

# КРАТКИЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

---

Книга 1

Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ

## МЕХАНИКА • ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

*Допущено Министерством  
высшего и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для студентов физических специальностей вузов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1989

530.1

Л 55

УДК 530.145

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| Предисловие . . . . .           | 6 |
| Некоторые обозначения . . . . . | 8 |

### ЧАСТЬ I. МЕХАНИКА

|   |    |
|---|----|
| <i>Глава I. Уравнения движения</i> . . . . .                  | 9  |
| § 1. Обобщенные координаты . . . . .                          | 9  |
| § 2. Принцип наименьшего действия . . . . .                   | 10 |
| § 3. Принцип относительности Галилея . . . . .                | 14 |
| § 4. Функция Лагранжа свободной частицы . . . . .             | 16 |
| § 5. Функция Лагранжа системы частиц . . . . .                | 18 |
| <i>Глава II. Законы сохранения</i> . . . . .                  | 24 |
| § 6. Энергия . . . . .  | 24 |
| § 7. Импульс . . . . .  | 26 |
| § 8. Центр инерции . . . . .                                  | 29 |
| § 9. Момент импульса . . . . .                                | 31 |
| <i>Глава III. Интегрирование уравнений движения</i> . . . . . | 36 |
| § 10. Одномерное движение . . . . .                           | 36 |
| § 11. Приведенная масса . . . . .                             | 38 |
| § 12. Движение в центральном поле . . . . .                   | 39 |
| § 13. Кеплерова задача . . . . .                              | 43 |
| <i>Глава IV. Столкновения частиц</i> . . . . .                | 47 |
| § 14. Упругие столкновения частиц . . . . .                   | 47 |
| § 15. Рассеяние частиц . . . . .                              | 51 |
| § 16. Формула Резерфорда . . . . .                            | 55 |
| <i>Глава V. Малые колебания</i> . . . . .                     | 58 |
| § 17. Свободные одномерные колебания . . . . .                | 58 |
| § 18. Вынужденные колебания . . . . .                         | 61 |
| § 19. Колебания систем со многими степенями свободы . . . . . | 67 |
| § 20. Затухающие колебания . . . . .                          | 74 |

|   |            |
|---|------------|
| § 21. Вынужденные колебания при наличии трения            | 78         |
| § 22. Параметрический резонанс                            | 81         |
| § 23. Ангармонические колебания                           | 85         |
| <b>Глава VI. Движение твердого тела</b>                   | <b>88</b>  |
| § 24. Угловая скорость                                    | 88         |
| § 25. Тензор инерции                                      | 91         |
| § 26. Момент импульса твердого тела                       | 99         |
| § 27. Уравнения движения твердого тела                    | 101        |
| § 28. Соприкосновение твердых тел                         | 105        |
| § 29. Движение в неинерциальной системе отсчета           | 110        |
| <b>Глава VII. Канонические уравнения</b>                  | <b>116</b> |
| § 30. Уравнения Гамильтона                                | 116        |
| § 31. Уравнение Гамильтона — Якоби                        | 119        |
| § 32. Адиабатические инварианты                           | 121        |
| <b>Глава VIII. Принцип относительности</b>                | <b>125</b> |
| § 33. Скорость распространения взаимодействий             | 125        |
| § 34. Интервал  | 128        |
| § 35. Собственное время                                   | 134        |
| § 36. Преобразование Лоренца                              | 137        |
| § 37. Преобразование скорости                             | 140        |
| § 38. Четырехмерные векторы                               | 142        |
| <b>Глава IX. Релятивистская механика</b>                  | <b>148</b> |
| § 39. Энергия и импульс                                   | 148        |
| § 40. Четырехмерный импульс                               | 152        |
| § 41. Распад частиц                                       | 153        |
| § 42. Упругие столкновения частиц                         | 155        |
| <b>ЧАСТЬ II. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА</b>                          |            |
| <b>Глава X. Заряд в электромагнитном поле</b>             | <b>161</b> |
| § 43. Четырехмерный потенциал поля                        | 161        |
| § 44. Уравнения движения заряда в поле                    | 164        |
| § 45. Калибровочная инвариантность                        | 167        |
| § 46. Постоянное электромагнитное поле                    | 169        |
| § 47. Движение в постоянном однородном электрическом поле | 171        |
| § 48. Движение в постоянном однородном магнитном поле     | 172        |
| § 49. Движение заряда в скрещенных полях                  | 175        |
| § 50. Тензор электромагнитного поля                       | 177        |
| § 51. Инварианты поля                                     | 180        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Глава XI. Уравнения электромагнитного поля . . . . .</b>  | <b>182</b> |
| § 52. Первая пара уравнений Максвелла . . . . .              | 182        |
| § 53. Действие для электромагнитного поля . . . . .          | 183        |
| § 54. Четырехмерный вектор тока . . . . .                    | 186        |
| § 55. Уравнение непрерывности . . . . .                      | 188        |
| § 56. Вторая пара уравнений Максвелла . . . . .              | 190        |
| § 57. Плотность и поток энергии . . . . .                    | 193        |
| § 58. Плотность и поток импульса . . . . .                   | 195        |
| <b>Глава XII. Постоянное электромагнитное поле . . . . .</b> | <b>199</b> |
| § 59. Закон Кулона . . . . .                                 | 199        |
| § 60. Электростатическая энергия зарядов . . . . .           | 201        |
| § 61. Поле равномерно движущегося заряда . . . . .           | 203        |
| § 62. Дипольный момент . . . . .                             | 206        |
| § 63. Квадрупольный момент . . . . .                         | 208        |
| § 64. Система зарядов во внешнем поле . . . . .              | 210        |
| § 65. Постоянное магнитное поле . . . . .                    | 212        |
| § 66. Магнитный момент . . . . .                             | 215        |
| § 67. Ларморова прецессия . . . . .                          | 217        |
| <b>Глава XIII. Электромагнитные волны . . . . .</b>          | <b>219</b> |
| § 68. Волновое уравнение . . . . .                           | 219        |
| § 69. Плоские волны . . . . .                                | 221        |
| § 70. Монохроматическая плоская волна . . . . .              | 224        |
| § 71. Эффект Доплера . . . . .                               | 227        |
| § 72. Спектральное разложение . . . . .                      | 228        |
| § 73. Частично поляризованный свет . . . . .                 | 230        |
| § 74. Геометрическая оптика . . . . .                        | 233        |
| § 75. Пределы геометрической оптики . . . . .                | 236        |
| § 76. Собственные колебания поля . . . . .                   | 239        |
| <b>Глава XIV. Излучение электромагнитных волн . . . . .</b>  | <b>244</b> |
| § 77. Запаздывающие потенциалы . . . . .                     | 244        |
| § 78. Потенциалы Лиенара — Вихерта . . . . .                 | 248        |
| § 79. Поле системы зарядов на далеких расстояниях . . . . .  | 251        |
| § 80. Дипольное излучение . . . . .                          | 253        |
| § 81. Излучение быстро движущегося заряда . . . . .          | 259        |
| § 82. Торможение излучением . . . . .                        | 261        |
| § 83. Рассеяние свободными зарядами . . . . .                | 263        |
| § 84. Рассеяние системой зарядов . . . . .                   | 266        |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Несмотря на стремление авторов к строгому отбору материала, объем томов нашего Курса теоретической физики при каждом переиздании увеличивается. Конечно, это — естественное и неизбежное следствие быстрого развития науки. Но вместе с тем эти книги в результате все в меньшей степени могут служить в качестве учебного пособия для студентов, да и вообще для не профессиональных физиков-теоретиков.

В этой ситуации Лев Давидович Ландау в последние годы перед роковой автомобильной аварией с большим энтузиазмом относился к идее создания на базе полного курса также и краткого курса теоретической физики. По его мысли, такой курс должен содержать минимальный объем сведений, который можно было бы рекомендовать всякому современному физика, вне зависимости от его специализации. Трагический случай помешал Л. Д. Ландау самому принять участие в осуществлении этого плана, и книги начинают выходить в свет уже после его смерти.

Этот краткий курс будет состоять из трех книг: 1. Механика. Электродинамика, 2. Квантовая механика, 3. Макроскопическая физика.

Предлагаемая Книга 1 составлена в основном путем тщательного сокращения текста наших «Механики» и «Теории поля». При этом я стремился полностью учесть все пожелания, высказанные в свое время Л. Д. Ландау в предваритель-

ных обсуждениях плана этого издания, а также учебные планы курсов, читавшихся им в различные годы в Московском государственном университете. В частности, Лев Давидович считал, что в такой краткий курс не должно входить изложение общей теории относительности. По его мнению, основные физические идеи и результаты этой теории должны излагаться в курсах общей физики, а изучение ее полного математического аппарата необходимо (по крайней мере в настоящее время) лишь специалистам-теоретикам.

Остальной материал двух томов полного курса сокращен здесь примерно вдвое. Поскольку этот краткий курс не имеет целью научить профессиональному владению всем аппаратом теоретической физики, то в книге оставлено лишь небольшое число более простых, иллюстративных задач.

*Е. М. Лифшиц*

Май 1968 г.

## НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

### *Механические величины*

Обобщенные координаты и импульсы  $q_i, p_i$

Функции Лагранжа и Гамильтона  $L$  и  $H$  (в части II:  $L$  и  $\mathcal{H}$ )

Энергия и импульс частицы  $E$  и  $\mathbf{p}$  (в части II:  $\mathcal{E}$  и  $\mathbf{p}$ )

Момент импульса  $\mathbf{M}$

Момент силы  $\mathbf{K}$

Тензор инерции  $I_{ik}$

### *Электромагнитные величины*

Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$

Напряженности электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$

Плотности зарядов и токов  $\rho$  и  $\mathbf{j}$

Электрический и магнитный дипольные моменты  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{m}$

### *Математические обозначения*

Элементы объема, площади и длины  $dV, d\mathbf{f}, d\mathbf{l}$

Трехмерные векторные и тензорные индексы обозначаются латинскими буквами  $i, k, l, \dots$ , пробегающими значения  $x, y, z$

Четырехмерные векторные и тензорные индексы обозначаются греческими буквами  $\lambda, \mu, \nu, \dots$ , пробегающими значения  $0, 1, 2, 3$

Правило поднятия и опускания четырехмерных индексов — на стр. 143

Правило суммирования по дважды повторяющимся (немым) индексам — на стр. 92 и 143



# МЕХАНИКА

## Г л а в а I

### УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

#### § 1. Обобщенные координаты

Одним из основных понятий механики является понятие *материальной точки*<sup>1)</sup>. Под этим названием понимают тело размерами которого можно пренебречь при описании его движения. Разумеется, возможность такого пренебрежения зависит от конкретных условий той или иной задачи. Так, планеты можно считать материальными точками при изучении их движения вокруг Солнца, но, конечно, не при рассмотрении их суточного вращения.

Положение материальной точки в пространстве определяется ее радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , компоненты которого совпадают с ее декартовыми координатами  $x, y, z$ . Производная  $\mathbf{r}$  по времени  $t$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

называется скоростью, а вторая производная  $d^2\mathbf{r}/dt^2$  — ускорением точки. Ниже, как это принято, мы будем часто обозначать дифференцирование по времени точкой над буквой:  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ .

Для определения положения системы из  $N$  материальных точек в пространстве надо задать  $N$  радиус-векторов, т. е.  $3N$  координат. Вообще число независимых величин, задание которых необходимо для однозначного определения положения системы, называется числом ее *степеней свободы*; в данном случае это число равно  $3N$ . Эти величины не обязательно

<sup>1)</sup> Вместо термина «материальная точка» мы будем часто говорить о «частицах».

должны быть декартовыми координатами точек, и в зависимости от условий задачи может оказаться более удобным выбор каких-либо других координат. Любые  $s$  величин  $q_1, q_2, \dots, q_s$ , вполне характеризующие положение системы (с  $s$  степенями свободы), называют ее *обобщенными координатами*, а производные  $\dot{q}_i$  — ее *обобщенными скоростями*.

Задание значений обобщенных координат еще не определяет, однако, «механического состояния» системы в данный момент времени в том смысле, что оно не позволяет предсказать положение системы в последующие моменты времени. При заданных значениях координат система может обладать произвольными скоростями, а в зависимости от значения последних будет различным и положение системы в следующий момент времени (т. е. через бесконечно малый временной интервал  $dt$ ).

Одновременное же задание всех координат и скоростей полностью определяет, как показывает опыт, состояние системы и позволяет в принципе предсказать дальнейшее ее движение. С математической точки зрения это значит, что заданием всех координат  $q$  и скоростей  $\dot{q}$  в некоторый момент времени однозначно определяется также и значение ускорений  $\ddot{q}$  в этот момент <sup>1)</sup>.

Соотношения, связывающие ускорения с координатами и скоростями, называются *уравнениями движения*. По отношению к функциям  $q(t)$  это — дифференциальные уравнения второго порядка, интегрирование которых позволяет в принципе определить эти функции, т. е. траектории движения механической системы.

## § 2. Принцип наименьшего действия

Наиболее общая формулировка закона движения механических систем дается так называемым *принципом наименьшего действия* (или *принципом Гамильтона*). Согласно этому принципу каждая механическая система характеризуется определенной функцией

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$$

<sup>1)</sup> Для краткости обозначений мы будем часто условно понимать под  $q$  совокупность всех координат  $q_1, q_2, \dots, q_s$  (и под  $\dot{q}$  аналогично совокупность всех скоростей).

или, в краткой записи,  $L(q, \dot{q}, t)$ , причем движение системы удовлетворяет следующему условию.

Пусть в моменты времени  $t = t_1$  и  $t = t_2$  система занимает определенные положения, характеризуемые двумя наборами значений координат  $q^{(1)}$  и  $q^{(2)}$ . Тогда между этими положениями система движется таким образом, что интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2,1)$$

имеет наименьшее возможное значение. Функция  $L$  называется *функцией Лагранжа* данной системы, а интеграл (2,1) — *действием*.

Тот факт, что функция Лагранжа содержит только  $q$  и  $\dot{q}$ , но не более высокие производные координат по времени, является выражением указанного выше факта, что механическое состояние полностью определяется заданием координат и скоростей.

Перейдем к выводу дифференциальных уравнений, решающих задачу об определении минимума интеграла (2,1). Для упрощения записи формул предположим сначала, что система обладает всего одной степенью свободы, так что должна быть определена всего одна функция  $q(t)$ .

Пусть  $q = q(t)$  есть как раз та функция, для которой  $S$  имеет минимум. Это значит, что  $S$  возрастает при замене  $q(t)$  на любую функцию вида

$$q(t) + \delta q(t), \quad (2,2)$$

где  $\delta q(t)$  — функция, малая во всем интервале времени от  $t_1$  до  $t_2$  (ее называют *вариацией* функции  $q(t)$ ); поскольку при  $t = t_1$  и  $t = t_2$  все сравниваемые функции (2,2) должны принимать одни и те же значения  $q^{(1)}$  и  $q^{(2)}$ , то должно быть

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (2,3)$$

Изменение  $S$  при замене  $q$  на  $q + \delta q$  дается разностью

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt.$$

Разложение этой разности по степеням  $\delta q$  и  $\delta \dot{q}$  (в подынтегральном выражении) начинается с членов первого порядка.

Необходимым условием минимальности  $S$  является обращение в нуль совокупности этих членов; ее называют первой вариацией (или просто вариацией) интеграла. Таким образом, принцип наименьшего действия можно записать в виде

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0, \quad (2,4)$$

или, производя варьирование:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0.$$

Замечая, что  $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$ , проинтегрируем второй член по частям и получим:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \quad (2,5)$$

Но в силу условий (2,3) первый член в этом выражении исчезает. Остается интеграл, который должен быть равен нулю при произвольных значениях  $\delta q$ . Это возможно только в том случае, если подынтегральное выражение тождественно обращается в нуль. Таким образом, мы получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

При наличии нескольких степеней свободы в принципе наименьшего действия должны независимо варьироваться  $s$  различных функций  $q_i(t)$ . Очевидно, что мы получим тогда  $s$  уравнений вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2,6)$$

Это — искомые дифференциальные уравнения; они называются в механике *уравнениями Лагранжа*<sup>1)</sup>. Если функция Лагранжа данной механической системы известна, то уравнения (2,6)

<sup>1)</sup> В вариационном исчислении, рассматривающем формальную задачу об определении экстремумов интегралов вида (2,1), они называются уравнениями Эйлера.

устанавливают связь между ускорениями, скоростями и координатами, т. е. представляют собой уравнения движения системы. С математической точки зрения уравнения (2,6) составляют систему  $s$  уравнений второго порядка для  $s$  неизвестных функций  $q_i(t)$ . Общее решение такой системы содержит  $2s$  произвольных постоянных. Для их определения и тем самым полного определения движения механической системы необходимо знание начальных условий, характеризующих состояние системы в некоторый заданный момент времени, например, знание начальных значений всех координат и скоростей.

Пусть механическая система состоит из двух частей  $A$  и  $B$ , каждая из которых, будучи замкнутой, имела бы в качестве функции Лагранжа соответственно функции  $L_A$  и  $L_B$ . Тогда в пределе, при разведении частей настолько далеко, что взаимодействием между ними можно пренебречь, лагранжева функция всей системы стремится к пределу

$$\lim L = L_A + L_B. \quad (2,7)$$

Это свойство аддитивности функции Лагранжа выражает собой тот факт, что уравнения движения каждой из взаимодействующих частей не могут содержать величины, относящиеся к другим частям системы.

Очевидно, что умножение функции Лагранжа механической системы на произвольную постоянную само по себе не отражается на уравнениях движения. Отсюда, казалось бы, могла вытекать существенная неопределенность: функции Лагранжа различных изолированных механических систем могли бы умножаться на любые различные постоянные. Свойство аддитивности устраняет эту неопределенность, — оно допускает лишь одновременное умножение лагранжевых функций всех систем на одинаковую постоянную, что сводится просто к естественному произволу в выборе единиц измерения этой физической величины; мы вернемся еще к этому вопросу в § 4.

Необходимо сделать еще следующее общее замечание. Рассмотрим две функции  $L'(q, \dot{q}, t)$  и  $L(q, \dot{q}, t)$ , отличающиеся друг от друга на полную производную по времени от какой-либо функции координат и времени  $f(q, t)$ :

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t). \quad (2,8)$$

Вычисленные с помощью этих двух функций интегралы (2,1) связаны соотношением

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt = \\ = S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1),$$

т. е. отличаются друг от друга дополнительным членом, исчезающим при варьировании действия, так что условие  $\delta S' = 0$  совпадает с условием  $\delta S = 0$ , и вид уравнений движения остается неизменным.

Таким образом, функция Лагранжа определена лишь с точностью до прибавления к ней полной производной от произвольной функции координат и времени.

### § 3. Принцип относительности Галилея

Для описания происходящих в природе процессов необходимо выбрать ту или иную *систему отсчета*. Под системой отсчета понимают систему координат, служащую для указания положения частиц в пространстве, вместе со связанными с этой системой часами, служащими для указания времени.

В различных системах отсчета законы природы — в том числе законы движения — имеют, вообще говоря, различный вид. Если взять произвольную систему отсчета, то может оказаться, что законы даже совсем простых явлений будут выглядеть в ней сложно. Естественно возникает вопрос об отыскании такой системы отсчета, в которой законы природы выглядели бы наиболее просто.

Простейший вид движения — движение свободного тела, т. е. тела, не подвергающегося каким-либо внешним воздействиям. Существуют системы отсчета, в которых *свободное движение* происходит с постоянной по величине и направлению скоростью. Такие системы отсчета называются *инерциальными*, а утверждение об их существовании составляет содержание *закона инерции*.

Свойство инерциальности можно сформулировать также как утверждение об однородности и изотропии пространства и однородности времени по отношению к такой системе отсчета. Однородность пространства и времени означает

эквивалентность всех положений свободной частицы в пространстве во все моменты времени, а изотропия пространства — эквивалентность различных направлений в нем. Неизменность характера свободного движения частицы в любом направлении пространства является очевидным следствием этих свойств.

Если две системы отсчета движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно и если одна из них инерциальна, то очевидно, что и другая тоже является инерциальной: всякое свободное движение и в этой системе будет происходить с постоянной скоростью. Таким образом, имеется сколько угодно инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга с постоянными скоростями.

Оказывается, однако, что различные инерциальные системы отсчета эквивалентны не только по отношению к свойствам свободного движения. Опыт показывает, что справедлив так называемый *принцип относительности*. Согласно этому принципу все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Другими словами, уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованию координат и времени от одной инерциальной системы к другой. Это значит, что уравнения законов природы, будучи выражены через координаты и время в различных инерциальных системах отсчета, имеют один и тот же вид.

Наряду с принципом относительности, в самой основе представлений *классической* (или *ньютоновской*) механики<sup>1)</sup> лежит предположение об *абсолютности времени* — одинаковости хода времени во всех инерциальных системах отсчета. Объединенный с этим предположением принцип относительности называют *принципом относительности Галилея*.

Координаты  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  одной и той же точки в двух различных инерциальных системах отсчета  $K$  и  $K'$ , из которых вторая движется со скоростью  $V$  относительно первой, связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + Vt, \quad (3,1)$$

где  $t$  — время, одинаковое в обеих системах:

$$t = t'. \quad (3,2)$$

<sup>1)</sup> В отличие от *релятивистской* (или *эйнштейновской*) механики, о которой будет идти речь в гл. VIII, IX.

Продифференцировав обе стороны равенства (3,1) по времени, получим обычный закон сложения скоростей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \quad (3,3)$$

Формулы (3,1—2) называют *преобразованием Галилея*. Принцип относительности Галилея требует инвариантности законов природы по отношению к этому преобразованию.

Все сказанное достаточно ясно свидетельствует об исключительности свойств инерциальных систем отсчета, в силу которых именно эти системы должны, как правило, использоваться при изучении механических явлений. Везде ниже, где обратное не оговорено особо, будет подразумеваться такой выбор системы отсчета.

Полная физическая эквивалентность всех инерциальных систем отсчета показывает, в то же время, что не существует никакой «абсолютной» системы, которую можно было бы предпочесть всем другим системам.

#### § 4. Функция Лагранжа свободной частицы

Переходя к определению вида функции Лагранжа, начнем с простейшего случая — свободного движения одной частицы (относительно инерциальной системы отсчета).

В силу однородности пространства и времени функция Лагранжа свободной частицы не может зависеть явным образом ни от радиус-вектора частицы  $\mathbf{r}$ , ни от времени  $t$ , т. е.  $L$  является функцией только от скорости  $\mathbf{v}$ . В силу же изотропии пространства функция Лагранжа не может зависеть также и от направления вектора  $\mathbf{v}$ , так что является функцией лишь от его абсолютной величины, т. е. от квадрата  $\mathbf{v}^2 = v^2$ :

$$L = L(v^2).$$

Вид этой функции однозначно устанавливается принципом относительности Галилея. В силу этого принципа функция  $L(v^2)$  должна иметь одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета. С другой стороны, при переходе от одной системы отсчета к другой скорость частицы преобразуется согласно (3,3), так что  $L(v^2)$  переходит в  $L[(\mathbf{v}' + \mathbf{V})^2]$ . Необходимо, следовательно, чтобы последнее выражение, если и отличалось от  $L(v^2)$ , то лишь на полную производную от



функции координат и времени; как было указано в конце § 2, такая производная всегда может быть опущена.

Этому требованию удовлетворяет только зависимость вида

$$L = av^2.$$

При преобразовании  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$  имеем:

$$L(v^2) = av^2 = a(\mathbf{v}' + \mathbf{V})^2 = av'^2 + 2a\mathbf{v}'\mathbf{V} + aV^2,$$

или, замечая, что  $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$ :

$$L(v^2) = L(v'^2) + \frac{d}{dt}(2ar'\mathbf{V} + V^2t).$$

Появляющийся лишний член действительно оказывается полной производной и может быть опущен.

Постоянную  $a$  принято обозначать как  $m/2$ , так что окончательно напомним функцию Лагранжа свободно движущейся точки в виде

$$L = \frac{mv^2}{2}. \quad (4,1)$$

Величина  $m$  называется *массой* материальной точки. В силу свойства аддитивности функции Лагранжа, для системы невзаимодействующих точек имеем<sup>1)</sup>

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}. \quad (4,2)$$

Следует подчеркнуть, что лишь при учете этого свойства данное определение массы приобретает реальный смысл. Как уже было отмечено в § 2, всегда можно умножить функцию Лагранжа на любую постоянную; это не отражается на уравнениях движения. Для функции (4,2) такое умножение сводится к изменению единицы измерения массы; отношения же масс различных частиц, которые только и имеют реальный физический смысл, остаются при этом преобразовании неизменными.

Легко видеть, что масса не может быть отрицательной. В самом деле, согласно принципу наименьшего действия для

<sup>1)</sup> В качестве индекса, указывающего номер частицы, мы будем пользоваться первыми буквами латинского алфавита, а для индексов, нумерующих координаты, используем буквы  $i, k, l, \dots$

реального движения частицы из точки 1 пространства в точку 2 интеграл

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2} dt$$

имеет минимум. Если бы масса была отрицательной, то для траекторий, по которым частица сначала быстро удаляется от 1, а затем быстро приближается к 2, интеграл действия принимал бы сколь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения, т. е. не мог бы иметь минимума.

Полезно заметить, что

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2}. \quad (4,3)$$

Поэтому для составления функции Лагранжа достаточно найти квадрат длины элемента дуги  $dl$  в соответствующей системе координат.

В декартовых координатах, например,  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , поэтому

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (4,4)$$

В цилиндрических  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$ , откуда

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \quad (4,5)$$

В сферических  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$  и

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2). \quad (4,6)$$

## § 5. Функция Лагранжа системы частиц

Рассмотрим теперь систему частиц, взаимодействующих друг с другом, но ни с какими посторонними телами; такую систему называют *замкнутой*. Оказывается, что взаимодействие между частицами может быть описано прибавлением к функции Лагранжа невзаимодействующих точек (4,2) определенной (зависящей от характера взаимодействия) функции

координат<sup>1)</sup>. Обозначив эту функцию через  $-U$ , напишем:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) \quad (5,1)$$

( $\mathbf{r}_a$  — радиус-вектор  $a$ -й точки). Это есть общий вид функции Лагранжа замкнутой системы.

Сумму

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

называют *кинетической энергией*, а функцию  $U$  — *потенциальной энергией* системы; смысл этих названий выяснится в § 6.

Тот факт, что потенциальная энергия зависит только от расположения всех материальных точек в один и тот же момент времени, означает, что изменение положения одной из них мгновенно отражается на всех остальных; можно сказать, что взаимодействия «распространяются» мгновенно. Неизбежность такого характера взаимодействий в классической механике тесно связана с основными предпосылками последней — абсолютностью времени и принципом относительности Галилея. Если бы взаимодействие распространялось не мгновенно, т. е. с конечной скоростью, то эта скорость была бы различна в разных (движущихся друг относительно друга) системах отсчета, так как абсолютность времени автоматически означает применимость обычного правила сложения скоростей ко всем явлениям. Но тогда законы движения взаимодействующих тел были бы различны в разных (инерциальных) системах отсчета, что противоречило бы принципу относительности.

В § 3 мы говорили только об однородности времени. Вид функции Лагранжа (5,1) показывает, что в механике время не только однородно, но и изотропно, т. е. его свойства одинаковы по обоим направлениям. В самом деле, замена  $t$  на  $-t$  (*обращение времени*) оставляет функцию Лагранжа, а следовательно, и уравнения движения неизменными. Другими словами, если в системе возможно некоторое движение, то всегда возможно и обратное движение, т. е. такое, при котором система

<sup>1)</sup> Это утверждение относится лишь к классической механике,

проходит те же состояния в обратном порядке. В этом смысле все движения, происходящие по законам классической механики, обратимы.

Зная функцию Лагранжа, мы можем составить уравнения движения <sup>1)</sup>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (5,2)$$

Подставив сюда (5,1), получим:

$$m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (5,3)$$

Уравнения движения в этой форме называются *уравнениями Ньютона* и представляют собой основу механики системы взаимодействующих частиц. Вектор

$$\mathbf{F}_a = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}, \quad (5,4)$$

стоящий в правой стороне уравнений (5,3), называется *силой*, действующей на *a*-ю частицу. Вместе с *U* она зависит лишь от координат всех частиц, но не от их скоростей. Уравнения (5,3) показывают поэтому, что и векторы ускорения частиц являются функциями только от координат.

Потенциальная энергия есть величина, определяемая лишь с точностью до прибавления к ней произвольной постоянной; такое прибавление не изменило бы уравнений движения (частный случай указанной в конце § 2 неоднозначности функции Лагранжа). Наиболее естественный и обычно принятый способ выбора этой постоянной заключается в том, чтобы потенциальная энергия стремилась к нулю при увеличении расстояний между частицами.

Если для описания движения используются не декартовы координаты точек, а произвольные обобщенные координаты  $q_i$ , то для получения лагранжевой функции надо произвести соответствующее преобразование

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k.$$

---

<sup>1)</sup> Под производной скалярной величины по вектору подразумевается вектор, компоненты которого равны производным от этой величины по соответствующим компонентам вектора.

Подставляя эти выражения в функцию

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U,$$

получим искомую функцию Лагранжа, которая будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q), \quad (5,5)$$

где  $a_{ik}$  — функции только от координат. Кинетическая энергия в обобщенных координатах по-прежнему является квадратичной функцией скоростей, но может зависеть также и от координат.

До сих пор мы говорили только о замкнутых системах. Рассмотрим теперь незамкнутую систему  $A$ , взаимодействующую с другой системой  $B$ , совершающей заданное движение. В таком случае говорят, что система  $A$  движется в заданном внешнем поле (создаваемом системой  $B$ ). Поскольку уравнения движения получаются из принципа наименьшего действия путем независимого варьирования каждой из координат (т. е. как бы считая остальные известными), мы можем для нахождения функции Лагранжа  $L_A$  системы  $A$  воспользоваться лагранжевой функцией  $L$  всей системы  $A + B$ , заменив в ней координаты  $q_B$  заданными функциями времени.

Предполагая систему  $A + B$  замкнутой, будем иметь:

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B),$$

где первые два члена представляют собой кинетические энергии систем  $A$  и  $B$ , а третий член — их совместную потенциальную энергию. Подставив вместо  $q_B$  заданные функции времени и опустив член  $T(q_B(t), \dot{q}_B(t))$ , зависящий только от времени (и поэтому являющийся полной производной от некоторой другой функции времени), получим:

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)).$$

Таким образом, движение системы во внешнем поле описывается функцией Лагранжа обычного типа с тем лишь отличием, что теперь потенциальная энергия может зависеть от времени явно.

Так, для движения одной частицы во внешнем поле общий вид функции Лагранжа

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\mathbf{r}, t), \quad (5,6)$$

и уравнение движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \quad (5,7)$$

*Однородным* называют поле, во всех точках которого на частицу действует одна и та же сила  $\mathbf{F}$ . Потенциальная энергия в таком поле равна, очевидно:

$$U = -\mathbf{F}\mathbf{r}. \quad (5,8)$$

В заключение этого параграфа сделаем еще следующее замечание по поводу применения уравнений Лагранжа к различным конкретным задачам. Часто приходится иметь дело с такими механическими системами, в которых взаимодействие между телами (материальными точками) имеет, как говорят, характер *связей*, т. е. ограничений, налагаемых на взаимное расположение тел. Фактически такие связи осуществляются путем скрепления тел различными стержнями, нитями, шарнирами и т. п. Это обстоятельство вносит в движение новый фактор — движение тел сопровождается трением в местах их соприкосновения, в результате чего задача выходит, вообще говоря, за рамки чистой механики (см. § 20). Однако во многих случаях трение в системе оказывается настолько слабым, что его влиянием на движение можно полностью пренебречь. Если к тому же можно пренебречь массами «скрепляющих элементов» системы, то роль последних сведется просто к уменьшению числа степеней свободы системы  $s$  (по сравнению с числом  $3N$ ). Для определения ее движения можно при этом снова пользоваться функцией Лагранжа вида (5,5) с числом независимых обобщенных координат, отвечающих фактическому числу степеней свободы.

### Задачи

Найти функцию Лагранжа следующих систем, находящихся в однородном поле тяжести (ускорение силы тяжести —  $g$ ).

1. Двойной плоский маятник (рис. 1).

Решение. В качестве координат берем углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , которые нити  $l_1$  и  $l_2$  образуют с вертикалью. Тогда для точки  $m_1$

имеем:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \quad U = -m_1 g l_1 \cos \varphi_1.$$

Чтобы найти кинетическую энергию второй точки, выражаем ее

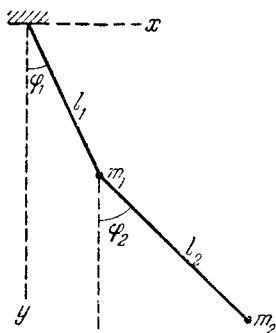


Рис. 1.

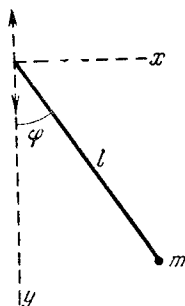


Рис. 2.

декартовы координаты  $x_2$ ,  $y_2$  (начало координат в точке подвеса, ось  $y$  — по вертикали вниз) через углы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ :

$$x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \quad y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2.$$

После этого получим:

$$T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2].$$

Окончательно:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2.$$

2. Плоский маятник, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания по закону  $a \cos \gamma t$  (рис. 2).

Решение. Координаты точки  $m$ :

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi + a \cos \gamma t.$$

Функция Лагранжа

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mal\gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi + mgl \cos \varphi.$$

Здесь опущены члены, зависящие только от времени, и исключена полная производная по времени от  $mal\gamma \cos \varphi \sin \gamma t$ .

## Глава II

### ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

#### § 6. Энергия

При движении механической системы  $2s$  величин  $q_i$  и  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), определяющих ее состояние, изменяются со временем. Существуют, однако, такие функции этих величин, которые сохраняют при движении постоянные значения, зависящие только от начальных условий. Эти функции называют *интегралами движения*.

Число независимых интегралов движения для замкнутой механической системы с  $s$  степенями свободы равно  $2s - 1$ . Это очевидно из следующих простых соображений. Общее решение уравнений движения содержит  $2s$  произвольных постоянных (см. стр. 13). Поскольку уравнения движения замкнутой системы не содержат времени явно, то выбор начала отсчета времени совершенно произволен, и одна из произвольных постоянных в решении уравнений всегда может быть выбрана в виде аддитивной постоянной  $t_0$  во времени. Исключив  $t + t_0$  из  $2s$  функций

$$\begin{aligned}q_i &= q_i(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}), \\ \dot{q}_i &= \dot{q}_i(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}),\end{aligned}$$

мы выразим  $2s - 1$  произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}$  в виде функций от  $q$  и  $\dot{q}$ , которые и будут интегралами движения.

Однако далеко не все интегралы движения играют одинаково важную роль в механике. Среди них есть несколько, постоянство которых имеет весьма глубокое происхождение, связанное с основными свойствами пространства и времени — их однородностью и изотропией. Все эти, как говорят,



сохраняющиеся величины имеют важное общее свойство аддитивности — их значение для системы, состоящей из нескольких невзаимодействующих частей, равно сумме значений для каждой из частей в отдельности.

Именно свойство аддитивности придает в механике соответствующим величинам особенно важную роль. Предположим, например, что два тела взаимодействуют лишь в течение некоторого времени. Поскольку как до, так и после взаимодействия каждый из аддитивных интегралов всей системы равен сумме их значений для обоих тел в отдельности, то законы сохранения этих величин сразу дают возможность сделать ряд заключений о состоянии тел после взаимодействия, если их состояния до взаимодействия известны.

Начнем с закона сохранения, возникающего в связи с однородностью времени.

В силу этой однородности лагранжева функция замкнутой системы не зависит явно от времени. Поэтому полная производная функции Лагранжа по времени может быть записана следующим образом:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

(если бы  $L$  зависела явно от времени, к правой стороне равенства добавился бы член  $\partial L/\partial t$ ). Заменяя производные  $\partial L/\partial q_i$  согласно уравнениям Лагранжа на  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ , получим:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0.$$

Отсюда видно, что величина

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (6,1)$$

остаётся неизменной при движении замкнутой системы, т. е. является одним из ее интегралов движения. Эта величина называется *энергией* системы. Аддитивность энергии непосред-

ственно следует из аддитивности функции Лагранжа, через которую она выражается согласно (6,1) линейным образом.

Закон сохранения энергии справедлив не только для замкнутых систем, но и для систем, находящихся в постоянном (т. е. не зависящем от времени) внешнем поле; единственное использованное в приведенном выводе свойство функции Лагранжа — отсутствие явной зависимости от времени — имеется и в этом случае. Механические системы, энергия которых сохраняется, иногда называют *консервативными*.

Как мы видели в § 5, лагранжева функция замкнутой (или находящейся в постоянном поле) системы имеет вид

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q),$$

где  $T$  — квадратичная функция скоростей. Применяя к ней известную теорему Эйлера об однородных функциях, получим:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Подставляя это значение в (6,1), найдем:

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q); \quad (6,2)$$

в декартовых координатах

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots). \quad (6,3)$$

Таким образом, энергия системы может быть представлена в виде суммы двух существенно различных членов: кинетической энергии, зависящей от скоростей, и потенциальной энергии, зависящей только от координат частиц.

## § 7. Импульс

Другой закон сохранения возникает в связи с *однородностью пространства*.

В силу этой однородности механические свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве. В соответствии с этим рассмотрим бесконечно малый перенос на отрезок  $\mathbf{e}$  и потребуем, чтобы функция Лагранжа осталась неизменной.

Параллельный перенос означает преобразование, при котором все точки системы смещаются на один и тот же отрезок, т. е. их радиус-векторы  $\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_a + \boldsymbol{\varepsilon}$ . Изменение функции  $L$  в результате бесконечно малого изменения координат при неизменных скоростях частиц есть

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a = \boldsymbol{\varepsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a},$$

где суммирование производится по всем материальным точкам системы. Ввиду произвольности  $\boldsymbol{\varepsilon}$  требование  $\delta L = 0$  эквивалентно требованию

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0. \quad (7.1)$$

В силу уравнений Лагранжа (5,2) получаем отсюда:

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что в замкнутой механической системе векторная величина

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \quad (7.2)$$

остаётся неизменной при движении. Вектор  $\mathbf{P}$  называется *импульсом*<sup>1)</sup> системы. Дифференцируя функцию Лагранжа (5,1), найдем, что импульс следующим образом выражается через скорости точек:

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a. \quad (7.3)$$

Аддитивность импульса очевидна. Более того, в отличие от энергии импульс системы равен сумме импульсов

$$\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$$

отдельных частиц вне зависимости от возможности пренебрежения взаимодействием между ними.

Закон сохранения всех трех компонент вектора импульса имеет место лишь в отсутствие внешнего поля. Однако

<sup>1)</sup> Устаревшее название — количество движения.

отдельные компоненты импульса могут сохраняться и при наличии поля, если потенциальная энергия в нем не зависит от какой-либо из декартовых координат. При переносе вдоль соответствующей координатной оси механические свойства системы, очевидно, не меняются, и тем же способом мы найдем, что проекция импульса на эту ось сохраняется. Так, в однородном поле, направленном вдоль оси  $z$ , сохраняются компоненты импульса вдоль осей  $x$  и  $y$ .

Исходное равенство (7,1) имеет простой физический смысл. Производная  $\partial L/\partial \mathbf{r}_a = -\partial U/\partial \mathbf{r}_a$  есть сила  $\mathbf{F}_a$ , действующая на  $a$ -ю частицу. Таким образом, равенство (7,1) означает, что сумма сил, действующих на все частицы замкнутой системы, равна нулю:

$$\sum_a \mathbf{F}_a = 0. \quad (7,4)$$

В частности, в случае системы, состоящей всего из двух материальных точек,  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$ : сила, действующая на первую частицу со стороны второй, равна по величине, но противоположна по направлению силе, действующей на вторую частицу со стороны первой. Это утверждение известно под названием *закона равенства действия и противодействия*.

Если движение описывается обобщенными координатами  $q_i$ , то производные лагранжевой функции по обобщенным скоростям

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (7,5)$$

называются *обобщенными импульсами*, а производные

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (7,6)$$

называются *обобщенными силами*. В этих обозначениях уравнения Лагранжа имеют вид

$$\dot{p}_i = F_i. \quad (7,7)$$

В декартовых координатах обобщенные импульсы совпадают с компонентами векторов  $\mathbf{p}_a$ . В общем же случае величины  $p_i$  являются линейными однородными функциями обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$ , отнюдь не сводящимися к произведениям массы на скорость.

## § 8. Центр инерции

Импульс замкнутой механической системы имеет различные значения по отношению к различным (инерциальным) системам отсчета. Если система отсчета  $K'$  движется относительно системы отсчета  $K$  со скоростью  $\mathbf{V}$ , то скорости  $\mathbf{v}'_a$  и  $\mathbf{v}_a$  частиц по отношению к этим системам связаны соотношением  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$ . Поэтому связь между значениями  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{P}'$  импульса в этих системах дается формулой

$$\mathbf{P} = \sum_b m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{V} \sum_a m_a,$$

или

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V} \sum_a m_a. \quad (8,1)$$

В частности, всегда существует такая система отсчета  $K'$ , в которой полный импульс обращается в нуль. Положив в (8,1)  $\mathbf{P}' = 0$ , найдем, что скорость этой системы отсчета равна

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{\sum_a m_a} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{v}_a}{\sum_a m_a}. \quad (8,2)$$

Если полный импульс механической системы равен нулю, то говорят, что она покоится относительно соответствующей системы отсчета. Это является вполне естественным обобщением понятия покоя отдельной материальной точки. Соответственно скорость  $\mathbf{V}$ , даваемая формулой (8,2), приобретает смысл скорости «движения как целого» механической системы с отличным от нуля импульсом. Мы видим, таким образом, что закон сохранения импульса позволяет естественным образом сформулировать понятия покоя и скорости механической системы как целого.

Формула (8,2) показывает, что связь между импульсом  $\mathbf{P}$  и скоростью  $\mathbf{V}$  системы как целого такая же, какая была бы между импульсом и скоростью одной материальной точки с массой  $\mu = \sum_a m_a$ , равной сумме масс всех частиц в системе. Это обстоятельство можно сформулировать как утверждение об *аддитивности массы*.

Правая сторона формулы (8,2) может быть представлена как полная производная по времени от выражения

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_a \mathbf{r}_a}{\sum m_a}. \quad (8,3)$$

Можно сказать, что скорость системы как целого есть скорость перемещения в пространстве точки, радиус-вектор которой дается формулой (8,3). Такую точку называют *центром инерции* системы.

Закон сохранения импульса замкнутой системы можно сформулировать как утверждение о том, что ее центр инерции движется прямолинейно и равномерно. В таком виде это есть обобщение закона инерции, сформулированного в § 3 для одной свободной материальной точки, «центр инерции» которой совпадает с ней самой.

При изучении механических свойств замкнутой системы естественно пользоваться той системой отсчета, в которой ее центр инерции покоится. Тем самым исключается из рассмотрения равномерное и прямолинейное движение системы как целого.

Энергию покоящейся как целое механической системы обычно называют ее *внутренней энергией*  $E_{\text{вн}}$ . Она включает в себя кинетическую энергию относительного движения частиц в системе и потенциальную энергию их взаимодействия. Полная же энергия системы, движущейся как целое со скоростью  $V$ , может быть представлена в виде:

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + E_{\text{вн}}. \quad (8,4)$$

Хотя эта формула сама по себе довольно очевидна, дадим ее прямой вывод. Энергии  $E$  и  $E'$  механической системы в двух системах отсчета  $K$  и  $K'$  связаны соотношением

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\mathbf{v}'_a + \mathbf{V})^2 + U = \\ &= \frac{\mu V^2}{2} + \mathbf{V} \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \sum_a \frac{m_a v_a'^2}{2} + U \end{aligned}$$

или

$$E = E' + \mathbf{V}\mathbf{P}' + \frac{\mu V^2}{2}. \quad (8,5)$$

Этой формулой определяется закон преобразования энергии при переходе от одной системы отсчета к другой, подобно тому как для импульса этот закон дается формулой (8,1). Если в системе  $K'$  центр инерции покоится, то  $\mathbf{P}'=0$ ,  $E'=E_{\text{вн}}$ , и мы возвращаемся к формуле (8,4).

## § 9. Момент импульса

Перейдем к выводу закона сохранения, возникновение которого связано с *изотропией пространства*.

Эта изотропия означает, что механические свойства замкнутой системы не меняются при любом повороте системы как целого в пространстве. В соответствии с этим рассмотрим бесконечно малый поворот системы и потребуем, чтобы ее функция Лагранжа при этом не изменилась.

Введем вектор  $\delta\varphi$  бесконечно малого поворота, абсолютная величина которого равна углу  $\delta\varphi$  поворота, а направление совпадает с осью поворота (причем так, что направление поворота отвечает правилу винта по отношению к направлению  $\delta\varphi$ ).

Найдем, прежде всего, чему равно при таком повороте приращение радиус-вектора, проведенного из общего начала координат (расположенного на оси вращения) к какой-либо из материальных точек поворачиваемой системы. Линейное перемещение конца радиус-вектора связано с углом соотношением

$$|\delta\mathbf{r}| = r \sin\theta \cdot \delta\varphi$$

(рис. 3). Направление же вектора  $\delta\mathbf{r}$  перпендикулярно к плоскости, проходящей через  $\mathbf{r}$  и  $\delta\varphi$ . Поэтому ясно, что

$$\delta\mathbf{r} = [\delta\varphi \cdot \mathbf{r}]. \quad (9,1)$$

При повороте системы меняется направление не только радиус-векторов, но и скоростей всех частиц, причем все векторы преобразуются по одинаковому закону. Поэтому приращение скорости относительно неподвижной системы координат

$$\delta\mathbf{v} = [\delta\varphi \cdot \mathbf{v}]. \quad (9,2)$$

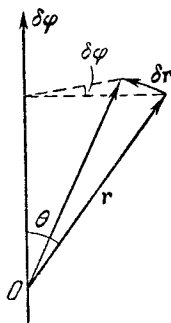


Рис. 3.

Подставив эти выражения в условие неизменяемости функции Лагранжа при повороте

$$\delta L = \sum_a \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \delta \mathbf{v}_a \right) = 0$$

и заменив производные  $\partial L / \partial \mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a$ ,  $\partial L / \partial \mathbf{r}_a = \dot{\mathbf{p}}_a$ , получим:

$$\sum_a (\dot{\mathbf{p}}_a [\delta \varphi \cdot \mathbf{r}_a] + \mathbf{p}_a [\delta \varphi \cdot \mathbf{v}_a]) = 0.$$

Наконец, производя циклическую перестановку множителей и вынося  $\delta \varphi$  за знак суммы, находим:

$$\delta \varphi \sum_a ([\mathbf{r}_a \dot{\mathbf{p}}_a] + [\mathbf{v}_a \mathbf{p}_a]) = \delta \varphi \frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = 0.$$

Ввиду произвольности  $\delta \varphi$  отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = 0,$$

т. е. мы приходим к выводу, что при движении замкнутой системы сохраняется векторная величина

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a], \quad (9,3)$$

называемая *моментом импульса* (или просто *моментом*) системы<sup>1)</sup>. Аддитивность этой величины очевидна, причем, как и у импульса, она не зависит от наличия или отсутствия взаимодействия между частицами.

Этим исчерпываются аддитивные интегралы движения. Таким образом, всякая замкнутая система имеет всего семь таких интегралов: энергия и по три компоненты векторов импульса и момента.

Поскольку в определение момента входят радиус-векторы частиц, то его значение, вообще говоря, зависит от выбора начала координат. Радиус-векторы  $\mathbf{r}_a$  и  $\dot{\mathbf{r}}_a$  одной и той же

<sup>1)</sup> Употребляются также названия *вращательный момент* или *угловой момент*.



точки по отношению к началам, отстоящим на расстоянии  $a$ , связаны соотношением  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{a}$ . Поэтому имеем:

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = \sum_a [\mathbf{r}'_a \mathbf{p}_a] + [\mathbf{a} \sum_a \mathbf{p}_a]$$

или

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{a} \mathbf{P}]. \quad (9,4)$$

Из этой формулы видно, что только если система как целое покоится (т. е.  $\mathbf{P} = 0$ ), ее момент не зависит от выбора начала координат. На законе сохранения момента эта неопределенность его значения, разумеется, не сказывается, так как у замкнутой системы импульс тоже сохраняется.

Выведем также формулу, связывающую значения момента импульса в двух различных инерциальных системах отсчета  $K$  и  $K'$ , из которых вторая движется относительно первой со скоростью  $\mathbf{V}$ . Будем считать, что начала координат в системах  $K$  и  $K'$  в данный момент времени совпадают. Тогда радиус-векторы частиц в обеих системах одинаковы, скорости же связаны посредством  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$ . Поэтому имеем:

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a] = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}'_a] + \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{V}].$$

Первая сумма в правой стороне равенства есть момент  $\mathbf{M}$  в системе  $K'$ ; введя во вторую сумму радиус-вектор центра инерции согласно (8,3), получаем:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mu [\mathbf{R} \mathbf{V}]. \quad (9,5)$$

Эта формула определяет закон преобразования момента импульса при переходе от одной системы отсчета к другой, подобно тому, как для импульса и энергии аналогичные законы даются формулами (8,1) и (8,5).

Если система отсчета  $K'$  есть та, в которой данная механическая система покоится как целое, то  $\mathbf{V}$  есть скорость центра инерции последней, а  $\mu \mathbf{V}$  — ее полный импульс  $\mathbf{P}$  (относительно  $K$ ). Тогда

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{R} \mathbf{P}]. \quad (9,6)$$

Другими словами, момент импульса  $\mathbf{M}$  механической системы

складывается из ее «собственного момента» относительно системы отсчета, в которой она покоится, и момента  $[RP]$ , связанного с ее движением как целого.

Хотя закон сохранения всех трех компонент момента (относительно произвольного начала координат) имеет место только для замкнутой системы, в более ограниченном виде этот закон может иметь место и для систем, находящихся во внешнем поле. Из приведенного выше вывода очевидно, что всегда сохраняется проекция момента на такую ось, относительно которой данное поле симметрично, и потому механические свойства системы не меняются при любом повороте вокруг этой оси; при этом, конечно, момент должен быть определен относительно какой-нибудь точки (начала координат), лежащей на этой же оси.

Наиболее важным случаем такого рода является поле с центральной симметрией, т. е. поле, в котором потенциальная энергия зависит только от расстояния до некоторой определенной точки (центра) в пространстве. Очевидно, что при движении в таком поле сохраняется проекция момента на любую ось, проходящую через центр. Другими словами, сохраняется весь вектор  $\mathbf{M}$  момента, но определенного не относительно произвольной точки пространства, а относительно центра поля.

Другой пример: однородное поле вдоль оси  $z$ , в котором сохраняется проекция  $M_z$  момента, причем начало координат может быть выбрано произвольным образом.

Отметим, что проекция момента на какую-либо ось (назовем ее  $z$ ) может быть найдена дифференцированием функции Лагранжа по формуле

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}, \quad (9,7)$$

где координата  $\varphi$  есть угол поворота вокруг оси  $z$ . Это ясно уже из характера изложенного выше вывода закона сохранения момента, но в том же можно убедиться и прямым вычислением. В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  имеем (подставляя  $x_a = r_a \cos \varphi_a, y_a = r_a \sin \varphi_a$ ):

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a. \quad (9,8)$$

С другой стороны, функция Лагранжа в этих переменных

имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (r_a^2 + r_a^2 \dot{\phi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

и ее подстановка в формулу (9,7) приводит к тому же выражению (9,8).

### Задача

Какие компоненты импульса  $\mathbf{P}$  и момента  $\mathbf{M}$  сохраняются при движении в следующих полях:

а) поле бесконечной однородной плоскости.

О т в е т:  $P_x, P_y, M_z$  (бесконечная плоскость — плоскость  $xy$ ).

б) Поле бесконечного однородного цилиндра.

О т в е т:  $M_z, P_z$  (ось цилиндра — ось  $z$ ).

в) Поле бесконечной однородной призмы.

О т в е т:  $P_z$  (ребра призмы параллельны оси  $z$ ).

г) Поле двух точек.

О т в е т:  $M_z$  (точки находятся на оси  $z$ ).

д) Поле бесконечной однородной полуплоскости.

О т в е т:  $P_y$  (бесконечная полуплоскость — часть плоскости  $xy$ , ограниченная осью  $y$ ).

е) Поле однородного конуса.

О т в е т:  $M_z$  (ось конуса — ось  $z$ ).

## Глава III

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

#### § 10. Одномерное движение

Одномерным называют движение системы с одной степенью свободы. Наиболее общий вид лагранжевой функции такой системы, находящейся в постоянных внешних условиях, есть

$$L = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q), \quad (10,1)$$

где  $a(q)$  — некоторая функция обобщенной координаты  $q$ . В частности, если  $q$  есть декартова координата (назовем ее  $x$ ),

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \quad (10,2)$$

Соответствующие этим лагранжевым функциям уравнения движения интегрируются в общем виде. При этом нет даже необходимости выписывать само уравнение движения, а следует исходить сразу из его первого интеграла — уравнения, выражающего закон сохранения энергии. Так, для функции Лагранжа (10,2) имеем:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E.$$

Это есть дифференциальное уравнение первого порядка, интегрирующееся путем разделения переменных. Имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]},$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{const.} \quad (10,3)$$

Роль двух произвольных постоянных в решении уравнения движения играют здесь полная энергия  $E$  и постоянная интегрирования  $\text{const}$ .

Поскольку кинетическая энергия — величина существенно положительная, то при движении полная энергия всегда больше потенциальной, т. е. движение может происходить только в тех областях пространства, где  $U(x) < E$ .

Пусть, например, зависимость  $U(x)$  имеет вид, изображенный на рис. 4. Проведя на этом же графике горизонтальную прямую, соответствующую заданному значению полной энергии, мы сразу же выясним возможные области движения. Так в изображенном на рис. 4 случае движение может происходить лишь в области  $AB$  или в области справа от  $C$ .

Точки, в которых потенциальная энергия равна полной,

$$U(x) = E, \quad (10,4)$$

определяют границы движения. Они являются *точками остановки*, поскольку в них скорость обращается в нуль. Если область движения ограничена двумя такими точками, то движение происходит в ограниченной области пространства; оно является, как говорят, *финитным*. Если же область движения не ограничена или ограничена лишь с одной стороны, — движение *инфинитно*, частица уходит на бесконечность.

Одномерное финитное движение является колебательным — частица совершает периодически повторяющееся движение между двумя границами (на рис. 4 в *потенциальной яме*  $AB$  между точками  $x_1$  и  $x_2$ ). При этом, согласно общему свойству обратимости (стр. 19), время движения от  $x_1$  до  $x_2$  равно времени обратного движения от  $x_2$  до  $x_1$ . Поэтому период колебаний  $T$ , т. е. время, за которое точка пройдет от  $x_1$  до  $x_2$  и обратно, равен удвоенному времени прохождения отрезка  $x_1x_2$  или согласно (10,3)

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (10,5)$$

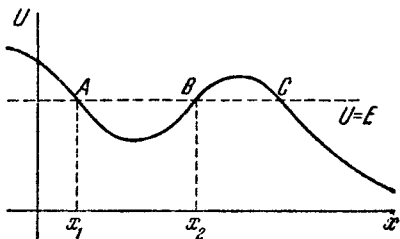


Рис. 4.

причем пределы  $x_1$  и  $x_2$  являются корнями уравнения (10,4) при данном значении  $E$ . Эта формула определяет период движения в зависимости от полной энергии частицы.

## § 11. Приведенная масса

Полное решение в общем виде допускает чрезвычайно важная задача о движении системы, состоящей всего из двух взаимодействующих частиц (*задача двух тел*).

В качестве предварительного шага к решению этой задачи покажем, каким образом она может быть существенно упрощена путем разложения движения системы на движение центра инерции и движение точек относительно последнего.

Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц зависит лишь от расстояния между ними, т. е. от абсолютной величины разности их радиус-векторов. Поэтому лагранжева функция такой системы

$$L = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (11,1)$$

Введем вектор взаимного расстояния обеих точек

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

и поместим начало координат в центре инерции, что дает:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0.$$

Из двух последних равенств находим:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (11,2)$$

Подставляя эти выражения в (11,1), получим:

$$L = \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(r), \quad (11,3)$$

где введено обозначение

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \quad (11,4)$$

величина  $m$  называется *приведенной массой*. Функция (11,3) формально совпадает с функцией Лагранжа одной материальной точки с массой  $m$ , движущейся во внешнем поле

$U(r)$ , симметричном относительно неподвижного начала координат.

Таким образом, задача о движении двух взаимодействующих материальных точек сводится к решению задачи о движении одной точки в заданном внешнем поле  $U(r)$ . По решению  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  этой задачи траектории  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$  и  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$  каждой из частиц  $m_1$  и  $m_2$  в отдельности (по отношению к их общему центру инерции) получаются по формулам (11,2).

## § 12. Движение в центральном поле

Сведя задачу о движении двух тел к задаче о движении одного тела, мы пришли к вопросу об определении движения частицы во внешнем поле, в котором ее потенциальная энергия зависит только от расстояния  $r$  до определенной неподвижной точки; такое поле называют *центральным*. Сила

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = - \frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

действующая на частицу, по абсолютной величине зависит при этом тоже только от  $r$  и направлена в каждой точке вдоль радиус-вектора.

Как было уже показано в § 9, при движении в центральном поле сохраняется момент системы относительно центра поля. Для одной частицы это есть

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}].$$

Поскольку векторы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{r}$  взаимно перпендикулярны, постоянство  $\mathbf{M}$  означает, что при движении частицы ее радиус-вектор все время остается в одной плоскости — плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{M}$ .

Таким образом, траектория движения частицы в центральном поле лежит целиком в одной плоскости. Введя в ней полярные координаты  $r, \varphi$ , напомним функцию Лагранжа в виде (ср. (4,5))

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (12,1)$$

Эта функция не содержит в явном виде координату  $\varphi$ . Всякую обобщенную координату  $q_i$ , не входящую явным

образом в лагранжеву функцию, называют *циклической*. В силу уравнения Лагранжа имеем для такой координаты:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

т. е. соответствующий ей обобщенный импульс  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$  является интегралом движения. Это обстоятельство приводит к существенному упрощению задачи интегрирования уравнений движения при наличии циклических координат.

В данном случае обобщенный импульс

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

совпадает с моментом  $M_z = M$  (см. (9,8)), так что мы возвращаемся к известному уже нам закону сохранения момента

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.} \quad (12,2)$$

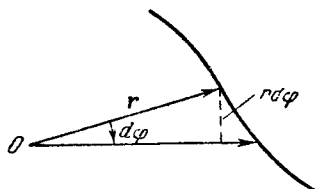


Рис. 5.

Заметим, что для плоского движения одной частицы в центральном поле этот закон допускает простую геометрическую интерпретацию. Выражение  $\frac{1}{2} r \cdot r d\varphi$

представляет собой площадь сектора, образованного двумя бесконечно близкими радиус-векторами и элементом дуги траектории (рис. 5). Обозначив ее как  $df$ , напишем момент частицы в виде

$$M = 2mf\dot{\varphi}, \quad (12,3)$$

где производную  $\dot{\varphi}$  называют *секториальной скоростью*. Поэтому сохранение момента означает постоянство секториальной скорости — за равные промежутки времени радиус-вектор движущейся точки описывает равные площади (так называемый *второй закон Кеплера*<sup>1)</sup>).

Полное решение задачи о движении частицы в центральном поле проще всего получить, исходя из законов сохранения энергии и момента, не выписывая при этом самих урав-

<sup>1)</sup> Закон сохранения момента для частицы, движущейся в центральном поле, иногда называют *интегралом площадей*.



нений движения. Выражая  $\dot{\phi}$  через  $M$  из (12,2) и подставляя в выражение для энергии, получим:

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \quad (12,4)$$

Отсюда

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}} \quad (12,5)$$

или, разделяя переменные и интегрируя:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + \text{const.} \quad (12,6)$$

Далее, написав (12,2) в виде

$$d\phi = \frac{M}{mr^2} dt,$$

подставив сюда  $dt$  из (12,5) и интегрируя, находим:

$$\phi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{2m}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const.} \quad (12,7)$$

Формулы (12,6) и (12,7) решают в общем виде поставленную задачу. Вторая из них определяет связь между  $r$  и  $\phi$ , т. е. уравнение траектории. Формула же (12,6) определяет в неявном виде расстояние  $r$  движущейся точки от центра как функцию времени. Отметим, что угол  $\phi$  меняется со временем монотонным образом — из (12,2) видно, что  $\dot{\phi}$  никогда не меняет знака.

Выражение (12,4) показывает, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в поле с «эффективной» потенциальной энергией

$$U_{\text{эфф}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (12,8)$$

Величину  $M^2/2mr^2$  называют *центробежной энергией*. Значения  $r$ , при которых

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E, \quad (12,9)$$

определяют границы области движения по расстоянию от центра. При выполнении равенства (12,9) радиальная скорость  $\dot{r}$  обращается в нуль. Это не означает остановки частицы (как при истинном одномерном движении), так как угловая скорость  $\dot{\varphi}$  не обращается в нуль. Равенство  $\dot{r} = 0$  означает *точку поворота* траектории, в которой функция  $r(t)$  переходит от увеличения к уменьшению или наоборот.

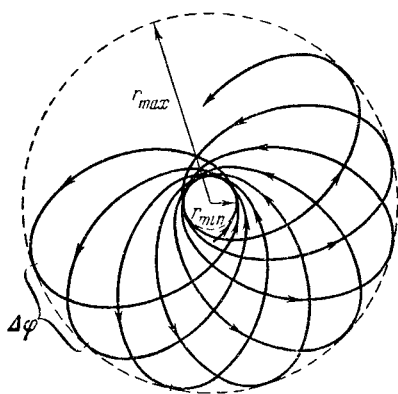


Рис. 6.

Если область допустимого изменения  $r$  ограничена лишь одним условием  $r \geq r_{\min}$ , то движение частицы инфинитно — ее траектория приходит из бесконечности и уходит на бесконечность.

Если область изменения  $r$  имеет две границы  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$ , то движение является финитным и траектория целиком лежит внутри кольца, ограничен-

ного окружностями  $r = r_{\max}$  и  $r = r_{\min}$ . Это, однако, не означает, что траектория непременно является замкнутой кривой. За время, в течение которого  $r$  изменяется от  $r_{\max}$  до  $r_{\min}$  и затем снова до  $r_{\max}$ , радиус-вектор повернется на угол  $\Delta\varphi$ , равный согласно (12,7)

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}}}. \quad (12,10)$$

Условие замкнутости траектории заключается в том, чтобы этот угол был равен рациональной части от  $2\pi$ , т. е. имел вид  $\Delta\varphi = 2\pi n_1/n_2$ , где  $n_1, n_2$  — целые числа. Тогда через  $n_2$  повторений этого периода времени радиус-вектор точки, сделав  $n_1$  полных оборотов, совпадет со своим первоначальным значением, т. е. траектория замкнется.

Однако такие случаи исключительны, и при произвольном виде  $U(r)$  угол  $\Delta\varphi$  не является рациональной частью от  $2\pi$ . Поэтому в общем случае траектория финитного движения не замкнута. Она бесчисленное число раз проходит через минимальное и максимальное расстояние (как, например, на рис. 6) и за бесконечное время заполняет все кольцо между двумя граничными окружностями.

Существуют лишь два типа центральных полей, в которых все траектории финитных движений замкнуты. Это поля, в которых потенциальная энергия частицы пропорциональна  $1/r$  или  $r^2$ . Первый из этих случаев рассмотрен в следующем параграфе, а второй соответствует так называемому пространственному осциллятору (см. задачу 3 § 19).

### § 13. Кеплерова задача

Важнейшим случаем центральных полей являются поля, в которых потенциальная энергия обратно пропорциональна  $r$  и соответственно силы — обратно пропорциональны  $r^2$ . Сюда относятся ньютоновские поля тяготения и кулоновские электростатические поля; первые, как известно, имеют характер притяжения, а вторые могут быть как полями притяжения, так и отталкивания.

Рассмотрим сначала поле притяжения, в котором

$$U = -\frac{\alpha}{r} \quad (13,1)$$

с положительной постоянной  $\alpha$ . График «эффективной» потенциальной энергии

$$U_{\text{эфф}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (13,2)$$

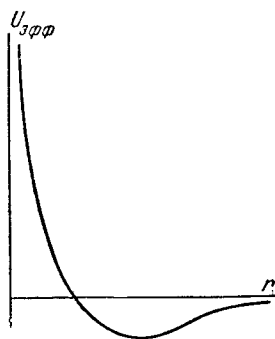


Рис. 7.

имеет вид, изображенный на рис. 7. При  $r \rightarrow 0$  она обращается в  $+\infty$ , а при  $r \rightarrow \infty$  стремится к нулю со стороны отрицательных значений; при  $r = M^2/\alpha m$  она имеет минимум, равный

$$(U_{\text{эфф}})_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}. \quad (13,3)$$

Из этого графика сразу очевидно, что при  $E \geq 0$  движение частицы будет инфинитным, а при  $E < 0$  — финитным.

Форма траектории получается с помощью общей формулы (12,7). Подставляя в нее  $U = -\alpha/r$  и производя элементарное интегрирование, получим:

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \text{const.}$$

Выбирая начало отсчета угла  $\varphi$  так, чтобы  $\text{const} = 0$ , и вводя обозначения

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \quad (13,4)$$

перепишем формулу для траектории в виде

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi. \quad (13,5)$$

Это — уравнение конического сечения с фокусом в начале координат;  $p$  и  $e$  — так называемые *параметр* и *эксцентриситет* орбиты. Сделанный нами выбор начала отсчета  $\varphi$  заключается, как видно из (13,5), в том, что точка с  $\varphi = 0$  является ближайшей к центру.

В эквивалентной задаче двух тел, взаимодействующих по закону (13,1), орбита каждой из частиц тоже представляет собой коническое сечение с фокусом в их общем центре инерции.

Из (13,4) видно, что при  $E < 0$  эксцентриситет  $e < 1$ , т. е. орбита является эллипсом (рис. 8) и движение финитно в соответствии со сказанным в начале параграфа. Согласно известным формулам аналитической геометрии большая и малая полуоси эллипса

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{a}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (13,6)$$

Наименьшее допустимое значение энергии совпадает с (13,3),

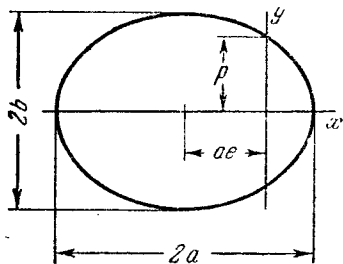


Рис. 8.

при этом  $e=0$ , т. е. эллипс обращается в окружность. Отметим, что большая полуось эллипса зависит только от энергии (но не от момента) частицы. Наименьшее и наибольшее расстояния до центра поля (фокуса эллипса) равны

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e), \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e). \quad (13,7)$$

Эти выражения (с  $a$  и  $e$  из (13,6) и (13,4)) можно было бы, конечно, получить и непосредственно как корни уравнения  $U_{\text{эфф}}(r) = E$ .

Время обращения по эллиптической орбите, т. е. период движения  $T$ , удобно определить с помощью закона сохранения момента в форме «интеграла площадей» (12,3). Интегрируя это равенство по времени от нуля до  $T$ , получим:

$$2mf = TM,$$

где  $f$  — площадь орбиты. Для эллипса  $f = \pi ab$ , и с помощью формул (13,6) находим:

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{a}} = \pi a \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \quad (13,8)$$

Отметим, что период зависит только от энергии частицы. При этом квадрат периода пропорционален кубу линейных размеров орбиты (так называемый *третий закон Кеплера*).

При  $E \geq 0$  движение инфинитно. Если  $E > 0$ , то эксцентриситет  $e > 1$ , т. е. траектория является гиперболой, огибающей центр поля (фокус), как показано на рис. 9. Ближайшее расстояние до центра

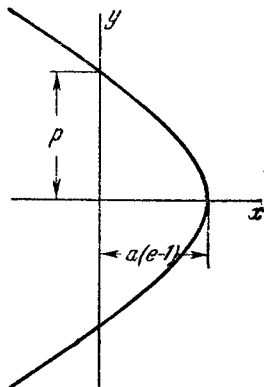


Рис. 9.

$$r_{\min} = \frac{p}{e+1} = a(e-1), \quad (13,9)$$

где

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{a}{2E}$$

— «полуось» гиперболы.

В случае же  $E=0$  эксцентриситет  $e=1$ , т. е. частица движется по параболе, с минимальным расстоянием  $r_{\min} = p/2$ . Этот случай осуществляется, если частица начинает свое движение из состояния покоя на бесконечности.

Обратимся к движению в поле отталкивания, в котором

$$U = \frac{\alpha}{r} \quad (13,10)$$

( $\alpha > 0$ ). В этом случае эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{эфф}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

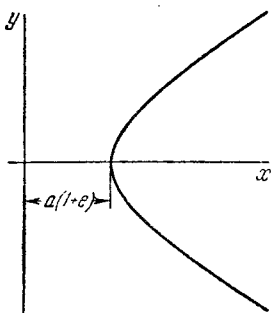


Рис. 10.

монотонно убывает от  $+\infty$  до нуля при изменении  $r$  от нуля до  $\infty$ .

Энергия частицы может быть только положительной и движение всегда инфинитно. Все вычисления для этого случая в точности аналогичны произведенным выше. Траектория является гиперболой (или параболой при  $E=0$ ):

$$\frac{p}{r} = -1 + e \cos \varphi \quad (13,11)$$

( $p$  и  $e$  определяются прежними формулами (13,4)). Она проходит мимо центра поля, как показано на рис. 10. Минимальное расстояние до центра

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1} = a(e+1). \quad (13,12)$$

## Глава IV

### СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ

#### § 14. Упругие столкновения частиц

Уже сами по себе законы сохранения импульса и энергии позволяют сделать во многих случаях ряд важных заключений о свойствах различных механических процессов. При этом особенно существенно то обстоятельство, что эти свойства совершенно не зависят от конкретного рода взаимодействия между участвующими в процессе частицами.

Рассмотрим *упругое* столкновение двух частиц, т. е. столкновение, при котором внутренние состояния частиц не меняются. В силу этого свойства при применении к упругому столкновению закона сохранения энергии можно не учитывать внутренней энергии частиц.

Будем называть *лабораторной* систему отсчета, в которой одна из частиц (пусть это будет частица  $m_2$ ) до столкновения покоилась, а другая ( $m_1$ ) двигалась со скоростью  $\mathbf{v}$ . Проще всего, однако, столкновение выглядит в другой системе отсчета, в которой покоится центр инерции обеих частиц (*система центра инерции*); значения величин в этой системе будем отличать индексом 0. Скорости частиц в системе центра инерции связаны со скоростью  $\mathbf{v}$  в лабораторной системе соотношениями

$$\mathbf{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_{20} = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}$$

(ср. (11,2)).

В силу закона сохранения импульса импульсы обеих частиц остаются после столкновения равными по величине и противоположными по направлению, а в силу закона

сохранения энергии остаются неизменными и их абсолютные величины. Таким образом, результат столкновения сводится в системе центра инерции к повороту скоростей обеих частиц, остающихся взаимно противоположными и неизменными по величине. Если обозначить посредством  $\mathbf{n}_0$  единичный вектор в направлении скорости частицы  $m_1$  после столкновения, то скорости обеих частиц после столкновения (отличаем их штрихом) будут:

$$\mathbf{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \mathbf{n}_0, \quad \mathbf{v}'_{20} = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \mathbf{n}_0. \quad (14,1)$$

Чтобы возвратиться к лабораторной системе отсчета, надо добавить к этим выражениям скорость  $\mathbf{V}$  центра инерции. Таким образом, для скоростей частиц в лабораторной системе после столкновения получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \mathbf{n}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \\ \mathbf{v}'_2 &= - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \mathbf{n}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (14,2)$$

Этим исчерпываются сведения, которые можно получить о столкновении, исходя из одних только законов сохранения. Направление же вектора  $\mathbf{n}_0$  зависит от закона взаимодействия частиц и их взаимного расположения при столкновении.

Формулы (14,2) можно интерпретировать геометрически, для чего удобнее перейти от скоростей к импульсам. Умножив равенства (14,2) соответственно на  $m_1$  и  $m_2$ , получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_1 &= m v \mathbf{n}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{p}'_2 &= - m v \mathbf{n}_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1 \end{aligned} \quad (14,3)$$

(где  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  — приведенная масса). Построим окружность с радиусом  $mv$  и произведем указанное на рис. 11 построение. Если единичный вектор  $\mathbf{n}_0$  направлен вдоль  $\overline{OC}$ , то векторы  $\overline{AC}$  и  $\overline{CB}$  дают соответственно импульсы  $\mathbf{p}'_1$  и  $\mathbf{p}'_2$ . При заданном  $\mathbf{p}_1$  радиус окружности и положение точки  $A$  неизменны, а точка  $C$  может занимать любое положение на окружности. Точка  $A$  лежит внутри окружности при  $m_1 < m_2$  (рис. 11, а) и вне окружности, если  $m_1 > m_2$  (рис. 11, б).



Указанные на рисунках углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  представляют собой углы отклонения частиц после столкновения по отношению к направлению удара (направлению  $\mathbf{p}_1$ ). Центральный же угол, обозначенный на рисунках посредством  $\chi$  (дающий направление  $\mathbf{p}_0$ ), представляет собой угол поворота первой частицы в системе центра инерции. Из рисунка очевидно,

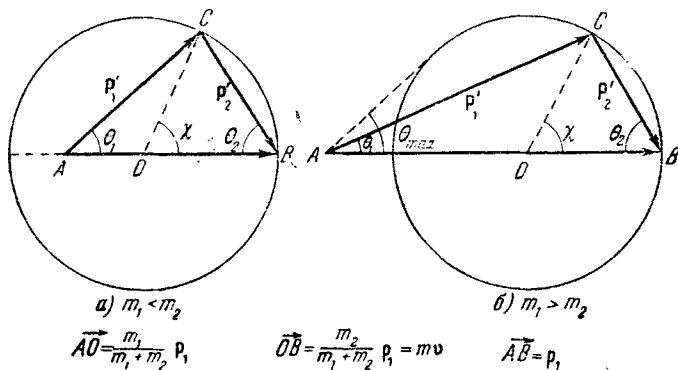


Рис. 11.

что углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  могут быть выражены через угол  $\chi$  формулами

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}. \quad (14,4)$$

Выпишем также формулы, определяющие абсолютные величины скоростей обеих частиц после столкновения через тот же угол  $\chi$ :

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \chi}}{m_1 + m_2} v, \quad v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin \frac{\chi}{2}. \quad (14,5)$$

Сумма  $\theta_1 + \theta_2$  есть угол разлета частиц после столкновения. Очевидно, что  $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$  при  $m_1 < m_2$  и  $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$  при  $m_1 > m_2$ .

Случаю, когда обе частицы после столкновения движутся на одной прямой («лобовой удар»), соответствует  $\chi = \pi$ , т. е. положение точки  $C$  на диаметре слева от точки  $A$  (рис. 11, а;

при этом  $\mathbf{p}'_1$  и  $\mathbf{p}'_2$  взаимно противоположны) или между  $A$  и  $O$  (рис. 11, б; при этом  $\mathbf{p}'_1$  и  $\mathbf{p}'_2$  направлены в одну сторону). Скорости частиц после столкновения в этом случае равны

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v. \quad (14,6)$$

Значение  $v_2$  при этом — наибольшее возможное; максимальная энергия, которую может получить в результате столкновения первоначально покоившаяся частица, равна, следовательно,

$$E'_{2\max} = \frac{m_2 v'^2_{2\max}}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1, \quad (14,7)$$

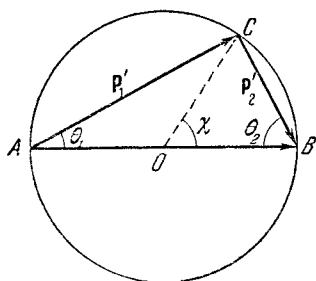


Рис. 12.

где  $E_1 = m_1 v_1^2 / 2$  — первоначальная энергия налетающей частицы.

При  $m_1 < m_2$  скорость первой частицы после столкновения может иметь любое направление. Если же  $m_1 > m_2$ , угол отклонения падающей частицы не может превышать некоторого максимального значения, соответствующего такому положению точки  $C$  (рис. 11, б), при котором прямая  $AC$  касается окружности. Очевидно, что  $\sin \theta_{1\max} = OC/OA$ , или

$$\sin \theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (14,8)$$

Особенно просто выглядит столкновение частиц (из которых одна первоначально покоится) с одинаковыми массами. В этом случае не только точка  $B$ , но и точка  $A$  лежат на окружности (рис. 12). При этом

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}, \quad (14,9)$$

$$v'_1 = v \cos \frac{\chi}{2}, \quad v'_2 = v \sin \frac{\chi}{2}. \quad (14,10)$$

Отметим, что частицы разлетаются после столкновения под прямым углом друг к другу.

## § 15. Рассеяние частиц

Как было уже указано в предыдущем параграфе, полное определение результата столкновения двух частиц (определение угла  $\chi$ ) требует решения уравнений движения с учетом конкретного закона взаимодействия частиц.

В соответствии с общим правилом будем рассматривать сначала эквивалентную задачу об отклонении одной частицы с массой  $m$  в поле  $U(r)$  неподвижного силового центра (расположенного в центре инерции частиц).

Траектория частицы в центральном поле симметрична по отношению к прямой, проведенной в ближайшую к центру точку орбиты ( $OA$  на рис. 13). Поэтому обе асимптоты орбиты пересекают указанную прямую под одинаковыми углами.

Если обозначить эти углы посредством  $\varphi_0$ , то угол  $\chi$  отклонения частицы при ее пролетании мимо центра есть, как видно из рисунка,

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|. \quad (15,1)$$

Угол же  $\varphi_0$  определяется согласно (12,7) интегралом

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m [E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}, \quad (15,2)$$

взятым между ближайшим к центру и бесконечно удаленным положениям частицы. Напомним, что  $r_{\min}$  является корнем выражения, стоящего под знаком радикала.

При инфинитном движении, с которым мы имеем здесь дело, удобно ввести вместо постоянных  $E$  и  $M$  другие — скорость  $v_{\infty}$  частицы на бесконечности и так называемое *прицельное расстояние*  $\rho$ . Последнее представляет собой длину

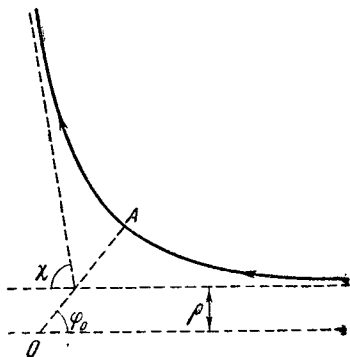


Рис. 13.

перпендикуляра, опущенного из центра на направление  $v_{\infty}$ , т. е. расстояние, на котором частица прошла бы мимо центра, если бы силовое поле отсутствовало (рис. 13). Энергия и момент выражаются через эти величины согласно

$$E = \frac{mv_{\infty}^2}{2}, \quad M = mrv_{\infty}, \quad (15,3)$$

а формула (15,2) принимает вид

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_{\infty}^2}}}. \quad (15,4)$$

Вместе с (15,1) она определяет зависимость  $\chi$  от  $\rho$ .

В физических приложениях приходится обычно иметь дело не с индивидуальным отклонением частицы, а, как говорят, с *рассеянием* целого пучка одинаковых частиц, падающих на рассеивающий центр с одинаковой скоростью  $v_{\infty}$ . Различные частицы в пучке обладают различными прицельными расстояниями и соответственно рассеиваются под различными углами  $\chi$ . Обозначим посредством  $dN$  число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы, лежащие в интервале между  $\chi$  и  $\chi + d\chi$ . Само по себе это число неудобно для характеристики процесса рассеяния, так как оно зависит от плотности падающего пучка (пропорционально ей). Поэтому введем отношение

$$d\sigma = \frac{dN}{n}, \quad (15,5)$$

где  $n$  — число частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка (мы предполагаем, естественно, что пучок однороден по всему своему сечению). Это отношение имеет размерность площади и называется *эффективным сечением* (или просто *сечением*) *рассеяния*. Оно всецело определяется видом рассеивающего поля и является важнейшей характеристикой процесса рассеяния.

Будем считать, что связь между  $\chi$  и  $\rho$  — взаимно однозначна; это так, если угол рассеяния является монотонно убывающей функцией прицельного расстояния. В таком случае рассеиваются в заданный интервал углов между  $\chi$  и

$\chi + d\chi$  лишь те частицы, которые летят с прицельным расстоянием в определенном интервале между  $\rho(\chi)$  и  $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$ . Число таких частиц равно произведению  $n$  на площадь кольца между окружностями с радиусами  $\rho$  и  $\rho + d\rho$ , т. е.  $dN = 2\pi\rho d\rho \cdot n$ . Поэтому эффективное сечение

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho. \quad (15,6)$$

Чтобы найти зависимость эффективного сечения от угла рассеяния, достаточно переписать это выражение в виде

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi. \quad (15,7)$$

Мы пишем здесь абсолютное значение производной  $d\rho/d\chi$ , имея в виду, что она может быть отрицательной (как это обычно бывает). Часто относят  $d\sigma$  не к элементу плоского угла  $d\chi$ , а к элементу телесного угла  $do$ . Телесный угол между конусами с углами раствора  $\chi$  и  $\chi + d\chi$  есть  $do = 2\pi \sin \chi d\chi$ . Поэтому имеем из (15,7):

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| do. \quad (15,8)$$

Возвращаясь к фактической задаче о рассеянии пучка частиц не на неподвижном силовом центре, а на других первоначально покоившихся частицах, мы можем сказать, что формула (15,7) определяет эффективное сечение в зависимости от угла рассеяния в системе центра инерции. Для нахождения же эффективного сечения в зависимости от угла рассеяния  $\theta$  в лабораторной системе надо выразить в этой формуле  $\chi$  через  $\theta$  согласно формулам (14,4). При этом получаются выражения как для сечения рассеяния падающего пучка частиц ( $\chi$  выражено через  $\theta_1$ ), так и для частиц, первоначально покоившихся ( $\chi$  выражено через  $\theta_2$ ).

### Задачи

1. Определить эффективное сечение рассеяния частиц на абсолютно твердом шарике радиуса  $a$  (т. е. при законе взаимодействия:  $U = \infty$  при  $r < a$  и  $U = 0$  при  $r > a$ ).

Решение. Так как вне шарика частица движется свободно, а внутрь него проникнуть вообще не может, то траектория

складывается из двух прямых, расположенных симметрично относительно радиуса, проведенного в точку их пересечения с шариком (рис. 14). Как видно из рисунка,

$$\rho = a \sin \varphi_0 = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2}.$$

Подставляя в (15,7) или (15,8), получим:

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi d\chi = \frac{a^2}{4} d\chi, \quad (1)$$

т. е. в системе центра инерции рассеяние изотропно. Интегрируя  $d\sigma$  по всем углам, найдем, что полное сечение  $\sigma = \pi a^2$ , в соответствии с тем, что прицельная площадь, в которую должна попасть частица для того, чтобы вообще рассеяться, есть площадь сечения шарика.

2. Для того же случая выразить эффективное сечение как функцию энергии  $\epsilon$ , теряемой рассеиваемыми частицами.

Решение. Энергия, теряемая частицей  $m_1$ , совпадает с энергией, приобретаемой частицей  $m_2$ . Согласно (14,5) и (14,7) имеем:

$$\begin{aligned} \epsilon = E_2' &= \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_\infty^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} = \\ &= \epsilon_{\max} \sin^2 \frac{\chi}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$d\epsilon = \frac{1}{2} \epsilon_{\max} \sin \chi d\chi,$$

и, подставляя в формулу (1) задачи 1, получим:

$$d\sigma = \pi a^2 \frac{d\epsilon}{\epsilon_{\max}}.$$

Распределение рассеянных частиц по значениям  $\epsilon$  оказывается равномерным во всем интервале  $\epsilon$  от нуля до  $\epsilon_{\max}$ .

3. Определить эффективное сечение для падения частиц (с массами  $m_1$ ) на поверхность сферического тела (с массой  $m_2$  и радиусом  $R$ ), к которой они притягиваются по закону Ньютона.

Решение. Условие падения заключается в неравенстве  $r_{\min} < R$ , где  $r_{\min}$  — ближайшая к центру сферы точка траектории частицы. Наибольшее допустимое значение  $\rho$  определяется условием  $r_{\min} = R$ , что сводится к решению уравнения  $U_{\text{эфф}}(R) = E$  или

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \rho_{\max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2},$$

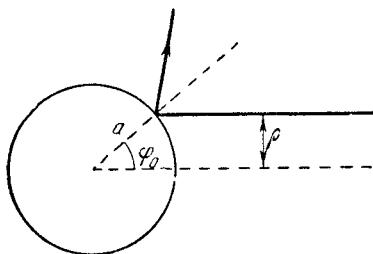


Рис. 14.

причем  $\alpha = \gamma m_1 m_2$  ( $\gamma$  — гравитационная постоянная), и мы положили  $m \approx m_1$ , считая, что  $m_2 \gg m_1$ . Находя отсюда  $\rho_{\max}^2$ , получим:

$$\sigma = \pi R^2 \left( 1 + \frac{2\gamma m_2}{R v_{\infty}^2} \right).$$

При  $v_{\infty} \rightarrow \infty$  эффективное сечение стремится, естественно, к геометрической площади сечения сферы.

## § 16. Формула Резерфорда

Одно из важнейших применений полученных выше формул — рассеяние заряженных частиц в кулоновском поле.

Положив в (15,4)  $U = \alpha/r$  и производя элементарное интегрирование, получим:

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\frac{\alpha}{m v_{\infty}^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\alpha}{m v_{\infty}^2 \rho} \right)^2}},$$

откуда

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_{\infty}^4} \operatorname{tg}^2 \varphi_0,$$

или, вводя согласно (15,1)  $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$ :

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_{\infty}^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2}. \quad (16,1)$$

Дифференцируя это выражение по  $\chi$  и подставляя в (15,7) или в (15,8), получим:

$$d\sigma = \pi \left( \frac{\alpha}{m v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi \quad (16,2)$$

или

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{2m v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{d\sigma}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}. \quad (16,3)$$

Это так называемая *формула Резерфорда*. Отметим, что эффективное сечение не зависит от знака  $\alpha$ , так что полученный результат относится в равной степени к кулоновскому полю отталкивания и притяжения.

Формула (16,3) дает эффективное сечение в системе отсчета, в которой покоится центр инерции сталкивающихся частиц. Преобразование к лабораторной системе производится с помощью формул (14,4). Для частиц, первоначально покоившихся, подставляя  $\chi = \pi - \theta_2/2$  в (16,2), получим:

$$d\sigma_2 = 2\pi \left( \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{\sin \theta_2}{\cos^3 \theta_2} d\theta_2 = \left( \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{d\theta_2}{\cos^3 \theta_2}. \quad (16,4)$$

Для падающих же частиц преобразование приводит в общем случае к весьма громоздкой формуле. Отметим лишь два частных случая.

Если масса  $m_2$  рассеивающей частицы велика по сравнению с массой  $m_1$  рассеиваемой частицы, то  $\chi \approx \theta_1$ , а  $m \approx m_1$ , так что

$$d\sigma_1 = \left( \frac{\alpha}{4E_1} \right)^2 \frac{d\theta_1}{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}}, \quad (16,5)$$

где  $E_1 = m_1 v_\infty^2/2$  — энергия падающей частицы.

Если массы обеих частиц одинаковы ( $m_1 = m_2$ ,  $m = m_1/2$ ), то согласно (14,9)  $\chi = 2\theta_1$ , и подстановка в (16,2) дает:

$$d\sigma_1 = 2\pi \left( \frac{\alpha}{E_1} \right)^2 \frac{\cos \theta_1}{\sin^3 \theta_1} d\theta_1 = \left( \frac{\alpha}{E_1} \right)^2 \frac{\cos \theta_1}{\sin^4 \theta_1} d\theta_1. \quad (16,6)$$

Если не только массы обеих частиц равны, но эти частицы вообще тождественны, то не имеет смысла различать после рассеяния первоначально двигавшиеся от первоначально покоившихся частиц. Общее эффективное сечение для всех частиц мы получим, складывая  $d\sigma_1$  и  $d\sigma_2$  и заменяя  $\theta_1$  и  $\theta_2$  общим значением  $\theta$ :

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{E_1} \right)^2 \left( \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} \right) \cos \theta d\theta. \quad (16,7)$$

Вернемся снова к общей формуле (16,2) и определим с ее помощью распределение рассеянных частиц по теряемой ими в результате столкновения энергии. При произвольном соотношении между массами рассеиваемой ( $m_1$ ) и рассеивающей ( $m_2$ ) частиц, приобретаемая последней скорость выражается через угол рассеяния в системе центра инерции посредством

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_\infty \sin \frac{\chi}{2}$$



(см. (14,5)). Соответственно, приобретаемая этой частицей, а тем самым и теряемая частицей  $m_1$  энергия равна

$$\epsilon = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2m^2}{m_2} v_{\infty}^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}.$$

Выразив отсюда  $\sin \frac{\chi}{2}$  через  $\epsilon$  и подставив в (16,2), получаем:

$$d\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_{\infty}^2} \frac{d\epsilon}{\epsilon^2}. \quad (16,8)$$

Эта формула отвечает на поставленный вопрос, определяя эффективное сечение как функцию от потери энергии  $\epsilon$ ; последняя пробегает при этом значения от нуля до  $\epsilon_{\max} = 2m^2 v_{\infty}^2 / m_2$ .

---

## Глава V

### МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

#### § 17. Свободные одномерные колебания

Очень распространенный тип движения механических систем представляют собой так называемые *малые колебания*, которые система совершает вблизи своего положения устойчивого равновесия. Рассмотрение этих движений мы начнем с наиболее простого случая, когда система имеет всего одну степень свободы.

Устойчивому равновесию соответствует такое положение системы, в котором ее потенциальная энергия  $U(q)$  имеет минимум; отклонение от такого положения приводит к возникновению силы  $-dU/dq$ , стремящейся вернуть систему обратно. Обозначим соответствующее значение обобщенной координаты посредством  $q_0$ . При малых отклонениях от положения равновесия в разложении разности  $U(q) - U(q_0)$  по степеням  $q - q_0$  достаточно сохранить первый не исчезающий член. В общем случае таковым является член второго порядка

$$U(q) - U(q_0) \approx \frac{k}{2}(q - q_0)^2,$$

где  $k = U''(q_0)$  — положительный коэффициент. Будем в дальнейшем отсчитывать потенциальную энергию от ее минимального значения (т. е. положим  $U(q_0) = 0$ ) и введем обозначение

$$x = q - q_0 \quad (17,1)$$

для отклонения координаты от ее равновесного значения. Тогда

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \quad (17,2)$$

Кинетическая энергия системы с одной степенью свободы имеет в общем случае вид

$$\frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} a(q) \dot{x}^2.$$

В том же приближении достаточно заменить функцию  $a(q)$  просто ее значением при  $q = q_0$ . Вводя для краткости обозначение<sup>1)</sup>

$$a(q_0) = m,$$

получим окончательно следующее выражение для лагранжевой функции системы, совершающей одномерные малые колебания<sup>2)</sup>:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \quad (17,3)$$

Соответствующее этой функции уравнение движения гласит:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (17,4)$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (17,5)$$

где введено обозначение

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (17,6)$$

Два независимых решения линейного дифференциального уравнения (17,5):  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ , так что его общее решение

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \quad (17,7)$$

Это выражение может быть написано также и в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (17,8)$$

Поскольку  $\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$ , то сравнение с (17,7) показывает, что произвольные постоянные  $a$  и  $\alpha$  связаны с постоянными  $c_1$  и  $c_2$  соотношениями

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{c_2}{c_1}, \quad (17,9)$$

<sup>1)</sup> Подчеркнем, однако, что величина  $m$  совпадает с массой только, если  $x$  — декартова координата частицы!

<sup>2)</sup> Такую систему часто называют одномерным *осциллятором*.

Таким образом, вблизи положения устойчивого равновесия система совершает гармоническое колебательное движение. Коэффициент  $a$  при периодическом множителе в (17,8) называется *амплитудой* колебаний, а аргумент косинуса — их *фазой*;  $a$  есть начальное значение фазы, зависящее, очевидно, от выбора начала отсчета времени. Величина  $\omega$  называется *циклической частотой* колебаний; в теоретической физике, впрочем, ее называют обычно просто *частотой*, что мы и будем делать в дальнейшем.

Частота является основной характеристикой колебаний, не зависящей от начальных условий движения. Согласно формуле (17,6) она всецело определяется свойствами механической системы как таковой. Подчеркнем, однако, что это свойство частоты связано с предполагаемой малостью колебаний и исчезает при переходе к более высоким приближениям. С математической точки зрения оно связано с квадратичной зависимостью потенциальной энергии от координаты.

Энергия системы, совершающей малые колебания, есть

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

или, подставив сюда (17,8):

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2. \quad (17,10)$$

Она пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

Зависимость координаты колеблющейся системы от времени часто оказывается удобным представлять в виде вещественной части комплексного выражения

$$x = \operatorname{Re} \{Ae^{-i\omega t}\}, \quad (17,11)$$

где  $A$  — комплексная постоянная; написав ее в виде

$$A = ae^{-i\alpha}, \quad (17,12)$$

мы вернемся к выражению (17,8). Постоянную  $A$  называют *комплексной амплитудой*; ее модуль совпадает с обычной амплитудой, а аргумент — с начальной фазой.

Оперирование с экспоненциальными множителями в математическом отношении проще, чем с тригонометрическими, так как дифференцирование не меняет их вида. При этом, пока мы производим лишь линейные операции (сложение,

умножение на постоянные коэффициенты, дифференцирование, интегрирование), можно вообще опускать знак взятия вещественной части, переходя к последней лишь в окончательном результате вычислений.

### Задачи

1. Выразить амплитуду и начальную фазу колебаний через начальные значения  $x_0$  и  $v_0$  координаты и скорости.

Ответ:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}.$$

2. Найти отношение частот  $\omega$  и  $\omega'$  колебаний двух двухатомных молекул, состоящих из атомов различных изотопов; массы атомов равны соответственно  $m_1, m_2$  и  $m'_1, m'_2$ .

Решение. Поскольку атомы изотопов взаимодействуют одинаковым образом, то  $k = k'$ . Роль же коэффициентов  $m$  в кинетических энергиях молекул играют их приведенные массы. Согласно (17,6) находим поэтому:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m'_1 + m'_2)}{m'_1 m'_2 (m_1 + m_2)}}.$$

3. Найти частоту колебаний точки с массой  $m$ , способной двигаться по прямой и прикрепленной к пружине, другой конец которой закреплен в точке  $A$  (рис. 15) на расстоянии  $l$  от прямой. Пружина, имея длину  $l$ , натянута с силой  $F$ .

Решение. Потенциальная энергия пружины (с точностью до малых величин высшего порядка) равна произведению силы  $F$  на удлинение  $\delta l$  пружины. При  $x \ll l$  имеем:

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l},$$

так что  $U = Fx^2/2l$ . Поскольку кинетическая энергия есть  $mx^2/2$ , то

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}}.$$

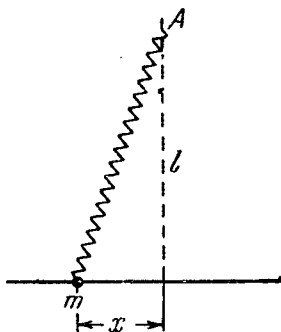


Рис. 15.

## § 18. Вынужденные колебания

Перейдем к рассмотрению колебаний в системе, на которую действует некоторое переменное внешнее поле; такие колебания называют *вынужденными* в отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе так называемых *свободных*

колебаний. Поскольку колебания предполагаются по-прежнему малыми, то тем самым подразумевается, что внешнее поле достаточно слабое, в противном случае оно могло бы вызвать слишком большое смещение  $x$ .

В этом случае наряду с собственной потенциальной энергией  $\frac{1}{2} kx^2$  система обладает еще потенциальной энергией  $U_e(x, t)$ , связанной с действием внешнего поля. Разлагая этот дополнительный член в ряд по степеням малой величины  $x$ , получим:

$$U_e(x, t) \approx U_e(0, t) + x \left. \frac{\partial U_e}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

Первый член является функцией только от времени и потому может быть опущен в лагранжевой функции (как полная производная по  $t$  от некоторой другой функции времени). Во втором члене —  $\partial U_e / \partial x$  есть внешняя «сила», действующая на систему в положении равновесия и являющаяся заданной функцией времени; обозначим ее как  $F(t)$ . Таким образом, в потенциальной энергии появляется член  $-xF(t)$ , так что функция Лагранжа системы будет:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t). \quad (18,1)$$

Соответствующее уравнение движения есть

$$m\ddot{x} + kx = F(t),$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t), \quad (18,2)$$

где мы снова ввели частоту  $\omega$  свободных колебаний.

Как известно, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами получается в виде суммы двух выражений:  $x = x_0 + x_1$ , где  $x_0$  — общее решение однородного уравнения, а  $x_1$  — частный интеграл неоднородного уравнения. В данном случае  $x_0$  представляет собой рассмотренные в предыдущем параграфе свободные колебания.

Рассмотрим имеющий особый интерес случай, когда вынуждающая сила тоже является простой периодической функцией времени с некоторой частотой  $\gamma$ :

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta). \quad (18,3)$$

Частный интеграл уравнения (18,2) ищем в виде  $x_1 = b \cos(\gamma t + \beta)$  с тем же периодическим множителем. Подстановка в уравнение дает:  $b = f/m(\omega^2 - \gamma^2)$ ; прибавляя решение однородного уравнения, получим общий интеграл в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta). \quad (18,4)$$

Произвольные постоянные  $a$  и  $\alpha$  определяются из начальных условий.

Таким образом, под действием периодической вынуждающей силы система совершает движение, представляющее собой совокупность двух колебаний — с собственной частотой системы  $\omega$  и с частотой вынуждающей силы  $\gamma$ .

Решение (18,4) неприменимо в случае так называемого *резонанса*, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой системы. Для нахождения общего решения уравнения движения в этом случае перепишем выражение (18,4) с соответствующим переобозначением постоянных в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)].$$

При  $\gamma \rightarrow \omega$  второй член дает неопределенность вида  $0/0$ . Раскрывая ее по правилу Лопиталю, получим:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta). \quad (18,5)$$

Таким образом, в случае резонанса амплитуда колебаний растет линейно со временем (до тех пор, пока колебания не перестанут быть малыми и вся излагаемая теория перестанет быть применимой).

Выясним еще, как выглядят малые колебания вблизи резонанса, когда  $\gamma = \omega + \epsilon$ , где  $\epsilon$  — малая величина. Представим общее решение в комплексном виде как

$$x = A e^{-i\omega t} + B e^{-i(\omega + \epsilon)t} = (A + B e^{-i\epsilon t}) e^{-i\omega t}. \quad (18,6)$$

Так как величина  $A + B e^{-i\epsilon t}$  мало меняется в течение периода  $2\pi/\omega$  множителя  $e^{-i\omega t}$ , то движение вблизи резонанса можно рассматривать как малые колебания, но с переменной амплитудой.

Обозначив последнюю через  $c$ , имеем:

$$c = |A + B e^{-i\epsilon t}|.$$

Представив  $A$  и  $B$  соответственно в виде  $ae^{-i\alpha}$  и  $be^{-i\beta}$ , получим:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\epsilon t + \beta - \alpha). \quad (18,7)$$

Таким образом, амплитуда колеблется периодически с частотой  $\epsilon$ , меняясь между двумя пределами

$$|a - b| \leq c \leq a + b.$$

Это явление называют *биениями*.

Уравнение движения (18,2) может быть проинтегрировано в общем виде и при произвольной вынуждающей силе  $F(t)$ . Это легко сделать, переписав его предварительно в виде

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} - i\omega x) + i\omega(\dot{x} - i\omega x) = \frac{1}{m} F(t)$$

или

$$\frac{d\xi}{dt} + i\omega\xi = \frac{1}{m} F(t), \quad (18,8)$$

где введена комплексная величина

$$\xi = \dot{x} - i\omega x. \quad (18,9)$$

Уравнение (18,8) уже не второго, а первого порядка. Без правой части его решением было бы  $\xi = Ae^{-i\omega t}$  с постоянной  $A$ . Следуя общему правилу, ищем решение неоднородного уравнения в виде  $\xi = A(t)e^{-i\omega t}$  и для функции  $A(t)$  получаем уравнение

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{m} F(t) e^{i\omega t}.$$

Интегрируя его, получим решение уравнения (18,8) в виде

$$\xi = e^{-i\omega t} \left\{ \int_0^t \frac{1}{m} F(t) e^{i\omega t} dt + \xi_0 \right\}, \quad (18,10)$$

где постоянная интегрирования  $\xi_0$  выбрана так, чтобы представлять собой значение  $\xi$  в момент времени  $t = 0$ . Это и есть искомое общее решение; функция  $x(t)$  дается мнимой частью выражения (18,10) (деленной на  $-\omega$ )<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> При этом, разумеется, сила  $F(t)$  должна быть написана в вещественном виде.



Энергия системы, совершающей вынужденные колебания, разумеется, не сохраняется; система приобретает энергию за счет источника внешней силы. Определим полную энергию, передаваемую системе за все время действия силы (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ), предполагая начальную энергию равной нулю. Согласно формуле (18,10) (с нижним пределом интегрирования  $-\infty$  вместо нуля и с  $\xi(-\infty) = 0$ ) имеем при  $t \rightarrow \infty$ :

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i\omega t} dt \right|^2.$$

С другой стороны, энергия системы как таковой дается выражением

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2} |\dot{\xi}|^2. \quad (18,11)$$

Подставив сюда  $|\xi(\infty)|^2$ , получим искомую передачу энергии в виде

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i\omega t} dt \right|^2; \quad (18,12)$$

она определяется квадратом модуля компоненты Фурье силы  $F(t)$  с частотой, равной собственной частоте системы.

В частности, если внешняя сила действует лишь в течение короткого промежутка времени (малого по сравнению с  $1/\omega$ ), то можно положить  $e^{i\omega t} \approx 1$ . Тогда

$$E = \frac{1}{2m} \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt \right)^2.$$

Смысл этого результата очевиден: он выражает собой тот факт, что кратковременная сила сообщает системе импульс  $\int F dt$ , не успев за это время произвести заметного смещения.

### Задачи

1. Определить вынужденные колебания системы под влиянием силы  $F(t)$ , если в начальный момент  $t = 0$  система покоится в положении равновесия ( $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ ) для случаев

а)  $F = \text{const} = F_0$ .

3 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц

О т в е т:  $x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)$ ; действие постоянной силы приводит к смещению положения равновесия, вокруг которого происходят колебания.

б)  $F = at$ .

О т в е т:  $x = \frac{a}{m\omega^3} (\omega t - \sin \omega t)$ .

в)  $F = F_0 e^{-\alpha t}$ .

О т в е т:  $x = \frac{F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)} \left( e^{-\alpha t} - \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right)$ .

г)  $F = F_0 e^{-\alpha t} \cos \beta t$ .

О т в е т:

$$x = \frac{F_0}{m[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]} \left\{ -(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos \omega t + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{\omega} (\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2) \sin \omega t + e^{-\alpha t} [(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t] \right\}$$

(при решении удобно писать силу в комплексном виде  $F = F_0 e^{(-\alpha - i\beta)t}$ ).

2. Определить конечную амплитуду колебаний системы после действия внешней силы, меняющейся по закону:  $F = 0$  при  $t < 0$ ,

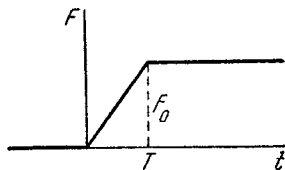


Рис. 16.

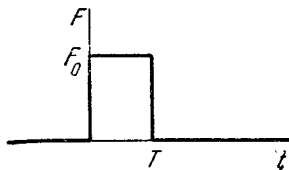


Рис. 17.

$F = F_0 t/T$  при  $0 < t < T$ ,  $F = F_0$  при  $t > T$  (рис. 16); до момента  $t = 0$  система покоится в положении равновесия.

Р е ш е н и е. В интервале времени  $0 < t < T$  колебания, удовлетворяющие начальному условию, имеют вид

$$x = \frac{F_0}{mT\omega^3} (\omega t - \sin \omega t).$$

При  $t > T$  ищем решение в виде

$$x = c_1 \cos \omega (t - T) + c_2 \sin \omega (t - T) + \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Из условий непрерывности  $x$  и  $\dot{x}$  при  $t = T$  находим:

$$c_1 = -\frac{F_0}{mT\omega^3} \sin \omega T, \quad c_2 = \frac{F_0}{mT\omega^3} (1 - \cos \omega T).$$

При этом амплитуда колебаний

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2F_0}{mT\omega^3} \sin \frac{\omega T}{2}.$$

Отметим, что она тем меньше, чем медленнее «включается» сила  $F_0$  (т. е. чем больше  $T$ ).

3. То же в случае постоянной силы  $F_0$ , действующей в течение ограниченного времени  $T$  (рис. 17).

Решение можно найти как в задаче 2, но еще проще воспользоваться формулой (18,10). При  $t > T$  имеем свободные колебания вокруг положения  $x = 0$ ; при этом

$$\xi = \frac{F_0}{m} e^{-i\omega t} \int_0^T e^{i\omega t} dt = \frac{iF_0}{\omega m} (1 - e^{i\omega T}) e^{-i\omega t};$$

квадрат же модуля  $\xi$  дает амплитуду согласно формуле  $|\xi|^2 = a^2 \omega^2$ . В результате находим:

$$a = \frac{2F_0}{m\omega^3} \sin \frac{\omega T}{2}.$$

## § 19. Колебания систем со многими степенями свободы

Теория свободных колебаний систем с несколькими ( $s$ ) степенями свободы строится аналогично тому, как были рассмотрены в § 17 одномерные колебания.

Пусть потенциальная энергия системы  $U$  как функция обобщенных координат  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) имеет минимум при  $q_i = q_{i0}$ . Вводя малые смещения

$$x_i = q_i - q_{i0} \quad (19,1)$$

и разлагая по ним  $U$  с точностью до членов второго порядка, получим потенциальную энергию в виде положительно определенной квадратичной формы

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i, k} k_{ik} x_i x_k, \quad (19,2)$$

где мы снова отсчитываем потенциальную энергию от ее минимального значения. Поскольку коэффициенты  $k_{ik}$  и  $k_{ki}$  входят в (19,2) умноженными на одну и ту же величину  $x_i x_k$ , то ясно, что их можно всегда считать симметричными по своим индексам

$$k_{ik} = k_{ki}.$$

В кинетической же энергии, которая имеет в общем случае вид

$$\frac{1}{2} \sum_{i, k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$$

(см. (5,5)), полагаем в коэффициентах  $q_i = q_{i0}$  и, обозначая постоянные  $a_{ik}(q_0)$  посредством  $m_{ik}$ , получаем ее в виде положительно определенной квадратичной формы

$$\frac{1}{2} \sum_{i, k} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k. \quad (19,3)$$

Коэффициенты  $m_{ik}$  тоже можно считать симметричными по индексам:

$$m_{ik} = m_{ki}.$$

Таким образом, лагранжева функция системы, совершающей свободные малые колебания:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i, k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k). \quad (19,4)$$

Составим теперь уравнения движения. Для определения входящих в них производных напишем полный дифференциал функции Лагранжа

$$dL = \frac{1}{2} \sum_{i, k} (m_{ik} \dot{x}_i d\dot{x}_k + m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_i dx_k - k_{ik} x_k dx_i).$$

Поскольку величина суммы не зависит, разумеется, от обозначения индексов суммирования, меняем в первом и третьем членах в скобках  $i$  на  $k$ , а  $k$  на  $i$ ; учитывая при этом симметричность коэффициентов  $m_{ik}$  и  $k_{ik}$ , получим:

$$dL = \sum_{i, k} (m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_k dx_i).$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik} \dot{x}_k, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = - \sum_k k_{ik} x_k.$$

Поэтому уравнения Лагранжа

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = 0. \quad (19,5)$$

Они представляют собой систему  $s$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

По общим правилам решения таких уравнений ищем  $s$  неизвестных функций  $x_k(t)$  в виде

$$x_k = A_k e^{-i\omega t}, \quad (19,6)$$

где  $A_k$  — некоторые, пока неопределенные, постоянные. Подставляя (19,6) в систему (19,5), получаем по сокращении на  $e^{-i\omega t}$  систему линейных однородных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять постоянные  $A_k$ :

$$\sum_k (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0. \quad (19,7)$$

Для того чтобы эта система имела отличные от нуля решения, должен обращаться в нуль ее определитель

$$|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0. \quad (19,8)$$

Это уравнение — так называемое *характеристическое уравнение* — представляет собой уравнение степени  $s$  относительно  $\omega^2$ . Оно имеет в общем случае  $s$  различных вещественных положительных корней  $\omega_\alpha^2$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, s$ ). Определенные таким образом величины  $\omega_\alpha$  называются *собственными частотами* системы. В частных случаях некоторые из корней характеристического уравнения могут совпадать; такие кратные собственные частоты называют *вырожденными*.

Вещественность и положительность корней уравнения (19,8) заранее очевидны уже из физических соображений. Действительно, наличие у  $\omega$  мнимой части означало бы наличие во временной зависимости координат  $x_k$  (19,6) (а с ними и скоростей  $\dot{x}_k$ ) экспоненциально убывающего или экспоненциально возрастающего множителя. Но наличие такого множителя в данном случае недопустимо, так как оно привело бы к изменению со временем полной энергии  $E = U + T$  системы, в противоречии с законом ее сохранения.

После того как частоты  $\omega_\alpha$  найдены, подставляя каждую из них в уравнения (19,7), можно найти соответствующие значения коэффициентов  $A_k$ . Ввиду однородности системы алгебраических уравнений (19,7) эти значения определяются, однако, лишь с точностью до умножения на произвольный общий множитель. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство,

представим коэффициенты  $A_k$  (для каждой заданной частоты  $\omega_a$ ) в виде  $A_k = \Delta_{ka} C_a$  с определенным набором вещественных постоянных  $\Delta_{ka}$  и не зависящей от индекса  $k$  произвольной (комплексной) постоянной  $C_a$ .

Частное решение системы дифференциальных уравнений (19,5) имеет, следовательно, вид

$$x_k = \Delta_{ka} C_a e^{-i\omega_a t}.$$

Общее же решение дается суммой всех частных решений. Переходя к вещественной части, напомним его в виде

$$x_k = \sum_a \Delta_{ka} Q_a, \quad (19,9)$$

где мы ввели обозначение

$$Q_a = \text{Re} \{ C_a e^{-i\omega_a t} \}. \quad (19,10)$$

Таким образом, изменение каждой из координат системы со временем представляет собой наложение  $s$  простых периодических колебаний  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$  с произвольными амплитудами и фазами, но вполне определенными частотами.

Естественно возникает вопрос, нельзя ли выбрать обобщенные координаты таким образом, чтобы каждая из них совершала только одно простое колебание? Сама форма общего интеграла (19,9) указывает путь к решению этой задачи.

В самом деле, рассматривая  $s$  соотношений (19,9) как систему уравнений с  $s$  неизвестными величинами  $Q_a$ , мы можем, разрешив эту систему, выразить величины  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$  через координаты  $x_1, x_2, \dots, x_s$ . Следовательно, величины  $Q_a$  можно рассматривать как новые обобщенные координаты. Эти координаты называют *нормальными*, а совершаемые ими простые периодические колебания — нормальными колебаниями системы.

Нормальные координаты  $Q_a$  удовлетворяют, как это явствует из их определения, уравнениям

$$\ddot{Q}_a + \omega_a^2 Q_a = 0. \quad (19,11)$$

Это значит, что в нормальных координатах уравнения движения распадаются на  $s$  независимых друг от друга уравнений.

Ускорение каждой нормальной координаты зависит только от значения этой же координаты, и для полного определения ее временной зависимости надо знать начальные значения только ее же самой и соответствующей ей скорости. Другими словами, нормальные колебания системы полностью независимы.

Из сказанного очевидно, что функция Лагранжа, выраженная через нормальные координаты, распадается на сумму выражений, каждое из которых соответствует одномерному колебанию с одной из частот  $\omega_a$ , т. е. имеет вид:

$$\frac{m_a}{2} (\dot{Q}_a^2 - \omega_a^2 Q_a^2),$$

где  $m_a$  — положительная постоянная. Этой постоянной можно придать любое значение путем изменения на общий множитель выбранного набора коэффициентов  $\Delta_{ka}$  в (19,9). Обычно нормальные координаты выбирают так, чтобы было  $m_a = 1$ . Тогда полная функция Лагранжа системы примет вид<sup>1)</sup>

$$L = \frac{1}{2} \sum_a (\dot{Q}_a^2 - \omega_a^2 Q_a^2). \quad (19,12)$$

Если мы имеем дело с системой частиц, взаимодействующих друг с другом, но не находящихся во внешнем поле, то не все ее степени свободы имеют колебательный характер. Типичным примером таких систем являются молекулы. Помимо движений, представляющих собой колебания атомов около их положения равновесия внутри молекулы, молекула как целое может совершать поступательное и вращательное движения.

Поступательному перемещению соответствуют три степени свободы. Столько же имеется в общем случае вращательных степеней свободы, так что из  $3n$  степеней свободы  $n$ -атомной молекулы всего  $3n - 6$  отвечают колебательному движению. Исключение представляют молекулы, в которых все атомы расположены вдоль одной прямой. Поскольку говорить о вращении вокруг самой этой прямой не имеет

<sup>1)</sup> В случае вырожденных частот выбор нормальных координат и после этого остается еще не вполне однозначным. Поскольку в кинетическую и потенциальную энергии нормальные координаты (с одинаковой  $\omega_a$ ) входят в виде одинаково преобразующихся сумм  $\sum Q_a^2$  и  $\sum \dot{Q}_a^2$ , то их можно подвергнуть произвольному линейному преобразованию, оставляющему инвариантной сумму квадратов.

смысла, то вращательных степеней свободы в этом случае всего две, так что колебательных имеется  $3n - 5$ .

Нормальные колебания молекулы могут быть классифицированы по характеру движения атомов в них на основании соображений, связанных с симметрией расположения атомов (в положениях равновесия) в молекуле. Для этой цели существует общий метод, основанный на использовании теории групп. Здесь же мы рассмотрим лишь некоторые элементарные примеры.

Если все  $n$  атомов молекулы лежат в одной плоскости, то можно различать нормальные колебания, оставляющие атомы в этой плоскости, и нормальные колебания, при которых атомы выводятся из плоскости. Легко определить число тех и других. Так как всего для плоского движения имеется  $2n$  степеней свободы, из которых две поступательные и одна вращательная, то число нормальных колебаний, не выводящих атомы из плоскости, равно  $2n - 3$ . Остальные же  $(3n - 6) - (2n - 3) = n - 3$  колебательных степеней свободы отвечают колебаниям, выводящим атомы из плоскости.

В случае линейной молекулы можно различать продольные колебания, сохраняющие ее прямолинейную форму, и колебания, выводящие атомы с прямой. Так как всего движению  $n$  частиц по линии отвечает  $n$  степеней свободы, из которых одна поступательная, то число колебаний, не выводящих атомы с прямой, равно  $n - 1$ . Поскольку же полное число колебательных степеней свободы линейной молекулы есть  $3n - 5$ , то имеется  $2n - 4$  колебаний, выводящих атомы с прямой. Этим колебаниям, однако, отвечают всего  $n - 2$  различные частоты, так как каждое из таких колебаний может осуществляться двумя независимыми способами — в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (проходящих через ось молекулы); из соображений симметрии очевидно, что каждая такая пара нормальных колебаний имеет одинаковые частоты.

### Задачи

1. Определить колебания системы с двумя степенями свободы, если ее функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2} (x^2 + y^2) + \alpha xy$$

(две одинаковые одномерные системы с собственной частотой  $\omega_0$ , связанные взаимодействием —  $\alpha xy$ ).



Р е ш е н и е. Уравнения движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x.$$

Подстановка (19,6) дает:

$$A_x (\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_y, \quad A_y (\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_x. \quad (1)$$

Характеристическое уравнение  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2$ , откуда

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha.$$

При  $\omega = \omega_1$  уравнения (1) дают  $A_x = A_y$ , а при  $\omega = \omega_2$   $A_x = -A_y$ . Поэтому

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1 + Q_2), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1 - Q_2)$$

(коэффициенты  $1/\sqrt{2}$  соответствуют указанной в тексте нормировке нормальных координат).

При  $\alpha \ll \omega_0^2$  (слабая связь) имеем:

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\alpha}{2}, \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{\alpha}{2}.$$

Изменение  $x$  и  $y$  представляет собой в этом случае наложение двух колебаний с близкими частотами, т. е. имеет характер биений с частотой  $\omega_2 - \omega_1 = \alpha$  (см. § 18). При этом в момент, когда амплитуда координаты  $x$  проходит через максимум, амплитуда  $y$  проходит через минимум и наоборот.

2. Определить малые колебания двойного плоского маятника (рис. 1).

Р е ш е н и е. Для малых колебаний ( $\varphi_1 \ll 1$ ,  $\varphi_2 \ll 1$ ) найденная в задаче 1 § 5 функция Лагранжа принимает вид

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \frac{m_1 + m_2}{2} g l_1 \varphi_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \varphi_2^2.$$

Уравнения движения:

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 = 0, \\ l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0.$$

После подстановки (19,6):

$$A_1 (m_1 + m_2) (g - l_1 \omega^2) - A_2 \omega^2 m_2 l_2 = 0, \\ -A_1 l_1 \omega^2 + A_2 (g - l_2 \omega^2) = 0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} \{ (m_1 + m_2) (l_1 + l_2) \pm \\ \pm \sqrt{(m_1 + m_2) [(m_1 + m_2) (l_1 + l_2)^2 - 4m_1 l_1 l_2]} \}.$$

При  $m_1 \rightarrow \infty$  частоты стремятся к пределам  $\sqrt{g/l_1}$  и  $\sqrt{g/l_2}$ , соответствующим независимым колебаниям двух маятников.

3. Найти траекторию движения частицы в центральном поле  $U = kr^2/2$  (так называемый *пространственный осциллятор*).

Решение. Как и во всяком центральном поле, движение происходит в одной плоскости, которую выбираем в качестве плоскости  $xu$ . Изменение каждой из координат  $x, y$  — простое колебание с одинаковыми частотами  $\omega = \sqrt{k/m}$ :

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad y = b \cos(\omega t + \beta)$$

или

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \cos(\varphi + \delta) = b \cos \delta \cos \varphi - b \sin \delta \sin \varphi,$$

где введены обозначения  $\varphi = \omega t + \alpha$ ,  $\delta = \beta - \alpha$ . Определив отсюда  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  и составив сумму их квадратов, получим уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Это — эллипс с центром в начале координат. При  $\delta = 0$  или  $\pi$  траектория вырождается в отрезки прямой.

## § 20. Затухающие колебания

До сих пор мы всегда подразумевали, что движение тел происходит в пустоте или что влиянием среды на движение можно пренебречь. В действительности при движении тела в среде последняя оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение. Энергия движущегося тела при этом в конце концов переходит в тепло или, как говорят, диссипируется.

Процесс движения в этих условиях уже не является чисто механическим процессом, а его рассмотрение требует учета движения самой среды и внутреннего теплого состояния как среды, так и тела. В частности, уже нельзя утверждать в общем случае, что ускорение движущегося тела является функцией лишь от его координат и скорости в данный момент времени, т. е. не существует уравнений движения, которые могли бы быть сформулированы с помощью функции Лагранжа, как это делается в механике. Таким образом, задача о движении в среде уже не является задачей одной только механики.

Существует, однако, определенная категория случаев, когда движение в среде может быть приближенно описано с помощью механических уравнений движения путем введе-

ния в них определенных дополнительных членов. Сюда относятся колебания с частотами, малыми по сравнению с частотами, характерными для внутренних диссипативных процессов в среде. При выполнении этого условия можно считать, что на тело действует сила трения, зависящая (для заданной среды) только от его скорости.

Если к тому же эта скорость достаточно мала, то можно разложить силу трения по ее степеням. Нулевой член разложения равен нулю, поскольку на неподвижное тело не действует никакой силы трения, и первый не исчезающий член пропорционален скорости. Таким образом, обобщенную силу трения  $f_{\text{тр}}$ , действующую на систему, совершающую одномерные малые колебания с обобщенной координатой  $x$ , можно написать в виде

$$f_{\text{тр}} = -\alpha \dot{x},$$

где  $\alpha$  — положительный коэффициент, а знак минус показывает, что сила действует в сторону, противоположную скорости. Добавляя эту силу в правую сторону уравнения движения, получим:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}. \quad (20,1)$$

Разделим его на  $m$  и введем обозначения

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\alpha}{m} = 2\lambda. \quad (20,2)$$

$\omega_0$  есть частота свободных колебаний системы в отсутствие трения. Величина  $\lambda$  называется *коэффициентом затухания*<sup>1)</sup>.

Таким образом, имеем уравнение

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (20,3)$$

Следуя общим правилам решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами, полагаем  $x = e^{rt}$  и находим для  $r$  характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0.$$

Общее решение уравнения (20,3):

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

<sup>1)</sup> Безразмерное произведение  $\lambda T$  (где  $T = 2\pi/\omega_0$  — период) называют *логарифмическим декрементом* затухания.

Здесь следует различать два случая.

Если  $\lambda < \omega_0$ , то мы имеем два комплексно сопряженных значения  $r$ . Общее решение уравнения движения может быть представлено в этом случае, как

$$x = \operatorname{Re} \left\{ A \exp \left( -\lambda t - it \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \right) \right\},$$

где  $A$  — произвольная комплексная постоянная. Иначе можно написать:

$$x = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \quad (20,4)$$

где  $a$  и  $\alpha$  — вещественные постоянные. Выражаемое этими формулами движение представляет собой так называемые *затухающие колебания*. Его можно рассматривать как гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой. Скорость убывания амплитуды определяется показателем  $\lambda$ , а «частота»  $\omega$  колебаний меньше частоты свободных колебаний в отсутствие трения; при  $\lambda \ll \omega_0$  разница между  $\omega$  и  $\omega_0$  — второго порядка малости. Уменьшение частоты при трении следовало ожидать заранее, поскольку трение вообще задерживает движение.

Если  $\lambda \ll \omega_0$ , то за время одного периода  $2\pi/\omega$  амплитуда затухающего колебания почти не меняется. В этом случае имеет смысл рассматривать средние (за период) значения квадратов координаты и скорости, пренебрегая при усреднении изменением множителя  $e^{-\lambda t}$ . Эти средние квадраты, очевидно, пропорциональны  $e^{-2\lambda t}$ . Поэтому и энергия системы в среднем убывает по закону

$$\bar{E} = E_0 e^{-2\lambda t}, \quad (20,5)$$

где  $E_0$  — начальное значение энергии.

Пусть теперь  $\lambda > \omega_0$ . Тогда оба значения  $r$  вещественны, причем оба отрицательны. Общий вид решения

$$x = c_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}. \quad (20,6)$$

Мы видим, что в этом случае, возникающем при достаточно большом трении, движение состоит в убывании  $|x|$ , т. е. в асимптотическом (при  $t \rightarrow \infty$ ) приближении к положению равновесия. Этот тип движения называют *апериодическим затуханием*.

Наконец, в особом случае, когда  $\lambda = \omega_0$ , характеристическое уравнение имеет всего один (двойной) корень  $r = -\lambda$ . Как известно, общее решение дифференциального уравнения имеет в этом случае вид

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t}. \quad (20,7)$$

Это — особый случай аperiodического затухания. Оно тоже не имеет колебательного характера.

Для системы со многими степенями свободы обобщенные силы трения, соответствующие координатам  $x_i$ , являются линейными функциями скоростей вида

$$f_{i \text{ тр}} = - \sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \quad (20,8)$$

Из чисто механических соображений нельзя сделать никаких заключений о свойствах симметрии коэффициентов  $\alpha_{ik}$  по индексам  $i$  и  $k$ . Методами же статистической физики можно показать, что всегда

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \quad (20,9)$$

Поэтому выражения (20,8) могут быть написаны в виде производных

$$f_{i \text{ тр}} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \quad (20,10)$$

от квадратичной формы

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i, k} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k, \quad (20,11)$$

называемой *диссипативной функцией*.

Силы (20,10) должны быть добавлены к правой стороне уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \quad (20,12)$$

Диссипативная функция имеет сама по себе важный физический смысл — ею определяется интенсивность диссипации энергии в системе. В этом легко убедиться, вычислив производную по времени от механической энергии системы. Имеем:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right) = \sum_i \dot{x}_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Поскольку  $F$  — квадратичная функция скоростей, то в силу теоремы Эйлера об однородных функциях сумма в правой стороне равенства равна  $2F$ . Таким образом,

$$\frac{dE}{dt} = -2F, \quad (20,13)$$

т. е. скорость изменения энергии системы дается удвоенной диссипативной функцией. Так как диссипативные процессы приводят к уменьшению энергии, то должно быть всегда  $F > 0$ , т. е. квадратичная форма (20,11) существенно положительна.

## § 21. Вынужденные колебания при наличии трения

Исследование вынужденных колебаний при наличии трения вполне аналогично произведенному в § 18 рассмотрению колебаний без трения. Мы остановимся здесь подробно на представляющем самостоятельный интерес случае периодической вынуждающей силы.

Прибавив в правой стороне уравнения (20,1) внешнюю силу  $f \cos \gamma t$  и разделив на  $m$ , получим уравнение движения в виде

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t. \quad (21,1)$$

Решение этого уравнения удобно находить в комплексной форме, для чего пишем в правой части  $e^{-i\gamma t}$  вместо  $\cos \gamma t$ :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{-i\gamma t}.$$

Частный интеграл ищем в виде  $x = Be^{-i\gamma t}$  и находим для  $B$ :

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 - 2i\lambda\gamma)}. \quad (21,2)$$

Представив  $B$  в виде  $be^{-i\delta}$ , имеем для  $b$  и  $\delta$ :

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (21,3)$$

Наконец, отделив вещественную часть от выражения  $Be^{-i\gamma t} = be^{-i(\gamma t + \delta)}$ , получим частный интеграл уравнения (21,1), а прибавив к нему общее решение уравнения без правой

части (которое мы напишем для определенности для случая  $\omega_0 > \lambda$ ), получим окончательно:

$$x = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta). \quad (21,4)$$

Первое слагаемое экспоненциально убывает со временем, так что через достаточно большой промежуток времени остается только второй член:

$$x = b \cos(\gamma t + \delta). \quad (21,5)$$

Выражение (21,3) для амплитуды  $b$  вынужденного колебания хотя и возрастает при приближении частоты  $\gamma$  к  $\omega_0$ , но не обращается в бесконечность, как это было при резонансе в отсутствие трения. При заданной амплитуде силы  $f$  амплитуда колебания максимальна при частоте  $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ ; при  $\lambda \ll \omega_0$  это значение отличается от  $\omega_0$  лишь на величину второго порядка малости.

Рассмотрим область вблизи резонанса. Положим  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малая величина; будем также считать, что  $\lambda \ll \omega_0$ . Тогда в (21,2) можно приближенно заменить:

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\varepsilon, \quad 2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0,$$

так что

$$B = - \frac{f}{2m(\varepsilon + i\lambda)\omega_0} \quad (21,6)$$

или

$$b = \frac{f}{2m\omega_0 \sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\lambda}{\varepsilon}. \quad (21,7)$$

Отметим характерную особенность хода изменения разности фаз  $\delta$  между колебанием и вынуждающей силой при изменении частоты последней. Эта разность всегда отрицательна, т. е. колебание «запаздывает» относительно внешней силы. Вдали от резонанса, со стороны  $\gamma < \omega_0$ ,  $\delta$  стремится к нулю, а со стороны  $\gamma > \omega_0$  — к значению  $-\pi$ . Изменение  $\delta$  от нуля до  $-\pi$  происходит в узкой (ширины  $\sim \lambda$ ) области частот, близких к  $\omega_0$ ; через значение  $-\pi/2$  разность фаз проходит при  $\gamma = \omega_0$ . Отметим в этой связи, что в отсутствие трения изменение фазы вынужденного колебания на величину  $\pi$  происходит скачком при  $\gamma = \omega_0$  (второй член в (18,4) меняет знак); учет трения «размазывает» этот скачок.

Последняя дается интегралом

$$\int_0^{\infty} I(\gamma) d\gamma = \int_{-\omega_0}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Поскольку  $I(\varepsilon)$  быстро убывает при увеличении  $|\varepsilon|$ , так что область больших  $|\varepsilon|$  все равно не существенна, можно при интегрировании писать  $I(\varepsilon)$  в виде (21,9), а нижний предел заменить на  $-\infty$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{f^2 \lambda}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 + \lambda^2} = \frac{\pi f^2}{4m}. \quad (21,10)$$

## § 22. Параметрический резонанс

Существуют такие незамкнутые колебательные системы, в которых внешнее воздействие сводится к изменению со временем ее параметров<sup>1)</sup>.

Параметрами одномерной системы являются коэффициенты  $m$  и  $k$  в функции Лагранжа (17,3); если они зависят от времени, то уравнение движения гласит:

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) + kx = 0. \quad (22,1)$$

Путем введения вместо  $t$  новой независимой переменной  $\tau$  согласно  $d\tau = dt/m(t)$  это уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + mkx = 0.$$

Поэтому фактически, без всякого ограничения общности, достаточно рассмотреть уравнение движения вида

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2(t) x = 0, \quad (22,2)$$

которое получилось бы из (22,1) при  $m = \text{const}$ .

Вид функции  $\omega(t)$  задается условиями задачи; предположим, что эта функция периодическая с некоторой частотой  $\gamma$  (и периодом  $T = 2\pi/\gamma$ ). Это значит, что

$$\omega(t + T) = \omega(t),$$

<sup>1)</sup> Простым примером такого рода является маятник, точка подвеса которого совершает заданное периодическое движение в вертикальном направлении (см. задачу).



При установившемся движении, когда система совершает вынужденные колебания (21,5), ее энергия остается неизменной. В то же время система непрерывно поглощает (от источника внешней силы) энергию, которая диссипируется благодаря наличию трения. Обозначим посредством  $I(\gamma)$  количество энергии, поглощаемой в среднем в единицу времени, как функцию частоты внешней силы. Согласно (20,13) имеем:

$$I(\gamma) = 2\bar{F},$$

где  $\bar{F}$  — среднее (по периоду колебания) значение диссипативной функции. Для одномерного движения выражение (20,11) диссипативной функции сводится к  $F = a\dot{x}^2/2 = \lambda m\dot{x}^2$ . Подставив сюда (21,5), получим:

$$F = \lambda m b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta).$$

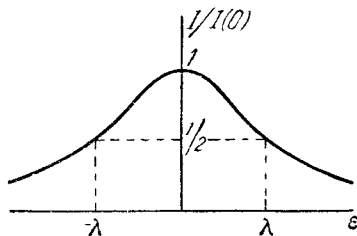


Рис. 18.

Среднее по времени значение квадрата синуса равно 1/2, поэтому

$$I(\gamma) = \lambda m b^2 \gamma^2. \quad (21,8)$$

Вблизи резонанса, подставляя амплитуду колебания из (21,7), имеем:

$$I(\epsilon) = \frac{f^2}{4m} \frac{\lambda}{\epsilon^2 + \lambda^2}. \quad (21,9)$$

Такой вид зависимости поглощения от частоты называется *дисперсионным*. Полушириной резонансной кривой (рис. 18) называют значение  $|\epsilon|$ , при котором величина  $I(\epsilon)$  уменьшается вдвое по сравнению с ее максимальным значением при  $\epsilon = 0$ . Из формулы (21,9) видно, что в данном случае эта ширина совпадает с показателем затухания  $\lambda$ . Высота же максимума

$$I(0) = \frac{f^2}{4m\lambda}$$

обратно пропорциональна  $\lambda$ . Таким образом, при уменьшении показателя затухания резонансная кривая становится уже и выше, т. е. ее максимум становится более острым. Площадь же под резонансной кривой остается при этом неизменной.

а потому и все уравнение (22,2) инвариантно по отношению к преобразованию  $t \rightarrow t + T$ . Отсюда следует, что если  $x(t)$  есть решение уравнения, то и функция  $x(t + T)$  тоже есть решение. Другими словами, если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — два независимых интеграла уравнения (22,2), то при замене  $t \rightarrow t + T$  они преобразуются линейным образом друг через друга. При этом можно <sup>1)</sup> выбрать  $x_1$  и  $x_2$  таким образом, чтобы их изменение при замене  $t$  на  $t + T$  сводилось просто к умножению на постоянный множитель:

$$x_1(t + T) = \mu_1 x_1(t), \quad x_2(t + T) = \mu_2 x_2(t).$$

Наиболее общий вид функций, обладающих таким свойством, есть

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu_2^{t/T} \Pi_2(t), \quad (22,3)$$

где  $\Pi_1(t)$  и  $\Pi_2(t)$  — чисто периодические функции времени (с периодом  $T$ ).

Постоянные  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в этих функциях должны быть связаны друг с другом определенным соотношением. Действительно, умножив уравнения

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t) x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega^2(t) x_2 = 0$$

соответственно на  $x_2$  и  $x_1$  и вычтя их почленно одно из другого, получим:

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt} (\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = 0$$

или

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \text{const.} \quad (22,4)$$

Но при любых функциях  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  вида (22,3) выражение в левой стороне этого равенства умножается на  $\mu_1 \mu_2$  при изменении аргумента  $t$  на  $T$ . Поэтому ясно, что соблюдение равенства (22,4) во всяком случае требует, чтобы было

$$\mu_1 \mu_2 = 1. \quad (22,5)$$

Дальнейшие заключения о постоянных  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  можно сделать, исходя из факта вещественности коэффициентов уравнения (22,2). Если  $x(t)$  есть какой-либо интеграл такого уравнения, то и комплексно сопряженная функция  $x^*(t)$

<sup>1)</sup> Если только постоянные  $\mu_1$  и  $\mu_2$  не совпадают.

должна удовлетворять тому же уравнению. Отсюда следует, что пара постоянных  $\mu_1, \mu_2$  должна совпадать с парой  $\mu_1^*, \mu_2^*$ , т. е. должно быть либо  $\mu_1 = \mu_2^*$ , либо  $\mu_1$  и  $\mu_2$  вещественны. В первом случае, учитывая (22,5), имеем  $\mu_1 = 1/\mu_1^*$ , т. е.  $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$ ; постоянные  $\mu_1$  и  $\mu_2$  по модулю равны единице.

Во втором же случае два независимых интеграла уравнения (22,2) имеют вид

$$x_1(t) = \mu^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{-t/T} \Pi_2(t) \quad (22,6)$$

с отличным от единицы положительным или отрицательным вещественным числом  $\mu$ . Одна из этих функций (первая или вторая при  $|\mu| > 1$  или  $|\mu| < 1$ ) экспоненциально возрастает со временем. Это значит, что состояние покоя системы (в положении равновесия  $x = 0$ ) будет неустойчивым: достаточно сколь угодно слабого отклонения от этого состояния, чтобы появившееся смещение  $x$  стало быстро возрастать со временем. Это явление называется *параметрическим резонансом*.

Обратим внимание на то, что при строго равных нулю начальных значениях  $x$  и  $\dot{x}$  они оставались бы равными нулю и в дальнейшем в отличие от обычного резонанса (§ 18), в котором возрастание смещения со временем (пропорциональное  $t$ ) происходит и от равного нулю начального значения.

Выясним условия возникновения параметрического резонанса в важном случае, когда функция  $\omega(t)$  мало отличается от некоторой постоянной величины  $\omega_0$  и является простой периодической функцией:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 (1 + h \cos \gamma t), \quad (22,7)$$

где постоянная  $h \ll 1$  (мы будем считать  $h$  положительной, чего всегда можно добиться надлежащим выбором начала отсчета времени). Как мы увидим ниже, параметрический резонанс возникает, если частота функции  $\omega(t)$  близка к удвоенной частоте  $\omega_0$ . Поэтому положим:

$$\gamma = 2\omega_0 + \epsilon,$$

где  $\epsilon \ll \omega_0$ .

Решение уравнения движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos (2\omega_0 + \epsilon) t] x = 0 \quad (22,8)$$

надо искать в виде

$$x = a(t) \cos \left( \omega_0 + \frac{\epsilon}{2} \right) t + b(t) \sin \left( \omega_0 + \frac{\epsilon}{2} \right) t, \quad (22,9)$$

где  $a(t)$  и  $b(t)$  — медленно (по сравнению с множителями  $\cos$  и  $\sin$ ) меняющиеся функции времени. Такой вид решения, разумеется, не является точным. В действительности функция  $x(t)$  содержит также члены с частотами, отличающимися от  $\omega_0 \pm \varepsilon/2$  на целое кратное от  $(2\omega_0 \pm \varepsilon)$ ; эти члены, однако, высшего порядка малости по  $h$ , и в первом приближении ими можно пренебречь.

Значениям частот  $\gamma$ , отделяющим область неустойчивости колебаний от области устойчивости, отвечает значение  $\mu = 1$  в (22,6), а в (22,9) — соответственно постоянные (не зависящие от времени) коэффициенты  $a$  и  $b$ . Определение границ области резонанса сводится, следовательно, к нахождению тех значений  $\gamma$  (или, что то же, значений  $\varepsilon$ ), при которых уравнение движения удовлетворяется (с требуемой точностью) решением (22,9) с постоянными  $a$  и  $b$ .

Подставив (22,9) в (22,8), произведения тригонометрических множителей надо разложить в суммы

$$\begin{aligned} \cos\left(\omega_0 \pm \frac{\varepsilon}{2}\right)t \cdot \cos(2\omega_0 \pm \varepsilon)t &= \\ &= \frac{1}{2} \cos\left(3\omega_0 \pm \frac{3\varepsilon}{2}\right)t + \frac{1}{2} \cos\left(\omega_0 \pm \frac{\varepsilon}{2}\right)t \end{aligned}$$

и т. п., и в соответствии со сказанным выше надо опустить члены с частотами  $3(\omega_0 \pm \varepsilon/2)$ . В результате получим:

$$b\left(\varepsilon \pm \frac{h\omega_0}{2}\right) \sin\left(\omega_0 \pm \frac{\varepsilon}{2}\right)t + a\left(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2}\right) \cos\left(\omega_0 \pm \frac{\varepsilon}{2}\right)t = 0.$$

Выполнение этого равенства требует одновременного обращения в нуль коэффициентов при каждом из множителей  $\sin$  и  $\cos$ :  $\varepsilon = -h\omega_0/2$  и  $a = 0$  или  $\varepsilon = h\omega_0/2$  и  $b = 0$ . Эти значения  $\varepsilon$  и дают границы области возникновения параметрического резонанса. Таким образом, он имеет место в интервале

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \varepsilon < \frac{h\omega_0}{2} \quad (22,10)$$

вокруг частоты  $2\omega_0$ .

Параметрический резонанс имеет место также при частотах  $\gamma$ , близких к значениям вида  $2\omega_0/n$ , где  $n$  — любое целое число. Однако ширина резонансных областей с увеличением  $n$  быстро уменьшается — как  $h^n$ .

**Задача**

Найти условия параметрического резонанса для малых колебаний плоского маятника с колеблющейся в вертикальном направлении точкой подвеса.

Решение. По найденной в задаче 2 § 5 функции Лагранжа найдем для малых ( $\varphi \ll 1$ ) колебаний уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \left( 1 + 4 \frac{a}{l} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \right) \varphi = 0$$

(где  $\omega_0^2 = g/l$ ). Отсюда видно, что роль введенного в тексте параметра  $h$  играет отношение  $4a/l$ . Условие (22,10) принимает вид

$$|\varepsilon| < \frac{2a\sqrt{g}}{l^{3/2}}.$$

**§ 23. Ангармонические колебания**

Вся изложенная выше теория малых колебаний основана на разложении потенциальной и кинетической энергии системы по координатам и скоростям с оставлением лишь членов второго порядка; при этом уравнения движения линейны, в связи с чем в этом приближении говорят о *линейных* колебаниях. Хотя такое разложение вполне законно при условии достаточной малости амплитуд колебаний, однако учет следующих приближений (так называемой *ангармоничности* или *нелинейности* колебаний) приводит к появлению некоторых хотя и слабых, но качественно новых особенностей движения.

Произведем разложение функции Лагранжа до членов третьего порядка. В потенциальной энергии при этом появятся члены третьей степени по координатам  $x_i$ , в кинетической же энергии — члены, содержащие произведения скоростей и координат вида  $\dot{x}_i \dot{x}_k x_l$ ; это отличие от прежнего выражения (19,3) связано с оставлением членов первого порядка по  $x$  в разложении функций  $a_{ik}(q)$ . Таким образом, функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k) + \frac{1}{2} \sum_{i,k,l} n_{ikl} \dot{x}_i \dot{x}_k x_l - \frac{1}{3} \sum_{i,k,l} l_{ikl} x_i x_k x_l, \quad (23,1)$$

где  $n_{ikl}$ ,  $l_{ikl}$  — новые постоянные коэффициенты.

Если от произвольных координат  $x_i$  перейти к нормальным координатам (линейного приближения)  $Q_\alpha$ , то в силу линейности этого преобразования третья и четвертая суммы в (23,1) перейдут в аналогичные суммы, в которых вместо координат  $x_i$  и скоростей  $\dot{x}_i$  будут стоять  $Q_\alpha$  и  $\dot{Q}_\alpha$ . Обозначив коэффициенты в этих суммах через  $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$  и  $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ , получим функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{1}{2} \sum (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \lambda_{\alpha\beta\gamma} \dot{Q}_\alpha \dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \mu_{\alpha\beta\gamma} Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma. \quad (23,2)$$

Мы не станем выписывать полностью следующих из этой лагранжевой функции уравнений движения. Существенно, что они имеют вид

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \quad (23,3)$$

где  $f_\alpha$  — однородные функции второго порядка от координат  $Q$  и их производных по времени.

Применяя метод последовательных приближений, ищем решение этих уравнений в виде

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}, \quad (23,4)$$

где  $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$ , а функции  $Q_\alpha^{(1)}$  удовлетворяют «невозмущенным» уравнениям

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0,$$

т. е. представляют собой обычные гармонические колебания

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha). \quad (23,5)$$

Сохраняя в следующем приближении в правой стороне уравнений (23,3) лишь члены второго порядка малости, получим для величин  $Q_\alpha^{(2)}$  уравнения

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}), \quad (23,6)$$

где в правую часть должны быть подставлены выражения (23,5). В результате мы получим линейные неоднородные дифференциальные уравнения, правые части которых можно преобразовать к суммам простых периодических функций. Так, например,

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} &= a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\beta t + \alpha_\alpha) \cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta) = \\ &= \frac{1}{2} a_\alpha a_\beta \{ \cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta] + \\ &\quad + \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta)t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta] \}. \end{aligned}$$

Таким образом, в правых частях уравнений (23,6) находятся члены, соответствующие колебаниям с частотами, равными суммам и разностям собственных частот системы. Решение уравнений следует искать в виде, содержащем такие же периодические множители, и мы приходим к выводу, что во втором приближении на нормальные колебания системы с частотами  $\omega_\alpha$  накладываются дополнительные колебания с частотами

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \quad (23,7)$$

(в том числе удвоенные частоты  $2\omega_\alpha$  и частота 0, соответствующая постоянному смещению). Эти частоты называются *комбинационными*. Амплитуды комбинационных колебаний пропорциональны произведениям  $a_\alpha a_\beta$  (или квадратам  $a_\alpha^2$ ) соответствующих нормальных колебаний.

В следующих приближениях, при учете членов более высокого порядка в разложении функции Лагранжа, возникают комбинационные колебания с частотами, являющимися суммами и разностями большего числа частот  $\omega_\alpha$ . Кроме того, однако, возникает еще и новое явление.

Дело в том, что уже в третьем приближении среди комбинационных частот появляются частоты, совпадающие с исходными  $\omega_\alpha$  (комбинация вида  $\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta$ ). При применении описанного выше метода в правой части уравнений движения будут находиться, следовательно, резонансные члены, которые приведут к возникновению в решении членов с возрастающей со временем амплитудой. Между тем, физически очевидно, что в замкнутой системе в отсутствие внешнего источника энергии не может происходить самопроизвольное нарастание интенсивности колебаний.

В действительности в высших приближениях происходит изменение основных частот  $\omega_\alpha$  по сравнению с их «невозмущенными» значениями  $\omega_\alpha^{(0)}$ , фигурирующими в квадратичном выражении потенциальной энергии. Появление же возрастающих членов в решении связано с разложением типа

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)t \approx \cos\omega_\alpha^{(0)}t - t\Delta\omega_\alpha \sin\omega_\alpha^{(0)}t,$$

явно незаконным при достаточно больших  $t$ .

## Глава VI

### ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

#### § 24. Угловая скорость

*Твердое тело* можно определить в механике как систему материальных точек, расстояния между которыми неизменны. Реально существующие в природе системы могут, конечно, удовлетворять этому условию лишь приближенно. Но большинство твердых тел в обычных условиях так мало изменяет свою форму и размеры, что при изучении законов движения твердого тела, рассматриваемого как нечто целое, мы вполне можем отвлечься от этих изменений.

В дальнейшем изложении мы будем часто рассматривать твердое тело как дискретную совокупность материальных точек, чем достигается некоторое упрощение выводов. Это, однако, ни в какой степени не противоречит тому обстоятельству, что в действительности твердые тела можно обычно рассматривать в механике как сплошные, совершенно не интересуясь их внутренней структурой. Переход от формул, содержащих суммирование по дискретным точкам, к формулам для сплошного тела осуществляется просто заменой масс частиц на массу  $\rho dV$ , заключенную в элементе объема  $dV$  ( $\rho$  — плотность массы), и интегрированием по всему объему тела.

Для описания движения твердого тела введем две системы координат: «неподвижную», т. е. инерциальную систему  $XYZ$ , и движущуюся систему координат  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ , которая предполагается жестко связанной с твердым телом и участвующей во всех его движениях. Начало движущейся системы координат удобно совместить с центром инерции тела.

Положение твердого тела относительно неподвижной системы координат вполне определяется заданием положения дви-



жушейся системы. Пусть радиус-вектор  $\mathbf{R}_0$  указывает положение начала  $O$  движущейся системы (рис. 19). Ориентация же осей этой системы относительно неподвижной определяется тремя независимыми углами, так что вместе с тремя компонентами вектора  $\mathbf{R}_0$  мы имеем всего шесть координат. Таким образом, всякое твердое тело представляет собой механическую систему с шестью степенями свободы.

Рассмотрим произвольное бесконечно малое перемещение твердого тела. Его можно представить в виде суммы двух частей. Одна из них есть бесконечно малый параллельный перенос тела, в результате которого центр инерции переходит из начального положения в конечное при неизменной ориентации осей подвижной системы координат. Вторая — бесконечно малый поворот вокруг центра инерции, в результате которого твердое тело приходит в конечное положение.

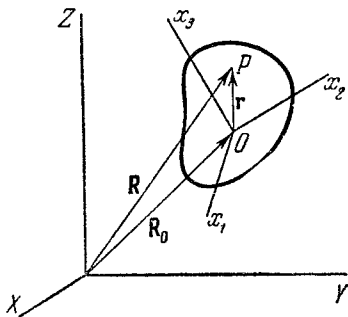


Рис. 19.

Обозначим радиус-вектор произвольной точки твердого тела в подвижной системе координат посредством  $\mathbf{r}$ , а радиус-вектор той же точки в неподвижной системе — посредством  $\mathbf{R}$ . Тогда бесконечно малое смещение  $d\mathbf{R}$  точки  $P$  складывается из перемещения  $d\mathbf{R}_0$  вместе с центром инерции и перемещения  $[d\varphi \cdot \mathbf{r}]$  относительно последнего при повороте на бесконечно малый угол  $d\varphi$  (см. (9,1)):

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_0 + [d\varphi \cdot \mathbf{r}].$$

Разделив это равенство на время  $dt$ , в течение которого произошло рассматриваемое перемещение, и введя скорости

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \boldsymbol{\Omega}, \quad (24,1)$$

получим соотношение между ними

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}]. \quad (24,2)$$

Вектор  $\mathbf{V}$  есть скорость центра инерции твердого тела; ее называют также скоростью его *поступательного* движения.

Вектор  $\Omega$  называется *угловой скоростью* вращения твердого тела; его направление (как и направление  $d\varphi$ ) совпадает с направлением оси вращения. Таким образом, скорость  $v$  любой точки тела (относительно неподвижной системы координат) может быть выражена через поступательную скорость тела и угловую скорость его вращения.

Следует подчеркнуть, что при выводе формулы (24,2) специфические свойства начала координат как центра инерции тела совершенно не были использованы. Преимущества этого выбора выяснятся лишь позже при вычислении энергии движущегося тела.

Допустим теперь, что жестко связанная с твердым телом система координат выбрана так, что ее начало находится не в центре инерции  $O$ , а в некоторой точке  $O'$  на расстоянии  $\mathbf{a}$  от точки  $O$ . Скорость перемещения начала  $O'$  этой системы обозначим через  $\mathbf{V}'$ , а угловую скорость ее вращения — через  $\Omega'$ .

Рассмотрим снова какую-либо точку  $P$  твердого тела и обозначим ее радиус-вектор относительно начала  $O'$  через  $\mathbf{r}'$ . Тогда  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$  и подстановка в (24,2) дает:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\Omega \mathbf{a}] + [\Omega \mathbf{r}'].$$

С другой стороны, по определению  $\mathbf{V}'$  и  $\Omega'$ , должно быть  $\mathbf{v} = \mathbf{V}' + [\Omega' \mathbf{r}']$ . Поэтому мы заключаем, что

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + [\Omega \mathbf{a}], \quad \Omega' = \Omega. \quad (24,3)$$

Второе из этих равенств весьма существенно. Мы видим, что угловая скорость, с которой вращается в каждый данный момент времени жестко связанная с телом система координат, оказывается не зависящей от выбора этой системы. Все такие системы вращаются в заданный момент времени вокруг параллельных друг другу осей с одинаковой по абсолютной величине скоростью  $\Omega$ . Это обстоятельство и дает нам право называть  $\Omega$  угловой скоростью вращения твердого тела как такового. Скорость же поступательного движения такого «абсолютного» характера отношь не имеет.

Из первой формулы (24,3) видно, что если  $\mathbf{V}$  и  $\Omega$  (в данный момент времени) взаимно перпендикулярны при каком-либо выборе начала координат  $O$ , то они (т. е.  $\mathbf{V}'$  и  $\Omega'$ ) взаимно перпендикулярны и при определении по отношению к любому другому началу  $O'$ . Из формулы (24,2) видно, что в этом

случае скорости  $\mathbf{v}$  всех точек тела лежат в одной и той же плоскости — плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{\Omega}$ . При этом всегда можно выбрать такое начало  $O'$ <sup>1)</sup>, скорость  $\mathbf{V}'$  которого равна нулю, так что движение твердого тела (в данный момент) будет представлено как чистое вращение вокруг оси, проходящей через  $O'$ . Эту ось называют *мгновенной осью вращения* тела<sup>2)</sup>.

В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что начало движущейся системы координат выбрано в центре инерции тела, так что и ось вращения тела проходит через этот центр. При движении тела меняются, вообще говоря, как абсолютная величина  $\mathbf{\Omega}$ , так и направление оси вращения.

## § 25. Тензор инерции

Для вычисления кинетической энергии твердого тела рассматриваем его как дискретную систему материальных точек и пишем:

$$T = \sum \frac{mv^2}{2},$$

где суммирование производится по всем точкам, составляющим тело. Здесь и ниже мы опускаем индексы, нумерующие эти точки, с целью упрощения записи формул.

Подставив сюда (24,2), получим:

$$T = \sum \frac{m}{2} (\mathbf{v} + [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}])^2 = \sum \frac{m}{2} v^2 + \sum m\mathbf{v} [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}] + \sum \frac{m}{2} [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]^2.$$

Скорости  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{\Omega}$  одинаковы для всех точек твердого тела. Поэтому в первом члене  $v^2/2$  выносится за знак суммы, а сумма  $\sum m$  есть масса тела, которую мы будем обозначать посредством  $\mu$ . Во втором члене пишем:

$$\sum m\mathbf{v} [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}] = \sum m [\mathbf{v}\mathbf{\Omega}] \mathbf{r} = [\mathbf{v}\mathbf{\Omega}] \sum m\mathbf{r}.$$

Отсюда видно, что если начало движущейся системы

<sup>1)</sup> Оно может, конечно, оказаться лежащим и вне объема тела.

<sup>2)</sup> В общем же случае не взаимно перпендикулярных направлений  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{\Omega}$  начало координат можно выбрать таким образом, чтобы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{\Omega}$  стали параллельными, т. е. движение (в данный момент времени) будет совокупностью вращения вокруг некоторой оси и поступательного перемещения вдоль этой же оси.

координат выбрано, как условлено, в центре инерции, то этот член обращается в нуль, так как тогда  $\sum m\mathbf{r} = 0$ . Наконец, в третьем члене раскрываем квадрат векторного произведения и в результате находим:

$$T = \frac{mV^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega^2 r^2 - (\mathbf{\Omega r})^2 \}. \quad (25,1)$$

Таким образом, кинетическая энергия твердого тела может быть представлена в виде суммы двух частей. Первый член в (25,1) есть кинетическая энергия поступательного движения — она имеет такой вид, как если бы вся масса тела была сосредоточена в его центре инерции. Второй член есть кинетическая энергия вращательного движения с угловой скоростью  $\mathbf{\Omega}$  вокруг оси, проходящей через центр инерции. Подчеркнем, что возможность такого разделения кинетической энергии на две части обусловлена выбором начала связанной с телом системы координат именно в его центре инерции.

Перепишем кинетическую энергию вращения в тензорных обозначениях, т. е. через компоненты  $x_i$ ,  $\Omega_i$  векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{\Omega}$ <sup>1)</sup>. Имеем:

$$\begin{aligned} T_{\text{вр}} &= \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i^2 x_i^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k \} = \\ &= \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_i^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k \} = \\ &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k). \end{aligned}$$

Здесь использовано тождество  $\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k$ , где  $\delta_{ik}$  — единичный тензор (компоненты которого равны единице при  $i = k$  и нулю при  $i \neq k$ ). Введя тензор

$$I_{ik} = \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k), \quad (25,2)$$

<sup>1)</sup> Буквами  $i, k, l$  обозначаются тензорные индексы, пробегающие значения 1, 2, 3. При этом везде применяется известное правило суммирования, согласно которому знаки сумм опускаются, а по всем дважды повторяющимся (так называемым «немым») индексам подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3; так,  $A_i B_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $A_i^2 = A_i A_i = \mathbf{A}^2$  и т. д. Обозначение немых индексов можно, очевидно, снять произвольным образом (лишь бы оно не совпало с обозначением других фигурирующих в данном выражении тензорных индексов).

получим окончательное выражение для кинетической энергии твердого тела в виде

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k. \quad (25,3)$$

Функция Лагранжа твердого тела получается из (25,3) вычитанием потенциальной энергии:

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U. \quad (25,4)$$

Потенциальная энергия является в общем случае функцией шести переменных, определяющих положение твердого тела, например, трех координат  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  центра инерции и трех углов, определяющих ориентацию движущихся осей координат относительно неподвижных.

Тензор  $I_{ik}$  называется *тензором моментов инерции* или просто *тензором инерции* тела. Как ясно из определения (25,2), он симметричен, т. е.

$$I_{ik} = I_{ki}. \quad (25,5)$$

Выпишем для наглядности его компоненты в явном виде в следующей таблице:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum mxy & \sum m(x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mxz & -\sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \quad (25,6)$$

Компоненты  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  иногда называют моментами инерции относительно соответствующих осей.

Тензор инерции, очевидно, аддитивен — моменты инерции тела равны суммам моментов инерции его частей.

Если твердое тело можно рассматривать как сплошное (с плотностью  $\rho$ ), то в определении (25,2) сумма заменяется интегралом по объему тела:

$$I_{ik} = \int \rho (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k) dV. \quad (25,7)$$

Как и всякий симметричный тензор второго ранга, тензор инерции может быть приведен к диагональному виду путем соответствующего выбора направлений осей  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ . Эти направления называют *главными осями инерции*, а соответствующие значения компонент тензора — *главными моментами*

инерции; обозначим их как  $I_1, I_2, I_3$ . При таком выборе осей  $x_1, x_2, x_3$  вращательная кинетическая энергия выражается особенно просто:

$$T_{вр} = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2). \quad (25,8)$$

Отметим, что каждый из трех главных моментов инерции не может быть больше суммы двух других. Так,

$$I_1 + I_2 = \sum m (x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geq \sum m (x_1^2 + x_2^2) = I_3. \quad (25,9)$$

Тело, у которого все три главных момента инерции различны, называют *асимметрическим волчком*.

Если два главных момента инерции равны друг другу,  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , то твердое тело называют *симметрическим волчком*. В этом случае выбор направления главных осей в плоскости  $x_1 x_2$  произволен.

Если же все три главных момента инерции совпадают, то тело называют *шаровым волчком*. В этом случае произволен выбор всех трех главных осей инерции: в качестве их можно взять любые три взаимно перпендикулярные оси.

Нахождение главных осей инерции очень упрощается, если твердое тело обладает той или иной симметрией; ясно, что положение центра инерции и направления главных осей инерции должны обладать той же симметрией.

Так, если тело обладает плоскостью симметрии, то центр инерции должен лежать в этой плоскости. В ней же лежат две главные оси инерции, и третья — перпендикулярна к ней. Очевидным случаем такого рода является система частиц, расположенных в одной плоскости. В этом случае существует простое соотношение между тремя главными моментами инерции. Если плоскость системы выбрана в качестве плоскости  $x_1 x_2$ , то поскольку для всех частиц  $x_3 = 0$ , имеем:

$$I_1 = \sum m x_2^2, \quad I_2 = \sum m x_1^2, \quad I_3 = \sum m (x_1^2 + x_2^2),$$

так что

$$I_3 = I_1 + I_2. \quad (25,10)$$

Если тело обладает осью симметрии какого-либо порядка, то центр инерции лежит на этой оси. С ней же совпадает одна из главных осей инерции, а две другие — перпендикулярны к ней. При этом, если порядок оси симметрии выше второго, то тело является симметрическим волчком. Действи-

тельно, каждую главную ось (перпендикулярную к оси симметрии) можно повернуть тогда на угол, отличный от  $180^\circ$ , т. е. выбор этих осей становится неоднозначным, а это возможно лишь в случае симметрического волчка.

Особым случаем является система частиц, расположенных вдоль одной прямой линии. Если выбрать эту прямую в качестве оси  $x_3$ , то для всех частиц  $x_1 = x_2 = 0$ , и потому два главных момента инерции совпадают, а третий равен нулю:

$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2, \quad I_3 = 0. \quad (25,11)$$

Такую систему называют *ротатором*. Характерной особенностью ротатора в отличие от общего случая произвольного тела является то, что он имеет всего две (а не три) вращательные степени свободы, соответствующие вращениям вокруг осей  $x_1$  и  $x_2$ ; говорить же о вращении прямой вокруг самой себя, очевидно, не имеет смысла.

Наконец, сделаем еще одно замечание по поводу вычисления тензора инерции. Хотя мы определили этот тензор по отношению к системе координат с началом в центре инерции (только при таком определении справедлива основная формула (25,3)), но для его вычисления может оказаться удобным вычислить предварительно аналогичный тензор

$$I'_{ik} = \sum m (x_i'^2 \delta_{ik} - x_i' x_k'),$$

определенный по отношению к другому началу  $O'$ . Если расстояние  $OO'$  дается вектором  $\mathbf{a}$ , то  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ ,  $x_i = x_i' + a_i$ ; учитывая также, что  $\sum m \mathbf{r} = 0$ , по определению точки  $O$ , найдем:

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu (a^2 \delta_{ik} - a_i a_k). \quad (25,12)$$

По этой формуле, зная  $I'_{ik}$ , легко вычислить искомый тензор  $I_{ik}$ .

### Задачи

1. Определить главные моменты инерции для молекул, рассматриваемых как системы частиц, находящихся на неизменных расстояниях друг от друга, в следующих случаях:

а) Молекула из трех атомов, расположенных на одной прямой.

О т в е т :

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu} (m_1 m_2 l_{12}^2 + m_1 m_3 l_{13}^2 + m_2 m_3 l_{23}^2), \quad I_3 = 0,$$

где  $m_a$  — массы атомов,  $l_{ab}$  — расстояние между атомами  $a$  и  $b$ .

Для двухатомной молекулы получился бы заранее очевидный результат — произведение приведенной массы обоих атомов на квадрат расстояния между ними:

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

б) Трехатомная молекула в виде равнобедренного треугольника (рис. 20).

О т в е т. Центр инерции лежит на высоте треугольника на расстоянии  $m_2 h / \mu$  от его основания. Моменты инерции:

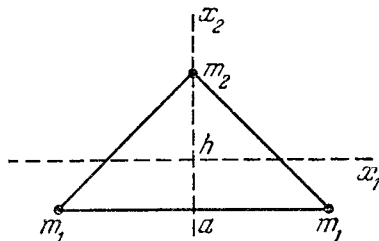


Рис. 20.

$$I_1 = \frac{2m_1 m_2}{\mu} h^2,$$

$$I_2 = \frac{m_1}{2} a^2, \quad I_3 = I_1 + I_2.$$

2. Определить главные моменты инерции сплошных однородных тел.

а) Тонкий стержень длиной  $l$ .

О т в е т:  $I_1 = I_2 = \frac{1}{12} \mu l^2$ ,  $I_3 = 0$  (толщиной стержня пренебрегаем).

б) Шар радиуса  $R$ .

О т в е т:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} \nu R^2$$

(вычислять следует сумму  $I_1 + I_2 + I_3 = 2\rho \int r^2 dV$ ).

в) Круговой цилиндр радиуса  $R$  и высотой  $h$ .

О т в е т:

$$I_1 = I_2 = \frac{\mu}{4} \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right), \quad I_3 = \frac{\mu}{2} R^2$$

( $x_3$  — ось цилиндра).

г) Прямоугольный параллелепипед с длинами ребер  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

О т в е т:

$$I_1 = \frac{\mu}{12} (b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{\mu}{12} (c^2 + a^2), \quad I_3 = \frac{\mu}{12} (a^2 + b^2)$$

(оси  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  параллельны ребрам  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ).

д) Трехосный эллипсоид с полуосями  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Р е ш е н и е. Центр инерции совпадает с центром эллипсоида, а главные оси инерции — с его осями. Интегрирование по объему эллипсоида может быть сведено к интегрированию по объему сферы



путем преобразования координат  $x = a\xi$ ,  $y = b\eta$ ,  $z = c\zeta$ , превращающего уравнение поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в уравнение поверхности единичной сферы

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Так, для момента инерции относительно оси  $x$  получаем:

$$\begin{aligned} I_1 &= \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho abc \iiint (b^2\eta^2 + c^2\zeta^2) d\xi d\eta d\zeta = \\ &= abc \frac{1}{2} I' (b^2 + c^2), \end{aligned}$$

где  $I'$  — момент инерции шара единичного радиуса. Учитывая, что объем эллипса равен  $4\pi abc/3$ , получим окончательно моменты инерции

$$I_1 = \frac{\mu}{5} (b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{\mu}{5} (a^2 + c^2),$$

$$I_3 = \frac{\mu}{5} (a^2 + b^2).$$

3. Определить частоту малых колебаний физического маятника (твердое тело, качающееся в поле тяжести около неподвижной горизонтальной оси).

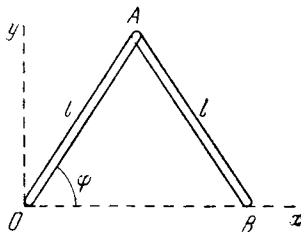


Рис. 21.

Решение. Пусть  $l$  — расстояние от центра инерции маятника до оси вращения, а  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — углы между направлениями его главных осей инерции и осью вращения. В качестве переменной координаты вводим угол  $\varphi$  между вертикалью и перпендикуляром, опущенным из центра инерции на ось вращения. Скорость центра инерции  $V = l\dot{\varphi}$ , а проекции угловой скорости на главные оси инерции:  $\dot{\varphi} \cos \alpha$ ,  $\dot{\varphi} \cos \beta$ ,  $\dot{\varphi} \cos \gamma$ . Считая угол  $\varphi$  малым, находим потенциальную энергию в виде

$$U = \mu gl (1 - \cos \varphi) \approx \frac{1}{2} \mu gl \varphi^2.$$

Поэтому функция Лагранжа

$$L = \frac{\mu l^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma) \dot{\varphi}^2 - \frac{\mu gl^2}{2} \varphi^2.$$

Отсюда для частоты колебаний имеем:

$$\omega^2 = \frac{\mu gl}{\mu l^2 + I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma}.$$

4. Найти кинетическую энергию системы, изображенной на рис. 21;  $OA$  и  $AB$  — тонкие однородные стержни длиной  $l$ , шарнирно

скрепленные в точке  $A$ . Стержень  $OA$  вращается (в плоскости рисунка) вокруг точки  $O$ , а конец  $B$  стержня  $AB$  скользит вдоль оси  $Ox$ .

Решение. Скорость центра инерции стержня  $OA$  (находящегося на его середине) есть  $l\dot{\varphi}/2$ , где  $\varphi$  — угол  $AOB$ . Поэтому кинетическая энергия стержня  $OA$

$$T_1 = \frac{\mu l^2}{8} \dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2$$

( $\mu$  — масса одного стержня).

Декартовы координаты центра инерции стержня  $AB$ :  $X = \frac{3l}{2} \cos \varphi$ ,  $Y = \frac{l}{2} \sin \varphi$ . Так как угловая скорость вращения этого стержня тоже равна  $\dot{\varphi}$ , то его кинетическая энергия

$$T_2 = \frac{\mu}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{\mu l^2}{8} (1 + 8 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{l \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Полная кинетическая энергия системы

$$T = \frac{\mu l^2}{3} (1 + 3 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2$$

(подставлено  $I = \mu l^2/12$  согласно задаче 2а).

5. Найти кинетическую энергию цилиндра (радиуса  $R$ ), катящегося по плоскости. Масса цилиндра распределена по его объему таким образом, что одна из главных осей инерции параллельна оси цилиндра и проходит на расстоянии  $a$  от нее; момент инерции относительно этой главной оси есть  $I$ .

Решение. Вводим угол  $\varphi$  между вертикалью и перпендикуляром, опущенным из центра тяжести на ось цилиндра (рис. 22).

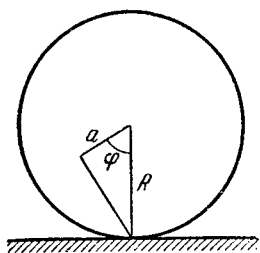


Рис. 22.

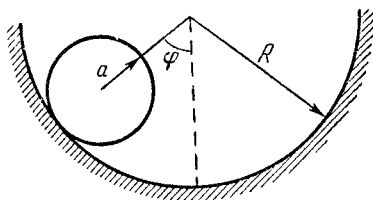


Рис. 23.

Движение цилиндра в каждый момент времени можно рассматривать как чистое вращение вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией его соприкосновения с неподвижной плоскостью; угловая скорость этого вращения есть  $\dot{\varphi}$  (угловая скорость вращения вокруг всех параллельных осей одинакова). Центр инерции находится на расстоянии  $\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi}$  от мгновенной оси и потому его

скорость есть  $V = \dot{\varphi} \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi}$ . Полная кинетическая энергия

$$T = \frac{\mu}{2} (a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2.$$

6. Найти кинетическую энергию однородного цилиндра радиуса  $a$ , катящегося по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиуса  $R$  (рис. 23).

Решение. Вводим угол  $\varphi$  между линией, соединяющей центры обоих цилиндров, и вертикалью. Центр инерции катящегося цилиндра находится на оси и его скорость  $V = \dot{\varphi} (R - a)$ . Угловую скорость вычисляем как скорость чистого вращения вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией соприкосновения цилиндров; она равна

$$\Omega = \frac{V}{a} = \dot{\varphi} \frac{R - a}{a}.$$

Если  $I_3$  — момент инерции относительно оси цилиндра, то

$$T = \frac{\mu}{2} (R - a)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{I_3}{2} \frac{(R - a)^2}{a^2} \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} \mu (R - a)^2 \dot{\varphi}^2$$

( $I_3$  — из задачи 2в).

## § 26. Момент импульса твердого тела

Величина момента импульса системы зависит, как мы знаем, от выбора точки, относительно которой он определен. В механике твердого тела наиболее рационален выбор в качестве этой точки начала подвижной системы координат, т. е. центра инерции тела. Ниже мы будем понимать под  $\mathbf{M}$  момент, определенный именно таким образом.

Согласно формуле (9,6) при выборе начала координат в центре инерции тела его момент  $\mathbf{M}$  совпадает с «собственным моментом», связанным лишь с движением точек тела относительно центра инерции. Другими словами, в определении  $\mathbf{M} = \sum m [\mathbf{r}\mathbf{v}]$  надо заменить  $\mathbf{v}$  на  $[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]$ :

$$\mathbf{M} = \sum m [\mathbf{r} [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]] = \sum m \{r^2 \mathbf{\Omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{\Omega})\},$$

или в тензорных обозначениях:

$$M_i = \sum m \{x_j^2 \Omega_j - x_i x_k \Omega_k\} = \Omega_k \sum m \{x_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k\}.$$

Наконец, учитывая определение (25,2) тензора инерции, получаем окончательно:

$$M_i = I_{ik} \Omega_k. \quad (26,1)$$

Если оси  $x_1, x_2, x_3$  направлены вдоль главных осей инерции тела, то эта формула дает:

$$M_1 = I_1 \Omega_1, \quad M_2 = I_2 \Omega_2, \quad M_3 = I_3 \Omega_3. \quad (26,2)$$

В частности, для шарового волчка, когда все три главных момента инерции совпадают, имеем просто:

$$\mathbf{M} = I \boldsymbol{\Omega}, \quad (26,3)$$

т. е. вектор момента пропорционален вектору угловой скорости и имеет одинаковое с ним направление.

В общем же случае произвольного тела вектор  $\mathbf{M}$ , вообще говоря, не совпадает по своему направлению с вектором  $\boldsymbol{\Omega}$ , и лишь при вращении тела вокруг какой-либо из его главных осей инерции  $\mathbf{M}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  имеют одинаковое направление.

Рассмотрим свободное движение твердого тела, не подверженного действию каких-либо внешних сил. Не представляющее интереса равномерное поступательное движение будем предполагать исключенным, так что речь идет о свободном вращении тела.

Как и у всякой замкнутой системы, момент импульса свободно вращающегося тела постоянен. Для шарового волчка условие  $\mathbf{M} = \text{const}$  приводит просто к  $\boldsymbol{\Omega} = \text{const}$ . Это значит, что общим случаем свободного вращения шарового волчка является просто равномерное вращение вокруг постоянной оси.

Столь же прост случай ротатора. Здесь тоже  $\mathbf{M} = I \boldsymbol{\Omega}$ , причем вектор  $\boldsymbol{\Omega}$  перпендикулярен к оси ротатора. Поэтому свободное вращение ротатора есть равномерное вращение в одной плоскости вокруг направления, перпендикулярного к этой плоскости.

Закон сохранения момента достаточен и для определения более сложного свободного вращения симметрического волчка.

Воспользовавшись произвольностью выбора направлений главных осей инерции  $x_1, x_2$  (перпендикулярных к оси симметрии волчка  $x_3$ ), выберем ось  $x_2$  перпендикулярной к плоскости, определяемой постоянным вектором  $\mathbf{M}$  и мгновенным положением оси  $x_3$ . Тогда  $M_2 = 0$ , а из формул (25,2) видно, что и  $\Omega_2 = 0$ . Это значит, что направления  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  и оси волчка в каждый момент времени лежат в одной плоскости (рис. 24). Но отсюда в свою очередь следует, что скорости  $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}]$  всех точек на оси волчка в каждый момент времени

перпендикулярны к указанной плоскости; другими словами, ось волчка равномерно (см. ниже) вращается вокруг направления  $\mathbf{M}$ , описывая круговой конус (так называемая *регулярная прецессия* волчка). Одновременно с прецессией сам волчок равномерно вращается вокруг собственной оси.

Угловые скорости обоих этих вращений легко выразить через заданную величину момента  $M$  и угол наклона  $\theta$  оси волчка к направлению  $\mathbf{M}$ . Угловая скорость вращения волчка вокруг своей оси есть просто проекция  $\Omega_3$  вектора  $\Omega$  на эту ось:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3} \cos \theta. \quad (26,4)$$

Для определения же скорости прецессии  $\Omega_{\text{пр}}$  надо разложить вектор  $\Omega$  по правилу параллелограмма на составляющие вдоль  $x_3$  и вдоль  $\mathbf{M}$ . Из них первая не приводит ни к какому перемещению самой оси волчка, а потому вторая и дает искомую угловую скорость прецессии. Из построения на рис. 24 ясно, что  $\sin \theta \Omega_{\text{пр}} = \Omega_1$ , а поскольку  $\Omega_1 = M_1/I_1 = M \sin \theta/I_1$ , то получаем:

$$\Omega_{\text{пр}} = \frac{M}{I_1}. \quad (26,5)$$

## § 27. Уравнения движения твердого тела

Поскольку твердое тело обладает в общем случае шестью степенями свободы, то общая система уравнений движения должна содержать шесть независимых уравнений. Их можно представить в виде, определяющем производные по времени от двух векторов: импульса и момента тела.

Первое из этих уравнений получается просто путем суммирования уравнений  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}$  для каждой из составляющих

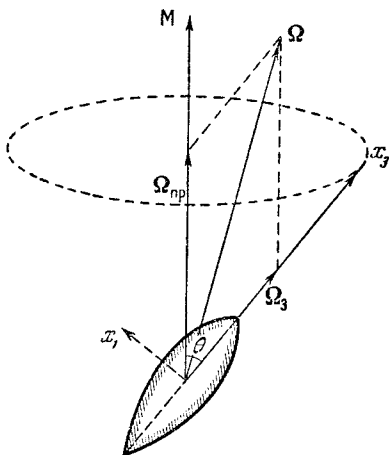


Рис. 24.

тело частиц, где  $\mathbf{p}$  — импульс частицы, а  $\mathbf{f}$  — действующая на нее сила. Вводя полный импульс тела

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = \mu \mathbf{V}$$

и полную действующую на него силу  $\sum \mathbf{f} = \mathbf{F}$ , получим:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (27,1)$$

Хотя мы определили  $\mathbf{F}$  как сумму всех сил  $\mathbf{f}$ , действующих на каждую из частиц, в том числе со стороны других частиц тела, фактически в  $\mathbf{F}$  входят лишь силы, действующие со стороны внешних источников. Все силы взаимодействия между частицами самого тела взаимно сокращаются; действительно, при отсутствии внешних сил импульс тела, как и всякой замкнутой системы, должен сохраняться, т. е. должно быть  $\mathbf{F} = 0$ .

Если  $U$  — потенциальная энергия твердого тела во внешнем поле, то сила  $\mathbf{F}$  может быть определена путем дифференцирования ее по координатам центра инерции тела:

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}_0}. \quad (27,2)$$

Действительно, при поступательном перемещении тела на  $\delta \mathbf{R}_0$  настолько же меняются и радиус-векторы  $\mathbf{R}$  каждой точки тела, а потому изменение потенциальной энергии

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} \delta \mathbf{R} = \delta \mathbf{R}_0 \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} = - \delta \mathbf{R}_0 \sum \mathbf{f} = - \mathbf{F} \delta \mathbf{R}_0.$$

Перейдем к выводу второго уравнения движения, определяющего производную по времени от момента импульса  $\mathbf{M}$ . Для упрощения вывода удобно выбрать «неподвижную» (инерциальную) систему отсчета таким образом, чтобы в данный момент времени центр инерции тела покоился относительно нее. Полученное таким образом уравнение движения будет тем самым в силу галилеевского принципа относительности справедливо и в любой другой инерциальной системе отсчета.

Имеем:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt} \sum [\mathbf{r}\mathbf{p}] = \sum [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + \sum [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}].$$

В силу сделанного нами выбора системы отсчета (в которой  $\mathbf{V} = 0$ ) значение  $\dot{\mathbf{r}}$  в данный момент времени совпадает со скоростью  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}$ . Поскольку же векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  имеют одинаковое направление, то  $[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] = 0$ . Заменяв также  $\dot{\mathbf{r}}$  на силу  $\mathbf{f}$ , получим окончательно:

$$\frac{dM}{dt} = K, \quad (27,3)$$

где

$$K = \sum [\mathbf{r}\mathbf{f}]. \quad (27,4)$$

Вектор  $[\mathbf{r}\mathbf{f}]$  называется *моментом силы*  $\mathbf{f}$ , так что  $K$  есть сумма моментов всех сил, действующих на тело. Как и в полной силе  $\mathbf{F}$ , в сумме (27,4) фактически должны учитываться лишь внешние силы; в соответствии с законом сохранения момента импульса сумма моментов всех сил, действующих внутри замкнутой системы, должна обращаться в нуль.

Момент силы, как и момент импульса, зависит, вообще говоря, от выбора начала координат, относительно которого он определен. В (27,3—4) моменты определяются относительно центра инерции тела.

При переносе начала координат на расстояние  $\mathbf{a}$  новые радиус-векторы  $\mathbf{r}'$  точек тела связаны со старыми  $\mathbf{r}$  посредством  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ . Поэтому

$$K = \sum [\mathbf{r}\mathbf{f}] = \sum [\mathbf{r}'\mathbf{f}] + \sum [\mathbf{a}\mathbf{f}]$$

или

$$K = K' + [\mathbf{a}\mathbf{F}]. \quad (27,5)$$

Отсюда видно, в частности, что величина момента сил не зависит от выбора начала координат, если полная сила  $\mathbf{F} = 0$  (в таком случае говорят, что к телу приложена пара сил).

Изменение потенциальной энергии  $U$  при повороте тела на бесконечно малый угол  $\delta\varphi$  равно

$$\delta U = - \sum \mathbf{f} \delta \mathbf{R} = - \sum \mathbf{f} [\delta\varphi \cdot \mathbf{r}] = - \delta\varphi \sum [\mathbf{r}\mathbf{f}] = - K \delta\varphi,$$

откуда

$$K = - \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \quad (27,6)$$

Эта формула для полного момента сил аналогична формуле (27,2) для полной силы.

Предположим, что векторы  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{K}$  взаимно перпендикулярны. В этом случае всегда можно найти такой вектор  $\mathbf{a}$ , чтобы в формуле (27,5)  $\mathbf{K}'$  обратилось в нуль, так что будет:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{a}\mathbf{F}]. \quad (27,7)$$

При этом выбор  $\mathbf{a}$  неоднозначен: прибавление к нему любого вектора, параллельного  $\mathbf{F}$ , не изменит равенства (27,7), так что условие  $\mathbf{K}' = 0$  даст не определенную точку в подвижной системе координат, а лишь определенную прямую линию. Таким образом, при  $\mathbf{K} \perp \mathbf{F}$  действие всех приложенных к телу сил может быть сведено к одной силе  $\mathbf{F}$ , действующей вдоль определенной прямой линии.

Таков, в частности, случай однородного силового поля, в котором действующая на материальную точку сила имеет вид  $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E}$  — постоянный вектор, характеризующий поле, а величина  $e$  характеризует свойства частицы по отношению к данному полю<sup>1)</sup>. В этом случае имеем:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \sum e, \quad \mathbf{K} = [\sum e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}].$$

Предполагая, что  $\sum e \neq 0$ , введем радиус-вектор  $\mathbf{r}_0$ , определенный согласно

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum e\mathbf{r}}{\sum e}. \quad (27,8)$$

Тогда мы получим следующее простое выражение для полного момента сил:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{r}_0\mathbf{F}]. \quad (27,9)$$

Таким образом, при движении твердого тела в однородном поле влияние поля сводится к действию одной силы  $\mathbf{F}$ , «приложенной» в точке с радиус-вектором (27,8). Положение этой точки всецело определяется свойствами самого тела; в поле тяжести, например, она совпадает с центром инерции тела.

<sup>1)</sup> Так, в однородном электрическом поле  $\mathbf{E}$  есть напряженность поля, а  $e$  — заряд частицы. В однородном поле тяжести  $\mathbf{E}$  есть ускорение силы тяжести  $\mathbf{g}$ , а  $e$  — масса частицы  $m$ .



## § 28. Соприкосновение твердых тел

Условия равновесия твердого тела, как это видно из уравнений движения (27,1) и (27,3), можно сформулировать в виде равенства нулю действующих на него полной силы и полного момента сил:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum \mathbf{f} = 0, \\ \mathbf{K} &= \sum [\mathbf{r}\mathbf{f}] = 0. \end{aligned} \quad (28,1)$$

Суммирование производится здесь по всем приложенным к телу внешним силам, а  $\mathbf{r}$  — радиус-векторы «точек приложения» сил; при этом точка (начало координат), относительно которой определяются моменты, может быть выбрана произвольным образом: при  $\mathbf{F} = 0$  значение  $\mathbf{K}$  не зависит от этого выбора.

Если мы имеем дело с системой соприкасающихся друг с другом твердых тел, то в равновесии условия (28,1) должны выполняться для каждого из тел в отдельности. При этом в число сил должны быть включены также и силы, действующие на данное тело со стороны остальных соприкасающихся с ним тел. Эти силы приложены в точках соприкосновения тел и называются *силами реакции*. Очевидно, что для каждых двух тел их взаимные силы реакции равны по величине и противоположны по направлению.

В общем случае как величины, так и направления реакций определяются в результате совместного решения системы уравнений равновесия (28,1) для всех тел. В некоторых случаях, однако, направление сил реакции задается уже условиями задачи. Так, если два тела могут свободно скользить по поверхности друг друга, то силы реакции между ними направлены по нормали к поверхности.

Если соприкасающиеся тела движутся друг относительно друга, то, кроме сил реакции, появляются также силы диссипативного характера — *силы трения*.

Возможны два типа движения соприкасающихся тел — *скольжение* и *качение*. При скольжении реакции перпендикулярны к соприкасающимся поверхностям, а силы трения направлены по касательным к ним.

Чистое качение характеризуется тем, что в точках соприкосновения нет относительного движения тел; другими словами,

катящееся тело в каждый момент времени как бы закреплено в точке соприкосновения. При этом направление силы реакции произвольно, т. е. не обязательно нормально к соприкасающимся поверхностям. Трение же при качении проявляется в виде дополнительного момента сил, препятствующего качению.

Если при скольжении трение настолько мало, что им можно вовсе пренебречь, то поверхности тел называются *абсолютно гладкими*. Напротив, если свойства поверхности допускают лишь чистое качение тел без скольжения, а трением при качении можно пренебречь, то поверхности называют *абсолютно шероховатыми*.

В обоих случаях силы трения не фигурируют явным образом в задаче о движении тел, и потому задача является чисто механической. Если же конкретные свойства трения существенны для движения, то последнее не является уже чисто механическим процессом (ср. § 20).

Соприкосновение тел уменьшает число их степеней свободы по сравнению с тем, которым они обладали бы при свободном движении. До сих пор при рассмотрении такого рода задач мы учитывали это обстоятельство путем введения координат, непосредственно соответствующих реальному числу степеней свободы. При качении тел, однако, такой выбор координат может оказаться невозможным.

Условие, накладываемое на движение тел при качении, заключается в равенстве скоростей соприкасающихся точек (так, при качении тела по неподвижной поверхности скорость точки соприкосновения должна быть равна нулю). В общем случае такое условие выражается *уравнениями связи* вида

$$\sum_i c_{ai} \dot{q}_i = 0, \quad (28,2)$$

где  $c_{ai}$  — функции только координат (индекс  $a$  нумерует уравнения связей). Если левые стороны равенств не являются полными производными по времени каких-либо функций координат, то эти уравнения не могут быть проинтегрированы. Другими словами, они не сведутся к соотношениям между одними только координатами, которыми можно было бы воспользоваться для того, чтобы выразить положение тел через меньшее число координат в соответствии с реальным

числом степеней свободы. Такие связи называют *неголономными* (в противоположность *голономным*, связывающим лишь координаты системы).

Рассмотрим, например, качение шара по плоской поверхности. Как обычно, обозначим посредством  $\mathbf{V}$  скорость поступательного движения (скорость центра шара), а посредством  $\boldsymbol{\Omega}$  — угловую скорость вращения его. Скорость точки касания шара с плоскостью получится, если положить  $\mathbf{r} = -a\mathbf{n}$  в общей формуле  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]$  ( $a$  — радиус шара,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к плоскости качения в точке соприкосновения). Искомая связь представляет собой условие отсутствия скольжения в точке касания, т. е. дается уравнением

$$\mathbf{V} - a[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{n}] = 0. \quad (28,3)$$

Оно не может быть проинтегрировано: хотя скорость  $\mathbf{V}$  представляет собой полную производную по времени от радиус-вектора центра шара, но зато угловая скорость не является в общем случае полной производной каких-либо координат. Таким образом, связь (28,3) неголономна<sup>1)</sup>.

Для составления уравнений движения соприкасающихся тел существует метод, основанный на явном введении сил реакции. Сущность этого метода (составляющего содержание так называемого *принципа д'Аламбера*) состоит в том, что для каждого из соприкасающихся тел пишутся уравнения

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{f}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum [\mathbf{r}\mathbf{f}], \quad (28,4)$$

причем в число действующих на тело сил  $\mathbf{f}$  включаются также и силы реакции; эти силы заранее неизвестны и сами определяются вместе с движением тела в результате решения уравнений. Этот метод в равной степени применим как при голономных, так и при неголономных связях.

<sup>1)</sup> Заметим, что такая же связь для качения цилиндра была бы голономной. В этом случае ось вращения сохраняет при качении постоянное направление в пространстве, и потому  $\boldsymbol{\Omega} = d\varphi/dt$  является полной производной от угла поворота  $\varphi$  цилиндра вокруг своей оси. Соотношение (28,3) при этом интегрируется и дает связь между координатой центра инерции и углом  $\varphi$ .

## Задачи

1. Пользуясь принципом д'Аламбера, найти уравнения движения однородного шара, катящегося по плоскости под действием приложенных к нему внешней силы  $\mathbf{F}$  и момента сил  $\mathbf{K}$ .

Решение. Уравнение связи (28,3) написано уже в тексте. Вводя силу реакции (обозначим ее, как  $\mathbf{R}$ ), приложенную в точке касания шара с плоскостью, напишем уравнения (28,4):

$$\mu \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad (1)$$

$$I \frac{d\Omega}{dt} = \mathbf{K} - a[\mathbf{nR}] \quad (2)$$

(здесь учтено, что  $\mathbf{P} = \mu\mathbf{V}$  и что для шарового волчка  $\mathbf{M} = I\Omega$ ). Дифференцируя уравнение связи (28,3) по времени, получим:

$$\dot{\mathbf{V}} = a[\dot{\Omega}\mathbf{n}].$$

Подставив в уравнение (1) и исключая  $\dot{\Omega}$  с помощью (2), найдем уравнение

$$\frac{I}{a\mu} (\mathbf{F} + \mathbf{R}) = [\mathbf{Kn}] - a\mathbf{R} + a\mathbf{n}(\mathbf{nR}),$$

связывающее силу реакции с  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{K}$ . Расписав это уравнение в компонентах и подставив  $I = \frac{2}{5} \mu a^2$  (см. задачу 26 § 25), будем иметь:

$$R_x = \frac{5}{7a} K_y - \frac{2}{7} F_x,$$

$$R_y = -\frac{5}{7a} K_x - \frac{2}{7} F_y, \quad R_z = -F_z$$

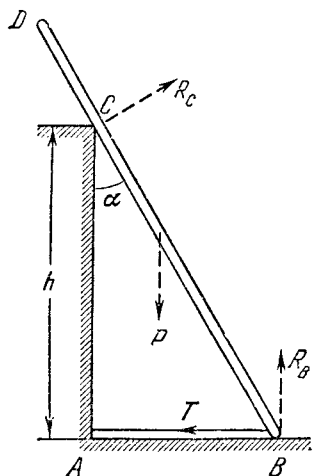


Рис. 25.

(плоскость  $xu$  выбрана в плоскости качения). Наконец, подставив эти выражения в (1), получим уравнения движения, содержащие уже только заданные внешние силу и момент:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{5}{7\mu} \left( F_x + \frac{K_y}{a} \right), \quad \frac{dV_y}{dt} = \frac{5}{7\mu} \left( F_y - \frac{K_x}{a} \right).$$

Компоненты  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$  угловой скорости выражаются через  $V_x$  и  $V_y$  с помощью уравнения связи (28,3), а для  $\Omega_z$  имеем уравнение

$$\frac{2}{5} \mu a^2 \frac{d\Omega_z}{dt} = K_z$$

( $z$ -компонента уравнения (2)).

2. Однородный стержень  $BD$  весом  $P$  и длиной  $l$  опирается на стену, как показано на рис. 25; его нижний конец  $B$  удерживается нитью  $AB$ . Определить реакцию опор и натяжение нити.

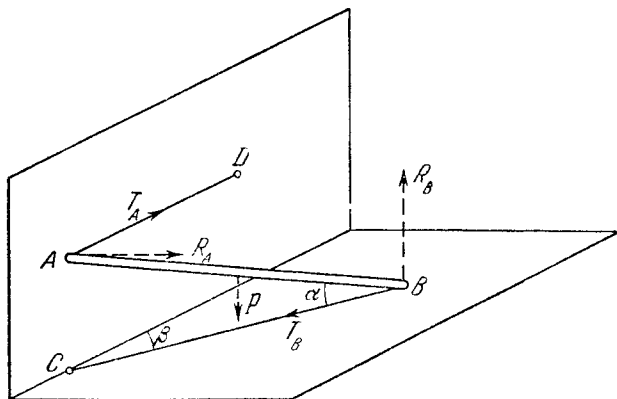


Рис. 26.

Решение. Вес стержня представляется приложенной к его середине силой  $P$ , направленной вертикально вниз. Силы реакции  $R_B$  и  $R_C$  направлены соответственно вертикально вверх и перпендикулярно к стержню; натяжение нити  $T$  направлено от  $B$  к  $A$ . Решение уравнений равновесия дает

$$R_C = \frac{Pl}{4h} \sin 2\alpha,$$

$$R_B = P - R_C \sin \alpha, \quad T = R_C \cos \alpha.$$

3. Стержень  $AB$  весом  $P$  опирается своими концами на горизонтальную и вертикальную плоскости (рис. 26) и удерживается в этом положении двумя горизонтальными нитями  $AD$  и  $BC$ ; нить  $BC$  находится в одной (вертикальной) плоскости со стержнем  $AB$ . Определить реакции опор и натяжения нитей.

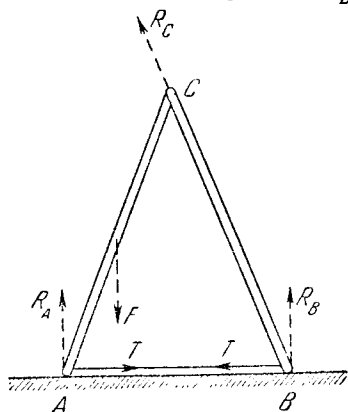


Рис. 27.

Решение. Натяжения нитей  $T_A$  и  $T_B$  направлены от  $A$  к  $D$  и от  $B$  к  $C$ . Реакции  $R_A$  и  $R_B$  перпендикулярны к соответствующим плоскостям. Решение уравнений равновесия даст:

$$R_B = P, \quad T_B = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha, \quad R_A = T_B \sin \beta, \quad T_A = T_B \cos \beta.$$

4. Два стержня длиной  $l$  соединены сверху шарниром, а снизу скреплены нитью  $AB$  (рис. 27). К середине одного из стержней приложена сила  $F$  (весом стержней пренебрегаем). Определить силы реакции.

Решение. Натяжение нити  $T$  действует в точке  $A$  от  $A$  к  $B$ , а в точке  $B$  — от  $B$  к  $A$ . Реакции  $R_A$  и  $R_B$  в точках  $A$  и  $B$  перпендикулярны к плоскости опоры. Посредством  $R_C$  обозначим силу реакции в шарнире, действующую на стержень  $AC$ ; тогда на стержень  $BC$  действует реакция —  $R_C$ . Условие равенства нулю суммы моментов сил  $R_B$ ,  $T$  и  $-R_C$ , действующих на стержень  $BC$ , приводит к результату, что вектор  $R_C$  направлен вдоль  $BC$ . Остальные условия равновесия (для каждого из двух стержней) приводят к значениям

$$R_A = \frac{3}{4} F, \quad R_B = \frac{F}{4}, \quad R_C = \frac{F}{4 \sin \alpha}, \quad T = \frac{1}{4} F \operatorname{ctg} \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол  $CAB$ .

## § 29. Движение в неинерциальной системе отсчета

До сих пор, рассматривая движение любой механической системы, мы всегда относили его к инерциальной системе отсчета. Только в инерциальных системах отсчета функция Лагранжа, например, одной частицы во внешнем поле имеет вид

$$L_0 = \frac{mv_0^2}{2} - U, \quad (29,1)$$

и соответственно уравнение движения

$$m \frac{dv_0}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

(мы будем в этом параграфе отличать индексом 0 величины, относящиеся к инерциальной системе отсчета).

Займемся теперь вопросом о том, как выглядят уравнения движения частицы в неинерциальной системе отсчета. Отправным пунктом при решении этого вопроса снова является принцип наименьшего действия, применимость которого не ограничена никаким выбором системы отсчета; вместе с ним остаются в силе и уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}. \quad (29,2)$$

Однако функция Лагранжа уже не имеет вида (29,1), и для ее нахождения необходимо произвести соответствующее преобразование функции  $L_0$ .

Это преобразование мы произведем в два приема. Рассмотрим сначала систему отсчета  $K'$ , которая движется относительно инерциальной системы  $K_0$  поступательно со скоростью  $\mathbf{V}(t)$ . Скорости  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}'$  частицы относительно систем  $K_0$  и  $K'$  связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{V}(t). \quad (29,3)$$

Подставив это выражение в (29,1), получим функцию Лагранжа в системе  $K'$

$$L' = \frac{m\mathbf{v}'^2}{2} + m\mathbf{v}'\mathbf{V} + \frac{m}{2}\mathbf{V}^2 - U.$$

Но  $V^2(t)$  есть заданная функция времени; она может быть представлена как полная производная по  $t$  от некоторой другой функции, и потому третий член в написанном выражении может быть опущен. Далее,  $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$ , где  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор частицы в системе координат  $K'$ ; поэтому

$$m\mathbf{V}(t)\mathbf{v}' = m\mathbf{V} \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}\mathbf{r}') - m\mathbf{r}' \frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Подставив это в функцию Лагранжа и снова опустив полную производную по времени, получим окончательно:

$$L' = \frac{m\mathbf{v}'^2}{2} - m\mathbf{W}(t)\mathbf{r}' - U, \quad (29,4)$$

где  $\mathbf{W} = d\mathbf{V}/dt$  — ускорение поступательного движения системы отсчета  $K'$ .

Составляя с помощью (29,4) уравнение Лагранжа, получим:

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} - m\mathbf{W}(t). \quad (29,5)$$

Мы видим, что в смысле своего влияния на уравнения движения частицы ускоренное поступательное движение системы отсчета эквивалентно появлению однородного силового поля, причем действующая в этом поле сила равна произведению массы частицы на ускорение  $\mathbf{W}$  и направлена в противоположную этому ускорению сторону.

Введем теперь еще одну систему отсчета,  $K$ , которая имеет общее с системой  $K'$  начало, но вращается относительно нее с угловой скоростью  $\mathbf{\Omega}(t)$ ; по отношению же к инерциальной системе  $K_0$  система  $K$  совершает как поступательное, так и вращательное движение

Скорость  $\mathbf{v}'$  частицы относительно системы  $K'$  складывается из ее скорости  $\mathbf{v}$  относительно системы  $K$  и скорости  $[\mathbf{\Omega r}]$  ее вращения вместе с системой  $K$ :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [\mathbf{\Omega r}]$$

(радиус-векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  частицы в системах  $K$  и  $K'$  совпадают). Подставив это выражение в функцию Лагранжа (29,4), получим:

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\mathbf{v}[\mathbf{\Omega r}] + \frac{m}{2}[\mathbf{\Omega r}]^2 - mW\mathbf{r} - U. \quad (29,6)$$

Это есть общий вид функции Лагранжа частицы в произвольной неинерциальной системе отсчета. Отметим, что вращение системы отсчета приводит к появлению в функции Лагранжа члена совершенно особого вида — линейного по скорости частицы.

Для вычисления производных, входящих в уравнение Лагранжа, пишем полный дифференциал

$$\begin{aligned} dL = m\mathbf{v} d\mathbf{v} + m d\mathbf{v}[\mathbf{\Omega r}] + m\mathbf{v}[\mathbf{\Omega} d\mathbf{r}] + m[\mathbf{\Omega r}][\mathbf{\Omega} d\mathbf{r}] - \\ - mW d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} = m\mathbf{v} d\mathbf{v} + m d\mathbf{v}[\mathbf{\Omega r}] + m d\mathbf{r}[\mathbf{v}\mathbf{\Omega}] + \\ + m[[\mathbf{\Omega r}]\mathbf{\Omega}] d\mathbf{r} - mW d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Собирая члены, содержащие  $d\mathbf{v}$  и  $d\mathbf{r}$ , найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m[\mathbf{\Omega r}], \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m[\mathbf{v}\mathbf{\Omega}] + m[[\mathbf{\Omega r}]\mathbf{\Omega}] - mW - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (29,2), получим искомое уравнение движения

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - mW + m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{\Omega}}] + 2m[\mathbf{v}\mathbf{\Omega}] + m[\mathbf{\Omega}[\mathbf{r}\mathbf{\Omega}]]. \quad (29,7)$$

Мы видим, что «силы инерции», обусловленные вращением системы отсчета, слагаются из трех частей. Сила  $m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{\Omega}}]$  связана с неравномерностью вращения, а две другие присутствуют и при равномерном вращении. Сила  $2m[\mathbf{v}\mathbf{\Omega}]$  называется *силой Кориолиса*; в отличие от всех ранее рассматривавшихся (не диссипативных) сил она зависит от скорости частицы. Сила  $m[\mathbf{\Omega}[\mathbf{r}\mathbf{\Omega}]]$  называется *центробежной*. Она



направлена в плоскости, проходящей через  $\mathbf{r}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  перпендикулярно к оси вращения (т. е. направлению  $\boldsymbol{\Omega}$ ), в сторону от оси; по величине центробежная сила равна  $m\rho\Omega^2$ , где  $\rho$  — расстояние частицы от оси вращения.

Рассмотрим особо случай равномерно вращающейся системы координат, не имеющей поступательного ускорения. Положив в (29,6) и (29,7)  $\boldsymbol{\Omega} = \text{const}$ ,  $\mathbf{W} = 0$ , получим функцию Лагранжа

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\mathbf{v}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}] + \frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]^2 - U \quad (29,8)$$

и уравнение движения

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}] + m[\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{r}\boldsymbol{\Omega}]]. \quad (29,9)$$

Вычислим также энергию частицы в этом случае. Подставив

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}] \quad (29,10)$$

в  $E = \mathbf{p}\mathbf{v} - L$ , получим:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]^2 + U. \quad (29,11)$$

Обратим внимание на то, что в энергии линейный по скорости член отсутствует. Влияние вращения системы отсчета сводится к добавлению в энергии члена, зависящего только от координат частицы и пропорционального квадрату угловой скорости. Эта дополнительная потенциальная энергия —  $\frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]^2$  называется *центробежной*.

Скорость  $\mathbf{v}$  частицы относительно равномерно вращающейся системы отсчета связана с ее же скоростью  $\mathbf{v}_0$  относительно инерциальной системы  $K_0$  посредством

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]. \quad (29,12)$$

Поэтому импульс  $\mathbf{p}$  (29,10) частицы в системе  $K$  совпадает с ее же импульсом  $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_0$  в системе  $K_0$ . Вместе с ними совпадают также моменты импульсов  $\mathbf{M}_0 = [\mathbf{r}\mathbf{p}_0]$  и  $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ . Энергии же частицы в системах  $K$  и  $K_0$  различны. Подставив  $\mathbf{v}$  из (29,12) в (29,11), получим:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - m\mathbf{v}_0[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}] + U = \frac{mv_0^2}{2} + U - m[\mathbf{r}\mathbf{v}_0]\boldsymbol{\Omega}.$$

Первые два члена представляют собой энергию  $E_0$  в системе  $K_0$ . Вводя в последний член момент импульса, получим:

$$E = E_0 - M\Omega. \quad (29,13)$$

Этой формулой определяется закон преобразования энергии при переходе к равномерно вращающейся системе координат. Хотя мы вывели его для одной частицы, но очевидно, что вывод может быть непосредственно обобщен на случай любой системы частиц и приведет к той же формуле (29,13).

### Задачи

1. Найти отклонение свободно падающего тела от вертикали, обусловленное вращением Земли. (Угловую скорость вращения считать малой.)

Решение. В поле тяжести  $U = -mgr$ , где  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения силы тяжести; пренебрегая в уравнении (29,9) центробежной силой, содержащей квадрат  $\Omega$ , получим уравнение движения в виде

$$\dot{\mathbf{v}} = 2[\mathbf{v}\Omega] + \mathbf{g}. \quad (1)$$

Решаем это уравнение последовательными приближениями. Для этого полагаем:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , где  $\mathbf{v}_1$  — решение уравнения  $\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{g}$ , т. е.  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0$  ( $\mathbf{v}_0$  — начальная скорость). Подставляя  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  в (1) и оставляя справа только  $\mathbf{v}_1$ , получим уравнение для  $\mathbf{v}_2$ :

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = 2[\mathbf{v}_1\Omega] = 2t[\mathbf{g}\Omega] + 2[\mathbf{v}_0\Omega].$$

Интегрируя, получим:

$$\mathbf{r} = \mathbf{h} + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2} + \frac{t^3}{3}[\mathbf{g}\Omega] + t^2[\mathbf{v}_0\Omega], \quad (2)$$

где  $\mathbf{h}$  — вектор начального положения частицы.

Выберем ось  $z$  по вертикали вверх, а ось  $x$  — по меридиану к полюсу; тогда

$$g_x = g_y = 0, \quad g_z = -g; \quad \Omega_x = \Omega \cos \lambda, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = \Omega \sin \lambda,$$

где  $\lambda$  — широта (которую для определенности предполагаем северной). Положив в (2)  $\mathbf{v}_0 = 0$ , найдем:

$$x = 0, \quad y = -\frac{t^3}{3}g\Omega \cos \lambda.$$

Подставив сюда время падения  $t \approx \sqrt{2h/g}$ , найдем окончательно:

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{3} \left( \frac{2h}{g} \right)^{3/2} g\Omega \cos \lambda$$

(отрицательные значения  $y$  соответствуют отклонению на восток).

2. Определить отклонение от плоскости для тела, брошенного с поверхности Земли с начальной скоростью  $\mathbf{v}_0$ .

Решение. Выбираем плоскость  $xz$  так, чтобы скорость  $\mathbf{v}_0$  лежала в ней. Начальная высота  $h = 0$ . Для бокового отклонения получим из (2) (задача 1):

$$y = -\frac{t^3}{3} g \Omega_x + t^2 (\Omega_x v_{0z} - \Omega_z v_{0x}),$$

или, подставив время полета  $t \approx 2v_{0z}/g$ :

$$y = \frac{4v_{0z}^2}{g^2} \Omega \left( \frac{1}{3} v_{0z} \cos \lambda - v_{0x} \sin \lambda \right).$$

3. Определить влияние, оказываемое вращением Земли на малые колебания маятника (так называемый *маятник Фуко*).

Решение. Пренебрегая вертикальным смещением маятника как малой величиной второго порядка, можно считать движение тела происходящим в горизонтальной плоскости  $xу$ . Опуская члены, содержащие  $\Omega^2$ , напишем уравнения движения в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z \dot{x},$$

где  $\omega$  — частота колебаний маятника без учета вращения Земли. Умножив второе уравнение на  $i$  и сложив с первым, получим одно уравнение

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$$

для комплексной величины  $\xi = x + iy$ . При  $\Omega_z \ll \omega$  решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = e^{-i\Omega_z t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$$

или

$$x + iy = e^{-i\Omega_z t} (x_0 + iy_0),$$

где функции  $x_0(t)$ ,  $y_0(t)$  дают траекторию маятника без учета вращения Земли. Влияние этого вращения сводится, следовательно, к повороту траектории вокруг вертикали с угловой скоростью  $\Omega_z$ .

## Глава VII

### КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

#### § 30. Уравнения Гамильтона

Формулирование законов механики с помощью функции Лагранжа (и выводимых из нее уравнений Лагранжа) предполагает описание механического состояния системы путем задания ее обобщенных координат и скоростей. Такое описание, однако, не является единственно возможным. Ряд преимуществ, в особенности при исследовании различных общих вопросов механики, представляет описание с помощью обобщенных координат и импульсов системы. В связи с этим возникает вопрос о нахождении уравнений движения, отвечающих такой формулировке механики.

Переход от одного набора независимых переменных к другому можно совершить путем преобразования, известного в математике под названием преобразования Лежандра. В данном случае оно сводится к следующему.

Полный дифференциал функции Лагранжа как функции координат и скоростей равен

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

Это выражение можно написать в виде

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i, \quad (30,1)$$

поскольку производные  $\partial L / \partial \dot{q}_i$  являются, по определению, обобщенными импульсами, а  $\partial L / \partial q_i = \dot{p}_i$  в силу уравнений Лагранжа.

Перепишем теперь второй член в (30,1) в виде

$$\sum p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right) - \sum \dot{q}_i dp_i,$$

перенеся полный дифференциал в левую сторону равенства и изменив все знаки, получим из (30,1):

$$d\left(\sum p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i.$$

Величина, стоящая под знаком дифференциала, представляет собой энергию системы (см. § 6); выраженная через координаты и импульсы, она называется *гамильтоновой функцией*

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (30,2)$$

Из дифференциального равенства

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i \quad (30,3)$$

следуют уравнения

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (30,4)$$

Это — искомые уравнения движения в переменных  $p$  и  $q$ , так называемые *уравнения Гамильтона*. Они составляют систему  $2s$  дифференциальных уравнений первого порядка для  $2s$  неизвестных функций  $p(t)$  и  $q(t)$  вместо  $s$  уравнений второго порядка лагранжевого метода. Ввиду их формальной простоты и симметрии эти уравнения называют также *каноническими*.

Полная производная от функции Гамильтона по времени

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i.$$

При подстановке сюда  $\dot{q}_i$  и  $\dot{p}_i$  из уравнений (30,4) последние два члена взаимно сокращаются, так что

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (30,5)$$

В частности, если функция Гамильтона не зависит от времени явно, то  $dH/dt = 0$ , т. е. мы снова приходим к закону сохранения энергии.

Наряду с динамическими переменными  $q, \dot{q}$  или  $q, p$  функции Лагранжа и Гамильтона содержат различные параметры — величины, характеризующие свойства самой механической системы или действующего на нее внешнего поля. Пусть  $\lambda$  — такой параметр. Рассматривая его как переменную величину, будем иметь вместо (30,1):

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda,$$

после чего вместо (30,3) получим:

$$dH = - \sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Отсюда находим соотношение

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p, q} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q}, q}, \quad (30,6)$$

связывающее частные производные по параметру  $\lambda$  от функций Лагранжа и Гамильтона; индексы у производных указывают, что дифференцирование должно производиться в одном случае при постоянных  $p$  и  $q$ , а в другом — при постоянных  $q$  и  $\dot{q}$ .

Этот результат может быть представлен и в другом аспекте. Пусть функция Лагранжа имеет вид  $L = L_0 + L'$ , где  $L'$  представляет собой малую добавку к основной функции  $L_0$ . Тогда соответствующая добавка в функции Гамильтона  $H = H_0 + H'$  связана с  $L'$  посредством

$$(H')_{p, q} = - (L')_{\dot{q}, q}. \quad (30,7)$$

### Задачи

1. Найти функцию Гамильтона для одной материальной точки в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

О т в е т. В декартовых координатах  $x, y, z$ :

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ :

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \varphi, z).$$

В сферических координатах  $r, \theta, \varphi$ :

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi).$$

2. Найти функцию Гамильтона частицы в равномерно вращающейся системе отсчета.

Решение. Из (29,11) и (29,10) получим:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \Omega [rp] + U.$$

### § 31. Уравнение Гамильтона — Якоби

При формулировке принципа наименьшего действия мы рассматривали интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (31,1)$$

взятый по траектории между двумя заданными положениями  $q^{(1)}$  и  $q^{(2)}$ , которые система занимает в заданные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ . При варьировании же действия сравнивались значения этого интеграла для близких траекторий с одними и теми же значениями  $q(t_1)$  и  $q(t_2)$ . Лишь одна из этих траекторий отвечает действительному движению — та, для которой интеграл  $S$  минимален.

Рассмотрим теперь понятие действия в другом аспекте. Именно, будем рассматривать  $S$  как величину, характеризующую движение по истинным траекториям, и сравним значения, которые она имеет для траекторий, имеющих общее начало  $q(t_1) = q^{(1)}$ , но проходящих в момент  $t_2$  через различные положения. Другими словами, будем рассматривать интеграл действия для истинных траекторий как функцию значений координат на верхнем пределе интегрирования.

Изменение действия при переходе от одной траектории к близкой к ней другой траектории дается (при одной степени свободы) выражением (2,5)

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt.$$

Поскольку траектории действительного движения удовлетворяют уравнениям Лагранжа, то стоящий здесь интеграл

обращается в нуль. В первом же члене полагаем на нижнем пределе  $\delta q(t_1) = 0$ , а значение  $\delta q(t_2)$  обозначим просто, как  $\delta q$ . Заменив также  $\partial L / \partial \dot{q}$  на  $p$ , получим окончательно:  $\delta S = p \delta q$  или в общем случае любого числа степеней свободы

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i. \quad (31,2)$$

Из этого соотношения следует, что частные производные от действия по координатам равны соответствующим импульсам

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (31,3)$$

Аналогичным образом действие можно понимать как явную функцию времени, рассматривая траектории, начинающиеся в заданный момент времени  $t_1$  в заданном положении  $q^{(1)}$ , но заканчивающиеся в заданном положении  $q^{(2)}$  в различные моменты времени  $t_2 = t$ . Понимаемую в этом смысле частную производную  $\partial S / \partial t$  можно найти путем соответствующего варьирования интеграла. Проще, однако, воспользоваться уже известной нам формулой (31,3), поступив следующим образом.

По самому определению действия его полная производная по времени вдоль траектории равна:

$$\frac{dS}{dt} = L. \quad (31,4)$$

С другой стороны, рассматривая  $S$  как функцию координат и времени в описанном выше смысле и используя формулу (31,3), имеем:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

Сравнивая оба выражения, находим:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i$$

или окончательно:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(p, q, t). \quad (31,5)$$

Формулы (31,3) и (31,5) вместе можно записать в виде выражения

$$dS = \sum_i p_i dq_i - H dt \quad (31,6)$$



для полного дифференциала действия как функции координат и времени на верхнем пределе интегрирования в (31,1). Само же действие соответственно напишется в виде интеграла

$$S = \int \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right). \quad (31,7)$$

В частности, если функция  $H(p, q)$  не зависит от времени явно, так что энергия сохраняется, можно заменить  $H(p, q)$  постоянной  $E$  и тогда зависимость  $S$  от времени сводится к слагаемому  $-Et$ :

$$S(q, t) = S_0(q) - Et, \quad (31,8)$$

где

$$S_0(q) = \sum_i \int p_i dq_i. \quad (31,9)$$

Функцию  $S_0(q)$  иногда называют *укороченным действием*.

Функция  $S(q, t)$  удовлетворяет определенному дифференциальному уравнению, которое мы получим, заменив в соотношении (31,5) импульсы  $p$  производными  $\partial S / \partial q$ :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left( \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; q_1, \dots, q_s; t \right) = 0. \quad (31,10)$$

Это уравнение в частных производных первого порядка называется *уравнением Гамильтона — Якоби*. Так, для одной частицы во внешнем поле  $U(x, y, z, t)$  оно имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + U(x, y, z, t) = 0. \quad (31,11)$$

Уравнение Гамильтона — Якоби принимает несколько более простую форму, если функция  $H(p, q)$  не зависит от времени явно. Взяв  $S(q, t)$  из (31,8), получим для укороченного действия уравнение

$$H \left( \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}; q_1, \dots, q_s \right) = E. \quad (31,12)$$

## § 32. Адиабатические инварианты

Рассмотрим механическую систему, совершающую одномерное финитное движение и характеризующуюся некоторым параметром  $\lambda$ , определяющим свойства самой системы или внешнего поля, в котором она находится.

Предположим, что параметр  $\lambda$  под влиянием каких-либо внешних причин медленно (как говорят, адиабатически) меняется со временем; под «медленным» имеется в виду такое изменение, при котором  $\lambda$  мало меняется за время периода  $T$  движения системы:

$$T \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda. \quad (32,1)$$

Такая система не является замкнутой и ее энергия  $E$  не сохраняется. Но в силу медленности изменения  $\lambda$  можно утверждать, что скорость  $\dot{E}$  изменения энергии пропорциональна скорости  $\dot{\lambda}$  изменения параметра  $\lambda$ . Это значит, что энергия системы ведет себя при изменении  $\lambda$  как некоторая функция  $\lambda$ . Другими словами, существует такая комбинация из  $E$  и  $\lambda$ , которая остается при движении системы неизменной; эту величину называют *адиабатическим инвариантом*.

Пусть  $H(p, q; \lambda)$  — гамильтонова функция системы, зависящая от параметра  $\lambda$ . Согласно формуле (30,5) полная производная энергии системы по времени

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}.$$

Усредним это равенство по периоду движения; учитывая медленность изменения  $\lambda$  (а с ним и  $\dot{\lambda}$ ), можно вынести  $\dot{\lambda}$  за знак усреднения:

$$\frac{\overline{dE}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\overline{\partial H}}{\partial \lambda},$$

а в усредняемой функции  $\partial H / \partial \lambda$  рассматривать как изменяющиеся величины лишь  $p$  и  $q$ , но не  $\lambda$ . Другими словами, усреднение происходит по такому движению системы, какое имело бы место при заданном постоянном значении  $\lambda$ .

Запишем усреднение в явном виде

$$\frac{\overline{dE}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt.$$

Согласно уравнению Гамильтона  $\dot{q} = \partial H / \partial p$  имеем:

$$dt = \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}.$$

С помощью этого равенства заменяем интегрирование по времени на интегрирование по координате, причем и период  $T$  записываем в виде

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}};$$

знак  $\oint$  здесь обозначается интегрирование по полному изменению координаты («вперед» и «назад») за время периода. Таким образом

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial H / \partial \lambda}{\frac{\partial H}{\partial p}} dq}{\oint \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}}. \quad (32,2)$$

Как уже было указано, интегрирования в этой формуле должны производиться по траектории движения при данном постоянном значении  $\lambda$ . Вдоль такой траектории функция Гамильтона сохраняет постоянное значение  $E$ , а импульс является определенной функцией переменной координаты  $q$  и двух постоянных независимых параметров  $E$  и  $\lambda$ . Понимая импульс именно как такую функцию  $p(q; E, \lambda)$  и дифференцируя равенство  $H(p, q; \lambda) = E$  по параметру  $\lambda$ , получим:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$$

или

$$\frac{\partial H / \partial \lambda}{\partial H / \partial p} = - \frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

Подставив это в верхний интеграл в (32,2) и написав в нижнем подынтегральную функцию в виде  $\partial p / \partial E$ , имеем:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = - \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E} dq} \quad (32,3)$$

или

$$\oint \left( \frac{\partial p}{\partial E} \frac{d\bar{E}}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0.$$

Это равенство можно окончательно переписать в виде

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad (32,4)$$

где  $I$  обозначает интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad (32,5)$$

взятый по траектории движения при заданных  $E$  и  $\lambda$ . Этот результат показывает, что величина  $I$  остается в рассматриваемом приближении постоянной при изменении параметра  $\lambda$ , т. е. является адиабатическим инвариантом.

Интегралу (32,5) может быть приписан наглядный геометрический смысл, если ввести понятие о *фазовой траектории* системы—кривой, изображающей зависимость  $p$  от  $q$ . Для системы, совершающей периодическое движение, фазовая траектория — замкнутая кривая. Интеграл (32,5), взятый вдоль этой кривой, представляет собой заключенную внутри нее площадь.

В качестве примера определим адиабатический инвариант для одномерного осциллятора. Его функция Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

где  $\omega$  — собственная частота осциллятора. Уравнение фазовой траектории дается законом сохранения энергии  $H(p, q) = E$ . Это есть эллипс с полуосями  $\sqrt{2mE}$  и  $\sqrt{2E/m\omega^2}$  и его площадь (деленная на  $2\pi$ )

$$I = \frac{E}{\omega}. \quad (32,6)$$

Адиабатическая инвариантность этой величины означает, что при медленном изменении параметров осциллятора его энергия меняется пропорционально частоте.

## Глава VIII

### ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

#### § 33. Скорость распространения взаимодействий

Взаимодействие материальных частиц описывается в классической механике потенциальной энергией, являющейся функцией от координат взаимодействующих частиц. Очевидно, что этот способ описания включает в себя предположение о мгновенности распространения взаимодействий. Действительно, силы, действующие на каждую из частиц со стороны остальных частиц, при таком описании зависят в каждый момент лишь от положения частиц в этот же момент времени. Изменение положения какой-либо из взаимодействующих частиц отражается на остальных частицах в тот же момент.

Опыт, однако, показывает, что мгновенных взаимодействий в природе не существует. Поэтому и механика, исходящая из представления о мгновенности распространения взаимодействий, неизбежно заключает в себе некоторую неточность. В действительности, если с одним из взаимодействующих тел происходит какое-нибудь изменение, то на другом теле это начнет отражаться не раньше, чем по истечении некоторого промежутка времени. Разделив расстояние между телами на этот промежуток времени, мы найдем *скорость распространения взаимодействий*.

Более точно, эту скорость можно было бы назвать максимальной скоростью распространения взаимодействий. Она определяет лишь тот промежуток времени, после которого до тела может прийти первый *сигнал*, дающий знать об изменении, происшедшем с другим телом. Очевидно, что утверждение о существовании предельной скорости распространения взаимодействий подразумевает в то же время, что в природе

вообще невозможно движение тел со скоростью, большей этой.

Согласно принципу относительности величина скорости распространения взаимодействий, как один из законов природы, одинакова во всех инерциальных системах отсчета, т. е. представляет собой универсальную постоянную.

Эта постоянная скорость одновременно является, как будет показано в дальнейшем, скоростью распространения света в пустоте; поэтому ее называют *скоростью света*. Она обозначается обычно буквой  $c$ , а ее численное значение

$$c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/сек.} \quad (33,1)$$

Большой величиной этой скорости объясняется тот факт, что на практике в большинстве случаев достаточно точной оказывается классическая механика. Большинство скоростей, с которыми нам приходится иметь дело, настолько малы по сравнению со скоростью света, что предположение о бесконечности последней практически не влияет на точность результатов.

Объединение принципа относительности с конечностью скорости распространения взаимодействий называется *принципом относительности Эйнштейна* (он был сформулирован А. Эйнштейном в 1905 г.) в отличие от принципа относительности Галилея, исходящего из бесконечной скорости распространения взаимодействий.

Механика, основанная на эйнштейновском принципе относительности (мы будем обычно называть его просто принципом относительности), называется *релятивистской*. В предельном случае, когда скорости движущихся тел малы по сравнению со скоростью света, можно пренебречь влиянием конечности скорости распространения взаимодействий на движение. Тогда релятивистская механика переходит в классическую механику, основанную на предположении о мгновенности распространения взаимодействий. Предельный переход от релятивистской механики к классической может быть формально произведен как переход к пределу  $c \rightarrow \infty$  в формулах релятивистской механики.

Уже в классической механике пространство относительно, т. е. пространственные соотношения между различными событиями зависят от того, в какой системе отсчета они описываются. Утверждение, что два одновременных события проис-

ходят в одном и том же месте пространства или, вообще, на определенном расстоянии друг от друга, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится.

Напротив, время является в классической механике абсолютным; другими словами, свойства времени считаются не зависящими от системы отсчета — время одно для всех систем отсчета. Это значит, что если какие-нибудь два явления происходят одновременно для какого-нибудь наблюдателя, то они являются одновременными и для всякого другого. Вообще, промежуток времени между двумя данными событиями должен быть одинаков во всех системах отсчета.

Легко, однако, убедиться в том, что понятие абсолютного времени находится в глубоком противоречии с эйнштейновским принципом относительности. Для этого достаточно уже вспомнить, что в классической механике, основанной на понятии об абсолютном времени, имеет место общеизвестный закон сложения скоростей, согласно которому скорость сложного движения равна просто сумме (векторной) скоростей составляющих его движений. Этот закон, будучи универсальным, должен был бы быть применим и к распространению взаимодействий. Отсюда следовало бы, что скорость этого распространения должна быть различной в различных инерциальных системах отсчета, в противоречии с принципом относительности. Опыт, однако, вполне подтверждает в этом отношении принцип относительности. Измерения, произведенные впервые Майкельсоном (в 1881 г.), обнаружили полную независимость скорости света от направления его распространения; между тем согласно классической механике скорость света в направлении движения Земли должна была бы быть отличной от скорости в противоположном направлении.

Таким образом, принцип относительности приводит к результату, что время не является абсолютным. Время течет по-разному в разных системах отсчета. Следовательно, утверждение, что между двумя данными событиями прошел определенный промежуток времени, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится. В частности, события, одновременные в некоторой системе отсчета, будут не одновременными в другой системе.

Для уяснения этого полезно рассмотреть следующий простой пример. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета  $K$  и  $K'$  с осями координат соответственно  $xuz$  и  $x'y'z'$ , причем система  $K'$  движется относительно  $K$  вправо вдоль осей  $x$  и  $x'$  (рис. 28).

Пусть из некоторой точки  $A$  на оси  $x'$  отправляются сигналы в двух взаимно противоположных направлениях. Поскольку скорость распространения сигнала в системе  $K'$ ,

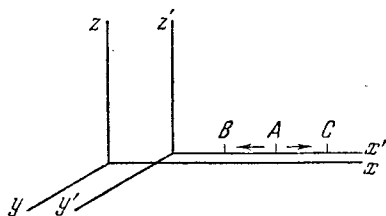


Рис. 28.

как и во всякой инерциальной системе, равна (в обоих направлениях)  $c$ , то сигналы достигнут равноудаленных от  $A$  точек  $B$  и  $C$  в один и тот же момент времени (в системе  $K'$ ). Легко, однако, видеть, что те же самые два события (приход сигнала в  $B$  и  $C$ ) будут отно- дельно не одновременными для наблюдателя в системе  $K$ .

Действительно, скорость сигналов относительно системы  $K$  согласно принципу относительности равна тому же  $c$ , и поскольку точка  $B$  движется (относительно системы  $K$ ) навстречу посланному в нее сигналу, а точка  $C$  — по направлению от сигнала (посланному из  $A$  в  $C$ ), то в системе  $K$  сигнал придет в точку  $B$  раньше, чем в точку  $C$ .

Таким образом, принцип относительности Эйнштейна вносит фундаментальные изменения в основные физические понятия. Заимствованные нами из повседневного опыта представления о пространстве и времени оказываются лишь приближенными, связанными с тем, что в повседневной жизни нам приходится иметь дело только со скоростями, очень малыми по сравнению со скоростью света.

## § 34. Интервал

В дальнейшем мы будем часто пользоваться понятием *события*. Событие определяется местом, где оно произошло, и временем, когда оно произошло. Таким образом, событие, происходящее с некоторой материальной частицей, определяется тремя координатами этой частицы и моментом времени, когда происходит событие.



Часто полезно из соображений наглядности пользоваться воображаемым четырехмерным пространством, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время. В этом пространстве событие изображается точкой. Эти точки называются *мировыми точками*. Всякой частице соответствует некоторая линия (*мировая линия*) в этом четырехмерном пространстве. Точки этой линии определяют координаты частицы во все моменты времени. Очевидно, что равномерно и прямолинейно движущейся материальной частице соответствует прямая мировая линия.

Выразим теперь принцип инвариантности скорости света математически. Для этого рассмотрим две системы отсчета  $K$  и  $K'$ , движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью. Координатные оси выберем при этом таким образом, чтобы оси  $x$  и  $x'$  совпадали, а оси  $y$  и  $z$  были параллельны осям  $y'$  и  $z'$ ; время в системах  $K$  и  $K'$  обозначим через  $t$  и  $t'$ .

Пусть первое событие состоит в том, что отправляется сигнал, распространяющийся со скоростью света, из точки, имеющей координаты  $x_1, y_1, z_1$  в системе  $K$  в момент времени  $t_1$  в этой же системе. Будем наблюдать из системы  $K$  распространение этого сигнала. Пусть второе событие состоит в том, что сигнал приходит в точку  $x_2, y_2, z_2$  в момент времени  $t_2$ . Сигнал распространяется со скоростью  $c$ ; пройденное им расстояние равно поэтому  $c(t_2 - t_1)$ . С другой стороны, это же расстояние равно  $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$ . Таким образом, мы можем написать следующую зависимость между координатами обоих событий в системе  $K$ :

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0. \quad (34,1)$$

Те же два события, т. е. распространение сигнала, можно наблюдать из системы  $K'$ . Пусть координаты первого события в системе  $K'$ :  $x'_1, y'_1, z'_1, t'_1$ , а второго:  $x'_2, y'_2, z'_2, t'_2$ . Поскольку скорость света в системах  $K$  и  $K'$  одинакова, то, аналогично (34,1), имеем:

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0. \quad (34,2)$$

Если  $x_1, y_1, z_1, t_1$  и  $x_2, y_2, z_2, t_2$  — координаты каких-либо двух событий, то величина

$$s_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad (34,3)$$

называется *интервалом* между этими двумя событиями.

Таким образом, из инвариантности скорости света следует, что если интервал между двумя событиями равен нулю в одной системе отсчета, то он равен нулю и во всякой другой системе.

Если два события бесконечно близки друг к другу, то для интервала  $ds$  между ними имеем:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (34,4)$$

Форма выражений (34,3) или (34,4) позволяет рассматривать интервал, с формальной математической точки зрения, как расстояние между двумя точками в воображаемом четырехмерном пространстве (на осях которого откладываем  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и произведение  $ct$ ). Имеется, однако, существенное отличие в правиле составления этой величины по сравнению с правилом обычной геометрии: при образовании квадрата интервала квадраты разностей координат по различным осям суммируются не с одинаковыми, а с различными знаками<sup>1)</sup>.

Как было показано выше, если  $ds = 0$  в некоторой инерциальной системе отсчета, то  $ds' = 0$  и в другой системе. С другой стороны,  $ds$  и  $ds'$  — бесконечно малые одинакового порядка. Из этих двух обстоятельств следует, что  $ds^2$  и  $ds'^2$  должны быть пропорциональны друг другу:

$$ds^2 = a ds'^2,$$

причем коэффициент  $a$  может зависеть только от абсолютной величины относительной скорости обеих инерциальных систем. Он не может зависеть от координат и времени, так как тогда различные точки пространства и моменты времени были бы не равноценны, что противоречит однородности пространства и времени. Он не может зависеть также и от направления относительной скорости, так как это противоречило бы изотропии пространства.

Рассмотрим три системы отсчета  $K$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  и пусть  $V_1$  и  $V_2$  — скорости движения систем  $K_1$  и  $K_2$  относительно  $K$ . Тогда имеем:

$$ds^2 = a(V_1) ds_1^2, \quad ds^2 = a(V_2) ds_2^2.$$

<sup>1)</sup> Четырехмерную геометрию, определяемую квадратичной формой (34,4), называют *псевдоевклидовой* в отличие от обычной, евклидовой, геометрии. Эта геометрия была введена в связи с теорией относительности Г. Минковским.

С тем же основанием можно написать

$$ds_1^2 = a(V_{12}) ds_2^2,$$

где  $V_{12}$  — абсолютная величина скорости движения  $K_2$  относительно  $K_1$ . Сравнивая друг с другом эти соотношения, найдем, что должно быть

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \quad (34,5)$$

Но  $V_{12}$  зависит не только от абсолютных величин векторов  $V_1$  и  $V_2$ , но и от угла между ними. Между тем последний вообще не входит в левую часть соотношения (34,5). Ясно поэтому, что это соотношение может быть справедливым лишь, если функция  $a(V)$  сводится к постоянной величине, равной, как это следует из того же соотношения, единице.

Таким образом,

$$ds^2 = ds'^2,$$

а из равенства бесконечно малых интервалов следует равенство также и конечных интервалов:  $s = s'$ .

Мы приходим, следовательно, к важнейшему результату: интервал между событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета, т. е. является инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчета к любой другой. Эта инвариантность и является математическим выражением постоянства скорости света.

Пусть опять  $x_1, y_1, z_1, t_1$  и  $x_2, y_2, z_2, t_2$  — координаты двух событий в некоторой системе отсчета  $K$ . Спрашивается, существует ли такая система отсчета  $K'$ , в которой оба эти события происходили бы в одном и том же месте пространства.

Введем обозначения

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Тогда квадрат интервала между событиями в системе  $K$ :

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$$

и в системе  $K'$ :

$$s'_{12}^2 = c^2 t'_{12}{}^2 - l'_{12}{}^2,$$

причем в силу инвариантности интервала

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'_{12}{}^2 - l'_{12}{}^2.$$

Мы хотим, чтобы в системе  $K'$  оба события произошли в одной точке, т. е. чтобы  $l'_{12} = 0$ . Тогда

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0.$$

Следовательно, система отсчета с требуемым свойством существует, если  $s_{12}^2 > 0$ , т. е. если интервал между обоими событиями вещественный. Вещественные интервалы называют *времениподобными*.

Таким образом, если интервал между двумя событиями времениподобный, то существует такая система отсчета, в которой оба события произошли в одном и том же месте. Время, которое пройдет между этими событиями в этой системе, равно

$$t'_{12} = \frac{l}{c} \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \quad (34,6)$$

Если какие-нибудь два события происходят с одним и тем же телом, то интервал между ними всегда времениподобный. Действительно, путь, который тело проходит между обоими событиями, не может быть больше  $ct_{12}$ , так как скорость тела не может быть больше  $c$ . Поэтому всегда

$$l_{12} < ct_{12}.$$

Зададимся теперь вопросом, нельзя ли выбрать такую систему отсчета, в которой два события произошли бы в одно и то же время. По-прежнему мы имеем в системах  $K$  и  $K'$ :  $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$ . Мы хотим, чтобы  $t'_{12} = 0$ ; отсюда

$$s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0.$$

Следовательно, искомую систему отсчета можно найти только в том случае, когда интервал  $s_{12}$  между двумя событиями мнимый. Мнимые интервалы называют *пространственноподобными*.

Таким образом, если интервал между двумя событиями пространственноподобный, то существует такая система отсчета, в которой оба события происходят одновременно. Расстояние между точками, где произошли эти события в этой системе отсчета, равно

$$l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = |s_{12}|. \quad (34,7)$$

Подразделение интервалов на времениподобные и пространственноподобные есть, в силу их инвариантности, понятие абсолютное. Это значит, что свойство интервала быть времениподобным или пространственноподобным не зависит от системы отсчета.

Возьмем какое-нибудь событие — назовем его событием  $O$  — в качестве начала отсчета времени и пространственных координат. Другими словами, в четырехмерной системе координат, на осях которой откладываются  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ , мировая точка события  $O$  будет началом координат.

Посмотрим теперь, в каком отношении к данному событию  $O$  находятся все остальные события. Для наглядности мы будем рассматривать только одну пространственную координату и время, откладывая их на двух осях (рис. 29). Прямой равномерное движение частицы, проходящей точку  $x = 0$  при  $t = 0$ , изобразится прямой линией, проходящей через  $O$  и наклоненной к оси  $t$  под углом, тангенс которого равен скорости частицы. Поскольку наибольшая возможная скорость равна  $c$ , то существует наибольший угол, который может образовывать эта прямая с осью  $t$ . На рис. 29 изображены две прямые, изображающие распространение в противоположных направлениях двух сигналов (со скоростью света), проходящих через событие  $O$  (т. е. проходящих  $x = 0$  при  $t = 0$ ). Все линии, изображающие движения частиц, могут лежать только внутри областей  $aOc$  и  $dOb$ . На прямых  $ab$  и  $cd$ , очевидно,  $x = \pm ct$ . Рассмотрим сначала события, мировые точки которых лежат внутри области  $aOc$ . Легко сообразить, что во всех точках этой области  $c^2t^2 - x^2 > 0$ . Другими словами, интервалы между любым событием этой области и событием  $O$  — времениподобные. В этой области  $t > 0$ , т. е. все события этой области происходят «после» события  $O$ . Но два события, разделенных времениподобным интервалом, ни в какой системе отсчета не могут происходить одновременно. Следовательно, нельзя выбрать и никакой системы отсчета, где бы какое-нибудь из событий области  $aOc$

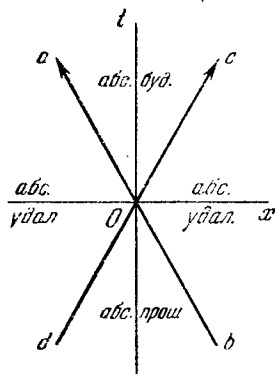


Рис. 29.

происходило «до» события  $O$ , т. е. где было бы  $t < 0$ . Таким образом, все события области  $aOc$  являются будущими по отношению к  $O$ , и притом во всех системах отсчета. Эту область можно поэтому назвать «абсолютно будущей» по отношению к событию  $O$ .

Совершенно аналогично все события области  $bOd$  являются «абсолютно прошедшими» по отношению к  $O$ , т. е. события этой области во всех системах отсчета происходят до события  $O$ .

Наконец, рассмотрим еще области  $dOa$  и  $cOb$ . Интервал между любым событием этой области и событием  $O$  — пространственноподобный. В любой системе отсчета эти события происходят в разных местах пространства. Поэтому эти области можно назвать «абсолютно удаленными» по отношению к  $O$ . Понятия «одновременно», «раньше» и «позже» для этих событий, однако, относительны. Для всякого события этой области есть такие системы отсчета, где оно происходит позже события  $O$ , системы, где оно происходит раньше  $O$ , и, наконец, одна система отсчета, где оно происходит одновременно с  $O$ .

Заметим, что если рассматривать все три пространственные координаты вместо одной, то вместо двух пересекающихся прямых на рис. 29 мы имеем бы «конус»  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$  в четырехмерной системе координат  $x, y, z, t$ , ось которого совпадает с осью  $t$  (этот конус называют *световым конусом*). Области «абсолютно будущего» и «абсолютно прошедшего» изображаются тогда соответственно двумя внутренними полостями этого конуса.

Два события могут быть причинно связаны друг с другом только в том случае, если интервал между ними времениподобный, что непосредственно следует из того, что никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, большей скорости света. Как мы только что видели, как раз для таких событий имеют абсолютный смысл понятия «раньше» и «позже», что является необходимым условием для того, чтобы имели смысл понятия причины и следствия.

## § 35. Собственное время

Предположим, что мы наблюдаем из некоторой инерциальной системы отсчета  $K$  произвольным образом движущиеся относительно нас часы. Введем также инерциальную систему отсчета  $K'$ , движущуюся относительно  $K$  со скоростью, сов-

падающей со скоростью  $v$  движения часов в данный момент времени.

В течение бесконечно малого промежутка времени  $dt$  (по неподвижным, т. е. связанным с нами, часам) движущиеся часы проходят расстояние

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Спрашивается, какой промежуток времени  $dt'$  покажут при этом движущиеся часы. В системе  $K'$ , связанной с движущимися часами, последние в данный момент времени покоятся, т. е.

$$dx' = dy' = dz' = 0.$$

В силу инвариантности интервала

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2,$$

откуда

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}.$$

Но

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2$$

есть квадрат скорости движущихся часов; поэтому

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (35,1)$$

Интегрируя это выражение, можно найти промежуток времени, показываемый движущимися часами, если по неподвижным часам пройдет время  $t_2 - t_1$ :

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (35,2)$$

Время отсчитываемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется *собственным временем* этого объекта. Формулы (35,1) и (35,2) выражают собственное время через время системы отсчета, относительно которой рассматривается движение.

Как видно из этих формул, собственное время движущегося объекта всегда меньше, чем соответствующий промежуток

времени в неподвижной системе. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

Пусть относительно инерциальной системы отсчета  $K$  движутся прямолинейно и равномерно другие часы. Система отсчета  $K'$ , связанная с этими последними, тоже инерциальная. Тогда часы в системе  $K'$  с точки зрения наблюдателя в системе  $K$  отстают по сравнению с его часами. И наоборот, с точки зрения системы  $K'$  отстают часы в системе  $K$ . Убедиться в отсутствии какого-либо противоречия можно, обратив внимание на следующее обстоятельство. Для того чтобы установить, что часы в системе  $K'$  отстают относительно часов в системе  $K$ , надо поступить следующим образом. Пусть в некоторый момент времени часы  $K'$  пролетают мимо часов в  $K$ , и в этот момент показания обоих часов совпадают. Для сравнения хода часов  $K$  и  $K'$  надо вновь сравнить показания тех же движущихся часов  $K'$  с часами в  $K$ . Но теперь мы уже сравниваем эти часы с другими часами в  $K$  — с теми, мимо которых часы  $K'$  пролетают в другой момент. При этом мы обнаружим, что часы  $K'$  будут отставать по сравнению с часами в  $K$ , с которыми они сравниваются. Мы видим, что для сравнения хода часов в двух системах отсчета необходимы несколько часов в одной системе и одни в другой. Поэтому этот процесс не симметричен по отношению к обоим системам. Всегда окажутся отстающими те часы, которые сравниваются с разными часами в другой системе отсчета.

Если же имеются двое часов, из которых одни описывают замкнутую траекторию, возвращаясь в исходное место (к неподвижным часам), то окажутся отстающими именно движущиеся часы (по сравнению с неподвижными). Обратное рассуждение, в котором движущиеся часы рассматривались бы как неподвижные, теперь невозможно, так как часы, описывающие замкнутую траекторию, не движутся равномерно и прямолинейно, а потому связанная с ними система отсчета не является инерциальной. Поскольку законы природы одинаковы только в инерциальных системах отсчета, то системы отсчета, связанные с неподвижными часами (инерциальная система) и с движущимися (неинерциальная), обладают разными свойствами, и рассуждение, приводящее к результату, что покоящиеся часы должны оказаться отстающими, неправомерно.



### § 36. Преобразование Лоренца

Нашей целью будет сейчас нахождение формул преобразования от одной инерциальной системы отсчета к другой, т. е. формул, по которым, зная координаты  $x, y, z, t$  события в некоторой системе отсчета  $K$ , можно найти координаты  $x', y', z', t'$  того же события в другой инерциальной системе  $K'$ .

В классической механике этот вопрос решался простыми формулами преобразования Галилея (3,1 — 2). Если система  $K'$  движется относительно системы  $K$  вдоль общего направления осей  $x$  и  $x'$ , эти формулы имеют вид

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (36,1)$$

Это преобразование, разумеется, не удовлетворяет требованиям теории относительности, — оно не оставляет инвариантными интервалы между событиями.

Релятивистские же формулы преобразования мы будем искать исходя из требования, чтобы они оставляли интервалы инвариантными.

Как мы видели в § 34, интервал между двумя событиями можно рассматривать как расстояние между соответствующими двумя мировыми точками в четырехмерной системе координат. Мы можем, следовательно, сказать, что искомое преобразование должно оставлять неизменными все длины в четырехмерном пространстве  $x, y, z, ct$ . Но такими преобразованиями являются только параллельные переносы и вращения системы координат. Из них переносы системы координат параллельно самой себе не представляют интереса, так как сводятся просто к переносу начала пространственных координат и изменению момента начала отсчета времени. Таким образом, искомое преобразование должно математически выражаться как вращение четырехмерной системы координат  $x, y, z, ct$ .

Всякое вращение в четырехмерном пространстве можно разложить на шесть вращений, а именно в плоскостях  $xu, zu, xz, tx, ty, tz$  (подобно тому, как всякое вращение в обычном пространстве можно разложить на три вращения в плоскостях  $xu, zu$  и  $xz$ ). Первые три из этих вращений преобразуют только пространственные координаты; они соответствуют обычным пространственным поворотам.

Рассмотрим поворот в плоскости  $tx$ ; координаты  $y$  и  $z$  при этом не меняются. Это преобразование должно оставлять

неизменной, в частности, разность  $(ct)^2 - x^2$  — квадрат «расстояния» от точки  $ct, x$  до начала координат. Связь между старыми и новыми координатами в этом преобразовании дается в наиболее общем виде формулами

$$x = x' \operatorname{ch} \psi + ct' \operatorname{sh} \psi, \quad ct = x' \operatorname{sh} \psi + ct' \operatorname{ch} \psi, \quad (36,2)$$

где  $\psi$  — «угол поворота»; простой проверкой легко убедиться, что при этом действительно будет  $c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$ . Формулы (36,2) отличаются от обычных формул преобразования при повороте осей координат заменой тригонометрических функций гиперболическими. В этом проявляется отличие псевдоевклидовой геометрии от евклидовой.

Мы ищем формулы преобразования от инерциальной системы отсчета  $K$  к системе  $K'$ , которая движется относительно  $K$  со скоростью  $V$  вдоль оси  $x$ . При этом, очевидно, подвергаются преобразованию только координата  $x$  и время  $t$ . Поэтому это преобразование должно быть вида (36,2). Остается определить угол  $\psi$ , который может зависеть только от относительной скорости  $V$ <sup>1)</sup>.

Рассмотрим движение в системе  $K$  начала координат системы отсчета  $K'$ . Тогда  $x' = 0$  и формулы (36,2) принимают вид:

$$x = ct' \operatorname{sh} \psi, \quad ct = ct' \operatorname{ch} \psi,$$

или, разделив одно на другое:

$$\frac{x}{ct} = \operatorname{th} \psi.$$

Но  $x/t$  есть, очевидно, скорость  $V$  системы  $K'$  относительно  $K$ . Таким образом,

$$\operatorname{th} \psi = \frac{V}{c}.$$

Отсюда

$$\operatorname{sh} \psi = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \operatorname{ch} \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

<sup>1)</sup> Во избежание недоразумений заметим, что через  $V$  мы везде обозначаем постоянную относительную скорость двух инерциальных систем отсчета, а через  $v$  — скорость движущейся частицы, вовсе не обязанную быть постоянной.

Подставив это в (36,2), находим:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (36,3)$$

Это — искомые формулы преобразования. Они называются формулами *преобразования Лоренца* и имеют для дальнейшего фундаментальное значение.

Обратные формулы, выражающие  $x', y', z', t'$  через  $x, y, z, t$ , проще всего получаются заменой  $V$  на  $-V$  (так как система  $K$  движется относительно  $K'$  со скоростью  $-V$ ). Эти же формулы можно получить непосредственно, решая уравнения (36,3) относительно  $x', y', z', t'$ .

Легко видеть из (36,3), что при предельном переходе  $c \rightarrow \infty$  к классической механике формулы преобразования Лоренца действительно переходят в преобразование Галилея.

При  $V > c$  в формулах (36,3) координаты  $x, t$  делаются мнимыми; это соответствует тому факту, что движение со скоростью, большей скорости света, невозможно. Невозможно даже использование системы отсчета, движущейся со скоростью, равной скорости света, — при этом знаменатели в формулах (36,3) обратились бы в нуль.

Пусть в системе  $K$  покоится линейка, параллельная оси  $x$ . Длина ее, измеренная в этой системе, пусть будет  $\Delta x = x_2 - x_1$  ( $x_2$  и  $x_1$  — координаты обоих концов линейки в системе  $K$ ). Найдем теперь длину этого стержня, измеренную в системе  $K'$ . Для этого надо найти координаты обоих концов стержня ( $x'_2$  и  $x'_1$ ) в этой системе в один и тот же момент времени  $t'$ . Из (36,3) находим:

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Длина стержня в системе  $K'$  есть  $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ ; вычитая  $x_1$  из  $x_2$ , находим:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

*Собственной длиной* стержня называется его длина в той системе отсчета, в которой он покоится. Обозначим ее через

$l_0 = \Delta x$ , а длину того же стержня в какой-либо системе отсчета  $K'$  — через  $l$ . Тогда

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (36,4)$$

Таким образом, самую большую длину стержень имеет в той системе отсчета, где он покоится. Длина его в системе, в которой он движется со скоростью  $V$ , уменьшается в отношении  $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ . Этот результат теории относительности называется *лоренцевым сокращением*.

Поскольку поперечные размеры тела при его движении не меняются, то объем  $\mathcal{V}$  тела сокращается по аналогичной формуле

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (36,5)$$

где  $\mathcal{V}_0$  есть *собственный объем* тела.

Из преобразования Лоренца можно найти известные нам уже результаты относительно собственного времени (§ 35). Пусть в системе  $K'$  покоятся часы. В качестве двух событий возьмем два события, происшедших в одном и том же месте  $x', y', z'$  пространства в системе  $K'$ . Время в системе  $K'$  между этими событиями есть  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ . Найдём теперь время  $\Delta t$ , которое прошло между этими же событиями в системе отсчета  $K$ . Из (36,3) имеем:

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

или, вычитая одно из другого,

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

в полном согласии с (35,1).

### § 37. Преобразование скорости

Мы нашли в предыдущем параграфе формулы, позволяющие по координатам события в одной системе отсчета найти координаты того же события в другой системе отсчета. Теперь мы найдем формулы, связывающие скорость движущейся

частицы в одной системе отсчета со скоростью той же частицы в другой системе.

Пусть снова система  $K'$  движется относительно системы  $K$  со скоростью  $V$  вдоль оси  $x$ . Пусть,  $v_x = dx/dt$  есть компонента скорости в системе  $K$ , а  $v'_x = dx'/dt'$  — компонента скорости той же частицы в системе  $K'$ .

Из (36,3) мы имеем:

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz' \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Разделив первые три равенства на четвертое и введя скорости

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'},$$

находим:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (37,1)$$

Эти формулы и определяют преобразование скоростей. Они представляют собой закон сложения скоростей в теории относительности. В предельном случае  $c \rightarrow \infty$  они переходят в формулы классической механики  $v_x = v'_x + V$ ,  $v_y = v'_y$ ,  $v_z = v'_z$ .

В частном случае движения частицы параллельно оси  $x$   $v_x = v$ ,  $v_y = v_z = 0$ . Тогда  $v'_y = v'_z = 0$ , а  $v'_x = v'$ , причем

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}. \quad (37,2)$$

Легко убедиться в том, что сумма двух скоростей, меньших или равных скорости света, есть снова скорость, не большая скорости света.

Выберем оси координат так, чтобы скорость частицы в данный момент лежала в плоскости  $xu$ . Тогда скорость частицы в системе  $K$  имеет компоненты  $v_x = v \cos \theta$ ,  $v_y = v \sin \theta$ , а в системе  $K'$  имеем  $v'_x = v' \cos \theta'$ ,  $v'_y = v' \sin \theta'$

( $v$ ,  $v'$  и  $\theta$ ,  $\theta'$  — абсолютные величины и углы, образованные скоростью с осями  $x$  и  $x'$  соответственно в системах  $K$  и  $K'$ ). С помощью формул (37,1) находим тогда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \theta'}{v' \cos \theta' + V}. \quad (37,3)$$

Эта формула определяет изменение направления скорости при переходе от одной системы отсчета к другой.

Рассмотрим подробнее важный частный случай этой формулы, а именно отклонение света при переходе к другой системе отсчета, — явление, называемое *абберацией* света. В этом случае  $v = v' = c$  и предыдущая формула переходит в

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c} + \cos \theta'} \sin \theta'. \quad (37,4)$$

В случае  $V \ll c$  находим из (37,4) с точностью до членов порядка  $V/c$ :

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta' \left( 1 - \frac{V}{c \cos \theta'} \right).$$

Вводя угол  $\Delta\theta = \theta' - \theta$  (угол абберации), находим с той же точностью:

$$\Delta\theta = \frac{V}{c} \sin \theta', \quad (37,5)$$

т. е. известную элементарную формулу для абберации света.

### § 38. Четырехмерные векторы

Совокупность координат события ( $ct$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) можно рассматривать как компоненты четырехмерного радиус-вектора (или, как мы будем говорить для краткости, 4-радиус-вектора) в четырехмерном пространстве. Его компоненты мы будем обозначать через  $x^\mu$ , где индекс  $\mu$  пробегает значения 0, 1, 2, 3, причем

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Квадрат «длины» 4-радиус-вектора дается выражением

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Он не меняется при любых поворотах четырехмерной системы координат, которыми являются, в частности, преобразования Лоренца.

Вообще *четырёхмерным вектором* (4-вектором)  $A^\mu$  называется совокупность четырех величин  $A^0, A^1, A^2, A^3$ , которые при преобразованиях четырехмерной системы координат преобразуются как компоненты 4-радиус-вектора  $x^\mu$ <sup>1)</sup>. При преобразовании Лоренца

$$A^0 = \frac{A^0 + \frac{V}{c} A^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A^1 + \frac{V}{c} A^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A^2, \quad A^3 = A^3. \quad (38,1)$$

Квадрат величины всякого 4-вектора определяется аналогично квадрату 4-радиус-вектора:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Для удобства записи подобных выражений вводят два «сорта» компонент 4-векторов, обозначая их буквами  $A^\mu$  и  $A_\mu$  с индексами сверху и снизу. При этом

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (38,2)$$

Величины  $A^\mu$  называют *контравариантными*, а  $A_\mu$  — *ковариантными* компонентами 4-вектора. Квадрат 4-вектора представится тогда в виде

$$\sum_{\mu=0}^3 A^\mu A_\mu = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3.$$

Такие суммы принято записывать просто как  $A^\mu A_\mu$ , опуская знак суммирования. Вообще принимается правило, согласно которому по всякому индексу, повторяющемуся в данном выражении дважды, подразумевается суммирование, а знак суммы опускается. При этом в каждой паре одинаковых индексов один должен стоять наверху, а другой внизу. Такой способ обозначения суммирования по, как говорят, *немым* индексам, очень удобен и значительно упрощает запись формул.

<sup>1)</sup> В этой книге мы будем обозначать четырехмерные индексы, пробегающие значения 0, 1, 2, 3, греческими буквами  $\lambda, \mu, \nu, \dots$

Аналогично квадрату 4-вектора составляется скалярное произведение двух разных 4-векторов:

$$A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3.$$

При этом, очевидно, его можно записать как в виде  $A^\mu B_\mu$ , так и в виде  $A_\mu B^\mu$  — результат от этого не меняется. Вообще во всякой паре немых индексов всегда можно переставлять верхние и нижние индексы<sup>1)</sup>.

Произведение  $A^\mu B_\mu$  является 4-скаляром — оно инвариантно по отношению к поворотам четырехмерной системы координат. Это обстоятельство легко проверить непосредственно, но оно и заранее очевидно (по аналогии с квадратом  $A^\mu A_\mu$ ) из того, что все 4-векторы преобразуются по одинаковому закону.

Компоненту 4-вектора  $A^0$  называют временной, а компоненты  $A^1, A^2, A^3$  — пространственными (по аналогии с 4-радиус-вектором). Квадрат 4-вектора может быть положительным, отрицательным или равным нулю; в этих трех случаях говорят соответственно о *временноподобных*, *пространственноподобных* и *нулевых* 4-векторах (снова по аналогии с терминологией для интервалов).

По отношению к чисто пространственным поворотам (т. е. преобразованиям, не затрагивающим оси времени) три пространственные компоненты 4-вектора  $A^\mu$  составляют трехмерный вектор  $\mathbf{A}$ . Временная же компонента 4-вектора представляет собой (по отношению к тем же преобразованиям) трехмерный скаляр. Перечисляя компоненты 4-вектора, мы часто будем записывать их как

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}).$$

При этом ковариантные компоненты того же 4-вектора:  $A_\mu = (A^0, -\mathbf{A})$ , а квадрат 4-вектора:  $A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$ . Так, для 4-радиус-вектора:

$$x^\mu = (ct, \mathbf{r}), \quad x_\mu = (ct, -\mathbf{r}), \quad x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2.$$

<sup>1)</sup> В современной литературе часто опускают вообще индексы у четырехмерных векторов, а их квадраты и скалярные произведения записывают просто как  $A^2, AB$ . В этой книге, однако, мы не будем пользоваться таким способом обозначений.



У трехмерных векторов (в координатах  $x, y, z$ ) нет, конечно, необходимости различать контра- и ковариантные компоненты. Везде (где это не сможет привести к недоразумениям) мы будем писать их компоненты  $A_i$  ( $i = x, y, z$ ) с индексами внизу, обозначая эти индексы латинскими буквами. В частности, по дважды повторяющимся латинским индексам будет подразумеваться суммирование по трем значениям  $x, y, z$  (например,  $AB = A_i B_i$ ).

Четырехмерным тензором (4-тензором) 2-го ранга называется совокупность 16 величин  $A^{\mu\nu}$ , которые при преобразовании координат преобразуются как произведения компонент 4-векторов. Аналогичным образом определяются и 4-тензоры высших рангов.

Компоненты 4-тензора 2-го ранга могут быть представлены в трех видах: как контравариантные  $A^{\mu\nu}$ , ковариантные  $A_{\mu\nu}$  и смешанные  $A^\mu_\nu$ , (в последнем случае надо, вообще говоря, различать  $A^\mu_\nu$  и  $A_\nu^\mu$ , т. е. следить за тем, какой именно — первый или второй — индекс стоит сверху, а какой внизу). Связь между различными видами компонент определяется по общему правилу: поднятие или опускание временного индекса (0) не меняет, а поднятие или опускание пространственного индекса (1, 2, 3) меняет знак компоненты. Так:

$$\begin{aligned} A_{00} &= A^{00}, & A_{01} &= -A^{01}, & A_{11} &= A^{11}, \dots, \\ A_0^0 &= A^{00}, & A_0^1 &= A^{01}, & A_0^1 &= -A^{01}, & A_1^1 &= -A^{11}, \dots \end{aligned}$$

По отношению к чисто пространственным преобразованиям девять компонент  $A^{11}, A^{12}, \dots$  составляют трехмерный тензор. Три компоненты  $A^{01}, A^{02}, A^{03}$  и три компоненты  $A^{10}, A^{20}, A^{30}$  составляют трехмерные векторы, а компонента  $A^{00}$  является трехмерным скаляром.

Тензор  $A^{\mu\nu}$  называется симметричным, если  $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$ , и антисимметричным, если  $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ . У антисимметричного тензора все диагональные компоненты (т. е. компоненты  $A^{00}, A^{11}, \dots$ ) равны нулю, так как, например, должно быть  $A^{00} = -A^{00}$ . У симметричного тензора  $A^{\mu\nu}$  смешанные компоненты  $A^\mu_\nu$  и  $A_\nu^\mu$ , очевидно, совпадают; мы будем писать в таких случаях просто  $A^\mu_\nu$ , располагая индексы один над другим.

Во всяком тензорном равенстве выражения с обеих его сторон должны содержать одинаковые и одинаково распо-

женные (вверху или внизу) свободные, т. е. не немые, индексы. Свободные индексы в тензорных равенствах можно перемещать (вверх или вниз), но обязательно одновременно во всех членах уравнения. Приравнивание же контра- и ковариантных компонент различных тензоров «незаконно»; такое равенство, даже если бы оно случайно имело место в какой-либо системе отсчета, нарушилось бы при переходе к другой системе.

Из компонент тензора  $A^{\mu\nu}$  можно образовать скаляр путем образования суммы

$$A^{\mu}_{\mu} = A^0_0 + A^1_1 + A^2_2 + A^3_3$$

(при этом, конечно,  $A^{\mu}_{\mu} = A_{\mu}^{\mu}$ ). Такую сумму называют *следом* тензора, а об операции его образования говорят как о *свертывании* или *упрощении* тензора.

Операцией свертывания является и рассмотренное выше образование скалярного произведения двух 4-векторов: это есть образование скаляра  $A^{\mu}B_{\mu}$  из тензора  $A^{\mu}B_{\nu}$ . Вообще всякое свертывание по паре индексов понижает ранг тензора на 2. Например,  $A^{\mu\nu\lambda\mu}$  есть тензор 2-го ранга,  $A^{\mu\nu}B^{\nu}$  — 4-вектор,  $A^{\mu\nu}_{\mu\nu}$  — скаляр и т. д.

Единичным 4-тензором называется тензор  $\delta^{\nu}_{\mu}$ , для которого имеет место равенство

$$\delta^{\nu}_{\mu} A^{\mu} = A^{\nu} \quad (38,3)$$

при любом 4-векторе  $A^{\mu}$ . Очевидно, что компоненты этого тензора равны

$$\delta^{\nu}_{\mu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = \nu, \\ 0, & \text{если } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (38,4)$$

Его след:  $\delta^{\mu}_{\mu} = 4$ .

Остановимся, наконец, на некоторых дифференциальных и интегральных операциях четырехмерного тензорного анализа.

4-градиент скаляра  $\varphi$  есть 4-вектор

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi \right).$$

При этом необходимо иметь в виду, что написанные производные должны рассматриваться как ковариантные компоненты 4-вектора. Действительно, дифференциал скаляра

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu}$$

тоже есть скаляр; из его вида (скалярное произведение двух 4-векторов) и очевидно сделанное утверждение.

Вообще операторы дифференцирования по координатам  $x^\mu$ ,  $\partial/\partial x^\mu$ , должны рассматриваться как ковариантные компоненты операторного 4-вектора. Поэтому, например, является скаляром дивергенция 4-вектора — выражение  $\partial A^\mu/\partial x^\mu$ , в котором дифференцируются контравариантные компоненты  $A^\mu$ .

В трехмерном пространстве интегрирование может производиться по объему, по поверхности и по кривой. В четырехмерном пространстве соответственно возможны четыре рода интегрирований: 1) по кривой в 4-пространстве, 2) по поверхности (двухмерной), 3) по гиперповерхности, т. е. по трехмерному многообразию, 4) по четырехмерному объему.

Аналогично теоремам Гаусса и Стокса трехмерного векторного анализа существуют теоремы, позволяющие преобразовывать друг в друга четырехмерные интегралы. Из них нам понадобится лишь теорема о преобразовании интеграла по 4-объему в интеграл по гиперповерхности.

Элемент интегрирования по 4-объему

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt dV \quad (38,5)$$

является скаляром; это очевидно из сопоставления законов преобразования интервалов времени (35,1) и пространственных объемов (36,5). Элемент же интегрирования по гиперповерхности  $dS^\mu$  — 4-вектор, по величине равный «площади» элемента гиперповерхности и по направлению нормальный к этому элементу (так, составляющая  $dS^0 = dx dy dz$ , т. е. представляет собой элемент трехмерного объема  $dV$  — проекцию элемента гиперповерхности на гиперплоскость  $x^0 = \text{const}$ ).

Интеграл по замкнутой гиперповерхности можно преобразовать в интеграл по заключенному в ней 4-объему путем замены элемента интегрирования  $dS_\mu$  на оператор

$$dS_\mu \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (38,6)$$

Например, для интеграла от вектора  $A^\mu$  имеем:

$$\oint A^\mu dS_\mu = \int \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} d\Omega. \quad (38,7)$$

Эта формула является обобщением теоремы Гаусса.

## Глава IX

### РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

#### § 39. Энергия и импульс

Как и в классической механике, для вывода релятивистских уравнений движения частиц мы будем исходить из принципа наименьшего действия. Начнем с нахождения интеграла действия для свободной частицы.

Этот интеграл не должен зависеть от выбора той или иной инерциальной системы отсчета, т. е. должен быть инвариантом относительно преобразований Лоренца. Отсюда следует, что он должен быть взят от скаляра. При этом под интегралом должны стоять дифференциалы в первой степени. Единственный такой скаляр, который можно построить для свободной частицы, есть элемент интервала  $ds$ , или  $\text{const} \cdot ds$ , где  $\text{const}$  — характерная для частицы постоянная. Обозначим эту постоянную через  $-mc$ ; смысл такого обозначения выяснится ниже.

Итак, действие для свободной частицы должно иметь вид:

$$S = -mc \int_a^b ds, \quad (39,1)$$

где  $\int_a^b$  обозначает интеграл вдоль мировой линии между двумя заданными событиями — нахождением частицы в начальном и конечном местах в определенные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ .

С помощью (35,1) это выражение можно переписать в виде интеграла по времени

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt.$$

Сравним его с общим определением (2,1)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

мы видим, что релятивистская функция Лагранжа свободной частицы

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (39,2)$$

При малых скоростях, в нерелятивистском пределе, можно разложить  $L$  по степеням  $v/c$ . Опустив члены высших порядков, получим:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Постоянный член в функции Лагранжа не отражается на уравнениях движения и может быть опущен. После этого мы вернемся к классическому выражению  $L = mv^2/2$ . В то же время выясняется смысл введенной в (39,1) постоянной  $m$ , которая совпадает с массой частицы.

Импульс частицы определяется как производная  $\mathbf{p} = \partial L / \partial \mathbf{v}$ . Продифференцировав выражение (39,2), получим:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (39,3)$$

При малых скоростях ( $v \ll c$ ) это выражение переходит в классическое  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ .

Производная от импульса по времени есть сила, действующая на частицу. Пусть скорость частицы изменяется только по направлению, т. е. сила направлена перпендикулярно к скорости. Тогда

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (39,4)$$

Если же скорость меняется только по величине, т. е. сила направлена по скорости, то

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (39,5)$$

Мы видим, что в обоих случаях отношение силы к ускорению различно.

Согласно общему определению (6,1) энергия частицы

$$E = \mathbf{p}\mathbf{v} - L. \quad (39,6)$$

Подставив сюда  $L$  и  $\mathbf{p}$  из (39,2) и (39,3), получим:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (39,7)$$

Эта очень важная формула показывает, в частности, что в релятивистской механике энергия свободной частицы не обращается в нуль при  $v=0$ , а остается конечной величиной, равной

$$E = mc^2. \quad (39,8)$$

Ее называют *энергией покоя* частицы.

При малых скоростях ( $v \ll c$ ) имеем, разлагая (39,7) по степеням  $v/c$ :

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

т. е., за вычетом энергии покоя, классическое выражение для кинетической энергии частицы.

Подчеркнем, что хотя мы говорим здесь о «частице», по ее «элементарности» нигде не используется. Поэтому полученные формулы в равной степени применимы и к любому сложному телу, состоящему из многих частиц, причем под  $m$  надо понимать полную массу тела, а под  $v$  — скорость его движения как целого. В частности, формула (39,8) справедлива и для любого покоящегося как целое тела. Обратим внимание на то, что энергия свободного тела (т. е. энергия любой замкнутой системы) оказывается в релятивистской механике вполне определенной, всегда положительной величиной, непосредственно связанной с массой тела. Напомним в этой связи, что в классической механике энергия тела определена лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной, и может быть как положительной, так и отрицательной.

Энергия покоящегося тела содержит в себе, помимо энергии покоя входящих в его состав частиц, также кинетическую энергию частиц и энергию их взаимодействия друг с дру-

гом. Другими словами,  $mc^2$  не равно сумме  $\sum m_a c^2$  ( $m_a$  — массы частиц), а потому и  $m$  не равно  $\sum m_a$ . Таким образом, в релятивистской механике не имеет места закон сохранения массы: масса сложного тела не равна сумме масс его частей. Вместо этого имеет место только закон сохранения энергии, в которую включается также и энергия покоя частиц.

Возводя выражения (39,3) и (39,7) в квадрат и сравнивая их, найдем следующее соотношение между энергией и импульсом частицы:

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2. \quad (39,9)$$

Энергия, выраженная через импульс, называется, как известно, функцией Гамильтона  $H$ :

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (39,10)$$

При малых скоростях  $p \ll mc$  и приближенно

$$H \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

т. е. за вычетом энергии покоя — классическое выражение функции Гамильтона.

Из выражений (39,3) и (39,7) вытекает также следующее соотношение между энергией, импульсом и скоростью свободной частицы

$$p = \frac{Ev}{c^2}. \quad (39,11)$$

При  $v=c$  импульс и энергия частицы обращаются в бесконечность. Это значит, что частица с отличной от нуля массой  $m$  не может двигаться со скоростью света. В релятивистской механике, однако, могут существовать частицы с массой, равной нулю, движущиеся со скоростью света<sup>1)</sup>. Из (39,11) имеем для таких частиц:

$$p = \frac{E}{c}. \quad (39,12)$$

Приближенно такая же формула справедлива и для частиц с отличной от нуля массой в так называемом *ультрарелятивистском* случае, когда энергия частицы  $E$  велика по сравнению с ее энергией покоя  $mc^2$ .

<sup>1)</sup> Таковы световые кванты — фотоны, а также нейтрино.

### § 40. Четырехмерный импульс

Произведенные в предыдущем параграфе выводы сами по себе еще оставляют открытым вопрос о законе преобразования энергии и импульса частицы при переходе от одной системы отсчета к другой. Для ответа на этот вопрос необходимо выяснить четырехмерную природу этих величин.

Из обычного трехмерного вектора скорости частицы  $\mathbf{v}$  можно образовать и 4-вектор. Такой *четырёхмерной скоростью* (4-скоростью) является

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (40,1)$$

Выразив элемент интервала  $ds$  через дифференциал времени  $dt$  согласно (35,1), можно написать:

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dx^\mu}{cdt}.$$

Отсюда видно, что компоненты этого 4-вектора

$$u^\mu = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (40,2)$$

Компоненты 4-скорости не независимы. Заметив, что  $dx_\mu dx^\mu = ds^2$ , находим:

$$u_\mu u^\mu = 1. \quad (40,3)$$

С геометрической точки зрения  $u^\mu$  есть единичный 4-вектор касательной к мировой линии частицы.

*Четырёхмерным импульсом* (4-импульсом) частицы называется 4-вектор

$$p^\mu = mc u^\mu. \quad (40,4)$$

Взяв компоненты 4-скорости из (40,2) и сравнив с выражениями (39,3) и (39,7), мы увидим, что компоненты 4-импульса

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right). \quad (40,5)$$

Таким образом, в релятивистской механике импульс и энергия являются компонентами одного 4-вектора. Отсюда сразу следуют формулы преобразования этих величин. Подставив



в общие формулы преобразования 4-вектора (38,1) выражения (40,5), находим:

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2} E'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad E = \frac{E' + V p'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (40,6)$$

где  $p_x, p_y, p_z$  — компоненты трехмерного импульса  $\mathbf{p}$ .

Из определения 4-импульса (40,4) и тождества (40,3) имеем для квадрата 4-импульса свободной частицы:

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^2. \quad (40,7)$$

Подставив сюда компоненты  $p^\mu$  из (40,5), мы вернемся к соотношению (39,9).

## § 41. Распад частиц

Рассмотрим самопроизвольный распад тела с массой  $M$  на две части с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Закон сохранения энергии при распаде, примененный в системе отсчета, в которой тело покоится, дает<sup>1)</sup>:

$$M = E_{10} + E_{20}, \quad (41,1)$$

где  $E_{10}$  и  $E_{20}$  — энергии разлетающихся частей. Поскольку  $E_{10} > m_1$  и  $E_{20} > m_2$ , то равенство (41,1) может выполняться лишь, если  $M > m_1 + m_2$ , т. е. тело может самопроизвольно распасться на части, сумма масс которых меньше массы тела. Напротив, если  $M < m_1 + m_2$ , то тело устойчиво (по отношению к данному распаду) и самопроизвольно не распадается. Для осуществления распада надо было бы в этом случае сообщить телу извне энергию, равную по крайней мере его энергии связи ( $m_1 + m_2 - M$ ).

<sup>1)</sup> В §§ 41, 42 полагаем  $c = 1$ . Другими словами, скорость света выбирается в качестве единицы измерения скоростей (при этом размерности длины и времени становятся одинаковыми). Такой выбор является естественным в релятивистской механике и очень упрощает запись формул. Однако в этой книге (значительное место в которой уделено и нерелятивистской теории) мы, как правило, не будем пользоваться такой системой единиц, а при ее использовании будем каждый раз оговаривать это.

Если в формуле положено  $c = 1$ , то возвращение к обычным единицам не представляет труда: скорость света вводится в нее таким образом, чтобы обеспечить правильную размерность.

Наряду с законом сохранения энергии при распаде должен выполняться закон сохранения импульса, т. е. сумма импульсов разлетающихся частей, как и первоначальный импульс тела, равна нулю:  $\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = 0$ . Отсюда  $p_{10}^2 = p_{20}^2$  или

$$E_{10}^2 - m_1^2 = E_{20}^2 - m_2^2. \quad (41,2)$$

Два уравнения (41,1) и (41,2) однозначно определяют энергии разлетающихся частей:

$$E_{10} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad E_{20} = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}. \quad (41,3)$$

В некотором смысле обратным является вопрос о вычислении суммарной энергии  $M$  двух сталкивающихся частиц в системе отсчета, в которой их суммарный импульс равен нулю (*система центра инерции*). Вычисление этой величины дает критерий, определяющий возможность осуществления различных процессов неупругих столкновений, сопровождающихся изменением состояния сталкивающихся частиц или «рождением» новых частиц. Каждый такой процесс может происходить лишь при условии, что сумма масс всех «продуктов реакции» не превышает  $M$ .

Пусть в исходной (*лабораторной*) системе отсчета частица с массой  $m_1$  и энергией  $E_1$  сталкивается с покоящейся частицей с массой  $m_2$ . Суммарная энергия обеих частиц

$$E = E_1 + E_2 = E_1 + m_2,$$

а суммарный импульс  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$ . Рассматривая обе частицы вместе как одну сложную систему, мы найдем скорость ее движения как целого согласно (39,11):

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E} = \frac{\mathbf{p}_1}{E_1 + m_2}. \quad (41,4)$$

Это и есть скорость движения системы центра инерции относительно лабораторной системы.

Однако для определения искомой массы  $M$  нет необходимости фактически производить преобразование от одной системы отсчета к другой. Вместо этого можно воспользоваться формулой (39,9), применимой к составной системе в такой же мере, как и к каждой частице в отдельности. Таким образом, имеем:

$$M^2 = E^2 - p^2 = (E_1 + m_2)^2 - (E_1^2 - m_1^2),$$

откуда

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1. \quad (41,5)$$

**Задача**

Определить наибольшую энергию, которую может унести одна из распадных частиц при распаде неподвижной частицы с массой  $M$  на три частицы  $m_1, m_2, m_3$ .

**Решение.** Частица  $m_1$  имеет наибольшую энергию, если система двух остальных частиц  $m_2$  и  $m_3$  имеет наименьшую возможную массу; последняя равна сумме  $m_2 + m_3$  (чему отвечает совместное движение этих частиц с одинаковой скоростью). Сведя, таким образом, вопрос к распаду тела на две части, получим согласно (41,3):

$$E_{1\max} = \frac{M^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2}{2M}.$$

**§ 42. Упругие столкновения частиц**

Рассмотрим, с точки зрения релятивистской механики, упругое столкновение частиц. Обозначим импульсы и энергии двух сталкивающихся частиц (с массами  $m_1$  и  $m_2$ ) через  $p_1, E_1$  и  $p_2, E_2$ ; значения величин после столкновения будем отмечать штрихом.

Законы сохранения энергии и импульса при столкновении можно записать вместе в виде уравнения сохранения 4-импульса:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu. \quad (42,1)$$

Составим из этого 4-векторного уравнения инвариантные соотношения, которые будут удобными для дальнейших вычислений. Для этого перепишем (42,1) в виде:

$$p_1^\mu + p_2^\mu - p_1'^\mu = p_2'^\mu$$

и возведем обе стороны равенства в квадрат (т. е. напомним их скалярные произведения самих на себя). Замечая, что квадраты 4-импульсов  $p_1^\mu$  и  $p_1'^\mu$  равны  $m_1^2$ , а квадраты  $p_2^\mu$  и  $p_2'^\mu$  равны  $m_2^2$ , получим:

$$m_1^2 + p_{1\mu} p_2^\mu - p_{1\mu} p_1'^\mu - p_{2\mu} p_1'^\mu = 0. \quad (42,2)$$

Аналогичным образом, возведя в квадрат равенство  $p_1^\mu + p_2^\mu - p_2'^\mu = p_1'^\mu$ , получим:

$$m_2^2 + p_{1\mu} p_2^\mu - p_{2\mu} p_2'^\mu - p_{1\mu} p_2'^\mu = 0. \quad (42,3)$$

Рассмотрим столкновение в лабораторной системе отсчета, в которой до столкновения одна из частиц (частица  $m_2$ ) покоилась. Тогда  $\mathbf{p}_2 = 0$ ,  $E_2 = m_2$  и фигурирующие в (42,2) скалярные произведения равны:

$$\begin{aligned} p_{1\mu} p_2^\mu &= E_1 m_2, & p_{2\mu} p_1^\mu &= m_2 E_1', \\ p_{1\mu} p_1^{\prime\mu} &= E_1 E_1' - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1' = E_1 E_1' - p_1 p_1' \cos \theta_1, \end{aligned} \quad (42,4)$$

где  $\theta_1$  — угол рассеяния налетающей частицы  $m_1$ . Подставив эти выражения в (42,2), получим:

$$\cos \theta_1 = \frac{E_1' (E_1 + m_2) - E_1 m_2 - m_1^2}{p_1 p_1'}. \quad (42,5)$$

Аналогичным образом из (42,3) найдем:

$$\cos \theta_2 = \frac{(E_1 + m_2) (E_2' - m_2)}{p_1 p_2'}, \quad (42,6)$$

где  $\theta_2$  — угол, образуемый импульсом отдачи  $\mathbf{p}_2'$  с импульсом налетающей частицы  $\mathbf{p}_1$ . Эти формулы связывают углы рассеяния обеих частиц в лабораторной системе с изменениями их энергии.

Отметим, что если  $m_1 > m_2$ , т. е. налетающая частица тяжелее покоящейся, то угол рассеяния  $\theta_1$  не может превышать некоторого максимального значения. Элементарным вычислением легко найти, что это значение определяется равенством

$$\sin \theta_{1 \max} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (42,7)$$

совпадающим с классическим результатом (14,8).

Формулы (42,5—6) упрощаются в случае, когда налетающая частица обладает равной нулю массой:  $m_1 = 0$  и соответственно  $p_1 = E_1$ ,  $p_1' = E_1'$ . Выпишем для этого случая формулу для энергии налетающей частицы после столкновения, выраженной через угол ее отклонения:

$$E_1' = \frac{m_2}{1 - \cos \theta_1 + \frac{m_2}{E_1}}. \quad (42,8)$$

Вернемся снова к общему случаю столкновения частиц любых масс. Наиболее просто столкновение выглядит в системе центра инерции. Отмечая значения величин в этой

системе дополнительным индексом 0, имеем здесь  $\mathbf{p}_{10} \equiv \equiv -\mathbf{p}_{20} \equiv \mathbf{p}_0$ . В силу сохранения импульса, импульсы обеих частиц при столкновении только поворачиваются, оставаясь равными по величине и противоположными по направлению. В силу же сохранения энергии абсолютные значения каждого из импульсов остаются неизменными.

Обозначим через  $\chi$  угол рассеяния в системе центра инерции — угол, на который поворачиваются при столкновении импульсы  $\mathbf{p}_{10}$  и  $\mathbf{p}_{20}$ . Этой величиной полностью определяется процесс рассеяния в системе центра инерции, а потому и во всякой другой системе отсчета. Ее удобно выбрать также и при описании столкновения в лабораторной системе в качестве того единственного параметра, который остается неопределенным после учета законов сохранения энергии и импульса.

Выразим через этот параметр конечные энергии обеих частиц в лабораторной системе. Для этого вернемся к соотношению (42,2), но на этот раз раскроем произведение  $p_{1\mu} p_1^\mu$  в системе центра инерции:

$$p_{1\mu} p_1^\mu = E_{10} E'_{10} - \mathbf{p}_{10} \mathbf{p}'_{10} = E_{10}^2 - p_0^2 \cos \chi = p_0^2 (1 - \cos \chi) + m_1^2$$

(в системе центра инерции энергия каждой из частиц при столкновении не меняется:  $E'_{10} = E_{10}$ ). Остальные же два произведения раскрываем по-прежнему в лабораторной системе, т. е. берем из (42,4). В результате получим:

$$E_1 - E'_1 = \frac{p_0^2}{m_2} (1 - \cos \chi).$$

Остается выразить  $p_0^2$  через величины, относящиеся к лабораторной системе. Это легко сделать путем приравнивания значений инварианта  $p_{1\mu} p_2^\mu$  в обеих системах:

$$E_{10} E_{20} - \mathbf{p}_{10} \mathbf{p}_{20} = E_1 m_2$$

или

$$\sqrt{(p_0^2 + m_1^2)(p_0^2 + m_2^2)} = E_1 m_2 - p_0^2.$$

Решая это уравнение относительно  $p_0^2$ , получим:

$$p_0^2 = \frac{m_2^2 (E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1}. \quad (42,9)$$

Имея также в виду закон сохранения  $E_1 + m_2 = E'_1 + E'_2$ , окончательно пишем:

$$E_1 - E'_1 = E'_2 - m_2 = \frac{m_2 (E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1} (1 - \cos \chi). \quad (42,10)$$

Это выражение представляет собой энергию, теряемую первой и соответственно приобретаемую второй частицей. Наибольшая передача энергии получается при  $\chi = \pi$  и равна

$$E'_2 \max - m_2 = E_1 - E'_1 \min = \frac{2m_2 (E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1}. \quad (42,11)$$

Отношение минимальной кинетической энергии налетающей частицы после столкновения к ее первоначальной кинетической энергии:

$$\frac{E'_1 \min - m_1}{E_1 - m_1} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1}. \quad (42,12)$$

В предельном случае малых скоростей (когда  $E \approx m + mv^2/2$ ) это отношение стремится к постоянному пределу, равному

$$\left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2.$$

В обратном же пределе больших энергий  $E_1$  отношение (42,12) стремится к нулю; к постоянному же пределу стремится сама величина  $E'_1 \min$ . Этот предел равен

$$E'_1 \min = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2m_2}.$$

Предположим, что  $m_2 \gg m_1$ , т. е. масса налетающей частицы мала по сравнению с массой покоившейся частицы. Согласно классической механике при этом легкая частица могла бы передать тяжелой только ничтожную часть своей энергии (см. § 14). Такое положение не имеет, однако, места в релятивистской теории. Из формулы (42,12) видно, что при достаточно больших энергиях  $E_1$  доля переданной энергии может достичь порядка 1. Для этого, однако, недостаточно, чтобы скорость частицы  $m_1$  была порядка 1, а необходимы, как легко видеть, энергии

$$E_1 \sim m_2,$$

т. е. легкая частица должна обладать энергией порядка энергии покоя тяжелой частицы.

Аналогичное положение имеет место при  $m_2 \ll m_1$ , т. е. когда тяжелая частица налетает на легкую. И здесь согласно классической механике, происходила бы лишь незначительная передача энергии. Доля передаваемой энергии начинает становиться значительной, только начиная от энергий

$$E_1 \sim \frac{m_1^2}{m_2}.$$

Отметим, что и здесь речь идет не просто о скоростях порядка скорости света, а об энергиях, больших по сравнению с  $m_1$ , т. е. об ультрарелятивистском случае.

### Задачи

1. Для двух частиц одинаковой массы определить угол их разлета после столкновения в лабораторной системе отсчета.

Решение. Возведя в квадрат обе стороны равенства (42,1), получим:

$$p_{1\mu} p_2^\mu = p'_{1\mu} p_2'^\mu,$$

а после раскрытия произведений 4-импульсов в лабораторной системе:

$$E_1 m_2 = E'_1 E'_2 - p'_1 p'_2 \cos \theta,$$

где  $\theta$  — угол разлета (угол между  $\mathbf{p}'_1$  и  $\mathbf{p}'_2$ ). Для частиц одинаковой массы ( $m_1 = m_2 \equiv m$ ), подставив

$$p'_1 = \sqrt{E_1'^2 - m^2}, \quad p'_2 = \sqrt{E_2'^2 - m^2}$$

и учитывая сохранение энергии ( $E_1 + m = E'_1 + E'_2$ ), получим отсюда

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{(E'_1 - m)(E'_2 - m)}{(E'_1 + m)(E'_2 + m)}}.$$

Угол  $\theta$  меняется в пределах от  $\pi/2$  (при  $E'_1 \rightarrow m$  или  $E'_2 \rightarrow m$ ) до минимального значения  $\theta_{\min}$ , достигаемого при  $E'_1 = E'_2$ :

$$\cos \theta_{\min} = \frac{E_1 - m}{E_1 + 3m}.$$

2. Для столкновения двух частиц одинаковой массы  $m$  выразить  $E'_1$ ,  $E'_2$  и  $\chi$  через угол рассеяния в лабораторной системе  $\theta_1$ .

Решение. Подставив в (42,5)  $p_1 = \sqrt{E_1^2 - m^2}$ ,  $p_1' = \sqrt{E_1'^2 - m^2}$  и решив уравнение относительно  $E_1'$ , найдем:

$$E_1' = \frac{E_1 + m + (E_1 - m) \cos^2 \theta_1}{E_1 + m - (E_1 - m) \cos^2 \theta_1}$$

и затем

$$E_2' = E_1 + m - E_1' = m + \frac{(E_1^2 - m^2) \sin^2 \theta_1}{2m + (E_1 - m) \sin^2 \theta_1}.$$

Сравнивая с выражением  $E_1'$  через  $\chi$ :

$$E_1' = E_1 - \frac{1}{2} (E_1 - m) (1 - \cos \chi)$$

(из (42,10)), найдем угол рассеяния в системе центра инерции

$$\cos \chi = \frac{2m - (E_1 + 3m) \sin^2 \theta_1}{2m + (E_1 + m) \sin^2 \theta_1}.$$


---



## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

### Глава X

#### ЗАРЯД В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

##### § 43. Четырехмерный потенциал поля

Взаимодействие частиц друг с другом можно описывать с помощью понятия силового *поля*. Вместо того чтобы говорить о том, что одна частица действует на другую, можно сказать, что частица создает вокруг себя поле; на всякую другую частицу, находящуюся в этом поле, действует некоторая сила. В классической механике поле является лишь некоторым способом описания физического явления — взаимодействия частиц. В теории же относительности благодаря конечности скорости распространения взаимодействий положение вещей существенным образом меняется. Силы, действующие в данный момент на частицу, не определяются их расположением в этот момент. Изменение положения одной из частиц отражается на других частицах лишь спустя некоторый промежуток времени. Это значит, что поле само по себе становится физической реальностью. Мы не можем говорить о непосредственном взаимодействии частиц, находящихся на расстоянии друг от друга. Взаимодействие может происходить в каждый момент лишь между соседними точками пространства (близкодействие). Поэтому мы должны говорить о взаимодействии одной частицы с полем и о последующем взаимодействии поля с другой частицей.

Вторая часть этой книги посвящена теории электромагнитных полей. Начнем с изучения взаимодействия частицы с заданным полем.

Действие для частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле, складывается из двух частей: из действия свободной частицы (39,1) и из члена, описывающего взаимо-

действие частицы с полем. Последний должен содержать как величины, характеризующие частицу, так и величины, характеризующие поле.

Оказывается<sup>1)</sup>, что свойства частицы в отношении ее взаимодействия с электромагнитным полем определяются всего одним параметром — так называемым *зарядом* частицы  $e$ , который может быть как положительной, так и отрицательной (или равной нулю) величиной. Свойства же поля характеризуются 4-вектором  $A_\mu$ , так называемым *4-потенциалом*, компоненты которого являются функциями координат и времени. Эти величины входят в действие в виде члена

$$-\frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx^\mu,$$

где функции  $A_\mu$  берутся в точках мировой линии частицы. Множитель  $1/c$  введен здесь для удобства. Следует отметить, что до тех пор, пока у нас нет никаких формул, связывающих заряд или потенциалы с известными уже величинами, единицы для их измерения могут быть выбраны произвольным образом (мы вернемся к этому вопросу в § 53).

Таким образом, действие для заряда в электромагнитном поле имеет вид

$$S = \int_a^b \left( -mc ds - \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu \right). \quad (43,1)$$

Три пространственные компоненты 4-вектора  $A^\mu$  образуют трехмерный вектор  $\mathbf{A}$ , называемый *векторным потенциалом* поля. Временную же компоненту называют *скалярным потенциалом*; обозначим ее как  $A^0 = \varphi$ . Таким образом,

$$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}). \quad (43,2)$$

---

<sup>1)</sup> Следующие ниже утверждения надо рассматривать в значительной степени как результат опытных данных. Вид действия для частицы в электромагнитном поле не может быть установлен на основании одних только общих соображений таких, как требование релятивистской инвариантности (последнее допускало бы, например, в формуле (43,1) также и член вида  $\int A ds$ , где  $A$  — скалярная функция).

Во избежание недоразумений напомним, что речь идет везде о классической (не квантовой) теории, и потому нигде не учитываются эффекты, связанные со спином частиц.

Поэтому интеграл действия можно написать в виде

$$S = \int_a^b \left( -mc ds + \frac{e}{c} \mathbf{A} d\mathbf{r} - e\varphi dt \right),$$

или, вводя частицы  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  и переходя к интегрированию по времени,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left( -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi \right) dt. \quad (43,3)$$

Подынтегральное выражение есть функция Лагранжа для заряда в электромагнитном поле:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi. \quad (43,4)$$

Это выражение отличается от функции Лагранжа для свободной частицы членами  $\frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi$ , которые описывают взаимодействие заряда с полем.

Производная  $\partial L/\partial \mathbf{v}$  есть обобщенный импульс частицы; обозначим его посредством  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (43,5)$$

Здесь мы обозначили посредством  $\mathbf{p}$  обычный импульс частицы, которой мы и будем называть просто импульсом.

Из функции Лагранжа можно найти функцию Гамильтона частицы в поле по общей формуле<sup>1)</sup>

$$\mathcal{H} = \mathbf{v} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L.$$

Подставляя сюда (43,4), найдем:

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \quad (43,6)$$

<sup>1)</sup> В этой части книги энергия и функция Гамильтона будут обозначаться буквами рукописного шрифта  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  (вместо  $E$  и  $H$ ), во избежание путаницы с обозначениями напряженностей полей.

Функция Гамильтона, однако, должна быть выражена не через скорость, а через обобщенный импульс частицы. Из (43,5—6) видно, что соотношение между  $\mathcal{H} - e\varphi$  и  $\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$  такое же, как между  $\mathcal{H}$  и  $\mathbf{p}$  в отсутствие поля, т. е.

$$\left(\frac{\mathcal{H} - e\varphi}{c}\right)^2 = m^2 c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2. \quad (43,7)$$

Для малых скоростей, т. е. в классической механике, функция Лагранжа (43,4) переходит в

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi. \quad (43,8)$$

В этом приближении

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A},$$

а функция Гамильтона:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 + e\varphi. \quad (43,9)$$

#### § 44. Уравнения движения заряда в поле

Заряд, находящийся в поле, не только подвергается воздействию со стороны поля, но в свою очередь сам влияет на поле, изменяя его. Однако если заряд  $e$  не велик, то его действием на поле можно пренебречь<sup>1)</sup>. В этом случае, рассматривая движение в заданном поле, можно считать, что само поле не зависит ни от положения, ни от скорости заряда.

Уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле даются уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \quad (44,1)$$

где  $L$  определяется формулой (43,4).

Производная  $\partial L / \partial \mathbf{v}$  есть обобщенный импульс частицы (43,5). Далее пишем:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla L = \frac{e}{c} \text{grad } \mathbf{A} \mathbf{v} - e \text{grad } \varphi.$$

<sup>1)</sup> Условие малости заряда в этом смысле состоит в малости возникающей при его движении так называемой силы торможения излучением (которая будет рассмотрена в § 82).

Но по известной формуле векторного анализа

$$\text{grad } \mathbf{a} \mathbf{b} = (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a} + [\mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a}] + [\mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b}],$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — любые два вектора. Применяя эту формулу к  $\mathbf{A} \mathbf{v}$  и помня, что дифференцирование по  $\mathbf{r}$  производится при постоянном  $\mathbf{v}$ , находим:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{A}] - e \text{ grad } \varphi.$$

Уравнения Лагранжа, следовательно, имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{A}] - e \text{ grad } \varphi.$$

Но полный дифференциал  $\frac{d\mathbf{A}}{dt} dt$  складывается из двух частей: из изменения  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} dt$  векторного потенциала со временем в данной точке пространства и из изменения при переходе от одной точки пространства к другой на расстояние  $d\mathbf{r}$ . Эта вторая часть равна  $(d\mathbf{r} \nabla) \mathbf{A}$ . Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A}.$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, получаем:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \text{ grad } \varphi + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{A}]. \quad (44,2)$$

Это и есть уравнение движения частицы в электромагнитном поле. Слева стоит производная от импульса частицы по времени. Следовательно, выражение в правой части (44,2) есть сила, действующая на заряд в электромагнитном поле. Мы видим, что эта сила состоит из двух частей. Первая часть [первый и второй члены в правой части (44,2)] не зависит от скорости частицы. Вторая же часть (третий член) зависит от нее: пропорциональна величине скорости и перпендикулярна к ней.

Силу первого рода, отнесенную к заряду, равному единице, называют *напряженностью электрического поля*; обозначим ее посредством  $\mathbf{E}$ . Итак, по определению,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi. \quad (44,3)$$

Множитель при скорости, точнее при  $v/c$ , в силе второго рода, действующей на единичный заряд, называют *напряженностью магнитного поля*; обозначим ее через  $\mathbf{H}$ . Итак, по определению,

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (44,4)$$

Уравнения движения заряда в электромагнитном поле можно теперь написать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (44,5)$$

Стоящее справа выражение называют *лоренцевой силой*. Первая ее часть — сила, с которой действует электрическое поле на заряд, — не зависит от скорости заряда и ориентирована по направлению поля  $\mathbf{E}$ . Вторая часть — сила, оказываемая магнитным полем, — пропорциональна скорости заряда и направлена перпендикулярно к этой скорости и к направлению магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

Для скоростей, малых по сравнению со скоростью света, импульс  $\mathbf{p}$  приближенно равен своему классическому выражению  $m\mathbf{v}$ , и уравнение движения (44,5) переходит в

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (44,6)$$

Вычислим еще скорость изменения кинетической энергии частицы<sup>1)</sup> со временем, т. е. производную

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Легко убедиться, что

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = \mathbf{v} \frac{d\mathbf{p}}{dt};$$

подставив  $d\mathbf{p}/dt$  из (44,5) и замечая, что  $[\mathbf{v}\mathbf{H}] \mathbf{v} = 0$  имеем:

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v}. \quad (44,7)$$

<sup>1)</sup> Под «кинетической» мы понимаем здесь и ниже энергию (39,7), включающую в себя энергию покоя.

Выражение в правой стороне равенства есть работа, производимая полем над частицей (в единицу времени). Работа производится только электрическим полем. Магнитное же поле не производит работы над движущимся в нем зарядом, поскольку действующая в нем сила перпендикулярна к скорости частицы.

В § 5 было отмечено, что уравнения классической механики инвариантны относительно обращения времени. Легко видеть, что то же самое имеет место и в электромагнитном поле в теории относительности. При этом, однако, вместе с заменой  $t$  на  $-t$  надо изменить знак магнитного поля. Действительно, легко видеть, что уравнения движения (44,5) не меняются, если произвести замену

$$t \rightarrow -t, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}. \quad (44,8)$$

При этом, согласно (44,3—4), скалярный потенциал не меняется, а векторный меняет знак:

$$\varphi \rightarrow \varphi, \quad \mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}. \quad (44,9)$$

Таким образом, если в электромагнитном поле возможно некоторое движение, то возможно и обратное движение в поле с обратным направлением  $\mathbf{H}$ .

### Задача

Выразить ускорение частицы через ее скорость и напряженности электрического и магнитного полей.

Решение. Подставляем в уравнение движения (44,5)  $\mathbf{p} = \mathbf{v} \mathcal{E}_{\text{кин}} / c^2$ , а  $d\mathcal{E}_{\text{кин}} / dt$  выражаем согласно (44,7). В результате найдем:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{E}) \right\}.$$

## § 45. Калибровочная инвариантность

Рассмотрим теперь вопрос о том, насколько однозначно определены потенциалы поля. Поле характеризуется тем действием, которое оно оказывает на движение находящихся в нем зарядов. Но в уравнения движения входят не потенциалы, а напряженности поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Поэтому два поля

физически тождественны, если они характеризуются одними и теми же векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Согласно (44,3—4), заданием потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  величины  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  определяются однозначно. Однако одному и тому же полю могут соответствовать различные потенциалы. Чтобы убедиться в этом, прибавим к каждой компоненте 4-потенциала  $A_\mu$  величину  $-\partial f/\partial x^\mu$ , где  $f$  — произвольная функция от координат и времени. Тогда  $A_\mu$  переходит в

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \quad (45,1)$$

При такой замене в интеграле действия (43,1) появится дополнительный член, представляющий собой полный дифференциал

$$\frac{e}{c} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu = d\left(\frac{e}{c} f\right), \quad (45,2)$$

что не влияет на уравнения движения (ср. § 2).

Если вместо четырехмерного потенциала ввести векторный и скалярный и вместо  $x^\mu$  — координаты  $ct$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то четыре равенства (45,1) можно написать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \text{grad } f, \\ \varphi' &= \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned} \quad (45,3)$$

Легко убедиться в том, что электрическое и магнитное поля действительно не изменяются при подстановке в (44,3—4) вместо  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  новых потенциалов  $\mathbf{A}'$  и  $\varphi'$ . Таким образом, преобразование (45,3) не изменяет поля. Потенциалы определены поэтому не однозначно — векторный потенциал определен с точностью до градиента произвольной функции и скалярный — с точностью до производной по времени от той же функции.

В частности, к векторному потенциалу можно прибавить любой постоянный вектор, а к скалярному потенциалу — любую постоянную. Это видно и непосредственно из того, что в определение  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  входят только производные от  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ , и потому прибавление к последним постоянных не влияет на напряженности поля.

Физический смысл имеют лишь те величины, которые инвариантны по отношению к преобразованию потенциалов



(45,3); поэтому и все уравнения должны быть инвариантны по отношению к этому преобразованию. Эту инвариантность называют *калибровочной* или *градиентной*<sup>1)</sup>.

Описанная неоднозначность потенциалов дает всегда возможность выбрать их так, чтобы они удовлетворяли одному произвольному дополнительному условию, — одному, так как мы можем произвольно выбрать одну функцию  $f$  в (45,3). В частности, всегда можно выбрать потенциалы поля так, чтобы было  $\varphi = 0$ . Обратить же в нуль векторный потенциал, вообще говоря, невозможно, так как условие  $\mathbf{A} = 0$  представляло бы собой три дополнительных условия (для трех компонент  $\mathbf{A}$ ).

## § 46. Постоянное электромагнитное поле

Постоянным электромагнитным полем называют поле, не зависящее от времени. Очевидно, что потенциалы постоянного поля можно выбрать так, чтобы они были функциями только от координат, но не от времени. Постоянное магнитное поле по-прежнему равно  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ . Постоянное же электрическое поле

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi. \quad (46,1)$$

Таким образом, постоянное электрическое поле определяется только скалярным потенциалом, а магнитное — векторным потенциалом.

Мы видели в предыдущем параграфе, что потенциалы поля определены не однозначно. Но если условиться описывать постоянное электромагнитное поле с помощью не зависящих от времени потенциалов, то к скалярному потенциалу можно прибавить, не изменяя поля, лишь произвольную постоянную (не зависящую ни от координат, ни от времени). Обычно на потенциал  $\varphi$  накладывают еще дополнительное условие, требуя, чтобы он был равен нулю на бесконечности. Тогда и упомянутая произвольная постоянная становится определенной, и скалярный потенциал постоянного

<sup>1)</sup> Подчеркнем, что этот результат связан с подразумевающимся в (45,2) постоянством  $\varepsilon$ . Таким образом, калибровочная инвариантность уравнений электродинамики и сохранение заряда тесно связаны друг с другом.

поля — вполне однозначным. Напротив, векторный потенциал остается не однозначным: к нему можно прибавить градиент любой функции координат.

Определим, чему равна энергия заряда в постоянном электромагнитном поле. Если поле постоянно, то и функция Лагранжа для заряда не зависит явно от времени. В этом случае энергия сохраняется, совпадая с функцией Гамильтона. Согласно (43,6) имеем:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \quad (46,2)$$

Таким образом, к энергии частицы прибавляется член  $e\varphi$  — потенциальная энергия заряда в поле. Отметим существенное обстоятельство, что энергия зависит только от скалярного, но не от векторного потенциала. Другими словами, магнитное поле не влияет на энергию зарядов; энергию частицы может изменить только электрическое поле. Это связано с упоминавшимся уже обстоятельством, что магнитное поле, в противоположность электрическому, не производит над зарядом работы.

Если напряженность поля во всех точках пространства одинакова, то поле называют *однородным*. Скалярный потенциал однородного электрического поля может быть выражен через напряженность поля согласно равенству

$$\varphi = -Er. \quad (46,3)$$

Действительно, при  $E = \text{const}$  имеем

$$\text{grad}(Er) = (E\nabla)r = E.$$

Векторный же потенциал однородного магнитного поля можно выразить через напряженность этого поля  $\mathbf{H}$  в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}\mathbf{r}]. \quad (46,4)$$

Действительно, при  $\mathbf{H} = \text{const}$  находим с помощью известных формул векторного анализа:

$$\text{rot} [\mathbf{H}\mathbf{r}] = \mathbf{H} \text{div } \mathbf{r} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{r} = 2\mathbf{H}$$

(напомним, что  $\text{div } \mathbf{r} = 3$ ).

### § 47. Движение в постоянном однородном электрическом поле

Рассмотрим движение заряда  $e$  в однородном постоянном электрическом поле  $E$ . Направление поля примем за ось  $x$ . Движение будет, очевидно, происходить в одной плоскости, которую выберем за плоскость  $xu$ . Тогда уравнения движения (44,5) примут вид

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0,$$

откуда

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0. \quad (47,1)$$

Начало отсчета времени мы выбрали в тот момент, когда  $p_x = 0$ ;  $p_0$  есть импульс частицы в этот момент.

Кинетическая энергия частицы (энергия без потенциальной энергии в поле) равна  $\mathcal{E}_{\text{кин}} = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$ . Подставляя сюда (47,1), находим в нашем случае:

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + (ceEt)^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}, \quad (47,2)$$

где  $\mathcal{E}_0$  — энергия при  $t = 0$ .

Согласно (39,11) скорость частицы  $\mathbf{v} = \mathbf{pc}^2/\mathcal{E}_{\text{кин}}$ . Для скорости  $v_x = \dot{x}$  имеем, следовательно:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}_{\text{кин}}} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}.$$

Интегрируя, находим:

$$x = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} \quad (47,3)$$

(постоянную интегрирования полагаем равной нулю).

Для определения  $y$  имеем:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}_{\text{кин}}} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}},$$

откуда

$$y = \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{Arsh} \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}. \quad (47,4)$$

Уравнение траектории находим, выражая из (47,4)  $t$  через  $y$  и подставляя в (47,3). Это дает:

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \operatorname{ch} \frac{eEy}{p_0 c}. \quad (47,5)$$

Таким образом, заряд движется в однородном электрическом поле по цепной линии.

Если скорость частицы  $v \ll c$ , то можно положить  $p_0 = mv_0$ ,  $\mathcal{E}_0 = mc^2$ ; разлагая (47,5) по степеням  $1/c$ , получим, с точностью до членов высшего порядка:

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2 + \text{const},$$

т. е. заряд движется по параболе, — известный результат классической механики.

#### § 48. Движение в постоянном однородном магнитном поле

Рассмотрим теперь движение заряда  $e$  в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Направление поля выберем за ось  $z$ . Уравнения движения

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{vH}]$$

мы перепишем в другом виде, подставив вместо импульса

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2},$$

где  $\mathcal{E}$  — энергия частицы, которая в магнитном поле постоянна. Уравнения движения приобретают тогда вид

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{vH}] \quad (48,1)$$

или, в компонентах,

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0, \quad (48,2)$$

где мы ввели обозначение

$$\omega = \frac{e\mathbf{H}}{\mathcal{E}}. \quad (48,3)$$

Умножим второе из уравнений (48,2) на  $t$  и сложим с первым:

$$\frac{d}{dt}(v_x + tv_y) = -t\omega(v_x + tv_y),$$

откуда

$$v_x + tv_y = ae^{-i\omega t},$$

где  $a$  — комплексная постоянная. Ее можно написать в виде  $a = v_{0t}e^{-i\alpha}$ , где  $v_{0t}$  и  $\alpha$  вещественны. Тогда

$$v_x + tv_y = v_{0t}e^{-i(\omega t + \alpha)},$$

и, отделяя вещественную и мнимую части, находим:

$$v_x = v_{0t} \cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_{0t} \sin(\omega t + \alpha). \quad (48,4)$$

Постоянные  $v_{0t}$  и  $\alpha$  определяются начальными условиями,  $\alpha$  есть начальная фаза; что же касается  $v_{0t}$ , то из (48,4) видно, что

$$v_{0t} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

т. е.  $v_{0t}$  есть величина скорости частицы в плоскости  $xу$ , остающаяся при движении постоянной.

Из (48,4) находим, интегрируя еще раз:

$$x = x_0 + r \sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha), \quad (48,5)$$

где

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}e^{\phi}}{ecH} = \frac{cp_t}{eH} \quad (48,6)$$

( $p_t$  — проекция импульса на плоскость  $xу$ ). Из третьего уравнения (48,2) находим  $v_z = v_{0z}$  и

$$z = z_0 + v_{0z}t. \quad (48,7)$$

Из (48,5) и (48,7) видно, что заряд движется в однородном магнитном поле по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля и с радиусом  $r$ , определяемым (48,6). Скорость частицы при этом постоянна по величине. В частном случае, когда  $v_{0z} = 0$ , т. е. заряд не имеет скорости вдоль поля, он движется по окружности в плоскости, перпендикулярной к полю.

Величина  $\omega$ , как видно из формул, есть циклическая частота вращения частицы в плоскости, перпендикулярной

к полю. Если скорость частицы мала, то мы можем приближенно положить  $\mathcal{E} = mc^2$ . Тогда частота  $\omega$  превращается в

$$\omega = \frac{eH}{mc}. \quad (48,8)$$

### Задачи

1. Найти адиабатический инвариант для движения заряда в однородном магнитном поле, величина и направление которого медленно меняются со временем.

Решение. Поскольку в однородном магнитном поле движение в плоскости, перпендикулярной к полю, периодически, то адиабатическим инвариантом является (см. § 32) интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P}_t d\mathbf{l},$$

взятый по полному периоду движения — в данном случае по окружности ( $\mathbf{P}_t$  — проекция обобщенного импульса на указанную плоскость). Подставив  $\mathbf{P}_t = \mathbf{p}_t + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ , имеем:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{p}_t d\mathbf{l} + \frac{e}{2\pi c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

В первом члене замечаем, что  $\mathbf{p}_t$  постоянно по величине и направлено по  $d\mathbf{l}$ ; ко второму применяем теорему Стокса и заменяем rot  $\mathbf{A} = \mathbf{H}$ :

$$I = r p_t + \frac{e}{2c} H r^2,$$

где  $r$  — радиус орбиты. Подставив  $r$  из (48,6), находим:

$$I = \frac{3cp_t^2}{2eH}.$$

Отсюда видно, что при медленном изменении  $H$  поперечный импульс  $p_t$  меняется пропорционально  $\sqrt{H}$ .

2. Определить частоты колебаний заряженного пространственного осциллятора, находящегося в постоянном однородном магнитном поле; собственная частота колебаний осциллятора (при отсутствии поля) равна  $\omega_0$ .

Решение. Уравнения вынужденных колебаний осциллятора в магнитном поле (направленном вдоль оси  $z$ ) имеют вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eH}{mc} \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{eH}{mc} \dot{x}, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

Умножая второе уравнение на  $i$  и складывая с первым, получаем:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -i \frac{eH}{mc} \dot{\xi},$$

где  $\xi = x + iy$ . Отсюда находим, что частоты колебаний осциллятора в плоскости, перпендикулярной к полю, равны

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{eH}{mc} \right)^2} \pm \frac{eH}{2mc}.$$

Если поле  $H$  мало, то эта формула переходит в

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{eH}{2mc}.$$

Колебания вдоль направления поля остаются неизменными.

### § 49. Движение заряда в скрещенных полях

Наконец, рассмотрим движение заряда в случае одновременного наличия однородных и постоянных электрического и магнитного полей. Мы ограничимся при этом нерелятивистским случаем, когда скорость заряда  $v \ll c$ , и потому его импульс  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ; как мы увидим ниже, для этого необходимо, чтобы электрическое поле было мало по сравнению с магнитным.

Направление  $\mathbf{H}$  выберем за ось  $z$ , а плоскость, проходящую через векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ , за плоскость  $yz$ . Тогда уравнения движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]$$

напишутся в виде

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c} \dot{y}H, \quad m\ddot{y} = eE_y - \frac{e}{c} \dot{x}H, \quad m\ddot{z} = eE_z. \quad (49,1)$$

Из третьего из этих уравнений видно, что вдоль оси  $z$  заряд движется равномерно-ускоренно:

$$z = \frac{eE_z}{2m} t^2 + v_{0z}t. \quad (49,2)$$

Умножая второе из уравнений (49,1) на  $t$  и складывая с первым, находим:

$$\frac{d}{dt} (\dot{x} + i\dot{y}) + t\omega (\dot{x} + i\dot{y}) = t \frac{e}{m} E_y$$

( $\omega = eH/mc$ ). Интеграл этого уравнения равен сумме интеграла этого же уравнения без правой части и частного

интеграла уравнения с правой частью. Первый из них есть  $ae^{-i\omega t}$ , второй равен  $eE_y/m\omega = cE_y/H$ . Таким образом,

$$\dot{x} + i\dot{y} = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{H}.$$

Постоянная  $a$ , вообще говоря, комплексная. Написав ее в виде  $a = be^{i\alpha}$  с вещественными  $b$  и  $\alpha$ , мы видим, что поскольку  $a$  умножается на  $e^{-i\omega t}$ , то, выбирая соответствующим образом начало отсчета времени, мы можем придать фазе  $\alpha$  любое значение. Выберем ее так, чтобы  $a$  было вещественно. Тогда, отделяя в  $\dot{x} + i\dot{y}$  мнимую и вещественную части, находим:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a \cos \omega t + c \frac{E_y}{H}, \\ \dot{y} &= -a \sin \omega t. \end{aligned} \quad (49,3)$$

При этом в момент времени  $t=0$  скорость направлена по оси  $x$ . Мы видим, что компоненты скорости частицы являются периодическими функциями времени; их средние значения равны

$$\bar{v}_x = \frac{cE_y}{H}, \quad \bar{v}_y = 0. \quad (49,4)$$

Эту среднюю скорость движения заряда в скрещенных электрическом и магнитном полях часто называют скоростью *электрического дрейфа*. Ее направление перпендикулярно к обоим полям и не зависит от знака заряда.

Все формулы этого параграфа применимы, если скорость частицы мала по сравнению со скоростью света; мы видим, что для этого требуется, в частности, чтобы электрическое и магнитное поля удовлетворяли условию

$$\frac{E_y}{H} \ll 1, \quad (49,5)$$

абсолютные же величины  $E_y$  и  $H$  могут быть произвольными.

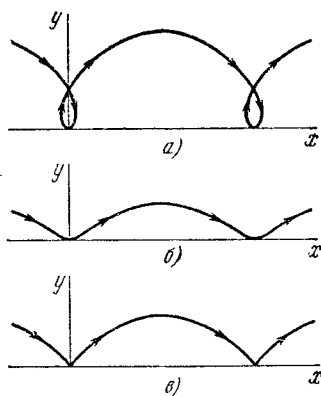


Рис. 30.



Интегрируя еще раз уравнения (49,3) и выбирая постоянные интегрирования так, чтобы при  $t=0$  было  $x=y=0$ , получаем:

$$x = \frac{a}{\omega} \sin \omega t + \frac{cE_y}{H} t, \quad y = \frac{a}{\omega} (\cos \omega t - 1). \quad (49,6)$$

Рассматриваемые как параметрические уравнения кривой, эти уравнения определяют собой так называемую трохойду. В зависимости от того, больше или меньше абсолютная величина  $a$ , чем абсолютная величина  $cE_y/H$ , проекция траектории частицы на плоскость  $xу$  имеет вид, изображенный соответственно на рис. 30, а и рис. 30, б.

Если  $a = -cE_y/H$ , то (49,6) переходит в

$$x = \frac{cE_y}{\omega H} (\omega t - \sin \omega t), \quad y = \frac{cE_y}{\omega H} (1 - \cos \omega t), \quad (49,7)$$

т. е. проекция траектории на плоскость  $xу$  является циклоидой (рис. 30, в).

## § 50. Тензор электромагнитного поля

Формулы (44,3—4), выражающие напряженности поля через его потенциалы, представлены в трехмерных обозначениях и потому неудобны для выяснения закона преобразования этих величин при изменении системы отсчета.

Легко видеть, что совокупность всех компонент обоих трехмерных векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  может быть предоставлена как совокупность компонент антисимметрического 4-тензора

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad (50,1)$$

(его называют *тензором электромагнитного поля*). Смысл отдельных компонент этого тензора легко выяснить, подставив значения  $A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A})$  в определение (50,1). Результат можно записать в виде таблицы, в которой индекс  $\mu = 0, 1, 2, 3$  нумерует строки, а индекс  $\nu$  — столбцы:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (50,2)$$

Контравариантные компоненты того же тензора отличаются изменением знака при поднимании одного пространственного индекса:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (50,3)$$

Отметим, что уравнения движения заряда в поле записываются с помощью тензора  $F_{\mu\nu}$  в виде

$$\frac{d^{\mu}x^{\mu}}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_{\nu}. \quad (50,4)$$

Раскрывая выражения в обеих сторонах равенства с помощью трехмерных обозначений (40,2), (40,5), (50,3) (и заменив  $ds = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ), легко убедиться в том, что при  $\mu = 1, 2, 3$  мы получим три компоненты векторного уравнения (44,6), а при  $\mu = 0$  — уравнение работы (44,7).

Формулы преобразования полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  можно найти теперь в соответствии с общими правилами преобразования 4-тензоров. Компоненты 4-тензора второго ранга  $F^{\mu\nu}$  преобразуются как произведения координат  $x^{\mu}x^{\nu}$ . При преобразовании Лоренца (36,3) координаты  $x^2 = y$  и  $x^3 = z$  не меняются; поэтому не меняется и компонента  $F^{23}$ :

$$F^{23} = F'^{23}.$$

Далее, по той же причине компоненты  $F^{02}$ ,  $F^{03}$  и  $F^{12}$ ,  $F^{13}$  преобразуются соответственно как координаты  $x^0 = ct$  и  $x^1 = x$ :

$$F^{02} = \frac{F'^{02} + \frac{V}{c} F'^{12}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad F^{12} = \frac{F'^{12} + \frac{V}{c} F'^{02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

и аналогично для  $F^{03}$ ,  $F^{13}$ . Наконец, компонента  $F^{01}$  должна преобразовываться как произведение  $x^0 x^1$ ; отсюда получим бы

$$F^{01} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left\{ F'^{01} + \frac{V^2}{c^2} F'^{10} + \frac{V}{c} (F'^{01} + F'^{10}) \right\}.$$

Но поскольку в данном случае тензор  $F^{\mu\nu}$  антисимметричен, то  $F'^{01} = -F'^{10}$  и потому

$$F'^{01} = F'^{01}.$$

Выразив теперь компоненты тензора  $F^{\mu\nu}$  через компоненты полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  согласно (50,3), получим следующие формулы преобразования для электрического поля:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (50,5)$$

и для магнитного поля

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (50,6)$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля, как и большинство физических величин, относительны, т. е. их свойства различны в разных системах отсчета. В частности, электрическое или магнитное поле может быть равно нулю в одной системе отсчета и в то же время присутствовать в другой системе.

Если в системе  $K'$  магнитное поле  $\mathbf{H}' = 0$ , то согласно (50,5—6) между электрическим и магнитным полями в системе  $K$  существует соотношение

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{E}]. \quad (50,7)$$

Если же в  $K'$  поле  $\mathbf{E}' = 0$ , то в системе  $K$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{H}]. \quad (50,8)$$

В обоих случаях, следовательно, в системе  $K$  магнитные и электрические поля взаимно перпендикулярны. Эти формулы имеют, разумеется, и обратный смысл: если в некоторой системе отсчета  $K$  поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны (но не равны по величине), то существует такая система  $K'$ , в которой поле чисто электрическое или чисто магнитное.

## § 51. Инварианты поля

Из векторов напряженностей электрического и магнитного полей можно составить инвариантные величины, остающиеся неизменными при преобразованиях от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Мы получим такую величину, образовав четырехмерный скаляр  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ . Раскрыв его в трехмерных обозначениях, найдем, что  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2)$ . Таким образом, одним из искоемых инвариантов является величина

$$H^2 - E^2 = \text{inv.} \quad (51,1)$$

Непосредственно проверкой по формулам (50,5—6) легко убедиться, что при преобразованиях Лоренца остается неизменной также и сумма  $E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z$ . Таким образом:

$$\mathbf{E}\mathbf{H} = 0. \quad (51,2)$$

Между этими двумя инвариантами имеется, однако, принципиальное отличие в отношении поведения при отражении (*инверсии*) пространственной системы координат — одновременном изменении знака координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Напомним, что при таком преобразовании компоненты истинного (или, как говорят, *полярного*) вектора тоже меняют знак. Компоненты же вектора, который может быть представлен как векторное произведение двух полярных векторов, при инверсии остаются неизменными (такие векторы называют *аксиальными*). Скалярное произведение двух полярных или двух аксиальных векторов является истинным скаляром — оно не меняется при инверсии. Скалярное же произведение аксиального и полярного векторов является *псевдоскаляром* — при инверсии оно меняет знак.

Но согласно определению (44,3—4)  $\mathbf{E}$  есть полярный вектор, а  $\mathbf{H}$  — аксиальный вектор (векторное произведение полярных векторов  $\nabla$  и  $\mathbf{A}$ ). Отсюда ясно, что  $H^2 - E^2$  есть истинный скаляр, а  $\mathbf{E}\mathbf{H}$  — псевдоскаляр (истинным же скаляром будет квадрат  $(\mathbf{E}\mathbf{H})^2$ ).

Отметим некоторые следствия инвариантности выражений (51,1—2). Если в какой-либо системе отсчета поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  одинаковы по величине ( $E^2 = H^2$ ), то они одинаковы по величине и во всякой другой инерциальной системе отсчета. Если в какой-либо системе отсчета поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно пер-

пендикулярны ( $\mathbf{E}\mathbf{H}=0$ ), то они взаимно перпендикулярны и во всякой другой системе.

Если  $\mathbf{E}\mathbf{H}=0$ , то можно найти такую систему отсчета, в которой  $\mathbf{E}=0$  или  $\mathbf{H}=0$  (смотря по тому  $E^2 - H^2 < 0$  или  $> 0$ ), т. е. поле чисто магнитное или чисто электрическое. Обратно, если в какой-либо системе отсчета  $\mathbf{E}=0$  или  $\mathbf{H}=0$ , то во всякой другой системе они будут взаимно перпендикулярны, в соответствии со сказанным в конце предыдущего параграфа.

Исключением является случай, когда не только  $\mathbf{E}\mathbf{H}=0$ , но и  $E^2 - H^2=0$  — оба инварианта равны нулю. В этом случае  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  во всякой системе отсчета равны по величине и взаимно перпендикулярны по направлению.

---

## Глава XI

### УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

#### § 52. Первая пара уравнений Максвелла

Из выражений

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$$

легко получить уравнения, содержащие только  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Для этого определим  $\text{rot } \mathbf{E}$ :

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A} - \text{rot grad } \varphi.$$

Но ротор всякого градиента равен нулю; следовательно,

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (52,1)$$

Взяв дивергенцию от обеих частей уравнения  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$  и помня, что дивергенция всякого ротора равна нулю, находим:

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (52,2)$$

Уравнения (52,1—2) составляют первую пару *уравнений Максвелла*<sup>1)</sup>. Заметим, что эти два уравнения еще не определяют вполне свойства поля. Это видно уже из того, что они определяют изменение магнитного поля со временем (производную  $\partial \mathbf{H} / \partial t$ ), но не определяют производной  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ .

Уравнения (52,1—2) можно написать в интегральной форме. Согласно теореме Гаусса

$$\int \text{div } \mathbf{H} dV = \oint \mathbf{H} d\mathbf{f},$$

---

<sup>1)</sup> Уравнения Максвелла — основные уравнения электродинамики — были впервые сформулированы им в 1860-х годах.

где интеграл справа берется по всей замкнутой поверхности, охватывающей объем, по которому взят интеграл слева. На основании (52,2) имеем:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{f} = 0. \quad (52,3)$$

Интеграл от вектора по некоторой поверхности называется *поток вектора* через эту поверхность. Таким образом, поток магнитного поля через всякую замкнутую поверхность равен нулю.

Согласно теореме Стокса

$$\int \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{f} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

где интеграл справа берется по замкнутому контуру, огибающему поверхность, по которой интегрируется слева. Из (52,1) находим, интегрируя обе части по некоторой поверхности:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} d\mathbf{f}. \quad (52,4)$$

Интеграл вектора по замкнутому контуру называется *циркуляцией* этого вектора по контуру. Циркуляцию электрического поля называют также *электродвижущей силой* в данном контуре. Таким образом, электродвижущая сила в некотором контуре равна взятой с обратным знаком производной по времени от потока магнитного поля через поверхность, ограничиваемую этим контуром.

### § 53. Действие для электромагнитного поля

Действие  $S$  для всей системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, должно состоять из трех частей:

$$S = S_f + S_m + S_{mf}. \quad (53,1)$$

$S_m$  есть та часть действия, которая зависит только от свойств частиц, т. е. действие для свободных частиц. Для одной свободной частицы оно дается формулой (39,1). Если имеется несколько частиц, то их общее действие равно сумме действий для каждой частицы в отдельности. Таким образом,

$$S_m = - \sum mc \int ds. \quad (53,2)$$

$S_{mf}$  есть та часть действия, которая обусловлена взаимодействием между частицами и полем. Согласно § 43 имеем для системы частиц:

$$S_{mf} = - \sum \frac{e}{c} \int A_{\mu} dx^{\mu}. \quad (53,3)$$

В каждом из членов этой суммы  $A_{\mu}$  есть потенциал поля в той точке пространства и времени, в которой находится соответствующая частица. Сумма  $S_m + S_{mf}$  есть уже известное нам действие (43,1) для зарядов в поле.

Наконец,  $S_f$  есть та часть действия, которая зависит только от свойств самого поля, т. е. действие для поля в отсутствии зарядов. До тех пор, пока мы интересовались только движением зарядов в заданном электромагнитном поле,  $S_f$ , как не зависящее от частиц, нас не интересовало, так как этот член не мог повлиять на уравнения движения частицы. Он становится, однако, необходимым, когда мы хотим найти уравнения, определяющие само поле. Этому соответствует то обстоятельство, что из части  $S_m + S_{mf}$  действия мы нашли только два уравнения, (52,1—2), которые еще недостаточны для полного определения поля.

Для установления вида действия поля  $S_f$  мы будем исходить из следующего весьма важного свойства электромагнитных полей. Как показывает опыт, электромагнитное поле подчиняется так называемому *принципу суперпозиции*. Этот принцип заключается в утверждении, что поле, создаваемое системой зарядов, представляет собой результат простого сложения полей, которые создаются каждым из зарядов в отдельности. Это значит, что напряженности результирующего поля в каждой точке равны сумме (векторной) напряженностей в этой точке каждого из полей в отдельности.

Всякое решение уравнений поля является полем, которое может быть осуществлено в природе. Согласно принципу суперпозиции сумма любых таких полей тоже должна быть полем, которое может быть осуществлено в природе, т. е. должно удовлетворять уравнениям поля.

Как известно, линейные дифференциальные уравнения как раз отличаются тем свойством, что сумма любых его решений тоже является решением. Следовательно, дифференциальные уравнения поля должны быть линейными уравнениями.



Из сказанного следует, что под знаком интеграла в действии  $S_f$  должно стоять выражение, квадратичное по полю. Только в этом случае уравнения поля будут линейными, — уравнения поля получаются варьированием действия, а при варьировании степень подынтегрального выражения понижается на единицу.

В выражение для действия  $S_f$  не могут входить потенциалы поля, так как они не определены однозначно (в  $S_{mf}$  эта неоднозначность была не существенна). Поэтому  $S_f$  должно быть интегралом некоторой функции от тензора электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ . Но действие должно быть скаляром и потому должно быть интегралом от некоторого скаляра (истинного). Таковым является лишь произведение  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ <sup>1)</sup>.

Таким образом,  $S_f$  должно иметь вид:

$$S_f = a \int \int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} dV dt, \quad dV = dx dy dz,$$

где интеграл берется по координатам по всему пространству, а по времени — между двумя заданными моментами;  $a$  есть некоторая постоянная. Под интегралом стоит  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = = 2(H^2 - E^2)$ . Поле  $E$  содержит производную  $\partial A/\partial t$ . Но легко видеть, что  $(\partial A/\partial t)^2$  должно входить в действие с положительным знаком (а потому и  $E^2$  с положительным знаком). Действительно, если бы  $(\partial A/\partial t)^2$  входило в  $S_f$  со знаком минус, то достаточно быстрым изменением потенциала со временем (в рассматриваемом интервале времени) всегда можно было бы сделать  $S_f$  отрицательной величиной со сколь угодно большим абсолютным значением;  $S_f$  не могло бы, следовательно, иметь минимума, как этого требует принцип наименьшего действия. Таким образом,  $a$  должно быть отрицательным.

---

<sup>1)</sup> Подынтегральная функция в  $S_f$  не должна содержать производных от  $F_{\mu\nu}$ , так как в функцию Лагранжа могут входить, помимо координат системы, только их первые производные по времени, а роль «координат» (т. е. переменных, по которым производится варьирование в принципе наименьшего действия) играют в этом случае потенциалы  $A_\mu$  поля. Это аналогично тому, что в механике функция Лагранжа для механической системы содержит только координаты частиц и их первые производные по времени.

Численное значение  $a$  зависит от выбора единиц для измерения поля. Заметим, что после выбора определенного значения  $a$  вместе с единицами для измерения поля определяются также и единицы для измерения всех остальных электромагнитных величин. Мы будем в дальнейшем пользоваться так называемой *гауссовой системой единиц*; в этой системе  $a$  есть безразмерная величина, равная  $-1/16\pi$ .

Таким образом, действие для поля имеет вид

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Omega, \quad d\Omega = c dt dx dy dz. \quad (53,4)$$

В трехмерном виде:

$$S_f = \frac{1}{8\pi} \iint (E^2 - H^2) dV dt. \quad (53,5)$$

Другими словами, функция Лагранжа для поля есть

$$L_f = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) dV. \quad (53,6)$$

Действие для поля вместе с находящимися в нем зарядами имеет вид

$$S = -\sum \int mc ds - \sum \int \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu - \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Omega. \quad (53,7)$$

Заметим, что теперь уже заряды отнюдь не должны считаться малыми, как при выводе уравнений движения заряда в заданном поле. Поэтому  $A_\mu$  и  $F_{\mu\nu}$  относятся к истинному полю, т. е. внешнему полю вместе с полем, созданным самими зарядами;  $A_\mu$  и  $F_{\mu\nu}$  зависят теперь от положения и скоростей зарядов.

## § 54. Четырехмерный вектор тока

Вместо того чтобы рассматривать заряды как точечные, в целях математического удобства часто рассматривают заряды как распределенные в пространстве непрерывным образом. Тогда можно ввести *плотность заряда*  $\rho$  так, что  $\rho dV$  есть заряд, находящийся в объеме  $dV$ ;  $\rho$  есть, вообще говоря, функция от координат и времени. Интеграл от  $\rho$  по некоторому объему есть заряд, находящийся в этом объеме.

При этом надо помнить, что в действительности заряды являются точечными, так что плотность  $\rho$  равна нулю везде,

кроме тех точек, где находятся заряды, а интеграл  $\int \rho dV$  должен быть равен сумме тех зарядов, которые находятся в данном объеме. Поэтому  $\rho$  можно написать с помощью  $\delta$ -функций<sup>1)</sup> в следующем виде:

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (54,1)$$

где сумма берется по всем имеющимся зарядам, а  $\mathbf{r}_a$  — радиус-вектор заряда  $e_a$ .

Заряд частицы есть, по самому своему определению, величина инвариантная, т. е. не зависящая от выбора системы отсчета. Напротив, плотность  $\rho$  не есть инвариант, — инвариантом является лишь произведение  $\rho dV$ .

<sup>1)</sup>  $\delta$ -функция  $\delta(x)$  определяется следующим образом:  $\delta(x) = 0$  при всех не равных нулю значениях  $x$ ; при  $x = 0$   $\delta(0) = \infty$ , причем так, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (I)$$

Из этого определения следует, что если  $f(x)$  — любая непрерывная функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a); \quad (II)$$

в частности,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (III)$$

(пределы интегрирования, разумеется, не обязательно должны быть  $\pm \infty$ ; область интегрирования может быть любая область, заключающая ту точку, в которой  $\delta$ -функция не исчезает).

Справедливы также равенства

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x); \quad (IV)$$

их смысл заключается в том, что левая и правая части дают одинаковый результат, если их применять в качестве множителей под знаком интегрирования.

Подобно тому как  $\delta(x)$  определена для одной переменной  $x$ , можно ввести трехмерную  $\delta$ -функцию  $\delta(\mathbf{r})$ , равную нулю везде, кроме начала трехмерной системы координат, и интеграл которой по всему пространству равен 1. Такую функцию можно представить как произведение  $\delta(x) \delta(y) \delta(z)$ .

Умножим равенство  $de = \rho dV$  с обеих сторон на  $dx^\mu$ :

$$de dx^\mu = \rho dV dx^\mu = \rho dV dt \frac{dx^\mu}{dt}.$$

Слева стоит 4-вектор (так как  $de$  есть скаляр, а  $dx^\mu$  — 4-вектор). Значит, и справа должен стоять 4-вектор. Но  $dV dt$  есть скаляр, а потому  $\rho \frac{dx^\mu}{dt}$  есть 4-вектор. Этот вектор (обозначим его через  $j^\mu$ ) называют 4-вектором *тока*:

$$j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (54,2)$$

Три пространственные компоненты этого 4-вектора образуют трехмерный вектор *плотности тока*

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}; \quad (54,3)$$

$\mathbf{v}$  — скорость заряда в данной точке. Временная составляющая 4-вектора тока есть  $c\rho$ . Таким образом,

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}). \quad (54,4)$$

Введем 4-вектор тока в выражение (53,7) для действия и преобразуем второй член в этом выражении. Вводя вместо точечных зарядов  $e$  непрерывное распределение с плотностью  $\rho$ , мы должны написать этот член в виде

$$-\frac{1}{c} \int \rho A_\mu dx^\mu dV,$$

заменяв сумму по зарядам интегралом по всему объему. Перепишем его как

$$-\frac{1}{c} \int \rho \frac{dx^\mu}{dt} A_\mu dV dt = -\frac{1}{c^2} \int A_\mu j^\mu d\Omega.$$

Таким образом, полное действие принимает вид

$$S = -\sum \int mc ds - \frac{1}{c^2} \int A_\mu j^\mu d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Omega. \quad (54,5)$$

## § 55. Уравнение непрерывности

Изменение со временем заряда, находящегося в некотором объеме, дается производной

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV.$$

С другой стороны, изменение за единицу времени определяется количеством заряда, выходящего за это время из дан-

ного объема наружу, или, наоборот, входящего внутрь его. Количество заряда, проходящего за единицу времени через элемент  $df$  поверхности, ограничивающей наш объем, равно  $\rho v df$ , где  $v$  есть скорость заряда в той точке пространства, где находится элемент  $df$ . Вектор  $df$  направлен, как это всегда принимается, по внешней нормали к поверхности, т. е. по нормали, направленной наружу от рассматриваемого объема. Поэтому  $\rho v df \equiv j df$  положительно, если заряд выходит из нашего объема, и отрицательно, если заряд входит в него. Полное количество заряда, выходящего в единицу времени из данного объема, есть, следовательно,  $\oint j df$ , где интеграл распространен по всей замкнутой поверхности, ограничивающей этот объем.

Из сравнения обоих полученных выражений находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint j df. \quad (55,1)$$

Справа поставлен знак минус, так как левая часть положительна, если полный заряд в данном объеме увеличивается. Это уравнение, выражающее собой закон сохранения заряда, есть так называемое *уравнение непрерывности*, написанное в интегральном виде.

Напишем это же уравнение в дифференциальном виде. Применив к правой части (55,1) теорему Гаусса:

$$\oint j df = \int \operatorname{div} j dV,$$

находим:

$$\int \left( \operatorname{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0.$$

Поскольку это равенство должно иметь место при интегрировании по любому объему, то подынтегральное выражение должно быть равно нулю:

$$\operatorname{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (55,2)$$

Это и есть уравнение непрерывности в дифференциальном виде.

Легко убедиться в том, что выражение (54,1) для  $\rho$  в виде  $\delta$ -функций автоматически удовлетворяет уравнению непрерывности. Для простоты предположим, что имеется всего лишь один заряд, так что

$$\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Ток  $\mathbf{j}$  есть тогда

$$\mathbf{j} = ev\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость заряда. Найдем производную  $\partial\rho/\partial t$ . При движении заряда меняются его координаты, т. е. меняется  $\mathbf{r}_0$ . Поэтому

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}_0} \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial t}.$$

Но  $\partial\mathbf{r}_0/\partial t$  есть не что иное, как скорость  $\mathbf{v}$  заряда. Далее, поскольку  $\rho$  есть функция от  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ ,

$$\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}_0} = - \frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = - \mathbf{v} \text{grad } \rho = - \text{div } \rho\mathbf{v}$$

(скорость заряда  $\mathbf{v}$  не зависит, конечно, от  $\mathbf{r}$ ). Таким образом, мы приходим к уравнению (55,2).

В четырехмерной форме уравнение непрерывности (55,2) выражается равенством нулю 4-дивергенции 4-вектора тока:

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \quad (55,3)$$

## § 56. Вторая пара уравнений Максвелла

При нахождении уравнений поля из принципа наименьшего действия мы должны считать заданным движение зарядов и должны варьировать лишь потенциалы поля, играющие здесь роль «обобщенных координат» системы (при нахождении же уравнений движения частицы мы, напротив, считали поле заданным и варьировали траекторию частицы). Этот вывод удобно произвести в четырехмерном виде.

Согласно сказанному вариация первого члена в (54,5) равна теперь нулю, а во втором не должен варьироваться ток  $j^\mu$ . Таким образом,

$$\delta S = - \frac{1}{c} \int \left[ \frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \right] d\Omega = 0$$

(при варьировании во втором члене учтено, что  $F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}$ ). Подставляя в множителе  $\delta F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu},$$

имеем:

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left\{ \frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta A_\nu - F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu \right\} d\Omega.$$

Во втором члене меняем местами немые индексы  $\mu$  и  $\nu$ , а также заменяем  $F^{\nu\mu}$  на  $-F^{\mu\nu}$ . После этого второй и третий члены оказываются одинаковыми, так что

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left\{ \frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu \right\} d\Omega.$$

Далее, написав

$$-\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (F^{\mu\nu} \delta A_\mu) + \frac{1}{4\pi} \delta A_\mu \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}$$

и применив к интегралу от первого члена четырехмерную теорему Гаусса (38,7), получаем:

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left\{ \frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right\} \delta A_\mu d\Omega - \frac{1}{4\pi c} \int F^{\mu\nu} \delta A_\mu dS_\nu. \quad (56,1)$$

В последнем члене подразумевается его значение на пределах интегрирования. Пределами интегрирования по координатам является пространственная бесконечность, где поле исчезает. На пределах же интегрирования по времени, т. е. в заданные начальный и конечный моменты времени, вариация потенциалов равна нулю, так как по смыслу принципа наименьшего действия потенциалы в эти моменты заданы. Таким образом, второй член в (56,1) равен нулю, и мы находим условие минимальности действия в виде

$$\int \left( \frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right) \delta A_\mu d\Omega = 0.$$

Ввиду произвольности вариаций  $\delta A_\mu$  отсюда следует равенство нулю подынтегрального выражения в скобках:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (56,2)$$

Перепишем эти четыре ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) уравнения в трехмерной форме. При  $\mu = 1$  имеем:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial F^{10}}{\partial t} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{12}}{\partial y} + \frac{\partial F^{13}}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j^1.$$

Подставляя значения составляющих тензора  $F^{\mu\nu}$ , находим:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j_x.$$

Вместе с двумя следующими ( $\mu = 2, 3$ ) уравнениями они могут быть записаны как одно векторное:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (56,3)$$

Наконец, уравнение с  $\mu = 0$  дает:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (56,4)$$

Уравнения (56,3) и (56,4) и составляют искомую вторую пару уравнений Максвелла<sup>1)</sup>. Вместе с первой парой, они вполне определяют электромагнитное поле и являются основными уравнениями теории этих полей — *электродинамики*.

Напишем эти уравнения в интегральной форме. Интегрируя (56,4) по некоторому объему и применяя теорему Гаусса

$$\int \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \oint \mathbf{E} d\mathbf{f},$$

находим:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho dV. \quad (56,5)$$

Таким образом, поток электрического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в объеме, ограниченном этой поверхностью, умноженному на  $4\pi$ .

Интегрируя (56,3) по некоторой незамкнутой поверхности и применяя теорему Стокса

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{f} = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l},$$

находим:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} d\mathbf{f} + \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} d\mathbf{f}. \quad (56,6)$$

<sup>1)</sup> Уравнения Максвелла в форме, применимой к электромагнитному полю в пустоте вместе с находящимися в нем точечными зарядами, были сформулированы Лоренцем.



Величину

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (56,7)$$

называют *током смещения*. Из уравнения (56,6), написанного в виде

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \left( \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) d\mathbf{f},$$

видно, что циркуляция магнитного поля по некоторому контуру равна помноженной на  $4\pi/c$  сумме токов истинного и смещения, протекающих сквозь поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Из уравнений Максвелла можно получить известное уже нам уравнение непрерывности. Беря с обеих сторон (56,3) дивергенцию, находим:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j}.$$

Но  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv 0$  и, подставив  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  из (56,4), мы возвращаемся к уравнению (55,2).

### § 57. Плотность и поток энергии

Умножим обе части уравнения (56,3) на  $\mathbf{E}$ , а обе части уравнения (52,1) на  $\mathbf{H}$  и сложим полученные уравнения почленно:

$$\frac{1}{c} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{jE} - (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}).$$

Пользуясь известной формулой векторного анализа

$$\operatorname{div} [\mathbf{ab}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b},$$

переписываем это соотношение в виде

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{jE} - \operatorname{div} [\mathbf{EH}]$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -\mathbf{jE} - \operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (57,1)$$

Вектор

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] \quad (57,2)$$

называют *вектором Пойнтинга*.

Проинтегрируем (57,1) по некоторому объему и применим ко второму члену справа теорему Гаусса. Мы получим тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV = - \int \mathbf{jE} dV - \oint \mathbf{S} df. \quad (57,3)$$

Если интегрирование производится по всему пространству, то интеграл по поверхности исчезает (поле на бесконечности равно нулю). Далее, мы можем написать интеграл  $\int \mathbf{jE} dV$  в виде суммы  $\sum e v \mathbf{E}$  по всем зарядам, находящимся в поле, и подставить согласно (44,7)

$$e v \mathbf{E} = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{кин}}.$$

Тогда (57,3) переходит в

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{кин}} \right\} = 0. \quad (57,4)$$

Таким образом, для замкнутой системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, сохраняется величина, стоящая в написанном уравнении в скобках. Второй член в этом выражении есть кинетическая энергия (вместе с энергией покоя всех частиц; см. примечание на стр. 166); первый же член есть, следовательно, энергия самого электромагнитного поля. Величину

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \quad (57,5)$$

мы можем поэтому назвать *плотностью энергии* электромагнитного поля; это есть энергия единицы объема поля.

При интегрировании по некоторому конечному объему поверхностный интеграл в (57,3), вообще говоря, не исчезает, так что мы можем написать это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{кин}} \right\} = - \oint \mathbf{S} df, \quad (57,6)$$

где теперь во втором члене в скобках суммирование производится только по частицам, находящимся в рассматриваемом объеме. Слева стоит изменение полной энергии поля и частиц в единицу времени. Поэтому интеграл  $\oint \mathbf{S} df$  надо рассмат-

ривать как поток энергии поля через поверхность, ограничивающую данный объем, так что вектор Пойнтинга  $\mathbf{S}$  есть плотность этого потока, — количество энергии поля, протекающее в единицу времени через единицу поверхности.

### § 58. Плотность и поток импульса

Наряду с энергией электромагнитное поле обладает также и импульсом, распределенным в пространстве с определенной плотностью. Выражение этой плотности через напряженности поля может быть установлено с помощью вывода, аналогичного произведенному в предыдущем параграфе,

Вычислим производную по времени от интеграла

$$\int \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{H}] dV.$$

Производя дифференцирование под знаком интеграла и заменяя производные  $\partial\mathbf{E}/\partial t$  и  $\partial\mathbf{H}/\partial t$  согласно уравнениям Максвелла, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{4\pi c} dV &= \frac{1}{4\pi c} \int \left[ \mathbf{E} \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \right] dV + \frac{1}{4\pi c} \int \left[ \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{H} \right] dV = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \{ [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}] + [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] \} dV - \frac{1}{c} \int [\mathbf{J}\mathbf{H}] dV, \end{aligned}$$

В первом интеграле преобразуем подынтегральное выражение с помощью формулы векторного анализа

$$\nabla(\mathbf{a}\mathbf{b}) = [\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}] + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a},$$

согласно которой имеем:

$$[\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}] = \frac{1}{2} \nabla E^2 - (\nabla\mathbf{E})\mathbf{E},$$

Кроме того, заменим:

$$(\nabla\mathbf{V})\mathbf{E} = (\nabla\mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E}(\nabla\mathbf{E}),$$

где в члене  $(\nabla\mathbf{E})\mathbf{E}$  подразумевается, что оператор  $\nabla$  действует на оба следующие за ним множителя. Наконец, заметив, что согласно уравнению Максвелла (56,4)  $\nabla\mathbf{E} \equiv \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ , пишем:

$$[\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}] = \frac{1}{2} \nabla E^2 - (\nabla\mathbf{E})\mathbf{E} + 4\pi\rho\mathbf{E}.$$

Аналогичным образом преобразуется произведение  $[\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}]$ , но поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ , то

$$[\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] = \frac{1}{2} \nabla H^2 - (\nabla \mathbf{H}) \mathbf{H}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{4\pi c} dV = \\ = - \int \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} \nabla (E^2 + H^2) - (\nabla \mathbf{E}) \mathbf{E} - (\nabla \mathbf{H}) \mathbf{H} \right\} dV - \\ - \int \left\{ \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{H}] \right\} dV. \quad (58,1) \end{aligned}$$

В первом интеграле в подынтегральном выражении операторы  $\nabla$  действуют на все стоящие после них множители. Согласно правилам векторного анализа (общая формулировка теоремы Гаусса) этот интеграл преобразуется в интеграл по поверхности путем замены оператора  $dV \cdot \nabla$  на элемент поверхности  $df$ . Во втором же интеграле, в котором фигурируют плотность и ток зарядов, переходим к записи в виде суммы по точечным зарядам, расположенным внутри данного объема. В результате равенство (58,1) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{4\pi c} dV = \\ = - \oint \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{E^2 + H^2}{2} df - \mathbf{E} (\mathbf{E} df) - \mathbf{H} (\mathbf{H} df) \right\} - \\ - \sum e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right). \quad (58,2) \end{aligned}$$

Если интегрирование производится по всему пространству, то интеграл по поверхности (бесконечно удаленной) обращается в нуль. Выражение же под знаком суммы в (58,2) есть сила, действующая на заряд. Согласно уравнению движения (44,5) ее можно заменить производной  $d\mathbf{p}/dt$  от импульса частицы. Тогда равенство (58,2) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{4\pi c} dV + \sum \mathbf{p} \right\} = 0. \quad (58,3)$$

Оно выражает собой, очевидно, закон сохранения полного импульса системы частицы + поле. Первый член в фигурных

скобках есть, следовательно, импульс электромагнитного поля, а подынтегральное выражение в нем можно рассматривать как плотность импульса; обозначим ее через  $P^{(эм)}$ :

$$P^{(эм)} = \frac{[EH]}{4\pi c} = \frac{S}{c^2}. \quad (58,4)$$

Обратим внимание на то, что плотность импульса совпадает (с точностью до постоянного множителя  $1/c^2$ ) с плотностью потока энергии поля.

Если же интегрирование в левой части (58,2) производится по некоторому конечному объему поля, то интеграл по поверхности не равен нулю. Запишем его в более компактном виде, введя трехмерный тензор

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{E_i^2 + H_i^2}{2} \delta_{ik} - E_i E_k - H_i H_k \right\}. \quad (58,5)$$

В раскрытом виде его компоненты

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{8\pi} (E_y^2 + E_z^2 - E_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - H_x^2),$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{4\pi} (E_x E_y + H_x H_y)$$

и т. п.

Подынтегральное выражение в интеграле по поверхности в (58,2) есть вектор; с помощью тензора (58,5) его  $i$ -я компонента запишется в виде  $\sigma_{ik} df_k$ . Таким образом, векторное уравнение сохранения импульса (58,2), представленное в компонентах, примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int P_i^{(эм)} dV + \sum p_i \right\} = - \oint \sigma_{ik} df_k. \quad (58,6)$$

Отсюда ясно, что интеграл в правой стороне равенства представляет собой поток импульса поля, вытекающего из рассматриваемого объема. Произведение же  $\sigma_{ik} df_k$  есть поток импульса через элемент поверхности  $df$ . По определению, вектор  $df$  направлен по внешней нормали к поверхности. Если обозначить единичный вектор нормали через  $N$ , то  $df = N df$ . Тогда

$$\sigma_{ik} df_k = \sigma_{ik} N_k df,$$

и мы видим, что вектор с компонентами  $\sigma_{ik}N_k$  есть плотность потока импульса в направлении  $\mathbf{N}$ , т. е. поток через единичную площадку, перпендикулярную к  $\mathbf{N}$ . Подставив  $\sigma_{ik}$  из (58,5), найдем, что этот вектор равен

$$\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{E^2 + H^2}{2} \mathbf{N} - \mathbf{E}(\mathbf{NE}) - \mathbf{H}(\mathbf{NH}) \right\}. \quad (58,7)$$

Тензор  $\sigma_{ik}$  называют *максвелловским тензором напряжений*. Согласно сказанному выше компонента  $\sigma_{ik}$  есть плотность потока  $i$ -й компоненты импульса в направлении оси  $x^k$ . Отметим, что тензор напряжений, как это видно из (58,5), симметричен ( $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ ).

---

## Глава XII

### ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

#### § 59. Закон Кулона

Для постоянного электрического (*электростатического*) поля уравнения Максвелла имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (59,1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (59,2)$$

Электрическое поле  $\mathbf{E}$  выражается через один только скалярный потенциал соотношением

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (59,3)$$

Подставляя (59,3) в (59,1), находим уравнение, которому удовлетворяет потенциал постоянного электрического поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (59,4)$$

Это уравнение называют *уравнением Пуассона*. В пустоте, т. е. при  $\rho = 0$ , потенциал удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\Delta\varphi = 0. \quad (59,5)$$

Из последнего уравнения следует, в частности, что потенциал электрического поля нигде не может иметь ни максимума, ни минимума. Действительно, для того чтобы  $\varphi$  имело экстремальное значение, необходимо, чтобы все первые производные от  $\varphi$  по координатам были равны нулю, а вторые производные  $\partial^2\varphi/\partial x^2$ ,  $\partial^2\varphi/\partial y^2$ ,  $\partial^2\varphi/\partial z^2$  имели одинаковый знак. Последнее, однако, невозможно, так как при этом не может быть удовлетворено уравнение (59,5).

Определим теперь поле, создаваемое точечным зарядом. Из соображений симметрии ясно, что оно будет направлено

в каждой точке по радиусу-вектору, проведенному из точки, в которой находится заряд  $e$ . Из тех же соображений ясно, что абсолютная величина  $E$  поля будет зависеть только от расстояния  $R$  до заряда. Для нахождения этой абсолютной величины применим уравнение (59,1) в интегральной форме (56,5). Поток электрического поля через шаровую поверхность с радиусом  $R$ , проведенную вокруг заряда  $e$ , равен  $4\pi R^2 E$ ; этот поток должен быть равен  $4\pi e$ . Отсюда находим:

$$E = \frac{e}{R^2}.$$

В векторном виде:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}. \quad (59,6)$$

Таким образом, поле, создаваемое точечным зарядом, обратно пропорционально квадрату расстояния от него (*закон Кулона*). Потенциал этого поля

$$\varphi = \frac{e}{R}. \quad (59,7)$$

Если мы имеем систему зарядов, то создаваемое ею поле, согласно принципу суперпозиции, равно сумме полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. Потенциал такого поля равен

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a}, \quad (59,8)$$

где  $R_a$  — расстояние от заряда  $e_a$  до точки, в которой мы ищем потенциал. Если ввести плотность заряда  $\rho$ , то эта формула приобретает вид

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV, \quad (59,9)$$

где  $R$  — расстояние от элемента объема  $dV$  до данной точки («точки наблюдения») поля.

Отметим здесь математическое соотношение, получающееся при подстановке в (59,4) значений  $\rho$  и  $\varphi$  для точечного заряда, т. е.  $\rho = e\delta(\mathbf{R})$  и  $\varphi = e/R$ . Мы находим тогда:

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}). \quad (59,10)$$



### § 60. Электростатическая энергия зарядов

Определим потенциальную энергию системы зарядов. При этом будем исходить из представления об энергии поля, т. е. из выражения (57,5) для плотности энергии. Именно, энергия системы зарядов должна быть равна

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV,$$

где  $E$  есть поле, создаваемое этими зарядами, а интеграл берется по всему пространству. Подставляя сюда  $E = -\text{grad } \varphi$ , можно преобразовать  $U$  следующим образом:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int E \text{ grad } \varphi dV = -\frac{1}{8\pi} \int \text{div}(E\varphi) dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \text{div} E dV.$$

Первый из этих интегралов согласно теореме Гаусса равен интегралу от  $E\varphi$  по поверхности, ограничивающей объем интегрирования; но поскольку интегрирование производится по всему пространству, а на бесконечности поле равно нулю, то этот интеграл исчезает. Подставляя во второй интеграл  $\text{div} E = 4\pi\rho$ , находим следующее выражение для энергии системы зарядов:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV. \quad (60,1)$$

Для системы точечных зарядов  $e_a$  можно вместо интеграла написать сумму по зарядам

$$U = \frac{1}{2} \sum e_a \varphi_a, \quad (60,2)$$

где  $\varphi_a$  — потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке, где находится заряд  $e_a$ .

Согласно (59,8) потенциалы  $\varphi_a$  равны

$$\varphi_a = \sum_b \frac{e_b}{R_{ab}},$$

где  $R_{ab}$  — расстояние между зарядами  $e_a$  и  $e_b$ . Для системы точечных зарядов это выражение содержит бесконечный член, происходящий от потенциала собственного поля заряда  $e_a$  (член суммы с  $b = a$ , в котором  $R_{aa} = 0$ ). Соответственно в энергии (60,2) появляется бесконечная постоянная, не зависящая от взаимного расположения зарядов. Эта часть

энергии — «собственная» потенциальная энергия зарядов — лишена физического смысла (см. ниже) и должна быть вычеркнута. После этого останется лишь энергия взаимодействия зарядов, зависящая от их расположения. Она равна

$$U' = \frac{1}{2} \sum e_a \varphi'_a, \quad (60,3)$$

где

$$\varphi'_a = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{R_{ab}} \quad (60,4)$$

есть потенциал в точке нахождения  $e_a$ , создаваемый всеми зарядами, за исключением  $e_a$ . Иначе можно написать

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \quad (60,5)$$

В частности, энергия взаимодействия двух зарядов

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \quad (60,6)$$

Вернемся к упомянутой выше бесконечной собственной энергии элементарной заряженной частицы. Она возникла в результате рассмотрения частицы как точечной. Но такое рассмотрение в классической (неквантовой) релятивистской теории неизбежно уже в силу основных принципов теории относительности.

Действительно, говоря в классической теории об элементарной частице, мы понимаем частицу, механическое состояние которой полностью описывается заданием ее координат и скорости движения как целого. Если бы такая частица была протяженной, то она во всяком случае должна была бы рассматриваться как абсолютно твердое тело (т. е. тело, не способное деформироваться), поскольку само понятие деформации связано с возможностью независимого перемещения отдельных частей тела. Но в релятивистской механике существование абсолютно твердых тел вообще невозможно, как это видно из следующих соображений.

Пусть твердое тело приводится в движение внешним воздействием в какой-либо одной ее точке. Если бы тело было абсолютно твердым, то все его точки должны были бы начать двигаться одновременно с точкой, подвергшейся воздей-

ствию; в противном случае тело деформировалось бы. Но, в силу существования предельной скорости распространения взаимодействий, воздействие передается от исходной точки к остальным с конечной скоростью, и потому все точки тела не могут начать двигаться одновременно.

Таким образом, согласно электродинамике электрон должен был бы обладать бесконечной «собственной» энергией, а следовательно и бесконечной массой. Физическая бессмысленность этого результата показывает, что электродинамика как логически замкнутая физическая теория становится внутренне-противоречивой при переходе к достаточно малым расстояниям. Можно поставить вопрос о том, каков порядок величины этих расстояний. На этот вопрос можно ответить, заметив, что для собственной электромагнитной энергии электрона надо было бы получить значение порядка величины энергии покоя  $mc^2$ . Если, с другой стороны, рассматривать электрон, как обладающий некоторыми размерами  $r_e$ , то его собственная потенциальная энергия была бы порядка  $e^2/r_e$ . Из требования, чтобы обе эти величины были одного порядка,  $e^2/r_e \sim mc^2$  находим:

$$r_e \sim \frac{e^2}{mc^2}. \quad (60,7)$$

Эти размеры (их называют «радиусом» электрона) определяют границы применимости электродинамики к электрону, следующие уже из ее собственных основных принципов. Надо, однако, иметь в виду, что в действительности пределы применимости излагаемой здесь классической электродинамики лежат еще гораздо выше вследствие квантовых явлений<sup>1)</sup>.

## § 61. Поле равномерно движущегося заряда

Определим поле, создаваемое зарядом  $e$ , движущимся равномерно со скоростью  $V$ . Неподвижную систему отсчета будем называть системой  $K$ ; систему отсчета, движущуюся вместе с зарядом, — системой  $K'$ . Пусть заряд находится в начале координат системы  $K'$ ; система  $K'$  движется относительно  $K$  параллельно оси  $x$ ; оси  $y$  и  $z$  параллельны  $y'$

<sup>1)</sup> Квантовые эффекты становятся существенными на расстояниях порядка  $\hbar/mc$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка.

и  $z'$ . В момент времени  $t=0$  начала обеих систем совпадают. Координаты заряда в системе  $K$ , следовательно,  $x=Vt$ ,  $y=z=0$ . В системе  $K'$  мы имеем постоянное электрическое поле

$$\mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{R}'}{R'^3}, \quad (61,1)$$

а магнитное поле отсутствует.

Переход к системе  $K$  производится по формулам (50,5), которые дают

$$E_x = \frac{ex'}{R'^3}, \quad E_y = \frac{ey'}{R'^3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{ez'}{R'^3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (61,2)$$

Мы должны теперь выразить  $R'$ ,  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  через координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в системе  $K$ . Согласно формулам преобразования Лоренца имеем:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

и отсюда

$$R'^2 = \frac{R^{*2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (61,3)$$

где обозначено

$$R^{*2} = (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2). \quad (61,4)$$

Подставив эти выражения в (61,2), находим:

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}, \quad (61,5)$$

где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор от заряда  $e$  к точке наблюдения поля  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (его компоненты равны  $x - Vt$ ,  $y$ ,  $z$ ).

Это выражение для  $\mathbf{E}$  можно написать в другом виде, введя угол  $\theta$  между направлением движения и радиус-вектором  $\mathbf{R}$ . Очевидно, что  $y^2 + z^2 = R^{*2} \sin^2 \theta$ , и потому

$$R^{*2} = R^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right).$$

Тогда для  $E$  имеем:

$$E = \frac{eR}{R^3} \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}. \quad (61,6)$$

При заданном расстоянии  $R$  от заряда величина поля  $E$  возрастает с увеличением  $\theta$  от нуля до  $\pi/2$  (или при уменьшении от  $\pi$  до  $\pi/2$ ). Наименьшее значение поле имеет в направлении, параллельном направлению движения ( $\theta = 0, \pi$ ); оно равно

$$E_{\parallel} = \frac{e}{R^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right).$$

Наибольшим же является поле, перпендикулярное к скорости ( $\theta = \pi/2$ ), равное

$$E_{\perp} = \frac{e}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Отметим, что при увеличении скорости поле  $E_{\parallel}$  падает, а  $E_{\perp}$  возрастает. Можно сказать наглядно, что электрическое поле движущегося заряда как бы «сплющивается» по направлению движения. При скоростях  $V$ , близких к скорости света, знаменатель в формуле (61,6) близок к нулю в узком интервале значений  $\theta$  вокруг значения  $\theta = \pi/2$ . «Ширина» этого интервала порядка величины

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Таким образом, электрическое поле быстро движущегося заряда, на заданном расстоянии от него, заметно отлично от нуля лишь в узком интервале углов вблизи экваториальной плоскости, причем ширина этого интервала падает с увеличением  $V$  как  $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ .

Магнитное поле в системе  $K$  равно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{E}] \quad (61,7)$$

[см. (50,7)]. В частности, при  $V \ll c$  электрическое поле приближенно дается обычной формулой закона Кулона  $\mathbf{E} = e\mathbf{R}/R^3$ , и тогда магнитное поле

$$\mathbf{H} = \frac{e}{c} \frac{[\mathbf{V}\mathbf{R}]}{R^3}. \quad (61,8)$$

## З а д а ч а

Определить силу взаимодействия (в системе  $K$ ) между двумя зарядами, движущимися с одинаковыми скоростями  $V$ .

Решение. Искомую силу  $F$  вычисляем как силу, действующую на один из зарядов ( $e_1$ ) в поле, создаваемом вторым зарядом ( $e_2$ ). Имеем с помощью (61,7):

$$F = e_1 E_2 + \frac{e_1}{c} [V H_2] = e_1 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) E_2 + \frac{e_1}{c^2} V (V E_2).$$

Подставив сюда  $E_2$  из (61,6), получим для составляющих силы в направлении движения ( $F_x$ ) и перпендикулярно к нему ( $F_y$ ):

$$F_x = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \cos \theta}{\left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}}, \quad F_y = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^2 \sin \theta}{\left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}},$$

где  $R$  — радиус-вектор от  $e_2$  к  $e_1$ , а  $\theta$  — угол между  $R$  и  $V$ .

## § 62. Дипольный момент

Рассмотрим поле, создаваемое системой зарядов на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы.

Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов. Радиус-векторы отдельных зарядов пусть будут  $r_a$ . Потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке с радиус-вектором  $R_0$ , равен

$$\varphi = \sum \frac{e_a}{|R_0 - r_a|} \quad (62,1)$$

(суммирование производится по всем зарядам); здесь  $(R_0 - r_a)$  — радиус-векторы от зарядов  $e_a$  к точке, где мы ищем потенциал.

Мы должны исследовать это выражение для больших  $R_0$  ( $R_0 \gg r_a$ ). Для этого разложим его в ряд по степеням  $r_a/R_0$ , воспользовавшись формулой

$$f(R_0 - r) \approx f(R_0) - r \operatorname{grad} f(R_0)$$

(в  $\operatorname{grad}$  дифференцирование производится по координатам конца вектора  $R_0$ ). С точностью до членов первого порядка:

$$\varphi = \frac{\sum e_a}{R_0} - \operatorname{grad} \frac{1}{R_0} \cdot \sum e_a r_a \quad (62,2)$$

Сумма

$$\mathbf{d} = \sum e_a \mathbf{r}_a \quad (62,3)$$

носит название *дипольного момента* системы зарядов.

Существенно, что если сумма  $\sum e_a$  всех зарядов равна нулю, то дипольный момент не зависит от выбора начала координат. Действительно, радиус-векторы  $\mathbf{r}_a$  и  $\mathbf{r}'_a$  одного и того же заряда в двух разных системах координат связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \mathbf{a},$$

где  $\mathbf{a}$  — некоторый постоянный вектор. Поэтому если  $\sum e_a = 0$ , то дипольный момент в обеих системах одинаков:

$$\mathbf{d}' = \sum e_a \mathbf{r}'_a = \sum e_a \mathbf{r}_a + \mathbf{a} \sum e_a = \mathbf{d}.$$

В частности, для системы двух зарядов противоположного знака ( $\pm e$ ) дипольный момент  $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор от заряда  $-e$  к заряду  $+e$ .

Если полный заряд системы равен нулю, то потенциал ее поля на больших расстояниях

$$\varphi = -d \nabla \frac{1}{R_0} = \frac{dR_0}{R_0^3}. \quad (62,4)$$

Напряженность поля

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \frac{dR_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3} \text{grad} (dR_0) - (dR_0) \text{grad} \frac{1}{R_0^3}$$

или окончательно

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{nd})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{R_0^3}, \quad (62,5)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении  $R_0$ .

Таким образом, потенциал поля, создаваемого системой с равным нулю полным зарядом, на больших расстояниях обратно пропорционален квадрату, а напряженность поля — кубу расстояния. Это поле обладает аксиальной симметрией вокруг направления  $\mathbf{d}$ . В плоскости, проходящей через это направление (которое выберем в качестве оси  $z$ ), компоненты

вектора  $\mathbf{E}$ :

$$E_z = d \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{R_0^3}, \quad E_x = d \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{R_0^3}. \quad (62,6)$$

Радиальная же и тангенциальная составляющие в этой плоскости

$$E_R = d \frac{2 \cos \theta}{R_0^3}, \quad E_\theta = -d \frac{\sin \theta}{R_0^3}. \quad (62,7)$$

### § 63. Квадрупольный момент

В разложении потенциала по степеням  $1/R_0$

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots \quad (63,1)$$

член  $\varphi^{(n)}$  пропорционален  $1/R_0^{n+1}$ . Мы видели, что первый член,  $\varphi^{(0)}$ , определяется суммой всех зарядов; второй,  $\varphi^{(1)}$ , называемый дипольным потенциалом системы, определяется ее дипольным моментом.

Третий член разложения равен

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e x_i x_k \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} \frac{1}{R_0}, \quad (63,2)$$

где сумма берется по всем зарядам; индекс, указывающий номер заряда, мы здесь опустили;  $x_i$  — компоненты вектора  $\mathbf{r}$ , а  $X_i$  — вектора  $\mathbf{R}_0$ . Эта часть потенциала обычно называется квадрупольным потенциалом. Если сумма зарядов и дипольный момент системы равны нулю, то разложение начинается с  $\varphi^{(2)}$ .

В выражение (63,2) входит шесть величин  $\sum e x_i x_k$ . Легко, однако, видеть, что в действительности поле зависит не от шести независимых величин, а только от пяти. Это следует из того, что функция  $1/R_0$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \frac{1}{R_0} \equiv \delta_{ik} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} \frac{1}{R_0} = 0.$$

Мы можем поэтому написать  $\varphi^{(2)}$  в виде

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e \left( x_i x_k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ik} \right) \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} \frac{1}{R_0}.$$

Тензор

$$D_{ik} = \sum e (3 x_i x_k - r^2 \delta_{ik}) \quad (63,3)$$



называется тензором *квадрупольного момента* системы. Из определения  $D_{ik}$  следует, что сумма его диагональных компонент равна нулю:

$$D_{ii} = 0. \quad (63,4)$$

Симметричный тензор  $D_{ik}$  имеет поэтому всего пять независимых компонент. С его помощью можно написать

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{ik}}{6} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} \frac{1}{R_0} \quad (63,5)$$

или, производя дифференцирование

$$\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} \frac{1}{R_0} = \frac{3X_i X_k}{R_0^3} - \frac{\delta_{ik}}{R_0^3}$$

и учитывая, что  $\delta_{ik} D_{ik} = D_{ii} = 0$ ,

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{ik} n_i n_k}{2R_0^3}. \quad (63,6)$$

Как и всякий симметричный трехмерный тензор, тензор  $D_{ik}$  может быть приведен к главным осям. При этом в силу условия (63,4) в общем случае лишь два из трех главных значений независимы. Если же система зарядов симметрична относительно некоторой оси (ось  $z$ )<sup>1)</sup>, то она же является одной из главных осей тензора  $D_{ik}$ , положение двух других осей в плоскости  $xu$  произвольно, и все три главных значения связаны между собой:

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}. \quad (63,7)$$

Обозначая компоненту  $D_{zz}$  как  $D$  (ее называют обычно в этом случае просто квадрупольным моментом), получим потенциал в виде

$$\varphi^{(2)} = \frac{D}{4R_0^3} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (63,8)$$

где  $\theta$  — угол между  $R_0$  и осью  $z$ .

Подобно тому как это было сделано в предыдущем параграфе для дипольного момента, легко убедиться в том, что квадрупольный момент системы не зависит от выбора начала координат, если равны нулю как полный заряд, так и дипольный момент системы.

<sup>1)</sup> Имеется в виду ось симметрии любого порядка выше второго.

Аналогичным образом можно было бы написать следующие члены разложения (63,1).  $l$ -й член разложения определяется тензором (так называемым тензором  $2^l$ -польного момента)  $l$ -го ранга, симметричным по всем своим индексам и обращающимся в нуль при свертывании по любой паре индексов; можно показать, что такой тензор обладает  $2l + 1$  независимыми компонентами.

### Задача

Определить квадрупольный момент однородно заряженного эллипсоида относительно его центра.

Решение. Заменяя суммирование в (63,3) интегрированием по объему эллипсоида, имеем:

$$D_{xx} = \rho \iiint (2x^2 - y^2 - z^2) dx dy dz, \text{ и т. д.}$$

Интегрирование по объему эллипсоида может быть заменено интегрированием по объему сферы, как это было сделано в задаче 2д к § 25. В результате получим:

$$D_{xx} = \frac{e}{5} (2a^2 - b^2 - c^2), \quad D_{yy} = \frac{e}{5} (2b^2 - a^2 - c^2),$$

$$D_{zz} = \frac{e}{5} (2c^2 - a^2 - b^2),$$

где  $e = \frac{4\pi}{3} abc\rho$  — полный заряд эллипсоида.

### § 64. Система зарядов во внешнем поле

Рассмотрим систему зарядов, находящуюся во внешнем электрическом поле. Посредством  $\varphi(\mathbf{r})$  будем теперь обозначать потенциал этого внешнего поля. Потенциальная энергия каждого из зарядов есть  $e_a\varphi(\mathbf{r}_a)$ , а полная потенциальная энергия системы равна

$$U = \sum_a e_a\varphi(\mathbf{r}_a). \quad (64,1)$$

Выберем снова систему координат  $\mathbf{c}$  началом где-нибудь внутри системы зарядов;  $\mathbf{r}_a$  — радиус-вектор заряда  $e_a$  в этих координатах.

Предположим, что внешнее поле слабо меняется на протяжении системы зарядов, т. е. является по отношению к этой

системе *квазигоднородным*. Тогда мы можем разложить энергию  $U$  в ряд по степеням  $r_a$ . В этом разложении

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots \quad (64,2)$$

первый член есть

$$U^{(0)} = \varphi_0 \sum_a e_a, \quad (64,3)$$

где  $\varphi_0$  — значение потенциала в начале координат. В этом приближении энергия системы такова, как если бы все заряды находились в одной точке.

Второй член разложения

$$U^{(1)} = (\text{grad } \varphi)_0 \cdot \sum_a e_a r_a.$$

Введя напряженность  $\mathbf{E}_0$  поля в начале координат и дипольный момент  $\mathbf{d}$  системы, имеем:

$$U^{(1)} = -\mathbf{dE}_0. \quad (64,4)$$

Полная сила, действующая на систему во внешнем квазигоднородном поле, есть, с точностью до рассмотренных членов,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 \sum_a e_a + (\text{grad } \mathbf{dE}_0)_0.$$

Если полный заряд равен нулю, то первый член исчезает и тогда

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d}\nabla) \mathbf{E}, \quad (64,5)$$

т. е. сила определяется производными напряженности поля (взятыми в начале координат). Полный же момент действующих на систему сил есть

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{r}_a \cdot e_a \mathbf{E}_0] = [\mathbf{dE}_0], \quad (64,6)$$

т. е. определяется самой напряженностью поля.

Рассмотрим две системы с равными нулю суммами зарядов в каждой из них и дипольными моментами  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$ , причем их взаимное расстояние  $R$  велико по сравнению с их собственными размерами. Определим потенциальную энергию  $U$  их взаимодействия. Для этого можно рассматривать одну из этих систем как находящуюся в поле второй. Тогда

$$U = -\mathbf{d}_2 \mathbf{E}_1,$$

где  $E_1$  — поле первой системы. Подставляя для  $E_1$  выражение (62,5), находим:

$$U = \frac{\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 - 3 (\mathbf{d}_1 \mathbf{n}) (\mathbf{d}_2 \mathbf{n})}{R^3}, \quad (64,7)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении от одной системы к другой.

Для случая, когда у одной из систем сумма зарядов отлична от нуля (и равна  $e$ ), получаем аналогичным образом

$$U = e \frac{d\mathbf{n}}{R^2}, \quad (64,8)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении от диполя к заряду.

Следующий член разложения (64,1) равен

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e x_i x_k \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Здесь мы, как и в § 63, опустили индексы, указывающие номер заряда; значения вторых производных от потенциала берутся в начале координат. Но потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \delta_{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = 0,$$

Поэтому мы можем написать

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_i \partial x_k} \sum e \left( x_i x_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} r^2 \right),$$

или окончательно

$$U^{(2)} = \frac{D_{ik}}{6} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (64,9)$$

## § 65. Постоянное магнитное поле

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое зарядами, совершающими финитное движение, при котором частицы остаются все время в конечной области пространства, причем импульсы тоже остаются всегда конечными. Такое движение имеет стационарный характер, и представляет интерес рассмотреть среднее (по времени) магнитное поле  $\bar{\mathbf{H}}$ , создаваемое зарядами; это поле будет теперь функцией только от координат, но не от времени, т. е. будет постоянным.

Для того чтобы найти уравнения, определяющие среднее магнитное поле, усредним по времени уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Первое из них дает просто

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{H}} = 0. \quad (65,1)$$

Во втором уравнении среднее значение производной  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ , как и вообще производной от всякой величины, меняющейся в конечном интервале, равно нулю<sup>1)</sup>. Поэтому второе уравнение Максвелла приобретает вид

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}. \quad (65,2)$$

Эти два уравнения и определяют постоянное поле  $\bar{\mathbf{H}}$ .

Введем средний векторный потенциал  $\bar{\mathbf{A}}$  согласно

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{H}}.$$

Подставив это в уравнение (65,2), получим:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{\mathbf{A}} - \Delta \bar{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}.$$

Но мы знаем, что векторный потенциал поля определен неоднозначно, и поэтому на него можно наложить дополнительное условие. На этом основании выберем потенциал  $\bar{\mathbf{A}}$  так, чтобы

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{A}} = 0. \quad (65,3)$$

Тогда уравнение, определяющее векторный потенциал постоянного магнитного поля, приобретает вид

$$\Delta \bar{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}. \quad (65,4)$$

<sup>1)</sup> Пусть  $f$  — такая величина. Тогда среднее значение производной  $df/dt$  за некоторый интервал времени  $T$  есть

$$\bar{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{df}{dt} dt = \frac{f(T) - f(0)}{T}.$$

Поскольку  $f(t)$  меняется только в конечных пределах, то при неограниченном увеличении  $T$  это среднее значение действительно стремится к нулю.

Решение этого уравнения легко найти, заметив, что (65,4) вполне аналогично уравнению Пуассона (59,4) для скалярного потенциала постоянного электрического поля, причем вместо плотности заряда  $\rho$  стоит плотность тока  $\bar{\mathbf{j}}/c$ . По аналогии с решением (59,9) уравнения Пуассона мы можем написать

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} dV, \quad (65,5)$$

где  $R$  — расстояние от точки наблюдения поля до элемента объема  $dV$ .

В формуле (65,5) можно перейти от интеграла к сумме по зарядам, подставляя вместо  $\bar{\mathbf{j}}$  произведение  $\rho \mathbf{v}$  и помня, что все заряды точечные. При этом необходимо иметь в виду, что в интеграле (65,5)  $R$  является просто переменной интегрирования и потому, конечно, не подвергается усреднению.

Если же написать вместо интеграла  $\int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} dV$  сумму  $\sum \frac{e_a \mathbf{v}_a}{R_a}$ , то  $R_a$  будут радиус-векторами отдельных частиц, меняющимися при движении зарядов. Поэтому надо писать

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \frac{e_a \mathbf{v}_a}{R_a}, \quad (65,6)$$

где усредняется все выражение, стоящее под чертой.

Зная  $\bar{\mathbf{A}}$ , можно найти напряженность поля

$$\bar{\mathbf{H}} = \text{rot } \bar{\mathbf{A}} = \text{rot } \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} dV.$$

Операция  $\text{rot}$  производится по координатам точки наблюдения. Поэтому  $\text{rot}$  можно перенести под знак интеграла и при дифференцировании считать  $\bar{\mathbf{j}}$  постоянным. Применяя известную формулу

$$\text{rot } f \mathbf{a} = f \text{rot } \mathbf{a} + [\text{grad } f \cdot \mathbf{a}],$$

где  $f$  и  $\mathbf{a}$  — любые скаляр и вектор, к произведению  $\bar{\mathbf{j}} \cdot \frac{1}{R}$ , находим:

$$\text{rot } \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} = \left[ \text{grad } \frac{1}{R} \cdot \bar{\mathbf{j}} \right] = \frac{[\bar{\mathbf{j}} \mathbf{R}]}{R^3},$$

и, следовательно,

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \int \frac{[\bar{\mathbf{j}} \mathbf{R}]}{R^3} dV \quad (65,7)$$

(радиус-вектор  $\mathbf{R}$  направлен из  $dV$  в точку наблюдения поля). Это — так называемый *закон Био и Савара*.

## § 66. Магнитный момент

Рассмотрим среднее магнитное поле, создаваемое системой стационарно движущихся зарядов на больших расстояниях от этой системы.

Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов, аналогично тому, как мы делали в § 62. Обозначим опять радиус-векторы отдельных зарядов посредством  $\mathbf{r}_a$ , а радиус-вектор точки, в которой мы ищем поле, посредством  $\mathbf{R}_0$ . Тогда  $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a$  есть радиус-вектор от заряда  $e_a$  к точке наблюдения. Согласно (65,6) имеем для векторного потенциала:

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \frac{e_a \mathbf{v}_a}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a|}, \quad (66,1)$$

Как и в § 62, разложим это выражение по степеням  $\frac{r}{R_0}$ . С точностью до членов первого порядка (индекс  $a$  для краткости опускаем):

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{cR_0} \sum e \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{c} \sum e \mathbf{v} \left( \mathbf{r} \nabla \frac{1}{R_0} \right).$$

В первом члене можно написать

$$\sum e \bar{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \sum e \mathbf{r}.$$

Но среднее значение производной от меняющейся в конечном интервале величины  $\sum e \mathbf{r}$  равно нулю. Таким образом, для  $\bar{\mathbf{A}}$  остается выражение

$$\bar{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c} \sum e \mathbf{v} \left( \mathbf{r} \nabla \frac{1}{R_0} \right) = \frac{1}{cR_0^3} \sum e \mathbf{v} (\mathbf{r} \mathbf{R}_0).$$

Преобразуем его следующим образом. Замечая, что  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ , мы можем написать (помня, что  $\mathbf{R}_0$  есть постоянный вектор):

$$\sum e (\mathbf{R}_0 \mathbf{r}) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum e \mathbf{r} (\mathbf{r} \mathbf{R}_0) + \frac{1}{2} \sum e [\mathbf{v} (\mathbf{r} \mathbf{R}_0) - \mathbf{r} (\mathbf{v} \mathbf{R}_0)].$$

При подстановке этого выражения в  $\bar{\mathbf{A}}$  среднее значение от первого члена (с производной по времени) снова обратится в нуль, и мы получим:

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{2cR_0^3} \sum e [\mathbf{v} (\mathbf{r} \mathbf{R}_0) - \mathbf{r} (\mathbf{v} \mathbf{R}_0)].$$

Введем вектор

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e [\mathbf{rv}], \quad (66,2)$$

называемый *магнитным моментом* системы. Тогда

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{[\bar{\mathbf{m}}\mathbf{R}_0]}{R_0^3} = \left[ \nabla \frac{1}{R_0} \cdot \bar{\mathbf{m}} \right]. \quad (66,3)$$

Зная векторный потенциал, легко найти напряжённость магнитного поля. С помощью формулы

$$\text{rot} [\mathbf{ab}] = (\mathbf{b}\nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{ div } \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{ div } \mathbf{a}$$

находим:

$$\bar{\mathbf{H}} = \text{rot} \left[ \bar{\mathbf{m}} \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} \right] = \bar{\mathbf{m}} \text{ div } \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} - (\bar{\mathbf{m}}\nabla) \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}.$$

Далее,

$$\text{div} \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \mathbf{R}_0 \text{ grad } \frac{1}{R_0^3} + \frac{1}{R_0^3} \text{ div } \mathbf{R}_0 = 0$$

и

$$(\bar{\mathbf{m}}\nabla) \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3} (\bar{\mathbf{m}}\nabla) \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0 \left( \bar{\mathbf{m}}\nabla \frac{1}{R_0^3} \right) = \frac{\bar{\mathbf{m}}}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0 (\bar{\mathbf{m}}\mathbf{R}_0)}{R_0^5}.$$

Таким образом,

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{3\mathbf{n}(\bar{\mathbf{m}}\mathbf{n}) - \bar{\mathbf{m}}}{R_0^3}, \quad (66,4)$$

где  $\mathbf{n}$  — снова единичный вектор в направлении  $\mathbf{R}_0$ . Мы видим, что магнитное поле выражается через магнитный момент такой же формулой, какой электрическое поле выражается через дипольный момент (ср. (62,5)).

Если у всех зарядов системы отношение заряда к массе одинаково, то мы можем написать:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e [\mathbf{rv}] = \frac{e}{2mc} \sum m [\mathbf{rv}].$$

Если скорости всех зарядов  $v \ll c$ , то  $mv$  есть импульс  $\mathbf{p}$  заряда, и мы получаем:

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2n.c} \sum [\mathbf{rp}] = \frac{e}{2mc} \mathbf{M}, \quad (66,5)$$

где  $\mathbf{M} = \sum [\mathbf{rp}]$  есть механический момент импульса системы. Таким образом, в этом случае отношение магнитного момента к механическому постоянно и равно  $e/2mc$ .



### Задача

Определить отношение магнитного и механического моментов для системы из двух зарядов (скорости  $v \ll c$ ).

Решение. Выбирая начало координат в центре инерции обеих частиц, будем иметь  $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0$  и  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$ , где  $\mathbf{p}$  — импульс относительного движения. С помощью этих соотношений найдем:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \left( \frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2} \right) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{M}.$$

### § 67. Ларморова прецессия

Рассмотрим систему зарядов, находящуюся во внешнем постоянном однородном магнитном поле.

Средняя (по времени) сила, действующая на систему,

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum \frac{e}{c} \overline{[\mathbf{vH}]} = \overline{\frac{d}{dt} \sum \frac{e}{c} [\mathbf{rH}]}$$

обращается в нуль как среднее значение производной по времени от всякой величины, меняющейся в конечных пределах. Среднее же значение момента сил

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c} \overline{[\mathbf{r}[\mathbf{vH}]]}$$

отлично от нуля. Его можно выразить через магнитный момент системы, для чего пишем, раскрывая двойное векторное произведение:

$$\mathbf{K} = \sum \frac{e}{c} \{ \mathbf{v}(\mathbf{rH}) - \mathbf{H}(\mathbf{vr}) \} = \sum \frac{e}{c} \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{rH}) - \frac{1}{2} \mathbf{H} \frac{d}{dt} \mathbf{r}^2 \right\}.$$

При усреднении второй член обращается в нуль, так что

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c} \overline{\mathbf{v}(\mathbf{rH})} = \frac{1}{2c} \sum e \{ \overline{\mathbf{v}(\mathbf{rH})} - \overline{\mathbf{r}(\mathbf{vH})} \}$$

(последнее преобразование аналогично произведенному при выводе (66,3)), или окончательно

$$\bar{\mathbf{K}} = [\bar{\mathbf{m}}\mathbf{H}]. \tag{67,1}$$

Обратим внимание на аналогию с формулой (64,6) электрического случая.

Рассмотрим систему одинаковых заряженных частиц, совершающих финитное движение (со скоростями  $v \ll c$ ) в центрально-симметрическом поле некоторой неподвижной частицы

(скажем, система электронов в атоме в поле ядра). Предположим, что эта система находится в слабом однородном магнитном поле.

В отсутствие внешнего поля полный механический момент системы  $\mathbf{M}$  оставался бы постоянным. Наличие слабого магнитного поля приведет к медленному изменению  $\mathbf{M}$  со временем. Рассмотрим характер этого изменения. Для того чтобы исключить при этом влияние быстро меняющегося основного движения зарядов в системе, усредним  $\mathbf{M}$  по периодам этого движения.

Согласно известному уравнению механики (см. (27,3)) имеем:

$$\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{dt} = \bar{\mathbf{K}},$$

где  $\bar{\mathbf{K}}$  — момент действующих на систему внешних сил (усредненный по тем же промежуткам времени, что и  $\mathbf{M}$ ). Согласно (67,1) и (66,5) имеем:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{m}\mathbf{H}] = \frac{e}{2mc} [\bar{\mathbf{M}}\mathbf{H}].$$

Поэтому

$$\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{dt} = -[\Omega\bar{\mathbf{M}}], \quad (67,2)$$

где мы обозначили

$$\Omega = \frac{e}{2mc} \mathbf{H}. \quad (67,3)$$

Уравнение вида (67,2) означает, что вектор  $\bar{\mathbf{M}}$  (а с ним и магнитный момент  $\mathbf{m}$ ) вращается с угловой скоростью —  $\Omega$  вокруг направления поля, сохраняя при этом свою абсолютную величину и угол, образуемый им с этим направлением. Это явление называют *ларморовой прецессией*, а угловую скорость (67,3) — *ларморовой частотой*.

Мы можем теперь уточнить, что подразумевалось выше под достаточной слабостью поля: требуется, чтобы ларморова частота  $\Omega$  была мала по сравнению с частотами собственного финитного движения зарядов в системе. Очевидно, что только в таких условиях может иметь смысл рассматривать изменение со временем момента, усредненного указанным выше образом.

## Глава XIII

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

#### § 68. Волновое уравнение

Электромагнитное поле в пустоте определяется уравнениями Максвелла, в которых надо положить  $\rho=0$ ,  $\mathbf{j}=0$ . Выпишем их еще раз:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (68,1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (68,2)$$

Эти уравнения могут иметь отличные от нуля решения. Это значит, что электромагнитное поле может существовать даже при отсутствии каких бы то ни было зарядов.

Электромагнитные поля, существующие в пустоте при отсутствии зарядов, называют *электромагнитными волнами*. Мы займемся теперь исследованием свойств таких полей.

Прежде всего отметим, что эти поля обязательно должны быть переменными. Действительно, в противном случае  $\partial \mathbf{H} / \partial t = \partial \mathbf{E} / \partial t = 0$ , и уравнения (68,1 — 2) переходят в уравнения постоянного поля (59,1 — 2) и (65,1 — 2), в которых, однако, теперь  $\rho=0$ ,  $\mathbf{j}=0$ . Но решения этих уравнений, определенные формулами (59,9) и (65,5), при  $\rho=0$ ,  $\mathbf{j}=0$  обращаются в нуль.

Выведем уравнения, определяющие потенциалы электромагнитных волн.

Как мы уже знаем, в силу однозначности потенциалов всегда можно наложить на них некоторое дополнительное

условие. На этом основании выберем потенциалы электромагнитных волн так, чтобы скалярный потенциал был равен нулю:

$$\varphi = 0. \quad (68,3)$$

Тогда

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (68,4)$$

Подставляя оба эти выражения в первое из уравнений (68,2), находим:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (68,5)$$

Несмотря на то, что мы уже наложили одно дополнительное условие на потенциалы, потенциал  $\mathbf{A}$  все же еще не вполне однозначен. Именно, к нему можно прибавить градиент любой не зависящей от времени функции (не меняя при этом  $\varphi$ ). В частности, можно выбрать потенциал электромагнитной волны таким образом, чтобы

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (68,6)$$

Действительно, подставляя  $\mathbf{E}$  из (68,4) в  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ , имеем:

$$\text{div } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} = 0,$$

т. е.  $\text{div } \mathbf{A}$  есть функция только от координат. Эту функцию всегда можно обратить в нуль прибавлением к  $\mathbf{A}$  градиента от соответствующей не зависящей от времени функции.

Уравнение (68,5) приобретает теперь вид

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (68,7)$$

Это и есть уравнение, определяющее потенциал электромагнитных волн. Оно называется *уравнением д'Аламбера* или *волновым уравнением*.

Применяя к (68,7) операции  $\text{rot}$  и  $\partial/\partial t$ , убедимся в том, что напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют таким же волновым уравнениям.

### § 69. Плоские волны

Рассмотрим частный случай электромагнитных волн, в котором поле зависит только от одной координаты, скажем  $x$  (и от времени). Такие волны называются *плоскими*. В этом случае уравнения поля принимают вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (69,1)$$

где под  $f$  подразумевается любая компонента векторов  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ .

Для решения этого уравнения перепишем его в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$$

и введем новые переменные

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \quad \eta = t + \frac{x}{c},$$

так что

$$t = \frac{1}{2}(\eta + \xi), \quad x = \frac{c}{2}(\eta - \xi).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

и уравнение для  $f$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Очевидно, что его решение имеет вид

$$f = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные функции. Таким образом,

$$f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (69,2)$$

Пусть, например,  $f_2 = 0$ , так что  $f = f_1(t - x/c)$ . Выясним смысл этого решения. В каждой плоскости  $x = \text{const}$  поле меняется со временем; в каждый данный момент поле различно для разных  $x$ . Очевидно, что поле имеет одинаковое значение для координат  $x$  и моментов времени  $t$ , удовлетворяющих соотношениям  $t - x/c = \text{const}$ , т. е.

$$x = \text{const} + ct,$$

Это значит, что если в некоторый момент  $t = 0$  в некоторой точке  $x$  пространства поле имело определенное значение, то через промежуток времени  $t$  то же самое значение поле имеет на расстоянии  $ct$  вдоль оси  $x$  от первоначального места. Мы можем сказать, что все значения электромагнитного поля распространяются в пространстве вдоль оси  $x$  со скоростью, равной скорости света  $c$ .

Таким образом,  $f_1(t - x/c)$  представляет собой плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси  $x$ . Очевидно, что  $f_2(t + x/c)$  представляет собой волну, бегущую в противоположном, отрицательном, направлении оси  $x$ .

В предыдущем параграфе было показано, что потенциалы электромагнитной волны можно выбрать так, чтобы  $\varphi = 0$ , причем  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Выберем потенциалы рассматриваемой теперь плоской волны именно таким образом. Условие  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  дает в этом случае

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0,$$

поскольку все величины не зависят от  $y$  и  $z$ . Согласно (69,1) будем иметь тогда и  $\partial^2 A_x / \partial t^2 = 0$ , т. е.  $\partial A_x / \partial t = \text{const}$ . Но производная  $\partial A / \partial t$  определяет электрическое поле, и мы видим, что отличная от нуля компонента  $A_x$  означала бы в рассматриваемом случае наличие постоянного продольного электрического поля. Поскольку такое поле не имеет отношения к электромагнитной волне, то можно положить  $A_x = 0$ .

Таким образом, векторный потенциал плоской волны может быть выбран перпендикулярным к оси  $x$ , т. е. к направлению распространения этой волны.

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси  $x$ ; в такой волне все величины, в частности и  $\mathbf{A}$ , являются функциями только от  $t - x/c$ . Из формул

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

мы находим поэтому:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{A}', \quad \mathbf{H} = [\nabla \mathbf{A}] = \left[ \nabla \left( t - \frac{x}{c} \right) \cdot \mathbf{A}' \right] = -\frac{1}{c} [\mathbf{nA}'], \quad (69,3)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $t - x/c$ , а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль направления распространения волны. Подставляя первое равенство во второе, находим:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{nE}]. \quad (69,4)$$

Мы видим, что электрическое и магнитное поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  плоской волны направлены перпендикулярно к направлению распространения волны. На этом основании электромагнитные волны называют *поперечными*. Из (69,4) видно также, что электрическое и магнитное поля плоской волны перпендикулярны друг к другу и одинаковы по абсолютной величине.

Поток энергии в плоской волне:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} E^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} H^2 \mathbf{n}.$$

Таким образом, поток энергии направлен вдоль направления распространения волны. Поскольку  $W = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}$  есть плотность энергии волны, то можно написать

$$\mathbf{S} = c W \mathbf{n}, \quad (69,5)$$

в согласии с тем, что поле распространяется со скоростью света.

Импульс единицы объема электромагнитного поля есть  $\mathbf{S}/c^2$ . Для плоской волны это дает  $(W/c)\mathbf{n}$ . Обратим внимание на то, что соотношение между энергией  $W$  и импульсом  $W/c$  электромагнитной волны оказывается таким же, как для частиц, движущихся со скоростью света (см. (39,12)).

Поток импульса поля дается максвелловским тензором напряжений  $\sigma_{ik}$  (58,5). Выбирая по-прежнему направление распространения волны в качестве оси  $x$ , найдем, что единственная отличная от нуля компонента

$$\sigma_{xx} = W. \quad (69,6)$$

Как и следовало, поток импульса направлен по направлению распространения волны и равен по величине плотности энергии.

### Задача

Определить силу, действующую на стенку, от которой отражается (с коэффициентом отражения  $R$ ) падающая на нее плоская электромагнитная волна.

Решение. Сила  $\mathbf{f}$ , действующая на единицу площади стенки, дается потоком импульса через эту площадь, т. е. есть вектор  $\mathbf{f}$  составляющими

$$f_i = \sigma_{ik} N_k + \sigma'_{ik} N_k,$$

где  $\mathbf{N}$  — вектор нормали к поверхности стенки, а  $\sigma_{ik}$  и  $\sigma'_{ik}$  — компоненты тензоров напряжений падающей и отраженной волн. Учитывая (69,6), получим:

$$\mathbf{f} = W\mathbf{n}(\mathbf{N}\mathbf{n}) + W'\mathbf{n}'(\mathbf{N}\mathbf{n}').$$

По определению коэффициента отражения имеем:  $W' = RW$ . Введя также угол падения  $\theta$  (и равный ему же угол отражения) и переходя к компонентам, найдем нормальную силу (*световое давление*)

$$f_N = W(1 + R)\cos^2\theta$$

и тангенциальную силу

$$f_t = W(1 - R)\sin\theta\cos\theta.$$

## § 70. Монохроматическая плоская волна

Важный частный случай электромагнитных волн представляют волны, в которых поле является простой периодической функцией времени. Такая волна называется *монохроматической*. Все величины (потенциалы, компоненты полей) в монохроматической волне зависят от времени посредством множителя вида  $\cos(\omega t + \alpha)$ , где  $\omega$  — *циклическая частота* (или просто *частота*) волны.

В плоской волне (распространяющейся вдоль оси  $x$ ) поле является функцией только от  $t - x/c$ . Поэтому если плоская волна монохроматична, то ее поле является простой периодической функцией от  $t - x/c$ . Векторный потенциал такой волны удобнее всего написать в виде вещественной части комплексного выражения

$$\mathbf{A} = \text{Re} \{ \mathbf{A}_0 e^{-i\omega(t - x/c)} \}. \quad (70,1)$$

Здесь  $\mathbf{A}_0$  — некоторый постоянный комплексный вектор. Очевидно, что и напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в такой волне будут иметь аналогичный вид с той же частотой  $\omega$ . Величина

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (70,2)$$

называется *длиной волны*; это есть период изменения поля с координатой  $x$  в заданный момент времени  $t$ .

Вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \quad (70,3)$$



(где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении распространения волны) называется *волновым вектором*. С его помощью можно представить (70,1) в виде

$$A = \operatorname{Re} \{A_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}\}, \quad (70,4)$$

не зависящем от выбора осей координат. Величину, стоящую с множителем  $i$  в показателе, называют *фазой* волны.

До тех пор, пока мы производим над величинами лишь линейные операции, можно опускать знак взятия вещественной части и оперировать с комплексными величинами как таковыми<sup>1)</sup>. Так, подставив

$$A = A_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$$

в (69,3), получим связь между напряженностями и векторным потенциалом плоской монохроматической волны в виде

$$E = ikA, \quad H = i[kA]. \quad (70,5)$$

Рассмотрим подробнее вопрос о направлении поля монохроматической волны. Будем для определенности говорить об электрическом поле

$$E = \operatorname{Re} \{E_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}\}$$

(все сказанное ниже относится, разумеется, в той же мере и к магнитному полю).  $E_0$  — комплексный вектор. Его квадрат

<sup>1)</sup> Если какие-либо две величины  $A(t)$  и  $B(t)$  пишутся в комплексном виде

$$A(t) = A_0 e^{-i\omega t}, \quad B(t) = B_0 e^{-i\omega t},$$

то при образовании их произведения надо, разумеется, сначала отделить вещественную часть. Но если, как это часто бывает, нас интересует лишь среднее (по времени) значение этого произведения, то его можно вычислить как

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{AB^*\}.$$

Действительно, имеем:

$$\operatorname{Re}A \operatorname{Re}B = \frac{1}{4} (A_0 e^{-i\omega t} + A_0^* e^{i\omega t}) (B_0 e^{-i\omega t} + B_0^* e^{i\omega t}).$$

При усреднении члены, содержащие множители  $e^{\pm 2i\omega t}$ , обращаются в нуль, так что остается

$$\overline{\operatorname{Re}A \operatorname{Re}B} = \frac{1}{4} (AB^* + A^*B) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(AB^*).$$

$E_0^2$  есть некоторое, вообще говоря, тоже комплексное число. Если аргумент этого числа есть  $-2\alpha$  (т. е.  $E_0^2 = |E_0^2| e^{-2i\alpha}$ ), то вектор  $\mathbf{b}$ , определенный согласно

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{-i\alpha}, \quad (70,6)$$

будет иметь вещественный квадрат  $\mathbf{b}^2 = |\mathbf{E}_0|^2$ . С таким определением напишем:

$$\mathbf{E} = \text{Re} \{ \mathbf{b} e^{i(kr - \omega t - \alpha)} \}. \quad (70,7)$$

Представим  $\mathbf{b}$  в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2,$$

где  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  — два вещественных вектора. Поскольку квадрат  $\mathbf{b}^2 = b_1^2 - b_2^2 + 2i\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$  должен быть вещественной величиной, то  $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0$ , т. е. векторы  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  взаимно перпендикулярны. Выберем направление  $\mathbf{b}_1$  в качестве оси  $y$  (ось  $x$  — по направлению распространения волны). Тогда из (70,7) имеем:

$$E_y = b_1 \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad E_z = \pm b_2 \sin(\omega t - kr + \alpha), \quad (70,8)$$

где знак плюс или минус имеет место в зависимости от того, направлен вектор  $\mathbf{b}_2$  в положительном или отрицательном направлении оси  $z$ . Из (70,8) следует, что

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \quad (70,9)$$

Мы видим, таким образом, что в каждой точке пространства вектор электрического поля вращается в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, причем его конец описывает эллипс (70,9). Такая волна называется *эллиптически поляризованной*. Вращение происходит в направлении по или против направления винта, ввинчиваемого вдоль оси  $x$ , соответственно при знаке плюс или минус в (70,8).

Если  $b_1 = b_2$ , то эллипс (70,9) превращается в круг, т. е. вектор  $\mathbf{E}$  вращается, оставаясь постоянным по величине. В этом случае говорят, что *волна поляризована по кругу*. Выбор направлений осей  $y$  и  $z$  при этом становится, очевидно, произвольным. Отметим, что в такой волне отношение  $y$ - и  $z$ -составляющих комплексной амплитуды  $\mathbf{E}_0$  равно

$$\frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \pm i \quad (70,10)$$

соответственно для вращения по и против направления винта (*правая и левая поляризации*)<sup>1)</sup>.

Наконец, если  $b_1$  или  $b_2$  равно нулю, то поле волны направлено везде и всегда параллельно (или антипараллельно) одному и тому же направлению. Волну называют в этом случае *линейно поляризованной* или поляризованной в плоскости. Эллиптически поляризованную волну можно рассматривать, очевидно, как наложение двух линейно поляризованных волн.

## § 71. Эффект Допплера

Вернемся к определению волнового вектора и введем четырехмерный волновой вектор с компонентами

$$k^\mu = \left( \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right). \quad (71,1)$$

Тот факт, что эти величины действительно составляют 4-вектор, очевиден хотя бы из того, что при умножении на 4-вектор  $x^\mu$  он дает скаляр — фазу волны:

$$k_\mu x^\mu = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}. \quad (71,2)$$

Из определений (70,3) и (71,1) видно, что квадрат волнового 4-вектора равен нулю:

$$k_\mu k^\mu = 0. \quad (71,3)$$

Используя закон преобразования волнового 4-вектора, легко рассмотреть так называемый *эффект Допплера* — изменение частоты волны  $\omega$ , испускаемой источником, движущимся по отношению к наблюдателю, по сравнению с «собственной» частотой  $\omega_0$  того же источника в системе отсчета ( $K_0$ ), в которой он покоится.

Пусть  $V$  — скорость источника, т. е. скорость системы отсчета  $K_0$  относительно  $K$ . Согласно общим формулам преобразования 4-векторов имеем:

$$k^{(0)0} = \frac{k^0 - \frac{V}{c} k^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

<sup>1)</sup> Подразумевается, что оси  $x, y, z$  образуют, как всегда, правовинтовую систему.

(скорость системы  $K$  относительно  $K_0$  есть  $-V$ ). Подставив сюда  $k^0 = \omega/c$ ,  $k^1 = k \cos \alpha = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол (в системе  $K$ ) между направлением испускания волны и направлением движения источника, и выражая  $\omega$  через  $\omega_0$ , получим:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \alpha}. \quad (71,4)$$

Это и есть искомая формула. При  $V \ll c$  она дает, если угол  $\alpha$  не слишком близок к  $\pi/2$ :

$$\omega \approx \omega_0 \left( 1 + \frac{V}{c} \cos \alpha \right). \quad (71,5)$$

При  $\alpha = \pi/2$  имеем:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{V^2}{2c^2} \right); \quad (71,6)$$

в этом случае относительное изменение частоты пропорционально квадрату отношения  $V/c$ .

## § 72. Спектральное разложение

Всякую волну можно подвергнуть так называемому *спектральному разложению*, т. е. представить в виде наложения монохроматических волн с различными частотами. Эти разложения имеют различный характер в зависимости от характера зависимости поля от времени.

К одной категории относятся случаи, когда разложение содержит частоты, образующие дискретный ряд значений. Простейший случай такого рода возникает при разложении чисто периодического (хотя и не монохроматического) поля. Это есть разложение в обычный ряд Фурье; оно содержит частоты, являющиеся целыми кратными «основной» частоты  $\omega_0 = 2\pi/T$ , где  $T$  — период поля. Напишем его в виде

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_0 n t} \quad (72,1)$$

( $f$  — какая-либо из величин, описывающих поле). Величины

$f_n$  определяются по самой функции  $f$  интегралами

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega_0 t} dt. \quad (72,2)$$

Ввиду вещественности функции  $f(t)$  очевидно, что

$$f_{-n} = f_n^*. \quad (72,3)$$

В более сложных случаях в разложении могут присутствовать частоты, являющиеся целыми кратными (и их суммами) нескольких различных, несоизмеримых друг с другом основных частот.

При возведении суммы (72,1) в квадрат и усреднении по времени произведения членов с различными частотами обращаются в нуль ввиду наличия в них осциллирующих множителей. Останутся лишь члены вида  $f_n f_{-n} = |f_n|^2$ . Таким образом, средний квадрат поля (средняя интенсивность волны) представится в виде суммы интенсивностей монохроматических компонент:

$$\bar{f}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \quad (72,4)$$

(подразумевается, что среднее по периоду значение самой функции  $f(t)$  равно нулю, так что  $f_0 = \bar{f} = 0$ ).

К другой категории относятся поля, разлагающиеся в интеграл Фурье, содержащий непрерывный ряд различных частот. Для этого функции  $f(t)$  должны удовлетворять определенным условиям; обычно речь идет о функциях, обращающихся в нуль при  $t = \pm \infty$ . Такое разложение имеет вид

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (72,5)$$

причем компоненты Фурье определяются по самой функции  $f(t)$  интегралами

$$f_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (72,6)$$

При этом аналогично (72,3)

$$f_{-\omega} = f_{\omega}^* \quad (72,7)$$

Вычислим интеграл от  $f^2$  по всему времени. С помощью (72,5—6) имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right\} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f e^{-i\omega t} dt \right\} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} f_{-\omega} \frac{d\omega}{2\pi}, \end{aligned}$$

или, учитывая (72,7),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (72,8)$$

Таким образом, интегральная интенсивность выражается через интенсивности компонент Фурье волны.

### § 73. Частично поляризованный свет

Всякая монохроматическая волна по самому своему определению непременно поляризована. Обычно, однако, приходится иметь дело с волнами лишь почти монохроматическими, содержащими частоты в некотором малом интервале  $\Delta\omega$ . Рассмотрим такую волну, и пусть  $\omega$  есть некоторая средняя ее частота. Тогда ее поле (будем говорить, для определенности, об электрическом поле  $\mathbf{E}$ ) в заданной точке пространства можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t) e^{-i\omega t},$$

где комплексная амплитуда  $\mathbf{E}_0(t)$  является некоторой медленно меняющейся функцией времени (у строго монохроматической волны было бы  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ ). Поскольку  $\mathbf{E}_0$  определяет поляризацию волны, то это значит, что в каждой точке волны ее поляризация меняется со временем; такую волну называют *частично поляризованной*.

Свойства поляризации электромагнитных волн, в частности света, наблюдаются экспериментально посредством пропускания исследуемого света через различные тела (например, призмы Николя) и измерения интенсивности прошедшего через тело света. С математической точки зрения это означает, что о свойствах поляризации света делаются заключе-

ния, исходя из значений некоторых квадратичных функций его поля. При этом, разумеется, идет речь о средних по времени значениях этих функций.

Квадратичная функция поля состоит из членов, пропорциональных произведениям  $E_i E_k$ ,  $E_i^* E_k^*$  или  $E_i E_k^*$ . Произведения вида

$$E_i E_k = E_{0i} E_{0k} e^{-2i\omega t}, \quad E_i^* E_k^* = E_{0i}^* E_{0k}^* e^{2i\omega t},$$

содержащие быстро осциллирующие множители  $e^{\pm 2i\omega t}$ , при усреднении по времени дают нуль. Произведения же  $E_i E_k^* = E_{0i} E_{0k}^*$  такого множителя не содержат, и потому их средние значения отличны от нуля. Таким образом, мы видим, что свойства частично поляризованного света вполне характеризуются тензором

$$J_{ik} = \overline{E_{0i} E_{0k}^*}. \quad (73,1)$$

Поскольку вектор  $E_0$  всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к направлению волны, то тензор  $J_{ik}$  имеет всего четыре компоненты (в этом параграфе индексы  $i, k$  подразумеваются пробегающими всего два значения:  $i, k = 1, 2$ , отвечающих осям  $y$  и  $z$ ; ось  $x$  — вдоль направления распространения волны).

Сумма диагональных компонент тензора  $J_{ik}$  (обозначим ее через  $J$ ) есть вещественная величина — среднее значение квадрата модуля вектора  $E_0$ :

$$J \equiv J_{ii} = \overline{E_0 E_0^*}. \quad (73,2)$$

Этой величиной определяется интенсивность волны, измеряемая плотностью потока энергии в ней. Для того чтобы исключить эту величину, не имеющую прямого отношения к поляризационным свойствам, введем вместо  $J_{ik}$  тензор

$$\rho_{ik} = \frac{J_{ik}}{J}, \quad (73,3)$$

для которого  $\rho_{ii} = 1$ ; будем называть его *поляризационным тензором*.

Из определения (73,1) видно, что компоненты тензора  $J_{ik}$ , а с ним и  $\rho_{ik}$ , связаны соотношениями

$$\rho_{ik} = \rho_{ki}^* \quad (73,4)$$

(т. е. тензор, как говорят, *эрмитов*). В силу этих соотношений диагональные компоненты  $\rho_{11}$  и  $\rho_{22}$  вещественны (причем  $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$ ), а  $\rho_{21} = \rho_{12}^*$ . Всего, следовательно, поляризационный тензор характеризуется тремя вещественными параметрами.

Выясним условия, которым должен удовлетворять тензор  $\rho_{ik}$  для вполне поляризованного света. В этом случае  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ , и поэтому имеем просто

$$J_{ik} = J\rho_{ik} = E_{0i}E_{0k}^* \quad (73,5)$$

(без усреднения), т. е. компоненты тензора могут быть представлены в виде произведений компонент некоторого постоянного вектора. Необходимое и достаточное условие для этого выражается равенством нулю определителя

$$|\rho_{ik}| = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} = 0. \quad (73,6)$$

Противоположным случаем является неполяризованный, или *естественный*, свет. Полное отсутствие поляризации означает, что все направления (в плоскости  $yz$ ) вполне эквивалентны. Другими словами, поляризационный тензор должен иметь вид:

$$\rho_{ik} = \frac{1}{2} \delta_{ik}. \quad (73,7)$$

При этом определитель  $|\rho_{ik}| = 1/4$ .

Произвольный тензор  $\rho_{ik}$  может быть разложен на две части — симметричную (по индексам  $i, k$ ) и антисимметричную. Рассмотрим частный случай, когда последняя часть отсутствует. В силу (73,4) симметричный тензор  $\rho_{ik}$  в то же время и веществен ( $\rho_{ik} = \rho_{ik}^*$ ). Как и всякий симметричный тензор, он может быть приведен к главным осям с двумя различными главными значениями, которые мы обозначим через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Направления главных осей взаимно перпендикулярны. Обозначая через  $\mathbf{n}^{(1)}$  и  $\mathbf{n}^{(2)}$  орты (единичные векторы) этих направлений, можно представить  $\rho_{ik}$  в виде

$$\rho_{ik} = \lambda_1 n_i^{(1)} n_k^{(1)} + \lambda_2 n_i^{(2)} n_k^{(2)}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \quad (73,8)$$

Величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  положительны и пробегают значения от 0 до 1.

Каждый из двух членов в (73,8) имеет вид произведения двух компонент постоянного вещественного вектора ( $\sqrt{\lambda_1} \mathbf{n}^{(1)}$ )



или  $\sqrt{\lambda_2} \mathbf{n}^{(2)}$ ). Другими словами, каждый из этих членов соответствует линейно поляризованному свету. Далее мы видим, что в (73,8) нет члена, содержащего произведения компонент этих двух волн. Это означает, что обе части можно рассматривать как физически независимые друг от друга, или, как говорят, *некогерентные*. Действительно, если две волны независимы друг от друга, то среднее значение произведения  $E_i^{(1)} E_k^{(2)}$  равно произведению средних значений каждого из множителей, и поскольку каждое из последних равно нулю, то и

$$\overline{E_i^{(1)} E_k^{(2)}} = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае частично поляризованную волну можно представить как наложение двух некогерентных волн (с интенсивностями, пропорциональными  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ), линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. (В общем же случае комплексного тензора  $\rho_{ik}$  можно показать, что свет может быть представлен как наложение двух некогерентных эллиптически поляризованных волн, эллипсы поляризации которых подобны и взаимно перпендикулярны.)

## § 74. Геометрическая оптика

Плоская волна отличается тем свойством, что направление ее распространения и амплитуда везде одинаковы. Произвольные электромагнитные волны этим свойством, конечно, не обладают.

Однако часто электромагнитные волны, не являющиеся плоскими, тем не менее таковы, что их можно рассматривать как плоские в каждом небольшом участке пространства. Для этого необходимо, чтобы амплитуда и направление волны почти не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны.

Если выполнено это условие, то можно ввести так называемые *волновые поверхности*, во всех точках которых фаза волны в данный момент времени одинакова (для плоской волны это — плоскости, перпендикулярные к направлению ее распространения). В каждом небольшом участке пространства можно говорить о направлении распространения волны, нормальном к волновой поверхности. При этом можно

ввести понятие *лучей* — линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением распространения волны.

Изучение законов распространения волн в этом случае составляет предмет *геометрической оптики*. Геометрическая оптика рассматривает, следовательно, распространение электромагнитных волн, в частности света, как распространение лучей, совершенно отвлекаясь при этом от их волновой природы. Другими словами, геометрическая оптика соответствует предельному случаю малых длин волн,  $\lambda \rightarrow 0$ .

Займемся теперь выводом основного уравнения геометрической оптики — уравнения, определяющего направление лучей. Пусть  $f$  есть любая величина, описывающая поле волны (любая из компонент  $E$  или  $H$ ). В плоской монохроматической волне  $f$  имеет вид

$$f = ae^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha)} \quad (74,1)$$

(мы опускаем знак  $\text{Re}$ ; везде подразумевается вещественная часть).

Напишем выражение для поля в виде

$$f = ae^{i\psi}. \quad (74,2)$$

В случае, когда волна не плоская, но геометрическая оптика применима, амплитуда  $a$  является, вообще говоря, функцией координат и времени, а фаза  $\psi$  (называемая также *эйконалом*) не имеет простого вида, как в (74,1). Существенно, однако, что эйконал  $\psi$  является большой величиной. Это видно уже из того, что он меняется на  $2\pi$  на протяжении длины волны, а геометрическая оптика соответствует пределу  $\lambda \rightarrow 0$ .

В малых участках пространства и интервалах времени эйконал  $\psi$  можно разложить в ряд; с точностью до членов первого порядка имеем:

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + t \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

(начало координат и начало отсчета времени выбраны в рассматриваемых участке пространства и интервале времени; значения производных берутся в начале координат). Сравнивая это выражение с (74,1), мы можем написать:

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \equiv \text{grad } \psi, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (74,3)$$

в соответствии с тем, что в каждом небольшом участке пространства (и в небольших интервалах времени) волну можно рассматривать как плоскую.

По определению волнового вектора, имеем  $\mathbf{k}^2 = \omega^2/c^2$ . Подставив сюда  $\mathbf{k}$  и  $\omega$  из (74,3), получим:

$$(\nabla\psi)^2 = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2. \quad (74,4)$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка называется *уравнением эйконала* и является основным уравнением геометрической оптики.

Уравнение (74,4) можно вывести также и непосредственным предельным переходом  $\lambda \rightarrow 0$  в волновом уравнении. Поле  $f$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (74,5)$$

Для функции вида (74,2) имеем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} e^{i\psi} + 2i \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} e^{i\psi} + if \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 f.$$

Но эйконал  $\psi$  в геометрической оптике — большая величина. Поэтому можно пренебречь здесь тремя первыми членами по сравнению с четвертым и тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \approx - \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 f.$$

Аналогичным образом найдем:

$$\Delta f \approx - (\nabla\psi)^2 f,$$

и подстановка в (74,5) дает уравнение (74,4).

Из вида уравнения эйконала вытекает замечательная аналогия между геометрической оптикой и механикой материальных частиц. В механике уравнение движения частицы может быть представлено в виде уравнения Гамильтона—Якоби для действия  $S$  (§ 31). Это уравнение, как и уравнение эйконала, является уравнением в частных производных первого порядка. При этом действие  $S$  связано с импульсом  $\mathbf{p}$  и функцией Гамильтона  $\mathcal{H}$  частицы соотношениями

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathcal{H} = - \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Сравнивая эти формулы с формулами (74,3), мы видим, что волновой вектор волны играет в геометрической оптике роль импульса частицы в механике, а частота — роль функции Гамильтона, т. е. энергии частицы. Абсолютная величина волнового вектора связана с частотой формулой  $k = \omega/c$ . Это соотношение аналогично соотношению  $p = \mathcal{E}/c$  между импульсом и энергией частицы с массой, равной нулю, и скоростью, равной скорости света.

Для частиц имеют место уравнения Гамильтона

$$\dot{\mathbf{r}} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}.$$

Ввиду указанной аналогии мы можем непосредственно написать подобные уравнения для лучей

$$\dot{\mathbf{k}} = - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (74,6)$$

В пустоте  $\omega = ck$ , так что  $\dot{\mathbf{k}} = 0$ ,  $\mathbf{v} = c\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль направления распространения), т. е., как и следовало, в пустоте лучи являются прямыми линиями, вдоль которых свет распространяется со скоростью  $c$ <sup>1)</sup>.

## § 75. Пределы геометрической оптики

По определению плоской монохроматической волны ее амплитуда везде и всегда одинакова. Такая волна бесконечна по всем направлениям в пространстве и существует на протяжении всего времени от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Всякая же волна с не везде и не всегда постоянной амплитудой может быть лишь более или менее монохроматической. Мы займемся теперь выяснением вопроса о *степени немонахроматичности* волн.

Рассмотрим электромагнитную волну с амплитудой, являющейся в каждой точке пространства функцией времени. Пусть  $\omega_0$  — некоторая средняя частота волны. Тогда поле

<sup>1)</sup> Хотя в применении к распространению света в пустоте написанные уравнения приводят к заранее очевидным результатам, но существенно, что в своей общей форме эти выводы применимы и к распространению света в материальных средах. Именно в этом случае возникает аналогия с движением частиц во внешнем силовом поле.

волны (например, электрическое) в данной точке имеет вид  $E_0(t) e^{-i\omega_0 t}$ . Это поле, не являющееся само монохроматическим, можно, однако, разложить на монохроматические компоненты, т. е. в интеграл Фурье. Амплитуда компоненты этого разложения с частотой  $\omega$  пропорциональна интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt.$$

Множитель  $e^{i(\omega - \omega_0)t}$  является периодической функцией, среднее значение которой равно нулю. Если бы  $E_0$  было вообще постоянным, то интеграл был бы в точности равен нулю при всех  $\omega \neq \omega_0$ . Если же  $E_0(t)$  переменное, но почти не меняется на протяжении промежутков времени порядка  $1/|\omega - \omega_0|$ , то интеграл почти равен нулю, — тем точнее, чем медленнее меняется  $E_0$ . Для того чтобы интеграл был заметно отличен от нуля, необходимо, чтобы  $E_0(t)$  заметно менялось на протяжении промежутка времени порядка  $1/|\omega - \omega_0|$ .

Обозначим посредством  $\Delta t$  порядок величины промежутка времени, в течение которого амплитуда волны в данной точке пространства заметно меняется. Из приведенных соображений следует теперь, что наиболее отличающиеся от  $\omega_0$  частоты, входящие в спектральное разложение этой волны с заметными интенсивностями, определяются из условия  $1/|\omega - \omega_0| \sim \Delta t$ . Если обозначить посредством  $\Delta \omega$  интервал частот (вокруг средней частоты  $\omega_0$ ) в спектральном разложении, то, следовательно, имеет место соотношение

$$\Delta \omega \Delta t \sim 1. \quad (75,1)$$

Мы видим, что действительно волна тем более монохроматична (т. е.  $\Delta \omega$  тем меньше), чем больше  $\Delta t$ , т. е. чем медленнее меняется в каждой точке пространства ее амплитуда.

Соотношения, аналогичные (75,1), легко вывести и для волнового вектора. Пусть  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  — порядки величин расстояний вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , на которых заметно меняется амплитуда волны. В данный момент времени поле волны как функция от координат имеет вид

$$E_0(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}},$$

где  $\mathbf{k}_0$  — некоторое среднее значение волнового вектора. Совершенно аналогично выводу (75,1) можно найти интервал  $\Delta \mathbf{k}$

значений, имеющих в разложении рассматриваемой волны в пространственный интеграл Фурье:

$$\Delta k_x \Delta x \sim 1, \quad \Delta k_y \Delta y \sim 1, \quad \Delta k_z \Delta z \sim 1. \quad (75,2)$$

Рассмотрим, в частности, волну, излучавшуюся в течение некоторого конечного интервала времени. Обозначим посредством  $\Delta t$  порядок величины этого интервала. Амплитуда в данной точке пространства во всяком случае заметно изменится за время  $\Delta t$ , в течение которого волна успеет целиком пройти через эту точку. На основании соотношения (75,1) мы можем теперь сказать, что «степень некогерентности» такой волны  $\Delta\omega$  во всяком случае не может быть меньше, чем  $1/\Delta t$  (но может, конечно, быть и больше):

$$\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}. \quad (75,3)$$

Аналогично, если  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  — порядки величины размеров волны в пространстве, то для интервалов значений компонент волнового вектора, входящих в разложение волны, находим:

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}. \quad (75,4)$$

Из этих формул следует, что если мы имеем пучок света конечной ширины, то направление распространения света в таком пучке не может быть строго постоянным. Направляя ось  $x$  по среднему направлению света в пучке, мы получаем:

$$\theta_y \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \quad (75,5)$$

где  $\theta_y$  — порядок величины отклонения пучка от среднего направления в плоскости  $xy$ , а  $\lambda$  — длина волны.

С другой стороны, формула (75,5) дает ответ на вопрос о предельной резкости оптических изображений. Пучок света, все лучи которого согласно геометрической оптике должны были бы пересечься в одной точке, в действительности дает изображение не в виде точки, а в виде некоторого пятна. Для ширины  $\Delta$  этого пятна имеем согласно (75,5)

$$\Delta \sim \frac{1}{k\theta} \sim \frac{\lambda}{\theta}, \quad (75,6)$$

где  $\theta$  — угол раствора пучка. Эту формулу можно применить не только к изображению, но и к предмету. Именно, можно утверждать, что при наблюдении исходящего из светящейся точки пучка света эту точку нельзя отличить от тела размера  $\lambda/\theta$ . Соответственно этому формула (75,6) определяет предельную разрешающую силу микроскопа. Минимальное значение  $\Delta$ , достигающееся при  $\theta \sim 1$ , есть  $\lambda$ , в полном согласии с тем, что пределы геометрической оптики определяются длиной волны света.

### Задача

Найти порядок величины наименьшей ширины светового пучка, получающегося от параллельного пучка света на расстоянии  $l$  от диафрагмы.

Решение. Обозначив размер отверстия диафрагмы через  $d$ , имеем из (75,5) для угла отклонения лучей («угла дифракции») значение  $\sim \lambda/d$ , откуда ширина пучка порядка  $d + \frac{\lambda}{d} l$ . Наименьшее значение этой величины  $\sim \sqrt{\lambda l}$ .

## § 76. Собственные колебания поля

Рассмотрим свободное (без зарядов) электромагнитное поле, находящееся в некотором конечном объеме пространства. Для упрощения дальнейших вычислений предположим, что этот объем обладает формой прямоугольного параллелепипеда со сторонами, равными соответственно  $A, B, C$ . Мы можем тогда разложить все величины, характеризующие поле в этом параллелепипеде, в тройной ряд Фурье (по трем координатам). Напишем это разложение (например, для векторного потенциала) в виде:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}), \quad (76,1)$$

явным образом выражающем вещественность  $\mathbf{A}$ . Суммирование производится здесь по всем возможным значениям вектора  $\mathbf{k}$ , компоненты которого пробегают, как известно, значения

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{C}, \quad (76,2)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  — положительные и отрицательные целые числа. Из уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  следует, что для каждого  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{k} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0, \quad (76,3)$$

т. е. комплексные векторы  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$  ортогональны к соответствующим волновым векторам. Векторы  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$  являются, конечно, функциями времени; они удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} + c^2 k^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (76,4)$$

Если размеры  $A, B, C$  выбранного объема достаточно велики, то соседние значения  $k_x, k_y, k_z$  (у которых  $n_x, n_y, n_z$  отличаются на единицу) очень близки друг к другу. Мы можем говорить тогда о числе возможных значений  $k_x, k_y, k_z$  в небольших интервалах  $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$ .

Поскольку соседние значения, скажем  $k_x$ , соответствуют значениям  $n_x$ , отличающимся на единицу, то число  $\Delta n_x$  возможных значений  $k_x$  в интервале  $\Delta k_x$  равно просто соответствующему интервалу значений  $n_x$ . Таким образом, мы находим:

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi} \Delta k_x, \quad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi} \Delta k_y, \quad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi} \Delta k_z.$$

Полное число  $\Delta n$  возможных значений вектора  $\mathbf{k}$  с компонентами в интервалах  $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$  равно произведению  $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$ , т. е.

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z, \quad (76,5)$$

где  $V = ABC$  есть объем поля.

Легко определить отсюда число возможных значений волнового вектора с абсолютной величиной в интервале  $\Delta k$  и направлением в элементе телесного угла  $\Delta \omega$ . Для этого надо только перейти к сферическим координатам в « $k$ -пространстве» и написать вместо  $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$  элемент объема в этих координатах. Таким образом,

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \Delta k \Delta \omega. \quad (76,6)$$

Наконец, полное число значений волнового вектора с абсолютными величинами  $k$  в интервале  $\Delta k$  и всеми направлениями равно (пишем  $4\pi$  вместо  $\Delta \omega$ )

$$\Delta n = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \Delta k. \quad (76,7)$$



Векторы  $\mathbf{a}_k$  как функции времени сводятся к простым периодическим функциям с частотами  $\omega_k = ck$  (ср. (76,4)). Представим разложение поля в таком виде, чтобы оно являлось разложением на бегущие плоские волны. Для этого будем считать, что каждое из  $\mathbf{a}_k$  зависит от времени посредством множителя  $e^{-i\omega_k t}$ :

$$\mathbf{a}_k \sim e^{-i\omega_k t}, \quad \omega_k = ck. \quad (76,8)$$

Тогда каждый отдельный член в сумме (76,1) будет функцией только от разности  $\mathbf{kr} - \omega_k t$ , что соответствует волне, распространяющейся в направлении вектора  $\mathbf{k}$ .

Вычислим полную энергию

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) dV$$

рассматриваемого поля в объеме  $V$ , выразив ее через величины  $\mathbf{a}_k$ . Для электрического поля имеем:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}} (\dot{\mathbf{a}}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{a}}_k^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}),$$

или, принимая во внимание (76,8):

$$\mathbf{E} = i \sum_{\mathbf{k}} k (\mathbf{a}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \mathbf{a}_k^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}). \quad (76,9)$$

Для магнитного поля  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  находим:

$$\mathbf{H} = i \sum_{\mathbf{k}} ([\mathbf{k}\mathbf{a}_k] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - [\mathbf{k}\mathbf{a}_k^*] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}). \quad (76,10)$$

При вычислении квадратов этих сумм надо иметь в виду, что все произведения членов с волновыми векторами  $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$  дают нуль при интегрировании по всему объему. Действительно, такие члены содержат множители вида  $e^{\pm i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{k} \pm \mathbf{k}'$ , а интеграл, например,

$$\int_0^A e^{i \frac{2\pi}{A} n_x x} dx$$

с целым отличным от нуля  $n_x$  равен нулю. В членах же, в которых экспоненциальные множители выпадают, интегрирование по  $dV$  дает просто объем  $V$ .

В результате найдем:

$$\mathcal{E} = \frac{V}{4\pi} \sum_{\mathbf{k}} \{k^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* + [\mathbf{k} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}] [\mathbf{k} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*]\}.$$

Но ввиду того, что  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} = 0$ , имеем:

$$[\mathbf{k} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}] [\mathbf{k} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*] = k^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*,$$

и мы получаем окончательно:

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}, \quad \mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \frac{k^2 V}{2\pi} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*. \quad (76,11)$$

Таким образом, полная энергия поля выражается в виде суммы энергий  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ , связанных с каждой из плоских волн в отдельности.

Аналогичным образом можно вычислить полный импульс поля

$$\frac{1}{c^2} \int \mathbf{S} dV = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E} \mathbf{H}] dV,$$

причем получается

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{c}. \quad (76,12)$$

Этот результат можно было ожидать заранее ввиду известного соотношения между энергией и импульсом плоских волн (см. § 69).

Разложением (76,1) достигается описание поля посредством дискретного ряда переменных (векторы  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ ) вместо описания непрерывным рядом переменных, каковым по существу является описание потенциалом  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ , задающимся во всех точках пространства. Мы произведем теперь преобразование переменных  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ , в результате которого окажется возможным придать уравнениям поля вид, аналогичный каноническим уравнениям (уравнениям Гамильтона) механики.

Введем вещественные «канонические переменные»  $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$  согласно соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} &= \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*), \\ \mathbf{P}_{\mathbf{k}} &= -i\omega_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (76,13)$$

Функция Гамильтона поля получается подстановкой этих выражений в энергию (76,11)

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{H}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (P_{\mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}}^2). \quad (76,14)$$

При этом уравнения Гамильтона  $\partial \mathcal{H} / \partial P_{\mathbf{k}} = \dot{Q}_{\mathbf{k}}$  совпадают с равенствами  $P_{\mathbf{k}} = \dot{Q}_{\mathbf{k}}$ , которые, таким образом, действительно оказываются следствием уравнений движения (это достигнуто надлежащим выбором коэффициента в преобразовании (76,13)). Уравнения же  $\partial \mathcal{H} / \partial Q_{\mathbf{k}} = -\dot{P}_{\mathbf{k}}$  приводят к уравнениям

$$\ddot{Q}_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}} = 0, \quad (76,15)$$

т. е. тождественны с уравнениями поля.

Каждый из векторов  $Q_{\mathbf{k}}$  и  $P_{\mathbf{k}}$  перпендикулярен к волновому вектору  $\mathbf{k}$ , т. е. имеет по две независимые компоненты. Направление этих векторов определяет направление поляризации соответствующей бегущей волны. Обозначив две компоненты вектора  $Q_{\mathbf{k}}$  (в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{k}$ ) посредством  $Q_{\mathbf{k}j}$ ,  $j = 1, 2$ , имеем  $Q_{\mathbf{k}}^2 = \sum_j Q_{\mathbf{k}j}^2$ , и аналогично для  $P_{\mathbf{k}}$ . Тогда

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}j} \mathcal{H}_{\mathbf{k}j}, \quad \mathcal{H}_{\mathbf{k}j} = \frac{1}{2} (P_{\mathbf{k}j}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}j}^2). \quad (76,16)$$

Мы видим, что функция Гамильтона распадается на сумму независимых членов, каждый из которых содержит только по одной паре величин  $Q_{\mathbf{k}j}$ ,  $P_{\mathbf{k}j}$ . Каждый такой член соответствует бегущей волне с определенными волновым вектором и поляризацией. При этом  $\mathcal{H}_{\mathbf{k}j}$  имеет вид функции Гамильтона одномерного «осциллятора», совершающего простые гармонические колебания. Поэтому о полученном разложении говорят иногда как о разложении поля на *осцилляторы*.

## Глава XIV

### ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

#### § 77. Запаздывающие потенциалы

Выведем уравнения, определяющие потенциалы поля, создаваемого движущимися зарядами. Для этого повторим произведенный в § 68 вывод, не полагая, однако, при этом плотность зарядов и ток равными нулю.

Подставив определения

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (77,1)$$

в уравнение

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

получим:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (77,2)$$

(в последнем члене справа переставлены операции grad и  $\partial/\partial t$ ).

В качестве дополнительного условия, налагаемого на потенциалы, выберем теперь равенство

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0; \quad (77,3)$$

это условие называют лоренцевым, а об удовлетворяющих ему потенциалах говорят как о потенциалах в *лоренцевой калибровке*<sup>1)</sup>. Тогда последние члены в обоих сторонах уравнения

<sup>1)</sup> Условие (77,3) является более общим, чем использованные в § 68 условия  $\varphi = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ ; потенциалы, удовлетворяющие этим последним, удовлетворяют также и условию (77,3). В отличие от них,

(77,2) взаимно сокращаются и мы приходим к уравнению

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (77,4)$$

Аналогичным образом, подставив (77,1) в уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ , получим:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta\varphi = 4\pi\rho,$$

или, выразив  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  из условия (77,3):

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \quad (77,5)$$

Уравнения (77,4 — 5) и являются искомыми уравнениями. Для постоянного поля они сводятся к уже известным нам уравнениям (59,4) и (65,4), а для переменного поля без зарядов — к однородным волновым уравнениям.

Решение неоднородных линейных уравнений (77,4 — 5) может быть представлено, как известно, в виде суммы решения этих же уравнений без правой части и частного интеграла уравнений с правой частью. Для нахождения этого частного интеграла разделим все пространство на бесконечно малые участки и определим поле, создаваемое зарядом, находящимся в одном из таких элементов объема. Вследствие линейности уравнений истинное поле будет равно сумме полей, создаваемых всеми такими элементами.

Заряд  $de$  в заданном элементе объема является, вообще говоря, функцией от времени. Если выбрать начало координат в рассматриваемом элементе объема, то плотность заряда  $\rho = de(t) \delta(\mathbf{R})$ , где  $\mathbf{R}$  — расстояние от начала координат. Таким образом, нам надо решить уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi de(t) \delta(\mathbf{R}). \quad (77,6)$$

однако, условие Лоренца имеет инвариантный характер: потенциалы, удовлетворяющие этому условию в одной системе отсчета, удовлетворяют ему и во всякой другой системе. Это видно из того, что условие (77,3) может быть записано в четырехмерно-инвариантном виде

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0.$$

Везде, кроме начала координат,  $\delta(\mathbf{R}) = 0$ , и мы имеем уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (77,7)$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае  $\varphi$  обладает центральной симметрией, т. е. является функцией только от  $R$ . Поэтому, если написать оператор Лапласа в сферических координатах, то (77,7) приобретет вид:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Для решения этого уравнения сделаем подстановку  $\varphi = \chi(R, t)/R$ . Тогда для  $\chi$  получим:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

Но это есть уравнение плоских волн, решение которого имеет вид:

$$\chi = f_1 \left( t - \frac{R}{c} \right) + f_2 \left( t + \frac{R}{c} \right).$$

Поскольку мы ищем только частный интеграл уравнения, то достаточно взять только одну из функций  $f_1$  и  $f_2$ . Обычно бывает удобным выбирать  $f_2 = 0$  (см. об этом ниже). Тогда потенциал  $\varphi$  везде, кроме начала координат, имеет вид:

$$\varphi = \frac{\chi \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R}. \quad (77,8)$$

Функция  $\chi$  в этом равенстве пока произвольна; выберем ее теперь так, чтобы получить верное значение для потенциала также и в начале координат. Иначе говоря, мы должны подобрать  $\chi$  так, чтобы в начале координат удовлетворялось уравнение (77,6). Это легко сделать, заметив, что при  $R \rightarrow 0$  сам потенциал стремится к бесконечности, а потому его производные по координатам растут быстрее, чем производные по времени. Следовательно, при  $R \rightarrow 0$  в уравнении (77,6) можно пренебречь членом  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$  по сравнению с  $\Delta\varphi$ . Тогда оно переходит в известное уже нам уравнение (59,10), приводящее к закону Кулона. Таким образом, вблизи начала координат формула

(77,8) должна переходить в закон Кулона, откуда следует, что  $\chi(t) = de(t)$ , т. е.

$$\varphi = \frac{de \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R}.$$

Отсюда легко перейти к решению уравнения (77,5) для произвольного распределения зарядов  $\rho(x, y, z, t)$ . Для этого достаточно написать  $de = \rho dV$  ( $dV$  — элемент объема) и проинтегрировать по всему пространству. К полученному таким образом решению неоднородного уравнения (77,5) можно прибавить еще решение  $\varphi_0$  этого же уравнения без правой части. Таким образом, общее решение имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{R} \rho \left( \mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) dV' + \varphi_0, \\ \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad dV' = dx' dy' dz', \quad (77,9)$$

где  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ ;  $R$  есть расстояние от элемента объема  $dV$  до «точки наблюдения», в которой мы ищем значение потенциала. Мы будем писать это выражение коротко в виде:

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV + \varphi_0, \quad (77,10)$$

где индекс показывает, что значение  $\rho$  надо брать в момент времени  $t - R/c$ , а штрих у  $dV$  опущен.

Аналогичным образом имеем для векторного потенциала:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R} dV + \mathbf{A}_0, \quad (77,11)$$

где  $\mathbf{A}_0$  — решение уравнения (77,4) без правой части.

Выражения (77,10—11) (без  $\varphi_0$  и  $\mathbf{A}_0$ ) называются *запаздывающими потенциалами*.

В случае неподвижных зарядов (т. е. не зависящей от времени плотности  $\rho$ ) формула (77,10) переходит в известную уже нам формулу (59,9) для потенциала электростатического поля; формула же (77,11) в случае стационарного движения зарядов переходит (после усреднения) в формулу (65,5) для векторного потенциала постоянного магнитного поля.

Величины  $\varphi_0$  и  $\mathbf{A}_0$  в (77,10—11) определяются так, чтобы удовлетворить условиям задачи. Для этого, очевидно, было бы

достаточно задать начальные условия, т. е. поле в начальный момент времени. Однако с такими начальными условиями обычно не приходится иметь дела. Вместо этого задаются условия на больших расстояниях от системы зарядов в течение всего времени. Именно, задается падающее на систему внешнее излучение. Соответственно этому поле, возникающее в результате взаимодействия этого излучения с системой, может отличаться от внешнего поля только излучением, исходящим от системы. Такое исходящее от системы излучение на больших расстояниях должно иметь вид волны, распространяющейся по направлению от системы, т. е. в направлении возрастающих  $R$ . Но этому условию удовлетворяют именно запаздывающие потенциалы. Таким образом, последние изображают собой поле, исходящее от системы, а  $\varphi_0$  и  $A_0$  надо отождествить с внешним полем, действующим на систему.

### § 78. Потенциалы Лиенара — Вихерта

Определим потенциалы поля, создаваемого одним точечным зарядом, совершающим заданное движение по траектории  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$ .

Согласно формулам запаздывающих потенциалов поле в точке наблюдения  $P(x, y, z)$  в момент времени  $t$  определяется состоянием движения заряда в предшествующий момент времени  $t'$ , для которого время распространения светового сигнала из точки нахождения заряда  $\mathbf{r}_0(t')$  в точку наблюдения  $P$  как раз совпадает с разностью  $t - t'$ . Пусть  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$  — радиус-вектор от заряда  $e$  в точку  $P$ ; вместе с  $\mathbf{r}_0(t)$  он является заданной функцией времени. Тогда момент  $t'$  определяется уравнением

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t. \quad (78,1)$$

В системе отсчета, в которой в момент времени  $t'$  частица покоится, поле в точке наблюдения в момент  $t$  дается просто кулоновским потенциалом, т. е.

$$\varphi = \frac{e}{R(t')}, \quad \mathbf{A} = 0. \quad (78,2)$$

Выражения для потенциалов в произвольной системе отсчета мы получим теперь, написав такой 4-вектор, который бы



при скорости  $\mathbf{v} = 0$  давал для  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  значения (78,2). Замечая, что согласно (78,1)  $\varphi$  из (78,2) можно написать также и в виде

$$\varphi = \frac{e}{c(t-t')},$$

находим, что искомый 4-вектор есть

$$A^\mu = e \frac{u^\mu}{(R, u^\nu)}. \quad (78,3)$$

Здесь  $u^\mu$  — 4-скорость заряда, а  $R^\nu$  — 4-вектор с составляющими

$$R^\nu = (c(t-t'), \mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

причем  $t', x', y', z'$  связаны друг с другом соотношением (78,1). Последнее имеет инвариантный характер, поскольку оно может быть записано в инвариантном виде

$$R, R^\nu = 0. \quad (78,4)$$

Раскрывая теперь в трехмерных обозначениях смысл компонент 4-вектора (78,3) в произвольной системе отсчета, получим для потенциалов поля, создаваемого произвольно движущимся точечным зарядом, следующие выражения:

$$\varphi = \frac{e}{\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \quad (78,5)$$

где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда в точку наблюдения  $P$ , и все величины в правых частях равенств должны быть взяты в момент времени  $t'$ , определяющийся из (78,1). Потенциалы поля в виде (78,5) называются *потенциалами Лиенара — Вихерта*.

Для вычисления напряженностей электрического и магнитного полей по формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

надо дифференцировать  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  по координатам  $x, y, z$  точки и моменту  $t$  наблюдения. Между тем формулы (78,5) выражают потенциалы как функции от  $t'$  и лишь через соотношение (78,1) — как неявные функции от  $x, y, z, t$ . Поэтому для вычисления искомых производных надо предварительно вычислить производные от  $t'$ .

Дифференцируя равенство  $R(t') = c(t - t')$  один раз по  $t$ , а другой раз по  $r$ , имеем:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left( 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right), \quad (78,6)$$

$$\text{grad } R \equiv \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial R}{\partial t'} \text{grad } t' + \frac{\partial R}{\partial r} = -c \text{grad } t'.$$

Производную  $\partial R / \partial t'$  найдем дифференцированием тождества  $R^2 = \mathbf{R}^2$  и подстановкой  $\partial \mathbf{R} / \partial t' = -\mathbf{v}(t')$  (знак минус связан с тем, что  $\mathbf{R}$  есть радиус-вектор от заряда  $e$  в точку  $P$ , скорость же есть производная по времени от координат заряда); отсюда

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{R}.$$

Производная же

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Подставив эти значения в равенства (78,6), найдем из них

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{cR}}, \quad \text{grad } t' = -\frac{\mathbf{R}}{c \left( R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c} \right)}. \quad (78,7)$$

С помощью этих формул не представляет труда вычислить поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Опуская промежуточные вычисления, приведем получающийся результат:

$$\mathbf{E} = e \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left( R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c} \right)^3} \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) + \frac{e}{c^2 \left( R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c} \right)^3} \left[ \mathbf{R} \left[ \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) \dot{\mathbf{v}} \right] \right], \quad (78,8)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R} [\mathbf{R}\mathbf{E}]. \quad (78,9)$$

Здесь  $\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt'$ ; все величины в правых сторонах равенства берутся в момент  $t'$ . Интересно отметить, что магнитное поле оказывается везде перпендикулярным к электрическому.

Электрическое поле (78,8) состоит из двух частей различного характера. Первый член зависит только от скорости частицы (но не от ее ускорения) и на больших расстояниях

меняется как  $1/R^2$ . Второй член зависит от ускорения, а при больших  $R$  меняется как  $1/R$ . Мы увидим ниже, что именно этот последний член связан с излучаемыми частицей электромагнитными волнами.

Что касается первого члена, то, будучи независимым от ускорения, он должен соответствовать полю, создаваемому равномерно движущимся зарядом. Действительно, можно показать (на чем мы не будем здесь останавливаться), что поле, определяемое этим членом, тождественно с полем (61,5).

### § 79. Поле системы зарядов на далеких расстояниях

Рассмотрим поле, создаваемое системой движущихся зарядов на расстояниях, больших по сравнению с ее собственными размерами.

Выберем начало координат  $O$  где-либо внутри системы зарядов. Радиус-вектор из  $O$  в точку наблюдения поля  $P$  обозначим посредством  $\mathbf{R}_0$ , а единичный вектор в этом направлении — через  $\mathbf{n}$ . Радиус-вектор элемента заряда  $de = \rho dV$  пусть будет  $\mathbf{r}$ , а радиус-вектор от  $de$  в точку  $P$  обозначим как  $\mathbf{R}$ ; очевидно, что  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$ .

На больших расстояниях от системы  $R_0 \gg r$  и приближенно имеем:

$$R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| \approx R_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}.$$

Подставим это в формулы запаздывающих потенциалов (77,10 — 11). В знаменателе подынтегральных выражений можно пренебречь  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$  по сравнению с  $R_0$ . В аргументе же  $t - R/c$  этого пренебрежения, вообще говоря, сделать нельзя; возможность такого пренебрежения определяется здесь не относительной величиной  $R_0/c$  и  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/c$ , а тем, насколько меняются сами  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  за время  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/c$ . Учитывая, что при интегрировании  $R_0$  является постоянной и потому может быть вынесено за знак интеграла, находим для потенциалов поля на большом расстоянии от системы зарядов следующие выражения:

$$\varphi = \frac{1}{R_0} \int \rho \left( t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) dV, \quad (79,1)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j} \left( t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) dV. \quad (79,2)$$

На достаточно больших расстояниях от системы поле в малых участках пространства можно рассматривать как плоскую волну. Для этого надо, чтобы расстояния были велики не только по сравнению с размерами системы, но и по сравнению с длиной излучаемых системой электромагнитных волн. Об этой области поля говорят как о *волновой зоне* излучения.

В плоской волне поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  связаны друг с другом соотношением (69,4)  $\mathbf{E} = [\mathbf{H}\mathbf{n}]$ . Поскольку  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ , то для полного определения поля в волновой зоне достаточно вычислить только векторный потенциал. В плоской волне имеем  $\mathbf{H} = [\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]/c$  (ср. (69,3)), где точка над буквой означает дифференцирование по времени. Таким образом, зная  $\mathbf{A}$ , найдем  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  по формулам<sup>1)</sup>:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}], \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c} [[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]. \quad (79,3)$$

Отметим, что поле на далеких расстояниях оказывается обратно пропорциональным первой степени расстояния  $R_0$  от излучающей системы. Следует также заметить, что время  $t$  входит в выражения (79,1 -- 3) везде в комбинации  $t - R_0/c$  с расстоянием  $R_0$ .

Излучаемые системой электромагнитные волны уносят с собой определенную энергию. Поток энергии дается вектором Пойнтинга, равным в плоской волне

$$\mathbf{S} = c \frac{H^2}{4\pi} \mathbf{n}.$$

Интенсивность  $dI$  излучения в элементе телесного угла  $d\omega$  определяют как количество энергии, протекающей в единицу времени через элемент  $df = R_0^2 d\omega$  шаровой поверхности с центром в начале координат и с радиусом  $R_0$ . Это количество равно, очевидно, плотности потока энергии  $S$ , помноженной на  $df$ , т. е.

$$dI = c \frac{H^2}{4\pi} R_0^2 d\omega. \quad (79,4)$$

<sup>1)</sup> Формула  $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}/c$  (см. (69,3)) здесь неприменима, так как потенциалы  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$  не удовлетворяют тем дополнительным условиям, которые были наложены на них в § 69.

Поскольку поле  $H$  обратно пропорционально  $R_0$ , то мы видим, что количество энергии, излучаемой системой в единицу времени в элемент телесного угла  $do$ , одинаково для всех расстояний (при одинаковых для них значениях разности  $t - R_0/c$ ). Так, разумеется, и должно быть, поскольку излучаемая системой энергия распространяется в окружающем пространстве со скоростью  $c$ , нигде не накапливаясь и не исчезая.

## § 80. Дипольное излучение

Временем  $gp/c$  в подынтегральных выражениях запаздывающих потенциалов (79,1—2) можно пренебречь, если за это время распределение зарядов мало меняется. Легко найти условия осуществления этого требования. Пусть  $T$  означает порядок величины времени, в течение которого распределение зарядов в системе меняется заметным образом. Излучение этой системы будет, очевидно, обладать периодом порядка  $T$  (т. е. частотой порядка  $1/T$ ). Обозначим далее посредством  $a$  порядок величины размеров системы. Тогда время  $gp/c \sim a'/c$ . Для того чтобы за это время распределение зарядов в системе не успело значительно измениться, необходимо, чтобы  $a'/c \ll T$ . Но  $cT$  есть не что иное, как длина волны  $\lambda$  излучения. Таким образом, условие  $a \ll cT$  можно написать в виде

$$a \ll \lambda, \quad (80,1)$$

т. е. размеры системы должны быть малы по сравнению с длиной излучаемой волны.

Это условие можно написать еще и в другом виде, заметив, что  $T \sim a/v$ , так что  $\lambda \sim ca/v$ , если  $v$  есть порядок величины скорости зарядов. Из  $a \ll \lambda$  находим тогда:

$$v \ll c, \quad (80,2)$$

т. е. скорости зарядов должны быть малы по сравнению со скоростью света.

Будем предполагать, что это условие выполнено, и займемся изучением излучения на расстояниях от излучающей системы, больших по сравнению с длиной волны ( $a$  следовательно, во всяком случае больших по сравнению с размерами системы). Как было указано в § 79, на таких расстояниях поле можно рассматривать как плоскую волну, и потому для определения поля достаточно вычислить только векторный потенциал,

Векторный потенциал (79,2) имеет теперь вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}' dV, \quad (80,3)$$

где время  $t' = t - R_0/c$  и уже не зависит от переменных интегрирования. Подставляя  $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ , переписываем (80,3) в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \left( \sum e\mathbf{v} \right),$$

где суммирование производится по всем зарядам системы; для краткости мы будем опускать индекс  $t'$  — все величины в правых сторонах равенств берутся в момент времени  $t'$ . Но

$$\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}},$$

где  $\mathbf{d}$  — дипольный момент системы. Таким образом,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}}. \quad (80,4)$$

С помощью формул (79,3) находим, что магнитное поле

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}], \quad (80,5)$$

а электрическое поле

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} [[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]. \quad (80,6)$$

Отметим, что в рассматриваемом приближении излучение определяется второй производной от дипольного момента системы. Такое излучение называется *дипольным*.

Поскольку  $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$ , то  $\dot{\mathbf{d}} = \sum e\dot{\mathbf{v}}$ . Таким образом, заряды могут излучать только, если они движутся с ускорением. Равномерно движущиеся заряды не излучают. Это следует, впрочем, и непосредственно из принципа относительности, так как равномерно движущийся заряд можно рассматривать в такой инерциальной системе, где он покоится, а покоящиеся заряды не излучают.

Подставляя (80,5) в (79,4), получим интенсивность дипольного излучения:

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 d\omega = \frac{\dot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta d\omega, \quad (80,7)$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\ddot{\mathbf{d}}$  и  $\mathbf{n}$ . Это есть количество энергии, излучаемой системой в единицу времени в элемент телесного угла  $d\omega$ ; отметим, что угловое распределение излучения дается множителем  $\sin^2 \theta$ .

Подставив  $d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  и интегрируя по  $d\theta$  от 0 до  $\pi$ , получим полное излучение

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2. \quad (80,8)$$

Если имеется всего один заряд, движущийся во внешнем поле, то  $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$  и  $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$ , где  $\mathbf{w}$  — ускорение заряда. Таким образом, полное излучение движущегося заряда

$$I = \frac{2e^2 w^2}{3c^3}. \quad (80,9)$$

Создаваемое системой излучение может быть подвергнуто спектральному разложению. Очевидно, что за создание определенных монохроматических компонент излучения ответственны такие же компоненты дипольного момента системы  $\mathbf{d}(t)$ . При этом надо различать случаи разложения в ряд или интеграл Фурье.

Если заряды совершают периодическое движение (с частотой  $\omega_0$ ), то дипольный момент (а с ним и поле излучения) должен быть разложен в ряд Фурье. Согласно общей формуле (72,4) интенсивность монохроматической компоненты (с частотой  $\omega = n\omega_0$ ) получится из формулы для средней интенсивности излучения

$$I = \frac{2}{3c^3} \overline{\ddot{\mathbf{d}}^2} \quad (80,10)$$

путем замены среднего квадрата  $\overline{\ddot{\mathbf{d}}^2}$  на удвоенный квадрат модуля соответствующей компоненты Фурье:

$$I_\omega = \frac{4}{3c^3} |\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2.$$

Компоненту Фурье вектора  $\ddot{\mathbf{d}}(t)$  можно выразить через компоненту Фурье вектора  $\mathbf{d}(t)$ . Для этого заметим, что каждый член разложения  $\ddot{\mathbf{d}}(t)$  должен получаться дифференцированием по времени соответствующего члена разложения  $\mathbf{d}(t)$ , т. е.

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t},$$

откуда

$$\ddot{\mathbf{d}}_{\omega} = -\omega^2 \mathbf{d}_{\omega} \quad (80,11)$$

Поэтому

$$I_{\omega} = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\mathbf{d}_{\omega}|^2 \quad (80,12)$$

С разложением же в интеграл Фурье приходится иметь дело для излучения, сопровождающего столкновение заряженных частиц (так называемое *тормозное излучение*). При этом представляет интерес полное количество энергии, излученной за все время столкновения. Пусть  $d\mathcal{E}_{\omega}$  — энергия, излученная в виде волн с частотами в интервале между  $\omega$  и  $\omega + d\omega$ . Согласно (72,8) мы получим ее из формулы для полной энергии излучения

$$\Delta \mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I dt = \frac{2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{d}}^2 dt \quad (80,13)$$

путем замены интеграла на выражение  $2|\ddot{\mathbf{d}}_{\omega}|^2 d\omega/2\pi$ :

$$d\mathcal{E}_{\omega} = \frac{2}{3\pi c^3} |\ddot{\mathbf{d}}_{\omega}|^2 d\omega \quad (80,14)$$

Отметим, что замкнутая система, состоящая из частиц с одинаковым отношением зарядов к массе, не может излучать (дипольно). Действительно, для такой системы дипольный момент

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \text{const} \sum m\mathbf{r},$$

где const есть одинаковое для всех частиц отношение заряда к массе. Но  $\sum m\mathbf{r} = \mathbf{R} \sum m$ , где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор центра инерции системы (напоминаем, что все скорости  $v \ll c$ , так что применима нерелятивистская механика). Поэтому  $\dot{\mathbf{d}}$  пропорционально ускорению центра инерции, т. е. равно нулю, так как центр инерции движется равномерно.

Если дипольное излучение отсутствует, то для определения излучаемой системой энергии надо обратиться к более высоким членам разложения потенциала поля по степеням малого отношения  $a/\lambda$ . В следующем (после дипольного) приближении возникает излучение, определяющееся колебаниями как электрического квадрупольного момента системы, так и ее магнитного момента.



Задачи<sup>1)</sup>

1. Определить излучение диполя  $\mathbf{d}$ , вращающегося в одной плоскости с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ .

Решение. Выбирая плоскость вращения в качестве плоскости  $xOy$ , имеем:

$$d_x = d_0 \cos \Omega t, \quad d_y = d_0 \sin \Omega t.$$

Ввиду монохроматичности этих функций излучение тоже монохроматично с частотой  $\omega = \Omega$ . По формуле (80,7) найдем для углового распределения среднего (по периоду вращения) излучения:

$$\overline{dI} = \frac{d_0^2 \Omega^4}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \vartheta) d\vartheta,$$

где  $\vartheta$  — угол между направлением  $\mathbf{n}$  излучения и осью  $z$ . Полная интенсивность

$$\bar{I} = \frac{2d_0^2 \Omega^4}{3c^3}.$$

2. Определить полное излучение при лобовом столкновении двух отталкивающихся частиц.

Решение. Выбрав начало координат в центре инерции частиц, получим для дипольного момента системы:

$$\mathbf{d} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 = \frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} = \mu \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mathbf{r},$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум частицам,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  есть радиус-вектор между ними, а  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  — приведенная масса. Уравнение относительного движения частиц:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mu \dot{\mathbf{v}} = \frac{e_1 e_2 \mathbf{r}}{r^3}$$

( $e_1 e_2 > 0$ ). Согласно (80,13) полная энергия тормозного излучения

$$\Delta \mathcal{E}^0 = \frac{2\mu^3}{3c^3} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}}^2 dt = \frac{2}{3c^3} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 (e_1 e_2)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r^3}. \quad (1)$$

При лобовом столкновении относительная скорость частиц  $\mathbf{v}$  определяется из

$$\frac{\mu v^2}{2} + \frac{e_1 e_2}{r} = \frac{\mu v_\infty^2}{2},$$

<sup>1)</sup> Во всех задачах подразумевается, что скорости частиц  $v \ll c$ .

где  $v_\infty$  — скорость на бесконечности. Подставив в интеграле  $dt = dr/v$ , заменим интегрирование по  $dt$  интегрированием по  $dr$  от  $\infty$  до  $r_{\min} = 2e_1e_2/\mu v_\infty^2$  и от  $r_{\min}$  до  $\infty$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r^4} = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^4 \sqrt{v_\infty^2 - \frac{2e_1e_2}{\mu r}}}$$

Вычислив интеграл, получим:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{8\mu^2 v_\infty^7}{45c^3 e_1 e_2} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2.$$

3. Определить полное излучение при пролете одного заряда мимо другого, если скорость настолько велика (хотя и мала по сравнению с  $c$ ), что отклонение от прямолинейности движения можно считать малым.

Решение. Угол отклонения мал, если  $\mu v^2 \gg e_1 e_2 / \rho$  (кинетическая энергия  $\mu v^2/2$  велика по сравнению с потенциальной энергией, порядок величины которой есть  $e_1 e_2 / \rho$ ). При прямолинейном движении со скоростью  $v$ :  $r = \sqrt{\rho^2 + v^2 t^2}$ , где  $\rho$  — прицельное расстояние. Подставив в формулу (1) предыдущей задачи и вычислив интеграл, получим:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\pi (e_1 e_2)^2}{3v c^3 \rho^3} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2.$$

4. Найти формулу для спектрального распределения тормозного излучения в пределе малых частот <sup>1)</sup>.

Решение. В интеграле

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{d}}(t) e^{i\omega t} dt = \mu \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}} e^{i\omega t} dt$$

ускорение  $\dot{\mathbf{v}}$  заметно отлично от нуля только в течение промежутка времени  $\sim \tau$ . Поэтому для частот  $\omega \ll 1/\tau$  можно считать, что под интегралом  $\omega t \ll 1$  и соответственно этому положить  $e^{i\omega t} \approx 1$ . Тогда

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega = \mu \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}} dt = \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \Delta \mathbf{p},$$

<sup>1)</sup> В спектральном распределении тормозного излучения основная доля интенсивности приходится на частоты  $\omega \sim 1/\tau$ , где  $\tau$  — порядок величины продолжительности столкновения. Соответственно этому под малыми мы понимаем здесь частоты  $\omega \ll 1/\tau$ .

где  $\Delta \mathbf{p}$  — изменение при столкновении импульса относительного движения  $\mathbf{p} = \mu \mathbf{v}$ . Согласно (80,14) энергия, излученная в интервале частот  $d\omega$ :

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2}{3\pi c^3} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 (\Delta \mathbf{p})^2 d\omega.$$

Обратим внимание на то, что распределение не зависит от частоты, т. е.  $d\mathcal{E}_\omega/d\omega$  стремится при  $\omega \rightarrow 0$  к постоянному пределу.

5. Определить интенсивность излучения зарядом, движущимся по круговой траектории в постоянном однородном магнитном поле.

Решение. По формуле (80,9) находим:

$$I = \frac{2e^4 H^2 v^3}{3m^2 c^5}.$$

## § 81. Излучение быстро движущегося заряда

Рассмотрим теперь заряженную частицу, движущуюся во внешнем поле со скоростью, не малой по сравнению со скоростью света. Для решения задачи об излучении такой частицей удобно воспользоваться лiénар-вихертовским выражением для поля (78,8—9). На больших расстояниях от частицы мы должны сохранить в нем только член с более низкой степенью  $1/R$  (второй член в формуле (78,8)). Вводя единичный вектор  $\mathbf{n}$  в направлении излучения ( $\mathbf{R} = nR$ ), получим формулы

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2 R} \frac{\left[ \mathbf{n} \left[ \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \mathbf{w} \right] \right]}{\left( 1 - \frac{n\mathbf{v}}{c} \right)^3}, \quad \mathbf{H} = [n\mathbf{E}], \quad (81,1)$$

где все величины в правых сторонах равенства берутся в запаздывающий момент времени  $t' = t - R/c$ .

Интенсивность излучения в телесный угол  $d\omega$  пропорциональна  $E^2$ . Получающееся отсюда угловое распределение в общем случае довольно сложно. Но в ультрарелятивистском случае ( $v$  близко к  $c$ ;  $1 - v/c \ll 1$ ) оно обладает характерной особенностью, связанной с наличием высоких степеней разности  $1 - n\mathbf{v}/c$  в знаменателях. Именно, интенсивность велика в узком интервале углов, в котором эта разность мала. Обозначив через  $\theta$  малый угол между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{n}$ , имеем

$$1 - \frac{v}{c} \cos \theta \approx 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2} \approx \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2 \right). \quad (81,2)$$

Эта разность мала при

$$\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (81,3)$$

Таким образом, ультрарелятивистская частица излучает в направлении своего движения в интервал углов (81,3) вокруг направления скорости.

Количество энергии, излученной в течение времени  $dt$  в элемент телесного угла  $d\omega$ , равно

$$\left(\frac{c}{4\pi} E^2 R^2 d\omega\right) dt. \quad (81,4)$$

Однако при вычислении интенсивности излучения необходимо теперь различать два возможных способа ее определения.

В (81,4)  $dt$  есть интервал времени в точке наблюдения, так что выражение в скобках есть интенсивность, определенная как энергия излучения, воспринимаемого наблюдателем в течение единицы времени. Но в силу эффекта запаздывания при распространении волны от излучающей частицы к точке наблюдения, интервал  $dt$  не совпадает с интервалом времени  $dt'$ , в течение которого энергия (81,4) была излучена движущейся частицей. Согласно (78,7) имеем:

$$dt = \frac{\partial t}{\partial t'} dt' = \left(1 - \frac{\mathbf{nv}}{c}\right) dt'. \quad (81,5)$$

Если определить интенсивность как энергию, излученную частицей в единицу времени, то она будет равна, следовательно,

$$dI = \frac{c}{4\pi} E^2 \left(1 - \frac{\mathbf{nv}}{c}\right) R^2 d\omega. \quad (81,6)$$

При  $v \ll c$  (как это предполагалось в § 80) множитель  $1 - \mathbf{nv}/c$  может быть заменен единицей, и тогда оба определения интенсивности совпадают.

### Задача

Определить интенсивность излучения ультрарелятивистской частицей, движущейся по круговой траектории в постоянном однородном магнитном поле.

Решение. При взаимно перпендикулярных ускорении и скорости частицы вычисление по формулам (81,1) и (81,6) дает:

$$dl = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^3} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^5} \right\} d\omega,$$

где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{v}$ , а  $\varphi$  — азимутальный угол вектора  $\mathbf{n}$  с плоскостью, проходящей через  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ . В ультрарелятивистском случае основную роль играет область малых  $\theta$ . В этой области

$$dl = \frac{2e^2 \omega^2}{\pi c^3} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2\right)^3} - \frac{4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \theta^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2\right)^5} \cos^2 \varphi \right\} d\omega,$$

а элемент телесного угла  $d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi \approx \theta d\theta d\varphi$ . Ввиду быстрой сходимости интеграла по  $d\theta$  при вычислении полной интенсивности можно распространить интегрирование по  $d\theta$  от 0 до  $\infty$ . В результате получим:

$$I = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Здесь уже подставлено также выражение для ускорения при движении по окружности в магнитном поле  $H$ :

$$\omega = \frac{e v H}{m c} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{e H}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

## § 82. Торможение излучением

Излучение электромагнитных волн движущимися зарядами приводит к потере ими энергии. Обратное влияние этой потери на движение зарядов может быть описано путем введения в уравнения движения соответствующих «сил торможения»  $\mathbf{f}$ .

Рассмотрим систему зарядов, совершающих стационарное движение с нерелятивистскими скоростями ( $v \ll c$ ). Средняя потеря энергии системой (отнесенная к единице времени) равна средней интенсивности излучения (80,10). Подберем силы  $\mathbf{f}$  таким образом, чтобы эта потеря энергии могла быть представлена как средняя работа этих сил. Работа силы  $\mathbf{f}$  за единицу времени равна произведению  $\mathbf{f}\mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v}$  —

скорость частицы. Таким образом, должно быть

$$\sum_a \overline{\mathbf{f}_a \mathbf{v}_a} = -\frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 \quad (82,1)$$

(сумма берется по всем частицам в системе).

Легко видеть, что этому требованию удовлетворяют силы

$$\mathbf{f}_a = \frac{2e_a}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}. \quad (82,2)$$

Действительно, имеем:

$$\sum_a \mathbf{f}_a \mathbf{v}_a = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}} \sum_a e_a \mathbf{v}_a = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}} \dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3} \frac{d}{dt} (\ddot{\mathbf{d}} \dot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3} \ddot{\mathbf{d}}^2.$$

При усреднении первый член, содержащий полную произвольную по времени, обращается в нуль (ср. примечание на стр. 213), и мы возвращаемся к (82,1). Силы (82,2) называют *торможением излучением* или *лоренцевыми силами трения*.

Торможение излучением имеет место и при движении во внешнем поле лишь одной частицы. В этом случае  $\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{v}}$  и уравнение движения с учетом силы (82,2) имеет вид:

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{vH}] + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (82,3)$$

Надо, однако, иметь в виду, что описание действия заряда «самого на себя» с помощью силы торможения не вполне удовлетворительно и содержит в себе противоречия. Действительно, в отсутствие внешнего поля уравнение (82,3) сводится к

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}.$$

Это уравнение имеет кроме тривиального решения  $\mathbf{v} = \text{const}$  еще решение, в котором ускорение  $\dot{\mathbf{v}}$  пропорционально  $\exp(3mc^3 t / 2e^2)$ , т. е. неограниченно возрастает со временем. Это значит, например, что заряд, прошедший через какое-нибудь поле, по выходе из поля должен был бы неограниченно «самоускоряться». Абсурдность этого результата свидетельствует об ограниченной применимости уравнения (82,3).

Может возникнуть вопрос о том, каким образом электродинамика, удовлетворяющая закону сохранения энергии, может

привести к абсурдному результату, в котором свободная частица неограниченно увеличивает свою энергию. Корни этой трудности находятся в действительности в упоминавшейся ранее (§ 60) бесконечной электромагнитной «собственной массе» элементарных частиц. Когда мы пишем в уравнениях движения конечную массу заряда, то мы этим по существу приписываем ему формально бесконечную же отрицательную «собственную массу» не электромагнитного происхождения, которая вместе с электромагнитной массой приводила бы к конечной массе частицы. Вычитание одной из другой двух бесконечностей не является, однако, вполне корректной математической операцией; это и приводит к ряду дальнейших трудностей, в том числе и к указанной здесь.

Поскольку таким образом сила торможения сама по себе приводит к противоречивым результатам, то выражение (82,2) применимо лишь, если эта сила оказывается малой по сравнению с силой, действующей на заряд со стороны внешнего поля.

### § 83. Рассеяние свободными зарядами

Если на систему зарядов падает электромагнитная волна то под ее влиянием заряды приходят в движение. Это движение в свою очередь сопровождается излучением во все стороны; происходит *рассеяние* первоначальной волны.

Рассеяние удобно характеризовать отношением количества энергии, испускаемой рассеивающей системой в данном направлении в единицу времени, к плотности потока энергии падающего на систему излучения. Это отношение имеет размерность площади и называется *сечением рассеяния* (ср. § 15).

Пусть  $dI$  есть энергия, излучаемая системой в телесный угол  $d\omega$  (в 1 сек.) при падении на нее волны с вектором Пойнтинга  $\mathbf{S}$ . Тогда сечение рассеяния (в телесный угол  $d\omega$ ) равно

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{S} \quad (83,1)$$

(черта над буквой означает усреднение по времени). Интеграл  $\sigma$  от  $d\sigma$  по всем направлениям есть полное сечение рассеяния.

Рассмотрим рассеяние, производимое одним неподвижным свободным зарядом. Пусть на этот заряд падает плоская монохроматическая линейно поляризованная волна. Ее электрическое поле можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha).$$

Мы будем предполагать, что скорость, приобретаемая зарядом под действием поля падающей волны, мала по сравнению со скоростью света, что практически всегда выполняется. Тогда можно считать, что сила, действующая на заряд, равна  $e\mathbf{E}$ , а силой  $\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$  со стороны магнитного поля можно пренебречь. В этом случае можно также пренебречь влиянием смещения заряда при его колебаниях под влиянием поля. Если заряд совершает колебания около начала координат, то можно тогда считать, что на него все время действует то поле, которое имеется в начале координат, т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

Поскольку уравнения движения заряда гласят

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

а его дипольный момент  $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ , то

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}. \quad (83,2)$$

Для вычисления рассеянного излучения воспользуемся формулой (80,7) для дипольного излучения; мы имеем право сделать это, поскольку приобретаемая зарядом скорость предполагается малой. Заметим также, что частота излучаемой зарядом (т. е. рассеянной им) волны равна, очевидно, частоте падающей волны.

Подставляя (83,2) в (80,7), находим:

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} [\mathbf{En}]^2 d\omega.$$

С другой стороны, вектор Пойнтинга падающей волны равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}^2. \quad (83,3)$$

Отсюда находим сечение рассеяния в телесный угол  $d\omega$ :

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \theta d\omega, \quad (83,4)$$



где  $\theta$  — угол между направлением рассеяния (вектором  $\mathbf{n}$ ) и направлением электрического поля  $\mathbf{E}$  падающей волны. Мы видим, что сечение рассеяния свободным зарядом не зависит от частоты.

Определим полное сечение  $\sigma$ . Для этого выберем направление  $\mathbf{E}$  в качестве полярной оси; тогда  $d\sigma = \sin\theta d\theta d\varphi$  и, интегрируя по  $d\theta$  от 0 до  $\pi$  и по  $d\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , находим:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \quad (83,5)$$

(так называемая *формула Томсона*).

### Задачи

1. Найти сечение рассеяния  $d\sigma$  для рассеяния неполяризованной волны (естественный свет).

Решение. Мы должны усреднить (83,4) по всем направлениям вектора  $\mathbf{E}$  в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения падающей волны (направлению волнового вектора  $\mathbf{k}$ ). Выберем координаты с осью  $z$  вдоль направления  $\mathbf{k}$  и осью  $x$  вдоль  $\mathbf{E}$ . Тогда косинус угла  $\theta$  между направлениями  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{E}$ , т. е. проекция единичного вектора  $\mathbf{n}$  на ось  $x$ , равен  $\cos\theta = \sin\vartheta \cos\varphi$ , где  $\vartheta$  и  $\varphi$  — полярный угол и азимут направления  $\mathbf{n}$ . Усреднение по всем направлениям  $\mathbf{E}$  в плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{k}$ , эквивалентно усреднению по азимуту  $\varphi$ . Имеем:

$$\overline{\sin^2\theta} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2\vartheta = \frac{1}{2} (1 + \cos^2\vartheta)$$

и, подставив в (83,4), получим:

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2\vartheta) d\sigma.$$

2. Определить частоту ( $\omega'$ ) света, рассеянного движущимся зарядом.

Решение. В системе отсчета, где частица покоится (система покоя частицы), частота света при рассеянии не меняется:  $\omega' = \omega$ . Это соотношение можно записать в инвариантном виде

$$k'_\mu u^\mu = k_\mu u^\mu,$$

где  $k^\mu$  и  $k'^\mu$  — волновые 4-векторы падающего и рассеянного света, а  $u^\mu$  — 4-скорость частицы (в системе покоя отлична от нуля лишь компонента  $u^0 = 1$ ). Раскрывая теперь это равенство в произвольной системе отсчета (в которой частица движется со скоростью  $\mathbf{v}$ ), получим:

$$\omega' \left( 1 - \frac{v}{c} \cos\theta' \right) = \omega \left( 1 - \frac{v}{c} \cos\theta \right),$$

где  $\theta$  и  $\theta'$  — углы, составляемые направлениями падающей и рассеянной волн с направлением  $\mathbf{v}$ .

3. Определить сечение рассеяния линейно поляризованной волны пространственным осциллятором — зарядом, совершающим (под влиянием некоторой упругой силы) малые колебания с частотой  $\omega_0$ . Учесть при этом силу торможения излучением.

Решение. Уравнение движения осциллятора в падающей на него волне пишем в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\mathbf{r}}.$$

В силе торможения (второй член справа) можно положить приблизительно  $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2 \mathbf{r}$ ; тогда получим:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \gamma = \frac{2e^2}{3mc^3} \omega_0^2.$$

Отсюда находим для вынужденных колебаний:

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}.$$

Дальнейшее вычисление производится как в тексте параграфа (причем при вычислении средних значений квадратов величин, представленных в комплексном виде, надо учесть сказанное в примечании на стр. 225). В результате получим сечение рассеяния

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

## § 84. Рассеяние системой зарядов

Рассеяние электромагнитных волн системой зарядов отличается от рассеяния одним (неподвижным) зарядом прежде всего тем, что благодаря наличию собственного движения зарядов в системе частота рассеянного излучения может быть отличной от частоты падающей волны. Именно, в спектральное разложение рассеянного излучения входят наряду с частотой  $\omega$  падающей волны также и частоты  $\omega'$ , отличающиеся от  $\omega$  на любую из собственных частот движения рассеивающей системы. Рассеяние с изменением частоты называют *некогерентным* (или *комбинационным*) в противоположность *когерентному* рассеянию без изменения частоты.

Предполагая поле падающей волны слабым, мы можем представить плотность тока в виде  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}'$ , где  $\mathbf{j}_0$  — плотность тока в отсутствие внешнего поля, а  $\mathbf{j}'$  — изменение тока под влиянием падающей волны. Соответственно этому вектор-

ный потенциал (и другие величины) поля системы тоже будет иметь вид  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}'$ , где  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{A}'$  создаются токами  $\mathbf{j}_0$  и  $\mathbf{j}'$ . Потенциал  $\mathbf{A}'$  описывает рассеянную волну и определяется по току  $\mathbf{j}'$  формулой (79,2):

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}'_t - \frac{R_0}{c} + \frac{rn}{c} dV. \quad (84,1)$$

Рассмотрим два предельных случая, когда частота  $\omega$  рассеиваемых волн мала или велика по сравнению с основными собственными частотами системы. Последние имеют порядок величины  $\omega_0 \sim v/a$ , где  $v$  — скорость зарядов в системе, а  $a$  — ее размеры. Будем также предполагать, что скорости  $v \ll c$ .

Начнем со случая

$$\omega \ll \omega_0 \sim \frac{v}{a}. \quad (84,2)$$

Рассеяние может содержать как когерентную, так и некогерентную части, но мы рассмотрим сейчас только когерентное рассеяние.

При условии (84,2) в формуле (84,1) могут быть произведены те же пренебрежения, которые были сделаны в § 80. Другими словами, рассеянное излучение будет дипольным. Если так, то интенсивность его спектральной компоненты с частотой  $\omega$  будет пропорциональна квадрату компоненты Фурье  $|\mathbf{d}'_\omega|^2 = \omega^4 |\mathbf{d}'|^2$ , где  $\mathbf{d}'$  — изменение дипольного момента под влиянием падающей волны.

Если полный заряд системы равен нулю (нейтральный атом или молекула), то при  $\omega \rightarrow 0$  величина  $\mathbf{d}'_\omega$  стремится к постоянному пределу (если бы суммарный заряд был отличен от нуля, то при  $\omega = 0$ , т. е. в постоянном поле, система начала бы двигаться как целое). Поэтому при малых  $\omega$  можно считать  $\mathbf{d}'_\omega$  не зависящим от частоты. Тогда интенсивность рассеянной волны, а с нею и сечение рассеяния будут пропорциональны  $\omega^4$ :

$$\sigma_{\text{кор}} = \text{const} \cdot \omega^4. \quad (84,3)$$

Перейдем к обратному случаю больших частот:

$$\omega \gg \omega_0 \sim \frac{v}{a}. \quad (84,4)$$

В силу этого условия период движения зарядов в системе велик по сравнению с периодом волны. Поэтому в течение

промежутков времени порядка периода волны движение зарядов можно считать равномерным. Это значит, что при рассмотрении рассеяния коротких волн можно не учитывать взаимодействия зарядов в системе друг с другом, т. е. их можно считать свободными.

Таким образом, при вычислении скорости  $\mathbf{v}'$ , приобретаемой зарядом в поле падающей волны, мы можем рассматривать каждый заряд системы в отдельности и писать для него уравнение движения в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})},$$

где  $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$  — волновой вектор падающей волны. Радиус-вектор заряда является, конечно, функцией времени. В показателе экспоненциального множителя с правой стороны этого уравнения скорость изменения первого члена со временем велика по сравнению со скоростью изменения второго (первая равна  $\omega$ , а вторая — порядка  $k\mathbf{v} \sim v\omega/c \ll \omega$ ). Поэтому при интегрировании уравнений движения можно считать в правой их части  $\mathbf{r}$  постоянным. Тогда

$$\mathbf{v}' = -\frac{e}{i\omega m} \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}. \quad (84,5)$$

Для векторного потенциала рассеянной волны (на больших расстояниях от системы) имеем, переходя в (84,1) от интеграла к сумме по зарядам:

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0} \sum (e\mathbf{v}')_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{n}'}{c}},$$

где  $\mathbf{n}'$  — единичный вектор в направлении рассеяния. Подставляя сюда (84,5), находим:

$$\mathbf{A}' = -\frac{1}{icR_0\omega} e^{-i\omega\left(t - \frac{R_0}{c}\right)} \mathbf{E}_0 \sum \frac{e^2}{m} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (84,6)$$

где  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$  есть разность между волновым вектором рассеянной  $\mathbf{k}' = \omega'\mathbf{n}'/c$  и волновым вектором  $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$  падающей волны<sup>1)</sup>. Значение суммы в (84,6) должно браться в момент

<sup>1)</sup> Строго говоря, волновой вектор  $\mathbf{k}' = \omega'\mathbf{n}'/c$ , где частота  $\omega'$  рассеянной волны может отличаться от  $\omega$ . Разностью  $\omega' - \omega \sim \omega_0$  можно, однако, пренебречь в рассматриваемом случае больших частот.

времени  $t' = t - R_0/c$ , так как изменением  $\mathbf{r}$  за время  $\mathbf{r}\mathbf{n}'/c$  можно пренебречь ввиду предполагаемой малости скоростей частиц (индекс  $t'$ , как обычно, для краткости опускаем). Абсолютная величина вектора  $\mathbf{q}$  равна

$$q = 2 \frac{\omega}{c} \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad (84,7)$$

где  $\vartheta$  — угол рассеяния.

При рассеянии на атоме (или молекуле) в сумме в (84,6) можно пренебречь членами, соответствующими ядрам, ввиду большой величины их масс по сравнению с массами электронов. Ниже мы будем иметь в виду именно этот случай, соответственно чему вынесем множитель  $e^2/m$  за знак суммы, понимая в нем под  $e$  и  $m$  заряд и массу электрона.

Для поля  $\mathbf{H}'$  рассеянной волны находим согласно (79,3):

$$\mathbf{H}' = \frac{[\mathbf{E}_0 \mathbf{n}']}{c^2 R_0} e^{-i\omega \left( t - \frac{R_0}{c} \right)} \frac{e^2}{m} \sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}. \quad (84,8)$$

Поток энергии в элемент телесного угла в направлении  $\mathbf{n}'$  равен

$$\frac{c |\mathbf{H}'|^2}{8\pi} R_0^2 d\omega = \frac{e^4}{8\pi c^3 m^2} [\mathbf{E}_0 \mathbf{n}']^2 \left| \sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right|^2 d\omega.$$

Разделив это на средний поток энергии  $c |\mathbf{E}_0|^2 / 8\pi$  падающей волны (ср. примечание на стр. 225) и вводя угол  $\theta$  между направлением поля  $\mathbf{E}$  падающей волны и направлением рассеяния, находим окончательно сечение рассеяния в виде

$$d\sigma = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left| \sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right|^2 \sin^2 \theta d\omega. \quad (84,9)$$

Черта обозначает усреднение по времени, т. е. усреднение по движению зарядов в системе; оно производится ввиду того, что рассеяние наблюдается в промежутки времени, большие по сравнению с периодом движения зарядов в системе.

Для длины волны падающего излучения из условия (84,4) следует неравенство  $\lambda \ll ac/v$ . Что же касается относительной величины  $\lambda$  и  $a$ , то возможны оба предельных случая  $\lambda \gg a$  и  $\lambda \ll a$ . В обоих этих случаях общая формула (84,9) значительно упрощается.

При  $\lambda \gg a$  в выражении (84,9)  $qr \ll 1$ , поскольку  $q \sim 1/\lambda$ ,  $r \sim a$ . Заменяя соответственно этому  $e^{iqr}$  единицей, имеем:

$$d\sigma = Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\omega, \quad (84,10)$$

т. е. рассеяние пропорционально квадрату числа  $Z$  электронов в атоме.

Перейдем к случаю  $\lambda \ll a$ . В квадрате суммы в (84,9) наряду с равными единице квадратами модуля каждого из членов имеются произведения вида  $e^{iq(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}$ . При усреднении по движению зарядов, т. е. по их взаимным расположениям в системе, разности  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  пробегает значения в интервале порядка  $a$ . Поскольку  $q \sim 1/\lambda$ ,  $\lambda \ll a$ , то экспоненциальный множитель  $e^{iq(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}$  является в этом интервале быстро осциллирующей функцией, и его среднее значение обращается в нуль. Таким образом, при  $\lambda \ll a$  сечение рассеяния равно

$$d\sigma = Z \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\omega, \quad (84,11)$$

т. е. пропорционально первой степени атомного номера.

Сечения (84,9—11) включают в себя как когерентную, так и некогерентную части. Для определения сечения когерентного рассеяния мы должны выделить ту часть поля рассеянной волны, которая имеет частоту  $\omega$ . Выражение (84,8) для поля зависит от времени через множитель  $e^{-i\omega t}$ , и, кроме того, от времени зависит также сумма  $\sum e^{-iqr}$ . Эта последняя зависимость и приводит к тому, что в поле рассеянной волны содержатся наряду с частотой  $\omega$  еще и другие (хотя и близкие к ней) частоты. Та часть поля, которая обладает частотой  $\omega$  (т. е. зависит от времени только посредством множителя  $e^{-i\omega t}$ ), получится, очевидно, если усреднить по времени сумму  $\sum e^{-iqr}$ . Соответственно этому выражение для сечения когерентного рассеяния  $d\sigma_{\text{кор}}$  отличается от полного сечения  $d\sigma$  тем, что вместо среднего значения квадрата модуля суммы в нем стоит квадрат модуля среднего значения суммы:

$$d\sigma_{\text{кор}} = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |F(\mathbf{q})| \sin^2 \theta d\omega, \quad (84,12)$$

где

$$F(\mathbf{q}) = \overline{\sum e^{-iqr}}. \quad (84,13)$$

Функцию  $F(\mathbf{q})$  называют *атомным формфактором*. Полезно заметить, что это есть не что иное, как пространственная компонента Фурье среднего распределения заряда в атоме  $\bar{\rho}(\mathbf{r})$ :

$$eF(\mathbf{q}) = \int \bar{\rho}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} dV. \quad (84,14)$$

Это легко понять, написав сначала неусредненную плотность  $\rho(\mathbf{r})$  в виде суммы  $\delta$ -функций (см. (54,1)).

При  $\lambda \gg a$  мы можем снова заменить  $e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$  единицей, так что

$$d\sigma_{\text{ког}} = Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\omega. \quad (84,15)$$

Сравнивая это с полным сечением (84,10), мы видим, что  $d\sigma_{\text{ког}} = d\sigma$ , т. е. все рассеяние является когерентным.

Если же  $\lambda \ll a$ , то при усреднении в (84,13) все члены суммы (как средние значения быстро осциллирующих функций времени) исчезают, так что  $d\sigma_{\text{ког}} = 0$ . Таким образом, в этом случае рассеяние целиком некогерентно.

---