Эдмунд Ландау

ОСНОВЫ АНАЛИЗА

И * Л

Государственное издательство

иностранной

литературы

*

CRUNDLAGEN DER ANALYSIS

Das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen

ERGÄNZUNG ZU DEN LEHRBÜCHERN
DER DIFFERENZIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

von

EDMUND LANDAU

Professor an der Universität Göttingen

1930

Эдмунд Ландау

ОСНОВЫ АНАЛИЗА

Действия над целыми, рациональными, иррациональными, комплексными числами

ДОПОЛНЕНИЕ К УЧЕБНИКАМ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ И ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Перевод с немецкого
Д. А. РАЙКОВА

1947

Государственное издательство
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУР
Москва

Задачи книги ясно изложены автором; она может быть интересна преподавателям и изучающим высшую математику, желающим глубже познакомиться с ее логическими основами. Несколько позднее Э. Ландау, вынужденный, как еврей, эмигрировать из Германии, издал в Голландии учебник дифференциального и интегрального исчисления, отвечающий его повышенным требованиям к математической строгости изложения. Учебник этот будет издан Госиноиздатом. Настоящая книга должна рассматриваться как необходимая вводная часть этого учебника.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Стр.

Глава 4

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

Глава 5

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Предисловие для учащегося

1. Прошу не читать помещенного дальше предисловия для знатока!

2. Я предполагаю лишь владение логическим мышлением и языком; ничего — из школьной или, тем более, высшей математики.

Чтобы предупредить возражения: *одно* число, *ни одного* числа, *два* случая, *все* вещи из заданной совокупности и т. п., все это — ясные языковые словообразования. Теорема 1, теорема 2, . . ., теорема 301 (и аналогично для аксиом, определений, глав, параграфов) или 1), 2) и т. п. при разбиениях на случаи — просто знаки, отличающие друг от друга теоремы, аксиомы, . . ., случаи и более удобные при ссылках, чем если бы я, скажем, говорил светлосиняя теорема, темносиняя теорема и т. п. Введение так называемых положительных целых чисел только до „301" вообще не представило бы никакого труда; первая — преодолеваемая в главе 1 — трудность лежит в совокупности положительных целых чисел

$$1, \ldots$$

с таинственным многоточием за запятой (называемых в главе 1 натуральными числами), в определении действий, которые можно над ними производить, и в доказательствах относящихся сюда теорем.

Я последовательно излагаю все необходимое в главе 1 — для натуральных чисел, в главе 2 — для положительных дробей и положительных рациональных чисел, в главе 3 —

для положительных (рациональных и иррациональных) чисел, в главе 4 — для вещественных чисел (положительных, отрицательных и нуля), в главе 5 — для комплексных чисел; таким образом я говорю лишь о таких числах, с которыми ты встречался еще в школе.

В этом смысле:

3. Прошу — забудь все, чему ты учился в школе; потому что ты этому не научился.

Прошу, однако, всюду вызывать в своем представлении соответствующие разделы школьного курса; потому что тебе все же не следует его забывать.

4. Никакой таблицы умножения, даже теоремы

$$2 \cdot 2 = 4,$$

я не даю; однако, я рекомендую тебе, в качестве упражнения к главе 1, § 4, определить

$$2 = 1 + 1,$$
$$4 = ((1 + 1) + 1) + 1$$

и доказать указанную теорему.

Эдмунд Ландау

Берлин, 28 декабря 1929 г.

Предисловие для знатока

Эта книжечка является уступкой коллегам (к сожалению, составляющим большинство), не разделяющим мою точку зрения на следующие вопросы.

В то время как в школе, разумеется, приходится отказаться от строгого построения элементарной математики без всяких пробелов, математическое преподавание в высшей школе должно знакомить слушателя не только с материалом и результатами, но и с методами доказательств. Даже тот, кто изучает математику главным образом ради ее приложений к физике или другим наукам и кто поэтому часто вынужден самостоятельно разбираться в новом математическом материале, может лишь тогда уверенно сойти с протоптанной тропы, когда он научился ходить, т. е. различать неверное от верного, предположения от доказательств (или, как некоторые изящно говорят, — нестрогие доказательства от строгих).

Поэтому я — в согласии с некоторыми моими учителями и коллегами, с некоторыми авторами, из трудов которых я черпал, и с большинством моих учеников — считал правильным, чтобы студент уже в первом семестре узнавал, на каких основных фактах как на аксиомах можно без пробелов построить анализ и как это построение можно начать. При выборе аксиом, как известно, можно поступать различным образом. Поэтому я считаю отнюдь не неправильным, но лишь почти диаметрально противоположным моей личной точке зрения, когда для вещественных чисел в качестве аксиом постулируют многочисленные обычные законы действий и основную теорему Дедекинда (теорему 205 этой книжки). Разумеется, я не доказываю непротиворечивости пяти аксиом Пеано (по той причине, что этого сделать нельзя); однако, каждая из них явно независима от предыдущих. С другой стороны, при указанном расширенном числе аксиом учащемуся сразу навязывается вопрос, нельзя ли какие-нибудь из них доказать (а хитрец добавил бы: или опровергнуть) с помощью предшествующих; и так как доказуемость всех этих вещей известна уже многие десятилетия, то почему же не дать учащемуся уже в самом начале ознакомиться с этими (всюду совершенно простыми) доказательствами.

Я уже не буду подробно останавливаться на том, что часто в основу не кладется даже основная теорема Дедекинда (или равносильный ее суррогат при обосновании вещественных чисел с помощью фундаментальных последовательностей), так что такие вещи, как теорема о среднем значении из дифференциального исчисления, основывающаяся на ней теорема, что функция, производная которой на некотором интервале равна нулю, постоянна в этом интервале, или, например, теорема, что постоянно убывающая ограниченная последовательность чисел стремится к некоторому пределу, — остаются без всякого доказательства или же, что еще хуже, снабжаются мнимыми доказательствами, ничего на самом деле не доказывающими. Число представителей этой крайней разновидности другой точки зрения кажется мне не только монотонно убывающим, но и предел, к которому по упомянутой выше теореме стремится это число, повидимому, равен нулю.

Однако, с обоснования натуральных чисел начинают лишь в редких случаях. Признаюсь, что и я издавна придерживался построения теории вещественных чисел по Дедекинду, но раньше свойства целых и рациональных чисел предполагал известными. Во всяком случае, три последних раза я предпочел начинать с целых чисел. Из них, правда, один раз, — и делаю это также в наступающем летнем семестре, — в качестве уступки слушателям, желающим только дифференцировать, а выяснением понятия числа заняться не в первом семестре (если же возможно, — то и вообще никогда), я разбил мои лекции на две параллельно читаемые части, одну из которых назвал „основами анализа". В этой части, отправляясь от пеановских аксиом для натуральных чисел, я дохожу до теории вещественных и комплексных чисел; правда, в первом семестре комплексные числа слушателям еще не нужны; однако, введение их после всего предшествующего столь просто, что никого не затруднит.

Но во всей математической литературе нет никакого учебника, который имел бы своей целью обосновать в указанном выше смысле *только* действия над числами. И даже в объемистых руководствах, где этому посвящены вводные главы, слишком многое оставляется (сознательно или бессознательно) на долю читателя.

Эта книжка дает возможность каждому коллеге, придерживающемуся другого педагогического направления и, значит, не входящему в изложение основ, по крайней мере сослаться (если он сочтет ее пригодной для этой цели) на источник, где все недостающее и только недостающее изложено в связном виде и без пробелов. Чтение ее не представит труда для того, кто — как это предполагается — знаком с излагаемыми результатами по школьному курсу и преодолел уже первые абстрактные четыре или пять страниц.

Я выпускаю эту книжку в свет с некоторым колебанием, так как тем самым выступаю в такой области, где (за исключением одного устного сообщения д-ра Кальмàра (Kalmâr)) ничего нового сообщить не имею; но ведь никто другой этого моего, частью скучного, труда не проделал.

Однако окончательный толчок этому „бегству в гласность“ дал следующий случай.

Представители другого направления всегда думают, что в процессе дальнейшей учебы учащийся сможет познакомиться с интересующим нас здесь предметом по запискам лекций или литературе. И ни один из этих моих уважаемых друзей и врагов не усомнился бы в том, что, например, в моих лекциях найдется все необходимое. Я также верил в это. И вот приключилось со мной следующее ужасное происшествие. Мой тогдашний ассистент и любезный коллега приват-доцент д-р Грандйо (Grandjot) (ныне профессор университета в Сант-Яго) читал по моим запискам основы анализа и отдал мне мою рукопись с замечанием, что он счел необходимым присоединить к аксиомам Пеано в дальнейшем еще другие, поскольку на обычном пути, которому я следовал, обнаружился некоторый пробел. Прежде чем входить в подробности, укажу, предвосхищая дальнейшее, что:

1. Возражение, которое сделал Грандйо, было обоснованным.

2. Аксиомы, которые нельзя перечислить в самом начале (поскольку они опираются на последующие понятия), весьма нежелательны.

3. Все аксиомы Грандйо (как можно было бы узнать, уже изучая Дедекинда) доказуемы, так что достаточно (см. все дальнейшее изложение) одних аксиом Пеано.

Возражение захватывает три пункта:

I. Определение $x+y$ для натуральных чисел.

II. Определение $x \cdot y$ для натуральных чисел.

III. Определение $\sum\limits_{n=1}^{m} x_n$ и $\prod\limits_{n=1}^{m} x_n$, когда в какой-нибудь числовой области уже имеются $x+y$ и $x \cdot y$.

Так как для всех трех случаев дело обстоит аналогично, то я буду говорить здесь только об $x+y$ для натуральных чисел x, y. Когда я, скажем, в лекции по теории чисел доказываю какую-нибудь теорему о натуральных числах, устанавливая ее справедливость сначала для 1, а затем выводя из ее справедливости для x справедливость для $x+1$, то обычно какой-нибудь слушатель выдвигает возражение, что я ведь совсем не доказал предварительно утверждение для x. Это возражение не обосновано, но извинительно; студент никогда не слыхал об аксиоме индукции. Возражение Грандйо звучало похоже, с тем, однако, различием, что оно было обосновано, так что я и его должен был извинить. Основываясь на своих пяти аксиомах, Пеано определяет $x+y$ при фиксированных x и y следующим образом:

$$x+1=x',$$
$$x+y'=(x+y)';$$

как он, так и его последователи думали, что этим дано общее определение $x+y$, поскольку множество тех y, для которых $x+y$ определено, содержит 1 и вместе с y также y'.

Но ведь $x+y$, стоящее во втором равенстве в скобках, не было еще определено.

Дело обстояло бы благополучно, если бы мы (чего на пеановском пути нет, поскольку порядок вводится лишь после сложения) имели понятие „числа $\leqslant y$" и говорили о множестве тех y, для которых существует $f(z)$, определенное для $z \leqslant y$ и обладающее свойствами

$$f(1)=x',$$
$$f(z')=(f(z))' \text{ при } z<y.$$

Таково обоснование, предложенное Дедекиндом. При дружеской помощи моего коллеги фон Неймана (von Neumann) из Принстона я, введя предварительно порядок (что представило бы для читателя неудобство), разработал для этой книжки такой путь. Однако, в последний момент я узнал от д-ра Кальмара из Сегеда значительно более простое доказательство; теперь дело выглядит столь просто и доказательство столь сходно с остальными доказательствами из первой главы, что даже знаток не заметил бы этого пункта, если бы я так подробно не запротоколировал своего признания в вине и искуплении. С $x \cdot y$ дело обстоит совершенно так же; определение $\sum\limits_{n=1}^{m} x_n$ и $\prod\limits_{n=1}^{m} x_n$, правда, возможно только на дедекиндовском пути; однако, начиная с § 3 главы 1, мы уже имеем множество чисел $z \leqslant y$.

Чтобы по возможности облегчить труд читателю, я некоторые (не очень объемистые) множества слов повторял в нескольких или всех главах. Разумеется,

Предисловие для знатока

Эта книжечка является уступкой коллегам (к сожалению, составляющим большинство), не разделяющим мою точку зрения на следующие вопросы.

В то время как в школе, разумеется, приходится отказаться от строгого построения элементарной математики без всяких пробелов, математическое преподавание в высшей школе должно знакомить слушателя не только с материалом и результатами, но и с методами доказательств. Даже тот, кто изучает математику главным образом ради ее приложений к физике или другим наукам и кто поэтому часто вынужден самостоятельно разбираться в новом математическом материале, может лишь тогда уверенно сойти с протоптанной тропы, когда он научился ходить, т. е. различать неверное от верного, предположения от доказательств (или, как некоторые изящно говорят, — нестрогие доказательства от строгих).

Поэтому я — в согласии с некоторыми моими учителями и коллегами, с некоторыми авторами, из трудов которых я черпал, и с большинством моих учеников — считал правильным, чтобы студент уже в первом семестре узнавал, на каких основных фактах как на аксиомах можно без пробелов построить анализ и как это построение можно начать. При выборе аксиом, как известно, можно поступать различным образом. Поэтому я считаю отнюдь

Если же тому или иному коллеге другого направления весь этот материал покажется даже настолько простым, что он включит его в свои лекции для начинающих (придерживаясь предлагаемого мною или какого-либо иного пути изложения), то этим я достигну всего, на что только мог осмелиться.

ЭДМУНД ЛАНДАУ

Берлин, 28 сентября 1929 г.

Глава 1

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. АКСИОМЫ

Мы считаем заданным:

некоторое множество, т. е. совокупность вещей, называемых натуральными числами, с перечисляемыми ниже свойствами, называемыми аксиомами.

Предпошлем формулировке аксиом несколько замечаний, относящихся к употребляемым нами символам $=$ и $\neq$.

Строчные латинские буквы обозначают в этой книге всюду, где не оговорено противное, натуральные числа.

Если задано x и задано y, то

либо x и y — одно и то же число; это можно записать также в виде

$$x = y$$

($=$ читается: равно);

либо x и y — не одно и то же число; это можно записать также в виде

$$x \neq y$$

($\neq$ читается: не равно).

Отсюда чисто логически вытекает:

1) $x = x$

для каждого x.

2) Из

$$x = y$$

следует

$$y = x.$$

3) Из

$$x = y, \quad y = z$$

следует

$$x = z.$$

Таким образом, запись вида

$$a = b = c = d,$$

под которой непосредственно подразумевается лишь, что

$$a = b, \quad b = c, \quad c = d,$$

означает, кроме того, что, например,

$$a = c, \quad a = d, \quad b = d.$$

(Соответствующие замечания относятся и к аналогичным записям в последующих главах.)

Мы принимаем теперь, что множество натуральных чисел обладает следующими свойствами:

Аксиома 1. 1 *есть натуральное число.*

Т. е. наше множество не пусто; оно содержит вещь, именуемую 1 (читается: единица).

Аксиома 2. *Для каждого x имеется точно одно натуральное число, называемое его последующим и обозначаемое x'.*

При записи последующих для чисел x, заданных не в виде одной буквы, мы будем, во избежание путаницы, заключать последние в скобки. Аналогично мы будем поступать во всей книге и при записи выражений $x+y$, xy, $x-y$, $-x$, x^y и т. п.

Из

$$x = y$$

следует также

$$x' = y'.$$

Аксиома 3. *Всегда*

$$x' \neq 1.$$

Т. е. 1 не служит последующим ни для какого числа.

Аксиома 4. *Из*

$$x' = y'$$

следует

$$x = y.$$

свойствами:

1) 1 *принадлежит множеству* $\mathfrak{M}$.

2) *Если* x *принадлежит* $\mathfrak{M}$, *то и* x' *принадлежит* $\mathfrak{M}$.

Тогда $\mathfrak{M}$ *содержит все натуральные числа.*

§ 2. СЛОЖЕНИЕ

Теорема 1. *Из*

$$x \neq y$$

следует

$$x' \neq y'$$

Доказательство. В противном случае мы имели бы

$$x' = y'$$

и, следовательно, по аксиоме 4,

$$x = y.$$

Теорема 2. $$x' \neq x.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество тех x, для которых это утверждение справедливо.

I) По аксиоме 1 и аксиоме 3,

$$1' \neq 1;$$

следовательно, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Если x принадлежит $\mathfrak{M}$, то

$$x' \neq x,$$

следовательно, по теореме 1,

$$(x')' \neq x',$$

значит, x' также принадлежит $\mathfrak{M}$.

В силу аксиомы 5, $\mathfrak{M}$ содержит тогда все натуральные числа, т. е. для каждого x имеем

$$x' \neq x.$$

Теорема 3. *Если*

$$x \neq 1,$$

то существует (и притом, по аксиоме 4, только одно) *u такое, что*

$$x = u'.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество, состоящее из 1 и тех x, для которых существует u, обладающее указанным свойством. По аксиоме 3, каждое такое

$$x \neq 1.$$

I) 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Если x принадлежит $\mathfrak{M}$, то, понимая под u число x, имеем

$$x' = u',$$

так что и x' принадлежит $\mathfrak{M}$.

В силу аксиомы 5, $\mathfrak{M}$ содержит тогда все натуральные числа; таким образом, для каждого

$$x \neq 1$$

существует u такое, что

$$x = u'.$$

Теорема 4, одновременно **Определение 1.** *Каждой паре натуральных чисел x, y можно, и притом лишь единственным образом, отнести натуральное число, обозначаемое $x+y$* ($+$ читается: плюс), *так, чтобы:*

1) $x+1 = x'$ *для каждого x,*

2) $x+y' = (x+y)'$ *для каждого x и каждого y.*

$x+y$ называется суммой чисел x и y или числом, получающимся путем прибавления y к x.

Доказательство. А) Покажем сначала, что если при фиксированном x можно определить $x+y$ для всех y так, чтобы

$$x+1=x'$$

и

$$x+y'=(x+y)' \text{ для каждого } y,$$

то этими условиями $x+y$ определяется однозначно.

Пусть a_y и b_y определены для всех y и таковы, что

$$a_1=x', \qquad b_1=x',$$

$$a_{y'}=(a_y)', \quad b_{y'}=(b_y)' \text{ для каждого } y.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество тех y, для которых

$$a_y=b_y.$$

I) $$a_1=x'=b_1;$$

следовательно, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Если y принадлежит $\mathfrak{M}$, то

$$a_y=b_y,$$

следовательно, по аксиоме 2,

$$(a_y)'=(b_y)',$$

значит

$$a_{y'}=(a_y)'=(b_y)'=b_{y'},$$

и, таким образом, y' также принадлежит $\mathfrak{M}$.

Поэтому $\mathfrak{M}$ есть множество всех натуральных чисел, т. е.

$$a_y=b_y$$

для каждого y.

В) Покажем теперь, что для каждого x действительно возможно определить $x+y$ для всех y так, чтобы

$$x+1=x'$$

и

$$x+y'=(x+y)' \text{ для каждого } y.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество тех x, для которых такая возможность (притом, в силу А, только одна) имеется,

I) При

$$x = 1$$

требуемыми свойствами обладает

$$x + y = y'.$$

Действительно,

$$x + 1 = 1' = x',$$

$$x + y' = (y')' = (x + y)'.$$

Следовательно, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть x принадлежит $\mathfrak{M}$, так что $x + y$ определено для всех y. Тогда

$$x' + y = (x + y)'$$

дает требуемую сумму для x'. Действительно,

$$x' + 1 = (x + 1)' = (x')'$$

и

$$x' + y' = (x + y')' = ((x + y)')' = (x' + y)'.$$

Следовательно, и x' принадлежит $\mathfrak{M}$.

Поэтому $\mathfrak{M}$ содержит все x.

Теорема 5 (закон ассоциативности сложения).

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Доказательство. Пусть x и y фиксированы, и $\mathfrak{M}$ — множество тех z, для которых верно утверждение теоремы.

I) $(x + y) + 1 = (x + y)' = x + y' = x + (y + 1)$,

следовательно, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть z принадлежит $\mathfrak{M}$. Тогда

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

следовательно,

$$(x + y) + z' = ((x + y) + z)' = (x + (y + z))' =$$
$$= x + (y + z)' = x + (y + z'),$$

так что и z' принадлежит $\mathfrak{M}$.

Тем самым утверждение теоремы справедливо для всех z.

Теорема 6 (закон коммутативности сложения).

$$x+y=y+x.$$

Доказательство. Пусть y фиксировано и $\mathfrak{M}$ — множество тех x, для которых верно утверждение теоремы.

I) Имеем

$$y+1=y',$$

с другой стороны, по построению, проведенному при доказательстве теоремы 4,

$$1+y=y'.$$

Следовательно,

$$1+y=y+1,$$

так что 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Если x принадлежит $\mathfrak{M}$, то

$$x+y=y+x$$

и, следовательно,

$$(x+y)'=(y+x)'=y+x'.$$

Но по построению, проведенному при доказательстве теоремы 4,

$$x'+y=(x+y)'.$$

Следовательно,

$$x'+y=y+x',$$

так что и x' принадлежит $\mathfrak{M}$.

Тем самым утверждение теоремы справедливо для всех x.

Теорема 7.

$$y\neq x+y.$$

Доказательство. Пусть x фиксировано и $\mathfrak{M}$ — множество тех y, для которых верно утверждение теоремы.

I)

$$1 \neq x',$$
$$1 \neq x + 1;$$

следовательно, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Если y принадлежит $\mathfrak{M}$, то

$$y \neq x + y,$$

следовательно,

$$y' \neq (x + y)',$$
$$y' \neq x + y',$$

так что и y' принадлежит $\mathfrak{M}$.

Тем самым утверждение теоремы справедливо для всех y.

Теорема 8. *Из*

$$y \neq z$$

следует

$$x + y \neq x + z.$$

Доказательство. Пусть y, z — фиксированные числа такие, что

$$y \neq z,$$

и $\mathfrak{M}$ — множество тех x, для которых

$$x + y \neq x + z.$$

I)

$$y' \neq z',$$
$$1 + y \neq 1 + z;$$

следовательно, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Если x принадлежит $\mathfrak{M}$, то

$$x + y \neq x + z,$$

следовательно,

$$(x + y)' \neq (x + z)',$$
$$x' + y \neq x' + z,$$

так что и x' принадлежит $\mathfrak{M}$.

Тем самым утверждение теоремы справедливо при всех x, y, z.

Теорема 9. *Для любых заданных* x *и* y *имеет место один и только один из следующих трех случаев:*

1) $$x = y.$$

2) *Существует* (и, значит, по теореме 8, — только одно) u *такое, что*
$$x = y + u.$$

3) *Существует* (и, значит, по теореме 8, — только одно) v *такое, что*
$$y = x + v.$$

Доказательство. A) По теореме 7, случаи 1), 2), равно как и случаи 1), 3), несовместимы. Из теоремы 7 следует также несовместимость случаев 2), 3); действительно, в противном случае мы имели бы

$$x = y + u = (x + v) + u = x + (v + u) = (v + u) + x.$$

Таким образом, может иметь место, самое большее, лишь один из случаев 1), 2), 3).

B) Пусть x фиксировано и $\mathfrak{M}$ — множество тех y, для которых имеет место один (и, значит, в силу A, — только один) из случаев 1), 2), 3).

I) При $y = 1$ имеем, в силу теоремы 3, либо

$$x = 1 = y \qquad \text{(случай 1))},$$

либо

$$x = u' = 1 + u = y + u \qquad \text{(случай 2))}.$$

Поэтому 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть y принадлежит $\mathfrak{M}$. Тогда либо (случай 1) для y)

$$x = y,$$

и, следовательно,

$$y' = y + 1 = x + 1 \qquad \text{(случай 3) для } y');$$

либо (случай 2) для y)

$$x = y + u$$

и, следовательно, если

$$u = 1,$$

то

$$x = y + 1 = y' \quad \text{(случай 1) для } y');$$

а если

$$u \neq 1,$$

то, по теореме 3,

$$u = w' = 1 + w,$$

и

$$x = y + (1 + w) = (y + 1) + w = y' + w$$

$$\text{(случай 2) для } y');$$

либо (случай 3) для y)

$$v = x + v$$

и, следовательно,

$$y' = (x + v)' = x + v' \quad \text{(случай 3) для } y').$$

Таким образом, во всех случаях y' также принадлежит $\mathfrak{M}$.

Поэтому всегда имеет место один из случаев 1), 2), 3).

§ 3. ПОРЯДОК

Определение 2. *Если*

$$x = y + u,$$

то

$$x > y$$

($>$ читается: больше).

Определение 3. *Если*

$$y = x + v,$$

то

$$x < y$$

($<$ читается: меньше).

Теорема 10. *Для любых чисел x и y имеет место один и только один из следующих трех случаев:*

$$x = y,\ x > y,\ x < y.$$

Доказательство: теорема 9, определение 2 и определение 3.

Теорема 11. *Из*

$$x > y$$

следует

$$y < x.$$

Доказательство. И то, и другое означает существование такого u, что

$$x = y + u.$$

Теорема 12. *Из*

$$x < y$$

следует

$$v > x.$$

Доказательство. И то, и другое означает существование такого v, что

$$y = x + v.$$

Определение 4.

$$x \geqslant y$$

означает

$$x > y \text{ или } x = y$$

($\geqslant$ читается: больше или равно).

Определение 5.

$$x \leqslant y$$

означает

$$x < y \text{ или } x = y$$

($\leqslant$ читается: меньше или равно).

Теорема 13. *Из*

$$x \geqslant y$$

следует

$$y \leqslant x.$$

Доказательство: теорема 11.

Теорема 14. *Из*

$$x \leqslant y$$

следует

$$y \geqslant x.$$

Доказательство: теорема 12.

Теорема 15 (транзитивность порядка). *Из*

$$x < y, \ y < z$$

следует

$$x < z.$$

Предварительное замечание. Из

$$x > y, \ y > z,$$

следует также (так как

$$z < y, \ y < x,$$

$$z < x)$$

$$x > z;$$

однако, подобные предложения, тривиально получающиеся чтением в обратном порядке, я в дальнейшем специально формулировать не буду.

Доказательство. Существуют такие v, w, что

$$y = x + v, \ z = y + w,$$

следовательно,

$$z = (x + v) + w = x + (v + w),$$

$$x < z.$$

Теорема 16. *Из*

$$x \leqslant y, \ y < z \ \textit{или} \ x < y, \ y \leqslant z$$

следует

$$x < z.$$

Доказательство. В случае знака равенства в предположении — ясно; в противном случае — уже установлено теоремой 15.

Теорема 17. *Из*

$$x \leqslant y,\ x \leqslant z$$

следует

$$x \leqslant z.$$

Доказательство. В случае двух знаков равенства в предположении — ясно; в противном случае — уже установлено теоремой 16.

Теоремами 15 — 17 оправдывается законность записи вида

$$a < b \leqslant c < d;$$

непосредственно эта запись означает лишь, что

$$a < b,\ b \leqslant c,\ c < d,$$

но, в силу указанных теорем, она включает также, например, неравенства

$$a < c,\ a < d,\ b < d.$$

(Соответствующие замечания относятся и к аналогичным записям в последующих главах.)

Теорема 18.

$$x + y > x.$$

Доказательство: $x + y = x + y$.

Теорема 19. *Из*

$$x > y, \text{ соотв. } x = y, \text{ соотв. } x < y$$

следует

$$x + z > y + z, \text{ соотв. } x + z = y + z,$$
$$\text{соотв. } x + z < y + z.$$

Доказательство. 1) Из

$$x > y$$

следует

$$x = y + u,$$

$$x + z = (y + u) + z = (u + y) + z = u + (y + z) = \\ = (y + z) + u,$$

$$x + z > y + z.$$

2) Из

$$x = y,$$

разумеется, следует

$$x + z = y + z.$$

3) Из

$$x < y$$

следует

$$y > x$$

и, значит, в силу 1),

$$y + z > x + z,$$

$$x + z < y + z.$$

Теорема 20. *Из*

$$x + z > y + z, \text{ соотв. } x + z = y + z, \\ \text{соотв. } x + z < y + z$$

следует

$$x > y, \text{ соотв. } x = y, \text{ соотв. } x < y.$$

Доказательство. Следует из теоремы 19, поскольку три случая оба раза взаимно исключают друг друга и в совокупности исчерпывают все возможности.

Теорема 21. *Из*

$$x > y, \ z > u$$

следует

$$x + z > y + u.$$

Доказательство. По теореме 19,

$$x + z > y + z$$

и

$$y+z=z+y>u+y=y+u,$$

следовательно,

$$x+z>y+u.$$

Теорема 22. *Из*

$$x \geqslant y,\quad z>u \text{ или } x>y,\quad z \geqslant u$$

следует

$$x+z>y+u.$$

Доказательство. Со знаками равенства в предположении — уже установлено теоремой 19, в противном случае — теоремой 21.

Теорема 23. *Из*

$$x \geqslant y,\ z \geqslant u$$

следует

$$x+z \geqslant y+u.$$

Доказательство. С двумя знаками равенства в предположении — ясно; в противном случае — уже установлено теоремой 22.

Теорема 24.

$$x \geqslant 1.$$

Доказательство. Либо

$$x=1,$$

либо

$$x=u'=u+1>1.$$

Теорема 25. *Из*

$$y>x$$

следует

$$y \geqslant x+1.$$

Доказательство.

$$y=x+u,$$

$$u \geqslant 1,$$

следовательно,

$$y \geqslant x + 1.$$

Теорема 26. *Из*

$$y < x + 1$$

следует

$$y \leqslant x.$$

Доказательство. В противном случае мы имели бы

$$y > x,$$

откуда, по теореме 25, следовало бы

$$y \geqslant x + 1.$$

Теорема 27. *В каждом непустом множестве натуральных чисел имеется наименьшее число* (т. е. меньшее любого другого возможного числа того же множества).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ — заданное множество и $\mathfrak{M}$ — множество тех x, которые $\leqslant$ каждого числа из $\mathfrak{N}$.

1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ по теореме 24. С другой стороны, не каждое x принадлежит этому множеству; действительно, для каждого y из $\mathfrak{N}$ число $y + 1$ не принадлежит $\mathfrak{M}$, поскольку

$$y + 1 > y.$$

Следовательно, в $\mathfrak{M}$ существует такое m, что $m + 1$ не принадлежит $\mathfrak{M}$; действительно, в противном случае, в силу аксиомы 5, каждое натуральное число принадлежало бы множеству $\mathfrak{M}$.

Я утверждаю, что это $m \leqslant$ каждого n из $\mathfrak{N}$ и принадлежит $\mathfrak{N}$. Первое следует из самого определения множества $\mathfrak{M}$. Второе доказывается от противного так: если бы m не принадлежало $\mathfrak{N}$, то для каждого n из $\mathfrak{N}$ мы имели бы

$$m < n,$$

и, следовательно, по теореме 25,

$$m+1 \leqslant n;$$

таким образом, $m+1$ также принадлежало бы множеству $\mathfrak{M}$, в противоречие со сказанным выше.

§ 4. УМНОЖЕНИЕ

Теорема 28, одновременно **Определение 6.** *Каждой паре натуральных чисел x, y можно, и притом лишь единственным образом, отнести натуральное число, обозначаемое $x \cdot y$* ($\cdot$ читается: раз; впрочем, точку большей частью не пишут), *так, чтобы*

1) $x \cdot 1 = x$ *для каждого* x,

2) $x \cdot y' = x \cdot y + x$ *для каждого x и каждого y.*

$x \cdot y$ называется произведением x на y или числом, получающимся от умножения x на y.

Доказательство (mutatis mutandis, дословно совпадающее с доказательством теоремы 4). A) Покажем сначала, что если при фиксированном x можно определить xy для всех y так, чтобы

$$x \cdot 1 = x$$

и

$$xy' = xy + x \text{ для каждого } y,$$

то этими условиями xy определяется однозначно.

Пусть a_y и b_y определены для всех y и таковы, что

$$a_1 = x, \; b_1 = x,$$

$$a_{y'} = a_y + x, \; b_{y'} = b_y + x \text{ для каждого } y.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество тех y, для которых

$$a_y = b_y.$$

I) $$a_1 = x = b_1;$$

следовательно, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Если y принадлежит $\mathfrak{M}$, то

$$a_y = b_y,$$

следовательно,

$$a_{y'} = a_y + x = b_y + x = b_{y'},$$

и, значит, y' также принадлежит $\mathfrak{M}$.

Поэтому $\mathfrak{M}$ есть множество всех натуральных чисел; т. е.

$$a_y = b_y$$

для каждого y.

В) Покажем теперь, что для каждого x действительно возможно определить xy для всех y так, чтобы

$$x \cdot 1 = x$$

и

$$xy' = xy + x \text{ для каждого } y.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество тех x, для которых такая возможность (и притом, в силу А, — только одна) имеется.

I) При

$$x = 1$$

требуемыми свойствами обладает

$$xy = y.$$

Действительно,

$$x \cdot 1 = 1 = x,$$

$$xy' = y' = y + 1 = xy + x.$$

Следовательно, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть x принадлежит $\mathfrak{M}$ так, что для всякого y определено некоторое xy. Тогда

$$x'y = xy + y$$

дает требуемое произведение для x'. Действительно,

$$x' \cdot 1 = x \cdot 1 + 1 = x + 1 = x'$$

и

$$x'y' = xy' + y' = (xy + x) + y' = xy + (x + y') =$$
$$= xy + (x + y)' = xy + (x' + y) = xy + (y + x') =$$
$$= (xy + y) + x' = x'y + x'.$$

Следовательно, и x' принадлежит $\mathfrak{M}$.

Поэтому $\mathfrak{M}$ содержит все x.

Теорема 29 (закон коммутативности умножения).

$$xy = yx.$$

Доказательство. Пусть, при фиксированном y, $\mathfrak{M}$ — множество тех x, для которых верно утверждение теоремы.

I) Имеем

$$y \cdot 1 = y;$$

с другой стороны, по построению, проведенному при доказательстве теоремы 28,

$$1 \cdot y = y.$$

Следовательно,

$$1 \cdot y = y \cdot 1,$$

так что 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Если x принадлежит $\mathfrak{M}$, то

$$xy = yx,$$

и, следовательно,

$$xy + y = yx + y = yx'.$$

Но по построению, проведенному при доказательстве теоремы 28,

$$x'y = xy + y.$$

Следовательно,

$$x'y = yx',$$

так что и x' принадлежит $\mathfrak{M}$.

Тем самым утверждение теоремы справедливо для всех x.

Теорема 30 (закон дистрибутивности).

$$x(y+z)=xy+xz.$$

Предварительное замечание. Формулу

$$(y+z)x=yx+zx,$$

вытекающую из теорем 30 и 29, и ей подобные в дальнейшем мы не считаем нужным формулировать в виде специальных теорем или даже особо отмечать.

Доказательство. Пусть, при фиксированных x и y, $\mathfrak{M}$ — множество тех z, для которых верно утверждение теоремы.

I) $$x(y+1)=xy'=xy+x=xy+x\cdot 1;$$

следовательно, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Если z принадлежит $\mathfrak{M}$, то

$$x(y+z)=xy+xz,$$

следовательно,

$$x(y+z')=x((y+z)')=x(y+z)+x=$$
$$=(xy+xz)+x=xy+(xz+x)=xy+xz',$$

так что и z' принадлежит $\mathfrak{M}$.

Поэтому утверждение теоремы справедливо для всех x, y и z.

Теорема 31 (закон ассоциативности умножения).

$$(xy)z=x(yz).$$

Доказательство. Пусть, при фиксированных x и y, $\mathfrak{M}$ — множество тех z, для которых верно утверждение теоремы.

I) $$(xy)\cdot 1=xy=x(y\cdot 1);$$

следовательно, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть z принадлежит $\mathfrak{M}$. Тогда

$$(xy)z=x(yz),$$

следовательно, применяя теорему 30, имеем:

$$(xy)z' = (xy)z + xy = x(yz) + xy = x(yz + y) = \\ = x(yz'),$$

так что и z' принадлежит $\mathfrak{M}$.

Тем самым $\mathfrak{M}$ содержит все натуральные числа.

Теорема 32. *Из*

$$x > y, \quad \textit{соотв.} \quad x = y, \quad \textit{соотв.} \quad x < y$$

следует

$$xz > yz, \ \textit{соотв.} \ xz = yz, \ \textit{соотв.} \ xz < yz.$$

Доказательство. 1) Из

$$x > y$$

следует

$$x = y + u,$$

$$xz = (y + u)z = yz + uz > yz.$$

2) Из

$$x = y,$$

разумеется, следует

$$xz = yz.$$

3) Из

$$x < y$$

следует

$$y > x,$$

и, значит, в силу 1),

$$yz > xz,$$

$$xz < yz.$$

Теорема 33. *Из*

$$xz > yz, \ \textit{соотв.} \ xz = yz, \ \textit{соотв.} \ xz < yz$$

следует

$$x > y, \ \textit{соотв.} \ x = y, \ \textit{соотв.} \ x < y.$$

Доказательство. Следует из теоремы 32, так как три случая оба раза взаимно исключают друг друга и в совокупности исчерпывают все возможности.

Теорема 34. *Из*

$$x > y, \quad z > u$$

следует

$$xz > yu.$$

Доказательство. По теореме 32,

$$xz > yz$$

и

$$yz = zy > uy = yu,$$

следовательно,

$$xz > yu.$$

Теорема 35. *Из*

$$x \geqslant y, \quad z > u \text{ или } x > y, \quad z \geqslant u$$

следует

$$xz > yu.$$

Доказательство. Со знаками равенства в предположении — уже установлено теоремой 32, в противном случае — теоремой 34.

Теорема 36. *Из*

$$x \geqslant y, \quad z \geqslant u$$

следует

$$xz \geqslant yu.$$

Доказательство. С двумя знаками равенства в предположении — ясно; в противном случае — уже установлено теоремой 35.

Глава 2

ДРОБИ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Определение 7. *Под дробью* $\frac{x_1}{x_2}$ (читается: x_1 на x_2) *понимают пару натуральных чисел* x_1, x_2 (в этом их порядке).

Определение 8.

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$$

($\sim$ читается: эквивалентно), *если*

$$x_1 y_2 = y_1 x_2.$$

Теорема 37.

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{x_1}{x_2}.$$

Доказательство. $x_1 x_2 = x_1 x_2$.

Теорема 38. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$$

следует

$$\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{x_1}{x_2}.$$

Доказательство. $x_1 y_2 = y_1 x_2$, следовательно,

$$y_1 x_2 = x_1 y_2.$$

Теорема 39. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{z_1}{z_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}.$$

Доказательство. $x_1y_2 = y_1x_2$, $y_1z_2 = z_1y_2$, следовательно,

$$(x_1y_2)(y_1z_2) = (y_1x_2)(z_1y_2).$$

Так как всегда

$$(xy)(zu) = x(y(zu)) = x((yz)u) = x(u(yz)) =$$
$$= (xu)(yz) = (xu)(zy),$$

то

$$(x_1y_2)(y_1z_2) = (x_1z_2)(y_1y_2)$$

и

$$(y_1x_2)(z_1y_2) = (y_1y_2)(z_1x_2) = (z_1x_2)(y_1y_2),$$

следовательно, по предыдущему,

$$(x_1z_2)(y_1y_2) = (z_1x_2)(y_1y_2),$$
$$x_1z_2 = z_1x_2.$$

В силу теорем 37—39, дроби распадаются на классы, так, что

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$$

тогда и только тогда, когда $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{y_1}{y_2}$ принадлежат одному и тому же классу.

Теорема 40. $$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{x_1x}{x_2x}.$$

Доказательство. $x_1(x_2x) = x_1(xx_2) = (x_1x)x_2$.

§ 2. ПОРЯДОК

Определение 9. $$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$$

($>$ читается: больше), *если*

$$x_1y_2 > y_1x_2.$$

Определение 10. $\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$

($<$ читается: меньше), *если*

$$x_1 y_2 < y_1 x_2.$$

Теорема 41. *Для любых дробей* $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{y_1}{y_2}$ *имеет место один и только один из следующих трех случаев:*

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}.$$

Доказательство. Для чисел x_1, x_2, y_1, y_2 имеет место один и только один из случаев

$$x_1 y_2 = y_1 x_2, \quad x_1 y_2 > y_1 x_2, \quad x_1 y_2 < y_1 x_2.$$

Теорема 42. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$$

следует

$$\frac{y_1}{y_2} < \frac{x_1}{x_2}.$$

Доказательство. Из

$$x_1 y_2 > y_1 x_2$$

следует

$$y_1 x_2 < x_1 y_2.$$

Теорема 43. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$$

следует

$$\frac{y_1}{y_2} > \frac{x_1}{x_2}.$$

Доказательство. Из

$$x_1 y_2 < y_1 x_2$$

следует

$$y_1 x_2 > x_1 y_2.$$

Теорема 44. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

следует

$$\frac{z_1}{z_2} > \frac{u_1}{u_2}.$$

Предварительное замечание. Таким образом, если одна дробь из некоторого класса больше какой-нибудь дроби из другого класса, то это же имеет место и для любой пары дробей, представляющих эти классы.

Доказательство.

$$y_1u_2 = u_1y_2, \quad z_1x_2 = x_1z_2, \quad x_1y_2 > y_1x_2,$$

следовательно,

$$(y_1u_2)(z_1x_2) = (u_1y_2)(x_1z_2),$$

значит, по теореме 32,

$$(y_1x_2)(z_1u_2) = (u_1z_2)(x_1y_2) > (u_1z_2)(y_1x_2),$$

и, значит, по теореме 33,

$$z_1u_2 > u_1z_2.$$

Теорема 45. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

следует

$$\frac{z_1}{z_2} < \frac{u_1}{u_2}.$$

Предварительное замечание. Таким образом, если одна дробь из некоторого класса меньше какой-нибудь дроби из другого класса, то это же имеет место и для любой пары дробей, представляющих эти классы.

Доказательство. По теореме 43,

$$\frac{y_1}{y_2} > \frac{x_1}{x_2};$$

так как

$$\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2},$$

то, следовательно, по теореме 44,

$$\frac{u_1}{u_2} > \frac{z_1}{z_2},$$

и, значит, по теореме 42,

$$\frac{z_1}{z_2} < \frac{u_1}{u_2}.$$

Определение 11. $\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}$

означает

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2} \text{ или } \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}.$$

($\gtrsim$ читается: больше или эквивалентно.)

Определение 12. $\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}$

означает

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2} \text{ или } \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}.$$

($\lesssim$ читается: меньше или эквивалентно.)

Теорема 46. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

следует

$$\frac{z_1}{z_2} \gtrsim \frac{u_1}{u_2}.$$

Доказательство. Со знаком $>$ в предположении это ясно из теоремы 44; в противном случае имеем

$$\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}.$$

Теорема 47. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

следует

$$\frac{z_1}{z_2} \lesssim \frac{u_1}{u_2}.$$

Доказательство. Со знаком $<$ в предположении это ясно из теоремы 45; в противном случае имеем

$$\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}.$$

Теорема 48. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}$$

следует

$$\frac{y_1}{y_2} \lesssim \frac{x_1}{x_2}.$$

Доказательство: теоремы 38 и 42.

Теорема 49. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}$$

следует

$$\frac{y_1}{y_2} \gtrsim \frac{x_1}{x_2}.$$

Доказательство: теоремы 38 и 43.

Теорема 50 (транзитивность порядка). *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} < \frac{z_1}{z_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{z_1}{z_2}.$$

Доказательство. $x_1y_2 < y_1x_2$, $y_1z_2 < z_1y_2$, следовательно,

$$(x_1y_2)(y_1z_2) < (y_1x_2)(z_1y_2),$$
$$(x_1z_2)(y_1y_2) < (z_1x_2)(y_1y'_2),$$
$$x_1z_2 < z_1x_2.$$

Теорема 51. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} < \frac{z_1}{z_2} \text{ или } \frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \lesssim \frac{z_1}{z_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{z_1}{z_2}.$$

Доказательство. При знаке эквивалентности в предположении — уже установлено теоремой 45, в противном случае — теоремой 50.

Теорема 52. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \lesssim \frac{z_1}{z_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{z_1}{z_2}.$$

Доказательство. При двух знаках эквивалентности в предположении — уже установлено теоремой 39, в противном случае — теоремой 51.

Теорема 53. *Для каждой дроби* $\frac{x_1}{x_2}$ *существует дробь*

$$\frac{z_1}{z_2} > \frac{x_1}{x_2}.$$

Доказательство:

$$(x_1 + x_1)\,x_2 = x_1 x_2 + x_1 x_2 > x_1 x_2,$$

$$\frac{x_1 + x_1}{x_2} > \frac{x_1}{x_2}.$$

Теорема 54. *Для каждой дроби* $\frac{x_1}{x_2}$ *существует дробь*

$$\frac{z_1}{z_2} < \frac{x_1}{x_2}.$$

Доказательство. $x_1 x_2 < x_1 x_2 + x_1 x_2 = x_1 (x_2 + x_2)$,

$$\frac{x_1}{x_2 + x_2} < \frac{x_1}{x_2}.$$

Теорема 55. *Если*

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2},$$

то существует дробь $\frac{z_1}{z_2}$ *такая, что*

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{z_1}{z_2} < \frac{y_1}{y_2}.$$

Доказательство. $x_1 y_2 < y_1 x_2$, следовательно,

$$x_1 x_2 + x_1 y_2 < x_1 x_2 + y_1 x_2, \quad x_1 y_2 + y_1 y_2 < y_1 x_2 + y_1 y_2,$$

$$x_1 (x_2 + y_2) < (x_1 + y_1) x_2, \quad (x_1 + y_1) y_2 < y_1 (x_2 + y_2),$$

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{x_1 + y_1}{x_2 + y_2} < \frac{y_1}{y_2}.$$

§ 3. СЛОЖЕНИЕ

Определение 13. *Под* $\frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{y_2}$ ($+$ читается: плюс) *понимают дробь* $\frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2 y_2}$.

Она называется суммой дробей $\frac{x_1}{x_2}$ *и* $\frac{y_1}{y_2}$ *или дробью, получающейся путем прибавления* $\frac{y_1}{y_2}$ *к* $\frac{x_1}{x_2}$.

Теорема 56. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{z_1}{z_2} \sim \frac{y_1}{y_2} + \frac{u_1}{u_2}.$$

Предварительное замечание. Таким образом, класс суммы зависит лишь от классов, которым принадлежат „слагаемые“.

Доказательство $x_1 y_2 = y_1 x_2$, $z_1 u_2 = u_1 z_2$, следовательно,

$$(x_1 y_2)(z_2 u_2) = (y_1 x_2)(z_2 u_2), \quad (z_1 u_2)(x_2 y_2) = (u_1 z_2)(x_2 y_2)$$

и, значит,

$$(x_1z_2)(y_2u_2)=(y_1u_2)(x_2z_2), \quad (z_1x_2)(y_2u_2)=(u_1y_2)(x_2z_2),$$

$$(x_1z_2)(y_2u_2)+(z_1x_2)(y_2u_2)=(y_1u_2)(x_2z_2)+(u_1y_2)(x_2z_2),$$

$$(x_1z_2+z_1x_2)(y_2u_2)=(y_1u_2+u_1y_2)(x_2z_2),$$

$$\frac{x_1z_2+z_1x_2}{x_2z_2}\sim\frac{y_1u_2+u_1y_2}{y_2u_2}.$$

Теорема 57. $$\frac{x_1}{x}+\frac{x_2}{x}\sim\frac{x_1+x_2}{x}.$$

Доказательство. По определению 13 и теореме 40 имеем

$$\frac{x_1}{x}+\frac{x_2}{x}\sim\frac{x_1x+x_2x}{xx}\sim\frac{(x_1+x_2)\,x}{xx}\sim\frac{x_1+x_2}{x}.$$

Теорема 58 (закон коммутативности сложения).

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{y_1}{y_2}\sim\frac{y_1}{y_2}+\frac{x_1}{x_2}.$$

Доказательство.

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{y_1}{y_2}\sim\frac{x_1y_2+y_1x_2}{x_2y_2}\sim\frac{y_1x_2+x_1y_2}{y_2x_2}\sim\frac{y_1}{y_2}+\frac{x_1}{x_2}.$$

Теорема 59 (закон ассоциативности сложения).

$$\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{y_1}{y_2}\right)+\frac{z_1}{z_2}\sim\frac{x_1}{x_2}+\left(\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}\right).$$

Доказательство.

$$\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{y_1}{y_2}\right)+\frac{z_1}{z_2}\sim\frac{x_1y_2+y_1x_2}{x_2y_2}+\frac{z_1}{z_2}\sim$$

$$\sim\frac{(x_1y_2+y_1x_2)\,z_2+z_1\,(x_2y_2)}{(x_2y_2)\,z_2}\sim\frac{((x_1y_2)z_2+(y_1x_2)z_2)+z_1(y_2x_2)}{x_2\,(y_2z_2)}\sim$$

$$\sim\frac{(x_1(y_2z_2)+(x_2y_1)z_2)+(z_1y_2)x_2}{x_2\,(y_2z_2)}\sim\frac{(x_1(y_2z_2)+x_2(y_1z_2))+(z_1y_2)x_2}{x_2\,(y_2z_2)}\sim$$

$$\sim\frac{x_1(y_2z_2)+((y_1z_2)x_2+(z_1y_2)x_2)}{x_2\,(y_2z_2)}\sim\frac{x_1\,(y_2z_2)+(y_1z_2+z_1y_2)\,x_2}{x_2\,(y_2z_2)}\sim$$

$$\sim\frac{x_1}{x_2}+\frac{y_1z_2+z_1y_2}{y_2z_2}\sim\frac{x_1}{x_2}+\left(\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}\right).$$

Теорема 60. $$\frac{x_1}{x_2}+\frac{y_1}{y_2}>\frac{x_1}{x_2}.$$

Доказательство.

$$x_1y_2+y_1x_2>x_1y_2,$$

$$(x_1y_2+y_1x_2)\,x_2>(x_1y_2)\,x_2=x_1\,(y_2x_2)=x_1\,(x_2y_2),$$

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{y_1}{y_2}\sim\frac{x_1y_2+y_1x_2}{x_2y_2}>\frac{x_1}{x_2}.$$

Теорема 61. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2}>\frac{y_1}{y_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}>\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}.$$

Доказательство. Из

$$x_1y_2>y_1x_2$$

следует

$$(x_1y_2)\,z_2>(y_1x_2)\,z_2.$$

Так как

$$(xy)\,z=x\,(yz)=x\,(zy)=(xz)\,y,$$

то, таким образом,

$$(x_1z_2)\,y_2>(y_1z_2)\,x_2$$

и

$$(z_1x_2)\,y_2=(z_1y_2)\,x_2,$$

следовательно,

$$(x_1z_2+z_1x_2)\,y_2>(y_1z_2+z_1y_2)\,x_2,$$

$$(x_1z_2+z_1x_2)\,(y_2z_2)>(y_1z_2+z_1y_2)\,(x_2z_2),$$

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}\sim\frac{x_1z_2+z_1x_2}{x_2z_2}>\frac{y_1z_2+z_1y_2}{y_2z_2}\sim\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}.$$

Теорема 62. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2}>\frac{y_1}{y_2},\ \textit{соотв.}\ \frac{x_1}{x_2}\sim\frac{y_1}{y_2},\ \textit{соотв.}\ \frac{x_1}{x_2}<\frac{y_1}{y_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}>\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}, \textit{ соотв. } \frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}\sim\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2},$$

$$\textit{соотв. } \frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}<\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}.$$

Доказательство. Первая часть совпадает с теоремой 61, вторая содержится в теореме 56, а третья следует из первой, так как

$$\frac{y_1}{y_2}>\frac{x_1}{x_2},$$

$$\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}>\frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2},$$

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}<\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}.$$

Теорема 63. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}>\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}, \textit{ соотв. } \frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}\sim\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2},$$

$$\textit{соотв. } \frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}<\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2}>\frac{y_1}{y_2}, \textit{ соотв. } \frac{x_1}{x_2}\sim\frac{y_1}{y_2}, \textit{ соотв. } \frac{x_1}{x_2}<\frac{y_1}{y_2}.$$

Доказательство. Следует из теоремы 62, поскольку три случая оба раза взаимно исключают друг друга и в совокупности исчерпывают все возможности.

Теорема 64. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2}>\frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2}>\frac{u_1}{u_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}>\frac{y_1}{y_2}+\frac{u_1}{u_2}.$$

Доказательство. По теореме 61,

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}>\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}$$

и

$$\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}\sim\frac{z_1}{z_2}+\frac{y_1}{y_2}>\frac{u_1}{u_2}+\frac{y_1}{y_2}\sim\frac{y_1}{y_2}+\frac{u_1}{u_2},$$

следовательно,

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}>\frac{y_1}{y_2}+\frac{u_1}{u_2}.$$

Теорема 65. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2}\gtrsim\frac{y_1}{y_2},\quad \frac{z_1}{z_2}>\frac{u_1}{u_2}\quad \text{или}\quad \frac{x_1}{x_2}>\frac{y_1}{y_2},\quad \frac{z_1}{z_2}\gtrsim\frac{u_1}{u_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}>\frac{y_1}{y_2}+\frac{u_1}{u_2}.$$

Доказательство. При знаке эквивалентности в предположении следует из теорем 56 и 61, в противном случае — уже установлено теоремой 64.

Теорема 66. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2}\gtrsim\frac{y_1}{y_2},\quad \frac{z_1}{z_2}\gtrsim\frac{u_1}{u_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{z_1}{z_2}\gtrsim\frac{y_1}{y_2}+\frac{u_1}{u_2}.$$

Доказательство. При двух знаках эквивалентности в предположении — уже установлено теоремой 56, в противном случае — теоремой 65.

Теорема 67. *Если*

$$\frac{x_1}{x_2}>\frac{y_1}{y_2},$$

то

$$\frac{y_1}{y_2}+\frac{u_1}{u_2}\sim\frac{x_1}{x_2}$$

обладает решением $\frac{u_1}{u_2}$. *Если* $\frac{v_1}{v_2}$ *и* $\frac{w_1}{w_2}$ — *решения, то*

$$\frac{v_1}{v_2}\sim\frac{w_1}{w_2}.$$

П р е д в а р и т е л ь н о е з а м е ч а н и е. При

$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y}{y_2}$$

указанное соотношение, в силу теоремы 60, не имеет решений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Второе утверждение следует непосредственно из теоремы 63; действительно, если

$$\frac{y_1}{y_2} + \frac{v_1}{v_2} \sim \frac{y_1}{y_2} + \frac{w_1}{w_2},$$

то, по указанной теореме,

$$\frac{v_1}{v_2} \sim \frac{w_1}{w_2}.$$

Существование решения $\frac{u_1}{u_2}$ (первое утверждение) устанавливается следующим образом. Имеем

$$x_1 y_2 > y_1 x_2.$$

Определим u из уравнения

$$x_1 y_2 = y_1 x_2 + u$$

и положим

$$u_1 = u, \quad u_2 = x_2 y_2.$$

Тогда дробь $\frac{u_1}{u_2}$ будет требуемым решением, так как

$$\frac{y_1}{y_2} + \frac{u_1}{u_2} \sim \frac{y_1}{y^2} + \frac{u}{x_2 y_2} \sim \frac{y_1 x_2}{x_2 y_2} + \frac{u}{x_2 y_2} \sim$$

$$\sim \frac{y_1 x_2 + u}{x_2 y_2} \sim \frac{x_1 y_2}{x_2 y_2} \sim \frac{x_1}{x_2}.$$

Определение 14. *Дробь* $\frac{u_1}{u_2}$, *построенную при доказательстве теоремы* 67, *обозначают* $\frac{x_1}{x_2} - \frac{y_1}{y_2}$ (— читается: минус) *и называют разностью* $\frac{x_1}{x_2}$ *минус* $\frac{y_1}{y_2}$

или дробью, получающейся путем вычитания дроби $\frac{y_1}{y_2}$ *из дроби* $\frac{x_1}{x_2}$.

Из
$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} + \frac{v_1}{v_2}$$
следует, таким образом,
$$\frac{v_1}{v_2} \sim \frac{x_1}{x_2} - \frac{y_1}{y_2}.$$

§ 4. УМНОЖЕНИЕ

Определение 15. *Под* $\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{y_1}{y_2}$ ($\cdot$ читается: раз; впрочем, точку большей частью не пишут) *понимают дробь* $\frac{x_1 y_1}{x_2 y_2}$.

Она называется произведением дроби $\frac{x_1}{x_2}$ *на* $\frac{y_1}{y_2}$ *или дробью, получающейся путем умножения* $\frac{x_1}{x_2}$ *на* $\frac{y_1}{y_2}$.

Теорема 68. *Из*
$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$
следует
$$\frac{x_1}{x_2} \frac{z_1}{z_2} \sim \frac{y_1}{y_2} \frac{u_1}{u_2}.$$

Предварительное замечание. Таким образом, класс произведения зависит лишь от классов, которым принадлежат „сомножители".

Доказательство. $x_1 y_2 = y_1 x_2, \quad z_1 u_2 = u_1 z_2$, следовательно,
$$(x_1 y_2)(z_1 u_2) = (v_1 x_2)(u_1 z_2),$$
$$(x_1 z_1)(y_2 u_2) = (y_1 u_1)(x_2 z_2),$$
$$\frac{x_1 z_1}{x_2 z_2} \sim \frac{y_1 u_1}{y_2 u_2}.$$

Теорема 69 (закон коммутативности умножения).

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{x_1}{x_2}.$$

Доказательство.

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{x_1 y_1}{x_2 y_2} \sim \frac{y_1 x_1}{y_2 x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{x_1}{x_2}.$$

Теорема 70 (закон ассоциативности умножения).

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\frac{y_1}{y_2}\right)\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{x_1}{x_2}\left(\frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}\right).$$

Доказательство.

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\frac{y_1}{y_2}\right)\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{x_1 y_1}{x_2 y_2}\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{(x_1 y_1) z_1}{(x_2 y_2) z_2} \sim$$

$$\sim \frac{x_1 (y_1 z_1)}{x_2 (y_2 z_2)} \sim \frac{x_1}{x_2}\frac{y_1 z_1}{y_2 z_2} \sim \frac{x_1}{x_2}\left(\frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}\right).$$

Теорема 71 (закон дистрибутивности).

$$\frac{x_1}{x_2}\left(\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}\right) \sim \frac{x_1}{x_2}\frac{y_1}{y_2}+\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2}.$$

Доказательство.

$$\frac{x_1}{x_2}\left(\frac{y_1}{y_2}+\frac{z_1}{z_2}\right) \sim \frac{x_1}{x_2}\frac{y_1 z_2 + z_1 y_2}{y_2 z_2} \sim$$

$$\sim \frac{x_1 (y_1 z_2 + z_1 y_2)}{x_2 (y_2 z_2)} \sim \frac{x_1 (y_1 z_2) + x_1 (z_1 y_2)}{x_2 (y_2 z_2)} \sim$$

$$\sim \frac{x_1 (y_1 z_2)}{x_2 (y_2 z_2)} + \frac{x_1 (z_1 y_2)}{x_2 (y_2 z_2)} \sim \frac{(x_1 y_1) z_2}{(x_2 y_2) z_2} + \frac{(x_1 z_1) y_2}{(x_2 z_2) y_2} \sim$$

$$\sim \frac{x_1 y_1}{x_2 y_2} + \frac{x_1 z_1}{x_2 z_2} \sim \frac{x_1}{x_2}\frac{y_1}{y_2}+\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2}.$$

Теорема 72. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}, \quad \textit{соотв.}\ \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}, \quad \textit{соотв.}\ \frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}, \textit{ соотв. } \frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2},$$

$$\textit{соотв. } \frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} < \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}.$$

Доказательство. 1) Из

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$$

следует

$$x_1 y_2 > y_1 x_2,$$

$$(x_1 y_2)(z_1 z_2) > (y_1 x_2)(z_1 z_2),$$

$$(x_1 z_1)(y_2 z_2) > (y_1 z_1)(x_2 z_2),$$

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{x_1 z_1}{x_2 z_2} < \frac{y_1 z_1}{y_2 z_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}.$$

2) Из

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2},$$

в силу теоремы 68, следует

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}.$$

3) Из

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$$

следует

$$\frac{y_1}{y_2} > \frac{x_1}{x_2},$$

и, значит, в силу 1),

$$\frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2} > \frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2},$$

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} < \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}.$$

Теорема 73. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}, \textit{ соотв. } \frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2},$$

$$\textit{соотв. } \frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} < \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}, \text{ *соотв.* } \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}, \text{ *соотв.* } \frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}.$$

Доказательство. Следует из теоремы 72, поскольку три случая оба раза взаимно исключают друг друга и в совокупности исчерпывают все возможности.

Теорема 74. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} > \frac{u_1}{u_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2}.$$

Доказательство. В силу теоремы 72,

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2}$$

и

$$\frac{y_1}{y_2}\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{z_1}{z_2}\frac{y_1}{y_2} > \frac{u_1}{u_2}\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2},$$

следовательно,

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2}.$$

Теорема 75. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} > \frac{u_1}{u_2} \quad \text{*или*} \quad \frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} \gtrsim \frac{u_1}{u_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} > \frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2}.$$

Доказательство. При знаках эквивалентности в предположении — следует из теорем 68 и 72, в противном случае — уже установлено теоремой 74.

Теорема 76. *Из*

$$\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} \gtrsim \frac{u_1}{u_2}$$

следует

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2}.$$

Доказательство. При двух знаках эквивалентности в предположении — уже установлено теоремой 68, в противном случае — теоремой 75.

Теорема 77. *Соотношение эквивалентности*

$$\frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2} \sim \frac{x_1}{x_2},$$

где $\frac{x_1}{x_2}$ *и* $\frac{y_1}{y_2}$ *— заданные дроби, обладает решением* $\frac{u_1}{u_2}$. *Если* $\frac{v_1}{v_2}$ *и* $\frac{w_1}{w_2}$ *— решения, то*

$$\frac{v_1}{v_2} \sim \frac{w_1}{w_2}.$$

Доказательство. Второе утверждение непосредственно следует из теоремы 73; действительно, если

$$\frac{y_1}{y_2}\frac{v_1}{v_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{w_1}{w_2},$$

то, по указанной теореме,

$$\frac{v_1}{v_2} \sim \frac{w_1}{w_2}.$$

Существование решения $\frac{u_1}{u_2}$ (первое утверждение) устанавливается следующим образом: дробь $\frac{u_1}{u_2}$, где

$$u_1 = x_1 y_2, \quad u_2 = x_2 y_1,$$

является решением, так как

$$\frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2} \sim \frac{u_1}{u_2}\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{x_1 y_2}{x_2 y_1}\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{(x_1 y_2) y_1}{(x_2 y_1) y_2} \sim$$

$$\sim \frac{x_1 (y_1 y_2)}{x_2 (y_1 y_2)} \sim \frac{x_1}{x_2}.$$

§ 5. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Определение 16. *Под рациональным числом понимают совокупность всех дробей, эквивалентных некоторой фиксированной дроби* (т. е. класс в смысле § 1).

Прописными латинскими буквами мы будем всюду, где не оговорено противное, обозначать рациональные числа.

Определение 17. $X = Y$

($=$ читается: равно), *если оба множества содержат одни и те же дроби. В противном случае*

$$X \neq Y$$

($\neq$ читается: не равно).

Следующие три теоремы тривиальны:

Теорема 78. $X = X$.

Теорема 79. *Из*

$$X = Y$$

следует

$$Y = X.$$

Теорема 80. *Из*

$$X = Y, \quad Y = Z$$

следует

$$X = Z.$$

Определение 18. $X > Y$

($>$ читается: больше), *если для некоторой* (а, значит по теореме 44,— для каждой) *дроби* $\frac{x_1}{x_2}$, *соотв.* $\frac{y_1}{y_2}$ *из множества* X, *соотв.* Y *имеет место*

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}.$$

Определение 19. $X < Y$

($<$ читается: меньше), *если для некоторой* (а, значит, по теореме 45,— для каждой) *дроби* $\frac{x_1}{x_2}$, *соотв.* $\frac{y_1}{y_2}$ *из множества* X, *соотв.* Y *имеет место*

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}.$$

Теорема 81. *Для любых двух рациональных чисел* X, Y *имеет место один и только один из следующих трех случаев:*

$$X = Y, \quad X > Y, \quad X < Y.$$

Доказательство: теорема 41.

Теорема 82. *Из*

$$X > Y$$

следует

$$Y < X.$$

Доказательство: теорема 42.

Теорема 83. *Из*

$$X < Y$$

следует

$$Y > X.$$

Доказательство: теорема 43.

Определение 20. $X \geqslant Y$

означает

$$X > Y \text{ или } X = Y.$$

($\geqslant$ читается: больше или равно.)

Определение 21. $X \leqslant Y$

означает

$$X < Y \text{ или } X = Y.$$

($\leqslant$ читается: меньше или равно.)

Теорема 84. *Из*

$$X \geqslant Y$$

следует

$$Y \leqslant X.$$

Доказательство: теорема 48.

Теорема 85. *Из*

$$X \leqslant Y$$

следует

$$Y \geqslant X.$$

Доказательство: теорема 49.

Теорема 86 (транзитивность порядка). *Из*

$$X < Y, \quad Y < Z$$

следует

$$X < Z.$$

Доказательство: теорема 50.

Теорема 87. *Из*

$$X \leqslant Y, \ Y < Z \ \text{или} \ X < Y, \ Y \leqslant Z$$

следует

$$X < Z.$$

Доказательство: теорема 51.

Теорема 88. *Из*

$$X \leqslant Y, \quad Y \leqslant Z$$

следует

$$X \leqslant Z.$$

Доказательство: теорема 52.

Теорема 89. *Для каждого X существует*

$$Z > X.$$

Доказательство: теорема 53.

Теорема 90. *Для каждого X существует*

$$Z < X.$$

Доказательство: теорема 54.

Теорема 91. *Если*

$$X < Y,$$

то существует Z такое, что

$$X < Z < Y.$$

Доказательство: теорема 55.

Определение 22. *Под $X+Y$* ($+$ читается: плюс) *понимают класс, содержащий некоторую* (а, значит, по теореме 56, — и всякую) *сумму дроби из X и дроби из Y.*

Это рациональное число называют суммой чисел X и Y или рациональным числом, получающимся путем прибавления Y к X.

Теорема 92 (закон коммутативности сложения).

$$X+Y=Y+X.$$

Доказательство: теорема 58.

Теорема 93 (закон ассоциативности сложения).

$$(X+Y)+Z=X+(Y+Z).$$

Доказательство: теорема 59.

Теорема 94. $$X+Y>X.$$

Доказательство: теорема 60.

Теорема 95. *Из*

$$X>Y$$

следует

$$X+Z>Y+Z.$$

Доказательство: теорема 61.

Теорема 96. *Из*

$$X > Y, \textit{ соотв. } X = Y, \textit{ соотв. } X < Y$$

следует

$$X + Z > Y + Z, \textit{ соотв. } X + Z = Y + Z, \textit{ соотв. } X + Z < Y + Z.$$

Доказательство: теорема 62.

Теорема 97. *Из*

$$X + Z > Y + Z, \textit{ соотв. } X + Z = Y + Z, \textit{ соотв. } X + Z < Y + Z$$

следует

$$X > Y, \textit{ соотв. } X = Y, \textit{ соотв. } X < Y.$$

Доказательство: теорема 63.

Теорема 98. *Из*

$$X > Y, \ Z > U$$

следует

$$X + Z > Y + U.$$

Доказательство: теорема 64.

Теорема 99. *Из*

$$X \geqslant Y, \ Z > U \textit{ или } X > Y, \ Z \geqslant U$$

следует

$$X + Z > Y + U.$$

Доказательство: теорема 65.

Теорема 100. *Из*

$$X \geqslant Y, \ Z \geqslant U$$

следует

$$X + Z \geqslant Y + U.$$

Доказательство: теорема 66.

Теорема 101. *Если*

$$X > Y,$$

то уравнение

$$Y + U = X$$

обладает точно одним решением U.

Предварительное замечание. При

$$X \leqslant Y,$$

в силу теоремы 94, решения не существует.

Доказательство: теорема 67.

Определение 23. *Указанное U обозначается X — Y* (— читается: минус) *и называется разностью X минус Y или рациональным числом, получающимся путем вычитания рационального числа Y из рационального числа X.*

Определение 24. *Под $X \cdot Y$* ($\cdot$ читается: раз; впрочем, точку большей частью не пишут) *понимают класс, содержащий некоторое* (а, значит, в силу теоремы 68, — и каждое) *произведение дроби из X на дробь из Y.*

Это рациональное число называется произведением X на Y или рациональным числом, получающимся путем умножения X на Y.

Теорема 102 (закон коммутативности умножения).

$$XY = YX.$$

Доказательство: теорема 69.

Теорема 103 (закон ассоциативности умножения).

$$(XY)Z = X(YZ).$$

Доказательство: теорема 70.

Теорема 104 (закон дистрибутивности).

$$X(Y + Z) = XY + XZ.$$

Доказательство: теорема 71.

Теорема 105. *Из*

$$X > Y, \text{ соотв. } X = Y, \text{ соотв. } X < Y$$

следует

$$XZ > YZ, \text{ соотв. } XZ = YZ, \text{ соотв. } XZ < YZ.$$

Доказательство: теорема 72.

Теорема 106. *Из*

$$XZ > YZ, \text{ соотв. } XZ = YZ, \text{ соотв. } XZ < YZ$$

следует

$$X > Y, \text{ соотв. } X = Y, \text{ соотв. } X < Y.$$

Доказательство: теорема 73.

Теорема 107. *Из*

$$X > Y, \; Z > U$$

следует

$$XZ > YU.$$

Доказательство: теорема 74.

Теорема 108. *Из*

$$X \geqslant Y, \; Z > U \text{ или } X > Y, \; Z \geqslant U$$

следует

$$XZ > YU.$$

Доказательство: теорема 75.

Теорема 109. *Из*

$$X \geqslant Y, \; Z \geqslant U$$

следует

$$XZ \geqslant YU.$$

Доказательство: теорема 76.

Теорема 110. *Уравнение*

$$YU = X,$$

где X и Y — заданные рациональные числа, обладает точно одним решением U.

Доказательство: теорема 77.

Теорема 111. *Из*

$$\frac{x}{1} > \frac{y}{1}, \text{ соотв. } \frac{x}{1} \sim \frac{y}{1}, \text{ соотв. } \frac{x}{1} < \frac{y}{1}$$

следует

$$x > y, \text{ соотв. } x = y, \text{ соотв. } x < y$$

и обратно.

Доказательство.

$$x \cdot 1 > y \cdot 1, \text{ соотв. } x \cdot 1 = y \cdot 1, \text{ соотв. } x \cdot 1 < y \cdot 1$$

означает то же самое, что

$$x > y, \text{ соотв. } x = y, \text{ соотв. } x < y.$$

Определение 25. *Рациональное число называется целым, если среди объединяемых им дробей содержится дробь вида $\frac{x}{1}$.*

По теореме 111 это x однозначно определено, и, обратно, каждому x соответствует точно одно целое число.

Теорема 112.

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} \sim \frac{x+y}{1},$$

$$\frac{x}{1} \frac{y}{1} \sim \frac{xy}{1}.$$

Предварительное замечание. Таким образом, сумма и произведение двух целых чисел суть целые числа.

Доказательство. 1) По теореме 57,

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} \sim \frac{x+y}{1}.$$

2) По определению 15,

$$\frac{x}{1}\,\frac{y}{1} \sim \frac{xy}{1\cdot 1} \sim \frac{xy}{1}.$$

Теорема 113. *Целые числа удовлетворяют пяти аксиомам для натуральных чисел, если за* 1 *принять класс дроби* $\frac{1}{1}$, *а последующим классом для класса дроби* $\frac{x}{1}$ *считать класс дроби* $\frac{x'}{1}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{Z}$ — множество всех целых чисел.

1) Класс дроби $\frac{1}{1}$ принадлежит множеству $\mathfrak{Z}$.

2) Для каждого целого числа нами определено последующее.

3) Всякое последующее отлично от класса дроби $\frac{1}{1}$, поскольку всегда

$$x' \neq 1.$$

4) Если классы дробей $\frac{x'}{1}$ и $\frac{y'}{1}$ совпадают, то

$$\frac{x'}{1} \sim \frac{y'}{1},$$
$$x' = y',$$
$$x = y,$$
$$\frac{x}{1} \sim \frac{y}{1},$$

так что и классы дробей $\frac{x}{1}$ и $\frac{y}{1}$ совпадают.

5) Пусть множество $\mathfrak{M}$ целых чисел обладает следующими свойствами:

I) Класс дроби $\frac{1}{1}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Если класс дроби $\frac{x}{1}$ принадлежит $\mathfrak{M}$, то и класс дроби $\frac{x'}{1}$ принадлежит $\mathfrak{M}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество тех x, для которых класс дроби $\frac{x}{1}$ принадлежит множеству $\overline{\mathfrak{M}}$. Тогда 1 принадлежит $\mathfrak{M}$ и вместе с каждым x, принадлежащим $\mathfrak{M}$, также x' принадлежит $\mathfrak{M}$. Следовательно, каждое натуральное число принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ и, значит, каждое целое число — множеству $\overline{\mathfrak{M}}$.

Так как (в силу теорем 111 и 112) между понятиями $=$, $>$, $<$, суммы и произведения для целых чисел и аналогичными старыми понятиями для натуральных чисел существует полное соответствие, то целые числа обладают всеми свойствами, доказанными нами в гл. 1 для натуральных чисел.

Поэтому отбросим натуральные числа, заменим их соответствующими целыми числами и будем впредь (поскольку и дроби становятся излишними) говорить лишь о рациональных числах. (Натуральные числа останутся в виде пар над и под чертой в понятии дроби, а дроби — как индивидуальные члены множества, называемого рациональным числом.)

Определение 26. (Освободившийся теперь символ) *x будет обозначать целое число, задаваемое классом дроби $\frac{x}{1}$.*

Таким образом, на нашем новом языке, например,

$$X \cdot 1 = X,$$

так как

$$\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{1}{1} \sim \frac{x_1 \cdot 1}{x_2 \cdot 1} \sim \frac{x_1}{x_2}.$$

Теорема 114. *Если Z — рациональное число, соответствующее дроби $\frac{x}{y}$, то*

$$yZ = x.$$

Доказательство. $\frac{y}{1}\frac{x}{y} \sim \frac{yx}{1 \cdot y} \sim \frac{xy}{1 \cdot y} \sim \frac{x}{1}$.

Определение 27. *Рациональное число U из теоремы 110 называется частным X по Y или рациональным числом, получающимся путем деления X на Y. Оно будет обозначаться через* $\frac{X}{Y}$ (читается: X на Y).

Если X и Y — целые числа, $X = x$, $Y = y$, то понимаемое в смысле определений 26 и 27 рациональное число $\frac{x}{y}$ означает, в силу теоремы 114, класс, которому принадлежит понимаемая в старом смысле дробь $\frac{x}{y}$. Смешения обоих символов $\frac{x}{y}$ не следует опасаться, так как в будущем дроби отдельно не будут встречаться; впредь $\frac{x}{y}$ будет всегда обозначать рациональное число. Обратно, каждое рациональное число в силу теоремы 114 и определения 27, можно представить в виде $\frac{x}{y}$.

Теорема 115. *Для каждых двух заданных X и Y существует z такое, что*

$$zX > Y.$$

Доказательство. $\frac{Y}{X}$ есть рациональное число; по теореме 89, существуют (на нашем новом языке) целые числа z, v такие, что

$$\frac{z}{v} > \frac{Y}{X}.$$

В силу теоремы 111,

$$v \geqslant 1.$$

Следовательно, по теореме 105,

$$zX = Xz = X\left(\frac{z}{v}\, v\right) = \left(X\frac{z}{v}\right)v \geqslant \left(X\frac{z}{v}\right)\cdot 1 =$$
$$= X\frac{z}{v} > X\frac{Y}{X} = Y.$$

Глава 3

СЕЧЕНИЯ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Определение 28. *Множество рациональных чисел называется сечением, если:*

1) *оно содержит рациональное число, но не каждое рациональное число;*

2) *каждое содержащееся в нем рациональное число меньше каждого не содержащегося;*

3) *в этом множестве нет наибольшего рационального числа* (т. е. числа, большего каждого возможного другого, отличного от него, числа этого множества).

Само множество называют также нижним классом, множество не содержащихся в нем рациональных чисел — верхним классом, и соответственно говорят о нижних и верхних числах относительно данного сечения.

Строчные греческие буквы всюду, где не оговорено противное, будут обозначать сечения.

Определение 29. $$\xi = \eta$$
($=$ читается: равно), *если каждое нижнее число относительно* ξ *есть нижнее число относительно* η *и каждое нижнее число относительно* η *есть нижнее число относительно* ξ.

Другими словами: когда оба множества совпадают. *В противном случае*

$$\xi \neq \eta$$

($\neq$ читается: не равно).

Из этого определения тривиальным образом вытекают следующие три теоремы:

Теорема 116. $$\xi = \xi.$$

Теорема 117. *Из*
$$\xi = \eta$$
следует
$$\eta = \xi.$$

Теорема 118. *Из*
$$\xi = \eta, \quad \eta = \zeta$$
следует
$$\xi = \zeta.$$

Теорема 119. *Если X — верхнее число относительно ξ и*
$$X_1 > X,$$
то X_1 — также верхнее число относительно ξ.

Доказательство. Следует из условия 2) определения 28.

Теорема 120. *Если X — нижнее число относительно ξ и*
$$X_1 < X,$$
то X_1 — также нижнее число относительно ξ.

Доказательство. Следует из условия 2) определения 28.

Разумеется, и обратно, требование теоремы 120 тождественно условию 2) определения 28. Таким образом, для того, чтобы доказать, что некоторое множество рациональных чисел есть сечение, достаточно показать, что:

1) оно не пусто и, вместе с тем, существует рациональное число, не лежащее в нем;

2) вместе с каждым его числом в нем содержится и всякое меньшее число;

3) для каждого из его чисел в нем содержится и некоторое большее число,

§ 2. ПОРЯДОК

Определение 30. *Пусть* ξ *и* η — *сечения; тогда*

$$\xi > \eta$$

($>$ читается: больше), *если существует нижнее число относительно* ξ, *являющееся верхним числом относительно* η.

Определение 31. *Пусть* ξ *и* η — *сечения; тогда*

$$\xi < \eta$$

($<$ читается: меньше), *если существует верхнее число относительно* ξ, *являющееся нижним числом относительно* η.

Теорема 121. *Из*

$$\xi > \eta$$

следует

$$\eta < \xi.$$

Доказательство. Существует верхнее число относительно η, являющееся нижним числом относительно ξ.

Теорема 122. *Из*

$$\xi < \eta$$

следует

$$\eta > \xi.$$

Доказательство. Существует нижнее число относительно η, являющееся верхним числом относительно ξ.

Теорема 123. *Для любых двух сечений* ξ, η *имеет место один и только один из следующих трех случаев:*

$$\xi = \eta, \quad \xi > \eta, \quad \xi < \eta.$$

Доказательство. 1) Соотношения

$$\xi = \eta, \quad \xi > \eta$$

несовместимы в силу определений 29 и 30. Соотношения

$$\xi = \eta, \quad \xi < \eta$$

несовместимы в силу определений 29 и 31.

Из

$$\xi > \eta, \quad \xi < \eta$$

следовало бы существование нижнего числа X относительно ξ, являющегося верхним числом относительно η, и верхнего числа Y относительно ξ, являющегося нижним числом относительно η. В силу условия 2) определения 28, мы должны были бы иметь тогда одновременно

$$X < Y, \quad X > Y.$$

Следовательно, может иметь место, самое большее, один из указанных трех случаев.

2) Если

$$\xi \neq \eta,$$

то нижние классы рассматриваемых сечений не совпадают. Таким образом, либо некоторое нижнее число относительно ξ является верхним числом относительно η, и тогда

$$\xi > \eta,$$

либо некоторое нижнее число относительно η является верхним числом относительно ξ, и тогда

$$\xi < \eta.$$

Определение 32. $\xi \geqslant \eta$

означает

$$\xi > \eta \quad \textit{или} \quad \xi = \eta.$$

($\geqslant$ читается: больше или равно.)

Определение 33. $\xi \leqslant \eta$

означает

$$\xi < \eta \quad \textit{или} \quad \xi = \eta.$$

($\leqslant$ читается: меньше или равно.)

Теорема 124. *Из*

$$\xi \geqslant \eta$$

следует

$$\eta \leqslant \xi.$$

Доказательство: теорема 121.

Теорема 125. *Из*

$$\xi \leqslant \eta$$

следует

$$\eta \geqslant \xi.$$

Доказательство: теорема 122.

Теорема 126 (транзитивность порядка). *Из*

$$\xi < \eta, \quad \eta < \zeta$$

следует

$$\xi < \zeta.$$

Доказательство. Существует верхнее число X относительно ξ, являющееся нижним числом относительно η, и верхнее число Y относительно η, являющееся нижним числом относительно ζ. Вследствие свойства 2) сечения η, имеем

$$X < Y,$$

так что Y есть верхнее число относительно ξ. Поэтому

$$\xi < \zeta.$$

Теорема 127. *Из*

$$\xi \leqslant \eta, \quad \eta < \zeta \quad \textit{или} \quad \xi < \eta, \quad \eta \leqslant \zeta$$

следует

$$\xi < \zeta.$$

Доказательство. При знаке равенства в предположении — очевидно; в противном случае — уже установлено теоремой 126.

Теорема 128. *Из*

$$\xi \leqslant \eta, \quad \eta \leqslant \zeta$$

следует

$$\xi \leqslant \zeta.$$

Доказательство. При двух знаках равенства в предположении — очевидно; в противном случае — уже установлено теоремой 127.

§ 3. СЛОЖЕНИЕ

Теорема 129. I) *Пусть ξ и η — сечения. Множество рациональных чисел, представимых в виде $X+Y$, где X — нижнее число относительно ξ, а Y — нижнее число относительно η, есть сечение.*

II) *Никакое число этого множества не может быть представлено в виде суммы верхнего числа относительно ξ и верхнего числа относительно η.*

Доказательство. 1) Пусть X — какое-либо нижнее число относительно ξ и Y — какое-нибудь нижнее число относительно η, тогда $X+Y$ принадлежит рассматриваемому множеству.

Если же X_1 — какое-нибудь верхнее число относительно ξ, Y_1 — какое-нибудь верхнее число относительно η, то для всех нижних чисел X, соответственно Y относительно ξ, соответственно η имеем

$$X<X_1, \quad Y<Y_1,$$

и, следовательно,

$$X+Y<X_1+Y_1,$$
$$X_1+Y_1 \neq X+Y.$$

Таким образом, X_1+Y_1 не принадлежит рассматриваемому множеству. Тем самым попутно уже доказано и II).

2) Нам нужно показать, что каждое число, меньшее некоторого числа из рассматриваемого множества, также принадлежит этому множеству. Пусть, таким образом, X — нижнее число относительно ξ, Y — нижнее число относительно η и

$$Z<X+Y.$$

Тогда

$$(X+Y)\frac{Z}{X+Y}<(X+Y)\cdot 1,$$

следовательно, по теореме 106,

$$\frac{Z}{X+Y} < 1;$$

значит, по теореме 105,

$$X\frac{Z}{X+Y} < X \cdot 1 = X$$

и

$$Y\frac{Z}{X+Y} < Y \cdot 1 = Y;$$

это означает, в силу второго свойства сечения в применении к ξ, соответственно η, что $X\frac{Z}{X+Y}$, соответственно $Y\frac{Z}{X+Y}$ есть нижнее число относительно ξ, соответственно η.

Но суммой этих двух рациональных чисел служит заданное Z:

$$X\frac{Z}{X+Y} + Y\frac{Z}{X+Y} = (X+Y)\frac{Z}{X+Y} = Z.$$

3) Пусть задано какое-нибудь число из рассматриваемого множества. Оно имеет вид $X+Y$, где X — нижнее число относительно ξ, а Y — нижнее число относительно η. В силу третьего свойства сечения, существует нижнее число

$$X_1 > X$$

относительно ξ; тогда

$$X_1 + Y > X + Y,$$

так что рассматриваемое множество содержит некоторое число $> X+Y$.

Определение 34. *Сечение, построенное в теореме* 129, *обозначают* $\xi + \eta$ ($+$ читается: плюс). ***Оно называется*** *суммой сечений* ξ *и* η *или сечением, получающимся путем прибавления* η *к* ξ.

Теорема 130 (закон коммутативности сложения).

$$\xi+\eta=\eta+\xi.$$

Доказательство. Каждое $X+Y$ есть также $Y+X$ и обратно.

Теорема 131 (закон ассоциативности сложения).

$$(\xi+\eta)+\zeta=\xi+(\eta+\zeta).$$

Доказательство. Каждое $(X+Y)+Z$ есть также $X+(Y+Z)$ и обратно.

Теорема 132. *Каково бы ни было заданное A, для каждого сечения найдутся нижнее число X и верхнее число U такие, что*

$$U-X=A.$$

Доказательство. Пусть X_1 — любое нижнее число. Рассмотрим все рациональные числа

$$X_1+nA,$$

где n — целые. Не все эти рациональные числа — нижние. Действительно, для любого верхнего числа Y имеем

$$Y>X_1.$$

В силу теоремы 115, существует такое n, что

$$nA>Y-X_1,$$

$$X_1+nA>(Y-X_1)+X_1=Y.$$

Следовательно, X_1+nA уже верхнее число.

По теореме 27, в множестве тех n, для которых X_1+nA является верхним числом, существует наименьшее целое число; обозначим его u.

Если

$$u=1,$$

то положим

$$X=X_1,\quad U=X_1+A;$$

если

$$u > 1,$$

то положим

$$X = X_1 + (u-1)A, \quad U = X_1 + uA = X + A.$$

В том и другом случае X есть нижнее число, U — верхнее число и

$$U - X = A.$$

Теорема 133. $\xi + \eta > \xi.$

Доказательство. Пусть Y — какое-нибудь нижнее число относительно η. Выберем, по теореме 132, нижнее число X относительно ξ и верхнее число U относительно ξ такие, чтобы

$$U - X = Y;$$

тогда

$$U = X + Y$$

будет верхним числом относительно ξ и нижним числом относительно $\xi + \eta$. Поэтому

$$\xi + \eta > \xi.$$

Теорема 134. *Из*

$$\xi > \eta$$

следует

$$\xi + \zeta > \eta + \zeta.$$

Доказательство. В силу предположения, существует верхнее число Y относительно η, являющееся нижним числом относительно ξ. Выберем какое-нибудь число X относительно ξ такое, чтобы

$$X > Y;$$

оно снова будет верхним числом относительно η. Выберем, далее, по теореме 132, верхнее число Z и нижнее число U относительно ζ такие, чтобы

$$Z - U = X - Y.$$

Тогда

$$Y+Z=Y+((X-Y)+U)=$$
$$=(Y+(X-Y))+U=X+U$$

будет нижним числом относительно $\xi+\zeta$ и (по теореме 129, II) верхним числом относительно $\eta+\zeta$. Поэтому

$$\xi+\zeta>\eta+\zeta.$$

Теорема 135. *Из*

$$\xi>\eta, \text{ соотв. } \xi=\eta, \text{ соотв. } \xi<\eta$$

следует

$$\xi+\zeta>\eta+\zeta, \text{ соотв. } \xi+\zeta=\eta+\zeta, \text{ соотв. } \xi+\zeta<\eta+\zeta.$$

Доказательство. Первая часть совпадает с теоремой 134, вторая очевидна, третья следует из первой, так как

$$\eta>\xi,$$
$$\eta+\zeta>\xi+\zeta,$$
$$\xi+\zeta<\eta+\zeta.$$

Теорема 136. *Из*

$$\xi+\zeta>\eta+\zeta, \text{ соотв. } \xi+\zeta=\eta+\zeta,$$
$$\text{соотв. } \xi+\zeta<\eta+\zeta$$

следует

$$\xi>\eta, \text{ соотв. } \xi=\eta, \text{ соотв. } \xi<\eta.$$

Доказательство. Следует из теоремы 135, поскольку три случая оба раза взаимно исключают друг друга и в совокупности исчерпывают все возможности.

Теорема 137. *Из*

$$\xi>\eta, \quad \zeta>\upsilon$$

следует

$$\xi+\zeta>\eta+\upsilon.$$

Доказательство. По теореме 134,

$$\xi+\zeta>\eta+\zeta$$

и

$$\eta+\zeta=\zeta+\eta>\upsilon+\eta=\eta+\upsilon,$$

следовательно,

$$\xi+\zeta>\eta+\upsilon.$$

Теорема 138. *Из*

$$\xi\geqslant\eta,\ \zeta>\upsilon \text{ или } \xi>\eta,\ \zeta\geqslant\upsilon$$

следует

$$\xi+\zeta>\eta+\upsilon.$$

Доказательство. При знаках равенства в предположении — уже установлено теоремой 134, в противном случае — теоремой 137.

Теорема 139. *Из*

$$\xi\geqslant\eta,\ \zeta\geqslant\upsilon$$

следует

$$\xi+\zeta\geqslant\eta+\upsilon.$$

Доказательство. При знаках равенства в предположении — очевидно; в противном случае — уже установлено теоремой 138.

Теорема 140. *Если*

$$\xi>\eta,$$

то уравнение

$$\eta+\upsilon=\xi$$

имеет точно одно решение υ.

Предварительное замечание. При

$$\xi\leqslant\eta,$$

в силу теоремы 133, решения не существует.

Доказательство. I) Рассматриваемое уравнение имеет не более одного решения; действительно, если

$$\upsilon_1\neq\upsilon_2,$$

то, по теореме 135,

$$\eta + \upsilon_1 \neq \eta + \upsilon_2.$$

II) Я покажу сначала, что множество всех рациональных чисел вида $X - Y$ (так что $X > Y$), где X — нижнее число относительно ξ, а Y — верхнее число относительно η, образует сечение.

1) Как мы знаем из начала доказательства теоремы 134, по крайней мере одно такое $X - Y$ существует.

Никакое верхнее число X_1 относительно ξ не может быть таким $X - Y$, поскольку для каждого числа последнего вида мы имеем

$$X - Y < (X - Y) + Y = X < X_1.$$

2) Если $X - Y$ какое-нибудь заданное число из рассматриваемого множества и

$$U < X - Y,$$

то

$$U + Y < (X - Y) + Y = X,$$

следовательно,

$$U + Y = X_2$$

есть нижнее число относительно ξ и, значит,

$$U = X_2 - Y$$

принадлежит нашему множеству.

3) Пусть $X - Y$ какое-нибудь заданное число из рассматриваемого множества. Выберем какое-нибудь нижнее число X_3 относительно ξ такое, чтобы

$$X_3 > X.$$

Тогда

$$(X_3 - Y) + Y > (X - Y) + Y,$$

$$X_3 - Y > X - Y,$$

и, следовательно, $X_3 - Y$ — число нашего множества, большее, чем заданное $X - Y$.

Таким образом, наше множество есть сечение; обозначим его υ.

Мы докажем теперь, что для него

$$\eta + \upsilon = \xi.$$

Для этого достаточно установить:

A) что каждое нижнее число относительно $\upsilon + \eta$ есть нижнее число относительно ξ;

B) что каждое нижнее число относительно ξ есть нижнее число относительно $\upsilon + \eta$.

К A). Каждое нижнее число относительно $\upsilon + \eta$ имеет вид

$$(X - Y) + Y_1,$$

где X — нижнее число относительно ξ, Y — верхнее число относительно η, Y_1 — нижнее число относительно η и

$$X > Y.$$

Имеем:

$$Y > Y_1,$$

$$((X - Y) + Y_1) + (Y - Y_1) = (X - Y) + (Y_1 + (Y - Y_1)) = \\ = (X - Y) + Y = X,$$

$$(X - Y) + Y_1 < X,$$

и, следовательно, $(X - Y) + Y_1$ есть нижнее число относительно ξ.

К B). α) Пусть заданное нижнее число относительно ξ является вместе с тем верхним числом относительно η; обозначим его тогда Y. Выберем нижнее число X относительно ξ такое, чтобы

$$X > Y,$$

и, по теореме 132, нижнее число Y_1 и верхнее число Y_2 относительно η такие, чтобы

$$Y_2 - Y_1 = X - Y.$$

Тогда

$$Y > Y_1,$$

следовательно,

$$Y_2+(Y-Y_1)=((X-Y)+Y_1)+(Y-Y_1)=$$
$$=(X-Y)+(Y_1+(Y-Y_1))=(X-Y)+Y=X,$$
$$Y-Y_1=X-Y_2,$$
$$Y=(Y-Y_1)+Y_1=(X-Y_2)+Y_1,$$

и, значит, Y является нижним числом относительно $\upsilon+\eta$.

$\mathfrak{b}$) Если заданное нижнее число относительно ξ является также нижним числом относительно η, то оно меньше каждого числа, рассмотренного в $\mathfrak{a}$), и так как последние, как показано, суть нижние числа относительно $\upsilon+\eta$, то и само заданное число является нижним относительно $\upsilon+\eta$.

Определение 35. *Сечение* υ *из теоремы* 140 *обозначается* $\xi-\eta$ (— читается: минус) *и называется разностью* ξ *минус* η *или сечением, получающимся путем вычитания* η *из* ξ.

§ 4. УМНОЖЕНИЕ

Теорема 141. I) *Пусть* ξ *и* η — *сечения. Множество рациональных чисел, представимых в виде* XY, *где* X — *нижнее число относительно* ξ, *а* Y — *нижнее число относительно* η, *есть сечение.*

II) *Никакое число из этого множества не может быть представлено в виде произведения верхнего числа относительно* ξ *на верхнее число относительно* η.

Доказательство. 1) Пусть X — какое-нибудь нижнее число относительно ξ и Y — какое-нибудь нижнее число относительно η, тогда XY принадлежит рассматриваемому множеству.

Если же X_1 — какое-нибудь верхнее число относительно ξ и Y_1 — какое-нибудь верхнее число относительно η, то для всех нижних чисел X, соответственно Y относительно ξ, соответственно η имеем

$$X<X_1,\quad Y<Y_1,$$

и, следовательно,

$$XY < X_1 Y_1,$$

$$X_1 Y_1 \neq XY.$$

Таким образом, $X_1 Y_1$ не принадлежит рассматриваемому множеству. Тем самым попутно доказано уже и II).

2) Пусть X — нижнее число относительно ξ, Y — нижнее число относительно η и

$$Z < XY.$$

Тогда

$$X\left(\frac{1}{X} Z\right) = \left(X \frac{1}{X}\right) Z = 1 \cdot Z = Z,$$

$$\frac{Z}{X} = \frac{1}{X} Z < \frac{1}{X}(XY) = \left(\frac{1}{X} X\right) Y = Y,$$

и, значит, $\frac{Z}{X}$ есть нижнее число относительно η. Равенство

$$Z = X \frac{Z}{X}$$

показывает тогда, что Z принадлежит нашему множеству.

3) Пусть задано какое-нибудь число из рассматриваемого множества. Оно имеет вид XY, где X — нижнее число относительно ξ, Y — нижнее число относительно η. Выберем нижнее число

$$X_1 > X$$

относительно ξ; тогда

$$X_1 Y > XY,$$

так что наше множество содержит некоторое число $> XY$.

Определение 36. *Сечение, построенное в теореме 141, обозначается* $\xi \cdot \eta$ ($\cdot$ читается: раз; впрочем, точку большей частью не пишут). *Оно называется произве* *дением* ξ *на* η *или сечением, получающимся путем умножения* ξ *на* η.

Теорема 142 (закон коммутативности умножения).

$$\xi\eta = \eta\xi.$$

Доказательство. Каждое XY есть также YX и обратно.

Теорема 143 (закон ассоциативности умножения).

$$(\xi\eta)\zeta = \xi(\eta\zeta).$$

Доказательство. Каждое $(XY)Z$ есть также $X(YZ)$ и обратно.

Теорема 144 (закон дистрибутивности).

$$\xi(\eta+\zeta) = \xi\eta+\xi\zeta.$$

Доказательство. I) Каждое нижнее число относительно $\xi(\eta+\zeta)$ имеет вид

$$X(Y+Z) = XY+XZ,$$

где X, Y, Z — нижние числа, соответственно, относительно ξ, η, ζ. Но $XY+XZ$ есть нижнее число относительно $\xi\eta+\xi\zeta$.

II) Каждое нижнее число относительно $\xi\eta+\xi\zeta$ имеет вид

$$XY+X_1Z,$$

где X, Y, X_1, Z — нижние числа, соответственно, относительно ξ, η, ξ, ζ. В случае $X \geqslant X_1$ обозначим через X_2 число X, в случае $X < X_1$ — число X_1. В обоих случаях X_2 будет нижним числом относительно ξ, и, значит, $X_2(Y+Z)$ — нижним числом относительно $\xi(\eta+\zeta)$. Из

$$XY \leqslant X_2Y,$$
$$X_1Z \leqslant X_2Z$$

вытекает

$$XY+X_1Z \leqslant X_2Y+X_2Z = X_2(Y+Z),$$

следовательно, $XY + X_1Z$ будет нижним числом и относительно $\xi(\eta + \zeta)$.

Теорема 145. *Из*

$$\xi > \eta, \text{ соотв. } \xi = \eta, \text{ соотв. } \xi < \eta$$

следует

$$\xi\zeta > \eta\zeta, \text{ соотв. } \xi\zeta = \eta\zeta, \text{ соотв. } \xi\zeta < \eta\zeta.$$

Доказательство. 1) Если

$$\xi > \eta,$$

то, по теореме 140, существует такое υ, что

$$\xi = \eta + \upsilon.$$

Поэтому

$$\xi\zeta = (\eta + \upsilon)\,\zeta = \eta\zeta + \upsilon\zeta > \eta\zeta.$$

2) Из

$$\xi = \eta,$$

разумеется, следует

$$\xi\zeta = \eta\zeta.$$

3) Из

$$\xi < \eta$$

следует

$$\eta > \xi,$$

и, значит, в силу 1),

$$\eta\zeta > \xi\zeta,$$

$$\xi\zeta < \eta\zeta.$$

Теорема 146. *Из*

$$\xi\zeta > \eta\zeta, \text{ соотв. } \xi\zeta = \eta\zeta, \text{ соотв. } \xi\zeta < \eta\zeta$$

следует

$$\xi > \eta, \text{ соотв. } \xi = \eta, \text{ соотв. } \xi < \eta.$$

Доказательство. Следует из теоремы 145, поскольку три случая оба раза взаимно исключают друг друга и в совокупности исчерпывают все возможности.

Теорема 147. *Из*

$$\xi > \eta, \quad \zeta > \upsilon$$

следует

$$\xi\zeta > \eta\upsilon.$$

Доказательство. По теореме 145,

$$\xi\zeta > \eta\zeta$$

и

$$\eta\zeta = \zeta\eta > \upsilon\eta = \eta\upsilon,$$

следовательно,

$$\xi\zeta > \eta\upsilon.$$

Теорема 148. *Из*

$$\xi \geqslant \eta, \ \zeta > \upsilon \ \textit{или} \ \xi > \eta, \ \zeta \geqslant \upsilon$$

следует

$$\xi\zeta > \eta\upsilon.$$

Доказательство. При знаках равенства в предположении — уже установлено теоремой 145, в противном случае — теоремой 147.

Теорема 149. *Из*

$$\xi \geqslant \eta, \quad \zeta \geqslant \upsilon$$

следует

$$\xi\zeta \geqslant \eta\upsilon.$$

Доказательство. При двух знаках равенства в предположении — очевидно; в противном случае — уже установлено теоремой 148.

Теорема 150. *Для каждого рационального числа R множество рациональных чисел $< R$ образует сечение.*

Доказательство. 1) По теореме 90, существует $X < R$. Само R не $< R$.

2) Если

$$X < R, \quad X_1 \geqslant R,$$

то

$$X < X_1.$$

3) Если

$$X < R,$$

то, в силу теоремы 91, существует X_1 такое, что

$$X < X_1 < R.$$

Определение 37. *Сечение, построенное в теореме 150, мы будем обозначать через R^*.*

(Таким образом, прописные латинские буквы со звездочками обозначают сечения, а не рациональные числа.)

Теорема 151.

$$\xi \cdot 1^* = \xi.$$

Доказательство. $\xi \cdot 1^*$ есть множество всех XY, где X — нижнее число относительно ξ, а

$$Y < 1.$$

Каждое такое $XY < X$ и, следовательно, является нижним числом относительно ξ.

Обратно, пусть задано нижнее число X относительно ξ. Выберем тогда нижнее число X_1 относительно ξ такое, чтобы

$$X_1 > X,$$

и положим

$$Y = \frac{1}{X_1} X.$$

Тогда

$$Y < \frac{1}{X_1} X_1 = 1,$$

и, следовательно,

$$X = X_1 Y$$

является нижним числом относительно $\xi \cdot 1^*$.

Теорема 152. *Для каждого заданного ξ уравнение*

$$\xi \upsilon = 1^*$$

имеет решение υ.

Доказательство. Рассмотрим множество всех чисел $\frac{1}{X}$, где X — любое верхнее число относительно ξ, за исключением наименьшего (если такое существует). Покажем, что это множество является сечением.

1) Рассматриваемое множество содержит, по крайней мере, одно число. Действительно, если X — какое-нибудь верхнее число относительно ξ, то и $X+X$ — верхнее число, но уже наверное не наименьшее, и, следовательно, $\frac{1}{X+X}$ принадлежит нашему множеству.

С другой стороны, существует рациональное число, не принадлежащее этому множеству. Действительно, пусть X_1 — какое-нибудь нижнее число относительно ξ, тогда для всех верхних чисел X относительно ξ имеем

$$X \neq X_1,$$

и так как

$$X\frac{1}{X} = 1 = X_1\frac{1}{X_1},$$

то

$$\frac{1}{X} \neq \frac{1}{X_1};$$

поэтому $\frac{1}{X_1}$ не принадлежит нашему множеству.

2) Пусть $\frac{1}{X}$ — заданное число из нашего множества, так что X — верхнее число относительно ξ, и пусть

$$U < \frac{1}{X};$$

тогда

$$UX < \frac{1}{X}X = 1 = U\frac{1}{U},$$

следовательно,

$$X < \frac{1}{U},$$

и, значит, $\frac{1}{U}$ является верхним числом относительно ξ, притом не наименьшим. Так как

$$U\frac{1}{U}=1,$$

$$U=\frac{1}{\frac{1}{U}},$$

то, следовательно, U принадлежит нашему множеству.

3) Пусть $\frac{1}{X}$ — заданное число из нашего множества, так что X — верхнее число относительно ξ, и притом не наименьшее. Выберем верхнее число X_1 относительно ξ такое, чтобы

$$X_1 < X,$$

а затем, по теореме 91, — число X_2 такое, чтобы

$$X_1 < X_2 < X.$$

X_2 будет верхним числом относительно ξ и притом не наименьшим. Из

$$X_2\frac{1}{X} < X\frac{1}{X} = 1 = X_2\frac{1}{X_2}$$

следует

$$\frac{1}{X_2} > \frac{1}{X};$$

тем самым мы нашли в нашем множестве число, большее заданного.

Таким образом, наше множество является сечением; обозначим его υ.

Мы докажем теперь, что для него

$$\xi\upsilon = 1^*.$$

Для этого достаточно установить:

А) что каждое нижнее число относительно $\xi\upsilon$ будет < 1.

В) что каждое рациональное число < 1 будет нижним числом относительно ξ_0.

К А). Каждое нижнее число относительно ξ_0 имеет вид

$$X\frac{1}{X_1},$$

где X — нижнее, а X_1 — верхнее число относительно ξ. Из

$$X < X_1$$

следует

$$X\frac{1}{X_1} < X_1\frac{1}{X_1} = 1.$$

К В). Пусть

$$U < 1.$$

Выберем какое-нибудь нижнее число X относительно ξ, а затем, по теореме 132, нижнее число X_1 и верхнее число X_2 относительно ξ такие, чтобы

$$X_2 - X_1 = (1 - U)X.$$

Тогда

$$X_2 - X_1 < (1 - U)X_2,$$

$$(X_2 - X_1) + UX_2 < (1 - U)X_2 + UX_2 = X_2 =$$
$$= (X_2 - X_1) + X_1,$$

$$UX_2 < X_1,$$

$$X_2 = \left(\frac{1}{U}U\right)X_2 = \frac{1}{U}(UX_2) < \frac{1}{U}X_1 = \frac{X_1}{U}.$$

Следовательно, $\frac{X_1}{U}$ есть верхнее число относительно ξ, и притом не наименьшее. Из

$$U\frac{X_1}{U} = X_1$$

следует

$$U = \frac{X_1}{\frac{X_1}{U}} = X_1\frac{1}{\frac{X_1}{U}};$$

здесь X_1 — нижнее число относительно ξ, $\frac{\frac{1}{X_1}}{U}$ — нижнее число относительно υ; следовательно, U есть нижнее число относительно $\xi\upsilon$.

Теорема 153. *Для любых заданных* ξ, η *уравнение*

$$\eta\upsilon = \xi$$

имеет точно одно решение υ.

Доказательство. I) Рассматриваемое уравнение может иметь, самое большее, одно решение. Действительно, если

$$\upsilon_1 \neq \upsilon_2,$$

то, по теореме 145,

$$\eta\upsilon_1 \neq \eta\upsilon_2.$$

II) Для решения нашего уравнения достаточно положить

$$\eta\tau = 1^*,$$

где τ — решение уравнения

$$\upsilon = \tau\xi,$$

существующее по теореме 152. Действительно, по теореме 151 имеем

$$\eta\upsilon = \eta(\tau\xi) = (\eta\tau)\xi = 1^*\xi = \xi.$$

Определение 38. *Сечение* υ *из теоремы* 153 *обозначается* $\frac{\xi}{\eta}$ (читается: ξ на η). $\frac{\xi}{\eta}$ *называется частным* ξ *по* η *или сечением, получающимся путем деления* ξ *на* η.

§ 5. РАЦИОНАЛЬНЫЕ СЕЧЕНИЯ И ЦЕЛЫЕ СЕЧЕНИЯ

Определение 39. *Сечение вида* X^* *называется рациональным сечением.*

Определение 40. *Сечение вида x^* называется целым сечением.*

(Таким образом, строчные латинские буквы со звездочками означают сечения, а не целые числа.)

Теорема 154. *Из*

$$X > Y, \text{ соотв. } X = Y, \text{ соотв. } X < Y$$

следует

$$X^* > Y^*, \text{ соотв. } X^* = Y^*, \text{ соотв. } X^* < Y^*$$

и обратно.

Доказательство. I) 1) Из

$$X > Y$$

следует, что Y есть нижнее число относительно X^*. Но Y — верхнее число относительно Y^*. Следовательно,

$$X^* > Y^*.$$

2) Из

$$X = Y,$$

разумеется, следует

$$X^* = Y^*.$$

3) Из

$$X < Y$$

вытекает

$$Y > X,$$

и, значит, в силу 1),

$$Y^* > X^*,$$

$$X^* < Y^*.$$

II) Обращение очевидно, поскольку три случая оба раза взаимно исключают друг друга и в совокупности исчерпывают все возможности.

Теорема 155. $(X+Y)^* = X^* + Y^*$;

$$(X-Y)^* = X^* - Y^* \quad \textit{при } X > Y;$$

$$(XY)^* = X^* Y^*;$$

$$\left(\frac{X}{Y}\right)^* = \frac{X^*}{Y^*}.$$

Доказательство. I) a) Каждое нижнее число относительно $X^* + Y^*$ есть сумма рационального числа $< X$ и рационального числа $< Y$; следовательно, оно $< X + Y$ и потому является нижним числом относительно $(X+Y)^*$.

b) Каждое нижнее число U относительно $(X+Y)^*$ будет $< X + Y$. Из

$$\frac{U}{X+Y} < 1,$$

$$U = X\frac{U}{X+Y} + Y\frac{U}{X+Y}$$

следует, что U есть сумма рационального числа $< X$ и рационального числа $< Y$, а, следовательно, — нижнее число относительно $X^* + Y^*$.

Поэтому

$$(X+Y)^* = X^* + Y^*.$$

II) Из

$$X > Y$$

вытекает

$$X = (X-Y) + Y,$$

следовательно, в силу I),

$$X^* = (X-Y)^* + Y^*,$$

$$(X-Y)^* = X^* - Y^*.$$

III) a) Каждое нижнее число относительно $X^* Y^*$ есть произведение рационального числа $< X$ и рационального числа $< Y$; следовательно, оно $< XY$ и потому — нижнее число относительно $(XY)^*$.

b) Каждое нижнее число U относительно $(XY)^*$ будет $< XY$. Выберем, по теореме 91, рациональное число U_1 такое, чтобы

$$U < U_1 < XY.$$

Тогда

$$\frac{U}{U_1} < 1$$

и

$$\frac{U_1}{Y} < X.$$

Таким образом,

$$U = \frac{U_1}{Y}\left(Y\frac{U}{U_1}\right)$$

есть представление числа U в виде произведения нижнего числа относительно X^* на нижнее число относительно Y^*. Следовательно, U есть нижнее число относительно X^*Y^*.

Поэтому

$$(XY)^* = X^*Y^*.$$

IV)

$$X = \frac{X}{Y}Y,$$

следовательно, в силу III),

$$X^* = \left(\frac{X}{Y}\right)^* Y^*,$$

$$\left(\frac{X}{Y}\right)^* = \frac{X^*}{Y^*}.$$

Теорема 156. *Целые сечения удовлетворяют пяти аксиомам для натуральных чисел, если за* 1 *принять* 1^* *и положить*

$$(x^*)' = (x')^*.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{Z}^*$ — множество всех целых сечений.

1) 1^* принадлежит множеству $\mathfrak{Z}^*$.

2) Вместе с x^* в $\mathfrak{Z}^*$ содержится и $(x^*)'$.

3) Так как всегда

$$x' \neq 1,$$

то

$$(x')^* \neq 1^*,$$

$$(x^*)' \neq 1^*.$$

4) Из

$$(x^*)' = (y^*)'$$

следует

$$(x')^* = (y')^*,$$

$$x' = y',$$

$$x = y,$$

$$x^* = y^*.$$

5) Пусть некоторое множество $\mathfrak{M}^*$ целых сечений обладает следующими свойствами:

I) 1^* принадлежит множеству $\mathfrak{M}^*$.

II) Если x^* принадлежит $\mathfrak{M}^*$, то и $(x^*)'$ принадлежит $\mathfrak{M}^*$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество тех x, для которых x^* принадлежит множеству $\mathfrak{M}^*$. Тогда 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, и вместе с каждым x из $\mathfrak{M}$ также x' принадлежит $\mathfrak{M}$. Следовательно, каждое целое число принадлежит $\mathfrak{M}$ и, значит, каждое целое сечение принадлежит $\mathfrak{M}^*$.

Так как, в силу теорем 154 и 155, между понятиями $=$, $>$, $<$, суммы, разности (если она существует), произведения и частного рациональных сечений и аналогичными старыми понятиями для рациональных чисел имеется полное соответствие, то рациональные сечения обладают всеми свойствами, доказанными нами в гл. 2 для рациональных чисел, и, в частности, целые сечения — всеми свойствами, доказанными для целых чисел.

Поэтому отбросим рациональные числа, заменим их соответствующими рациональными сечениями и будем впредь говорить лишь о сечениях. (Однако, рациональные числа останутся как элементы множеств в понятии сечения.)

Определение 41. (Освободившийся теперь символ) *X будет обозначать рациональное сечение X^*, на которое мы перенесем также наименование „рациональное число"; точно так же на целые сечения мы перенесем наименование „целое число".*

Таким образом, теперь мы будем, например, вместо

$$\xi \frac{1^*}{\xi} = 1^*$$

писать

$$\xi \frac{1}{\xi} = 1.$$

Теорема 157. *Рациональные числа — это те и только те сечения, для которых существует наименьшее верхнее число X, причем тогда X и есть данное сечение.*

Доказательство. 1) X (рациональное число в старом смысле) есть наименьшее верхнее число относительно сечения X (старого X^*).

2) Если для сечения ξ существует наименьшее верхнее число X, то каждое нижнее число $< X$, каждое верхнее число $\geqslant X$ и, следовательно, сечение совпадает с X (старым X^*).

Теорема 158. *Пусть ξ — сечение. X является нижним числом относительно ξ тогда и только тогда, когда*

$$X < \xi,$$

и верхним числом — тогда и только тогда, когда

$$X \geqslant \xi.$$

Доказательство. 1) Если X — нижнее число относительно ξ, то, поскольку X — верхнее число относительно X (старого X^*), имеем:

$$X < \xi.$$

2) Если X — наименьшее верхнее число относительно ξ, то, по теореме 157,

$$X = \xi.$$

3) Если X — верхнее число относительно ξ, но не наименьшее, то возьмем какое-нибудь меньшее верхнее число X_1. Тогда X_1 есть нижнее число относительно X и, следовательно,

$$X > \xi.$$

Теорема 159. *Если*

$$\xi < \eta,$$

то существует Z такое, что

$$\xi < Z < \eta.$$

Доказательство. Выберем верхнее число X относительно ξ, являющееся нижним числом относительно η, и затем какое-нибудь нижнее число Z относительно η, большее, чем X. Тогда, по теореме 158, будем иметь:

$$\xi \leqslant X < Z < \eta.$$

Теорема 160. *Каждое*

$$Z > \xi\eta$$

может быть представлено в виде

$$Z = XY, \quad X \geqslant \xi, \quad Y \geqslant \eta.$$

Доказательство. Пусть ζ — меньшее из сечений 1 и $\frac{Z - \xi\eta}{(\xi + \eta) + 1}$; имеем:

$$\zeta \leqslant 1, \quad \zeta \leqslant \frac{Z - \xi\eta}{(\xi + \eta) + 1}.$$

Выберем, по теореме 159, Z_1 и Z_2 такие, чтобы

$$\xi < Z_1 < \xi + \zeta, \quad \eta < Z_2 < \eta + \zeta.$$

Тогда

$$Z_1Z_2 < (\xi+\zeta)(\eta+\zeta) = (\xi+\zeta)\eta + (\xi+\zeta)\zeta \leqslant$$
$$\leqslant (\xi+\zeta)\eta + (\xi+1)\zeta = (\xi\eta+\eta\zeta) + (\xi+1)\zeta =$$
$$= \xi\eta + ((\xi+\eta)+1)\zeta \leqslant \xi\eta + (Z-\xi\eta) = Z.$$

В произведении

$$Z = \frac{Z}{Z_2} Z_2$$

мы будем иметь

$$X = \frac{Z}{Z_2} = Z\frac{1}{Z_2} > (Z_1Z_2)\frac{1}{Z_2} = Z_1 > \xi,$$
$$Y = Z_2 > \eta,$$

так что оно и будет давать требуемое разложение для Z.

Теорема 161. *Для каждого ζ уравнение*

$$\xi\xi = \zeta$$

имеет точно одно решение.

Доказательство. I) Существует, самое большее, одно решение. Действительно, из

$$\xi_1 > \xi_2$$

следует

$$\xi_1\xi_1 > \xi_2\xi_2.$$

II) Рассмотрим множество тех рациональных чисел X, для которых

$$XX < \zeta.$$

Оно образует сечение. В самом деле:

1) Если

$$X < 1 \text{ и } X < \zeta,$$

то

$$XX < X \cdot 1 = X < \zeta.$$

Если

$$X \geqslant 1 \text{ и } X \geqslant \zeta,$$

то

$$XX \geqslant X \cdot 1 = X \geqslant \zeta.$$

2) Из

$$XX < \zeta, \quad Y < X$$

следует

$$YY < XX < \zeta.$$

3) Пусть

$$XX < \zeta.$$

Обозначим через Z меньшее из сечений 1 и $\frac{\zeta - XX}{X + (X+1)}$; имеем:

$$Z < 1, \quad Z < \frac{\zeta - XX}{X + (X+1)}.$$

Тогда

$$X + Z > X$$

и

$$(X+Z)(X+Z) = (X+Z)X + (X+Z)Z <$$
$$< (XX + ZX) + (X+1)Z = XX + (X + (X+1))Z <$$
$$< XX + (\zeta - XX) = \zeta.$$

Обозначим построенное нами сечение через ξ. Мы утверждаем теперь, что

$$\xi\xi = \zeta.$$

Действительно, если бы мы имели

$$\xi\xi > \zeta,$$

то, по теореме 159, существовало бы Z такое, что

$$\xi\xi > Z > \zeta.$$

Будучи нижним числом относительно $\xi\xi$, Z имело бы вид

$$Z = X_1 X_2, \quad X_1 < \xi, \quad X_2 < \xi.$$

Обозначив через X большее из чисел X_1 и X_2, мы получили бы

$$X < \xi,$$
$$Z \leqslant XX < \zeta,$$

в противоречие с определением числа Z.

Если же мы имели бы

$$\xi\xi < \zeta,$$

то, по теореме 159, существовало бы Z такое, что

$$\xi\xi < Z < \zeta.$$

По теореме 160, Z имело бы вид

$$Z = X_1 X_2, \quad X_1 \geqslant \xi, \quad X_2 \geqslant \xi.$$

Обозначая через X меньшее из чисел X_1 и X_2, мы получили бы

$$X \geqslant \xi,$$
$$Z \geqslant XX \geqslant \zeta,$$

что снова противоречит определению числа Z.

Определение 42. *Каждое сечение, не являющееся рациональным числом, называется иррациональным числом.*

Теорема 162. *Существует по крайней мере одно иррациональное число.*

Доказательство. Достаточно показать, что решение уравнения

$$\xi\xi = 1',$$

существующее по теореме 161, иррационально.

Но в противном случае ξ было бы представимо в виде

$$\xi = \frac{x}{y};$$

по теореме 27, среди этих представлений существовало бы представление с наименьшим возможным y. Так как

$$1' = \xi\xi = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{xx}{yy},$$

то мы имели бы

$$yy < 1'(yy) = xx = (1'y)y < (1'y)(1'y),$$
$$y < x < 1'y.$$

Положим

$$x - y = u.$$

Тогда

$$y + u = x < 1'y = y + y,$$
$$u < y.$$

Но вообще

$$(v + w)(v + w) = (v + w)v + (v + w)w =$$
$$= (vv + wv) + (vw + ww) = (vv + 1'(vw)) + ww.$$

Следовательно, положив

$$y - u = t,$$

мы получили бы

$$\begin{aligned} xx + tt &= (y + u)(y + u) + tt = \\ &= (yy + 1'(yu)) + (uu + tt) = \\ &= (yy + (1'u)(u + t)) + (uu + tt) = \\ &= (yy + 1'(uu)) + ((1'(ut) + uu) + tt) = \\ &= (yy + 1'(uu)) + (u + t)(u + t) = \\ &= (yy + 1'(uu)) + yy = 1'(yy) + 1'(uu) = \\ &= xx + 1'(uu), \end{aligned}$$

$$tt = 1'(uu),$$

$$\frac{t}{u} \cdot \frac{t}{u} = 1',$$

что противоречит, однако, предположенной минимальности числа y, поскольку

$$u < y.$$

Глава 4

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Определение 43. *Сечения мы будем теперь называть положительными числами; соответственно, мы будем теперь говорить: положительное рациональное число (взамен прежнего рационального числа) и положительное целое число (взамен прежнего целого числа).*

Мы создаем новое, отличное от положительных чисел, число 0 (читается: нуль).

Мы создаем, далее, числа, отличные от положительных чисел и числа 0 *и называемые отрицательными числами, так, что каждому* ξ (т. е. каждому положительному числу) *ставится в соответствие отрицательное число, обозначаемое* $-\xi$ ($-$ читается: минус).

При этом $-\xi$ *и* $-\eta$ *считаются за одно число* (т. е. равными) *только тогда, когда* ξ *и* η *представляют собой одно число.*

Положительные числа, число 0 *и отрицательные числа мы называем вещественными числами.*

Прописные греческие буквы, если не оговорено противное, означают всюду вещественные числа. „Равно" записывается символом $=$, „не равно" (отлично от) — символом $\neq$.

Таким образом, для каждого Ξ и каждого H имеет место одно и только одно из соотношений

$$\Xi = \mathrm{H}, \ \Xi \neq \mathrm{H}.$$

Для вещественных чисел понятия тождества и равенства сливаются, так что следующие три теоремы тривиальны:

Теорема 163. $\Xi = \Xi.$

Теорема 164. *Из*

$$\Xi = \mathrm{H}$$

следует

$$H = \Xi.$$

Теорема 165. *Из*

$$\Xi = H, \quad H = Z$$

следует

$$\Xi = Z.$$

§ 2. ПОРЯДОК

Определение 44.

$$|\Xi| = \begin{cases} \xi, & \textit{если } \Xi = \xi, \\ 0, & \textit{если } \Xi = 0, \\ \xi, & \textit{если } \Xi = -\xi. \end{cases}$$

Число $|\Xi|$ *называется абсолютным значением числа* Ξ.

Теорема 166. $|\Xi|$ *положительно для положительных и отрицательных* Ξ.

Доказательство: определение 44.

Определение 45. *Если хотя бы одно из чисел* Ξ *и* H *не положительно, то*

$$\Xi > H$$

тогда и только тогда, когда

либо Ξ *отрицательно,* H *отрицательно и* $|\Xi| < |H|$,
либо $\Xi = 0$, H *отрицательно,*
либо Ξ *положительно,* H *отрицательно,*
либо Ξ *положительно,* $H = 0$.

($>$ читается: больше.)

Заметим, что для пары положительных Ξ и H мы уже имеем понятия $>$ и $<$, причем последнее даже использовано в одном из случаев определения 45.

Определение 46. $\Xi < H$

тогда и только тогда, когда

$$H > \Xi.$$

($<$ читается: меньше.)

Заметим, что для пары положительных Ξ и H определение 46 находится в согласии с нашими старыми понятиями.

Теорема 167. *Для любых* Ξ *и* H *имеет место один и только один из следующих трех случаев*:

$$\Xi = \mathrm{H}, \quad \Xi > \mathrm{H}, \quad \Xi < \mathrm{H}.$$

Доказательство. 1) Если Ξ и H положительны, то мы знаем это из теоремы 123.

2) Если Ξ положительно, а $\mathrm{H} = 0$ или отрицательно, то

$$\Xi \neq \mathrm{H};$$

далее, по определению 45,

$$\Xi > \mathrm{H}$$

и по определению 46

$$\Xi \text{ не } < \mathrm{H}.$$

3) Если $\Xi = 0$, H положительно, то

$$\Xi \neq \mathrm{H};$$

далее, по определению 45,

$$\Xi \text{ не } > \mathrm{H}$$

и по определению 46

$$\Xi < \mathrm{H}.$$

4) Если $\Xi = 0$, $\mathrm{H} = 0$, то

$$\Xi = \mathrm{H},$$

$$\Xi \text{ не } > \mathrm{H},$$

$$\Xi \text{ не } < \mathrm{H}.$$

5) Если $\Xi = 0$, H отрицательно, то

$$\Xi \neq \mathrm{H},$$

$$\Xi > \mathrm{H},$$

$$\Xi \text{ не } < \mathrm{H},$$

6) Если Ξ отрицательно, а H положительно или $\mathrm{H}=0$, то

$$\Xi \neq \mathrm{H},$$

$$\Xi \text{ не } > \mathrm{H},$$

$$\Xi < \mathrm{H}.$$

7) Если Ξ и H отрицательны, то

$$\begin{array}{llll} \Xi \neq \mathrm{H}, & \Xi > \mathrm{H}, & \Xi \text{ не } < \mathrm{H} & \text{для } |\Xi| < |\mathrm{H}|, \\ \Xi = \mathrm{H}, & \Xi \text{ не } > \mathrm{H}, & \Xi \text{ не } < \mathrm{H} & \text{для } |\Xi| = |\mathrm{H}|, \\ \Xi \neq \mathrm{H}, & \Xi \text{ не } > \mathrm{H}, & \Xi < \mathrm{H} & \text{для } |\Xi| > |\mathrm{H}|. \end{array}$$

Определение 47.

$$\Xi \geqslant \mathrm{H}$$

означает

$$\Xi > \mathrm{H} \textit{ или } \Xi = \mathrm{H}.$$

($\geqslant$ читается: больше или равно.)

Определение 48.

$$\Xi \leqslant \mathrm{H}$$

означает

$$\Xi < \mathrm{H} \textit{ или } \Xi = \mathrm{H}.$$

($\leqslant$ читается: меньше или равно.)

Теорема 168. *Из*

$$\Xi \geqslant \mathrm{H}$$

следует

$$\mathrm{H} \leqslant \Xi$$

и обратно.

Доказательство: определение 46.

Теорема 169. *Положительные числа — это числа* > 0, *отрицательные числа — это числа* < 0.

Доказательство. 1) По определению 45,

$$\xi > 0.$$

2) Из

$$\Xi > 0,$$

по определению 45, следует

$$\Xi = \xi.$$

3) По определению 46,

$$-\xi < 0.$$

4) Из

$$\Xi < 0,$$

по определению 46, следует

$$\Xi = -\xi.$$

Теорема 170.

$$|\Xi| \geqslant 0.$$

Доказательство: определение 44, теорема 166 и теорема 169.

Теорема 171 (транзитивность порядка). *Из*

$$\Xi < H,\ H < Z$$

следует

$$\Xi < Z.$$

Доказательство. 1) Пусть

$$Z > 0.$$

Если

$$\Xi > 0,$$

то

$$H > 0,$$

и мы приходим к старой теореме 126.

Если

$$\Xi \leqslant 0,$$

то необходимо

$$\Xi < Z.$$

2) Пусть

$$Z = 0.$$

Тогда
$$H < 0,$$
и, следовательно,
$$\Xi < 0,$$
$$\Xi < Z.$$

3) Пусть
$$Z < 0.$$
Тогда
$$H < 0,$$
$$\Xi < 0.$$
Далее,
$$|\Xi| > |H|, \quad |H| > |Z|,$$
и, следовательно,
$$|\Xi| > |Z|,$$
$$\Xi < Z.$$

Теорема 172. *Из*
$$\Xi \leqslant H, \ H < Z \ \textit{или} \ \Xi < H, \ H \leqslant Z$$
следует
$$\Xi < Z.$$

Доказательство. При знаках равенства в предположении — очевидно, в противном случае — уже установлено теоремой 171.

Теорема 173. *Из*
$$\Xi \leqslant H, \ H \leqslant Z$$
следует
$$\Xi \leqslant Z.$$

Доказательство. При двух знаках равенства в предположении — очевидно; в противном случае — уже установлено теоремой 172.

Определение 49. *Если*
$$\Xi \leqslant 0,$$

то Ξ называется рациональным, когда

$$\Xi = 0,$$

либо когда

$$\Xi < 0 \text{ и } |\Xi| \text{ рационально.}$$

Таким образом, мы имеем теперь положительные рациональные числа, рациональное число 0 и отрицательные рациональные числа.

Определение 50. *Если*

$$\Xi < 0,$$

то Ξ называется иррациональным, если оно не рационально.

Таким образом, мы имеем теперь положительные иррациональные числа и отрицательные иррациональные числа. (*Числа*? — Да; мы указали *одно* иррациональное ξ, но тогда и всякое положительное число $\xi + X$ иррационально, так как из

$$\xi + X = Y$$

следовало бы

$$\xi = Y - X;$$

а $-(\xi + X)$ в таком случае всегда — отрицательное иррациональное.)

Определение 51. *Если*

$$\Xi \leqslant 0,$$

то Ξ называется целым, когда

$$\Xi = 0,$$

либо когда

$$\Xi < 0 \text{ и } |\Xi| \text{ — целое.}$$

Таким образом, мы имеем теперь положительные целые числа, целое число 0 и отрицательные целые числа.

Теорема 174. *Каждое целое число рационально.*

Доказательство. Для положительных чисел мы это уже знаем; для числа 0 и отрицательных чисел это следует из определения 49 и определения 51.

§ 3. СЛОЖЕНИЕ

Определение 52.

$$\Xi + \mathrm{H} = \begin{cases} -(|\Xi| + |\mathrm{H}|), & \textit{когда } \Xi < 0, \mathrm{H} < 0; \\ \left.\begin{matrix} |\Xi| - |\mathrm{H}| \\ 0 \\ -(|\mathrm{H}| - |\Xi|) \end{matrix}\right\}, & \textit{когда } \Xi > 0, \mathrm{H} < 0, \begin{cases} |\Xi| > |\mathrm{H}|; \\ |\Xi| = |\mathrm{H}|; \\ |\Xi| < |\mathrm{H}|; \end{cases} \\ \mathrm{H} + \Xi, & \textit{когда } \Xi < 0, \mathrm{H} > 0; \\ \mathrm{H}, & \textit{когда } \Xi = 0; \\ \Xi, & \textit{когда } \mathrm{H} = 0. \end{cases}$$

($+$ читается: плюс.) $\Xi + \mathrm{H}$ *называется суммой чисел* Ξ *и* H *или числом, получающимся путем прибавления* H *к* Ξ.

По поводу этого определения заметим:

1) Для
$$\Xi > 0, \ \mathrm{H} > 0$$
мы имеем понятие $\Xi + \mathrm{H}$ уже из определения 34.

2) Это понятие использовано также в определении 52.

3) В третьем случае рассматриваемого определения используется понятие суммы из второго случая.

4) Четвертый и пятый случаи перекрываются, когда
$$\Xi = \mathrm{H} = 0,$$
но тогда и число, определяемое как сумма $\Xi + \mathrm{H}$, одно и то же (а именно, 0).

Теорема 175 (закон коммутативности сложения).
$$\Xi + \mathrm{H} = \mathrm{H} + \Xi.$$

Доказательство. При
$$\Xi = 0$$

оба числа равны Н; при

$$\mathrm{H}=0$$

оба равны Ξ.

При

$$\Xi>0,\ \mathrm{H}>0$$

приходим к старой теореме 130.

При

$$\Xi<0,\ \mathrm{H}<0$$

имеем, по теореме 130,

$$\Xi+\mathrm{H}=-(|\Xi|+|\mathrm{H}|)=-(|\mathrm{H}|+|\Xi|)=\mathrm{H}+\Xi.$$

При

$$\Xi<0,\ \mathrm{H}>0$$

утверждение теоремы было принято прямо за определение.

При

$$\Xi>0,\ \mathrm{H}<0$$

имеем, по предыдущему случаю,

$$\mathrm{H}+\Xi=\Xi+\mathrm{H},$$

и, следовательно,

$$\Xi+\mathrm{H}=\mathrm{H}+\Xi.$$

Определение 53.

$$-\Xi=\begin{cases} 0 \text{ \textit{при} } \Xi=0, \\ |\Xi| \text{ \textit{при} } \Xi<0. \end{cases}$$

($-$ читается: минус.)

Заметим, что при $\Xi>0$ мы имеем понятие $-\Xi$ уже в определении 43.

Теорема 176. *Если*

$$\Xi>0, \text{ \textit{соотв.} } \Xi=0, \text{ \textit{соотв.} } \Xi<0,$$

то

$$-\Xi<0, \text{ \textit{соотв.} } -\Xi=0, \text{ \textit{соотв.} } -\Xi>0$$

и обратно.

Доказательство: определения 43 и 53.

Теорема 177. $-(-\Xi)=\Xi$.

Доказательство: определения 43, 44 и 53.

Теорема 178. $|-\Xi|=|\Xi|$.

Доказательство: определения 43, 44 и 53.

Теорема 179. $\Xi+(-\Xi)=0$.

Доказательство: определения 52, 53 и теорема 178.

Теорема 180. $-(\Xi+H)=-\Xi+(-H)$.

Доказательство. По теореме 175, имеем

$$-(\Xi+H)=-(H+\Xi)$$

и

$$-\Xi+(-H)=-H+(-\Xi),$$

поэтому без ограничения общности можно предполагать, что

$$\Xi \geqslant H;$$

действительно, имеет место, по крайней мере, одно из соотношений

$$\Xi \geqslant H,\ H \geqslant \Xi,$$

а из

$$-(H+\Xi)=-H+(-\Xi)$$

тотчас следует

$$-(\Xi+H)=-\Xi+(-H).$$

Пусть, таким образом,

$$\Xi \geqslant H.$$

1) Если

$$\Xi>0,\ H>0,$$

то

$$-\Xi+(-H)=-(\Xi+H).$$

2) Если

$$\Xi > 0,\ \mathrm{H} = 0,$$

то

$$-\Xi + (-\mathrm{H}) = -\Xi + 0 = -\Xi = -(\Xi + 0) =$$
$$= -(\Xi + \mathrm{H}).$$

3) Если

$$\Xi > 0,\ \mathrm{H} < 0,$$

то

либо

$$\Xi > |\mathrm{H}|,$$

и, следовательно,

$$\Xi + \mathrm{H} = \Xi - |\mathrm{H}|,$$
$$-\Xi + (-\mathrm{H}) = -\Xi + |\mathrm{H}| = -(\Xi - |\mathrm{H}|) =$$
$$= -(\Xi + \mathrm{H});$$

либо

$$\Xi = |\mathrm{H}|,$$

и, следовательно,

$$\Xi + \mathrm{H} = 0,$$
$$-\Xi + (-\mathrm{H}) = -\Xi + |\mathrm{H}| = 0 = -(\Xi + \mathrm{H});$$

либо

$$\Xi < |\mathrm{H}|,$$

и, следовательно,

$$\Xi + \mathrm{H} = -(|\mathrm{H}| - \Xi),$$
$$-\Xi + (-\mathrm{H}) = -\Xi + |\mathrm{H}| = |\mathrm{H}| - \Xi = -(\Xi + \mathrm{H}).$$

4) Если

$$\Xi = 0,$$

то

$$-\Xi + (-\mathrm{H}) = 0 + (-\mathrm{H}) = -\mathrm{H} = -(0 + \mathrm{H}) =$$
$$= -(\Xi + \mathrm{H}).$$

5) Если

$$\Xi < 0,$$

то

$$H < 0,$$

$$\Xi + H = -(|\Xi| + |H|),$$

$$-\Xi + (-H) = |\Xi| + |H| = -(\Xi + H).$$

Определение 54. $\Xi - H = \Xi + (-H)$.

($-$ читается: минус.) $\Xi - H$ *называется разностью* Ξ *минус* H *или числом, получающимся путем вычитания* H *из* Ξ.

Заметим, что (как это и должно быть) определение 54 при

$$\Xi > H > 0$$

согласуется с нашим старым определением 35. Действительно, тогда

$$\Xi > 0, \quad -H < 0, \quad |\Xi| > |-H|,$$

$$\Xi + (-H) = |\Xi| - |-H| = \Xi - H.$$

Теорема 181. $-(\Xi - H) = H - \Xi$.

Доказательство. По теоремам 180 и 177, имеем

$$-(\Xi - H) = -(\Xi + (-H)) = -\Xi + (-(-H)) =$$

$$= -\Xi + H = H + (-\Xi) = H - \Xi.$$

Теорема 182. *Из*

$$\Xi - H > 0, \text{ *соотв.* } \Xi - H = 0, \text{ *соотв.* } \Xi - H < 0$$

следует

$$\Xi > H, \text{ *соотв.* } \Xi = H, \text{ *соотв.* } \Xi < H$$

и обратно.

Доказательство. Так как $-H$ также является произвольным вещественным числом, то вместо $-H$ можно писать H и, следовательно, доказывать равносильность соответственных случаев для

$$\Xi + H > 0, \text{ соотв. } \Xi + H = 0, \text{ соотв. } \Xi + H < 0$$

и

$$\Xi > -\mathrm{H}, \text{ соотв. } \Xi = -\mathrm{H}, \text{ соотв. } \Xi < -\mathrm{H}.$$

Если тогда $\Xi = 0$ или $\mathrm{H} = 0$, то утверждение теоремы очевидно. Если же ни Ξ, ни H не равно нулю, то в случае

$$\Xi > 0, \ \mathrm{H} > 0$$

и в трех первых случаях определения 52, если третий разбить на три подслучая

$$|\mathrm{H}| > |\Xi|, \ |\mathrm{H}| = |\Xi|, \ |\mathrm{H}| < |\Xi|,$$

мы будем и в предположении и в утверждении иметь, соответственно, знаки

$$> < > = < > = <.$$

Теорема 183. *Из*

$$\Xi > \mathrm{H}, \text{ *соотв.* } \Xi = \mathrm{H}, \text{ *соотв.* } \Xi < \mathrm{H}$$

следует

$$-\Xi < -\mathrm{H}, \text{ *соотв.* } -\Xi = -\mathrm{H}, \text{ *соотв.* } -\Xi > -\mathrm{H}$$

и обратно.

Доказательство. По теореме 182, первое соответствует случаям

$$\Xi - \mathrm{H} > 0, \text{ соотв. } \Xi - \mathrm{H} = 0, \text{ соотв. } \Xi - \mathrm{H} < 0,$$

а второе — случаям

$$-\mathrm{H} - (-\Xi) > 0, \text{ соотв. } -\mathrm{H} - (-\Xi) = 0, \text{ соотв. } -\mathrm{H} - (-\Xi) < 0;$$

но

$$-\mathrm{H} - (-\Xi) = -\mathrm{H} + (-(-\Xi)) = -\mathrm{H} + \Xi = \Xi + (-\mathrm{H}) = \Xi - \mathrm{H}.$$

Теорема 184. *Каждое вещественное число может быть представлено в виде разности двух положительных чисел.*

Доказательство. 1) Если

$$\Xi > 0,$$

то

$$\Xi = (\Xi + 1) - 1.$$

2) Если

$$\Xi = 0,$$

то

$$\Xi = 1 - 1.$$

3) Если

$$\Xi < 0,$$

то

$$-\Xi = |\Xi| = (|\Xi| + 1) - 1,$$
$$\Xi = -((|\Xi| + 1) - 1) = 1 - (|\Xi| + 1).$$

Теорема 185. *Из*

$$\Xi = \xi_1 - \xi_2, \ \mathrm{H} = \eta_1 - \eta_2$$

следует

$$\Xi + \mathrm{H} = (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2).$$

Доказательство. 1) Пусть

$$\Xi > 0, \ \mathrm{H} > 0.$$

Так как

$$(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = (\alpha + \beta) + (\delta + \gamma) =$$
$$= ((\alpha + \beta) + \delta) + \gamma = \gamma + (\alpha + (\beta + \delta)) =$$
$$= (\gamma + \alpha) + (\beta + \delta),$$

то тогда

$$(\Xi + \mathrm{H}) + (\xi_2 + \eta_2) = \xi_1 + \eta_1,$$

и, значит, утверждение теоремы справедливо.

2) Пусть

$$\Xi < 0, \ \mathrm{H} < 0.$$

Тогда, по теореме 181,

$$\xi_2 - \xi_1 = -\Xi > 0, \ \eta_2 - \eta_1 = -\mathrm{H} > 0,$$

и, значит, в силу 1),

$$-\Xi + (-H) = (\xi_2 + \eta_2) - (\xi_1 + \eta_1),$$
$$\Xi + H = -(-\Xi + (-H)) = (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2).$$

3) Пусть

$$\Xi > 0, \ H < 0,$$

так что

$$\xi_1 - \xi_2 > 0, \ \eta_2 - \eta_1 > 0.$$

A) Если

$$\Xi > |H|,$$

то

$$\xi_1 - \xi_2 > \eta_2 - \eta_1,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\xi_1 + \eta_1 &= ((\xi_1 - \xi_2) + \xi_2) + \eta_1 = (\xi_1 - \xi_2) + (\xi_2 + \eta_1) = \\ &= (\xi_2 + \eta_1) + (\xi_1 - \xi_2) = \\ &= (\xi_2 + \eta_1) + ((\eta_2 - \eta_1) + ((\xi_1 - \xi_2) - (\eta_2 - \eta_1))) = \\ &= ((\xi_2 + \eta_1) + (\eta_2 - \eta_1)) + ((\xi_1 - \xi_2) - (\eta_2 - \eta_1)) = \\ &= (\xi_2 + (\eta_1 + (\eta_2 - \eta_1))) + ((\xi_1 - \xi_2) - (\eta_2 - \eta_1)) = \\ &= (\xi_2 + \eta_2) + ((\xi_1 - \xi_2) - (\eta_2 - \eta_1)),\end{aligned}$$

$$(\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2) = (\xi_1 - \xi_2) - (\eta_2 - \eta_1) = $$
$$= \Xi - |H| = \Xi + H.$$

B) Если

$$\Xi < |H|,$$

то, в силу A),

$$\begin{aligned}\Xi + H &= -(-H + (-\Xi)) = -((\eta_2 - \eta_1) + (\xi_2 - \xi_1)) = \\ &= -((\eta_2 + \xi_2) - (\eta_1 + \xi_1)) = (\eta_1 + \xi_1) - (\eta_2 + \xi_2) = \\ &= (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2).\end{aligned}$$

C) Если

$$\Xi = |H|,$$

так что

$$\xi_1 - \xi_2 = \eta_2 - \eta_1,$$

то

$$\xi_1 = \xi_2 + (\eta_2 - \eta_1),$$
$$\xi_1 + \eta_1 = \xi_2 + \eta_2,$$
$$\Xi + \mathrm{H} = 0 = (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2).$$

4) Пусть

$$\Xi < 0, \ \mathrm{H} > 0.$$

Тогда, в силу 3),

$$\mathrm{H} + \Xi = (\eta_1 + \xi_1) - (\eta_2 + \xi_2),$$
$$\Xi + \mathrm{H} = (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2).$$

5) Пусть

$$\Xi = 0.$$

Тогда

$$\xi_1 = \xi_2,$$
$$\Xi + \mathrm{H} = \mathrm{H}.$$

a) При

$$\eta_1 > \eta_2$$

имеем

$$(\eta_1 - \eta_2) + (\xi_1 + \eta_2) = ((\eta_1 - \eta_2) + \eta_2) + \xi_1 = \\ = \eta_1 + \xi_1 = \xi_1 + \eta_1,$$
$$\mathrm{H} = \eta_1 - \eta_2 = (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_1 + \eta_2) = \\ = (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2).$$

b) При

$$\eta_1 = \eta_2$$

имеем

$$\mathrm{H} = 0 = (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2).$$

c) При

$$\eta_1 < \eta_2,$$

в силу a), имеем

$$-\mathrm{H} = \eta_2 - \eta_1 = (\xi_2 + \eta_2) - (\xi_1 + \eta_1),$$
$$\mathrm{H} = -(-\mathrm{H}) = (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2).$$

6) Пусть

$$\mathrm{H} = 0.$$

Тогда, в силу 5),

$$\Xi + \mathrm{H} = \mathrm{H} + \Xi = (\eta_1 + \xi_1) - (\eta_2 + \xi_2) =$$
$$= (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2).$$

Теорема 186 (закон ассоциативности сложения).

$$(\Xi + \mathrm{H}) + \mathrm{Z} = \Xi + (\mathrm{H} + \mathrm{Z}).$$

Доказательство. Согласно теореме 184, имеем

$$\Xi = \xi_1 - \xi_2,\ \mathrm{H} = \eta_1 - \eta_2,\ \mathrm{Z} = \zeta_1 - \zeta_2.$$

Тогда, по теореме 185, получаем:

$$(\Xi + \mathrm{H}) + \mathrm{Z} = ((\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2)) + (\zeta_1 - \zeta_2) =$$
$$= ((\xi_1 + \eta_1) + \zeta_1) - ((\xi_2 + \eta_2) + \zeta_2) =$$
$$= (\xi_1 + (\eta_1 + \zeta_1)) - (\xi_2 + (\eta_2 + \zeta_2)) =$$
$$= (\xi_1 - \xi_2) + ((\eta_1 + \zeta_1) - (\eta_2 + \zeta_2)) =$$
$$= \Xi + (\mathrm{H} + \mathrm{Z}).$$

Теорема 187. *При заданных* Ξ *и* H *уравнение*

$$\mathrm{H} + \Upsilon = \Xi$$

имеет точно одно решение, а именно,

$$\Upsilon = \Xi - \mathrm{H}.$$

Доказательство. 1) $\Upsilon = \Xi - \mathrm{H}$ есть решение, так как, по теореме 186,

$$\mathrm{H} + (\Xi - \mathrm{H}) = (\Xi - \mathrm{H}) + \mathrm{H} = (\Xi + (-\mathrm{H})) + \mathrm{H} =$$
$$= \Xi + (-\mathrm{H} + \mathrm{H}) = \Xi + 0 = \Xi.$$

2) Из

$$\mathrm{H} + \Upsilon = \Xi$$

следует

$$\Xi - \mathrm{H} = \Xi + (-\mathrm{H}) = -\mathrm{H} + \Xi = -\mathrm{H} + (\mathrm{H} + \Upsilon) =$$
$$= (-\mathrm{H} + \mathrm{H}) + \Upsilon = 0 + \Upsilon = \Upsilon.$$

Теорема 188. *Соотношение*

$$\Xi+Z>H+Z, \textit{ соотв. } \Xi+Z=H+Z,$$
$$\textit{соотв. } \Xi+Z<H+Z$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполняется соответственное соотношение

$$\Xi>H, \textit{ соотв. } \Xi=H, \textit{ соотв. } \Xi<H.$$

Доказательство. По теореме 182, соотношения из первой строки равносильны соответственным соотношениям

$$(\Xi+Z)-(H+Z)>0, \textit{ соотв. } (\Xi+Z)-(H+Z)=0,$$
$$\textit{соотв. } (\Xi+Z)-(H+Z)<0;$$

и из второй строки — соответственным соотношениям

$$\Xi-H>0, \textit{ соотв. } \Xi-H=0, \textit{ соотв. } \Xi-H<0.$$

Но

$$(\Xi+Z)-(H+Z)=(\Xi+Z)+(-Z+(-H))=$$
$$=(\Xi+(Z+(-Z)))+(-H)=\Xi+(-H)=\Xi-H.$$

Теорема 189. *Из*

$$\Xi>H, \ Z>\Upsilon$$

следует

$$\Xi+Z>H+\Upsilon.$$

Доказательство. По теореме 188,

$$\Xi+Z>H+Z$$

и

$$H+Z=Z+H>\Upsilon+H=H+\Upsilon,$$

следовательно,

$$\Xi+Z>H+\Upsilon.$$

Теорема 190. *Из*

$$\Xi\geqslant H, \ Z>\Upsilon \textit{ или } \Xi>H, \ Z\geqslant\Upsilon$$

следует

$$\Xi + \mathrm{Z} > \mathrm{H} + \Upsilon.$$

Доказательство. При знаках равенства в предположении — уже установлено теоремой 188, в противном случае — теоремой 189.

Теорема 191. *Из*

$$\Xi \geqslant \mathrm{H}, \quad \mathrm{Z} \geqslant \Upsilon$$

следует

$$\Xi + \mathrm{Z} \geqslant \mathrm{H} + \Upsilon.$$

Доказательство. При двух знаках равенства в предположении — очевидно; в противном случае — уже установлено теоремой 190.

§ 4. УМНОЖЕНИЕ

Определение 55.

$$\Xi \cdot \mathrm{H} = \begin{cases} -(|\Xi|\,|\mathrm{H}|) & \text{при } \Xi > 0,\ \mathrm{H} < 0 \\ & \quad \text{или } \Xi < 0,\ \mathrm{H} > 0; \\ |\Xi|\,|\mathrm{H}| & \text{при } \Xi < 0,\ \mathrm{H} < 0; \\ 0 & \text{при } \Xi = 0 \text{ или } \mathrm{H} = 0. \end{cases}$$

($\cdot$ читается: раз; впрочем, точку большей частью не пишут.) $\Xi \cdot \mathrm{H}$ *называется произведением* Ξ *на* H *или числом, получающимся путем умножения* Ξ *на* H.

Заметим, что $\Xi \cdot \mathrm{H}$ при $\Xi > 0$, $\mathrm{H} > 0$ известно нам уже из определения 36, что, кстати, и было использовано в определении 55.

Теорема 192. $\Xi\mathrm{H} = 0$

тогда и только тогда, когда, по крайней мере, одно из чисел Ξ, H *есть нуль.*

Доказательство: определение 55.

Теорема 193.

$$|\Xi H| = |\Xi||H|$$

Доказательство: определение 55.

Теорема 194 (закон коммутативности умножения).

$$\Xi H = H\Xi.$$

Доказательство. При $\Xi > 0$, $H > 0$ это — теорема 142, в остальных же случаях — следует из определения 55, так как правые части этого определения (по теореме 142), равно как и разбиение на случаи, симметричны относительно Ξ и H.

Теорема 195.

$$\Xi \cdot 1 = \Xi.$$

Доказательство. При $\Xi > 0$ это следует из теоремы 151; при $\Xi = 0$ — из определения 55; при $\Xi < 0$, по определению 55, имеем

$$\Xi \cdot 1 = -(|\Xi| \cdot 1) = -|\Xi| = \Xi.$$

Теорема 196. *Если*

$$\Xi \neq 0, \ H \neq 0,$$

то

$$\Xi H = |\Xi||H|, \ \textit{соотв.} \ \Xi H = -(|\Xi||H|),$$

смотря по тому, будут ли числа Ξ, H *оба отрицательны* (*или оба неотрицательны*), *либо, соответственно, одно из них отрицательно.*

Доказательство: определение 55.

Теорема 197:

$$(-\Xi)H = \Xi(-H) = -(\Xi H).$$

Доказательство. 1) Если одно из чисел Ξ, H — нуль, то все три выражения равны нулю.

2) Если

$$\Xi \neq 0, \ H \neq 0,$$

то, по теореме 193, все три выражения имеют одинаковое абсолютное значение $|\Xi||\mathrm{H}|$, и по теореме 196 все три >0, соответственно <0, смотря по тому, содержится ли среди чисел Ξ, H точно одно, соответственно, ни одного или два отрицательных.

Теорема 198.

$$(-\Xi)(-\mathrm{H})=\Xi\mathrm{H}.$$

Доказательство. По теореме 197,

$$(-\Xi)(-\mathrm{H})=\Xi(-(-\mathrm{H}))=\Xi\mathrm{H}.$$

Теорема 199 (закон ассоциативности умножения).

$$(\Xi\mathrm{H})\mathrm{Z}=\Xi(\mathrm{H}\mathrm{Z}).$$

Доказательство. 1) Если одно из чисел Ξ, H, Z — нуль, то в обеих частях утверждаемого равенства стоит 0.

2) Если

$$\Xi\neq 0,\ \mathrm{H}\neq 0,\ \mathrm{Z}\neq 0,$$

то, по теореме 193, обе части имеют одинаковое абсолютное значение

$$(|\Xi||\mathrm{H}|)|\mathrm{Z}|=|\Xi|(|\mathrm{H}||\mathrm{Z}|)$$

и, по теореме 196, обе части >0, соответственно <0, если среди чисел Ξ, H, Z нет ни одного или имеется точно два отрицательных или, соответственно, среди этих чисел содержится точно одно или точно три отрицательных.

Теорема 200.

$$\xi(\eta-\zeta)=\xi\eta-\xi\zeta.$$

Доказательство. 1) При

$$\eta>\zeta$$

имеем

$$(\eta-\zeta)+\zeta=\eta,$$

и, следовательно, по теореме 144,

$$\xi(\eta-\zeta)+\xi\zeta=\xi\eta,$$
$$\xi(\eta-\zeta)=\xi\eta-\xi\zeta.$$

2) При

$$\eta=\zeta$$

имеем

$$\xi\eta=\xi\zeta,$$
$$\xi(\eta-\zeta)=\xi\cdot 0=0=\xi\eta-\xi\zeta.$$

3) При

$$\eta<\zeta,$$

в силу 1), имеем

$$\xi(\zeta-\eta)=\xi\zeta-\xi\eta,$$
$$\xi(\eta-\zeta)=\xi(-(\zeta-\eta))=-(\xi(\zeta-\eta))=-(\xi\zeta-\xi\eta)=$$
$$=\xi\eta-\xi\zeta.$$

Теорема 201 (закон дистрибутивности).

$$\Xi(\mathrm{H}+\mathrm{Z})=\Xi\mathrm{H}+\Xi\mathrm{Z}.$$

Доказательство. 1) Пусть

$$\Xi>0.$$

По теореме 184,

$$\mathrm{H}=\eta_1-\eta_2,\quad \mathrm{Z}=\zeta_1-\zeta_2,$$

тогда, по теореме 185,

$$\mathrm{H}+\mathrm{Z}=(\eta_1+\zeta_1)-(\eta_2+\zeta_2),$$

следовательно, по теоремам 200 и 144,

$$\Xi(\mathrm{H}+\mathrm{Z})=\Xi(\eta_1+\zeta_1)-\Xi(\eta_2+\zeta_2)=$$
$$=(\Xi\eta_1+\Xi\zeta_1)-(\Xi\eta_2+\Xi\zeta_2),$$

и, значит, по теоремам 185 и 200,

$$\Xi(\mathrm{H}+\mathrm{Z})=(\Xi\eta_1-\Xi\eta_2)+(\Xi\zeta_1-\Xi\zeta_2)=$$
$$=\Xi(\eta_1-\eta_2)+\Xi(\zeta_1-\zeta_2)=\Xi\mathrm{H}+\Xi\mathrm{Z}.$$

2) Пусть

$$\Xi = 0.$$

Тогда

$$\Xi(H + Z) = 0 = \Xi H + \Xi Z.$$

3) Пусть

$$\Xi < 0.$$

Тогда, в силу 1),

$$(-\Xi)(H + Z) = (-\Xi)H + (-\Xi)Z,$$

следовательно,

$$-(\Xi(H + Z)) = (-\Xi)H + (-\Xi)Z,$$

$$\Xi(H + Z) = -((-\Xi)H + (-\Xi)Z) =$$

$$= -((-\Xi)H) + (-((-\Xi)Z)) = \Xi H + \Xi Z.$$

Теорема 202.

$$\Xi(H - Z) = \Xi H - \Xi Z.$$

Доказательство. По теореме 201,

$$\Xi(H - Z) = \Xi(H + (-Z)) = \Xi H + \Xi(-Z) =$$

$$= \Xi H + (-(\Xi Z)) = \Xi H - \Xi Z.$$

Теорема 203. *Если*

$$\Xi > H,$$

то из

$$Z > 0, \textit{ соотв. } Z = 0, \textit{ соотв. } Z < 0$$

следует

$$\Xi Z > HZ, \textit{ соотв. } \Xi Z = HZ, \textit{ соотв. } \Xi Z < HZ.$$

Доказательство. Имеем

$$\Xi - H > 0,$$

и, следовательно,

$(\Xi - H)Z > 0$, соотв. $(\Xi - H)Z = 0$ соотв. $(\Xi - H)Z < 0$, смотря по тому, будет ли

$$Z > 0, \text{ соотв. } Z = 0, \text{ соотв. } Z < 0.$$

Так как, по теореме 202,

$$(\Xi - \mathrm{H})\,Z = Z\,(\Xi - \mathrm{H}) = Z\Xi - Z\mathrm{H} = \Xi Z - \mathrm{H}Z,$$

то в этих случаях, по теореме 182,

$$\Xi Z > \mathrm{H}Z, \text{ соотв. } \Xi Z = \mathrm{H}Z, \text{ соотв. } \Xi Z < \mathrm{H}Z.$$

Теорема 204. *Уравнение*

$$\mathrm{H}\Upsilon = \Xi,$$

где Ξ, H — *заданные числа и*

$$\mathrm{H} \neq 0,$$

имеет точно одно решение Υ.

Доказательство. I) Существует, самое большее, одно решение. Действительно, из

$$\mathrm{H}\Upsilon_1 = \Xi = \mathrm{H}\Upsilon_2$$

следует

$$0 = \mathrm{H}\Upsilon_1 - \mathrm{H}\Upsilon_2 = \mathrm{H}\,(\Upsilon_1 - \Upsilon_2),$$

и, значит, по теореме 192,

$$0 = \Upsilon_1 - \Upsilon_2,$$

$$\Upsilon_1 = \Upsilon_2.$$

II) 1) Пусть

$$\mathrm{H} > 0.$$

Тогда

$$\Upsilon = \frac{1}{\mathrm{H}}\,\Xi$$

служит решением, так как

$$\mathrm{H}\Upsilon = \mathrm{H}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\,\Xi\right) = \left(\mathrm{H}\,\frac{1}{\mathrm{H}}\right)\Xi = 1 \cdot \Xi = \Xi.$$

2) Пусть

$$H < 0.$$

Тогда

$$\Upsilon = -\left(\frac{1}{|H|}\,\Xi\right)$$

служит решением, так как, в силу 1),

$$\Xi = |H|\left(\frac{1}{|H|}\,\Xi\right) = |H|(-\Upsilon) = (-|H|)\,\Upsilon = H\Upsilon.$$

Определение 56. *Число* Υ *из теоремы* 204 *обозначается* $\frac{\Xi}{H}$ (читается: Ξ на H) *и называется частным* Ξ *по* H *или числом, получающимся путем деления* Ξ *на* H.

Заметим, что (как и должно быть) при $\Xi > 0$, $H > 0$ это совпадает со старым определением 38.

§ 5. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ДЕДЕКИНДА

Теорема 205. *Пусть задано какое-нибудь разбиение всех вещественных чисел на два класса, обладающие следующими свойствами:*

1) *Оба класса не пусты.*

2) *Каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса.*

Тогда существует точно одно вещественное число Ξ *такое, что каждое* $H < \Xi$ *принадлежит первому, а каждое* $H > \Xi$ — *второму классу.*

Другими словами: каждое число первого класса $\leqslant \Xi$, каждое число второго класса $\geqslant \Xi$.

Предварительное замечание. Ясно, что, обратно, каждое вещественное число Ξ порождает точно два таких разбиения: одно — с совокупностью чисел $H \leqslant \Xi$ в качестве первого и $H > \Xi$ в качестве второго класса, и второе — с совокупностью чисел $H < \Xi$ в качестве первого и $H \geqslant \Xi$ в качестве второго класса.

Доказательство. А) Больше одного такого числа Ξ существовать не может. Действительно, если бы два различных числа Ξ_1 и Ξ_2,

$$\Xi_1 < \Xi_2,$$

обладали утверждаемым свойством, то $\frac{\Xi_1 + \Xi_2}{1+1}$, в силу

$$(1+1)\Xi_1 = \Xi_1 + \Xi_1 < \Xi_1 + \Xi_2 < \Xi_2 + \Xi_2 = (1+1)\Xi_2,$$

$$\Xi_1 < \frac{\Xi_1 + \Xi_2}{1+1} < \Xi_2,$$

должно было бы принадлежать как первому, так и второму классу.

В) При доказательстве существования требуемого числа мы будем различать четыре случая.

I) В первом классе содержится положительное число.

Рассмотрим сечение, порождаемое следующим образом: положительное рациональное число входит в нижний класс, если оно принадлежит первому классу, не являясь там наибольшим рациональным числом; в противном же случае (т. е. если оно является наибольшим рациональным числом первого класса или принадлежит второму классу), данное положительное рациональное число относится к верхнему классу. Это — действительно сечение. В самом деле:

1) Так как первый класс содержит положительное число, то он содержит и каждое меньшее положительное рациональное число (такие существуют по теореме 158) и, в частности, такое, которое в первом классе не является наибольшим. Таким образом, нижний класс не пуст.

Так как второй класс содержит некоторое число, то он содержит и каждое большее положительное рациональное число (такие существуют по теореме 158). Таким образом, и верхний класс не пуст.

2) Каждое число нижнего класса меньше каждого числа верхнего класса; действительно, каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса, а возможное наибольшее положительное рациональное число первого класса, во всяком случае, больше каждого числа нижнего класса.

3) В нижнем классе нет наибольшего положительного рационального числа. Действительно, либо уже первый класс не содержит такого числа; либо первый класс содержит такое число, но тогда оно отнесено нами в верхний класс, а среди положительных рациональных чисел, меньших заданного, в силу теоремы 91, не существует наибольшего.

Определяемое нашим сечением положительное число мы обозначаем Ξ и утверждаем, что оно удовлетворяет поставленным условиям.

a) Пусть

$$H < \Xi.$$

Выберем, по теореме 159 (с $\xi = H$, $\eta = \Xi$ при $H > 0$ и с $\xi = \frac{\Xi}{1+1}$, $\eta = \Xi$ при $H \leqslant 0$), число Z такое, чтобы

$$H < Z < \Xi.$$

Тогда Z есть нижнее число относительно Ξ и, следовательно, принадлежит первому классу; поэтому и H принадлежит первому классу.

b) Пусть

$$H > \Xi.$$

Выберем, по теореме 159, число Z такое, чтобы

$$\Xi < Z < H.$$

Тогда Z есть верхнее число относительно Ξ, притом (по теореме 159) не наименьшее, и, следовательно, принадлежит второму классу; поэтому и H принадлежит второму классу.

II) Каждое положительное число лежит во втором классе; 0 лежит в первом классе.

Тогда каждое отрицательное число лежит в первом классе, и требуемыми свойствами обладает

$$\Xi = 0.$$

III) 0 лежит во втором классе; каждое отрицательное число лежит в первом классе.

Тогда каждое положительное число лежит во втором классе, и требуемыми свойствами обладает снова

$$\Xi = 0.$$

IV) Во втором классе содержится отрицательное число.

Рассмотрим тогда следующее новое разбиение:

H лежит в новом первом классе, если $-\mathrm{H}$ лежало в старом втором классе;

H лежит в новом втором классе, если $-\mathrm{H}$ лежало в старом первом классе.

Это разбиение, очевидно, удовлетворяет обоим условиям теоремы 205. Действительно:

1) оба класса не пусты;

2) из

$$\mathrm{H}_1 < \mathrm{H}_2,$$

по теореме 183, следует

$$-\mathrm{H}_2 < -\mathrm{H}_1.$$

Кроме того, новое разбиение подпадает под случай I), так как в новом первом классе содержится положительное число. Следовательно, согласно доказанному в I), существует число Ξ_1 такое, что каждое

$$\mathrm{H} < \Xi_1$$

лежит в новом первом классе, а каждое

$$\mathrm{H} > \Xi_1$$

— в новом втором. Положим

$$-\Xi_1 = \Xi.$$

Тогда из

$$\mathrm{H} < \Xi, \text{ соотв. } \mathrm{H} > \Xi,$$

следует, что

$$-\mathrm{H} > \Xi_1, \text{ соотв. } -\mathrm{H} < \Xi_1,$$

т. е. что $-\mathrm{H}$ лежит в новом втором, соответственно новом первом классе, и, значит, H — в старом первом, соответственно старом втором классе.

Глава 5

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Определение 57. *Комплексное число есть пара вещественных чисел* Ξ_1, Ξ_2 (взятых в определенном порядке). *Мы будем обозначать комплексное число символом* $[\Xi_1, \Xi_2]$. *При этом* $[\Xi_1, \Xi_2]$ *и* $[\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2]$ *считаются одним и тем же числом* (*равными*; пишем: $=$) *тогда, когда*

$$\Xi_1 = \mathrm{H}_1, \ \Xi_2 = \mathrm{H}_2;$$

в противном же случае — неравными (различными; пишем: $\neq$).

Строчные готические буквы будут всюду обозначать комплексные числа.

Таким образом, для каждых двух $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ имеет место один и только один из случаев

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}, \ \mathfrak{x} \neq \mathfrak{y}.$$

Для комплексных чисел понятия тождества и равенства сливаются, так что следующие три теоремы тривиальны:

Теорема 206. $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$.

Теорема 207. *Из*

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$$

следует

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}.$$

Теорема 208. *Из*

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}, \ \mathfrak{y} = \mathfrak{z}$$

следует

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{z}.$$

Определение 58. $\mathfrak{n} = [0, 0]$.

Определение 59. $\mathfrak{e} = [1, 0]$.

9 Зак. 749. Э. Ландау.

Таким образом буквы $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{e}$ сохраняются для вполне определенных комплексных чисел.

§ 2. СЛОЖЕНИЕ

Определение 60. *Пусть*

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1, \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [H_1, H_2].$$

Тогда

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = [\Xi_1 + H_1, \Xi_2 + H_2].$$

($+$ читается: плюс.) $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ *называется суммой* $\mathfrak{x}$ *и* $\mathfrak{y}$ *или* (комплексным) *числом, получающимся путем прибавления* $\mathfrak{y}$ *к* $\mathfrak{x}$.

Теорема 209 (закон коммутативности сложения).

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \mathfrak{y} + \mathfrak{x}.$$

Доказательство.

$$[\Xi_1 + H_1, \Xi_2 + H_2] = [H_1 + \Xi_1, H_2 + \Xi_2].$$

Теорема 210. $\mathfrak{x} + \mathfrak{n} = \mathfrak{x}.$

Доказательство.

$$[\Xi_1, \Xi_2] + [0, 0] = [\Xi_1 + 0, \Xi_2 + 0] = [\Xi_1, \Xi_2].$$

Теорема 211 (закон ассоциативности сложения).

$$(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) + \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + (\mathfrak{y} + \mathfrak{z}).$$

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1, \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [H_1, H_2], \quad \mathfrak{z} = [Z_1, Z_2];$$

тогда, по теореме 186,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) + \mathfrak{z} = {} & [\Xi_1 + H_1, \Xi_2 + H_2] + [Z_1, Z_2] = \\ & = [(\Xi_1 + H_1) + Z_1, (\Xi_2 + H_2) + Z_2] = \\ & = [\Xi_1 + (H_1 + Z_1), \Xi_2 + (H_2 + Z_2)] = \\ & = [\Xi_1, \Xi_2] + [H_1 + Z_1, H_2 + Z_2] = \mathfrak{x} + (\mathfrak{y} + \mathfrak{z}).\end{aligned}$$

Теорема 212. *При заданных* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ *уравнение*

$$\mathfrak{y}+\mathfrak{u}=\mathfrak{x}$$

имеет точно одно решение $\mathfrak{u}$, *а именно, если*

$$\mathfrak{x}=[\Xi_1,\ \Xi_2],\ \mathfrak{y}=[\mathrm{H}_1,\ \mathrm{H}_2],$$

то

$$\mathfrak{u}=[\Xi_1-\mathrm{H}_1,\ \ \Xi_2-\mathrm{H}_2].$$

Доказательство. Для каждого

$$\mathfrak{u}=[\Upsilon_1,\Upsilon_2]$$

имеем:

$$\mathfrak{y}+\mathfrak{u}=[\mathrm{H}_1+\Upsilon_1,\ \mathrm{H}_2+\Upsilon_2],$$

и требование состоит в том, чтобы

$$\mathrm{H}_1+\Upsilon_1=\Xi_1,\ \mathrm{H}_2+\Upsilon_2=\Xi_2.$$

Тем самым доказательство доставляется теоремой 187.

Определение 61. *Число* $\mathfrak{u}$ *из теоремы* 212 *обозначается* $\mathfrak{x}-\mathfrak{y}$ (— читается: минус) *и называется разностью* $\mathfrak{x}$ *минус* $\mathfrak{y}$ *или числом, получающимся путем вычитания* $\mathfrak{y}$ *из* $\mathfrak{x}$.

Теорема 213. $$\mathfrak{x}-\mathfrak{y}=\mathfrak{n}$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{y}.$$

Доказательство.

$$\Xi_1-\mathrm{H}_1=\Xi_2-\mathrm{H}_2=0$$

тогда и только тогда, когда

$$\Xi_1=\mathrm{H}_1,\ \Xi_2=\mathrm{H}_2.$$

Определение 62. $$-\mathfrak{x}=\mathfrak{n}-\mathfrak{x}.$$
(— слева читается: минус.)

Теорема 214. *Если*

$$\mathfrak{x}=[\Xi_1,\ \Xi_2],$$

то

$$-\mathfrak{x}=[-\Xi_1,\ -\Xi_2].$$

Доказательство. $-[\Xi_1, \Xi_2]=[0, 0]-[\Xi_1, \Xi_2]= =[0-\Xi_1,\ 0-\Xi_2]=[-\Xi_1,\ -\Xi_2]$.

Теорема 215. $$-(-\mathfrak{x})=\mathfrak{x}.$$

Доказательство. По теореме 177,

$$-(-\Xi_1)=\Xi_1,\quad -(-\Xi_2)=\Xi_2.$$

Теорема 216. $$\mathfrak{x}+(-\mathfrak{x})=\mathfrak{n}.$$

Доказательство. По теореме 179,

$$\Xi_1+(-\Xi_1)=0,\quad \Xi_2+(-\Xi_2)=0.$$

Теорема 217. $$-(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})=-\mathfrak{x}+(-\mathfrak{y}).$$

Доказательство. По теореме 180, полагая

$$\mathfrak{x}=[\Xi_1,\ \Xi_2],\quad \mathfrak{y}=[H_1,\ H_2],$$

имеем:

$$-(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})=[-(\Xi_1+H_1),\ -(\Xi_2+H_2)]= =[-\Xi_1+(-H_1),\ -\Xi_2+(-H_2)]= =[-\Xi_1, -\Xi_2]+[-H_1,\ -H_2]=-\mathfrak{x}+(-\mathfrak{y}).$$

Теорема 218. $$\mathfrak{x}-\mathfrak{y}=\mathfrak{x}+(-\mathfrak{y}).$$

Доказательство.

$$[\Xi_1-H_1,\ \Xi_2-H_2]=[\Xi_1,\ \Xi_2]+[-H_1,\ -H_2].$$

Теорема 219. $$-(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})=\mathfrak{y}-\mathfrak{x}.$$

Доказательство.

$$-(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})=-(\mathfrak{x}+(-\mathfrak{y}))=-\mathfrak{x}+(-(-\mathfrak{y}))= =-\mathfrak{x}+\mathfrak{y}=\mathfrak{y}+(-\mathfrak{x})=\mathfrak{y}-\mathfrak{x}.$$

§ 3. УМНОЖЕНИЕ

Определение 63. *Пусть*

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1, \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2].$$

Тогда

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = [\Xi_1\mathrm{H}_1 - \Xi_2\mathrm{H}_2, \Xi_1\mathrm{H}_2 + \Xi_2\mathrm{H}_1].$$

($\cdot$ читается: раз; впрочем, точку большей частью не пишут.) $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}$ *называется произведением* $\mathfrak{x}$ *на* $\mathfrak{y}$ *или числом, получающимся путем умножения* $\mathfrak{x}$ *на* $\mathfrak{y}$.

Теорема 220 (закон коммутативности умножения).

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\mathfrak{x}.$$

Доказательство.

$$[\Xi_1, \Xi_2][\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2] = [\Xi_1\mathrm{H}_1 - \Xi_2\mathrm{H}_2, \Xi_1\mathrm{H}_2 + \Xi_2\mathrm{H}_1] =$$
$$= [\mathrm{H}_1\Xi_1 - \mathrm{H}_2\Xi_2, \mathrm{H}_1\Xi_2 + \mathrm{H}_2\Xi_1] = [\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2][\Xi_1, \Xi_2].$$

Теорема 221. $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{n}$ *тогда и только тогда, когда, по крайней мере, одно из чисел* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ *равно* $\mathfrak{n}$.

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1, \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2].$$

1) Из

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{n}$$

следует

$$\Xi_1 = \Xi_2 = 0,$$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = [0 \cdot \mathrm{H}_1 - 0 \cdot \mathrm{H}_2, 0 \cdot \mathrm{H}_2 + 0 \cdot \mathrm{H}_1] = [0, 0] = \mathfrak{n}.$$

2) Из

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{n},$$

в силу теоремы 220 и 1), следует

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{y}\mathfrak{x} = \mathfrak{n}\mathfrak{x} = \mathfrak{n}.$$

3) Из

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{n}$$

нам нужно вывести, что

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{n} \text{ или } \mathfrak{y} = \mathfrak{n}.$$

Мы можем поэтому предположить, что

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n},$$

т. е.

$$H_1H_1 + H_2H_2 > 0,$$

и должны доказать, что тогда

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{n},$$

т. е.

$$\Xi_1 = \Xi_2 = 0.$$

По предположению,

$$\Xi_1H_1 - \Xi_2H_2 = 0 = \Xi_1H_2 + \Xi_2H_1,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= (\Xi_1H_1 - \Xi_2H_2)H_1 + (\Xi_1H_2 + \Xi_2H_1)H_2 = \\ &= \big((\Xi_1H_1)H_1 - (\Xi_2H_2)H_1\big) + \big((\Xi_1H_2)H_2 + (\Xi_2H_1)H_2\big) = \\ &= \big(\Xi_1(H_1H_1) - \Xi_2(H_2H_1)\big) + \big(\Xi_1(H_2H_2) + \Xi_2(H_1H_2)\big) = \\ &= \big((\Xi_1(H_1H_1) - \Xi_2(H_1H_2)\big) + \Xi_2(H_1H_2)\big) + \Xi_1(H_2H_2) = \\ &= \Xi_1(H_1H_1) + \Xi_1(H_2H_2) = \Xi_1(H_1H_1 + H_2H_2) \end{aligned}$$

и, значит,

$$\Xi_1 = 0,$$

$$\Xi_2H_2 = 0 = \Xi_2H_1.$$

Так как хотя бы одно из чисел H_1 и H_2 отлично от нуля, то заключаем, что и

$$\Xi_2 = 0.$$

Теорема 222. $\mathfrak{x}\mathfrak{e} = \mathfrak{x}.$

Доказательство.

$$[\Xi_1, \Xi_2][1, 0] = [\Xi_1 \cdot 1 - \Xi_2 \cdot 0, \Xi_1 \cdot 0 + \Xi_2 \cdot 1] = [\Xi_1, \Xi_2].$$

Теорема 223.

$$\mathfrak{x}(-\mathfrak{e}) = -\mathfrak{x}.$$

Доказательство.

$$[\Xi_1, \Xi_2]\,[-1, 0] = [\Xi_1(-1) - \Xi_2 \cdot 0, \Xi_1 \cdot 0 + \Xi_2(-1)] =$$
$$= [-\Xi_1, -\Xi_2].$$

Теорема 224.

$$(-\mathfrak{x})\,\mathfrak{y} = \mathfrak{x}\,(-\mathfrak{y}) = -(\mathfrak{x}\mathfrak{y}).$$

Доказательство. 1) Имеем:

$$[-\Xi_1, -\Xi_2][H_1, H_2] =$$
$$= [(-\Xi_1)H_1 - (-\Xi_2)H_2, (-\Xi_1)H_2 + (-\Xi_2)H_1] =$$
$$= [-(\Xi_1H_1) + \Xi_2H_2, -(\Xi_1H_2) - \Xi_2H_1] =$$
$$= [-(\Xi_1H_1 - \Xi_2H_2), -(\Xi_1H_2 + \Xi_2H_1)] =$$
$$= -([\Xi_1, \Xi_2]\,[H_1, H_2]),$$
$$(-\mathfrak{x})\,\mathfrak{y} = -(\mathfrak{x}\mathfrak{y}).$$

2) В силу 1),

$$\mathfrak{x}\,(-\mathfrak{y}) = (-\mathfrak{y})\,\mathfrak{x} = -(\mathfrak{y}\mathfrak{x}) = -(\mathfrak{x}\mathfrak{y}).$$

Теорема 225.

$$(-\mathfrak{x})\,(-\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}\mathfrak{y}.$$

Доказательство. По теореме 224,

$$(-\mathfrak{x})\,(-\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}\,(-(-\mathfrak{y})) = \mathfrak{x}\mathfrak{y}.$$

Теорема 226 (закон ассоциативности умножения).

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})\,\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\,(\mathfrak{y}\mathfrak{z}).$$

Доказательство. В этом доказательстве мы для лучшей обозримости, в виде исключения, будем пользоваться сокращенной записью

$$(\Xi + H) + Z = \Xi + H + Z,$$
$$(\Xi H)Z = \Xi H Z,$$

так что также

$$\Xi + (H + Z) = \Xi + H + Z,$$
$$\Xi\,(HZ) = \Xi H Z.$$

Пусть

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1, \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [H_1, H_2], \quad \mathfrak{z} = [Z_1, Z_2].$$

Тогда

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})\mathfrak{z} = [\Xi_1 H_1 - \Xi_2 H_2, \; \Xi_1 H_2 + \Xi_2 H_1]\,[Z_1, Z_2] =$$
$$= [(\Xi_1 H_1 - \Xi_2 H_2) Z_1 - (\Xi_1 H_2 + \Xi_2 H_1) Z_2,$$
$$(\Xi_1 H_1 - \Xi_2 H_2) Z_2 + (\Xi_1 H_2 + \Xi_2 H_1) Z_1] =$$
$$= [(\Xi_1 H_1 Z_1 - \Xi_2 H_2 Z_1) - (\Xi_1 H_2 Z_2 + \Xi_2 H_1 Z_2),$$
$$(\Xi_1 H_1 Z_2 - \Xi_2 H_2 Z_2) + (\Xi_1 H_2 Z_1 + \Xi_2 H_1 Z_1)] =$$
$$= [(\Xi_1 H_1 Z_1 + (-(\Xi_2 H_2 Z_1))) + (-(\Xi_1 H_2 Z_2 + \Xi_2 H_1 Z_2)),$$
$$(\Xi_1 H_2 Z_1 + \Xi_2 H_1 Z_1) + (\Xi_1 H_1 Z_2 + (-(\Xi_2 H_2 Z_2)))] =$$
$$= [\Xi_1 H_1 Z_1 - (\Xi_2 H_2 Z_1 + \Xi_1 H_2 Z_2 + \Xi_2 H_1 Z_2),$$
$$(\Xi_1 H_2 Z_1 + \Xi_2 H_1 Z_1 + \Xi_1 H_1 Z_2) - \Xi_2 H_2 Z_2].$$

Так как

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = (\mathfrak{y}\mathfrak{z})\mathfrak{x},$$

то перестановкой букв (H вместо Ξ, Z вместо H, Ξ вместо Z) получаем отсюда

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = [H_1 Z_1 \Xi_1 - (H_2 Z_2 \Xi_1 + H_1 Z_2 \Xi_2 + H_2 Z_1 \Xi_2),$$
$$(H_1 Z_2 \Xi_1 + H_2 Z_1 \Xi_1 + H_1 Z_1 \Xi_2) - H_2 Z_2 \Xi_2].$$

Принимая во внимание соотношения

$$\Xi H Z = \Xi(HZ) = (HZ)\Xi = HZ\Xi,$$

$$A + B + \Gamma = A + (B + \Gamma) = (B + \Gamma) + A = B + \Gamma + A,$$

заключаем из сопоставления вычисленных выражений, что

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})\mathfrak{z} = \mathfrak{x}(\mathfrak{y}\mathfrak{z}).$$

Теорема 227 (закон дистрибутивности).

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = \mathfrak{x}\mathfrak{y} + \mathfrak{x}\mathfrak{z}.$$

Доказательство.

$$[\Xi_1, \Xi_2]([H_1, H_2]+[Z_1, Z_2])=[\Xi_1, \Xi_2][H_1+Z_1, H_2+Z_2]=$$
$$=[\Xi_1(H_1+Z_1)-\Xi_2(H_2+Z_2), \Xi_1(H_2+Z_2)+\Xi_2(H_1+Z_1)]=$$
$$=[(\Xi_1H_1+\Xi_1Z_1)+(-(\Xi_2H_2)+(-(\Xi_2Z_2))),$$
$$(\Xi_1H_2+\Xi_1Z_2)+(\Xi_2H_1+\Xi_2Z_1)]=$$
$$=[(\Xi_1H_1-\Xi_2H_2)+(\Xi_1Z_1-\Xi_2Z_2),$$
$$(\Xi_1H_2+\Xi_2H_1)+(\Xi_1Z_2+\Xi_2Z_1)]=$$
$$=[\Xi_1H_1-\Xi_2H_2, \Xi_1H_2+\Xi_2H_1]+$$
$$+[\Xi_1Z_1-\Xi_2Z_2, \Xi_1Z_2+\Xi_2Z_1]=$$
$$=[\Xi_1, \Xi_2][H_1, H_2]+[\Xi_1, \Xi_2][Z_1, Z_2].$$

Теорема 228. $\mathfrak{x}(\mathfrak{y}-\mathfrak{z})=\mathfrak{x}\mathfrak{y}-\mathfrak{x}\mathfrak{z}.$

Доказательство.

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{y}-\mathfrak{z})=\mathfrak{x}(\mathfrak{y}+(-\mathfrak{z}))=\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{x}(-\mathfrak{z})=$$
$$=\mathfrak{x}\mathfrak{y}+(-(\mathfrak{x}\mathfrak{z}))=\mathfrak{x}\mathfrak{y}-\mathfrak{x}\mathfrak{z}.$$

Теорема 229. *Уравнение*

$$\mathfrak{y}\mathfrak{u}=\mathfrak{x},$$

где $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ *заданы и*

$$\mathfrak{y}\neq\mathfrak{n},$$

имеет точно одно решение $\mathfrak{u}$.

Доказательство. 1) Существует, самое большее, одно решение. Действительно, из

$$\mathfrak{y}\mathfrak{u}_1=\mathfrak{x}=\mathfrak{y}\mathfrak{u}_2$$

следует

$$\mathfrak{n}=\mathfrak{y}\mathfrak{u}_1-\mathfrak{y}\mathfrak{u}_2=\mathfrak{y}(\mathfrak{u}_1-\mathfrak{u}_2),$$

откуда, по теореме 221,

$$\mathfrak{n}=\mathfrak{u}_1-\mathfrak{u}_2,$$
$$\mathfrak{u}_1=\mathfrak{u}_2.$$

2) Если

$$\mathfrak{y} = [H_1, H_2],$$

то

$$H = H_1 H_1 + H_2 H_2 > 0,$$

и

$$\mathfrak{u} = \left[\frac{H_1}{H}, \; -\frac{H_2}{H}\right]\mathfrak{x}$$

служит решением, так как

$$\mathfrak{y}\mathfrak{u} = \left([H_1, H_2]\left[\frac{H_1}{H}, -\frac{H_2}{H}\right]\right)\mathfrak{x} =$$

$$= \left[H_1 \frac{H_1}{H} + H_2 \frac{H_2}{H}, \; -\left(H_1 \frac{H_2}{H}\right) + H_2 \frac{H_1}{H}\right]\mathfrak{x} =$$

$$= \left[\frac{H_1 H_1 + H_2 H_2}{H}, \; \frac{-(H_1 H_2) + H_1 H_2}{H}\right]\mathfrak{x} =$$

$$= [1,0]\,\mathfrak{x} = \mathfrak{e}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}.$$

Определение 64. *Число* $\mathfrak{u}$ *из теоремы* 229 *обозначается* $\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$ (читается: $\mathfrak{x}$ на $\mathfrak{y}$) *и называется частным* $\mathfrak{x}$ *по* $\mathfrak{y}$ *или числом, получающимся путем деления* $\mathfrak{x}$ *на* $\mathfrak{y}$.

§ 4. ВЫЧИТАНИЕ

Теорема 230. $(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) + \mathfrak{y} = \mathfrak{x}.$

Доказательство.

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) + \mathfrak{y} = \mathfrak{y} + (\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) = \mathfrak{x}.$$

Теорема 231. $(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) - \mathfrak{y} = \mathfrak{x}.$

Доказательство.

$$\mathfrak{y} + \mathfrak{x} = \mathfrak{x} + \mathfrak{y}.$$

Теорема 232. $\mathfrak{x} - (\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) = \mathfrak{y}.$

Доказательство.

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{y}=\mathfrak{x}.$$

Теорема 233.

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-\mathfrak{z}=\mathfrak{x}-(\mathfrak{y}+\mathfrak{z}).$$

Доказательство.

$$(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-\mathfrak{z})=((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-\mathfrak{z})+(\mathfrak{z}+\mathfrak{y})=$$
$$=(((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-\mathfrak{z})+\mathfrak{z})+\mathfrak{y}=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{y}=\mathfrak{x}.$$

Теорема 234.

$$(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})-\mathfrak{z}=\mathfrak{x}+(\mathfrak{y}-\mathfrak{z}).$$

Доказательство.

$$(\mathfrak{x}+(\mathfrak{y}-\mathfrak{z}))+\mathfrak{z}=\mathfrak{x}+((\mathfrak{y}-\mathfrak{z})+\mathfrak{z})=\mathfrak{x}+\mathfrak{y}.$$

Теорема 235.

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{z}=\mathfrak{x}-(\mathfrak{y}-\mathfrak{z}).$$

Доказательство.

$$((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{z})+(\mathfrak{y}-\mathfrak{z})=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+(\mathfrak{z}+(\mathfrak{y}-\mathfrak{z}))=$$
$$=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{y}=\mathfrak{x}.$$

Теорема 236.

$$(\mathfrak{x}+\mathfrak{z})-(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})=\mathfrak{x}-\mathfrak{y}.$$

Доказательство.

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})=((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{y})+\mathfrak{z}=\mathfrak{x}+\mathfrak{z}.$$

Теорема 237.

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+(\mathfrak{z}-\mathfrak{u})=(\mathfrak{x}+\mathfrak{z})-(\mathfrak{y}+\mathfrak{u}).$$

Доказательство.

$$((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+(\mathfrak{z}-\mathfrak{u}))+(\mathfrak{y}+\mathfrak{u})=$$
$$=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+((\mathfrak{z}-\mathfrak{u})+(\mathfrak{u}+\mathfrak{y}))=$$
$$=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+(((\mathfrak{z}-\mathfrak{u})+\mathfrak{u})+\mathfrak{y})=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+(\mathfrak{z}+\mathfrak{y})=$$
$$=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})=((\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\mathfrak{y})+\mathfrak{z}=\mathfrak{x}+\mathfrak{z}.$$

Теорема 238.

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-(\mathfrak{z}-\mathfrak{u})=(\mathfrak{x}+\mathfrak{u})-(\mathfrak{y}+\mathfrak{z}).$$

Доказательство. В силу теоремы 237 и 236, имеем:

$$((\mathfrak{x}+\mathfrak{u})-(\mathfrak{y}+\mathfrak{z}))+(\mathfrak{z}-\mathfrak{u})=$$
$$=((\mathfrak{x}+\mathfrak{u})+\mathfrak{z})-((\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+\mathfrak{u})=$$
$$=(\mathfrak{x}+(\mathfrak{u}+\mathfrak{z}))-(\mathfrak{y}+(\mathfrak{z}+\mathfrak{u}))=\mathfrak{x}-\mathfrak{y}.$$

Теорема 239. $\quad \mathfrak{x}-\mathfrak{y}=\mathfrak{z}-\mathfrak{u}$

тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{x}+\mathfrak{u}=\mathfrak{y}+\mathfrak{z}.$$

Доказательство: теоремы 213 и 238.

§ 5. ДЕЛЕНИЕ

Теорема 240. *Если*

$$\mathfrak{y}\neq\mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}=\mathfrak{x}.$$

Доказательство.

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}=\mathfrak{y}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}=\mathfrak{x}.$$

Теорема 241. *Если*

$$\mathfrak{y}\neq\mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}}=\mathfrak{x}.$$

Доказательство. $\quad \mathfrak{y}\mathfrak{x}=\mathfrak{x}\mathfrak{y}.$

Теорема 242. *Если*

$$\mathfrak{x}\neq\mathfrak{n},\ \mathfrak{y}\neq\mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}}{\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}} = \mathfrak{y}.$$

Доказательство.

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{y} = \mathfrak{x}.$$

Теорема 243. *Если*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{z} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}}{\mathfrak{z}} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}.$$

Доказательство.

$$(\mathfrak{y}\mathfrak{z})\frac{\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}}{\mathfrak{z}} = \frac{\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}}{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}\mathfrak{y}) = \left(\frac{\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}}{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}\right)\mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{y} = \mathfrak{x}.$$

Теорема 244. *Если*

$$\mathfrak{z} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}} = \mathfrak{x}\,\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}}.$$

Доказательство.

$$\left(\mathfrak{x}\,\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}}\right)\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}\right) = \mathfrak{x}\mathfrak{y}.$$

Теорема 245. *Если*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{z} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{x}}{\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}}}.$$

Доказательство.

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{z}\right)\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\left(\mathfrak{z}\,\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}}\right) = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{y} = \mathfrak{x}.$$

Теорема 246. *Если*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{z} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}.$$

Доказательство.

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = \left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}\right)\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\mathfrak{z}.$$

Теорема 247. *Если*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{u} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} \cdot \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}}.$$

Доказательство.

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} \cdot \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}\right)(\mathfrak{y}\mathfrak{u}) = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}(\mathfrak{u}\mathfrak{y})\right) = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\left(\left(\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}\mathfrak{u}\right)\mathfrak{y}\right) =$$

$$= \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}(\mathfrak{z}\mathfrak{y}) = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = \left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}\right)\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\mathfrak{z}.$$

Теорема 248. *Если*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{z} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{u} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\;\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\;}{\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}.$$

Доказательство. В силу теорем 247 и 246, имеем:

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} \cdot \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}} = \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{u})\mathfrak{z}}{(\mathfrak{y}\mathfrak{z})\mathfrak{u}} = \frac{\mathfrak{x}(\mathfrak{u}\mathfrak{z})}{\mathfrak{y}(\mathfrak{z}\mathfrak{u})} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}.$$

Теорема 249. *Если*

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{x}} = \mathfrak{n}.$$

Доказательство. $\mathfrak{x}\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$.

Теорема 250. *Если*

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}} = \mathfrak{e}.$$

Доказательство. $\mathfrak{x}\mathfrak{e} = \mathfrak{x}$.

Теорема 251. *Если*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = \mathfrak{e}$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}.$$

Доказательство. 1) Если

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y},$$

то, по теореме 250,

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}} = \mathfrak{e}.$$

2) Если

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = \mathfrak{e},$$

то, по теореме 222,

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}\mathfrak{e} = \mathfrak{y}.$$

Теорема 252. *Если*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{u} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{x}\mathfrak{u} = \mathfrak{y}\mathfrak{z}.$$

Доказательство. При

$$\mathfrak{z}=\mathfrak{u}$$

утверждение очевидно.

Если же $\mathfrak{z}\neq\mathfrak{u}$, то, по теореме 248,

$$\frac{\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}}{\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}}=\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}},$$

так что утверждение следует из теоремы 251.

Теорема 253. *Если*

$$\mathfrak{y}\neq\mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}+\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}=\frac{\mathfrak{x}+\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}.$$

Доказательство.

$$\mathfrak{y}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}+\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}\right)=\mathfrak{y}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}+\mathfrak{y}\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}=\mathfrak{x}+\mathfrak{z}.$$

Теорема 254. *Если*

$$\mathfrak{y}\neq\mathfrak{n},\quad \mathfrak{u}\neq\mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}+\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}=\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}+\mathfrak{y}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}}.$$

Доказательство. В силу теорем 246 и 253, имеем:

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}+\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}=\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}}+\frac{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}}=\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}+\mathfrak{y}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}}.$$

Теорема 255. *Если*

$$\mathfrak{y}\neq\mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}-\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}=\frac{\mathfrak{x}-\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}.$$

Доказательство.

$$\mathfrak{y}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}-\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}\right)=\mathfrak{y}\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}-\mathfrak{y}\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}}=\mathfrak{x}-\mathfrak{z}.$$

Теорема 256. *Если*

$$\mathfrak{y}\neq\mathfrak{n},\quad \mathfrak{u}\neq\mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}-\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}=\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}-\mathfrak{y}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}}.$$

Доказательство. В силу теорем 246 и 255, имеем:

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}-\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{u}}=\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}}-\frac{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}}=\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}-\mathfrak{y}\mathfrak{z}}{\mathfrak{y}\mathfrak{u}}.$$

§ 6. СОПРЯЖЕННЫЕ ЧИСЛА

Определение 65. *Число*

$$\overline{\mathfrak{x}}=[\Xi_1,-\Xi_2]$$

называется комплексно сопряженным с числом

$$\mathfrak{x}=[\Xi_1,\ \Xi_2].$$

Теорема 257. $\overline{\overline{\mathfrak{x}}}=\mathfrak{x}.$

Доказательство.

$$[\Xi_1,-(-\Xi_2)]=[\Xi_1,\ \Xi_2].$$

Теорема 258. $\overline{\mathfrak{x}}=\mathfrak{n}$

тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{n}.$$

Доказательство. Равенства

$$\Xi_1=0,\quad -\Xi_2=0$$

10 Зак. 749. Э. Ландау.

Но

$$(((u+1)-y)+n)+y=((u+1)-y)+(y+n)=$$
$$=(((u+1)-y)+y)+n=n+(u+1),$$

следовательно, по определению 70,

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n)=\mathop{\mathfrak{S}}_{n=y}^{u} \mathfrak{f}(n) \dotplus \mathop{\mathfrak{S}}_{n=1}^{(x+1)-(u+1)} \mathfrak{f}((n+(u+1))-1)=$$
$$=\mathop{\mathfrak{S}}_{n=y}^{u} \mathfrak{f}(n) \dotplus \mathop{\mathfrak{S}}_{n=u+1}^{x} \mathfrak{f}(n).$$

Теорема 285. *Пусть*

$$y \leqslant x$$

и $\mathfrak{f}(n)$ *определено при*

$$y \leqslant n \leqslant x.$$

Тогда

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n)=\mathop{\mathfrak{S}}_{n=y+v}^{x+v} \mathfrak{f}(n-v).$$

Доказательство. Согласно определению 70, левая часть утверждаемого равенства

$$=\mathop{\mathfrak{S}}_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}((n+y)-1),$$

а правая (принимая во внимание, что $y \leqslant n-v \leqslant x$ при $y+v \leqslant n \leqslant x+v$)

$$=\mathop{\mathfrak{S}}_{n=1}^{((x+v)+1)-(y+v)} \mathfrak{f}(((n+(y+v))-1)-v);$$

но здесь

$$((x+v)+1)-(y+v)=(1+(x+v))+((-v)+(-y))=$$
$$=(1+((x+v)+(-v)))+(-y)=$$
$$=(1+x)-y=(x+1)-y$$

и

$$((n+(y+v))-1)-v=(n+(y+v))-(1+v)=$$
$$=((n+y)+v)+(-v+(-1))=$$
$$=(((n+y)+v)+(-v))+(-1)=$$
$$=((n+y)+(v+(-v)))-1=(n+y)-1.$$

Теорема 286. *Пусть*

$$y \leqslant x,$$

$\mathfrak{f}(n)$ *определено при*

$$y \leqslant n \leqslant x$$

и $s(n)$ *отображает числа* n, *для которых* $y \leqslant n \leqslant x$, *на числа* m, *для которых* $y \leqslant m \leqslant x$. *Тогда*

$$\sum_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(s(n)) = \sum_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n).$$

Доказательство.

$$s_1(n) = s((n+y)-1)-(y-1)$$

отображает положительные $n \leqslant (x+1)-y$ на положительные $m \leqslant (x+1)-y$. Поэтому, в силу теоремы 283,

$$\sum_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(s(n)) = \sum_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}(s((n+y)-1)) =$$
$$= \sum_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}(s_1(n)+(y-1)) = \sum_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}(n+(y-1)) =$$
$$= \sum_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}((n+y)-1) = \sum_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n).$$

Обычно вместо

$$\sum_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n)$$

пользуются также небрежной записью

$$\mathfrak{f}(y)+\mathfrak{f}(y+1)+\ldots+\mathfrak{f}(x)$$

Определение 68.

$$|[\Xi_1, \Xi_2]| = \sqrt{\Xi_1\Xi_1 + \Xi_2\Xi_2}.$$

(| | читается: абсолютное значение.)

Теорема 264.

$$|\mathfrak{x}| \begin{cases} > 0 \text{ } \textit{при} \text{ } \mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}, \\ = 0 \text{ } \textit{при} \text{ } \mathfrak{x} = \mathfrak{n}. \end{cases}$$

Доказательство: определения 68, 66 и 67.

Теорема 265.

$$|[\Xi_1, \Xi_2]| \geqslant |\Xi_1|,$$
$$|[\Xi_1, \Xi_2]| \geqslant |\Xi_2|.$$

Доказательство.

$$|[\Xi_1, \Xi_2]|\,|[\Xi_1, \Xi_2]| =$$
$$= \Xi_1\Xi_1 + \Xi_2\Xi_2 \begin{cases} \geqslant \Xi_1\Xi_1 = |\Xi_1|\,|\Xi_1|, \\ \geqslant \Xi_2\Xi_2 = |\Xi_2|\,|\Xi_2|. \end{cases}$$

Но из

$$\Xi\Xi \geqslant \mathrm{H}\mathrm{H}, \quad \Xi \geqslant 0, \quad \mathrm{H} \geqslant 0$$

следует

$$\Xi \geqslant \mathrm{H},$$

так как в противном случае мы имели бы

$$0 < \Xi < \mathrm{H},$$
$$\Xi\Xi < \mathrm{H}\mathrm{H}.$$

Тем самым теорема 265 доказана.

Теорема 266. *Из*

$$[\Xi, 0]\,[\Xi, 0] = [\mathrm{H}, 0]\,[\mathrm{H}, 0], \quad \Xi \geqslant 0, \quad \mathrm{H} \geqslant 0$$

следует

$$\Xi = \mathrm{H}.$$

Доказательство. Так как

$$[Z, 0]\,[Z, 0] = [ZZ - 0 \cdot 0,\ Z \cdot 0 + 0 \cdot Z] = [ZZ, 0],$$

то, в силу предположения,

$$[\Xi\Xi, 0] = [\mathrm{H}\mathrm{H}, 0],$$
$$\Xi\Xi = \mathrm{H}\mathrm{H}.$$

Если

$$\Xi > 0,$$

то имеем

$$\mathrm{H}\mathrm{H} = \Xi\Xi > 0,$$
$$\mathrm{H} > 0,$$

и, следовательно, по теореме 161,

$$\Xi = \mathrm{H}.$$

Если

$$\Xi = 0,$$

то получаем

$$\mathrm{H}\mathrm{H} = \Xi\Xi = 0,$$
$$\mathrm{H} = 0 = \Xi.$$

Теорема 267.

$$[|\mathfrak{x}|, 0]\,[|\mathfrak{x}|, 0] = \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}}.$$

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1, \Xi_2].$$

Имеем:

$$[|\mathfrak{x}|, 0]\,[|\mathfrak{x}|, 0] = [|\mathfrak{x}|\,|\mathfrak{x}|, 0] = [\Xi_1\Xi_1 + \Xi_2\Xi_2, 0] =$$
$$= [\Xi_1\Xi_1 - \Xi_2(-\Xi_2), \Xi_1(-\Xi_2) + \Xi_2\Xi_1] =$$
$$= [\Xi_1, \Xi_2]\,[\Xi_1, -\Xi_2] = \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}}.$$

Теорема 268. $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}| = |\mathfrak{x}|\,|\mathfrak{y}|.$

Доказательство. В силу теорем 267 и 261, имеем:

$$[|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|, 0]\,[|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|, 0] = (\mathfrak{x}\mathfrak{y})\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = (\mathfrak{x}\mathfrak{y})\,(\overline{\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{y}}) = (\mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}})\,(\mathfrak{y}\overline{\mathfrak{y}}) =$$
$$= ([|\mathfrak{x}|, 0]\,[|\mathfrak{x}|, 0])\,([|\mathfrak{y}|, 0]\,[|\mathfrak{y}|, 0]) =$$
$$= ([|\mathfrak{x}|, 0]\,[|\mathfrak{y}|, 0])\,([|\mathfrak{x}|, 0]\,[|\mathfrak{y}|, 0]) =$$
$$= [|\mathfrak{x}|\,|\mathfrak{y}| - 0\cdot 0, |\mathfrak{x}|\cdot 0 + 0\cdot|\mathfrak{y}|]\,[|\mathfrak{x}|\,|\mathfrak{y}| - 0\cdot 0,$$
$$|\mathfrak{x}|\cdot 0 + 0\cdot|\mathfrak{y}|] =$$
$$= [|\mathfrak{x}|\,|\mathfrak{y}|, 0]\,[|\mathfrak{x}|\,|\mathfrak{y}|, 0],$$

и, следовательно, в силу теоремы 266,

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{y}| = |\mathfrak{x}|\,|\mathfrak{y}|.$$

Теорема 269. *Если*

$$\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\left|\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right| = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{y}|}.$$

Доказательство.

$$|\mathfrak{y}| > 0,$$

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{y} = \mathfrak{x},$$

следовательно, по теореме 268,

$$\left|\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right| |\mathfrak{y}| = |\mathfrak{x}|,$$

$$\left|\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right| = \frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{y}|}.$$

Теорема 270. *Из*

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \mathfrak{e}$$

следует

$$|\mathfrak{x}| + |\mathfrak{y}| \geqslant 1.$$

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{x} = [\Xi_1, \Xi_2], \quad \mathfrak{y} = [\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2]$$

По теореме 265, имеем:

$$|\mathfrak{x}| \geqslant |\Xi_1| \geqslant \Xi_1,$$

$$|\mathfrak{y}| \geqslant |\mathrm{H}_1| \geqslant \mathrm{H}_1$$

и, следовательно,

$$|\mathfrak{x}| + |\mathfrak{y}| \geqslant \Xi_1 + \mathrm{H}_1 = 1.$$

Теорема 271.

$$|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}| \leqslant |\mathfrak{x}| + |\mathfrak{y}|.$$

Доказательство. 1) Если

$$\mathfrak{x}+\mathfrak{y}=\mathfrak{n},$$

то левая часть утверждения равна 0 и, значит, $\leqslant$ правой.

2) Если

$$\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\neq\mathfrak{n}$$

то, в силу равенства

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}}+\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}}=\frac{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}}=\mathfrak{e},$$

по теореме 270, имеем:

$$\left|\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}}\right|+\left|\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}}\right|\geqslant 1$$

и, значит, по теореме 269,

$$\frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}|}+\frac{|\mathfrak{y}|}{|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}|}\geqslant 1,$$

$$|\mathfrak{x}|+|\mathfrak{y}|=|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}|\left(\frac{|\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}|}+\frac{|\mathfrak{y}|}{|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}|}\right)\geqslant|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}|.$$

Теорема 272.

$$|-\mathfrak{x}|=|\mathfrak{x}|.$$

Доказательство.

$$(-\Xi_1)(-\Xi_1)+(-\Xi_2)(-\Xi_2)=\Xi_1\Xi_1+\Xi_2\Xi_2.$$

Теорема 273.

$$|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|\geqslant||\mathfrak{x}|-|\mathfrak{y}||.$$

Доказательство. Так как

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{y}+(\mathfrak{x}-\mathfrak{y}),$$

то, по теореме 271,

$$|\mathfrak{x}|\leqslant|\mathfrak{y}|+|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|,$$

$$|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|\geqslant|\mathfrak{x}|-|\mathfrak{y}|.$$

Поменяв местами $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$, получаем также

$$|\mathfrak{y}-\mathfrak{x}| \geqslant |\mathfrak{y}|-|\mathfrak{x}|$$

и, значит, в силу теоремы 272,

$$|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}| = |-(\mathfrak{y}-\mathfrak{x})| = |\mathfrak{y}-\mathfrak{x}| \geqslant |\mathfrak{y}|-|\mathfrak{x}| = \\ = -(|\mathfrak{x}|-|\mathfrak{y}|).$$

Но из

$$\Xi \geqslant \mathrm{H}, \quad \Xi \geqslant -\mathrm{H},$$

поскольку $|\mathrm{H}|$ есть либо H, либо $-\mathrm{H}$, следует, что

$$\Xi \geqslant |\mathrm{H}|.$$

Поэтому

$$|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}| \geqslant ||\mathfrak{x}|-|\mathfrak{y}||.$$

§ 8. СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Теорема 274. *Если*

$$x < y,$$

то числа $m \leqslant x$ нельзя взаимно однозначно отобразить на числа $n \leqslant y$.

Под отображением я впредь в этом параграфе буду всегда понимать взаимно однозначное отображение.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество тех x, для которых утверждение теоремы верно при всех $y > x$.

I) Если

$$1 < y,$$

то $m = 1$ нельзя отобразить на множество чисел $n \leqslant y$. Действительно, если $m = 1$ соответствует числу $n = 1$, то для $n = y$ не остается никакого m, если же $m = 1$ соответствует некоторому $n > 1$, то для $n = 1$ не остается никакого m.

Таким образом, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть x принадлежит $\mathfrak{M}$ и

$$x + 1 < y.$$

Предположим, что имеется отображение чисел $m \leqslant x+1$ на числа $n \leqslant y$, и рассмотрим два возможных тогда случая.

α) Числу $m = x+1$ соответствует $n = y$. Тогда числа $m \leqslant x$ отображаются на числа $n \leqslant y-1$. Но это невозможно, так как

$$x < y - 1.$$

β) Числу $m = x+1$ отвечает некоторое $n = n_0 < y$. Пусть $m = m_0$ соответствует числу $n = y$, так что $m_0 < x+1$. Тогда мы можем ввести следующее видоизмененное отображение чисел $m \leqslant x+1$ на числа $n \leqslant y$:

$$\begin{cases} \text{при } m \neq m_0,\ m \neq x+1 \text{ сохраняется старое отображение,} \\ \text{числу } m = m_0 \text{ соответствует } n = n_0, \\ \text{числу } m = x+1 \text{ соответствует } n = y. \end{cases}$$

Но невозможность отображения такого типа уже была доказана в α).

Таким образом, $x+1$ также принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, и утверждение теоремы доказано.

Так как доказательства нижеследующих теорем 275—278 и 280—286 вместе с соответствующими определениями дословно совпадали бы для сумм и произведений, то, во избежание длинных повторений, мы вводим нейтральный символ $\dotplus$, означающий либо всюду $+$, либо всюду $\cdot$, и, пользуясь им, проводим рассуждения сразу и для сумм и для произведений. Соответственно этому и вводимый ниже временно символ $\mathbf{\Sigma\!\!\!\!\Pi}$ заменяет два символа ($\sum$ для $+$ и $\prod$ для $\cdot$).

Всюду в дальнейшем под „определено" я понимаю „определено как комплексное число".

Теорема 275. *Пусть x фиксировано и $\mathfrak{f}(n)$ определено для всех $n \leqslant x$. Тогда существует точно одно*

$$\mathfrak{g}_x(n)$$

(подробнее записывается

$$\mathfrak{g}_{x,\mathfrak{f}}(n),$$

сокращенно записывается

$$\mathfrak{g}(n)),$$

определенное для всех $n \leqslant x$ и обладающее следующими свойствами:

$$\mathfrak{g}_x(1) = \mathfrak{f}(1),$$

$$\mathfrak{g}_x(n+1) = \mathfrak{g}_x(n) \# \mathfrak{f}(n+1) \text{ при } n < x.$$

Доказательство. 1) Покажем сначала, что существует, самое большее, одно такое $\mathfrak{g}_x(n)$.

Пусть $\mathfrak{g}(n)$ и $\mathfrak{h}(n)$ обладают требуемыми свойствами и $\mathfrak{M}$ — множество, состоящее из тех $n \leqslant x$, для которых

$$\mathfrak{g}(n) = \mathfrak{h}(n),$$

и всех $n > x$.

I) $$\mathfrak{g}(1) = \mathfrak{f}(1) = \mathfrak{h}(1);$$

таким образом, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть n принадлежит $\mathfrak{M}$. Тогда

либо

$$n < x, \ \mathfrak{g}(n) = \mathfrak{h}(n),$$

следовательно,

$$\mathfrak{g}(n+1) = \mathfrak{g}(n) \# \mathfrak{f}(n+1) = \mathfrak{h}(n) \# \mathfrak{f}(n+1) = \\ = \mathfrak{h}(n+1),$$

и, значит, $n+1$ принадлежит $\mathfrak{M}$;

либо

$$n \geqslant x,$$

следовательно,

$$n+1 > x,$$

и, значит, $n+1$ снова принадлежит $\mathfrak{M}$.

Поэтому $\mathfrak{M}$ есть множество всех положительных целых чисел; таким образом,

$$\mathfrak{g}(n) = \mathfrak{h}(n)$$

для каждого $n \leqslant x$, что и требовалось доказать.

2) Покажем теперь, что для каждого x такого, что $\mathfrak{f}(n)$ определено при $n \leqslant x$, существует требуемое $\mathfrak{g}_x(n)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество тех x, для которых это справедливо, т. е. для которых, раз только $\mathfrak{f}(n)$ определено при $n \leqslant x$, существует, и притом, в силу 1), только одно требуемое $\mathfrak{g}_x(n)$.

I) При $x = 1$, если $\mathfrak{f}(1)$ определено выражением требуемого типа, будет

$$\mathfrak{g}_x(1) = \mathfrak{f}(1)$$

(второе требование, вследствие невозможности неравенства $n < 1$, отпадает). Таким образом, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть x принадлежит $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{f}(n)$ определено при $n \leqslant x + 1$, то оно определено тем самым и при $n \leqslant x$, так что здесь имеется, и притом точно одно, требуемое $\mathfrak{g}_x(n)$. Тогда требуемыми свойствами для случая $x + 1$ будет обладать выражение

$$\mathfrak{g}_{x+1}(n) = \begin{cases} \mathfrak{g}_x(n) & \text{при } n \leqslant x, \\ \mathfrak{g}_x(x) \ast \mathfrak{f}(x+1) & \text{при } n = x + 1. \end{cases}$$

Действительно, во-первых,

$$\mathfrak{g}_{x+1}(1) = \mathfrak{g}_x(1) = \mathfrak{f}(1).$$

Во-вторых, при

$$n < x$$

(так как тогда $n + 1 \leqslant x$) имеем:

$$\mathfrak{g}_{x+1}(n+1) = \mathfrak{g}_x(n+1) = \mathfrak{g}_x(n) \ast \mathfrak{f}(n+1) =$$
$$= \mathfrak{g}_{x+1}(n) \ast \mathfrak{f}(n+1),$$

а при

$$n = x$$

имеем:

$$\mathfrak{g}_{x+1}(n+1) = \mathfrak{g}_x(x) \ast \mathfrak{f}(x+1) = \mathfrak{g}_{x+1}(n) \ast \mathfrak{f}(n+1).$$

Таким образом, при

$$n < x + 1$$

в обоих случаях получаем:

$$\mathfrak{g}_{x+1}(n+1) = \mathfrak{g}_{x+1}(n) \mathbin{\#} \mathfrak{f}(n+1).$$

Поэтому $x+1$ также принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, и $\mathfrak{M}$ содержит все положительные целые числа.

Теорема 276. *Если $\mathfrak{f}(n)$ определено при $n \leqslant x+1$, то для соответствующих $\mathfrak{g}_x(n)$ и $\mathfrak{g}_{x+1}(n)$ имеет место равенство*

$$\mathfrak{g}_{x+1}(x+1) = \mathfrak{g}_x(x) \mathbin{\#} \mathfrak{f}(x+1).$$

Доказательство. Это равенство содержалось в самом построении $\mathfrak{g}_{x+1}(n)$ в п. 2), II) доказательства предыдущей теоремы.

Определение 69. *Если $\mathfrak{f}(n)$ определено при $n \leqslant x$, то*

$$\mathop{\mathfrak{Z}}_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) = \mathfrak{g}_x(x) \qquad (= \mathfrak{g}_{x,\mathfrak{f}}(x)).$$

Если $\#$ означает $+$, то пишут

$$\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n);$$

если $\#$ означает $\cdot$, то пишут

$$\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n).$$

($\sum$ читается: сумма; $\prod$ читается: произведение.)

Вместо n в этих символах может стоять также любая другая буква, обозначающая положительные целые числа.

Теорема 277. *Если $\mathfrak{f}(1)$ определено, то*

$$\mathop{\mathfrak{Z}}_{n=1}^{1} \mathfrak{f}(n) = \mathfrak{f}(1).$$

Доказательство. $\mathfrak{g}_1(1) = \mathfrak{f}(1)$.

Теорема 278. *Если* $\mathfrak{f}(n)$ *определено при* $n \leqslant x+1$, *то*

$$\mathop{\mathbf{\Sigma}}_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n) = \mathop{\mathbf{\Sigma}}_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \divideontimes \mathfrak{f}(x+1).$$

Доказательство: теорема 276.

Теорема 279.

$$\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,[x, 0].$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{x}$ фиксировано и $\mathfrak{M}$ — множество тех x, для которых выполняется утверждаемое равенство.

I) По теореме 277,

$$\sum_{n=1}^{1} \mathfrak{x} = \mathfrak{x} = \mathfrak{x}\mathfrak{e} = \mathfrak{x}\,[1, 0].$$

Таким образом, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Если x принадлежит $\mathfrak{M}$, то, в силу теоремы 278,

$$\sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{x} = \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{x} + \mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,[x, 0] + \mathfrak{x}\,[1, 0] =$$
$$= \mathfrak{x}\,([x, 0] + [1, 0]) = \mathfrak{x}\,[x+1, 0].$$

Таким образом и $x+1$ принадлежит $\mathfrak{M}$.

Поэтому утверждаемое равенство справедливо для всех x.

Теорема 280. *Если* $\mathfrak{f}(1)$ *и* $\mathfrak{f}(1+1)$ *определены, то*

$$\mathop{\mathbf{\Sigma}}_{n=1}^{1+1} \mathfrak{f}(n) = \mathfrak{f}(1) \divideontimes \mathfrak{f}(1+1).$$

Доказательство. По теоремам 278 и 277, имеем:

$$\mathop{\mathbf{\Sigma}}_{n=1}^{1+1} \mathfrak{f}(n) = \mathop{\mathbf{\Sigma}}_{n=1}^{1} \mathfrak{f}(n) \divideontimes \mathfrak{f}(1+1) = \mathfrak{f}(1) \divideontimes \mathfrak{f}(1+1).$$

Теорема 281. *Если $\mathfrak{f}(n)$ определено при $n \leqslant x+y$, то*

$$\sum_{n=1}^{x+y} \mathfrak{f}(n) = \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \# \sum_{n=1}^{y} \mathfrak{f}(x+n).$$

Доказательство. Пусть x фиксировано и $\mathfrak{M}$ — множество тех y, для которых выполняется утверждаемое равенство.

I) Если $\mathfrak{f}(n)$ определено при $n \leqslant x+1$, то, по теоремам 278 и 277,

$$\sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n) = \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \# \mathfrak{f}(x+1) =$$
$$= \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \# \sum_{n=1}^{1} \mathfrak{f}(x+n).$$

Таким образом, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть y принадлежит $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{f}(n)$ определено при $n \leqslant x+(y+1)$, то, в силу теоремы 278 (примененной к $x+y$ вместо x), имеем:

$$\sum_{n=1}^{x+(y+1)} \mathfrak{f}(n) =$$
$$= \sum_{n=1}^{(x+y)+1} \mathfrak{f}(n) = \sum_{n=1}^{x+y} \mathfrak{f}(n) \# \mathfrak{f}((x+y)+1) =$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \# \sum_{n=1}^{y} \mathfrak{f}(x+n)\right) \# \mathfrak{f}(x+(y+1)) =$$
$$= \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \# \left(\sum_{n=1}^{y} \mathfrak{f}(x+n) \# \mathfrak{f}(x+(y+1))\right),$$

что, в силу теоремы 278 (примененной к y вместо x и $\mathfrak{f}(x+n)$ вместо $\mathfrak{f}(n)$),

$$= \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \# \sum_{n=1}^{y+1} \mathfrak{f}(x+n).$$

Таким образом, $y+1$ также принадлежит $\mathfrak{M}$, и теорема доказана.

Теорема 282. *Если* $\mathfrak{f}(n)$ *и* $\mathfrak{g}(n)$ *определены при* $n \leqslant x$, *то*

$$\sum_{n=1}^{x} (\mathfrak{f}(n) \dotplus \mathfrak{g}(n)) = \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \dotplus \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество тех x, для которых выполняется утверждаемое равенство.

I) Если $\mathfrak{f}(1)$ и $\mathfrak{g}(1)$ определены, то

$$\sum_{n=1}^{1} (\mathfrak{f}(n) \dotplus \mathfrak{g}(n)) = \mathfrak{f}(1) \dotplus \mathfrak{g}(1) =$$
$$= \sum_{n=1}^{1} \mathfrak{f}(n) \dotplus \sum_{n=1}^{1} \mathfrak{g}(n).$$

Таким образом, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть x принадлежит $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{f}(n)$ и $\mathfrak{g}(n)$ определены при $n \leqslant x+1$, то, принимая во внимание, что

$$(\mathfrak{x} \dotplus \mathfrak{y}) \dotplus (\mathfrak{z} \dotplus \mathfrak{u}) = ((\mathfrak{x} \dotplus \mathfrak{y}) \dotplus \mathfrak{z}) \dotplus \mathfrak{u} = (\mathfrak{z} \dotplus (\mathfrak{x} \dotplus \mathfrak{y})) \dotplus \mathfrak{u} =$$
$$= ((\mathfrak{z} \dotplus \mathfrak{x}) \dotplus \mathfrak{y}) \dotplus \mathfrak{u} = (\mathfrak{z} \dotplus \mathfrak{x}) \dotplus (\mathfrak{y} \dotplus \mathfrak{u}) =$$
$$= (\mathfrak{x} \dotplus \mathfrak{z}) \dotplus (\mathfrak{y} \dotplus \mathfrak{u}),$$

имеем:

$$\sum_{n=1}^{x+1} (\mathfrak{f}(n) \dotplus \mathfrak{g}(n)) =$$
$$= \sum_{n=1}^{x} (\mathfrak{f}(n) \dotplus \mathfrak{g}(n)) \dotplus (\mathfrak{f}(x+1) \dotplus \mathfrak{g}(x+1)) =$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \dotplus \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n)\right) \dotplus (\mathfrak{f}(x+1) \dotplus \mathfrak{g}(x+1)) =$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \dotplus \mathfrak{f}(x+1)\right) \dotplus \left(\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n) \dotplus \mathfrak{g}(x+1)\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n) \dotplus \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{g}(n).$$

Таким образом, $x+1$ также принадлежит $\mathfrak{M}$, и утверждаемое равенство верно для всех x.

Теорема 283. *Пусть $s(n)$ отображает числа $n \leqslant x$ на числа $m \leqslant x$, и $\mathfrak{f}(n)$ определено при $n \leqslant x$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(s(n)) = \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n).$$

Доказательство. Положим для краткости

$$\mathfrak{f}(s(n)) = \mathfrak{g}(n).$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество тех x, для которых утверждение

$$\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n) = \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n)$$

справедливо (при всех допустимых s и $\mathfrak{f}$).

I) Если

$$x = 1,$$

то

$$s(1) = 1,$$

так что, когда $\mathfrak{f}(1)$ определено, имеем

$$\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n) = \mathfrak{g}(1) = \mathfrak{f}(1) = \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n).$$

Таким образом, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть x принадлежит $\mathfrak{M}$. Пусть $s(n)$ отображает числа $n \leqslant x+1$ на числа $m \leqslant x+1$, и $\mathfrak{f}(n)$ определено при $n \leqslant x+1$.

1) Если

$$s(x+1) = x+1,$$

то $s(n)$ отображает числа $n \leqslant x$ на числа $m \leqslant x$ Тогда

$$\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n) = \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n),$$

$$\mathfrak{g}(x+1) = \mathfrak{f}(x+1),$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{g}(n) = \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n) + \mathfrak{g}(x+1) =$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) + \mathfrak{f}(x+1) = \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n).$$

2) Если

$$s(x+1) < x+1, \; s(1) = 1,$$

то $s(n)$ отображает числа n, для которых $1+1 \leqslant n \leqslant x+1$, на числа m, для которых $1+1 \leqslant m \leqslant x+1$; следовательно, $s(1+n)-1$ отображает числа $n \leqslant x$ на числа $m \leqslant x$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(1+n) = \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(s(1+n)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(1+(s(1+n)-1)) = \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(1+n),$$

и, следовательно, в силу теоремы 281,

$$\sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{g}(n) = \mathfrak{g}(1) + \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(1+n) =$$

$$= \mathfrak{f}(1) + \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(1+n) = \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n).$$

3) Пусть

$$s(x+1) < x+1, \; s(1) > 1.$$

Положим

$$s(1) = a$$

и определим b условиями

$$1 \leqslant b \leqslant x+1, \quad s(b) = 1.$$

Тогда

$$a > 1, \quad b > 1.$$

α) Пусть

$$a < x + 1.$$

Тогда, как

$$s_1(n) = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 1, \\ a \text{ при } n = b, \\ s(n) \text{ при } 1 < n \leqslant x + 1, \quad n \neq b, \end{cases}$$

так и

$$s_2(n) = \begin{cases} a \text{ при } n = 1, \\ 1 \text{ при } n = a, \\ n \text{ при } 1 < n \leqslant x + 1, \quad n \neq a, \end{cases}$$

отображают числа $n \leqslant x + 1$ на числа $m \leqslant x + 1$.

Но

$$s(n) = s_2(s_1(n)) \text{ при } n \leqslant x + 1.$$

Действительно, $s_2(s_1(n))$ переводит

1 через 1 в $a = s(1)$,
b через a в $1 = s(b)$,
всякое другое $n \leqslant x + 1$ через $s(n)$ в $s(n)$.

$s_1(n)$ оставляет 1 на месте, а $s_2(n)$ оставляет $x + 1$ на месте. Поэтому, в силу 2) и 1), имеем:

$$\sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{g}(n) = \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(s(n)) = \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(s_2(s_1(n))) =$$
$$= \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(s_2(n)) = \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n).$$

β) Пусть

$$a = x + 1, \quad b < x + 1.$$

Тогда

$$s_3(n) = \begin{cases} b \text{ при } n = 1, \\ 1 \text{ при } n = b, \\ n \text{ при } 1 < n \leqslant x + 1, \ n \neq b \end{cases}$$

отображает числа $n \leqslant x+1$ на числа $m \leqslant x+1$. При этом

$$s(n) = s_1(s_3(n)) \text{ при } n \leqslant x+1.$$

Действительно, $s_1(s_3(n))$ переводит

$$1 \text{ через } b \text{ в } a = s(1),$$

$$b \text{ через } 1 \text{ в } 1 = s(b),$$

$$\text{всякое другое } n \leqslant x+1 \text{ — через } n \text{ в } s(n).$$

$s_3(n)$ оставляет $x+1$ на месте. Поэтому, в силу 1) и 2), имеем:

$$\sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{g}(n) = \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(s(n)) = \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(s_1(s_3(n))) =$$

$$= \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(s_1(n)) = \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n).$$

γ) Пусть

$$a = b = x+1.$$

Если $x = 1$, то равенство

$$\sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{g}(n) = \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n)$$

тривиально.

Если же $x > 1$, то

$$s_4(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1, \\ x+1 & \text{при } n = x+1, \\ s(n) & \text{при } 1 < n < x+1 \end{cases}$$

отображает числа $n \leqslant x+1$ на числа $m \leqslant x+1$.

Следовательно, в силу 1),

$$\sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{g}(n) = \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{g}(n) \# \mathfrak{g}(x+1) =$$

$$= \left(\mathfrak{g}(1) \# \sum_{n=1}^{x-1} \mathfrak{g}(n+1)\right) \# \mathfrak{g}(x+1) =$$

$$= \mathfrak{g}(1) \# \left(\sum_{n=1}^{x-1} \mathfrak{g}(n+1) \# \mathfrak{g}(x+1)\right) =$$

$$= \left(\mathfrak{g}(x+1) \# \sum_{n=1}^{x-1} \mathfrak{g}(n+1)\right) \# \mathfrak{g}(1) =$$

$$= \left(\mathfrak{f}(s(x+1)) \# \sum_{n=1}^{x-1} \mathfrak{f}(s(n+1))\right) \# \mathfrak{f}(s(1)) =$$

$$= \left(\mathfrak{f}(1) \# \sum_{n=1}^{x-1} \mathfrak{f}(s_4(n+1))\right) \# \mathfrak{f}(x+1) =$$

$$= \left(\mathfrak{f}(s_4(1)) \# \sum_{n=1}^{x-1} \mathfrak{f}(s_4(n+1))\right) \# \mathfrak{f}(s_4(x+1)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(s_4(n)) \# \mathfrak{f}(s_4(x+1)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(s_4(n)) = \sum_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n).$$

Итак, во всех случаях $x+1$ также принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, и теорема доказана.

В определении 70 и теоремах 284—286 латинские буквы обозначают исключительно целые (не обязательно положительные) числа.

Определение 70. *Пусть*

$$y \leqslant x$$

и $\mathfrak{f}(n)$ *определено при*

$$y \leqslant n \leqslant x.$$

Тогда

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n) = \mathop{\mathfrak{S}}_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}((n+y)-1).$$

Вместо n может стоять также любая другая буква, обозначающая целые числа.

Заметим, что

$$x+1>y;\ y\leqslant(n+y)-1\leqslant x \text{ при } 1\leqslant n\leqslant(x+1)-y,$$

и что при $y=1$ определение 70 (как и должно быть) находится в согласии с определением 69.

Теорема 284. *Пусть*

$$y\leqslant u<x,$$

и пусть $\mathfrak{f}(n)$ *определено при*

$$y\leqslant n\leqslant x.$$

Тогда

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n) = \mathop{\mathfrak{S}}_{n=y}^{u} \mathfrak{f}(n) \mathbin{+\!\!\!\!\!\div} \mathop{\mathfrak{S}}_{n=u+1}^{x} \mathfrak{f}(n).$$

Доказательство. По определению 70 и теореме 281, имеем:

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n) = \mathop{\mathfrak{S}}_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}((n+y)-1) =$$

$$= \mathop{\mathfrak{S}}_{n=1}^{(u+1)-y} \mathfrak{f}((n+y)-1) \mathbin{+\!\!\!\!\!\div}$$

$$\mathbin{+\!\!\!\!\!\div} \mathop{\mathfrak{S}}_{n=1}^{x-u} \mathfrak{f}((((u+1)-y)+n)+y)-1),$$

так как

$$((u+1)-y)+(x-u)=$$

$$=(x+(-u))+((u+1)+(-y))=$$

$$=(x+((-u)+(u+1)))+(-y)=(x+1)-y.$$

Но

$$(((u+1)-y)+n)+y=((u+1)-y)+(y+n)=$$
$$=(((u+1)-y)+y)+n=n+(u+1),$$

следовательио, по определению 70,

$$\mathop{\mathfrak{Z}}_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n)=\mathop{\mathfrak{Z}}_{n=y}^{u} \mathfrak{f}(n) \divideontimes \mathop{\mathfrak{Z}}_{n=1}^{(x+1)-(u+1)} \mathfrak{f}((n+(u+1))-1)=$$
$$=\mathop{\mathfrak{Z}}_{n=y}^{u} \mathfrak{f}(n) \divideontimes \mathop{\mathfrak{Z}}_{n=u+1}^{x} \mathfrak{f}(n).$$

Теорема 285. *Пусть*

$$y \leqslant x$$

и $\mathfrak{f}(n)$ *определено при*

$$y \leqslant n \leqslant x.$$

Тогда

$$\mathop{\mathfrak{Z}}_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n)=\mathop{\mathfrak{Z}}_{n=y+v}^{x+v} \mathfrak{f}(n-v).$$

Доказательство. Согласно определению 70, левая часть утверждаемого равенства

$$=\mathop{\mathfrak{Z}}_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}((n+y)-1),$$

а правая (принимая во внимание, что $y \leqslant n-v \leqslant x$ при $y+v \leqslant n \leqslant x+v$)

$$=\mathop{\mathfrak{Z}}_{n=1}^{((x+v)+1)-(y+v)} \mathfrak{f}(((n+(y+v))-1)-v);$$

но здесь

$$((x+v)+1)-(y+v)=(1+(x+v))+((-v)+(-y))=$$
$$=(1+((x+v)+(-v)))+(-y)=$$
$$=(1+x)-y=(x+1)-y$$

и

$$((n+(y+v))-1)-v=(n+(y+v))-(1+v)=$$
$$=((n+y)+v)+(-v+(-1))=$$
$$=(((n+y)+v)+(-v))+(-1)=$$
$$=((n+y)+(v+(-v)))-1=(n+y)-1.$$

Теорема 286. *Пусть*

$$y \leqslant x,$$

$\mathfrak{f}(n)$ *определено при*

$$y \leqslant n \leqslant x$$

и $s(n)$ *отображает числа* n, *для которых* $y \leqslant n \leqslant x$, *на числа* m, *для которых* $y \leqslant m \leqslant x$. *Тогда*

$$\sum_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(s(n)) = \sum_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n).$$

Доказательство.

$$s_1(n) = s((n+y)-1)-(y-1)$$

отображает положительные $n \leqslant (x+1)-y$ на положительные $m \leqslant (x+1)-y$. Поэтому, в силу теоремы 283,

$$\sum_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(s(n)) = \sum_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}(s((n+y)-1)) =$$
$$= \sum_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}(s_1(n)+(y-1)) = \sum_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}(n+(y-1)) =$$
$$= \sum_{n=1}^{(x+1)-y} \mathfrak{f}((n+y)-1) = \sum_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n).$$

Обычно вместо

$$\sum_{n=y}^{x} \mathfrak{f}(n)$$

пользуются также небрежной записью

$$\mathfrak{f}(y)+\mathfrak{f}(y+1)+\ldots+\mathfrak{f}(x)$$

(и аналогично для произведений); однако вполне безупречна лишь, например, запись

$$\mathfrak{f}(1)+\mathfrak{f}(1+1)+\mathfrak{f}((1+1)+1)+$$
$$+\mathfrak{f}(((1+1)+1)+1),$$

другими словами,

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d},$$

что, таким образом, по определению сводит дело к старому сложению и означает

$$((\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c})+\mathfrak{d},$$

либо, например, запись

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}.$$

Можно также спокойно писать, например,

$$\mathfrak{a}-\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$$

в смысле

$$\mathfrak{a}+(-\mathfrak{b})+\mathfrak{c},$$

так как под такой записью всегда понимается

$$\mathfrak{f}(1)+\mathfrak{f}(1+1)+\mathfrak{f}((1+1)+1)$$

с

$$\mathfrak{f}(1)=\mathfrak{a},\ \mathfrak{f}(1+1)=-\mathfrak{b},\ \mathfrak{f}((1+1)+1)=\mathfrak{c}.$$

Теперь строчные латинские буквы будут снова обозначать положительные целые числа.

Теорема 287. *Если* $\mathfrak{f}(n)$ *определено при* $n\leqslant x$, *то существует* Ξ *такое, что*

$$\left|\sum_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n)\right|\leqslant\Xi,$$

$$\sum_{n=1}^{x}[|\mathfrak{f}(n)|,\ 0]=[\Xi,\ 0].$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество тех x для которых такое Ξ существует (при любом $\mathfrak{f}(n)$).

I) Если $\mathfrak{f}(1)$ определено, то

$$\left|\sum_{n=1}^{1}\mathfrak{f}(n)\right| = |\mathfrak{f}(1)|,$$

$$\sum_{n=1}^{1}[|\mathfrak{f}(n)|, 0] = [|\mathfrak{f}(1)|, 0].$$

Поэтому при $x = 1$ требуемым свойством обладает

$$\Xi = |\mathfrak{f}(1)|.$$

Таким образом, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть x принадлежит $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{f}(n)$ определено при $n \leqslant x + 1$, то существует Ξ_1 такое, что

$$\left|\sum_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n)\right| \leqslant \Xi_1,$$

$$\sum_{n=1}^{x}[|\mathfrak{f}(n)|, 0] = [\Xi_1, 0].$$

Но, согласно теоремам 278 и 271,

$$\left|\sum_{n=1}^{x+1}\mathfrak{f}(n)\right| = \left|\sum_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n) + \mathfrak{f}(x+1)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{n=1}^{x}\mathfrak{f}(n)\right| + |\mathfrak{f}(x+1)| \leqslant \Xi_1 + |\mathfrak{f}(x+1)|.$$

Следовательно, положив

$$\Xi = \Xi_1 + |\mathfrak{f}(x+1)|,$$

будем иметь

$$\left|\sum_{n=1}^{x+1}\mathfrak{f}(n)\right| \leqslant \Xi.$$

С другой стороны, по теореме 278,

$$\sum_{n=1}^{x+1}[|\mathfrak{f}(n)|, 0] = \sum_{n=1}^{x}[|\mathfrak{f}(n)|, 0] + [|\mathfrak{f}(x+1)|, 0] =$$

$$= [\Xi_1, 0] + [|\mathfrak{f}(x+1)|, 0] =$$

$$= [\Xi_1 + |\mathfrak{f}(x+1)|, 0 + 0] = [\Xi, 0].$$

Таким образом, Ξ обладает требуемыми свойствами для случая $x+1$. Следовательно, $x+1$ также принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, и теорема доказана.

Теорема 288. *Если* $\mathfrak{f}(n)$ *определено при* $n \leqslant x$, *то*

$$[|\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n)|,\ 0] = \prod_{n=1}^{x} [|\mathfrak{f}(n)|,\ 0].$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество тех x, для которых выполняется это равенство.

I) Если $\mathfrak{f}(1)$ определено, то

$$[|\prod_{n=1}^{1} \mathfrak{f}(n)|,\ 0] = [|\mathfrak{f}(1)|,\ 0] = \prod_{n=1}^{1} [|\mathfrak{f}(n)|,\ 0].$$

Таким образом, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть x принадлежит $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{f}(n)$ определено при $n \leqslant x+1$, то, в силу теорем 278 и 268,

$$\prod_{n=1}^{x+1} [|\mathfrak{f}(n)|,\ 0] = \prod_{n=1}^{x} [|\mathfrak{f}(n)|,\ 0] \cdot [|\mathfrak{f}(x+1)|,\ 0] =$$

$$= [|\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n)|,\ 0] \cdot [|\mathfrak{f}(x+1)|,\ 0] =$$

$$= [|\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n)| \cdot |\mathfrak{f}(x+1)| - 0 \cdot 0,$$

$$|\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n)| \cdot 0 + 0 \cdot |\mathfrak{f}(x+1)|] =$$

$$= [|\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n)| \cdot |\mathfrak{f}(x+1)|,\ 0] =$$

$$= [|\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \cdot \mathfrak{f}(x+1)|,\ 0] = [|\prod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n)|,\ 0].$$

Следовательно, $x+1$ также принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, и теорема доказана.

Теорема 289. *Если $\mathfrak{f}(n)$ определено при $n \leqslant x$, то*

$$\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) = \mathfrak{n}$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{f}(n) = \mathfrak{n}$$

для некоторого $n \leqslant x$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество тех x, для которых справедливо утверждение теоремы.

I) Равенство

$$\prod_{n=1}^{1} \mathfrak{f}(n) = \mathfrak{n}$$

тождественно с

$$\mathfrak{f}(1) = \mathfrak{n}.$$

Таким образом, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть x принадлежит $\mathfrak{M}$. Равенство

$$\prod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{f}(n) = \mathfrak{n}$$

означает, что

$$\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) \cdot \mathfrak{f}(x+1) = \mathfrak{n};$$

но по теореме 221 для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{f}(n) = \mathfrak{n} \text{ или } \mathfrak{f}(x+1) = \mathfrak{n},$$

т. е. (так как x принадлежит множеству $\mathfrak{M}$) — чтобы

$$\mathfrak{f}(n) = \mathfrak{n} \text{ при } n \leqslant x \text{ или при } n = x+1.$$

Таким образом, $x+1$ также принадлежит $\mathfrak{M}$, и теорема доказана.

§ 9. СТЕПЕНИ

В этом параграфе строчные латинские буквы будут обозначать целые числа.

Определение 71.

$$\mathfrak{x}^x = \begin{cases} \prod\limits_{n=1}^{x} \mathfrak{x} & \text{при } x > 0, \\ \mathfrak{e} & \text{при } \mathfrak{x} \neq \mathfrak{n},\ x = 0, \\ \dfrac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|x|}} & \text{при } \mathfrak{x} \neq \mathfrak{n},\ x < 0. \end{cases}$$

(Читается: $\mathfrak{x}$ в степени x.) Таким образом, $\mathfrak{x}^x$ не определено лишь при

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{n},\ x \leqslant 0.$$

Заметим, что при

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n},\ x < 0,$$

согласно первой строке определения 71 и теореме 289,

$$\mathfrak{x}^{|x|} \neq \mathfrak{n},$$

так что $\dfrac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|x}}$ в этом случае имеет смысл.

Теорема 290. *Если*

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\mathfrak{x}^x \neq \mathfrak{n}.$$

Доказательство. Для $x > 0$ это следует из теоремы 289, для $x = 0$ — из определения и для $x < 0$ — из того, что

$$\mathfrak{x}^x \mathfrak{x}^{|x|} \neq \mathfrak{n}.$$

Теорема 291. $$\mathfrak{x}^1 = \mathfrak{x}.$$

Доказательство. $\mathfrak{x}^1 = \prod\limits_{n=1}^{1} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}.$

Теорема 292. *Если*

$$x > 0$$

или

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}, \ \mathfrak{y} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^x = \mathfrak{x}^x \mathfrak{y}^x.$$

Предварительное замечание. Обе части во всяком случае имеют смысл, так как при $x \leqslant 0$, в силу предположения,

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}.$$

Доказательство. 1) Пусть, при фиксированных $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{M}$ — множество тех $x > 0$, для которых

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^x = \mathfrak{x}^x \mathfrak{y}^x.$$

I) По теореме 291,

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^1 = \mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}^1 \mathfrak{y}^1.$$

Таким образом, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Если x принадлежит $\mathfrak{M}$, то

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^{x+1} = \prod_{n=1}^{x+1} (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \prod_{n=1}^{x} (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) \cdot (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}^x \mathfrak{y}^x)(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) =$$

$$= (\mathfrak{x}^x \mathfrak{x})(\mathfrak{y}^x \mathfrak{y}) = \left(\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}\right)\left(\prod_{n=1}^{x} \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{y}\right) =$$

$$= \prod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{x} \cdot \prod_{n=1}^{x+1} \mathfrak{y} = \mathfrak{x}^{x+1} \mathfrak{y}^{x+1},$$

и, следовательно, $x+1$ также принадлежит $\mathfrak{M}$.

Таким образом, при $x > 0$ всегда

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^x = \mathfrak{x}^x \mathfrak{y}^x.$$

2) Пусть

$$x = 0, \ \mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}, \ \mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}.$$

Тогда

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^x = \mathfrak{e} = \mathfrak{e}\mathfrak{e} = \mathfrak{x}^x \mathfrak{y}^x.$$

3) Пусть

$$x < 0, \ \mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}, \ \mathfrak{y} \neq \mathfrak{n}.$$

В силу 1), тогда

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^{|x|}=\mathfrak{x}^{|x|}\mathfrak{y}^{|x|},$$

и, следовательно,

$$\frac{\mathfrak{e}}{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^{|x|}}=\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|x|}\mathfrak{y}^{|x|}}=\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|x|}}\cdot\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{y}^{|x|}},$$

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^{x}=\mathfrak{x}^{x}\mathfrak{y}^{x}.$$

Теорема 293. $\mathfrak{e}^{x}=\mathfrak{e}.$

Доказательство. В силу теоремы 292,

$$\mathfrak{e}^{x}\mathfrak{e}=\mathfrak{e}^{x}=(\mathfrak{e}\mathfrak{e})^{x}=\mathfrak{e}^{x}\mathfrak{e}^{x},$$

$$\mathfrak{n}=\mathfrak{e}^{x}\mathfrak{e}^{x}-\mathfrak{e}^{x}\mathfrak{e}=\mathfrak{e}^{x}(\mathfrak{e}^{x}-\mathfrak{e}),$$

следовательно (в силу теоремы 290 и 221),

$$\mathfrak{e}^{x}-\mathfrak{e}=\mathfrak{n},$$

$$\mathfrak{e}^{x}=\mathfrak{e}.$$

Теорема 294. *Если*

$$x>0,\ y>0$$

или

$$\mathfrak{x}\neq\mathfrak{n},$$

то

$$\mathfrak{x}^{x}\mathfrak{x}^{y}=\mathfrak{x}^{x+y}.$$

Доказательство. 1) Пусть

$$x>0,\ y>0.$$

Тогда, в силу теоремы 281,

$$\mathfrak{x}^{x}\mathfrak{x}^{y}=\prod_{n=1}^{x}\mathfrak{x}\cdot\prod_{n=1}^{y}\mathfrak{x}=\prod_{n=1}^{x+y}\mathfrak{x}=\mathfrak{x}^{x+y}.$$

2) Пусть

$$\mathfrak{x}\neq\mathfrak{n},$$

причем либо $x\leqslant 0$, либо $y\leqslant 0$.

α) Пусть

$$x < 0,\ y < 0.$$

Тогда, в силу 1),

$$\mathfrak{x}^{|x|}\mathfrak{x}^{|y|} = \mathfrak{x}^{|x|+|y|} = \mathfrak{x}^{|x+y|}$$

и

$$\mathfrak{x}^{x}\mathfrak{x}^{y} = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|x|}} \cdot \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|y|}} = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|x|}\mathfrak{x}^{|y|}} = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|x+y|}} = \mathfrak{x}^{x+y}.$$

β) Пусть

$$x > 0,\ y < 0.$$

Тогда

$$\mathfrak{x}^{x}\mathfrak{x}^{y} = \mathfrak{x}^{x}\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|y|}} = \frac{\mathfrak{x}^{x}}{\mathfrak{x}^{|y|}}.$$

A) При

$$x > |y|,$$

в силу 1), имеем:

$$\frac{\mathfrak{x}^{x}}{\mathfrak{x}^{|y|}} = \frac{\mathfrak{x}^{|y|}\,\mathfrak{x}^{x-|y|}}{\mathfrak{x}^{|y|}} = \mathfrak{x}^{x-|y|} = \mathfrak{x}^{x+y}.$$

B) При

$$x = |y|$$

имеем:

$$\frac{\mathfrak{x}^{x}}{\mathfrak{x}^{|y|}} = \mathfrak{e} = \mathfrak{x}^{0} = \mathfrak{x}^{x+y}.$$

C) При

$$x < |y|,$$

в силу 1), имеем:

$$\frac{\mathfrak{x}^{x}}{\mathfrak{x}^{|y|}} = \frac{\mathfrak{x}^{x}\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{x}\mathfrak{x}^{|y|-x}} = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{|y|-x}} = \mathfrak{x}^{x-|y|} = \mathfrak{x}^{x+y}.$$

γ) Пусть

$$x < 0,\ y > 0.$$

Тогда, в силу β),

$$\mathfrak{x}^{x}\mathfrak{x}^{y} = \mathfrak{x}^{y}\mathfrak{x}^{x} = \mathfrak{x}^{y+x} = \mathfrak{x}^{x+y}.$$

δ) Пусть

$$x = 0.$$

Тогда

$$\mathfrak{x}^x\mathfrak{x}^y = \mathfrak{e}\mathfrak{x}^y = \mathfrak{x}^y = \mathfrak{x}^{0+y} = \mathfrak{x}^{x+y}.$$

г) Пусть

$$x \neq 0, \ y = 0.$$

Тогда, в силу д),

$$\mathfrak{x}^x\mathfrak{x}^y = \mathfrak{x}^y\mathfrak{x}^x = \mathfrak{x}^{y+x} = \mathfrak{x}^{x+y}.$$

Теорема 295. *Если*

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}^x}{\mathfrak{x}^y} = \mathfrak{x}^{x-y}.$$

Доказательство. По теореме 294,

$$\mathfrak{x}^{x-y}\mathfrak{x}^y = \mathfrak{x}^{(x-y)+y} = \mathfrak{x}^x;$$

так как при этом, по теореме 290,

$$\mathfrak{x}^y \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{x}^x}{\mathfrak{x}^y} = \mathfrak{x}^{x-y}.$$

Теорема 296. *Если*

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^x} = \mathfrak{x}^{-x}.$$

Доказательство. По теореме 295,

$$\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^x} = \frac{\mathfrak{x}^0}{\mathfrak{x}^x} = \mathfrak{x}^{0-x} = \mathfrak{x}^{-x}.$$

Теорема 297. *Если*

$$x > 0, \ y > 0$$

или

$$\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n},$$

то

$$(\mathfrak{x}^x)^y = \mathfrak{x}^{xy}.$$

Доказательство. 1) Пусть

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{n},\quad x>0,\quad y>0.$$

Тогда, по теореме 289,

$$(\mathfrak{x}^x)^y=(\mathfrak{n}^x)^y=\mathfrak{n}^y=\mathfrak{n}=\mathfrak{n}^{xy}=\mathfrak{x}^{xy}.$$

2) Пусть

$$\mathfrak{x}\neq\mathfrak{n}.$$

a) Пусть $\mathfrak{x}$, x фиксированы и $\mathfrak{M}$ — множество тех $y>0$, для которых

$$(\mathfrak{x}^x)^y=\mathfrak{x}^{xy}.$$

I) $$(\mathfrak{x}^x)^1=\mathfrak{x}^x=\mathfrak{x}^{x\cdot 1}.$$

Таким образом, 1 принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

II) Пусть y принадлежит $\mathfrak{M}$. Тогда, по теореме 294,

$$(\mathfrak{x}^x)^{y+1}=(\mathfrak{x}^x)^y(\mathfrak{x}^x)^1=\mathfrak{x}^{xy}\mathfrak{x}^x=\mathfrak{x}^{xy+x}=\mathfrak{x}^{x(y+1)},$$

и, значит, $y+1$ также принадлежит $\mathfrak{M}$.

Таким образом, при $y>0$ утверждение теоремы справедливо.

b) Пусть

$$y=0.$$

Тогда

$$(\mathfrak{x}^x)^y=\mathfrak{e}=\mathfrak{x}^{xy}.$$

c) Пусть

$$y<0.$$

Тогда, в силу а ,

$$(\mathfrak{x}^x)^{|y|}=\mathfrak{x}^{x|y|}$$

и, следовательно, по теореме 296,

$$(\mathfrak{x}^x)^y=\frac{\mathfrak{e}}{(\mathfrak{x}^x)^{-y}}=\frac{\mathfrak{e}}{(\mathfrak{x}^x)^{|y|}}=\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{x}^{x|y|}}=\mathfrak{x}^{-(x|y|)}=\mathfrak{x}^{xy}.$$

12 Зак. 749. Э. Ландау.

§ 10. ВКЛЮЧЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Теорема 298.

$$[\Xi + \mathrm{H}, 0] = [\Xi, 0] + [\mathrm{H}, 0];$$

$$[\Xi - \mathrm{H}, 0] = [\Xi, 0] - [\mathrm{H}, 0];$$

$$[\Xi\mathrm{H}, 0] = [\Xi, 0][\mathrm{H}, 0];$$

$$\left[\frac{\Xi}{\mathrm{H}}, 0\right] = \frac{[\Xi, 0]}{[\mathrm{H}, 0]} \text{ при } \mathrm{H} \neq 0;$$

$$[-\Xi, 0] = -[\Xi, 0];$$

$$|[\Xi, 0]| = |\Xi|.$$

Доказательство.

1) $[\Xi, 0] + [\mathrm{H}, 0] = [\Xi + \mathrm{H}, 0 + 0] = [\Xi + \mathrm{H}, 0]$.

2) $[\Xi, 0] - [\mathrm{H}, 0] = [\Xi - \mathrm{H}, 0 - 0] = [\Xi - \mathrm{H}, 0]$.

3) $[\Xi, 0][\mathrm{H}, 0] = [\Xi\mathrm{H} - 0\cdot 0, \Xi\cdot 0 + 0\cdot\mathrm{H}] = [\Xi\mathrm{H}, 0]$.

4) В силу 3), при $\mathrm{H} \neq 0$ имеем:

$$[\mathrm{H}, 0]\left[\frac{\Xi}{\mathrm{H}}, 0\right] = \left[\mathrm{H}\frac{\Xi}{\mathrm{H}}, 0\right] = [\Xi, 0],$$

$$\frac{[\Xi, 0]}{[\mathrm{H}, 0]} = \left[\frac{\Xi}{\mathrm{H}}, 0\right].$$

5) $$-[\Xi, 0] = [-\Xi, -0] = [-\Xi, 0].$$

6) $|\Xi| = \sqrt{|\Xi||\Xi|} = \sqrt{\Xi\Xi} = \sqrt{\Xi\Xi + 0\cdot 0} = |[\Xi, 0]|$.

Теорема 299. *Комплексные числа вида* $[x, 0]$ *удовлетворяют пяти аксиомам для натуральных чисел, если за* 1 *принять* $[1,0]$ *и положить*

$$[x, 0]' = [x', 0].$$

Доказательство. Пусть $[\mathfrak{Z}]$ — множество чисел $[x, 0]$.

1) $[1, 0]$ принадлежит множеству $[\mathfrak{Z}]$.

2) Вместе с $[x, 0]$ также $[x, 0]'$ содержится в $[\mathfrak{Z}]$.

3) Так как всегда

$$x' \neq 1,$$

то

$$[x', 0] \neq [1, 0],$$
$$[x, 0]' \neq [1, 0].$$

4) Из

$$[x, 0]' = [y, 0]'$$

следует:

$$[x', 0] = [y', 0],$$
$$x' = y',$$
$$x = y,$$
$$[x, 0] = [y, 0].$$

5) Пусть множество $[\mathfrak{M}]$ чисел из $[\mathfrak{Z}]$ обладает следующими свойствами:

I) $[1, 0]$ принадлежит множеству $[\mathfrak{M}]$.

II) Если $[x, 0]$ принадлежит $[\mathfrak{M}]$, то и $[x, 0]'$ принадлежит $[\mathfrak{M}]$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество тех x, для которых $[x, 0]$ принадлежит $[\mathfrak{M}]$. Тогда 1 принадлежит $\mathfrak{M}$ и вместе с каждым x из $\mathfrak{M}$ также x' принадлежит $\mathfrak{M}$. Следовательно, каждое положительное целое число x принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ и, значит, каждое $[x, 0]$ — множеству $[\mathfrak{M}]$.

Так как, в силу теоремы 298, между понятиями суммы, разности, произведения и (в случае его существования) частного двух чисел вида $[\Xi, 0]$, с одной стороны, и аналогичными понятиями для вещественных чисел, с другой стороны, имеется полное соответствие и то же верно для символов $-[\Xi, 0]$ и $|[\Xi, 0]|$, и так как мы можем принять в качестве определения, что

$$[\Xi, 0] > [\mathrm{H}, 0] \quad \text{при} \quad \Xi > \mathrm{H},$$
$$[\Xi, 0] < [\mathrm{H}, 0] \quad \text{при} \quad \Xi < \mathrm{H},$$

то, таким образом, комплексные числа вида $[\Xi, 0]$ обладают всеми свойствами, доказанными нами в гл. 4 для вещественных чисел, и, в частности, числа $[x, 0]$ —

всеми свойствами, доказанными для положительных целых чисел.

Поэтому отбросим вещественные числа, заменим их соответствующими комплексными числами $[\Xi, 0]$ и будем иметь дело только с комплексными числами. (Однако, вещественные числа сохранятся парами в понятии комплексного числа.)

Определение 72. (Освободившийся теперь символ) Ξ *будет обозначать комплексное число* $[\Xi, 0]$, *на которое мы перенесем также наименование вещественное число. Равным образом,* $[\Xi, 0]$ *будет теперь называться целым числом при целом* Ξ, *рациональным числом при рациональном* Ξ, *иррациональным числом при иррациональном* Ξ, *положительным числом при положительном* Ξ, *отрицательным числом при отрицательном* Ξ.

Таким образом, например, вместо n мы будем писать 0, а вместо e будем писать 1.

Теперь мы можем обозначать комплексные числа строчными или прописными буквами любого алфавита (притом не обязательно одного и того же). Однако, для одного особого комплексного числа обычно употребляется специальная строчная латинская буква.

Определение 73. $\quad i = [0, 1]$.

Теорема 300. $\quad ii = -1$.

Доказательство.

$$ii = [0, 1][0, 1] = [0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0] = [-1, 0] = -1.$$

Теорема 301. *Для вещественных* u_1, u_2 *имеет место равенство*

$$u_1 + u_2 i = [u_1, u_2].$$

Таким образом, для каждого комплексного числа x *существует однозначно определенная пара вещественных чисел* u_1, u_2 *такая, что*

$$x = u_1 + u_2 i.$$

Доказательство. Если u_1, u_2 вещественны, то

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 i &= [u_1,\ 0] + [u_2,\ 0]\,[0,\ 1] = \\ &= [u_1,\ 0] + [u_2 \cdot 0 - 0 \cdot 1,\ u_2 \cdot 1 + 0 \cdot 0] = \\ &= [u_1,\ 0] + [0,\ u_2] = [u_1,\ u_2]. \end{aligned}$$

Теорема 301 делает излишним употребление символа [ ]. Комплексные числа—это числа $u_1 + u_2 i$, где u_1 и u_2 вещественны; равным, соответственно различным парам u_1, u_2 соответствуют равные, соответственно различные числа, и сумма, разность, произведение двух комплексных чисел $u_1 + u_2 i$, $v_1 + v_2 i$ (где u_1, u_2, v_1, v_2 вещественны) образуются по формулам

$$(u_1 + u_2 i) + (v_1 + v_2 i) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)\, i,$$
$$(u_1 + u_2 i) - (v_1 + v_2 i) = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2)\, i,$$
$$(u_1 + u_2 i)(v_1 + v_2 i) = (u_1 v_1 - u_2 v_2) + (u_1 v_2 + u_2 v_1)\, i.$$

При этом нужно запомнить даже не сами эти формулы, а только то, что вычисления с комплексными числами подчиняются тем же законам, что и вычисления с вещественными числами, причем, кроме того, имеет место теорема 300; тогда указанные выше формулы для суммы, разности и произведения двух комплексных чисел получаются следующим простым вычислением:

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2 i) + (v_1 + v_2 i) &= (u_1 + v_1) + (u_2 i + v_2 i) = \\ &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)\, i, \\ (u_1 + u_2 i) - (v_1 + v_2 i) &= (u_1 - v_1) + (u_2 i - v_2 i) = \\ &= (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2)\, i, \\ (u_1 + u_2 i)(v_1 + v_2 i) &= (u_1 + u_2 i)\, v_1 + (u_1 + u_2 i)\, v_2 i = \\ &= u_1 v_1 + u_2 i v_1 + u_1 v_2 i + u_2 i v_2 i = \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_1 i + u_1 v_2 i + u_2 v_2 i i = \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_1 i + u_1 v_2 i + u_2 v_2 (-1) = \\ &= (u_1 v_1 - u_2 v_2) + (u_1 v_2 + u_2 v_1)\, i. \end{aligned}$$

Что касается деления, то в предположении, что v_1 и v_2 не оба равны нулю, вычисление дает следующее каноническое, в смысле теоремы 301, представление частного двух комплексных чисел:

$$\frac{u_1+u_2i}{v_1+v_2i}=\frac{(u_1+u_2i)(v_1-v_2i)}{(v_1+v_2i)(v_1-v_2i)}=$$

$$=\frac{(u_1v_1+u_2v_2)+(-(u_1v_2)+u_2v_1)\,i}{(v_1v_1+v_2v_2)+(-(v_1v_2)+v_2v_1)\,i}=$$

$$=\frac{(u_1v_1+u_2v_2)+(-(u_1v_2)+u_2v_1)\,i}{v_1v_1+v_2v_2}=$$

$$=\frac{u_1v_1+u_2v_2}{v_1v_1+v_2v_2}+\frac{-(u_1v_2)+u_2v_1}{v_1v_1+v_2v_2}\,i.$$

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
54	10 сверху	$<$	$>$
73	8 сверху	относительо	относительно
76	6 снизу	число	нижнее число
149	1 снизу	$\|\mathfrak{x}\|\mathfrak{y}\|$	$\|\mathfrak{x}\|\ \|\mathfrak{y}\|$

749.