delta$  и рассматривая изменение объема элемента, выбранного в форме куба с

ребрами, направленными по главным осям деформации, получим:

$$1 + \Delta = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)$$

или, пренебрегая произведениями малых величин,

$$\Delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (2)$$

Следует отметить два особых вида однородных деформаций. Во-первых, предположим, что  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ . Тогда любые сферические объемы в теле остаются сферическими и, следовательно, относительные удлинения одинаковы во всех направлениях. Поэтому такая деформация называется всесторонним растяжением; очевидно, при этом  $\varepsilon = \frac{1}{3} \Delta$ .

Пусть теперь  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon$ , а  $\varepsilon_3 = 0$ , так что  $\Delta = 0$ . Квадрат с диагоналями  $AOC$  и  $BOD$ , параллельными главным осям деформации 1 и 2, превратится в ромб  $A'B'C'D'$ ; поскольку в первом приближении

$$(1 + \varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon)^2 = 2,$$

длина сторон не изменяется. Кроме того,

$$\operatorname{tg} A'B'O = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = \operatorname{tg} \left( \frac{1}{4} \pi + \varepsilon \right) \quad (3)$$



и, значит, углы ромба будут равны  $\frac{1}{2}\pi \pm 2\varepsilon$ . Можно по другому прийти к тому же деформированному состоянию, если представить себе, что ромб  $A'B'C'D'$  был предварительно повернут в своей плоскости так, что  $A'B'$  совпало с  $AB$ . Это можно сделать, так как любое перемещение тела как целого не меняет его деформации. Мы увидим тогда, что любые две плоскости в теле, параллельные  $AB$  и главной оси 3, смещаются относительно

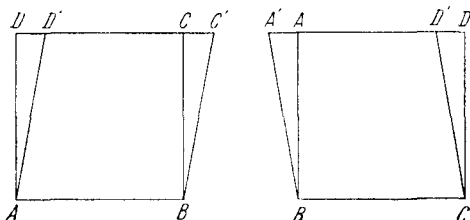


Рис. 39.

друг друга, без изменения расстояния между ними, на величину, пропорциональную этому расстоянию. Этот вид деформации называют «сдвигом», так как смещение двух сторон ромба напоминает по своему характеру сдвигание половинок ножниц.

Величину сдвига ( $\eta$ ) определяют как относительное смещение плоскостей, рассчитанное на единицу расстояния между ними, т. е. как отношение  $2\varepsilon = \frac{DD'}{AD}$  (рис. 39, слева). Аналогично, совмещая стороны  $B'C'$  и  $BC$ , можно показать, что деформация эквивалентна сдвигу плоскостей, параллельных  $BC$  и оси 3, в направлении  $BC$  (рис. 39, справа).

#### 41. Напряжения

Термин «напряжение» относится к взаимодействию частиц тела, непосредственно прилегающих к обеим сторонам поверхности  $S$ , мысленно проведенной в теле. В данном случае нас интересуют молекулярные силы, действующие лишь на очень малых расстояниях, так что взаимодействующие частицы вещества заключены в двух

крайне тонких слоях, общей границей между которыми является  $S$ . Результирующую силу, действующую на малый участок каждого слоя, можно в пределе считать пропорциональной площади участка; величина напряжения соответственно определяется силой, приходящейся на единицу площади. По своему характеру эта сила может

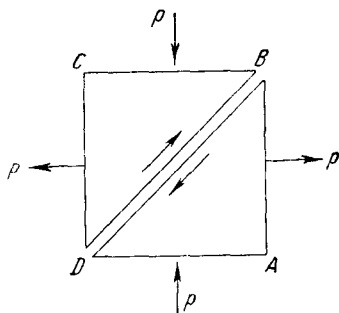


Рис. 40.

быть либо толкающей, либо тянущей; относительно площади она может быть направлена либо по нормали, либо под углом, либо даже по касательной.

Для простоты обычно начинают с изучения равномерного, или «однородного», напряжения, т. е. предполагают, что напряжение распределено равномерно по любой плоскости и что на двух параллельных плоскостях

оно одинаково по величине и по направлению. Для непараллельных плоскостей оно, конечно, вообще будет различным. Можно показать, что существует система трех взаимно-перпендикулярных плоскостей, для каждой из которых напряжение нормально к плоскости. Однако, как уже было отмечено, нет необходимости останавливаться на доказательстве этой теоремы. Указанные плоскости называются «главными плоскостями» напряжения, а соответственные значения напряжения носят названия «главных напряжений». Принято считать их положительными, если они носят характер растягивающих напряжений. Мы будем обозначать их через  $p_1, p_2, p_3$ .

Следует отметить некоторые особые виды напряженного состояния. Первый случай:  $p_1 = p_2 = p_3$ . Тогда напряжение на любой плоскости будет одинаково по величине и направлено по нормали к плоскости, как в гидростатике.

Второй случай:  $p_1 = -p_2 = p$ , а  $p_3 = 0$ . Рассмотрим куб единичного объема с гранями, параллельными главным плоскостям. Объем, заключенный между гранями  $AB$ ,  $DA$  и диагональной плоскостью  $BD$  (рис. 40), находится

в равновесии под действием трех сил. Две из этих сил параллельны и пропорциональны  $DA$  и  $AB$  и действуют на грани  $AB$  и  $DA$  соответственно. Поэтому третья сила должна действовать вдоль  $BD$  и по величине должна быть пропорциональна  $BD$ . Величина этой силы ( $\omega$ ), приходящаяся на единицу площади, равна  $p$ . То же получается, если возьмем диагональную плоскость  $AC$ . Куб, четыре грани которого параллельны этим диагональным плоскостям, находится в равновесии, как показано на рис. 41, под действием тангенциальных напряжений. Тангенциальное напряжение называют также «сдвиговым напряжением», обозначают через ( $\tilde{\omega}$ ) и измеряют тангенциальной силой, приходящейся на единицу площади на указанных плоскостях.

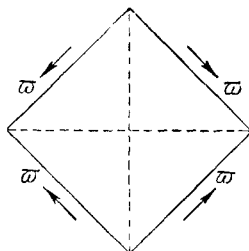


Рис. 41.

Вообще, деформированные или напряженные состояния тел не являются равномерными или «однородными» по всему телу, а изменяются непрерывно от точки к точке. Тем не менее вышеизложенные понятия применимы и в этом случае к бесконечно малым элементам, на которые можно мысленно разделить тело.

## 42. Упругие константы. Потенциальная энергия деформации

Теория деформаций относится к чистой геометрии, а теория напряжений—к чистой статике. Для установления связи между ними потребуются некоторые физические допущения. Обычное допущение—так называемый «закон Гука»<sup>1)</sup>; он заключается в предположении линейной зависимости напряжений от деформаций. Этот закон перестает соблюдаться даже приближенно, когда деформации превосходят некоторые величины, получившие название «пределов упругости»; однако для целей акустики в применимости закона Гука можно не сомневаться ввиду

<sup>1)</sup> Robert Hooke (1635—1703), профессор геометрии Грешэмского колледжа в 1665—1703 гг.

крайней малости интересующих нас переменных деформаций<sup>1)</sup>.

В изотропном веществе, т. е. в веществе, свойства которого не различаются в разных направлениях, главные оси деформации должны, очевидно, совпадать с главными осями напряжений. Более того, в формулу для главного напряжения  $p_1$  главные деформации  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$  должны входить симметрично (то же и для остальных компонент). Наиболее общее соотношение, отвечающее этому требованию и закону Гука, имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \lambda (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu \varepsilon_1, \\ p_2 &= \lambda (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu \varepsilon_2, \\ p_3 &= \lambda (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu \varepsilon_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\lambda, \mu$  — константы, зависящие от свойств материала<sup>2)</sup>. Нужно отметить, что  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  — безразмерные величины и что, следовательно,  $\lambda, \mu$  имеют размерность напряжения или силы, деленной на площадь, а именно:  $[ML^{-1}T^{-2}]$ , где через  $[M], [L], [T]$  обозначены соответственно единицы массы, длины и времени.

Существуют различные комбинации констант  $\lambda, \mu$ , имеющие особое значение как в физике, так и в прикладной механике. В случае всестороннего расширения имеем  $p_1 = p_2 = p_3 (= p)$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 (= \frac{1}{3} \Delta)$ , откуда

$$p = \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \Delta. \quad (2)$$

Следовательно,

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3} \mu \quad (3)$$

будет обозначать «объемный модуль упругости» или

<sup>1)</sup> При заметном отклонении от закона Гука частоты поперечных колебаний стержня уже не были бы независимыми от амплитуды. Поскольку ухо очень чувствительно к изменению высоты тона, это очень легко можно было бы обнаружить. Это замечание принадлежит Стоксу.

<sup>2)</sup> Существует большое разнообразие в обозначении этих констант. Вышеприведенные обозначения введены Г. Ламе (G. Lamé, 1795—1870), профессором физики Политехнической школы в 1832—1844 гг.

«объемный модуль сжатия» вещества, т. е. отношение всестороннего однородного напряжения к вызываемой им объемной деформации.

Предположим теперь, что  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon$ , а  $\varepsilon_3 = 0$ ; тогда  $p_1 = -p_2 = p$  и  $p_3 = 0$ , т. е. мы имеем случай чистого сдвига под действием сдвигового напряжения. В соответствии с изложенным в §§ 40, 41 сдвиговое напряжение  $\tilde{\omega} = p$ , а деформация сдвига  $\eta = 2\varepsilon$ . Отсюда из (1)

$$\tilde{\omega} = \mu\eta, \quad (4)$$

т. е.  $\mu$  обозначает отношение напряжения к деформации при чистом сдвиге;  $\mu$  называется «модулем сдвига».

Пусть, далее, стержень растянут по своей длине, но свободен от напряжений в поперечном направлении. Тогда в (1) можно положить  $p_2 = 0$ ,  $p_3 = 0$ , что приводит к формуле

$$p_1 = E\varepsilon_1, \quad (5)$$

где

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu} = \frac{3\mu}{\lambda + \mu}. \quad (6)$$

Это отношение продольного напряжения к соответственной деформации удлинения называется «модулем Юнга»; его практическое значение очевидно. При таком растяжении

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\sigma\varepsilon_1, \quad (7)$$

где

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (8)$$

Это отношение поперечного сжатия к продольному растяжению при условии отсутствия поперечных напряжений получило название «коэффициента Пуассона»<sup>1)</sup>.

Решая уравнения (1), можно выразить  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  в виде линейных функций от  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ . Очевидно, что

<sup>1)</sup> S. D. Poisson (1781—1840). Его главный вклад в акустику касается колебания мембран и пластин и общей теории звуковых волн в воздухе.

в формулу для  $\varepsilon_1$  величины  $p_2$  и  $p_3$  должны входить симметрично; из этого соображения и из физического смысла констант  $E$  и  $\sigma$  сразу же следует:

$$\left. \begin{aligned} E\varepsilon_1 &= p_1 - \sigma(p_2 + p_3), \\ E\varepsilon_2 &= p_2 - \sigma(p_3 + p_1), \\ E\varepsilon_3 &= p_3 - \sigma(p_1 + p_2). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В соответствии с характером рассматриваемой задачи та или другая из упругих констант и их комбинаций может оказаться особенно важной; этим, возможно, объясняется большое разнообразие существующих обозначений. Во всяком случае для определения упругих свойств изотропного вещества необходимо и достаточно указать две независимые величины. Для физика наиболее существенными могут оказаться постоянные  $\kappa$  и  $\mu$ ; с точки зрения удобства непосредственного измерения предпочтение может быть отдано величинам  $E$  и  $\mu$ ; тогда  $\kappa$  и  $\sigma$  могут быть получены по формулам

$$\kappa = \frac{\mu E}{9\mu - 3E}, \quad \sigma = \frac{E}{2\mu} - 1, \quad (10)$$

которые легко выводятся из (3), (6) и (7). Исходя из частной гипотезы о характере молекулярного строения упругих твердых тел, Пуассон пришел к выводу, что две упругие константы не являются независимыми, но связаны определенным соотношением, которое в наших обозначениях имеет вид  $\lambda = \mu$ . Отсюда следует:

$$\kappa = \frac{5}{3}\mu, \quad E = \frac{5}{2}\mu, \quad \sigma = \frac{1}{4}. \quad (11)$$

Вертхейм (1848) предложил, на основе экспериментальных данных, зависимость  $\lambda = 2\mu$ , откуда

$$\kappa = \frac{8}{3}\mu, \quad E = \kappa, \quad \sigma = \frac{1}{3}. \quad (12)$$

Более точные методы измерения, введенные Кирхгофом<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> G. R. Kirchhoff (1824—1887), профессор физики в Гейдельберге в 1854—1875 гг., в Берлине в 1875—1887 гг.; известен своим вкладом в открытие спектрального анализа; кроме того, автор важных работ по теории упругости и ее применению к колебаниям стержней и пластин.

и другими, подтверждают точку зрения, которой последовательно придерживались английские физики<sup>1)</sup>, что никакого определенного соотношения между  $\lambda$  и  $\mu$  нет; нет, следовательно, и универсального значения для  $\sigma$ . Отметим, что в абсолютно несжимаемой среде

$$\kappa = \infty, \quad E = 3\mu, \quad \sigma = \frac{1}{2}. \quad (13)$$

В следующей таблице даются согласно измерениям Эверетта (1867) значения упругих постоянных для

	$\rho$	$E$	$\mu$	$\kappa$	$\sigma$
Сталь . .	7,849	$2,139 \cdot 10^{12}$	$8,19 \cdot 10^{11}$	$1,841 \cdot 10^{12}$	0,310
Железо . .	7,677	$1,963 \cdot 10^{12}$	$7,69 \cdot 10^{11}$	$1,456 \cdot 10^{12}$	0,275
Чугун . .	7,235	$1,349 \cdot 10^{12}$	$5,32 \cdot 10^{11}$	$0,964 \cdot 10^{12}$	0,267
Медь . .	8,843	$1,234 \cdot 10^{12}$	$4,47 \cdot 10^{11}$	$1,684 \cdot 10^{12}$	0,378
Стекло (1)	2,942	$0,603 \cdot 10^{12}$	$2,40 \cdot 10^{11}$	$0,415 \cdot 10^{12}$	0,258
Стекло (2)	2,935	$0,574 \cdot 10^{12}$	$2,35 \cdot 10^{11}$	$0,347 \cdot 10^{12}$	0,229

некоторых веществ. Во втором столбце дается плотность вещества в  $г/см^3$ . В следующих трех столбцах даются упругие константы в  $дин/см^2$ . В последнем столбце дается значение  $\sigma$ . Последние две строки показывают, что упругие константы могут заметно изменяться в различных образцах одного и того же вещества.

При практических расчетах упругие константы  $E$ ,  $\kappa$ ,  $\mu$  часто выражают в весовых единицах, т. е. в  $Г/см^2$ . Соответственные числа в вышеприведенной таблице следует разделить тогда на  $g$ . Можно, следуя Юнгу, определять упругую константу вещества через длину  $L$  стержня, вес которого на единицу площади поперечного сечения был бы равен модулю упругости, выраженному в весовых единицах;  $L$  будем называть «эквивалентной длиной» («length modulus»). Например, если  $L$  есть эквивалентная длина для растяжения стержня со свободной боковой поверхностью, то

$$E = g\varrho L. \quad (14)$$

<sup>1)</sup> Главным образом Грин (Green, 1793—1841), Стокс и лорд Кельвин.

Принимая  $g=981$ , получим для стали согласно вышеприведенной таблице  $L=278 \cdot 10^6$  см.

Потенциальная энергия ( $W$ ) единицы объема деформированного изотропного вещества может быть найдена путем вычисления работы напряжений, действовавших на гранях единичного куба, в предположении, что деформации возрастили от нуля до своей конечной величины, сохраняя свои относительные значения. Средняя величина напряжения равна тогда половине конечной величины.

Так, в случае всестороннего растяжения  $\Delta$  имеем:

$$W = \frac{1}{2} p \Delta = \frac{1}{2} \kappa \Delta^2. \quad (15)$$

В случае чистого сдвига  $\eta$

$$W = \frac{1}{2} \tilde{\omega} \eta = \frac{1}{2} \mu \eta^2. \quad (16)$$

При растяжении стержня со свободными боковыми стенками

$$W = \frac{1}{2} p_1 \varepsilon_1 = \frac{1}{2} E \varepsilon_1^2. \quad (17)$$

В общем случае имеем:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} (p_1 \varepsilon_1 + p_2 \varepsilon_2 + p_3 \varepsilon_3) = \\ &= \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + \mu (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) = \\ &= \frac{1}{2} \kappa \Delta^2 + \frac{1}{3} \mu \{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Это показывает, что для того, чтобы потенциальная энергия в недеформированном состоянии была минимальной,  $\kappa$  и  $\mu$  должны быть положительными. Если бы какая-либо из этих величин была отрицательной, недеформированное состояние оказалось бы неустойчивым.

### 43. Продольные колебания стержней

Направим ось  $x$  вдоль стержня и обозначим через  $x + \xi$  положение в момент времени  $t$  поперечного сечения, занимавшего в невозмущенном состоянии положение  $x$ ; таким образом,  $\xi$  обозначает смещение. Элемент длины



$\delta x$  делается теперь равным  $\delta(x + \xi)$ , или  $(1 + \xi') \delta x$ , где штрих обозначает дифференцирование по  $x$ . Приравнявая последнее выражение величине  $(1 + \varepsilon) \delta x$ , имеем:

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (1)$$

Упругая сила, действующая на поперечное сечение  $\omega$ , равна  $E\varepsilon\omega$ . Производная по времени количества движения элемента объема, заключенного между двумя поперечными сечениями, соответствующими  $x$  и  $x + \delta x$ , равна  $\rho\omega \delta x \ddot{\xi}$ . Приравнявая это выражение разности сил на обоих концах элемента, найдем:

$$\rho\omega \delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \delta \left( E\omega \frac{\partial \xi}{\partial x} \right),$$

или

$$\rho\omega \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial}{\partial x} \left( \omega \frac{\partial \xi}{\partial x} \right). \quad (2)$$

Если сечение стержня постоянное, то выражение (2) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (3)$$

где

$$c^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (4)$$

Следует заметить, что при данном рассмотрении вовсе не обязательно предполагать стержень изотропным; следует только брать соответственное значение модуля Юнга<sup>1)</sup>.

Результат не изменится, если стержень или проволока подвергаются постоянному продольному растяжению, так как по закону Гука напряжение, вызванное растяжением (1), может быть положено на постоянное растяжение, пока предел упругости еще не достигнут.

Как и в § 23, общее решение уравнения (3) есть

$$\xi = f(ct - x) + F(ct + x). \quad (5)$$

<sup>1)</sup> В «аэлотропном» или кристаллическом твердом теле величина  $E$  будет различной для стержней, вырезанных по различным направлениям.

Оно представляет две волны, идущие в противоположных направлениях со скоростью  $c$ , определяемой (4). Пользуясь (14) § 42, скорость  $c$  можно также выразить через эквивалентную длину:

$$c = \sqrt{gL}; \quad (6)$$

это — скорость, приобретаемая телом при свободном падении на землю с высоты  $L/2$ . Численные значения  $c$  для некоторых тел приведены в последнем столбце таблицы на стр. 156.

Затронем лишь вкратце приложения изложенной теории к частным задачам. Наиболее интересные случаи возникнут при переходе к изучению колебаний столба воздуха.

В случае продольных колебаний стержня или проволоки, закрепленных с обоих концов ( $\xi = 0$  при  $x = 0$  и  $x = l$ ), математическая сторона вопроса остается такой же, как и в случае поперечных колебаний струны. Частоты различных нормальных колебаний даются формулой

$$N = \frac{sc}{2l}, \quad (7)$$

где  $s = 1, 2, 3, \dots$ . Результат не изменится и при наличии постоянного натяжения.

В случае свободного стержня условие обращения в нуль напряжений на его концах соответствует требованию  $\xi' = 0$  при  $x = 0$  и при  $x = l$ . Вводя это условие в уравнение (5), находим:

$$F'(ct) = f'(ct), \quad F'(ct + l) = f'(ct - l) \quad (8)$$

для всех значений  $t$ . Интегрирование первого из этих уравнений дает:

$$F(ct) = f(ct), \quad (9)$$

при этом здесь не нужно писать в явном виде постоянную интегрирования, так как ее можно включить в  $f(ct)$ . Тогда второе уравнение дает:

$$f(ct + l) = f(ct - l) + C. \quad (10)$$

Постоянная  $C$  связана с общим количеством движения стержня в направлении его оси. Из (9) и (10) имеем:

$$\int_0^l \xi dx = c \int_0^l \{f'(ct - x) + f'(ct + x)\} dx = cC. \quad (11)$$

Так как интересующее нас движение не изменится существенно при наложении любой постоянной скорости в направлении оси стержня, то можно считать, что центр массы находится в покое и, следовательно,  $C = 0$ . Формула (10) показывает, что в этом случае движение периодически, так как процесс повторяется при увеличении  $t$  на  $2l/c$ .

При аналитическом рассмотрении нормальных колебаний примем, что  $\xi$  зависит от времени по закону  $\cos(nt + \varepsilon)$ , откуда

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{n^2}{c^2} \xi = 0 \quad (12)$$

и

$$\xi = \left( A \cos \frac{nx}{c} + B \sin \frac{nx}{c} \right) \cos(nt + \varepsilon). \quad (13)$$

Из условия  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$  при  $x = 0$  и  $x = l$  следует, что  $B = 0$

и  $\sin \frac{nl}{c} = 0$ , откуда

$$\frac{nl}{c} = s\pi, \quad (14)$$

где  $s = 0, 1, 2, 3, \dots$ , что дает гармонический ряд для периодов. Узлы ( $\xi = 0$ ) определяются из условия  $\cos \frac{s\pi x}{l} = 0$ , а пучности или места нулевого напряжения — из условия  $\sin \frac{s\pi x}{l} = 0$ . При колебаниях самой низкой частоты ( $s = 1$ ) узел находится в середине стержня<sup>1)</sup>.

Согласно с изложенным в §§ 16, 32 наиболее общее решение для свободных собственных колебаний стержня может быть написано в виде ряда

$$\xi = \sum \left( A_s \cos \frac{s\pi ct}{l} + B_s \sin \frac{s\pi ct}{l} \right) \cos \frac{s\pi x}{l}, \quad (15)$$

<sup>1)</sup> Случай  $s = 0$  требует, строго говоря, отдельного рассмотрения. Он приводит к решению  $\xi = A_0(1 + at)$ , что можно истолковать как колебание бесконечно большого периода. Если центр масс находится в покое, то  $A_0 = 0$ .

где  $s = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Таким образом, если в начальный момент стержень находился в покое и был деформирован по закону

$$\xi = f(x) \quad [t = 0], \quad (16)$$

то  $B_s = 0$ , и, следовательно, коэффициенты  $A_s$  могут быть определены так, что

$$f(x) = \sum A_s \cos \frac{s\pi x}{l} \quad (17)$$

в интервале значений  $x$  от 0 до  $l$ . Это тот самый результат, о котором мы говорили уже заранее в § 33.

Продольные колебания стержней или проволоки почти не находят важных практических применений, за исключением некоторых примитивных видов телефона. Что касается стержней, то у них высота тона продольных колебаний очень высока по сравнению с высотой тона поперечных колебаний; при этом очень трудно избежать появления поперечных колебаний при возбуждении продольных. Далее, если сравнить частоты продольных колебаний натянутой струны с частотами соответственных поперечных колебаний, то отношение будет таким же, как отношение скоростей волн,

т. е.  $\frac{\sqrt{E/\rho}}{\sqrt{P/\rho\omega}}$ , где  $P$ —постоянное натяжение. Если  $\varepsilon_0$ —относительное удлинение, вызванное силой  $P$ , то  $P = E\varepsilon_0\omega$  и отношение скоростей равно  $1/\sqrt{\varepsilon_0}$ —весьма большой величине<sup>1)</sup>. Продольные колебания можно возбуждать на монохорде, проводя вдоль струны кусочком кожи, натертым канифолью. Получаемая нота очень высока.

В изложенной выше теории предполагалось, что растяжение и соответственное напряжение в любой момент одинаковы по всему поперечному сечению; другими словами, мы предполагали, что боковое сжатие устанавливается мгновенно по всей толщине. Это не вполне точно, так как существует определенная инерция поперечного движения, но ошибка эта незначительна, пока длина волны велика по сравнению с диаметром.

<sup>1)</sup> Это сравнение принадлежит Пуассону (1828).

Для нормальных колебаний очень высоких порядков поправка может стать заметной, однако эти порядки обычно не имеют значения в акустике. Эта поправка была исследована Рэлеем.

#### 44. Плоские волны в упругой среде

Теория плоских волн в неограниченной изотропной упругой среде настолько сходна с теорией продольных волн в стержне, что на ней достаточно остановиться лишь вкратце. Предполагается, что в любой момент времени картина одинакова во всех плоскостях, перпендикулярных к направлению распространения волн ( $x$ ).

Такие волны могут быть двух видов: «волны сжатия» («продольные волны») и «волны искажения» («поперечные волны»). В первом случае смещение происходит в направлении распространения волн. Обозначая смещение через  $\xi$  и пользуясь принятыми в § 42 обозначениями, имеем:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = 0$$

и, следовательно,

$$p_1 = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_1 = \left( \kappa + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (1)$$

Рассматривая среду, заключенную в участке слоя толщиной  $\delta x$  единичного сечения, имеем:

$$\rho \delta x \cdot \ddot{\xi} = \delta p_1,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где

$$a^2 = \left( \kappa + \frac{4}{3} \mu \right) / \rho. \quad (3)$$

Некоторые численные значения скорости распространения волн  $a$  даются в приведенной ниже таблице. Отметим, что эти величины во всех случаях больше соответственных значений  $c$ . Этого и следовало ожидать, ибо потенциальная энергия, соответствующая растяжению  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ , в данном

случае больше ввиду того, что здесь отсутствует боковая податливость.

Во втором типе волн смещение происходит перпендикулярно к направлению распространения волн. Движение можно разложить на две компоненты, направленные соответственно по осям  $y$  и  $z$ ; соответственные две волны можно рассматривать отдельно. Рассматривая первую компоненту ( $\eta$ ), видим, что деформация в любой точке представляет собой сдвиг, величина которого равна  $\partial\eta/\partial x$ . Возникающее напряжение в любой плоскости, перпендикулярной к  $Ox$ , действует в направлении, параллельном  $Oy$ , и его величина равна  $\mu\partial\eta/\partial x$ . Следовательно, уравнение движения соответственного участка среды имеет вид

$$\rho \delta x \cdot \ddot{\eta} = \delta(\mu\eta'),$$

или

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad (4)$$

где

$$b^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (5)$$

Некоторые численные значения скорости распространения  $b$  также приведены в таблице.

Скорости распространения волн  
(в метрах в секунду)

	$a$	$b$	$c$
Сталь . . . . .	$6,11 \cdot 10^3$	$3,23 \cdot 10^3$	$5,22 \cdot 10^3$
Железо . . . . .	$5,68 \cdot 10^3$	$3,16 \cdot 10^3$	$5,06 \cdot 10^3$
Чугун . . . . .	$4,81 \cdot 10^3$	$2,71 \cdot 10^3$	$4,32 \cdot 10^3$
Медь . . . . .	$5,08 \cdot 10^3$	$2,25 \cdot 10^3$	$3,74 \cdot 10^3$
Стекло (1) . . . . .	$5,00 \cdot 10^3$	$2,86 \cdot 10^3$	$4,53 \cdot 10^3$
Стекло (2) . . . . .	$4,74 \cdot 10^3$	$2,83 \cdot 10^3$	$4,42 \cdot 10^3$

Можно показать, что любое местное возмущение в неограниченной упругой среде разбивается на две волны, расходящиеся со скоростями  $a$  и  $b$  и принимающие в ко-

нечном счете характер «продольной» и «поперечной» волны соответственно. Теория волн в твердом теле имеет с исторической точки зрения важное значение для оптики. Однако в интересующих нас теперь вопросах, делая выводы относительно распространения волн в ограниченных твердых телах, нужно быть очень осторожными. Мы уже видели, что в цилиндрическом или призматическом стержне скорость распространения продольных волн заметно отличается от  $a$ ; теория же изгибных колебаний, о которых сейчас пойдет речь, приводит к совсем иным результатам. В этих случаях, конечно, нужно было ожидать изменений, поскольку длина волны была велика по сравнению с размерами поперечного сечения. Но даже если взять другой крайний случай, когда все размеры тела велики по сравнению с длиной волны, то и тогда условия распространения могут резко измениться в результате наличия свободной границы. Появляются волны нового типа, названные по имени открывшего их ученого «волнами Рэлея» (1885). При некоторых условиях эти волны могут стать преобладающими, с точки зрения возможности их наблюдения. Это—поверхностные волны, в которых возмущение проникает лишь на сравнительно небольшую глубину. Скорость их распространения несколько меньше, чем скорость поперечных волн; например, для несжимаемых твердых тел она равна  $0,9554 b$ ; в предположении, принятом Пуассоном ( $\delta = \frac{1}{4}$ ), эта скорость равна  $0,9194 b$ . В настоящее время при наблюдении сейсмических колебаний, вызванных отдаленными землетрясениями, часто удается различить три фазы возмущения. Первую фазу истолковывают как приход в данную точку продольных волн, распространяющихся прямо в толще земли; вторую—как приход поперечных волн, также распространяющихся непосредственно через землю; третью фазу рассматривают как приход рэлеевской волны, распространявшейся вдоль поверхности земли и поэтому запаздывающей больше, чем на время, определяемое разницей в скоростях распространения волн<sup>1)</sup>. Волны Рэлея, распространяясь вдоль поверхности, ослабляются в меньшей степени, чем волны двух предшествующих

<sup>1)</sup> R. D. Oldham, Phil. Trans. A, 1900.

типов, расходящиеся во всех трех направлениях. На основе определения скорости различных волн, по данным систематических наблюдений, делались попытки оценки объемной и сдвиговой упругости веществ, образующих толщу Земли<sup>1)</sup>.

#### 45. Изгибные колебания стержня

Переходим к рассмотрению поперечных колебаний прямого стержня. Чтобы избежать ненужных усложнений, предположим, что стержень имеет продольную плоскость симметрии и что изгибание происходит параллельно этой плоскости. Кроме того, пока предположим также, что суммарное продольное напряжение в любом поперечном сечении равно нулю. Таким образом, напряжения в любом поперечном сечении сводятся к результирующей поперечной «перерезывающей силе»  $F$  и паре сил или «изгибающему моменту»  $M$ . Сила и момент будут функциями от продольной координаты  $x$ . Если через  $\eta$  обозначить поперечное смещение, происходящее параллельно плоскости симметрии, то, беря поперечную проекцию силы, действующей на элемент длины  $\delta x$ , найдем:

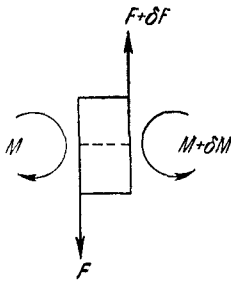


Рис. 42.

$$\rho \omega \delta x \cdot \ddot{\eta} = \delta F$$

или

$$\rho \omega \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (1)$$

Теперь обозначим через  $\omega$  радиус инерции поперечного сечения стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения перпендикулярно к плоскости изгибания. В качестве элемента массы примем слой с площадью  $\omega$  и толщиной  $\delta x$ ; его момент инерции

<sup>1)</sup> А. Е. Н. L o v e, Phil. Trans. A, т. CCVII, стр. 215 (1908)



будет равен  $\rho\omega \delta x \cdot \kappa^2$ <sup>1)</sup>. Малый угол поворота слоя по отношению к положению его равновесия равен  $\partial\eta/\partial x$ ; значит, уравнение для вращения будет иметь вид

$$\rho\omega \delta x \cdot \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial\eta}{\partial x} \right) = \delta M + F \delta x,$$

откуда

$$\rho\omega \kappa^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x} + F. \quad (2)$$

Исключая  $F$  из (1) и (2), найдем:

$$\rho\omega \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \kappa^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial t^2} \right) = - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}, \quad (3)$$

при условии, что площадь  $\omega$  поперечного сечения стержня постоянна.

Теперь выразим  $M$  через величину деформации стержня. Рассмотрим сначала случай равномерного изгиба стержня, когда его ось образует дугу окружности. Из условия симметрии очевидно, что перерезывающая сила  $F$  в этом случае равна нулю; далее ясно и без расчета, что деформация в каждой точке поперечного сечения будет пропорциональна кривизне. Отсюда по закону Гука заключаем, что равнодействующая пара сил  $M$  также будет пропорциональна кривизне, т. е.

$$M = \frac{B}{R}, \quad (4)$$

где  $R$ —радиус кривизны, а  $B$ —постоянная, зависящая от формы и размера поперечного сечения и от упругих свойств материала стержня.

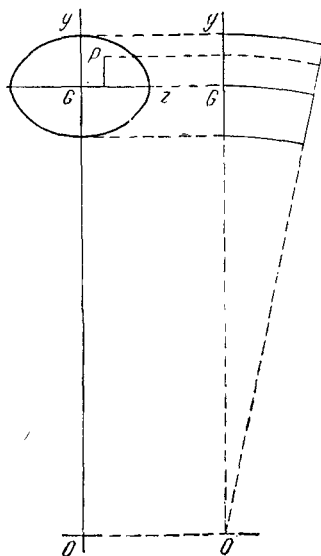


Рис. 43.

<sup>1)</sup> Знак  $\kappa$  в прежнем смысле как упругая константа сейчас не требуется.

Величину  $B$  найдем следующим образом. В плоскости поперечного сечения возьмем прямоугольную систему координат  $(y, z)$  с началом в центре тяжести  $G$  сечения и осью  $z$ , перпендикулярной к плоскости изгиба. Считая, что ось стержня, т. е. линия, проходящая через центры сечений, остается нерастянутой, и обозначая через  $R$  радиус окружности, образованной этой линией, видим, что длина продольного линейного элемента длины, отстоящего от плоскости  $x, z$  на расстоянии  $y$ , изменяется в отношении  $(R+y)/R$ , так что удлинение оказывается равным  $y/R$ . Соответствующее напряжение оказывается равным  $Ey/R$ , где  $E$ —модуль Юнга. Суммарное продольное напряжение обратится в нуль:  $\frac{E}{R} \int \int y dy dz = 0$ ; это подтверждает справедливость сделанного предположения о неизменности длины оси стержня. Изгибающий момент найдется как момент относительно оси  $Gz$ ,

$$M = \frac{E}{R} \int \int y^2 dy dz = \frac{E\omega\kappa^2}{R}. \quad (5)$$

За исключением частного случая статического изгиба стержня в дугу постоянной кривизны, всегда будут возникать перерезывающие силы между соседними сечениями, а также появится искривление сечений, так что их уже нельзя будет считать в точности плоскими. О точном исследовании здесь не может быть и речи, однако с достаточной уверенностью можно утверждать, что возникающие при этом дополнительные деформации, как правило, малы по сравнению с деформациями, которые учитывались в вышеприведенных расчетах. Поэтому мы будем считать формулу (5) достаточно точной для всех случаев, если в качестве  $R$  брать радиус кривизны в рассматриваемой точке.

Так как мы приняли, что  $\partial\eta/\partial x$  мало, то можем положить  $R^{-1} = \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$ , и, следовательно,

$$M = E\omega\kappa^2 \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Подставляя в (3), получаем:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \kappa^2 \frac{\partial^4\eta}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{E\kappa^2}{\rho} \frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} = 0. \quad (7)$$

Как мы сейчас увидим, для большинства задач это уравнение можно упростить, опуская второй член.

Кинетическая энергия стержня равна

$$T = \frac{1}{2} \rho \omega \int \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \rho \omega \kappa^2 \int \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} \right)^2 dx. \quad (8)$$

Второй член, представляющий собой энергию вращения элементов, обычно пренебрежимо мал.

Потенциальная энергия определяется в соответствии с (16) § 42 путем интегрирования выражения  $\frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{E y^2}{R^2}$  сначала по площади поперечного сечения, а затем по длине; таким образом,

$$V = \frac{1}{2} E \omega \kappa^2 \int \frac{dx}{R^2}. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь распространение волны синусоидального профиля вдоль бесконечного стержня, полагая

$$\eta = C \cos k(ct - x). \quad (10)$$

Поскольку картина повторяется с пространственным периодом  $2\pi/k$ , длина волны связана с величиной  $k$  соотношением

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (11)$$

Подстановкой убеждаемся, что (10) является решением уравнения (7) при условии

$$c^2 = \frac{k^2 \kappa^2}{1 + k^2 \kappa^2} \cdot \frac{E}{\rho}. \quad (12)$$

Это соотношение дает скорость  $c$  распространения волны; эта скорость не является постоянной величиной, определяемой только самим стержнем, но зависит еще и от длины волны. Для того чтобы проследить распространение волны любого иного типа, чем (10), необходимо было бы разложить заданный профиль волны на синусоидальные компоненты (по  $x$ ). Каждая из них распространялась бы со своей собственной скоростью, так что результирующий профиль волны все время изменялся бы. По этой причине бесполезно было бы искать

для уравнения (7) или хотя бы для упрощенного уравнения (13) (см. ниже) такое же простое общее решение, как для струны (§ 23) или для продольных колебаний стержней.

Заметим, далее, что при подстановке (10) в (7) второй член по сравнению с первым будет порядка  $k^2\kappa^2$ . Эта величина очень мала, если длина волны велика по сравнению с размерами поперечного сечения. Значит, этим членом, связанным с учетом инерции вращения элементов стержня (см. уравнение (2)), можно пренебречь. Легко видеть, а также можно проверить а posteriori, что это упрощение законно и при рассмотрении колебаний ограниченных стержней, во всяком случае пока расстояние между смежными узлами остается большим по сравнению с  $\kappa$ . В соответствии с этим мы берем за основу дальнейшего рассмотрения упрощенное уравнение

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{E\kappa^2}{\rho} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = 0 \quad (13)$$

и упрощенные формулы

$$M = E\omega\kappa^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad F = -\frac{\partial M}{\partial x} = -E\omega\kappa^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}. \quad (14)$$

#### 46. Свободно-свободный стержень

Для нахождения нормальных колебаний ограниченного стержня предположим, как обычно, что  $\eta$  изменяется пропорционально  $\cos(nt + \epsilon)$ . Тогда уравнение (13) предыдущего параграфа примет вид

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = m^4 \eta, \quad (1)$$

где

$$m^4 = \frac{n^2 \rho}{\kappa^2 E}. \quad (2)$$

Следует отметить, что  $m$  имеет размерность, обратную длине. Решение уравнения (1) имеет вид

$$\eta = A \operatorname{ch} mx + B \operatorname{sh} mx + C \cos mx + D \sin mx; \quad (3)$$

здесь опущен временной множитель. Три отношения  $A : B : C : D$  и допустимые значения  $m$  (и, следовательно-

но,  $n^2$ ) определяются четырьмя граничными условиями на концах стержня (по два условия для каждого конца).

Начнем со случая свободно-свободного стержня (стержня, свободного с обоих концов); обозначим его длину через  $l$ . Возьмем начало координат в середине стержня<sup>1)</sup>; согласно § 45 (14) граничные условия будут иметь вид

$$\eta'' = 0, \quad \eta''' = 0 \quad \left[ x = \pm \frac{1}{2} l \right]. \quad (4)$$

Нормальные колебания естественно распадаются на две группы: для первой группы  $\eta$  — четная функция  $x$ , для второй — нечетная. Для симметричных колебаний полагаем:

$$\eta = A \operatorname{ch} mx + C \cos mx. \quad (5)$$

Граничные условия примут вид

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ch} \frac{1}{2} ml - C \cos \frac{1}{2} ml &= 0, \\ A \operatorname{sh} \frac{1}{2} ml + C \sin \frac{1}{2} ml &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

откуда

$$\operatorname{th} \frac{1}{2} ml = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} ml. \quad (7)$$

Корни этого уравнения легко найти приближенно графическим способом как абсциссы пересечения кривых  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = -\operatorname{th} x$ ; последняя из них приближается асимптотически к прямой  $y = -1$ . Рис. 44 показывает, что приближенно выполняется соотношение

$$\frac{1}{2} ml = \left( s - \frac{1}{4} \right) \pi + \alpha_s, \quad (8)$$

где  $s = 1, 2, 3, \dots$ , а  $\alpha_s$  — малая величина. Из (2) следует, что частоты последовательных нормальных колебаний симметричного типа приблизительно пропорциональны  $3^2, 7^2, 11^2, \dots$ . Для более точного вычисления корней

<sup>1)</sup> Это усовершенствование обычного рассмотрения введено А. Г. Гринхиллом (A. G. Greenhill, *Mess. of Math.*, т. XVI, стр. 115 (1886)).

следует воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg} \alpha_s = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} ml + 1}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} ml} = \frac{1 - \operatorname{th} \frac{1}{2} ml}{1 + \operatorname{th} \frac{1}{2} ml} = e^{-ml} = \zeta_s e^{-2\alpha_s}, \quad (9)$$

где

$$\zeta_s = e^{-2s\pi + \frac{1}{2}\pi}. \quad (10)$$

Отсюда

$$\alpha_s = \operatorname{arctg} (\zeta_s e^{-2\alpha_s}) = \zeta_s e^{-2\alpha_s} - \frac{1}{3} \zeta_s^3 e^{-6\alpha_s} + \dots \quad (11)$$

Поскольку  $\zeta_s$  — малая величина даже для  $s=1$  ( $\zeta_1 = 0,00898$ ), это уравнение легко решается методом последовательных приближений.

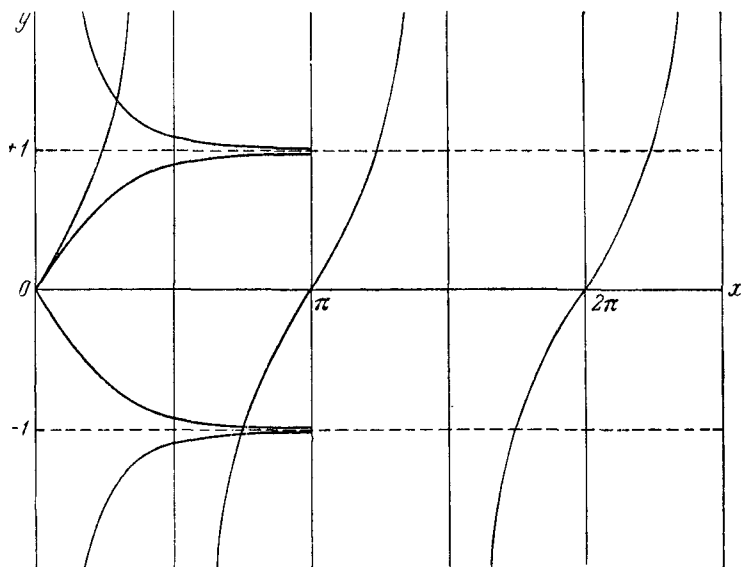


Рис. 44.

Для антисимметричных нормальных колебаний имеем:

$$\eta = B \operatorname{sh} mx + D \sin mx \quad (12)$$

при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} B \operatorname{sh} \frac{1}{2} ml - D \sin \frac{1}{2} ml &= 0, \\ B \operatorname{ch} \frac{1}{2} ml - D \cos \frac{1}{2} ml &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

откуда

$$\operatorname{th} \frac{1}{2} ml = \operatorname{tg} \frac{1}{2} ml. \quad (14)$$

Корни этого уравнения даются абсциссами точек пересечения кривых  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{th} x$ , последняя из которых асимптотически стремится к прямой  $y = 1$ . Из рис. 44 заключаем, что

$$\frac{1}{2} ml = \left( s + \frac{1}{4} \right) \pi - \beta_s, \quad (15)$$

где  $s = 1, 2, 3, \dots$ , а  $\beta_s$  — малая величина. Соответственные частоты колебаний приблизительно пропорциональны  $5^2, 9^2, 13^2, \dots$ . Для более точного вычисления частот следует воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg} \beta_s = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} ml}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} ml} = \frac{1 - \operatorname{th} \frac{1}{2} ml}{1 + \operatorname{th} \frac{1}{2} ml} = e^{-ml} = \zeta_s e^{2\beta_s}, \quad (16)$$

где

159

$$\zeta_s = e^{-2s\pi - \frac{1}{2}\pi}. \quad (17)$$

Отсюда

$$\beta_s = \operatorname{arctg} (\zeta_s e^{2\beta_s}) = \zeta_s e^{2\beta_s} - \frac{1}{3} \zeta_s^3 e^{-6\beta_s} + \dots \quad (18)$$

Поскольку  $\zeta_s = 0,00039$ , ряд сходится очень быстро даже для  $s=1$ .

Объединяя результаты, полученные для обоих типов колебаний, находим:

$$\frac{ml}{\pi} = 1,50562; 2,49975; 3,50001; \dots; \quad (19)$$

здесь значения для симметричных и антисимметричных типов чередуются. Для последующих номеров можно с достаточной точностью принимать значения  $s + \frac{1}{2}$ .

Тот факт, что частоты приблизительно пропорциональны  $3^2, 5^2, 7^2, \dots$ , был установлен Хладни <sup>1)</sup> чисто экспериментальным путем.

Для нахождения формы, принимаемой стержнем при том или другом нормальном колебании, необходимо знать отношения произвольных постоянных, определяемые формулами (6) или (13). Для симметричных нормальных колебаний найдем:

$$\eta = C \left( \cos \frac{1}{2} ml \operatorname{ch} mx + \operatorname{ch} \frac{1}{2} ml \cos mx \right) \cos (nt + \varepsilon), \quad (20)$$

где  $m$  — корень уравнения (7). Кривую можно построить, пользуясь таблицами гиперболических функций; узлы

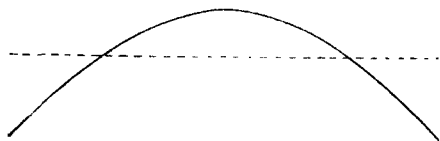


Рис. 45.

найдутся при помощи интерполяции. Форма, принимаемая стержнем при наименьшей частоте колебаний, показана на рис. 45. Узлы находятся здесь на расстоянии 0,224 длины стержня, считая от его концов.

Соответствующая формула для несимметричных нормальных колебаний имеет вид

$$\eta = C \left( \sin \frac{1}{2} ml \operatorname{sh} mx + \operatorname{sh} \frac{1}{2} ml \sin mx \right) \cos (nt + \varepsilon), \quad (21)$$

где  $m$  определяется из (14).

#### 47. Закрепленно-свободный стержень

Следующий наиболее интересный случай — это стержень, закрепленный у одного конца и свободный у другого конца. Здесь также удобно взять начало координат в се-

<sup>1)</sup> Е. Ф. F. Chladni, родился в Виттенберге в 1756 г., умер в Бреслау в 1827 г. Известен своими экспериментальными исследованиями в акустике, которые изложены в его книге «Die Akustik», Leipzig, 1802.



редине стержня<sup>1)</sup>. Условия на концах стержня в таком случае будут:

$$\eta = 0, \quad \eta' = 0 \left[ x = -\frac{1}{2} l \right] \quad (1)$$

для закрепленного конца и

$$\eta'' = 0, \quad \eta''' = 0 \left[ x = \frac{1}{2} l \right] \quad (2)$$

для свободного конца. Для одной группы нормальных колебаний имеем:

$$\eta = A \operatorname{ch} mx + D \sin mx \quad (3)$$

при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ch} \frac{1}{2} ml - D \sin \frac{1}{2} ml &= 0, \\ -A \operatorname{sh} \frac{1}{2} ml + D \cos \frac{1}{2} ml &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

откуда

$$\operatorname{cth} \frac{1}{2} ml = \operatorname{tg} \frac{1}{2} ml. \quad (5)$$

Это уравнение решается графическим способом, нахождением пересечений кривых  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{cth} x$ ; вторая из них приближается асимптотически к прямой  $y = 1$  (см. рис. 44). Приближенное решение имеет вид

$$\frac{1}{2} ml = \left( s + \frac{1}{4} \right) \pi + \alpha'_s, \quad (6)$$

где  $s = 0, 1, 2, 3, \dots$ , а  $\alpha'_s$  — малая величина, удовлетворяющая соотношению

$$\operatorname{tg} \alpha'_s = \zeta_s e^{-2\alpha'_s}, \quad (7)$$

где

$$\zeta_s = e^{-2s\pi - \frac{1}{2}\pi}, \quad (8)$$

откуда

$$\alpha'_s = \zeta_s e^{-2\alpha'_s} - \frac{1}{3} \zeta_s^3 e^{-6\alpha'_s} + \dots \quad (9)$$

<sup>1)</sup> Гринхилл, цит. выше.

Это уравнение можно легко решить посредством последовательных приближений, за исключением случая первого корня ( $s=0$ ). Для этого случая необходимы особые методы решения<sup>1)</sup>. При нормальных колебаниях другого типа имеем:

$$\eta = B \operatorname{sh} mx + C \cos mx \quad (10)$$

при

$$\left. \begin{aligned} -B \operatorname{sh} \frac{1}{2} ml + C \cos \frac{1}{2} ml &= 0, \\ B \operatorname{ch} \frac{1}{2} ml + C \sin \frac{1}{2} ml &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

откуда

$$\operatorname{cth} \frac{1}{2} ml = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} ml. \quad (12)$$

Пересечение кривых  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = -\operatorname{cth} x$  также показано на рис. 44. Корни уравнения (12) даются формулой

$$\frac{1}{2} ml = \left( s - \frac{1}{4} \right) \pi - \beta'_s, \quad (13)$$

где  $s = 1, 2, 3, \dots$ , причем

$$\operatorname{tg} \beta'_s = \zeta_s e^{2\beta'_s}, \quad (14)$$

где

$$\zeta_s = e^{-2s\pi + \frac{1}{2}\pi}, \quad (15)$$

и, следовательно,

$$\beta'_s = \zeta_s e^{2\beta'_s} - \frac{1}{3} \zeta_s^3 e^{6\beta'_s} + \dots \quad (16)$$

Частоты всего ряда нормальных колебаний, следующего за первым нормальным колебанием, приблизительно пропорциональны  $3^2, 5^2, 7^2, \dots$ , как это было найдено экспериментальным путем Хладни. С точностью до пятого знака имеем:

$$\frac{ml}{\pi} = 0,59686; 1,49418; 2,50025; \dots \quad (17)$$

<sup>1)</sup> Один такой метод будет указан позднее при рассмотрении радиальных колебаний воздуха в сферическом сосуде (§ 84). Другой очень эффективный метод излагается в «Теории звука» Рэлея.

В следующих за первым нормальных колебаниях имеются соответственно один, два, три, ... внутренних узла. На рис. 46 показано наинизшее нормальное колебание.

Изменяя условия на концах, можно прийти к другим задачам, которые, однако, оказываются менее интересными. Мы рассмотрим только один случай, когда оба

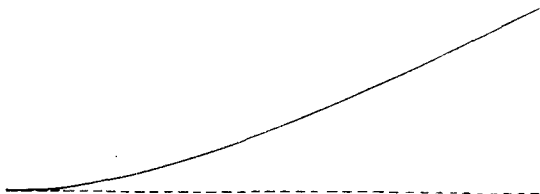


Рис. 46.

конца «подперты», т. е. положения их зафиксированы, но моменты на концах равны нулю. В этом случае граничные условия согласно (14) § 45 будут иметь вид

$$\eta = 0, \quad \eta'' = 0 \left[ x = \pm \frac{1}{2}l \right]. \quad (18)$$

Для симметричных нормальных колебаний имеем:

$$\eta = C \cos mx \cdot \cos (nt + \epsilon) \quad (19)$$

при условии  $\cos \frac{1}{2}ml = 0$ , откуда

$$\frac{ml}{\pi} = 1, 3, 5, \dots \quad (20)$$

Для антисимметричных нормальных колебаний

$$\eta = C \sin mx \cdot \cos (nt + \epsilon), \quad (21)$$

при условии

$$\frac{ml}{\pi} = 2, 4, 6, \dots \quad (22)$$

Согласно (2) § 46 частоты пропорциональны величинам  $m^2$ , и, следовательно, квадратам чисел натурального ряда.

Основы теории поперечных колебаний стержней были заложены Д. Бернулли (1735) и Эйлером (1740). Послед-

ний дал также численное решение уравнения частот для нескольких наиболее важных случаев. Позднее расчеты (включая определение узлов и т. д.) были значительно расширены Лиссажу (1850), Зеебеком<sup>1)</sup> (1848) и Рэлеем.

#### 48. Сводка результатов. Вынужденные колебания

Во всех приведенных выше случаях, для любого заданного нормального колебания,  $m$  оказывалось обратно пропорциональным  $l$ . Следовательно, согласно (2) § 46 период  $2\pi/n$  для стержней из одного и того же материала пропорционален  $l^2/\kappa$ . Отсюда следует, что для геометрически подобных стержней период пропорционален линейным размерам стержня. Для стержней одинакового сечения период пропорционален квадрату длины. Что касается формы и размеров поперечного сечения, то здесь все зависит от радиуса инерции  $\kappa$ . Так, для стержней с прямоугольным сечением частота пропорциональна толщине стержня в плоскости колебаний и не зависит от ширины сечения. Это последнее утверждение требует, однако, некоторых оговорок. Подразумевается, что ширина стержня мала по сравнению с его длиной, или (более точно) по сравнению с расстоянием между смежными узлами. Если это условие нарушено, то вся проблема приводит к более сложной теории *пластинок* (§ 55).

Интересно сравнить частоты поперечных и продольных колебаний стержней в соответствующих друг другу случаях. Для стержня, свободного с обеих сторон, самая низкая частота поперечных колебаний дается формулой

$$n^2 = \frac{\kappa^2 E}{\rho l^4} (ml)^4 = \frac{\pi^4 \kappa^2 E}{\rho l^4} (1,50562)^4, \quad (1)$$

в то время как в наименьшем продольном нормальном колебании

$$n'^2 = \frac{\pi^2 E}{\rho l^2}. \quad (2)$$

Отсюда находим:

$$\frac{n}{n'} = 7,122 \frac{\kappa}{l}. \quad (3)$$

<sup>1)</sup> L. F. W. A. Seebeck (1805—1849), профессор физики в Лейпциге.

Этим объясняется относительная медленность поперечных колебаний. Это сравнение проведено Пуассоном.

Мы опустим вопрос определения движения по произвольным начальным условиям при помощи нормальных функций. Для свободно-свободного стержня, например, эти нормальные функции даются выражениями в скобках в формулах (20) и (21) § 46.

Теория вынужденных колебаний стержней представляет мало интереса непосредственно для акустики, хотя она имеет некоторое практическое значение. В качестве простого примера можно взять соединительную тягу, связывающую колеса локомотива. Рассматривая только вертикальную компоненту движения и полагая стержень однородным, мы придем к уравнению (13) § 45 при граничных условиях

$$\eta = \beta \cos (pt + \alpha), \quad \eta'' = 0 \left[ x = \pm \frac{1}{2} l \right], \quad (4)$$

где  $p$  — угловая скорость колес, а  $\beta$  — вертикальная амплитуда. Вынужденные колебания будут, очевидно, симметричного типа, и поэтому можно положить:

$$\eta = (A \operatorname{ch} mx + C \cos mx) \cos (pt + \alpha). \quad (5)$$

Это удовлетворяет дифференциальному уравнению при условии, что

$$m^4 = \frac{p^2 \rho}{\kappa^2 E}. \quad (6)$$

Граничные условия дают:

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ch} \frac{1}{2} ml + C \cos \frac{1}{2} ml &= \beta, \\ A \operatorname{ch} \frac{1}{2} ml - C \cos \frac{1}{2} ml &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь последнее уравнение выражает отсутствие изгибающих моментов на концах стержня ( $\eta'' = 0$ ). Отсюда

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\beta}{2 \operatorname{ch} \frac{1}{2} ml}, \\ C &= \frac{\beta}{2 \cos \frac{1}{2} ml}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Колебания достигли бы опасной амплитуды, если бы значение  $\cos \frac{1}{2} ml$  было очень мало, т. е. если бы частота вынуждающей силы ( $p/2\pi$ ) приближалась к частоте симметричных свободных колебаний стержня, подпертого на концах ((20) § 47).

#### 49. Применения колеблющихся стержней

Использование поперечных колебаний стержней в музыке ограничено тем, что обертоны не образуют гармонического ряда по отношению к основному тону. При ударе мягким молотком по свободному плоскому стержню, подпертому в узлах основного колебания (см. рис. 45), образование обертонов до известной степени уменьшено; по этому принципу был построен ряд музыкальных инструментов (например, «glass harmonica», стеклянный гармонидум).

Наиболее важное применение поперечных колебаний находим в камертоне. Как теория, так и опыт показывают, что в согнутом стержне частота основного колебания уменьшается по сравнению с прямым стержнем, а узлы приближаются к середине стержня. Хладни нашел, что в стержне, которому придана вытянутая U-образная форма, узлы находятся очень близко к месту сгиба. Амплитуда колебаний в центре сгиба будет поэтому мала по сравнению с амплитудой на концах ножек. Форма колебаний несколько нарушается наличием рукоятки, однако утечка энергии через нее происходит сравнительно медленно, так что колебания длятся довольно долго. Камертон можно уподобить паре стержней, каждый из которых закреплен у одного конца. Тогда для вычисления частоты теоретическим путем можно использовать формулу (2) § 46, полагая  $\frac{ml}{\pi} = 0,59686$ . Если бы эта аналогия была полной, то указанная выше утечка энергии отсутствовала бы, конечно, *полностью*.

Колебания массивных камертонов вызывают обычно при помощи виолончельного смычка, прикладываемого к одной из ножек вблизи ее свободного конца. Этим способом затрудняют возникновение обертонов с узлами у конца ножки. Основной тон еще более усиливается по сравне-

нию с обертонами при ввинчивании рукоятки в верхнюю крышку резонансного ящика соответственных размеров.

Когда камертон возбужден таким или каким-либо другим способом, то часто случается, что в первый момент получаются колебания, не симметричные относительно средней плоскости. В этом случае колебания можно рассматривать как суперпозицию симметричных и несимметричных компонент. Вообще, они будут иметь немного различающиеся частоты, в результате чего возникнут биения. Но если только рукоятка не закреплена очень жестко, несимметричные колебания быстро исчезают, поскольку они связаны с колебаниями центра масс камертона и поэтому передаются на опору.

Первый обертон значительной интенсивности можно получить, возбуждая смычком одну из ножек камертона вблизи основания; при этом получаем очень пронзительную ноту.

## 50. Влияние постоянного натяжения

В теоретическом рассмотрении § 45 предполагалось, что суммарное продольное натяжение, проинтегрированное по всему поперечному сечению, равно нулю. Легко видеть, что влияние постоянного натяжения  $P$  сводится просто к добавлению члена  $P\eta''$  в уравнение (13) § 45, что дает:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\kappa^2 E}{\rho} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4}, \quad (1)$$

где

$$c_0^2 = \frac{P}{\rho \omega}. \quad (2)$$

Это уравнение было использовано для определения влияния жесткости фортепьянных струн на последовательность собственных частот. Однако вопрос осложняется неопределенностью характера граничных условий: струну, опирающуюся на подставку, нельзя считать в точности ни подпертой, ни закрепленной в точке опоры. Для иллюстрации существа дела будет, пожалуй, достаточно рассмотреть систему волн

$$\eta = C \cos k(ct - x) \quad (3)$$

на неограниченной струне. Подставляя  $\eta$  в уравнение (1), находим:

$$c^2 = c_0^2 + c_1^2, \quad (4)$$

где

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho} k^2 \kappa^2, \quad (5)$$

т. е.  $c_1$  есть скорость распространения поперечных волн длиной  $2\pi/k$  на ненапрянутом стержне. Мы видели, что для струн фортепьяно  $E/\rho$  велико по сравнению с  $c_0^2$ ; с другой стороны,  $\kappa$  обычно составляет чрезвычайно малую долю длины волны. В более низких собственных колебаниях струн доминирующим является натяжение и величина  $(c_1/c_0)^2$  мала. В этом случае жесткость практически не влияет на скорость распространения волн и гармоничность обертонов не нарушается. Лишь для нормальных колебаний очень высоких порядков, когда длина струны разбивается на большое число колеблющихся отрезков, можно ожидать ощутимого влияния жесткости. Как уже отмечалось, возникновению таких колебаний на фортепьянных струнах препятствуют уже по другим причинам. Во всяком случае из уравнения (4) вытекает, что влияние жесткости тем меньше, чем больше величина  $c_0$ , т. е. чем сильнее натянута струна.

### 51. Колебания кольца. Нормальные колебания типа изгиба и типа растяжения

Теория колебаний круглого кольца важна потому, что она бросает свет на некоторые проблемы, которые ввиду трудности точного анализа могут быть рассмотрены в этой книге лишь частично. Так как здесь возникает ряд интересных вопросов, мы рассмотрим эту теорию довольно подробно.

Принимается, что кольцо однородно, а его сечение считается симметричным по отношению к плоскости, перпендикулярной к оси кольца. Мы будем рассматривать только колебания, параллельные этой плоскости. Обозначим через  $u$ ,  $v$  смещения элемента кольца вдоль начального радиуса-вектора элемента и под прямым углом к нему, так что полярные координаты элемента



переходят от значений  $(a, \theta)$  к значениям  $(a+u, \theta + \frac{v}{a})$ .

Нам нужно получить формулы для относительного удлинения и для изменения кривизны. Поскольку предполагается, что смещения малы, мы можем вычислить вклад в эти величины, обусловленный  $u$  и  $v$  в отдельности, а результаты сложить. Радиальное смещение в отдельности изменяет длину элемента от значения  $a \delta\theta$  до значения  $(a+u)\delta\theta$  и, следовательно, вызывает удлинение  $u/a$ . Поперечное смещение, очевидно, дает удлинение  $\partial v/a \partial \theta$ . Таким образом, общее удлинение составит:

$$\frac{1}{a} \left( u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right). \quad (1)$$

Далее, радиальное смещение в отдельности поворачивает нормаль к кривой в отрицательном направлении, так что нормаль образует с радиусом угол  $\partial u/a \partial \theta$ ; следовательно, угол между нормальями на концах элемента  $a \delta\theta$  уменьшится на величину  $\left( \frac{\partial^2 u}{a \partial \theta^2} \right) \delta\theta$ . Разделив угол, образуемый нормальями, на измененную длину  $(a+u)\delta\theta$ , получим измененную кривизну; таким образом,

$$\frac{\left( \delta\theta - \frac{\partial^2 u}{a \partial \theta^2} \delta\theta \right)}{(a+u)\delta\theta} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right).$$

Поскольку поперечное смещение  $v$  в отдельности кривизну не меняет, получаем следующую формулу для увеличения кривизны:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right). \quad (2)$$

Равнодействующая напряжений, действующих в каком-либо поперечном сечении, может быть разложена на радиальную перерезывающую силу  $P$  и тангенциальное натяжение  $Q$ ; кроме того, будет действовать изгибающий момент  $M$ . Аналогично §§ 43, 45 найдем:

$$Q = \frac{E\omega}{a} \left( u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \quad M = -\frac{E\omega\kappa^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right), \quad (3)$$

причем изгибающий момент пропорционален теперь *увеличению* кривизны.

Разлагая силы, действующие на элемент массы  $\rho\omega a \delta\theta$  по направлению радиуса-вектора и перпендикулярно к нему, имеем (рис. 47):

$$\rho\omega a \delta\theta \ddot{u} = \delta P - Q\delta\theta, \quad \rho\omega a \delta\theta \ddot{v} = \delta Q + P\delta\theta.$$

Моменты относительно перпендикуляра к плоскости кольца дадут соотношение

$$\delta M - Pa \delta\theta = 0.$$

Здесь, как и в случае прямого стержня (§ 45), мы пренебрегаем инерцией вращения. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \rho\omega a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial P}{\partial \theta} - Q, \\ \rho\omega a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial Q}{\partial \theta} + P \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

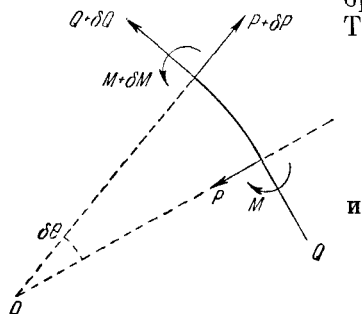


Рис. 47.

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = Pa. \quad (5)$$

Эти формулы вместе с (3) и представляют собой уравнения нашей задачи. Легко видеть, что при  $Q = 0$  уравнениям удовлетворить нельзя, так что любому виду колебаний сопутствует некоторое растяжение. Это легко объяснить тем, что растягивающее напряжение обязательно возникает вследствие инерции различных участков кольца, движущихся в противоположных направлениях. Можно, однако, показать, что при колебаниях типа изгибных, которые скоро будут рассмотрены, соответственные деформации будут малы по сравнению с деформациями, обусловленными изменением кривизны.

Исключая величины  $P$ ,  $Q$  и  $M$  из уравнений (3), (4) и (5), находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{E}{\rho a^2} \left\{ u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\kappa^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} \right) \right\} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho a^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\kappa^2}{a^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} \right) \right\} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для определения нормальных колебаний примем, что  $u$  и  $v$  пропорциональны  $\cos(nt + \varepsilon)$ . Далее, поскольку кольцо образует полный круг,  $u$  и  $v$  являются периодическими функциями  $\theta$  с периодом  $2\pi$  и, согласно теореме Фурье, могут быть разложены в ряд по синусам и косинусам углов, кратных  $\theta$ . Более того, легко показать, что каждый член любого порядка в разложении должен в отдельности удовлетворять каждому уравнению. Действительно, оказывается, что решение можно выбрать в виде

$$u = A \cos s\theta \cdot \cos(nt + \varepsilon), \quad v = B \sin s\theta \cdot \cos(nt + \varepsilon), \quad (7)$$

где  $s$  — целое число или нуль. Это приводит к формулам:

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \beta - 1 - s^2 (s^2 - 1) \frac{\kappa^2}{a^2} \right\} A - sB = 0, \\ & - \left\{ s + s (s^2 - 1) \frac{\kappa^2}{a^2} \right\} A + (\beta - s^2) B = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где

$$\beta = \frac{n^2 a^2 \rho}{E}. \quad (9)$$

Отсюда

$$\beta^2 - \left\{ s^2 + 1 + s^2 (s^2 - 1) \frac{\kappa^2}{a^2} \right\} \beta + s^2 (s^2 - 1)^2 \frac{\kappa^2}{a^2} = 0. \quad (10)$$

Поскольку  $\frac{\kappa}{a}$  мало, то сумма корней этого уравнения, рассматриваемого как квадратное уравнение относительно  $\beta$ , равна приблизительно  $s^2 + 1$ , тогда как произведение корней  $s^2 (s^2 - 1)^2 \frac{\kappa^2}{a^2}$  мало. Следовательно, корни имеют приближенно следующие значения:

$$\beta = s^2 + 1, \quad \beta = \frac{s^2 (s^2 - 1)^2}{s^2 + 1} \frac{\kappa^2}{a^2}. \quad (11)$$

Обращаясь к уравнению (8), видим, что первый корень дает приближенно  $B = sA$ . Соответственные нормальные колебания весьма схожи с продольными колебаниями прямого стержня, поскольку потенциальная энергия обусловлена главным образом растяжением; частоты, определяемые здесь по формуле

$$n^2 = (s^2 + 1) \frac{E}{\rho a^2}, \quad (12)$$

будут при одинаковых размерах величинами одного порядка. Случай  $s=0$  соответствует чисто радиальным колебаниям.

Большее значение имеют колебания, соответствующие второму корню. Из уравнения (8) следует приближенно:  $A + sB = 0$ . Это дает:

$$u = A \cos s\theta \cdot \cos (nt + \varepsilon), \quad v = -\frac{A}{s} \sin s\theta \cdot \cos (nt + \varepsilon), \quad (13)$$

где

$$n^2 = \frac{s^2 (s^2 - 1)^2 E \chi^2}{s^2 + 1 \rho a^4}. \quad (14)$$

Из уравнения (1) следует, что удлинение пренебрежимо мало, а энергия обусловлена преимущественно изгибом. Действительно, частоты оказываются по порядку близкими к частотам поперечных колебаний прямого стержня. Колебание порядка  $s$  имеет  $2s$  узлов, т. е. точек, где радиальное движение исчезает. Однако эти точки не находятся в покое, так как тангенциальное движение достигает в этих точках максимума<sup>1)</sup>. Случай  $s=1$  соответ-

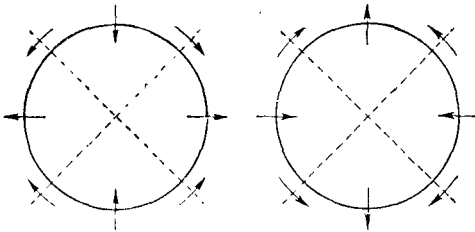


Рис. 48.

ствует просто смещению кольца как целого, без деформации; соответственный период бесконечен. Наиболее важным является случай  $s=2$ , когда кольцо колеблется между двумя крайними положениями, являющимися эллипсами с малым эксцентриситетом. На рис. 48 стрел-

<sup>1)</sup> Это можно проиллюстрировать, если возбудить колебания рюмки, наполненной водой, проведя по ее краю мокрым пальцем. Точка прикосновения является узлом радиальных колебаний, и соответственно с этим рябь на поверхности воды наиболее заметна на расстоянии  $45^\circ$  по обе стороны от точки прикосновения—там, где радиальные колебания наибольшие.

ками обозначены направления движения на различных участках окружности кольца в два момента, отстоящих друг от друга на полпериода и соответствующих прохождению через положение равновесия. Пунктирные линии проходят через узлы радиальных колебаний.

Необходимо отметить еще одно обстоятельство. Благодаря предположенной однородности кольца начало отсчета угла  $\theta$  произвольно, и можно получить другие нормальные колебания тех же частот в результате прибавления к  $\theta$  постоянной. В частности, возможно нормальное изгибное колебание

$$u = A \sin s\theta \cdot \cos (nt + \varepsilon), \quad v = \frac{A}{s} \cos s\theta \cdot \cos (nt + \varepsilon), \quad (15)$$

для которого значение  $n^2$  совпадает с (14). Здесь мы имеем колебания такого типа, о котором говорилось в § 16, когда два различных нормальных колебания имеют одинаковую частоту, а сами колебания при этом становятся не вполне определенными. Это сразу изменилось бы, если кольцо было бы не совсем однородным, например имело бы в каком-нибудь месте утолщение. Тогда нормальные колебания, имеющие в этом месте соответственно узел или пучность радиальных колебаний, несколько изменятся по своему характеру и будут иметь немного измененные частоты. Таким образом, если будут возбуждены оба колебания, то появятся биения между соответственными тонами. Это явление часто наблюдается в звуке колоколов или чашек для ополаскивания пальцев; различие в частотах здесь обусловлено малым нарушением симметрии.

Формулу (14) можно получить более простым путем, если предположить с самого начала, что растяжением можно пренебречь. Тогда из (1) получим:

$$u + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0. \quad (16)$$

Полагая затем

$$u = q \sin s\theta, \quad v = \frac{q}{s} \cos s\theta, \quad (17)$$

найдем для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) a d\theta = \frac{1}{2} \frac{s^2 + 1}{s^2} \pi \rho \omega a q^2. \quad (18)$$

По аналогии с (9) § 46 потенциальная энергия равна

$$V = \frac{1}{2} E\omega\kappa^2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right)^2 a d\theta = \frac{1}{2} (s^2 - 1)^2 \frac{\pi E\omega\kappa^2}{a^3} q^2, \quad (19)$$

откуда, полагая

$$q = C \cos (nt + \varepsilon) \quad (20)$$

и записывая условие постоянства суммарной энергии, снова приходим к (14). Из теории Рэлея (§ 16) следует, что в результате такого пренебрежения частота окажется завышенной.

Колебания кольца в своей собственной плоскости были впервые изучены Р. Хоппом (1871); приведенное выше упрощенное рассмотрение изгибных колебаний было сделано позже Рэлеем. Теория колебаний, перпендикулярных к плоскости кольца, более сложна, так как, кроме изгиба, происходит еще кручение. Эта задача была решена Дж. Г. Мичеллом (1889), который нашел, что в случае кругового поперечного сечения

$$n^2 = \frac{s^2 (s^2 - 1)^2}{s^2 + 1 + \sigma} \cdot \frac{E\kappa^2}{\rho a^4}, \quad (21)$$

где  $\sigma$  — коэффициент Пуассона.

---

## ГЛАВА V

### МЕМБРАНЫ И ПЛАСТИНКИ

#### 52. Уравнение движения мембраны. Энергия

Задача о колебаниях мембран сама по себе не имеет большого значения, и, кроме того, условия, предполагаемые в целях упрощения математического анализа, не легко реализуются в эксперименте. Однако эта теория колебаний двумерных систем сравнительно проста, и выводы ее помогают нам понять в общих чертах характер нормальных колебаний в тех случаях, когда трудности расчета гораздо больше, а иногда и непреодолимы.

Теоретически идеальная мембрана—это такая материальная поверхность, для которой напряжение, приложенное к любому ее линейному элементу, действует всегда в касательной плоскости. Мы будем рассматривать только случаи, когда поверхность мембраны в невозмущенном состоянии представляет собой плоскость и находится под действием равномерного, или «однородного», напряжения,—т. е. предполагается, что напряжения, приложенные к любым двум параллельным и равным отрезкам, одинаковы по направлению и по величине. Далее, будем считать для простоты, что напряжение, приложенное к любому линейному элементу, перпендикулярно к этому элементу. Из рассмотрения сил, действующих на контур треугольной площадки, следует, что напряжение (на единицу длины), как и в гидростатике, одинаково для всех направлений линейного элемента. Это равномерное напряжение и называется «натяжением» мембраны; обозначим его через  $P$ . Его размерность—это сила, деленная на длину, или  $[MT^{-2}]$ .

Расположим прямоугольную систему координат  $x$ ,  $y$  в плоскости невозмущенной мембраны и обозначим через  $\zeta$  смещение в направлении, нормальном к этой плоскости. Предположим, что поверхностная плотность (т. е. масса, приходящаяся на единицу поверхности) одинакова для всей поверхности, и обозначим ее через  $\rho$ . Для того чтобы вывести уравнения движения, рассчитаем силы, действующие на стороны прямоугольного элемента  $\delta x \delta y$  с центром в точке  $(x, y)$ . В смещенном положении наклон поверхности в направлении, параллельном оси  $x$ , равен  $\partial\zeta/\partial x$ , а наклон в направлении, параллельном оси  $y$ , равен  $\partial\zeta/\partial y$ . Следовательно, компонента в направлении нормали к плоскости  $xy$  силы, действующей на отрезок, проходящий через центр элемента параллельно  $\delta y$ , равна  $P \frac{\partial\zeta}{\partial x} \cdot \delta y$ . Соответствующие компоненты силы, действующие на двух сторонах  $\delta y$  прямоугольника, равны

$$\pm P \left\{ \frac{\partial\zeta}{\partial x} \pm \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\zeta}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{2} \delta x \right\} \delta y,$$

где верхний знак относится к стороне с абсциссой  $x + \frac{1}{2} \delta x$ , а нижний знак — к стороне с абсциссой  $x - \frac{1}{2} \delta x$ .

Их сумма дает  $P \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \delta x \delta y$ . Такой же расчет для двух сторон  $\delta x$  дает  $P \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \delta x \delta y$ . Таким образом, результирующая сила, действующая на прямоугольник, равна

$$P \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \right) \delta x \delta y. \quad (1)$$

Вышеприведенное рассуждение аналогично расчету, проводимому в теории капиллярности, где доказывается, что натяжение, действующее на периметр элемента  $\delta S$  поверхности мыльной пленки, эквивалентно нормальной силе

$$P \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta S,$$

где  $R_1$ ,  $R_2$  — главные радиусы кривизны поверхности. В курсах стереометрии доказывается, что если  $\zeta$  обозначает расстояние от плоскости  $xy$ , то в точках, где угол



наклона касательной плоскости к плоскости  $xy$  мал, имеет место приближенная формула

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}. \quad (2)$$

Приравнивая выражение (1) к изменению количества движения элемента, т. е.  $\rho \delta x \delta y \cdot \ddot{\zeta}$ , получаем уравнение движения

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = P \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

Эта формула выведена Эйлером (1766).

Кинетическая энергия определяется по формуле

$$T = \frac{1}{2} \rho \iint \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 dx dy, \quad (4)$$

где интегрирование производится по всей площади мембраны.

Потенциальную энергию проще всего найти, вычисляя работу, необходимую для растяжения мембраны. Как и в теории капиллярности, эта энергия равна натяжению  $P$ , умноженному на приращение площади. Если на прямоугольном элементе  $\delta x \delta y$  плоскости  $xy$  построить как на основании прямую призму, то она вырежет из деформированной мембраны почти прямоугольный участок со сторонами

$$\sqrt{1 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2} \delta x, \quad \sqrt{1 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2} \delta y.$$

Площадь этого участка равна, с точностью до малых второго порядка,

$$\left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right\} \delta x \delta y.$$

Отсюда

$$V = \frac{1}{2} P \iint \left\{ \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \quad (5)$$

Это же самое выражение получается, если на основании (1) вычислить работу нормальных сил давления, приложенных (как в § 22) к мембране и деформирующих ее от положения равновесия к ее окончательной форме так, чтобы отношение  $\zeta$  в любой момент к его конечному

значению было одно и то же для всей мембраны. В результате получаем:

$$V = -\frac{1}{2} P \iint \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \zeta dx dy. \quad (6)$$

Читатель, знакомый с теорией потенциала тяготения, сразу увидит, что это выражение эквивалентно следующему:

$$V = \frac{1}{2} P \int \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial n} ds + \frac{1}{2} P \iint \left\{ \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy, \quad (7)$$

где в первом члене интегрирование производится по всем элементам  $ds$  контура, а  $dn$  — элемент внутренней нормали к  $ds$  в плоскости мембраны. Так как у закрепленного края  $\zeta = 0$ , то эта формула дает тот же результат, что и (5).

### 53. Прямоугольная мембрана. Нормальные колебания

Для нахождения нормальных колебаний ограниченной мембраны примем, как обычно, что  $\zeta$  пропорционально  $\cos(nt + \varepsilon)$ , так что

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + k^2 \zeta = 0, \quad (1)$$

где

$$k^2 = \frac{n^2 \rho}{P}. \quad (2)$$

У закрепленного края должно быть  $\zeta = 0$ . Установлено что решение уравнения (1), отвечающее этому условию возможно только для ряда определенных значений  $k$ , которые определяют в силу (2) соответственные частоты колебаний.

Для случая прямоугольной мембраны выберем начало координат в вершине, а оси  $x$ ,  $y$  расположим вдоль сторон, выходящих из этой вершины. Уравнения других сторон пусть будут  $x = a$ ,  $y = b$ ; тогда уравнение (1) и граничные условия будут удовлетворены решением вида

$$\zeta = C'_s \sin \frac{s\pi x}{a} \sin \frac{s'\pi y}{b} \cos(nt + \varepsilon), \quad (3)$$

где  $s$  и  $s'$  — целые числа, удовлетворяющие условию

$$k^2 = \pi^2 \left( \frac{s^2}{a^2} + \frac{s'^2}{b^2} \right). \quad (4)$$

Простым обобщением теоремы Фурье можно показать, что (3) является единственным возможным типом решения в настоящей задаче; это решение дано Пуассоном в 1829 г.

Любое нормальное колебание, при котором  $s$  или  $s' > 1$ , будет иметь узловые линии, параллельные сторонам мембраны. Из (4) следует, что если отношение  $a^2 : b^2$  не представляет собой отношения двух целых чисел, то все частоты будут различными и узловые линии могут иметь только указанную форму. Но если числа  $a^2$  и  $b^2$  соизмеримы, то некоторые из периодов совпадают, и соответственные колебания можно накладывать друг на друга при любом соотношении амплитуд (§ 16). Узловые линии могут в таком случае принимать очень разнообразные формы. Наиболее простым является случай квадратной мембраны ( $a = b$ ), для которого

$$k^2 = \frac{\pi^2}{a^2} (s^2 + s'^2). \quad (5)$$

Так, суперпонируя колебания, для которых  $s = 2$ ,  $s' = 1$  и  $s = 1$ ,  $s' = 2$  соответственно, получаем:

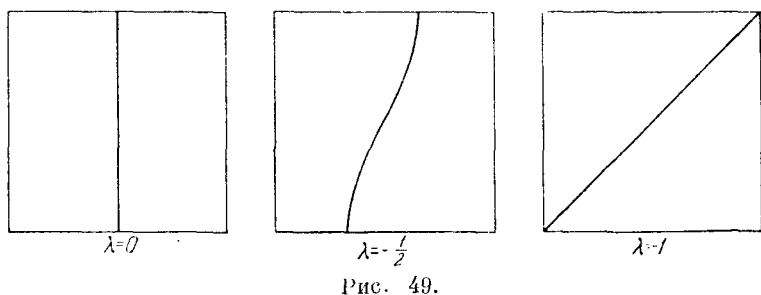
$$\begin{aligned} \zeta &\sim \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + \lambda \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} \sim \\ &\sim \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \left( \cos \frac{\pi x}{a} + \lambda \cos \frac{\pi y}{a} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\lambda$  может принимать любое значение. Например, в случае  $\lambda = \pm 1$  узловыми линиями будут диагонали  $x + y = a$  и  $x - y = 0$  соответственно. На рис. 49 показаны случаи  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = -\frac{1}{2}$ ,  $\lambda = -1$ , дающие достаточное представление о разнообразии возможных форм.

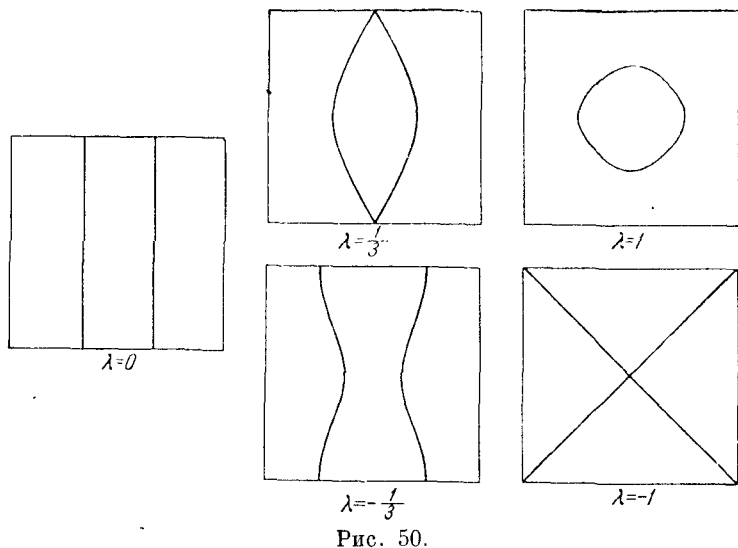
Далее, суперпонируя колебания, для которых  $s = 3$ ,  $s' = 1$  и  $s = 1$ ,  $s' = 3$ , получаем:

$$\begin{aligned} \zeta &\sim \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + \lambda \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a} \sim \\ &\sim \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \left\{ 3 - 4 \sin^2 \frac{\pi x}{a} + \lambda \left( 3 - 4 \sin^2 \frac{\pi y}{a} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Случаи  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = \pm \frac{1}{3}$ ,  $\lambda = \pm 1$  показаны на рис. 50; нетрудно представить себе и промежуточные формы.



Еще большее разнообразие форм получим, если число может быть разложено на сумму двух квадратов более



чем одним способом. Например, колебания, для которых

$$s = 4; 7; 1; 8,$$

$$s' = 7; 4; 8; 1$$

соответственно, имеют одну и ту же частоту.

#### 54. Круглая мембрана. Нормальные колебания

В случае круглой мембраны мы, естественно, пользуемся полярной системой координат с началом координат в центре мембраны. Дифференциальное уравнение можно получить, преобразовывая выражения (3) § 52, но предпочтительнее воспользоваться более прямым путем.

Возьмем вначале случай симметричных колебаний, когда  $\zeta$  зависит только от расстояния  $r$  от точки  $O$ . Результирующая напряжений по окружности радиуса  $r$  равна  $P \cdot 2\pi r \frac{\partial \zeta}{\partial r}$  и направлена перпендикулярно к плоскости невозмущенной мембраны. Разность напряжений на границах кольца, внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно  $r$  и  $r + \delta r$ , дает результирующую силу

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( P \cdot 2\pi r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) \delta r.$$

Приравнивая это выражение производной по времени от количества движения кольца  $Q \cdot 2\pi r \delta r \cdot \ddot{\zeta}$ , получаем:

$$Q \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{P}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right). \quad (1)$$

Если  $\zeta$  зависит от времени по закону  $\cos(nt + \epsilon)$ , то уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + k^2 \zeta = 0, \quad (2)$$

где, как и прежде,  $k^2 = \frac{n^2 Q}{P}$ .

Если предположить (такое предположение необходимо в случае, когда начало координат находится внутри участка, к которому применяем уравнение (2)), что  $\zeta$  можно разложить в ряд по возрастающим степеням  $r$ , то коэффициенты, следующие за первым, могут быть найдены путем подстановки такого ряда в (2); тогда получаем:

$$\zeta = C J_0(kr) \cos(nt + \epsilon), \quad (3)$$

где

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dots \quad (4)$$

Это — бесселева функция<sup>1)</sup> нулевого порядка, «первого рода», мы уже встречались с ней в § 31; график этой функции показан на рис. 51. Если обозначить через  $a$  радиус закрепленной границы, то значения  $k$ , а следовательно и  $n$ , при которых условие на границе будет удовлетворено, определяются из уравнения

$$J_0(ka) = 0. \quad (5)$$

Это дает:

$$\frac{ka}{\pi} = 0,7655; 1,7571; 2,7546; 3,7534; \dots \quad (6)$$

Эти величины стремятся асимптотически к  $m - \frac{1}{4}$ , где  $m$  — целое число. Первый из корней соответствует самой низкой частоте нормальных колебаний мембраны. Нормальное колебание номера  $m$  имеет, кроме закрепленного контура, еще  $m - 1$  узловых окружностей, радиусы

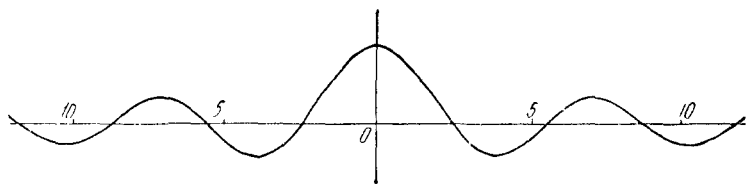


Рис. 51.

которых даются корнями меньших номеров. Так, для второго нормального колебания находим для узловой окружности  $\frac{kr}{\pi} = 0,7655$ , откуда  $\frac{r}{a} = 0,4356$ . Характер различных нормальных колебаний виден из рис. 51, который можно рассматривать как сечение, проходящее через центр мембраны перпендикулярно к ее плоскости.

Полное решение дифференциального уравнения (2), являющегося уравнением второго порядка, должно

<sup>1)</sup> F. W. Bessel (1784—1846), директор обсерватории в Кенигсберге в 1810—1846 гг.

содержать сумму двух определенных функций от  $kr$ , умноженных каждая на произвольную постоянную. Однако второе решение, называемое бесселевой функцией «второго рода», обращается в бесконечность при  $r=0$  и, следовательно, не годится для мембраны в форме сплошного круга. Однако для кольцевой мембраны, ограниченной двумя концентрическими окружностями, пригодны оба решения, и они необходимы оба для удовлетворения условиям у обеих границ<sup>1)</sup>.

Теория симметричных колебаний круглой мембраны была разработана Пуассоном (1829), вычислившим, кроме того, приближенные значения нескольких корней уравнения для периодов (5).

Если колебания несимметричны, то можно начать с расчета сил, действующих на квазипрямоугольный элемент, ограниченный двумя радиусами-векторами и двумя концентрическими окружностями; стороны его будут соответственно равны  $\delta r$  и  $r \delta \theta$ . Напряжения на криволинейных сторонах дают результирующую

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( P r \delta \theta \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \delta r,$$

направленную перпендикулярно к плоскости мембраны; напряжения на прямолинейных сторонах дают:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( P \delta r \frac{\partial \xi}{r \partial \theta} \right) \delta \theta.$$

Приравнивая сумму этих сил выражению  $qr \delta \theta \delta r \cdot \ddot{\xi}$ , получим:

$$q \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = P \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \right\}, \quad (7)$$

<sup>1)</sup> В связи с тем, что в математической физике часто приходится сталкиваться с бесселевыми функциями, особенно при решении двумерных задач, математики уделяли этим функциям много внимания. Исследовать их свойства почти так же трудно, как определить все свойства функции косинуса из ряда

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$$

не имея представления об ее связи с кругом.

или для случая гармонических колебаний

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + k^2 \zeta = 0, \quad (8)$$

где  $k^2$  имеет тот же смысл, что и ранее.

Поскольку  $\zeta$  — периодическая функция  $\theta$  с периодом  $2\pi$ , ее можно разложить (для любого заданного значения  $r$ ) в ряд по синусам и косинусам дуг, кратных  $\theta$ ; согласно теореме Фурье имеем:

$$\zeta = R_0 + R_1 \cos \theta + S_1 \sin \theta + \dots \\ \dots + R_s \cos s\theta + S_s \sin s\theta + \dots \quad (9)$$

Этой формулой можно пользоваться применительно ко всей мембране, если рассматривать коэффициенты как некоторые функции  $r$ . Более того, путем подстановки в уравнение (8) убеждаемся, что каждый член в отдельности должен удовлетворять этому уравнению. Таким образом, приходим к типичному решению:

$$\zeta = R_s \cos s\theta \cdot \cos (nt + \epsilon), \quad (10)$$

где  $R_s$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 R_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_s}{\partial r} + \left( k^2 - \frac{s^2}{r^2} \right) R_s = 0. \quad (11)$$

Решение этого уравнения, остающееся конечным при  $r = 0$ , может быть найдено в виде ряда по возрастающим степеням  $r$ . В принятых обозначениях имеем  $R_s = A_s J_s(kr)$ , где функция  $J_s$  определяется рядом

$$J_s(z) = \frac{z^s}{2^s \cdot s!} \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(2s+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2s+2)(2s+4)} + \dots \right\}. \quad (12)$$

Это — бесселева функция порядка  $s$ , первого рода. Как и для уравнения (2), здесь также существует второе решение, обращающееся в бесконечность при  $r = 0$ ; для мембраны в форме сплошной окружности оно, конечно, непригодно. В данном случае имеем нормальные колебания вида

$$\zeta = A J_s(kr) \cos s\theta \cdot \cos (nt + \epsilon), \quad (13)$$

где  $k$  определяется из выражения

$$J_s(ka) = 0. \quad (14)$$



Аналогично, выбирая в (9) член  $S_s \sin s\theta$ , мы получили бы нормальные колебания

$$\zeta = BJ_s(kr) \sin s\theta \cdot \cos(nt + \varepsilon) \quad (15)$$

при тех же значениях  $k$ . Благодаря равенству периодов нормальные колебания остаются до известной степени неопределенными. Так, для любого значения  $k$ , совместимого с граничными условиями, мы можем сложить (13) и (15), умножив их на произвольные числа. Это дает:

$$\zeta = CJ_s(kr) \cos(s\theta + \alpha) \cdot \cos(nt + \varepsilon). \quad (16)$$

Мы имеем здесь  $s$  узловых диаметров, определяемых формулой

$$s\theta + \alpha = \pm \frac{1}{2} \pi, \pm \frac{3}{2} \pi, \dots$$

и расположенных, следовательно, с интервалами  $\frac{\pi}{s}$ .

Далее, для каждого значения  $k$ , следующего за наименьшим, имеется одна или более узловых окружностей,

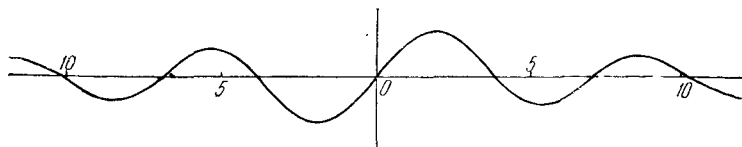


Рис. 52.

радиусы которых даются корнями меньших номеров. Для случая  $s=1$  имеется один узловой диаметр. В этом случае

$$\frac{ka}{\pi} = 1,2197; 2,2330; 3,2383; 4,2441, \dots \quad (17)$$

Эти величины стремятся асимптотически к  $m + \frac{1}{4}$ .

Представление о характере соответственных нормальных колебаний можно получить из графика функции  $J_1(z)$  (рис. 52); график можно рассматривать как сечение, проходящее через центр мембраны перпендикулярно к узловому диаметру. В нормальном колебании

следующего номера радиус узловой окружности дается формулой

$$\frac{r}{a} = 1,2197/2,2330 = 0,546.$$

На рис. 53 показана схема расположения узловых линий для первых трех нормальных колебаний типа

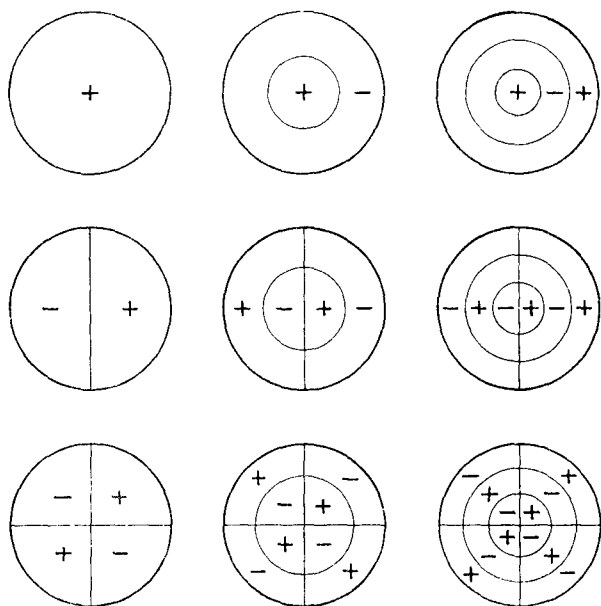


Рис. 53.

$s = 0$ ,  $s = 1$ ,  $s = 2$  соответственно. Знаками «+» и «-» обозначены участки, находящиеся в любой момент в противоположных фазах колебания.

При любой форме границы мембраны величина  $\zeta$  вблизи любой точки  $O$  мембраны может быть представлена в форме (9), где

$$R_s = A_s J_s(kr), \quad S_s = B_s J_s(kr); \quad (18)$$

опущенный множитель  $\cos(nt + \varepsilon)$  подразумевается. Если точка  $O$  расположена на узловой линии, то  $\zeta$  должно быть равно нулю при  $r = 0$  и, следовательно  $A_0 = 0$ .

Тогда вблизи точки  $O$  форма мембраны имеет вид

$$\zeta = (A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) J_1(kr), \quad (19)$$

а направление узловой линии в точке  $O$  дается соотношением  $\operatorname{tg} \theta = -\frac{A_1}{B_1}$ . Если все коэффициенты порядка меньше  $s$  обращаются в нуль, то для малых значений  $r$  имеем:

$$\zeta = (A_s \cos s\theta + B_s \sin s\theta) J_s(kr). \quad (20)$$

Узловая линия имеет в этом случае  $s$  ветвей, проходящих через точку  $O$  и составляющих друг с другом равные углы  $\pi/s$ ; направления этих ветвей будут определяться соотношением  $\operatorname{tg} s\theta = -\frac{A_s}{B_s}$ .

Эти результаты иллюстрируются приведенными выше графиками. Например, случаи  $s=2$ ,  $s=3$ ,  $s=4$  показаны на рис. 50.

Согласно общей теореме, сформулированной в § 16, подбором соответственных амплитуд и относительных фаз различных нормальных колебаний мембраны можно составить решение, удовлетворяющее произвольным начальным условиям. Этого вопроса мы здесь не будем касаться; мы также вынуждены не затрагивать теории вынужденных колебаний, за исключением лишь одного простого примера.

Если на единицу площади круглой мембраны действует сила  $Z$ , то (1) заменяется уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = P \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) + Z. \quad (21)$$

Здесь для простоты предположено, что сила  $Z$  и вызываемое ею смещение  $\zeta$  распределены симметрично относительно  $O$ . Далее, если  $Z$  зависит от времени по закону  $\cos(pt + \alpha)$ , то

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + k^2 \zeta = -\frac{Z}{P}, \quad (22)$$

где

$$k^2 = \frac{p^2 \rho}{P}. \quad (23)$$

Если  $Z$  не зависит от  $r$ , т. е. приложенная сила действует равномерно по всей площади мембраны, то, очевидно, решение (22) будет:

$$\zeta = -\frac{Z}{k^2 P} + C J_0(kr). \quad (24)$$

Определяя постоянную  $C$  из условия  $\zeta = 0$  при  $r = a$ , находим:

$$\zeta = \left\{ \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} - 1 \right\} \frac{Z}{p^2 q}. \quad (25)$$

Амплитуда становится очень большой, когда  $ka$  делается близким к корню выражения (5), т. е. когда частота вынужденных колебаний приближается к частоте свободных симметричных нормальных колебаний. С другой стороны, когда вынужденные колебания происходят сравнительно медленно,  $ka$  мало и согласно (4) имеем приближенно

$$\zeta = \frac{1}{4} \frac{Z}{P} (a^2 - r^2). \quad (26)$$

Это есть статическое отклонение, соответствующее мгновенному значению вынуждающей силы.

## 55. Однородный изгиб пластинки

Теория поперечных колебаний пластинок относится к теории колебаний стержней так же, как теория мембран к теории струн. Из этого сравнения читателю будет ясно, что задача сопряжена со значительными математическими трудностями, и он не удивится, узнав, что некоторые из наиболее интересных и, на первый взгляд, простых проблем остаются нерешенными.

С другой стороны, поперечные колебания пластинок легко продемонстрировать экспериментально. Для горизонтальной пластинки, закрепленной в одной точке, расположение узловых линий можно сделать видимым, предварительно насыпав на ее поверхность немного песка. При возбуждении одного какого-либо нормального колебания песок стряхивается с тех мест, где движение наиболее сильно, и собирается вблизи узловых линий.

Обычно колебания пластинки возбуждаются проведением смычка перпендикулярно к ребру, а желаемое нормальное колебание выделяется путем прикосновения пальцев к ребру пластинки в одной или нескольких узловых точках. Если точка опоры находится в месте нахождения узла нескольких нормальных колебаний, как в случае прямоугольной пластинки, закрепленной в центре, то можно получить много разнообразных и весьма красивых фигур. Хладни дал большое число рисунков, показывающих полученные таким путем результаты; многие из них приводятся в распространенных учебниках по экспериментальной акустике.

При теоретическом рассмотрении предполагается, что одна из главных осей деформации и напряжения перпендикулярна к плоскости пластинки и что соответственное напряжение равно нулю. Полагая, таким образом, в формуле (9) § 42  $p_3=0$ , находим остальные главные напряжения:

$$p_1 = E' (\varepsilon_1 + \sigma \varepsilon_2), \quad p_2 = E' (\varepsilon_2 + \sigma \varepsilon_1), \quad (1)$$

где

$$E' = \frac{E}{1 - \sigma^2}. \quad (2)$$

Если обозначить через  $R_1$  и  $R_2$  главные радиусы кривизны в какой-либо точке изогнутой пластинки, то, проводя рассмотрение, аналогичное проведенному в § 45, получим:

$$\varepsilon_1 = \frac{z}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{z}{R_2}, \quad (3)$$

где через  $z$  обозначено расстояние от средней плоскости. Рассмотрим прямоугольный элемент пластинки, ограниченный линиями кривизны, и обозначим через  $h$  ее полутолщину; тогда изгибающие моменты, рассчитанные на единицу длины соответственных ребер в двух главных плоскостях кривизны, выразятся формулами:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \int_{-h}^h p_1 z \, dz = \frac{2}{3} E' h^3 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2} \right), \\ M_2 &= \int_{-h}^h p_2 z \, dz = \frac{2}{3} E' h^3 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Потенциальная энергия в единице объема равна

$$\frac{1}{2} (p_1 \varepsilon_1 + p_2 \varepsilon_2) = \frac{1}{2} E' (\varepsilon_1^2 + 2\sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2). \quad (5)$$

Подставив значения  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  из (3) и проинтегрировав по толщине пластинки, получим следующее выражение для потенциальной энергии, рассчитанной на единицу площади пластинки:

$$\frac{1}{3} E' h^3 \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\sigma}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right). \quad (6)$$

Формулы (4) можно применить для плоского стержня с прямоугольным поперечным сечением, однородно изогнутого двумя противоположными парами сил  $M_1 b$ , где  $b$  обозначает ширину сечения. Вдоль свободных ребер  $M_2 = 0$  и, следовательно,

$$R_2^{-1} = -\sigma R_1^{-1}. \quad (7)$$

Согласно (4) изгибающий момент будет, следовательно, равен

$$M_1 b = \frac{2}{3} \frac{E b h^3}{R_1}. \quad (8)$$

Как и должно быть, это равенство совпадает с (5) § 45, если учесть, что  $\omega = 2bh$  и  $\kappa^2 = \frac{1}{3} h^2$ . Формула (7) показывает, что когда стержень

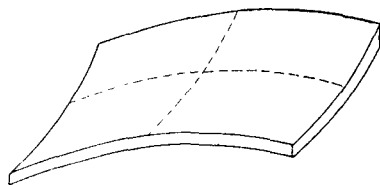


Рис. 54.

прямоугольного сечения изогнут в плоскости, параллельной одной паре ребер, то в перпендикулярной плоскости появляется кривизна другого знака — «антикластическая» кривизна; при этом отношение кривизн равно коэффициенту Пуассона  $\sigma$ . Это обстоятельство было

положено Корню<sup>1)</sup> (1869) и Маллоком (1879) в основу практических методов определения  $\sigma$ ; при этом кривизны измерялись оптическим или каким-либо другим методом.

<sup>1)</sup> А. М. Cornu (1841—1902), профессор физики Политехнической школы в 1871—1902 гг. Знаменит своим экспериментальным определением скорости света и другими важными работами в области оптики.

Из вышеизложенного следует, что свободная прямоугольная пластинка не может колебаться подобно стержню так, чтобы узловые линии были параллельны двум противоположным ребрам, поскольку для этого потребовались бы пары сил, действующих на двух других ребрах для противодействия появлению антикластической кривизны.

### 56. Колебания пластинки. Общие результаты

В колеблющейся пластинке знак и величина главных кривизн, вообще говоря, изменяются от точки к точке. Возникают также сдвиговые силы, перпендикулярные к плоскости пластинки. Условия, таким образом, довольно сложны, однако получение уравнения движения пластинки—задача простая и не представляет какой-либо действительной трудности. Более серьезный вопрос возникает при рассмотрении условий, которые должны быть удовлетворены на свободном ребре. Вблизи самой границы нельзя, по-видимому, считать выполненным даже приближенно лежащее в основе вывода (4) § 55 простое условие, налагаемое на деформации. Вообще, непосредственно у границы, т. е. на расстоянии от ребра, равном по порядку толщине пластинки, имеет место некоторое особое состояние деформации, одним из замечательных следствий которого является наличие резко аномальной величины сдвиговых напряжений на сечениях, перпендикулярных к ребру.

Что касается более детального рассмотрения вопроса, ограничимся ссылкой на другие работы<sup>1)</sup>. Здесь упомянем только о некоторых наиболее важных полученных результатах, относящихся главным образом к пластинкам со свободными ребрами.

Было установлено, что для пластинки заданной ширины частота ( $n/2\pi$ ) какого-либо нормального колебания дается формулой

$$n^2 = \frac{1}{3} \frac{E'}{\rho} h^2 m^4, \quad (1)$$

где, как и в § 46,  $m$ —постоянная, размерность которой

<sup>1)</sup> См. Рэлей, «Теория звука», гл. X; А. Ляв, «Математическая теория упругости», гл. 22, ОНТИ, 1935 г.

обратна длине и величина которой определяется из некоторого трансцендентного уравнения, а  $\rho$ —объемная плотность. Следовательно, для пластинок с геометрически подобными границами частота изменяется прямо пропорционально толщине пластинки и обратно пропорционально квадрату поперечных размеров.

В слўчае совершенно свободного круглого диска узловыми линиями являются окружности и равноотстоящие

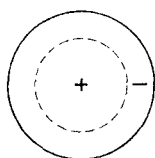


Рис. 55.

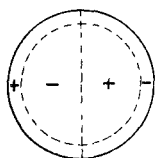
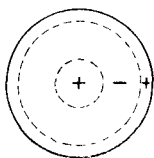
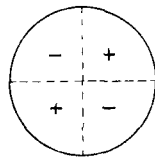


Рис. 56.



диаметры. При симметричных нормальных колебаниях, частично исследованных Пуассоном (1829), есть только узловые линии в форме окружностей. В самом низком нормальном колебании этого типа радиус узловой окружности равен  $0,678a$ , где  $a$ —радиус диска; следующее нормальное колебание имеет две узловые окружности с радиусами  $0,392a$  и  $0,842a$ , и т. д.; впрочем, эти величины слегка изменяются с изменением значения, принятого для  $\sigma$ . Согласно Пуассону, при  $\sigma = \frac{1}{4}$  величины  $m$  для вышеприведенных нормальных колебаний определяются по формуле

$$m^2 a^2 = 8,8897; 38,36. \quad (2)$$

Полная теория свободных круглых пластинок была разработана Кирхгофом в его знаменитом мемуаре (1850). Оказывается, нормальное колебание наименьшей частоты имеет два узловых диаметра и не имеет узловых окружностей. При  $\sigma = \frac{1}{4}$  и  $\sigma = \frac{1}{3}$  получаем для этой частоты соответственно

$$0,523 \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ и } 0,517 \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

На рис. 56 показано расположение узловых линий в про-



стейших случаях при наличии одного и двух узловых диаметров.

Теория круглых пластинок, закрепленных по периметру, была разработана Пуассоном и другими. Приблизительная оценка наименьшей частоты симметричных нормальных колебаний может быть получена следующим образом. Зададимся приближенно следующей формой движения:

$$\zeta = q \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2, \quad (3)$$

что позволяет удовлетворить условиям  $\zeta = 0$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0$  при  $r = a$ . Тогда кривизна радиального сечения будет равна

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} = -\frac{4q}{a^2} \left( 1 - 3 \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (4)$$

Другой главный радиус кривизны равен отрезку нормали до пересечения с осью симметрии; таким образом,  $\frac{r}{R_2} = -\frac{\partial \zeta}{\partial r}$  или

$$\frac{1}{R_2} = \frac{4q}{a^2} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (5)$$

Потенциальную энергию на единицу площади пластинки определим теперь из формулы (6) § 55. Полагая, например,  $\sigma = \frac{1}{4}$ , получим:

$$\frac{16}{3} E' h^3 \left( \frac{5}{2} - 10 \frac{r^2}{a^2} + \frac{23}{2} \frac{r^4}{a^4} \right) \frac{q^2}{a^4}. \quad (6)$$

Умножая на  $2\pi r dr$  и интегрируя от  $r = 0$  до  $r = a$ , находим:

$$V = \frac{64}{9} \cdot \frac{\pi E' h^3}{a^2} q^2. \quad (7)$$

Для кинетической энергии имеем:

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int_0^a \dot{\zeta}^2 2\pi r dr = \frac{1}{5} \pi \rho h a^2 \dot{q}^2. \quad (8)$$

Частота ( $n/2\pi$ ) определится, следовательно, по формуле

$$n^2 = \frac{320}{9} \frac{E' h^2}{\rho a^4} \quad (9)$$

или

$$n = 5,963 \left( \frac{E'}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{h}{a^2}. \quad (10)$$

В точной формуле для величины  $n$ , получаемой из результатов Пуассона, численный коэффициент равен 5,898. Таким образом, погрешность формулы (10) немногим больше одного процента.

Это исследование представляет интерес в вопросах подводной сигнализации; однако собственная частота колебаний пластинки, закрывающей отверстие в борту корабля, значительно снижается инерцией воды, соприкасающейся с внешней поверхностью пластинки. Например, собственная частота колебаний стальной пластинки диаметром 7 дюймов (178 мм) и толщиной  $\frac{1}{8}$  дюйма (3,2 мм) уменьшается с 1013 гц—частота колебаний в воздухе—до 550 гц. Кроме того, имеется значительное затухание, вызываемое передачей энергии в воду в виде звуковых волн; в этом случае модуль затухания (§ 11) равен приблизительно пяти полным периодам<sup>1)</sup>.

Случай *квадратной* пластинки более сложен. Как и в случае квадратной мембраны (§ 53), узловые линии могут принимать весьма разнообразные формы благодаря наложению различных нормальных колебаний одной

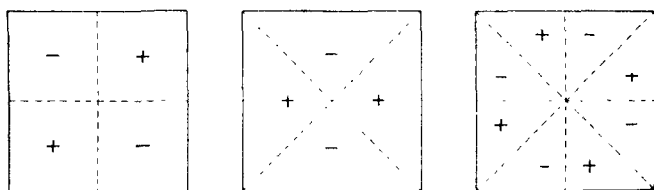


Рис. 57.

и той же частоты. Для свободной пластинки при самой низкой частоте узловые линии пересекаются в центре, образуя крест со сторонами, параллельными сторонам пластинки. На рис. 57 показаны также и другие случаи, когда при определении расположения узловых линий можно руководствоваться соображениями симметрии.

<sup>1)</sup> Lamb, Proc. Roy. Soc. A, т. XCVIII, стр. 205 (1920).

Ритц вычислил (1909) частоты для целого ряда нормальных колебаний, принимая  $\sigma=0,225$ . Он нашел, что для нормальных колебаний наименьшей частоты

$$m^4 a^4 = 12,43,$$

где  $2a$ —длина стороны квадрата. Это дает частоту

$$0,332 \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

### 57. Колебания искривленных оболочек

Переходя к колебаниям искривленных пластинок или оболочек, мы встречаемся с новыми трудностями, связанными с тем, что между изгибными нормальными колебаниями и нормальными колебаниями, связанными с растяжением, нельзя провести резкой границы. Это уже было показано на примере с кольцом (§ 51). Оказывается, однако, что если представить себе беспредельное уменьшение толщины пластинки, то нормальные колебания будут стремиться занять место в одной из двух определенных категорий. В одной категории частоты стремятся к определенным пределам; это—колебания, связанные в основном с деформацией растяжения; следовательно, этот случай аналогичен продольным колебаниям стержня, когда, как было показано, размеры поперечного сечения не имеют значения. Во второй категории частоты уменьшаются беспредельно, так как в пределе они делаются пропорциональными толщине пластинки, как и в случаях изгибных колебаний стержня или пластинки.

В акустических вопросах действительный интерес представляют только изгибные колебания. Если оболочка имеет вид тела вращения, то узловые линии будут расположены, очевидно, по параллелям и равноотстоящим меридианам. Как и в случае, разобранным в § 51, они не являются линиями абсолютного покоя. Движение в касательной плоскости достигает здесь своего относительного максимума. Это обстоятельство находит практическое применение в колоколах. О теоретическом расчете частот настоящего колокола, конечно, не может быть и речи. Замечательно, однако, что никакого систематического

экспериментального изучения не делалось, по-видимому, до тех пор, пока вопрос не был поднят Рэлеем в 1890 г. Были получены некоторые неожиданные результаты. Приведем типичный пример. Было обнаружено, что нормальные колебания некоторого определенного колокола, расположенные по возрастанию частоты, имеют следующие числа узловых меридианов и параллелей (внизу указана высота тона):

$$(4, 0) \quad (4, 1) \quad (6, ?) \quad (6, ?) \quad (8, ?)$$

$$e' \quad c'' \quad f'' + \quad b'' \quad p \quad d'''.$$

Единственное из этих колебаний, имеющее какое-то отношение к номинальной высоте тона ( $d'''$ ) колокола,— это пятое по порядку, но оно отличается по высоте на октаву. Ошибка на одну октаву в определении высоты тона встречается по физиологическим причинам нередко, но удивительно, что слухом игнорируется наличие нижних диссонирующих тонов. Возможно, что способ удара может до некоторой степени препятствовать возбуждению наиболее диссонирующих тонов.

Колебания упругого твердого тела, все размеры которого одного порядка, представляют собой, с точки зрения наших настоящих задач, второстепенный интерес. Единственным случаем, который был рассмотрен, является случай сферы. Наиболее важное колебание—это то, когда один из диаметров растягивается и сжимается, в то время как перпендикулярные к нему диаметры соответственно сжимаются и растягиваются. Частота таких нормальных колебаний для обычно встречающихся значений  $\sigma$  приближенно равна

$$N = 0,840 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{1}{2a}, \quad (1)$$

где  $a$ —радиус. Это—самая низкая из собственных частот сферы. Для стального шарика радиусом 1 см эта величина составляет  $N=136\,000$  гц.

## ГЛАВА VI

### ПЛОСКИЕ ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

#### 58. Упругость газов

В любой жидкости или газе давление  $p$ , плотность  $\rho$  и температура  $\theta$  связаны определенным соотношением, так что знание любых двух из этих величин определяет физическое состояние вещества. Часто бывает удобно брать вместо  $\rho$  обратную величину  $v$ —объем единицы массы.

При термодинамических исследованиях в качестве независимых переменных обычно выбирают величины  $p$  и  $v$ . На «индикаторной диаграмме» Уатта эти величины откладываются по координатным осям;  $p$  откладывают по ординате, а  $v$ —по абсциссе. Тогда любое определенное состояние изображается на диаграмме точкой, а любая последовательность состояний—непрерывной линией. Представим себе, что единица массы среды заключена в деформируемую оболочку и что происходит бесконечно малое изменение объема в результате смещения ограничивающей поверхности в направлении нормали на величину  $v$  для данного элемента поверхности  $\delta S$ . Работа, совершаемая при этом газом внутри оболочки, равна  $\sum (p \delta S \cdot v)$  или  $p \delta v$ , поскольку  $\sum (v \delta S) = \delta v$ . Отсюда следует, что работа, совершаемая при ряде последовательных изменений, представленных на диаграмме кривой линией, определится формулой  $\int p dv$ , т. е. как площадь, ограниченная кривой, осью абсцисс и начальной и конечной ординатами. Площадь нужно, конечно, брать с соответственным знаком, в зависимости от того, положительна или отрицательна произведенная работа.

Есть два особенно важных вида последовательной смены состояний. В первом случае температура не изменяется и изображающие линии на диаграмме носят поэтому название «изотерм». При помощи семейства изотерм, нанесенных с достаточно малыми интервалами, можно полностью представить свойства вещества. Второй вид последовательности состояний — такой, при котором нет ни увеличения, ни потери количества тепла, как если бы вещество было помещено в сосуд (изменяющегося объема) с абсолютно нетеплопроводными стенками. Соответственные линии называются поэтому «адиабатами».

Для случая идеального газа имеем:

$$p = R\rho\theta \quad \text{или} \quad p\nu = R\theta, \quad (1)$$

где  $\theta$  — абсолютная температура по газовому термометру, а  $R$  — постоянная, зависящая от характера газа. Таким образом, линии изотерм  $p\nu = \text{const}$  представляют собой прямоугольные гиперболы с осями координат в качестве асимптот. Что касается адиабат, то количество тепла, необходимое для увеличения давления на величину  $\delta p$  при неизменном объеме, дается выражением вида  $P \delta p$ . Если обозначить через  $c$  удельную теплоемкость (на единицу массы) при постоянном объеме, то это количество тепла должно быть равно  $c\delta\theta$ , где  $\delta\theta$  — соответственное изменение температуры. Но при  $\delta\nu = 0$  имеем  $\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta\theta}{\theta}$ , откуда получаем  $P = c \frac{\theta}{p}$ . Далее, количество тепла, требуемое для увеличения объема на  $\delta\nu$  при постоянном давлении, можно записать в виде  $Q \delta\nu$ . Эта величина должна быть равной  $c' \delta\theta$ , где  $c'$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Поскольку при  $\delta p = 0$  будет  $\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\delta\theta}{\theta}$ , находим, что  $Q = c' \frac{\theta}{\nu}$ . Таким образом, количество тепла, поглощаемого при бесконечно малом одновременном изменении как давления, так и объема, равно

$$P \delta p + Q \delta\nu = \theta \left( c \frac{\delta p}{p} + c' \frac{\delta\nu}{\nu} \right). \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение для линий адиабат будет,

следовательно, иметь вид

$$\frac{\delta p}{p} + \frac{c'}{c} \frac{\delta v}{v} = 0. \quad (3)$$

Отношение удельных теплоемкостей  $c'/c$  — практически постоянная величина. Обозначая ее через  $\gamma$ , имеем следующее уравнение для адиабат:

$$\log p + \gamma \log v = \text{const}$$

или

$$pv^\gamma = \text{const}. \quad (4)$$

Величина  $\gamma$ , найденная непосредственно из эксперимента для воздуха, кислорода, азота и водорода, равна приблизительно 1,41. На рис. 58 показаны изотерма и адиабата, проходящие через точку  $P$  диаграммы; адиабата идет круче, чем изотерма.

Если давление и объем изменяются в какой-либо зависимости друг от друга, то отношение приращения давления  $\delta p$  к «сжатию» (т. е. к относительному расширению, взятому с обратным знаком,  $-\frac{\delta v}{v}$ ) может быть названо «модулем объемной упругости». Величина этого модуля зависит не только

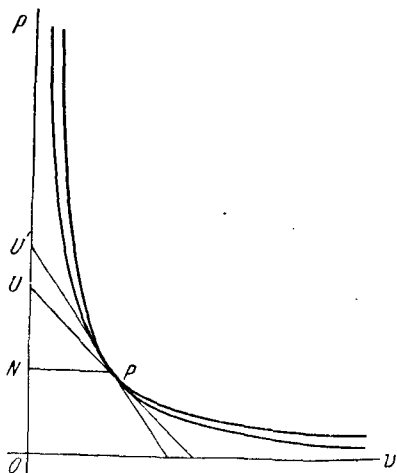


Рис. 58.

от данного состояния, но и от того, как именно изменяется это состояние, т. е. от направления соответственной кривой на диаграмме. Пусть касательная, проведенная через точку  $P$ , пересекает ось  $p$  в точке  $U$ , а отрезок  $NU$  является проекцией  $PU$  на ось  $p$ ; тогда

$$-v \frac{dp}{dv} = NP \operatorname{tg} UPN = NU, \quad (5)$$

т. е. эта проекция представляет модуль упругости в данных конкретных условиях. При смещении по изотерме (касательная  $PU$  на рис. 58) модуль упругости равен давлению  $p$ , как это следует непосредственно из (1) или из того, что касательная к прямоугольной гиперболе делится пополам в точке касания. Если изменения

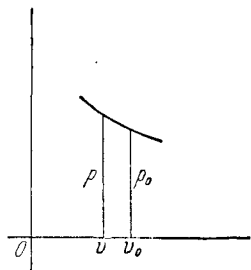


Рис. 59.

состояния происходят по адиабате, то модуль упругости, определенный из выражения (4), равен  $\gamma p$  и, следовательно, больше, чем в предыдущем случае. На рис. 58 этот модуль изображен отрезком  $NU'$ . Строго говоря, изотермический и адиабатический модули упругости следует различать даже для твердых и жидких тел, однако соответственная разница не очень существенна. При помощи диаграммы легко найти,

что работа, совершенная единичной массой газа, переходящей, расширяясь, от одного состояния к другому, бесконечно близкому, равна

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} (p + p_0) (v_0 - v) \\ \text{или} & \\ & p_0 (v_0 - v) + \frac{1}{2} (p - p_0) (v_0 - v); \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

это выражение написано с точностью до величин второго порядка малости. Когда два состояния разнятся между собой на конечную величину, необходимо знать характер перехода из одного состояния в другое. Для изотермического процесса, при котором  $pv = p_0v_0$ , имеем:

$$\int_v^{v_0} p \, dv = p_0 v_0 \log \frac{v_0}{v}. \quad (7)$$

Для адиабатического процесса будет:

$$\int_v^{v_0} p \, dv = \frac{pv - p_0v_0}{\gamma - 1}. \quad (8)$$



### 59. Плоские волны. Скорость звука

Теория плоских звуковых волн имеет много общего с теорией продольных колебаний стержней (§ 43). Будем предполагать, что движение происходит везде параллельно оси  $x$  и в любой данный момент одинаково на каждой из любых плоскостей, перпендикулярных к этой оси. Смещение от положения равновесия будем обозначать через  $\xi$ . Буквами  $p$ ,  $\rho$  и  $\xi$  будем обозначать величины, относящиеся в момент  $t$  к частицам плоскости, занимающей в невозмущенном состоянии положение  $x$ . Таким образом,  $p$ ,  $\rho$  и  $\xi$  являются функциями независимых переменных  $x$  и  $t$ . Постоянные равновесные значения  $p$  и  $\rho$  обозначим соответственно через  $p_0$  и  $\rho_0$ .

Относительное расширение  $\Delta$  было определено в § 40 как отношение приращения объема к первоначальному объему, так что

$$\Delta = \frac{v - v_0}{v_0}, \quad v = v_0(1 + \Delta). \quad (1)$$

В рассматриваемом нами разделе акустики обычно вводят символ  $s$  для обозначения «сжатия», т. е. отношения приращения *плотности* к первоначальной плотности. Таким образом,

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \quad \rho = \rho_0(1 + s). \quad (2)$$

Поскольку  $v = \frac{1}{\rho}$ , имеем:

$$(1 + s)(1 + \Delta) = 1. \quad (3)$$

Слой воздуха, ограниченный первоначально плоскостями  $x$  и  $x + \delta x$ , будет в момент времени  $t$  ограничен плоскостями  $x + \xi$  и  $x + \xi + \delta x + \delta \xi$ , а его толщина изменится, следовательно, от значения  $\delta x$  к значению  $\delta x - \delta \xi$  или  $\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \delta x$ ; таким образом, относительное расширение будет равно

$$\Delta = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (4)$$

Отсюда для бесконечно малых возмущений получаем

согласно (3)

$$s = \Delta = -\frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (5)$$

Составляя уравнение движения, предположим, что давление зависит только от изменения плотности. Тогда для малых значений  $s$  имеем:

$$p = p_0 + \kappa s, \quad (6)$$

где  $\kappa$  — модуль объемной упругости. Рассматривая ускорение участка среды, соответствующего единице площади слоя, ограниченного первоначально плоскостями  $x$  и  $x + \delta x$ , имеем:

$$\rho_0 \delta x \cdot \ddot{\xi} = -\delta p,$$

где  $\delta p$  представляет собой избыток давления на передней поверхности. Таким образом, из (5) и (6) получаем:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (7)$$

где

$$c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}}. \quad (8)$$

Решение уравнения (7), как и в §§ 23, 43, имеет вид

$$\xi = f(ct - x) + F(ct + x). \quad (9)$$

Оно представляет собой две системы волн, бегущих в противоположных направлениях со скоростью  $c$ <sup>1)</sup>.

Если мы предположим, как это сделал Ньютон<sup>2)</sup>, что расширения и сжатия газа происходят при прохождении звуковой волны изотермически, т. е. без изменений температуры, то зависимость между  $p$  и  $\rho$  дается законом Бойля:  $\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = 1 + s$ , откуда следует, как уже было показано,  $\kappa = p_0$ . Тогда

$$c = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (10)$$

<sup>1)</sup> Аналитическая теория плоских звуковых волн создана Эйлером (1747) и Лагранжем (1759).

<sup>2)</sup> Это исследование изложено в Prop. 48 второй книги «Principia» (1726).

Для воздуха при  $0^\circ \text{C}$  имеем в качестве исходных данных

$$p_0 = 76 \cdot 13,60 \cdot 981, \quad \rho_0 = 0,00129$$

в абсолютных единицах сантиметр-грамм-секунда, откуда находим  $c=280$  м/сек. Это значительно меньше, чем скорость, наблюдаемая на опыте.

Это расхождение впервые было исчерпывающе разъяснено Лапласом и Пуассоном<sup>1)</sup>. При разрежении или сжатии газа температура стремится соответственно понизиться или повыситься, если только этому не препятствует приток или отток тепла. В обычных звуковых волнах сжатие  $s$  изменяет знак так часто, а температура вследствие этого повышается и понижается так быстро, что тепло не успевает распространиться между смежными частицами газа в заметной степени. Тепло едва начнет распространяться от одного элемента к другому, как направление его распространения меняется на обратное, и, таким образом, условия практически являются адиабатическими. Формула

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (11)$$

принимает для малых величин  $s$  вид

$$p = p_0 (1 + \gamma s), \quad (12)$$

откуда, как и в § 58,  $\kappa = \gamma p_0$  и

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}. \quad (13)$$

Принимая  $\gamma=1,41$ , находим, что полученная Ньютоном скорость распространения звука в воздухе должна быть увеличена в отношении 1,187, что дает  $c=332$  м/сек при  $0^\circ \text{C}$ . Это находится в хорошем соответствии с непосредственными измерениями.

Так как теперь не возникает никаких сомнений в правильности такого объяснения и поскольку непосредственное определение  $\gamma$  представляет значительные затруднения, то формула (13) часто используется для решения обратной задачи: для вычисления значения  $\gamma$  для различных газов по измеренным скоростям распространения звуковых волн

<sup>1)</sup> Около 1807 г. или ранее.

в этих газах. Например, в 1895 г. именно этим способом Рэлей нашел, что величина  $\gamma$  для только что открытого газа аргона лежит в пределах от 1,6 до 1,7. Экспериментальная методика определения  $\gamma$  (разработанная Кундтом) рассматривается ниже, в § 62.

Из соотношения  $\frac{p_0}{\rho_0} = R\theta_0$  следует, что скорость распространения звука, даваемая формулой (13), не зависит от плотности данного газа и пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры. Далее, скорости распространения звука в различных газах, для которых значения  $\gamma$  одинаковы, обратно пропорциональны корням квадратным из плотностей, определяемых при одинаковом давлении. Эти выводы находятся в согласии с непосредственными измерениями.

При соответственном выборе  $\kappa$  формула (8) может быть, разумеется, применена и к любой жидкой среде. Для жидкостей можно пренебречь различием между изотермической и адиабатической упругостью. Для воды при  $15^\circ \text{C}$  имеем  $\kappa = 2,22 \cdot 10^{10}$  и  $\rho_0 = 1$  в единицах сантиметр-грамм-секунда; отсюда получаем  $c = 1490 \text{ м/сек}$ . Значение, полученное Колладоном и Штурмом (1826) путем непосредственного измерения в воде Женевского озера, составляло  $1435 \text{ м/сек}$  при температуре около  $8^\circ \text{C}$ .

Отметим еще одну формулу для вычисления скорости звука. Если обозначить через  $H$  высоту «однородной атмосферы», т. е. высоту такого столба воздуха, который имеет всюду одну и ту же плотность  $\rho_0$  и вес которого создавал бы имеющееся в действительности атмосферное давление  $p_0$ , то  $p_0 = g\rho_0 H$ ; тогда формулу Ньютона (10) можно написать в виде

$$c = \sqrt{gH} \quad (14)$$

(ср. с (6) § 43). Скорость звука оказывается равной скорости, приобретаемой телом, падающим с высоты  $\frac{H}{2}$ . Из (1) § 58 следует, что для данного газа и в определенном пункте  $H$  зависит только от температуры. Соответственная формула для адиабатического процесса имеет вид

$$c = \sqrt{\gamma gH}. \quad (15)$$

## 60. Энергия звуковых волн

Кинетическая энергия плоской волны, рассчитанная на единицу площади волнового фронта, равна

$$T = \frac{1}{2} \rho_0 \int \dot{\xi}^2 dx; \quad (1)$$

интегрирование здесь производится по объему, который занимал в состоянии покоя воздух, находящийся в данный момент в возмущенном состоянии.

Как было найдено в § 58, работа, совершаемая единичной массой при малом расширении, определяется с точностью до второго порядка малости по формуле

$$p_0(v_0 - v) + \frac{1}{2}(p - p_0)(v_0 - v), \quad (2)$$

где индекс «0» относится к конечному состоянию. Если составить сумму соответственных величин для всех элементарных масс в волне, то в том случае, когда суммарное изменение объема равно нулю, первый член пропадает. Далее, во втором члене можно с достаточной точностью положить  $p - p_0 = \kappa s$ ,  $v_0 - v = v_0 s$ ; это даст  $\frac{1}{2} \kappa s^2 v_0$ . Таким

образом, выражение  $\frac{1}{2} \kappa s^2$  должно быть проинтегрировано по объему воздуха в невозмущенном состоянии. До сих пор никаких предположений о процессе, к которому относится выбираемое значение  $\kappa$ , сделано не было. Но только в случае адиабатического расширения полученный результат можно трактовать как потенциальную энергию в строгом смысле этого слова. В этом случае для единицы площади волнового фронта получим:

$$V = \frac{1}{2} \kappa \int s^2 dx, \quad (3)$$

где  $\kappa = \gamma p_0$ . Если  $\kappa$  найдено применительно к изотермическим условиям, то правая часть этого уравнения представляет собой, как говорят в термодинамике, «свободную энергию».

Здесь незначем снова повторять то, что уже было сказано в § 23 относительно разложения первоначального

произвольного возмущения на две волны, движущиеся в противоположных направлениях. В отдельной бегущей волне, например

$$\xi = f(ct - x), \quad (4)$$

будем иметь согласно (5) § 59

$$\dot{\xi} = cs, \quad (5)$$

где  $\dot{\xi}$  обозначает скорость движения частиц в направлении распространения волны. Так как  $\dot{\xi}$  имеет тот же знак, что и  $s$ , то частица воздуха движется вперед (т. е. в направлении движения волн), когда она находится в фазе сжатия, и в обратном направлении—когда находится в фазе разрежения. Далее, из (1), (3) и (5) следует, что общая энергия состоит наполовину из кинетической и наполовину из потенциальной энергии. Это также следует независимо из общих соображений, приведенных в § 23.

Особенно важным является случай гармонической бегущей волны. Формула

$$\xi = a \cos n \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (6)$$

описывает волну с амплитудой  $a$ , частотой  $n/2\pi$  и длиной волны  $\lambda = \frac{2\pi c}{n}$ . В этом случае

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho_0 n^2 a^2 \int \sin^2 n \left( t - \frac{x}{c} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \rho_0 n^2 a^2 \int \left\{ 1 - \cos 2n \left( t - \frac{x}{c} \right) \right\} dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Средняя величина второго члена в подынтегральном выражении равна нулю; средняя кинетическая энергия, рассчитанная на единицу объема, равна, следовательно,  $\frac{1}{4} \rho_0 n^2 a^2$ , а средняя величина общей энергии равна  $\frac{1}{4} \rho_0 n^2 a^2$ . Так как  $na$  есть максимальное значение скорости частиц, то на любом участке, содержащем целое число длин волн, общая энергия равна кинетической энергии всей массы участка, движущейся с этой максимальной

скоростью. Если обозначить через  $s_1$  максимальное сжатие, то  $s_1 = na/c$  и, следовательно, среднюю величину энергии на единицу объема можно также записать в виде  $\frac{1}{2} \rho_0 c^2 s_1^2$ .

Мы можем, между прочим, определить теперь и степень приближения, допущенного при выводе уравнения движения (7) § 59. Приближение состояло в пренебрежении квадратом величины  $s$  или  $-\frac{\partial \xi}{\partial x}$ . Поскольку  $s_1 = 2\pi a/\lambda$ , то это означает, что амплитуда  $a$  предполагается малой по сравнению с  $\lambda/2\pi$ . Это условие с запасом выполняется для всех обычных звуковых волн.

До сих пор мы изучали поведение волн, считая их уже существующими, не задаваясь вопросом об их происхождении. В качестве примера, правда несколько искусственного, показывающего, как могли бы быть получены такие волны, представим себе мысленно длинную прямую трубу с поперечным сечением  $\omega$ , в которую помещен поршень, перемещающийся произвольным образом на малое расстояние вперед и назад. Пусть начало координат на оси  $x$  выбрано в среднем положении поршня. Тогда волны, создаваемые справа от поршня, движущегося по закону

$$\xi_0 = f(t), \quad (8)$$

очевидно, будут описываться формулой

$$\xi = f\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (9)$$

В частности, при

$$\xi_0 = a \cos nt \quad (10)$$

имеем:

$$\xi = a \cos n\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (11)$$

Секундная работа, совершаемая поршнем над воздухом справа от него, равна

$$\begin{aligned} p\omega \dot{\xi}_0 &= (p_0 + \kappa s) \omega \dot{\xi}_0 = \\ &= -p_0 \omega n a \sin nt + \frac{\kappa n^2 a^2}{c} \omega \sin^2 nt. \end{aligned} \quad (12)$$

Средняя величина первого члена равна нулю; средняя величина второго члена равна

$$\frac{1}{2} \kappa n^2 a^2 \frac{\omega}{c} = \frac{1}{2} \rho_0 n^2 a^2 \omega c. \quad (13)$$

Это в точности составляет среднюю энергию, заключенную в объеме  $\omega c$  пространства, занятого волной (11). На первый взгляд такой результат может показаться тривиальным. Можно аргументировать тем, что за каждую единицу времени образуются новые волны, занимающие в трубе участок длины  $c$ , и тем, что поршень, разумеется, должен предоставить соответствующее количество энергии. Однако следует помнить, что для образования бесконечно длинной волны типа (11) потребуются бесконечно долгое время, а в случае конечного ряда волн представленное соображение приведет к необходимости исследовать, что происходит вблизи фронта волны. В данном случае результат действительно не изменится, но если скорость движения волн будет различной для волн различной длины, как, например, в диспергирующей среде в оптике, для волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости в гидродинамике и для изгибных волн на длинном прямом стержне (§ 45), результат будет другим. Таким образом, существует различие между скоростью гармонической волны (для одной определенной длины волны) и «групиновой скоростью», определяющей скорость распространения энергии.

В вышеизложенной задаче для поддержания колебаний вида (8) при наличии реакции воздуха к поршню нужно прикладывать некоторые силы. Если поршень свободен, то его первоначальный запас энергии будет постепенно израсходован в процессе создания воздушных волн. Предположим, например, что поршень прикреплен к пружине и при отсутствии воздуха период его свободных колебаний равен  $2\pi/n$ . При наличии воздуха уравнение движения поршня будет иметь вид

$$M (\ddot{\xi} + n^2 \xi) = - (p - p_0) \omega. \quad (14)$$

В уравнение входит только переменная часть давления, поскольку постоянная часть влияет только на положение



равновесия поршня. Из общей теории бегущих волн имеем:

$$p - p_0 = \kappa s = \kappa \frac{\dot{\xi}}{c}, \quad (15)$$

и уравнение (14) принимает вид

$$\ddot{\xi} + \frac{\kappa\omega}{Mc} \dot{\xi} + n^2\xi = 0. \quad (16)$$

Это — уравнение вида, рассмотренного нами в § 11; его решение имеет вид

$$\xi = Ce^{-\frac{t}{\tau}} \cos(n't + \varepsilon), \quad (17)$$

где

$$\tau = \frac{2Mc}{\kappa\omega} = \frac{2M}{\rho_0\omega c}, \quad n'^2 = n^2 - \frac{1}{\tau^2}. \quad (18)$$

Если  $n\tau$  велико, то изменением периода можно пренебречь. Для этого  $2M^1)$  должно быть велико по сравнению с  $\rho_0\omega\lambda/2\pi$ , где  $\lambda$  — длина волны. Инерция поршня должна быть, следовательно, велика по сравнению с инерцией воздуха, заключенного в отрезке трубы длиной  $\lambda/2\pi$ . Этот же самый закон затухания можно было бы вывести косвенным путем, изложенным в § 12.

Из (13) следует, что скорость распространения энергии на единицу площади фронта волны (плотность потока энергии) в случае бегущей гармонической волны равна  $\frac{1}{2}\rho_0 n^2 a^2 c$  или  $\frac{1}{2}\rho_0 c^3 s_1^2$ , где  $s_1$  обозначает амплитуду сжатия. Этот результат был получен для плоских волн, однако он справедлив и для всех видов волн на достаточном расстоянии от источника. Так, если обозначить через  $W$  общее количество звуковой энергии, излучаемое за одну секунду из источника, расположенного вблизи земли, то величина  $s_1$  на расстоянии  $r$  будет определяться из формулы

$$W = \frac{1}{2}\rho_0 c^3 s_1^2 \cdot 2\pi r^2 = \pi\rho_0 c^3 r^2 s_1^2. \quad (19)$$

Эта формула была применена лордом Рэлеем для определения предела слышимости звука заданной высоты.

<sup>1)</sup> Множитель 2 нужно опустить, если поршень образует волны в трубе и слева и справа от себя.

Величина  $W$  определялась по количеству энергии, затраченной на приведение в действие источника (свисток), т. е. как произведение расхода газа на давление. Тогда, зная наибольшее расстояние  $r$ , на котором звук был еще едва слышен, можно по формуле (19) найти предельное значение  $s_1$ ; оно, однако, окажется завышенным по сравнению с истинным пределом слышимости ввиду того, что значение  $W$  также взято завышенным, поскольку не вся затраченная энергия переходит в звук. Таким путем было установлено, что звуки были еще слышны, когда  $s_1$  было заведомо меньше, чем  $4 \cdot 10^{-8}$ . Соответствующая амплитуда, рассчитанная по формуле  $na = cs_1$ , была равна  $8 \cdot 10^{-8}$  см. Другим независимым методом, при котором указанная неопределенность была устранена, предел слышимости был установлен около  $s_1 = 6 \cdot 10^{-9}$ . Последующие эксперименты, произведенные Винном (1903) и Рэлеем<sup>1)</sup>, показали увеличение чувствительности с увеличением высоты тона для тонов, расположенных вблизи середины обычной музыкальной шкалы.

### 61. Отражение

Если в начале координат расположено неподвижное препятствие, то общее решение заменяется, как и в § 24, следующим:

$$\xi = f(ct - x) - f(ct + x). \quad (1)$$

Рассмотрим, например, область слева от начала координат. Первый член можно рассматривать как волну, падающую на препятствие; тогда второй член представит отраженную волну. В соответственных точках отраженная волна имеет ту же амплитуду, что и падающая; знак скорости частиц  $\dot{\xi}$  меняется на обратный; знак акустического сжатия  $s \left( = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$  не меняется. Мы имеем здесь, в простейшей форме, объяснение эхо.

Есть еще один случай отражения, который важно отметить. Пусть в точке  $x=0$  наложено условие постоянства давления ( $s=0$ ). Тогда согласно (9) § 59 имеем:

$$F'(ct) = f'(ct), \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Phil. Mag. (6), т. XIV (1907).

откуда следует, что функции  $f, F$  могут отличаться друг от друга только на постоянную величину. Поскольку эта постоянная величина представляет собой просто общее смещение для всей массы среды, что несущественно для данной задачи, то этой величиной можно пренебречь. В таком случае имеем:

$$\xi = f(ct - x) + f(ct + x). \quad (3)$$

Для среды, расположенной слева от  $O$ , здесь, как и раньше, первый член можно считать падающей, а второй — отраженной волной. Скорость  $\dot{\xi}$  при отражении остается в этом случае без изменений, а знак  $s$  меняется на обратный. Такое условие осуществляется, когда в плоскости  $x=0$  воздух граничит со средой, способной оказывать давление, но лишенной инерции. Разумеется, это — идеальный случай, однако условие постоянства давления приближенно осуществляется на открытом конце трубы. Это же условие имеет место и при отражении продольных волн от свободного конца стержня (§ 43).

Общая проблема отражения при перпендикулярном падении на границу двух различных жидких или газообразных сред вряд ли является более сложной. Возьмем начало координат на границе между средами. Волна, падающая слева, создает отраженную волну слева и прошедшую волну справа. Величины, относящиеся к падающей и к отраженной волне, будем отмечать индексами 1 и 2 соответственно, а величины, относящиеся к прошедшей волне, будем отмечать штрихом. Поскольку в начале координат скорость частиц и давление для обеих сред должны быть одинаковыми, имеем:

$$\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2 = \dot{\xi}', \quad \kappa s_1 + \kappa s_2 = \kappa' s' \quad [x = 0]. \quad (4)$$

При этом равновесное давление  $p_0$  также обязательно должно быть одинаковым. Но  $\dot{\xi}_1 = cs_1$ ,  $\dot{\xi}_2 = -cs_2$ ,  $\dot{\xi}' = c's'$ ; значит,

$$c(s_1 - s_2) = c's', \quad \kappa(s_1 + s_2) = \kappa's' \quad [\text{при } x = 0]. \quad (5)$$

Следовательно,

$$s_2 = \frac{\kappa'c - \kappa c'}{\kappa'c + \kappa c'} s_1, \quad s' = \frac{2\kappa c}{\kappa'c + \kappa c'} s_1 \quad [\text{при } x = 0]. \quad (6)$$

Эти формулы дают в первую очередь величины, относящиеся к началу координат, по обе стороны от границы. Но легко видеть, что они дают также отношения амплитуд каждой из волн в соответственных точках. Если инерция второй среды безгранична, то  $c' = 0$  и, следовательно,  $s_2 = s_1$ , как и в случае отражения от жесткой стенки. С другой стороны, если инерцию второй среды можно положить равной нулю, то  $c' = \infty$  и, как в предыдущем примере,  $s_2 = -s_1$ .

Энергии соответственных участков каждой из волн пропорциональны  $\kappa s_1^2 c$ ,  $\kappa s_2^2 c$ ,  $\kappa' s'^2 c'$ , так как длины этих участков пропорциональны скоростям волн. Закон сохранения энергии требует, следовательно, выполнения равенства

$$\kappa s_1^2 c = \kappa s_2^2 c + \kappa' s'^2 c'. \quad (7)$$

Как легко проверить при помощи (6), это требование действительно выполняется.

Подставляя в (6)  $\kappa = \rho_0 c^2$ ,  $\kappa' = \rho_0' c'^2$ , получим:

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{\rho_0' c' - \rho_0 c}{\rho_0' c' + \rho_0 c}. \quad (8)$$

В качестве примера возьмем случай воздушных волн, падающих перпендикулярно на поверхность воды. Здесь мы имеем приближенно  $\frac{\rho_0}{\rho_0'} = 0,00129$ ,  $\frac{c}{c'} = 0,222$ , откуда  $\frac{s_2}{s_1} = 0,99943$ . Следовательно, здесь имеет место почти полное отражение и почти нет прохождения.

Тот же самый результат получается при падении волны в обратном направлении: от воды к воздуху. Отражение еще более увеличивается и прохождение уменьшается при наклонном падении. Полная теория этого вопроса была разработана Грином (1847). Результаты исследования представляют интерес главным образом в связи с оптическими аналогиями, однако можно отметить одно замечательное обстоятельство. Вследствие большей скорости распространения звука в воде может иметь место полное отражение при падении звука из воздуха на воду (именно, при угле падения больше  $\arcsin 0,222$ , или около  $13^\circ$ ).

## 62. Колебания столба воздуха

Когда мы подходим к рассмотрению свободных колебаний воздуха, заключенного в трубе конечной длины, то неизбежно возникает вопрос об условиях, которые должны быть удовлетворены на открытом конце. Здесь происходит более или менее быстрый переход от плоских волн в трубе к расходящимся сферическим волнам вне трубы; этот процесс плохо поддается расчету. В обычной элементарной теории, разработанной еще Д. Бернулли, Эйлером и Лагранжем, делается предположение, что изменением давления в трубе у открытого конца можно пренебречь. Как уже отмечалось, такая картина наблюдалась бы в том случае, если бы воздух снаружи трубы был заменен средой, способной оказывать давление ( $p_0$ ), но лишенной инерции. В таком случае не было бы потерь энергии при отражении от открытого конца (§ 61) и однажды возбужденные в трубе колебания продолжались бы неограниченно. Ясно, что такое предположение является несовершенным отображением действительности; условие  $s=0$  может быть выполнено лишь приблизительно, а энергия должна непрерывно расходоваться на создание волн, расходящихся от отверстия трубы наружу, так что колебания, будучи предоставленными самим себе, останутся заметными только в течение очень непродолжительного времени. Это время, однако, может составлять сотни периодов. К этим вопросам мы еще вернемся позже (гл. IX); сейчас же ограничимся тем, что проследим, к каким результатам приводит эта приближенная теория.

Периодический характер движения в трубе конечной длины следует из теории волн так же, как и в случае струн (§ 24). Предположим, например, что короткий волновой импульс, созданный в точке  $P$  трубы  $AB$ , начинает бежать в одну или другую сторону. После двух отражений у концов трубы  $A$  и  $B$  волна снова придет в точку  $P$ , распространяясь в том же направлении, как и вначале. Если оба конца трубы закрыты, то знак  $s$  не менялся ни при одном из отражений, а знак  $\xi$  изменялся на обратный два раза. Отсюда следует, что через промежуток времени  $2l/c$ , где  $l=AB$ , начальные условия в точности воспроизводятся. Этот же результат получится, если оба конца

открыты, поскольку в таком случае за рассматриваемый промежуток времени знак  $s$  изменится на обратный дважды, а знак  $\xi$  изменяться не будет. Если же один конец трубы закрыт, а другой открыт, то за время  $2l/c$  знак  $s$  и знак  $\xi$  волны, пришедшей в  $P$ , изменятся на обратный по одному разу, и должно пройти еще столько же времени, прежде чем в точке  $P$  восстановится первоначальное положение вещей.

Вышеизложенные положения объясняют некоторые важные моменты в теории органнх труб. Например, наименьшая частота колебаний обратно пропорциональна длине трубы и при одинаковой длине на одну октаву ниже для «закрытой» трубы (т. е. для трубы, закрытой у *одного* конца), чем для «открытой» трубы (т. е. для трубы, открытой у *обоих* концов). Далее, эта частота прямо пропорциональна скорости распространения звука и, следовательно, возрастает с повышением температуры.

Переходя к аналитическому методу определения нормальных колебаний, делаем, как обычно, предположение, что  $\xi$  пропорционально  $\cos(nt + \epsilon)$ . Тогда уравнение (§ 59) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{n^2}{c^2} \xi = 0. \quad (1)$$

Решение этого уравнения, как и в § 25, имеет вид

$$\xi = \left( A \cos \frac{nx}{c} + B \sin \frac{nx}{c} \right) \cos (nt + \epsilon). \quad (2)$$

Соответственная длина бегущих волн в свободном воздушном пространстве равна  $\lambda = \frac{2\pi c}{n}$ . Отсюда следует, что в любой системе стоячих волн имеется последовательность узлов ( $\xi = 0$ ) на расстоянии  $\frac{1}{2} \lambda$  один от другого и последовательность пучностей или мест нулевого сжатия ( $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ ), расположенных посередине расстояний между узлами.

Для трубы, закрытой у обоих концов ( $x = 0$ ,  $x = l$ ), имеем:

$$A = 0, \quad \sin \frac{nl}{c} = 0 \quad (3)$$

и, следовательно,

$$\xi = C_m \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \left( \frac{m\pi ct}{l} + \varepsilon_m \right), \quad (4)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$ ; нормальные колебания образуют, таким образом, гармонический ряд.

Для трубы, открытой у обоих концов, условие  $s = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$  для  $x = 0$  и  $x = l$  дает

$$B = 0, \quad \sin \frac{nl}{c} = 0 \quad (5)$$

и типичным решением будет следующее:

$$\xi = C_m \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \left( \frac{m\pi ct}{l} + \varepsilon_m \right), \quad (6)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Здесь снова последовательность нормальных колебаний является гармонической. На рис. 60

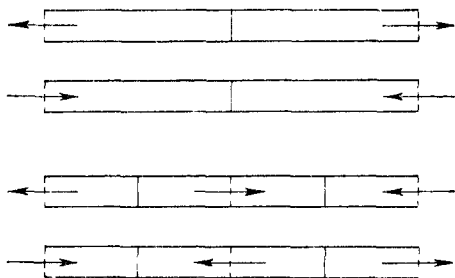


Рис. 60.

показаны случаи  $m = 1$ ,  $m = 2$ . Стрелками показано для двух противоположных фаз направление движения в пучностях, положение которых обозначено пунктиром; узлы обозначены сплошными поперечными линиями.

Для трубы, закрытой у конца  $x = 0$  и открытой у конца  $x = l$ , имеем:

$$A = 0, \quad \cos \frac{nl}{c} = 0, \quad (7)$$

откуда  $\frac{nl}{c} = \frac{1}{2} m\pi$ , при этом целые числа  $m$  — нечетные. Таким образом, получаем:

$$\xi = C_m \cos \frac{m\pi x}{2l} \cos \left( \frac{m\pi ct}{2l} + \varepsilon_m \right), \quad (8)$$

где  $m = 1, 3, 5, \dots$ . Характерный «тембр» закрытых труб (§ 91) объясняется отсутствием гармоник четного порядка. На рис. 61 показаны случаи  $m = 1$ ,  $m = 3$ .

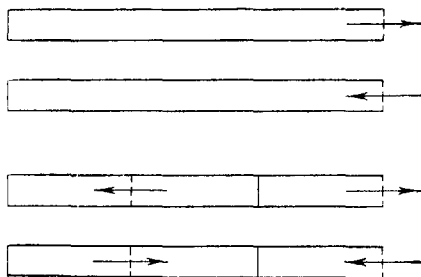


Рис. 61.

Формула (2) может быть также применена для случая вынужденных колебаний заданной частоты ( $n/2\pi$ ). Так, если в точке  $x = 0$  поддерживается заданное колебание

$$\xi = A \cos (nt + \varepsilon), \quad (9)$$

то для трубы, закрытой у конца  $x = l$ , движение газа дается формулой

$$\xi = \frac{A}{\sin \frac{nl}{c}} \sin \frac{n(l-x)}{c} \cos (nt + \varepsilon). \quad (10)$$

Если  $\sin \frac{nl}{c} = 0$ , или  $l = \frac{1}{2} m\lambda$ , где  $m$  — целое число, то амплитуда резко возрастает, даже если учитывать диссипативные силы. Это обстоятельство легло в основу метода Кундта (1868), посредством которого можно сравнивать скорости распространения звука в различных газах, ограничиваясь опытом лабораторного масштаба. Длина волны



находится измерением расстояния между узлами, местоположение которых указывается скоплением ликоподневого порошка, предварительно рассыпанного в трубе. Колебания возбуждаются одновременно в двух трубах (содержащих два сравниваемых газа) посредством дисков, укрепленных на обоих концах стержня, совершающего продольные колебания. Если конец  $x=l$  открыт, то формула (10) заменяется следующей:

$$\xi = \frac{A}{\cos \frac{nl}{c}} \cos \frac{n(l-x)}{c} \cos (nt + \varepsilon), \quad (11)$$

и условием резонанса будет  $\cos \frac{nl}{c} = 0$ , или  $l = \frac{1}{4} m \lambda$ , где  $m$ —нечетное целое число.

Вышеприведенные расчеты можно применять также к колебаниям столба воды или какой-либо другой жидкости, находящейся в трубе, при условии абсолютной жесткости материала трубы. На практике, однако, податливость стенок трубы оказывает заметное влияние. Потенциальная энергия, соответствующая данной деформации жидкости,  $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$ , уменьшается и скорость распространения волн падает. Это явление было замечено Вертхеймом (1847), но правильное объяснение принадлежит Гельмгольцу (1848). Далее этот вопрос был разработан Кортевегом (1878) и автором настоящей книги. Ввиду значительно большей скорости распространения упругих волн в твердых телах, таких, как стекло или сталь, по сравнению со скоростью распространения звука в воде (§ 44) напряжения в стенках трубы так быстро выравниваются, что можно принять, что деформация трубы происходит как бы статически, соответственно мгновенному распределению давления в жидкости. Если  $c_0$ —теоретическая скорость распространения звука в жидкости, согласно (8) § 59, а  $c$ —фактическая скорость, то для трубы с малой толщиной стенок  $h$

$$c^2 = \frac{c_0^2}{1 + \frac{2\kappa a}{hE}}, \quad (12)$$

где  $a$ —внутренний радиус,  $\kappa$ —объемный модуль упругости жидкости и  $E$ —модуль Юнга для материала, из

которого сделана труба. Так, для воды ( $\kappa = 2,22 \cdot 10^{10}$ ), заключенной в стеклянной трубе ( $E = 6,03 \cdot 10^{11}$ ), толщина стенок которой равна одной десятой радиуса, находим  $c = 0,759 c_0$ . Даже для другого предельного случая, случая очень толстых стенок, оказывается:

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \frac{\mu}{\kappa + \mu}, \quad (13)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига материала стенок. Для стекла  $\mu$  примерно в 10 раз больше, чем  $\kappa$  для воды; это соответствует уменьшению скорости распространения волн приблизительно на 5%.

### 63. Волны конечной амплитуды

Исследуемые в этой и последующих главах законы распространения звука требуют некоторых оговорок; их лучше всего рассмотреть в связи с плоскими волнами, для которых теоретическое рассмотрение наиболее просто.

Во-первых, было сделано предположение, что сжатие  $z$  может рассматриваться как величина бесконечно малая. Эта теория подходит для решения большинства задач, однако возникают и некоторые эффекты «второго порядка», имеющие определенное теоретическое значение.

Легко показать, что бегущая волна конечной (в отличие от бесконечно малой) амплитуды не может распространяться, не изменяя своей формы, за исключением только одного случая определенного вида зависимости между давлением и плотностью. Если допустить существование бегущей волны неизменной формы, то, мысленно сообщая всей массе воздуха скорость, равную и противоположную по знаку скорости волны, получим «установившееся», как его называют, течение, при котором скорость, давление и плотность в любой точке не меняются с течением времени. Для определенности рассмотрим воздух, находящийся в длинной прямой трубе с единичным поперечным сечением. Поскольку скорость  $u$  является теперь функцией только пространственной координаты  $x$ , ускорение частиц воздуха будет равно  $u \frac{du}{dx}$ , как в обычной динамике. Рассматривая ускорение массы, заключенной в рассматриваемый

момент между плоскостями  $x$  и  $x + \delta x$ , найдем:

$$\varrho u \frac{du}{dx} = - \frac{dp}{dx} . \quad (1)$$

Далее, поскольку через каждое поперечное сечение проходит в единицу времени одинаковое количество вещества, имеем:

$$\varrho u = \text{const} = m . \quad (2)$$

Отсюда  $m \frac{du}{dx} = - \frac{dp}{dx}$ , и

$$p = C - mu \quad (3)$$

или

$$p - p_0 = m(u_0 - u) = m^2 \left( \frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho} \right) , \quad (4)$$

где величины  $p_0$ ,  $\varrho_0$ ,  $u_0$  относятся к тем частям среды, которые в первоначальной постановке задачи считались невозмущенными. Это и дает специальный вид соотношения, о котором шла речь. Пользуясь обозначением  $v$  для удельного объема, имеем:

$$p - p_0 = m^2(v_0 - v) . \quad (5)$$

Это — уравнение *прямой линии* на индикаторной диаграмме. Ни для одного из известных веществ такое соотношение не имеет места ни при адиабатическом, ни при изотермическом процессе. И, вообще, такое соотношение могло бы осуществляться только в ограниченном диапазоне изменения давления, поскольку в противном случае объем при определенном конечном давлении обращался бы в нуль.

Если, однако, диапазон изменений плотности невелик, то уравнение (5) можно считать частным случаем (6) § 59, причем следует принять  $m^2 = \kappa \varrho_0$ . Поскольку  $m = \varrho_0 u_0$ , где  $u_0$  — скорость распространения волн при первоначальной постановке задачи, то в соответствии с (8) § 59 получаем  $u_0^2 = \frac{\kappa}{\varrho_0}$ . Это эквивалентно такому выбору  $m$ , при котором прямая линия (5) касается в точке  $(v_0, p_0)$  кривой, дающей на индикаторной диаграмме фактическую зависимость между  $p$  и  $v$ .

Условие (5) было найдено различными путями Эрншоу (1860) и Ренкиным<sup>1)</sup> (1870).

Чтобы установить характер изменения формы волны, которое должно иметь место при распространении звуковых волн в действительных средах, нам нужно обратиться к точным уравнениям движения. Следуя порядку расчета § 59, имеем:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6)$$

и

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \Delta} = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}}. \quad (7)$$

Отсюда, считая процесс адиабатическим, т. е. полагая

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (8)$$

находим, исключая  $p$  и  $\rho$ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{\left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{\gamma+1}}, \quad (9)$$

где, как и прежде,  $c^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$ .

Имея в виду лишь иллюстративные цели, ограничимся рассмотрением изотермического случая, который получается из (9) путем подстановки  $\gamma = 1$ . Тогда

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{\left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2}. \quad (10)$$

В § 60 мы видели, что при бесконечно малых колебаниях существует определенная зависимость между скоростью частиц и сжатием в бегущей волне. Следуя Эрншоу, попробуем предположить, что то же самое справедливо

<sup>1)</sup> W. J. M. Rankine (1820—1872), профессор технических дисциплин в Глазго в 1855—1872 гг.

и для общего случая. Тогда можно написать:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = f \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \quad (11)$$

где вид функции  $f$  подлежит определению. Из (11) выведем соотношения

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = f' \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} = f' \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (12)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left\{ f' \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right\}^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (13)$$

Значит (10) будет удовлетворено, если принять

$$f' \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \pm \frac{c}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}} \quad (14)$$

или

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = f \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \pm c \log \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right). \quad (15)$$

Если принять, что в тех частях среды, где волна отсутствует,  $\dot{\xi} = 0$ , то аддитивная постоянная равна нулю. Последнее равенство можно записать согласно (3) § 59 следующим образом:

$$\dot{\xi} = \mp c \log(1 + s) \quad (16)$$

или еще иначе:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{\mp \frac{\dot{\xi}}{c}}. \quad (17)$$

При бесконечно малых значениях  $s$  формула (16) переходит в соотношение  $\dot{\xi} = \mp cs$ , в согласии с § 60.

Чтобы найти скорость распространения того или иного фиксированного значения  $s$  при одном и при другом знаке, отметим, что значение  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ , относившееся к частице  $x$  в момент  $t$ , перейдет к частице  $x + \delta x$  в момент  $t + \delta t$ , где  $\delta x$  и  $\delta t$  связаны соотношением

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} \delta t + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta x = 0,$$

т. е. в соответствии с (12) и (14), при

$$\delta x \pm c(1+s)\delta t = 0. \quad (18)$$

Следовательно, данное значение  $s$  сжатия движется со скоростью

$$\frac{dx}{dt} = \mp c(1+s) \quad (19)$$

относительно частиц невозмущенной среды. Чтобы найти скорость распространения в пространстве, следует учесть полное изменение  $x + \xi$ , которое равно

$$\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \delta x + \frac{\partial \xi}{\partial t} \delta t.$$

Искомая скорость равна, следовательно,

$$\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = \mp c + \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (20)$$

Нижний знак относится к волне, идущей в направлении положительных  $x$ . Из (16) следует, что в этом случае положительные значения  $\dot{\xi}$  связаны с положительными значениями  $s$ , как и в приближенной теории § 60; формула (20) показывает, однако, что скорость распространения тем больше, чем больше величина  $s$ . Таким образом, части волны, где плотность больше, беспрерывно набегают на части волны, где плотность меньше. Следовательно, если изобразить соотношение между  $s$  и  $x$  графически, то кривая  $A$  на рис. 62 примет через некоторое время форму вида  $B$ <sup>1)</sup>. Волна делается, так сказать, все более крутой с фронта и все более пологой с тыла, до тех пор пока не наступит момент, когда наклон фронта в какой-то точке станет бесконечным. Дальнейший анализ уже не имеет какого-либо реального смысла.

В случае адиабатического процесса результаты имеют в общем такой же характер. Читателю не трудно будет проверить правильность следующего утверждения. Фор-

<sup>1)</sup> В данном случае не имеет большого значения, предполагается ли координата  $x$  (как и в вышеизложенном) относящейся к невозмущенной среде или это обычная пространственная координата. Характер изменения в том и в другом случае одинаков.

мула (16) заменится уравнением

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \pm \frac{2c}{\gamma - 1} \left\{ 1 - (1 + s)^{\frac{1}{2}(\gamma - 1)} \right\}, \quad (21)$$

а скорость распространения фиксированного значения  $s$  будет равна

$$\mp c(1 + s)^{\frac{1}{2}(\gamma + 1)} \quad (22)$$

по отношению к частицам среды или

$$\mp \left( \frac{dp}{dQ} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (23)$$

по отношению к пространству. В этой последней формуле скорость частицы прибавляется к скорости звука, соответствующей фактической плотности; при адиабатическом

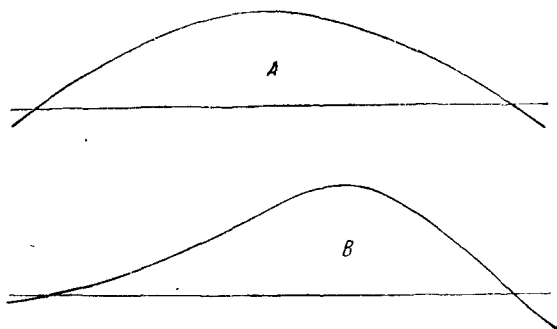


Рис. 62.

процессе скорость звука зависит от сжатия вследствие связанного с ним изменения температуры. Общие выводы — такие же, как и для изотермического случая.

Следует иметь в виду, что, поскольку уравнение движения (9) не является линейным, суперпозицию отдельных решений, таких, например, как рассмотренные только что волны, бегущие соответственно вправо или влево, нельзя производить простым сложением. Заметим, однако, что

в результате более полного исследования Риман<sup>1)</sup> нашел (1860), что произвольное ограниченное начальное возмущение распадается в конечном итоге на две бегущие в противоположных направлениях волны рассмотренного выше типа.

В точности проследить судьбу волн конечной амплитуды, возбужденных тем или иным способом, — задача большой трудности; однако некоторые сведения можно получить приближенными методами. Такой способ был применен Эйри<sup>2)</sup> (1845) в его работе по динамической теории приливов, где сходные вопросы возникают при исследовании приливов в море малой глубины и в устьях рек.

Пусть, например, в длинной прямой трубе в точке  $x=0$  расположен поршень, приводимый в движение по произвольному закону:

$$\xi = f(t). \quad (24)$$

Если пренебречь членами третьего порядка по отношению к производным от  $\xi$ , то (9) примет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - (\gamma + 1) c^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (25)$$

Опустив последний член, получим, как и в § 60, первое приближение

$$\xi = f\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (26)$$

Подставляя это значение  $\xi$  в малый член уравнения (25), получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} (\gamma + 1) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ f' \left( t - \frac{x}{c} \right) \right\}^2. \quad (27)$$

Как легко проверить, решением (27), переходящим в первом приближении в (26), будет следующее выражение:

$$\xi = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{\gamma + 1}{4c^2} x \left\{ f' \left( t - \frac{x}{c} \right) \right\}^2. \quad (28)$$

<sup>1)</sup> Bernhard Riemann (1826—1866), профессор математики в Геттингене в 1857—1866 гг.

<sup>2)</sup> George Biddell Airy (1801—1892), профессор астрономии в Кембридже в 1828—1835 гг., астроном королевского двора в 1835—1881 гг.



Поправка к первому приближению (26) пропорциональна  $x$  и квадрату отношения скорости движения поршня к скорости распространения звука. Практически величина этого отношения может быть чрезвычайно малой, но по мере движения вправо роль поправки все время возрастает до тех пор, пока в конце концов пренебрежение членами третьего и более высокого порядка уже не будет законным. Этого и следовало ожидать согласно исследованиям Эрншоу.

Если поршень совершает гармоническое движение

$$f(t) = a \cos nt, \quad (29)$$

то из (28) получаем:

$$\xi = a \cos n \left( t - \frac{x}{c} \right) + \frac{(\gamma+1)n^2 a^2}{8c^2} x \left\{ 1 - \cos 2n \left( t - \frac{x}{c} \right) \right\}. \quad (30)$$

Перемещение любой частицы уже не является гармоническим колебанием; оно складывается из члена, не зависящего от  $t$ , и двух гармонических членов, один из которых имеет частоту вынужденного колебания (29), а второй — удвоенную частоту. Здесь мы имеем иллюстрацию необходимости ограничиваться бесконечно малыми смещениями, как это делается в обычной теории вынужденных колебаний (§ 17).

Далее, если заданное колебание поршня представляет собой сумму двух гармонических компонент, например

$$f(t) = a_1 \cos n_1 t + a_2 \cos n_2 t, \quad (31)$$

то получим:

$$\begin{aligned} \xi = & a_1 \cos n_1 \left( t - \frac{x}{c} \right) + a_2 \cos n_2 \left( t - \frac{x}{c} \right) + \\ & + \frac{\gamma+1}{8c^2} x \left\{ n_1^2 a_1^2 + n_2^2 a_2^2 - n_1^2 a_1^2 \cos 2n_1 \left( t - \frac{x}{c} \right) - \right. \\ & - n_2^2 a_2^2 \cos 2n_2 \left( t - \frac{x}{c} \right) + 2n_1 n_2 a_1 a_2 \cos (n_1 - n_2) \left( t - \frac{x}{c} \right) - \\ & \left. - 2n_1 n_2 a_1 a_2 \cos (n_1 + n_2) \left( t - \frac{x}{c} \right) \right\}. \quad (32) \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что теперь, помимо колебаний с удвоенной частотой, появляются еще другие гармонические колебания, частоты которых равны соответственно

разности и сумме первоначальных частот. Говоря языком акустики, два гармонических колебания достаточной амплитуды создают не только соответственные чистые тоны, но и их октавы, а также некоторые «комбинационные тоны», появление которых снова напоминает о том, что принцип суперпозиции более не применим. Мы обратимся позже к этому исследованию еще раз (гл. X).

В теории приливов существует аналогичное явление: возникновение «приливов второго порядка», имеющих действительно вполне ощутимую величину. Это имеет значение при гармоническом анализе приливов (§ 39).

Мы видели, что основным свойством конечности амплитуды является то, что в бегущей волне градиенты давления и плотности стремятся обратиться в бесконечность. Отсюда возник вопрос, не может ли в конце концов установиться



Рис. 63.

волна разрыва, подобно волне «бора» на поверхности воды. Чтобы исследовать возможность существования такой волны, рассмотрим этот вопрос в его простейшей форме,

предположив, что параметры среды всюду постоянны, за исключением резкого изменения их в плоскости разрыва. Далее, посредством наложения постоянной для всей среды скорости в обратном направлении сведем эту задачу к задаче установившегося движения, при котором плоскость разрыва неподвижна.

Пусть величины  $p_0$ ,  $q_0$ ,  $u_0$  относятся к области слева от этой плоскости, а величины  $p$ ,  $q$ ,  $u$  — к области справа от нее. Поскольку в единицу времени через любую единичную площадку, перпендикулярную к направлению течения, проходит одна и та же масса среды  $m$ , имеем:

$$qu = q_0u_0 = m, \quad \text{или} \quad u = mv, \quad u_0 = mv_0. \quad (33)$$

Далее, поскольку в единицу времени масса, равная  $m$ , изменяет свою скорость от  $u_0$  до  $u$ , то скорость увеличения импульса слоя воздуха, заключенного между двумя плоскостями, обозначенными на рис. 63 пунктирными

линиями, будет равна  $m(u - u_0)$ , откуда

$$p_0 - p = m(u - u_0), \quad (34)$$

или, в силу (33) и в согласии с (5),

$$p_0 - p = m^2(v - v_0). \quad (35)$$

Если наложить теперь на всю среду одну и ту же скорость  $-u_0$ , то придем к случаю волны, продвигающейся в область, находившуюся ранее в состоянии покоя. Скорость волны определяется по формуле

$$u_0^2 = m^2 v_0^2 = \frac{p - p_0}{v_0 - v} v_0^2 = \frac{p - p_0}{\rho - \rho_0} \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (36)$$

Впервые эта формула была найдена Стоксом (1848), а впоследствии независимо Эрншоу, Риманом и Ренкиным. Однако здесь возникает трудность, впервые отмеченная Рэлеем, в отношении сохранения энергии. Скорость, с которой производится работа над выделенным выше участком среды, равна  $p_0 u_0 - p u$ , в то время как скорость увеличения кинетической энергии равна  $\frac{1}{2} m (u^2 - u_0^2)$ . Разница составляет:

$$p_0 u_0 - p u - \frac{1}{2} m (u^2 - u_0^2) = \frac{1}{2} m (p_0 + p) (v_0 - v). \quad (37)$$

Если обозначить на индикаторной диаграмме две точки  $(v, p)$  и  $(v_0, p_0)$  соответственно через  $P$  и  $P_0$ , то выражение (37) представляет собой умноженную на  $m$  площадь трапеции, ограниченной отрезком  $P_0 P$ , осью  $v$  и ординатами  $p_0, p$ . Если скачок в месте разрыва происходит без притока или оттока тепла, то точки  $P_0$  и  $P$  будут лежать на одной и той же адиабате, а увеличение внутренней энергии будет представлено площадью, заключенной между этой кривой, осью  $v$  и теми же двумя ординатами. Поскольку адиабаты обращены вогнутостью кверху, то эта площадь (по абсолютной величине) будет меньше, чем площадь трапеции. Следовательно, если  $v_0 > v$ , то работа, произведенная над участком, больше, чем увеличение его кинетической и внутренней энергии, а если  $v_0 < v$ , то работа, произведенная участком над средой, больше, чем учитываемая потеря энергии.

Совершенно очевидно, что полная теория волны, даже только приближающейся к разрывной, должна учитывать как вязкость, так и теплопроводность, поскольку в области разрыва градиенты скорости и температуры очень велики. Этот вопрос был весьма подробно исследован Рэлеем.

Не представляется вероятным, чтобы в обычных условиях изменения, являющиеся следствием конечности амплитуды, имели серьезное значение. В уравнении (30), например, отношение амплитуды колебания для второй гармоники к амплитуде основного колебания равно по порядку  $n^2ax/c^2$ , или  $\frac{n^2a}{g}xH$ , где  $H$ —высота однородной атмосферы. При обычно встречающихся амплитудах  $a$  и при обычных расстояниях  $x$  это отношение будет очень малой величиной. Если волна не плоская, то нелинейные эффекты должны быть еще значительно меньше вследствие убывания амплитуды при сферическом расхождении.

#### 64. Вязкость

Сущность явления вязкости заключается в отличии напряженного состояния, возникающего в движущейся жидкости или газе, от давления, постоянного по всем направлениям, причем отличия определяются *скоростями* деформации. Обычно предполагают, что добавочные напряжения являются *линейными* функциями скоростей деформации. С нашей точки зрения это предположение достаточно оправдано тем, что скорости деформации считаются бесконечно малыми. Аналогично § 40, здесь также в любой момент через любую точку проходят три главные оси деформации, и эти оси, естественно, будут главными осями соответственных напряжений. Поэтому мы, по аналогии с (1) § 42, пишем:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -p + \lambda' \dot{\Delta} + 2\mu' \dot{\epsilon}_1, \\ p_2 &= -p + \lambda' \dot{\Delta} + 2\mu' \dot{\epsilon}_2, \\ p_3 &= -p + \lambda' \dot{\Delta} + 2\mu' \dot{\epsilon}_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$  — скорости деформаций в направлении глав-

ных осей и

$$\dot{\Delta} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3. \quad (2)$$

Пользуясь тем же методом, что и в § 41, устанавливаем, что  $\mu'$  есть коэффициент вязкого сопротивления при плоско-параллельном сдвиговом движении. Именно, если через  $\dot{\eta}$  обозначить скорость сдвиговой деформации, а через  $\tilde{\omega}$  — соответственное напряжение, то

$$\tilde{\omega} = \mu' \dot{\eta}. \quad (3)$$

Значения  $\mu'$  были с достаточной точностью определены для ряда жидкостей и газов.

Нужно отметить, что смысл величины  $p$ , а следовательно, и величины  $\lambda'$ , все еще остается неопределенным, потому что вид формулы (1) не изменится при включении в величину  $p$  любого постоянного кратного от  $\dot{\Delta}$ . Для случая жидкостей обычно принято объединять таким образом оба члена в выражении (1). Применительно к газам удобно считать, что  $p$  определяется соответственным уравнением состояния для газа ( $p = R\varrho\theta$ ). В настоящее время нет никаких экспериментальных данных относительно того, отличается ли в движущемся газе средняя величина напряжения вблизи какой-либо точки

$$\frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) = -p + \left( \lambda' + \frac{2}{3}\mu' \right) \dot{\Delta}$$

от величины  $-p$ , определенной из уравнения состояния; исходя из кинетической теории газов, Максвелл<sup>1)</sup> заключил (1866), что обе величины должны совпадать; следовательно,

$$\lambda' = -\frac{2}{3}\mu'. \quad (4)$$

Так как нас интересует главным образом порядок величины влияния вязкости, то точное определение  $\lambda'$  не имеет для нас большого значения. Поэтому в дальнейшем мы для простоты останемся на точке зрения Максвелла.

<sup>1)</sup> James Clerk Maxwell (1831—1879), профессор экспериментальной физики в Кембридже (1871—1879), автор электромагнитной теории света.

Размерность  $\mu'$  — это напряжение, умноженное на время, или  $[ML^{-1}T^{-1}]$ . Установлено, что (в газах)  $\mu'$  не зависит от плотности, но возрастает с повышением температуры. Для воздуха при  $t = 0^\circ\text{C}$   $\mu'$  равно примерно 0,000170 в абсолютных единицах. Сразу же, однако, ясно, что влияние вязкости на изменение движения зависит не от значения  $\mu'$ , а от отношения  $\mu'$  к инерции жидкости. Поэтому отношение

$$\nu = \frac{\mu'}{\rho_0} \quad (5)$$

названо Максвеллом «кинематическим» коэффициентом вязкости; его размерность есть  $[L^2T^{-1}]$ . Для воздуха при  $t = 0^\circ\text{C}$  эта величина составляет около 0,132 в системе CGS.

Работа, совершаемая за единицу времени напряжениями, действующими на гранях единичного куба при изменении его размера и формы, определяется по формуле

$$\begin{aligned} p_1 \dot{\epsilon}_1 + p_2 \dot{\epsilon}_2 + p_3 \dot{\epsilon}_3 &= -p \dot{\Delta} + \lambda' \dot{\Delta}^2 + 2\mu' (\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2 + \dot{\epsilon}_3^2) = \\ &= -p \dot{\Delta} + \frac{2}{3} \mu' \{(\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2 + (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Член  $-p \dot{\Delta}$  есть скорость увеличения внутренней энергии. Другие члены, являющиеся существенно положительными, дают величину потери энергии, происходящей со скоростью

$$\frac{2}{3} \mu' \{(\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2 + (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2\} \quad (7)$$

на единицу объема. Утрачиваемая таким образом механическая энергия превращается в теплоту. Следует отметить, что в случае равномерного всестороннего расширения ( $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3$ ) (7) обращается в нуль. Это — непосредственное следствие сделанного нами ранее предположения относительно значения постоянной  $\lambda'$ . Для случая чисто сдвиговой деформации ( $\dot{\eta}$ ) формула (6) принимает вид

$$\dot{\omega} \dot{\eta} = \mu' \dot{\eta}^2. \quad (8)$$

В плоской звуковой волне  $\dot{\varepsilon}_2 = 0$ ,  $\dot{\varepsilon}_3 = 0$ . Поэтому из (1) и (4) получаем:

$$p_1 = -p + \frac{4}{3} \mu' \dot{\varepsilon}_1 = -p_0 - \kappa s + \frac{4}{3} \mu' \dot{\varepsilon}_1. \quad (9)$$

Далее, пользуясь обозначениями, принятыми в § 59, имеем:

$$\left. \begin{aligned} s &= -\frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ \dot{\varepsilon}_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Уравнение движения

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad (11)$$

таким образом, принимает вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \nu \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t}. \quad (12)$$

В качестве решения для случая свободных волн выбираем:

$$\xi = P \cos kx, \quad (13)$$

где  $P$  — функция  $t$ , которую и требуется определить. Уравнение (12) будет удовлетворено при условии

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + \frac{4}{3} \nu k^2 \frac{dP}{dt} + k^2 c^2 P = 0. \quad (14)$$

Это — уравнение типа (3) § 11, и, следовательно, его решение имеет вид

$$P = C e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(nt + \varepsilon), \quad (15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{3}{2} \nu k^2, \\ n^2 &= k^2 c^2 - \frac{1}{\tau^2}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Во всех представляющих интерес случаях  $\tau$  много больше длины волны  $\left( \lambda = \frac{2\pi}{k} \right)$ , так что практически  $n = kc$ , и трение, как обычно, не имеет заметного влияния

на период. Таким образом,

$$\xi = Ce^{-\frac{t}{\tau}} \cos(kct + \varepsilon) \cos kx. \quad (17)$$

Это выражение представляет систему стоячих волн с определенным положением узлов и пучностей. Есть и еще одно аналогичное решение, отличающееся заменой  $\cos kx$  на  $\sin kx$ ; путем сложения обоих решений можем построить бегущую волну

$$\xi = Ce^{-\frac{t}{\tau}} \cos k(ct - x). \quad (18)$$

Подставляя  $v = 0,132$  для воздуха, находим  $\tau = 0,288 \lambda^2$  в абсолютной системе единиц.

Решение уравнения (14) можно провести в компактной форме путем использования мнимых величин. Так, исследуя вынужденные гармонические колебания данной частоты, полагаем:

$$\xi = ae^{int+mx}, \quad (19)$$

откуда путем подстановки в уравнение получаем:

$$m^2 = -\frac{n^2}{c^2 + \frac{4}{3}ivn}. \quad (20)$$

Отношение  $vn/c^2$  -- обычно очень малая величина; так, для  $n = 1500$  она будет составлять (для вышенприведенных значений констант) около  $1,8 \cdot 10^{-7}$ . Следовательно,

$$m = \pm \frac{in}{c} \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{ivn}{c^2} \right). \quad (21)$$

Беря нижний знак, соответствующий волнам, бегущим в положительном направлении оси  $x$ , и отбрасывая мнимую часть (19), находим:

$$\xi = ae^{-\frac{x}{l}} \cos n \left( t - \frac{x}{c} \right), \quad (22)$$

где

$$l = \frac{3c^3}{2vn^2}. \quad (23)$$

Это выражение представляет собой систему волн, бегущих вправо и создаваемых в начале координат посредством



заданного колебания  $\xi = a \cos nt$ . Колебания можно создавать, например, посредством движения поршня в трубе, если пренебречь трением у стенок. Волны бегут с обычной скоростью  $c$ , однако по мере продвижения их амплитуда экспоненциально уменьшается<sup>1)</sup>. Величина  $l$ , имеющая размерность длины, дает расстояние, проходя которое волна уменьшает свою амплитуду в отношении  $1/e$ . Она связана с длиной волны формулой

$$l = \frac{3c}{8\pi^2\nu} \lambda^2. \quad (24)$$

Для вышеприведенных значений констант  $l = 9,56 \lambda^2 \cdot 10^3$ . Таким образом, влияние вязкости на ослабление колебаний очень невелико, за исключением случаев звука очень высокой частоты и, следовательно, малой длины волны. Даже для  $\lambda = 10$  см расстояние  $l$  равно почти 10 км. Когда мы перейдем к рассмотрению волн в трех измерениях, то увидим, что в большинстве случаев влиянием вязкости можно пренебречь по сравнению с уменьшением интенсивности вследствие сферического расхождения. Интересно, однако, отметить, что существует *физический* предел частоты колебаний, могущих распространяться на значительные расстояния.

Вследствие того, что вязкость невелика, работа поддержания излучения волны (22), рассчитанная на единицу площади и совершаемая поршнем за единицу времени, должна равняться  $\frac{1}{2} \rho_0 n^2 a^2 c$ , как это было найдено в § 60.

Поскольку энергия в среде справа имеет теперь конечную и в среднем постоянную величину, эта величина должна быть равна скорости потерь энергии в результате вязкости. Правильность этого утверждения легко проверить. Потеря энергии согласно (7) равна приближенно

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \mu' \int_0^\infty \dot{\epsilon}_1^2 dx &= \frac{4}{3} \mu' \int_0^\infty \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} \right)^2 dx = \\ &= \frac{4}{3} \mu' \frac{n^4 a^2}{c^2} \int_0^\infty e^{-\frac{2x}{l}} \cos^2 n \left( t - \frac{x}{c} \right) dx. \quad (25) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Эти расчеты впервые сделаны Стоксом (1845).

Здесь сохранен только главный член. Воспользовавшись тождеством

$$\cos^2 n \left( t - \frac{x}{c} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2n \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

и взяв среднее по времени, получаем, учитывая (23):

$$\frac{4}{3} \mu' \frac{n^4 a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{4} l = \frac{1}{2} \rho_0 n^2 a^2 c. \quad (26)$$

### 65. Влияние теплопроводности

Другая причина потерь энергии заключается в тепловых процессах, вызываемых попеременными сжатиями и разрежениями воздуха. Действительно, если сжатия и разрежения следуют друг за другом достаточно быстро, то колебания будут, как это разъяснено в § 59, почти в точности адиабатическими. Однако, как это было впервые отмечено Кирхгофом (1868), остаточная передача тепла имеет во всяком случае такое же значение, как и вязкость<sup>1)</sup>. В кинематической теории газов коэффициенты «температуропроводности» ( $\nu'$ ) и кинематической вязкости имеют одинаковый порядок величины; согласно Максвеллу, между ними имеет место соотношение  $\nu' = \frac{5}{2} \nu$ . По этой причине приведенные выше расчеты влияния вязкости на звуковые волны в воздухе нельзя рассматривать иначе, как иллюстрацию. Полное исследование, при котором принимаются во внимание оба эффекта, показывает, что термический эффект равносителен увеличению кинематической вязкости, но порядок величины при этом не изменяется.

Если бы, с другой стороны, попеременное изменение плотности происходило относительно очень медленно, т. е. теплопроводность была бы относительно очень велика, то выравнивание температур успевало бы происходить и влияние теплопроводности и вязкости на потери энергии было бы опять незначительным. Поскольку изменения объема воздуха были бы в подобном случае почти изотермическими, то скорость распространения волны была бы равна ньютоновской величине (§ 59, (10)).

<sup>1)</sup> Это справедливо для газов. В жидкостях (кроме ртути) теплопроводность играет значительно меньшую роль, чем вязкость. (Ред.)

Теория говорит, что в промежуточной области скорость распространения волн не остается постоянной, но заметно зависит от частоты. Поскольку такого явления не наблюдается, можно заключить, что во всех обычных случаях имеются практически адиабатические условия. Ясно также, что в таких промежуточных случаях потери энергии возрастали бы в очень значительной степени. Исследование Стокса (1851), на которое мы здесь ссылаемся, относится к влиянию излучения тепла. Распространение этого исследования на влияние теплопроводности было сделано независимо Кирхгофом и Рэлеем. Весьма возможно, что влияние одного только излучения имеет второстепенное значение.

Мы не будем приводить детальные расчеты. Что же касается общего объяснения того, каким образом термический процесс вызывает рассеяние энергии, то Стокс дал его с такой замечательной ясностью, что соответственное место стоит процитировать. Речь здесь идет об излучении, но эти же положения играют роль и в случае теплопроводности.

«Вообразим массу воздуха, заключенную внутри цилиндра, снабженного воздухонепроницаемым поршнем, который может без трения двигаться в цилиндре; пусть на наружную поверхность поршня действует постоянное атмосферное давление; предположим, что воздух попеременно сжимают и разрежают движением поршня. Если поршень будет двигаться очень медленно, то заметного изменения температуры не произойдет и, следовательно, работа, совершаемая над воздухом при его сжатии, будет снова отдана воздухом при его расширении, поскольку давление на поршень будет одним и тем же при одном и том же положении поршня в цилиндре, независимо от того, движется ли он вперед или назад. Точно так же работа, совершаемая при разрежении воздуха, будет отдана атмосферой при возвращении поршня к положению равновесия. Таким образом, движение может продолжаться, не сопровождаясь невозвратимыми потерями энергии.

Теперь предположим, что поршень движется с несколько большей скоростью, так что сжатие и разрежение воздуха вызывают заметное изменение температуры. Когда поршень движется вперед, сжимая воздух, температура повышается и, следовательно, поршень работает против большего давления, чем то, которое было бы, если бы температура

не изменялась. К тому времени, когда поршень будет возвращаться, значительная часть теплоты, возникшей в результате сжатия, уже уйдет и, следовательно, давление воздуха в цилиндре уже не будет помогать поршню в его обратном движении в той же мере, в какой оно препятствовало ему при движении вперед. Точно так же, когда поршень совершает свое обратное движение, разрежая воздух, температура понижается и понижение давления воздуха в цилиндре более значительно, чем если бы изменилась только плотность; следовательно, поршень получает меньше помощи в преодолении атмосферного давления, чем он получал бы, если бы температура оставалась постоянной. Однако к тому времени, когда поршень возвратится к своему положению равновесия, охлаждение уменьшится вследствие поступления тепла от стенок цилиндра и, таким образом, сила, заставляющая поршень двигаться вперед и возникающая вследствие того, что давление снаружи цилиндра превышает давление внутри цилиндра, — будет меньше той, которая противодействовала поршню в его движении от положения равновесия. Таким образом, в этом случае для поддержания движения поршня необходима постоянная затрата энергии.

Наконец, предположим, что поршень движется с очень большой скоростью, так что не хватает времени для какого-либо заметного теплообмена между воздухом и стенками цилиндра. В этом случае давление при прохождении поршнем заданной точки цилиндра будет одинаковым, независимо от направления движения поршня, и, следовательно, невозвратимые потери энергии отсутствуют. Мы не говорим о возмущении воздуха вне цилиндра, так как не принимаем пока во внимание инерцию воздуха ни внутри, ни снаружи цилиндра. Таким образом, в том, что касается поддержания движения, третий случай подобен первому. Но есть и разница. Она заключается в том, что вследствие нагревания воздуха при сжатии и охлаждения при разрежении сила, заставляющая поршень двигаться к положению равновесия, независимо от того, с какой стороны от этого положения поршень находится, больше, чем она была бы, если бы температура не изменялась.

Первый случай аналогичен случаю звуковых колебаний воздуха, когда предполагается что нагревание и

охлаждение, возникающие вследствие внезапного сжатия и разрежения, распространяются очень быстро. Очевидно, нас интересуют только *относительные* скорости изменения фазы колебаний и скорости выравнивания избыточной температуры  $\theta$ , так что совершенно несущественно, предположим ли мы, что изменение движения происходит очень медленно или что охлаждение нагретого воздуха происходит очень быстро. Второй случай аналогичен звуку при предположении, что постоянные  $q^1$ ) и  $n$  сравнимы между собой. При этом предположении энергия быстро иссякает, а звук быстро затухнет. Третий случай аналогичен звуку при обычном предположении, что изменения плотности воздуха в результате сжатия и разрежения происходят со слишком большой скоростью для того, чтобы данная порция воздуха могла поглотить или отдать наружу путем излучения какую-то заметную часть выделившегося тепла. Увеличение восстанавливающей силы, возвращающей поршень в его положение равновесия, происходящее вследствие попеременного повышения и понижения температуры, аналогично увеличению восстанавливающих сил для частиц воздуха, происходящему вследствие тех же причин; этому соответствует увеличение скорости распространения звука».

## 66. Затухание волн в узких трубах и щелях

Несколько большего влияния вязкости можно ожидать в тех случаях, когда воздух соприкасается с твердым телом, например со стенками трубы или резонатора. Это происходит в силу практически бесконечного сопротивления, оказываемого поверхностью стенки скольжению жидкости, непосредственно соприкасающейся с ней. Действительно, надежно установлено, что относительная скорость у поверхности обращается в нуль, в то время как в наших теоретических исследованиях мы в большинстве случаев исходим из предположения, что скольжение происходит совершенно свободно. Более внимательное исследование показывает, однако, что в случае быстрых колебаний, какие мы имеем в акустике, влияние это в основном локальное

---

<sup>1)</sup>  $q$ —постоянная излучения.

и ограничивается практически только очень тонким слоем воздуха вблизи поверхности; за исключением случаев распространения звука в очень узких щелях, оно никакого значения не имеет.

Достаточной иллюстрацией здесь может служить следующий простой пример. Пусть на жидкость, расположенную выше плоскости  $y=0$ , принимаемой нами за жесткую границу, действует параллельно  $Ox$  периодическая сила, равная (на единицу массы)

$$X = f \cos nt. \quad (1)$$

Поскольку возникающее вследствие этого движение происходит всюду параллельно  $Ox$  и не зависит от координаты  $x$ , плотность не изменяется и возникающие деформации представляют собой сдвиги в направлении, параллельном плоскости  $y=0$ . Обозначая скорость  $\xi$  через  $u$ , имеем следующее выражение для скорости сдвиговой деформации:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2)$$

Сдвиговое напряжение на плоскости, параллельной  $y=0$ , будет, следовательно, равно  $\mu \frac{\partial u}{\partial y}$ . Поэтому на слой жидкости, ограниченной плоскостями  $y$  и  $y + \delta y$ , будет действовать, в расчете на единицу площади, результирующая сила, параллельная  $Ox$  и равная

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu' \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta y.$$

Уравнение движения тогда будет иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + X. \quad (3)$$

Нужно найти решение, удовлетворяющее условию  $u=0$  при  $y=0$ . Для краткости напшания положим  $X = fe^{int}$ , а в решении отбросим мнимую часть найденного выражения. Уравнение удовлетворяется при

$$u = \left( \frac{f}{in} + Ae^{m\nu} \right) e^{int}, \quad (4)$$

где  $m^2 = \frac{in}{v}$ ; иначе,

$$m = \pm (1 + i) \beta, \quad (5)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{n}{2v}}. \quad (6)$$

Поскольку мы ищем решение, которое было бы конечным для  $y = \infty$ , нужно взять нижний знак. Кроме того, из условия  $u = 0$  при  $y = 0$  следует:  $A = -\frac{f}{in}$ . Отсюда

$$u = -\frac{if}{n} \{1 - e^{-(1+i)\beta y}\} e^{int}, \quad (7)$$

или, сохраняя только вещественную часть,

$$u = \frac{f}{n} \sin nt - \frac{f}{n} e^{-\beta y} \sin (nt - \beta y), \quad (8)$$

что, как легко проверить, удовлетворяет всем условиям задачи. При мало-мальски значительном  $\beta y$  величина  $u$  будет определяться практически только первым членом, который совпадает с решением в отсутствие трения. Жесткая граница, следовательно, создает торможение только для тонкого слоя. Например, при  $y = \frac{2\pi}{\beta}$  скорость не доходит до своего значения вдали от поверхности всего на  $\frac{1}{535}$  часть.

При рассмотрении реальных акустических проблем (касающихся, например, колебаний в трубах) сила  $\rho X$ , действующая на единицу объема, заменяется отрицательным градиентом давления  $-\frac{\partial p}{\partial x}$ , и, конечно, необходимо принимать во внимание изменение плотности; однако результаты допускают аналогичную трактовку. Длина

$$h = \frac{2\pi}{\beta} = \sqrt{4\pi v \frac{2\pi}{n}} \quad (9)$$

может быть принята за меру расстояния, на которое распространяется тормозящее действие. Для воздуха эта

величина составляет в сантиметрах около  $\frac{1,29}{N^{1/2}}$ , где  $N$  — частота. Так, для  $N = 256$  гц находим  $h = 0,80$  мм.

Вышеприведенный метод можно применить для оценки влияния вязкости на скорость распространения волн в трубе в предположении, что диаметр трубы мал по сравнению с длиной волны, но велик по сравнению с величиной  $h$ . Тангенциальное напряжение, действующее на жидкость у границы  $y = 0$ , для случая (7) равно согласно (9)

$$-\mu' \frac{\partial u}{\partial y} = -(1-i) \frac{\mu' \beta f}{n} = -\frac{1-i}{4\pi} h \rho f. \quad (10)$$

Опущенный временной множитель  $e^{int}$  подразумевается. Суммарная тангенциальная сила, действующая на заключенный в цилиндрической трубе воздух со стороны стенок трубы, в расчете на единицу длины, может быть, следовательно, приравнена величине

$$\frac{1}{2} (1-i) h a \frac{\partial \bar{p}}{\partial x};$$

здесь  $a$  — радиус трубы, а через  $\bar{p}$  обозначено среднее давление на сечении ( $\pi a^2$ ) трубы. Обозначая среднюю скорость через  $\bar{u}$  и рассчитывая силы, действующие на воздух, заключенный в элементе трубы длиной  $\delta x$ , имеем:

$$\pi \rho_0 a^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\pi a^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{2} (1-i) h a \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$$

или

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \left\{ 1 - (1-i) \frac{h}{2\pi a} \right\}. \quad (11)$$

Кроме того, должны иметь место соотношения

$$\bar{p} = p_0 + c^2 \rho_0 \bar{s}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}. \quad (13)$$



Исключив из этих уравнений  $\bar{p}$  и  $\bar{s}$ , получим:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \left\{ 1 - (1-i) \frac{h}{2\pi a} \right\} c^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}. \quad (14)$$

Мы уже приняли, что время входит в решение в виде множителя  $e^{int}$ ; решение уравнения (14) будет, следовательно, иметь вид

$$\bar{u} = C e^{int+mx}, \quad (15)$$

где

$$m^2 = -\frac{n^2}{c^2} \left\{ 1 - (1-i) \frac{h}{2\pi a} \right\}^{-1}, \quad (16)$$

или приближенно, учитывая предположение о малости величины  $h/a$ ,

$$m = \pm \frac{in}{c} \left\{ 1 + (1-i) \frac{h}{4\pi a} \right\}. \quad (17)$$

Для волн, распространяющихся в направлении положительных  $x$ , берем нижний знак:

$$m = -\frac{in}{c'} - \alpha, \quad (18)$$

где

$$c' = \left( 1 - \frac{h}{4\pi a} \right) c \quad (19)$$

и

$$\alpha = \frac{nh}{4\pi a c}. \quad (20)$$

Тогда

$$\bar{u} = C e^{-\alpha x} e^{in \left( t - \frac{x}{c'} \right)}, \quad (21)$$

или в вещественной записи

$$\bar{u} = C e^{-\alpha x} \cos n \left( t - \frac{x}{c'} \right). \quad (22)$$

Скорость распространения волн уменьшается, следовательно, в отношении, определяемом (19). Экспоненциальный множитель в (22) выражает закон затухания волн при их распространении. Если  $l$  определить так же, как

в (23) § 64, то мы найдем, что  $al$  имеет порядок величины  $\lambda^2/ah$ . Степень затухания, следовательно, в этих условиях гораздо больше, чем для случая распространения звуковых волн в открытом пространстве.

Формула, эквивалентная (19), была опубликована без доказательства Гельмгольцем в 1863 г. Вышеизложенное является вариантом доказательства, приведенного Рэлеем в его «Теории звука». Более полное исследование, учитывающее как термические процессы, так и вязкость, было выполнено Кирхгофом (1868). Влияние обеих причин, как уже было объяснено, дает увеличение эффекта, но порядок величины его не меняется.

Как уже отмечалось, в вышеприведенных расчетах подразумевается, что диаметр трубы много больше величины  $h$ . Если же диаметр трубы сравним с  $h$  или меньше этой величины, то стенки трубы приобретают значительно большее влияние на колеблющуюся массу и трение совершенно изменяет характер движения. В частности, если величина  $h$  велика по сравнению с размерами сечения, то инерция жидкости перестает оказывать какое-либо ощутимое влияние и средняя скорость на поперечном сечении определяется приближенно статическим равновесием между градиентом давления (в направлении длины трубы) и трением о стенки. В таком случае имеем:

$$R\bar{u} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad (23)$$

где  $R$  — коэффициент сопротивления, зависящий от природы жидкости и от формы и размеров поперечного сечения трубы. Далее, согласно закону Бойля

$$\bar{p} = p_0(1 + \bar{s}). \quad (24)$$

Здесь уместно считать процесс изотермическим, поскольку труба предполагается настолько узкой, что передача тепла может происходить свободно. Исключая  $\bar{p}$  и  $\bar{s}$  из (13), (23) и (24), находим:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{p_0}{R} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}. \quad (25)$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и уравнение

теплопроводности для одномерного случая. Полагая

$$\bar{u} = Ce^{int+mx}, \quad (26)$$

имеем  $m^2 = \frac{inR}{\rho_0}$ , и, следовательно,

$$m = \pm (1+i)\tilde{\omega}, \quad (27)$$

где

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{1}{2} \frac{nR}{\rho_0}. \quad (28)$$

Беря нижний знак, получаем:

$$\bar{u} = Ce^{-\tilde{\omega}x+i(nt-\tilde{\omega}x)}, \quad (29)$$

или в вещественной форме

$$\bar{u} = Ce^{-\tilde{\omega}x} \cos(nt - \tilde{\omega}x). \quad (30)$$

Значение  $R$  будет практически то же, что и для несжимаемой жидкости. Поэтому определить его можно так же, как и в случае равномерного течения жидкости по капиллярной трубке при наличии градиента давления. Если поперечное сечение трубки круговое, то в этом случае результирующая сдвиговых напряжений на единицу длины концентрической цилиндрической поверхности радиуса  $r$  будет равна  $2\pi r \mu' \frac{\partial u}{\partial r}$ , а результирующая продольных сил, действующих на единицу длины элемента толщиной  $\delta r$ , ограниченного двумя такими цилиндрическими поверхностями, будет равна, следовательно,

$$2\pi r \mu' \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \delta r.$$

Поскольку площадь поперечного сечения такого элемента равна  $2\pi r \delta r$ , то искомый градиент давления будет равен

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu'}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (31)$$

и не будет зависеть от  $x$ . Так как радиальное движение отсутствует, имеем  $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ , так что  $p$ , а следовательно,

и  $\frac{\partial p}{\partial x}$  также не зависят от  $r$ . Уравнение (31) удовлетворяется тогда решением  $u = A + Br^2$  при соответственном выборе  $B$ . Постоянная  $A$  определяется исходя из того, что у стенки трубы ( $r = a$ ) скольжение отсутствует. Таким путем находим:

$$u = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{a^2 - r^2}{4\mu'}. \quad (32)$$

Средняя скорость в плоскости поперечного сечения, следовательно, равна

$$\bar{u} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a u \cdot 2\pi r dr = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{a^2}{8\mu'}. \quad (33)$$

Отсюда для кругового сечения

$$R = \frac{8\mu'}{a^2}. \quad (34)$$

Формула (33) представляет собой закон Пуазейля<sup>1)</sup> о течении жидкости по капиллярной трубе; согласно этому закону количество жидкости, протекающей в одну секунду, пропорционально градиенту давления и четвертой степени диаметра. Этот закон может быть положен в основу экспериментального метода определения  $\mu'$ .

Подобным же образом может быть решена задача о трубе с эллиптическим поперечным сечением. Результат, полученный впервые Буссинеском (1868), имеет вид

$$R = 4\mu' \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}, \quad (35)$$

где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса. Если положить  $a = \infty$ , то получим случай узкой щели шириной  $2b$ , ограниченной параллельными плоскостями; тогда

$$R = \frac{4\mu'}{b^2}. \quad (36)$$

Это решение можно, конечно, получить независимо более простым путем.

<sup>1)</sup> J. L. M. Poiseuille (1799—1869), практикующий врач из Парижа, интересовавшийся движением крови по капиллярам. Эта работа относится к 1844 г.

Формула (30) совместно с (34) или (36) согласуется с результатом более полного исследования Рэля (1883). Полный цикл изменения фазы величины  $\bar{u}$  происходит на расстоянии  $2\pi/\bar{\omega}$ , однако на этом расстоянии амплитуда уменьшается в отношении  $e^{-2\pi} = \frac{1}{535}$ . В случае кругового поперечного сечения имеем из (28) и (34)

$$\bar{\omega}^2 = \frac{4\mu'n}{\rho_0 a^2}. \quad (37)$$

Следовательно, если отношение  $v/na^2$  велико, то интересующее нас расстояние будет мало по сравнению с длиной волны  $\left(\lambda = \frac{2\pi c}{n}\right)$  в свободном пространстве; действительно,

$$\left(\frac{\lambda\bar{\omega}}{2\pi}\right)^2 = \bar{\omega}^2 \frac{c^2}{n^2} = \frac{4v}{na^2}. \quad (38)$$

Отсюда следует, что в достаточно узких трубах волны быстро затухают, а потерянная механическая энергия превращается, разумеется, в теплоту.

Это исследование Рэлей использовал для пояснения процесса поглощения звука пористыми телами. Когда звуковая волна падает на плиту, пронизанную множеством очень тонких каналов, то часть звуковой энергии теряется, поглощаясь внутри этих каналов, как это было объяснено выше. Пористость драпировок и ковров действует таким же образом, — и именно этому обстоятельству следует приписать причину ослабления отражений звука в помещениях, где имеются ковры или драпировки: при каждом отражении утрачивается определенная доля энергии. Следует отметить, что звук может затухнуть в закрытом помещении только в результате действия существенно диссипативных сил, таких, как вязкость и теплопроводность; никакие видоизменения формы волн вследствие различных неоднородностей значения не имеют.

## ГЛАВА VII

### ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН

#### 67. Определения. Поток. Дивергенция

Теперь будет удобно несколько изменить обозначения, принятые в предыдущих главах. Обозначим через  $u$ ,  $v$ ,  $w$  компоненты скорости в направлениях, параллельных осям прямоугольной системы координат, и будем рассматривать их как функции координат  $(x, y, z)$  и времени  $t$ . С каждой точкой пространства в каждый данный момент связан вектор  $(u, v, w)$ ; вся совокупность таких векторов дает мгновенную картину распределения скорости <sup>1)</sup>. С другой стороны, изменения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  с течением времени для заданных значений  $x, y, z$  показывают, как протекает процесс в каждой заданной точке <sup>2)</sup>, но не дают непосредственно никаких сведений о судьбе различных частиц, проходящих одна за другой через эту точку.

Для того чтобы перейти к вычислению компонент ускорения частицы, занимающей в момент  $t$  положение  $(x, y, z)$ , мы должны принять во внимание, что через сколь угодно короткий промежуток времени скорости  $u, v, w$  будут определяться значениями функций, соответствующими измененным координатам и измененному моменту времени. Пусть в два последовательных момента времени  $t_1$  и  $t_2$  частица занимает соответственно положения  $P$  и  $P'$ , и пусть соответственные значения  $x$ -компоненты скорости

---

<sup>1)</sup> М. Марей (M. Marey) и др. фотографировали двумерный поток воды, несущий взвешенные частицы. Изображение каждой частицы вытягивалось в короткую черточку, которая показывала направление и величину соответственной скорости.

<sup>2)</sup> Это соответствует наблюдению поверхности потока через узкую трубочку.

равны  $u_1$  и  $u_2$  в точке  $P$  и  $u'_1$  и  $u'_2$  в точке  $P'$ . Компонента по оси  $x$  ускорения частицы будет равна пределу отношения:

$$\frac{u'_2 - u_2}{t_2 - t_1} = \frac{u_2 - u_1}{t_2 - t_1} + \frac{u'_2 - u_2}{t_2 - t_1} \quad (1)$$

при  $t_2 \rightarrow t_1$ . Предел первого члена правой части равенства (1) равен  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , т. е. скорости изменения  $u$  в точке  $P$ .

Далее,  $u'_2 - u_2$  есть разность скоростей в точках  $P$  и  $P'$  в одно и то же время, так что

$$u'_2 - u_2 = \frac{\partial u}{\partial s} PP' = \frac{\partial u}{\partial s} q(t_2 - t_1), \quad (2)$$

где  $\frac{\partial u}{\partial s}$  — пространственная производная в направлении  $PP'$  и  $q = \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}$  — результирующая скорость частицы. Окончательное выражение для ускорения в направлении оси  $x$  имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + q \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (3)$$

Аналогичные формулы получаются таким же способом и для других компонент. Если через  $l$ ,  $m$ ,  $n$  обозначить направляющие косинусы прямой  $PP'$ , то получим:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{ds} = l \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (4)$$

При этом

$$u = lq; \quad v = mq; \quad \omega = nq. \quad (5)$$

Следовательно, (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (6)$$

Это соотношение известно из гидродинамики.

Представлялось полезным подчеркнуть принципиальную сторону вопроса, указав на различие между  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и полным ускорением частицы, однако в применении к движениям, скорость которых считается бесконечно малой, это различие теряет свою важность. В этом случае второй член выражения (3) имеет второй порядок

малости по отношению к малой скорости частиц, и компоненты ускорения частицы можно принять равными  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial t}$ . Величина ошибки, получающейся в акустических задачах, может быть оценена, как и в § 60, на примере плоских звуковых волн. Действительно, пусть

$$\xi = a \cos k(ct - x). \quad (7)$$

Тогда максимальное отношение величины  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  к  $\frac{\partial u}{\partial t}$  равно  $ka$ . Следовательно, ограничение «бесконечно медленными» движениями означает, что амплитуда смещения должна быть мала по сравнению с величиной  $\lambda/2\pi$ .

Рассмотрим какую-либо поверхность (замкнутую или незамкнутую), мысленно проведенную в области, занимаемой жидкостью. Выражение

$$(lu + mv + nw) \delta S \cdot \delta t$$

дает объем жидкости, протекающей через элемент поверхности  $\delta S$  за бесконечно малый промежуток времени  $\delta t$ ; здесь  $(l, m, n)$  есть нормаль к элементу поверхности, проведенная в какую-либо определенную сторону. Коэффициент при  $\delta t$  в последнем выражении называется «поток» через поверхность  $\delta S$ ; соответственный интеграл

$$\iint (lu + mv + nw) dS, \quad (8)$$

взятый по всей поверхности, называется полным потоком через поверхность в ту сторону, куда проводились нормали. Поток измеряет *скорость* протекания жидкости через поверхность, выраженную в единицах объема за единицу времени.

Вычислим поток, вытекающий из элементарного кубического объема  $\delta x \delta y \delta z$  с центром  $P$  в точке  $(x, y, z)$ . Усредненные по грани  $\delta y \delta z$  компоненты скорости, параллельные оси  $x$ , равные значениям  $u$  в центрах этих граней, будут соответственно равны

$$u \pm \frac{1}{2} \delta x \frac{\partial u}{\partial x}.$$



Разность потоков слева направо через эти грани равна, следовательно,  $\frac{\partial u}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$ . Добавляя соответственные члены для других пар граней, мы получим результирующий поток

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z. \quad (9)$$

Выражение в скобках дает меру скорости, с которой вблизи точки  $P$  среда в целом оттекает от точки  $P$ . Оно называется «дивергенцией» или «расхождением» вектора  $(u, v, w)$  и обозначается  $\operatorname{div}(u, v, w)$ ; таким образом,

$$\operatorname{div}(u, v, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (10)$$

Разделив некоторую конечную область на элементарные прямоугольные объемы, мы видим, что суммарный поток, вытекающий через границу, должен быть равен интегралу дивергенции по объему, т. е.

$$\iiint \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint (lu + mv + nw) dS. \quad (11)$$

Эту формулу, конечно, можно вывести и аналитически, не придавая входящим в нее символам никакого кинематического содержания.

## 68. Уравнения движения

Для составления динамических уравнений обратим внимание на частицу среды, занимающую в момент времени  $t$  прямоугольный элемент объема  $\delta x \delta y \delta z$ . Для бесконечно малых движений произведение массы на ускорение в направлении оси  $x$  равно  $\rho \delta x \delta y \delta z \frac{\partial u}{\partial t}$ , где  $\rho$  — плотность. За средние значения давления на соответственных гранях можно принять давления в центрах этих граней. Суммарные силы давления на гранях, перпендикулярных к оси  $x$ , будут равны

$$\left( p \pm \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z.$$

Разность сил давления дает  $-\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$  в направлении положительной оси  $x$ . Приравнявая эту силу произведению массы на ускорение, получим первое из уравнений нижеследующей системы:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (1)$$

Так как *изменим*  $\rho$ , умноженным на  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , можно пренебречь, то мы можем заменить  $\rho$  невозмущенным значением  $\rho_0$ ; индекс «0» не нужно будет сохранять во всех случаях.

Как и в § 59, имеем:

$$p = p_0 + \kappa s, \quad (2)$$

где  $s$  означает сжатие  $(\rho - \rho_0)/\rho_0$ , а  $\kappa$  — объемный модуль упругости среды. Далее, если мы, как и ранее, напомним

$$c^2 = \frac{\kappa}{\rho_0}, \quad (3)$$

то получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial z}. \quad (4)$$

Обозначим через  $\Delta$  относительное изменение (отсчитываемое от равновесного объема) объема среды, занимавшей в момент времени  $t$  область  $\delta x \delta y \delta z$ . Тогда, очевидно,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \text{div}(u, v, w), \quad (5)$$

а так как в случае малых смещений  $s = -\Delta$ , то

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \quad (6)$$

Уравнения (4) и (6) являются основными в настоящем разделе нашего изложения. Чисто кинематическую зависимость (6) иногда называют «уравнением непрерывности».

### 69. Потенциал скорости

Интегрируя уравнения (4) § 68 по времени, получим:

$$\left. \begin{aligned} u &= -c^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t s dt + u_0, & v &= -c^2 \frac{\partial}{\partial y} \int_0^t s dt + v_0, \\ \omega &= -c^2 \frac{\partial}{\partial z} \int_0^t s dt + \omega_0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $u_0, v_0, \omega_0$  — значения  $u, v, \omega$  в точке  $(x, y, z)$  в момент времени  $t=0$ . Для обширного класса случаев эти начальные значения величин  $u, v, \omega$  можно выразить в виде частных производных от некоторой однозначной функции от  $(x, y, z)$ :

$$u_0 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \quad v_0 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \quad \omega_0 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial z}. \quad (2)$$

В любой области, где эти соотношения имеют место, величины  $u, v, \omega$  могут быть выражены подобным же образом и в любой последующий момент времени  $t$ . Таким образом, из (1) следует:

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \omega = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (3)$$

где

$$\Phi = c^2 \int_0^t s dt + \Phi_0. \quad (4)$$

Эта функция  $\Phi$  называется «потенциалом скорости», по аналогии с потенциальной функцией, встречающейся в теории тяготения, в электростатике и т. д. Она была введена в гидродинамику Лагранжем.

Мгновенная конфигурация «эквипотенциальных поверхностей»  $\Phi = \text{const}$  сразу показывает распределение скорости по величине и по направлению. Пусть даны две смежные эквипотенциальные поверхности, для которых потенциалы  $\Phi$  различаются на величину  $\delta\Phi$ . Пусть  $PP'$  — нормаль к этим поверхностям; отрезок  $PP_1$  проведем параллельно оси  $x$ ;

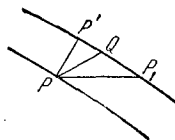


Рис. 64.

введем также обозначение  $PP' = \delta v$ . Согласно (3) проекция скорости в точке  $P$  на направление  $PP_1$  равна

$$u = -\frac{\delta\varphi}{PP_1} = -\frac{\delta\varphi}{\delta v} \frac{PP'}{PP_1} = -l \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \quad (5)$$

где через  $l$  обозначен косинус угла между нормалью  $PP'$  и осью  $Ox$ . Из (5) и из аналогичных выражений для  $v$  и  $w$  следует, что скорость в точке  $P$  нормальна к эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку, и равна по величине пределу отношения  $\frac{\delta\varphi}{\delta v}$ . Если, следовательно, нанести систему поверхностей, соответствующих значениям  $\varphi$ , отличающимся друг от друга на равные бесконечно малые приращения, то скорости в каждой точке будут ортогональны этим поверхностям и обратно пропорциональны расстояниям  $\delta v$  между смежными поверхностями. Говоря точнее, направление скорости в любой точке совпадает с направлением *наибыстрейшего уменьшения*<sup>1)</sup> потенциала  $\varphi$ , а по модулю она равна абсолютной величине градиента  $\varphi$ .

Если мы рассмотрим линейный элемент  $PQ (= \delta s)$  в любом другом направлении, то проекция скорости по направлению  $PQ$  равна пределу выражения

$$-\frac{\delta\varphi}{\delta v} \cos P'PQ = -\frac{\delta\varphi}{\delta s}, \quad (6)$$

т. е. равна  $-\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ .

Потенциал скорости всегда существует во всех тех случаях, когда в рассматриваемой области среда в начальный момент покоилась. Тогда можно положить  $\varphi_0 = 0$ , и последующие значения  $\varphi$  определяются согласно формуле

$$\varphi = c^2 \int_0^t s dt. \quad (7)$$

Это имеет место для всех случаев, когда движение было создано колебаниями твердых или иных тел.

Истинное содержание свойства, отличающего указанный тип движения от всех других, проявляется наиболее

<sup>1)</sup> Необходимо заметить, что во многих книгах  $\varphi$  дается с противоположным знаком, так что  $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$  и т. д.

ясно при рассмотрении «циркуляции» вдоль замкнутой кривой. Разделим кривую на бесконечно малые линейные элементы и длину каждого из них помножим на тангенциальную составляющую скорости, сохраняя одно и то же направление обхода для всей кривой. Сумма таких произведений по всей кривой и называется «циркуляцией». Ее можно записать следующим образом:

$$\int \left( u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds} + w \frac{dz}{ds} \right) ds \text{ или } \int (u dx + v dy + w dz). \quad (8)$$

Для случая наличия потенциала тангенциальная скорость равна  $-\frac{\partial \phi}{\partial s}$ , а интеграл по замкнутому контуру равен нулю, так как начальная и конечная величины  $\phi$  имеют одно и то же значение. Следовательно, циркуляция равна нулю по каждому из замкнутых контуров, которые можно провести в рассматриваемой области. Рассматриваемый тип движения называется «безвихревым». Это название связано с применением вышесказанного к случаю бесконечно малого контура. Этот термин имеет преимущество в том, что он привлекает внимание к геометрическому свойству, а не к аналитической форме выражения.

Потенциалу скорости можно дать также и динамическую трактовку. Выражение (3), написанное в виде

$$\rho_0 u = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \rho_0 v = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \rho_0 w = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (9)$$

показывает, что  $\phi$  есть отнесенный к единице массы потенциал такой системы внешних импульсивных сил, которая мгновенно сообщила бы покоящейся жидкости данное состояние движения.

Наиболее важной является теорема о сохранении безвихревого характера движения; однако необходимо учитывать ограничения, принимавшиеся при ее доказательстве. Во-первых, предполагалось, что отсутствовало трение в жидкости,—и это обстоятельство имеет принципиальное значение. Далее, предполагалось, что среда свободна от действия внешних сил; впрочем, это ограничение снимается в случае действия сил, имеющих потенциал (на единицу массы), подобно силе тяготения. Наконец, предполагалось, что движения бесконечно малы. Последнее

предположение упрощает доказательство и включает в себя большинство случаев, которые интересны с точки зрения акустики. Более строгое исследование показало бы, что циркуляция (при удовлетворении указанных требований) всегда остается постоянной по замкнутому контуру, если считать, что контур движется вместе с жидкостью. Если для любого контура, проведенного в конечной области жидкости, циркуляция вначале была равна нулю, то она останется равной нулю для каждого такого контура и в дальнейшем.

### 70. Общее уравнение звуковых волн

Мы будем впредь полагать, что потенциал скорости существует, во всяком случае для однородной среды, рассмотрением которой пока ограничимся. Тогда из (6) § 68 имеем:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla^2 \varphi, \quad (1)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Этот символ  $\nabla^2$  называется «оператором Лапласа» ввиду того, что он постоянно встречается в аналитической теории притяжения тел, развитой впервые Лапласом. Дифференцируя выражение (4) § 69 по  $t$ , получим:

$$c^2 s = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (3)$$

Наконец, исключая  $s$ , найдем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \varphi. \quad (4)$$

Это уравнение можно рассматривать как общее дифференциальное уравнение звуковых волн в однородной среде. Если удастся найти решение, которое дает предписанные начальные значения  $\varphi$  и  $s$  (или  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ) и удовлетворяет остальным условиям задачи, то последующие значения  $s$  определяются из выражения (3), а величины  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — из (3) § 69.

Обратим внимание на вид, принимаемый уравнениями для случая несжимаемой жидкости. Этот случай можно рас-

считать как предельный, при стремлении  $c$  к бесконечности и при одновременном стремлении  $s$  к нулю так, чтобы  $c^2 s = \frac{p-p_0}{\rho_0}$  оставалось конечным. Уравнение непрерывности (6) § 68 принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

что, впрочем, непосредственно следует из самого смысла понятия «дивергенция». В случае безвихревого движения уравнение превращается в

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (6)$$

Это уравнение тождественно «уравнению Лапласа» в теории тяготения. То же уравнение встречается и в теории электропроводности (или теплопроводности) в металлах. Если, например, через  $\varphi$  обозначить электрический потенциал, а удельное сопротивление среды принять равным единице, то формулы (3) § 69 дают компоненты тока. Эта аналогия окажется полезной в дальнейшем.

Теория движения несжимаемой жидкости способна иногда лучше пояснить некоторые акустические явления в воздухе, чем можно было бы подумать с первого взгляда. Мы склонны забывать, что скорость, с которой изменения давления распространяются в воде, в конце концов только в четыре или пять раз больше скорости в воздухе и что видимые движения воды (или, во всяком случае, движения, которые легко себе вообразить) при условиях, когда сжимаемость заведомо играет малую роль, могут дать ценные указания о поведении газообразной среды при аналогичных условиях. Это замечание найдет множество иллюстраций в последующих главах.

Кинетическая энергия системы звуковых волн выражается формулой

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \iiint (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \rho \iiint \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz. \quad (7) \end{aligned}$$

Потенциальная энергия, в соответствии с § 60, запи-

шется в виде

$$V = \frac{1}{2} \kappa \iiint s^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \frac{\rho}{c^2} \iiint \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx dy dz. \quad (8)$$

Интегрирование производится по всей области, охваченной возмущением.

## 71. Сферические волны

В случае плоских волн с фронтами, перпендикулярными к оси  $Ox$ , уравнение (4) § 70 превращается в

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (1)$$

откуда

$$\varphi = f(ct - x) + F(ct + x). \quad (2)$$

Эта формула не требует дальнейшего обсуждения.

Следующий по степени важности случай—симметричные сферические волны. Если  $\varphi$  зависит только от расстояния  $r$  от начала координат и от времени  $t$ , то скорость частиц равна  $-\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ , направлена по радиусу (считая положительным направление наружу) и одинакова по величине на любой сферической поверхности с центром в начале координат  $O$ .

Вместо того чтобы применять общее уравнение к этому случаю, проще заново вывести кинематическое соотношение, соответствующее уравнению (1) § 70. Поток, вытекающий через поверхность сферы с радиусом  $r$  наружу, равен  $-\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot 4\pi r^2$ , а разность потоков через внутреннюю и внешнюю поверхности сферического слоя толщиной  $\delta r$  равна

$$-4\pi \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \delta r.$$

Объем этого сферического слоя равен  $4\pi r^2 \delta r$ ; значит, эта разность потоков должна быть равна  $\dot{\Delta} \cdot 4\pi r^2 \delta r$  или



—  $s \cdot 4\pi r^2 \delta r$ , откуда

$$r^2 \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right). \quad (3)$$

Поскольку, как обычно,

$$c^2 s = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (4)$$

получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right). \quad (5)$$

Это уравнение можно написать также в виде

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}. \quad (6)$$

Решение этого уравнения

$$r\varphi = f(ct - r) + F(ct + r) \quad (7)$$

представляет собой суперпозицию двух систем волн, бегущих со скоростью  $c$  от центра и к центру соответственно. Для расходящейся системы волн

$$r\varphi = f(ct - r) \quad (8)$$

имеем согласно (4)

$$crs = f'(ct - r). \quad (9)$$

Любое значение  $rs$  при распространении не изменяется; следовательно, сжатие  $s$  при распространении уменьшается в отношении  $1/r$ , а потенциальная энергия в единице объема уменьшается как  $1/r^2$ . Для скорости частиц имеем:

$$q = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} f'(ct - r) + \frac{1}{r^2} f(ct - r). \quad (10)$$

Зависимость от расстояния здесь более сложная, но по мере распространения волны первый член становится преобладающим и можно считать скорость в соответственных точках волны пропорциональной  $1/r$ , а кинетическую энергию в единице объема — пропорциональной  $1/r^2$ .

Для расходящейся волны имеем из (9)

$$crs = -\frac{\partial}{\partial r} (r\varphi), \quad (11)$$

а для сходящейся —

$$crs = \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi). \quad (12)$$

Эти соотношения соответствуют выражению (5) § 60, которое является, действительно, частным случаем (11) и (12), так как при увеличении  $r$  сферические волны в пределе переходят в плоские волны.

Можно привлечь общие соображения § 23, чтобы доказать, что в расходящейся (или сходящейся) волне энергия состоит наполовину из кинетической и наполовину из потенциальной.

Решение (7) может быть применено к области, заключенной между концентрическими сферами, или к области, имеющей только одну сферическую границу, внутреннюю или внешнюю. Во всяком случае, для определенности задачи необходимо задать условия, которые должны быть удовлетворены на границах, как лежащих в конечной области, так и на бесконечности. В частности, даже когда область безгранична, точка  $r = 0$  должна считаться внутренней границей; в этой точке, например, может находиться «источник» звука (§ 73). В случае отсутствия источника поток через малую сферическую поверхность, окружающую  $O$ , должен стремиться к нулю вместе с радиусом поверхности, т. е. должно быть

$$\lim_{r=0} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 \right) = 0. \quad (13)$$

В применении к формуле (7) это условие дает

$$f(ct) + F(ct) = 0 \quad (14)$$

для всех значений  $t$ ; тогда общее решение принимает вид

$$r\varphi = F(ct + r) - F(ct - r). \quad (15)$$

Эту формулу можно использовать для определения движения в безграничной среде, возникающего при произвольных начальных условиях, симметричных относительно  $O$ . Пусть при  $t = 0$  заданы значения

$$\varphi = \varphi_0(r), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \chi_0(r). \quad (16)$$

Первая из этих функций определяет начальное распределение скорости, вторая — распределение сжатия. Функция  $F$  должна теперь удовлетворять следующим условиям:

$$F(r) - F(-r) = r\varphi_0(r), \quad (17)$$

$$F'(r) - F'(-r) = \frac{r}{c} \chi_0(r). \quad (18)$$

Следует заметить, что переменная  $r$  существенно положительна; это объясняет, почему для определения  $F$  для положительного и отрицательного значений аргумента необходимы два уравнения.

Предположим, например, что начальная скорость везде отсутствует, а имеет место только начальное сжатие; тогда  $\varphi_0(r) = 0$ . Из (17) и (18) получаем:

$$F'(r) = -F'(-r) = \frac{1}{2} \frac{r}{c} \chi_0(r). \quad (19)$$

Сжатие в момент времени  $t$  определяется по формуле

$$s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{F'(ct+r) - F'(ct-r)}{cr}. \quad (20)$$

Формула принимает различный вид в зависимости от того, какая из величин больше:  $r$  или  $ct$ . В первом случае

$$s = \frac{1}{2c^2r} \{(r+ct)\chi_0(r+ct) + (r-ct)\chi_0(r-ct)\}, \quad (21)$$

во втором —

$$s = \frac{1}{2c^2r} \{(ct+r)\chi_0(ct+r) - (ct-r)\chi_0(ct-r)\}. \quad (22)$$

В качестве примера допустим, что задано постоянное начальное сжатие ( $=s_0$ ) внутри сферы радиуса  $a$  и что при  $r > a$  сжатие равно нулю. Проследим последующие изменения  $s$  в точках вне области первоначального возмущения. Так как в нашем предположении  $\chi_0(r)$  равно нулю для  $r > a$ , то первые члены в скобках в выражениях (21) или (22) в данном случае обращаются в нуль. Пока  $ct < r - a$ , вторая часть (21) также остается равной нулю, но когда  $ct$  оказывается между  $r - a$  и  $r$ , то

$$s = \frac{s_0}{2r} (r - ct). \quad (23)$$

Когда  $ct > r$ , следует применять формулу (22), и пока  $ct < r + a$ , формула (23) остается справедливой. Наконец, при  $ct > r + a$  опять  $s = 0$ . Результаты представлены на графиках рис. 65, дающих соответственно зависимость  $s$  от времени  $t$  в заданной точке и пространственное

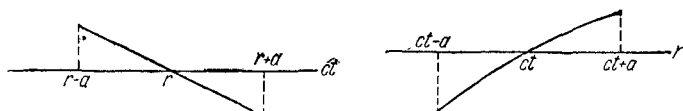


Рис. 65.

распределение  $s$  в заданный момент времени. Оказывается, что по истечении промежутка времени  $2a/c$  образуется расходящаяся волна в виде сферического слоя толщиной  $2a$  и что  $s$  положительно на внешней половине толщины слоя и отрицательно на внутренней половине. Как изменяется скорость — можно выяснить при помощи формулы  $q = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ . Для значений  $t$ , расположенных между  $(r-a)/c$  и  $(r+a)/c$ , т. е. для промежутка времени, в течение которого волна проходит через рассматриваемую точку, находим:

$$\Phi = c^2 \int_0^t s dt = \frac{cs_0}{4r} \{a^2 - (r - ct)^2\}; \quad (24)$$

для других же значений  $t$  имеем  $\Phi = 0$ . Следовательно, для указанного промежутка времени имеем:

$$q = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{cs_0}{4r^2} (a^2 + r^2 - c^2 t^2). \quad (25)$$

Если  $r$  велико по сравнению с  $a$ , то скорость меняет знак приблизительно при  $t = \frac{r}{c}$ . При этом скорость будет направлена от центра во внешней половине слоя и к центру — во внутренней половине. На границах возмущенной области, где  $r = ct \pm a$ , имеем  $q = \pm cas_0/2r$ . Когда расходящаяся волна достигает некоторой точки, скорость мгновенно возрастает от нуля до значения  $q = +cas_0/2r$ ; когда волна покидает эту точку, скорость мгновенно переходит от значения  $-cas_0/2r$  до нуля. При-

чину разрывов в этом решении следует искать, конечно, в задании разрывного же начального распределения сжатия. Сомнения, которые могут возникнуть на этой почве, можно устранить, мысленно заменяя разрывы резкими, но непрерывными переходами в начальном распределении.

Решение (6) для общего случая начальных условий (16) может быть исследовано аналогичным образом; ограничимся приведением результатов. Легко проверить, что все условия задачи окажутся выполненными, если в качестве решения взять выражение

$$r\varphi = \frac{1}{2}(r+ct)\varphi_0'(r+ct) + \frac{1}{2}(r-ct)\varphi_0'(r-ct) + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} z\chi_0(z) dz \quad (26)$$

для  $ct < r$  и выражение

$$r\varphi = \frac{1}{2}(ct+r)\varphi_0'(ct+r) - \frac{1}{2}(ct-r)\varphi_0'(ct-r) + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} z\chi_0(z) dz \quad (27)$$

для  $ct > r$ .

Так как, очевидно, начало координат занимает особое положение в теории сферических волн, желательно рассчитать значения  $\varphi$  в этой точке, имея еще в виду, что результат сейчас же понадобится нам при переходе к рассмотрению решения общего уравнения звуковых волн (4) § 70. Искомое значение можно получить из (27) или более непосредственно из (15). Находим:

$$\varphi = \lim_{r=0} \frac{F(ct+r) - F(ct-r)}{r} = 2F'(ct) \quad (28)$$

и, следовательно, пользуясь (17) и (18),

$$\varphi = t\chi_0(ct) + \varphi_0(ct) + ct\varphi_0'(ct) = t\chi_0(ct) + \frac{d}{dt}t\varphi_0(ct). \quad (29)$$

Например, в задаче, рассмотренной выше, в которой имели  $\varphi_0(r) = 0$  и  $\chi_0(r) = c^2 s_0$  или 0 при  $r < a$  и  $r > a$  соответственно, находим  $\varphi = c^2 s_0 t$  или 0 при  $t < \frac{a}{c}$  и  $t > \frac{a}{c}$

соответственно. Следовательно, значение  $s$  в точке  $O$  есть  $s_0$  для  $t < \frac{a}{c}$  и  $0$  для  $t > \frac{a}{c}$ ; в момент же  $t = \frac{a}{c}$   $s_0$  равно  $-\infty$ . Чтобы избежать этого последнего результата, мы должны слегка видоизменить начальные условия, заменяя исходное распределение плотности

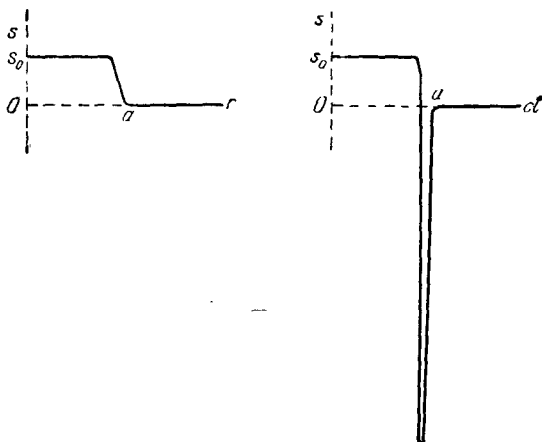


Рис. 66.

непрерывным распределением. На рис. 66 показано начальное распределение  $s$ , быстро, но непрерывно спадающее от  $s_0$  до  $0$  вблизи  $r = a$ ; здесь же дана соответственная зависимость  $s$  в точке  $O$  от времени.

Задача, которую мы рассмотрели, указывает на заметное отличие от теории плоских волн; в сферической волне, возникшей в результате произвольного возмущения, содержатся и сжатые и разреженные участки даже в тех случаях, когда начальная скорость отсутствует и начальное возмущение плотности имеет везде одинаковый знак. Это утверждение легко обобщить при помощи выражения (1) § 69. Если мы проинтегрируем значение  $s$  в некоторой точке  $P$  за период времени, в течение которого успевает пройти вся волна, так что значения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  обращаются в нуль на обоих пределах, мы найдем, что все производные интеграла по координатам равны нулю.

Следовательно, интеграл имеет одну и ту же величину для всех точек  $P$ . Но, выбирая  $P$  на бесконечном расстоянии, где  $s$  стремится к нулю вследствие сферического расхождения, мы видим, что значение интеграла должно обращаться в нуль, т. е.

$$\int s dt = 0. \quad (30)$$

Следовательно, среднее значение  $s$  в любой точке равно нулю. Этот результат, конечно, не ограничивается случаем сферических волн.

## 72. Волны, возникающие в результате заданного начального возмущения

Рассмотрим теперь волны, возникающие при заданных начальных условиях в неограниченной среде в общем случае. Пусть в момент  $t = 0$  задано

$$\varphi = \varphi_0(x, y, z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \chi_0(x, y, z), \quad (1)$$

где  $\varphi_0$  и  $\chi_0$  — произвольные функции. Чтобы найти результирующий эффект в любой последующий момент в любой заданной точке  $P$ , рассмотрим сначала среднее значение  $\varphi$  на сфере радиуса  $r$  с центром в точке  $P$ . Это среднее значение  $\bar{\varphi}$  выражается формулой

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi} \int \int \varphi d\omega, \quad (2)$$

где через  $d\omega$  обозначен элементарный телесный угол ( $\delta S/r^2$ ) с вершиной в точке  $P$ , опирающийся на элементарный участок  $\delta S$  сферической поверхности. Аналогично введем величину  $\bar{s}$ :

$$\bar{s} = \frac{1}{4\pi} \int \int s d\omega. \quad (3)$$

Так же как и (2),  $\bar{s}$  будет зависеть только от переменных  $r$  и  $t$ . Помножим обе части равенства (3) § 70 на  $d\omega/4\pi$  и проинтегрируем по указанной выше сфере радиуса  $r$ ; это даст равенство

$$c^2 \bar{s} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}. \quad (4)$$

Очевидно также, что нормальная скорость, усредненная по всей сфере, будет равна  $-\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}$ . Те соображения, которые в § 71 были применены для определения скорости изменения  $s$  на основе рассмотрения потока, вытекающего из области, ограниченной двумя сферическими поверхностями с радиусами  $r$  и  $r + \delta r$ , можно применить для доказательства того, что в настоящем случае имеет место равенство

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \right). \quad (5)$$

Исключая  $\bar{s}$ , найдем:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \right). \quad (6)$$

Это равенство по форме совпадает с (5) § 71. Мы видим теперь, что  $\bar{\varphi}$  есть потенциал скорости для сферических волн, которые возникли бы при начальных распределениях скорости и сжатия, определяемых формулами

$$\varphi = \bar{\varphi}_0(r), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \bar{\chi}_0(r). \quad (7)$$

Эти функции от  $r$  являются средними значениями величин  $\varphi_0(x, y, z)$  и  $\chi_0(x, y, z)$ , взятыми по указанной выше сфере. Из (29) § 71 следует, что значение  $\varphi$  в точке  $P$  определится по формуле

$$\varphi_P = \frac{d}{dt} t \bar{\varphi}_0(ct) + t \bar{\chi}_0(ct). \quad (8)$$

Эта формула позволяет вычислить величину  $\varphi$  в точке  $P$  в любой заданный момент времени  $t$ . Словами эту формулу можно выразить следующим образом:

Для того чтобы найти часть  $\varphi$ , обусловленную начальным распределением сжатия, мы описываем вокруг точки  $P$  сферу радиуса  $ct$ , вычисляем среднее значение заданных начальных значений  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , т. е. среднее значение функции  $\chi_0(x, y, z)$  в точках пространства, через которые проходит сфера, и умножаем на  $t$ . Для того чтобы найти часть, обусловленную начальными скоростями, мы



заменяем среднюю величину заданных начальных значений  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  средней величиной заданных начальных значений

$\varphi$ , т. е. средним значением функции  $\varphi_0(x, y, z)$ , и измененный таким образом результат дифференцируем по  $t$ .

Теорема, выражаемая уравнением (8), была сформулирована Пуассоном (1819); ее представление именно в виде (8) и ее интерпретация даны Стоксом (1850). Результат, сформулированный указанным образом, весьма прост, если принять во внимание большую общность учитываемых условий.

Чтобы проследить за последовательностью состояний среды в точке  $P$ , рассмотрим ряд сфер, радиусы ( $ct$ ) которых непрерывно увеличиваются, начиная от нулевого значения. Если точка  $P$  находится снаружи области,

занятой начальным возмущением, эффект будет отсутствовать до тех пор, пока сферы не начнут пересекать эту область. Если  $r_1$  и  $r_2$  представляют соответственно наименьшее и наибольшее расстояния точки  $P$  от границы этой области, то возмущение в точке  $P$  начнется по истечении промежутка времени  $r_1/c$ , будет продолжаться в течение времени  $(r_2 - r_1)/c$  и затем прекратится.

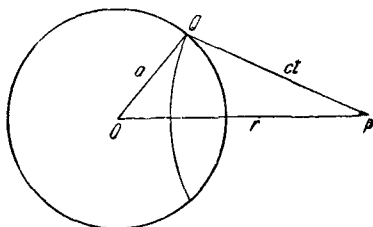


Рис. 67.

Если из различных точек границы первоначально возмущенной области, как из центров, провести ряд сфер с радиусами  $ct$ , то внешняя огибающая поверхность этих сфер явится границей области, в которую возмущение уже успело прийти к моменту  $t$ . Такие огибающие, соответствующие последовательным значениям  $t$ , образуют последовательность, называемую в геометрии «параллельными поверхностями»; иными словами, граница возмущенной области распространяется всюду по нормали к себе с постоянной скоростью  $c$ .

В качестве простого примера применения формулы (8) мы можем решить задачу, уже рассмотренную в § 71, которой предполагалось, что начальное постоянное

сжатие  $s_0$  занимает область внутри сферы радиуса  $a$  с центром в точке  $O$ . При пересечении области начального возмущения сферической поверхностью радиуса  $ct$ , описанной из точки  $P$ , как из центра (рис. 67), часть поверхности, заключенной внутри области начального возмущения, равна  $2\pi \cdot PQ^2(1 - \cos OPQ)$ , а среднее значение заданных начальных значений сжатия  $s$  по всей поверхности ( $4\pi \cdot PQ^2$ ) равно

$$\frac{1}{2} (1 - \cos OPQ) s_0 = \frac{a^2 - (ct - r)^2}{4ctr} s_0,$$

где  $r = OP$ . Таким образом, из (8) в согласии с (24) § 71 получим:

$$\varphi_P = \frac{cs_0}{4r} \{a^2 - (ct - r)^2\}. \quad (9)$$

### 73. Источники звука. Отражение

Весьма полезное понятие «точечного источника» введено в акустику Гельмгольцем. Следуя Максвеллу и Рэлею, будем представлять себе, что в точке расположения источника жидкость вводится или выводится с известной скоростью и что «производительность» источника определяется объемом, вводимым таким образом в единицу времени. Цуг волн, создаваемый источником с производительностью  $f(t)$ , расположенным в начале координат, можно представить соответственно в виде

$$4\pi r\varphi = f\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad (1)$$

поскольку это дает:

$$\lim_{r=0} \left( -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 \right) = f(t). \quad (2)$$

Дифференцируя общее уравнение звуковых волн (4) § 70 по  $x$ ,  $y$  или  $z$ , мы находим, что коль скоро  $\varphi$  является решением этого уравнения, то решениями будут и соответственные производные  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$  и  $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ . Таким обра-

зом, из (1) выводим новое решение

$$4\pi\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \quad (3)$$

которое удовлетворяет общему дифференциальному уравнению везде, кроме особой точки  $r=0$ . Значения полученной таким образом величины  $\varphi$  можно интерпретировать как потенциал скорости «двойного источника», образованного из двух простых источников, расположенных рядом и имеющих все время противоположные фазы. Более полно этот случай будет рассмотрен в § 76 для частного случая гармонических колебаний.

Задача отражения звука от жесткой бесконечной плоскости решается методом «зеркальных отражений». Если для каждого источника звука  $P$ , расположенного слева от границы, мы поместим такой же источник в точке  $P'$ , представляющей геометрическое отражение точки  $P$  в данной плоскости, то, очевидно, условие равенства нулю нормальной скорости на границе будет по-прежнему выполнено, даже если устранить границу. Следовательно, фактическое движение слева от границы будет складываться из движения, создаваемого данным источником  $P$ , и движения, создаваемого изображением  $P'$ . Следует заметить, что случай жесткой границы—это единственный случай, где физическое «изображение» точечного источника является точно таким же точечным источником.

С другой стороны, в случае подводного звука отражение от свободной границы воды можно представить в виде *отрицательного* изображения источника. Так, в случае источника, заданного в виде (1), результирующий эффект можно выразить в виде

$$4\pi\varphi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{1}{r'} f\left(t - \frac{r'}{c}\right), \quad (4)$$

где  $r'$  обозначает расстояние от точки  $P'$ . Действительно, на свободной поверхности, где  $r=r'$ , это дает:

$$p = p_0 + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

На большом расстоянии этот результирующий эффект

эквивалентен действию двойного источника. В частности, на глубинах, достаточно малых по сравнению с расстоянием, эффект реального источника почти полностью уничтожается действием его изображения.

#### 74. Рефракция, обусловленная различиями температуры

Вопросы, связанные с распространением волн в неоднородной среде, могут быть рассмотрены только в общих чертах, при помощи понятий, заимствованных из геометрической оптики. Если имеет место резкое изменение свойств среды на некоторой поверхности, то закон распространения волн, конечно, изменится. В случае, если размеры поверхности и ее радиус кривизны велики по сравнению с длиной волны, мы будем иметь дело с явлениями регулярного отражения и преломления, как и в оптике. Случаи настоящих разрывов непрерывности параметров среды, разумеется, не встречаются в действительной атмосфере, но теория практически останется прежней, если изменения свойств будут происходить на расстоянии, малом по сравнению с длиной волны.

С другой стороны, когда свойства среды меняются непрерывно так, что изменение свойств среды на длине волны незначительно, распространение происходит аналогично рефракции света в атмосфере; эти вопросы рассматриваются обычно в книгах по оптике и астрономии. В атмосфере однородного покоящегося газа различия в скорости звука могут возникнуть только вследствие различий в температуре (§ 59). Рефракцией, обусловленной различием температуры по высоте, занимался впервые Осборн Рейнольдс (1876). Предположим, что, как это обычно бывает, температура уменьшается при увеличении высоты над землей. Так как скорость звука пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры, то нижние части фронта волны будут распространяться с большей скоростью, чем верхние, так что фронт, который первоначально был вертикальным, будет по мере движения все больше и больше отклоняться вверх. Следовательно, на достаточном расстоянии звук будет в большей части проходить над головой наблюдателя, а те остаточные эффекты, которые наблюдатель все же услышит, будут обусловлены дифракцией.

Напротив, при увеличении температуры с высотой над землей фронты волн будут загигаться вниз и интенсивность звука на заданном расстоянии будет больше, чем в случае температуры, постоянной по высоте. Такие условия иногда встречаются в атмосфере ясной ночью после теплого дня, когда поверхность земли охлаждается вследствие излучения тепла и нижний слой атмосферы оказывается холоднее, чем верхние слои.

Эта теория в дальнейшем была развита Рэлеем при помощи понятия о звуковых лучах. Если поверхности равных скоростей представляют собой горизонтальные плоскости, то все лучи будут проходить в вертикальных плоскостях. Кривизну луча можно вычислить непосредственно методом, предложенным проф. Джемсом Томсоном <sup>1)</sup>. Если через  $R$  обозначить радиус кривизны луча, то два волновых фронта, проходящих через концы элемента траектории  $\delta s$ , будут наклонены друг относительно друга на угол  $\delta s/R$ ; если через  $\delta s'$  обозначить длину участка, выделенного радиусами кривизны на смежном луче в той же самой вертикальной плоскости, то будем иметь:

$$\delta s' = \left( 1 - \frac{\delta n}{R} \right) \delta s, \quad (1)$$

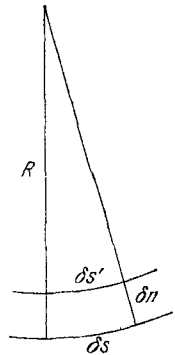


Рис. 68.

где через  $\delta n$  обозначено расстояние между двумя лучами (рис. 68). Так как элементы  $\delta s$  и  $\delta s'$  пробегаются звуком за одно и то же время, должно выполняться равенство

$$\frac{\delta s'}{c + \delta c} = \frac{\delta s}{c}, \quad (2)$$

откуда, принимая во внимание (1), получим:

$$\frac{1}{R} = - \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial n}. \quad (3)$$

В случае понижения температуры при поднятии вверх величина  $\frac{\partial c}{\partial n}$  — отрицательная, кривизна  $\frac{1}{R}$  положительна

<sup>1)</sup> James Thomson (1822—1892), профессор в Бельфасте (1857—1872) и в Глазго (1872—1889).

(как на рис. 68) и лучи загибаются вверх. Но если температура с увеличением высоты растет, лучи будут загибаться вниз, так что, например, наблюдатель, находящийся на том же уровне, что и источник, мог бы услышать звук, который в случае однородной атмосферы оказывался бы заслоненным препятствием.

Формула (3) приводит к обычному закону преломления. Если через  $\psi$  обозначить угол наклона луча к горизонту, а через  $y$ —вертикальную координату, то

$$\frac{\partial c}{\partial n} = \frac{dc}{dy} \cos \psi, \quad \frac{\partial c}{\partial s} = \frac{dc}{dy} \sin \psi. \quad (4)$$

Отсюда находим, что вдоль луча

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{R} = -\frac{1}{c} \frac{dc}{ds} \operatorname{ctg} \psi \quad (5)$$

или

$$c \sec \psi = \operatorname{const}. \quad (6)$$

Это и есть закон преломления. Обратно, из (6) можем получить формулу (3). Если величина  $c$  задана как функция от  $y$ , то уравнение (6) определяет траектории лучей.

В качестве простейшего предположения примем, что температура уменьшается (или увеличивается) с высотой, но что градиент остается *постоянным*. Сюда относится как частный случай «атмосфера в состоянии конвективного равновесия» под действием силы тяжести; в этом случае градиент равен

$$-\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\theta}{H}. \quad (7)$$

Здесь  $H$ —высота однородной атмосферы (§ 59), соответствующая температуре  $\theta$ <sup>1)</sup>. Этот градиент составляет примерно  $1^\circ \text{C}$  на  $100 \text{ м}$ . Если бы закон равномерного уменьшения температуры действовал без ограничений, то на некоторой высоте мы бы встретили нулевую температуру (по абсолютной шкале). Возьмем начало координат на этой высоте и направим ось  $y$  вниз; тогда температура будет расти пропорционально  $y$ , а скорость звука  $c$ —пропор-

<sup>1)</sup> Лордом Кельвином (1862) было показано, что это — состояние, в которое атмосфера придет под действием только одних конвекционных потоков, при отсутствии теплопроводности и излучения. Следовательно, равновесие является нейтральным. Если температура уменьшается при поднятии быстрее, то равновесие делается неустойчивым.

ционально  $y^{1/2}$ . Отсюда при учете (6) следует, что вдоль луча будет выполнено соотношение

$$y = C \cos^2 \psi. \quad (8)$$

Лучи будут представлять собой, следовательно, циклоиды, образующие окружности которых катятся по линии  $y=0$  снизу. Если, наоборот, температура *увеличивается* с высотой и градиент постоянен, то лучи будут циклоидами, образующие окружности которых катятся по верхней стороне линии, соответствующей нулевой температуре. Во всех практически важных случаях мы имеем дело только с отрезками кривых, близких к вершинам. Поэтому дуги можно рассматривать как отрезки окружности с радиусом, равным двойному расстоянию до уровня (вверх или вниз от данной точки), соответствующего нулевой температуре. В предельном случае уменьшения температуры при поднятии, которому соответствует формула (7), этот радиус будет равен (приблизительно)  $2 \cdot 273 \cdot 100 = 54\ 600$  м для температуры  $0^\circ$  С.

## 75. Рефракция, обусловленная ветром

Другой интересный случай распространения звука— это рефракция, обусловленная ветром. *Поступательное* движение всей *среды в целом*, конечно, не вносит усложнений и относительное движение звуковых волн остается точно таким же, как и в случае неподвижной среды. Однако обычно скорость ветра вблизи земли меньше, чем наверху, так как движение нижних слоев воздуха заторможено встречаемыми препятствиями. Таким образом, когда волновой фронт движется в направлении ветра, верхние части фронта распространяются (относительно земли) быстрее, чем нижние, так как скорость ветра складывается со скоростью звука. Следовательно, фронт будет непрерывно наклоняться вниз. По той же причине волновой фронт, движущийся против ветра, будет отклоняться вверх, так что звук на некотором расстоянии будет проходить выше наблюдателя. Это объяснение известного факта, что звук слышен лучше и дальше, когда источник расположен с наветренной стороны, чем при расположении его с подветренной стороны от наблюдателя, было

впервые дано Стоксом (1857). Единственное более раннее объяснение заключалось в том, что предполагали, что звук, прошедший некоторое расстояние по ветру, фактически прошел меньший путь по воздуху и поэтому испытал меньшее сферическое расхождение, чем в отсутствие ветра. Так как скорость ветра мала по сравнению со скоростью звука, эта причина никак не может

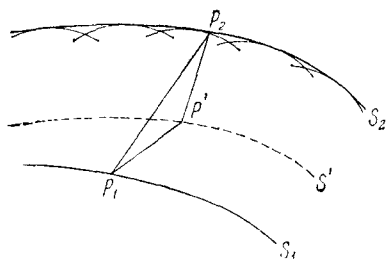


Рис. 69.

объяснить весьма ясно выраженные наблюдаемые эффекты. Правильную теорию дал независимо Рейнольдс (1874), подтвердивший ее рядом интересных опытов.

Для того чтобы и далее применять к задаче о распространении звука методы, разработанные в оптике, необходимо, как

и в теории аберрации, различать направление луча и направление нормали к фронту волны. Пусть поверхность  $S_1$  представляет положение волнового фронта в момент времени  $t$ ,  $S'$  — положение в момент  $t + \delta t$  тех частиц, которые были на  $S_1$ , и  $S_2$  — новое положение волнового фронта. Пусть  $P_1$  — некоторая точка на  $S_1$ , а  $P'$  — соответствующая точка на  $S'$ , так что  $P_1P'$  будет изображать траекторию частицы среды, пройденную ею за время  $\delta t$ . Согласно законам оптики новое положение волнового фронта  $S_2$  получится как огибающая системы сферических поверхностей радиуса  $c\delta t$ , описанных из различных точек  $P'$ , принадлежащих поверхности  $S'$ , как из центров. Если  $P_2$  — точка огибающей, соответствующая  $P'$ , то  $P_1P_2$  будет элементом луча, а  $P'P_2$  — элементом нормали к волновому фронту. Так как  $P_1P' = U\delta t$ , где  $U$  — скорость движения среды, то «скорость по лучу» ( $P_1P_2/\delta t$ ) есть результирующая скорости волны относительно среды и скорости среды.

В рассматриваемой задаче скорость  $U$  направлена горизонтально и зависит только от высоты ( $y$ ). Если обозначить через  $\psi$  и  $\phi$  соответственно углы, составляемые с горизонталью лучом и нормалью к волновому фронту, то имеет



место соотношение

$$\sin(\varphi - \psi) = \frac{U}{c} \sin \psi, \quad (1)$$

или при условии, что  $U/c$  мало, как это обычно и бывает,

$$\varphi = \psi + \frac{U}{c} \sin \psi. \quad (2)$$

Для того чтобы установить закон изменения направления луча, рассмотрим вначале случай преломления на горизонтальной границе двух однородных потоков  $U, U'$ . Если обозначить через  $\varphi$  и  $\varphi'$  соответственно углы наклона нормали к волновому фронту с двух сторон плоскости раздела, то получим:

$$c \sec \varphi + U = c' \sec \varphi' + U'. \quad (3)$$

Здесь левая и правая части представляют собой скорость движения следа волнового фронта на плоскости раздела. Рэлей указал, что, поскольку  $\sec \varphi' \geq 1$ ,  $\varphi'$  становится мнимой величиной при

$$U' - U > c \sec \varphi - c'. \quad (4)$$

Следовательно, имеет место полное отражение всех волновых фронтов, углы наклона ( $\varphi$ ) которых к вертикали меньше некоторого предельного значения.

Так как непрерывное изменение  $U$  можно аппроксимировать последовательностью малых разрывов, мы приходим к заключению, что (3) останется справедливым и в том случае, когда  $\varphi, c, U$  и  $\varphi', c', U'$  относятся к любым двум точкам на одном и том же луче. Действительно, выражение (3) является обобщением (6) § 74.

Если мы ограничимся рассмотрением только эффекта ветра, т. е. будем считать  $c$  постоянным, то вдоль любого луча будет выполняться равенство вида

$$\sec \varphi + \frac{U}{c} = \text{const}, \quad (5)$$

или, при учете (2),

$$\sec \psi + \frac{U}{c} \sec^2 \psi = \text{const}, \quad (6)$$

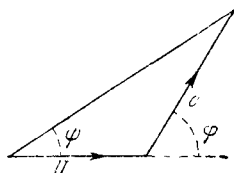


Рис. 70.

если только  $\psi$  не слишком велико. Дифференцируя это выражение по дуге  $s$  и положив  $\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{R}$ ,  $\frac{dy}{ds} = \sin \psi$ , найдем:

$$\frac{1}{R} \left( 1 + \frac{2U}{c} \sec \psi \right) = - \frac{1}{c} \frac{dU}{dy}. \quad (7)$$

Таким образом, луч загибается вниз или вверх в зависимости от того, положительно или отрицательно значение  $\frac{dU}{dy}$ . Если, как это обычно бывает, скорость ветра растет с высотой, будет осуществляться один или другой случай, в зависимости от того, каков знак  $U$ , т. е. от того, направлен ли луч по ветру или против ветра. Если градиент  $\frac{dU}{dy}$  постоянен, то пока угол наклона  $\psi$  остается малым, все лучи будут иметь приблизительно одну и ту же постоянную кривизну вследствие малости отношения  $U/c$ . Например, луч, вышедший из точки вблизи земли под углом  $\alpha$  в сторону ветра, достигает высоты  $R(1 - \cos \alpha)$  и проходит расстояние по горизонтали  $2R \sin \alpha$ , где  $R = \frac{c}{m}$  и  $m$  — вертикальный градиент ветра.

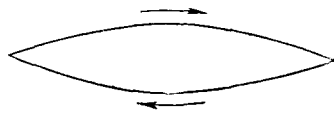


Рис. 71.

Лучи, выходящие на высоте  $h$  и идущие против ветра, проходят наибольший путь по горизонтали. Это можно показать в том же приближении путем проведения через источник окружности, касающейся линии, изображающей землю. Тогда,

обозначая через  $x$  расстояние по горизонтали, найдем при  $h$ , малом по сравнению с  $R$ :

$$x^2 = 2Rh. \quad (8)$$

Следует заметить, что во всех этих задачах траектории лучей необратимы (рис. 71).

Эффекты, встречающиеся при распространении звука в атмосфере, равномерность которой нарушена различиями либо по температуре, либо по скорости ветра, часто бывают весьма замечательны. Звук взрыва, например, иногда бывает слышен на очень большом расстоянии, в то время как на промежуточных дистанциях есть области, где звук

совсем не слышен. Известным примером является меняющийся или флуктуирующий характер звука самолета. Это обусловлено рефракцией звуковых лучей, проходящих через массы воздуха различной температуры. В некоторые моменты времени лучи отклоняются в большей или меньшей степени от уха наблюдателя; в другие моменты они приходят с большей интенсивностью; средний эффект будет оставаться тем же. Это явление аналогично, в другом масштабе, мерцанию звезд<sup>1)</sup>.

### 75а. Акустические свойства помещений

Предсказать заранее акустические качества помещения данной формы и данных размеров—вообще нелегкая задача; но можно с уверенностью сказать, что часто причиной неудач является пренебрежение весьма простыми соображениями. Общеизвестно наблюдение, что на открытом воздухе расхождение звуковых волн вызывает их ослабление, так что речь нельзя сделать слышной вдали без больших усилий. В закрытом пространстве голос оратора усиливается вследствие отражений звуковых волн от стен и потолка и это улучшает условия восприятия звука; но очевидно, что эхо не должно запаздывать по отношению к первоначальному звуку на слишком большой промежуток времени и должно быстро затухать. Эхо будет длиться чрезмерно долго, если стенки обладают высокой отражательной способностью; например, мрамор—особенно неподходящий в этом отношении материал. С другой стороны, полезно иметь отражающую поверхность сзади, близко от оратора, или над его головой, если помещение очень высокое. Если длительность эхо слишком велика, можно улучшить положение, используя более или менее пористые материалы, например, в виде портьер или драпировок, принцип действия которых объяснен в § 66. Но при этом нужно опасаться преувеличенного заглушения, когда голос будет звучать слабо, как в открытом пространстве.

Иногда делались попытки подавить эхо от потолка посредством вертикально подвешенных проволок, имея

---

<sup>1)</sup> Это объяснение дано Рэлеем.

в виду идею «разбиения звуковых волн». Свидетельства об эффективности таких устройств часто противоречивы, но в свете теории рассеяния на цилиндрических поверхностях (§ 81) трудно понять, как можно было бы таким путем получить ощутимый эффект. Правда, в указанной теории не учитывается эффект вязкости, но едва ли это может сказаться на общем результате.

Более трудный вопрос, который может возникнуть в связи с указанной проблемой,—это неоднородная фокусировка звука в различных частях помещения. В настоящее время этот вопрос начинают систематически изучать на моделях как в Англии в Национальной физической лаборатории, так и в Америке.

### 75b. Принцип Доплера

Здесь уместно остановиться на так называемом «принципе Доплера»<sup>1)</sup>. Предположим, например, что источник периодического звука приближается к неподвижному наблюдателю. Число максимумов сжатия  $s$ , приходящих в одну секунду к уху наблюдателя, увеличивается и, следовательно, высота звука возрастает. Уменьшение периода, отнесенное к периоду колебаний покоящегося источника, равно отношению скорости движения источника к скорости звука. Когда источник удаляется от наблюдателя, отношение становится отрицательным и высота тона понижается. Если источник движется под углом к лучам, по которым приходит звук к наблюдателю, то существенной является только компонента скорости источника в направлении луча. Аналогичные эффекты получаются и тогда, когда источник находится в покое, а движется наблюдатель. Одним из примеров может явиться изменение высоты тона гудка паровоза, когда поезд быстро проносится мимо станции. Но наиболее поразительные и плодотворные применения этого закона встречаются в теории излучения.

---

<sup>1)</sup> Christian Doppler (1803—1854), австрийский математик, профессор физики в Вене (1851).

## ГЛАВА VIII

### ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ. ДИФРАКЦИЯ

#### 76. Сферические волны. Точечные источники звука

Теперь уже уместно перейти специально к рассмотрению гармонических колебаний. В задачах, связанных с падением звуковых волн на препятствия, или в задаче прохождения волн через отверстие в экране и т. п., характер решений зависит от высоты тона, причем определяющим элементом будет соответственно отношение длины волн к линейным размерам препятствий и т. д.

Для ясности выкладок будем пользоваться комплексными величинами более широко, чем в предыдущих главах. Так, положим, что зависимость потенциала скорости  $\varphi$  от времени дается множителем  $e^{int}$  или  $e^{ihct}$ , где

$$k = \frac{n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1)$$

и  $\lambda$  есть длина плоской волны того же периода  $2\pi/n$ . Общее уравнение звуковых волн ((4) § 70) тогда принимает вид

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0. \quad (2)$$

В случае плоских волн, фронты которых перпендикулярны к оси  $x$ , имеем:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + k^2\varphi = 0. \quad (3)$$

Решение этого уравнения можно написать в виде

$$\varphi = Ae^{-ikhx} + Be^{ikhx} \quad (4)$$

или

$$\varphi = C \cos kx + D \sin kx. \quad (5)$$

В этих формулах подразумевается наличие опущенного для краткости временного множителя  $e^{int}$ . Таким образом, гармоническую волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$  в положительном направлении, можно представить в виде

$$\varphi = Ae^{i(nt-kx)}. \quad (6)$$

Когда мы перейдем к расчету энергии, будет необходимо, разумеется, вернуться к вещественной записи. Так, вещественная часть (6) равна

$$\varphi = A \cos k(ct - x). \quad (7)$$

Средняя энергия в единице объема согласно (7), (8) § 70 равна  $\frac{1}{2} \rho k^2 A^2$ , а энергия, излучаемая в среднем за единицу времени через единичную площадку волнового фронта, равна

$$\frac{1}{2} \rho k^2 c A^2, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \rho \frac{n^2}{c} A^2. \quad (8)$$

Мы можем назвать эту величину «потоком энергии» волны (7).

Уравнение симметричных сферических волн (6) § 71 принимает для гармонической зависимости от времени вид

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} + k^2 (r\varphi) = 0. \quad (9)$$

Решение дается формулой

$$r\varphi = Ae^{-ikr} + Be^{ikr} \quad (10)$$

или

$$r\varphi = C \cos kr + D \sin kr. \quad (11)$$

Как и раньше, временной множитель подразумевается. Два члена в (10) отвечают волне, расходящейся от начала координат и сходящейся к нему соответственно. В частности, волны, расходящиеся от источника  $Ae^{ikhct}$ , расположенного в начале координат, можно представить в виде

$$\varphi = \frac{A}{4\pi r} e^{ik(ct-r)} \quad (12)$$

или в вещественной записи

$$\varphi = \frac{A}{4\pi r} \cos n \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (13)$$

Разумеется, эти формулы являются просто частным случаем (1) § 73.

Поддержание действия такого источника в безграничной среде требует расходования определенной энергии. Работа, совершаемая за единицу времени на поверхности сферы радиуса  $r$  над жидкостью снаружи сферы, равна произведению давления на площадь и на скорость (считаемую положительной в направлении наружу):

$$-(p_0 + \kappa s) \cdot 4\pi r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = - \left( p_0 + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \cdot 4\pi r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (14)$$

Очевидно, что  $p_0$  ничего не вносит в среднее значение энергии, так как средняя величина  $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$  в любой точке равна нулю. Используя (13), найдем среднее значение остающегося члена:

$$W = \frac{n^2 \rho A^2}{8\pi c} = \frac{k^2 \rho c A^2}{8\pi}. \quad (15)$$

Эта величина  $W$  не зависит от  $r$ , как и следовало ожидать, так как среднее количество энергии, заключенной в пространстве, ограниченном двумя концентрическими сферическими поверхностями, остается в данном случае постоянным.  $W$  есть мера излучения энергии источником (в единицу времени). Эту формулу можно также вывести, пользуясь тем соображением, что на большом расстоянии данную волну можно рассматривать как плоскую. Заменяя в (8)  $A$  на  $A/4\pi r$  из (13) и умножая на  $4\pi r^2$ , получим снова (15).

Следует помнить, что приведенный расчет излученной энергии применим только для изолированного источника в свободном пространстве. Источник, помещенный в полость с жесткими стенками, в среднем не совершает *никакой* работы, так как энергия газа постоянна. Даже в открытом пространстве количество излученной энергии может сильно измениться при наличии препятствия вблизи источника. Так, если источник  $P$  расположен вблизи жесткой

плоской границы, то амплитуда колебаний среды в каждой точке удваивается вследствие отражения, которое можно рассматривать как излучение от мнимого источника  $P'$  (§ 73); интенсивность в этом случае увеличивается вчетверо, а излученная энергия, следовательно, *удваивается* по сравнению со случаем, когда тот же источник находится один в свободном пространстве.

Уравнение

$$\varphi = \frac{B}{4\pi r} e^{ik(ct+r)} \quad (16)$$

или в вещественной записи

$$\varphi = \frac{B}{4\pi r} \cos n \left( t + \frac{r}{c} \right) \quad (17)$$

можно интерпретировать как «сток» звука, т. е. как точку, в которой энергия *поглощается* и скорость поглощения энергии равна  $n^2 \rho B^2 / 8\pi c$ . Понятие стока, однако, не играет большой роли в акустике.

Понятие простого источника, сколь оно ни ценно для теории, редко реализуется на практике даже приближенно. Колеблющееся твердое тело, например мембрана или одна из ножек камертона, в любой момент времени стремится сжать воздух, соприкасающийся с одной стороной этого тела, и создать разрежение на другой стороне; поэтому такое колебание для простейших случаев можно представить более точно комбинацией *двух* простых источников,

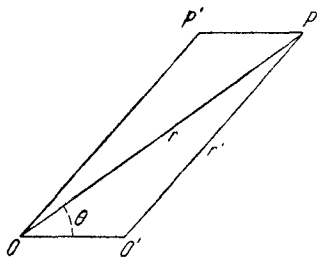


Рис. 72.

расположенных близко друг от друга, но имеющих противоположные фазы. Развивая эту идеализацию, приходим к математическому понятию «двойного источника». Пусть имеем простой источник с производительностью  $-m$  в точке  $O$  и простой источник с производительностью  $+m$  в соседней точке  $O'$ ; выбор знака показывает противоположность фаз. Если теперь

представить себе, что  $m$  становится бесконечно большим, в то время как расстояние  $OO'$  становится бесконечно малым, так что произведение  $m \cdot OO'$  остается конечным,



то получим идеальный «двойной источник». Направление  $OO'$  называется «осью», а предел произведения  $m \cdot OO'$  называется «моментом» такого источника. Результирующее движение, очевидно, симметрично относительно оси.

Пусть направление  $OO'$  совпадает с осью  $x$  и пусть начало координат взято в точке  $O$ ; тогда потенциал скорости в точке  $P$ , создаваемый двумя источниками  $\pm m$ , расположенными в  $O'$  и  $O$  соответственно, будет определяться по формуле

$$4\pi\phi = m \left( \frac{e^{-ikr'}}{r'} - \frac{e^{-ikr}}{r} \right), \quad (18)$$

где  $r = OP$ ,  $r' = O'P$ . Если проведем отрезок прямой  $PP'$ , равный и параллельный  $O'O$ , то будем иметь  $r' = OP'$ , и выражение в скобках будет равно изменению значения функции  $e^{-ikr}/r$ , вызванному смещением из  $P$  в  $P'$ . Следовательно, в пределе, вводя обозначение  $P'P = \delta x$ , найдем:

$$4\pi\phi = -m \delta x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right). \quad (19)$$

Полагая  $m \delta x = 1$ , мы получим формулу для единичного двойного источника, расположенного в точке  $O$ , с осью, направленной вдоль  $Ox$ :

$$4\pi\phi = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right), \quad (20)$$

являющуюся частным случаем формулы (3) § 73. Будем изменять только  $x$ , оставляя  $y$  и  $z$  постоянными; тогда, как видно из рис. 72,  $\delta r = \cos \theta \delta x$ , где  $\theta$  обозначает угол между  $OP$  и  $Ox$ . Следовательно,  $\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r}$  и

$$4\pi\phi = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \cos \theta. \quad (21)$$

Выполняя дифференцирование, получим:

$$4\pi\phi = \frac{(1+ikr)e^{-ikr}}{r^2} \cos \theta. \quad (22)$$

Для малых значений  $kr$ , т. е. на расстояниях от точки  $O$ , малых по сравнению с  $\lambda/2\pi$ , формула принимает вид

$$4\pi\varphi = \frac{\cos\theta}{r^2}. \quad (23)$$

С другой стороны, для больших  $kr$

$$4\pi\varphi = ik \frac{e^{-ikr}}{r} \cos\theta, \quad (24)$$

так что вдоль каждого радиуса-вектора сжатие  $\left(s = \frac{\dot{\varphi}}{c^2}\right)$  на больших расстояниях оказывается в пределе пропорциональным  $1/r$ . Радиальную и трансверсальную компоненты скорости можно найти по формуле (6) § 69; именно, они равны  $-\frac{\partial\varphi}{\partial r}$  и  $-\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}$  соответственно. Как легко видеть, вблизи начала координат эти компоненты имеют один и тот же порядок величины, в то время как на больших расстояниях трансверсальная компонента скорости меньше, чем радиальная, в отношении  $1/kr$ .

Вводя множитель  $Ce^{int}$  в (24) и беря действительную часть, найдем для больших расстояний следующее выражение для потенциала скорости двойного источника, обладающего моментом  $C \cos nt$ :

$$\varphi = -\frac{kC}{4\pi r} \sin n \left( t - \frac{r}{c} \right) \cos\theta. \quad (25)$$

Волны, посылаемые в каком-либо направлении  $\theta$ , можно считать на больших расстояниях плоскими волнами вида (7), с той разницей, что следует считать  $A = \frac{kC \cos\theta}{4\pi r}$ ; различием в разности фаз здесь пренебрегаем; поток энергии (через единицу поверхности) будет, следовательно, равен  $\rho k^4 c C^2 \cos^2\theta / 32\pi^2 r^2$ . Умножая на величину  $2\pi r \sin\theta \cdot r \delta\theta$ , которая представляет собой площадь сферического пояса, ограниченного окружностями, угловые радиусы которых равны  $\theta$  и  $\theta + \delta\theta$ , и интегрируя в пределах от  $\theta = 0$  до  $\theta = \pi$ , найдем, что суммарная энергия,

излученная двойным источником  $C \cos nt$ , равна

$$W = \frac{9k^4 c C^2}{24\pi}. \quad (26)$$

Следует отметить, что при увеличении длины волны  $\lambda$  и, следовательно, при соответственном уменьшении  $k$  исходное уравнение (2) стремится к виду

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (27)$$

встречающемуся в динамике несжимаемой жидкости, а также в теории тяготения и теории электропроводности и теплопроводности. Переход к уравнению (27) можно осуществить двумя путями: либо уменьшая частоту ( $n/2\pi$ ), либо увеличивая упругость среды и, соответственно, скорость распространения волн. При этих условиях (12) стремится к виду

$$\varphi = \frac{A}{4\pi r}, \quad (28)$$

совпадающему с формулой для потенциала магнитного полюса или потенциала для источника тока и т. д. Соответственная предельная формула для двойного источника (21) имеет вид (23), что совпадает с потенциалом бесконечно малого магнита.

Весьма важно отметить, что внутри любой области, не содержащей источников и малой по сравнению с длиной волны, конфигурация эквипотенциальных поверхностей  $\varphi = \text{const}$  в любой момент времени та же, что и для несжимаемой жидкости. Это объясняется тем, что значение потенциала  $\varphi$ , созданного внешним источником, отличается от значения, соответствующего несжимаемой жидкости, главным образом множителем  $e^{-ikr}$ , где  $r$ —расстояние от источника. Если через  $b$  обозначить наибольшую ширину области, этот множитель может изменяться самое большее в отношении  $1 : e^{-ikb}$ , которое мало отличается от единицы при малых значениях  $kb$ .

## 76a. Отражение от плоской поверхности

Отражение от жесткой стенки волн, создаваемых точечным источником, можно представить при помощи зеркального изображения источника, как это было показано в § 73. Так, в случае первичного источника

с производительностью  $C$  имеем:

$$4\pi\varphi = \frac{Ce^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{Ce^{-ikr_2}}{r_2}, \quad (1)$$

где через  $r_1$  и  $r_2$  обозначены расстояния от источника и от его изображения. Если мы положим

$$\left. \begin{aligned} r_2 + r_1 &= 2r, \\ r_2 - r_1 &= 2s, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

то (1) можно переписать в виде

$$4\pi\varphi = Ce^{-ikr} \left\{ \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \cos ks + i \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \sin ks \right\}. \quad (3)$$

В далеких точках расстояния  $r_1$  и  $r_2$  будут почти равны друг другу и первый член в скобках будет играть главную роль.

Максимальная величина  $s$  равна расстоянию ( $h$ ) источника звука от стенки, и если длина волны ( $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ) велика по сравнению с  $h$ , то на больших расстояниях практически можно положить

$$4\pi\varphi = \frac{2Ce^{-ikr}}{r}. \quad (4)$$

Эта комбинация источника и его изображения эквивалентна, как и следовало ожидать, источнику с производительностью  $2C$ ; но так как волны излучаются только с одной стороны от стенки, количество энергии, требуемое для поддержания работы источника, должно быть *вдвое* больше того, что требуется в случае безграничной среды.

В общем случае интенсивность будет меняться как квадрат амплитуды выражения правой части (3), т. е. как

$$C^2 \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos k(r_2 - r_1) + \frac{1}{r_2^2} \right\}. \quad (5)$$

Значение этого выражения лежит между

$$C^2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2 \quad \text{и} \quad C^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^2.$$

Если, в противоположность ранее рассмотренному случаю,  $\lambda$  мало по сравнению с  $h$ , то максимальная интен-

сивность достигается в точках, где  $r_2 - r_1$  кратно  $\lambda$ , а нижний предел — когда  $r_2 - r_1$  кратно нечетному числу  $\frac{1}{2} \lambda$ . Здесь имеется аналогия с опытами Френеля по интерференции в оптике.

Задачу об отражении волн, создаваемых любой системой источников, в частности двойным источником, можно решать аналогичным образом, но характер результатов будет различным в разных случаях. Пусть, например, двойной источник расположен у стенки на расстоянии, малом по сравнению с длиной волны. Если ось этого источника параллельна стенке, эффект на больших расстояниях практически удваивается, тогда как при расположении оси перпендикулярно к стенке (например, от стенки) изображение будет тоже направлено от стенки в фиктивную среду с другой стороны, и эффекты на большом расстоянии будут практически уничтожать друг друга.

Задача отражения от свободной поверхности волн, создаваемых источником в воде, уже рассматривалась выше. Если пренебречь излучением в воздух на основании соображений, изложенных в § 61, то можно использовать понятие отрицательного изображения. Тогда вместо (1) получим

$$4\pi\varphi = \frac{Ce^{-ikr_1}}{r_1} - \frac{Ce^{-ikr_2}}{r_2}, \quad (6)$$

поскольку это дает

$$p = p_0 + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = p_0 \quad (7)$$

на свободной поверхности, где  $r_1 = r_2$ . Формула (6) эквивалентна соотношению

$$4\pi\varphi = Ce^{-ikr} \left\{ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \cos ks + i \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sin ks \right\}. \quad (8)$$

Интенсивность, следовательно, пропорциональна

$$C^2 \left\{ \frac{1}{r_1^2} - \frac{2}{r_1 r_2} \cos k(r_2 - r_1) + \frac{1}{r_2^2} \right\}. \quad (9)$$

Вблизи поверхности значение этого выражения всегда относительно мало. Если  $\lambda$  мало по сравнению с  $h$ , то в точке, находящейся на глубине  $z$  и лежащей на

расстоянии  $x$  от источника, считая по горизонтали, имеем, считая  $z$  и  $h$  малыми по сравнению с  $x$ :

$$r_1 = x + \frac{(z-h)^2}{2x}, \quad r_2 = x + \frac{(z+h)^2}{2x}. \quad (10)$$

Отсюда

$$k(r_2 - r_1) = \frac{2kh}{x} z = \frac{4\pi h}{x} \frac{z}{\lambda}. \quad (11)$$

Для точек на одной и той же вертикали минимумы интенсивности соответствуют значениям  $k(r_2 - r_1) = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ , или, иначе, значениям

$$\frac{z}{\lambda} = 0, \frac{x}{2h}, \frac{x}{h}, \frac{3x}{2h}, \dots \quad (12)$$

## 77. Осциллирующая сфера

Волны, излучаемые в окружающий воздух осциллирующей твердой сферой произвольного радиуса, можно рассчитать при помощи фиктивного двойного источника, имеющего соответственную величину момента и располагаемого в центре сферы. Поскольку это—едва ли не единственная задача такого рода, допускающая полное решение, мы отведем ей некоторое место. Расчет выполняется просто, а результаты полезны для понимания других случаев.

По упомянутым выше причинам поучительно сначала рассмотреть случай несжимаемой жидкости. Возьмем начало координат в среднем положении центра сферы, а ось  $x$  направим вдоль линии ее колебаний; обозначим скорость сферы через  $U$ . Проекция в направлении нормали к сфере скорости частиц жидкости, соприкасающихся со сферой в какой-либо точке  $P$ , должна быть равна нормальной составляющей скорости точки  $P$ , принадлежащей самой сфере, т. е.  $U \cos \theta$ , где  $\theta$ —угол  $POx$ . Отсюда получаем

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = U \cos \theta \quad [r = a], \quad (1)$$

где  $a$ —радиус сферы. Потенциал скорости, создаваемый двойным источником, помещенным в точке  $O$  неограни-

ченного объема несжимаемой жидкости, дается формулой

$$\varphi = \frac{C}{4\pi r^2} \cos \theta. \quad (2)$$

Для того чтобы эта формула давала тот же результат, что и (1), должно быть

$$C = 2\pi a^3 U. \quad (3)$$

При этом значении  $C$  действие сферы на жидкость точно такое же, как действие двойного источника, и решение нашей задачи имеет вид

$$\varphi = \frac{U a^3}{2r^2} \cos \theta. \quad (4)$$

В формулу входит только мгновенное значение скорости  $U$ , как и следовало ожидать, поскольку было принято предположение о бесконечной скорости распространения возмущения. Следует также заметить, что пока не предполагалось, что  $U$  должно быть мало.

Направления движения в различных точках поля можно сделать наглядными, нанеся «линии тока», представляющие собой линии, идущие от точки к точке в направлении мгновенной скорости. В интересующем нас преимущественно случае малых амплитуд колебательного движения каждая частица осциллирует взад и вперед в пределах малого участка по некоторой линии. Если обозначить через  $\delta r$ ,  $r \delta \theta$  соответственно радиальную и трансверсальную проекцию элемента такой линии, то эти величины должны быть пропорциональны соответственно радиальной и трансверсальной компонентам скорости, а именно значениям  $-\frac{\partial \varphi}{\partial r}$  и  $-\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta}$ . Отсюда находим уравнение линий тока

$$\frac{\delta r}{\cos \theta} = \frac{r \delta \theta}{\frac{1}{2} \sin \theta}. \quad (5)$$

Интеграл этого уравнения есть

$$r^2 = b^2 \sin \theta, \quad (6)$$

где  $b$  — параметр, который меняется от одной линии тока к другой. Эти кривые, по форме идентичные с силовыми линиями малого магнита, показаны на рис. 73.

Для расчета реакции со стороны среды на сферу разделим поверхность сферы на элементарные области

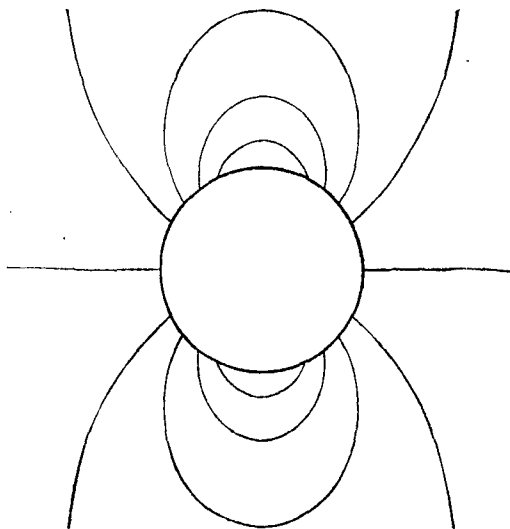


Рис. 73.

плоскостями, перпендикулярными к  $Ox$ . Площадь отдельного элемента равна  $2\pi a^2 \sin \theta d\theta$ ; результирующая сила, действующая на сферу в направлении положительной оси  $x$ , равна

$$X' = - \int_0^{\pi} p \cos \theta \cdot 2\pi a^2 \sin \theta d\theta. \quad (7)$$

Постоянная часть давления ничего не вносит в результат. Если пренебречь членами второго порядка относительно скорости, то, учитывая, что от  $t$  зависит только  $U$ , найдем переменную составляющую давления в виде

$$p = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2} \rho a \frac{dU}{dt} \cos \theta. \quad (8)$$



Подставляя в (7), получим:

$$X' = -\frac{2}{3} \pi \rho a^3 \frac{dU}{dt}. \quad (9)$$

Замечательным обстоятельством здесь является то, что сила оказывается независимой от скорости и зависит только от *ускорения* сферы. Если масса сферы равна  $M$  и если к ней приложена некоторая внешняя сила  $X$ , то уравнение движения сферы будет иметь вид

$$M \frac{dU}{dt} = X + X' \quad (10)$$

или

$$\left( M + \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \right) \frac{dU}{dt} = X. \quad (11)$$

Результат получается такой же, как если бы жидкость отсутствовала, а масса сферы была увеличена на  $\frac{2}{3} \pi \rho a^3$ , т. е. на половину массы жидкости, вытесненной сферой. Стоксом (1843) было показано, что этот вывод остается в силе и при отказе от требования малости амплитуды движения.

Мы увидим в § 79, что общий характер вышеприведенных результатов относится не только к телу сферической формы; но, конечно, величина кажущегося прироста массы<sup>1)</sup> зависит как от формы, так и от размеров твердого тела и обычно будет различна для разных направлений движения, как, например, в случае эллипсоида. Намеченная здесь теория имела большое влияние на некоторые физические гипотезы, в частности на предположение, что наблюдаемая инертность обычной материи может частично или полностью обуславливаться окружающим эфиром.

Обращаясь к акустической задаче, напишем скорость сферы в виде

$$U = Ae^{int}. \quad (12)$$

Условие на поверхности будет иметь тот же вид (1), как

<sup>1)</sup> Это кажущееся увеличение массы часто называют «присоединенной массой». (Ред.)

и раньше. Согласно (21) § 76 потенциал скорости двойного источника  $Ce^{int}$ , помещенного в точке  $O$ , равен

$$\varphi = -\frac{C}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \cos \theta. \quad (13)$$

Здесь опущен временной множитель  $e^{int}$ . Отношение  $C$  к  $A$  определяется из (1).

Наиболее интересен случай, когда радиус  $a$  сферы мал по сравнению с  $\lambda/2\pi$ , где  $\lambda$  — длина волны. В непосредственной близости от сферы  $kr$  будет мало, и формула (13) для этой области будет практически совпадать с (2). Это дает приближенно:

$$C = 2\pi a^3 A; \quad (14)$$

линии тока вблизи сферы будут иметь ту же конфигурацию, что и на рис. 73. Присоединенная масса сферы имеет приблизительно ту же величину  $\frac{2}{3}\pi \rho a^3$ , как и раньше. С другой стороны, на расстояниях  $r$ , сравнимых с  $\lambda$  или больших  $\lambda$ , движение жидкости будет полностью изменено сжимаемостью среды. Согласно (13) и (14) на достаточно больших расстояниях имеем:

$$\varphi = \frac{1}{2} ika^3 A \frac{e^{-ikr}}{r} \cos \theta \quad (15)$$

или в вещественной записи

$$\varphi = -\frac{1}{2} \frac{ka^3 A}{r} \sin n \left( t - \frac{r}{c} \right) \cos \theta; \quad (16)$$

здесь скорость сферы принята равной

$$U = A \cos nt. \quad (17)$$

В пределе оказывается, что амплитуда убывает теперь пропорционально  $1/r$ , а не  $1/r^2$ , как в случае (4).

Исследование до сих пор не приводило к аналогии с сопротивлением трения, хотя, как мы знаем, вследствие излучения расходящихся волн должна иметь место непрерывная потеря энергии. Для расчета либо сопротивления потерь, либо работы, совершаемой на поверхности сферы, следует воспользоваться полной формулой (13);

однако энергию излучения можно рассчитать независимо по формуле (26) § 76. Момент эквивалентного двойного источника дается приближенно формулой (14); следовательно,

$$W = \frac{1}{6} \pi \rho k^4 a^6 c A^2. \quad (18)$$

Пусть  $\rho'$  обозначает среднюю плотность сферы; если считать, что сфера колеблется по закону (17), будучи закреплена на соответствующей пружине, то энергия этих колебаний будет равна

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho' a^3 A^2.$$

Далее, следуя § 11, приравняем скорость уменьшения этой энергии величине  $W$ ; мы найдем:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{\tau} = 0, \quad (19)$$

откуда следует:

$$A = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (20)$$

где

$$\tau = \frac{8}{n} \frac{\rho'}{(ka)^3} \frac{1}{\rho}. \quad (21)$$

Отсюда видно, что в обычных случаях отношение  $n\tau/2\pi$  модуля затухания к периоду очень велико.

## 78. Действие сосредоточенной периодической силы

Аналогичные результаты можно получить при помощи более или менее интуитивных рассуждений и для осциллирующих твердых тел другой формы; но задачу можно сильно упростить при помощи некоторой вспомогательной теоремы, которая представляет также и независимый интерес. Она относится к воздействию периодической внешней силы, сосредоточенной в некоторой точке в газообразной среде.

Элементарное доказательство можно получить сразу же на основе предыдущего рассмотрения. Очевидно, резуль-

тат останется прежним, если представить себе, что сила действует на бесконечно малую сферу с плотностью, равной плотности окружающей среды. Поэтому воздействие силы будет равносильно наличию некоторого двойного источника. Обозначим сосредоточенную силу, направление которой примем параллельным оси  $x$ , через  $P e^{int}$ ; полагая в (11) § 77  $M = \frac{4}{3} \pi \rho a^3$ , найдем:

$$P = 2i \pi \rho k c a^3 A, \quad (1)$$

и, следовательно, согласно (15) § 77 для больших значений  $kr$  получим:

$$\varphi = \frac{P}{4\pi \rho c} \frac{e^{-ikr}}{r} \cos \theta. \quad (2)$$

Сравнивая с (24) § 76, мы видим, что момент двойного источника равен  $-i P e^{int} / \rho k c$  или в вещественной записи

$$\frac{P}{\rho k c} \sin nt.$$

Из (26) § 76 следует, что работа, совершаемая за единицу времени периодической силой  $P \sin nt$  и идущая на излучение расходящихся волн, равна

$$W = \frac{k^2 P^2}{24\pi \rho c}. \quad (3)$$

Для данной среды эта величина обратно пропорциональна квадрату частоты.

## 79. Излучение волн колеблющимся твердым телом

Вернемся к задаче исследования излучения волн твердым телом, колеблющимся как целое. Для того чтобы не слишком усложнять вопрос, предположим, что тело имеет ту или иную степень симметрии относительно некоторой оси. Например, оно может либо иметь форму тела вращения вокруг этой оси, либо иметь две взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии, пересекающиеся по этой оси, либо иметь одну плоскость симметрии, перпендикулярную к этой оси. Во всех случаях на-

правление этой оси примем за направление ( $Ox$ ) колебаний тела.

Предположим, что размеры твердого тела малы по сравнению с  $\lambda/2\pi$ ; движение жидкости в непосредственной близости от тела будет тогда таким же, как в случае несжимаемой жидкости, и действие на тело будет равносильно увеличению инерции. Для установления этого положения со всей общностью заметим, что при (безвихревом) движении лишенной вязкости жидкости, вызванном движением твердого тела в ней, скорость в каждой точке будет составлять определенную долю скорости движения твердого тела  $U$ ; поэтому полная кинетическая энергия жидкости может быть записана в виде  $\frac{1}{2} \rho Q' U^2$ , где  $Q'$  — постоянная, имеющая размерность объема и зависящая только от размера и формы тела и направления, в котором оно колеблется. Значит, если масса тела равна  $M$ , то уравнение энергии принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} M U^2 + \frac{1}{2} \rho Q' U^2 \right) = X U, \quad (1)$$

где правая<sup>1</sup> часть представляет собой работу, совершаемую внешней силой  $X$  за единицу времени. Таким образом,

$$(M + \rho Q') \frac{dU}{dt} = X, \quad (2)$$

что указывает на кажущееся увеличение массы тела на величину  $\rho Q'$ . Это утверждение равносильно тому, что реакция со стороны жидкости эквивалентна силе  $-\rho Q' \frac{dU}{dt}$ .

В реальном случае газообразной среды ясно, что если устранить твердое тело, а его место заменить средой, то движение на большом расстоянии будет с высокой степенью точности таким же, какое было бы получено при действии соответственной периодической силы, действующей на среду, внесенную вместо тела. Эта сила должна создавать секундное изменение количества движения, равное  $\rho Q \frac{dU}{dt}$ , где  $Q$  — объем, вытесненный телом, а также уравновешивать реакцию среды; следовательно, эта сила

должна быть равна

$$P = \rho(Q + Q') \frac{dU}{dt} = i n \rho (Q + Q') A e^{i n t}. \quad (3)$$

Здесь принято

$$U = A e^{i n t}. \quad (4)$$

Из (2) § 78 следует, что потенциал скорости на больших расстояниях  $r$  будет в этом случае равен

$$\varphi = \frac{P}{4\pi \rho c} \frac{e^{-i k r}}{r} \cos \theta = \frac{i k (Q + Q')}{4\pi r} A e^{i k (c t - r)} \cos \theta. \quad (5)$$

Сравнивая с (24) § 76, найдем, что осциллирующее твердое тело эквивалентно двойному источнику с моментом  $C = (Q + Q') A$ ; значит, излученная энергия, как это следует из (26) § 76, будет равна

$$W = \frac{\rho k^4 c}{24\pi} (Q + Q')^2 A^2. \quad (6)$$

В случае сферы имеем  $Q = \frac{4}{3} \pi a^3$  и  $Q' = \frac{1}{2} Q$ ; тогда (6) совпадает с (18) § 77. Можно показать, что для круглого диска радиусом  $a$ , движущегося перпендикулярно к своей плоскости,  $Q' = \frac{8}{3} \pi a^3$ ; в этом случае, конечно,  $Q = 0$ .

## 80. Передача колебаний газу

В своем классическом мемуаре «О передаче колебаний от колеблющегося тела к окружающему газу»<sup>1)</sup> Стокс выяснил условия, обуславливающие эффективность создания звуковых волн колеблющимся телом, а также сравнил эффекты, получающиеся в разных газах. Исходным пунктом исследования явилось наблюдение, сделанное проф. Лесли (1837), который нашел, что звук, излучаемый колокольчиком, колеблющимся в атмосфере водорода, оказался чрезвычайно слабым по сравнению со звуком в воздухе. До появления работы Стокса этому явлению не было дано удовлетворительного объяснения. Существо дела станет ясным из нижеследующей цитаты:

<sup>1)</sup> Phil. Trans., 1868. Нижеследующая цитата взята из реферата, появившегося в Proc. Roy. Soc.

«Когда тело совершает медленные движения вперед и назад в каком-либо газе, то газ ведет себя почти в точности как несжимаемый; и здесь имеется просто местное возвратно-поступательное движение газа из области впереди тела в область позади тела, и обратно в противоположной фазе движения, когда передняя область становится задней. По мере увеличения частоты колебаний тела, или, другими словами, при уменьшении периода колебаний, сжатия и разрежения газа, которые вначале были совершенно нечувствительными, становятся заметными и наряду с перетеканием среды вперед и назад возникают звуковые волны (или волны такой же природы, если период находится вне пределов слышимости). По мере уменьшения периода колебания все большая доля воздействия колеблющегося тела на газ идет на создание звуковых волн и все меньше и меньше—на создание потока, связанного только с местным возвратно-поступательным перетеканием. При заданном периоде и при определенном типе колебаний, определенных размерах и форме колеблющегося тела поведение газа тем ближе к поведению несжимаемой жидкости, чем больше скорость распространения звука в нем; на этом основании интенсивность звуковых колебаний, возбуждаемых в воздухе, по сравнению с колебаниями, возбуждаемыми в водороде, может быть значительно больше, чем это следовало бы из учета только разности плотностей этих двух газов».

Формулы (13) и (14) § 77 иллюстрируют эти замечания. Рассмотрим точку, выбранную на некотором определенном расстоянии  $r$  от сферы, осциллирующей со скоростью

$$U = A \cos nt. \quad (1)$$

Если период достаточно велик, то движение в этой точке определится формулой

$$\varphi = \frac{Aa^3}{2r^2} \cos \theta \cos nt, \quad (2)$$

т. е. будет таким, как если бы среда была несжимаемой. Но если частоту увеличить настолько, чтобы длина волны стала малой по сравнению с расстоянием  $r$  от центра, то этому случаю будет соответствовать формула

$$\varphi = -\frac{ka^3A}{2r} \cos \theta \sin n \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (3)$$

Здесь амплитуда больше, чем в предыдущей формуле, в отношении  $kr$  или  $\frac{2\pi r}{\lambda}$ . Для одной и той же частоты амплитуда, пропорциональная  $k/c$  или  $n/c^2$ , будет для различных газов обратно пропорциональна квадрату скорости звука. Согласно (18) § 77 излученная энергия будет равна

$$W = \frac{1}{6} \pi \rho k^4 a^6 c A^2 = \frac{1}{6} \frac{\pi \rho n^4 a^6}{c^3} A^2, \quad (4)$$

что дает (для одного и того же газа) пропорциональность четвертой степени частоты. Если принять (§ 59), что скорость звука обратно пропорциональна корню квадратному из плотности, то излучение в различных газах (при одной и той же частоте) будет обратно пропорционально пятой степени скорости звука. Например, для водорода излученная энергия будет в 1000 раз меньше, чем для кислорода.

Чтобы проиллюстрировать действие бокового обтекания газа вокруг поверхности сферы от полушария, движущегося в данный момент наружу, к полушарию, движущемуся внутрь, на ослабление интенсивности волн с расстоянием, можно вычислить величину энергии, которая была бы излучена в отсутствие бокового обтекания. Для этой цели мы предположим (по Стоксу) наличие большого количества неподвижных перегородок, идущих от поверхности сферы по радиусу. В каждой из образованных таким образом узких конических трубок движение будет носить такой же характер, как и, в случае сферически симметричных колебаний. Постоянная радиальная скорость  $C \cos nt$  на поверхности сферы будет эквивалентна простому источнику с производительностью  $4\pi a^2 C \cos nt$ , а соответственное излучение на единицу площади будет равно  $\frac{1}{2} k^2 a^2 \rho c C^2$  ((15) § 76). Если теперь положить  $C = A \cos \theta$  и проинтегрировать по поверхности сферы, то, учитывая, что среднее значение от  $\cos^2 \theta$  по всем направлениям в пространстве равно  $\frac{1}{3}$ , получим суммарное излучение через конические трубки:

$$W' = \frac{2}{3} \pi k^2 a^4 \rho c A^2. \quad (5)$$



Сравнивая этот результат с (4), видим, что эффект бокового обтекания уменьшает излучение в отношении  $\frac{1}{4}k^2a^2$ .

Если поверхность делится (как, например, в случае с пластинкой или с колоколом) узловыми линиями на большое число участков, колеблющихся в противоположных фазах, то боковое обтекание увеличивается и излучение энергии соответственно уменьшается. Для облегчения расчета Стокс рассмотрел случай сферической поверхности с различными симметричными распределениями узловых линий. В задаче об осциллирующей сфере есть одна такая линия—большая окружность  $\theta = \frac{1}{2}\pi$ , и излучение, как мы уже видели, уменьшается вследствие бокового обтекания в отношении  $\frac{1}{4}k^2a^2$ . Для сферической поверхности с двумя узловыми линиями, совпадающими с большими окружностями, расположенными под прямым углом, эффект будет много больше, и отношение составляет  $\frac{1}{81}k^4a^4$ . При увеличении числа участков, на которые делится поверхность сферы, это отношение, уже очень малое, уменьшается с огромной скоростью.

С целью упрощения в предыдущих выводах предполагалось, что периметр  $2\pi a$  сферы мал по сравнению с длиной волны. Влияние бокового обтекания, однако, не ограничивается этим случаем, а будет проявляться всегда, когда размеры *противофазных участков* поверхности малы по сравнению с длиной волны. В случае осциллирующих колебаний сферы по формуле (13) § 77 легко найти решение без ограничений на величину  $ka$ .

Стокс математически исследовал также случай цилиндра, осциллирующего под прямым углом к оси; и в этом случае имеют место те же эффекты. Этим способом была получена оценка *непосредственного* излучения звуковых волн в воздух колеблющейся струной. Результат определяется отношением периметра поперечного сечения струны к длине звуковой волны в воздухе, и в любом практически интересном случае излучение чрезвычайно мало. Как было разъяснено в § 24, почти весь звук при ударе по струне фортепьяно идет от деки.

## 81. Рассеяние звуковых волн на препятствии

Теперь мы рассмотрим возмущение, создаваемое в звуковой волне твердым препятствием, размеры которого малы по сравнению с длиной волны. Рассеянные волны, наблюдаемые на большом расстоянии, обусловлены главным образом двумя причинами. Если бы препятствие отсутствовало, то в пространстве, которое оно занимало, происходили бы попеременные сжатия и разрежения. На большом расстоянии влияние препятствия, заключающееся в отсутствии соответственных расширений и сжатий его объема, приблизительно таково, как если бы в среде, находящейся в покое, этот объем испытывал бы периодические изменения в точности противоположного характера. Результат эквивалентен действию простого источника. На создаваемое таким образом возмущение накладывается вторая система волн, вызванная неподвижностью препятствия. Если бы препятствие могло колебаться свободно и, кроме того, имело ту же плотность, что и окружающий воздух, то оно колебалось бы вместе с частицами воздуха и второй системы волн не было бы. Эта вторая система волн такая же, как если бы препятствие совершало колебания, в точности равные и противоположные по фазе колебаниям в исходной невозмущенной волне. Как мы видели в § 79, этот эффект эквивалентен действию двойного источника. На первый взгляд может показаться, что первый из рассмотренных эффектов много меньше, чем второй, однако вдали от препятствия оба эффекта оказываются сравнимыми по порядку, ввиду того, что волны от двойного источника сильно ослабляются наличием бокового обтекания.

Обозначим через  $Q$  объем препятствия. Тогда производительность простого источника, обусловленного первой причиной рассеяния, будет равна

$$Q \frac{ds}{dt} = \frac{Q}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -k^2 Q \varphi, \quad (1)$$

где  $s$ ,  $\varphi$  относятся к падающей волне. В случае плоской волны

$$\varphi = C e^{-ikhx}, \quad (2)$$

падающей на малое препятствие, расположенное в точке  $O$ , соответственный потенциал скорости рассеянных волн можно записать в виде

$$\varphi_1 = -\frac{k^2 Q C}{4\pi r} e^{-ikr}. \quad (3)$$

Что касается второй причины, мы предположим для простоты, что препятствие имеет в соответствии с § 79 симметрию относительно направления ( $Ox$ ) колебания в исходной волне. Для невозмущенной системы волн (2) скорость частиц воздуха в точке  $O$  можно представить символически в виде  $ikC$ , а момент двойного источника, обусловленный движением препятствия в обратном направлении, будет равен  $-ik(Q + Q')C$ . Тогда рассеянные волны, вызванные на большом расстоянии неподвижностью препятствия, даются согласно (24) § 76 формулой

$$\varphi_2 = \frac{k^2(Q + Q')C}{4\pi r} e^{-ikr} \cos \theta. \quad (4)$$

Результирующее поле имеет вид  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ .

Отсюда вытекает, что для геометрически подобных препятствий амплитуда рассеянной волны в любой удаленной точке прямо пропорциональна объему препятствия и обратно пропорциональна квадрату длины волны. Это последнее заключение можно было предвидеть, и не производя расчетов. Отношение амплитуды рассеянной волны к первоначальной амплитуде должно быть прямо пропорционально объему  $Q$  и обратно пропорционально расстоянию  $r$ , а для того чтобы получить безразмерную величину, необходимо еще разделить на  $\lambda^2$ , так как, кроме  $\lambda$ , нет другой величины, имеющей размерность длины. Отсюда следует, что излученная энергия, пропорциональная квадрату амплитуды, будет пропорциональна  $\lambda^{-4}$ . Этот закон обратной пропорциональности четвертой степени имеет место (вследствие подобных же причин) и в оптике, для рассеяния света на частицах, размеры которых малы по сравнению с длиной световых волн. Голубой цвет неба, например, объясняется преобладанием коротких волн в свете, рассеянном на молекулах воздуха и, возможно, на других частицах. С другой стороны, в прошедшем свете преобладают длинные волны. Эта теория принадлежит Рэлею, который также указывал на акустическую иллюстрацию

вышесказанного, названную «гармоническим эхо». При излучении сложной музыкальной ноты, состоящей из основного тона, ее октавы и т. д., вблизи, например, роци деревьев отношение интенсивности октавы к основному тону в рассеянной волне будет в 16 раз больше, чем в исходной ноте. Поэтому рассеянный звук может казаться выше на октаву.

Полная величина рассеянной энергии получается суммированием эффектов простого и двойного источников. Это можно доказать путем вычисления работы, произведенной на поверхности сферы большого радиуса  $r$ . Члены, полученные в результате *комбинированного* действия двух источников, содержат множитель  $\cos \theta$  и при интегрировании по поверхности дают нуль. Следовательно, согласно (15), (26) § 76

$$W = \frac{\rho k^6 c C^2}{8\pi} \left\{ Q^2 + \frac{1}{3} (Q + Q')^2 \right\}. \quad (5)$$

Согласно (8) § 76 поток энергии в падающей волне равен  $\frac{1}{2} \rho k^2 c C^2$ ; значит, отношение энергии, рассеянной в одну секунду, к потоку в падающей волне равно

$$\frac{k^4}{4\pi} \left\{ Q^2 + \frac{1}{3} (Q + Q')^2 \right\}. \quad (6)$$

В случае сферы было уже найдено, что  $Q' = \frac{1}{2} Q = \frac{2}{3} \pi a^3$ , и выражение (6) переходит в

$$\frac{7}{9} (ka)^4 \pi a^2. \quad (7)$$

Иными словами, сфера рассеивает часть энергии, относящуюся к падающей энергии, как  $\frac{7}{9} (ka)^4 : 1$ . Например, если длина волны равна 1 м (что соответствует частоте около 332 гц), а диаметр сферы равен 1 мм, то эта часть рассеянной энергии составляет примерно  $7,6 \cdot 10^{-11}$  падающей. В случае круглого диска, где  $Q' = \frac{8}{3} \pi a^3$ ,  $Q = 0$ , отношение рассеянной энергии к падающей равно  $\frac{16}{27} (ka)^4$ .

Математическая теория рассеяния на препятствии цилиндрической формы более трудна. Мы ограничимся приведением результатов, основанных на расчетах Рэлея. При падении плоской волны на круглый цилиндр радиуса  $a$  доля падающей энергии, рассеянная на препятствии, составляет приблизительно  $\frac{3}{8}\pi^2(ka)^3$  при обычном условии, что  $ka$  мало. Для проволоки диаметром 1 мм и при длине волны в 1 м доля рассеянной энергии равна  $1,15 \cdot 10^{-7}$ .

Следует, однако, отметить, что для очень малых препятствий порядок величины рассеяния может значительно изменяться вследствие вязкости. Определяющим фактором здесь будет отношение диаметра препятствия к величине  $h$ , введенной в § 66 как мера толщины воздушного слоя на поверхности препятствия, на движение которого заметно влияет трение. Если это отношение достаточно велико, влияние вязкости на результаты будет очень мало.

Распределение скорости в непосредственной близости от препятствия таково же, как и в случае однородного потока несжимаемой жидкости, обтекающего тело. В случае сферы движение можно найти полностью, однако ниже следующее приближение будет достаточным. Положим

$$\varphi = Ce^{-ikr \cos \theta} + \frac{B}{r^2} \cos \theta, \quad (8)$$

где первый член представляет собой падающую волну, а второй член дает потенциал скорости двойного источника (§ 76) при малом  $kr$ . Из (8) находим:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = ikC \cos \theta e^{-ikr} + \frac{2B}{r^3} \cos \theta, \quad (9)$$

и условие равенства нулю нормальной скорости при  $r = a$  приближенно удовлетворяется при выборе  $B = -\frac{1}{2}ika^3C$ . Следовательно, вблизи поверхности сферы приближенно

$$\varphi = C \left\{ 1 - ik \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta \right\}. \quad (10)$$

Поэтому скорости частиц оказываются почти такими же, как если бы жидкость была несжимаемой. Давление выражается формулой

$$p = p_0 + \rho \dot{\varphi} = p_0 + i\rho c \varphi. \quad (11)$$

Это давление отличается на малую величину порядка  $kr$  от давления ( $p_0 + in\rho C$ ), которое получалось бы в начале координат в отсутствие препятствия. В точках на расстояниях  $r$ , составляющих несколько радиусов  $a$  и все еще малых по сравнению с длиной волны, давление еще ближе к давлению, обусловленному только одной падающей волной.

## 82. Прохождение звука через отверстие

При рассмотрении вопроса о прохождении звуковых волн через отверстие в тонком экране мы будем полагать вначале, что размеры отверстия малы по сравнению с длиной волны. С точки зрения акустики это, конечно, наиболее интересный случай.

Предположим, что экран расположен в плоскости  $x = 0$  и начало координат взято на отверстии ( $S$ ). Пусть волна, представленная в виде

$$\varphi = Ce^{-ikhx}, \quad (1)$$

падает слева. Обозначая функции, относящиеся к двум сторонам экрана, индексами 1 и 2, найдем, что для экрана без отверстия

$$\varphi_1 = Ce^{-ikhx} + Ce^{ikhx}, \quad \varphi_2 = 0. \quad (2)$$

Второй член в выражении для  $\varphi_1$  представляет собой отраженную волну, соответствующую условию  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0$  при  $x = 0$ .

В настоящей задаче возмущение, вызываемое отверстием, будет ограничено главным образом областью в непосредственной близости от  $S$ ; это возмущение можно считать очень малым на таких расстояниях от  $O$ , которые хотя и велики по сравнению с линейными размерами отверстия  $S$ , но малы по сравнению с длиной волны. Проведем две поверхности с двух сторон экрана на расстоянии от  $O$ , удовлетворяющем этому условию, так чтобы каждая из поверхностей примыкала к экрану (пунктирные линии на рис. 74). Внутри ограниченной таким образом области жидкость колеблется взад и вперед почти так же, как если бы она была несжимаемой, и суммарный поток

(§ 67) через отверстие будет поэтому находиться в определенном отношении к разности потенциалов скорости на двух проведенных поверхностях. Вероятно, можно достигнуть лучшего понимания, если воспользоваться аналогией с электрической проводимостью. Предположим, что большая металлическая масса почти разделена на две части непроводящей перегородкой, занимающей место экрана. Если эта масса составляет часть электрической цепи, то потенциал ее будет меняться медленно, за исключением области вблизи узкого горлышка, соединяющего две части. Электрические потенциалы вдали от отверстия с одной и с другой стороны обозначим через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ; ток через горлышко будет равен

$$K(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (3)$$

где  $K$  можно назвать «проводимостью» горлышка; удельная проводимость вещества принята равной единице. В гидродинамических вопросах величину  $K$  также уместно назвать проводимостью отверстия. Легко видеть, что она имеет размерность длины.

На двух поверхностях, показанных на рис. 74, мы имеем приближенно  $\varphi_1 = 2C$ ,  $\varphi_2 = 0$  и, следовательно, суммарный поток через отверстие равен  $2KC$ . Если бы такой же поток был направлен симметрично от отверстия в левую сторону, то такая комбинация была бы эквивалентна точечному источнику в неограниченной среде с производительностью  $4KC$ . Тогда согласно (12) § 76

$$\varphi_2 = \frac{KC}{\pi r} e^{-ikr}. \quad (4)$$

Соответственно потенциал скорости с левой стороны, очевидно, равен

$$\varphi_1 = Ce^{-ikx} + Ce^{ikx} - \frac{KC}{\pi r} e^{-ikr}. \quad (5)$$

Энергия ( $W$ ), передаваемая через отверстие за одну секунду, равна, согласно вышеприведенному рассуждению,

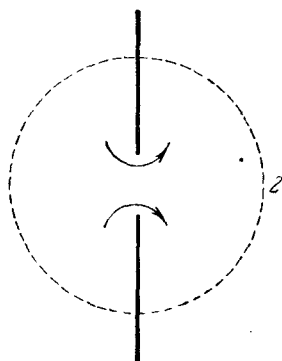


Рис. 74.

половине энергии, излучаемой простым точечным источником  $4KS$ , помещенным в точке  $O$ ; отсюда, учитывая (15) § 76, имеем:

$$W = \frac{qk^2cK^2C^2}{\pi}. \quad (6)$$

Поток энергии в падающей волне (1) равен  $\frac{1}{2}qk^2cC^2$ . Отношение  $W$  к этому потоку равно  $2K^2/\pi$ . Следует заметить, что это отношение не зависит от длины волны, конечно, только до тех пор, пока  $\lambda$  велико по сравнению с линейными размерами отверстия.

Точный расчет  $K$  для отверстий различных форм, естественно, представляет трудности. Для круглого отверстия радиуса  $a$  найдено, что  $K = 2a$ . Для отверстий, мало отличающихся по форме от круга,  $K$  имеет то же значение, что и круглое отверстие равной площади. Окружность, очевидно, является «стационарной» формой в том смысле, в каком этот термин употребляется в теории максимумов и минимумов. Отсюда следует, что круглое (или близкое к круглому) отверстие передает долю, равную  $8/\pi^2$ , или 0,816, энергии падающей волны, проходящей через равное сечение ( $\pi a^2$ ). Для условий, принятых выше для размеров отверстия, эта энергия очень велика по сравнению с потоком энергии, перехватываемым диском того же размера (§ 81).

На рис. 75 показаны эквипотенциальные поверхности ( $\varphi_2 = \text{const}$ ), нанесенные для равноотстоящих значений  $\varphi_2$  в непосредственной близости от круглого отверстия; видно, как быстро эти поверхности стремятся принять сферическую форму. Направления колебаний частиц воздуха, конечно, нормальны к этим поверхностям.

Что касается дальнейших задач этого рода, мы должны удовлетвориться упоминанием некоторых результатов.

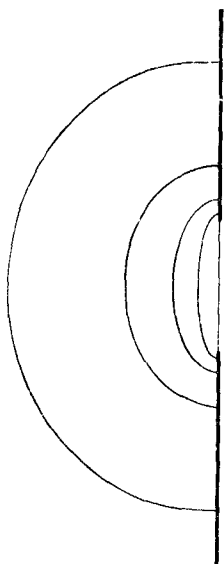


Рис. 75.



Для отверстия в форме длинной узкой щели, ширина которой мала по сравнению с длиной волны звука, прошедшая энергия тоже соизмерима с энергией, соответствующей равной площади фронта исходной волны, или даже может значительно превосходить ее. В случае решетки, образованной равными, параллельными и равноотстоящими щелями в тонком экране, доля общей падающей энергии, которая передается через эту решетку, оказывается равной  $\frac{1}{1+k^2l^2}$ , где, как обычно,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , а

$$l = \frac{a+b}{\pi} \log \sec \frac{\pi b}{2(a+b)}, \quad (7)$$

где  $a$  обозначает ширину щели, а  $b$ —ширину промежутков между щелями. В качестве численного примера предположим, что длина волны в десять раз больше расстояния  $a+b$  между центрами последовательных отверстий; тогда, если даже отверстия занимают только одну десятую часть всей площади экрана, 88% звуковой энергии пройдет через экран. В случае решетки, состоящей из равноотстоящих друг от друга стержней круглого сечения, соответственное значение  $l$  равно

$$l = \frac{\pi b^2}{a}, \quad (8)$$

где  $b$ —радиус поперечного сечения стержня,  $a$ —расстояние между осями соседних стержней. Здесь, однако, предполагается, что отношение  $b/a$  не должно превосходить примерно  $\frac{1}{4}$ .

### 83. Различие между дифракционными эффектами для звука и для света. Роль длины волны

В § 82 было показано, что отверстие ведет себя, как простой источник, из которого звуковые волны расходятся по другую сторону экрана равномерно во всех направлениях. Это представляет резкий контраст с тем, что обычно наблюдается при прохождении света. До сих пор мы не встречались с чем-либо, носящим характер звуковых лучей или пучков, так же как мы не находим ничего

похожего на звуковую тень в случаях, когда звуковые волны падают на препятствие. Различие в результатах объясняется тем фактом, что в акустике размеры отверстия (или препятствия) предполагаются малыми по сравнению с длиной волны, в то время как в оптике обычно встречается обратное соотношение.

Мы избегали вмешательства в область, относящуюся к оптике, но, поскольку динамические условия в акустике являются совершенно определенными, можно рассмотреть влияние длины волны несколько более полно.

Рассмотрим область пространства, лежащую справа от плоскости  $x = 0$ . Если эта плоскость является жесткой границей и если в рассматриваемой области нет источников звука, то всякое возмущение в конце концов исчезнет. Любое установившееся периодическое движение в этой области при отсутствии в ней источников должно поэтому вызываться движением границы; это движение будет вполне определено, если задана нормальная компонента скорости в каждой точке границы. Это движение можно, далее, выразить через распределение нормальной скорости следующим образом. Поток, вытекающий из элемента  $\delta S$  плоскости, равен  $-\frac{\partial \varphi}{\partial n} \delta S$ , где через  $\partial n$  обозначен элемент внутренней нормали к элементу  $\delta S$ ; если представить себе, что с другой стороны границы имеется равный поток противоположного направления, то результат будет эквивалентен источнику  $-2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \delta S$  в безграничном пространстве. Соответственный потенциал скорости в точке  $P$  равен

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \delta S \frac{e^{-ikr}}{r},$$

где через  $r$  обозначено расстояние элемента  $\delta S$  от точки  $P$ . Интегрируя по всем элементам  $\delta S$  плоскости, находим требуемую формулу:

$$\varphi_P = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} dS. \quad (1)$$

Движение среды справа от плоскости  $x = 0$  будет определено также, если задано значение  $\varphi$  в каждой точке плоскости; это равносильно заданию давления, поскольку

эти две величины связаны соотношением  $p = p_0 + \rho\dot{\varphi} = p_0 + ikc\rho\varphi$ . Представим себе, что в безграничной среде помещена тонкая безыперционная мембрана, совпадающая с плоскостью  $x = 0$ , и что к каждому элементу мембраны приложена по нормали сила  $X$  (на единицу поверхности), имеющая такое значение, что она вызывает заданное периодическое давление, а следовательно, и заданное значение  $\varphi$  на положительной стороне мембраны. Используя теорему (15) § 78, получим, что действие элемента  $\delta S$  эквивалентно двойному источнику, и соответственный потенциал скорости в точке  $P$  будет определяться формулой

$$\frac{i}{4\pi k c \rho} X \delta S \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right). \quad (2)$$

Переменные части давления с двух сторон мембраны, а именно величины  $\pm \rho\dot{\varphi} = \pm ikc\rho\varphi$ , должны уравновешиваться силой  $X$ , так что  $X = 2ikc\rho\varphi$ . Подставляя в (2) и интегрируя по плоскости  $x = 0$ , получим:

$$\varphi_P = -\frac{1}{2\pi} \iint \varphi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS. \quad (3)$$

Форма интегралов в выражениях (1) и (3) напоминает процесс, посредством которого «принцип Гюйгенса» применяется в оптике для нахождения возмущения в точке  $P$  через «вторичные волны», выходящие из различных элементов волнового фронта. Одно время много обсуждался вопрос относительно точных характеристик этих вторичных волн, особенно относительно закона интенсивности в различных направлениях. Мы теперь знаем, что с математической точки зрения эта задача имеет не единственное решение. Каждая из написанных выше формул приводит к точному результату, и мы даже можем комбинировать эти формулы в произвольной пропорции. Это разрешение исторического спора дано Рэлеем.

В качестве проверки формулы (3) предположим, что значение  $\varphi$  в плоскости  $x = 0$  равно потенциалу в бегущей плоской волне  $\varphi = e^{-ikhx}$ . Обозначим через  $\tilde{\omega}$  расстояние  $\delta S$  от проекции точки  $P$  на плоскость  $x = 0$ , так что  $r^2 = x^2 + \tilde{\omega}^2$ . Для совокупности элементов  $\delta S$ , составляю-

щих на плоскости кольцеобразную область, можно написать  $2\pi\tilde{\omega} \delta\tilde{\omega} = 2\pi r \delta r$ . Заметим еще, что  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ . Формула (3) тогда дает:

$$\Phi_P = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) 2\pi\tilde{\omega} d\tilde{\omega} = -x \int_x^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dr = e^{-ikx}. \quad (4)$$

В случае волн, прошедших через отверстие в плоском экране ( $x=0$ ), мы имеем согласно (1)  $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$  на всей поверхности, за исключением площади отверстия. Если считать, что размеры отверстия  $S$  малы по сравнению с длиной волны, то в точке  $P$  на расстоянии  $r$ , большом по сравнению с длиной волны, функция  $\frac{e^{-ikr}}{r}$  будет примерно одинаковой для всех элементов  $S$ , и мы можем написать:

$$\Phi_P = - \iint \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS \frac{e^{-ikr}}{2\pi r}, \quad (5)$$

где первый множитель представляет собой суммарный поток через  $S$ . При этих условиях действие отверстия эквивалентно простому источнику, как в § 82.

Конечно, следует учитывать, что выражения  $-\frac{\partial\Phi}{\partial n}$  в (1) или (5) представляют собой нормальные компоненты скорости, уже *измененные действием экрана*. Если, как в только что рассмотренном случае, отверстие относительно мало, то распределение нормальной скорости в этом отверстии будет значительно отличаться от распределения в падающей волне в отсутствие экрана. В случае падения на круглое отверстие плоской волны это распределение можно приближенно определить путем электрической аналогии § 82. Линии тока имеют ту же конфигурацию, что и силовые линии заряженного диска (см. рис. 75, дающий конфигурацию эквипотенциальных поверхностей), и нормальная компонента скорости оказывается распределенной по закону:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{B}{\sqrt{a^2 - \tilde{\omega}^2}}, \quad (6)$$

где  $\bar{\omega}$  обозначает расстояние любой точки отверстия от его центра. Скорость становится очень большой вблизи края, а на самом краю ( $\bar{\omega} = a$ ) обращается в бесконечность<sup>1)</sup>, однако интегрирование показывает, что участки площади вблизи краев вносят малый вклад в общий поток, который оказывается равным

$$- \int_0^a \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cdot 2\pi \bar{\omega} d\bar{\omega} = 2\pi a B. \quad (7)$$

Если падающую волну представить в виде

$$\Phi = C e^{-ikx}, \quad (8)$$

то этот поток будет, как и в § 82, равен  $2kC$  или  $4aC$ . Отсюда, сравнивая с (7), получим:

$$B = \frac{2}{\pi} C. \quad (9)$$

В другом крайнем случае, когда длина волны составляет лишь малую часть по сравнению с размерами отверстия, действие экрана, видоизменяющего распределение нормальной компоненты скорости в отверстии, ограничивается практически расстоянием в несколько длин волн от краев, а соответственная часть интеграла (1) совсем незначительна. В этом случае, выражая по-прежнему падающую волну в виде (8), мы можем с достаточной точностью положить  $-\frac{\partial \Phi}{\partial n} = ikC$  по всей площади отверстия. откуда

$$\Phi_P = \frac{ikC}{2\pi} \int \int \frac{e^{-ikr}}{r} dS. \quad (10)$$

Для приближенного вычисления значения этого интеграла при помощи метода «зон» Гюйгенса или Френеля (или иного метода) отсылаем к учебникам оптики. Найдено, что амплитуды почти одинаковы внутри области, ограниченной цилиндрической поверхностью, образующие которой нормальны к экрану и проходят через контур отверстия, и что они близки к нулю во внешней области. Вблизи цилиндрической границы, по обе стороны от нее,

<sup>1)</sup> Это неудобство можно обойти, если рассмотреть экран конечной толщины и представить себе, что края закруглены

наблюдаются дифракционные эффекты; такие эффекты специально рассматриваются в теории света.

Вопрос о падении волны на плоскую тонкую пластинку может быть рассмотрен подобным же образом. Для этой цели наиболее удобна формула (3). Расположив пластинку в плоскости  $x = 0$  и приняв, что падающая волна имеет вид (8), можем написать:

$$\varphi = Ce^{-ikhx} + \chi, \quad (11)$$

где  $\chi$  — потенциал скорости, обусловленный колебаниями пластинки нормально к ее плоскости, со скоростью  $-ikC$ , равной и противоположно направленной по отношению к скорости в падающей первичной волне. Очевидно, что значения этой функции в двух точках, симметрично расположенных по отношению к плоскости  $x = 0$ , будут равны по величине и противоположны по знаку. Тогда справа от пластинки будем иметь:

$$\chi_P = -\frac{1}{2\pi} \int \int \chi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS. \quad (12)$$

Здесь требуется только знать величину  $\chi$  на положительной стороне пластинки; во всех других точках плоскости  $x = 0$  эта величина равна, очевидно, нулю. Случай, когда размеры пластинки малы по сравнению с длиной волны, рассматривался в § 81; в этом случае интенсивность рассеянной волны оказывается много меньше интенсивности волны, прошедшей через отверстие того же размера и формы. В противоположном предельном случае значения  $\chi$  вблизи поверхности с положительной стороны будут, за исключением краев, те же, как и в случае колебания бесконечной пластины, т. е.  $\chi = -Ce^{ikhx}$ , так что с достаточной точностью имеем:

$$\chi = \frac{C}{2\pi} \int \int \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS. \quad (13)$$

Детальное исследование этого интеграла показало бы существование в полном решении, выраженном формулой (11), звуковой тени справа от пластинки. Для больших величин  $kr$  формула (13) может быть приведена к виду

$$\chi = -\frac{ikC}{2\pi} \int \int \frac{e^{-ikr}}{r} \cos \theta dS, \quad (14)$$

и для малых углов  $\theta$  мы можем, далее, положить  $\cos \theta = 1$ . Тогда формула оказывается совпадающей с (10), но имеющей противоположный знак; это значит, что в принятых предположениях *возмущение*, вызванное пластинкой, в точности противоположно возмущению, которое создается при прохождении волны через отверстие тех же размеров. Это—хорошо известный в оптике факт, но вышеприведенное рассмотрение показало, что это утверждение может оказаться грубо неверным, если длина волны не мала по сравнению с линейными размерами объекта.

Едва ли следует отмечать, что имеются акустические явления, как, например, в случае больших отражающих поверхностей или больших препятствий, где приближенно справедливы законы оптики. В этих случаях результаты аналогичны, и сходство будет тем полнее, чем больше высота звука. Применяя источник очень высокого тона и используя в качестве приемника чувствительное пламя, Рэлею удалось воспроизвести некоторые из наиболее тонких явлений физической оптики.

В теоретическом исследовании, данном выше, мы должны были полагаться в некоторой мере на интуитивные предположения, как, например, относительно распределения скорости по поверхности отверстия, когда длина волны относительно мала. Поэтому желательно, чтобы такие предположения по возможности проверялись точным расчетом. В настоящее время есть только один такой пример, доведенный до конца, это —случай падения волны на плоский экран с прямым краем. Отражение от экрана, передача звука вблизи края, образование тени на экране, дифракционные явления вблизи границ соответственных областей,—во всех этих вопросах расчет практически совпадает с обычной теорией. Это исследование было опубликовано Зоммерфельдом <sup>1)</sup> в 1895 г.

---

<sup>1)</sup> Упрощенный вариант дан в Proc. Lond. Math. Soc. (2), т. IV (1906).

## ГЛАВА IX

### ТРУБЫ И РЕЗОНАТОРЫ

#### 84. Нормальные колебания в прямоугольных и сферических сосудах

Основной задачей этой главы является установление законов колебаний воздуха в полостях типа резонаторов и органичных труб, сообщающихся с окружающей атмосферой. Однако сначала уделим немного места колебаниям воздуха в областях, ограниченных жесткими стенками со всех сторон. Это рассмотрение во всяком случае представит интересные примеры общей теории нормальных колебаний (§ 16).

Аналитическая процедура заключается в нахождении решения уравнения

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющего на стенках условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

которое обозначает отсутствие нормальной ( $n$ ) компоненты скорости на границе. Оказывается, что, как и в прежних аналогичных задачах, это возможно только для определенного ряда значений  $k$ , которые определяют типы соответственных нормальных колебаний и их частоты.

В случае прямоугольной полости возьмем начало координат в одной из вершин, а оси координат проведем вдоль ребер, выходящих из этой вершины. Если длины этих ребер равны соответственно  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , то условие (2) будет выполнено для решений вида

$$\varphi = C \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{c}, \quad (3)$$



где  $p, q, r$  — любые целые числа; уравнение же (1) также будет удовлетворено при выполнении условия

$$k^2 = \pi^2 \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} \right). \quad (4)$$

Если положить  $q = 0, r = 0$ , то получаем вырожденный случай трубы, закрытой с обоих концов (§ 62).

Более интересен случай сферической полости. Радиально-симметричные колебания исследуются методами §§ 71 и 76. Формула (15) § 71, относящаяся к случаю отсутствия источника в начале координат, дает для гармонических колебаний выражение

$$\varphi = A \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{r} \quad (5)$$

или

$$\varphi = C \frac{\sin kr}{r}. \quad (6)$$

Условие (2) требует равенства  $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$  при  $r = a$ , где  $a$  — радиус полости. Отсюда

$$\operatorname{tg} ka = ka. \quad (7)$$

Это — трансцендентное уравнение для  $k$ ; найдя  $k$ , можно определить и частоту  $n (= kc)$ . Корни этого уравнения находятся графическим путем (см. рис. 76), как абсциссы точек пересечения линий  $y = \operatorname{tg} x$  и  $y = x$ . Корень 0, конечно, исключается, как не имеющий смысла. Приближенно имеем  $ka = \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Более точные значения первых трех корней равны

$$\frac{ka}{\pi} = 1,4303; 2,4590; 3,4709. \quad (8)$$

Эти числа дают отношения диаметра  $2a$  полости к длине волны. В нормальных колебаниях, следующих за первым, имеются внутренние сферические узловые поверхности (т. е. поверхности, на которых скорости обращаются в нуль), положения которых определяются корнями низшего порядка. В нормальных колебаниях высокого

порядка расположение узловых поверхностей, как и следовало ожидать, стремится к эквидистантности, поскольку, за исключением области вблизи центра, условия соответствуют приближенно плоской волне.

Уравнения, аналогичные (7), встречались (как мы видели) в различных вопросах акустики; они встречаются

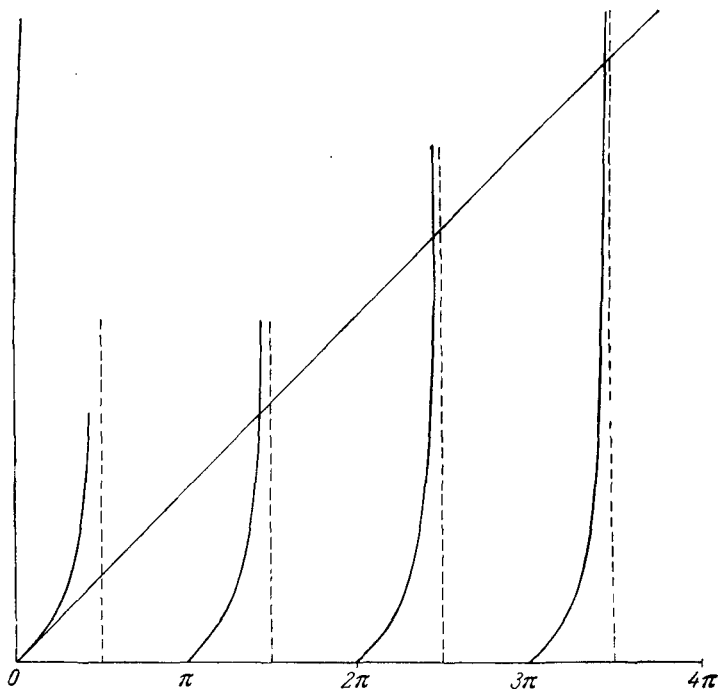


Рис. 76.

и в других разделах математической физики; методы их численного решения разработаны Эйлером, Рэлеем и другими. Существует метод, допускающий весьма общее применение, который настолько изящен и в то же время так мало известен, что желательнее изложить его здесь. Этот метод дан Фурье в его «Теории теплоты» (1822). Начиная с весьма грубого приближения к определенному корню (7), например, со значения  $x = x_1$ , мы вычисляем

последовательно значения  $x_2, x_3, x_4, \dots$ , пользуясь соотношениями

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \operatorname{arctg} x_1; \\ x_3 &= \operatorname{arctg} x_2; \\ x_4 &= \operatorname{arctg} x_3; \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Рис. 77 показывает, как эти значения стремятся к искомому корню как к пределу, независимо от того, с какой стороны взято первое значение. При использовании этого метода необходимо соблюдать некоторые довольно очевидные предосторожности; легко видеть, что сходимость будет медленной, если обе кривые имеют почти одинаковые наклоны к оси  $x$  (в одинаковом или противоположном направлениях). Изложенным способом получены следующие последовательные приближения к первому корню уравнения (7)<sup>1)</sup> (приведены отношения соответственных значений к  $\pi$ ):

$$\begin{aligned} 1,5; 1,433435; 1,430444; \\ 1,430304; 1,430297; \dots \end{aligned}$$

То же рассуждение может, очевидно, быть применено к теории колебаний в конической трубе, образующие которой сходятся в точке  $O$ . Если труба занимает участок от начала координат до  $r = a$ , то при удовлетворении обычных приближенных условий ( $s = 0$ ) на открытом конце получим такое же соотношение

$$\sin ka = 0, \quad (10)$$

как и для трубы длиной  $a$ , открытой с обеих сторон (§ 62). Для открытой с двух концов трубы, занимающей участок от  $r = a$  до  $r = b$ , требуется полное решение

$$r\varphi = A \cos kr + B \sin kr. \quad (11)$$

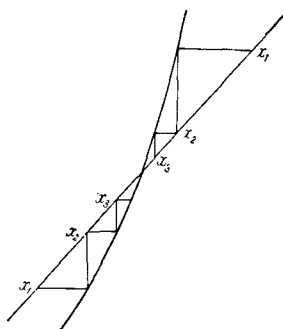


Рис. 77.

<sup>1)</sup> Для расчетов такого рода и вообще для целей математической физики весьма удобны тригонометрические таблицы, основанные на делении квадранта на 100 равных частей.

Граничные условия дают следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} A \cos ka + B \sin ka &= 0; \\ A \cos kb + B \sin kb &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

откуда

$$\sin k(b-a) = 0, \quad (13)$$

как и в случае трубы длиной  $(b-a)$ , открытой с обоих концов.

Если  $\chi$  является решением общего уравнения (1), то путем дифференцирования по  $x$  убеждаемся, что и  $\varphi = \frac{\partial \chi}{\partial x}$  также удовлетворяет этому уравнению. Мы уже имели

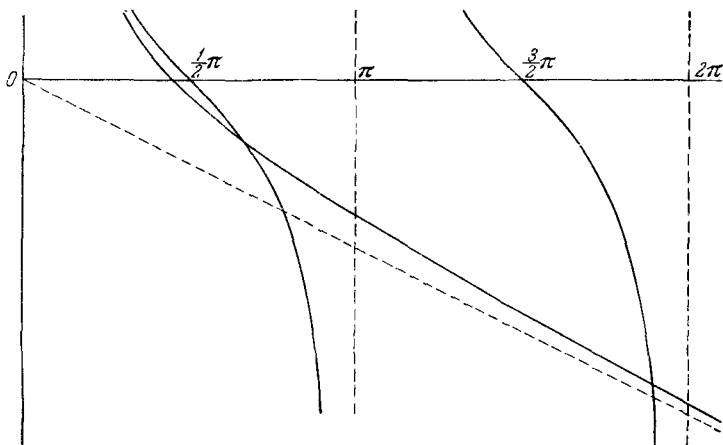


Рис. 78.

соответственный пример в задаче о двойном источнике (§ 73). Этим же способом получим из (6) решение

$$\varphi = C \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\sin kr}{r} \right) \quad (14)$$

или, учитывая равенство  $x = r \cos \theta$ ,

$$\varphi = C \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\sin kr}{r} \right) \cos \theta = \frac{C}{r^2} (kr \cos kr - \sin kr) \cos \theta. \quad (15)$$

Это приводит к другому набору нормальных колебаний воздуха в сферической полости. Для того чтобы условие  $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$  удовлетворялось при  $r = a$ , необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\operatorname{tg} ka = \frac{2ka}{2 - k^2 a^2}. \quad (16)$$

Расчет можно выполнить так же, как и для уравнения (7). Прилагаемый график функций  $y = \operatorname{ctg} x$ ,  $y = \frac{2 - x^2}{2x}$  (рис. 78) показывает, что корни стремятся асимптотически к виду  $n\pi$ . Ниже даны приближенные значения нескольких первых корней:

$$\frac{ka}{\pi} = 0,6625; 1,891; 2,930; 3,948; 4,959. \quad (17)$$

Первый корень соответствует наиболее низкому из всех нормальных колебаний в полости; воздух колеблется из стороны в сторону, как в случае закрытой с двух концов трубы, и длина волны равна  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1,509 \cdot 2a$ . На рис. 79 показаны соответственные эквипотенциальные поверхности; направления колебаний частиц воздуха ортогональны этим поверхностям. В следующем по порядку нормальном колебании радиальная компонента скорости обращается в нуль на всей поверхности сферы радиуса  $r$ , где  $\frac{r}{a} = \frac{0,6625}{1,891} = 0,350$ .

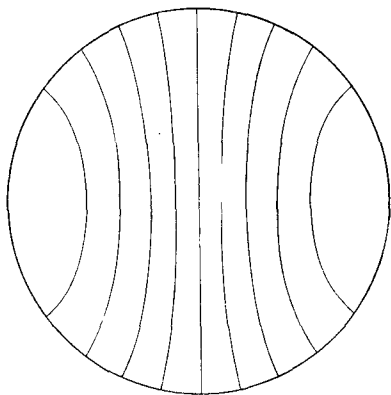


Рис. 79.

Изучение более сложных видов нормальных колебаний сферических объемов завело бы нас слишком далеко. Эта задача более полно рассмотрена в трактате Рэля.

## 85. Колебания в цилиндрическом сосуде

Теория чисто поперечных колебаний воздуха, заключенного в круглый цилиндр, аналогична рассмотренной только что теории. Как и в § 54, уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0, \quad (1)$$

где  $x, y$  — декартовы координаты в плоскости поперечного сечения. В полярных координатах уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k^2 \varphi = 0. \quad (2)$$

Типичное решение этого уравнения при отсутствии источников в начале координат имеет вид

$$\varphi = C J_m(kr) \cos m\theta. \quad (3)$$

Допустимые значения  $k$  определяются из условия  $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$  для  $r = a$  или

$$J'_m(ka) = 0. \quad (4)$$

Для радиальных колебаний ( $m = 0$ ) первые корни имеют значения

$$\frac{ka}{\pi} = 1,2179; 2,2330; 3,2383; \dots \quad (5)$$

При этом асимптотическое значение корня есть целое число  $+\frac{1}{4}$ . В случае  $m = 1$ , включающем самое низкое нормальное колебание,

$$\frac{ka}{\pi} = 0,586; 1,697; 2,717; \dots \quad (6)$$

При этом асимптотическое значение корня есть целое число  $-\frac{1}{4}$ .

Чисто продольные нормальные колебания в закрытых круглых цилиндрических полостях были рассмотрены в § 62. Остается рассмотреть еще колебания смешанного типа. Уравнение (2) следует теперь видоизменить, добавляя член  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ , где  $z$  — продольная координата. Можно

показать, что уравнение удовлетворяется решением вида

$$\varphi = C \cos \frac{m' \pi z}{l} J_m(\beta r) \cos m\theta \quad (7)$$

при выполнении условия

$$k^2 = \beta^2 + m'^2 \frac{\pi^2}{l^2}. \quad (8)$$

Здесь принято, что начало координат выбрано в центре одного из оснований цилиндра. Условие равенства нулю нормальной компоненты скорости  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$  на другом основании цилиндра ( $z = l$ ) удовлетворяется при  $m'$  целом. Соответствующее условие на цилиндрической поверхности требует, чтобы величина  $\beta$  являлась корнем уравнения

$$J'_m(\beta a) = 0. \quad (9)$$

## 86. Свободные колебания резонатора. Потери

Приведенные выше примеры интересны скорее с теоретической, чем с практической точки зрения, так как колебания массы воздуха, ограниченной твердыми стенками, совершенно изолированы от внешней среды. В акустических задачах колеблющаяся масса должна иметь некоторую связь с внешней атмосферой; однако существенно, чтобы эта связь была настолько ограничена, чтобы доля энергии, израсходованная за один период на излучение расходящихся волн, была очень мала. В противном случае вряд ли свободные колебания можно было бы рассматривать как приближенно гармонические колебания; они скорее походили бы на движение аперiodического типа (§ 11).

Теория наиболее проста для «резонаторов» того типа, который Гельмгольц использовал в своем исследовании свойств музыкальных нот. Такие резонаторы представляют собой почти закрытые сосуды, снабженные отверстием; их используют для усиления гармонического тона, звучащего вблизи резонатора, вследствие возбуждения резонансных колебаний заключенного в резонаторе воздуха. Точная форма резонатора оказывается несущественной. Резонатор может быть сферическим, цилиндрическим или почти любой другой формы, — лишь бы только наименьший

диаметр полости значительно превосходил размеры отверстия. В своей работе над синтезированием гласных звуков Гельмгольц использовал цилиндрические резонаторы с круглыми отверстиями в центре одного из оснований. Для обнаружения и выделения определенного обертона в сложном звуке он использовал более удобную форму, показанную на рис. 80. Маленький открытый отросток напротив устья резонатора встав-

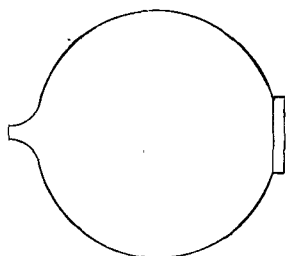


Рис. 80.

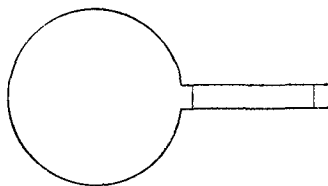


Рис. 81.

ляется в слуховой проход так, что барабанная перепонка становится частью внутренней стенки резонатора.

Впервые математическая теория резонаторов была дана в 1860 г. Гельмгольцем, а затем существенно упрощена Рэлеем (1871).

Предположим вначале, что имеется сосуд с узким цилиндрическим горлышком, со вставленной в него пробкой или поршеньком, который может свободно двигаться вперед и назад (рис. 81). Введем следующие обозначения:  $Q$ —емкость сосуда,  $l$ —длина горлышка,  $\omega$ —его поперечное сечение,  $\rho'$ —плотность поршня. Предположим, что период колебаний так велик, что длина волны ( $\lambda$ ) в воздухе велика по сравнению с диаметром сосуда. При этих условиях сжатие  $s$  в любой момент времени будет почти одинаково по всему объему сосуда, и мы можем положить  $s = -\frac{\omega x}{Q}$ , где  $x$  обозначает малое смещение поршня наружу от его среднего положения. Результирующее избыточное давление, действующее на поршень, равно  $\rho c^2 s \omega$ , или  $-\rho c^2 \omega^2 x / Q$ ; тогда приближенное уравнение движения системы будет иметь вид

$$\rho' \omega \ddot{x} = -\frac{\rho c^2 \omega^2 x}{Q}. \quad (1)$$



Движение представляет собой простое гармоническое колебание периода  $2\pi/n$ , где

$$n^2 = \frac{c^2\omega}{lQ} \frac{q}{q'}. \quad (2)$$

Материал поршня не имеет значения, если только его масса достаточно мала. Мы можем даже заменить его воздухом, если длина  $l$  мала по сравнению с длиной волны  $\lambda$ , так как при этих условиях столб воздуха в горлышке резонатора будет вести себя почти так же, как если бы он был несжимаем. Тогда имеем  $q' = q$  и

$$n^2 = \frac{c^2\omega}{lQ}. \quad (3)$$

Даже для резонатора без горлышка, для которого устьем является просто отверстие в стенке, теория почти не меняется. Здесь вопрос сводится только к оценке инерции массы воздуха в непосредственной близости от устья резонатора внутри и снаружи его, которая заменяет теперь поршень в рассмотренной выше задаче. Поток через отверстие в некоторый момент времени управляется приблизительно все тем же законом, которому подчиняется и поток несжимаемой жидкости или поток электричества в однородном проводнике. Так как внутри полости резонатора движение весьма малое, то значение  $\varphi$  будет практически одинаковым во всех внутренних точках. Обозначим это значение через  $\varphi_1$ . Снаружи уже на малом расстоянии от устья мы имеем приближенно  $\varphi = 0$ . Если через  $q$  обозначить объем воздуха, который прошел через отверстие к моменту  $t$  наружу, то ток (или поток), направленный наружу, в этот момент будет равен  $\dot{q}$  и, пользуясь электрической аналогией, будем иметь:

$$\dot{q} = K\varphi_1, \quad (4)$$

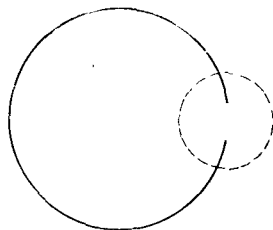


Рис. 82.

где  $K$  есть «проводимость» (§ 82), зависящая, разумеется, от формы и размера отверстия и от конфигурации стенки

вблизи отверстия. Следует заметить, что это соотношение (4) является чисто кинематическим. С точки зрения динамики системы с одной степенью свободы (§ 7) оно выражает *импульс* (который можно представить в виде  $e\Phi_1$ ) через скорость  $\dot{q}$ . Динамическое уравнение (3) § 70

$$c^2 s = \dot{\Phi}_1 \quad (5)$$

можно подобным же образом интерпретировать как выражение зависимости между изменением импульса и силой. Если значение  $q = 0$  соответствует положению равновесия, то имеем:

$$s = -\frac{q}{Q}. \quad (6)$$

Исключая  $s$  и  $\Phi_1$  из (4), (5) и (6), получим:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{Kc^2}{Q} q = 0. \quad (7)$$

Таким образом, движение имеет вид

$$q = C \cos (nt + \varepsilon), \quad (8)$$

где

$$n^2 = \frac{Kc^2}{Q}. \quad (9)$$

Если написать  $n = kc$ , то получим:

$$k^2 = \frac{K}{Q}, \quad \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{K}}. \quad (10)$$

Длина волны зависит, как и следовало ожидать, единственно от линейных размеров резонатора и от его отверстия. Для резонаторов, которые геометрически подобны во всех отношениях, длина волны прямо пропорциональна линейному размеру. Это находится в соответствии с общим принципом, который можно вывести из дифференциального уравнения (2) § 76 или иным путем. Формула (9) показывает, далее, что высота тона резонатора понижается при закрывании или частичном прикрывании отверстия и повышается при уменьшении внутреннего объема.

Кинетическую энергию, в основном сосредоточенную в окрестности устья резонатора, можно вычислить, считая в этой области среду несжимаемой. Если бы фактическое

движение было вызвано мгновенно из состояния покоя, требуемая работа была бы равна полусумме произведений импульсов на соответственные скорости. Уравнение (9) § 69 показывает, что необходимый импульс давления равен  $\rho\Phi_1$ ; следовательно, кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} \rho\Phi_1 \dot{q} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{K} \dot{q}^2. \quad (11)$$

Потенциальная энергия согласно (8) § 70 равна

$$V = \frac{1}{2} \rho c^2 s^2 Q = \frac{1}{2} \frac{\rho c^2}{Q} q^2. \quad (12)$$

Поскольку коэффициенты в этих уравнениях известны, частоту колебаний  $n$  можно получить сразу из общей формулы (7) § 7. В такой форме теория была дана Рэлеем. Следует заметить, что коэффициент инерции пропорционален «сопротивлению» отверстия (в случае электричества), в то время как коэффициент устойчивости или упругости изменяется обратно пропорционально объему  $Q$ .

Предыдущая теория применима только к наименьшему нормальному колебанию резонатора. В случае нормальных колебаний высших номеров внутреннее пространство резонатора делится на части одной или несколькими «поверхностями пучностей» (т. е. поверхностями постоянного давления, где  $\dot{\phi} = 0$ ); соответственные частоты оказываются гораздо выше, чем в предыдущем случае, а максимальная длина волны, как и в задачах § 84, сравнима с линейными размерами резонатора.

Как уже указывалось в § 82, вычисление величины  $K$  обычно затруднительно. Для круглого отверстия в тонкой стенке  $K$  равно диаметру отверстия, а для любой другой формы, не слишком отличающейся от круглой, можно приближенно принять  $K = 2 \sqrt{\omega/\pi}$ , где  $\omega$  — площадь отверстия. Тогда частота, определяемая выражением (9), будет изменяться по закону  $\omega^{\frac{1}{4}}/Q^{\frac{1}{2}}$ . Замечательно, что этот закон был получен эмпирически Зондхаузом в 1850 г., раньше, чем была дана теория. Если отверстие соединено с цилиндрическим горлышком, то проводимость определяется главным образом самим горлышком, и мы можем приближенно положить  $K = \omega/l$ , где  $l$  — длина горлышка. Тогда формула (9) совпадет с (3). При этом

предполагается, что  $l$  мало по сравнению с длиной волны  $\lambda$  и в то же время велико по сравнению с диаметром горлышка.

В изложенной теории учитывалась инерция внешней среды, но не ее упругость; в результате мы получили незатухающие колебания, определяемые выражением (8). Иначе говоря, мы пренебрегали кажущимися <sup>1)</sup> потерями энергии в резонаторе, вызванными излучением волн, расходящихся наружу от устья. Вообще, они не будут заметно влиять на период, но будут проявляться в постепенном ослаблении амплитуды колебания.

Этот эффект можно оценить с достаточной точностью косвенным путем. Поток, вытекающий наружу из устья, согласно (8) можно представить в виде:

$$\dot{q} = -nC \sin(nt + \varepsilon). \quad (13)$$

Если бы резонатор был практически изолирован в пространстве, то, исходя из предположения о малости его размеров по сравнению с длиной волны, действие этого потока на большом расстоянии было бы равносильно действию простого точечного источника с производительностью  $nC$  и мощность излучения согласно формуле (15) § 76 была бы равна

$$W = \frac{n^4 q C^2}{8\pi c} ; \quad (14)$$

Энергия  $E$  движения, равная максимальному значению потенциальной энергии, согласно (12) равна приближенно

$$E = \frac{1}{2} \frac{qc^2 C^2}{Q}. \quad (15)$$

Приравнявая, как и в § 11, величину ослабления энергии количеству излученной энергии  $W$ , найдем:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{C}{\tau} = 0 \quad (16)$$

и, значит,

$$q = C_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(nt + \varepsilon), \quad (17)$$

<sup>1)</sup> Действительные потери, вызванные вязкостью и теплопроводностью, в настоящей задаче не учитываются. Вероятно, они, как правило, играют малую роль.

где согласно (9)

$$\tau = \frac{8\pi c^3}{n^4 Q} = \frac{8\pi Q}{K^2 c}. \quad (18)$$

Отношение модуля затухания к периоду ( $2\pi/kc$ ) дается формулой

$$\frac{4kQ}{K^2} = \frac{4Q^{1/2}}{K^{3/2}}. \quad (19)$$

Так как  $K$  сравнимо со средней шириной отверстия, то это отношение обычно очень велико, и заранее принятое предположение оказывается полностью оправданным.

Если бы устье резонатора было снабжено бесконечным фланцем (в данном случае это значит: таким, диаметр которого велик по сравнению с длиной волны  $\lambda$ ), то эквивалентный источник, как показано в § 82, имел бы двойную интенсивность по сравнению с рассмотренным ранее, и теперь эффективное излучение энергии в окружающем полупространстве было бы в два раза больше, а модуль затухания (18) соответственно в два раза меньше, чем раньше.

В качестве численной иллюстрации теоретических результатов возьмем случай сферического сосуда диаметром 10 см, с круглым отверстием радиусом в 1 см, так что объем  $Q = 523,6 \text{ см}^3$ , а  $K = 2$ . Длина волны, вычисленная по формуле (10), равна 101,6 см, а частота равна приблизительно 327 гц. Модуль затухания, определяемый формулой (18), приблизительно равен 0,1 сек.

### 87. Поправка к теории органной трубы

Для получения поправки к приближенной теории открытой трубы, изложенной в § 62, можно применить те же приемы, что и в предыдущем параграфе. Мы можем начать с краткого рассмотрения несколько более простой задачи отражения от свободного конца бесконечно длинной трубы (§ 61).

Вблизи открытого конца расположена некоторая переходная область, малая по сравнению с длиной волны, внутри которой плоская волна переходит в сферическую,

расходящуюся снаружи трубы<sup>1)</sup>. Возьмем начало координат внутри трубы вблизи устья, но в области, где волна еще плоская; положительное направление оси  $x$

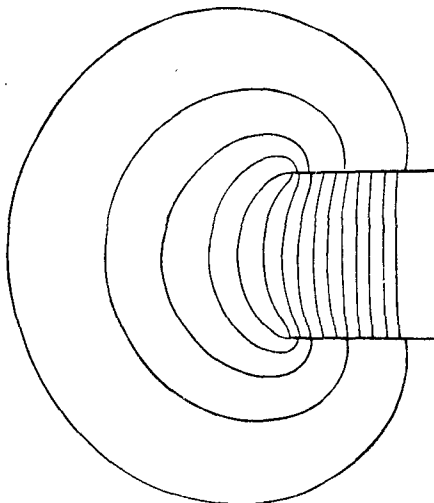


Рис. 83.

возьмем вдоль трубы. Для области, где распространяется плоская волна, можно записать потенциал в виде

$$\varphi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (1)$$

где первый член можно считать волной, приближающейся к концу трубы справа, а второй член — отраженной волной. Тогда скорость в  $O$  можно представить в виде  $ik(A - B)$ , а поток — в виде

$$\dot{q} = ik\omega(A - B), \quad (2)$$

где  $\omega$  — поперечное сечение трубы. Потенциал скорости в  $O$  равен  $A + B$ . «Сопротивление» между сечением  $x = 0$

<sup>1)</sup> Рис. 83, полученный на основе формулы, данной Гельмгольцем в другой связи, относится к двумерной задаче. В трехмерном случае переход в равномерный радиальный поток, вытекающий из трубы снаружи, будет еще более быстрым.

и внешней областью слева можно считать эквивалентным сопротивлению некоторой длины  $a$  трубы и соответственно обозначить через  $a/\omega$ . Тогда, пользуясь электрической аналогией, имеем:

$$A + B = \frac{a}{\omega} ik\omega (A - B), \quad (3)$$

откуда

$$\frac{B}{A} = -\frac{1 - ika}{1 + ika}. \quad (4)$$

Если положим

$$ka = \operatorname{tg} k\beta, \quad (5)$$

то (4) можно записать в виде

$$\frac{B}{A} = -e^{-2ik\beta}. \quad (6)$$

Следовательно,

$$\varphi = A \{e^{ikhx} - e^{-ih(x+2\beta)}\}. \quad (7)$$

Тогда отраженная и падающая волны, как и следовало ожидать, равны по амплитуде, так как до сих пор принималась в расчет только инерция внешнего воздуха; однако фазы теперь различны. В теории § 61 условия, которые должны были быть удовлетворены на открытом конце, имели вид  $s = 0$ , или  $\varphi = 0$ . Следовательно, если мы напомним (7) в виде

$$\varphi = Ae^{-ih\beta} \{e^{ih(x+\beta)} - e^{-ih(x+\beta)}\}, \quad (8)$$

то окажется, что эффект будет тот же, как если бы труба была удлинена слева на величину  $\beta$  и отражение у открытого конца соответствовало бы элементарной теории. Если считать, что длина волны велика по сравнению с диаметром трубы, то  $ka$  обычно будет мало, так что приближенно  $\beta = a$ . Но если труба будет очень сильно сужена у устья или если в отверстии будет находиться препятствие, то  $ka$  может иметь значительную величину, и  $k\beta$  будет в этом случае приближаться к  $\frac{1}{2}\pi$ . Тогда приближенно  $B = A$ , и условия близки к случаю отражения от закрытого конца.

Фактически нахождение  $a$ -задача нахождение тока; такие задачи решены в настоящее время даже

приближенно лишь в очень небольшом числе случаев. Согласно оценке Рэлея, для идеально цилиндрической трубы, снабженной бесконечно большим фланцем, величина  $\alpha$  равна приблизительно 0,82 радиуса поперечного сечения. Для цилиндрической трубы без фланца эксперимент, по-видимому, указывает на значение около 0,6 радиуса.

Далее рассмотрим трубу конечной длины, закрытую на конце  $x = l$ . Начало координат расположим, как и раньше, вблизи открытого конца, в области, где волна имеет еще плоский характер. Для этой области мы можем положить

$$\varphi = A \cos k(l - x), \quad (9)$$

поскольку  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  должно быть равно нулю для  $x = l$ . Поток, вытекающий из трубы наружу, будет равен

$$\dot{q} = \omega \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k\omega A \sin kl \quad (10)$$

и потенциал в точке  $O$  будет равен  $A \cos kl$ . Тогда, приписывая  $\alpha$  тот же смысл, что и раньше, будем иметь:

$$A \cos kl = \frac{\alpha}{\omega} k\omega A \sin kl$$

или

$$\operatorname{ctg} kl = k\alpha. \quad (11)$$

Это выражение определяет длину волны ( $2\pi/k$ ) различных видов нормальных колебаний. Обычно  $k\alpha$  мало, и решение (11) будет иметь вид

$$kl = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi - k\alpha$$

или

$$k(l + \alpha) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (12)$$

где  $m$  — целое число. Нормальные колебания тогда будут носить тот же характер, что и в элементарной теории (§ 62), если считать, что длина трубы увеличена на  $\alpha$ . В частности, частоты будут пропорциональны последовательности нечетных целых чисел 1, 3, 5, ... до тех пор, пока длина волны остается большой по сравнению с диаметром трубы.



Если отверстие сужать, то величина  $\alpha$  будет увеличиваться, и результаты станут менее простыми. В частности, будет нарушаться гармоническое соотношение последовательных частот, как это легко видеть из графического рассмотрения выражения (11). Когда труба почти закрыта, то  $\alpha$  относительно велико, и решение (11) есть  $kl = \frac{1}{ka}$  или  $k^2 = \frac{1}{la}$ ; это соотношение согласуется с формулой (10) § 86, если положить  $\omega l = Q$ ;  $\frac{\omega}{a} = K$ .

Для трубы, открытой с обоих концов, уравнение периодов будет иметь вид

$$\operatorname{tg} kl = -k(\alpha + \alpha'), \quad (13)$$

где  $\alpha$ ,  $\alpha'$  — поправки для двух концов; здесь, однако, предположено, что  $ka$  и  $ka'$  малы. Впрочем, как правило, только при этом условии проводимости для двух концов можно оценивать независимо друг от друга. Тогда уравнение будет эквивалентно следующему:

$$\sin k(l + \alpha + \alpha') = 0, \quad (14)$$

и, следовательно, частоты будут совпадать со значениями, даваемыми элементарной теорией для трубы длиной  $l + \alpha + \alpha'$ . Гармонические соотношения между различными нормальными колебаниями сохраняются, но следует помнить, что приближение тем менее надежно, чем выше порядок гармоники.

Длины волн для собственных тонов определяются во всех случаях линейными размерами системы, но частоты, которые меняются пропорционально скорости звука, будут увеличиваться или уменьшаться вместе с температурой. «Открытая» органная труба настраивается посредством устройства, которое уменьшает или увеличивает эффективный размер отверстия на открытом конце, т. е. на конце, далеком от «устья» трубы. Высота тона «закрытой» трубы регулируется установкой поршня, закрывающего трубу.

Для расчета величины затухания свободных колебаний достаточно взять случай закрытой трубы. Кинетическая энергия, соответствующая потенциалу

$$\varphi = A \cos k(l - x) \cos nt, \quad (15)$$

дается для малого  $ka$  с достаточной точностью формулой

$$T = \frac{1}{2} \rho \omega \int_0^l \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \rho k^2 \omega l A^2 \cos^2 nt, \quad (16)$$

так как в этом случае можно положить  $\cos kl = 0$ . Более точный расчет, принимающий во внимание переходную область между плоской и сферической волнами, приводит к замене в этой формуле  $l$  на  $l + a$  (приближенно), однако эта поправка незначительна. Общая энергия, равная максимальному значению кинетической энергии, составляет:

$$E = \frac{1}{4} \rho k^2 \omega l A^2. \quad (17)$$

Если конец трубы не имеет фланца, то отверстие действует по отношению к внешней среде как простой источник с производительностью  $k\omega A \sin kl$ , или приближенно  $k\omega A$ , и соответственно энергия, излучаемая за одну секунду, равна согласно (15) § 76

$$W = \frac{\rho k^4 \omega^2 c A^2}{8\pi}. \quad (18)$$

Приравнявая скорость убывания энергии величине  $W$ , мы приходим к уравнению

$$\frac{dA}{dt} + \frac{k^2 \omega c}{4\pi l} A = 0, \quad (19)$$

и модуль затухания, таким образом, равен

$$\tau = \frac{4\pi l}{k^2 \omega c}. \quad (20)$$

Отношение этой постоянной к периоду ( $2\pi/kc$ ) равно  $2l/k\omega$ , или (для самого низкого нормального колебания) приближенно  $4l^2/\pi\omega$ . Так как модули затухания различных нормальных колебаний пропорциональны квадрату соответственных длин волн, то для колебаний более высоких порядков затухание будет более быстрым. Для трубы с фланцем значение (20) следует разделить пополам.

## 88. Действие постороннего источника на резонатор. Реакция на источник

Теория вынужденных колебаний, обусловленных внешним источником звука, к которой мы сейчас перейдем, связана с некоторыми более тонкими соображениями и часто может приводить к недоразумениям. Ясно, что масса воздуха, заключенного в резонаторе или органной трубе, будет приведена в интенсивные колебания источником, настроенным приблизительно в унисон; но желательно было бы также оценить амплитуду вынужденных колебаний и, в частности, понять, почему звук, который представляется исходящим из резонатора, может при некоторых условиях в огромной степени превосходить звук, который создавался бы исходным источником, взятым в отдельности.

Для простоты предположим, что путем соответственной затраты энергии амплитуда колебаний этого источника поддерживается постоянной, так что колебания воздуха везде будут носить установившийся характер. Сразу же ясно, что при этом условии в среднем за период у устья резонатора не совершается никакой работы над содержащимся в резонаторе воздухом; энергия последнего остается постоянной, и, следовательно, в свою очередь эта масса воздуха не совершает никакой работы над внешней атмосферой. Увеличение излучения звука должно вызываться изменением условий, вносимым резонатором в область вблизи первичного источника. Если не поддерживать постоянную амплитуду колебаний источника, а считать, что источник просто начал колебаться, имея некоторый начальный запас энергии (как в случае камертона), то под действием резонатора этот запас будет быстрее расходоваться.

Для того чтобы при разборе этого вопроса опустить несущественные детали, которые для разных случаев могут оказаться различными, возьмем резонатор типа, рассмотренного в § 86, размеры которого малы по сравнению с длиной волны.

Расчет наиболее прост, когда частота источника почти совпадает с собственной частотой резонатора, определяемой формулой (9) § 86, так что вынужденные колебания

в резонаторе будут иметь наибольшую величину. Быть может, изложение будет более ясным, если для начала представить себе, что резонатор имеет короткое горло цилиндрической формы, в котором точно подогнанный тонкий невесомый диск может совершать возвратно-поступательное движение в результате воздействия соответственно подобранной силы. Предположим, что диск совершает колебания так, что увеличение объема в резонаторе зависит от времени по закону

$$q = C \cos nt. \quad (1)$$

Обозначим внешнюю силу, которая должна быть приложена к диску, чтобы уравновесить разность давлений воздуха с двух сторон, через

$$A \cos nt + B \sin nt. \quad (2)$$

Пусть эта величина будет положительна, когда сила направлена, например, наружу. Слагаемое  $A \cos nt$ , находящееся в фазе со смещением, необходимо для уравновешивания инерции воздуха. Из общей теории вынужденных колебаний (§§ 9, 12) следует, что можно получить тот или иной знак коэффициента  $A$  путем соответственного подбора  $n$ : величина  $n$  будет по знаку одинакова с  $C$ , если вынужденные колебания относительно медленны; знаки будут противоположны, если колебания относительно быстрые. Следовательно, мы можем выбрать  $n$  и таким, чтобы выполнилось равенство  $A = 0$ . Тогда условия будут близко соответствовать свободным колебаниям, и требуемое значение  $n$  определится с большой точностью по формуле

$$n^2 = \frac{Kc^2}{Q}. \quad (3)$$

Второй член в выражении (2) для силы, находящийся в фазе со скоростью  $\dot{q}$ , необходим для поддержания излучения энергии, определяемой формулой (15) § 76:

$$W = \frac{n^4 q C^2}{8\pi c}. \quad (4)$$

Эта энергия должна быть равна среднему значению  $p\dot{q}$ , где  $p$  — давление на внешней поверхности диска. Отсюда

находим, что  $p$  должно определяться по формуле

$$p = p_0 + D \cos nt - \frac{n^3 q C}{4\pi c} \sin nt. \quad (5)$$

Так как в целом никакой работы над воздухом в резонаторе не совершается, то соответственное давление на внутренней поверхности будет равно

$$p = p_0 + D \cos nt. \quad (6)$$

Теперь можно рассмотреть действие внешнего источника. Предположим, что при неподвижном диске этот источник создавал бы в устье резонатора давление

$$p = p_0 + \frac{n^3 q C}{4\pi c} \sin nt. \quad (7)$$

Тогда в сложном колебании, создаваемом из движений, вызванных действием и источника и диска, не потребуются никакой внешней силы, и диск можно будет убрать, не вызывая никаких заметных изменений в условиях движения. Если через  $\varphi_2$  обозначить потенциал скорости в устье резонатора, обусловленный действием только одного источника, то в этом случае должно иметь место соотношение

$$\varphi_2 = -\frac{n^2 C}{4\pi c} \cos nt, \quad (8)$$

так как (7) должно совпадать с формулой  $p = p_0 + \dot{q}\varphi_2$ .

Картина твердого диска, колеблющегося в цилиндрическом горле, была введена только для облегчения представлений и не является существенной для хода рассуждения. Диск по нашему желанию можно заменить податливой и растяжимой диафрагмой, закрывающей отверстие резонатора и примыкающей к внешней стенке в области расходящихся волн.

Сравнивая (1) с (8), мы видим, что при условии наибольшего резонанса, когда  $n$  дается приблизительно формулой (3), потенциалу возмущения, значение которого в устье резонатора равно

$$\varphi_2 = J \cos (nt - \varepsilon), \quad (9)$$

будет соответствовать колебание

$$q = -\frac{4\pi c}{n^2} J \cos (nt - \varepsilon). \quad (10)$$

Соответственный поток равен

$$\dot{q} = \frac{4\pi J}{k} \sin (nt - \varepsilon). \quad (11)$$

Излученную энергию легко вычислить, рассматривая поле на большом расстоянии. Потенциал скорости будет обусловлен как первичным источником, так и потоком  $q$ ; при определенных условиях компонента, соответствующая  $\dot{q}$ , может в значительной степени преобладать. Тогда излученная энергия согласно (15) § 76 будет приближенно определяться формулой

$$W = 2\pi c J^2. \quad (12)$$

Таким образом, если  $\varphi_2$  вызывается точечным источником  $A \cos kct$  на расстоянии  $b$  от отверстия, мы имеем:

$$\varphi_2 = \frac{A}{4\pi b} \cos k(ct - b). \quad (13)$$

Отсюда

$$J = \frac{A}{4\pi b}$$

и

$$\dot{q} = \frac{A}{kb} \sin k(ct - b). \quad (14)$$

Картина эквивалентна источнику, амплитуда которого относится к амплитуде первичного источника, как  $1/kb$ . Если  $b$  мало по сравнению с величиной  $\lambda/2\pi$ , то это отношение велико, и излученная энергия в  $1/k^2b^2$  раз больше той, которая обусловлена действием первичного источника.

В случае двойного источника  $B \cos kct$  при условии малости  $kb$ , мы можем согласно (23) § 76 записать:

$$\varphi_2 = \frac{B}{4\pi b^2} \cos \alpha \cos k(ct - b); \quad (15)$$

здесь через  $\alpha$  обозначен угол между осью источника и линией, проведенной к нему из отверстия. Отсюда  $J = \frac{B \cos \alpha}{4\pi b^2}$ , и излучение согласно (12) определяется по

формуле

$$W = \frac{qcB^2 \cos^2 \alpha}{8\pi b^4}. \quad (16)$$

Излучение, вызванное только одним первичным двойным источником, будет согласно (26) § 76 равно  $\frac{qk^4cB^2}{24\pi}$ . Следовательно, излучение увеличивается в отношении  $\frac{3 \cos^2 \alpha}{k^4b^4}$ . Так как среднее значение  $\cos^2 \alpha$  равно  $\frac{1}{3}$ , то величина этого отношения, усредненная для всех направлений оси двойного источника, равна  $1/k^4b^4$ . То обстоятельство, что это отношение при заданных условиях во столько раз больше, чем соответственное отношение в предыдущем случае, объясняется относительно малой эффективностью излучения двойного источника (§ 80) по сравнению с простым точечным источником.

Следует снова подчеркнуть, что увеличение расхода энергии является *косвенным* следствием наличия резонатора, который сам не совершает работы. Полная энергия поступает от первичного источника, движение которого происходит против увеличенного давления; это увеличение совпадает по фазе со скоростью. Потенциал скорости, вызванный потоком  $q$ , направленным из резонатора, определяется согласно (11) по формуле

$$\varphi_1 = \frac{J}{kr} \sin(nt - kr - \varepsilon), \quad (17)$$

а результирующее давление равно

$$p = p_0 + \frac{qcJ}{r} \cos(nt - kr - \varepsilon). \quad (18)$$

В случае простого первичного источника мы имели  $J = A/4\pi b$ ,  $\varepsilon = kb$ ; отсюда, полагая  $r = b$ , находим, что давление, создающееся вблизи источника, равно

$$p = p_0 + \frac{qcA}{4\pi b^2} \cos(nt - 2kb). \quad (19)$$

Так как наложенный вытекающий поток равен  $A \cos nt$ , то среднее значение работы, соответствующей этой части

давления, равно

$$\frac{\rho c A^2}{8\pi b^2} \cos 2kb. \quad (20)$$

Излучаемая энергия, следовательно, в  $\cos 2kb/k^2b^2$  раз больше, чем она была бы в отсутствие резонатора. Это согласуется с прежним результатом, полученным в предположении малости  $kb$ .

Согласно (15) § 86 энергия, запасенная в резонаторе при условии максимальных колебаний, равна

$$E = \frac{8\pi^2 \rho c^4 J^2}{n^4 Q} = \frac{8\pi^2 \rho Q J^2}{K^2}. \quad (21)$$

Эта энергия пропорциональна объему  $Q$  резонатора и для отверстий подобной формы обратно пропорциональна их площади.

Влияние резонатора, находящегося под действием источника, расположенного на *большом расстоянии* и настроенного на собственную частоту резонатора, можно достаточно хорошо проиллюстрировать на примере плоской падающей волны. Если

$$\varphi_2 = J \cos k(ct - x), \quad (22)$$

то отношение энергии, рассеянной резонатором и определяемой формулой (12), к потоку энергии в первичной волне, равному  $\frac{1}{2} \rho k^2 c J^2$ , составляет  $4\pi/k^2$ , или  $\lambda^2/\pi$ . Максимальное значение рассеянной энергии, следовательно, равно 0,318 той части энергии исходной волны, которая проходит через квадратное отверстие со стороной, равной длине волны звука.

Если отказаться от предположения о близости частоты источника  $n/2\pi$  и собственной частоты резонатора  $n_0/2\pi$ , то внешнее давление, требуемое для поддержания стационарных колебаний (1) в отверстии, будет состоять из двух компонент. Первая компонента, которая уравнивает инерцию воздуха, будет в фазе со смещением. Ее легко найти, обобщая метод § 86. Если через  $\varphi_1$  обозначить потенциал скорости внутри резонатора, а через  $\varphi_2$  — потенциал снаружи, вблизи отверстия в области приблизительно сферической волны, то в соответ-



ствии с электрической аналогией имеем:

$$\dot{q} = K (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (23)$$

Внутри, как и раньше,  $s = -\frac{q}{Q}$ ;  $c^2 s = \varphi_1$ . Следовательно,

$$\ddot{q} + n_0^2 q = -K \dot{\varphi}_2, \quad (24)$$

где

$$n_0^2 = \frac{Kc^2}{Q}. \quad (25)$$

Это дает для давления снаружи

$$p - p_0 = \varrho \dot{\varphi} = \frac{n^2 - n_0^2}{K} \varrho C \cos nt. \quad (26)$$

Вторая часть, которая находится в фазе с  $\dot{q}$ , обеспечивает в среднем отсутствие выигрыша или потери энергии в воздухе, содержащемся в резонаторе. Эта часть дается выражением (7). Следовательно, суммарное давление равно

$$p = p_0 + \varrho C \left( \frac{n^2 - n_0^2}{K} \cos nt + \frac{n^3}{4\pi c} \sin nt \right), \quad (27)$$

а полное выражение для возмущающего потенциала скорости вблизи устья резонатора имеет вид

$$\varphi_2 = \frac{nC}{K} \left\{ \left( 1 - \frac{n_0^2}{n^2} \right) \sin nt - \frac{kK}{4\pi} \cos nt \right\}. \quad (28)$$

В данной задаче величина  $\varphi_2$  в устье резонатора считается предписанной и равна, например,

$$\varphi_2 = J \cos (nt - \varepsilon). \quad (29)$$

Приравнивая (28), найдем, что должны быть выполнены следующие равенства:

$$J \cos \varepsilon = -\frac{kK}{4\pi} \frac{nC}{K}; \quad J \sin \varepsilon = \left( 1 - \frac{n_0^2}{n^2} \right) \frac{nC}{K}. \quad (30)$$

Отсюда

$$\frac{J^2}{n^2 C^2} = \frac{1}{K^2} \left\{ \left( 1 - \frac{n_0^2}{n^2} \right)^2 + \frac{k^2 K^2}{16\pi^2} \right\}. \quad (31)$$

Эта формула определяет  $C$  через  $J$ . Если  $\tau$  обозначает модуль затухания свободных колебаний, как в (18) § 86,

то формулу можно записать в виде

$$\frac{J^2}{n^2 C^2} = \frac{1}{K^2} \left\{ \left( 1 - \frac{n_0^2}{n^2} \right)^2 + \frac{4}{n_0^2 \tau^2} \frac{n^2}{n_0^2} \right\}. \quad (32)$$

За исключением случая близкого совпадения частот, второй член в скобках мал по сравнению с первым. Следовательно, для данного значения  $J$  величина  $nC$  (которая является амплитудой потока  $q$ ) будет наибольшей, когда  $n$  приблизительно равно  $n_0$ . Более того, для заданного отклонения от единицы отношения  $n/n_0$  интенсивность резонанса уменьшается по сравнению с максимальной величиной тем быстрее, чем больше величина  $n_0\tau$ , т. е. чем больше отношение модуля затухания к периоду свободных колебаний. Другими словами, чем меньше затухание свободных колебаний, тем острее определяется высота, соответствующая максимуму резонанса. Это находится в соответствии с общей теорией § 13.

Колебания резонатора под действием *внутреннего* источника звука рассмотрены в § 90, главным образом в применении к теории язычковых духовых инструментов.

### 89. Принцип действия органной трубы.

#### Колебания, создаваемые посредством нагрева

Даже при малой потере энергии за один период свободные колебания столба воздуха, заключенного в органной трубе, затухают практически полностью за долю секунды. Это объясняется малостью массы воздуха по сравнению, например, с массой фортепьянной струны. Для музыкальных целей требуется поддерживать звук при помощи специального устройства. В обычной трубе «флейтового регистра», нижняя часть которой показана на рис. 84, тонкая струя воздуха, поступающая под давлением из духового ящика, падает на скошенный край, ограничивающий отверстие. При этих условиях ничтожная причина может заставить струю пройти или полностью внутри, или полностью снаружи трубы. Точный принцип действия устройства неясен, но едва ли можно сомневаться, что в своем основном существе он аналогичен принципу часового спуска. Струя сообщает воздуху вблизи устья периодические импульсы то внутрь, то наружу, всегда

в том направлении, в котором стремится двигаться воздух; сам колеблющийся столб в основном и определяет моменты сообщения этих импульсов. Процесс в точности периодичен, так что движущая сила может быть разложена по Фурье в гармонический ряд членов с частотами, относящимися друг к другу, как 1, 2, 3, ... Относительные амплитуды, с которыми эти частоты представлены в колеблющемся столбе, будут зависеть от того, насколько они близки к частотам собственных колебаний столба. Так, в закрытой трубе, т. е. в трубе, верхний конец которой закрыт, возбуждаются только гармоники нечетных номеров. Теория, изложенная в § 87, показывает, далее, что в достаточно широкой трубе частоты собственных колебаний могут значительно отклоняться от частот, соответствующих гармоническому ряду; в этом случае только низшие гармоники (следующие за основным тоном) будут существенны. В частности, широкая закрытая труба дает почти чистый тон. С другой стороны, труба, диаметр которой мал по сравнению с длиной, может дать тон, богатый гармониками. Действительно, если в такую трубу подавать воздух под большим давлением, то основной тон не возбуждается вообще, и период будет равен периоду первой гармоники. Если силу потока воздуха увеличить еще больше, то частота может перескочить на следующую гармонику, и т. д. Объяснение, вероятно, нужно искать в своего рода динамической упругости, которой обладает струя.

Металлические трубы богаче гармониками, чем деревянные трубы того же размера. Это можно объяснить частично остротой клина, который обеспечивает большую резкость действия струи и, таким образом, увеличивает амплитуду высших членов ряда Фурье, выражающего возбуждающую силу. Другой источник различий тембра можно найти в меньшей жесткости и неполной упругости стенок деревянной трубы, что приводит к поглощению энергии, особенно на высоких гармониках.

Звучание резонатора любого вида при продувании струи воздуха поперек его устья можно объяснить таким

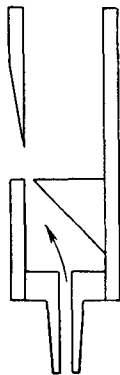


Рис. 84.

же образом. В резонаторе обычного типа последующие нормальные колебания далеко отстоят по высоте от основного тона и возбуждаются периодическими импульсами лишь незначительно. Поэтому получающаяся нота представляет собой чистый тон.

Колебания столба воздуха можно также возбудить периодическим притоком тепла, как в случае «поющих пламен», где струя водорода горит внутри открытой цилиндрической трубы. Для поддержания колебаний необходимо, чтобы тепло добавлялось в момент сжатия или отводилось в момент разрежения. Для объяснения принципа действия этой установки необходимо принять в расчет то, что в колебательную систему входит как газ, заполняющий подводящую трубку, так и столб воздуха в трубе. Этот вопрос, таким образом, несколько осложнен, но разработана удовлетворительная теория, которая отчетливо объясняет успех или неудачу эксперимента, проводимого при различных условиях <sup>1)</sup>.

## 90. Теория язычковых труб

Механизм язычковых труб органа имеет совсем другой характер. Поток воздуха, выходящий из духового ящика, прерывается вследствие прохождения его через прямоугольное отверстие в металлической пластинке, которое периодически открывается и закрывается (частично) колеблющимся металлическим язычком. Поэтому период определяется главным образом упругостью и массой самого язычка. Гельмгольц нашел путем непосредственных наблюдений, что колебания язычка являются гармоническими, но создаваемые изменения потока воздуха имеют более сложный характер. Если периодический поток выразить в виде ряда Фурье

$$C_0 + C_1 \cos (nt + \varepsilon_1) + C_2 \cos (2nt + \varepsilon_2) + \dots, \quad (1)$$

то коэффициенты  $C_2, C_3, \dots$  обычно не малы по сравнению с  $C_1$ , и вследствие этого непосредственно слышимый звук носит очень резкий характер. На практике язычок снабжается подходящим резонатором, который особенно

<sup>1)</sup> Р э л е й, «Теория звука», § 322h.

усиливает один или несколько низших элементов гармонического ряда (1).

Для целей математической обработки мы можем несколько идеализировать вопрос и представить себе, что в данной точке внутри резонатора имеется точечный источник типа, соответствующего одному из членов (1). Из элементарной теории § 62 следует, что в случае цилиндрической трубы с источником на одном конце частоты, соответствующие максимальным колебаниям, приблизительно совпадают с частотами свободных колебаний трубы, когда этот конец закрыт. Значит, язычок, снабженный цилиндрической трубой соответственной длины, будет излучать ряд тонов, частоты которых пропорциональны нечетным целым числам 1, 3, 5, ... С другой стороны, в конической трубе при расположении источника вблизи вершины мы имеем полный гармонический ряд, в котором частоты пропорциональны 1, 2, 3, 4, ... (см. § 84). Но во всех случаях гармоника высоких номеров возбуждаются слабее вследствие нарастающего отклонения частот максимального резонанса от гармонической зависимости, предписываемой периодичностью потока воздуха.

Так как этот вопрос поучителен с различных точек зрения, то может оказаться полезным рассмотреть более детально случай цилиндрической трубы (с любой формой сечения), применяя поправку для открытого конца и учитывая затухание, обусловленное излучением звука во внешнее пространство. План исследования подобен рассмотренной в § 87 схеме, с тем отличием, что теперь представим себе источник  $Ce^{int}$  расположенным на конце  $x = l$ . Для простоты предположим, что этот источник распределен равномерно по сечению трубы так, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{C}{\omega} e^{int} \quad (x = l). \quad (2)$$

Предположим, что имеется поток

$$\dot{q} = A \cos nt, \quad (3)$$

направленный из устья трубы. Давление в  $O$  состоит из двух компонент. Первая из них управляет инерцией воздуха вблизи устья; соответственная часть потенциала

скорости непосредственно вблизи отверстия с внутренней стороны равна

$$\varphi = \frac{\alpha}{\omega} \dot{q} = \frac{\alpha A}{\omega} \cos nt, \quad (4)$$

где  $\alpha$  имеет тот же смысл, что и в § 87. Далее, мы имеем часть, которая приводит к созданию расходящихся волн снаружи. Согласно § 88 эта часть равна

$$\frac{qk^2c}{4\pi} A \cos nt. \quad (5)$$

Соответственный потенциал равен

$$\varphi = \frac{kA}{4\pi} \sin nt, \quad (6)$$

поскольку  $k = n/c$ . Значит, общий потенциал скорости в  $O$ , создающий поток (3), равен

$$\varphi_0 = \left( \frac{\alpha}{\omega} \cos nt + \frac{k}{4\pi} \sin nt \right) A. \quad (7)$$

Обобщая, можно сказать, что потоку

$$\dot{q} = Ae^{int} \quad (8)$$

соответствует потенциал

$$\varphi_0 = \left( \alpha - \frac{ik\omega}{4\pi} \right) \frac{A}{\omega} e^{int}. \quad (9)$$

В самом деле, при вещественном  $A$  выражение (7) является вещественной частью (9). Это соотношение будет соблюдаться, даже если взять  $A$  комплексным, так как это эквивалентно просто изменению начала отсчета времени  $t$ .

Теперь предположим, что в области плоской волны потенциал равен

$$\varphi = \frac{1}{k\omega} \{B \cos k(l-x) - C \sin k(l-x)\} e^{int}, \quad (10)$$

где постоянные выбраны так, чтобы удовлетворялось уравнение (2). Сравнивая с (8) и (9), найдем:

$$\left. \begin{aligned} B \sin kl + C \cos kl &= A, \\ B \cos kl - C \sin kl &= \left( k\alpha - \frac{ik^2\omega}{4\pi} \right) A. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} B &= A \left\{ \sin kl + \left( ka - \frac{ik^2\omega}{4\pi} \right) \cos kl \right\}, \\ C &= A \left\{ \cos kl - \left( ka - \frac{ik^2\omega}{4\pi} \right) \sin kl \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Последнее уравнение дает отношение  $C/A$ . Рассматривая только абсолютные значения величин, имеем:

$$\left| \frac{C}{A} \right| = (\cos kl - ka \sin kl)^2 + \left( \frac{k^2\omega}{4\pi} \right)^2 \sin^2 kl. \quad (13)$$

Так как  $k^2\omega$  — обычно малая величина, излучение энергии, пропорциональное  $|A^2|$ , будет наибольшим для данного источника  $C \cos nt$ , когда приблизительно выполняется равенство

$$\cos kl = ka \sin kl, \quad (14)$$

т. е. при вынуждающей частоте, близкой к частоте одного из нормальных колебаний трубы, закрытой на конце  $x=l$  (см. (11) § 87); следовательно, в случае языковой трубы усиливаются основной тон и гармоники нечетного порядка.

Если (14) удовлетворяется, то согласно (12) имеем:

$$\frac{C}{A} = \frac{ik^2\omega}{4\pi} \sin kl. \quad (15)$$

Это выражение определяет соотношение между потоком в устье, направленным наружу, и потоком, создаваемым источником. В этом случае первый из них во много раз превосходит по амплитуде последний, а множитель  $i$  показывает, что они отличаются по фазе на четверть периода.

Далее, из (10) и (11) имеем:

$$\varphi = \frac{A}{k\omega} \left\{ \sin kx + ka \cos kx - \frac{ik^2\omega}{4\pi} \cos kx \right\} e^{int}. \quad (16)$$

Когда (14) выполнено, то (16) превращается в

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{A}{k\omega \sin kl} \left\{ \cos k(l-x) - \frac{ik^2\omega}{4\pi} \sin kl \cos kx \right\} e^{int} = \\ &= -\frac{4\pi i C}{k^3\omega^2 \sin^2 kl} \left\{ \cos k(l-x) - \frac{ik^2\omega}{4\pi} \sin kl \cos kx \right\} e^{int}. \end{aligned} \quad (17)$$

Если задать источник в виде  $C \cos nt$ , то вещественная часть последнего выражения равна

$$\varphi = \frac{4\pi C}{k^3 \omega^2 \sin^2 kl} \left\{ \cos k(l-x) \sin nt - \frac{k^2 \omega}{4\pi} \sin kl \cos kx \cos nt \right\}. \quad (18)$$

Переменная часть давления у источника ( $x = l$ ) равна

$$p - p_0 = \rho \dot{\varphi} = \frac{4\pi \rho c C}{k^2 \omega^2 \sin^2 kl} \left\{ \cos nt + \frac{k^2 \omega}{4\pi} \sin kl \cos kl \sin nt \right\}. \quad (19)$$

Первая часть этого выражения значительно больше второй. Кроме того, работа производится только за счет этой части. Средняя мощность источника, т. е. средняя величина  $pC \cos nt$ , равна

$$W = \frac{2\pi \rho c C^2}{k^2 \omega^2 \sin^2 kl}. \quad (20)$$

Можно легко проверить, что эта величина равна работе, затраченной у устья на создание волн, где согласно (15)

$$\dot{q} = \frac{4\pi C}{k^2 \omega \sin kl} \sin nt. \quad (21)$$

Далее, из (19) следует, что максимум давления при  $x = l$  почти совпадает по времени с максимумом потока воздуха, втекающего в трубу, отставая, однако, на малый промежуток времени. Следовательно, имеется тенденция к небольшому понижению высоты тона язычка в случаях, когда музыкальный инструмент снабжен язычком «проходящего» типа, и проход воздуху открыт при отклонении язычка внутрь, по направлению к духовому ящику. Тот факт, что результирующая сила, действующая на язычок, приблизительно совпадает по фазе со смещением, указывает, что язычок колеблется с частотой, несколько меньшей собственной частоты (§ 12).

Высота тона язычковых труб органа понижается с увеличением температуры вследствие уменьшения упругости металлического язычка. Это противоположно тому, что получается в случае флейтового регистра (§ 62). Язычковая труба настраивается посредством устройства, меняющего эффективную длину колеблющегося язычка.



Следует заметить, что имеется другой класс инструментов, в которых «язычок» имеет гораздо меньшую упругость и в основном управляется реакцией резонансной камеры; частоты собственных колебаний язычка относительно малы. В этих инструментах применяются язычки «внешнего» типа, т. е. отверстие для прохода воздуха имеет наибольшую ширину при отклонении язычка наружу, т. е. по направлению потока. Человеческая гортань относится к этому классу.

### 90а. Многорезонансные системы

Отметим некоторые другие формы резонаторов, помимо простого типа, описанного в § 86.

Прежде всего, предположим, что резонатор имеет *два* отверстия, находящихся друг от друга на таком расстоянии, что они не взаимодействуют друг с другом. Обозначим потоки, вытекающие через эти отверстия, через  $q_1$  и  $q_2$ , а проводимости отверстий — через  $K_1$  и  $K_2$ . Тогда, повторяя рассуждение § 86, найдем:

$$\dot{q}_1 + K_1\varphi; \quad \dot{q}_2 = K_2\varphi; \quad c^2s = \dot{\varphi}; \quad s = -\frac{q_1 + q_2}{Q}. \quad (1)$$

Отсюда

$$\ddot{q}_1 + \frac{K_1c^2}{Q}(q_1 + q_2) = 0; \quad \ddot{q}_2 + \frac{K_2c^2}{Q}(q_1 + q_2) = 0. \quad (2)$$

Одно решение, очевидно, имеет вид  $q_1 + q_2 = 0$ ; оно представляет собой просто поток, протекающий через резонатор. Второе решение имеет вид

$$\frac{q_1}{K_1} = \frac{q_2}{K_2} = C \cos(nt + \alpha), \quad (3)$$

где

$$n^2 = \frac{(K_1 + K_2)c^2}{Q}. \quad (4)$$

Далее, возьмем случай «сдвоенного резонатора», состоящего из двух полостей, соединенных друг с другом узким отверстием. Обозначим объемы полостей соответственно через  $Q$  и  $Q'$ , объемы, вытекшие из резонаторов, — через  $q$  и  $q'$ , а проводимости двух отверстий — через  $K$  и  $K'$ .

Тогда, используя очевидные обозначения, имеем:

$$\dot{q} = K\varphi; \quad \dot{q}' = K'(\varphi' - \varphi); \quad c^2s = \dot{\varphi}; \quad c^2s' = \dot{\varphi}' \quad (5)$$

и

$$s = -\frac{q - q'}{Q}, \quad s' = -\frac{q'}{Q'}, \quad (6)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q} + \frac{Kc^2}{Q}q - \frac{Kc^2}{Q}q' &= 0, \\ \ddot{q}' + K'c^2\left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q'}\right)q' - \frac{K'c^2}{Q}q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Предполагая, что  $q$  и  $q'$  пропорциональны множителю  $\cos(nt + \alpha)$ , и исключая отношение  $q'/q$ , получим следующее квадратное уравнение для  $n^2$ :

$$\left(n^2 - \frac{Kc^2}{Q}\right)\left(n^2 - \frac{K'c^2}{Q'}\right) - \frac{K'c^2}{Q}n^2 = 0. \quad (8)$$

Если мы положим  $n^2 = 0$  или  $\infty$ , то левая часть уравнения делается положительной, в то время как при  $n^2 = K\frac{c^2}{Q}$  или  $n^2 = K'\frac{c^2}{Q'}$  она отрицательна. Значит, один из корней лежит между нулем и меньшей из этих двух величин, а значение другого корня больше каждой из этих величин. Кроме того, так как первое из уравнений (7) дает

$$\left(n^2 - \frac{Kc^2}{Q}\right)q + \frac{Kc^2}{Q}q' = 0, \quad (9)$$

то для низшего корня  $q$  и  $q'$  имеют одинаковые знаки, в то время как для нормального колебания высшей частоты эти знаки различны.

### 90b. Резонатор с нагретой проволокой

Применение электрического метода позволяет увеличить чувствительность резонаторов Гельмгольца (§ 86) при их использовании для анализа сложных звуков. В так называемом «селективном микрофоне с нагретой проволокой» электрически нагреваемая платиновая сетка расположена в горле цилиндрического резонатора Гельмгольца,

допускающего настройку посредством перемещения поршня. Наблюдению подвергается изменение электрического сопротивления сетки вследствие ее охлаждения воздухом, протекающим вперед и назад в горле резонатора. Это изменение состоит из постоянной и периодической частей, каждая из которых может быть измерена; постоянная часть, например, измеряется при помощи моста Уитстона, в одно из плеч которого подключают сетку. Сам резонатор должен быть откалиброван независимо, например посредством набора камертонов известной частоты. Этот метод был использован для анализа различных периодов колебания воздушного винта <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> A. F a g e, Proc. Roy. Soc., т. CVII, стр. 451 (1925).

---

## ГЛАВА X

### ФИЗИОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

#### 91. Анализ слухового ощущения. Музыкальные ноты

Колебания упругих тел и распространение звуковых волн в атмосфере подчиняются надежно установленным законам механики, и выводимые из них следствия можно проверять опытами, имеющими в большей или меньшей степени решающее значение. Когда, однако, мы обращаемся к области, связанной с человеческим механизмом мы встречаемся с характерными особенностями, присущими наблюдению и изучению субъективных феноменов. В частности, когда мы стараемся проанализировать привычное сложное ощущение, разлагая его на элементы, то мы пытаемся выполнить задание, к которому повседневный опыт сделал нас малоспособными. Так, у нас могло войти в привычку интерпретировать данное ощущение как указание на присутствие того или иного объекта или на совершение того или иного события в данном месте. Элементы, из которых данное ощущение составлено, дают каждый в отдельности мало информации или совсем не дают ее; существенна именно комбинация этих элементов, а внимание к деталям только отвлекало бы нас от того, что представляет непосредственный практический интерес. Грубой и, по правде говоря, совершенно неадекватной иллюстрацией здесь было бы требование называть в отдельности все буквы каждого прочитываемого слова.

Теория восприятия ощущений, особенно в области оптики и акустики, представляет собой увлекательный предмет, однако здесь мы не можем им заниматься.

Не имеющие достаточных сведений в этой области могут обратиться к трудам Гельмгольца<sup>1)</sup>.

Можно указать, однако, один или два вопроса, относящихся главным образом к закону Ома, о которых следует упомянуть. Первое, в чем должен убедиться исследователь, это то, что различные гармонические колебания, участвующие, как правило, в создании какой-либо музыкальной ноты, на самом деле представляются независимыми элементами в результирующем ощущении, которое действительно может быть разложено на основной тон и на ряд гармоник. Для восприятия этих колебаний нужна некоторая тренировка. Большую пользу здесь может принести набор резонаторов типа, показанного на рис. 80 (стр. 326), настроенных на обертоны, которые желательно обнаружить<sup>2)</sup>. Однако это не необходимо, и можно добиться многих результатов, располагая только фортепиано или монохордом. Рассмотрим, например, ноту *c*, имеющую гармоники *c'*, *g'*, *c''*, *e''*, *g''*, ... Если, например, слегка взять на фортепиано ноту *g'*, а затем отпустить клавишу, так чтобы звук прекратился, и немедленно после этого взять с полной интенсивностью ноту *c*, то в получающемся сложном ощущении нетрудно распознать наличие воспринятого перед этим элемента. Часто этот эффект яснее выражен при замирании звука, как если бы обертоны затухали медленнее, чем основной тон. Более наглядные опыты можно выполнить при помощи монохорда или при помощи рояля, в котором струны, расположенные горизонтально, более доступны снаружи. Пусть к узловой точке какой-либо из гармоник струны прикасается демпфер

<sup>1)</sup> Теория в ее отношении к акустике изложена в уже упомянутой (стр. 15) книге «Tonempfindungen». С оптической точки зрения вопрос обсужден в его «Handbuch der physiologischen Optik», изд. 2, Hamburg und Leipzig, 1896. Элементарное изложение можно найти в двух томах его «Vorträge und Reden», Brunswick, 1884. (Имеется русский перевод: Г. Г е л ь м г о л ь ц, «Популярные речи», под ред. О. Д. Хвольсона и С. Э. Терешина, изд. 2, Спб.. 1898—1899 г., т. I—II.—*Ред.*)

<sup>2)</sup> Можно отметить, что полость наружного уха сама является резонатором, отвечающим сильнее всего на определенный тон, различный для разных субъектов, но лежащий обычно вблизи  $e^{IV}—g^{IV}$ . Ввиду больших размеров отверстия затухание, а следовательно, и ширина резонансной полосы, имеют значительную величину.

в виде войлочного штифта, глушащий колебания струны. Тогда при возбуждении колебаний в струне ее основной тон и нижние гармоники окажутся ослабленными или совсем заглушенными, в соответствии со степенью и длительностью прижатия демпфера. Этим путем можно получить целые серии типов колебаний, в которых данная гармоника будет сопровождаться большей или меньшей примесью основной частоты или других гармоник. При этом легко оценить соответственное ощущение входящее каждый раз в качестве независимого элемента в результирующий звук. На фортепиано легко также производить анализ сложных нот методом резонанса. Если например, путем нажатия клавиши освободить струну  $c'$  от демпфера и ударить ноту  $c$ , то гармоника  $c'$  этого звука начнет звучать и на первой струне. Если, с другой стороны, освободить от демпфера струну  $c$ , а ударить ноту  $c'$ , то тон  $c'$  начнет звучать на струне  $c$ , как гармоника. Эти простые эксперименты, предложенные (вместе со многими другими) Гельмгольцем, можно, разумеется, варьировать разными способами. Далее, обучившись распознаванию частичных тонов в сложной ноте, легко обнаружить на слух отсутствие какой-либо из гармоник в случае отсутствия соответственного гармонического колебания. Например, при ударе по средней точке струны отсутствуют четные гармоники (§ 26).

## 92. Влияние обертонов на тембр

Тембр музыкальной ноты определяется (§ 2) числом и относительной интенсивностью различных простых тонов, составляющих эту ноту. Гельмгольц следующим образом охарактеризовал влияние обертонов различных порядков на тембр.

1. Чистые тоны, как, например, тоны, издаваемые камертонами с резонансными ящиками или широкими закрытыми органами трубами, имеют мягкий и приятный характер, но им недостает звучности.

2. Ноты, содержащие обертоны вплоть до пятого или шестого, звучат лучше и более музыкально, не теряя гладкости звучания, пока не заметны более высокие гармоники. В качестве примера можно указать на звуки фортепиано

и открытых органных труб, в то время как звуки флейты и флейтового регистра на органе при тихой игре приближаются по характеру к простым тонам. В регистрах «микстур» органа низшие гармоники намеренно усиливаются при помощи вспомогательных труб, автоматически приводимых в действие одновременно с основной трубой.

3. При отсутствии гармоник четного порядка, как в случае закрытых органных труб или фортепьянной струны, ударяемой в средней точке, звучание ноты при значительном числе нечетных гармоник приобретает носовой характер.

4. Далее, звук можно охарактеризовать как «полный», если основной тон преобладает, и как «жидкий», если основной тон сравнительно слаб. Это сказывается, например, в различии тембров звука фортепианной струны при ударе мягким и твердым молоточком соответственно (§§ 26, 38).

5. Если интенсивность гармоник порядка выше шестого или седьмого оказывается значительной, то звук имеет резкий и грубый характер вследствие диссонансов, создаваемых одновременным звучанием высших обертонов. Если, однако, высшие гармоники хотя и присутствуют, но имеют малую интенсивность, как, например, в струнных оркестровых инструментах, язычковых духовых инструментах и в человеческом голосе, то они играют полезную роль, придавая звуку характерность и выразительность. С другой стороны, медные духовые инструменты, с их длинным рядом мощных обертонов, как правило, допустимы лишь в комбинации с другими инструментами или для получения специальных эффектов.

Анализ звуков человеческого голоса, естественно, более труден. В частности, много дебатировался вопрос о составе гласных звуков, однако ни к какому определенному заключению прийти не удалось.

Данный гласный звук может быть пропет на самых разных нотах, сохраняя свойственный ему характер; возникает вопрос, связано ли это только с *относительными* интенсивностями частичных тонов или с преимущественной ролью только одного или нескольких обертонов некоторой определенной (или близкой к определенной) высоты.

Следует помнить, что колебания гортани периодичны и что та или иная гармоника может усиливаться резонансом ротовой полости, как в случае язычкового инструмента (§ 90). Мнения авторитетов склоняются, по-видимому, хотя и не вполне решительно, ко второму предположению—к «теории постоянной высоты». Обзор соответственного материала, доведенный до 1896 г., имеется в последней главе трактата Рэлея.

### 93. Интерференция чистых тонов. Влияние на определение интервалов

До сих пор предполагалось, что ощущения, создаваемые двумя одновременно действующими гармоническими колебаниями, создаются совершенно независимо одно от другого. При достаточно большом интервале между тонами это, по-видимому, и имеет место; когда, однако, интервал мал, появляется «интерференция», как и следовало ожидать на основе § 10, и ощущение делается полностью или частично перемежающимся. Явление «биений» вряд ли требует описания; оно часто встречается при расстройке фортепианных струн, принадлежащих одной ноте, при колебаниях чашек для ополаскивания пальцев и т. д. Для систематического изучения биений нужно располагать двумя чистыми тонами одинаковой интенсивности, например создаваемыми двумя камертонами (с резонаторами) или двумя закрытыми органами трубами, высоту которых можно менять в той или иной степени. По мере отклонения от унисона биения (частота которых всегда равна разности частот исходных тонов) сначала медленны, и их легко считать. При увеличении интервала между тонами биения учащаются и создается ощущение грубости или диссонанса; кроме того, становятся слышны, наряду с биениями, и исходные тоны. Наконец, при дальнейшем увеличении интервала биения и диссонирование постепенно перестают быть заметными.

Интервалы, при которых возникает и прекращается ощущение диссонирования, различны в разных частотных диапазонах. Чем выше звук, тем меньше диссонирование для того же интервала; с другой стороны, для данного



числа биений в секунду диссонирование больше в высоких октавах.

В случае двух или более составных музыкальных нот биения и получающееся диссонирование могут возникнуть между любыми составляющими тонами, расположенными достаточно близко. Возможна даже интерференция между высшими обертонами одной и той же ноты; именно поэтому гармоники порядка выше шестого неблагоприятны для получения хорошего музыкального тембра.

Отклонения от консонансных интервалов (§ 3) ощущаются обычно вследствие интерференции пар обертонов. Так, для октавы  $cc'$  имеем тоны следующих частот:

$$\begin{array}{r} c = 132; \quad 264; \quad 396; \quad 528; \quad 660; \quad 792; \dots \\ c' = \quad \quad 264; \quad \quad \quad 528; \quad \quad \quad 792; \dots \end{array}$$

и при расстройке октавного интервала все гармоники  $c'$  будут интерферировать с четными гармониками  $c$ .

Для случая квинты  $cg$  имеем:

$$\begin{array}{r} c = 132; \quad \quad 264; \quad 396; \quad 528; \quad \quad 660; \quad 792; \dots \\ g = \quad \quad 198; \quad \quad 396; \quad \quad \quad 594; \quad \quad 792; \dots \end{array}$$

и при расстройке вторая гармоника  $g$  и третья гармоника  $c$  создают биения, и т. д. Когда отношение основных частот не выражается такими малыми числами, то гармоники, между которыми возможна интерференция, имеют более высокие порядки. Так, для большой терции, для которой отношение частот равно  $4 : 5$ , первая интерферирующая пара состоит из пятой гармоники нижней ноты интервала и из четвертой гармоники верхней ноты. Поскольку во многих музыкальных инструментах пятая гармоника весьма слаба, этот консонанс менее выражен, чем указанные ранее интервалы. С другой стороны, в нижней части клавиатуры сами основные частоты могут оказаться настолько близкими, что будут слышны биения (например,  $c = 132$ ,  $e = 165$ ), поэтому этот консонанс следует считать также менее совершенным, чем указанные выше. Подобные же замечания в еще большей степени относятся к таким интервалам, как малая терция ( $5 : 6$ ) и уменьшенная секста ( $5 : 8$ ).

## 94. Теория слуха по Гельмгольцу

Нам необходимо еще установить связь между простейшими восприятиями и гармоническими колебаниями. Эта проблема относится к физиологии; однако теория, созданная Гельмгольцем для объяснения закона Ома, как в области справедливости этого закона, так и при различных отклонениях от него настолько проста в своей основе и так успешно связывает факты слуха в одну стройную систему, что уместно здесь изложить ее вкратце.

В своей простейшей форме теория постулирует наличие где-то во внутреннем ухе набора структур, каждая из которых обладает собственной частотой колебаний и соединена с отдельным нервным окончанием. Для краткости мы будем говорить об этих структурах как о «резонаторах» в соответствии с их функциональной ролью. При падении на ухо колебаний подходящей частоты возбуждается отвечающий этой частоте резонатор, раздражается соответственный нерв, и в мозге передается ощущение. Таким образом удастся объяснить разложение ухом музыкальной ноты на составляющие ее тоны.

Необходимо допустить наличие значительного затухания в этих резонаторах. В противном случае колебания резонатора продолжались бы и соответственное ощущение сохранялось бы заметное время и после прекращения внешней причины. Такой же интервал времени длилось бы и достижение полной интенсивности ощущения после начала действия звука. Это привело бы к тому, что достаточно быстрая последовательность отдельных нот не представлялась бы раздельной во времени. Исходя из соображений этого характера, Гельмгольц оценил, что затухание должно приводить к уменьшению интенсивности (энергии) колебаний в 10 раз по сравнению с исходным значением за время, равное примерно длительности десяти периодов. Как было объяснено в § 13, отсюда следует, что каждый резонатор будет приходить в колебание в известном диапазоне частот по обе стороны от частоты, дающей наибольший эффект. Далее, приходится предположить, что различие в частотах смежных резонаторов настолько мало, что одно и то же гармоническое колебание возбуждает целую группу резонаторов, причем интен-

сивность, с которой эти резонаторы возбуждаются, падает по обе стороны от центрального резонатора. Это иллюстрируется рис. 85, воспроизводящим график, который был приведен в § 13 и теперь может служить в качестве графика распределения интенсивности колебаний непрерывной последовательности резонаторов, находящихся

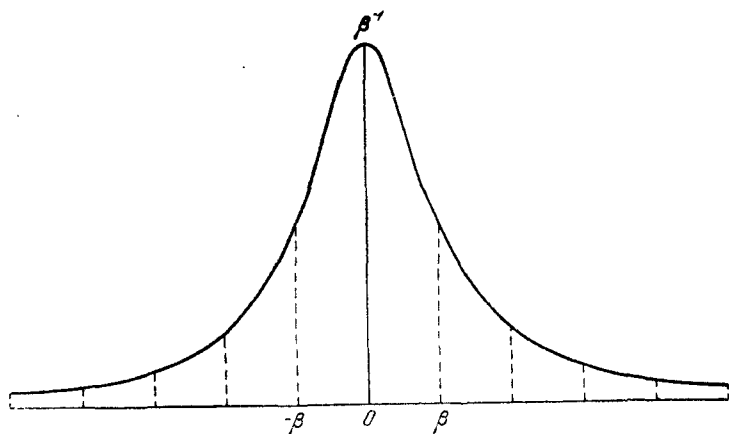


Рис. 85.

под действием заданного гармонического колебания. На оси абсцисс отложена величина  $\frac{p}{n} - 1$ , где  $p$  теперь примем равным собственной частоте резонатора, а  $n$ —частоте вынуждающего колебания. Горизонтальная шкала определяется значением  $\beta = \frac{1}{n\tau}$ , где  $\tau$ —модуль затухания свободного колебания. Вышеприведенная оценка Гельмгольца соответствует равенству

$$e^{-\frac{40\pi}{n\tau}} = \frac{1}{10},$$

откуда  $\beta = 0,018$ . Таким образом, интенсивность спадает до половины максимального значения при

$$\frac{p}{n} = 1 \pm 0,018.$$

Следует отметить, что согласно изложенной точке зрения, строго говоря, следовало бы различать «наиболее простые», а не «простые» ощущения звука, поскольку абсолютно простое ощущение в строгом физиологическом смысле возбудить нельзя.

При воздействии двух гармонических колебаний, достаточно различающихся по частоте, две группы возбужденных резонаторов будут практически независимы и два ощущения (чистых тонов) будут существовать вместе. Когда, однако, частотный интервал достаточно мал, эти группы будут перекрываться, и энергия колебаний резонаторов, воспринимающих оба колебания, будет меняться с течением времени, как было разъяснено в § 10. Возбуждение соответственных нервных окончаний будет поэтому перемежающимся, и частота этого изменения окажется равной разности частот исходных тонов. Таково, с теоретической точки зрения, объяснение явления биений. По мере увеличения частотного интервала частота биений растет. «Диссонирование», воспринимаемое в конце концов, несмотря на уменьшающуюся амплитуду изменения интенсивности, имеет менее наглядное физиологическое объяснение. Согласно Гельмгольцу, здесь можно установить аналогию с болезненным ощущением, создаваемым мигающим светом, а также с другими случаями, когда время повторения раздражения нерва не слишком велико и не слишком мало. При достаточно больших интервалах между раздражениями нерв успевает возвратиться к исходной чувствительности и поэтому воспринимает повторяющиеся импульсы в полной мере. С другой стороны, при достаточно малых интервалах ощущение стремится стать непрерывным. Поэтому биения, следующие чаще, чем, например, 132 в секунду, не дают более ощущения диссонанса, хотя интервал между составляющими тонами был бы заметно диссонирующим в нижней части частотного диапазона.

Механик не может не восхищаться изяществом теории, непринужденно объясняющей такое множество сложных явлений; однако решение вопроса о фактическом существовании во внутреннем ухе механизма типа, разобранный выше, принадлежит физиологу и анатому. В своей первоначальной форме (1862) теория отождествляла резон-

наторы со структурами, известными под названием «кортиевых волокон» и расположенными в числе около 3000 вдоль базилярной мембраны в спиральной полости улитки. Открытие Хассе об отсутствии этих структур в ухе птиц, которым трудно было бы отказать в способности различать высоту тона, привело к видоизменению теории. В третьем издании книги «Tonempfindungen» (1870) Гельмгольц предполагает, что резонаторами являются различные участки самой базилярной мембраны. Ширина базилярной мембраны меняется от одного ее конца к другому наподобие треугольника с очень острым углом при вершине; по-видимому, натяжение в продольном направлении значительно меньше, чем в поперечном. Таким образом, резонансные колебания могут возникнуть в разных участках мембраны так, как если бы струны разной длины располагались рядом друг с другом, с той только разницей, что смежные участки были бы не полностью, а лишь частично независимы. Полное описание сложной структуры внутреннего уха и предположения о роли различных его частей можно найти в книгах по физиологии.

### 95. Комбинационные тоны

Развитая выше теория остается пока недостаточной в одном важном вопросе. Объяснение консонанса интервалов, очерченное в § 93, предполагает, что по крайней мере одна (а обычно—обе) из консонансирующих нот содержит обертоны помимо основной частоты. Действительно, утверждение заключалось в том, что отклонение от точного соотношения высот становится заметным вследствие интерференции двух тонов, из которых по крайней мере один является обертоном. Если же оба тона—чистые, то указанный способ определения консонанса не применим и, согласно изложенной в предыдущем параграфе теории слуха, нет оснований для того, чтобы, например, октава отличалась гладким характером звучания от сходных интервалов, бóльших или меньших октавы: две группы ощущений в каждом случае окажутся совершенно независимыми. Так как в действительности более консонансирующие интервалы легко узнаются и весьма хорошо различаются ухом даже в случае достаточно чистых тонов,

то мы встречаемся здесь с серьезной трудностью. Чтобы преодолеть эту трудность, Гельмгольц разработал свою теорию «комбинационных тонов», которые, согласно предположению, и должны выполнять функции отсутствующих обертонов.

В большей части наших исследований принималось, что амплитуду колебаний можно считать бесконечно малой, так что суперпозиция возмущений, исходящих от разных источников звука, осуществляется просто сложением. В предлагаемой теперь теории это допущение отбрасывается; колебания рассматриваются как малые, но не как бесконечно малые; в соответственном приближении исследуется взаимодействие между возмущениями, вызванными различными источниками.

В § 63 мы имели уже указание на то, каким образом две гармонические возмущающие силы малой, но конечной амплитуды, имеющие частоты  $N_1$  и  $N_2$  соответственно, могут создать в воздухе другие гармонические колебания с частотами

$$2N_1, 2N_2, N_1 - N_2, N_1 + N_2,$$

причем амплитуды этих колебаний пропорциональны квадратам или произведениям амплитуд двух исходных колебаний. При учете следующих приближений мы пришли бы к колебаниям с частотами  $p_1 N_1 \pm p_2 N_2$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — целые числа. На языке акустики это значит, что при достаточной интенсивности два чисто гармонических колебания могут создать не только соответственные чистые тоны, но и ряд других чистых тонов более высокого порядка. Тот факт, что одно-единственное гармоническое колебание может создать чистый тон и его октаву и другие обертоны, сам по себе уже имеет известное значение; но наиболее интересные результаты обусловлены взаимодействием: речь идет о «разностных тонах» частоты  $N_1 - N_2$ . Независимо от какой-либо теории, разностные тоны наблюдались Зорге (1745) и Тартини (1754). «Суммовой тон» частоты  $N_1 + N_2$  услышать труднее, и даже его существование отрицалось. Присутствие этого тона было, однако, объективно установлено Рюкером и Эдсером<sup>1)</sup> по его воздействию на камертон той же частоты.

<sup>1)</sup> Phil. Mag. (5), т. XXXIX (1895).

Разностные тоны, обусловленные вышеуказанными причинами, легче всего наблюдаются, когда данная масса воздуха подвергается совместному интенсивному воздействию обоих первичных колебаний, как в гармоничуме и сирене. Как и любые другие тоны, их можно усиливать соответственным резонатором.

Существует, однако, механизм, который может привести к созданию комбинационных тонов в самом ухе. Для объяснения этого необходимо кратко рассмотреть вынужденные колебания несимметричной системы. Если частица или какая-либо система с одной степенью свободы совершает перемещение  $x$ , то восстанавливающая сила, возникающая в системе и действующая в направлении восстановления равновесия, зависит от  $x$  и для малых значений  $x$  может быть выражена рядом

$$\mu x + \alpha x^2 + \beta x^3 + \dots \quad (1)$$

В качестве примера можно взять обыкновенный маятник, для которого восстанавливающая сила пропорциональна  $g \sin \theta$ , или

$$g\theta - \frac{1}{6} g\theta^3 + \frac{1}{120} g\theta^5 - \dots$$

Здесь, однако, вследствие симметрии относительно вертикального направления сила меняет знак вместе с углом  $\theta$ , так что в ряд входят только нечетные степени  $\theta$ . Поправка для малых конечных амплитуд определяется, следовательно, членом, содержащим третью степень  $\theta$ . Если, однако, система несимметрична, как в случае маятника, петь которого наматывается на цилиндр с горизонтальной осью <sup>1)</sup> (рис. 86), то здесь появляется член *второго* порядка, и поправка делается более существенной. Гельмгольц подчеркивает, что в барабанной перепонке, имеющей

<sup>1)</sup> Пусть  $a$ —радиус цилиндра, а  $l$ —длина свободной части нити при вертикальном положении маятника. Тогда потенциальная энергия равна

$$V = \frac{1}{2} \frac{mg}{l} s^2 - \frac{1}{6} \frac{mga}{l^3} s^3 + \dots,$$

где  $s$ —дуга, описанная чечевицей маятника, считая от нижнего положения. Восстанавливающая сила равна, следовательно,

$$\frac{dV}{ds} = \frac{mg}{l} s - \frac{1}{2} \frac{mga}{l^3} s^2 + \dots$$

несколько воронкообразную форму, и в соединенных с ней частях слухового аппарата мы имеем как раз такую несимметричную систему, для которой восстанавливающая сила, возникающая при смещении внутрь, несколько больше, чем сила, возникающая при смещении наружу, имеющем ту же величину<sup>1)</sup>. Удерживая только два первых члена в (1), приходим к уравнению движения вида

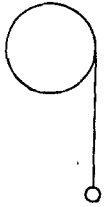


Рис. 86.

$$\ddot{x} + \mu x = -ax^2 + X, \quad (2)$$

где  $X$ —возмущающая сила<sup>2)</sup>. Совместное воздействие двух гармонических сил дается выражением

$$X = f_1 \cos n_1 t + f_2 \cos n_2 t. \quad (3)$$

Пренебрегая в первом приближении квадратом  $x$ , находим:

$$x = \frac{f_1}{\mu - n_1^2} \cos n_1 t + \frac{f_2}{\mu - n_2^2} \cos n_2 t. \quad (4)$$

Здесь мы опустили члены, представляющие свободные колебания, так как последние быстро затухают. Если подставить найденное значение  $x$  в правую часть (2) и ввести для краткости обозначения

$$\frac{f_1}{\mu - n_1^2} = g_1; \quad \frac{f_2}{\mu - n_2^2} = g_2, \quad (5)$$

то получим с точностью до второго порядка относительно  $f_1$  и  $f_2$  дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu x = X - \frac{1}{2} a (g_1^2 + g_2^2) - \frac{1}{2} a g_1^2 \cos 2n_1 t - \\ - \frac{1}{2} a g_2^2 \cos 2n_2 t - a g_1 g_2 \cos (n_1 - n_2) t - \\ - a g_1 g_2 \cos (n_1 + n_2) t. \quad (6) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Следует отметить наличие такого же элемента несимметрии в исследовании § 63. При учете малых величин второго порядка изменения давления, обусловливаемые сжатиями  $\pm s$ , уже не равны между собой.

<sup>2)</sup> Изменение инерции учитывать не нужно, так как от него можно избавиться путем соответственного выбора координаты  $x$ . Во всяком случае общий характер результатов, получаемых во втором приближении, не изменится.



Дополнительные члены в правой части можно рассматривать как поправку к возмущающей силе  $X$ . Решение (6) дает члены, добавочные к решению (4):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \frac{\alpha}{\mu} (g_1^2 + g_2^2) - \frac{1}{2} \frac{\alpha g_1^2}{\mu - 4n_1^2} \cos 2n_1 t - \\
 & -\frac{1}{2} \frac{\alpha g_2^2}{\mu - 4n_2^2} \cos 2n_2 t - \frac{\alpha g_1 g_2}{\mu - (n_1 - n_2)^2} \cos (n_1 - n_2) t - \\
 & -\frac{\alpha g_1 g_2}{\mu - (n_1 + n_2)^2} \cos (n_1 + n_2) t. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Первый из добавочных членов дает просто смещение среднего положения, вблизи которого происходят колебания. Остальные члены дают октавы исходных тонов и разностный и суммовые тоны. При отыскании высших приближений мы бы пришли к комбинационным тонам высшего порядка.

Если, как для барабанной перепонки, период свободных колебаний  $2\pi/\sqrt{\mu}$  сравнительно велик, то наиболее важен разностный тон  $n_1 - n_2$ , так как он дает наименьшее значение знаменателя в (7).

Изложенная здесь теория комбинационных тонов не была принята без возражений. Существование разностных тонов, как уже упоминалось, было известно еще со времен Тартини, а Томас Юнг дал им убедительное объяснение (1800). Согласно его точке зрения, по мере увеличения интервала биения между двумя тонами превращаются в непрерывный тон частоты биений так, как если бы каждое биение представляло собой отдельный импульс. Это объяснение встречается с той трудностью, что импульсы, фактически имеющие место в течение одного биения, являются в равной степени то положительными, то отрицательными, так что неясно, как может получиться заметный либо положительный, либо отрицательный остаточный эффект, если система сама по себе симметрична. Правда, картина, изображенная на рис. 10, периодична, и эта периодичность имеет требуемую частоту; однако с точки зрения теоремы Фурье ни одной низшей гармоники здесь нет; есть только те гармоники, которые и были использованы при построении графика. Согласно гельмгольцевой теории слуха, прерывистое возбуждение резонатора

с прерыванием  $m$  раз в секунду — совсем другое явление, нежели возбуждение резонатора с собственной частотой  $m$ . По крайней мере для случая бесконечно малых колебаний точка зрения Юнга противоречит любой механической теории слуха. С другой стороны, как мы видели, конечная амплитуда и несимметричная система дают при воздействии силы типа, показанного на рис. 10, также и колебания с частотой, равной частоте биений. Поэтому с практической точки зрения различие между обеими теориями можно было бы считать почти только словесным, если бы не то обстоятельство, что теория Юнга не может объяснить никакие комбинационные тоны, кроме первого разностного тона.

### 96. Влияние комбинационных тонов на музыкальные интервалы

Ограничимся краткими указаниями на возможный механизм восприятия консонанса при помощи комбинационных тонов. Возьмем сначала чистые исходные тоны. Для слегка расстроенной октавы, скажем для  $N_1 = 100$ ,  $N_2 = 201$ , имеем  $N_2 - N_1 = 101$ , что дает для биений между разностным тоном и тоном 100 частоту следования 1 в секунду. Для квинты положим  $N_1 = 200$ ,  $N_2 = 301$ . Имеем:

$$N_2 - N_1 = 101; \quad 2N_1 - N_2 = 99.$$

Это — комбинационные тоны с числом биений 2 в секунду. Для кварты ( $N_1 = 300$ ,  $N_2 = 401$ ) имеем:

$$2N_1 - N_2 = 199; \quad 2N_2 - 2N_1 = 202.$$

Эти тоны дают 3 биения в секунду.

Для большой терции ( $N_1 = 400$ ,  $N_2 = 501$ ) тоны  $2N_2 - 2N_1 = 202$  и  $3N_1 - 2N_2 = 198$  дают 4 биения в секунду.

Можно было бы вести расчет и дальше, но уже можно заметить, что приходится привлекать комбинационные тоны все более высокого порядка. Это вполне согласуется с наблюдением, согласно которому биения для всех комбинационных тонов после октавы весьма слабы, за исключением случая уж очень сильных первичных тонов.

Более существенно сказывается наличие комбинационных тонов в тех случаях, когда исходные тоны имеют один-два обертона, недостаточных, однако, для определения интервала в соответствии с § 93. Возьмем, например, квинту, считая, что ноты имеют, помимо основной частоты, каждая по первому обертону. В качестве примера небольшой расстройки интервала можно, например, считать частоты равными 200, 400, 301, 602. Отсюда находим два разностных тона:  $301 - 200 = 101$  и  $400 - 301 = 99$ , которые и интерферируют друг с другом.

Комбинационные тоны играют роль и для консонансных трезвучий, особенно для составленных из чистых тонов; однако сказанного достаточно для характеристики их значения с точки зрения музыки. Дальнейшие подробности см. в книге Гельмгольца <sup>1)</sup>.

### 97. Восприятие направления прихода звука

Осталось упомянуть еще об одном важном вопросе физиологической акустики, связанном с механическими факторами. Наблюдатель, как правило, способен с высокой точностью указать направление, по которому приходит звук, даже если у него завязаны глаза и он не располагает никакими наводящими указаниями. Для чистых тонов различие между звуками, приходящими спереди и сзади, теряется, чего и следовало ожидать, принимая во внимание симметрию относительно средней плоскости головы; однако левое и правое направления отчетливо различаются. Для тонов с малой длиной волны это можно объяснить различием в интенсивности ощущения, создаваемого в одном и другом ухе, поскольку голова действует в известном смысле как экран, заслоняющий ухо, лежащее с противоположной стороны, от источника звука. Однако при длине звуковой волны, много большей периметра головы, различие должно быть очень мало, как это следует из рассуждений, приведенных в конце § 81. Согласно новейшим исследованиям Рэля<sup>2)</sup>, эффект обусловлен относительной разностью *фаз* звуков, приходящих

<sup>1)</sup> См. также Sedley Taylor, «Sound and Music», London, 1873.

<sup>2)</sup> Phil. Mag. (6), т. XIII (1907).

в оба уха, причем эффективно воздействует даже разность фаз, составляющая малую долю периода. Он показал, что при передаче одного и того же тона по разным каналам к обоим ушам и при устранении всех внешних помех можно путем соответственного изменения разности фаз создать ощущение звука, переходящего по желанию справа налево. Источник звука всегда представляется расположенным с той стороны, где фаза приходящего звука больше (не более чем на полпериода). Этот результат, к которому пришли независимо и другие исследователи, остается пока необъясненным. Указывалось, что действительной причиной может все-таки быть различие интенсивностей. Быть может, часть звука проходит с каждой стороны к *противоположному* внутреннему уху, распространяясь через кости черепа; в этом случае исходная разность фаз приведет к небольшому различию интенсивностей на двух сторонах вследствие интерференции между прямым звуком и колебаниями, прошедшими через кость<sup>1)</sup>.

Результаты, полученные Рэлеем, нашли практическое применение в пеленгации, производимой подводными лодками. Два приемника, расположенных на фиксированном горизонтальном расстоянии  $d$ , сообщаются с ушами наблюдателя двумя каналами, длину одного из которых можно менять. Наблюдение заключается в подборе такой длины канала, при которой источник звука представляется расположенным прямо впереди. Если  $\theta$  есть истинный азимут источника, то избыток длины регулируемого канала будет равен  $\pm d \sin \theta$  в зависимости от стороны, в которой расположен источник. Прибор снабжают шкалой, позволяющей непосредственно отсчитывать угол  $\theta$ .

---

<sup>1)</sup> Myers and Wilson, Proc. Roy. Soc., т. LXXX, стр. 260 (1908). Эта гипотеза обсуждалась Рэлеем, Proc. Roy. Soc., т. LXXXIII, A, стр. 61 (1909).

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Акустические свойства помещений 281  
Анализ слухового ощущения 14, 354  
Аналогия с мерцанием звезд 281  
Антикластическая кривизна 196
- Бенины 18, 39, 358, 362
- Возбуждение колебаний в среде сосредоточенной периодической силой 297  
Волна неизменной формы, условие существования 225  
Восприятие направления прихода звука 369  
Вынужденные колебания 31, 36, 69  
— —, влияние трения 46, 79  
Вязкость 234  
—, влияние на распространение в свободной среде 237  
—, — — — — узких трубах 243
- Газ, упругость 203  
Гамма диатоническая 18  
Гармоника 17, 94, 109  
Гармонический анализ 137
- Дифракция звука 304, 308, 311  
Допплера принцип 282
- Закон Гука 145  
— Ома 17, 355, 360  
— Пуазейля 250  
Законы Мерсенна 95  
Затухание волн вследствие вязкости 234, 237, 243  
— колебаний 41  
— —, влияние на резонанс 50  
— — органной трубы 335  
— — резонатора 329
- Звуковые волны конечной амплитуды 207, 224, 260, 262, 269, 271, 283
- Изгибание однородное пластинки 194  
— — стержня 158  
Изгибные колебания 157, 178, 196  
Издучение звука 285, 289, 292, 303, 336  
Интервалы музыкальные 17, 368
- Интерференция 39, 358  
Источник звука двойной 273, 286, 306  
— — простой 306
- Камертон 172  
Колебания растяжения 150, 177  
—, создаваемые посредством нагрева 346  
— столба воды 222  
— упругой сферы 202  
Колокола 202  
Кольцо, нормальные колебания 174  
Комбинационные тоны 232, 363  
Консонанс 18, 368  
Константы упругие 145, 149  
— — газов 206  
Коэффициент инерции 28, 62  
— Пуассона 147, 180, 196  
Коэффициенты устойчивости 29, 63
- Лапласа уравнение 261  
Лесли опыт 300  
Линии тока 293, 314  
Лиссажу фигуры 71, 103
- Маятник 21, 55, 58, 70, 71, 77  
Мембрана, колебания 181, 184, 187  
Многорезонансные системы 351  
Модуль затухания 41  
— — волн в среде 237  
— — колебаний резонатора 331  
— — — трубы 336  
— — колеблющейся сферы 297  
— Юнга 147
- Нормальные колебания 64  
— —, свойство стационарности 67  
— функции 135, 170  
Ноты музыкальные 16, 355
- Обертоны 17, 172, 356  
—, влияние на тембр 356  
—, определение консонансных интервалов 359  
Оболочки колебания 201  
Объемное расширение 142  
Органые трубы 221, 331, 336, 344, 346, 350  
Отражение волн 89 216, 273, 289, 333

- Передача колебаний газу 300  
 Пластинка, поперечные колебания 197, 200  
 Плоские волны в твердом теле 155  
 — — — — — воздухе 307, 224, 284  
 Поглощение звука 251  
 Подводная сигнализация 200, 273, 369  
 Поперечные колебания пластинок 197  
 Потенциал скорости 257, 273, 283  
 Потери энергии на трение 44, 236  
 — — — — — (кажущиеся) вследствие излучения 241, 296, 300, 330, 336  
 Поток энергии 215, 284  
 Предел слышимости звука заданной высоты 215  
 Приближенное нахождение периодов 110, 114, 163, 167, 319, 323  
 Принцип взаимности 69, 108  
 — Гюйгенса 313  
 Проводимость отверстия 308, 314, 327  
 Прямоугольный сосуд, нормальные колебания 318  
  
 Разрывные волны 233  
 Распространение звука в воде 289  
 Рассеяние звука препятствиями 304  
 Резонанс 33, 38, 50, 337  
 Резонансная доска 93, 108  
 Резонаторы 326, 328, 337, 351, 352  
 Рефракция звука, обусловленная ветром 277  
 — — — — — градиентом температуры 277  
 Решетка, передача звука 310  
 Ряд по косинусам 124  
 — — — — — синусам 118  
  
 Свободные колебания 26  
 — — — — —, влияние трения 40  
 — — — — —, общая теория 64  
 Сдвиговая деформация 143  
 Сдвиговое напряжение 145  
 Сжатие 207  
 Система со многими степенями свободы, колебания вынужденные 69  
 — — — — —, — — — — — нормальные 64  
 — — — — —, уравнение движения 61, 64  
 Скорость звука в воде 210  
 — — — — — воздухе 209  
 — — — — — узких трубах 246  
 Скрипичная струна 102, 132  
 Слух, теория Гельмгольца 360  
 Слышимость, частотный диапазон 15  
  
 Стержни, колебания поперечные 158, 162, 166  
 — — — — — продольные 150, 152, 154  
 Столб воздуха, продольные колебания 219, 331  
 Струна, колебаний 54, 56, 82, 91, 94, 99, 102, 106, 109, 129, 132, 133  
 — — — — — поперечные волны 84, 89  
 Суперпозиция гармонических колебаний 38, 70  
 Сферический сосуд, нормальные колебания 319, 323  
  
 Тембр музыкальных нот 17  
 Темперирование равномерное 20  
 Теплопроводность, влияние на звуковую волну 240  
 — — — — — поглощение звука 323  
 Тоны чистые 15, 97, 232, 356  
 Трубы конические, нормальные колебания 321  
 — — — — — модуль затухания 336  
 — — — — — нормальные колебания 221  
 — — — — — узкие, скорость звука 246  
  
 Узловые линии мембраны 184, 187, 192  
 — — — — — пластинок 198, 200  
 Узлы на колеблющейся струне 96  
 — — — — — колеблющемся стержне 152, 166  
 — — — — — в трубе 220  
  
 Фортепианная струна, влияние изгибной жесткости 109, 174  
 Фурье теорема 126, 136, 137, 139, 171, 185  
 — — — — —, закон убывания коэффициентов 127  
 — — — — —, роль разрывов 125  
  
 Цепь висющаяся, колебания 111, 116  
 Цилиндрический сосуд, колебания 323  
  
 Частота гармонического колебания 23  
 Частоты, воспринимаемые ухом 15  
  
 Энергия волн в среде 211, 261  
 — — — — — гармонического колебания 30  
 — — — — — изогнутой пластинки 196  
 — — — — — мембраны 183  
 — — — — — стержня 98  
 — — — — — струны 83  
 — — — — — упругого твердого тела 150