

Л. Д. ЛАНДАУ

---

**СОБРАНИЕ ТРУДОВ**

---

2

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
Е. М. ЛИФШИЦА  
И И. М. ХАЛАТНИКОВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА 1969

КОМИССИЯ ПО ИЗДАНИЮ ТРУДОВ Л. Д. ЛАНДАУ

А. А. АБРИКОСОВ, В. Л. ГИНЗБУРГ,  
Б. П. КОНСТАНТИНОВ, Е. М. ЛИФШИЦ,  
М. А. МАРКОВ, И. М. ХАЛАТНИКОВ

*В собрание трудов выдающегося советского физика академика Л. Д. Ландау вошли почти все его научные статьи, опубликованные в различное время на русском и иностранных языках. Часть работ публикуется на русском языке впервые.*

*Издание представляет значительный интерес для научных работников в области физики, преподавателей вузов, студентов университетов.*

# СОДЕРЖАНИЕ

59. О колебаниях электронной плазмы. 1946.	7
60. О термодинамике фотолюминесценции. 1946.	26
61. К теории сверхтекучести гелия II. 1947.	32
62. О движении посторонних частиц в гелии II. ( <i>Совместно с И. Я. Померанчуком</i> ). 1948.	35
63. О моменте системы их двух фотонов. 1948.	38
64. К теории сверхтекучести. 1948.	42
65. Эффективная масса полярона. ( <i>Совместно с С. И. Пекаром</i> ). 1948.	47
66. Расщепление дейтрона при столкновениях с тяжелыми ядрами. ( <i>Совместно с Е. М. Лифшицем</i> ). 1948.	54
67. Теория вязкости гелия II. 1. Столкновения элементарных возбуждений в гелии II. ( <i>Совместно с И. М. Халатниковым</i> ). 1949.	66
68. Теория вязкости гелия II. 2. Вычисление коэффициента вязкости. ( <i>Совместно с И. М. Халатниковым</i> ). 1949.	86
69. О взаимодействии между электроном и позитроном. ( <i>Совместно с В. Б. Берестецким</i> ). 1949.	110
70. О равновесной форме кристаллов. 1950.	119
71. К теории сверхпроводимости. ( <i>Совместно с В. Л. Гинзбургом</i> ). 1950.	126
72. О множественном образовании частиц при столкновениях быстрых частиц. 1953.	153
73. Пределы применимости теории тормозного излучения электронов и образования пар при больших энергиях. ( <i>Совместно с И. Я. Померанчуком</i> ). 1953.	172
74. Электронно-лавиновые процессы при сверхвысоких энергиях. ( <i>Совместно с И. Я. Померанчуком</i> ). 1953.	175
75. Излучение $\gamma$ -квантов при столкновении быстрых $\pi$ -мезонов с нуклонами. ( <i>Совместно с И. Я. Померанчуком</i> ). 1953.	181
76. Об устранении бесконечностей в квантовой электродинамике. ( <i>Совместно с А. А. Абрикосовым и И. М. Халатниковым</i> ). 1954.	195
77. Асимптотическое выражение для гриновской функции электрона в квантовой электродинамике. ( <i>Совместно с А. А. Абрикосовым и И. М. Халатниковым</i> ). 1954.	200

78. Асимптотическое выражение для гриновской функции фотона в квантовой электродинамике. (Совместно с А. А. Абрикосовым и И. М. Халатниковым). 1954.	206
79. Масса электрона в квантовой электродинамике. (Совместно с А. А. Абрикосовым и И. М. Халатниковым). 1954.	212
80. Об аномальном поглощении звука вблизи точек фазового перехода второго рода. (Совместно с И. М. Халатниковым). 1954.	218
81. Исследование особенностей течения при помощи уравнения Эйлера — Трикоми. (Совместно с Е. М. Лифшицем). 1954.	223
82. О квантовой теории поля. 1955.	228
83. О точечном взаимодействии в квантовой электродинамике. (Совместно с И. Я. Померанчуком). 1955.	247
84. Градиентные преобразования функций Грина заряженных частиц. (Совместно с И. М. Халатниковым). 1955.	252
85. Гидродинамическая теория множественного образования частиц. (Совместно с С. З. Беленьким). 1955.	259
86. О квантовой теории поля. (Совместно с А. А. Абрикосовым и И. М. Халатниковым). 1956.	302
87. Теория ферми-жидкости. 1956.	328
88. Колебания ферми-жидкости. 1957.	337
89. О законах сохранения при слабых взаимодействиях. 1957.	349
90. Об одной возможности для поляризационных свойств нейтрино. 1957.	352
91. О гидродинамических флуктуациях. (Совместно с Е. М. Лифшицем). 1957.	356
92. Свойства гриновской функции частиц в статистике. 1958.	359
93. К теории ферми-жидкости. 1958.	363
94. О возможности формулировки теории сильно взаимодействующих фермионов. (Совместно с А. А. Абрикосовым, А. Д. Галаниным, Л. П. Горьковым, И. Я. Померанчуком и К. А. Тер-Мартirosяном). 1958.	374
95. Численные методы интегрирования уравнений в частных производных методом сеток. (Совместно с Н. Н. Мейманом и И. М. Халатниковым). 1958.	393
96. Об аналитических свойствах вершинных частей в квантовой теории поля. 1959.	406
97. Малые энергии связи в квантовой теории поля. 1960.	419
98. О фундаментальных проблемах. 1960.	421

### Приложения

Лев Давидович Ландау (1908—1968) (Е. М. Лифшиц)	427
Список статей, не включенных в это собрание	448
Книги Л. Д. Ландау	449
О жизни и деятельности Л. Д. Ландау	450

Рассмотрены колебания электронной плазмы, возникающие в результате произвольного начального неравновесного распределения в ней. Показано, что колебания поля в плазме всегда затухают со временем, и определена зависимость частот и декремента затухания от волнового вектора при малых и больших значениях последнего. Рассмотрено проникновение периодического внешнего электрического поля в плазму. Получен закон изменения поля на больших расстояниях внутри плазмы. Особо рассмотрен случай частоты внешнего поля, близкой к резонансной.

Колебания электронной плазмы описываются при больших частотах сравнительно простыми уравнениями. Если частота колебаний достаточно велика, то столкновения электронов с ионами и друг с другом не существенны и в кинетическом уравнении можно пренебречь интегралом столкновений; мы можем также считать колеблющимся только распределение электронов при неизменном распределении ионов. Пусть  $F(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  — функция распределения электронов; если  $f_0(v)$  — равновесная (максвелловская) функция распределения, то

$$F = f_0(v) + f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где  $f$  — малая по сравнению с  $f_0$  величина. Кинетическое уравнение (без интеграла столкновений)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f - \frac{e}{m} \nabla \varphi \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0 \quad (2)$$

( $\varphi$  — потенциал электрического поля). Сюда надо еще присоединить уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = 4\pi e \int f d\tau \quad (d\tau = dv_x dv_y dv_z) \quad (3)$$

(равновесный электронный заряд  $e \int f_0 d\tau$  компенсируется, разумеется, положительным зарядом ионов).

Эти уравнения применены к изучению колебаний плазмы А. А. Власовым [1, 2], однако большая часть полученных им результатов является ошибочной. Власов искал решения вида  $\text{const} \cdot e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  и определял зависимость частоты  $\omega$  от волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Выражение, определяющее эту зависимость, получилось у него содержащим расходящийся интеграл, что уже указывает на математическую некорректность примененного им метода. Власов [2] обходит эту трудность взятием главного значения интеграла, для чего, однако, нет никаких оснований. В действительности вообще не существует никакой определенной зависимости  $\omega$  от  $\mathbf{k}$ , и при заданном  $\mathbf{k}$  возможны произвольные  $\omega$ . Недостаточность решений вида  $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  видна уже из того, что они дают лишь  $\infty^3$ -множество решений (соответственно трем независимым параметрам:  $k_x, k_y, k_z$ ), между тем как в действительности должно иметься  $\infty^6$ -множество решений (уравнения содержат шесть независимых переменных:  $x, y, z, v_x, v_y, v_z$ ).

## § 1. Колебания при заданном начальном распределении

Для того чтобы получить правильное решение уравнений (2), (3), необходимо рассматривать задачу в той или иной конкретной постановке; мы рассмотрим здесь две такие задачи.

Предположим, что задано (во всем объеме плазмы) некоторое определенное (неравновесное) распределение электронов в начальный момент времени; требуется определить возникающие в результате колебания. Поскольку уравнения (2), (3) линейны и не содержат в явном виде координат, то искомая функция  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  может быть разложена в интеграл Фурье по координатам и уравнения могут быть написаны для каждой компоненты Фурье в отдельности. Другими словами, достаточно рассматривать решения вида

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Ниже мы будем для простоты обозначений опускать индекс  $\mathbf{k}$  у  $f_{\mathbf{k}}$ , так что  $f(\mathbf{v}, t)$  будет обозначать компоненту Фурье искомой функции распределения. Посредством  $g(\mathbf{v})$  обозначим (тоже опуская индекс  $\mathbf{k}$ ) компоненту Фурье от начального распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0)$ .

Наконец, выберем ось  $x$  вдоль направления вектора  $\mathbf{k}$ , к которому относится  $f(\mathbf{v}, t)$ .

Взяв компоненты Фурье от уравнений (2), (3), получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + ikv_x f - ik \frac{e}{m} \Phi \frac{\partial f_0}{\partial v_x} = 0, \quad (4)$$

$$k^2 \Phi(t) = 4\pi e \int f d\tau, \quad (5)$$

где  $\Phi(t)$  — компонента Фурье от потенциала  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ . Для решения этих уравнений применим операционный метод, согласно которому вводим функцию  $f_p(\mathbf{v})$ , определяемую как

$$f_p(\mathbf{v}) = \int_0^{\infty} f(\mathbf{v}, t) e^{-pt} dt; \quad (6)$$

тогда

$$f(\mathbf{v}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty + \sigma}^{+i\infty + \sigma} f_p(\mathbf{v}) e^{pt} dp, \quad (7)$$

где интегрирование производится в комплексной плоскости по прямой, параллельной мнимой оси и проходящей справа от нее ( $\sigma > 0$ ).

Умножаем обе стороны уравнения (4) на  $e^{-pt}$  и интегрируем по  $dt$ . Замечая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} e^{-pt} dt = fe^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} fe^{-pt} dt = pf_p - g$$

(мы подставили  $f(\mathbf{v}, 0) \equiv g(\mathbf{v})$ ), находим

$$(p + ikv_x) f_p = ik \frac{e}{m} \Phi_p \frac{\partial f_0}{\partial v_x} + g.$$

Аналогично из (5) получаем

$$k^2 \Phi_p = 4\pi e \int f_p d\tau.$$

Первое из этих уравнений дает

$$f_p(\mathbf{v}) = \frac{1}{p + ikv_x} \left\{ g(\mathbf{v}) + ik \frac{e}{m} \Phi_p \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial v_x} \right\}, \quad (8)$$

после чего из второго вычисляем  $\Phi_p$ :

$$\Phi_p = \frac{4\pi e}{k^2} \frac{\int \frac{g(\mathbf{v})}{p + ikv_x} d\tau}{1 - \frac{4\pi i e^2}{km} \int \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \frac{d\tau}{(p + ikv_x)}}. \quad (9)$$

Эти формулы решают, в принципе, поставленную задачу, определяя электронное распределение и электрическое поле по произвольному заданному начальному распределению.

Переходя к исследованию полученных формул, замечаем предварительно, что в (9) можно произвести непосредственно интегрирование по  $dv_y dv_z$ . Введя для дальнейшего обозначения  $v_x \equiv u$  и

$$g(u) = \int g(v) dv_y dv_z,$$

пишем

$$\Phi_p = \frac{4\pi e}{k^2} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{p + iku} du}{1 - \frac{4\pi e^2}{km} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_0(u)}{du} \frac{du}{(p + iku)}}, \quad (10)$$

где равновесная функция

$$f_0(u) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-mu^2/2kT} \quad (11)$$

( $k$  — постоянная Больцмана,  $n$  — равновесное число электронов в единице объема плазмы).

Выражение типа

$$\Phi_p = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt,$$

рассматриваемое как функция комплексного переменного  $p$ , имеет смысл лишь в правой полуплоскости, т. е. при  $\text{Re}(p) > 0$ . То же относится соответственно и к выражению (10). Мы можем, однако, определить  $\Phi_p$  в левой полуплоскости как аналитическое продолжение выражения (10). Легко видеть, что если  $g(u)$  (рассматриваемая как функция комплексного переменного  $u$ ) есть целая функция от  $u$  (т. е. не имеет никаких особенностей при конечных  $u$ ), то и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u) du}{p + iku},$$

аналитически продолженный в левую полуплоскость  $p$ , определяет целую функцию от  $p$ . Действительно, для того чтобы аналитически продолжить изображаемую этим интегралом функцию из правой полуплоскости в левую, сместим предварительно путь интегрирования в плоскости комплексного переменного  $u$  достаточ-



но далеко в нижнюю полуплоскость так, чтобы точка  $u = -p/ik$  лежала выше пути интегрирования. Таким образом мы получим аналитическую функцию, определяемую интегралом, который при  $\text{Re}(p) > 0$  берется по действительной оси, а при  $\text{Re}(p) < 0$  — по пути, изображенному на рис. 1 сплошной линией. Эта функция не имеет особенностей ни при каком конечном  $p$ , т. е. является целой.

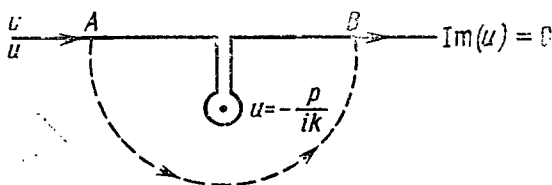


Рис. 1.

То же самое относится, очевидно, и к интегралу, стоящему в знаменателе выражения (10), поскольку  $df_0(u)/du$  — целая функция. Таким образом, аналитическая во всей плоскости функция  $\varphi_p$  есть (при целой  $g(u)$ ) частное двух целых функций. Отсюда следует, что единственными особенностями (полюсами) функции  $\varphi_p$  являются нули выражения, стоящего в знаменателе (10); все эти полюсы лежат в левой полуплоскости.

Эти соображения позволяют определить асимптотический вид потенциала  $\varphi(t)$  как функции времени при больших значениях последнего. В формуле обращения

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \varphi_p e^{pt} dp \quad (12)$$

интегрирование производится по вертикальной прямой в правой полуплоскости. Однако, понимая под  $\varphi_p$  определенную указанным образом во всей плоскости  $p$  аналитическую функцию, мы можем сместить путь интегрирования в левую полуплоскость так, чтобы нигде не пересечь ни одного из полюсов функции  $\varphi_p$ . Пусть  $p_k$  — тот из полюсов функции  $\varphi_p$ , т. е. тот из корней уравнения

$$\frac{4\pi i e^2}{km} \int_C \frac{d'g}{du} \frac{du}{(p + iku)} = 1 \quad (13)$$

(интегрирование по пути, изображенному на рис. 1), который обладает наименьшей по абсолютной величине действительной частью

(т. е. ближайший к мнимой оси). Будем производить интегрирование в (12) по пути, смещенному достаточно далеко за точку  $p = p_k$  и огибающему эту точку (а также и другие полюсы, лежащие справа от него) указанным на рис. 2 образом. Тогда в интеграле (12), взятом по этому контуру, при больших  $t$  будет существенным только вычет относительно полюса  $p_k$ ; остальные части интеграла, в том числе интеграл по вертикальной части пути, будут экспоненциально малы по сравнению с указанным вычетом

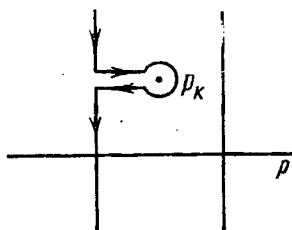


Рис. 2.

благодаря наличию в подынтегральном выражении множителя  $e^{pt}$ , быстро падающего с увеличением  $|\operatorname{Re}(p)|$ .

Таким образом, при больших  $t$  потенциал поля  $\phi(t)$  будет пропорционален множителю  $e^{p_k t}$ . При комплексном  $p_k$  он распадается на периодический и на затухающий [ $\operatorname{Re}(p_k) < 0$ ] множители. Мы приходим, следовательно, к существенному результату, что поле, вообще говоря, экспоненциально затухает со временем с декрементом, равным  $-\operatorname{Re}(p_k)$ .

Уравнение (13), определяющее  $p_k$  (т. е. частоту и декремент затухания колебаний), формально совпадает с уравнением, полученным Власовым, с тем, однако, отличием, что у него интеграл берется не вдоль контура  $C$ , а просто вдоль действительной оси. Это отличие приводит, как мы увидим, не только к количественно, но и к качественно иным результатам, именно к наличию затухания.

Рассмотрим предельный случай длинных волн,  $k \rightarrow 0$ . Точка  $u = -p/ik$ , которую огибает путь интегрирования  $C$  (рис. 1), отодвигается к очень большим  $|u|$ , и поскольку функция  $f_0(u)$  быстро падает с увеличением  $|u|$ , то в первом приближении можно ограничиться в (13) интегрированием вдоль действительной оси. Разлагаем подынтегральное выражение по степеням  $k$ ; первый член разложения обращается в нуль, поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_0}{du} du = f_0 \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Второй член дает

$$\frac{4\pi e^2}{p^2 m} \int_{-\infty}^{+\infty} u \frac{df_0}{du} du = 1.$$

Замечая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u \frac{df_0}{du} du = uf_0 \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f_0 du = -n, \quad (14)$$

находим отсюда

$$p_k = -i\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}} \equiv \omega_0 \quad (15)$$

(мы выбрали здесь знак, соответствующий волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ ). Это выражение соответствует обычной собственной частоте плазмы, которую мы обозначим через  $\omega_0$ ; в следующем приближении вычисление приводит к такой зависимости частоты от волнового вектора:

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{3}{2} a^2 k^2 \right), \quad (16)$$

где  $a = \sqrt{\kappa T / 4\pi n e^2}$  — электронный дебай-гюккелевский радиус. Мы не приводим здесь соответствующих вычислений, так как они совпадают с произведенными Власовым в его первой работе [1]; эта часть его вычислений оказывается правильной в связи с тем, что при малых  $k$  можно при вычислении частоты ограничиваться в (13) интегрированием вдоль действительной оси.

В действительности, однако, колебания являются затухающими, хотя декремент затухания и мал при малых  $k$ . Для вычисления этого декремента исходим из предположения (подтверждающегося результатом), что при  $k \rightarrow 0$  действительная часть  $p_k$  стремится тоже к нулю (как мы увидим, экспоненциально), между тем как мнимая часть остается конечной. Тогда точка  $u = -p_k/ik$ , которую огибает контур  $C$ , при малых  $k$  расположена на конечном расстоянии от мнимой оси и очень близко к действительной (под последней). Положим

$$p_k = -i\omega - \gamma;$$

величина  $\gamma$  ( $0 < \gamma \ll \omega$ ) — искомый декремент затухания. Выберем на действительной оси некоторую точку  $A$  (рис. 1), расположенную достаточно близко к точке  $u = -p_k/ik$ , но так, что ее расстояние до этой точки все же велико по сравнению с  $|\text{Im}(u)|$ . Проведем через эту точку полуокружность  $AB$ , охватывающую особую точку  $u = -p_k/ik$  (штриховая линия на рис. 1), и заменим ею соответствующий участок пути интегрирования  $C$ .

Интеграл по прямолинейным участкам пути действителен в пределе  $\text{Re}(p) = 0$ ; его можно в рассматриваемом приближении положить равным  $-4\pi n e^2 / m p^2$ . Интеграл же по окружности

равен умноженному на  $\pi i$  (половина полной окружности) вычету относительно полюса.

В результате получим уравнение (13) в виде

$$-\frac{4\pi n e^2}{m p^2} + i \frac{4\pi^2 e^2}{m k^2} \frac{df_0(-p/ik)}{du} = 1.$$

Полагая здесь  $p = -i\omega - \gamma$  и решая это уравнение последовательными приближениями, получим для декремента затухания  $\gamma$  следующее окончательное выражение:

$$\gamma = \omega_0 \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{(ka)^3} e^{-1/2(ka)^2}. \quad (17)$$

Таким образом, декремент затухания экспоненциально падает с уменьшением  $k$ .

Область применимости формул (15) — (17) определяется условием  $\gamma \ll \omega$ . Оно приводит к неравенству, которое можно написать в виде

$$ka \ll 1.$$

Рассмотрим теперь обратный предельный случай

$$ka \gg 1.$$

Пишем снова  $p = -i\omega - \gamma$ . Как будет подтверждено результатом, при  $k \rightarrow \infty$  обе величины  $\omega$  и  $\gamma$  неограниченно возрастают, но так, что при больших  $k$   $\omega \ll \gamma$ , а частные  $\omega/k$ ,  $\gamma/k$  стремятся соответственно к нулю и бесконечности. Тогда полюс  $u = -p/ik$  расположен относительно близко от мнимой, но на большом расстоянии от действительной оси ( $\text{Re}(u)$  мало, а  $\text{Im}(u)$  велико). Поскольку функция  $f_0$  экспоненциально растет при больших мнимых значениях  $u$ , то в интеграле (13) достаточно ограничиться лишь интегрированием по окружности вокруг полюса, пренебрегая интегралом вдоль действительной оси. Таким образом, получаем уравнение (13) в виде

$$\frac{4\pi e^2}{m k^2} 2\pi i \frac{df_0(-p/ik)}{du} = 1$$

или, подставляя выражение (11) для  $f_0(u)$ ,

$$\sqrt{2\pi} \frac{p}{\omega_0 (ka)^3} \exp\left(\frac{p^2}{2\omega_0^2 (ka)^2}\right) = 1. \quad (18)$$

Взяв модуль от обеих сторон равенства и воспользовавшись предполагаемым неравенством  $\gamma \gg \omega$ , получим

$$\xi e^{\xi/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (ak)^2, \quad (19)$$

где

$$\xi = \frac{\gamma}{\omega_0 ka}.$$

Далее, фазовый множитель выражения в левой стороне уравнения (18) есть в том же приближении

$$\exp\left(\frac{i\gamma\omega}{\omega_0^2 a^2 k^2}\right).$$

Поскольку в правой стороне стоит действительная положительная величина, то этот множитель должен быть равен +1. Отсюда находим

$$\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 a^2 k^2} = \pi$$

(приравняв  $3\pi, 5\pi, \dots$ , мы получили бы, как можно показать, не наиболее близкий к мнимой оси корень уравнения (13)). Вместе с определением величины  $\xi$  это дает

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{\kappa T}{m} \frac{k}{\xi}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\kappa T}{m}} k \xi. \quad (20)$$

С функцией  $\xi(k)$ , определяемой в неявном виде уравнением (19), эти формулы определяют частоту и декремент затухания колебаний. Функция  $\xi(k)$  есть очень медленно (в основном как квадратный корень из логарифма) возрастающая функция от  $k$ . Отношение  $\gamma/\omega$  возрастает с  $k$ , как  $\xi^2$ , т. е. в основном, как  $\ln ka$ .

Во всем предыдущем мы предполагали, что заданная функция  $g(u)$  есть целая функция. Если же эта функция имеет особенности, то и функция  $\varphi_p$  будет, вообще говоря, иметь особые точки, помимо полюсов, связанных с обращением в нуль знаменателя выражения (10). Тогда точка  $p_k$ , которую огибает контур на рис. 2 и которая определяет поведение потенциала  $\varphi(t)$  при больших  $t$ , должна быть выбрана как ближайшая к мнимой оси из числа корней уравнения (13) и особых точек, возникающих от особенностей  $g(u)$ .

В частности, если  $g(u)$  — кусочно-гладкая функция (на действительной оси), то  $\varphi_p$  будет иметь чисто мнимые особые точки  $p = -iku_{\text{ос}}$ , где  $u_{\text{ос}}$  — точки на действительной оси, в которых

$g(u)$  имеет изломы. Таким образом, поведение функции  $\varphi(t)$  при больших  $t$  будет определяться чисто мнимыми значениями  $p_k$ , т. е. поле будет незатухающим. Отсюда видна недопустимость замены гладкой функции  $g(u)$  кусочно-гладкой в целях приближенного решения задачи; при такой замене получается качественно иная картина с незатухающим полем.

Наконец, остановимся на самой электронной функции распределения. Для проинтегрированной по  $dv_y dv_z$  функции распределения имеем согласно (8)

$$f_p(u) = \frac{1}{p + iku} \left\{ g(u) + \frac{ike}{m} \varphi_p \frac{df_0(u)}{du} \right\},$$

$$f(u, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\omega + \sigma}^{+i\omega + \sigma} f_p(u) e^{pt} dt.$$

Поведение функции  $f(u, t)$  при больших  $t$  определяется чисто мнимыми особыми точками  $p = iku$  функции  $f_p(u)$ . Таким образом, функция распределения оказывается при больших  $t$  пропорциональной множителю  $e^{-i\omega t}$ , т. е. незатухающей периодической функцией времени с зависящей от скорости частотой  $ku$ .

## § 2. Колебания плазмы во внешнем электрическом поле

Предположим, что плазма находится во внешнем периодическом электрическом поле, и поставим задачу об определении картины проникновения поля внутрь плазмы. Внешнее поле может быть разложено в интеграл Фурье по времени; поэтому достаточно ограничиться рассмотрением монохроматического поля с частотой  $\omega$ . Стенку, ограничивающую плазму, считаем плоской; все распределение зависит от координаты  $x$  вдоль оси, перпендикулярной стенке.

Электрическое поле можно разложить на продольную часть, направленную вдоль оси  $x$ , и на поперечную часть, параллельную стенке. Рассмотрение поведения плазмы в поперечном поле не представляет интереса, так как сводится к поведению в электромагнитной волне, описываемому хорошо известными формулами. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь продольной части, соответственно чему предполагаем поле направленным вдоль оси  $x$ .

Как и в § 1, будем пользоваться функцией распределения, проинтегрированной по несущественным переменным  $v_y, v_z$ . Эту функцию  $f(u, x, t)$  (где по-прежнему  $u \equiv v_x$ ) можно искать в виде  $j(u, x) e^{-i\omega t}$ .

Тогда кинетическое уравнение (2) приобретает вид

$$-i\omega f + u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{eE(x)}{m} \frac{df_0(u)}{du} = 0 \quad (21)$$

(электрическое поле пишем в виде  $E(x)e^{-i\omega t}$ ). В качестве второго уравнения нам будет удобно воспользоваться здесь не уравнением Пуассона (3), а уравнением, выражающим отсутствие источников для полного тока (истинного тока  $\mathbf{j}$  и тока смещения),

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{j} - \frac{i\omega}{4\pi} \mathbf{E}\right) = \frac{d}{dx}\left(j - \frac{i\omega}{4\pi} E\right) = 0.$$

Отсюда находим, что  $4\pi j - i\omega E$  — постоянная; поскольку вне плазмы  $j = 0$ , то эта постоянная равна  $-i\omega E_0$ , где  $E_0 e^{-i\omega t}$  — внешнее поле. Таким образом, имеем уравнение

$$-i\omega E(x) + 4\pi j(x) = -i\omega E_0. \quad (22)$$

Плотность тока  $j(x)$  выражается через функцию распределения посредством

$$j = e \int_{-\infty}^{+\infty} u f(u, x) du. \quad (23)$$

На больших расстояниях от стенки поле  $E$  в плазме определяется непосредственно условием постоянства продольной компоненты индукции  $D = \varepsilon E$ , где диэлектрическая постоянная плазмы равна известному выражению

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi n e^2}{m\omega^2}. \quad (24)$$

Вне плазмы  $D = E_0$ ; таким образом, имеем предельное условие

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} \text{ при } x = +\infty \quad (25)$$

(положительное направление оси  $x$  — внутрь плазмы).

Свойства ограничивающей плазму стенки будем описывать (как это обычно делают в аналогичных случаях) предположением ее идеальной отражательной способности. Другими словами, считаем, что при столкновении со стенкой электрон отражается с неизменной по величине скоростью под углом, равным углу падения (так что  $v_y, v_z$  не меняются, а  $v_x = u$  меняет знак). Это значит, что функция распределения  $f(u, x)$  должна удовлетворять на стенке ( $x = 0$ ) граничному условию

$$f(u, 0) = f(-u, 0). \quad (26)$$

Интегрируя формально уравнение (21), находим

$$f(u, x) = -e^{i\omega x/u} \int \frac{eE(x)}{mu} \frac{df_0}{du} e^{-i\omega x/u} dx.$$

Для того чтобы определить постоянную интегрирования, воспользуемся следующим приемом. Будем рассматривать  $\omega$  как комплексный параметр с малой положительной мнимой частью (которую затем стремим снова к нулю). Тогда внешнее поле  $E_0 e^{-i\omega t}$  будет возрастать со временем, и поскольку при всех конечных значениях  $t$  оно тоже конечно, то мы можем утверждать, что и функция распределения должна быть везде (в том числе при  $x = \infty$ ) конечной.

Пусть сначала  $u < 0$ . Тогда множитель  $e^{i\omega x/u}$  неограниченно возрастает с  $x$ , и, для того чтобы  $f(u, \infty)$  было конечным, надо написать:

$$\text{при } u < 0: f(u, x) = e^{i\omega x/u} \int_x^{\infty} \frac{eE(\xi)}{mu} \frac{df_0(u)}{du} e^{-i\omega \xi/u} d\xi. \quad (27)$$

Функция же  $f(u, x)$  для  $u > 0$  должна быть написана так, чтобы удовлетворялось условие (26). Это дает

$$f(u, x) = e^{i\omega x/u} \left[ \int_0^{\infty} \frac{eE(\xi)}{mu} \frac{df_0(u)}{du} e^{i\omega \xi/u} d\xi - \int_0^x \frac{eE(\xi)}{mu} \frac{df_0}{du} e^{-i\omega \xi/u} d\xi \right] \quad (28)$$

(напомним, что  $f_0(u)$  — четная функция от  $u$ , так что  $df_0/du$  — нечетная функция).

С помощью полученных выражений вычисляем плотность тока (23)

$$j = \frac{i\omega}{4\pi} \left\{ \int_0^{\infty} E(\xi) K(x - \xi) d\xi + \int_x^{\infty} E(\xi) K(\xi - x) d\xi - \int_0^{\infty} E(\xi) K(x + \xi) d\xi \right\}, \quad (29)$$

где мы ввели функцию

$$K(\xi) = \frac{4\pi e^2}{m\omega} \int_0^{\infty} \frac{df_0}{du} e^{i\omega \xi/u} du, \quad \xi > 0 \quad (30)$$

в (29) входит функция  $K(\xi)$  только от положительных значений аргумента).



Для дальнейшего удобно представить поле  $E(x)$  в виде суммы двух членов, выделив из него величину поля при  $x \rightarrow +\infty$ :

$$E(x) = \frac{E_0}{\varepsilon} + E_1(x). \quad (31)$$

Согласно (25)  $E_1(x)$  должно удовлетворять предельному условию  $E_1(\infty) = 0$ . Подставляя (31) в (29), получим после простого приведения

$$j = j_1(x) + \frac{i\omega}{2\pi\varepsilon} E_0 \int_0^x K(\xi) d\xi, \quad (32)$$

где  $j_1(x)$  определяется формулой (29), в которой только надо подразумевать  $E_1(x)$  вместо  $E(x)$ .

Подстановка (31), (32) в (22) приводит после элементарных преобразований к следующему интегральному уравнению для функции  $E_1(x)$ :

$$E_1(x) - \int_0^x K(x-\xi) E_1(\xi) d\xi - \int_x^\infty K(\xi-x) E_1(\xi) d\xi + \\ + \int_0^\infty K(\xi+x) E_1(\xi) d\xi = \frac{2E_0}{\varepsilon} \int_0^\infty K(\xi) d\xi. \quad (33)$$

При преобразованиях здесь использовано выражение (24) для диэлектрической постоянной, а также выражение для интеграла  $\int_0^\infty K(\xi) d\xi$ , которое можно получить следующим образом.

Рассматривая снова  $\omega$  как комплексный параметр с  $\text{Im}(\omega) > 0$ , мы можем произвести интегрирование по  $d\xi$  под знаком интеграла в (30), и, поскольку множитель  $e^{i\omega\xi/u}$  обращается в нуль при  $\xi = \infty$ , получаем

$$\int_0^\infty K(\xi) d\xi = -\frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int_0^\infty u \frac{dt_0}{du} du.$$

Подынтегральная функция в интеграле справа есть четная функция, и потому этот интеграл равен половине интеграла (14), так что

$$\int_0^\infty K(\xi) d\xi = \frac{2\pi e^2 n}{m\omega^2}. \quad (34)$$

Интегральное уравнение (33) может быть решено следующим образом. Продолжим формально функцию  $K(\xi)$  и неизвестную функцию  $E_1(x)$  (имеющую физический смысл лишь при  $x > 0$ , т. е. внутри плазмы) в область отрицательных значений аргумента при помощи соотношений

$$K(-\xi) = K(\xi), \quad E_1(-x) = E_1(x) \quad (35)$$

(определенная таким способом функция  $E_1(x)$  имеет разрыв при  $x = 0$ ). Тогда уравнение (33) после простого преобразования приводится к значительно более простому виду:

$$E_1(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - \xi) E_1(\xi) d\xi = \begin{cases} -\frac{2E_0}{e} \int_x^{\infty} K(\xi) d\xi & \text{при } x > 0, \\ \frac{2E_0}{e} \int_{-x}^{\infty} K(\xi) d\xi & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (36)$$

В таком виде оно может быть решено по методу Фурье. Умножая обе стороны уравнения на  $e^{-ikx}$  и интегрируя по  $dx$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим

$$E_{1k}(1 - K_k) = \frac{2iE_0}{e} \frac{K_0 - K_k}{k},$$

где  $E_{1k}$ ,  $K_k$  обозначают компоненты Фурье,

$$E_{1k} = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(x) e^{-ikx} dx, \quad K_k = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) e^{-ik\xi} d\xi.$$

(а  $K_0$  — значение  $K_k$  при  $k = 0$ ). С помощью обратного преобразования

$$E_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{1k} e^{ikx} dk$$

получаем искомую функцию  $E_1(x)$  в следующем замкнутом виде:

$$E_1(x) = \frac{iE_0}{\pi e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_0 - K_k}{k(1 - K_k)} e^{ikx} dk. \quad (37)$$

Входящая в подынтегральное выражение функция может быть представлена в виде

$$K_k = \frac{4\pi e^2}{m\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u df_0/du}{ku - \omega} du \quad (38)$$

(здесь использовано определение (30), (35), а интегрирование по  $d\xi$  произведено под знаком интеграла по  $du$ , причем  $\omega$  снова считается комплексным с  $\text{Im}(\omega) > 0$ ). Стоящий здесь интеграл, будучи взят непосредственно вдоль всей действительной оси, расходится в точке  $u = \omega/k$ . Легко, однако, видеть, по какому пути

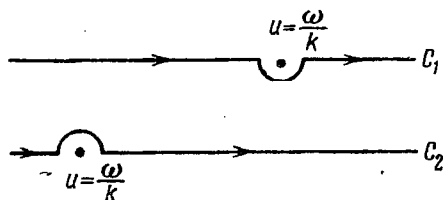


Рис. 3.

следует определить этот интеграл. При выводе (38) предполагалось, что  $\text{Im}(\omega) > 0$ , причем интеграл брался вдоль действительной оси, т. е. по пути, проходящему под (если  $k > 0$ ) или над (если  $k < 0$ ) особой точкой  $u = \omega/k$ . Поэтому при стремлении  $\text{Im}(\omega)$  к нулю интеграл (38) должен браться при  $k > 0$  по пути  $C_1$  (рис. 3), идущему вдоль действительной оси и обходящему особую точку снизу, а при  $k < 0$  — по пути  $C_2$ , обходящему точку сверху. Введем обозначения:

$$K_k = K_1(k) \text{ при } k > 0; K_k = K_2(k) \text{ при } k < 0. \quad (39)$$

Функции  $K_1(k)$  и  $K_2(k)$ , формально определяемые формулой (38) с интегралом, взятым соответственно по пути  $C_1$  или  $C_2$ , являются аналитическими функциями во всей плоскости комплексного переменного  $k$ .

Выражение (37) неудобно для вычисления. Простым преобразованием с введением функций  $K_1, K_2$  оно может быть представлено в виде

$$E_1(x) = \frac{iE_0}{\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_0 - K_2(k)}{k[1 - K_2(k)]} e^{ikx} dk + \frac{iE_0}{\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_2(k) - K_1(k)}{k[1 - K_1(k)][1 - K_2(k)]} e^{ikx} dk. \quad (40)$$

При преобразованиях использовано, что согласно (24), (38), (14) имеем

$$K_0 = 1 - \varepsilon. \quad (41)$$

Разность  $K_2(k) - K_1(k)$  выражается, очевидно, формулой вида (38), в которой интегрирование производится просто по замкнутому контуру вокруг полюса (обходимому в отрицательном направлении); согласно теореме о вычетах имеем поэтому

$$K_2(k) - K_1(k) = -\frac{4\pi e^2}{m\omega k} 2\pi i \left( u \frac{df_0}{du} \right)_{u=\omega_0}. \quad (42)$$

или

$$K_2(k) - K_1(k) = \frac{i\sqrt{2\pi\omega}}{\omega_0 a^3 k^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\omega_0^2 a^2 k^2}\right).$$

Функции  $K_1, K_2$  связаны друг с другом, как легко убедиться, следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} [K_2(k)]^* &= K_1(k^*), \\ K_1^*(-k^*) &= K_1(k), \quad K_2^*(-k^*) = K_2(k). \end{aligned} \quad (43)$$

На бесконечности обе функции  $K_1, K_2$  обращаются в нуль. Исследование, которое мы здесь опускаем, показывает, что функции  $K_1(k), K_2(k)$  по всей плоскости комплексного переменного  $k$  имеют всего одну особую точку, именно: существенно-особую точку  $k=0$ . Величина  $K_0$  есть предел, к которому стремятся  $K_1, K_2$  при стремлении  $k$  к нулю вдоль действительной оси. Можно также показать, что  $K_1(k)$  стремится к тому же пределу  $K_0$  при стремлении  $k$  к нулю по любому пути, проходящему вне прямоугольного сектора в верхней полуплоскости, ограниченного двумя прямыми, пересекающимися в начале координат и образующими углы в  $45^\circ$  с мнимой осью. Для функции  $K_2(k)$  то же самое имеет место вне такого же сектора в нижней полуплоскости.

В интегралах (40) существенны точки, в которых функции  $K_1, K_2$  обращаются в единицу. Можно показать, что уравнение  $K_1(k) = 1$  имеет бесчисленное множество корней в верхней полуплоскости, сходящихся к точке сгущения  $k=0$ . В нижней же полуплоскости оно вовсе не имеет корней, если  $\varepsilon > 0$  (т. е. если  $K_0 < 1$ ); если же  $\varepsilon < 0$  (т. е.  $K_0 > 1$ ), то оно имеет здесь один корень, расположенный на мнимой оси. Аналогичные утверждения для  $K_2(k)$  следуют непосредственно из соотношений (43): уравнение  $K_2(k) = 1$  имеет бесконечное множество корней в нижней полуплоскости, а в верхней вовсе не имеет корней или же имеет один корень (на мнимой оси), смотря по тому, имеет ли место  $\varepsilon > 0$  или  $\varepsilon < 0$ .

Если  $\varepsilon > 0$ , то подынтегральное выражение в первом интеграле в (40) не имеет, следовательно, полюсов в верхней полуплоскости, и, сдвигая путь интегрирования на бесконечность в этой полуплоскости, мы найдем, что интеграл обращается в нуль. Если же  $\varepsilon < 0$ , то имеется один чисто мнимый полюс в верхней полуплоскости и интеграл сводится к вычету относительно этого полюса. Его зависимость от  $x$  будет, следовательно, определяться множителем, затухающим по экспоненциальному закону  $e^{-\alpha x}$ ,  $\alpha > 0$ .

Полное вычисление интегралов (40) может быть произведено лишь численным образом. Можно, однако, получить асимптотическую формулу, определяющую закон спада поля  $E_1(x)$  при достаточно больших значениях  $x$  ( $x \gg a$ ). Вычисляем второй интеграл в (40) (оказывающийся, как мы увидим, более существенным, чем первый), применив к нему известный метод перевала. Подставляя (42) в (40), получаем в подынтегральном выражении экспоненциальный множитель

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_0 a k} \right)^2 + ikx \right\}.$$

Следуя методу перевала, разлагаем показатель по степеням разности  $\delta k = k - k_0$ , где

$$k_0 = e \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2 a^2 x} \right)^{1/3} e^{i\pi/6}$$

есть точка экстремума показателя, после чего интегрируем по пути «наиболее крутого спада». При этом в предэкспоненциальном множителе берется его значение при  $k = k_0$  и выносится из-под знака интеграла; поскольку при больших  $x$  значение  $k_0$  мало, то в знаменателе можно положить  $1 - K_2(k_0) = 1 - K_1(k_0) \approx 1 - K_0 = \varepsilon$ . В результате простого вычисления получаем следующее окончательное выражение:

$$E_1(x) = \frac{2E_0}{\sqrt{3}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{4/3} \left( \frac{x}{a} \right)^{2/3} \exp \left\{ -\frac{3}{4} \left( \frac{\omega x}{\omega_0 a} \right)^{2/3} + i \left[ \frac{3\sqrt{3}}{4} \left( \frac{\omega x}{\omega_0 a} \right)^{2/3} + \frac{2\pi}{3} \right] \right\}. \quad (44)$$

Таким образом, поле  $E_1(x)$  спадает по экспоненциальному закону с  $x^{2/3}$  в показателе (первый член в (40) спадает, как мы видели, по более быстрому закону  $e^{-\alpha x}$ , и потому при достаточно больших  $x$  становится несущественным). Выражение (44) содержит наряду с затухающим также и периодический множитель. Особого рассмотрения требует случай почти полного резонанса, когда частота  $\omega$  внешнего поля близка к собственной частоте плазмы. Диэлектрическая постоянная при этом близка к нулю,  $|\varepsilon| \ll 1$  (причем  $\varepsilon$

связано с частотой соотношением  $\varepsilon = 2(\omega - \omega_0)/\omega$ ). Вычисления различны для  $\varepsilon < 0$  и  $\varepsilon > 0$ .

Предположим сначала, что  $\varepsilon$  мало и отрицательно. Мы видели, что при  $\varepsilon < 0$  первый член в (40) затухает как  $e^{-\alpha x}$ , т. е. быстрее, чем второй член. Однако при  $|\varepsilon| \ll 1$  коэффициент затухания  $\alpha$  оказывается, как мы увидим, малым, и потому второй член становится преобладающим лишь при весьма больших  $x$ ; в остальной же области существен первый член.

Полюс подынтегрального выражения в этом интеграле при малых  $|\varepsilon|$  лежит, как мы увидим, на мнимой оси близко от начала координат (речь идет о единственном корне уравнения  $K_2(k) = 1$  в верхней полуплоскости). Поэтому при вычислении этого корня можно разложить функцию  $K_2(k)$  по степеням  $k$ . Путь  $C_2$ , по которому берется интеграл (38), определяющий функцию  $K_2(k)$ , сводится просто ко всей действительной оси, — такой путь обходит особую точку  $u = \omega/k$  (расположенную теперь на отрицательной части мнимой оси), как и следует, сверху. Простое вычисление дает с точностью до членов второго порядка

$$K_2(k) = 1 - \varepsilon + 3(ka)^2.$$

Отсюда находим для искомого корня уравнения  $K_2(k) = 1$

$$k = \frac{i}{a} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{3}}.$$

Вычисляя теперь первый интеграл в (40) как вычет относительно этого полюса, получим в результате следующее выражение для полного поля  $E(x)$ :

$$E(x) = \frac{E_0}{\varepsilon} \left( 1 - \exp \left[ -\frac{x}{a} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{3}} \right] \right). \quad (45)$$

Таким образом, при малых отрицательных  $\varepsilon$  поле монотонно возрастает с  $x$  по простому экспоненциальному закону, приближаясь к пределу  $E_0/\varepsilon$ . При  $x = 0$  формула (45) дает  $E(x) = 0$  вместо правильного значения  $E_0$  в связи с тем, что в принятом здесь приближении величины порядка  $\varepsilon$  пренебрегаются.

Наконец, рассмотрим случай малых положительных значений  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon > 0$  первый член в (40) обращается в нуль. Однако второй интеграл содержит в действительности наряду с выражением (44) еще и член, спадающий по закону вида  $e^{-\alpha x}$ , и при малых  $\varepsilon$  этот последний член становится существенным во всей области, за исключением опять только самых больших  $x$ . Этот член связан с вычетом относительно полюса подынтегрального выражения, лежащего в верхней полуплоскости близко к действительной оси. Именно,

оказывается, что среди бесконечного множества корней уравнения  $K_1(k) = 1$  в верхней полуплоскости имеется один, лежащий (при малых  $\varepsilon$ ) очень близко к действительной оси; разлагая функцию  $K_1(k)$  в ряд по степеням  $k$ , легко получить следующее выражение для этого корня:

$$k = \frac{1}{a} \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + i \frac{3}{2\varepsilon^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-3\varepsilon/2} \right].$$

Наконец, вычисляя вычет интеграла относительно этой точки, получим в результате следующий закон проникновения поля внутрь плазмы:

$$E(x) = \frac{E_0}{\varepsilon} \left[ 1 - \exp \left\{ \frac{i}{a} \sqrt{\frac{\varepsilon}{a}} x - \frac{3}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}} e^{-3x/2\varepsilon} \right\} \right]. \quad (46)$$

Таким образом, в этом случае получается своеобразный ход поля: амплитуда его сначала возрастает от нуля (в действительности от  $E_0$ ) до  $2E_0/\varepsilon$ , а затем испытывает экспоненциально затухающие колебания (с очень малым коэффициентом затухания) вокруг значения  $E_0/\varepsilon$ , к которому поле стремится на больших расстояниях.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. А. В л а с о в. ЖЭТФ, 8, 291, 1938.  
[2] А. А. V l a s o v. J. Phys., 9, 25, 1945.

J. Phys. USSR, 10, 503, 1946

Выведены условия, налагаемые термодинамикой на полный энергетический выход фотолюминесценции и на интенсивность излучения в антистоксовой области.

Термодинамика накладывает существенные ограничения на процесс фотолюминесценции; из нее вытекают определенные неравенства, которые должны удовлетворяться в любом случае.

Согласно второму закону термодинамики энтропия в изолированной системе, которая в изучаемом случае представляет собой люминесцирующее тело + излучение, должна возрасти. Поэтому, чтобы написать эти неравенства, при обсуждении рассматриваемого вопроса следует учесть энтропию излучения как такового.

Распределение излучения по частотам и направлениям можно описать посредством плотности  $\rho(\nu, \mathbf{n})$  его энергии.  $\rho(\nu, \mathbf{n})d\nu d\Omega$  представляет собой отнесенную к единице объема энергию излучения в интервале частот  $d\nu$ , имеющего направление  $\mathbf{n}$  в элементе телесного угла  $d\Omega$ . Вместо функции  $\rho(\nu, \mathbf{n})$  удобно ввести функцию  $f(\nu, \mathbf{n})$ , определенную следующим образом:

$$\rho(\nu, \mathbf{n}) d\nu d\Omega = f(\nu, \mathbf{n}) h\nu \frac{2\nu^2 d\nu d\Omega}{c^3}; \quad (1)$$

здесь  $h\nu$  — энергия фотонов, а  $2\nu^2 d\nu d\Omega / c^3 = 2k^2 dk d\Omega / (2\pi)^3$  — «элемент объема» в «пространстве» волнового вектора  $\mathbf{k}$ . (Множитель 2 учитывает два возможных направления поляризации; для краткости мы не будем рассматривать распределение по поляризациям, поскольку оно не оказывает существенного влияния на дальней-



шие рассуждения.)  $f(v, n)$  представляет собой число фотонов в единице объема пространства, отнесенное к единичному объему в « $k$ -пространстве». Интенсивность излучения  $dI$ , испускаемого единицей поверхности рассматриваемого тела, определяется выражением

$$dI = c\rho \cos \theta dv d\omega = f(v, n) h\nu d\tau, \quad (2)$$

где мы ввели обозначение

$$d\tau = \cos \theta \frac{2v^2 dv d\omega}{c^2} \quad (3)$$

( $\theta$  — угол между  $n$  и нормалью к поверхности).

Энтропия излучения определяется известной формулой статистики Бозе, примененной к «фотонному» газу. Энтропия излучения  $S$ , проходящего через площадку в  $1 \text{ см}^2$  за  $1 \text{ сек}$ , равна

$$S = \kappa \int [(f+1) \ln(f+1) - f \ln f] d\tau. \quad (4)$$

Интегрирование здесь распространено на весь спектр частот и на все направления  $n$ ;  $\kappa$  — постоянная Больцмана.

Если весь спектр излучения сконцентрирован в узком интервале частот  $\Delta\nu$ , а все направления — в малом интервале углов  $\Delta\omega$ , то, очевидно, полная интенсивность излучения равна

$$I = \int dI \sim \bar{f} h\nu \Delta\tau, \quad (5)$$

где  $\bar{f}$  — некоторое среднее значение  $f$  и

$$\Delta\tau = \frac{2v^2 \cos \theta \Delta\nu \Delta\omega}{c^2}.$$

Для энтропии получаем

$$S \sim \kappa [(\bar{f} + 1) \ln(\bar{f} + 1) - \bar{f} \ln \bar{f}] \Delta\tau = \frac{\kappa}{h\nu} \frac{(\bar{f} + 1) \ln(\bar{f} + 1) - \bar{f} \ln \bar{f}}{\bar{f}} I. \quad (6)$$

Если при заданной полной интенсивности устремить  $\Delta\tau$  к нулю, то  $\bar{f}$  будет стремиться к бесконечности. Но в случае больших значений  $f$  разность

$$(f+1) \ln(f+1) - f \ln f$$

приближенно равна  $\ln f + 1$ , а  $(\ln f + 1)/f$  стремится к нулю. Тем самым из (6) следует, что и  $S$  стремится к нулю. Условие, что

$\Delta\tau$  стремится к нулю, не требует, чтобы  $\Delta\nu$  и  $\Delta\sigma$  стремились к нулю одновременно. Достаточно, чтобы стремилось к нулю одно из них. Иными словами, и энтропия строго монохроматического излучения ( $\Delta\nu = 0$ ), и энтропия строго направленного излучения равны нулю.

Обратимся теперь к процессу фотолюминесценции. Допустим для краткости, что люминесценция сопровождается полным рассеянием излучения по всем направлениям, т. е. что испущенный телом свет изотропен по направлениям и что люминесценция не зависит от направления падающего света. Тогда процесс люминесценции будет характеризоваться некоторой функцией  $w(\nu', \nu)$ , которая определяет интенсивность излучения света с частотой  $\nu$  в результате облучения светом с частотой  $\nu'$ .

Рассмотрим ограничения, накладываемые термодинамикой на свойства этой функции при определенной частоте  $\nu'$ . Имея в виду эту цель, мы можем формально считать, что тело облучается строго монохроматическим светом (частота  $\nu'$  и интенсивность  $I_a$ ). Интенсивность испущенного света определяется функцией  $w(\nu', \nu)$ . Если испущенный свет является в достаточной степени монохроматическим или состоит из отдельных достаточно узких спектральных линий, то его энтропия будет равна нулю, и поэтому достаточно рассмотреть изменение энтропии тела. Но это изменение в единицу времени (отнесенное к единице поверхности тела), очевидно, равно

$$\frac{I_a - I_l}{T},$$

где  $T$  — температура тела, а  $I_l$  — интенсивность люминесценции. Следовательно, в этом случае второй закон приводит к неравенству

$$I_l \leq I_a, \quad (7)$$

т. е. относительный выход люминесценции не может превосходить единицу.

Если, однако, люминесценция, происходящая в результате облучения монохроматическим светом, не состоит из отдельных достаточно узких спектральных линий, то необходимо ввести поправку, учитывающую энтропию излучения. Следует заметить, что при этом можно не учитывать просто отраженного света, благодаря его явно монохроматической природе.

Пусть  $\Delta\nu$  представляет собой основной интервал частот спектра люминесценции. Энтропия падающего света равна нулю, в то время как энтропия излученного света приближенно равна

$$\kappa [\bar{f} + 1] \ln \bar{f} + 1 - \bar{f} \ln \bar{f} \Delta\tau,$$

где  $\bar{f}(\nu)$  определяет спектр люминесценции; вместо интеграла (4) мы подставили значение функции, находящейся под знаком интеграла, соответствующее некоторому среднему  $\bar{f}$ , умноженное на область интегрирования  $\Delta\nu$ . Полное изменение энтропии тела вместе с излучением должно быть положительным:

$$\frac{I_a - I_l}{T} + \kappa [(\bar{f} + 1) \ln(\bar{f} + 1) - \bar{f} \ln \bar{f}] \Delta\nu \geq 0.$$

Интенсивность излучения люминесценции  $I_l$  можно выразить через  $\bar{f}$  следующим образом:

$$I_l = \int f h \nu d\nu \sim h \nu \bar{f} \Delta\nu. \quad (8)$$

Поэтому полученное неравенство может быть переписано в виде

$$I_a \geq I_l \left[ 1 - \frac{\kappa T}{h \nu} \frac{(\bar{f} + 1) \ln(\bar{f} + 1) - \bar{f} \ln \bar{f}}{\bar{f}} \right]. \quad (9)$$

Выражение в правой части зависит от  $\bar{f}$ , т. е. от абсолютной интенсивности света. С другой стороны, до тех пор пока фотолюминесценция линейно возрастает с интенсивностью падающего света,  $I_l/I_a$  не зависит от интенсивности. Это позволяет нам подставить в качестве  $\bar{f}$  любое значение, соответствующее интенсивности фотолюминесценции в линейной области. Поскольку выражение  $[(f + 1) \ln(f + 1) - f \ln f]/f$  является монотонно возрастающей функцией  $f$ , то ясно, что максимальное ограничение будет в том случае, когда мы возьмем значение  $\bar{f}$ , соответствующее наибольшей интенсивности фотолюминесценции, для которой все еще сохраняется линейность.

Введем в качестве «эффективной температуры»  $T_{\text{эфф}}$  света люминесценции температуру черного излучения, в спектре которого выбранный интервал  $\Delta\nu$  обладает интенсивностью, равной наибольшей интенсивности люминесценции в линейной области. Эта температура связана с  $\bar{f}$  формулой Планка

$$\bar{f} = \frac{1}{e^{h\nu/\kappa T_{\text{эфф}}} - 1}. \quad (10)$$

После подстановки (10) в (9) получается довольно длинное выражение; его достаточно выписать для двух предельных случаев — большой и малой величины  $h\nu/\kappa T_{\text{эфф}}$ . Когда  $h\nu \gg \kappa T_{\text{эфф}}$ , имеем  $\bar{f} \approx e^{-h\nu/\kappa T_{\text{эфф}}}$ , и (9) дает

$$I_a \geq I_l \left( 1 - \frac{T}{T_{\text{эфф}}} \right). \quad (11)$$

Отношение  $T / T_{\text{эфф}}$  вообще говоря мало, поэтому (11) можно записать также следующим образом:

$$I_l \leq I_a \left( 1 + \frac{T}{T_{\text{эфф}}} \right) \quad (h\nu \gg \kappa T_{\text{эфф}}). \quad (12)$$

В обратном предельном случае малых  $h\nu / \kappa T_{\text{эфф}}$  имеем  $\bar{f} \approx \kappa T_{\text{эфф}} / h\nu$ , и (9) приводит к неравенству

$$I_l \leq I_a \left[ 1 + \frac{T}{T_{\text{эфф}}} \left( \ln \frac{\kappa T_{\text{эфф}}}{h\nu} + 1 \right) \right] \quad (h\nu \ll \kappa T_{\text{эфф}}), \quad (13)$$

лишь незначительно отличающемся от (12).

Полученные здесь неравенства выражают термодинамические ограничения на выход люминесценции. Температура  $T_{\text{эфф}}$  обычно порядка нескольких десятков тысяч градусов, в то время как  $T$  — комнатная температура. Таким образом  $T / T_{\text{эфф}}$  очень мало, и мы приходим к выводу, что учет энтропии излучения приводит лишь к незначительным поправкам в простое неравенстве (7). Поэтому относительный выход люминесценции превышает единицу лишь на незначительную величину, даже когда это допустимо термодинамически.

Формулы (12) и (13) не являются единственным ограничением, накладываемым термодинамикой на процесс люминесценции. Рассмотрим систему, состоящую из люминесцирующего тела и черного излучения, имеющих одну и ту же температуру  $T$ . Тогда можно утверждать, что тело и излучение находятся в тепловом равновесии друг с другом. Это означает, что в каждом интервале частот  $d\nu$  интенсивность света, испускаемого телом, равна интенсивности спектра черного излучения в том же интервале. Но свет, испущенный телом, состоит из двух частей: света, возникающего под влиянием падающего на тело черного излучения (эта часть включает фотолюминесценцию), и спонтанного излучения. Поэтому при этих условиях для каждого интервала частот должно иметь место следующее неравенство:

$$\text{интенсивность люминесценции} \leq \text{интенсивность черного излучения}. \quad (14)$$

Выразим это неравенство в математической форме. Допустим, что для всех рассматриваемых частот справедливо неравенство  $h\nu' \gg \kappa T$ . Согласно формуле Вина интенсивность черного излучения для таких частот выражается в виде

$$\text{const.} \cdot \nu'^3 e^{-h\nu'/\kappa T}.$$

Умножая на интенсивность  $w(v', \nu)$  света с частотой  $\nu$ , испущенного после облучения светом с частотой  $\nu'$ , и интегрируя по  $d\nu'$ , получим интенсивность в левой части неравенства (14) в следующем виде:

$$\text{const.} \cdot \int w(v', \nu) \nu'^3 e^{-h\nu'/kT} d\nu'.$$

В правой части неравенства (14) стоит выражение  $\text{const.} \cdot \nu^3 e^{-h\nu/kT}$ . Таким образом,

$$\int w(v', \nu) \nu'^3 e^{-h\nu'/kT} d\nu' \leq \nu^3 e^{-h\nu/kT}. \quad (15)$$

Интегрирование в левой части этого неравенства не должно быть непременно распространено на все значения  $\nu'$ . Неравенство, очевидно, может только усиливаться, если мы ограничимся лишь частью этих значений.

Рассмотрим малый интервал частот, в котором функция  $\nu'^3 w e^{-h\nu'/kT}$  меняется незначительно. Тогда (15) можно переписать в следующем виде:

$$\Delta\nu' w(v', \nu) \nu'^3 e^{-h\nu'/kT} \leq \nu^3 e^{-h\nu/kT}$$

или

$$w(v', \nu) \leq \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^3 \frac{e^{-h(\nu-\nu')/kT}}{\Delta\nu'}. \quad (16)$$

Это неравенство показывает, что интенсивность излучения в антистоксовой области ( $\nu > \nu'$ ) при заметных  $\nu - \nu'$  должна стать малой по сравнению с интенсивностью падающего света.

В стоксовой области ( $\nu < \nu'$ ) неравенство (16) при больших  $\nu' - \nu$  становится беспредметным, поскольку оно дает только верхний предел для  $w$ , который во всех случаях слишком высок.

Я хотел бы указать здесь, что эта статья возникла в результате дискуссий с С. И. Вавиловым, обратившим мое внимание на важность строгого приложения термодинамики к фотолюминесценции.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

J. Phys. USSR, 11, 91, 1947

Скорость «второго звука» в гелии II была с большой точностью измерена В. Пешковым [1]. Его результаты дают возможность произвести количественное сравнение развитой автором теории [2] с экспериментом. Такое сравнение полностью подтверждает общую картину, даваемую теорией, но в то же время обнаруживает заметное несоответствие между вычисленной и наблюдаемой величинами скорости (например, при температуре  $1,6^\circ\text{K}$  вычисленная скорость равна  $25 \text{ м/сек}$ , а наблюдаемая —  $19 \text{ м/сек}$ ). Хотя это несоответствие не очень велико, оно оказывается слишком большим, чтобы его можно было приписать неточности экспериментальных данных о термодинамических величинах гелия II.

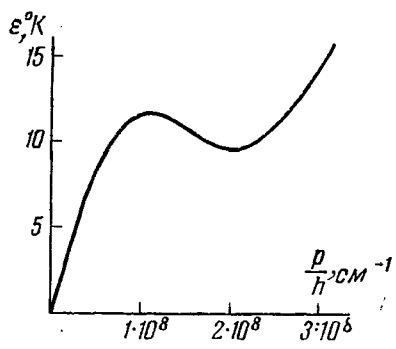
При вычислении скорости второго звука использовались формулы для термодинамических величин (энтропия, теплоемкость), выведенные в [2] в предположении о том, что энергетический спектр жидкости состоит из двух ветвей — фононной и ротонной. Знак наблюдаемого расхождения указывает, в каком направлении следует изменить эти предположения. Используя экспериментальные данные, можно формально вычислить массу ротона  $\mu$  по формулам

$$\rho_n = N\mu, \quad F_r = -NkT. \quad (1)$$

Здесь  $N$  — число ротоннов в единице объема,  $F_r$  — «ротонная» часть свободной энергии (т. е. свободная энергия без колебательной части),  $\rho_n$  — плотность «нормальной части» жидкости (фононная часть  $\rho_n$  пренебрежимо мала по сравнению с ротонной). Вычисленная таким образом масса  $\mu$  вместо того, чтобы быть постоянной, оказывается обратно пропорциональной температуре (в темпера-

турном интервале 1,3—1,7°К). Следует, однако, отметить, что, хотя сам факт непостоянства  $\mu$  несомненен, количественный закон ее изменения может быть установлен только весьма приближенно (главным образом благодаря скудости экспериментальных данных по теплоемкости гелия II).

Если не делать предположения  $\varepsilon = \Delta + p^2 / 2\mu$  о зависимости энергии ротона  $\varepsilon$  от его импульса  $p$ , а рассмотреть общую зависимость  $\varepsilon(p)$ , то вычисления по общим формулам, выведенным в [2], показывают, что в формулу  $\rho_n = N\mu$  вместо  $\mu$  входит величина  $\overline{p^2} / 3kT$  ( $\overline{p^2}$  — средний квадрат импульса). Если последняя величина обратно пропорциональна температуре, то  $\overline{p^2} = \text{const}$ , т. е. значение импульса ротона в основном лежит в окрестности некоторого  $p_0$ . На первый взгляд этот факт кажется очень странным, но его можно естественным образом объяснить, предположив, что энергетический спектр гелия II относится к типу, показанному на рис. 1. При малых импульсах элементарного возбуждения его энергия возрастает линейно (фононы), затем достигает максимума, начинает убывать и при некотором значении  $p = p_0$  функция  $\varepsilon(p)$  имеет минимум. В окрестности последнего можно написать



$$\varepsilon = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu}, \quad (2)$$

где  $\mu$  — постоянная. Для такого спектра, разумеется, нельзя говорить о фононах и ротонах, как о строго различных типах элементарных возбуждений. Было бы более корректным говорить просто о длинноволновых (малые  $p$ ) и коротковолновых ( $p$  вблизи  $p_0$ ) возбуждениях. Следует подчеркнуть, что все заключения, касающиеся сверхтекучести и всей макроскопической гидродинамики гелия II, развитые в [2], сохраняют свою справедливость также и в случае предлагаемого здесь спектра.

Должны измениться лишь формулы для термодинамических величин. Вместо формул (3) — (7) в [2] для «ротонных» частей свободной энергии, энтропии, теплоемкости (на единицу массы) и плотности «нормальной» жидкости» получается

$$F_r = - \frac{2\mu^{1/2} (kT)^{3/2} p_0^2}{(2\pi)^{3/2} \rho \hbar^3} e^{-\Delta/kT}, \quad (3)$$

$$S_r = \frac{2(k\mu)^{1/2} p_0^2 \Delta}{(2\pi)^{3/2} \rho T^{1/2} \hbar^3} \left(1 + \frac{3kT}{2\Delta}\right) e^{-\Delta/kT}, \quad (4)$$

$$C_r = \frac{2\mu^{1/2} p_0^2 \Delta^2}{(2\pi)^{3/2} \rho k^{1/2} T^{3/2} \hbar^3} \left[1 + \frac{kT}{\Delta} + \frac{3}{4} \left(\frac{kT}{\Delta}\right)^2\right] e^{-\Delta/kT}, \quad (5)$$

$$\frac{(\rho_n)_r}{\rho} = \frac{2\mu^{1/2} p_0^4}{3(2\pi)^{3/2} \rho (kT)^{1/2} \hbar^3} e^{-\Delta/kT}. \quad (6)$$

В таком виде теория содержит три константы:  $\Delta$ ,  $p_0$  и  $\mu$ . Поэтому ее трудно проверить на основании существующих сейчас экспериментальных данных. Для величин  $\Delta$ ,  $p_0$  и  $\mu$  получается

$$\frac{\Delta}{k} = 9,6^\circ, \quad \frac{p_0}{\hbar} = 1,95 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}, \quad \mu = 0,77 m_{\text{He}}. \quad (7)$$

Отметим, что  $\mu$  имеет порядок массы атома гелия  $m_{\text{He}}$ , а  $\hbar/p_0$  оказывается даже меньшим, чем атомные размеры. Значения (7) были использованы при построении кривой на рис. 1.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. Peshkov. J. Phys., 20, 389, 1946.  
[2] Л. Ландау. ЖЭТФ, 11, 592, 1941. (Собрание трудов, № 44).



## О ДВИЖЕНИИ ПОСТОРОННИХ ЧАСТИЦ В ГЕЛИИ II

Совместно с И. Я. ПОМЕРАНЧУКОМ

ДАН СССР, 59, 669, 1948

В последнее время было высказано предположение, что имеющийся в гелии в небольшом количестве ( $10^{-6}$ — $10^{-7}$ ) изотоп гелия с массой 3 не участвует в сверхтекучем движении гелия II [1]. Цель настоящей заметки показать, что любые посторонние атомы или молекулы (включая изотопы гелия  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^6$ , а также и электроны, попавшие извне в массу гелия II), когда их концентрация мала, не могут участвовать в сверхтекучем движении.

Рассмотрим для доказательства энергетический спектр гелия II, содержащего малое количество посторонних атомов. При этом можно не учитывать взаимодействия посторонних атомов друг с другом и рассматривать только их взаимодействие с атомами основного изотопа гелия. Получаемый таким образом энергетический спектр содержит в себе кроме фононного и ротонного спектра чистого гелия II [2, 3] дополнительные энергетические уровни, объясняемые наличием посторонних атомов. Каждый такой атом не может находиться в определенном месте жидкого гелия II, а должен бродить, подобно электронам в металлах, двигаться через весь гелий II (существование локальных уровней в кристаллах связано с квазиклассичностью кристаллической решетки, которая не имеет места в гелии II).

Движению каждого постороннего атома через гелий сопоставляется определенный вектор импульса, от которого непрерывным образом зависит энергия. Мы получаем непрерывный энергетический спектр, характеризующийся для каждого сорта посторонних атомов определенной зависимостью энергии от импульса. Эта зависимость может быть различна для различных сортов атомов. Наинизшему энергетическому состоянию может соответствовать любой импульс  $p$ , равный нулю либо имеющий некоторое ко-

нечное значение  $p_0$ . Разлагая энергию в ряд по степеням  $p - p_0$  вблизи минимума энергии, получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu}. \quad (1)$$

Здесь  $\mu$  — эффективная масса, как правило, равная по порядку величины массе постороннего атома, исключая электрон, для которого эффективная масса может быть значительно больше электронной.

Если  $p_0 = 0$ , то вместо (1) мы имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + p^2 / 2\mu.$$

При малых  $p$  разложение энергии в ряд по степеням импульса начинается с квадратичного члена, а не с линейного, как в случае фононов.

Как известно, наличие линейного члена в случае фононов вызвано специальными причинами, не имеющими места при рассматриваемых сейчас условиях.

В силу законов сохранения импульса и энергии возбуждение фононов посторонним атомом с энергией (1) становится невозможным, как только скорость атома  $(p - p_0) / \mu$  оказывается меньшей, чем скорость звука. Что касается возбуждения ротонов, то оно требует энергии большей, чем  $\Delta = 9,6^\circ\text{K}$  [3]. Когда скорость атома меньше определенной скорости, зависящей от приведенной массы, возбуждение ротонов невозможно. В случае  $\text{He}^3$  эта критическая скорость оказывается порядка скорости звука. Таким образом, практически все посторонние атомы,двигающиеся со скоростью, меньшей некоторой критической скорости, не могут передавать свою энергию сверхтекучей части гелия II. Пробег таких атомов определяется их столкновениями с фононами и ротонами. При не очень низких температурах вероятность столкновения с фононами меньше, чем с ротонами, так как ротонное сечение — порядка атомных сечений, а фононное сечение мало ввиду большой длины волны фононов, имеющих в гелии II (рассеяние фононов примесями пропорционально четвертой степени частоты). Благодаря столкновениям с фононами и ротонами атомы примеси будут двигаться вместе с нормальной частью гелия II и не смогут участвовать в сверхтекучем движении. Таким образом, в нормальную часть гелия II кроме массы, связанной с ротонами и фононами, будет входить также дополнительная масса, обязанная посторонним атомам. Величина этой массы, содержащейся в 1 см<sup>3</sup>, равна

$$\frac{np_0^2}{3kT}$$

( $n$  — число атомов примеси, заключенных в  $1 \text{ см}^3$ ). Если  $p_0 = 0$ , то дополнительная масса равна  $n\mu$ .

Так как  $\text{He}^3$  должен двигаться с нормальной частью гелия II, то при сверхтекучем вытекании гелия  $\text{He}^3$  должен будет оставаться в исходном сосуде. Именно такой результат был получен недавно Доунтом и др. [4], которые смогли уменьшить концентрацию  $\text{He}^3$  в вытекающей сверхтекучим образом массе  $\text{He}$  II в 50 раз. При этом неучастие  $\text{He}^3$  в сверхтекучем движении Доунт и др. пытаются связать с вопросом о свойстве сверхтекучести чистого  $\text{He}^3$ . Однако согласно изложенным выше соображениям вопрос о том, сверхтекуч или не сверхтекуч чистый  $\text{He}^3$ , не имеет никакого отношения к его участию в сверхтекучем движении  $\text{He}$  II. Любые посторонние атомы, содержащиеся в  $\text{He}$  II, не будут участвовать в сверхтекучем движении  $\text{He}$  II. В частности, это относится и к  $\text{He}^6$ , хотя сам по себе  $\text{He}^6$ , возможно, обладает свойством сверхтекучести.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Franck. Phys. Rev., 70, 561, 1946.
- [2] Л. Ландау. ЖЭТФ, 11, 592, 1941. (Собрание трудов № 44).
- [3] L. Landau. J. Phys., 11, 91, 1947. (Собр. трудов, № 61).
- [4] J. D. Daut et al. Phys. Rev., 72, 502, 1947.

Рассматривая вопрос об аннигиляции медленных позитронов и электронов, И. Померанчук [1] обнаружил, что в предельном случае неподвижных частиц вероятность двухфотонной аннигиляции обращается в нуль, если спины электрона и позитрона параллельны.

В связи с этим возникает вопрос, не является ли это обстоятельство проявлением некоторого общего строгого правила запрета, ограничивающего возможные значения момента количества движения системы из двух фотонов с равной нулю суммой импульсов; такое правило может быть следствием специфических особенностей фотонов, связанных с поперечностью электромагнитных волн.

Волновую функцию системы из двух фотонов можно представить в виде тензора второго ранга  $E_{ik}$ , составленного билинейно из компонент электромагнитного поля обоих фотонов. Если сумма импульсов фотонов равна нулю, то  $E_{ik}$  будет функцией только от разности  $r_2 - r_1$  координат обеих частиц; введя единичный вектор  $n$ , направленный от первого фотона ко второму ( $r_2 - r_1 = nr$ ), будем рассматривать  $E_{ik}$  как функцию  $n$  (при заданном  $r$ ).

Поперечность поля каждого из фотонов приводит к тому, что тензор  $E_{ik}$  ортогонален к направлению их движения:

$$E_{ik}n_k = 0, E_{ik}n_i = 0. \quad (1)$$

Перестановка обоих фотонов означает перестановку индексов тензора  $E_{ik}$  вместе с одновременным изменением знака  $n$ . Поскольку фотоны подчиняются статистике Бозе, то должно быть

$$E_{ik}(n) = E_{ki}(-n). \quad (2)$$

Разделим  $E_{ik}$  на симметрическую и антисимметрическую по индексам  $i, k$  части:

$$E_{ik} = S_{ik} + A_{ik}.$$

Соотношению (2) (а также соотношениям ортогональности (1)) должен, очевидно, удовлетворять каждый из тензоров  $S_{ik}$ ,  $A_{ik}$  в отдельности. Отсюда получим для симметрической части соотношение

$$S_{ik}(\mathbf{n}) = S_{ik}(-\mathbf{n}) \quad (3)$$

и для антисимметрической

$$A_{ik}(\mathbf{n}) = -A_{ik}(-\mathbf{n}). \quad (4)$$

Поведение волновой функции при изменении знака  $\mathbf{n}$  определяет четность состояния системы частиц (фотонов); поэтому функция  $S_{ik}$  соответствует четным, а  $A_{ik}$  — нечетным состояниям. Выясним, каковы могут быть моменты системы в состояниях, описывающихся этими функциями.

Антисимметрический тензор второго ранга дуален, как известно, некоторому вектору  $\mathbf{A}$  ( $A_i = e_{ihl}E_{hl}$ , где  $e_{ihl}$  — совершенно антисимметрический единичный псевдотензор 3-го ранга); ортогональность тензора  $A_{ik}$  к вектору  $\mathbf{n}$  означает, что векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{n}$  параллельны. Поэтому можно написать  $\mathbf{A} = \varphi(\mathbf{n})$ , где  $\varphi$  — скаляр, причем согласно (4) должно быть  $\varphi(\mathbf{n}) = \varphi(-\mathbf{n})$ .

Из последнего равенства видно, что скаляр  $\varphi$  может быть линейно построен из шаровых функций только четного порядка (включая порядок нуль).

Соответствие с полным моментом системы  $J$  устанавливается следующим образом. Хотя разделение момента фотона на орбитальный момент и спин не имеет, как известно, никакого физического смысла, но формально мы можем ввести «спин»  $S$ , соответствующий рангу тензорной волновой функции, и «орбитальный момент»  $L$ , соответствующий порядку входящей в нее шаровой функции (такое сопоставление означает чисто математическую формальность, выражающую свойства преобразования волновой функции по отношению к группе вращений).

В данном случае волновая функция сводится к скаляру  $\varphi$ , чему соответствует  $S = 0$ , так что  $J = L$ . Таким образом, тензор  $A_{ik}$  соответствует нечетным состояниям с четным моментом.

Произвольный симметрический тензор второго ранга  $S_{ik}$  сводится, как известно, к скаляру ( $S_{ii}$ ) и к симметрическому тензору ( $S'_{ik}$ ) с равным нулю следом ( $S'_{ii} = 0$ ). В силу (3) как тот, так и другой четны по отношению к изменению знака  $\mathbf{n}$ ; они выражаются, следовательно, через шаровые функции четного порядка  $L$ .

Скаляру  $S_{ii}$  соответствует «спин»  $S = 0$ , а потому полный момент  $J = L$  четен (включая значение нуль).

Тензору  $S'_{ik}$  соответствует «спин»  $S = 2$ . Складывая по правилу сложения моментов этот «спин» с четным «орбитальным моментом», найдем, что при заданном четном  $J \neq 0$  возможны три состояния (с  $L = J - 2, J, J + 2$ ), а при нечетном  $J \neq 1$  — два состояния (с  $L = J - 1, J + 1$ ). Исключения составляют  $J = 0$  с одним состоянием ( $L = 2$ ) и  $J = 1$  с одним состоянием ( $L = 2$ ).

В этих подсчетах, однако, еще не учтено условие ортогональности тензора  $S_{ik}$  вектору  $n$ . Поэтому из полученного числа состояний надо еще вычесть число состояний, которые соответствуют симметричному тензору 2-го ранга, «параллельному» вектору  $n$ ; такой тензор можно написать в виде  $B_i n_k + B_k n_i$ , где  $B(n)$  — вектор, для которого согласно условию (3) должно иметь место соотношение  $B(n) = -B(n)$ .

Этот вектор должен, следовательно, выражаться через шаровые функции только нечетного порядка  $L$ . Замечая также, что вектору соответствует «спин»  $S = 1$ , найдем, что для каждого четного полного момента  $J \neq 0$  возможны два состояния (с  $L = J - 1, J + 1$ ), а для нечетного  $J$  — одно состояние (с  $L = J$ ). Особый случай представляет  $J = 0$  с одним состоянием ( $L = 1$ ).

Сводя полученные результаты, получим таблицу, указывающую число возможных четных и нечетных состояний системы из двух фотонов (с равной нулю суммой импульсов) для различных значений полного момента  $J$  ( $k$  — целое положительное число, отличное

$J$	Четные	Нечетные
0	1	1
1	—	—
$2k$	2	1
$2k + 1$	1	—

Мы видим, что при нечетных  $J$  отсутствуют нечетные состояния, а значение  $J = 1$  вообще невозможно<sup>1</sup>.

Если применить эти результаты к аннигиляции позитрония, то мы придем к выводу (помня, что четность состояния позитро-

<sup>1</sup> Заметим, что невозможность значения  $J = 1$  в частном случае двух дипольных квантов (с равной нулю суммой импульсов) была недавно доказана Бальсейро [2].

ния определяется величиной  $(-1)^l$ , где  $l$  — орбитальный момент), что обычная двухфотонная аннигиляция строго запрещена во всех состояниях с нечетными орбитальным и полным моментами\*, а также во всех состояниях с равным единице полным моментом.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. Померанчук. ДАН СССР, 60, 213, 1948.  
[2] J. Balseiro. Phys. Rev., 71, 79, 1947.

\* Здесь не учтено, что электрон и позитрон обладают различными внутренними четностями. С учетом этого обстоятельства четность состояния позитрона равна  $(-1)^{l+1}$ , и правило отбора запрещает двухфотонную аннигиляцию при нечетном  $J$  и четном  $l$ . — *Прим. ред.*

ДАН СССР, 61, 253, 1948;

Phys Rev., 75, 884, 1949

За время, прошедшее после опубликования моей работы о теории сверхтекучести гелия II [1] (см. также [2, 3]), эти вопросы обсуждались в литературе, и я хотел бы высказать свою точку зрения по поводу некоторых делавшихся при этом утверждений (в особенности в связи с последней работой Л. Тиссы [4])<sup>1</sup>.

Возможность введения для любой слабо возбужденной макроскопической системы понятия об «элементарных возбуждениях», описывающих «коллективное» движение частиц и характеризующихся определенными энергией  $\varepsilon$  и импульсом  $p$  (вне зависимости от конкретной функциональной связи  $\varepsilon(p)$ , т. е. от вида спектра), является неизбежным следствием квантовой механики. Именно это, на мой взгляд, бесспорное предположение лежит в основе микроскопической части развитой мной теории. Напротив, рассмотрение движения отдельных атомов в системе сильно взаимодействующих частиц очевидным образом противоречит основным принципам квантовой механики<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Я хотел бы воспользоваться случаем отметить несомненную заслугу Л. Тиссы, заключающуюся во введении им еще в 1938 г. идеи о макроскопическом описании гелия II с помощью разделения его плотности на две части и введения двух полей скоростей, что дало ему возможность предсказать существование двух видов звуковых волн в гелии II (подробная статья Тиссы [5] была получена в СССР ввиду условий военного времени только в 1943 г.; короткая заметка [6] осталась, к сожалению, в свое время не замеченной мной).

<sup>2</sup> Такого рода рассуждения имеются и в последней статье Тиссы. Также полностью противоречат квантовой механике утверждения вроде: «каждый вихревой элемент может быть связан с определенной массой, заключенной в объеме, в котором вихрь отличен от нуля» ([4], стр. 852).



Что касается конкретного вида энергетического спектра, то общие соображения позволяют лишь заключить (см. [1]), что при малых энергиях должна иметь место «фононная» зависимость энергии элементарного возбуждения от его импульса:  $\varepsilon = cr$  ( $c$  — скорость звука). Это обстоятельство само по себе достаточно для строгого доказательства сверхтекучести жидкости при достаточно низких температурах (см. [1], § 5). Полезно указать, что Н. Н. Боголюбову недавно удалось с помощью остроумного применения вторичного квантования определить в общем виде энергетический спектр бозе-эйнштейновского газа со слабым взаимодействием между частицами [7]. Как и следовало ожидать, автоматически возникло понятие об элементарных возбуждениях, причем их энергия в функции от импульса изображается одной кривой, имеющей линейный начальный участок. Хотя модель такого газа и не имеет прямого отношения к реальному гелию II, но она показывает, каким образом математический формализм квантовой механики фактически приводит к подобному энергетическому спектру у микроскопического тела.

Дальнейший ход кривой  $\varepsilon(p)$  не может быть установлен в общем виде на основании одних только теоретических соображений. Предположенный мной первоначально спектр, состоящий из двух отдельных ветвей ( $\varepsilon = cr$  и  $\varepsilon = \Delta + p^2/2\mu$ ), состоит из пересекающихся кривых и уже поэтому неудовлетворителен. Эти соображения, а также тщательная обработка новых экспериментальных данных привели меня к спектру, состоящему всего из одной кривой; после линейного начального участка функция  $\varepsilon(p)$  проходит через максимум, затем имеет минимум и снова возрастает<sup>3</sup>.

Наряду с микроскопической теорией и основанным на ней вычислением термодинамических величин гелия II в моей работе 1941 г. выведены гидродинамические уравнения для гелия II. Эта часть теории не зависит от предположений о виде энергетического спектра, и, по существу, уравнения, как и обычные уравнения гидродинамики, однозначно определяются законами сохранения и принципом относительности Галилея.

Из этих же уравнений была получена формула, выражающая скорость второго звука через термодинамические величины гелия II. Я хотел бы подчеркнуть, что эта формула может быть в настоящее время проверена экспериментально непосредственно с помощью данных об энтропии и теплоемкости гелия, а также непосредственно измеренных значений  $\rho_n$  [8, 9]. Такое сравнение обнаруживает

<sup>3</sup> Замечание Тиссы о том, что такое предположение «стремится изменить теорию в неправильном направлении» (см. [4], стр. 852), вряд ли может быть обосновано.

прекрасное совпадение теории с экспериментом, вполне лежащее в пределах точности экспериментальных данных. Поэтому нельзя не признать недоразумением утверждение Тиссы, что эта формула будто бы расходится с опытом.

Уравнения гидродинамики гелия II, предложенные Тиссой, по моему мнению, совершенно неудовлетворительны. Легко видеть, что в своей точной форме эти уравнения даже не удовлетворяют закону сохранения импульса! <sup>4</sup> Если и может идти речь о выводе из них полученных мной результатов, то лишь поскольку речь идет об уравнениях первого приближения, в которых пренебрегается членами второго порядка относительно скоростей жидкости. В этом случае сведение их к моим уравнениям может быть без труда достигнуто путем соответствующего определения неопределенной величины  $\rho_n$ , входящей в теорию Тиссы; это и делает Тисса в своей последней работе. К сожалению, однако, он пользуется при этом для получения правильного результата неправильным утверждением о пропорциональности между энтропией и нормальной частью плотности гелия II. Попытка Тиссы термодинамически обосновать это утверждение совершенно неубедительна, а из формул, приведенных в [1] и [3], видно, что оно фактически и не имеет места <sup>5</sup>.

Далее, Тисса исключает фононы из «нормальной части» гелия II, аргументируя тем, что фононы «связаны с жидкостью как целым» в противоположность «возбужденным атомам гелия в возбужденных состояниях блоховского типа». Для такого исключения фононов нужно, очевидно, либо 1) чтобы фононы свободно проходили через щели, не рассеиваясь их стенками (я уже не говорю об их столкновениях друг с другом, которые легко рассчитываются гидродинамически и оказываются отнюдь не мало вероятными), либо 2) чтобы движущийся фононный газ не обладал импульсом, между тем как обратное («звуковой ветер») достаточно хорошо известно. Обе альтернативы столь очевидно ошибочны, что я совершенно не могу представить себе, какой из них придерживается Тисса. Я уже не говорю о том, что часть нормальной плотности

<sup>4</sup> Например, не равна нулю производная по времени от полного импульса

$$\int (\rho_n v_n + \rho_s v_s) dV.$$

<sup>5</sup> По случайным причинам температурные зависимости ротонных частей  $\rho_n$  и энтропии, даваемые формулами, приведенными в [3], оказываются очень похожими (они отличаются лишь множителем  $(1 + \frac{3}{2} \frac{T}{\Delta})$ ). С этим и связано обстоятельство, что Тиссе удалось добиться хорошего согласования с экспериментальными значениями скорости второго звука в области не слишком низких температур, где ротонны преобладают над фононами.

гелия, происходящая от фононов, может быть строго вычислена [4]<sup>6</sup>.

Правда, опубликованные экспериментальные данные недостаточны для опровержения утверждения Тиссы благодаря сравнительно малой роли фононов в термодинамических величинах гелия II при температурах, до которых производились измерения. Я, однако, не сомневаюсь в том, что при температурах 1,0—1,1°K скорость второго звука будет иметь минимум, как это следует из вычисленных мной термодинамических величин гелия II.

Тисса излагает также некоторые соображения о вязкости гелия II, ограничиваясь, однако, при этом не очень убедительными замечаниями о необходимости различать вязкости «жидкостного» типа и «газового» типа, в результате которых он приходит к выводу о падении вязкости с понижением температуры. В действительности этот вопрос является с теоретической точки зрения в высшей степени сложным и требует тщательного исследования различных элементарных процессов столкновения фононов и ротонов друг с другом. Такое исследование показывает, что коэффициент вязкости гелия II может быть представлен в виде суммы двух частей — «ротонной» и «фононной», причем первая оказывается не зависящей от температуры, а вторая быстро растет с ее понижением (все это относится, конечно, лишь к области температур, не слишком близких к  $\lambda$ -точке, где совокупность фононов и ротонов можно рассматривать как «идеальный газ»). Эти результаты находятся в полном согласии с недавними измерениями Э. Андроникашвили [9], которые соответственно противоречат рассуждениям Тиссы.

Наконец, я хотел бы остановиться на вопросе о поведении в гелии II растворенных в нем посторонних атомов (например, атомов изотопа He<sup>3</sup>). В недавней работе автора совместно с И. Померанчуком [10] было показано путем рассмотрения энергетического спектра квантовой жидкости со включенным в нее посторонним атомом, что наличие таких атомов приводит к появлению «элементарных возмущений» нового типа, которые входят в «нормальную часть» жидкости наряду с фононами и ротонами и, таким образом, должны отфильтровываться при пропускании гелия II через тонкую щель (это было фактически наблюдало Даунтом и др. [11]).

<sup>6</sup> Замечание Тиссы о неубедительности моих рассуждений, так как они «используются для получения сведений о кинетическом коэффициенте (вязкости) исходя из соображений равновесия» ([4], стр. 852), основано на чистом недоразумении. Общеизвестно, что равномерное вращение допускает строгое термодинамическое рассмотрение и в указанных рассуждениях такое рассмотрение применяется лишь для определения увлекающейся при вращении сосуда части массы жидкости, откуда, конечно, никаких заключений о величине вязкости не может быть сделано и не делается.

Необходимо подчеркнуть, что это обстоятельство не имеет никакого отношения к вопросу о том, обнаружило ли бы вещество примеси (в частности, чистый изотоп  $\text{He}^3$ ) само по себе свойство сверхтекучести в противоположность высказывавшемуся по этому поводу в литературе взгляду (Франк [12], а также Тисса [4]).

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Ландау. ЖЭТФ, 11, 592, 1941. (Собр. трудов, № 44).
- [2] Л. Ландау. ЖЭТФ, 14, 112, 1944. (Собр. трудов № 51).
- [3] L. Landau. J. Phys. USSR, 11, 91, 1947. (Собр. трудов, № 61).
- [4] L. Tisza. Phys. Rev., 72, 838, 1947.
- [5] L. Tisza. J. de Phys. et Rad., 1, 165, 350, 1940.
- [6] L. Tisza. C. R., 207, 1035, 1186, 1938.
- [7] N. Bogolubov. J. Phys. USSR, 11, 23, 1947.
- [8] Э. Андроникашвили. ЖЭТФ, 16, 780, 1946; 18, 424, 1948.
- [9] Э. Андроникашвили. ЖЭТФ, 18, 429, 1948.
- [10] Л. Ландау, И. Померанчук. ДАН СССР, 59, 669, 1948. (Собр. трудов, № 62).
- [11] J. G. Daut et al. Phys. Rev., 72, 502, 1947.
- [12] J. Franck. Phys. Rev., 70, 561, 1946.

Совместно с С. И. ПЕКАРОМ

ЖЭТФ. 18, 419, 1948

Предполагается, что носителем тока в кристаллах с ионной решеткой является не зонный электрон проводимости, а полярон. Рассматривается консервативное движение полярона как целого. Даются зависимость энергии системы от скорости поступательного движения полярона и уравнение движения полярона во внешнем поле.

### Введение

Существующая теория электронной проводимости диэлектриков и полупроводников предполагает, что электрон проводимости движется в одной из «разрешенных» энергетических зон кристалла, а  $\psi$ -функция электрона представляет собой волну, амплитуда которой постоянна во всем объеме кристалла. Наличие в кристалле запрещенных зон подтверждено экспериментально: об этом свидетельствует сам факт существования диэлектриков, исследования температурной зависимости электропроводности, изучение внутреннего фотоэффекта, фотоэффекта из металла в диэлектрик и пр. Другие черты упомянутой теории не нашли прямого экспериментального подтверждения, а иногда даже противоречат экспериментальным фактам.

Но, прежде всего (по крайней мере для ионных кристаллов), следует указать на внутреннее противоречие существующей теории: именно, обычно при рассмотрении квантовых состояний электрона проводимости предполагается, что ионы закреплены в узлах решетки; при этом электрон оказывается в периодическом поле. В действительности, однако, ионы движутся, а состояние электрона адиабатически следует за движением ионов. С. И. Пекар рассмотрел такое движение [1] и показал, что электрон проводимос-

ти своим электрическим полем будет диэлектрически поляризовать ионный кристалл. Оказалось, что уже в самом начале процесса поляризации поляризованный кристалл представляет для электрона потенциальную яму с дискретным спектром, и электрон, израсходовав часть своей энергии на поляризацию кристалла, переходит на дискретный уровень в локальное состояние; затем поляризация кристалла усиливается, а уровень электрона и энергия всей системы понижаются. Равновесие наступает, когда энергия всей системы достигает минимума; при этом образуется полярон, подробно рассмотренный одним из авторов в предыдущих работах [2, 3]. Таким образом, зонное состояние электрона проводимости не соответствует экстремуму энергии системы, т. е. неустойчиво. Медленные электроны проводимости должны непрерывно переходить в состояние поляронов. Время развала зонного состояния медленного электрона должно быть порядка  $10^{-13}$  сек; следовательно, необходимо пересмотреть основы существующей теории проводимости.

С. И. Пекар [1, 4] высказал новую точку зрения на электронную проводимость ионных кристаллов, согласно которой носителем тока является полярон, а не свободный электрон в зоне проводимости. Полярон во внешнем электрическом поле должен двигаться, подобно отрицательному заряду; при этом все локальное состояние как целое должно перемещаться вдоль поля (инерционная поляризация кристалла должна следовать за движением полярона). Вычисленная подвижность полярона [4] по порядку величины как раз согласуется с подвижностью носителя тока, определенной экспериментально как произведение электропроводности на постоянную Холла.

В настоящей статье вычисляется эффективная масса полярона.

### Эффективная масса полярона

В диэлектрической поляризации ионного кристалла можно выделить инерционную и безынерционную части [2]. Безынерционная часть поляризации характеризуется квадратом показателя преломления света (в области, где дисперсионная кривая имеет плато); предполагается, что она полностью следует за движением электрона проводимости. В результате безынерционной поляризации узлов кристалла полем электрона на последний действует добавочная сила, обладающая периодами решетки; эту силу мы включим в общий периодический потенциал электрона в кристалле. Для решения предстоящих задач можно воспользоваться известным методом эффективной массы электрона [5], т. е. игнорировать периодический потенциал, одновременно заменив массу электрона эффективной массой  $\mu$ .

Предположение о том, что состояние электрона  $\psi(r, t)$  адиабатически следует за движением ионов, а также что радиус  $\psi$ -состояния превышает постоянную решетки, приводит к следующему выражению для энергии системы  $H$ :

$$H = \frac{\hbar^2}{2\mu} \int |\nabla\psi|^2 d\tau - \int pD[\psi] d\tau + U_p. \quad (1)$$

Здесь  $p(r, t)$  — инерционная часть удельной поляризации диэлектрика [2],

$$D[\psi] = e \int |\psi(r_1)|^2 \frac{r-r_1}{|r-r_1|^3} d\tau_1 \quad (2)$$

есть квантовомеханическое среднее значение электростатической индукции электрона. В формуле (1) первый член представляет кинетическую энергию электрона, второй член — энергию взаимодействия электрона с поляризованным кристаллом, а  $U_p$  — полная энергия кристалла в предположении, что электрон внезапно удален (потенциальная и кинетическая энергии ионов).

Согласно вариационному принципу квантовой механики (заменяющему уравнение Шредингера) для каждой заданной поляризации  $p(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$  определяется как минимальный функционал (1) при добавочном условии

$$\int |\psi|^2 d\tau = 1; \quad (3)$$

следовательно,

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \delta \int |\nabla\psi|^2 d\tau - \int p\delta D[\psi] d\tau = 0. \quad (4)$$

В дальнейшем предположим, что  $\psi$  уже определена таким образом; тогда  $H$  является функцией Гамильтона, описывающей движение ионов кристалла.

Предположим, что кристалл представляет собой систему ионов, совершающих малые гармонические колебания, и выразим  $H$  через соответствующие нормальные координаты и скорости ионов. Движение ионов определяется обычными каноническими уравнениями Гамильтона (при дифференцировании  $H$  следует учесть (4)). Последние являются уравнениями вынужденных колебаний ионов под действием силы  $D(r, t)$ .

Рассмотрим частный случай движения, когда полярон движется поступательно как целое со скоростью  $v$ , т. е. когда

$$\psi = \psi(r - vt), \quad D = D(r - vt), \quad p = p(r - vt). \quad (5)$$

Разлагая  $D$  и  $p$  в ряд Фурье

$$D = \sum_k D_k e^{ik(r-vt)} = \sum_k D_k e^{i(kr-\omega_k t)}, \quad \omega_k = kv, \quad (6)$$

$$p = \sum_k p_k e^{i(kr-\omega_k t)}, \quad (7)$$

заметим, что вынужденные колебания ионов, вызванные силой  $D$ , можно получить как простую суперпозицию колебаний, вызванных отдельными гармониками вида

$$D_k e^{i(kr-\omega_k t)}. \quad (8)$$

Эти гармоники, конечно, не являются обычными электромагнитными волнами (скорость  $v \neq c$ , другой закон дисперсии, не поперечны). Поскольку, однако, размер полярона превышает постоянную решетки, в разложении (6) господствуют гармоники, у которых длина волны также превышает постоянную решетки. В этом случае задача сводится к известному предельному случаю длинных волн, и при рассмотрении вынужденных колебаний ионов можно заменить гармоники (8) электромагнитными волнами, у которых вектор индукции имеет ту же амплитуду и частоту. Эта замена позволяет выразить поляризацию диэлектрика через диэлектрическую постоянную  $\epsilon(\omega)$ , определяющую дисперсию электромагнитных волн в кристалле:

$$p_k = \frac{c(\omega_k)}{4\pi} D_k, \quad c(\omega) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon(\omega)} \quad (9)$$

(при выводе выражения для  $c(\omega)$  следует иметь в виду, что  $p$  — только инерционная часть удельной поляризации [2]). Предполагается, что кристалл поляризуется изотропно.

Соотношения (9) представляют собой решение уравнений вынужденных колебаний. Уравнения (2), (4) и (9) определяют функции  $\psi$ ,  $D$ ,  $p$ . Очевидно, что всем трем уравнениям одновременно можно удовлетворить функциями вида (5).

Для определения эффективной массы полярона необходимо вычислить энергию (1) с точностью до членов порядка  $v^2$ . В соответствии с этим и учитывая четность функции  $\epsilon(\omega)$  (мнимой частью  $\epsilon$ , т. е. поглощением, мы пренебрегаем), представим  $c(\omega)$  в виде ряда:

$$c(\omega_k) = c_0 + c_2 \omega_k^2 + \dots, \quad (10)$$

$$c_0 = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon(0)}; \quad c_2 = \frac{c_0}{\omega_1^2}, \quad (11)$$



где  $\omega_1$  — предельная частота оптических колебаний ионов (которую не следует смешивать с «частотой дисперсии»). Поскольку

$$\omega_k^2 \mathbf{D}_k e^{i(k\mathbf{r} - \omega_k t)} = - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}_k e^{i(k\mathbf{r} - \omega_k t)},$$

удобно записать уравнения вынужденных колебаний (9) в просуммированном виде:

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ c_0 \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) - c_2 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \right]. \quad (12)$$

Теперь легко получить выражение для энергии кристалла  $U_p$ . Учитывая, что за единицу времени над единицей объема кристалла совершается работа

$$\mathbf{D}\dot{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{D}}{4\pi} [c_0 \dot{\mathbf{D}} - c_2 \ddot{\mathbf{D}}], \quad (13)$$

и полагая энергию единицы объема в отсутствие поля (полярон далеко) равной нулю, получаем

$$U_p = \frac{c_0}{8\pi} \int \mathbf{D}^2 d\tau + \frac{3c_2}{8\pi} \int \dot{\mathbf{D}}^2 d\tau. \quad (14)$$

Подставляя (12) и (14) в выражение энергии системы (1), получаем

$$H = \frac{\hbar^2}{2\mu} \int |\nabla \psi|^2 d\tau - \frac{c_0}{8\pi} \int \mathbf{D}^2[\psi] d\tau + \frac{c_2}{8\pi} \int \dot{\mathbf{D}}^2[\psi] d\tau. \quad (15)$$

Случай неподвижного полярона ( $v = 0$ ,  $\dot{\mathbf{D}} = 0$ ) был подробно рассмотрен одним из авторов в предыдущих работах [2, 3]. Были получены основное состояние полярона  $\psi = \psi_0(\mathbf{r})$  и соответствующая энергия

$$H_0 = -0,0547 \frac{\mu e^4}{\hbar^2} c_0^2. \quad (16)$$

Принимая это решение за нулевое приближение и переходя к случаю равномерно движущегося полярона, можно показать, что  $\psi$ -функция и энергия получают малые поправки, если скорость

$$v \ll r_m \omega_1, \quad (17)$$

где  $r_m$  — радиус полярона [2].

Энергия с точностью до членов порядка  $v^2$  запишется в виде

$$H = H_0 + \frac{1}{2} M v^2, \\ M = \frac{c_2}{3} \left[ \int_0^\infty \left( \frac{\partial \mathbf{D}[\psi_0]}{\partial r} \right)^2 r^2 dr + 2 \int_0^\infty \mathbf{D}^2[\psi_0] dr \right]. \quad (18)$$

Если подставить  $D[\psi_0]$  из [3], эффективная масса полярона оказывается равной

$$M = 5,8 \cdot 10^{-3} \left( \frac{\mu e^2}{\hbar^2} \right)^3 e^2 c_0^3 c_2 = 9,08 \cdot 10^3 \left( \frac{\mu}{m} \right)^3 c_0^3 c_2 \text{ грамм}, \quad (19)$$

где  $m$  — масса свободного электрона,  $\mu$  — эффективная масса электрона в старой зоне проводимости. Обычно  $M$  оказывается значительно больше массы электрона (для кристалла NaCl в 432 раза больше).

Рассматривая движение полярона во внешнем электрическом поле  $E$  и приравнивая мощность, развиваемую этим полем, приращению энергии (18) за секунду, получим для полярона обычное уравнение движения

$$M\dot{v} = eE. \quad (20)$$

Выше предполагалось, что равномерное движение полярона является консервативным, т. е. что гармоники (8) поддерживают стационарные вынужденные колебания ионов, но не генерируют собственных колебаний ионов. В действительности, однако, вследствие некоторого ангармонизма вынужденные колебания ионов генерируют собственные колебания (выделяется теплота). При этом возникает некоторое торможение полярона. Энергию, отдаваемую поляроном решетке, можно формально рассчитать как поглощение в кристалле упомянутых выше электромагнитных волн, эквивалентных гармоникам (8). Такой расчет показал [4], что сила торможения пропорциональна скорости, а подвижность полярона во внешнем поле

$$u = 0,262 \cdot 10^{-13} \frac{e(0)^{3/2}}{b(\mu/m)^3 c_0^3} \text{ абс. ед.} \quad (21)$$

Коэффициент  $b$  определяется экспериментально путем измерения поглощения электромагнитных волн в кристалле:  $b\omega$  есть мнимая часть показателя преломления кристалла для волн с частотой  $\omega \ll \omega_1$ . Сила торможения  $R$  выражается через подвижность и скорость полярона формулой

$$R = -ev/u. \quad (22)$$

Пренебрегая слабым торможением и квантуя движение полярона как целого (без поля), можно убедиться в том, что оно описывается плоскими волнами (подобно движению центра тяжести любой сложной части с внутренними степенями свободы). Поэтому зависимость плотности энергетических уровней поступательного движения полярона от его кинетической энергии имеет

такой же вид, как в случае свободной частицы с массой  $M$  и спином  $1/2$ .

Термодинамически равновесная концентрация поляронов дается обычной формулой

$$n = \frac{2}{h^3} (2\pi M kT)^{3/2} e^{(\zeta - E_p)/kT},$$

где  $\zeta$  — химический потенциал электронов в кристалле. Однако коэффициент при экспоненциальном множителе обычно на много порядков больше, чем в случае электронов. Благодаря взаимодействию поляронов с тепловыми колебаниями ионов устанавливается максвелловское распределение скоростей поляронов.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. И. Пекар. ЖЭТФ, 17, 868, 1947.
- [2] С. И. Пекар. ЖЭТФ, 16, 341, 1946.
- [3] С. И. Пекар. ЖЭТФ, 16, 335, 1946.
- [4] С. И. Пекар. ЖЭТФ, 18, 105, 1948.
- [5] С. И. Пекар. ЖЭТФ, 16, 993, 1946.

# РАСЩЕПЛЕНИЕ ДЕЙТРОНА ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ С ТЯЖЕЛЫМИ ЯДРАМИ

Совместно с Е. М. ЛИФШИЦЕМ

ЖЭТФ, 18, 750, 1948

Развит метод, позволяющий произвести точное вычисление эффективного сечения расщепления дейтрона на нейтрон и протон при пролетании в кулоновом поле. Определено распределение вылетающих частиц по энергиям, а также их угловое распределение.

В предыдущих работах Л. Ландау [1] была развита общая теория, позволяющая вычислять (в квазиклассическом приближении) вероятности различных процессов, сопровождающих столкновения. В дальнейшем эта теория была применена Е. Лифшицем [2] к столкновениям дейтронов с тяжелыми ядрами, сопровождающимся одной из следующих реакций: 1) распад дейтрона с вылетом нейтрона и протона, 2) распад с захватом нейтрона ядром и вылетом протона, 3) распад с захватом протона и вылетом нейтрона, 4) захват дейтрона ядром. При этом речь идет о не слишком быстрых дейтронах — их энергия должна быть расположена достаточно ниже кулоновского потенциального барьера ядра. Соблюдение этого условия позволяло пользоваться общей квазиклассической теорией Ландау. Эта теория в своем общем виде позволяет, однако, определять эффективные сечения лишь с экспоненциальной точностью, т. е. без медленно меняющегося (с энергией сталкивающихся частиц) коэффициента перед экспоненциальным множителем с большой отрицательной экспонентой (большая по сравнению с единицей величина абсолютного значения экспоненты является условием применимости квазиклассического метода).

Соответственно этому в [2] был определен лишь ход эффективных сечений с энергией дейтрона, а не их абсолютные значения. При этом рассматривались столкновения с равным нулю орби-

тальным моментом дейтрона относительно ядра («лобовые» столкновения), дающие наибольший вклад в эффективное сечение. Естественно, что угловое распределение вылетающих частиц при этом не могло быть определено.

В настоящей работе развит новый метод, позволяющий произвести точное вычисление эффективных сечений указанных процессов. Он применен к первой из перечисленных реакций — распаду дейтрона с освобождением как протона, так и нейтрона. Для остальных реакций в эффективное сечение должен войти «коэффициент прилипания» нейтрона или протона к ядру; неопределенность этого множителя в значительной мере лишает смысла точное вычисление эффективного сечения этих реакций.

### § 1. Вывод общей формулы

Уравнение Шредингера, описывающее систему нейтрон + протон в духе теории Бете — Пайерлса, можно написать в виде

$$\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_n + \Delta_p) \Psi + (E - \varepsilon) \Psi = -\frac{\hbar^2}{m} 4\pi \sqrt{\frac{\kappa\alpha}{2\pi}} \psi_d \delta(r_n - r_p) \quad (1)$$

Здесь  $m$  — масса протона;  $\varepsilon$  — энергия связи дейтрона; посредством  $\kappa$  обозначена постоянная

$$\kappa = \frac{\sqrt{m\varepsilon}}{\hbar}; \quad (2)$$

$E$  — кинетическая энергия дейтрона;  $\alpha$  — численный множитель, смысл которого объяснен ниже;  $\Delta_n$  и  $\Delta_p$  — операторы Лапласа соответственно по координатам  $r_n$  и  $r_p$  нейтрона и протона;  $\psi_d$  — волновая функция движения дейтрона как целого, т. е. плоская волна:

$$\psi_d \sim e^{\frac{i}{\hbar} p_d r_d}, \quad (3)$$

где  $p_d = \sqrt{4Em}$  — импульс дейтрона, а  $r_d = (r_p + r_n)/2$  — радиус-вектор его центра инерции.

Действительно, с одной стороны, при  $r_n \neq r_p$  уравнение (1) соответствует свободному движению нейтрона и протона с общей энергией  $E - \varepsilon$ . С другой стороны, легко видеть, что при  $r_n - r_p \rightarrow 0$  это уравнение дает правильную волновую функцию дейтрона:

$$\Psi = \psi_d \sqrt{\frac{\alpha\kappa}{2\pi}} \frac{e^{-\kappa r}}{r}; \quad (4)$$

множитель при  $\psi_d$  есть нормированная на единицу волновая функция относительного движения частиц в дейтроне ( $r = |r_p - r_n|$ ), соответствующая его основному состоянию в теории Бете — Пайерлса. Численный множитель  $\alpha$  вводится в нормировочный коэффициент этой функции (см. [3], § 12) для улучшения точности теории Бете — Пайерлса (и соответствует в известном смысле учету конечности радиуса действия сил между нейтроном и протоном в дейтроне); из сравнения с экспериментальными данными о рассеянии нейтронов на протонах получается  $\alpha \approx 3/2$  [4].

Для того чтобы убедиться в том, что функция (4) удовлетворяет уравнению (1), преобразуем последнее к координатам  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_d$  вместо  $\mathbf{r}_n$  и  $\mathbf{r}_p$ :

$$\frac{\hbar^2}{4m} \Delta_d \Psi + \frac{\hbar^2}{m} \Delta \Psi + (E - \varepsilon) \Psi = -4\pi \frac{\hbar^2}{m} \sqrt{\frac{\alpha\kappa}{2\pi}} \psi_d \delta(\mathbf{r}).$$

При подстановке сюда  $\Psi$  из (4) и (3) получается соотношение

$$(\Delta - \kappa^2) \frac{e^{-\kappa r}}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r}),$$

удовлетворяющееся тождественно.

Уравнение Шредингера для движения в поле тяжелого ядра получается, очевидно, из (1) вычитанием из энергии  $E$  потенциальной энергии  $Ze^2/r_p$  протона в кулоновом поле. Таким образом, имеем исходное уравнение:

$$\Delta_n \Psi + \Delta_p \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{Ze^2}{r_p} - \varepsilon \right) \Psi = -8\pi \sqrt{\frac{\alpha\kappa}{2\pi}} \psi_d \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p). \quad (5)$$

Здесь  $\psi_d$  — волновая функция движения дейтрона как целого в поле ядра, выбранная в виде, применяющемся в задаче о резерфордском рассеянии; это — функция, складывающаяся на бесконечности из падающей плоской и рассеянной расходящейся сферической волн. Мы будем предполагать эту функцию нормированной так, чтобы падающая плоская волна была нормирована на единицу плотности потока.

Для решения уравнения (5) разложим искомую функцию  $\psi$  по волновым функциям  $\psi_p$  движения протона в кулоновом поле. Эти функции удовлетворяют уравнению Шредингера

$$\Delta_p \psi_p + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E_p - \frac{Ze^2}{r_p} \right) \psi_p = 0 \quad (6)$$

( $E_p$  — энергия протона), причем на бесконечности  $\psi_p$  складывается из плоской волны (с волновым вектором  $\mathbf{k}_p = \mathbf{p}_p / \hbar$ ,  $\mathbf{p}_p$  —

импульс вылетающего протона) и сходящейся сферической волны<sup>1</sup>. Мы будем предполагать функции  $\psi_p$  нормированными таким образом, чтобы плоская волна в ее асимптотическом выражении оказалась нормированной на  $\delta$ -функцию в импульсном пространстве.

Коэффициенты разложения функции  $\Psi$  по функциям  $\psi_p$  будут функциями координат нейтрона, так что можно написать

$$\psi = \int a_n(\mathbf{r}_n) \psi_p(\mathbf{r}_p) d\tau_p \quad (7)$$

( $d\tau_p$  — элемент объема импульсного пространства протона; у функций  $\psi_p$  и  $a_n$  следовало бы приписать в качестве индекса импульс вылетающего протона  $p_p$ , чего мы для упрощения обозначений не делаем).

Подставляя (7) в уравнение (5) с учетом уравнения (6) и воспользовавшись обычным образом взаимной ортогональностью различных функций  $\psi_p$ , получим следующее уравнение для функций  $a_n(\mathbf{r}_n)$ :

$$\Delta_n a_n + \frac{2m}{\hbar^2} E_n a_n = -8\pi \sqrt{\frac{\alpha\kappa}{2\pi}} \psi_d(\mathbf{r}_n) \psi_p^*(\mathbf{r}_n), \quad (8)$$

где  $E_n = E - \epsilon - E_p$  — энергия нейтрона. Это уравнение — типа уравнения запаздывающих потенциалов, и его решение на больших расстояниях  $\mathbf{R} = R\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{R}$ ) от начала координат может быть написано непосредственно по аналогии с известной формулой теории излучения:

$$a_n = 2 \sqrt{\frac{\alpha\kappa}{2\pi}} \frac{e^{ik_n R}}{R} \int \psi_d(\mathbf{r}) \psi_p^*(\mathbf{r}) e^{-ik_n \mathbf{r}} dV. \quad (9)$$

Здесь  $k_n = nk_n$ ,  $k_n = \sqrt{2mE_n/\hbar}$ .

Очевидно, что  $a_n(\mathbf{r}_n)$  есть не что иное, как волновая функция нейтрона, образовавшегося при распаде дейтрона вместе с протоном с импульсом  $p_p$  (которому соответствует волновая функция  $\psi_p$ ). Умножая квадрат модуля  $a_n$  на скорость нейтрона  $v_n = \sqrt{2E_n/m}$  и элемент сферической поверхности  $R^2 d\Omega_n$ , мы получим поток нейтронов в элементе телесного угла  $d\Omega_n$  (вокруг направления  $\mathbf{n}$ ). При выбранной нами нормировке волновых

<sup>1</sup> Как известно, при рассмотрении задачи о столкновении, сопровождающемся вылетанием из центра в определенном направлении новой частицы, волновая функция последней не должна содержать в своем асимптотическом выражении расходящейся сферической волны (см, например, теорию фотоэффекта или теорию тормозного рентгеновского излучения, сопровождающегося ионизацией атома, [5], гл. VI, § 4 и гл. VII, § 2).

функций эта величина представляет собой эффективное сечение рассматриваемого процесса, отнесенное к единице объема импульсного пространства протона. Другими словами,

$$d\sigma = v_n R^2 |a_n|^2 p_p^2 dp_p do_p do_n$$

есть эффективное сечение распада дейтрона на нейтрон и протон, вылетающие соответственно в элементах телесного угла  $do_n$  и  $do_p$ , причем импульс протона имеет значение в интервале  $dp_p$ . Подставляя сюда выражение (9) для  $a_n$ , получим окончательную формулу:

$$d\sigma = 2\alpha \frac{\hbar}{\pi} \sqrt{m\varepsilon} k_n k_p \left| \int \psi_d(\mathbf{r}) \psi_p^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}_n \mathbf{r}} dV \right|^2 dE_n do_n do_p. \quad (10)$$

Мы ввели здесь волновые векторы нейтрона и протона и отнесли эффективное сечение к интервалу энергии нейтрона, связанной с энергией протона  $E_p = p_p^2 / 2m$  законом сохранения  $E_p + E_n = E - \varepsilon$ .

## § 2. Вычисление интеграла

Как уже было указано, в качестве волновой функции дейтрона надо воспользоваться кулоновой волновой функцией непрерывного спектра (в поле отталкивания), асимптотическое выражение которой складывается из падающей плоской волны (с волновым вектором  $k_d$ ,  $k_d = \sqrt{4mE} / \hbar$ ) и расходящейся сферической волны. Нормируя ее указанным выше образом, имеем (см., например, [5], гл. II, § 9):

$$\psi_d = \frac{1}{\sqrt{v_d}} e^{-\pi n_d d^2} \Gamma(1 + in_d) e^{i\mathbf{k}_d \mathbf{r}} F(-in_d, 1, i(k_d \mathbf{r} - \mathbf{k}_d \mathbf{r})), \quad (11)$$

где  $v_d = \sqrt{E/m}$  — скорость нейтрона, а  $n_d$  обозначает величину

$$n_d = \frac{2mZe^2}{\hbar^2 k_d} = \beta \sqrt{\frac{\varepsilon}{E}}.$$

Мы ввели удобное для дальнейшего обозначение:

$$\beta = \frac{Ze^2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}. \quad (12)$$

$\Gamma(z)$  есть  $\Gamma$ -функция, а  $F(\alpha, \gamma, z)$  — вырожденная (конфлюэнтная) гипергеометрическая функция.

Волновая же функция протона должна содержать на бесконечности плоскую волну с волновым вектором  $k_p$ ,  $k_p = \sqrt{2mE_p} / \hbar$ ,



и сходящуюся сферическую волну. Нормируя ее указанным в § 1 образом, имеем (см. [5], гл. II, § 9)

$$\psi_p = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-\pi n_p/2} \Gamma(1 - in_p) e^{ik_p r} F(in_p, 1, -i(k_p r + \mathbf{k}_p r)), \quad (13)$$

где

$$n_p = \frac{mZe^2}{\hbar^2 k_p} = \beta \sqrt{\frac{\varepsilon}{2E_p}}.$$

Подставляя (11) и (13) в (10) и замечая, что

$$|\Gamma(1 + in_d)|^2 = \Gamma(1 + in_d) \Gamma(1 - in_d) = \frac{\pi n_d}{\text{sh } n_d \pi},$$

$$|\Gamma(1 + in_p)|^2 = \frac{\pi n_p}{\text{sh } n_p \pi},$$

получаем

$$d\sigma = \frac{\alpha \beta^3 m^{3/2} \varepsilon^{3/2}}{\pi^2 \hbar^5 \text{sh } \pi n_p \text{sh } \pi n_d} \frac{k_n}{k_d^2} |I|^2 e^{-2\pi(n_p + n_d)} dE_n d\Omega_n d\Omega_p, \quad (14)$$

где посредством  $I$  обозначен интеграл

$$\begin{aligned} I &= \int e^{iqr} F(-in_d, 1, \rho_d) F(-in_p, 1, \rho_p) dV, \\ \rho_d &= i(k_d r - \mathbf{k}_d r), \quad \rho_p = i(k_p r + \mathbf{k}_p r), \\ q &= \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_p - \mathbf{k}_n. \end{aligned} \quad (15)$$

Этот интеграл встречается в зоммерфельдовской теории непрерывного рентгеновского спектра и равен (см. [5], гл. VII, § 6)

$$iI = \left[ \frac{d}{d\lambda} B F(-in_d, -in_p, 1, \xi) \right]_{\lambda=}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} B &= 4\pi (q^2 - 2q\mathbf{k}_1 - 2\lambda k_d)^{in_d} (q^2 + 2q\mathbf{k}_p - 2\lambda k_p)^{in_p} q^{-2(in_d + in_p + 1)}, \\ \xi &= 2 \frac{q^2 (k_d k_p + \mathbf{k}_d \mathbf{k}_p) - 2(q\mathbf{k}_d + \lambda k_d)(q\mathbf{k}_p - \lambda k_p)}{(q^2 - 2q\mathbf{k}_d - 2\lambda k_d)(q^2 + 2q\mathbf{k}_p - 2\lambda k_p)}, \end{aligned} \quad (17)$$

а  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  — гипергеометрическая функция.

Формулы (14) — (17) — точные; в них не сделано предположения о квазиклассичности задачи. Далее мы будем считать, что энергия дейтрона (а потому и протона) настолько мала, что применимо квазиклассическое приближение; это значит, что  $n_d, n_p \gg 1$ . Поэтому, в частности, в формуле (14) можно написать

$$\text{sh } n_d \pi \approx \frac{e^{\pi n_d}}{2}, \quad \text{sh } n_p \pi \approx \frac{e^{\pi n_p}}{2}.$$

Далее, надо учесть, что эффективное сечение как функция энергии освобождающегося нейтрона имеет наибольшее значение при  $E_n = 0$  и экспоненциально убывает с увеличением  $E_n$  (это было показано в [2] и подтверждается дальнейшими результатами). Как функция от направления вылетающего протона эффективное сечение максимально при движении протона в направлении, обратном направлению падающего дейтрона (что соответствует «лобовому» столкновению); мы увидим ниже, что эффективное сечение экспоненциально убывает при отклонении от этого направления.

Эти обстоятельства позволяют при вычислении интеграла  $I$  положить во всех неэкспоненциальных выражениях (экспоненциальный множитель содержится, как мы увидим, в гипергеометрической функции  $F(-in_d, -in_p, 1, \xi)$ )

$$k_n = 0, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_p, \quad k_d k_n = -k_d k_p. \quad (18)$$

Соответственно для энергии протона имеем при этом  $E_p = E - \varepsilon$ , и  $k_p$  должно быть взято с этим значением  $E_p$ . Выражение (16), (17) для  $I$  при этом сильно упрощается. Легко видеть, что производная  $(d\xi/d\lambda)_{\lambda=0}$  при условиях (18) обращается в нуль, так что член в  $I$ , содержащий производную от гипергеометрической функции, выпадает. В аргументе же  $\xi$  гипергеометрической функции, разумеется, нельзя просто положить (18), так как этот аргумент войдет в экспоненту. Мы можем, однако, разложить  $\xi$  по степеням энергии нейтрона  $E_n$  и угла  $\theta_p$ , образуемого векторами  $\mathbf{k}_p$  и  $-\mathbf{k}_d$  ( $\theta_p = 0$  соответствует движению протона в направлении, обратном движению падающего дейтрона). Такому же разложению надо подвергнуть один из параметров ( $in_p$ ) гипергеометрической функции.

Приведенное таким образом вычисление приводит к следующему выражению для квадрата модуля интеграла:

$$|I|^2 = \frac{\beta^2 m e}{\hbar^2} \frac{64\pi^2}{(k_d + k_p)^8 (k_d - k_p)^2} |F(-in, -in\eta, 1, \xi)|^2, \quad (19)$$

где параметры гипергеометрической функции равны

$$n = \frac{2mZe^2}{\hbar^2 k_d}, \quad \eta = \frac{n_p}{n_d} = \frac{k_d}{2k_p} \left(1 + \frac{k_n^2}{2k_p^2}\right), \quad (20)$$

а ее аргумент определяется формулами

$$\begin{aligned} \xi &= -4k_d k_p (k_d - k_p)^{-2} (1 + \xi_1), \\ \xi_1 &= -\frac{\theta_p^2}{4} + \frac{(3k_p^2 - k_d^2) k_n^2}{2k_p^2 (k_d - k_p)^2} - \frac{k_n^2 \sin^2 \theta_n}{(k_d - k_p)^2} + \frac{k_n \theta_p \sin \theta_n \cos \varphi}{k_d - k_p}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь и ниже  $k_d$  и  $k_n$  имеют значения

$$\hbar k_d = 2\sqrt{mE}, \quad \hbar k_p = \sqrt{2m(E - \varepsilon)}; \quad (22)$$

$\theta_n$  — угол между векторами  $k_n$  и  $-k_d$ , т. е. угол между направлением вылетающего нейтрона и направлением, обратным направлению падающего дейтрона;  $\varphi$  — разность азимутов векторов  $k_n$  и  $k_p$  относительно вектора  $-k_d$  как полярной оси.

Ввиду того что параметр  $n$  предполагается большим, можно воспользоваться асимптотической формулой для гипергеометрической функции, полученной Зоммерфельдом (см. [5], дополнение 16D). Для квадрата модуля этой функции имеем

$$|F(-in, -in\eta, 1, \xi)|^2 = \frac{\exp\{-2\pi n\eta + n f(u) + n f^*(u^*)\}}{2\pi |u|^2 |f''(u)| n} \quad (23)$$

где

$$f(u) = i \ln [u^n (1-u)^{-n} (1-u\xi)^{-1}], \quad (24)$$

причем в качестве  $u$  должен быть взят корень квадратного уравнения  $f'(u) = 0$ , лежащий в верхней полуплоскости. Фазы каждой из величин  $u$ ,  $1-u$ ,  $1-u\xi$  в (24) должны пониматься как углы, описываемые лучом, вращающимся в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки) от правой действительной полуоси до момента пересечения соответствующей точки в комплексной плоскости<sup>2</sup>.

При вычислении предэкспоненциального множителя в (23) можно, конечно, снова полагать  $k_n = 0$ ,  $\theta_p = 0$ ; экспонента же должна быть разложена по степеням этих малых величин. В результате вычисления получается следующий результат:

$$\begin{aligned} |F|^2 &= \frac{(E + \varepsilon)^2}{8\pi\beta\varepsilon [\sqrt{2E} - \sqrt{E - \varepsilon}]^2} \exp\{\dots\}, \\ \{\dots\} &= 2\pi n_p + 2\pi n_d + \beta \left[ -\sqrt{\frac{8\varepsilon}{E - \varepsilon}} \arccos \sqrt{\frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon}} + \right. \\ &+ 4\sqrt{\frac{\varepsilon}{E}} \arccos \sqrt{\frac{E}{E + \varepsilon}} - \frac{E_n \sqrt{2\varepsilon}}{(E - \varepsilon)^{3/2}} \arccos \sqrt{\frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon}} + \\ &\left. + \frac{4\varepsilon\xi_1}{[\sqrt{2E} + \sqrt{E - \varepsilon}]^2} \right]. \quad (25) \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Формула (23) применима лишь при  $\eta < 1$ . При  $\eta = k_d/2k_p$  это условие эквивалентно требованию  $E > 2\varepsilon$ . Если же  $E < 2\varepsilon$ , то в (19) параметры  $n$  и  $\eta$  должны быть определены как  $n = 2mZe^2/\hbar^2 k_p$ ,  $\eta = n_d/n_p \approx 2k_p/k_d$  (тогда снова будет  $\eta < 1$ ). Вычисление, произведенное с этими  $\eta$  и  $n$ , приводит, как и следовало ожидать, к точно тому же результату (25).

## § 3. Эффективное сечение

Подставляя (25) в (19), а затем в (14), получим искомое эффективное сечение

$$d\sigma = \beta^3 \frac{\hbar^2}{m\epsilon} \frac{\alpha \epsilon^2 \sqrt{\epsilon E_n} dE_n d\theta_n d\phi_p}{\sqrt{2} \pi E (E + \epsilon)^2 [\sqrt{2E + \epsilon} + \sqrt{E - \epsilon}]^2} e^{-\beta\Phi} \quad (26)$$

( $\beta$  из (12)), где

$$\Phi = \Phi_0 + E_n \Phi_1 + E_n \sin^2 \theta_n \cdot \Phi_2 + \theta_p^2 \Phi_3 + \theta_p \sqrt{E_n} \sin \theta_n \cos \phi \cdot \Phi_4, \quad (27)$$

причем

$$\Phi_0(E) = \sqrt{\frac{3\epsilon}{E - \epsilon}} \arccos \sqrt{\frac{E - \epsilon}{E + \epsilon}} - 4 \sqrt{\frac{\epsilon}{E}} \arccos \sqrt{\frac{E}{E + \epsilon}}, \quad (28)$$

$$\Phi_1(E) = \frac{\sqrt{2\epsilon}}{(E - \epsilon)^{3/2}} \arccos \sqrt{\frac{E - \epsilon}{E + \epsilon}} - \frac{2\epsilon(E - 3\epsilon)}{(E + \epsilon)^2(E - \epsilon)}, \quad (29)$$

$$\Phi_2(E) = \frac{4\epsilon}{(E + \epsilon)^2}, \quad (30)$$

$$\Phi_3(E) = \frac{\epsilon}{[\sqrt{2E + \epsilon} + \sqrt{E - \epsilon}]^2}, \quad (31)$$

$$\Phi_4(E) = \frac{4\epsilon}{(E + \epsilon)[\sqrt{2E + \epsilon} + \sqrt{E - \epsilon}]}. \quad (32)$$

Полное эффективное сечение  $\sigma_0(E)$  как функция энергий дейтрона получается интегрированием (26) по энергии нейтрона (которое можно производить ввиду быстрой сходимости интеграла в пределах от 0 до  $\infty$ ) и по всем направлениям нейтрона и протона (интегрирование по  $\theta_p$  тоже можно производить в пределах от 0 до  $\infty$ ). В результате вычисления получается<sup>3</sup>:

$$\sigma_0 = \sqrt{2} \pi^{3/2} \frac{\hbar^2}{m\epsilon} \frac{\alpha \beta^{3/2} \epsilon^{3/2}}{E(E + \epsilon)^2 \Phi_1^{3/2}} e^{-\beta\Phi(E)}. \quad (33)$$

Экспонента  $\beta\Phi_0$  совпадает, естественно, с найденной в [1].

После интегрирования эффективного сечения (26) по одним только направлениям протона (по  $d\theta_p$ ) угол  $\theta_n$  из получающегося

<sup>3</sup> Интегрирование по  $d\theta_p$  производится путем введения новых переменных интегрирования  $\theta_x = \theta_p \cos \phi$ ,  $\theta_y = \theta_p \sin \phi$  (причем  $d\theta_p \approx \theta_p d\theta_p d\phi$  заменяется на  $d\theta_x d\theta_y$  и интегрирование производится в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ ). После этого интегрирования результат оказывается не зависящим от угла  $\theta_n$  и интегрирование по  $E_n$  производится непосредственно.

выражения выпадает. Другими словами, распределение нейтронов по направлениям (не коррелированное с направлением протонов) оказывается изотропным. Для распределения нейтронов по энергиям при этом получается следующее выражение:

$$d\sigma(E_n) = \sigma_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\beta\Phi_1)^{1/2} E_n^{1/2} e^{-\beta E_n} \Phi_1 dE_n. \quad (34)$$

Экспонента в этой формуле совпадает с найденной в [1] (что, однако, не являлось заранее очевидным).

Угловое распределение протонов получается интегрированием (26) по  $dE_n do_n$ . Вычисление приводит к формуле <sup>4</sup>

$$d\sigma(\theta_p) = \sigma_0 \frac{\beta\Phi_1\Phi_2}{\pi(\Phi_1 + \Phi_2)} \exp\left\{-\beta\theta_p^2 \frac{\Phi_1\Phi_2}{\Phi_1 + \Phi_2}\right\} d\theta_p. \quad (35)$$

Таким образом, распределение по углам  $\theta_p$  оказывается гауссовым с максимумом в направлении, обратном направлению дейтрона.

Пределы применимости формулы (33) для эффективного сечения определяются тем, что экспонента  $\beta\Phi_0$  не должна быть мала по сравнению с единицей:  $\beta\Phi_0(E) \gtrsim 1$ <sup>5</sup>. Это условие нарушается при достаточно больших энергиях дейтрона, но существует область (при достаточно больших  $Z$ ), в которой  $E \gg \epsilon$ , и формула (33) все же применима. В этой области имеем

$$\Phi_0 = \frac{8\epsilon^2}{3E^2}, \quad \Phi_1 = \frac{32\epsilon^2}{3E^3},$$

и формула (33) приобретает вид

$$\sigma_0 = \frac{\hbar^2}{m\epsilon} \frac{\beta^{1/2}(3\pi)^{3/2}}{2^7} \left(\frac{E}{\epsilon}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{8\beta\epsilon^2}{3E^2}\right). \quad (36)$$

Для численных вычислений представим формулу (28) в виде

$$\sigma_0 = \sqrt{ZA(E)} \cdot 10^{-Zf(E)} \cdot 10^{-2\beta} \text{ см}^2. \quad (37)$$

Функции  $A(F)$  и  $f(E)$  протабулированы в табл. 1. Для энергии связи дейтрона принято значение  $\epsilon = 2,19 \text{ Мэв}$  [6].

<sup>4</sup> Интегрирование по  $dE_n do_n$  производится путем перехода от «сферических» к «декартовым» координатам в импульсном пространстве нейтрона.

<sup>5</sup> Использованная нами асимптотическая формула (23) получается посредством применения метода перевала к комплексному интегралу, определяющему гипергеометрическую функцию. Исследование делаемых при этом приближений (в применении к нашему конкретному случаю) обнаруживает достаточность условия  $\beta\Phi_0 \gtrsim 1$  (а не обязательно  $\beta\Phi_0 \gg 1$ ).

Таблица 1

$E, \text{ Мэв}$	$A(E)$	$10f(E)$	$E, \text{ Мэв}$	$A(E)$	$10f(E)$
2,6	0,11	3,68	5,4	4,4	0,375
2,8	0,25	2,59	5,6	4,8	0,343
3,0	0,44	1,97	5,8	5,6	0,316
3,2	0,64	1,57	6,0	6,0	0,292
3,4	0,88	1,29	6,5	7,2	0,242
3,6	1,2	1,08	7,0	8,4	0,206
3,8	1,5	0,926	7,5	10	0,176
4,0	1,8	0,804	8,0	11	0,152
4,2	2,1	0,703	8,5	13	0,133
4,4	2,5	0,624	9,0	14	0,118
4,6	2,9	0,556	9,5	16	0,105
4,8	3,3	0,500	10,0	18	0,093
5,0	3,7	0,451	10,5	19	0,084
5,2	4,0	0,412	11,0	21	0,075

Таблица 2

$E, \text{ Мэв}$	$\delta_n, \text{ Мэв}$	$E, \text{ Мэв}$	$\delta_n, \text{ Мэв}$
2,6	0,55	5,4	19
3,0	1,6	6,0	28
3,4	3,2	7,0	45
3,8	5,2	8,0	69
4,2	7,9	9,0	99
4,6	11	10,0	140
5,0	15	11,0	180

В табл. 2 приведены численные значения величины

$$\delta_n = \frac{Z}{\beta\Phi_1(E)}.$$

Согласно формуле (34), написанной в виде

$$d\sigma(E_n) \sim e^{-ZE_n/\delta_n},$$

величина  $\delta_n$  определяет ширину распределения вылетающих нейтронов по энергиям.

Экспериментальных данных об эффективных сечениях  $(d, pn)$ -реакций в настоящее время не имеется. Представляет интерес сравнить эффективные сечения, даваемые формулой (37), с измеренными экспериментально сечениями  $(d, p)$ - и  $(d, n)$ -реакций. Данные об абсолютных значениях этих сечений имеются в настоящее время только для  $\text{Bi}$  ( $Z = 83$ ). Тэтель и Корк [7] измеряли сечения для реакций  $\text{Bi}^{209}(d, p)\text{RaE}^{210}$  и  $\text{Bi}^{209}(d, n)\text{Po}^{210}$ . Индикатором служила активность продуктов реакции ( $\text{RaE}$  и  $\text{Po}$ ), так что реакция  $\text{Bi}^{209}(d, pn)\text{Bi}^{209}$ , естественно, ускользала от наблюдения. Приводим некоторые из полученных этими авторами значений эффективных сечений  $(d, p)$ -,  $(d, n)$ -реакций (точность этих значений невелика) вместе со значениями сечения  $(d, pn)$ -реакции, вычисленными по формуле (37):

$E, \text{ Мэв}$	$\sigma_{d,p}$	$\sigma_{d,n}$	$\sigma_{d,np} \cdot 10^{28} \text{ см}^2$
8,2	18	3,4	630
6,3	1,5	0,12	40

Мы видим, что вычисленные значения  $\sigma_{d,np}$  значительно превышают сечения  $\sigma_{d,p}$  и  $\sigma_{d,n}$ , так что можно думать, что в действительности в данном случае основной является  $(d, pn)$ -реакция.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Ландау. Phys. Zs. Sowjet., 1, 88, 1932 (Собр. трудов № 6).
- [2] Е. Ли́фшиц. ЖЭТФ, 8, 930, 1938.
- [3] Г. Бете, Р. Бечер. Физика атомного ядра, ч. I. Харьков, 1938.
- [4] Я. Смороди́нский. ДАН СССР, 60, 217, 1948.
- [5] A. Sommerfeld. Atombau und Spekrallinien, Bd II. Braunschweig, 1939.
- [6] W. E. Stephens. Rev. Mod. Phys., 19, 19, 1947.
- [7] H. E. Tattel, J. M. Cork. Phys. Rev., 74, 159, 1947.

## ТЕОРИЯ ВЯЗКОСТИ ГЕЛИЯ II.

### 1. СТОЛКНОВЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ГЕЛИИ II

Совместно с И. М. ХАЛАТНИКОВЫМ

ЖЭТФ 19, 637, 1949

На основе теории сверхтекучести гелия II рассматривается явление вязкости в гелии II. Произведены вычисления эффективных сечений рассеяния элементарных возбуждений (фононов и ротонов).

П. Л. Капица показал, что при протекании через капилляр или узкую щель гелий II не обнаруживает вязкости. Это явление объясняется тем, что при протекании гелия II через узкую щель сверхтекучая часть жидкости протекает без трения, в то время как нормальная часть задерживается благодаря трению и протекает через ту же щель значительно медленнее [1, 2].

В то же время измерения вязкости гелия II по затуханию крутильных колебаний диска, погруженного в жидкость, обнаружили отличную от нуля вязкость [3]. Сам по себе этот результат не удивителен и качественно легко объясняется теорией, согласно которой колеблющийся в гелии II диск тормозится из-за трения о нормальную часть. Тем не менее до сих пор не было совпадений в измерениях вязкости различными авторами.

Так, Кеезом и Мак-Вуд [3]<sup>1</sup> получили зависимость вязкости гелия II от температуры, обнаруживающую заметное падение вязкости при удалении от  $\lambda$ -точки в сторону низких температур.

Указанные авторы предполагали, что колеблющийся в гелии II диск тормозится всей жидкостью. В действительности, как уже

<sup>1</sup> Значения коэффициента вязкости, полученные в [3], несколько завышены, так как указанные авторы для учета поправки на глубину проникновения применяли ошибочную формулу, принадлежащую Мак-Вуду. В конечном счете эта ошибочная формула давала поправку с неправильным знаком.



указывалось ранее [4], колеблющийся диск тормозится только нормальной частью гелия II. Поэтому для получения из опытов Кеезома и Мак-Вуда правильных значений коэффициента вязкости  $\eta$  необходимо разделить значения, полученные этими авторами, на  $\rho_n / \rho$ . В результате такого пересчета обнаруживается, что от 2 до 1,5° К коэффициент вязкости остается почти постоянным и равным приблизительно  $1,4 \cdot 10^{-5}$  пуаз. Получающийся при низких температурах (ниже 1,5° К) разброс точек столь велик, что, естественно, вызывает сомнения в точности опытов при этих температурах, и поэтому из данных Кеезома и Мак-Вуда нельзя сделать с полной уверенностью даже качественного вывода о температурной зависимости коэффициента вязкости при более низких температурах.

Э. Андроникашвили [5] исследовал температурную зависимость  $\rho_n / \rho$  методом крутильных колебаний. В этих исключительно тонких опытах стопка алюминиевых дисков, насаженных на общую ось, погружалась поочередно в гелий II, в гелий I и в вакуум. Отношение  $\rho_n / \rho$  было связано очень простой формулой с периодами колебаний такой системы. Из наблюдавшихся в этих же опытах логарифмических декрементов затухания системы в гелии II можно было вычислить коэффициент вязкости для различных температур. При этом было установлено, что от 1,9 до 1,5° К коэффициент вязкости остается постоянным в пределах точности опыта ( $1 \cdot 10^{-5}$  пуаз). Таким образом, указанные опыты дали картину, качественно сходную с полученной путем пересчета данных Кеезома и Мак-Вуда в той же области температур.

В последнее время Андроникашвили [6] произвел непосредственные измерения коэффициента вязкости гелия II в широком температурном интервале от  $\lambda$ -точки до 1,35° К. Для температур, лежащих выше 1,5° К, его результаты в основном совпадают с полученными им ранее. Однако при более низких температурах обнаруживается заметный рост коэффициента вязкости при понижении температуры.

Настоящая работа посвящена теоретическому рассмотрению вопроса о вязкости гелия II. Однозначно вытекающий при этом из теории температурный закон для коэффициента вязкости оказывается в хорошем согласии с последними опытами Андроникашвили.

Рассмотрение задачи о вязкости гелия II мы начнем с обсуждения вопроса о взаимодействии возбуждений друг с другом,

## § 1. Введение

Точная форма энергетического спектра гелия II по понятным причинам не может быть установлена. Однако, исходя из достаточно общих соображений, удастся определить форму энергетической кривой в наиболее существенных ее местах.

Согласно [4, 7] энергетический спектр гелия II представляется в следующем виде. В начальной его части, при малых значениях импульса  $p$  энергия  $\varepsilon$  есть линейная функция  $p$ :

$$\varepsilon = cp, \quad (1.1)$$

где  $c$  — скорость звука. Соответствующие элементарные возбуждения представляют собой звуковые кванты, т. е. фононы. Однако из многочисленных опытов с гелием II следует, что кроме фононов в гелии II существуют элементарные возбуждения другого типа. Для возможности существования этих возбуждений, обычно называемых ротонами, энергетическая кривая должна обладать минимумом при некотором значении импульса  $p = P_0$ . Вблизи этого минимума энергию ротонов  $E$  можно разложить в ряд по степеням разности  $(p - P_0)$ . Таким образом, с точностью до членов второго порядка имеем для энергии ротонов выражение

$$E = \Delta + \frac{(p - P_0)^2}{2\mu}, \quad (1.2)$$

где  $\Delta$  и  $P_0$  — некоторые параметры, а  $\mu$  — эффективная масса ротона. Обе части спектра можно совместить в виде единой энергетической кривой. В таком едином спектре строго разделить элементарные возбуждения на два типа — фононы и ротоны — невозможно. Можно говорить только о длинноволновых возбуждениях (малые  $p$ ) и коротковолновых возбуждениях (большие  $p$  вблизи  $P_0$ ).

Из соображений удобства мы сохраняем термины «фонон» и «ротон», называя длинноволновые возбуждения фононами, а коротковолновые — ротонами.

Не очень близко от  $\lambda$ -точки, когда число фононов и ротонов невелико, можно рассматривать их совокупность, как смесь двух идеальных газов — газа фононов и газа ротонов. Фононный газ подчиняется статистике Бозе. Для ротонов можно применять статистику Больцмана, поскольку содержащийся в энергии член  $\Delta \gg kT$  делает распределение ротонов нечувствительным к типу статистики.

В начале спектра энергия  $\varepsilon$  зависит линейно от величины импульса  $p$ . Однако для фононов большей энергии становится уже заметным эффект дисперсии, т. е. отклонения от линейного зако-

на. Учет дисперсии оказывается существенно необходимым при вычислении эффективного сечения рассеяния фонона фононом.

Ясно, что поскольку точная форма энергетического спектра неизвестна, то задача о дисперсии не может быть решена точно. Однако из имеющихся данных об энергетической кривой для малых значений импульса и вблизи минимума можно попытаться вычислить коэффициенты в разложении энергии по степеням импульса  $p$ . Для этого построим интерполяционную четырехчленную формулу с неопределенными пока коэффициентами

$$\varepsilon^2 = A_1 p^2 + A_2 p^4 + A_3 p^6 + A_4 p^8. \quad (1.3)$$

Выражения (1.1) и (1.2) дают четыре условия:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_{p=0} = c, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_{p=P_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p^2}\right)_{p=P_0} = \frac{1}{\mu}, \quad \varepsilon(P_0) = \Delta, \quad (1.4)$$

позволяющие найти четыре коэффициента:  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и  $A_4$  в формуле (1.3). Значения этих коэффициентов оказываются равными

$$\begin{aligned} A_1 &= c^2, & A_2 &= \frac{1}{4P_0^2} \left( 24 \frac{\Delta^2}{P_0^2} + \frac{\Delta}{\mu} - 12c^2 \right); \\ A_3 &= \frac{1}{P_0^4} \left( 3c^2 - 8 \frac{\Delta^2}{P_0^2} - \frac{\Delta}{2\mu} \right); \\ A_4 &= -\frac{1}{4P_0^6} \left( 4c^2 - 12 \frac{\Delta^2}{P_0^2} - \frac{\Delta}{\mu} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Извлечем квадратный корень из выражения (1.3) и, ограничиваясь только первыми двумя членами, получим

$$\varepsilon = c(p - \gamma p^3), \quad (1.6)$$

где  $\gamma = -A_2/2c^2$ . Значение  $\gamma$ , вычисленное с помощью известных значений параметров  $\Delta$ ,  $\mu$  и  $P_0$ , оказывается равным

$$\gamma \approx 2,8 \cdot 10^{37} \text{ э}^{-2} \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^2.$$

Для вычисления эффективных сечений рассеяния фононов мы воспользуемся разложением поля фононов в ряд Фурье. При этом будем исходить из аналогии между полем фононов и полем излучения. Представим плотность гелия  $\rho(r)$  и скорость  $v(r)$  в виде ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \rho_0 + \Omega^{-1/2} \left\{ \sum_p \rho_p e^{ipr/\hbar} + \rho_p^* e^{-ipr/\hbar} \right\}, \\ v(r) &= \Omega^{-1/2} \left\{ \sum_p v_p e^{ipr/\hbar} + v_p^* e^{-ipr/\hbar} \right\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $\rho_0$  — равновесная плотность в отсутствие фононов,  $p$  — импульс фонона, связанный с частотой  $\omega$  соотношением

$$\omega = cp / \hbar. \quad (1.8)$$

Для бегущих волн суммирование в (1.7) производим как по положительным, так и по отрицательным значениям импульса.

Из соотношения коммутации [2] между  $\rho(r)$  и  $v(r)$

$$\rho(r_1) v(r_2) - v(r_2) \rho(r_1) = (\hbar/i) \nabla \delta(r_1 - r_2) \quad (1.9)$$

можно получить соотношения коммутации для компонент Фурье. Для этого выразим  $\rho(r_1)$  и  $v(r_2)$  с помощью (1.7) и подставим указанные выражения в левую часть (1.9). Стоящую в правой части выражения (1.9)  $\delta$ -функцию представим в виде

$$\delta(r_1 - r_2) = \frac{1}{2\Omega} \left\{ \sum_p e^{i(p, r_1 - r_2)/\hbar} + e^{-i(p, r_1 - r_2)/\hbar} \right\} \quad (1.10)$$

и сравним коэффициенты при одинаковых экспонентах в левой и правой частях. Это дает соотношения, справедливые при  $\text{rot } v = 0$ ,

$$\begin{aligned} \rho_p \rho_s^* - \rho_s^* \rho_p &= \frac{\rho_0 p}{2c} \delta_{ps}, & v_p &= \frac{cp}{\rho_0 p} \rho_p, \\ \delta_{ps} &= \begin{cases} 1 & p = s, \\ 0 & p \neq s. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Полный гамильтониан рассматриваемого объема гелия

$$\int \left\{ \frac{1}{2} v p v + \rho \varepsilon(\rho) \right\} d\Omega$$

( $\varepsilon(\rho)$  — внутренняя энергия единицы массы жидкости) в компонентах Фурье с точностью до кубических по  $\rho_p$  членов выражается следующим образом:

$$H_0 = \frac{c^2}{\rho_0} \sum (\rho_p \rho_p^* + \rho_p^* \rho_p) = \sum \left( n_p + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega. \quad (1.12)$$

Здесь  $n_p$  — число фононов с импульсом  $p$ .

Из соотношений (1.11) и (1.12) получаем отличные от нуля матричные элементы компонент Фурье

$$(\rho_p)_{n_p, n_{p+1}} = \sqrt{\frac{\rho_0 p}{2c} (n_p + 1)} e^{i\omega t}, \quad (1.13)$$

$$(\rho_p^*)_{n_p, n_{p-1}} = \sqrt{\frac{\rho_0 p}{2c} n_p} e^{i\omega t}, \quad (1.14)$$

## § 2. Рассеяние фонона фононом

Эффективное сечение для рассеяния фонона будем вычислять методом теории возмущений. Гамильтониан единицы объема гелия II согласно [2] равен

$$H = \frac{1}{2} v p v + p \varepsilon(\rho). \quad (2.1)$$

Рассматриваемый процесс рассеяния является четырехфононным эффектом. Неисчезающие матричные элементы энергии возмущения для переходов двух фононов в два других фонона получаются из кубических по  $\rho'$  членов в энергии во втором приближении теории возмущений и из членов четвертой степени по  $\rho'$  в первом приближении теории возмущений;  $\rho'$  — отклонение плотности от ее значения в неподвижной жидкости, т. е. в отсутствие фононов.

Ограничиваясь членами четвертого порядка по  $\rho'$ , запишем (2.1) в виде

$$H = H_0 + V_3 + V_4, \quad (2.2)$$

где  $H_0$  — обычная плотность звуковой энергии, содержащая члены второго порядка относительно  $\rho'$ :

$$H_0 = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2 c^2}{2\rho_0}; \quad (2.3)$$

$V_3$  содержит члены третьего порядка:

$$V_3 = \frac{v\rho'v}{2} + \frac{1}{3!} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{c^2}{\rho} \right) \rho'^3 \quad (2.4)$$

и, наконец,  $V_4$  содержит член четвертого порядка:

$$V_4 = \frac{1}{4!} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left( \frac{c^2}{\rho} \right) \rho'^4. \quad (2.5)$$

При рассеянии фононов с импульсами  $p$  и  $p_1$ , приводящем к появлению фононов с импульсами  $p'$  и  $p'_1$ , возможны шесть промежуточных состояний I—VI, в которых фононы имеют импульсы:

- I.  $p + p_1$ ;      II.  $p - p'$ ,  $p_1$ ,  $p'$ ;      III.  $p - p'_1$ ,  $p_1$ ,  $p'_1$ ;  
 IV.  $p_1 - p'_1$ ,  $p$ ,  $p'_1$ ;      V.  $p_1 - p'$ ,  $p$ ,  $p'$ ;  
 VI.  $p$ ,  $p_1$ ,  $p'$ ,  $p'_1$ ,  $-(p' + p'_1)$ .

Матричный элемент перехода из начального состояния ( $A$ ) в конечное ( $F$ ) во втором приближении теории возмущений равен

$$H'_{AF} = \sum_{i=I}^{VI} \frac{(V_3)_{Ai} (V_3)_{iF}}{E_A - E_i} + (V_4)_{AF}. \quad (2.6)$$

Входящие в знаменатели (2.6) разности энергий в начальном и в промежуточном состояниях выразим через энергию фононов:

$$\begin{aligned} E_A - E_I &= \varepsilon(p) + \varepsilon(p_1) - \varepsilon(|\mathbf{p} + \mathbf{p}_1|), \\ E_A - E_{II} &= \varepsilon(p) - \varepsilon(p') - \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|), \\ E_A - E_{III} &= \varepsilon(p) - \varepsilon(p'_1) - \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{p}'_1|), \\ E_A - E_{IV} &= \varepsilon(p_1) - \varepsilon(p'_1) - \varepsilon(|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1|), \\ E_A - E_V &= \varepsilon(p_1) - \varepsilon(p') - \varepsilon(|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'|), \\ E_A - E_{VI} &= -\varepsilon(p') - \varepsilon(p'_1) - \varepsilon(|\mathbf{p}' + \mathbf{p}'_1|). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из выражений (2.7) легко видеть, что при неучете дисперсии знаменатели первых пяти членов выражения (2.6) могут обращаться в нуль, приводя к существенной расходимости матричного элемента. Действительно, при линейной зависимости энергии фононов от импульса знаменатели обращаются в нуль каждый раз, когда угол между импульсами сталкивающихся фононов равен нулю, т. е. когда  $|\mathbf{p} + \mathbf{p}_1| = p + p_1$ . Поэтому для энергии фононов мы будем пользоваться выражением (1.6), содержащим кроме линейных также и кубические по импульсам члены.

Входящие в (2.6) матричные элементы энергии возмущения  $V_3$  и  $V_4$  вычисляются с помощью выражений (1.13) — (1.14) для исчезающих матричных элементов плотности<sup>2</sup>. Получающиеся при этом выражения существенным образом содержат два безразмерных параметра:

$$u = \frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho}, \quad z = \frac{\rho_0^3}{c^2} \frac{\partial^2 c^2}{\partial \rho^2} \frac{c^2}{\rho}. \quad (2.8)$$

Дифференциальное эффективное сечение для рассматриваемого процесса определяется соотношением

$$\begin{aligned} d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1) &= \frac{2\pi}{\hbar c} |H'_{AE}|^2 \delta(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon' - \varepsilon'_1) (2\pi\hbar)^{-3} d\mathbf{p}' \\ &(d\mathbf{p}' = d p'_x d p'_y d p'_z). \end{aligned} \quad (2.9)$$

<sup>2</sup> При вычислении матричных элементов следует учесть все возможные перестановки фононов. Для этого необходимо умножить члены, содержащие  $\rho'^2$  на 2, содержащи  $\rho'^3$ , — на 6 и, наконец, содержащи  $\rho'^4$ , — на 24.

Вычисление полного эффективного сечения для рассеяния фононов с импульсом  $p$  фононом с импульсом  $p_1$  приводит к весьма громоздким выражениям. Мы рассмотрим конкретный случай, когда один из импульсов сталкивающихся фононов мал, именно когда  $p \ll p_1$ . Что касается импульсов  $p'$  и  $p'_1$  рассеянных фононов, то их предполагаем сравнимыми по величине с  $p_1$ .

В таком случае из трех членов в матричном элементе перехода  $H'_{AF}$ , обладающих резонансными знаменателями и соответствующих промежуточным состояниям I, IV и V, только член

$$\frac{(V_3)_{A1} (V_3)_{IF}}{\varepsilon(p) + \varepsilon(p_1) - \varepsilon(p + p_1)}$$

будет содержать малую величину в знаменателе в отличие от двух других, пропорциональных соответственно  $(p_1 - p')^2 / p_1 p'$  и  $(p_1 - p'_1)^2 / p_1 p'_1$ ; этот член оказывается порядка  $p_1 / p$ , и, следовательно, только он один является существенным. Указанное обстоятельство упрощает выражение (2.9) для  $d\sigma$ , которое после несложных преобразований принимает вид

$$d\sigma = \frac{(u+2)^4 p_1^2 p'_1 p'}{(16\pi\hbar^2 \rho_0 c)^2 c p} \frac{\delta[\varepsilon(p) + \varepsilon(p_1) - \varepsilon(p') - \varepsilon(p'_1)]}{(1 - n_{p_1} + 3\gamma p_1^2)} p'^2 dp' do'. \quad (2.10)$$

То обстоятельство, что выражение (2.10) имеет острый максимум при малых углах между импульсами сталкивающихся фононов, позволит нам довольно просто выполнить необходимое интегрирование. Выберем в качестве полярной оси сферической системы координат направление, образованное суммой импульсов  $p + p_1$ . Пусть в этой системе векторы  $p$ ,  $p_1$ ,  $p'$  и  $p'_1$  имеют полярные углы соответственно  $\theta$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta'$  и  $\theta'_1$ . Преобразуем теперь к виду, удобному для интегрирования,  $\delta$ -функцию, содержащую разность энергий; последняя с помощью (1.6) и закона сохранения импульса при малых углах приводится к виду

$$c \left\{ \frac{p}{2p_1} (p + p_1) \theta^2 - \frac{p'}{2p_1} (p' + p'_1) \theta'^2 + 3\gamma (p_1 - p') (p p'_1 - p_1 p') \right\}.$$

Проинтегрируем теперь выражение (2.10) по фазовому объему  $dp'$  и усредним по всем углам, образованным импульсами  $p$  и  $p_1$ . В результате для полного эффективного сечения рассеяния фонона с импульсом  $p$  фононом с импульсом  $p_1$  получаем следующее выражение<sup>3</sup>:

$$\sigma(p, p_1) = \frac{\pi (u+2)^4 p_1^4}{(96\pi\hbar^2 \rho_0 c)^2 \gamma} (p \ll p_1). \quad (2.11)$$

<sup>3</sup> Для учета симметрии по паре рассеянных фононов с импульсами  $p$  и  $p_1$  выражение (2.11) содержит дополнительный множитель  $1/2$ .

Значение входящего в (2.11) безразмерного выражения и может быть вычислено из данных Кеезома [8] для зависимости плотности гелия II от давления. Из этих данных получается значение, равное  $3,6^4$ . Обращаем внимание на тот любопытный факт, что эффективное сечение рассеяния (2.11) не зависит от импульса  $p$  фонона малой энергии.

Подставив в (2.11) численные значения всех параметров, находим

$$\sigma(p, p_1) = 6 \cdot 10^{-19} (xT)^4. \quad (2.12)$$

Здесь  $x$  — импульс, выраженный в единицах  $kT/c$ , так что  $p_1 = x(kT/c)$ .

Как уже отмечалось, эффективное сечение для рассеяния фонона фононом достигает наибольшего значения при малых углах между импульсами сталкивающихся и рассеянных фононов. Отсюда следует, что такой процесс приводит в основном к быстрому обмену энергиями между фононами и не приводит к существенному изменению импульсов сталкивающихся фононов.

### § 3. Рассеяние фонона ротонном

В настоящем параграфе мы вычисляем эффективное сечение рассеяния фонона ротонном. Гамильтониан системы фонон — ротон можно записать в виде

$$H = H_\phi + H_p + V, \quad (3.1)$$

где  $H_\phi$  — энергия фонона,  $H_p$  — энергия ротона, а  $V$  — функция взаимодействия фонона с ротонном.

Поскольку характер взаимодействия фонона с ротонном неизвестен, будем рассматривать ротон как некоторую частицу, находящуюся в фононном поле. При таком рассмотрении несущественна внутренняя структура ротона.

Наличие фонона эквивалентно малым колебаниям плотности среды и ее движению с некоторой скоростью  $v$ . В неподвижной системе отсчета энергия ротона с импульсом  $P$  выражается следующим образом:

$$H'_p = H_{p0} - Pv \quad (3.2)$$

( $H_{p0}$  — энергия ротона в движущейся вместе со средой системе отсчета). Из (3.2) следует, что энергия взаимодействия фонон —

<sup>4</sup> Одновременно укажем, что для значения параметра  $z$  (см. (2.8)) из тех же данных получаем около 20.



ротон содержит член  $Pv$ , зависящий от скорости. Соответствующий этому члену в энергии возмущения квантовый эрмитовый оператор есть

$$-\frac{1}{2}(Pv + vP), \quad (3.3)$$

где  $P = -ih\nabla$  — оператор импульса.

Выясним зависимость энергии взаимодействия  $V$  от плотности жидкости. Для этого разложим энергию ротона по степеням отклонения плотности  $\rho$  от ее равновесного значения и сохраним только члены до второго порядка по  $\rho$  включительно. (Здесь и в дальнейшем отклонение плотности жидкости от равновесного значения обозначаем через  $\rho$  без штриха). Члены первого порядка по  $\rho$  будут давать необходимые для нашей задачи переходы во втором приближении теории возмущения, а члены второго порядка по  $\rho$  — те же переходы, но в первом приближении теории возмущений. Воспользуемся выражением (1.2) для энергии ротона и произведем указанное разложение:

$$H_p = H_{p0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \rho} \right)^2 \right] \rho^2. \quad (3.4)$$

Здесь  $H_{p0}$  — энергия ротона в отсутствие фонона. Поскольку из вида энергетического спектра следует, что большинство ротонов обладают импульсами, близкими к  $P_0$ , то членами в разложении  $H_p$ , содержащими разность  $(P - P_0)$ , мы пренебрегаем и не выписываем их.

Мы также пренебрежем членом в (3.4), содержащим производную  $\partial \Delta / \partial \rho$ . Основанием служит аномальная малость коэффициента теплового расширения гелия II. Величина указанного коэффициента может быть вычислена двукратным дифференцированием термодинамического потенциала по давлению и температуре. Наиболее существенная часть получающегося таким образом выражения оказывается пропорциональной первой производной  $\partial \Delta / \partial \rho$ .

Так, окончательно с помощью (3.3) и (3.4) имеем для энергии взаимодействия фотон — ротон

$$V = -\frac{1}{2}(Pv + vP) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \rho} \right)^2 \right] \rho^2. \quad (3.4')$$

Входящие в это выражение производные  $\partial^2 \Delta / \partial \rho^2$  и  $\partial P_0 / \partial \rho$  могут быть вычислены из экспериментальных значений скорости второго звука под давлением, полученных В. Пешковым и К. Зиновьевой [9]. Получающиеся таким путем значения этих производных  $\partial^2 \Delta / \partial \rho^2 \approx -2\Delta / \rho^2$  и  $\partial P_0 / \partial \rho \approx P_0 / \rho$  оказываются

настолько заметными величинами, что эффект в рассеянии фонона ротонном, происходящий от этих членов, превосходит таковой, зависящий от члена, содержащего скорость  $v$ . Величина производной  $\partial^2 \Delta / \partial r^2$  может быть также вычислена из имеющихся данных о температурной зависимости скорости звука в гелии II. При этом получается значение, совпадающее, с приведенным выше.

Вследствие малости скорости колебаний  $v$  и отклонения плотности от равновесного значения  $\rho$  энергия взаимодействия может рассматриваться как малое возмущение в выражении гамильтониана (3.1) системы фонон — ротон. Поэтому вычисление вероятности рассеяния фонона ротонном произведем по схеме теории возмущений.

Поскольку рассматриваемый эффект рассеяния является двух-фононным, то линейные по  $\rho$  или  $v$  члены в энергии возмущения будут давать нужные переходы во втором приближении теории возмущений. Однако тот факт, что уравнения гидродинамики являются нелинейными, несколько изменяет в этом пункте обычную картину. Действительно, будем решать уравнения гидродинамики методом последовательных приближений.

В первом приближении плотность  $\rho$  (или скорость  $v$ ) будет являться суперпозицией плоских волн. Члены второго приближения в плотности  $\rho$  (или  $v$ ) будут содержать парные произведения различных компонент Фурье. Матричные же элементы от членов второго приближения в плотности  $\rho$  будут содержать парные произведения фононных амплитуд.

Среди парных произведений будут и такие, которые в точности соответствуют рассеянию фонона в рассматриваемом процессе, т. е. содержат амплитуды как падающего, так и рассеянного фононов. Поэтому уже в первом приближении теории возмущений линейные по  $\rho$  (или  $v$ ) члены в энергии возмущения будут давать необходимые для нашей задачи переходы. В связи со сказанным решим уравнения гидродинамики с учетом членов второго порядка по  $\rho$ .

В силу малости изменений плотности и давления запишем переменные в виде  $p_0 + p$ ,  $\rho_0 + \rho$ , где  $p_0$  и  $\rho_0$  — постоянные равновесные давление и плотность. После пренебрежения в уравнении Эйлера малыми величинами третьего порядка получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = - \frac{c^2}{\rho_0} \nabla \rho + \frac{\rho \nabla \rho}{\rho_0} \left( \frac{c^2}{\rho_0} - \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right). \quad (3.5)$$

В том же приближении уравнение непрерывности сводится к

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} v = - \operatorname{div} \rho v. \quad (3.6)$$

Применим к уравнению (3.5) операцию  $\text{div}$ , продифференцируем уравнение (3.6) по  $t$  и вычтем после этого второе из первого. В результате получим волновое уравнение с учетом членов второго порядка, которые сгруппируем в правой части:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho = - \text{div} \left\{ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} - \rho_0 (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \left( \frac{c^2}{\rho_0} - \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right) \rho \nabla \rho \right\}. \quad (3.7)$$

В первом приближении для падающей и рассеянной волн имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \mathbf{r} - c p t) \right\}, \quad \rho = \rho_1 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \mathbf{r} - c p t) \right\}, \quad (3.8a)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_1 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' \mathbf{r} - c p' t) \right\}, \quad \rho' = \rho'_1 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' \mathbf{r} - c p' t) \right\}, \quad (3.8b)$$

где величины без штриха относятся к падающей волне, а со штрихом — к рассеянной. Во втором приближении будем искать только те члены, в которых перепутываются падающая и рассеянная волны. Остальные члены не дают сохранения энергии и исчезают в матричных элементах энергии возмущения.

Обозначим единичный вектор в направлении падающей волны через  $\mathbf{n}$  и в направлении рассеянной волны — через  $\mathbf{n}'$ . Пользуясь методом последовательных приближений, подставим (3.8a) и (3.8b) в правую часть (3.7). Тогда для плотности во втором приближении получаем

$$\rho_{2np} = \frac{\rho_1 \rho'_1}{c^2 p p' [1 - \mathbf{n} \mathbf{n}']} \{ [p - p' (\mathbf{n} \mathbf{n}')] [p' - p (\mathbf{n} \mathbf{n}')] \frac{c^2}{\rho_0} - \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \mathbf{r}) - c (\mathbf{p} - \mathbf{p}') t] \right\}. \quad (3.9)$$

Для скорости в том же приближении из (3.5) находим

$$\mathbf{v}_{2np} = \frac{\rho \rho' (\mathbf{p} - \mathbf{p}') (\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{\rho_0 c p p' [1 - \mathbf{n} \mathbf{n}']} \left\{ \mathbf{n} \mathbf{n}' \frac{c^2}{\rho_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \mathbf{r}) - c (\mathbf{p} - \mathbf{p}') t] \right\}. \quad (3.10)$$

Задача теперь состоит в том, чтобы определить вероятность перехода ротона из состояния с импульсом  $\mathbf{P}$  в состояние с импульсом  $\mathbf{P}'$ , при котором поглощается фотон  $\mathbf{p}$  и испускается фотон  $\mathbf{p}'$ . Возможны два промежуточных состояния — I и II.

I. Ротон в состоянии (A) с импульсом  $\mathbf{P}$  поглощает фотон  $\mathbf{p}$  и переходит в промежуточное состояние  $\mathbf{P} + \mathbf{p}$ , после чего испускает фотон  $\mathbf{p}'$  и переходит в конечное состояние (F), имея импульс  $\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ .

II. Ротон в состоянии (A) с импульсом P испускает фонон  $p'$  и переходит в промежуточное состояние  $P - p'$ , после чего поглощает фонон  $p$  и переходит в конечное состояние (F) с импульсом  $P' = P + p - p'$ .

Рассеяние фонона ротонном в некотором смысле аналогично рассеянию легкой частицы тяжелой. Эта аналогия связана с тем, что фонон обладает импульсом, по величине значительно меньшим, чем импульс ротона. Из функции распределения для ротонов следует, что импульс ротона по своей величине примерно равен  $P_0$ . С учетом закона сохранения импульса закон сохранения энергии и для рассматриваемого процесса записывается согласно (1.1) и (1.2) в виде

$$cp + \frac{(P - P_0)^2}{2\mu} = cp' + \frac{(|P + p - p'| - P_0)^2}{2\mu}, \quad (3.11)$$

откуда после несложных преобразований, учитывающих малость фононных импульсов ( $p$  и  $p' \ll P_0$ ), получаем

$$c(p - p') = \frac{(P, p - p')^2}{2\mu P_0^2}. \quad (3.12)$$

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что энергия фононов  $\varepsilon = cp$  значительно меньше величины  $\mu c^2$ , равной приблизительно  $20^\circ \text{K}$ . Это позволяет заключить, что закон сохранения энергии в рассматриваемом процессе попросту сводится к равенству величин импульсов падающего и рассеянного фононов  $p = p'$ . Этот результат подтверждает указанную выше аналогию с рассеянием легких частиц тяжелыми, где также легкие частицы при рассеянии изменяют лишь направление импульса, не меняя его величины.

Энергия возмущения  $V$  (согласно (3.4')) содержат величину  $v_{\text{др}}$ , определяющуюся выражением (3.10). Однако величина  $v_{\text{др}}$  существенным образом содержит множитель  $(p - p')$ . Поэтому, учитывая закон сохранения энергии, можно опустить в энергии возмущения члены второго приближения  $v_{\text{др}}$ .

Матричный элемент перехода  $H'_{AF}$  во втором приближении теории возмущений согласно (3.4') равен

$$H'_{AF} = \frac{(Pv + vP)_{AI} (Pv' + v'P)_{IF}}{4(E_A - E_I + pc)} + \frac{(Pv' + v'P)_{AII} (Pv + vP)_{IIF}}{4(E_A - E_{II} - pc)} + \\ + \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial^2 \Delta}{\partial p^2} + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial P_0}{\partial p} \right)^2 \right] (\rho^2)_{AF}. \quad (3.13)$$

Изменения энергии при переходах в промежуточные состояния равны

$$E_A - E_I = \frac{(|P + p| - P_0)^2}{2\mu} = -\frac{(Pp)^2}{2\mu P_0^2},$$

$$E_A - E_{II} = -\frac{(|P - p'| - P_0)^2}{2\mu} = -\frac{(Pp')^2}{2\mu P_0^2}. \quad (3.14)$$

На том же основании, что в (3.12), можно утверждать, что

$$E_A - E_I \ll \rho c \quad \text{и} \quad E_A - E_{II} \ll \rho' c.$$

Однако просто пренебречь в знаменателях первых двух членов в (3.13) разностью энергий  $E_A - E_I$  и  $E_A - E_{II}$  нельзя, так как получающиеся при этом выражения нулевого порядка по импульсам фононов взаимно уничтожаются. Поэтому в начале приведем первые два члена в (3.13) к общему знаменателю, а затем пренебрежем в последнем изменении энергии ротона. Таким образом, получаем

$$H'_{AF} = \frac{vv'}{p^2 p'^2 c^2} \left\{ \left( P + \frac{1}{2} p, p \right) \left( P' + \frac{1}{2} p', p' \right) \left[ p' + \frac{(Pp')^2}{2\mu c P_0^2} \right] - \right.$$

$$\left. - \left( P - \frac{1}{2} p', p' \right) \left( P' - \frac{1}{2} p, p \right) \left[ p - \frac{(Pp)^2}{2\mu c P_0^2} \right] \right\} +$$

$$+ \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial p^2} + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial P_0}{\partial p} \right)^2 \right] \rho \rho', \quad (3.15)$$

причем при раскрытии выражения  $(\rho^2)_{AF}$  следует учесть возможные перестановки  $p$  и  $p'$ , приводящие к удвоению соответствующего члена.

Воспользовавшись законами сохранения, преобразуем выражение, стоящее в фигурных скобках в (3.15), к виду

$$P_0 p^3 \left\{ (n + n', m) (nn') + \frac{P_0}{\mu c} (nm)^2 (n'm)^2 \right\}. \quad (3.16)$$

Здесь  $m$  — единичный вектор в направлении импульса ротона  $P$ <sup>6</sup>.

<sup>6</sup> Из закона сохранения импульса следует, что направление импульса ротона  $P$  сохраняется.

Окончательно матричный элемент перехода (3.13) с помощью (3.16) принимает вид

$$H'_{AF} = \frac{P_0 p}{2\rho_0} \left\{ (\mathbf{n} + \mathbf{n}', \mathbf{m}) (\mathbf{n}\mathbf{n}') + \frac{P_0}{\mu c} (\mathbf{n}\mathbf{m})^2 (\mathbf{n}'\mathbf{m})^2 + A \right\},$$

$$A = \frac{\rho_0^3}{\rho_{0c}} \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial P_0}{\partial \rho} \right)^2 \right]. \quad (3.17)$$

Искомое дифференциальное эффективное сечение рассеяния фонона ротоном равно

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar c} |H'_{AF}|^2 \delta(E_A + pc - E_F - p'c) (2\pi\hbar)^{-3} p'^2 dp' do'. \quad (3.18)$$

Подставим (3.17) в (3.18) и произведем интегрирование по импульсам рассеянного фонона; в результате имеем

$$d\sigma = \left( \frac{P_0 p^2}{4\pi\hbar^2 \rho_{0c}} \right)^2 \left\{ (\mathbf{n} + \mathbf{n}', \mathbf{m}) (\mathbf{n}\mathbf{n}') + \frac{P_0}{\mu c} (\mathbf{n}\mathbf{m})^2 (\mathbf{n}'\mathbf{m})^2 + A \right\}^2 do'. \quad (3.19)$$

При решении задачи о вязкости гелия II нам потребуется выражение вероятности рассеяния фонона ротонами, при котором направление импульса фонона  $p$  изменяется на заданный угол  $\psi$ . Поэтому усредним выражение (3.19) по углам падающего и рассеянного ротонов. В результате после несложных вычислений получаем

$$d\sigma(p, \psi) = \left( \frac{P_0 p^2}{4\pi\hbar^2 \rho_{0c}} \right)^2 \left\{ \frac{2}{3} (1 + \cos \psi) \cos^2 \psi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{105} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right) \left( 1 + 8\cos^2 \psi + \frac{8}{3} \cos^4 \psi \right) + \frac{2A}{15} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right) (1 + 2\cos^2 \psi) + A^2 \right\} do'. \quad (3.20)$$

Входящий в (3.20) угол  $\psi$  образован направлениями падающего и рассеянного фононов. Интегрируя (3.20) по всем углам рассеяния, находим полное эффективное сечение рассеяния фонона с импульсом  $p$  ротоном

$$\sigma_{\text{фр}} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{P_0 p^2}{\hbar^2 \rho_{0c}} \right)^2 \left[ \frac{2}{9} + \frac{1}{25} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{2A}{9} \frac{P_0}{\mu c} + A^2 \right]. \quad (3.21)$$

Значение параметра  $A_1$  вычисленное с помощью приведенных выше значений производных от параметров  $\Delta$  и  $\rho$ , оказывается равным 1,25. Следует, конечно, заметить, что точность значений указанных производных и параметра  $A$  сравнительно невелика.

Воспользовавшись численными значениями всех параметров, входящих в (3.21), получим для  $\sigma_{\text{фр}}$

$$\sigma_{\text{фр}} = 7 \cdot 10^{-19} (xT)^4, \quad p = x \frac{kT}{c}. \quad (3.22)$$

#### § 4. Рассеяние ротона ротонном

Теория не дает никаких указаний о характере взаимодействия ротона с ротонном; поэтому, естественно, задача о рассеянии ротона ротонном не может быть решена точно. Однако, поскольку нашей целью является вычисление только температурной зависимости вязкости гелия II, такое точное решение не является необходимым. Для нахождения указанного температурного закона достаточно знать вероятность рассеяния ротона ротонном как функцию температуры с точностью до постоянного множителя; такая вероятность не чувствительна к выбору функции взаимодействия ротон — ротон.

При вычислении вероятности рассеяния ротона ротонном будем пользоваться методом теории возмущений, считая энергию взаимодействия ротона с ротонном  $\delta$ -функцией от расстояния между ними. Известно, что при применении теории возмущений выбор энергии взаимодействия в виде  $\delta$ -функции не приводит к расходимости получаемых выражений для вероятности.

Пусть энергия взаимодействия двух ротонов равна

$$V = V_0 \delta(r - r_1), \quad (4.1)$$

где  $r$  и  $r_1$  — радиусы-векторы ротонов, а  $V_0$  — некоторая постоянная, значение которой может быть определено из значений вязкости гелия II. Обозначим энергию и импульсы ротонов через  $E$  и  $P$  соответственно для падающих ротонов без штриха и для рассеянных — с одним штрихом. Вероятность перехода ротонов из состояния ( $A$ ) с импульсами  $P$  и  $P_1$  в состояние ( $F$ ) с импульсами  $P'$  и  $P'_1$  определяется формулой теории возмущений

$$dw = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{AF}|^2 \delta(E + E_1 - E' - E'_1) \frac{dP' dP'_1}{(2\pi\hbar)^6}. \quad (4.2)$$

В качестве волновых функций ротонов выберем плоские волны, симметризованные по парам сталкивающихся и рассеянных ротонов. Так, для падающих ротонов волновая функция записывается в виде

$$\psi(P, P_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (Pr + P_1 r_1) \right] + \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (P r_1 + P_1 r) \right] \right\}.$$

Аналогично записывается волновая функция рассеянных ротонов

$$\psi(\mathbf{P}', \mathbf{P}'_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{P}' \mathbf{r} + \mathbf{P}'_1 \mathbf{r}_1) \right] + \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \mathbf{P}' \mathbf{r}_1 + \mathbf{P}'_1 \mathbf{r} \right] \right\}.$$

С помощью волновых функций такого вида вычислим матричный элемент перехода:

$$\begin{aligned} V_{AF} &= V_0 \Omega^{-1/2} \int \psi^*(\mathbf{P}, \mathbf{P}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{P}', \mathbf{P}'_1) d\Omega d\Omega_1 = \\ &= 2V_0 \Omega^{-1/2} \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{P}' + \mathbf{P}'_1 - \mathbf{P} - \mathbf{P}_1, \mathbf{r}) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (4.3)$$

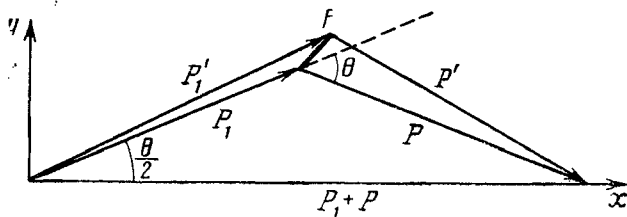
Квадрат модуля матричного элемента удается легко проинтегрировать по импульсам одного из рассеянных ротонов

$$\begin{aligned} \int |V_{AF}|^2 \frac{d\mathbf{P}'_1}{(2\pi\hbar)^3} &= \frac{4|V_0|^2}{\Omega} \int d\mathbf{P}'_1 \delta(\mathbf{P}' + \mathbf{P}'_1 - \mathbf{P} - \mathbf{P}_1) \times \\ &\times \int d\Omega \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{P}' + \mathbf{P}'_1 - \mathbf{P} - \mathbf{P}_1, \mathbf{r}) \right] = 4|V_0|^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Это соотношение позволяет переписать вероятность перехода  $dw$  в виде

$$dw = \frac{8\pi}{\hbar} |V_0|^2 \delta(E + E_1 - E' - E'_1) \frac{d\mathbf{P}'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (4.5)$$

Вероятность, определяемая выражением (4.5), имеет размерность  $\text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ . Для получения эффективного дифференциального



сечения рассеяния указанную вероятность необходимо разделить на относительную скорость движения сталкивающихся ротонов, равную

$$v = \left| \frac{\partial E}{\partial \mathbf{P}} - \frac{\partial E_1}{\partial \mathbf{P}_1} \right|.$$

Из вида энергетического спектра следует, что большинство ротонов будут обладать импульсами, по абсолютной величине близ-



кими к  $P_0$ . Следовательно, изменения импульсов ротонов при рассеянии по своей величине будут значительно меньше  $P_0$ .

Пусть импульсы ротонов  $P$  и  $P_1$  до столкновения образуют угол  $\theta$ . Тогда из рисунка легко видеть, что импульсы ротонов после столкновения, вводя переменную  $f$ , можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} P' &= P_0 + f_x \cos \frac{\theta}{2} + f_y \sin \frac{\theta}{2}, \\ P'_0 &= P_0 + f_x \cos \frac{\theta}{2} - f_y \sin \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

причем  $|f| \ll P_0$ .

В новых переменных элемент фазового объема сводится к

$$dP' = 2\pi P_0 \sin \frac{\theta}{2} df_x df_y, \quad (4.7)$$

а закон сохранения энергии — к

$$f_x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + f_y^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (P - P_0)^2 + \frac{1}{2} (P_1 - P_0)^2. \quad (4.8)$$

Для вычисления полного эффективного сечения  $\sigma$  рассеяния ротона ротоном необходимо произвести в (4.5) интегрирование по фазовому объему рассеянной частицы. В выражении (4.5) от координат в фазовом пространстве зависит только  $\delta$ -функция, содержащая закон сохранения энергии.

Если для удобства интегрирования ввести вспомогательную переменную  $g$  при помощи соотношения

$$g^2 = f_x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + f_y^2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

то с учетом (4.7) и (4.8) указанное интегрирование  $\delta$ -функции по фазовому объему рассеянной частицы производится весьма просто:

$$\begin{aligned} \int \delta(E + E_1 - E' - E'_1) dP' &= \int \mu \delta \left( f_x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + f_y^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} (P - P_0)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (P_1 - P_0)^2 \right) 4\pi P_0 \sin \frac{\theta}{2} df_x df_y = \\ &= \int \delta \left( g^2 - \frac{1}{2} (P - P_0)^2 - \frac{1}{2} (P_1 - P_0)^2 \right) \frac{2\pi P_0 \mu}{\cos \frac{\theta}{2}} 2\pi g dg = \frac{2\pi^2 P_0 \mu}{\cos \frac{\theta}{2}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Воспользовавшись теперь соотношениями (4.5) и (4.9), запишем выражение для полного эффективного сечения  $\sigma$  рассеяния ротона ротонном:

$$\sigma = \frac{2P_0\mu |V_0|^2}{\left| \frac{\partial E}{\partial P} - \frac{\partial E_1}{\partial P_1} \right| \hbar^4 \cos \frac{\theta}{2}}. \quad (4.10)$$

Обратная величина среднего времени  $t_p$  между двумя соударениями ротона получается из (4.10) умножением на полный поток ротонных с последующим усреднением по всем углам, образованным импульсами сталкивающихся ротонных. Таким образом, находим<sup>6</sup>

$$\frac{1}{t_p} = \sigma \left| \frac{\partial E}{\partial P} - \frac{\partial E_1}{\partial P_1} \right| N_p = \frac{4P_0\mu |V_0|^2 N_p}{\hbar^4}. \quad (4.11)$$

Здесь  $N_p$  — число ротонных в единице объема, равное

$$N_p = \frac{2P_0^2 (\mu kT)^{1/2} e^{-\Delta/kT}}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3}. \quad (4.12)$$

Величина входящей в формулы (4.10) и (4.11) постоянной  $|V_0|^2$  может быть вычислена из экспериментальных значений коэффициента вязкости гелия II (см. ч. II, § 11). Она оказывается по порядку величины равной  $0,25 \cdot 10^{-76}$  (эрг  $\cdot$  см<sup>3</sup>)<sup>2</sup>.

В заключение обратим внимание на то обстоятельство, что выражение (4.10) для эффективного сечения  $\sigma$  расходится при углах между направлениями импульсов сталкивающихся ротонных, близких к  $\pi$ . Для ротонных, обладающих средней скоростью

$$\bar{v} = \left( \frac{2kT}{\pi\mu} \right)^{1/2}, \quad (4.13)$$

формула (4.10) после подстановки численных значений параметров дает

$$\sigma \approx 5 \cdot 10^{-15} T^{-1/2}. \quad (4.14)$$

Следует заметить, что кроме рассмотренных выше процессов рассеяния элементарных возбуждений возможны также и процессы испускания и поглощения ротонных и фононов, в результате которых общее число ротонных и фононов может изменяться. Соответствующие оценки, которые удается произвести для процессов испускания и поглощения ротонных, показывают, что указанные

<sup>6</sup> Чертой обозначаем операцию усреднения по углам.

процессы, как и следовало ожидать, являются значительно менее вероятными, чем процесс рассеяния ротон на ротоном. Это объясняется тем, что для образования нового ротона требуется значительная избыточная энергия порядка  $\Delta$ . Что касается процессов испускания и поглощения фононов, то на них мы специально остановимся в § 8 второй части этой работы.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. Капица. ЖЭТФ, 11, 1, 581, 1941.
- [2] Л. Ландау. ЖЭТФ, 11, 592, 1941 (Собр. трудов, № 44).
- [3] W. Keesom, Mc Wood. Physica, 5, 737, 1938.
- [4] Л. Ландау. ЖЭТФ, 14, 112, 1944 (Собр. трудов, № 51).
- [5] Э. Андроникашвили. ЖЭТФ, 16, 780, 1946.
- [6] Э. Андроникашвили. ЖЭТФ, 18, 429, 1948.
- [7] Л. Ландау. J. Phys., 11, 91, 1941 (Собр. трудов, № 61).
- [8] W. Keesom Helium. Elsevier, 1942.
- [9] В. Пешков, К. Зиновьева. ЖЭТФ, 18, 438, 1948.

Совместно с И. М. ХАЛАТНИКОВЫМ

ЖЭТО, 19, 709, 1949

С помощью полученных в первой части настоящей работы эффективных дифференциальных сечений рассеяния элементарных возбуждений (фотонов и ротонов) друг другом решаются кинетические уравнения для ротонов и фононов. Устанавливается, что коэффициент вязкости гелия II складывается из двух частей: одной, обусловленной рассеянием ротонов («ротонная вязкость») и не зависящей от температуры; другой, обусловленной рассеянием фононов («фононная вязкость») и сильно растущей с убыванием температуры. Экспериментальные значения коэффициента вязкости гелия II оказываются в хорошем согласии с теорией.

### § 5. Кинетическое уравнение

Полученные в первой части этой работы выражения для вероятностей рассеяния различных типов возбуждений друг другом позволяют исследовать температурную зависимость коэффициента вязкости гелия II. Кинетическое уравнение для элементарных возбуждений, которое нам предстоит решить, может быть записано в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla n = J(n), \quad (5.1)$$

где  $n = n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — функция распределения,  $\mathbf{v}$  — скорость, а  $J(n)$  — интеграл столкновений, конкретный вид которого расщифровывается ниже в зависимости от типа взаимодействия.

Мы будем предполагать, что в жидкости имеется макроскопическое движение со скоростью  $\mathbf{u}$ , зависящей от координат, причем градиент скорости настолько мал, что в каждом элементе объема почти устанавливается равновесие, соответствующее данному зна-

чению скорости, т. е. в каждом элементе объема функции распределения для фононов и ротонов почти равны равновесным функциям. Таким образом, функцию распределения  $n$  для ротонов (или фононов) можно представить в виде суммы равновесной функции  $n_0$  и малой добавки  $\delta n$ :

$$n = n_0 + \delta n. \quad (5.2)$$

Так как мы ищем стационарное решение кинетического уравнения, что соответствует заданному неизменному во времени потоку макроскопического движения в жидкости, то в левой части кинетического уравнения член  $\partial n / \partial t$  следует положить равным нулю. Кроме того, в рассматриваемом приближении в члене  $v \nabla n$  можно ограничиться подстановкой равновесной функции  $n_0$  вместо  $n$ , так как этот член содержит и без того малую величину — градиент скорости макроскопического движения.

В движущейся со скоростью  $u$  жидкости равновесная функция распределения для ротонов имеет вид

$$n_0 = \exp \left\{ -\frac{\Delta}{kT} - \frac{(P - P_0)^2}{2\mu kT} + \frac{Pu}{kT} \right\}. \quad (5.3)$$

Выберем направление оси  $z$  по направлению скорости  $u$  и для простоты предположим, что градиент скорости направлен перпендикулярно оси  $z$  по оси  $x$ . Очевидно, что искомая величина коэффициента вязкости не зависит от выбора системы координат. При вычислении первого коэффициента вязкости достаточно ограничиться случаем, когда скорость  $u$  удовлетворяет условию  $\text{div } u = 0$ . Предположим теперь, что плотность и температура постоянны вдоль жидкости. В результате в левой части кинетического уравнения имеем

$$v \nabla n = v_x \frac{\partial n_0}{\partial x} = n_0 \frac{P_x v_x}{kT} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Если воспользоваться сферической системой координат с полярной осью по направлению  $z$ , то полученное выражение можно переписать в виде

$$n_0 \frac{P_0 v}{kT} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi, \quad (5.4)$$

причем поскольку ротон обладает импульсами, близкими по своему значению к  $P_0$ , то законно вместо  $P$  в (5.4) написать  $P_0$ . Что касается скорости  $v$ , то согласно (1.2) она равна

$$v = \frac{\partial E}{\partial P} = \frac{P - P_0}{\mu}. \quad (5.5)$$

Окончательно кинетическое уравнение для ротонів принимает вид

$$n_0 \frac{P_0(P - P_0)}{\mu kT} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi = J(n). \quad (5.6)$$

Аналогичным образом можно написать кинетическое уравнение для фононов. В этом случае следует, однако, учесть, что фононы подчиняются статистике Бозе, и поэтому их равновесная функция в движущемся газе есть

$$n_0 = \left[ \exp \left( \frac{cp - up}{kT} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (5.7)$$

Произведя выкладки, сходные с проделанными выше для ротонів, но с функцией распределения в виде (5.7), получим кинетическое уравнение для фононов

$$n_0(n_0 + 1) \frac{cp}{kT} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi = J(n). \quad (5.8)$$

Стоящие в правых частях уравнений (5.6) и (5.8) интегралы столкновений зависят от характера взаимодействия ротонів друг с другом и с фононами в случае уравнения (5.6) и от характера взаимодействия фононов друг с другом и с ротонами в случае уравнения (5.8).

Значения коэффициента вязкости, очевидно, не зависят от того, какой участок жидкости рассматривается. Удобно выбрать точку, в которой скорость макроскопического движения равна нулю. В этой точке выражения для функций распределения (5.3) и (5.7) не зависят от скорости  $u$  и совпадают с соответствующими равновесными функциями в неподвижной жидкости.

Вследствие наличия двух типов возбуждений в гелии II мы написали два кинетических уравнения. Ту часть вязкости, которая обусловлена переносом количества движения ротонами, условно назовем ротонной вязкостью, а ту часть, которая обусловлена переносом количества движения фононами, — фононной вязкостью. В действительности наблюдается одна вязкость, равная сумме ротонной и фононной частей.

## § 6. Ротонная вязкость

Изменение числа ротонів в некотором фазовом объеме, если пренебречь процессами их испускания и поглощения (см. § 4), будет происходить двояким путем: а) упругим рассеянием ротонів ротонами (§ 4); б) рассеиванием ротонів фононами (§ 3).

Однако, как показывают несложные вычисления, процесс рассеяния ротонов фононами будет несущественным для вязкости по сравнению с упругим рассеянием ротонов ротовами вплоть до температур порядка 0,6—0,7° К. Это связано не только с тем, что число фононов при более высоких температурах оказывается меньше числа ротонов, но и главным образом с тем, что при рассеянии ротонов фононами импульсы ротонов изменяются очень мало; поэтому поток импульса, определяющий величину вязкости, оказывается ничтожным.

Если учесть еще и то обстоятельство, что ротонная вязкость при температурах ниже 1° К становится несущественно малой по сравнению с фононной вязкостью, то мы приходим к выводу о необходимости учитывать в кинетическом уравнении только рассеяние ротонов ротовами.

Полученное в предыдущем параграфе кинетическое уравнение для ротонов (5.6) не может быть решено точно. Однако, если не ставить задачу о точном вычислении ротонной части коэффициента вязкости и ограничиться только установлением температурной зависимости для указанного коэффициента, кинетическое уравнение (5.6) удастся упростить. При такой постановке задачи в правой части этого уравнения вместо интеграла столкновений можно написать

$$-\frac{\delta n}{t}, \quad (6.1)$$

где  $t$  — величина, отличающаяся от среднего времени между соударениями ротонов, определяемого выражением (4.11), лишь не зависящим от температуры множителем порядка единицы. Поскольку найденное в § 4 время  $t_p$  содержит неизвестную постоянную величину  $V_0$ , то в дальнейшем мы будем просто всюду вместо  $t$  писать  $t_p$ , включая указанный множитель порядка единицы в величину  $V_0$ .

Таким образом, кинетическое уравнение (5.6) обращается в

$$\frac{P_0(P - P_0)}{\mu k T} n_0 \frac{\partial u}{\partial x} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi = -\frac{\delta n}{t_p}. \quad (6.2)$$

Отсюда находим отклонение функции распределения  $\delta n$  от ее равновесного значения

$$\delta n = -\frac{t_p P(P - P_0)}{\mu k T} n_0 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6.3)$$

Вычислим теперь поток импульса. В нашем случае отличной

от нуля будет только  $z$ -компонента импульса, переносимая в направлении  $x$  и равная

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= - \int P_z v_x \delta n \frac{dP}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= \frac{t_p}{kT\mu^2 (2\pi\hbar)^3} \frac{\partial u}{\partial x} \int P_0^2 (P - P_0)^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi n_0 dP. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Сравнив (6.4) с выражением той же компоненты тензора напряжений, содержащим коэффициент вязкости  $\eta_p$ <sup>1</sup>

$$\sigma_{xz} = \eta_p \frac{\partial u}{\partial x},$$

находим величину искомого коэффициента вязкости

$$\eta_p = \frac{t_p}{kT\mu^2 (2\pi\hbar)^3} \int P_0^2 (P - P_0)^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi n_0 dP. \quad (6.5)$$

Выполним в (6.5) необходимое интегрирование по фазовому объему  $dP$  с функцией распределения  $n_0$  вида (5.3). В результате получаем окончательно

$$\eta_p = \frac{t_p P_0^2}{15\mu} N_p = \frac{\tau_p P_0^2}{15\mu}. \quad (6.6)$$

Величина  $\tau_p$ , равная произведению  $t_p N_p$ , не зависит от температуры. Действительно, согласно (4.11) имеем

$$\tau_p = t_p N_p = \frac{\hbar^4}{4P_0\mu |V_0|^2}. \quad (6.7)$$

Таким образом, ротонная часть коэффициента вязкости выражается только через постоянные величины и поэтому является не зависящей от температуры постоянной величиной.

## § 7. Установление равновесия в фононном газе

Изменение числа фононов в элементе фазового объема может происходить следующими путями: а) рассеянием фононов фононами (§ 2); б) рассеянием фононов ротонами (§ 3); в) поглощением и испусканием фононов при неупругих соударениях ротонов или фононов между собой.

Ниже будет выяснена роль каждого из этих процессов в яв-

<sup>1</sup> Индексом  $p$  отличаем ротонную часть коэффициента вязкости.



лении вязкости. Прежде всего, вычислим времена релаксации (или соответствующие длины свободного пробега), которые будут характеризовать установление равновесия в фононном газе.

В § 2 было показано, что эффективное сечение рассеяния фонона фононом достигает наибольшего значения при малых углах между импульсами сталкивающихся фононов. Из законов сохранения импульса и энергии следует, что такой процесс рассеяния не приводит к существенному изменению направлений импульсов сталкивающихся фононов, и, следовательно, рассеяние фононов фононами в основном приводит к быстрому обмену энергиями между фононами. Однако точное вычисление времени релаксации, характеризующего установление энергетического равновесия в фононном газе, произвести невозможно по той простой причине, что сама задача не может быть точно сформулирована. Тем не менее, поскольку время установления энергетического равновесия в фононном газе является весьма важной характеристикой нашей системы, мы попытаемся подойти к его определению со стороны двух предельных случаев.

В первом случае мы предположим что в фононном газе каким-либо способом изменено число фононов, обладающих малыми энергиями (меньшими, чем средняя энергия фонона), так что функция распределения в области малых энергий не равна равновесной функции, вслед за чем вычислим время релаксации, характеризующее установление равновесия в таком газе.

Во втором предельном случае предположим, что в фононном газе изменено число фононов, обладающих большими энергиями (большими, чем средняя энергия фононов), так что функция распределения в области больших энергий не равна равновесной функции. В этом случае вычислим время релаксации, характеризующее установление равновесия в таком газе. Сравнивая это время с временем, характеризующим вязкие процессы переноса, мы покажем, что процесс установления энергетического равновесия более быстрый, чем вязкие процессы в фононном газе.

Мы начнем с первого случая, т. е. рассмотрим рассеяние фононов с малой энергией фононами же. В этом случае можно положить, что импульс  $p$  рассматриваемого фонона значительно меньше импульса фонона  $p_1$ , с которым этот фонон сталкивается. Такое предположение, как было показано в § 2, значительно упрощает выражение для усредненной по углам вероятности рассеяния фонона фононом. В рассматриваемом случае усредненное по углам эффективное сечение рассеяния фонона фононом согласно (2.11) равно

$$\sigma(p, p_1) = \frac{\pi(u+2)^4 p_1^4}{(96\pi^2 p_0 c)^2 \gamma}$$

Рассмотрим кинетическое уравнение для фононов

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \nabla n = J(n),$$

где интеграл столкновений  $J(n)$  для процесса рассеяния фонона фононом равен

$$J(n) = -(2\pi\hbar)^{-3} \int c\sigma(p, p_1) \{nn_1(n' + 1)(n'_1 + 1) - n'n'_1(n + 1)(n_1 + 1)\} dp_1. \quad (7.1)$$

Нас интересует релаксация фононов с малой энергией, функция распределения которых равна  $n$  при заданном равновесном распределении остальных фононов. Поэтому функции распределения  $n_1$ ,  $n'$  и  $n'_1$  в (7.1) будем считать равновесными, а отклонение функции распределения  $n$  от равновесного значения  $n_0$  будем полагать малым и равным  $\delta n$ . Воспользовавшись теперь известными свойствами равновесных функций распределения, преобразуем выражение, стоящее в фигурной скобке в (7.1):

$$\begin{aligned} & \{(n_0 + \delta n)n_1(n' + 1)(n'_1 + 1) - n'n'_1(n_1 + 1)(n_0 + 1 + \delta n)\} = \\ & = \delta n \{n_1(n' + 1)(n'_1 + 1) - n'n'_1(n_1 + 1)\} = \delta n \frac{n'n'_1(n_1 + 1)}{n}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Подставим в интеграл столкновений (7.1) полученное выражение; имеем

$$J(n) = -(2\pi\hbar)^{-3} \delta n \int n^{-1}n'n'_1(n_1 + 1) c\sigma(p, p_1) dp_1. \quad (7.3)$$

Таким образом, время релаксации для фононов с малой энергией определяется соотношением

$$\frac{1}{t_m} = (2\pi\hbar)^{-3} \int n^{-1}n'n'_1(n_1 + 1) c\sigma(p, p_1) dp_1. \quad (7.4)$$

Для того чтобы упростить интегрирование в (7.4), заменим функции  $n_1$ ,  $n'$  и  $n'_1$  на функции Вина и учтем тот факт, что импульсы  $p$  и  $p_1$  удовлетворяют неравенству  $p \ll p_1$ . При этом комбинация из функций распределения, входящая в выражение (7.4), принимает вид  $n_1(n_1 + 1)pc / kT$ . Воспользуемся этим и подставим в (7.4) выражение (2.11) для  $\sigma(p, p_1)$ , имеем<sup>2</sup>

$$\frac{1}{t_m} = (2\pi\hbar)^{-3} \frac{\pi(u+2)^4}{(96\pi\hbar^2\rho_0)^2 c \gamma} \int n_1(n_1 + 1) p_1^4 dp_1 \frac{pc}{kT} \quad (7.5)$$

<sup>2</sup> Интегрирование по  $dp_1$  с нулевым нижним пределом приводит к некоторой ошибке, которая, однако, незначительна, поскольку наши результаты имеют приближенный характер.

или после элементарного интегрирования

$$\frac{1}{t_M} = \frac{(u+2)^4 6l}{(48\hbar^2 \rho_0)^2 c \gamma (2\pi\hbar)^3} \left(\frac{kT}{c}\right)^6 P. \quad (7.6)$$

Тот факт, что фононы с импульсом  $p_1$  обладают большой энергией, учитывается в (7.5) автоматически, поскольку при интегрировании по  $dp_1$  существенную роль играют фононы с энергией порядка  $6kT$ .

Перейдем к случаю релаксации фононов с большой энергией. В этом случае предположение о том, что импульсы фононов связаны соотношением

$$p_1 \ll p, \quad (7.7)$$

позволяет упростить выражение для усредненной по углам вероятности рассеяния фонона фононом. Заменив в выражении (2.11)  $p_1$  на  $p$ , получаем

$$\sigma(p, p_1) = \frac{\pi(u+2)^4 p^4}{(96\pi\hbar^2 \rho_0 c)^2 \gamma}. \quad (7.8)$$

Совершенно аналогично случаю фононов с малой энергией находим для времени релаксации  $t_B$  фононов с большой энергией соотношение

$$\frac{1}{t_B} = (2\pi\hbar)^{-3} \int n^{-1} (n_1 + 1) n' n'_1 c \sigma(p, p_1) dp_1, \quad (7.9)$$

которое совпадает с выражением (7.4). Такое совпадение является естественным, поскольку при выводе соотношения (7.4) нигде не использовалось предположение о величине энергии релаксирующих фононов. Воспользуемся теперь предположением о малости импульса  $p$ , полагая функции распределения фононов  $n$ ,  $n'$  и  $n'_1$  малыми по сравнению с единицей, упростим комбинацию из функций распределения, входящую в выражение (7.9). Имеем<sup>3</sup>

$$n^{-1} n' n'_1 (n_1 + 1) \approx n_1 (n_1 + 1). \quad (7.10)$$

Подставим (7.8) и (7.10) в выражение (7.9); имеем

$$\frac{1}{t_B} = (2\pi\hbar)^{-3} \frac{\pi(u+2)^4}{(96\pi\hbar^2 \rho_0)^2 c \gamma} p^4 \int n_1 (n_1 + 1) dp_1. \quad (7.11)$$

Наконец, после элементарного интегрирования находим

$$\frac{1}{t_B} = \frac{(u+2)^4 (kT/c)^3 (\pi/3) p^4}{(48\hbar^2 \rho_0)^2 c \gamma (2\pi\hbar)^3}. \quad (7.12)$$

<sup>3</sup> Предположение о малости функций  $n$ ,  $n'$  и  $n'_1$  эквивалентно условию  $p, p', p_1 \gg \hbar T/c$ .

Тот факт, что импульс  $p_1$  является малым, учитывается в выражении (7.11) автоматически, поскольку в стоящем там интеграле существенную роль играют импульсы порядка  $2kT$ . С помощью численных значений параметров, входящих в формулы (7.6) и (7.12), вычислим коэффициенты в этих выражениях. В результате получаем для времени релаксации фононов с малой энергией:

$$\frac{1}{t_m} \approx 2 \cdot 10^7 T^7 x \quad (7.13)$$

и для фононов с большой энергией:

$$\frac{1}{t_B} \approx 2 \cdot 10^5 T^7 x^4. \quad (7.14)$$

Здесь величина  $x$  связана с энергией фонона соотношением  $\varepsilon = xkT$ .

Для определения времени релаксации фононов, обладающих произвольной энергией, можно подобрать интерполяционную формулу, которая в обоих предельных случаях переходила бы в полученные (7.13) и (7.14). Следующая формула удовлетворяет этому условию:

$$\frac{1}{t_\phi} = 10^5 T^7 x (x + 6)^3. \quad (7.15)$$

Рассеяние фононов фононами не приводит к существенному изменению направлений импульсов рассеянных фононов, но зато этот процесс, как уже отмечалось, обеспечивает установление равновесия по энергиям в фононном газе. Вычисленное время релаксации  $1/t_\phi$  характеризует скорость установления такого равновесия в фононном газе.

## § 8. Вязкость, обусловленная рассеянием фононов ротонами и фононов фононами

Эффективные сечения различных процессов рассеяния входят в интеграл столкновений аддитивно, поэтому перепишем кинетическое уравнение для фононов (5.8) в виде

$$n_0 (n_0 + 1) \frac{c p}{kT} \frac{\partial n}{\partial x} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi = J_I(n) + J_{II}(n) + J_{III}(n), \quad (8.1)$$

где  $J_I(n)$  — интеграл столкновений для процесса рассеяния фононов ротонами,  $J_{II}(n)$  — интеграл столкновений для процесса

рассеяния фононов фононами и, наконец,  $J_{III}(n)$  — интеграл столкновений, связанный с рассмотренным в § 7 процессом рассеяния фононов друг с другом на малые углы.

Кинетическое уравнение (8.1) в написанном виде определяет функцию распределения для фононов произвольной энергии, движущихся в данном направлении. Сделаем предположение, в справедливости которого убедимся ниже. Именно, предположим, что процесс установления энергетического равновесия в фононном газе происходит заметно быстрее рассеяния фононов ротонами и фононов фононами. Поэтому движущиеся в заданном направлении фононы будут распределены по энергиям таким же образом, как и при полном равновесии в отсутствие градиента макроскопической скорости. Согласно § 7 установление энергетического равновесия в фононном газе обеспечивается процессом рассеяния фононов фононами на малые углы. При таком процессе направления движения сталкивающихся фононов и рассеянных фононов совпадают. При каждом акте рассеяния энергия сталкивающихся фононов сохраняется. Поскольку же фононы не изменяют своего направления движения, то можно утверждать, что полная энергия фононов, движущихся в данном направлении, при этом не изменяется.

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (8.1) по всем энергиям фононов. В результате такой операции интеграл по всем энергиям от  $J_{III}(n)$  тождественно обратится в нуль, поскольку полная энергия фононов, движущихся в заданном направлении при рассеянии фононов на малые углы, сохраняется. Таким образом, после указанного интегрирования уравнение (8.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{c}{kT} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi \int_0^{\infty} n_0 (n_0 + 1) \varepsilon p^3 dp = \\ = \int_0^{\infty} \{J_I(n) + J_{II}(n)\} \varepsilon p^2 dp \quad (\varepsilon = cp). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Изменение полного числа фононов может происходить в результате испускания и поглощения фононов. Простейший из таких процессов — трехфононный, при котором один фонон превращается в два или, наоборот, запрещен из-за невозможности одновременного выполнения двух законов сохранения энергии и импульса. Указанный запрет не имеет места для пятифононного процесса, т. е. для процесса поглощения или испускания фонона при соударении двух фононов. Принципиально возможное вычисление вероятности такого процесса связано с чрезвычайно громоздким вычислением. Достаточно сказать, что число промежуточных состояний

для переходов двух фононов в три превышает 50. К счастью, можно обойтись без указанных вычислений, так как из экспериментальных значений коэффициента поглощения звука в гелии II можно вычислить непосредственно время релаксации, соответствующее пятифононному процессу<sup>4</sup>.

При этом оказывается, что при температурах выше  $0,9^\circ\text{K}$  пятифононный процесс происходит более медленно, чем процессы рассеяния, характеризующие вязкость. При более низких температурах имеет место обратная картина — процесс испускания (или поглощения) третьего фонона при соударении двух фононов становится более быстрым, чем процессы рассеяния, характеризующие вязкость. Указанное обстоятельство подтверждается также произведенными оценками вероятности пятифононного процесса.

Вероятность испускания или поглощения фононов при соударениях ротонов была оценена нами<sup>4</sup>. Эти процессы оказываются более медленными, чем процессы рассеяния, характеризующие вязкость, при всех температурах ниже  $\lambda$ -точки. Рассмотрим вначале область температур выше  $0,9^\circ\text{K}$ . Из сказанного следует, что за времена, характеризующие вязкие эффекты при этих температурах, полное число фононов, движущихся в заданном направлении, может существенно изменяться.

Однако изменение полного числа фононов, движущихся в заданном направлении, не происходит при рассеянии фононов фононами на малые углы. Поэтому при интегрировании левой и правой частей уравнения (8.1) по всем фононам, движущимся в заданном направлении, соответствующий интеграл от  $J_{III}(n)$  обращается тождественно в нуль. В результате имеем

$$\frac{c}{kT} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi \int_0^{\infty} n_0 (n_0 + 1) p^3 dp = \int_0^{\infty} \{J_I(n) + J_{II}(n)\} p^2 dp. \quad (8.3)$$

В соответствии со сказанным об относительной медленности процессов испускания и поглощения фононов из уравнения (8.3) следует, что изменение полного числа фононов, движущихся в заданном направлении, полностью определяется процессами рассеяния, характеризующими вязкость.

Согласно сделанному нами предположению за времена, характеризующие вязкий процесс, энергетическое равновесие для фононов, движущихся в заданном направлении, не нарушается. Таким образом, фононы, движущиеся в заданном направлении, имеют некоторую температуру  $T'$ , вообще не равную средней температуре фононного газа, и характеризуются равновесной функцией распределения, соответствующей этой температуре.

<sup>4</sup> Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в другой работе.

Однако, поскольку за времена, характеризующие вязкость, число фононов может изменяться, функция распределения для ро-тонов, движущихся в заданном направлении, не будет просто функцией Планка, а будет содержать некоторую функцию  $\alpha'$  типа химического потенциала, зависящую от направления движения фононов. Следовательно, при рассматриваемых температурах (выше  $0,9^\circ \text{K}$ ) фононы, движущиеся в заданном направлении, описываются функцией распределения

$$n = [e^{\alpha' + pc/kT'} - 1]^{-1}, \quad (8.4)$$

где  $\alpha'$  и  $T'$  являются функциями направления импульса рассматриваемого фонона в выбранной системе координат.

Функция  $\alpha'$  может иметь любой знак, и поэтому при некоторых энергиях фононов выражение  $\alpha' + pc/kT'$  будет обращаться в нуль. Однако, поскольку величина  $\alpha'$ , пропорциональная градиенту макроскопической скорости, является крайне малой, такая возможность могла бы осуществиться только для фононов с крайне малой энергией  $\varepsilon \ll kT$ . Но число фононов столь ничтожно, что они не играют никакой роли в процессах рассеяния, характеризующих вязкость; поэтому указанное обстоятельство не оказывает влияния на дальнейшие вычисления.

Пусть средняя температура фононного газа есть  $T$ , тогда отклонение функции распределения  $n$  от равновесного значения  $n_0$  согласно (8.4) и (5.7) равно

$$\delta n = n - n_0 = -n_0(n_0 + 1) \left\{ \alpha' - \frac{pc}{kT} \frac{\delta T}{T} \right\}, \quad (8.5)$$

где  $\delta T$  — отклонение температуры фононов, движущихся в заданном направлении, от средней температуры ( $\delta T = T' - T$ ).

Отклонение функции распределения  $\delta n$  от равновесного значения в рассматриваемой области температур зависит от двух переменных:  $\alpha'$  и  $\delta T$ ; для их определения мы воспользуемся уравнениями (8.2) и (8.3).

Перейдем теперь к области температур ниже  $0,9^\circ \text{K}$ . В этом случае процессы испускания и поглощения фононов происходят быстрее процессов рассеяния, характеризующих вязкость. При этом благодаря заметной разнице в температурных законах для указанных процессов относительно медленные процессы становятся относительно быстрыми при переходе через малый интервал температур, так что уже при температуре  $0,8^\circ \text{K}$  процессы испускания и поглощения фононов можно считать быстрыми. Таким образом, в области температур ниже  $0,8^\circ \text{K}$  число фононов, движущихся в заданном направлении, будет описываться просто функ-

цией Планка, зависящей только от температуры  $T'$  фононов в этом направлении:

$$n = [e^{pc/kT'} - 1]^{-1}. \quad (8.6)$$

Для отклонения функции распределения фононов  $n$  от равновесного значения в этом случае получаем

$$\delta n = n - n_0 = n_0 (n_0 + 1) \frac{pc}{kT} \frac{\delta T}{T}. \quad (8.7)$$

Для определения  $\delta n$  в этой области температур будем пользоваться уравнением (8.2). Уравнение (8.3) уже не имеет смысла, поскольку скорость приближения полного числа фононов, движущихся в заданном направлении, к своему равновесному значению определяется не вязкими процессами, а более быстрыми процессами испускания и поглощения фононов.

Вычислим фононную часть коэффициента вязкости для области температур выше  $0,9^\circ\text{K}$ . Для этого необходимо решить уравнения (8.2) и (8.3). Начнем с преобразования интеграла столкновений  $J_I(n)$ , содержащегося в правых частях (8.2) и (8.3). Интеграл столкновений  $J_I(n)$  для процесса рассеяния фононов ротонами равен

$$J_I(n) = - (2\pi\hbar)^{-3} \iiint cd\sigma(p, \psi) \{ Nn(N' + 1)(n' + 1) - N'n'(N + 1)(n + 1) \} dP. \quad (8.8)$$

Здесь  $N$  — функция распределения ротонов,  $n$  — функция распределения фононов,  $P$  — импульс ротона,  $p$  — импульс фонона; без штриха обозначены функции для сталкивающихся фонона и ротона, а со штрихом — соответствующие функции для рассеянных частиц; эффективное дифференциальное сечение  $d\sigma$  рассеяния фонона ротонам на угол  $\psi$  согласно (3.20) равно

$$d\sigma(p, \psi) = \left( \frac{P_0 p^2}{4\pi\hbar^2 \rho_0 c} \right)^2 \left\{ \frac{2}{3} (1 + \cos\psi) \cos^2\psi + \frac{1}{105} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right)^3 \left( 1 + 8 \cos^2\psi + \frac{8}{3} \cos^4\psi \right) + \frac{2A}{15} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right) (1 + 2 \cos^2\psi) + A^2 \right\} d\omega$$

( $d\omega$  — элемент телесного угла).

Распределение ротонов и фононов при наличии градиента макроскопической скорости и характеризуется неравновесными функциями. Однако, как легко можно убедиться, благодаря чрезвычайной скорости процесса рассеяния ротонов ротонами отклоне-



ния их функций распределения от равновесных значений будут значительно меньше соответствующих отклонений для фононов. Поэтому в интеграле столкновений  $J_I(n)$  ротоны будут описываться равновесными функциями распределения. Для фононов же следует подставить неравновесные функции распределения вида (5.2). После такой подстановки и интегрирования по фазовому объему  $dP$  сталкивающихся ротонов интеграл столкновений  $J_I(n)$  принимает вид

$$J_I(n) = -N_p \int c d\sigma(p, \psi) \{\delta n - \delta n'\}, \quad (8.9)$$

где  $N_p$  — число ротонов в единице объема, а отклонения  $\delta n$  определяются выражениями в форме (8.5).

Левая часть уравнений (8.2) и (8.3) содержит функцию от углов в форме  $P_{21}(\cos \vartheta) \cos \varphi$ , где  $P_{21}(\cos \vartheta)$  — присоединенная функция Лежандра. Поэтому решение уравнений (8.2) и (8.3) следует искать в таком виде, чтобы выражения для отклонений  $\delta n$ , входящих в правые части уравнений (8.2) и (8.3), были пропорциональны функциям углов того же вида. Однако в дальнейшем для упрощения преобразований в интегралах столкновений мы будем пользоваться в промежуточных выкладках вместо функций  $P_{21}(\cos \vartheta) \cos \varphi$  функциями Лежандра нулевого порядка  $P_2(\cos \vartheta)$ .

Такая замена возможна благодаря сферической симметрии рассеяния, делающей интеграл столкновений нечувствительным в ней. В окончательных результатах, естественно, вместо функции  $P_2(\cos \vartheta)$  будем подставлять функцию  $P_{21}(\cos \vartheta) \cos \varphi$ , получающуюся в выбранной нами системе координат.

Таким образом, функции  $\alpha'$  и  $\delta T/T$ , определяющие отклонение распределения для фононов, движущихся в заданном направлении от равновесного, мы напомним в форме

$$\alpha' = \alpha P_2(\cos \vartheta), \quad \frac{\delta T}{T} = \beta P_2(\cos \vartheta), \quad (8.10)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — не зависящие от углов коэффициенты. С помощью (8.5) и (8.10) интеграл столкновений  $J_I(n)$  принимает вид

$$J_I(n) = N_p \int n_0(n_0 + 1) c d\sigma(p, \psi) \left( \alpha - \frac{pc}{kT} \beta \right) [P_2(\cos \vartheta) - P_2(\cos \vartheta')]. \quad (8.11)$$

Воспользуемся теперь следствием из теоремы сложения функций Лежандра, которое заключается в следующем. Пусть в пространстве два направления заданы своими полярными углами  $\vartheta$  и  $\psi$  и азимутами  $\varphi$  и  $\varphi'$ ; тогда функция Лежандра нулевого порядка

от косинуса угла  $\theta'$  между этими направлениями удовлетворяет следующему интегральному соотношению:

$$\int_0^{2\pi} P_n(\cos \theta') d\phi = 2\pi P_n(\cos \theta) P_n(\cos \psi). \quad (8.12)$$

Выражение (8.11) содержит интегрирование по телесному углу рассеянного фонона, и поэтому, применив соотношение (8.12), перепишем интеграл столкновений (8.11) в виде

$$J_I(n) = P_2(\cos \theta) N_p \int c d\sigma(p, \psi) [1 - P_2(\cos \psi)] \left( \alpha - \frac{pc}{kT} \beta \right) n_0(n_0 + 1).$$

Отсюда после интегрирования по телесному углу  $d\sigma$  рассеянного фонона получаем

$$J_I(n) = \frac{1}{\tau} P_2(\cos \theta) n_0(n_0 + 1) \left( \alpha - \frac{pc}{kT} \beta \right) \left( \frac{pc}{kT} \right)^4, \quad (8.13)$$

где введено обозначение

$$\frac{1}{\tau} = \frac{N_p}{4\pi c} \left[ \frac{P_0(kT/c)^2}{\hbar^2 \rho_0} \right]^2 \left[ \frac{2}{15} + \frac{33}{35^2} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{14A}{75} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right) + A^2 \right]. \quad (8.14)$$

Величина  $\tau$  имеет размерность времени.

Вычислим стоящие в правых частях уравнений (8.2) и (8.3) интегралы

$$\int_0^{\infty} J_I(n) p^2 dp \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} J_I(n) \varepsilon p^2 dp.$$

Необходимое интегрирование производится весьма просто. При этом в качестве функции распределения  $n_0$  берем равновесную планковскую функцию. Таким образом, находим

$$\int_0^{\infty} J_I(n) p^2 dp = P_2(\cos \theta) (6! \alpha - 7! \beta) \left( \frac{kT}{c} \right)^3 \frac{1}{\tau}, \quad (8.15)$$

$$\int_0^{\infty} J_I(n) \varepsilon p^2 dp = P_2(\cos \theta) (7! \alpha - 8! \beta) \left( \frac{kT}{c} \right)^3 \frac{kT}{\tau}. \quad (8.16)$$

Произведем теперь аналогичные проделанным выше преобразования интеграла столкновений  $J_{II}$ , учитывающего процесс рас-

сеяния фононов фононами. Указанный интеграл записывается в виде

$$J_{II}(n) = - (2\pi\hbar)^{-3} \iint cd\sigma(p, p_1, p', p'_1) \{nn_1(n'+1)(n'_1+1) - n'n'_1(n+1)(n_1+1)\} dp, \quad (8.17)$$

где дифференциальное эффективное сечение  $d\sigma(p, p_1, p', p'_1)$  определяется формулой (2.9).

Подставим в (8.17) фононные функции распределения в виде сумм равновесных функций и небольших добавок в форме (8.5). Учтывая (8.10), таким образом получим

$$J_{II}(n) = \alpha (2\pi\hbar)^{-3} \iint cd\sigma(p, p_1, p', p'_1) n_0 n_{10} (n'_0 + 1) (n'_{10} + 1) \{P_2(\cos\vartheta) + P_2(\cos\vartheta_1) - P_2(\cos\vartheta') - P_2(\cos\vartheta'_1)\} dp_1 - \\ - (2\pi\hbar)^{-3} \beta \frac{c}{kT} \iint cd\sigma(p, p_1, p', p'_1) n_0 n_{10} (n'_0 + 1) (n'_{10} + 1) \{pP_2(\cos\vartheta) + p_1P_2(\cos\vartheta_1) - p'P_2(\cos\vartheta') - p'_1P_2(\cos\vartheta'_1)\} dp_1. \quad (8.18)$$

Здесь  $p$  и  $p_1$  — импульсы сталкивающихся фононов,  $p'$  и  $p'_1$  — импульсы рассеянных фононов,  $\vartheta$  — угол, образованный соответствующим индексом фононом с заданным направлением.

Введем углы  $\psi_1$ ,  $\psi'$  и  $\psi'_1$ , образованные направлениями импульсов  $p_1$ ,  $p'$  и  $p'_1$  с импульсом  $p$ , и применим следствие (8.12) из теоремы сложения функций Лежандра. В результате (8.18) принимает вид

$$J_{II}(n) = P_2(\cos\vartheta) \alpha (2\pi\hbar)^{-3} \iint cd\sigma(p, p_1, p', p'_1) n_0 n_{10} (n'_0 + 1) (n'_{10} + 1) \times \\ \times \{1 + P_2(\cos\psi_1) - P_2(\cos\psi') - P_2(\cos\psi'_1)\} dp_1 - \\ - P_2(\cos\vartheta) \beta \frac{c}{kT} (2\pi\hbar)^{-3} \iint cd\sigma(p, p_1, p', p'_1) n_0 n_{10} (n'_0 + 1) (n'_{10} + 1) \times \\ \times \{p + p_1P_2(\cos\psi_1) - p'P_2(\cos\psi') - p'_1P_2(\cos\psi'_1)\} dp_1. \quad (8.19)$$

Покажем, что второй интеграл в (8.19) сходится даже без учета дисперсии. Выражение, стоящее в этом интеграле в фигурной скобке, можно, подставив явный вид функций  $P_2(\cos\psi)$ , переписать в виде

$$\frac{3}{2} \{p' \sin^2\psi' + p'_1 \sin^2\psi'_1 - p_1 \sin^2\psi_1\}. \quad (8.20)$$

Вычтем из уравнения сохранения энергии  $p + p_1 - p' - p'_1 = 0$

проекцию уравнения сохранения импульса на направление импульса  $p$ :

$$p + p_1 \cos \psi_1 - p' \cos \psi' - p'_1 \cos \psi'_1 = 0.$$

В результате получим

$$p_1 (1 - \cos \psi_1) - p' (1 - \cos \psi') - p'_1 (1 - \cos \psi'_1) = 0. \quad (8.21)$$

Умножив полученное выражение на 3 и прибавив результат к выражению (8.20), получаем

$$\frac{3}{2} \{p_1 (1 - \cos \psi_1)^2 - p' (1 - \cos \psi')^2 - p'_1 (1 - \cos \psi'_1)^2\}. \quad (8.22)$$

Из соотношения (8.21) легко видеть, что выражение (8.22) при малых углах между импульсами сталкивающихся фононов пропорционально  $(1 - \cos \psi_1)^2$ . Но согласно (2.7) дифференциальное эффективное сечение для рассматриваемого процесса рассеяния, если не учитывать дисперсии, в этом случае расходится как  $(1 - \cos \psi_1)^{-2}$ . Таким образом, второй интеграл в (8.19) остается конечным при любых углах между импульсами сталкивающихся фононов.

Что касается первого интеграла в том же выражении (8.19), то без учета дисперсии он расходится логарифмически при малых углах между импульсами сталкивающихся фононов.

Вычисление интегралов  $\int_0^{\infty} J_{II}(n) p^2 dp$  и  $\int_0^{\infty} J_{II}(n) \varepsilon p^2 dp$ , на котором ввиду его чрезмерной громоздкости мы не будем здесь останавливаться, показывает, что при температурах выше  $0,9^\circ \text{K}$  указанными интегралами можно пренебречь по сравнению с соответствующими интегралами от  $J_I(n)$  в правых частях уравнений (8.2) и (8.3). Сравнение соответствующих интегралов от  $J_I(n)$  и  $J_{II}(n)$  происходит лишь при температуре  $0,7^\circ \text{K}$ . Поэтому, рассматривая явление вязкости в области температур выше  $0,9^\circ \text{K}$ , мы в правых частях уравнений будем учитывать только эффекты от рассеяния фононов ротонами, описываемые интегралом столкновений  $J_I(n)$ .

При более низких температурах, как указывалось, параметр  $\alpha$  можно положить равным нулю. Для определения же единственного неизвестного параметра  $\beta$  служит уравнение (8.2).

В этом случае интеграл  $J_{II}(n)$  согласно (8.19) равен просто

$$J_{II}(n) = -P_2 (\cos \vartheta) \frac{c\beta}{kT} (2\pi\hbar)^{-3} \iint cd\sigma(p, p_1, p', p'_1) n_0 n_{10} (n'_0 + 1) \times \\ \times (n'_{10} + 1) \{p + p_1 P_2 (\cos \psi_1) - p' P_2 (\cos \psi') - \\ - p'_1 P_2 (\cos \psi'_1)\} dp_1. \quad (8.23)$$

Вычисление интеграла  $\int_0^{\infty} J_{II}(n) \varepsilon p^2 dp$  входящего в правую часть уравнения (8.2), на котором мы здесь не останавливаемся, дает следующий результат:

$$\int_0^{\infty} J_{II}(n) \varepsilon p^2 dp = -P_2(\cos \vartheta) \beta (kT) \left(\frac{kT}{c}\right)^3 \frac{1}{\tau_{\Phi}}, \quad (8.24)$$

где  $\tau_{\Phi}$  — величина с размерностью времени, определяемая соотношением

$$\frac{1}{\tau_{\Phi}} = \frac{3 \cdot 131 (u+2)^4}{5 \cdot 2^{19} (2\pi)^3 \hbar^7 \rho_0^2 c} \left(\frac{kT}{c}\right)^9. \quad (8.25)$$

Ввиду полной сходимости интеграла (8.23) выражение (8.25), естественно, не содержит параметра дисперсии.

Стоящие в левых частях уравнений (8.2) и (8.3) интегралы вычисляются элементарным путем, их значения равны

$$\int_0^{\infty} n_0(n_0+1) \varepsilon p^3 dp = \frac{4\pi^4}{15} kT \left(\frac{kT}{c}\right)^4, \quad (8.26)$$

$$\int_0^{\infty} n_0(n_0+1) p^3 dp \approx \frac{36}{5} \left(\frac{kT}{c}\right)^4. \quad (8.27)$$

Подставим теперь в уравнение (8.2) и (8.3) значения всех входящих туда интегралов. Сократив несущественные множители и опустив угловые функции, мы получаем для определения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  в области температур выше  $0,9^\circ \text{K}$  два уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{4\pi^4}{15} = (7!\alpha - 8!\beta) \frac{1}{\tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{36}{5} = (6\alpha - 7!\beta) \frac{1}{\tau}. \quad (8.28)$$

Для температур ниже  $0,9^\circ \text{K}$  из уравнения (8.2) таким же путем получаем уравнение для определения параметра  $\beta$ :

$$\frac{4\pi^4}{15} \frac{\partial u}{\partial x} = -\beta \left( \frac{8!}{\tau} + \frac{1}{\tau_{\Phi}} \right). \quad (8.29)$$

### § 9. Длина свободного пробега, характеризующая вязкость

Вычислим длину свободного пробега, характеризующую вязкость. Параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , определяющие отклонение функции распределения от ее равновесного значения, существенным образом характеризуют величину коэффициента вязкости. При одновременном изменении значений этих параметров коэффициент вязкости изменяется во столько же раз. Будем рассматривать параметры  $\alpha$  и  $\beta$  зависящими от времени  $t$ . Тогда совершенно аналогично уравнениям (8.28) можно получить два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{3} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{36}{5} \frac{d\beta}{dt} &= - (6! \alpha - 7! \beta) \frac{1}{\tau}, \\ \frac{36}{5} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{4\pi^4}{15} \frac{d\beta}{dt} &= - (7! \alpha - 8! \beta) \frac{1}{\tau}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

определяющие закон изменения указанных параметров в области температур выше  $0,9^\circ \text{K}$ . Решение этой системы линейных дифференциальных уравнений ищем в виде, пропорциональном  $e^{-t/\theta_\phi}$ . Величину  $\theta_\phi$  естественно выбрать в качестве характеристического времени, определяющего вязкость. Соответствующая длина свободного пробега фононов  $\lambda_\phi$  получается умножением  $\theta_\phi$  на скорость фононов  $c$ . Для определения  $\theta_\phi$  из системы (9.1) получаем квадратное характеристическое уравнение, корни которого равны

$$\theta_\phi \approx \frac{16\tau}{6!}, \quad \frac{1}{3}\tau \frac{1}{6!}. \quad (9.2)$$

Для сравнения при макроскопическом рассмотрении явления вязкости следует взять больший по абсолютной величине из этих корней. Поэтому, беря большее из полученных значений  $\theta_\phi$  для длины свободного пробега фононов, с помощью (9.2) и (8.14) получаем выражение

$$\frac{1}{\lambda_\phi} = \frac{45N_p}{4\pi c^2} \left[ \frac{P_0 (kT/c)^2}{\hbar^2 \rho_0} \right]^2 \left[ \frac{2}{15} + \frac{33}{35^2} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right) + \frac{14A}{75} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right) + A^2 \right]. \quad (9.3)$$

Для определения характеристического времени  $\theta_\phi$  в области температур ниже  $0,9^\circ \text{K}$  аналогично (9.1) получаем линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{4\pi^4}{15} \frac{d\beta}{dt} = - \beta \left( \frac{8!}{\tau} + \frac{1}{\tau_\phi} \right). \quad (9.4)$$

В этом случае  $\lambda_\phi$  определяется выражением

$$\frac{1}{\lambda_\phi} = \left( \frac{81}{\tau} + \frac{1}{\tau_\phi} \right) \frac{15}{4\pi^4 c} = \frac{15 \cdot 71 N_p}{2\pi^5 c^2} \left[ \frac{P_0 (kT/c)^2}{\hbar^2 \rho_0} \right]^2 \times$$

$$\times \left[ \frac{2}{15} + \frac{33}{35^2} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{14A}{75} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right) + A^2 \right] + \frac{9 \cdot 131 (u+2)^4}{(2\pi\hbar)^7 2^{17} \rho_0^2 c^2} \left( \frac{kT}{c} \right)^9. \quad (9.5)$$

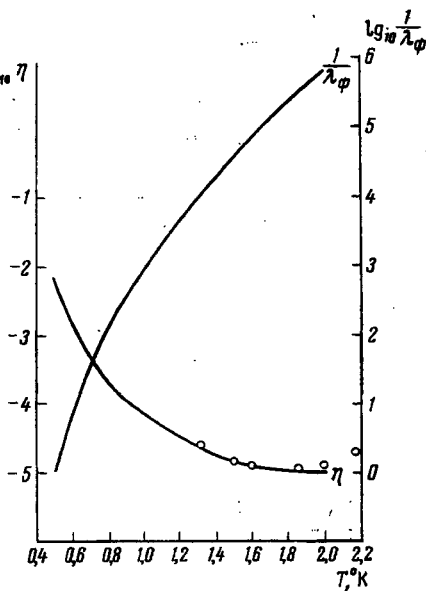
Подставив в формулы (9.3) и (9.5) численные значения всех параметров, окончательно получаем

$$\frac{1}{\lambda_\phi} = 3,4 \cdot 10^8 T^{9/2} e^{-\Delta/\hbar T} \quad (T > 1^\circ \text{K}),$$

$$\frac{1}{\lambda_\phi} = 1,1 \cdot 10^8 T^{9/2} e^{-\Delta/\hbar T} + 5,6 \cdot 10^{22} T^9 \quad (T < 0,8^\circ \text{K}). \quad (9.6)$$

На рисунке графически представлена зависимость  $1/\lambda_\phi$  от температуры<sup>5</sup>. Точки на кривой  $1/\lambda_\phi$  для температур 0,8 и 1,0° К получены путем интерполяции.

Воспользуемся теперь результатами настоящего параграфа и убедимся в законности сделанного нами предположения о скорости установления энергетического равновесия. Формула (7.15) определяет время установления энергетического равновесия для фононов  $t_\phi$ . Из сделанного предположения следует, что процесс установления энергетического равновесия происходит быстрее вязких процессов, так что время  $t_\phi$  для фононов, играющих существенную роль в вязкости, должно быть меньше меньшего из времен  $\theta_\phi$ , определяемых соотношением (9.2). Из (9.1) лег-



Кружки — значения  $\eta$ , полученные Андроникашвили

<sup>5</sup> Во всех известных измерениях коэффициента вязкости гелия II размеры систем значительно превосходили длину свободного пробега фононов. Однако, как обратил внимание Андроникашвили, в опытах по теплопередаче в гелии II в узких щелях длины свободного пробега при температуре 1,3° К уже сравнимы с размерами щелей. Это обстоятельство заметно осложняет явление теплопередачи в гелии II в узких щелях.

ко видеть, что фононную часть коэффициента вязкости в основном определяют фононы с энергией порядка 7—8  $kT$ . Сравнивая времена  $t_\phi$  и  $\theta_\phi$  для фононов, обладающих такой энергией, мы можем убедиться в том, что при всех температурах ниже 1,3—1,4° К сделанное предположение выполняется.

При рассмотрении вопроса о скорости установления энергетического равновесия следует иметь в виду, что основные параметры, и в первую очередь параметр дисперсии  $\gamma$ , определяющие величину  $t_\phi$ , известны весьма приближенно. Поэтому наиболее убедительной проверкой сделанного предположения может быть только опыт. Совпадение вычисленных и измеренных значений коэффициента вязкости, получаемое при производимом ниже сравнении, убеждает нас в правильности сделанного предположения. Получающееся при оценках сравнение времен  $t_\phi$  и  $\theta_\phi$  при температурах выше 1,4° К мы склонны относить за счет приближенности произведенных вычислений. Это косвенно подтверждается анализом данных о поглощении звука в гелии II. Следует иметь в виду, что при температурах выше 1,4° К роль фононной части коэффициента вязкости становится сравнительно малой по сравнению с ротонной частью, и поэтому этот вопрос для области температур выше 1,4° К не представляет интереса.

### § 10. Температурная зависимость фононной части коэффициента вязкости

Перейдем к вычислению фононной части коэффициента вязкости. Рассмотрим сначала область температур выше 0,9° К. Решим систему (8.28) относительно  $\alpha$  и  $\beta$  и подставим полученные значения в выражение (8.5) для отклонения  $\delta n$  функции распределения от ее равновесного значения. Таким образом, получаем

$$\delta n = -n_0(n_0 + 1) \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\tau}{6l} \left\{ 31,2 - 3,44 \frac{pc}{kT} \right\} \frac{du}{\partial x}. \quad (10.1)$$

При этом мы заменили функцию  $P_2(\cos \vartheta)$  на  $P_{21}(\cos \vartheta) \cos \varphi$ . Аналогичным образом поступаем для области температур ниже 0,9° К. Из уравнения (8.19) находим величину параметра  $\beta$  и далее с помощью (8.7) и (8.10) находим величину  $\delta n$ :

$$\delta n = -(n_0 + 1) \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi \frac{4\pi^4 \tau_\phi}{15(8l \tau_\phi + \tau)} \frac{pc}{kT} \frac{du}{\partial x}. \quad (10.2)$$

Отличная от нуля в нашем случае  $z$ -компонента импульса, переносимая в направлении  $x$ , равна

$$\sigma_{xz} = -(2\pi\hbar)^{-3} \int pc \delta n \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi p^2 dp d\vartheta. \quad (10.3)$$



Вычислив значение  $\sigma_{xz}$  поочередно с  $\delta l$  в виде (10.1) и (10.2) и сравнив результат с выражением соответствующей компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xz} = \eta_{\phi} du/dx$ , после простых сокращений находим фононную часть коэффициента вязкости:

$$\eta_{\phi} = \frac{0,157 (\hbar^2 \rho_0 c)^2 e^{\Delta/kT}}{(2\pi \mu kT)^{1/2} P_0^4} \left[ \frac{2}{15} + \frac{33}{35^2} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{14A}{75} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right) + A^2 \right]^{-1} \quad (T > 1^\circ \text{ K}),$$

$$\eta_{\phi} = \left( \frac{4\pi^3}{15} \right)^2 (\hbar^2 \rho_0 c)^2 \left\{ 8! (2\pi \mu kT)^{1/2} P_0^4 e^{-\Delta/kT} \left[ \frac{2}{15} + \frac{33}{35^2} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{14A}{75} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right) + A^2 \right] + \frac{3 \cdot 13! (u+2)^4}{5 \cdot 2^{19}} \left( \frac{kT}{c} \right)^5 \right\}^{-1} \quad (T < 0,8^\circ \text{ K}). \quad (10.4)$$

Подставив в (10.4) численные значения всех параметров, окончательно получаем

$$\eta_{\phi} = 8,7 \cdot 10^{-9} T^{-1/2} e^{\Delta/kT} \quad (T > 1^\circ \text{ K}),$$

$$\eta_{\phi} = 7,8 \cdot 10^{-10} (T^{1/2} e^{-\Delta/kT} + 4,8 \cdot 10^{-8} T^5)^{-1} \quad (T < 0,8^\circ \text{ K}). \quad (10.5)$$

Таким образом, фононная часть коэффициента вязкости возрастает с убыванием температуры. При температурах выше  $0,9^\circ \text{ K}$  она возрастает по закону  $e^{\Delta/kT} T^{-1/2}$ . При температурах же ниже  $0,7^\circ \text{ K}$ , когда существенным является только эффект рассеяния фононов фононами, этот закон заменяется законом  $T^{-5}$ . В промежуточной области имеет место более сложный закон, определяемый формулой (10.5).

## § 11. Температурная зависимость коэффициента вязкости гелия II

В § 6 мы вычислили ротонную часть коэффициента вязкости, которая оказалась не зависящей от температуры. В § 10 были выведены формулы для фононной части коэффициента вязкости, обнаруживающие сильный рост  $\eta_{\phi}$  с убыванием температуры. Истинный коэффициент вязкости гелия II равен сумме ротонной и фононной частей. Будучи суммой постоянной и возрастающей с убыванием температуры частей, коэффициент вязкости должен с убыванием температуры сильно возрастать. На этот интересный факт до сих пор не было никаких указаний.

Согласно (6.6) и (10.4) истинный коэффициент вязкости гелия II определяется следующим образом:

$$\eta = \frac{P_0^2 \tau_p}{15 \mu} + \frac{0,157 (\hbar^2 \rho_0 c)^2 e^{\Delta/\hbar T}}{(2\pi \mu k T)^{1/2} P_0^4} \left[ \frac{2}{15} + \frac{33}{35^2} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{14A}{75} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right) + A^2 \right]^{-1} \quad (T > 1^\circ \text{K}),$$

$$\eta = \frac{P_0^2 \tau_p}{15 \mu} + \left( \frac{4\pi^2}{15} \right)^3 (\hbar^2 \rho_0 c)^2 \left\{ 8! (2\pi \mu k T)^{1/2} P_0^4 e^{-\Delta/\hbar T} \left[ \frac{2}{15} + \frac{33}{35^2} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{14A}{75} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right) + A^2 \right] + \frac{3 \cdot 13! (u+2)^4 (kT/c)^5}{5 \cdot 2^{19}} \right\}^{-1} \quad (T < 0,8^\circ \text{K}). \quad (11.1)$$

Поскольку ротонная часть коэффициента вязкости не может быть вычислена точно, то указанную величину мы определим из опыта. Для этого воспользуемся данными Андроникашвили [1], произведшего измерения коэффициента вязкости вплоть до температуры  $1,35^\circ \text{K}$ . Вычитая из экспериментальных значений коэффициента вязкости вычисленную по формуле (10.5) фоновую часть, получаем в интервале температур от  $1,35$  до  $1,9^\circ \text{K}$  почти постоянную величину, равную  $1 \cdot 10^{-5}$  пуаз, которую мы отождествим с ротонной частью коэффициента вязкости. Таким образом, имеем

$$\eta_p = \frac{P_0^2 \tau_p}{15 \mu} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ пуаз}. \quad (11.2)$$

Из полученного значения  $\eta_p$  можно вычислить значения постоянных  $\tau_p$  и  $V_0$ . Они оказываются равными примерно

$$\tau_p \approx 1,5 \cdot 10^{10} \text{ сек} \cdot \text{см}^{-3}, \quad V_0 \approx 0,5 \cdot 10^{-38} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3.$$

Воспользовавшись теперь численным значением  $\eta_p$  и функцией (10.5), определяющей численное значение  $\eta_\phi$ , запишем окончательное выражение для коэффициента вязкости (в пуазах):

$$\eta \cdot 10^5 = 1 + 8,7 \cdot 10^{-4} T^{-1/2} e^{\Delta/\hbar T} \quad (T > 1^\circ \text{K}), \quad (11.3)$$

$$\eta \cdot 10^5 = 7,8 \cdot 10^{-5} (T^{1/2} e^{-\Delta/\hbar T} + 4,8 \cdot 10^{-6} T^5)^{-1} \quad (T < 0,8^\circ \text{K}).$$

Формулы (11.3) определяют значения  $\eta$  для двух температурных областей — выше и ниже  $0,9^\circ \text{K}$ .

Вблизи температуры  $0,9^\circ \text{K}$  ни одна из этих формул не верна. Это объясняется тем, что при этой температуре времена, характеризующие процессы испускания и поглощения фононов, сравняются с временами, характеризующими вязкие процессы рассеяния. Указанное обстоятельство можно было бы учесть в уравнении (8.3). Однако поскольку этот эффект оказывается существ-

венным лишь в небольшой области температур порядка  $0,2^\circ \text{K}$  вблизи  $0,9^\circ \text{K}$ , то мы на нем специально не останавливались.

При вычислениях первую из формул (11.3) мы применяем в области температур выше  $1^\circ \text{K}$ , а вторую — для температур меньше  $0,8^\circ \text{K}$ . Значения коэффициента вязкости в промежуточной области находим путем интерполяции между вычисленными значениями. На рисунке произведено сравнение вычисленных по формуле (11.3) значений коэффициента вязкости с измеренными значениями в опытах Андроникашвили [1]. В небольшой области вблизи  $\lambda$ -точки экспериментальные значения коэффициента вязкости обнаруживают некоторый рост при повышении температуры. Следует, однако, иметь в виду, что полученные нами результаты нельзя распространять на область температур, близких к  $\lambda$ -точке. Во всех наших рассуждениях предполагалось, что фоновый и ротонный газы являются почти идеальными. Поскольку же в области, близкой к  $\lambda$ -точке, это обстоятельство не имеет места, то естественно, что наши результаты не пригодны для этой области.

В заключение необходимо отметить, что все полученные в настоящей работе результаты имеют весьма ограниченную точность, что связано с чрезвычайной грубостью, с которой известны такие параметры теории, как  $\partial c/\partial \rho$ ,  $\partial^2 c/\partial \rho^2$ ,  $\partial^2 \Delta/\partial \rho^2$  и  $\partial P_0/\partial \rho$ . Это замечание, конечно, не относится к полученной температурной зависимости величин, которая определена достаточно точно.

В своих прежних работах Тисса из совершенно неверных соображений получил для коэффициента вязкости закон  $\eta \sim T^6$ . В последней работе Тисса [2] отказался от этого результата и из произвольной системы постулатов получил другой температурный закон  $\eta \sim T^{1/2}$ . Обращаясь к последним опытам Андроникашвили [1] и в связи с этим к результатам настоящей работы, можно убедиться в том, что в действительности ничего похожего на закон  $\eta \sim T^{1/2}$  в гелии II нет. Вопреки утверждениям Тиссы гелий II для всех температур, кроме небольшой области вблизи  $\lambda$ -точки, обладает коэффициентом вязкости  $\eta$  с отрицательным значением производной  $d\eta/dT$  и в этом отношении не отличается от обычных жидкостей.

Авторы выражают свою благодарность Э. Андроникашвили, Е. Лифшицу и В. Пенкову, принявшим участие в обсуждении затронутых в настоящей работе вопросов.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Э. Андроникашвили. ЖЭТФ, 18, 429, 1948.  
[2] L. T i s s a. Phys. Rev., 72, 839, 1947.

# О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МЕЖДУ ЭЛЕКТРОНОМ И ПОЗИТРОНОМ

Совместно с В. Б. БЕРЕСТЕЦКИМ

ЖЭТФ, 19, 673, 1949

Устанавливается волновое уравнение системы электрон — позитрон с точностью до членов порядка  $v^2/c^2$  с учетом обменного взаимодействия.

1. Как известно, в классической электродинамике можно описать систему взаимодействующих зарядов с точностью до членов порядка  $v^2/c^2$  включительно (где  $v$  — скорость заряда, а  $c$  — скорость света) при помощи гамильтоновой функции, зависящей от координат и импульсов частиц и не содержащей поля излучения. В квантовой механике гамильтониан системы электронов с точностью до  $v^2/c^2$  был получен Брейтом [1].

Целью настоящей работы является установление полного уравнения, описывающего (также с точностью до  $v^2/c^2$ ) систему электрон — позитрон. Кроме взаимодействий, входящих в уравнение Брейта, здесь надо учесть специфическое обменное взаимодействие электрона с позитроном. В этом будет состоять основная наша задача. Как уже отмечалось [2], результат Брейта был получен неудовлетворительным методом, в котором искусственно отбрасывались лишние члены. Поэтому мы приведем вывод также и той части взаимодействия электрона и позитрона, которая эквивалентна брейтовской.

Будем исходить из следующей формы оператора Гамильтона системы электронов в методе вторичного квантования:

$$H = \sum_n E_n a_n^+ a_n + \frac{1}{2} \sum_{nn's's'} V_{ns's'}^n a_n^+ a_s^+ a_n' a_{s'} \quad (1)$$

Здесь  $E_n$  — энергия электрона в  $n$ -м состоянии;  $V_{ns}^{n's'}$  — коэффициенты (матричные элементы), соответствующие переходам одного электрона из состояния  $n$  в  $n'$  с одновременным переходом другого электрона из  $s$  в  $s'$ ;  $a_n$  и  $a_n^+$  — операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} a_n^+ a_n + a_n a_n^+ &= \delta_{nn'}, \\ a_n a_{n'} + a_{n'} a_n &= a_n^+ a_{n'}^+ + a_{n'}^+ a_n^+ = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти операторы действуют на функции от чисел заполнения, которые в нашем случае (один электрон и один позитрон) имеют такой вид:

$$c(0, \dots, 0, 1_n, 0, \dots; 1, 1, \dots, 1, 0_{-s}, 1, \dots),$$

т. е. заполнено одно состояние с положительной энергией и все, кроме одного, состояния с отрицательной энергией. Поэтому в (1) один из верхних и один из нижних индексов  $V_{ns}^{n's'}$  относятся к состояниям с положительной энергией, а другой — к отрицательным (последние мы будем снабжать знаком  $-$ ). Используя (2), мы можем переписать (1) в следующем виде:

$$H = \sum_n E_n a_n^+ a_n + \sum_s E_{-s} a_{-s}^+ a_{-s} + \sum_{n'n's's'} (V_{n,-s'}^{n',-s} - V_{n,-s}^{n',-s'}) a_n^+ a_{-s}^+ a_n a_{-s} \quad (3)$$

(здесь подразумевается суммирование по положительным значениям индексов).

Для того чтобы ввести в рассмотрение позитрон, следует ввести операторы

$$b_s = a_{-s}^+, \quad b_s^+ = a_{-s} \quad (4)$$

с одновременным преобразованием функций

$$c(0 \dots 1_n \dots; 1, 1 \dots 0_{-s} \dots) = \gamma(0 \dots 1_n \dots; 0 \dots 0, 1_s, 0 \dots).$$

Тогда

$$H = \sum_n E_n (a_n^+ a_n + b_n^+ b_n - 1) - \sum_{n'n's's'} (V_{n,-s'}^{n',-s} - V_{n,-s}^{n',-s'}) a_n^+ b_n^+ a_n b_s \quad (5)$$

(причем  $E_{-n} = -E_n$ ).

Наша задача состоит в нахождении коэффициентов  $V_{n,-s}^{n',-s}$  и  $V_{n,-s'}^{n',-s}$ . Если они могут быть представлены как матричные элементы некоторого оператора  $V$ , действующего на координаты

(пространственные и спиновые) электрона и позитрона,

$$-(V_{n, -s}^{n', -s'} - V_{n, -s'}^{s, n'}) = \int u_{n'}^*(\mathbf{r}_1) v_{s'}^*(\mathbf{r}_2) V u_n(\mathbf{r}_1) v_s(\mathbf{r}_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (6)$$

то это значит, что система электрон — позитрон описывается волновым уравнением

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1; \mathbf{r}_2, \sigma_2) = [H_0(1) + H_0(2) + V] \Psi, \quad (7)$$

где  $H_0(1)$  и  $H_0(2)$  — гамильтонианы электрона и позитрона при отсутствии их взаимодействия, без ограничений по свойствам симметрии волновой функции  $\psi$ .

Явный вид функций  $u_n$  и  $v_s$  для нас несуществен. В частности, мы можем подразумевать под ними волновые функции свободных частиц. Это, конечно, ни в какой степени не будет означать применения теории возмущений.

2. Свободное состояние электрона описывается двумя спинорными функциями  $\varphi$  ( $\varphi^\lambda$ ;  $\lambda = 1, 2$ ) и  $\chi$  ( $\chi^\lambda$ ), удовлетворяющими уравнениям Дирака

$$c \sigma \mathbf{r} \varphi = (E + mc^2) \chi, \quad c \sigma \mathbf{r} \chi = (E - mc^2) \varphi, \quad (8)$$

где  $\sigma$  — оператор Паули,  $\mathbf{r}$  — оператор импульса,  $m$  — масса электрона. В случае положительного значения  $E$  при  $E - mc^2 \ll mc^2$ , с точностью до членов порядка  $1/c^2$ ,

$$c \chi = \frac{\sigma \mathbf{p}}{2m} \left( 1 - \frac{p^2}{4m^2 c^2} \right) \varphi. \quad (9)$$

Вместо уравнений (8) можно рассматривать одну спинорную функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{p^2}{2m} \left( 1 - \frac{p^2}{4m^2 c^2} \right) \varphi = (E - mc^2) \varphi. \quad (10)$$

Волновая функция  $\varphi$  не нормирована, так как

$$\int (\varphi^* \varphi + \chi^* \chi) d\tau = 1$$

или с точностью до  $1/c^2$

$$\int \varphi^* \left( 1 + \frac{p^2}{4m^2 c^2} \right) \varphi = 1. \quad (11)$$

Если ввести вместо  $\varphi$  нормированную функцию  $u$

$$\int u^* u d\tau = 1,$$

то с той же точностью

$$\varphi = \left(1 - \frac{p^2}{8m^2c^2}\right) u, \quad u = \left(1 + \frac{p^2}{8m^2c^2}\right) \varphi. \quad (12)$$

Уравнение (10) сохраняет свой вид и для нормированной функции

$$H_0 u = (E - mc^2) u,$$

где

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2}. \quad (13)$$

В случае состояний с отрицательной энергией ( $E < -mc^2$ ) имеют место аналогичные соотношения, но меняются ролями  $\varphi$  и  $\chi$ . Теперь

$$c\varphi = -\frac{\sigma p}{2m} \left(1 - \frac{p^2}{4m^2c^2}\right) \chi, \quad (14)$$

и нормированная функция

$$u = \left(1 + \frac{p^2}{8m^2c^2}\right) \chi \quad (15)$$

удовлетворяет уравнению

$$-H_0 u = (E + mc^2) u, \quad (16)$$

где  $H_0$  — оператор (13).

Мы хотим ввести вместо волновой функции электрона в состоянии с отрицательной энергией волновую функцию позитрона. Для этого выпишем одно из уравнений (8)

$$c\sigma_\mu^\lambda \chi^\mu = (E - mc^2) \varphi^\lambda,$$

и перейдем к комплексно сопряженному уравнению. Так как  $p^* = -p$  и  $(\sigma_\mu^\lambda)^* = \sigma_\lambda^\mu$ , то

$$c\sigma_\lambda^\mu \bar{\chi}_\mu = (-E + mc^2) \bar{\varphi}_\lambda, \quad (17)$$

где в соответствии со свойствами преобразования спиноров введены комплексно сопряженные спиноры

$$\bar{\chi}_\mu = (\chi^\mu)^*, \quad \bar{\varphi}_\lambda = (\varphi^\lambda)^* \quad (\chi^1 = -\chi_2; \chi^2 = \chi_1). \quad (18)$$

(Заметим, что при этом  $\bar{\chi}^\mu = -(\chi_\mu)^*$ .)

Из (17) видно, что спиноры  $\bar{\chi}$  и  $\bar{\varphi}$  удовлетворяют тому же уравнению, что  $\varphi$  и  $\chi$  в случае положительного  $E$ , и, таким образом, описывают частицу с положительной энергией и импульсом, противоположным (ввиду замены  $e^{ipr/\hbar}$  на  $\bar{e}^{ipr/\hbar}$ ) импульсу соответствующего состояния с отрицательной энергией, т. е. они описывают позитрон. Формула (18) определяет также соотношение между направлениями спинов.

Итак, мы определяем волновую функцию позитрона следующим образом:

$$v_s^\lambda = \bar{u}_{-s}^\lambda \quad (19)$$

(при этом

$$\bar{v}_{s\lambda} = -u_{-s\lambda}). \quad (19a)$$

Она удовлетворяет уравнению

$$H_0 v_s = (E_s - mc^2) v_s, \quad (20)$$

где  $H_0$  — оператор (13).

3. Определим сначала матричный элемент  $V_{n, -s}^{n', -s'}$  в формуле (5), соответствующий переходам без изменения знака энергии (брейтовское взаимодействие). При этом мы можем исходить из классического выражения энергии взаимодействия зарядов (см., например, [3])

$$\int \left\{ r^{-1} \rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2) - \frac{1}{2c} (r^{-1} \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \mathbf{j}(\mathbf{r}_2) + r^{-3} [\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \mathbf{r}] [\mathbf{j}(\mathbf{r}_2) \mathbf{r}]) \right\} d\tau_1 d\tau_2. \quad (21)$$

( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ) и подставить в нем в качестве плотностей заряда и тока соответствующие переходные плотности

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}_1) &= e\psi_{n'}^*(\mathbf{r}_1)\psi_n(\mathbf{r}_1); & \rho(\mathbf{r}_2) &= \psi_{-s}^*(\mathbf{r}_2)\psi_{-s'}(\mathbf{r}_2); \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) &= e\mathbf{c}\psi_{n'}^*(\mathbf{r}_1)\boldsymbol{\alpha}_1\psi_n(\mathbf{r}_1); & \mathbf{j}(\mathbf{r}_2) &= \psi_{-s}^*(\mathbf{r}_2)\boldsymbol{\alpha}_2\psi_{-s'}(\mathbf{r}_2), \end{aligned}$$

где  $\psi$  — четырехкомпонентные дираковские функции и  $\boldsymbol{\alpha}$  — матрицы Дирака. Тогда

$$\begin{aligned} V_{n, -s}^{n', -s'} &= e^2 \int \psi_{n'}^*(\mathbf{r}_1)\psi_{-s}(\mathbf{r}_2) \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{2r} \boldsymbol{\alpha}_1 \boldsymbol{\alpha}_2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2r^3} (\boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{r}) (\boldsymbol{\alpha}_2 \mathbf{r}) \right] \psi_n(\mathbf{r}_1)\psi_{-s'}(\mathbf{r}_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (22) \end{aligned}$$

Этот результат может быть получен также по методу потенциалов Меллера (см. [4]).

Выражение (22) имеет смысл лишь с точностью до членов порядка  $1/c^2$ . Поэтому мы выразим малые компоненты дираковских функций через большие по формулам (9) и (15), в которых достаточно будет ограничиться первыми членами. Тогда

$$\begin{aligned} V_{n, -s}^{n', -s'} &= e^2 \int \varphi_{n'}^* \chi_{-s}^* \varphi_n \chi_{-s} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{r} + \\ &+ \frac{e^2}{4m^2 c^2} \int [(\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{p}_1 \varphi_{n'})^* (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{p}_1 \varphi_n) \chi_{-s}^* \chi_{-s} + \varphi_{n'}^* \varphi_n (\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{p}_2 \chi_{-s})^* (\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{p}_2 \chi_{-s'})] \frac{d\tau_1 d\tau_2}{r} + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{e^2}{8m^2c^2} \int [\varphi_n^* \sigma_1 (\sigma_1 p_1 \varphi_1) + (\sigma_1 p_1 \varphi_n)^* \sigma_1 \varphi_n] [\chi_{-s}^* \sigma_2 (\sigma_2 p_2 \chi_{-s}') + \\
& + (\sigma_2 p_2 \chi_{-s}')^* \sigma_2 \chi_{-s}'] \frac{d\tau_1 d\tau_2}{r} + \frac{e^2}{8m^2c^2} \int [\varphi_n^* (\sigma_1 r) (\sigma_1 p_1 \varphi_n) + \\
& + (\sigma_1 p_1 \varphi_n)^* (\sigma_1 r) \varphi_n] [\chi_{-s}^* (\sigma_1 r) (\sigma_2 p_2 \chi_{-s}') + (\sigma_2 p_2 \chi_{-s}')^* (\sigma_2 r) \chi_{-s}'] \frac{d\tau_1 d\tau_2}{r^3}.
\end{aligned} \quad (23)$$

Мы не будем приводить, в общем простых, выкладок, связанных с преобразованием (23), а ограничимся наиболее существенными замечаниями. Для того чтобы привести это выражение к интересующей нас форме, надо произвести интегрирование по частям. Так как при этом возникают более высокие степени  $1/r$ , то область вблизи точки  $r = 0$  необходимо выделить, и поверхностный интеграл по окружающей ее поверхности может дать конечную величину при  $r \rightarrow 0$ .

Далее, во всех членах, кроме первого, можно заменить  $\varphi_n$  на  $u_n$  и  $\chi_{-s}$  на  $u_{-s}$ , так как они уже содержат множители  $1/c^2$ . Первый же член необходимо выразить через нормированные функции при помощи формул (12) и (16), и, наконец, волновые функции отрицательных состояний заменить на позитронные согласно (19), причем

$$u_{-s}^* \sigma u_{-s}' = -v_s^* \sigma v_s. \quad (24)$$

Окончательно получаем

$$V_{n, -s}^{n', -s'} = \int u_n^* (r_1) v_s^* (r_2) V_1 u_n v_s d\tau_1 d\tau_2, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}
V_1 = & \frac{e^2}{r} - \pi \left( \frac{e\hbar}{mc} \right)^2 \delta(r) - \frac{e^2 \hbar}{4m^2 c^2} \frac{1}{r^3} [[\mathbf{r}p_1] \sigma_1 - [\mathbf{r}p_2] \sigma_2 + \\
& + 2[\mathbf{r}p_1] \sigma_2 - 2[\mathbf{r}p_2] \sigma_1] - \frac{e^2}{2m^2 c^2} \left( \frac{1}{r} p_1 p_2 + \frac{1}{r^3} x_i x_k p_{1i} p_{2k} \right) + \\
& + \left( \frac{e\hbar}{2mc} \right)^2 \left[ \frac{\sigma_1 \sigma_2}{r^3} - \frac{3(\sigma_1 r)(\sigma_2 r)}{r^5} \right] - \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e\hbar}{2mc} \right)^2 (\sigma_1 \sigma_2) \delta(r). \quad (26)
\end{aligned}$$

Последний член, содержащий  $\delta$ -функцию, возник из поверхностного интеграла, о котором упоминалось выше. При этом в интегралах от предпоследнего члена можно не обращать внимания на их кажущуюся расходимость и, например, проводить первым интегрирование по углам<sup>1</sup>. Другая  $\delta$ -функция, содержащаяся в (26), возникла аналогичным образом при подстановке

<sup>1</sup> Обсуждение подобных вопросов см. в [5].

нормированных функций взамен неэрмитовых членов типа  $ir^{-3}gr$  (оператор  $V_1$  является эрмитовым)<sup>2</sup>.

4. Перейдем к определению второго матричного элемента в (5), выражающего обменное взаимодействие; мы запишем его в форме

$$V_{n,-s}^{s,-s'} = e \int \psi_{n'}^*(r) [\Phi_{n,-s}(r) - \alpha A_{n,-s}(r)] \psi_{-s'}(r) d\tau e^{i(E_n - E_{-s'})t/\hbar}, \quad (27)$$

где  $\Phi_{n,-s}$  и  $A_{n,-s}$  — потенциалы, вызванные переходом электрона из состояния  $n$  в  $-s$ .

Для потенциалов  $\Phi_{n,-s}$  и  $A_{n,-s}$  неудобно пользоваться интегралами запаздывающих потенциалов, так как фактор запаздывания  $\exp\{(i/\hbar c)(E_{-s'} - E_s)r\}$  содержит в экспоненте большой множитель — порядка  $2mc^2$ , что делает невозможным пользование его разложением. Поэтому мы будем исходить из уравнений для потенциалов:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_{n,-s} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_{n,-s}}{\partial t^2} &= -4\pi e \psi_{-s}^* \psi_n e^{-i(E_n - E_{-s})t/\hbar}, \\ \Delta A_{n,-s} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{n,-s}}{\partial t^2} &= -4\pi e \psi_{-s}^* \alpha \psi_n e^{-i(E_n - E_{-s})t/\hbar}, \end{aligned} \quad (28)$$

Поскольку мы рассматриваем скорости частиц, малые по сравнению со скоростью света, в этих уравнениях играют роль волновые числа порядка  $p/\hbar \ll mc/\hbar$ , в то время как частоты приближенно равны

$$\frac{E_n - E_{-s}}{\hbar} \approx \frac{2mc^2}{\hbar}. \quad (29)$$

Поэтому мы вправе в (28) пренебречь пространственными производными по сравнению с временными. С той же степенью точности можно в правой части этих уравнений пользоваться (29). Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{n,-s} &= -\pi \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 e \psi_{-s}^* \psi_n e^{-(2mc^2/\hbar)t} = -\pi \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 e (\psi_{-s}^* \Phi_n + \chi_{-s}^* \chi_n) e^{-(2mc^2/\hbar)t}, \\ A_{n,-s} &= -e\pi \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \psi_{-s}^* \alpha \psi_n e^{-(2mc^2/\hbar)t} = \\ &= -\pi \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 e (\psi_{-s}^* \sigma \chi_n + \chi_{-s}^* \sigma \Phi_n) e^{-(2mc^2/\hbar)t}. \end{aligned} \quad (30)$$

<sup>2</sup> Заметим, что гамильтонова функция электрона во внешнем электрическом поле  $E = -\nabla\Phi$ , с точностью до членов порядка  $1/c^2$ , имеет следующий вид:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + e\Phi - \frac{e\hbar}{4m^2c^2} (E p) \sigma + \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2} \Delta\Phi.$$

На основании (9) и (14) мы можем заключить, что  $\Phi_{n,-s}$  имеет порядок величины  $1/c^3$ , а  $A_{n,-s}$  содержит также член порядка  $1/c^2$  (с произведением  $\chi_{-s}$  на  $\Phi_n$ ).

Далее, при подстановке в (27) член, содержащий  $\Phi_{n,-s}$ , опять содержит малые компоненты дираковских функций и будет поэтому иметь порядок величины  $1/c^4$ . Член же, содержащий  $A_{n,-s}$ , сохранит порядок величины  $1/c^2$ . Таким образом, с интересующей нас точностью

$$\Phi_{n,-s} = 0, \quad A_{n,-s}(\mathbf{r}, t) = -\pi \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 e\chi_{-s}^*(\mathbf{r}) \sigma \Phi_n(\mathbf{r}) e^{-(2mc^2/\hbar)t}; \quad (31)$$

$$V_{n,-s}^{s',n'} = \pi e^2 \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \int [u_{-s}^*(\mathbf{r}) \sigma u_n(\mathbf{r})] [u_n^*(\mathbf{r}) \sigma u_{-s'}(\mathbf{r})]. \quad (32)$$

В последнем выражении мы заменили ненормированные функции нормированными, так как оно является величиной порядка  $1/c^2$ .

Нам остается выразить (32) через позитронные волновые функции. Для этого выразим скалярное произведение двух векторов, построенных из наших спинорных функций при помощи оператора  $\sigma$ , через скаляры, которые можно непосредственно построить из четырех спиноров:  $\bar{u}_{n'}$ ,  $u_n$ ,  $\bar{u}_{-s}$  и  $u_{-s'}$ . Нетрудно проверить, что

$$(u_{-s}^* \sigma u_n) (u_n^* \sigma u_{-s'}) = (\bar{u}_{n'\lambda} u_n^\lambda) (\bar{u}_{-s\mu} u_{-s'}^\mu) (\bar{u}_{n'\lambda} \bar{u}_{-s}^\lambda) (u_n^\mu u_{-s'\mu}). \quad (33)$$

Введем теперь позитронные функции согласно определению (19) и (19а). Тогда

$$\begin{aligned} \bar{u}_{-s\mu} u_{-s'}^\mu &= -v_{s\mu} \bar{v}_{s'}^\mu = \bar{v}_{s'\mu} v_s^\mu = v_s^* v_{s'}, \\ \bar{u}_{n'\lambda} \bar{u}_{-s}^\lambda &= \bar{u}_{n'\lambda} v_s^\lambda = u_n^* v_s, \\ u_n^\mu u_{-s'\mu} &= -u_n^\mu \bar{v}_{s'\mu} = -v_s^* u_n, \\ (u_{-s}^* \sigma u_n) (u_n^* \sigma u_{-s'}) &= (u_n^* u_n) (v_s^* v_s) + (u_n^* v_s) (v_s^* u_n). \end{aligned} \quad (34)$$

Второй член в (34) отличается от первого обменом электронной и позитронной функций. Его можно записать при помощи известного «оператора обмена»:

$$\begin{aligned} (u_n^* u_s) (v_s^* u_n) &\equiv u_n^* (1) v_s^* (2) v_s (1) u_n (2) = \\ &= \frac{1}{2} u_n^* (1) v_s^* (2) (1 + \sigma_1 \sigma_2) u_n (1) v_s (2), \end{aligned} \quad (35)$$

где индексами в скобках обозначены соответствующие спиновые переменные (оператор  $\sigma_1$  действует на спиновые переменные (1)

и т. д.). Теперь мы можем записать (32) в окончательной форме

$$V_{n, s'}^{s, n'} = \int u_{n'}^*(\mathbf{r}_1) v_s^*(\mathbf{r}_2) V_2 u_n(\mathbf{r}_1) v_s(\mathbf{r}_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (36)$$

где

$$V_2 = \frac{1}{2} \pi \left( \frac{e\hbar}{mc} \right)^2 (3 + \sigma_1 \sigma_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (37)$$

Таким образом, волновое уравнение системы электрон — позитрон можно представить в форме (7), где

$$V = -V_1 + V_2. \quad (38)$$

Заметим, что входящая и выражение энергии взаимодействия  $\delta$ -функция не означает, конечно, наличия специально сильного взаимодействия. В действительности оно, имея ту же интегральную величину, распространено на область порядка  $\hbar/mc$ . Поэтому члены, содержащие  $\delta$ -функцию, как и другие члены порядка  $1/c^2$ , могут рассматриваться в качестве возмущения по отношению к кулоновскому взаимодействию.

Мы выражаем благодарность И. Я. Померанчуку за обсуждение рассмотренных вопросов.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] G. Breit. Phys. Rev., 34, 553, 1929.
- [2] Л. Д. Ландау. Phys. Zs. Sowjet., 8, 487, 1935 (Собр. трудов, № 18).
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Гостехиздат. 1948.
- [4] H. Bethe, E. Fermi. Zs. Phys., 77, 296, 1932.
- [5] В. Б. Берестецкий. ЖЭТФ, 18, 1057, 1948.

Сборник, посвященный  
семидесятилетию акад. А. Ф. ИОФФЕ,  
Изд. АН СССР, 1950, стр. 44

Рассмотрен вопрос о характере зависимости поверхностного натяжения кристалла от направления грани. С помощью полученных результатов исследован характер равновесной огранки кристаллов.

Распространено мнение, что поверхностное натяжение  $\alpha$  кристалла различно для разных его граней (кристаллических плоскостей). Таким образом, две близкие грани могут иметь совершенно различные значения  $\alpha$ . Между тем еще в 1915 г. П. Эренфест [1] указал на правильный подход к вопросу, в дальнейшем разрабатывавшийся Ямадой [2]. Однако многие их выводы несправедливы. Настоящая заметка имеет своей целью попытаться дать полное рассмотрение вопроса.

Для упрощения рассуждений будем рассматривать двухмерную «кристаллическую решетку», представленную плоской квадратной сеткой; роль кристаллических плоскостей играют при этом прямые, проходящие через «узлы» решетки.

Пусть  $\alpha_0$  — «поверхностное натяжение» для грани, имеющей индекс (01). Рассмотрим другую грань, пересекающуюся с первой под малым углом  $\varphi$ , имеющую индексы вида  $(1n)$  с большим  $n$ . Поверхность кристалла, ограниченная этой гранью, имеет вид «ступенек» большой длины  $n$  (в единицах периода решетки  $a$ ) и малой высоты <sup>1</sup>, как это изображено на рис. 1 (штриховая пря-

<sup>1</sup> Предположение о том, что ступеньки имеют высоту, равную именно единице, делается исключительно для определенности. Действительная форма (в частности, высота) ступенек определяется условием минимальности энергии и может быть в разных случаях различной. Существенно, однако, что у граней, близких к некоторой конкретной грани кристалла данного вещества, ступеньки имеют лишь одну определенную форму.

мая — грань (16)). Наличие каждой «ступеньки» приводит к появлению некоторой добавочной поверхностной энергии (обозначим ее как  $\beta$ ). При достаточно больших  $n$  ступеньки расположены настолько далеко друг от друга, что их «взаимодействием» можно пренебречь, и добавочная (по сравнению с  $\alpha_0$ ) часть по-

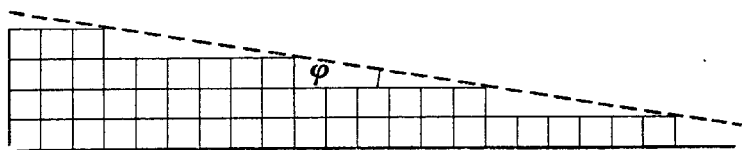


Рис. 1

верхностного натяжения определится просто произведением  $\beta$  на число ступенек, приходящихся на единицу длины:  $\beta/na$ .

Если ввести угол  $\varphi$ , образуемый гранью ( $1n$ ) с гранью (01), то при достаточно больших  $n$  имеем  $\varphi \approx 1/n$ , так что поверхностное натяжение грани ( $1n$ ) можно написать в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\beta}{a} \varphi, \quad \varphi > 0. \quad (1)$$

При стремлении  $\varphi$  к нулю (т. е.  $n$  к бесконечности) отношение  $(\alpha - \alpha_0)/\varphi$  стремится, следовательно, к конечному пределу, который можно рассматривать как производную  $d\alpha/d\varphi$ .

Рассмотрим теперь грань с индексами ( $1n$ ), наклоненную к грани (01) в обратную сторону. Те же рассуждения снова дадут  $\beta/na$  для изменения поверхностного натяжения, но теперь  $\varphi \approx -1/n$ , так что

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{\beta}{a} \varphi, \quad \varphi < 0. \quad (2)$$

и производная  $d\alpha/d\varphi = -\beta/a$ .

Таким образом, мы видим, что поверхностное натяжение может быть представлено в виде непрерывной функции направления грани, но функции весьма своеобразной: она имеет при каждом значении  $\varphi$  две различные производные — в направлении увеличения и в направлении уменьшения ее аргумента (угла).

Разность  $\Delta (d\alpha/d\varphi)$  обоих значений производной в каждой точке является существенной характеристикой этой функции. Покажем, что  $\Delta (d\alpha/d\varphi)$  обладает следующим свойством: эта разность тем меньше, чем больше индексы грани.

Действительно, мы видели, что для грани (01)  $\Delta (d\alpha/d\varphi)$  равно относительно большой величине  $2\beta/a$ . В то же время легко видеть, что для грани вида ( $1n$ ) с большим  $n$  эта разность вообще

обращается в нуль в приближении, в котором пренебрегается «взаимодействием» между «ступеньками», что допустимо в тем большей степени, чем больше  $n$ . В этом приближении поверхностное натяжение  $\alpha$  грани (т. е. энергия, приходящаяся на единицу ее длины) складывается из энергии  $\alpha_0 \cos \varphi$  «горизонтальных» участков поверхности кристалла (совпадающих по направлению с гранью (01)) и энергии  $(\beta/a) \sin \varphi$ , обусловленной наличием (на единице длины)  $\frac{1}{a \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1}{a} \sin \varphi$  «независимых» ступенек.

Но функция

$$\alpha(\varphi) = \alpha_0 \cos \varphi + \frac{\beta}{a} \sin \varphi \quad (\varphi > 0) \quad (3)$$

представляет собой обычную аналитическую функцию, имеющую в каждой точке всего одну производную. Таким образом, для вычисления  $\Delta(d\alpha/d\varphi)$  в этом случае следует учесть относительно малый эффект «взаимодействия» ступенек.

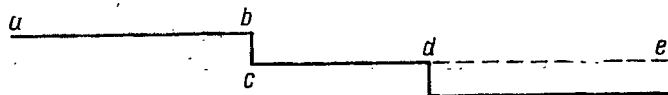


Рис. 2

Прежде всего очевидно, что для того, чтобы грань (1*n*) была устойчива и вообще могла существовать, необходимо, чтобы ступеньки «отталкивались» друг от друга; в противном случае они бы «слились» друг с другом<sup>2</sup>. Можно показать, что такое отталкивание действительно должно иметь место. На рис. 2 изображены две ступеньки. Энергия их взаимодействия связана с конечностью участка *cd*, т. е. связана с выпадением взаимодействия атомов на участке *ab* с атомами, которые находились бы на *de* при отсутствии второй ступеньки. Но взаимодействие между двумя электрическими нейтральными удаленными группами есть ван-дер-ваальсово притяжение; его выпадение соответственно приводит к отталкиванию.

Легко определить закон зависимости этого отталкивания от расстояния (т. е. длины  $n$ ). Ван-дер-ваальсово взаимодействие пары атомов на расстоянии  $r$  пропорционально  $1/r^6$ ; суммирова-

<sup>2</sup> Надо отметить, что приведенное доказательство относится лишь к большим расстояниям между ступеньками и не может исключить возможности (впрочем, представляющейся маловероятной), что всякая грань (1  $n$ ) метастабильна и распадается, например, на две грани (01) и (10) (если  $\beta/a > \alpha_0$ ).

ние по всем парам (которые можно заменить интегрированием по  $ab$  и  $de$ ) даст, очевидно, величину, пропорциональную  $1/n^4$ . В этом выводе, однако, существенна двумерность рассматриваемой модели. В реальном трехмерном случае аналогичные рассуждения привели бы к закону  $1/n^3$  (для грани вида  $(01n)$ ).

Обозначим энергию взаимодействия двух ступенек посредством

$$U = \frac{A}{n^3} \quad (A > 0). \quad (4)$$

Дополнительное поверхностное натяжение, связанное со взаимодействием ступенек, будет, очевидно, равно

$$\alpha_1 = \frac{1}{an} \left( \frac{A}{n^3} + \frac{A}{(2n)^3} + \frac{A}{(3n)^3} + \dots \right) = 1,2 \frac{A}{an^4}. \quad (5)$$

Покажем, что отгалкивание ступенек приводит к устойчивости не только граней  $(1n)$ , но и, например, граней типа  $(2n)$  (где  $n$  — нечетное число). Такая грань состоит из ступенек, находящихся на чередующихся расстояниях  $(n+1)/2$  и  $(n-1)/2$ . Покажем, что такое чередование энергетически выгоднее, чем распадение на две грани:  $(1, \frac{n+1}{2})$  и  $(1, \frac{n-1}{2})$ . Действительно, в первом случае  $\alpha_1$  равно

$$\alpha_1 = \frac{A}{an} \left[ \frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^3} + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{\left(\frac{3n-1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{3n+1}{2}\right)^3} + \frac{2}{(2n)^3} + \dots \right].$$

Если же грань распалась, то получается

$$\alpha_1 = \frac{A}{an} \left[ \frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^3} + \frac{1}{(n-1)^3} + \dots \right] + \frac{A}{an} \left[ \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^3} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right].$$

Легко убедиться в том, что второе выражение больше первого, чем и доказывается устойчивость грани  $(2n)$ .

Вычислим теперь разность двух значений производной  $d\alpha/d\phi$  для грани  $(1n)$ , возникающую от взаимодействия между ступеньками. Грань, сколь угодно близкая к грани  $(1n)$ , есть грань  $(N, Nn \pm 1)$ , где  $N$  — достаточно большое число. У такой грани  $N$



ступенек находятся на длине  $Nn \pm 1$  (вдоль горизонтали). Другими словами, на этой длине имеется  $N - 1$  интервалов длины  $n$  и один интервал длины  $n \pm 1$ . Определим энергию взаимодействия ступенек на этой длине. Она равна энергии взаимодействия системы  $N$  ступенек с интервалами  $n$  (т. е.  $Nna\alpha_1$  с  $\alpha_1$  из (5)), к которой надо добавить

$$A \left[ \frac{1}{(n \pm 1)^3} - \frac{1}{n^3} + \frac{2}{(2n \pm 1)^3} - \frac{2}{(2n)^3} + \frac{3}{(3n \pm 1)^3} - \frac{3}{(3n)^3} + \dots \right].$$

Для определения  $\alpha$  надо еще разделить эту энергию на длину  $(Nn \pm 1)a$ . С точностью до членов порядка  $1/N$  это даст

$$\alpha_1 + \delta\alpha_1 = \alpha_1 \mp \frac{\alpha_1}{Nn} + \frac{A}{Nna} \left[ \frac{1}{(n \pm 1)^3} - \frac{1}{n^3} + \frac{2}{(2n \pm 1)^3} - \frac{2}{(2n)^3} + \dots \right].$$

Угол же между гранями  $(1n)$  и  $(N, Nn \pm 1)$  есть  $\delta\varphi = \mp 1/Nn^2$ . Отсюда

$$\frac{d\alpha_1}{d\varphi} = \alpha_1 n \mp \frac{An}{a} \left[ \frac{1}{(n \pm 1)^3} - \frac{1}{n^3} + \frac{2}{(2n \pm 1)^3} - \frac{2}{(2n)^3} + \dots \right].$$

Наконец, разность обоих значений  $d\alpha_1/d\varphi$  равна

$$\Delta \left( \frac{d\alpha}{d\varphi} \right) = \frac{An}{a} \left[ \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n-1)^3} - \frac{2}{n^3} + \frac{2}{(2n+1)^3} + \frac{2}{(2n-1)^3} - \frac{4}{(2n)^3} + \dots \right].$$

Мы действительно получили отличную от нуля величину. При больших  $n$  она стремится к нулю по закону

$$\Delta \left( \frac{d\alpha}{d\varphi} \right) = \frac{12A}{an^4} \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) = \frac{2\pi^4}{15} \frac{A}{an^4}, \quad (6)$$

т. е. обратно пропорционально  $n^4$ . Напомним, что эта формула выведена нами по существу для трехмерного случая, поскольку мы пользовались формулой (4).

Изложенные свойства функции  $\alpha(\varphi)$  дают возможность сделать определенные заключения о равновесной форме огранки кристалла. Задача об определении равновесной формы кристалла по поверхностному натяжению впервые была решена Г. Вульфом.

Введем систему координат  $x, y$  в плоскости рассматриваемого «кристалла», и пусть  $y = y(x)$  — уравнение его «поверхности» (т. е. ограничивающей его линии). Функция  $y(x)$

определяется условием минимальности «поверхностной энергии», т. е. криволинейного интеграла  $\int \alpha ds$  или

$$\int \alpha \sqrt{1 + y'^2} dx$$

при заданном «объеме» кристалла, т. е. площади

$$\int y dx.$$

При этом  $\alpha$  — функция направления касательной к искомой кривой, т. е. функция  $y'$ .

Следуя методу Лагранжа, ищем максимум интеграла

$$\int (\alpha \sqrt{1 + y'^2} + \lambda y) dx$$

с неопределенным параметром  $\lambda$ . Поскольку подынтегральное выражение не содержит в явном виде  $x$ , то уравнение Эйлера дает

$$\frac{\alpha}{\sqrt{1 + y'^2}} - y' \sqrt{1 + y'^2} \frac{d\alpha}{dy'} + \lambda y = \text{const.}$$

Постоянную const. можно обратить в нуль надлежащим выбором начала отсчета  $y$ . Вводя в качестве новой независимой переменной угол  $\varphi$  наклона касательной ( $\text{tg } \varphi = y'$ ), получим

$$y = -\frac{1}{\lambda} \left( \alpha \cos \varphi - \frac{d\alpha}{d\varphi} \sin \varphi \right). \quad (7)$$

Далее имеем

$$dx = \text{ctg } \varphi dy = \frac{\cos \varphi}{\lambda} \left( \alpha + \frac{d^2\alpha}{d\varphi^2} \right);$$

откуда, интегрируя (и полагая постоянную интегрирования равной нулю, чего всегда можно добиться надлежащим выбором начала отсчета  $x$ ),

$$x = \frac{1}{\lambda} \left( \alpha \sin \varphi + \frac{d\alpha}{d\varphi} \cos \varphi \right). \quad (8)$$

Уравнения (7), (8) определяют в параметрическом виде форму границы кристалла. Поскольку  $d\alpha/d\varphi$  имеет, как было показано, для каждого  $\varphi$ , вообще говоря, два различных значения, то для каждого значения  $\varphi$  уравнения (7) — (8) определяют две пары значений  $x, y$ , т. е. две различные точки. Каждая такая пара точек определяет два конца прямолинейного участка границы, про-

ходящего под данным углом  $\varphi$  к оси  $x$ . Длина этого участка равна

$$\Delta s = \frac{1}{\lambda} \Delta \left( \frac{d\alpha}{d\varphi} \right). \quad (9)$$

Она оказывается пропорциональной разности обоих значений производной  $d\alpha/d\varphi$  для данного  $\varphi$ .

Таким образом, равновесная граница кристалла должна обладать весьма своеобразной формой. Она складывается из отрезков граней всех направлений, причем каждая грань входит в виде участка с длиной, пропорциональной соответствующему значению  $\Delta (d\alpha/d\varphi)$ . Ввиду указанного выше свойства этой величины участок каждой грани, следовательно, тем короче, чем больше индексы этой грани.

Все изложенные результаты, разумеется, непосредственно обобщаются на трехмерный кристалл. Его равновесная огранка должна содержать плоские участки самых различных граней, причем для граней с большими индексами площади этих участков должны быть очень незначительными. Величина  $\Delta (d\alpha/d\varphi)$  спадает с  $n$  очень быстро (согласно формуле (6)); учитывая также слабость ван-дер-ваальсовых сил, можно считать, что грани уже с индексами порядка 10 будут практически отсутствовать.

Практически изложенное выше означает, что равновесная форма кристаллов должна состоять из небольшого числа плоских участков (граней с малыми индексами), которые, однако, не пересекаются под углом, а соединены закругленными участками<sup>3</sup>. Такая картина была действительно наблюдаена у каменной соли П. И. Лукирским [3]. Пользуюсь случаем выразить ему свою благодарность за то, что он обратил мое внимание на рассматриваемые в этой работе вопросы.

Мне приятно иметь возможность поместить эту статью в сборнике, посвященном семидесятилетию Абрама Федоровича Иоффе, имя которого так много говорит каждому советскому физик.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] P. Ehrenfest. Ann. der Phys., 48, 360, 1915.  
 [2] M. Yamada. Phys. Zs., 24, 364, 1923; 25, 52, 289, 1924.  
 [3] П. И. Лукирский. ДАН СССР, 46, 300, 1945.

<sup>3</sup> Имея в виду сноску 2, следует оговорить, что не исключена возможность наличия у некоторых кристаллов форм с пересекающимися под углом гранями.

Совместно с В. Л. ГИНЗБУРГОМ

ЖЭТФ, 20, 1064, 1950

Существующая феноменологическая теория сверхпроводимости не является удовлетворительной, так как не позволяет определить поверхностное натяжение на границе нормальной и сверхпроводящей фаз и не дает возможности правильно описать разрушение сверхпроводимости магнитным полем и током. Настоящая статья посвящена построению теории, свободной от этих недостатков. Найдены уравнения для вводимой в теорию  $\Psi$ -функции «сверхпроводящих электронов» и для векторного потенциала. Проведено решение уравнений для одномерного случая (сверхпроводящего полупространства и плоских пластин).

Теория дает возможность выразить поверхностное натяжение через критическое магнитное поле и глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводник. В сильном поле глубина проникновения зависит от силы поля, причем этот эффект должен быть ярко выражен в случае сверхпроводников малых размеров. Разрушение сверхпроводимости тонких пленок магнитным полем происходит путем фазового перехода второго рода, и только начиная с пленок, толщина которых больше некоторой критической толщины, переход становится переходом первого рода. В то время как критическое внешнее магнитное поле возрастает с утоньшением пленки, критический ток, разрушающий сверхпроводимость пленки, с ее утоньшением убывает.

### Введение

В настоящее время, как известно, не существует сколько-нибудь развитой микроскопической теории сверхпроводимости. Вместе с тем довольно широко распространено мнение, что феноменологическая теория процессов в сверхпроводниках находится в зна-

чительно лучшим состоянии и надежно базируется на уравнении Ф. и Г. Лондонов [1,2]

$$\operatorname{rot} \Lambda \mathbf{j}_s = -\frac{1}{c} \mathbf{H}, \quad (1)$$

где  $\Lambda$  — величина, зависящая только от температуры,  $\mathbf{j}_s$  — плотность сверхпроводящего тока,  $c$  — скорость света и  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля, которую в этом случае не отличают от магнитной индукции.

Уравнение (1) вместе с уравнением Максвелла  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j}_s$ , если учесть, что  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  и  $\operatorname{div} \mathbf{j}_s = 0$ , приводит для стационарного случая к уравнениям

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{1}{\delta^2} \mathbf{H} = 0, \quad \Delta \mathbf{j}_s - \frac{1}{\delta^2} \mathbf{j}_s = 0, \quad \delta^2 = \frac{\Lambda c^2}{4\pi}, \quad (2)$$

которые для плоской границы раздела между сверхпроводником и вакуумом или несверхпроводником имеют решение

$$\mathbf{H} = H_0 e^{-z/\delta}, \quad \mathbf{j}_s = \frac{c}{4\pi\delta} \mathbf{H}, \quad (3)$$

где внешнее поле  $H_0$  предполагается направленным параллельно границе, а ось  $z$  направлена перпендикулярно ей.

В случае пленки с толщиной  $2d$  в параллельном ей поле

$$\mathbf{H} = H_0 \frac{\operatorname{ch}(z/\delta)}{\operatorname{ch}(d/\delta)}, \quad \mathbf{j}_s = -\frac{cH_0}{4\pi\delta} \frac{\operatorname{sh}(z/\delta)}{\operatorname{ch}(d/\delta)}, \quad (4)$$

где  $z = 0$  в середине пленки.

В случае сверхпроводника произвольной формы из (2) также следует, что поле проникает в глубь его лишь на расстояние порядка  $\delta$ , где согласно опытным данным  $\delta \sim 10^{-5}$  см. В качественном отношении этот вывод находится, конечно, в согласии с тем фактом, что магнитное поле не проникает в толщу сверхпроводника. В количественном же отношении нет оснований быть уверенным в справедливости формул (1) — (4) во всех случаях. Кроме того, эта теория не может разрешить вопрос о поверхностной энергии на границе сверхпроводящей и нормальной фаз металла и приходит в противоречие с опытом при рассмотрении разрушения сверхпроводимости тонких пленок в магнитном поле.

Термодинамическое рассмотрение перехода пленки с толщиной  $2d$  из сверхпроводящего состояния в нормальное приводит [2, 3] к следующему соотношению для критического поля  $H_K$ :

$$\left( \frac{H_K}{H_{KM}} \right)^2 = \left( 1 - \frac{\delta}{d} \operatorname{th} \frac{d}{\delta} \right)^{-1}, \quad (5)$$

где  $H_{KM}$  — критическое поле для массивного проводника.

Это соотношение не находится, однако, в согласии с опытом [4]. Так, если при данной температуре по измеренным значениям  $(H_K/H_{KM})^2$  определять для разных  $d$  постоянную  $\delta$  по формуле (5), то эта «постоянная»  $\delta$  сильно меняется с изменением  $d$  (например, при  $T = 4^\circ$  и  $d = 0,3 \cdot 10^{-5}$ :  $\delta = 3,4 \cdot 10^{-5}$ , а при  $d = 1,2 \cdot 10^{-5}$ :  $\delta = 2,0 \cdot 10^{-5}$ ).

В [3] было указано на возможность исправить положение, если учесть изменение поверхностной энергии на границе металла с вакуумом в зависимости от того, находится ли металл в сверхпроводящем или в нормальном состоянии. Однако вводимая таким образом разность поверхностных натяжений  $\sigma_s - \sigma_n$  оказывается по порядку величины равной  $\delta H_{KM}^2/8\pi$ . Между тем поверхностная энергия обычно по порядку величины равна объемной свободной энергии, умноженной на длину порядка атомных размеров. Поэтому в нашем случае, где разность объемных свободных энергий равна  $H_{KM}^2/8\pi$ , можно было бы ожидать, что  $\sigma_s - \sigma_n \sim 10^{-7} \div 10^{-8} H_{KM}^2/8\pi$ , но не порядка  $10^{-5} H_{KM}^2/8\pi$ . Еще более противоречивая ситуация имеет место в случае границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами металла. В этом случае при использовании решения (3) поверхностная энергия, связанная с полем и со сверхпроводящим током, равна  $-\delta H_{KM}^2/8\pi$  [5, 3], т. е. отрицательна. Поэтому для получения наблюдаемого поверхностного натяжения  $\sigma_{ns}$ , которое положительно, необходимо ввести некоторую поверхностную энергию немагнитного происхождения  $\sigma'_{ns}$ , которая равна

$$\sigma'_{ns} = \sigma_{ns} + \frac{\delta H_{KM}^2}{8\pi} > \frac{\delta H_{KM}^2}{8\pi}.$$

Введение такой относительно огромной энергии  $\sigma'_{ns}$ , не связанной с распределением магнитного поля, совершенно не обосновано. Напротив, нужно думать, что всякая рациональная теория сверхпроводимости должна автоматически приводить к возможности выразить поверхностную энергию  $\sigma_{ns}$  через обычные параметры, характеризующие сверхпроводник.

Теория, основанная на уравнении (1), даже с введением дополнительной поверхностной энергии, не дает также возможности рассмотреть разрушение сверхпроводимости пленок током [6], так как эта задача не носит термодинамического характера.

Цель настоящей работы заключается в построении теории, свободной от этих недостатков. При этом, как мы увидим, теория приводит также к ряду качественно новых заключений, могущих быть проверенными на опыте.

## § 1. Основные уравнения

При отсутствии магнитного поля переход в сверхпроводящее состояние, имеющий место при критической температуре  $T_k$ , является фазовым переходом второго рода. В общую теорию таких переходов [7] всегда входит некоторый параметр  $\eta$ , отличный от нуля в упорядоченной фазе и равный нулю в неупорядоченной. Например, в случае сегнетоэлектриков роль  $\eta$  играет спонтанная поляризация  $P_s$ , а в случае ферромагнетиков — спонтанное намагничение  $M_s$  [8]. В сверхпроводниках, где упорядоченной является сверхпроводящая фаза, мы обозначим характеризующий сверхпроводник параметр через  $\Psi$ . При  $T > T_k$  в состоянии термодинамического равновесия  $\Psi = 0$ , а при  $T < T_k$   $\Psi \neq 0$ . Мы будем исходить из того, что  $\Psi$  играет роль некоторой «эффективной» волновой функции «сверхпроводящих электронов». В соответствии с этим функция  $\Psi$  может быть определена лишь с точностью до произвольной постоянной фазы. Поэтому все наблюдаемые величины должны зависеть от  $\Psi$  и  $\Psi^*$  таким образом, чтобы они не изменялись при умножении  $\Psi$  на постоянную типа  $e^{ia}$ .

Отметим также, что, поскольку количественная связь между  $\Psi$  и наблюдаемыми величинами еще не определена, мы можем нормировать  $\Psi$  произвольным образом. Ниже мы увидим, как нужно выбрать эту нормировку для того, чтобы  $|\Psi|^2$  равнялся вводимой обычным образом концентрации «сверхпроводящих электронов»  $n_s$ .

Рассмотрим раньше всего однородный сверхпроводник, не находящийся в магнитном поле, и будем считать, что  $\Psi$  не зависит от координат. Тогда свободная энергия сверхпроводника в соответствии с общей теорией фазовых переходов второго рода зависит только от  $|\Psi|^2$  и может быть вблизи  $T_k$  разложена в степенной ряд. Таким образом, вблизи  $T_k$  мы можем записать свободную энергию  $F_{s0}$  в виде

$$F_{s0} = F_{n0} + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4. \quad (6)$$

В состоянии равновесия

$$\frac{\partial F_{s0}}{\partial |\Psi|^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_{s0}}{(\partial |\Psi|^2)^2} > 0$$

и должно быть  $|\Psi|^2 = 0$  при  $T \geq T_k$  и  $|\Psi|^2 > 0$  при  $T < T_k$ .

Отсюда следует, что  $\alpha_k = 0$ ,  $\beta_k > 0$  и при  $T < T_k$   $\alpha < 0$ . Поэтому в состоянии равновесия при  $T \leq T_k$

$$|\Psi|^2 \equiv |\Psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta_k} \left( \frac{d\alpha}{dT} \right)_k (T_k - T),$$

$$F_{s0} = F_{n0} - \frac{\alpha^2}{2\beta} = F_{n0} - \frac{1}{2\beta_k} \left( \frac{d\alpha}{dT} \right)_k^2 (T_k - T)^2, \quad (7)$$

где учтено, что в пределах справедливости разложения (6)  $\alpha(T) = (d\alpha/dT)_k (T - T_k)$  и  $\beta(T) = \beta_k$ ; выбор знака  $\infty$  у  $\Psi$  определяется соображениями удобства, ясными из дальнейшего. Величина  $F_{n0}$  в (6), (7) есть, очевидно, свободная энергия нормальной фазы. Известное термодинамическое рассмотрение показывает (см. также ниже), что  $F_{n0} - F_{s0} = H_{ккм}^2/8\pi$ , где  $H_{ккм}$  — критическое магнитное поле для массивного образца, и свободные энергии, как и везде в этой статье, относятся к единице объема. Поэтому, как ясно из (7),

$$H_{ккм}^2 = \frac{4\pi\alpha^2}{\beta} = \frac{4\pi}{\beta_k} \left( \frac{d\alpha}{dT} \right)_k^2 (T_k - T)^2. \quad (8)$$

Эта формула, как известно, полностью подтверждается опытными данными, что и служит обоснованием сделанных выше предположений.

Рассмотрим теперь сверхпроводник, находящийся в постоянном во времени магнитном поле. В этом случае для получения плотности полной свободной энергии  $F_{сн}$  к  $F_{s0}$  нужно прибавить энергию поля  $H^2/8\pi$  и энергию, связанную с возможным при наличии поля появлением градиента  $\Psi$ . Эта последняя энергия, по крайней мере пока величина  $|\nabla\Psi|^2$  мала, может быть в результате разложения в ряд по  $|\nabla\Psi|^2$  представлена в виде  $\text{const} \cdot |\nabla\Psi|^2$ , т. е. выглядит так же, как плотность кинетической энергии в квантовой механике. Поэтому запишем соответствующее выражение в виде

$$\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\Psi|^2 = \frac{1}{2m} | -i\hbar\nabla\Psi |^2,$$

где  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$  — постоянная Планка, а  $m$  — некоторый коэффициент. При этом, однако, еще не учтено взаимодействие связанного с наличием  $\nabla\Psi$  тока с магнитным полем. В силу сказанного и исходя из требования, чтобы вся схема была градиентно инвариантна, для учета влияния поля нужно сделать обычную замену  $-i\hbar\nabla$  на  $-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ , где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал поля и  $e$  — заряд, который нет оснований считать отличным от



заряда электрона. Таким образом, плотность энергии, связанной с наличием  $\nabla\Psi$  и поля  $H$ , имеет вид

$$\frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2m} \left| -i\hbar\nabla\Psi - \frac{e}{c} A\Psi \right|^2.$$

В результате

$$F_{эH} = F_{э0} + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2m} \left| -i\hbar\nabla\Psi - \frac{e}{c} A\Psi \right|^2. \quad (9)$$

Уравнение для  $\Psi$  может теперь быть найдено из требования, чтобы полная свободная энергия тела  $\int F_{эH} dV$  была минимальна. Таким образом, варьируя по  $\Psi^*$ , получаем

$$\frac{1}{2m} \left( -i\hbar\nabla - \frac{e}{c} A \right)^2 \Psi + \frac{\partial F_{э0}}{\partial \Psi^*} = 0, \quad (10)$$

причем на границе сверхпроводника ввиду произвольности вариации  $\delta\Psi^*$  должно соблюдаться условие

$$\mathbf{n} \left[ -i\hbar\nabla\Psi - \frac{e}{c} A\Psi \right] = 0, \quad (11)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к границе.

Условие (11) получается, если не накладывать на  $\Psi$  на границе никаких дополнительных требований (естественные граничные условия); если же с самого начала потребовать, чтобы на границе с вакуумом  $\Psi = 0$ , то условие (11) уже не получится. Однако условие  $\Psi = 0$  или  $\Psi_i = \text{const}$  в рамках развиваемой схемы недопустимо, так как при этом задача о сверхпроводящей пластине не имеет решения, за исключением отдельных частных значений толщины пластины  $2d$ . Поэтому мы не накладываем на  $\Psi$  на границе с вакуумом никаких дополнительных условий и приходим, таким образом, к (11).

На первый взгляд этот результат может показаться неприемлемым, так как естественно требовать, чтобы  $\Psi$ -функция на границе металла обращалась в нуль. Дело, однако, в том, что введенная выше  $\Psi$ -функция отнюдь не является истинной волновой функцией электронов в металле, а есть некоторая усредненная величина.

Можно предполагать, что наша функция  $\Psi(r)$  непосредственно связана с матрицей плотности

$$\rho(r, r') = \int \Psi^*(r, r'_i) \Psi(r', r'_i) dr'_i,$$

где  $\Psi(r, r'_i)$  — истинная  $\Psi$ -функция электронов в металле, зависящая от координат всех электронов  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), и  $r'_i$  —

координаты всех электронов, кроме одного выделенного (его координаты —  $\mathbf{r}$  и в другой точке  $\mathbf{r}'$ ). Как можно думать, для несверхпроводящего тела, где отсутствует дальний порядок, при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$   $\rho \rightarrow 0$ , а в сверхпроводящем состоянии  $\rho$  ( $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ )  $\rightarrow \rho_0 \neq 0$ . В этом случае естественно допустить, что матрица плотности связана с вводимой нами  $\Psi$ -функцией соотношением  $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Psi^*(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}')$ .

Что касается уравнения для  $\mathbf{A}$ , то, полагая  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , варьируя свободную энергию по  $\mathbf{A}$ , получаем обычное уравнение

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{2\pi i e \hbar}{mc} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{4\pi e^2}{mc^2} |\Psi|^2 \mathbf{A}, \quad (12)$$

где справа стоит выражение для сверхпроводящего тока:

$$\mathbf{j} = -\frac{ie\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{e^2}{mc} \Psi^* \Psi \mathbf{A}.$$

Отметим, что выражение, аналогичное (11), получается и для сопряженной величины, откуда ясно, что на границе  $\mathbf{j} \mathbf{n} = 0$ , как это и должно быть. Решение задачи о распределении поля и тока в сверхпроводнике сводится к совместному интегрированию уравнений (10) и (12).

Ниже мы будем рассматривать только одномерную задачу, причем ось  $z$  направим нормально к границе раздела сверхпроводящей фазы (расположена при  $z > 0$ ) с нормальной фазой или вакуумом, поле  $\mathbf{H}$  будем считать направленным по оси  $y$ , а ток  $\mathbf{j}$  и векторный потенциал  $\mathbf{A}$  — по оси  $x$  (при этом  $H_y = dA_x/dz$  или просто  $H = dA/dz$ ). В одномерной задаче  $|\Psi|^2$  естественно считать зависящим только от  $z$  и, значит,  $\Psi = e^{i\varphi(x, y)} \Psi(z)$ . Но, учитывая градиентную инвариантность используемых уравнений, можно выбором соответствующего потенциала  $A$  достигнуть того, что  $\Psi = \Psi(z)$  и, таким образом,  $\mathbf{j} = -\frac{e^2}{mc} |\Psi|^2 \mathbf{A}$  (из условий  $\text{div } \mathbf{j} = dj_z/dz = 0$  и  $\mathbf{j} \mathbf{n} = 0$  следует, что  $j_z = 0$ ). Кроме того, в данном случае уравнения не содержат мнимой единицы  $i$  (так как  $\mathbf{A} \nabla \Psi = 0$ ) и функция  $\Psi$  может считаться вещественной, что мы и будем предполагать.

В результате уравнения (10) и (12) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} |\alpha| \left( 1 - \frac{e^2}{2mc^2 |\alpha|} A^2 \right) \Psi - \frac{2m}{\hbar^2} \beta \Psi^3 = 0, \\ \frac{d^2 A}{dz^2} - \frac{4\pi e^2}{mc^2} \Psi^2 A = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где использовано выражение (6) и учтено, что  $\alpha < 0$ .

Определим теперь поверхностную энергию на плоской границе раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами. В нормальной фазе полная плотность свободной энергии, включающая энергию поля, равна  $F_{n0} + H_{ккм}^2/8\pi$ . В области, где  $\Psi \neq 0$  и имеет место сверхпроводимость, плотность энергии есть  $F_{sH}$  (см. (9)) и, кроме того, должна быть учтена плотность энергии «намагничивания» сверхпроводника в поле, параллельном его границе с несверхпроводящей фазой, равная

$$-MH_{ккм} = -\frac{H(z) - H_{ккм}}{4\pi} H_{ккм},$$

где  $M$  играет роль намагничивания. Таким образом, поверхностная энергия равна

$$\sigma_{ns} = \int \left( F_{sH}(z) - \frac{H(z)H_{ккм}}{4\pi} + \frac{H_{ккм}^2}{4\pi} - F_{n0} - \frac{H_{ккм}^2}{8\pi} \right) dz, \quad (14)$$

где интегрирование распространено по переходному слою между фазами (ось  $z$  перпендикулярна к слою). Легко видеть, что подынтегральное выражение, как это и должно быть, обращается в нуль вдали от переходного слоя, где в сверхпроводящей фазе  $H = 0$  и  $F_{sH} = F_{s0} = F_{n0} - \alpha^2/2\beta$  (см. (7)), а в нормальной фазе  $\Psi = 0$ ,  $F_{sH} = F_{n0} + H_{ккм}^2/8\pi$  и  $H = H_{ккм}$ .

Учитывая (7) — (9), имеем

$$\sigma_{ns} = \int \left\{ \alpha\Psi^2 + \frac{\beta\Psi^4}{2} + \frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d\Psi}{dz} \right)^2 + \frac{e^2}{2mc^2} A^2\Psi^2 + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{H_{ккм}H}{4\pi} \right\} dz. \quad (15)$$

Из условия минимальности  $\sigma_{ns}$ , являющейся свободной энергией единицы поверхности, мы, конечно, также получаем как первое уравнение (13), варьируя (15) по  $\Psi$ , так и второе уравнение (13), варьируя (15) по  $A$ .

На границе сверхпроводника с вакуумом в рассматриваемом одномерном случае условие (11) принимает вид

$$\frac{d\Psi}{dz} = 0. \quad (16)$$

Введем теперь следующие параметры:  $H_{ккм}$ ,  $\delta_0$  и  $\kappa$ , а также новые переменные  $z'$ ,  $\Psi'$ ,  $A'$  и  $H'$ :

$$z' = \frac{z}{\delta_0}, \quad \Psi'^2 = \frac{\Psi^2}{\Psi_\infty^2} = \frac{\Psi^2}{|\alpha|\beta},$$

$$A' = \sqrt{\frac{e^2}{2mc^2|\alpha|}} A = \frac{A}{\sqrt{2H_{\text{KM}}\delta_0}}, \quad (17)$$

$$H' = \frac{dA'}{dz'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{H}{H_{\text{KM}}}, \quad \delta_0^2 = \frac{mc^2\beta}{4\pi e^2|\alpha|} = \frac{mc^2}{4\pi e^2\Psi_\infty^2},$$

$$H_{\text{KM}}^2 = \frac{4\pi\alpha^2}{\beta}, \quad \kappa^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{mc}{e\hbar}\right)^2 \beta = \frac{2e^2}{\hbar^2 c^2} H_{\text{KM}}^2 \delta_0^4.$$

Тогда уравнения (13) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{dz^2} &= \kappa^2 \{-(1-A^2)\Psi + \Psi^3\}, \\ \frac{d^2A}{dz^2} &= \Psi^2 A, \end{aligned} \quad (18)$$

где мы опустили все штрихи, так как ниже, если не оговорено противное, будем использовать только новые переменные. Используя эти переменные, выражение (15) нужно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ns} &= \frac{H_{\text{KM}}^2}{4\pi} \delta_0 \int \left\{ \frac{1}{2} - (1-A^2)\Psi^2 + \frac{\Psi^4}{2} + \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{dA}{dz}\right)^2 - 2\left(\frac{dA}{dz}\right)_K \left(\frac{dA}{dz}\right) \right\} dz. \end{aligned} \quad (19)$$

Если  $\kappa = 0$ , то в силу (18) и (16)  $\Psi^2 = n_s = \text{const}$  и наши уравнения переходят в уравнение (2) с  $\delta^2 = \delta_0^2 = mc^2/4\pi e^2 n_s$  (ср. (2) со вторым уравнением (13)). То же имеет место в общем случае: если положить в (12)  $\nabla\Psi = 0$ , то это уравнение эквивалентно уравнению (2) или же прямо  $\mathbf{j} = -(e^2/mc) |\Psi|^2 \mathbf{A}$ , что приводит к уравнению (1). Хотя при  $\kappa = 0$  наша схема переходит с точки зрения вида уравнений в обычную теорию, она существенно отлична от последней и в этом предельном случае. Дело в том, что в (1), (2) величина  $\Lambda = 4\pi\delta^2/c^2 = m/e^2 n_s$  при данной температуре фиксирована и не зависит от поля. В нашем же случае даже при  $\kappa = 0$  величина  $\Psi^2 = n_s$ , эквивалентная  $\delta$  (см. (20)), определяется из условий минимальности свободной энергии, что при наличии поля приводит для сверхпроводников малых размеров к зависимости глубины проникновения  $\delta$  от  $H$  (см. § 4).

Из предельного случая  $\kappa = 0$ , а также из дальнейшего ясно, что измеримой величиной является параметр  $\delta_0^2 = mc^2/4\pi e^2 \Psi_\infty^2$  ( $\delta_0$  — глубина проникновения в массивный сверхпроводник слабого магнитного поля). Именно эта величина входит также в выражение для диэлектрической постоянной  $\epsilon = \epsilon_0 - (4\pi e^2 \Psi_\infty^2 / m\omega^2)$  сверхпроводника в переменном поле не слишком

высокой частоты  $\omega$  ( $\epsilon_0$  — некоторая постоянная, соответствующая вкладу в  $\epsilon$  всех частиц, кроме «сверхпроводящих электронов»). Сам же параметр  $\Psi_\infty^2 = n_s$ , играющий, очевидно, роль концентрации «сверхпроводящих электронов», не является измеримой величиной, так же как число «свободных электронов» в обычной квантовой теории металлов. Поэтому в обоих этих случаях речь может идти только об «эффективном числе электронов», которое можно определить из значения  $\epsilon$  или  $\delta_0^2$ , полагая в соответствующих выражениях величину  $m$  имеющей то же значение, как для свободного электрона. Поступая таким образом, мы свяжем концентрацию «сверхпроводящих электронов»  $n_s = \Psi_\infty^2$  с наблюдаемой величиной  $\delta_0$  ( $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ ,  $m = 9,1 \cdot 10^{-28}$ ):

$$\delta_0^2 = \frac{mc^2\beta}{4\pi e^2 |\alpha|} = 2,84 \cdot 10^{11} \frac{\beta}{|\alpha|} = \frac{2,84 \cdot 10^{11}}{\Psi_\infty^2} \text{ см}^2. \quad (20)$$

Из (20) и из измерений критического поля  $H_{\text{км}} = \sqrt{4\pi\alpha^2/\beta}$  можно найти  $\alpha$  и  $\beta$ . Помимо  $H_{\text{км}}$  и  $\delta_0$  (или  $\alpha$  и  $\beta$ ) в теорию входит еще безразмерный параметр

$$\kappa^2 = \frac{2e^2}{\hbar^2 c^2} H_{\text{км}}^2 \delta_0^4, \quad (21)$$

который, если подставить для  $e$  значение  $4,8 \cdot 10^{-10}$ , равен

$$\kappa = 4,64 \cdot 10^{14} H_{\text{км}}^2 \delta_0^4, \quad (22)$$

где  $\delta_0$  измеряется в сантиметрах и  $H_{\text{км}}$  — в эрстедах.

Из экспериментальных данных, обсуждаемых в § 4, следует, что для ртути

$$\kappa^2 \approx 0,027; \quad \kappa \approx 0,165; \quad \sqrt{\kappa} \approx 0,406. \quad (23)$$

## § 2. Случай сверхпроводящего полупространства

Рассмотрим прежде всего случай сверхпроводящего полупространства, граничащего с вакуумом (сверхпроводник при  $z > 0$ , граница  $z = 0$ ). Соответствующее решение будет, конечно, относиться и к достаточно толстой пластине, полутолщина которой  $d \gg 1$  (или в обычных единицах  $d \gg d_0$ ). При  $z = 0$   $H = H_0$ , при  $z = \infty$   $H = A = 0$  (выбор в данном случае значения  $A(\infty) = 0$  вполне естествен и, главное, возможен). Далее, при  $z = \infty$  мы имеем дело со сверхпроводником без поля и вдали от всяких границ, и, следовательно, должно иметь место решение

(7), т. е. (в новых переменных)  $\Psi_\infty^2 = 1$ ,  $d\Psi/dz = 0$ . Таким образом,

$$z = \infty: \quad \Psi_\infty^2 = 1, \quad \frac{d\Psi}{dz} = H = A = 0. \quad (24)$$

Это решение, разумеется, удовлетворяет уравнениям (18). Что касается границы с вакуумом при  $z = 0$ , то на ней должно выполняться условие (16); поэтому, учитывая (18) и (24), мы видим, что при отсутствии магнитного поля наличие границы не оказывает влияния на функцию  $\Psi$ , которая везде одинакова:

$$H = A = 0: \quad \Psi^2 = \Psi_\infty^2 = 1. \quad (25)$$

При наличии магнитного поля решение (25), конечно, уже не имеет места, и нужно проинтегрировать уравнения (18) с граничным условием (24) при  $z = \infty$  и условием

$$z = 0: \quad H = \frac{dA}{dz} = H_0, \quad \frac{d\Psi}{dz} = 0. \quad (26)$$

Значения  $A_0$  и  $\Psi_0$  заранее неизвестны.

Уравнения (18), к сожалению, не интегрируются в квадратурах, и мы можем указать лишь один их интеграл:

$$(1 - A^2) \Psi^2 - \frac{\Psi^4}{2} + \left(\frac{dA}{dz}\right)^2 + \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2 = \text{const}. \quad (27)$$

Для интересующей нас сейчас задачи в силу (24)  $\text{const} = 1/2$  и, таким образом,

$$H^2 = \left(\frac{dA}{dz}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2 - (1 - A^2) \Psi^2 + \frac{\Psi^4}{2}. \quad (28)$$

Переходя к приближенному решению уравнений (18), приведем решение, справедливое при малых  $\kappa$  (точнее, решение будет справедливо, если мало произведение  $\kappa H_0^2$ ). Для нахождения этого решения положим

$$\Psi = \Psi_\infty + \varphi = 1 + \varphi, \quad |\varphi| \ll 1. \quad (29)$$

Тогда в первом приближении, с точностью до членов порядка  $\varphi A$  и  $\varphi^2$ , система (18) приобретает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \kappa^2 (2\varphi + A^2), \quad \frac{d^2A}{dz^2} = A. \quad (30)$$

Эта система сразу же интегрируется, и ее решение может быть использовано для нахождения следующего приближения и т. д.

Соответствующее решение с условиями (24) и (26), с точностью до членов  $\sim H_0^3$  включительно, имеет вид

$$\Psi = 1 + \frac{\kappa H_0^2}{\sqrt{2}(2-\kappa^2)} \left( \frac{\kappa}{\sqrt{2}} e^{-2z} - e^{-\sqrt{2}\kappa z} \right),$$

$$A = -H_0 e^{-z} - \frac{\kappa H_0^3}{\sqrt{2}(2-\kappa^2)} \left\{ \frac{\kappa}{4\sqrt{2}} e^{-3z} - \frac{e^{-(\sqrt{2}\kappa+1)z}}{\kappa(\kappa+\sqrt{2})} - \frac{3\kappa^3+3\sqrt{2}\kappa^2-8\kappa-4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\kappa(\kappa+\sqrt{2})} e^{-z} \right\}. \quad (31)$$

При  $z = 0$ , разумеется,  $d\Psi/dz = 0$ ,  $H = H_0$  и

$$\Psi_0 = 1 - \frac{\kappa H_0^2}{2(\kappa + \sqrt{2})},$$

$$A_0 = -H_0 - \frac{\kappa(\kappa + 2\sqrt{2})}{4(\kappa + \sqrt{2})^2} H_0^3. \quad (32)$$

Наибольшие не выписанные в (32) члены в  $\Psi$  — порядка  $\kappa^2 H_0^4$  и в  $A$  — порядка  $\kappa^2 H_0^5$ . Поле  $H_0$  в равновесном состоянии меньше или равно критическому полю для массивного проводника, которое в новых переменных равно  $H_{км} = 1/\sqrt{2}$  (см. (17)). Поэтому согласно (32) при  $\kappa = 0,165$  (см. (23))  $\Psi \geq 0,974$  (равенство имеет место при  $H_0 = 1/\sqrt{2}$ ), и, таким образом, применение формул (31) в этом случае вполне допустимо, если достаточна точность определения ( $\Psi - 1$ ) порядка одного или нескольких процентов. В настоящее время такая точность даже в отношении измерения  $\delta_0$  еще далеко не достигнута.

Поскольку из экспериментальных данных следует, что  $\kappa \ll 1$ , а также по причине, указанной ниже, решение уравнений (18), возможное в другом предельном случае, когда  $\kappa \rightarrow \infty$ , не представляет по существу интереса, и мы его приводить не будем.

Если  $\kappa = 0$ , то в рассматриваемой задаче  $\Psi \equiv 1$  при любом  $H$  — этот случай соответствует обычной теории, основанной на уравнении (1) с  $\Lambda = \text{const}$ . Если  $\kappa > 0$ , то решение существует лишь до некоторого «второго критического поля»  $H_{к2}$ . Область полей  $H_{км} = 1/\sqrt{2} < H < H_{к2}$  отвечает метастабильным (перегретым) состояниям, в которых сверхпроводящая фаза может существовать, так как ей отвечает относительный минимум свободной энергии, но абсолютный минимум свободной энергии отвечает уже нормальной фазе. Более детальное исследование этого вопроса и вычисление поля  $H_{к2}$  в зависимости от  $\kappa$  еще не проведено.

Заметим теперь, что при  $\kappa \geq 1/\sqrt{2}$  возникает своеобразная неустойчивость нормальной фазы металла. Действительно, пусть весь металл находится в равновесии и в нормальном состоянии, т. е.  $H_0 \geq 1/\sqrt{2}$ . Тогда можно видеть, что при  $\kappa \geq 1/\sqrt{2}$  появляется неустойчивость относительно образования прослоек сверхпроводящей фазы в том смысле, что появляются решения уравнений (18) с  $\Psi \neq 0$ . Действительно, предполагая, что  $\Psi \ll 1$ , мы можем считать, что  $H = H_0 = \text{const}$ , и первое уравнение (18) приобретает вид

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} = -\kappa^2 (1 - H_0^2 z^2) \Psi. \quad (33)$$

Это уравнение по виду совпадает с уравнением Шредингера для гармонического осциллятора и, как известно, имеет решения для  $\Psi$ , обращающиеся в нуль при  $z = \pm\infty$ , если  $\kappa = 2H_0 (n + 1/2)$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Так как для нормальной фазы  $H_0 \geq 1/\sqrt{2}$ , то минимальное значение  $\kappa$ , при котором появляются указанные решения, равно  $\kappa_0 = 1/\sqrt{2}$ . Точка  $z = 0$ , выбранная в (33), совершенно произвольна, т. е. «паразитное» решение может появиться всюду, и действительно имеет место какая-то неустойчивость нормальной фазы, связанная с тем, что при  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  поверхностная энергия  $\sigma_{ns} < 0$  (см. конец § 3).

Вопрос о характере состояния, возникающего при  $\kappa > \kappa_0$ , не исследовался, так как в этом пока нет необходимости, поскольку из опытных данных, правда несколько ориентировочных и обработанных на основе использования соотношения (22), следует, что  $\kappa \ll 1$ . Оставляя сейчас в стороне вопрос об истинном значении  $\kappa$ , мы в силу указанной неустойчивости решений должны, во всяком случае, заметить, что все полученные нами результаты относятся лишь к случаю, когда

$$\kappa < \kappa_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (34)$$

Используя решение (31), легко выяснить зависимость от напряженности поля глубины проникновения магнитного поля в массивный сверхпроводник [9,10]. В согласии с экспериментальным методом измерения [11, 12] определим глубину проникновения поля в массивный сверхпроводник выражением

$$\delta = \frac{\int_0^{\infty} H dz}{H_0} = \delta_0 \frac{\int_0^{\infty} H dz}{H_0} = \delta_0 \frac{|A_0|}{H_0}, \quad (35)$$



где  $H_0$  — внешнее поле (поле при  $z = 0$ ) и в первом выражении используются обычные, а во втором и третьем новые (приведенные) единицы для  $H$ ,  $H_0$ ,  $A_0$  и  $z$ . Подставляя поле (31) в (35), имеем (в обычных единицах)

$$\delta = \delta_0 \left\{ 1 + \frac{\kappa(\kappa + 2\sqrt{2})}{8(\kappa + \sqrt{2})^2} \left( \frac{H_0}{H_{\text{KM}}} \right)^2 \right\} \equiv \delta_0 \left\{ 1 + f(\kappa) \left( \frac{H_0}{H_{\text{KM}}} \right)^2 \right\},$$

$$\frac{d\delta}{dT} = \frac{d\delta_0}{dT} + f(\kappa) \left( \frac{H_0}{H_{\text{KM}}} \right)^2 \left\{ \frac{d\delta_0}{dT} - \frac{2(dH_{\text{KM}}/dT)}{H_{\text{KM}}} \delta_0 \right\}. \quad (36)$$

Отсюда ясно, что величина  $\delta_0$ , как уже упомянуто, представляет собой глубину проникновения в слабом поле. Функция  $f(\kappa)$  монотонно растет с  $\kappa$  так, что  $f(0) = 0$ ,  $f(\infty) = 1/8$  и при  $\kappa \ll 1$   $f(\kappa) \approx \kappa/4\sqrt{2}$ . Таким образом, при  $H_0 = H_{\text{KM}}$  даже для  $\kappa = 1/\sqrt{2}$   $\delta = 1,07 \delta_0$ , а для  $\kappa = 0,165$   $\delta = 1,028 \delta_0$ . Если, как это имело место в [12], измерения  $\delta$  производятся для слабого медленно-переменного поля  $H_1$  при наличии сильного поля  $H_0$ , то

$$\frac{\delta - \delta_0}{\delta_0} = 3f(\kappa) \left( \frac{H_0}{H_{\text{KM}}} \right)^2,$$

т. е. эффект утраивается. Мы видим, что ожидаемое изменение  $\delta$  с  $H$  для ртути, для которой по нашей оценке  $\kappa = 0,165$ , весьма мало и лежит за пределами точности измерений, осуществленных в [12] (данные [11] в отношении зависимости  $\delta$  от  $H$ , вероятно, по причинам, указанным в [12], не верны; это видно также из того, что в [11] в ряде случаев  $\delta \sim H_0$ , а не  $\delta \sim H_0^2$ , в то время как в слабом поле, во всяком случае,  $\delta \sim H_0^2$ , поскольку  $\delta$  — четная функция  $H_0$ ). Как мы увидим в § 4, для тонких сверхпроводников зависимость  $\delta$  от  $H_0$  значительно больше, чем для массивных, и может наблюдаться в опытах типа описанных в [10] (постому возможно, что отмечаемая в [10] зависимость  $\delta$  от  $H_0$  реальна, что не противоречит отсутствию заметного эффекта в [12]).

### § 3. Поверхностная энергия на границе сверхпроводящей и нормальной фаз

Для вычисления  $\sigma_n$  нужно найти решение уравнений (18) для сверхпроводящего полупространства, граничащего с полупространством, заполненным нормальной фазой того же металла. Поскольку все отличие обеих фаз сводится к тому, что в одной из них  $\Psi \neq 0$ , а в другой  $\Psi = 0$ , нужно думать, что переход меж-

ду фазами совершается непрерывно в некотором переходном слое. Можно показать, что наши уравнения имеют именно такое непрерывное, плавное решение и не допускают, например, отвечающего условиям задачи решения, в котором функция  $\Psi$  обращается в какой-либо точке в нуль. Таким образом, переход от сверхпроводящей фазы к нормальной совершается в переходном слое, в котором при  $z = \infty$  имеется сверхпроводящая фаза и при  $z = -\infty$  — нормальная фаза. Это значит, что нужно искать решение уравнения (18) с граничными условиями

$$\begin{aligned} z = \infty: \quad \Psi &= \Psi_{\infty} = 1, & H &= A = \frac{d\Psi}{dz} = 0, \\ z = -\infty: \quad \Psi &= \frac{d\Psi}{dz} = 0, & H &= H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ & & A &= H_0 z + \text{const.} \end{aligned} \quad (37)$$

Фактически, конечно, переходный слой имеет ширину порядка  $\delta_0$  (точнее, порядка  $\delta_0/\kappa$ ; см. ниже), так же как магнитное поле в сверхпроводник проникает на глубину порядка  $\delta_0$ , хотя строго равно нулю лишь при  $z = \infty$ .

Учитывая (19) и (28), поверхностная энергия  $\delta_{ns}$  равна

$$\begin{aligned} \delta_{ns} &= \frac{H_{KM}^2}{2\pi} \delta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} - (1 - A^2) \Psi^2 + \frac{\Psi^4}{2} - H_0 H \right\} dz = \\ &= \frac{H_{KM}^2}{2\pi} \delta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{d\Psi}{dz} \right)^2 + H^2 - H_0 H \right\} dz, \end{aligned} \quad (38)$$

где использовано соотношение (28),  $H_0 = 1/\sqrt{2}$  и все величины под интегралами выражены в приведенных единицах.

Ввиду того что система (18) в общем случае не интегрируется, мы можем дать аналитическое выражение для  $\delta_{ns}$  лишь при достаточно малом  $\kappa$ . В этом случае в сверхпроводящей фазе при больших  $z$  (вдали от переходной области от сверхпроводящей к нормальной фазе)  $\Psi = 1 - \text{const} e^{-\sqrt{2}\kappa z}$  (см. (30), (31)), т. е. очень медленно меняется с  $z$ . Поэтому мы будем искать решение второго уравнения (18) в виде

$$A = \exp \left\{ - \int \Psi dz \right\}. \quad (39)$$

Легко видеть, что это решение справедливо, если

$$\left| \frac{d}{dz} \frac{1}{\Psi} \right| \ll 1. \quad (40)$$

Подставляя (39) в (28), находим, что  $d\Psi/dz = (\kappa/\sqrt{2})(1 - \Psi^2)$ , т. е.

$$\Psi = \text{th} \left( \frac{\kappa}{\sqrt{2}} z \right), \quad (41)$$

где мы уже выбрали удобным образом начало отсчета  $z$ . Заметим, что решение (41) есть вместе с тем строгое решение уравнения (18) для  $\Psi(z)$  при отсутствии внешнего поля и при условии, что  $\Psi(\infty) = 1$  и  $\Psi(0) = 0$ . Из (40) явствует, что решение (41) при наличии поля пригодно, пока соблюдается неравенство

$$\kappa \ll \sqrt{2} \text{sh}^2 \left( \frac{\kappa}{\sqrt{2}} z \right). \quad (42)$$

При этом условии из (39) и (41) следует, что

$$A = \exp \left\{ - \int \Psi dz \right\} = C \exp \left\{ - \frac{\sqrt{2}}{\kappa} \ln \text{ch} \frac{\kappa}{\sqrt{2}} z \right\},$$

$$H = \frac{dA}{dz} = -\Psi A = -\text{th} \left( \frac{\kappa}{\sqrt{2}} z \right) A. \quad (43)$$

При  $\kappa z \ll 1$ :

$$\Psi = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} z, \quad A = C \exp \left\{ - \frac{\kappa}{2\sqrt{2}} z^2 \right\}, \quad \kappa z^2 \gg 1, \quad (44)$$

где неравенство  $\kappa z^2 \gg 1$  получено из (42); очевидно, что приближение (44) справедливо, если  $1/\kappa \gg z \gg 1/\sqrt{\kappa}$ , что при достаточно малом  $\kappa$  может иметь место. Для оценки постоянной  $C$  в (43), (44) учтем, что  $H \ll H_0 = 1/\sqrt{2}$ , и, следовательно,  $|A| \ll 1/\sqrt{2} \text{th}(\kappa/\sqrt{2})$  или, при  $|\kappa z| \ll 1$ ,  $|A| \sim 1/\kappa z$  в области, где  $H \sim 1/\sqrt{2}$ .

Отсюда, учитывая, что выражение (44) при  $z \sim \kappa^{-1/2}$  еще применимо по порядку величины, находим, что  $C \sim \kappa^{-1/2}$ . Таким образом, на границе области применимости решения (41) — (43)  $A \gg 1$  (так как  $\kappa \ll 1$ ). Но если  $A \gg 1$ , то уравнения (18) упрощаются и принимают вид

$$A \gg 1: \quad \frac{d^2 \Psi}{dz^2} = \kappa^2 A^2 \Psi, \quad \frac{d^2 A}{dz^2} = \Psi^2 A. \quad (45)$$

Вводя переменные  $\zeta = \sqrt{\kappa} z$ ,  $\varphi = \Psi/\sqrt{\kappa}$  и  $B = \sqrt{\kappa} A$ , получаем из (45) универсальные уравнения

$$\frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} = \varphi B^2, \quad \frac{d^2 B}{d\zeta^2} = \varphi^2 B, \quad (46)$$

которые также не интегрируются в квадратурах, но должны быть решены численно только один раз. Однако и в этом сейчас нет нужды, так как легко видеть, что вклад в  $\sigma_{ns}$  от области, где справедливы уравнения (45), (46), т. е. от области  $-\infty < z \leq \kappa^{-1/2}$ , есть величина  $\sim \kappa^{-1/2}$ . Между тем вклад от области  $\kappa^{-1/2} < z < \infty$  есть величина  $\sim \kappa^{-1}$ . Действительно, подставляя в (38) решение (41) и (43), легко видеть, что вклад в  $\sigma_{ns}$  от членов  $H^2 - H_0 H$  под знаком интеграла есть величина  $\sim \kappa^{-1/2}$ , а

$$\int_{1/\sqrt{\kappa}}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{d\Psi}{dz} \right)^2 dz = \frac{\sqrt{2}}{3\kappa} + O(\kappa^{-1/2}),$$

где второй член связан с нижним пределом в интеграле. Таким образом, с точностью до членов порядка  $\kappa^{-1/2}$ ,

$$\sigma_{ns} = \frac{\delta_0 H_{\text{KM}}^2}{3 \sqrt{2} \pi \kappa}, \quad \Delta = \frac{\sigma_{ns}}{H_{\text{KM}}^2 / 8\pi} = \frac{1,89 \delta_0}{\kappa}, \quad \sqrt{\kappa} \ll 1. \quad (47)$$

Особенно важно подчеркнуть, что при малых  $\kappa$   $\sigma_{ns} > 0$ , что совершенно необходимо и достижение чего являлось главной нашей целью. При достаточно больших  $\kappa$ , напротив,  $\sigma_{ns} < 0$  (это ясно сразу из (38), так как  $H^2 < H_0 H$ ), что указывает на то, что такие большие  $\kappa$  не соответствуют обычно наблюдаемой картине (в результате численного интегрирования выяснилось, что  $\sigma_{ns} = 0$  при  $\kappa = 1/\sqrt{2}$ ). Принимаемое нами для ртути значение (23) для  $\kappa$ , весьма малое со всех других точек зрения, еще недостаточно мало для применимости формулы (47), так как в этом случае  $\sqrt{\kappa} = 0,407$ . Численное интегрирование для  $\kappa = 0,165$  привело к значению  $\Delta \approx 6\delta_0$ , в то время как согласно (47)  $\Delta = = 11,4 \delta_0$ .

Толщина переходного слоя, очевидно, порядка  $\delta_0/\kappa \sim 10 \delta_0$ .

#### § 4. Сверхпроводящие пластины (пленки)

Помимо полупространства задача является одномерной для плоских пластин и пленок. Здесь представляет интерес вычисление критического поля  $H_K$  для разрушения сверхпроводимости пленки и магнитного момента пленки в любом поле  $H_0$ ; кроме того в случае, когда по пленке течет результирующий ток  $J$ , нужно найти критическое значение тока  $J_K$ , разрушающего сверхпроводимость, а также зависимость  $J_K$  от наложенного дополнительного поля  $H_0$ .

Критическое поле  $H_K$ , как показывает термодинамическое рассмотрение [2,3], определяется соотношением

$$\frac{H_K^2}{8\pi} = \frac{H_{KM}^2}{8\pi} - \frac{\sigma}{d},$$

$$\sigma = \int_0^d \left( \frac{H^2(z)}{8\pi} - \frac{H_K H(z)}{4\pi} + \Delta F \right) dz, \quad (48)$$

где толщина пластины равна  $2d$ , ось  $z$  перпендикулярна пластине и  $z = 0$  в ее середине,  $H_{KM}$  — критическое поле для массивного сверхпроводника и  $\Delta F$  — изменение плотности свободной энергии сверхпроводника, связанное с наличием поля. В теории, основанной на уравнении (1),  $\Delta F = \Lambda j_s^2/2$  и формула (48) с учетом (4) приводит к выражению (5). В нашем случае согласно (9) и (7)

$$\Delta F = F_{n0} + \alpha \Psi^2 + \frac{\beta}{2} \Psi^4 + \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d\Psi}{dz} \right)^2 + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 \Psi^2 - \left( F_{n0} - \frac{\alpha^2}{2\beta} \right),$$

и, таким образом,

$$\sigma = \frac{H_{KM}^2 \delta_0}{4\pi} \int_0^d \left\{ \frac{1}{2} - (1 - A^2) \Psi^2 + \frac{\Psi^4}{2} + \frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{d\Psi}{dz} \right)^2 + H^2 - 2H_K H \right\} dz, \quad (48a)$$

где под интегралом используются новые единицы. Величина (48a) обозначена буквой  $\sigma$ , так как из (15) ясно, что она эквивалентна проинтегрированной в соответствующих пределах плотности поверхностной энергии.

Магнитный момент пленки, отнесенный к единице ее поверхности, во внешнем поле  $H_0$ , параллельном пленке, равен

$$\mu = \int_{-d}^d \frac{H(z) - H_0}{4\pi} dz = \frac{1}{2\pi} (A(d) - H_0 d), \quad (49)$$

где при переходе ко второму выражению учтено, что для пленки без результирующего тока во внешнем поле  $H(z) = H(-z)$ ,

и положено  $A(d) = \int_0^d H(z) dz$ , так как ниже потенциал  $A$  выбран так, что  $A(0) = 0$ . Выражение (49) получается, либо если учитывать, что работа «намагничивания» пленки равна

$$- \mu H_0 = \frac{H_0}{4\pi} \int (H_0 - H(z)) dz,$$

либо если непосредственно принимать во внимание, что поле  $H(z)$  играет роль магнитной индукции  $B(z)$ , и, таким образом, выражение  $(H(z) - H_0)/4\pi$  как раз эквивалентно намагниченности  $M = (B - H)/4\pi$ .

Для нахождения  $H_K$ ,  $\mu$  и  $J_K$  нужно найти решение уравнений (18) с граничными условиями

$$z = \pm d: \quad \frac{d\Psi}{dz} = 0, \quad H = H_0 \pm H_J, \quad H_J = \frac{2\pi}{c} J, \quad (50)$$

где  $H_0$  — внешнее магнитное поле, направленное по оси  $y$ ,  $J$  — полный ток ( $J = \int_{-d}^d j dz$ , где  $j$  — плотность тока), текущий по пленке в направлении отрицательной оси  $x$ , и  $2H_J = (4\pi/c)J$  — разность между значениями полного поля на обеих сторонах пленки, связанная с наличием тока  $J$ . Если ток  $J$  и поле  $H_0$  не взаимно перпендикулярны, то отличны от нуля две компоненты потенциала  $A$  (именно компоненты  $A_x$  и  $A_y$ ) вместо одной компоненты  $A_x$  в рассмотренном выше случае. При этом вместо (18) имеем систему исходных уравнений в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{dz^2} &= \kappa^2 (-(1 - A_x^2 - A_y^2)\Psi + \Psi^3), \\ \frac{d^2A_x}{dz^2} &= \Psi^2 A_x, \quad \frac{d^2A_y}{dz^2} = \Psi^2 A_y. \end{aligned} \quad (51)$$

Эти уравнения нужно решать при условиях

$$\begin{aligned} z = \pm d: \quad H_x &= H_{x0}, \quad H_y = H_{y0} \pm H_J, \\ H_J &= \frac{2\pi J}{c}, \quad \frac{d\Psi}{dz} = 0, \end{aligned} \quad (52)$$

где оси выбраны таким образом, что полный ток имеет слагающую лишь по оси  $x$  и, следовательно, поле  $H_J$  направлено по оси  $y$ ;  $H_{x0}$  и  $H_{y0}$  — слагающие внешнего поля по осям  $x$  и  $y$ .

Для достаточно толстых пластинок, т. е. если  $d \gg \delta_0$ , значение  $H_K$  можно получить сразу же, используя результаты § 2 и полагая в (48)  $d \rightarrow \infty$ . Таким образом, подставляя в (48) решение (31), имеем

$$d \gg \delta_0: \quad \frac{H_K}{H_{KM}} = 1 + \frac{\delta_0}{2d} \left(1 + \frac{f(\kappa)}{2}\right), \quad (53)$$

где  $f(\kappa)$  — та же функция, что и в (36), и формула (53) верна с точностью до членов порядка  $(\delta_0/d)^2$ . В том же приближении

в обычной теории [1,2] получается выражение (53) с  $\kappa = 0$  (см. [5]). Учитывая (36), формулу (53) можно записать в виде

$$\frac{H_{\kappa}}{H_{\kappa 0}} = 1 + \frac{\delta_0}{2d} + \frac{\Delta\delta}{4d}, \quad (54)$$

где  $\Delta\delta = \delta(H_{\kappa}) - \delta_0$ .

Для пленок произвольной толщины решение уравнений (18) нужно провести заново. При этом решение (31) позволяет думать, что и для тонких пленок при малых  $\kappa$  функция  $\Psi$  слабо меняется с изменением  $z$ . Исходя из этого предположения, которое *post factum* оправдывается, положим

$$\Psi = \Psi_0 + \varphi, \quad |\varphi| \ll \Psi_0, \quad \varphi(z=0) = 0. \quad (55)$$

Тогда уравнения (18) в первом приближении принимают вид

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \kappa^2 \{ \Psi_0^3 - \Psi_0 + (3\Psi_0^2 - 1)\varphi + A^2\Psi_0 \}. \quad (56)$$

Из второго уравнения (56) с учетом граничных условий (50) находим значения  $A$  и  $H$ :

$$A = \frac{H_0 \operatorname{sh} \Psi_0 z}{\Psi_0 \operatorname{ch} \Psi_0 d} + \frac{H_J \operatorname{ch} \Psi_0 z}{\Psi_0 \operatorname{sh} \Psi_0 d},$$

$$H = \frac{dA}{dz} = \frac{H_0 \operatorname{ch} \Psi_0 z}{\operatorname{ch} \Psi_0 d} + \frac{H_J \operatorname{sh} \Psi_0 z}{\operatorname{sh} \Psi_0 d}. \quad (57)$$

Подставляя (57) в первое уравнение (56), находим  $\varphi$ , причем из требования, чтобы при  $z = \pm d$  было  $d\varphi/dz = 0$ , получается трансцендентное уравнение, определяющее  $\Psi_0$ .

Как мы увидим, практически с достаточной точностью можно положить  $\kappa = 0$ . Поэтому для  $\kappa \neq 0$  выпишем  $\varphi$  и уравнение для  $\Psi_0$  лишь в частном случае, когда  $H_J = 0$ , т. е. для пленки во внешнем поле. В этом случае

$$\varphi = - \frac{\Psi_0 (\Psi_0^3 - 1)}{3\Psi_0^2 - 1} (1 - \operatorname{ch} \kappa \sqrt{3\Psi_0^2 - 1} z) +$$

$$+ \frac{\kappa H_0^2}{2\Psi_0^2 \sqrt{3\Psi_0^2 - 1} \operatorname{ch}^2 \Psi_0 d} \left\{ \frac{1 - \operatorname{ch} \kappa \sqrt{3\Psi_0^2 - 1} z}{\kappa \sqrt{3\Psi_0^2 - 1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\kappa \sqrt{3\Psi_0^2 - 1} (\operatorname{ch} \kappa \sqrt{3\Psi_0^2 - 1} z - \operatorname{ch} 2\Psi_0 z)}{4\Psi_0^2 - \kappa^2 (3\Psi_0^2 - 1)} \right\}, \quad (58)$$

и

$$\Psi_0^2 - 1 = \frac{2H_0^2 \left\{ 1 - \frac{\text{sh } 2\Psi_0 d}{2\Psi_0 d} \times \frac{\sqrt{3\Psi_0^2 - 1} d}{\text{sh } \kappa \sqrt{3\Psi_0^2 - 1} d} \right\}}{\text{ch}^2 \Psi_0 d \{ 4\Psi_0^2 - \kappa^2 (3\Psi_0^2 - 1) \}}. \quad (59)$$

В предельном случае  $\kappa = 0$  для любых  $H_0$  и  $H_J$ , разумеется,  $\varphi = 0$  и

$$\Psi_0^2 (\Psi_0^2 - 1) = \frac{H_0^2 \left( 1 - \frac{\text{sh } 2\Psi_0 d}{2\Psi_0 d} \right)}{2 \text{ch}^2 \Psi_0 d} - \frac{H_J^2 \left( 1 + \frac{\text{sh } 2\Psi_0 d}{2\Psi_0 d} \right)}{2 \text{sh}^2 \Psi_0 d}. \quad (60)$$

Заметим, что при  $\kappa = 0$  уравнение для  $\Psi = \Psi_0 = \text{const}$  можно получить сразу же из условия минимума свободной энергии, т. е. из условия  $d\sigma/d\Psi = 0$ . Как ясно из (48), это условие дает

$$\Psi_0^2 - 1 = -\frac{1}{d} \int_0^d A^2 dz,$$

что приводит к (60).

Остановимся теперь несколько подробнее на разрушении сверхпроводимости пленок внешним полем при отсутствии полного тока. Если  $\kappa = 0$ , то  $\Psi = \Psi_0 = \text{const}$  и для поля справедливо решение (57) с  $H_J = 0$ . Подставляя это решение в (48), без труда находим (в обычных единицах)

$$\left( \frac{H_K}{H_{KM}} \right)^2 = \frac{\Psi_0^2 (2 - \Psi_0^2)}{1 - \frac{\text{th } \eta}{\eta}}, \quad \eta = \frac{\Psi_0 d}{\delta_0}. \quad (61)$$

В том же случае ( $\kappa = 0$ ,  $H_J = 0$ ) уравнение (60) при  $H_0 = H_K$  или в обычных единицах при  $H_0 = H_K / \sqrt{2} H_{KM}$  дает

$$\left( \frac{H_K}{H_{KM}} \right)^2 = \frac{4\Psi_0^2 (\Psi_0^2 - 1) \text{ch}^2 \eta}{1 - \frac{\text{sh } 2\eta}{2\eta}}, \quad \eta = \frac{\Psi_0 d}{\delta_0}. \quad (62)$$

Из (61), (62) по измеренным значениям  $H_K/H_{KM}$  и зная  $d$ , можно определить  $\Psi_0$  и  $\delta_0$ . Легко видеть, что при малых  $\eta$  при  $H = H_K$  имеем  $\Psi_0 = 0$  и

$$\frac{H_K}{H_{KM}} = \frac{\sqrt{5}\delta_0}{d}. \quad (63)$$



Таким образом, в этом случае имеет место фазовый переход второго рода; с ростом поля  $\Psi_0$  падает, и в точке перехода  $\Psi_0 = 0$ . Как ясно из (60), при  $H_J = 0$ , с точностью для членов порядка  $d^2$  (учитывая, что  $H_0^2 d^2$  может быть порядка единицы), имеем

$$\Psi_0^2 = \frac{1 - \left(\frac{H_0}{H_{\text{км}}}\right)^2 \frac{d^2}{6\delta_0^2}}{1 - \frac{2}{15} \left(\frac{H_0}{H_{\text{км}}}\right)^2 \frac{d^4}{\delta_0^4}}$$

Переход в нормальное состояние является переходом второго рода при  $d \leq d_{\text{к}}$ , где, как легко показать, исходя из (61), (62),

$$d_{\text{к}} = \frac{\sqrt{5}\delta_0}{2}. \quad (64)$$

Точка  $d = d_{\text{к}}$  есть своего рода критическая точка Кюри [71], и при  $d > d_{\text{к}}$  имеет место переход первого рода, т. е. при  $H_0 = H_{\text{к}}$   $\Psi_0 > 0$  и происходит выделение скрытой теплоты перехода (если  $d < d_{\text{к}}$ , то при  $H_0 = H_{\text{к}}$  имеет место скачок теплоемкости; теплоемкость тонких пленок, очевидно, зависит от  $H_0$ ).

Глубина проникновения поля, как ясно из (57), есть величина

$$\delta = \frac{\delta_0}{\Psi_0}, \quad (65)$$

и мы видим, что для достаточно тонких образцов при  $H_0 \sim H_{\text{к}}$  глубина проникновения может быть значительно больше, чем для массивного металла. При этом (см. (49) и (57) с  $H_J = 0$ )

$$\mu = -\frac{H_0 d}{2\pi} \left(1 - \frac{\delta}{d} \operatorname{th} \frac{d}{\delta}\right) = -\left(\frac{H_0 d}{2\pi}\right) \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 - \frac{2}{15} \left(\frac{d}{\delta}\right)^4 + \dots \right\}. \quad (66)$$

Измеряя  $\mu$ , можно найти глубину  $\delta$ , которая согласно (65) и (60) зависит от  $H_0$ .

При  $\kappa \neq 0$  все выражения становятся в общем случае весьма громоздкими. Однако при малых  $\kappa$ , которые только нас и интересуют, и не слишком больших  $d$  можно разлагать все выражения в ряд по  $\kappa d$ . В результате в области толщин, где имеет место переход второго рода, вместо (63) имеем

$$\left(\frac{H_{\text{к}}}{H_{\text{км}}}\right)^2 = 6 \left(\frac{\delta_0}{d}\right)^2 - \frac{7}{10} \kappa^2 + \frac{11}{1400} \kappa^4 \left(\frac{d}{\delta_0}\right)^2 \dots \quad (67)$$

Значение  $d_k$  теперь равно

$$d_k^2 = \frac{5}{4} \left( 1 - \frac{7}{24} \kappa^2 + \dots \right) \delta_0^2. \quad (68)$$

Если для  $\kappa^2$  принять значение (23), то учитывать члены с  $\kappa^2$  в (67), (68), а также в других аналогичных выражениях практически не нужно.

Пригодные для количественной обработки экспериментальные данные о разрушении сверхпроводимости пленок во внешнем поле имеются лишь в [4] и относятся к ртути. Однако и в этом случае разброс точек при измерениях был довольно велик, и, кроме того, ввиду отсутствия в [4] таблиц значения  $H_K/H_{KM}$  пришлось брать из графика; главный же источник неточности состоит в том, что толщина пленок, указанная в [4], представляет собой некоторое среднее значение и может, особенно для тонких пленок, существенно отличаться от толщины  $d$ , входящей в наши формулы, в которых предполагается, конечно, что пленка является идеально однородной.

В табл. 1 приведены значения  $\delta_0$ , полученные с помощью формулы (63) на основании данных о  $H_K/H_{KM}$  и  $d$ , приведенных в [4]; при этом в скобках помещены значения, для вычисления

Таблица 1

Значения  $\delta_0$  для ртути (значения  $\delta_0$  и  $d$  в  $10^{-3}$  см)

Т. °К	0,596	0,840	1,178	1,423	1,690	2,400	4,390	10,880	$\frac{2d_k}{\sqrt{5}\delta_{0min}}$
4,13	5,13	4,61	4,07	4,17	3,80	3,37	3,08	(3,72) 3,56	6,9
4,12	4,12	4,06	3,47	3,36	3,27	3,11	2,72	(3,52) 3,30	6,1
4,10	3,47	3,38	2,87	3,02	2,79	2,53	2,28	(3,21) 2,50	5,1
4,05	2,66	2,62	2,32	2,27	2,08	1,86	(1,80) 1,80	(2,86) 1,95	4,0
4,00	2,28	2,31	1,92	1,82	1,76	1,56	(1,57) 1,57	(2,72) 1,70	3,5
3,80	1,69	1,62	1,40	1,28	1,24	1,10	(1,31) 1,15	(2,63) 1,39	2,5
3,60	1,27	1,24	1,08	0,99	0,98	(0,87) 0,87	(1,23) 0,99	(2,50) 1,16	1,95
3,00	1,10	1,10	0,92	0,84	(0,83) 0,83	(0,77) 0,72	(1,16) 0,84	—	1,61
2,50	0,92	0,94	0,86	0,80	(0,75) 0,75	(0,73) 0,66	(1,13) 0,78	(2,45) 1,0	1,48

которых формула (63) уже не пригодна, так как  $d > d_k$ . Под этими величинами в скобках внизу приведены значения  $\delta_0$ , полученные непосредственно по формулам (61), (62).

В последнем столбце приведены значения  $2d_k$  по формуле (64) с использованием минимального значения  $\delta_0$  в соответствующей строке. Из табл. 1, так же как непосредственно из графика зависимости  $\lg(H_k/H_{kM})$  от  $\lg 2d$  в [4], ясен резкий излом в ходе этой зависимости, который наступает как раз при переходе  $d$  за  $d_k$  (в табл. 1 одиночные значения  $\delta_0$  и значения в скобках согласно (63) — просто величины, пропорциональные  $(H_k/H_{kM})d$ ; это произведение падает до  $d_k$ , а при  $d > d_k$  начинает резко расти). В этом обстоятельстве мы склонны видеть подтверждение вывода о разном характере перехода при  $d < d_k$  и  $d > d_k$ . Падение значений  $\delta_0$  с ростом  $d$ , ясно выраженное в табл. 1, при  $d < d_k$  вполне может объясняться уже упомянутым отличием значений  $d$ , указанных в [4], от эффективных значений  $d_{эфф}$ . Качественно ясно, что чем тоньше пленка, тем  $d_{эфф}$  сильнее отличается от  $d$ , причем  $d_{эфф} < d$ . Наблюдаемая зависимость  $\delta_0$  от  $d$  при  $d < d_k$  находится в согласии с этой картиной. Что же касается роста значений  $\delta_0$ , вычисленных по формуле (61), (62), с ростом  $d$  при  $d > d_k$ , то для него мы, напротив, не видим оснований.

Нужно, однако, иметь в виду два обстоятельства. Во-первых, вся наша схема, основанная на разложении  $F_{s0}$  в (10) в ряд по степеням  $\Psi^2$  с точностью до членов  $\Psi^4$ , вообще говоря, пригодна лишь вблизи  $T_k$ , пока имеет место соотношение (8) и

$$\delta_0^2 = \frac{\text{const}}{T_k - T} = \frac{\delta_{00}^2}{1 - \frac{T}{T_k}}, \quad (69)$$

где  $\delta_{00}$  — некоторая постоянная (см. (20) и (7)).

Для ртути область, где справедливо соотношение (8) и поэтому нужно ожидать пригодности формулы (69), лежит между  $T_k$  и  $T \approx 3,80-4,0^\circ$  К. При меньших значениях  $T$ , вообще говоря, следует учитывать дальнейшие члены в разложении  $F_{s0}$  в ряд (т. е. члены  $\sim \Psi^6$  и т. д. в (18)), и применение всех полученных формул без замены  $|\alpha|/\beta$  на  $(d\alpha/dT)_k(T_k - T)/\beta_k$  возможно, лишь если нелинейная зависимость  $|\alpha|/\beta$  от  $(T_k - T)$  более существенна, чем влияние членов  $\Psi^6$  и т. д. Такая ситуация возможна, но ее использование будет оправдано лишь на основе анализа достаточно обширных экспериментальных данных, чего мы сейчас сделать не можем ввиду отсутствия последних. В силу сказанного данные табл. 1 для  $T < 3,80^\circ$  К могут быть искажены. Второе обстоятельство, которое нужно иметь в виду, заключается в том, что  $T_k$  существенно варьирует от пленки к пленке;

в [4] все данные приводились к  $T_K = 4,167^\circ \text{K}$ , и эта операция, заведомо неточная при  $T = 4,12^\circ \text{K}$  и  $T = 4,13^\circ \text{K}$ , может повлиять на данные табл. 1 и при меньших температурах. Весь вопрос, очевидно, нуждается в детальном экспериментальном исследовании, сейчас же мы в качестве  $\delta_0$  примем наименьшие значения в табл. 1 и сопоставим их с данными, полученными другими методами [10, 12]. При этом нужно иметь в виду, что в [12] непосредственно измеряется лишь величина  $\delta_0 - \delta_0(2,5^\circ)$  и  $\delta_0$  вычисляется в результате экстраполяции, которая не представляется а priori законной. Значения  $\delta_0$ , полученные в [10], основываются на предшествующих измерениях с коллоидами и также неточны, на опыте же в этом случае измеряется  $\delta_0 - \delta_0(2,5^\circ)$ . Как видно из табл. 2, где все величины нужно умножить на  $10^{-5} \text{ см}$ , в пределах достигнутой в настоящее время точности данные табл. 1 совпадают с полученными другими методами (нужно особо подчеркнуть, что данные [12] относятся к массивным образцам).

Таблица 2

$T, ^\circ\text{K}$	$\delta_0$ из табл. 1	$\delta_0 - \delta_0(2,5^\circ)$ из табл. 1	$\delta_0$ из [10]	$\delta_0 - \delta_0(2,5^\circ)$ из [10]	$\delta_0$ из [12]	$\delta_0 - \delta_0(2,5^\circ)$ из [12]
4,13	3,03	2,42	4,08	3,28	2,28	1,82
4,12	2,72	2,06	3,57	2,77	2,04	1,58
4,10	2,28	1,62	2,80	2,00	1,72	1,26
4,05	1,80	1,14	2,34	1,54	1,31	0,85
4,00	1,56	0,90	1,95	1,15	1,10	0,64
3,80	1,10	0,44	1,38	0,58	0,77	0,31
3,50	0,87	0,21	—	—	0,61	0,15
3,00	0,72	0,06	—	—	0,50	0,04
2,50	0,66	0,00	0,80	0,00	0,46	0,00

Принимая для  $\delta_0$  значения, указанные во втором столбце табл. 1, с помощью формулы (22) и учитывая, что вблизи  $T_K$  для ртути  $H_{KM} = 187 (T_K - T)$ , находим  $\kappa^2$ . При этом, если использовать как наиболее надежное значение  $\delta_0$  при  $4^\circ \text{K}$ , получаем результат (23). Используя значения  $\delta_0$ , указанные в [12] и для ртути и для олова, получаем  $\kappa \approx 0,15$ .

Перейдем к вопросу о разрушении сверхпроводимости пленки током. При  $\kappa = 0$  функция  $\Psi_0$  при наличии тока определяется формулой (60), которая при  $d \ll 1$  принимает вид

$$d \ll 1: \quad \Psi_0^2 = 1 - \frac{H_0^2 d^2}{3} - \frac{H_J^2}{\Psi_0^4 d^2}. \quad (70)$$

Поле  $H_J$  как функция  $\Psi_0$  имеет максимум, обращаясь в нуль при  $\Psi_0 = 0$  и при некотором  $\Psi_0 \neq 0$  (если  $H_0 = 0$ , то  $H_J = 0$  при  $\Psi_0 = 1$ ); другими словами, функция  $\Psi_0$  при данном  $H_J$  может согласно (70) иметь два значения. Легко видеть, что сверхпроводимость пленки устойчива лишь пока поле  $H_J$  растет с падением  $\Psi_0$  (в этом случае свободная энергия меньше, чем при том же  $H_J$ , но меньшем  $\Psi_0$ ). Критическое поле  $H_{Jк}$  определяется из условия  $dH_J/d\Psi_0 = 0$ , которое приводит к соотношению

$$\frac{H_{Jк}}{H_{км}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{d}{\delta_0} \left[ 1 - \left( \frac{H_0}{H_{Jк}} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (71)$$

где  $H_{Jк}$  — критическое поле для данной пленки при отсутствии тока,  $H_0$  — внешнее поле и  $J_{к}$  — критический ток ( $H_{Jк} = (2\pi/c) J_{к}$ ). При отсутствии поля  $H_0$

$$\frac{H_{Jк}}{H_{км}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{d}{\delta_0}, \quad H_{Jк} = \frac{2\pi}{c} J_{к}. \quad (72)$$

В случае произвольной ориентации  $H_0$  и  $H_J$ , когда нужно использовать уравнения (51) с граничными условиями (52), легко видеть, что получаются прежние формулы (60), (70) и (71), где  $H_0^2 = H_{x0}^2 + H_{y0}^2$  (ток  $J$  направлен по отрицательной оси  $x$ , поле  $H_J$  — по оси  $y$ ). Заметим, что, как следует из (63) и (72), для достаточно тонких пленок

$$H_{к}H_{Jк} = \frac{4}{3}H_{км}^2. \quad (73)$$

Таким образом, в то время как сами значения  $H_{к}$  и  $H_{Jк}$  для тонких пленок могут очень сильно отличаться от  $H_{км}$ , произведение  $H_{к}H_{Jк}$ , равное для толстого образца  $H_{км}^2$ , для самых тонких пленок возрастает лишь в  $4/3$  раза.

Соотношения (71), (72) находятся в качественном согласии с экспериментами [6], извлечь из которых количественные данные не представляется возможным.

Резюмируя, можно указать, что для экспериментальной проверки теории представляется целый ряд возможностей: измерение критического поля и тока для пленок (формулы (61) — (63) и (72)), измерение влияния поля на критический ток (см. (71)), измерение магнитного момента (см. (65), (66)), измерение  $\sigma_{ns}$  и, наконец, измерение  $\delta(H_0)$  для массивных сверхпроводников (см. (36) и (53)). При этом, работая с пленками, определить  $\kappa$  непосредственно, если значение  $\kappa$  действительно мало, практически, по-видимому, невозможно. Поэтому для определения  $\kappa$ , не пользуясь формулой (23), нужно либо определить  $\sigma_{ns}$  — ве-

личину, особенно чувствительную к  $\kappa$ , либо проводить точные измерения  $\delta$  (с точностью до  $\sim 1\%$ ) в зависимости от  $H_0 \sim H_{км}$  для массивных сверхпроводников.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. London. Une conception nouvelle de la supraconductibilité. Paris, 1937.
- [2] В. Л. Гинзбург. Сверхпроводимость. Изд-во АН СССР, 1946.
- [3] В. Л. Гинзбург. ЖЭТФ, 16, 87, 1946.
- [4] E. Appleyard, J. R. Bristow, H. London, A. D. Misener. Proc. Roy. Soc., 172, 540, 1939.
- [5] H. London. Proc. Roy. Soc., 152, 650, 1935.
- [6] А. И. Шальников. ЖЭТФ, 10, 630, 1940.
- [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. М.—Л., Гостехиздат, § 67—71, 1940.
- [8] В. Л. Гинзбург. УФН, 38, 490, 1949.
- [9] В. Л. Гинзбург. J. Phys. USSR, 11, 93, 1947.
- [10] M. Desirant, D. Shoenberg. Proc. Phys. Soc., 60, 413, 1948.
- [11] А. И. Шальников, Ю. В. Шарвин. ЖЭТФ, 18, 102, 1948.
- [12] E. Laurman, D. Shoenberg. Proc. Roy. Soc., 198, 560, 1949

## § 1. Общие соотношения

Столкновения сверхбыстрых ядерных частиц могут сопровождаться рождением большого числа новых частиц (многолучевые «звезды» в космическом излучении). Ферми [1] высказал остроумную идею о возможности применения статистических методов для теоретического исследования этого процесса. Однако данный им количественный расчет представляется нам неубедительным и в ряде пунктов (в частности, в отношении распределения по углам и энергиям) ошибочным.

С качественной стороны весь процесс столкновения выглядит следующим образом. В момент столкновения возникает большое число частиц<sup>1</sup>, сконцентрированных в объеме, линейные размеры которого определяются радиусом действия ядерных сил и энергией сталкивающихся частиц (см. об этом ниже); следует подчеркнуть, что о самом числе частиц в этот момент можно говорить лишь в условном смысле, так как для системы с такой большой плотностью сильно взаимодействующих частиц (мезонов и нуклонов) понятие о числе частиц вообще не имеет точного смысла. «Длина пробега» частиц в такой системе, очевидно, очень мала по сравнению с ее размерами. С течением времени эта система расширяется, но указанное свойство «длины пробега» неизбежно должно сохраниться и в течение существенной части процесса расширения. Таким образом, часть процесса расширения должна иметь гидродинамический характер, так как малость длины пробега позволяет рассматривать движение вещества в

<sup>1</sup> Именно рождение большого числа частиц является условием применимости изложенного ниже метода рассмотрения и соответствующих формул.

системе макроскопическим, гидродинамическим образом как движение некоторой идеальной (невязкой и нетеплопроводной) жидкости. Поскольку скорости в системе сравнимы со скоростью света, речь идет об уравнениях не обычной, а релятивистской гидродинамики.

Полное «число частиц» в системе отнюдь не остается постоянным в течение гидродинамической стадии расширения. Поэтому число частиц в образующейся «звезде» определяется не числом частиц, возникающих в самый момент столкновения (как это ошибочно предполагает Ферми), а числом частиц в системе в момент перехода во вторую стадию расширения — стадию свободного разлета частиц. На это существенное обстоятельство впервые указал И. Я. Померанчук [2].

Переход из первой стадии во вторую происходит тогда, когда длина пробега частиц в системе уравнивается с ее линейными размерами. Весьма существенно, что порядок величины температуры системы в этот момент есть определенная величина

$$T_k \sim \mu c^2 \quad (1)$$

( $\mu$  — масса  $\pi$ -мезона; температура везде измеряется в энергетических единицах), практически не зависящая от свойств системы, т. е. от энергии сталкивающихся частиц. Действительно, при значениях температуры, существенно более низких, чем  $\mu c^2$ , плотность равновесного числа частиц падает по мере охлаждения экспоненциально (как  $e^{-\mu c^2/T}$ ), и потому длина пробега быстро уравнивается с размерами расширившейся системы даже тогда, когда они относительно велики. Формула (1) для  $T_k$  (с массой  $\pi$ -мезона в качестве  $\mu$ ) справедлива и в том случае, если наряду с  $\pi$ -мезонами образуются и другие, более тяжелые частицы, так как для того, чтобы длина пробега всех частиц была малой, достаточно уже наличия в системе значительной плотности  $\pi$ -мезонов.

Для гидродинамического рассмотрения необходимо иметь уравнение состояния вещества системы. В качестве уравнения состояния сильно сжатого вещества при температурах  $T \gg \mu c^2$  мы применим

$$p = \frac{\varepsilon}{3}, \quad (2)$$

где  $p$  — давление, а  $\varepsilon$  — плотность энергии. Хотя в настоящее время нет строгого доказательства, что таким должно быть уравнение состояния любого вещества в ультрарелятивистском случае, но, на наш взгляд, такое предположение в высшей степени правдоподобно.

Поскольку число частиц в системе не задано, а само опреде-



ляется условиями статистического равновесия, то (как и для черного излучения) ее химический потенциал

$$\zeta = \varepsilon - Ts + p = 0$$

( $s$  — энтропия единицы объема). Отсюда

$$Ts = \varepsilon + p = \frac{4\varepsilon}{3};$$

имея также в виду, что при заданном (равном единице) объеме  $d\varepsilon = Tds$ , найдем соотношения:

$$s \propto \varepsilon^{1/4}, \quad T \propto \varepsilon^{1/4}, \quad (3)$$

совпадающие с соотношениями для черного излучения, чего, конечно, и следовало ожидать.

Подсчет полного числа частиц, возникающих при разлете, очень упрощается, если учесть, что движение идеальной жидкости является адиабатическим. Единственное, что могло бы нарушить эту адиабатичность, — это ударные волны, но трудно себе представить, чтобы они могли образоваться в процессе расширения. Поэтому энтропия системы в отдельных ее участках остается неизменной в продолжение всей гидродинамической стадии процесса расширения.

Разобьем всю систему на ряд макроскопически малых, т. е. практически однородных, но содержащих еще достаточно много частиц, участков; пусть  $s_\alpha$  — энтропия этих участков. Пусть, далее,  $n_\alpha$  — число частиц в  $\alpha$ -том участке, возникающее в момент начала его свободного разлета. Эти моменты для различных участков могут не совпадать, так как система в целом оказывается сильно неоднородной. Величины  $s_\alpha$  и  $n_\alpha$  в отдельности сильно зависят от температуры — при  $T \ll \mu c^2$ , как  $e^{-\mu c^2/T}$ , но отношение  $s_\alpha/n_\alpha$  зависит от температуры лишь слабо, так что, поскольку  $T_R$ , в свою очередь, мало зависит от свойств системы, мы можем считать, что

$$n_\alpha = \text{const} \cdot s_\alpha,$$

где  $\text{const}$  — некоторая универсальная постоянная (если измерять энтропию в безразмерных единицах, то из соображений размерности следует, что  $\text{const} \sim (\mu c/\hbar)^3$ ). Просуммировав это равенство по всем участкам, найдем, что

$$N = \text{const} \cdot S, \quad (4)$$

где  $N$  — полное число частиц в «звезде», а  $S$  — полная энтропия системы. Поскольку энтропия остается постоянной в течение

всей гидродинамической стадии расширения, то под  $S$  можно понимать энтропию системы в начальный момент — момент столкновения<sup>2</sup>. Формула (4) дает возможность определить полное число частиц, возникающих при столкновении, без подробного рассмотрения движения системы.

## § 2. Полное число частиц

Рассмотрим прежде всего «лобовые» столкновения, когда частицы пролетают на расстояниях, сравнимых с их радиусом действия, в отличие от периферических столкновений, когда расстояние пролета велико по сравнению с радиусом действия сил обеих частиц.

Начнем с «лобовых» столкновений двух протонов и определим зависимость числа образующихся частиц от энергии. Пусть  $E'$  — энергия каждого из протонов в системе их общего центра инерции. Полная энтропия системы  $S$  пропорциональна  $\varepsilon^{3/2} \bar{V}$ , где  $V$  — объем, в котором распределена энергия. В системе центра инерции в момент, непосредственно следующий за столкновением, вещество покоится. Поэтому  $\varepsilon = E'/V$ , и энтропия, а следовательно, и число частиц пропорциональны  $E'^{3/2} \bar{V}^{1/2}$ . Поперечный размер системы  $a$  — порядка величины радиуса действия ядерных сил, т. е.  $a \sim \hbar/\mu c$ . Продольный же размер (в системе центра инерции) сокращен в силу лоренцова сжатия в отношении  $\sim Mc^2/E'$  ( $M$  — масса протона). Система имеет, таким образом, форму очень сильно сплюсненного диска, и ее объем

$$V \sim a^3 \frac{Mc^2}{E'}$$

Для числа частиц имеем поэтому выражение

$$N \propto E'^{3/2} V^{1/2} \propto \sqrt{E'}$$

или, переходя к энергии  $E$  в лабораторной системе, в которой покоится один из протонов, по формуле  $EMc^2 = 2E'^2$  получаем окончательно

$$N \propto E^{1/4}$$

Эта формула совпадает с полученной Ферми, аргументация которого, однако, представляется нам совершенно неубедительной.

<sup>2</sup> Точнее, после прохождения ударных волн, которые могут возникнуть в момент столкновения; прохождение ударной волны сопровождается сжатием вещества, вслед за чем начинается стадия расширения, происходящая уже адиабатическим образом.

Количественно можно написать из размерностных соображений (учитывая сравнительную близость отношения масс протона и л-мезона к единице):

$$N = K \left( \frac{E}{2Mc^2} \right)^{3/4}, \quad (5)$$

где  $K$  — постоянная порядка единицы.

Рассмотрим теперь столкновение двух одинаковых ядер атомного веса  $A$ . Было бы совершенно неправильно трактовать такое столкновение как ряд соударений ядерных протонов и нейтронов. В действительности ввиду того, что расстояние между нуклонами в ядрах как раз порядка радиуса их действия, мы должны рассматривать результат столкновения как процесс мезонообразования, захватывающий целиком все занятое ядрами пространство.

Пусть скорость налетающего ядра равна скорости протона в предыдущем примере. Для этого его энергия должна быть в  $A$  раз больше. Поскольку плотность массы в ядре примерно равна плотности массы протона, отнесенной к его сфере действия, плотность энергии непосредственно после столкновения остается такой же, как и в предыдущем случае. Поскольку, очевидно, останется неизменным и лоренцово сокращение, число образующихся частиц будет просто пропорционально объему ядер, т. е.  $A$ . Таким образом, получим окончательно

$$N = KA \left( \frac{E}{2AMc^2} \right)^{3/4} = KA^{3/4} \left( \frac{E}{2Mc^2} \right)^{3/4}. \quad (6)$$

При данной энергии число частиц пропорционально  $A^{3/4}$ . Отметим, что согласно этой формуле тяжелые ядра оказываются значительно более эффективными в смысле образования частиц, чем протоны: два ядра при энергии  $E$  дают столько же частиц, сколько два протона при энергии  $EA^3$ .

В случае разных весов обоих ядер вопрос становится более сложным, однако уже элементарные соображения, связанные с тем, что меньшее ядро при столкновении вырывает из большего лишь его часть, показывают, что число частиц определяется в основном массой меньшего ядра и лишь в слабой степени зависит от массы более тяжелого.

Если речь идет о столкновении мезона с нуклоном или ядром, то здесь следует, по-видимому, ожидать, что между мезоном и нуклоном будет лишь относительно незначительная разница.

Определение константы  $K$  из существующих экспериментальных данных дает для нее значение

$$K \sim 2.$$

Что касается периферических (не «лововых») столкновений нуклонов, то на первый взгляд можно было бы заключить, что среднее число рождающихся частиц должно быстро падать при увеличении прицельного расстояния. Поводом к такому заключению может явиться то обстоятельство, что энергия покоя вещества, сконцентрированного в каждом отдельном участке мезонного поля столкнувшихся нуклонов, быстро (экспоненциально) падает с увеличением расстояния от их «центров». Ошибочность такого вывода видна, однако, из того, что он приводит к противоречию с квантовым соотношением неточностей: энергия покоя участка системы оказалась бы малой по сравнению с неточностью

$$\Delta E \sim \hbar c / \Delta,$$

где  $\Delta$  — толщина участка, сокращенная, как при центральном столкновении, лоренцовым сжатием. В действительности, такое соотношение означает лишь, что малой является не истинная энергия системы (в тех случаях, когда система вообще возникает), а ее математическое ожидание. Другими словами, уменьшается не полное число рождающихся частиц, а лишь вероятность того, что такое столкновение вообще произойдет.

Таким образом, для столкновений двух нуклонов вообще не имеет смысла различать центральные и периферические столкновения; эффективное же сечение столкновения с возникновением многолучевой звезды определяется «радиусом» нуклона  $\hbar / \mu c^3$ . В случае столкновения двух ядер картина несколько меняется. Ясно, что в этом случае число образующихся частиц при изменении прицельного параметра от нуля до суммы радиусов ядер должно падать от максимального значения, определяющегося формулой (6), до значения, определяющегося формулой (5), соответствующего столкновению двух нуклонов.

### § 3. Распределение образующихся частиц по энергиям и направлениям

Исследование углового распределения образующихся частиц и их распределения по энергиям требует детального рассмотрения гидродинамического движения вещества в системе.

Релятивистские гидродинамические уравнения заключены в соотношениях

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0, \quad (7)$$

<sup>3</sup> Этот результат был выяснен в дискуссии с Е. Л. Фейнбергом.

где  $T^{ik}$  — тензор энергии импульса вещества, равный

$$T^{ik} = \rho g^{ik} + (\varepsilon + p) u^i u^k \quad (8)$$

( $u^i$  — четырехмерная скорость,  $g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1$ ,  $g^{00} = -1$ ; здесь и ниже полагаем  $c = 1$ ).

В системе центра инерции рассматриваемая система имеет, как уже было указано, в момент столкновения форму очень сильно сплюсненного диска. Такой характер формы сохраняется и в течение существенной части всей гидродинамической стадии расширения. Движение вещества в течение этого времени можно рассматривать как одномерное в направлении вдоль толщины диска (ось  $x$ ). Тогда уравнения движения гласят:

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{01}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T^{01}}{\partial t} + \frac{\partial T^{11}}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} T^{00} &= \varepsilon (u^0)^2 + p (u^1)^2, & T^{01} &= (\varepsilon + p) u^0 u^1, \\ T^{11} &= \varepsilon (u^1)^2 + p (u^0)^2, \end{aligned} \quad (10)$$

причем  $u^0$  и  $u^1$  связаны соотношением

$$(u^0)^2 - (u^1)^2 = 1. \quad (11)$$

В системе центра инерции «диск» расширяется симметрично в обе стороны. Выберем начало координат в срединной плоскости и будем рассматривать движение в половине, расширяющейся в положительном направлении оси  $x$  (так что  $x > 0$ ,  $u^1 > 0$ ).

Обозначим начальную толщину «диска» через  $\Delta$ . Рассмотрим некоторый момент времени  $t \gg \Delta$ , когда расширение уже значительно продвинулось. Пренебрегая первоначальной толщиной диска, можно утверждать, что все вещество будет расположено в интервале  $0 < x < t$ , поскольку скорость не может быть больше скорости света. Большую часть этого пространства будет занимать вещество, движущееся со скоростью порядка скорости света, но не ультрарелятивистской, и только в узком слое  $t - x \ll t$  будет находиться вещество, движущееся со скоростью, близкой к скорости света. Как мы увидим ниже, в этой последней области сосредоточена лишь небольшая часть энтропии, но большая часть энергии системы. Поэтому рассмотрение этой небольшой по размерам ультрарелятивистской области является очень существенным. Для ее рассмотрения вместо переменной  $x$  вводим переменную  $\xi = t - x$ . Тогда первое из уравнений (9) принимает вид

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial (T^{00} - T^{11})}{\partial \xi} = 0, \quad (12)$$

а вычитая (12) из второго уравнения (9), найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} (T^{00} - T^{11}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (T^{00} - 2T^{01} + T^{11}) = 0. \quad (13)$$

В ультрарелятивистском случае обе компоненты  $u^0$ ,  $u^1$  четырехмерной скорости велики по сравнению с единицей и близки друг к другу (напомним, что  $u^0 = 1/\sqrt{1-v^2}$ ,  $u^1 = v/\sqrt{1-v^2}$ , где  $v$  — обычная скорость). Ниже мы будем обозначать посредством  $u$  общее (в первом приближении) значение  $u^0$  и  $u^1$ .

Согласно (11) имеем

$$u^0 \approx u^1 \equiv u \gg 1, \quad u^0 - u^1 \approx \frac{1}{2u}.$$

Используя эти равенства и уравнение состояния (2), получим из (10)

$$\begin{aligned} T^{00} &\approx (\varepsilon + p) u^2 = \frac{4}{3} \varepsilon u^2, \\ T^{00} - T^{01} &= (\varepsilon u^0 - p u^1) (u^0 - u^1) \approx \frac{\varepsilon}{3}, \\ T^{00} - 2T^{01} + T^{11} &= (\varepsilon + p) (u^0 - u^1)^2 \approx \frac{\varepsilon}{3u^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

после чего уравнения (12), (13) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon u^2) &= -\frac{1}{4} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\varepsilon}{u^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Мы будем искать решения этих уравнений в области значений  $t \gg \xi \gg \Delta$ .

Решение, удовлетворяющее всем необходимым условиям, может быть получено следующим образом. Делаем оправдывающееся в дальнейшем предположение, что функция  $u$  ( $\xi$ ,  $t$ ) такова, что

$$u^2 = f \frac{t}{\xi}, \quad (16)$$

где  $f$  — медленно (логарифмически) меняющаяся функция  $t$  и  $\xi$ . Пренебрегая производными от  $f$ , получим тогда из (15)

$$f \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon t) = -\frac{\xi}{4} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi}, \quad ft \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi} (\varepsilon \xi).$$

Далее вводим новые переменные

$$\tau = \ln \frac{t}{\Delta}, \quad \eta = \ln \frac{\xi}{\Delta}, \quad (17)$$

а вместо  $\varepsilon$  — новую неизвестную функцию  $\varphi$  согласно выражению

$$\varepsilon = e^{\varphi}. \quad (18)$$

Из двух получающихся уравнений

$$f\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right) = -\frac{1}{4} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \quad \text{и} \quad f \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = -\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) \quad (19)$$

исключим  $f$  и находим

$$1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \frac{3}{4} \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0. \quad (20)$$

Следуя общим правилам нахождения общего интеграла уравнений в частных производных первого порядка, составляем сначала полный интеграл:

$$\varphi = A\eta - \frac{4(1+A)}{4+3A} \tau + B, \quad (21)$$

содержащий две постоянные  $A$  и  $B$ . Общий интеграл (содержащий одну произвольную функцию) получается из полного, если считать  $B$  функцией от  $A$ , и определяется совокупностью уравнения (21) и уравнения

$$\eta - \frac{4}{(4+3A)^2} \tau + \frac{dB}{dA} = 0, \quad (22)$$

получающегося путем приравнивания нулю производной  $\partial\varphi/\partial A$ .

Поскольку мы ищем решение уравнений движения в области значений  $t \gg \Delta$ ,  $\xi \gg \Delta$ , то «начальному моменту» рассматриваемого движения соответствуют значения  $\tau \sim 1$ ,  $\eta \sim 1$ . В этот «момент» систему можно считать в рассматриваемой области в общем еще однородной, так что функция  $\varphi$  почти постоянна и равна некоторой величине  $\varphi_0$  (логарифму начальной плотности энергии  $\varepsilon_0$ ). Таким образом, начальное условие для нашей задачи, написанное с принятой нами логарифмической точностью, гласит:

$$\varphi - \varphi_0 \sim 1 \quad \text{при} \quad \eta \sim 1, \quad \tau \sim 1. \quad (23)$$

Решение, удовлетворяющее этому условию, получается из (21—22), если произвольная функция  $B(A)$  выбрана так, чтобы было

$$B - \varphi_0 \sim 1, \quad B' \sim 1.$$

Тогда в (22) можно (ввиду того что  $\eta \gg 1$ ,  $\tau \gg 1$ ) опустить  $B'$  вовсе, а в (21) можно положить  $B \approx \varphi_0$ . Из (22) тогда имеем

$$\frac{4+3A}{2} = \sqrt{\frac{\tau}{\eta}}$$

(мы выбираем знак  $+$  перед корнем, так как в противном случае величина  $f$  в (16) оказалась бы отрицательной, что, очевидно, невозможно), после чего (21) дает

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{4}{3}(\eta + \tau - \sqrt{\tau\eta}) \quad (24)$$

и

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp \left[ -\frac{4}{3}(\eta + \tau - \sqrt{\tau\eta}) \right].$$

Когда  $\xi$  становится порядка  $t$ , формула (16) дает, как и следовало,  $u \sim 1$ . Из формулы (24) следует, что в этой области ( $\eta \approx \tau$ )

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-4\tau/3} = \varepsilon_0 \left( \frac{\Delta}{t} \right)^{4/3}.$$

Хотя участок  $\xi \sim t$  и находится вне области ультрарелятивистского движения, но по порядку величины этот результат должен быть правилен.

Функция  $f$  находится по  $\varphi$  при помощи какого-либо из уравнений (19):

$$f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\eta}}.$$

В согласии со сделанными предположениями это есть медленно меняющаяся функция  $t$  и  $\xi$ , порядка единицы.

Рассмотрим при помощи полученных формул, каким образом распределены энергия и энтропия вдоль толщины «диска». Плотность энергии дается компонентой  $T^{30} \sim \varepsilon u^2$  тензора энергии-импульса (напомним, что  $\varepsilon$  — плотность энергии в «собственной» системе отсчета каждого данного элемента вещества, в которой этот элемент покоится). Поэтому для энергии  $dE$ , приходящейся на слой толщины  $d\xi$ , имеем

$$dE \sim \varepsilon a^2 u^2 d\xi = \varepsilon \alpha^2 u^2 \xi d\eta,$$

где  $a$  — радиус диска. Положив здесь согласно (16)  $u^2 \sim t/\xi$  и воспользовавшись формулой (24), получим

$$dE \propto \exp \left[ -\frac{4}{3}(\sqrt{\tau} - 2\sqrt{\eta})^2 \right] d\eta. \quad (25)$$



Отсюда видно, что распределение энергии имеет максимум при  $\eta = \tau/4$ ; это значит, что энергия сконцентрирована в основном в области

$$\xi \sim (t\Delta^3)^{1/4}.$$

При  $t \gg \Delta$  это значение  $\xi \ll t$ , так что эта область находится в пределах применимости рассматриваемого одномерного решения.

Плотность энтропии дается компонентой  $s^0$  четырехмерного вектора плотности потока энтропии  $s^i = su^i$ . Поскольку  $s \propto \varepsilon^{3/4}$  (согласно (4)), то  $s^0 \propto u\varepsilon^{3/4}$ , и для энтропии, приходящейся на слой толщины  $d\xi$ , находим

$$dS \sim sua^2 d\xi \sim a^2 su \xi d\eta$$

или при помощи формулы (24)

$$dS \propto \exp \left[ -\frac{1}{2} (\sqrt{\tau} - \sqrt{\eta})^2 \right] d\eta. \quad (26)$$

Это распределение имеет максимум при  $\eta = \tau$ , т. е. энтропия, в отличие от энергии, сконцентрирована в основном в области  $\xi \sim t$ .

Полученное решение уравнений движения применимо до тех пор, пока угол разлета  $\theta$  (угол, образуемый с осью  $x$  траекторией данного элемента вещества) достаточно мал. Именно необходимо, чтобы расстояние  $t\theta$ , проходимое рассматриваемым элементом в течение времени  $t$  в поперечном направлении, было мало по сравнению с поперечными размерами системы  $a$ :

$$t\theta \ll a. \quad (27)$$

Для того чтобы оценить величину малого угла  $\theta$ , применим не рассматривавшиеся еще поперечные компоненты уравнения (7). Так, имеем

$$\frac{\partial T^{02}}{\partial t} \sim \frac{\partial T^{22}}{\partial y}$$

или, оценивая по порядку величины,

$$\frac{T^{02}}{t} \sim \frac{T^{22}}{a};$$

подставив сюда  $T^{02} \sim \varepsilon u^{2\theta}$  и  $T^{22} \sim \varepsilon$  (поперечная компонента четырехмерной скорости  $u^y \sim u\theta$ ), получим

$$u^{2\theta} \sim \frac{t}{a}.$$

Наконец, заметив, что  $u^2 \sim t/\xi$ , находим окончательно

$$\theta \sim \frac{\xi}{a}. \quad (28)$$

Комбинируя эту формулу с (27), мы видим, что условие применимости одномерного решения гласит:

$$t\xi \ll a^2. \quad (29)$$

Отметим, что временная граница одномерного движения лежит тем дальше, чем меньше  $\xi$ . Для центральной области  $\xi \sim t$  и граница лежит при  $t \sim a$ .

Начиная с момента

$$t_1 = \frac{a^2}{\xi} \quad (30)$$

в гидродинамическом движении становится существенным боковой разлет; возникающее движение вещества можно назвать коническим гидродинамическим разлетом. Как мы увидим ниже, в этой стадии движения скорость настолько быстро приближается к скорости света, что для каждого элемента вещества величина  $\xi$  остается практически постоянной с временем. Кроме того, можно показать, что всеми производными гидродинамических величин как по направлению  $\xi$ , так и по поперечному направлению можно в уравнениях пренебречь. Отсюда, в частности, следует, что ввиду малости боковых сил направление движения будет оставаться неизменным, т. е. разлет будет происходить радиально (конически).

Далее, ввиду малости сил при коническом разлете должен оставаться постоянным поток энергии, переносимый внутри всякого конуса  $\theta = \text{const}$ ; то же справедливо и для потока энтропии. Площадь сечения указанного конуса пропорциональна  $t^2$ , и условия постоянства потоков энергии и энтропии гласят:

$$\varepsilon u^2 t^2 = \text{const}, \quad s u t^2 \propto \varepsilon^{1/2} u t^2 = \text{const}. \quad (31)$$

Из этих двух соотношений находим

$$u \propto t, \quad \varepsilon \propto \frac{1}{t^4}, \quad (32)$$

чем и определяется закон изменения с временем величин  $u$  и  $\varepsilon$  при коническом разлете. Из (32) видно, что действительно в этом случае скорость приближается к скорости света быстрее, чем

в предыдущей стадии. Изменение же координаты  $\xi$  движущегося элемента вещества определяется формулой

$$\frac{d\xi}{dt} = 1 - v_x = (u^0 - u^1) \sqrt{1 - v^2} \approx \frac{1}{2u^2} \approx \frac{1}{t^2},$$

откуда видно, что в этой стадии разлета  $\xi$  действительно быстро приближается к постоянному значению.

При  $t \sim t_1$  решение (32) должно по порядку величины совпадать с рассмотренным выше одномерным решением. При «сшивании» обоих решений удобно ввести обозначения  $\lambda$  и  $L$  согласно равенствам

$$\frac{\xi}{a} = e^{-\lambda}, \quad \frac{\Delta}{a} = e^{-L}. \quad (33)$$

Тогда

$$\eta = \ln \frac{\xi}{\Delta} = L - \lambda, \quad (34)$$

а значение переменной  $\tau$ , соответствующее моменту  $t_1$ , есть

$$\tau_1 = \ln \frac{t_1}{\Delta} = \ln \frac{a^2}{\xi \Delta} = L + \lambda. \quad (35)$$

Подставив эти значения в (26), найдем, что распределение энтропии дается формулой

$$dS \propto e^{\sqrt{L-\lambda^2}} d\lambda.$$

Поскольку же каждый элемент вещества передвигается теперь с  $\xi = \text{const}$ , а его энтропия в силу адиабатичности движения остается постоянной, то этой же формулой определяется энтропия и в момент распада вещества на отдельные, свободно движущиеся частицы. По такому же закону будет, следовательно, распределено и число возникающих частиц:

$$dN = C e^{\sqrt{L-\lambda^2}} d\lambda, \quad (36)$$

где  $C$  — нормировочная постоянная. Угол разлета

$$\theta \sim \frac{\xi}{a} = e^{-\lambda} \quad (37)$$

остается вместе с  $\xi$  постоянным для каждого элемента вещества, а затем и для каждой частицы. Формулы (36) и (37) определяют, следовательно, в параметрическом виде (параметр  $\lambda$ ) угловое распределение возникающих частиц (в системе центра инерции). Входящая в формулу постоянная  $L$  связана простым образом

с энергией сталкивающихся частиц. Действительно, отношение  $\Delta/a$  есть лоренцово сжатие системы и равно в обозначениях § 2

$$\frac{MAc^2}{E'} = \sqrt{\frac{2MAc^2}{E}}$$

(где  $MA$  — масса частиц). Поэтому

$$L = \frac{1}{2} \ln \frac{E}{2MAc^2}. \quad (38)$$

Распределение (36) показывает, что хотя угол разлета в системе центра инерции у наибольшего числа частиц порядка единицы, однако представлены и значительно меньшие углы. Легко видеть, что угловое распределение вовсе не обнаруживает сферической симметрии, как предполагал Ферми, а величина  $dN/d\theta$ , отнесенная на единицу телесного угла, быстро растет с уменьшением  $\theta$ .

Формула (36) может быть легко написана и в явном виде. Чтобы учесть и углы порядка единицы, определим  $\lambda$  как

$$\lambda = -\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (39)$$

При таком определении наименьшее значение  $\lambda = 0$  соответствует наибольшему возможному значению  $\theta = \pi/2$ . Формула (36) при этом переходит в

$$dN \propto \exp \left\{ \sqrt{L^2 - \ln^2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \right\} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}. \quad (40)$$

Эта формула хорошо согласуется с экспериментальными данными [3]. Формула (36) может быть с практически достаточной точностью написана в виде

$$dN \propto e^{-\lambda^2/2L} d\lambda. \quad (41)$$

Таким образом, угловое распределение может быть написано в виде распределения Гаусса, если за переменную выбрать величину  $\lambda = -\ln \operatorname{tg}(\theta/2)$ . Ввиду логарифмической зависимости  $\lambda$  от  $\theta$  фактическая кривая распределения частиц по самому углу  $\theta$  должна иметь сравнительно весьма длинные «хвосты» по обе стороны от максимума.

Отметим, что наибольшее значение величины  $\lambda$ , которое еще имеет смысл рассматривать, должно, очевидно, соответствовать условию

$$\int_{\lambda=\lambda_{\max}}^{\lambda=L} dN \sim 1$$

или, подставляя (36), с логарифмической точностью

$$C e^{\sqrt{L^2 - \lambda^2}_{\max}} \sim 1.$$

Согласно формулам (5) и (38) полное число частиц  $N \sim e^{L/2}$ ; поэтому

$$\int_{\lambda=0}^{\lambda=L} dN \sim C e L \sim e^{L/2}.$$

Отсюда  $C \sim e^{L/2}$ , и для  $\lambda_{\max}$  получим

$$\lambda_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} L. \quad (42)$$

Для определения распределения частиц по энергиям рассмотрим пропорциональную энергии частиц величину  $u$  (энергия частицы есть временная компонента четырехмерного вектора  $\mu^i$ :  $\mu^0 \approx \approx \mu$ ). В стадии одномерного движения  $u \sim \sqrt{t/\xi}$  и к моменту  $t = t_1$  достигает значения  $u \sim \sqrt{t_1/\xi}$ . Поэтому, «сшивая» одномерное решение с решением (32), найдем, что в стадии конечного движения

$$u \sim \sqrt{\frac{t_1}{\xi}} \cdot \frac{t}{t_1} \sim \frac{t}{a}. \quad (43)$$

Аналогичным образом «сшиваем» законы (24) и (32) изменения «собственной» плотности энергии  $\varepsilon$ . При  $t \sim t_1$  величина  $\varepsilon$  достигает значения

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp \left[ -\frac{4}{3} (2L - \sqrt{L^2 - \lambda^2}) \right].$$

Определяя по этому значению коэффициент пропорциональности в законе (32), получим

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left( \frac{t_1}{t} \right)^4 \exp \left\{ -\frac{4}{3} (2L - \sqrt{L^2 - \lambda^2}) \right\}. \quad (44)$$

Началу свободного разлета частиц соответствует момент  $t_K$ , когда  $\varepsilon$ , убывая, достигает значения  $\varepsilon_K$ , соответствующего критерию (1). Из (44) находим

$$t_K \sim t_1 \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_K} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{3} (2L - \sqrt{L^2 - \lambda^2}) \right\}.$$

Положив в (43)  $t \sim t_K$  и подставив  $t_1$  из (35), получим следующее

выражение для энергии  $\mu u'$  частиц в момент начала их свободного разлета:

$$\mu u' \sim \mu \frac{t_k}{a} = \text{const} \cdot \exp \left\{ \lambda + \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \lambda^2} \right\}.$$

Отметим, что энергия вылетающих частиц является, таким образом, мерилом отношения времени (или расстояния до начала координат) в момент распада на частицы к характеристическому времени ( $a/c$ ) системы. Постоянный коэффициент в выражении для  $\mu u'$  определяется из очевидного соотношения

$$\int \mu u' dN = E' \sim \sqrt{EMA} \sim MAeL,$$

и окончательно получается

$$\mu u' \sim M \exp \left\{ -\frac{L}{6} + \lambda + \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \lambda^2} \right\}. \quad (45)$$

Формулы (36) и (45) дают в параметрическом виде закон распределения образующихся частиц по энергиям (в системе центра инерции). Из (45) видно, что большинство частиц ( $\lambda \sim 0$ ) обладает энергией  $\mu u' \sim Me^{L/6} \sim M (E'/AM)^{1/6}$ , лишь незначительно превышающей  $M$ .

Остается произвести переход от системы центра инерции к исходной, лабораторной системе отсчета, в которой один из нуклонов покоился до столкновения. Угол разлета  $\chi$  в лабораторной системе связан с углом  $\theta$  в системе центра инерции формулой преобразования

$$\text{tg } \chi \approx \chi = \frac{v' \sqrt{1 - V^2} \sin \theta}{v' \cos \theta + V},$$

где  $v'$  — скорость частицы в системе центра инерции, а  $V$  — скорость самого центра инерции относительно лабораторной системы. В числителе можно непосредственно положить  $v' = 1$ , а в знаменателе пишем

$$v' \cos \theta + V \approx v' (1 + \cos \theta) + \frac{1}{2} (V^2 - v'^2)$$

или, учитывая, что  $V$  ближе к 1, чем  $v'$ ,

$$v' \cos \theta + V \approx (1 + \cos \theta) + \frac{1}{2} (1 - v'^2) = 1 + \cos \theta + \frac{1}{2u'^2}.$$

Последним членом справа нельзя было бы пренебречь лишь при значениях  $\theta$ , слишком близких к  $\pi$ . Легко, однако, видеть, что

полученные углы удовлетворяют неравенству  $\theta, \pi - \theta \gg 1/u'$ ; это неравенство эквивалентно неравенству

$$\exp \left\{ \frac{L}{6} - \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \lambda^2} \right\} \ll 1$$

(согласно (39) и (45)), которое действительно удовлетворяется при всех  $\lambda < \lambda_{\max}$ . Таким образом, можно положить  $v' \cos \theta + V \approx 1 + \cos \theta$ , и формула преобразования угла к лабораторной системе принимает вид

$$\chi = \sqrt{1 - V^2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (46)$$

Отметим в связи с этим следующее любопытное обстоятельство. Независимо ни от каких конкретных расчетов разлет в системе центра инерции при любом столкновении двух одинаковых частиц симметричен, т. е. углы  $\theta$  будут встречаться так же часто, как углы  $\pi - \theta$ . Поскольку  $\operatorname{tg} \frac{\pi - \theta}{2} = 1/\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ , отсюда автоматически следует, что при усреднении по всем частицам

$$\overline{\ln \chi} = \ln \sqrt{1 - V^2} = -L. \quad (47)$$

Другими словами, среднее геометрическое из всех углов разлета определяет точное значение скорости центра инерции, а следовательно, и скорости налетевшей частицы (при столкновении одинаковых частиц).

Подставляя в формулу (46) значение  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = e^{-\lambda}$  и  $\operatorname{tg} \frac{\pi - \theta}{2} = e^{\lambda}$  для частиц, летящих в системе центра инерции в противоположные стороны, получаем

$$\chi = e^{-L \mp \lambda}.$$

Эта формула отличается той особенностью, что переход от частиц, летевших направо в системе центра инерции, к частицам, летевшим налево, осуществляется в ней простым изменением знака величины  $\lambda$ . Мы можем поэтому написать

$$\chi = e^{-L - \lambda} \quad (48)$$

и рассматривать формулы (36) и (48) как дающие угловое распределение всех частиц в лабораторной системе, причем  $\lambda$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Для преобразования энергии частиц, движущихся направо, имеем, очевидно,

$$u \sim \frac{u'}{\sqrt{1 - V^2}} = e^L u',$$

а для частиц, движущихся налево, получаем (учитывая, что  $\theta \gg 1/u$ )

$$u \sim \frac{\theta^2 u'}{\sqrt{1-v^2}} = u' e^{L-2\lambda}.$$

При подстановке (45) это дает

$$\mu u \sim M \exp \left\{ \frac{5L}{6} \pm \lambda + \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \lambda^2} \right\}.$$

И эта формула обладает тем свойством, что она описывает одновременно частицы, двигавшиеся в системе центра инерции как направо, так и налево, если писать

$$\mu u \sim M \exp \left\{ \frac{5L}{6} + \lambda + \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \lambda^2} \right\} \quad (49)$$

и приписать  $\lambda$  оба знака.

Формулы (36) и (49) дают распределение частиц по энергиям в лабораторной системе. Коэффициенты в этих формулах могут быть несколько уточнены, если воспользоваться очевидными соотношениями

$$\int dN = N, \quad \int \mu u dN = E.$$

При интегрировании можно с рассматриваемой точностью разлагать экспоненту в ряд вблизи максимума. Тогда получаем

$$dN = \frac{N}{\sqrt{2\pi L}} e^{\sqrt{L^2 - \lambda^2}} d\lambda$$

или (учитывая (6) и (38))

$$dN = \frac{KA}{\sqrt{2\pi L}} \exp \left\{ -\frac{L}{2} + \sqrt{L^2 - \lambda^2} \right\} d\lambda. \quad (50)$$

Разумеется, стоящий в этой формуле коэффициент представляет собой в действительности медленную (неэкспоненциальную) функцию отношения  $\lambda/L$ . Для энергии получаем

$$\mu u = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \frac{M}{K} \exp \left\{ \frac{5L}{6} + \lambda + \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \lambda^2} \right\}. \quad (51)$$

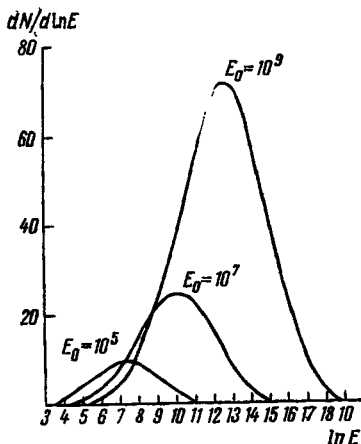
К стоящему здесь коэффициенту относится то же, что говорилось в предыдущем случае. Из формулы (51) видно, что большинство частиц имеют в лабораторной системе энергии порядка

$$Mc^2 \left( \frac{E}{2MAc^2} \right)^{3/2}.$$



Отметим, что распределения частиц как по углам, так и по энергиям оказываются близкими к гауссовому при пользовании в качестве переменных логарифмами этих величин и, следовательно, имеют сравнительно весьма длинные «хвосты» по обе

Дифференциальные энергетические спектры вторичных частиц, образующихся при ядерных взаимодействиях высокой энергии (при различных энергиях первичных частиц  $E_0$ ). Площади под кривыми пропорциональны полному числу вторичных частиц (мезонов и нуклонов)



стороны максимума. Результаты расчета, проведенного по формуле (51), приведены на рисунке.

В заключение я хотел бы выразить благодарность Е. М. Лифшицу, И. Я. Померанчуку и Е. Л. Фейнбергу за обсуждение затронутых здесь вопросов, а также Л. И. Сарычевой за разрешение использовать рисунок со спектрами, вычисленными ею по формуле (51).

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. Fermi. Progr. Theor. Phys., 5, 570, 1950; Phys. Rev., 81, 683, 1951.
- [2] И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 78, 884, 1951.
- [3] D. Lal, Y. Pal, V. Peter, M. S. Swami. Phys. Rev., 87, 545, 1952.

# ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ОБРАЗОВАНИЯ ПАР ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

Совместно с И. Я. ПОМЕРАНЧУКОМ

ДАН СССР, 92, 535, 1953

Теоретический анализ [1] методов получения формул Бете — Гайтлера (Б.— Г.) [2] для тормозного излучения и образования пар приводит к заключению, что они должны быть применимы вплоть до сколь угодно больших энергий.

Этот вывод, однако, относится к радиационным процессам, происходящим на одном изолированном атоме. Если рассматривать радиационные процессы в среде, то можно установить, что при достаточно больших энергиях теория Б.— Г. будет несправедлива.

Для того чтобы самым простым образом выяснить вопрос, рассмотрим сперва испускание квантов, имеющих энергию  $\omega$ , много меньшую, чем энергия электрона  $E$  (везде полагаем  $\hbar = 1, c = 1$ ). В этом случае законно классическое рассмотрение, приводящее к следующему выражению для энергии, излученной в элемент телесного угла  $d\Omega$  и в интервале частот  $d\omega$  [3]:

$$dI_{\Omega\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \omega^2 d\omega d\Omega \left| \int [\mathbf{n} d\mathbf{r}] e^{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t)]} \right|^2, \quad d\mathbf{r} = \mathbf{V}(t) dt, \quad (1)$$

$$\mathbf{k} = n\omega.$$

Формулы Б.— Г. при малых  $\omega$  получаются из (1), если считать, что  $\mathbf{V}$  внезапно меняется при столкновении электрона с одним атомом, т. е.  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1z}$  при  $t < 0$  и  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2$  при  $t > 0$ . Умножая (1) на вероятность заданного рассеяния электрона, можно получить результаты Б.— Г. [4]. При этом мы приходим к интегралам:

$$[\mathbf{nV}_1] \int_{-\infty}^0 dt e^{i(\omega - k_z V_1)t} + [\mathbf{nV}_2] \int_0^{\infty} dt e^{i(\omega - kV_2)t},$$

$$kV_2 = kV_{2z} \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right) + [k\vartheta] V_2 \quad (2)$$

( $\vartheta$  — угол между  $k$  и осью  $z$ ).

При малых  $\vartheta$  (эффективные  $\vartheta \sim m/E$ ,  $m$  — энергия покоя электрона) существенный интервал времени оказывается порядка

$$t_e \sim E^2/m^2\omega. \quad (3)$$

С ростом  $E$  время  $t_e$  очень сильно растет, и вследствие этого играют роль расстояния от электрона до ядра, которые значительно превосходят атомные размеры.

Начиная с  $E = \sqrt{m^2 L \omega}$ , где  $L$  — лавинная единица длины [2], существенны расстояния порядка  $L$ . В этих условиях совершенно очевидно, что результаты Б.—Г. не могут быть правильными, так как электроны, позитроны и кванты существенно поглощаются на этой длине. Однако формулы Б.—Г. нарушаются при значительно меньших энергиях из-за многократного кулоновского рассеяния на расстоянии  $t_e$ . Учитывая это рассеяние, получаем

$$k\mathbf{r}(t) = V(0)k \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right) \int \left(1 - \frac{\vartheta_t^2}{2}\right) dt + k\vartheta \int \theta_t dt, \quad (4)$$

где вектор  $\theta_t$  связан с  $V$  следующим образом:

$$V(t) = V(0) + \theta_t, \quad V(0)\theta_t = 0, \quad (5)$$

и обязан многократному рассеянию. Подставим (4) в (1), полагая для простоты  $\vartheta = 0$ . Из-за многократного рассеяния в показателе (1) появляется член

$$\frac{1}{2} k \int \theta_t^2 dt. \quad (6)$$

Для оценки его влияния заменим  $\theta_t^2$  на  $\overline{\theta_t^2}$ , беря последнее из теории многократного рассеяния [5]. Выражение (6) по порядку величины равно

$$\omega E_s^2 t^2 / E^2 L. \quad (7)$$

Подставляя сюда вместо  $t$  величину (3), получаем

$$E_s^2 E^2 / m^4 \omega L. \quad (8)$$

Когда  $E = E_0(\omega)$ , где

$$E_0(\omega) = \frac{m^2}{E_s} \sqrt{\omega L} = \frac{m^2}{E_s} \sqrt{\frac{m^2 \omega}{4Z^2 n e^3 \ln 191Z^{-1/3}}} \quad (9)$$

( $n$  — число ядер в  $1 \text{ см}^3$ ), в показателе (1) появляется добавочный член порядка единицы и, следовательно, формулы Б.—Г. перестают быть применимы при излучении частоты  $\omega$ .

Если  $\omega \sim E$ , классическое рассмотрение по порядку величины еще справедливо, и из (9) мы находим

$$E_0(E) \equiv E_0 = \frac{m^4 L}{E_s^2} = \frac{m^6}{4E_s^2 Z^2 n e^3 \ln(191Z^{-1/3})}. \quad (10)$$

Так как  $(E_s/m)^2 = 1700$ , то  $E_0 = 1/1700 m^2 L$ . Для свинца это дает энергию, равную  $5 \cdot 10^{12}$  эв; у элементов в конце системы Менделеева  $E_0$  падает до  $2 \cdot 10^{12}$  эв. Когда  $E > E_0$ , излучение почти всех квантов не может следовать Б.—Г. То же относится и к образованию пар. При меньших энергиях радикальные отклонения от Б.—Г. должны быть при малых  $\omega$ , удовлетворяющих неравенству

$$\omega \lesssim E^2/E_0. \quad (11)$$

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. Ф. в. Weizsäcker. Zs. Phys., 88, 612, 1934.
- [2] См., например, С. З. Беленький. Лавинные процессы в космических лучах. М., 1948.
- [3] Л. Ландау, Е. Лифшиц. Теория поля. М., 1948, стр. 200.
- [4] A. Nordieck. Phys. Rev., 52, 59, 1937.
- [5] См., например, Б. Росси, К. Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веществом, 1948, стр. 44.

Совместно с И. Я. ПОМЕРАНЧУКОМ

ДАН СССР, 92, 735, 1953

Как было указано [1], развитая Бете и Гайтлером (Б.— Г.) теория тормозного излучения электронов и позитронов, а также образования электронно-позитронных пар  $\gamma$ -квантами не применима при достаточно больших энергиях частиц из-за многократного рассеяния электронов и позитронов в среде. В [1] был лишь оценен порядок величины энергий, при которых должны наступать заметные отклонения от формул Б.— Г. Сейчас мы рассмотрим радиационные процессы в таких условиях, при которых теория Б.— Г. несправедлива.

Рассмотрим сперва излучение квантов малых частот ( $\omega \ll E$ ). Энергия излучения в элементе телесного угла  $d\Omega$  и в интервале частот  $d\omega$  дается формулой (1) [1].

Для того чтобы получить более точные соотношения, проинтегрируем (1) [1] по всем направлениям кванта  $\mathbf{n}$ . Теряемая в интервале  $d\omega$  энергия  $dI$  равна

$$\begin{aligned}
 dI &= \frac{e^2}{4\pi^2} \omega^2 d\omega \iiint [\mathbf{n} d\mathbf{r}_1] [\mathbf{n} d\mathbf{r}_2] e^{i\omega(t_1-t_2)-i(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\omega} d\mathbf{n} = \\
 &= \frac{e^2}{4\pi^2} \omega^2 d\omega \iiint e^{i\omega(t_1-t_2)} [d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 - (\mathbf{n} d\mathbf{r}_1) (\mathbf{n} d\mathbf{r}_2)] e^{-i(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\omega} d\mathbf{n} = \\
 &= \frac{e^2}{\pi} \omega^2 d\omega \iint [d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + (d\mathbf{r}_1 \nabla_g) (d\mathbf{r}_2 \nabla_g)] \frac{\sin g}{g} e^{i\omega(t_1-t_2)}, \quad (1) \\
 g &= \omega (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).
 \end{aligned}$$

Так как эффективные значения  $g$  велики по сравнению с единицей, то в (1) можно не дифференцировать  $1/g$ :

$$dI = \frac{e^2 \omega d\omega}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \frac{e^{i\omega(t_1-t_2)}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \left[ \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 - \frac{(\mathbf{V}_1, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) (\mathbf{V}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2} \right] \sin g. \quad (2)$$

Здесь

$$r_1 - r_2 = \int_{t_2}^{t_1} V(\tau) d\tau = \int_0^{t_1-t_2} V(t_2 + \tau) d\tau. \quad (3)$$

$V(t_2 + \tau)$  представляем в следующем виде:

$$V(t_2 + \tau) = V_2 \left(1 - \frac{\theta_\tau^2}{2}\right) + \theta_\tau, \quad V_2 \theta_\tau = 0, \quad (4)$$

$\theta_\tau$  — угол многократного рассеяния за время  $\tau$ .

Из (3) и (4) находим

$$r_1 - r_2 = V_2(t_1 - t_2) - \frac{1}{2} V_2 \int_0^{t_1-t_2} \theta_\tau^2 d\tau + \int_0^{t_1-t_2} \theta_\tau d\tau.$$

Пользуясь малостью  $\theta$  и вводя переменные  $T = t_2$ ,  $t_1 - t_2 = t$ , приведем (2) к виду

$$dI = \frac{e^2 \omega d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dT \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{i\omega t} \times$$


---


$$\times \left[ \frac{1}{t^2} \left( \int_0^t \theta_\tau d\tau \right)^2 - \frac{1}{t} \theta_t \int_0^t \theta_\tau d\tau \right] \sin \omega \left[ Vt - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_\tau^2 d\tau + \frac{1}{2t} \left( \int_0^t \theta_\tau d\tau \right)^2 \right]. \quad (5)$$

Черта означает усреднение по всем углам  $\theta_\tau$ . Если пренебречь  $\theta_\tau$  под знаком синуса, то из (5), пользуясь теорией многократного рассеяния [2], получим обычную формулу Б.— Г. в области  $\omega \ll E$ .

Теряемая в единицу времени в интервале  $d\omega$  энергия равна

$$dI = \frac{e^2 \omega d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{i\omega t}. \quad (6)$$

---


$$\cdot \left[ \frac{1}{t^2} \left( \int_0^t \theta_\tau d\tau \right)^2 - \frac{1}{t} \theta_t \int_0^t \theta_\tau d\tau \right] \sin \omega \left[ Vt - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_\tau^2 d\tau + \frac{1}{2t} \left( \int_0^t \theta_\tau d\tau \right)^2 \right].$$

Точное проведение усреднения в (6) затруднительно ввиду того, что усредняемая величина  $\theta_\tau$  входит под знаком синуса. Поэтому для оценки порядка величины мы заменим все члены в

(6) в отдельности на их средние значения согласно [2]:

$$\overline{\int_0^t \theta_\tau^2 d\tau} = \frac{E_s^2 t |t|}{2E^2 L}; \quad \theta_t \overline{\int_0^t \theta_\tau d\tau} = \overline{\int_0^t (\theta_\tau + \varphi, \theta_\tau) d\tau} = \overline{\int_0^t \theta_\tau^2 d\tau} = \frac{E_s^2 t |t|}{2E^2 L}; \quad (7)$$

$$\left( \overline{\int_0^t \theta_\tau d\tau} \right)^2 = 2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau \overline{\theta_\tau \theta_\nu} d\nu = 2 \int_0^t \overline{\theta_\nu^2} (t - \nu) d\nu = \frac{E_s^2 |t|^3}{3E^2 L}.$$

Пользуясь (7), мы имеем

$$dI \approx -\frac{e^2}{3\pi E^2} \frac{\omega d\omega}{L} E_s^2 \int_0^\infty dt \cos \omega t \sin \omega V \left( t - \frac{E_s^2 t^2}{12E^2 L} \right) \approx$$

$$\approx \frac{e^2 \omega d\omega}{6\pi E^2 L} E_s^2 \int_0^\infty dt \sin \left[ (1 - V) \omega t + \frac{E_s^2 t^2 \omega}{12E^2 L} \right] =$$

$$= \frac{4d\omega}{3L} \int_0^\infty dX \sin \left( X + \frac{E^2 X^2}{3E_0 \omega} \right), \quad E_0 = \frac{m^2 L}{E_s^2}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $\omega \ll E^2/E_0$ . Интеграл, входящий в (8), равен  $1/2 \sqrt{\pi/2} \sqrt{3E_0 \omega/E^2}$ ,  $dI$  оказывается порядка

$$dI \approx \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\omega}{L} \sqrt{\frac{\omega E_0}{E^2}}. \quad (9)$$

Отсюда определяется число испущенных в единицу времени квантов в интервале частоты  $d\omega$ :

$$dN = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{E_0}{E^2 L^2}}. \quad (10)$$

Так как условие  $\omega \ll E^2/E_0$  всегда будет удовлетворено для квантов достаточно малой энергии, то из (10) следует, что инфракрасная катастрофа в тормозном излучении никогда не имеет места, так как при  $\omega \rightarrow 0$  спектр из  $d\omega/\omega$  перестраивается в  $d\omega/\sqrt{\omega}$ . Полное число излученных квантов тем самым оказывается конечным.

Переходя к случаю, когда  $\omega \sim E$ , необходимо пользоваться квантовым рассмотрением. Точное проведение его связано с трудными вычислениями. Поэтому мы ограничимся только оценками, справедливыми по порядку величины.

В матричный элемент, определяющий излучение, входит существенным множителем выражение

$$e^{i(p-p'-K, r)}; \quad (11)$$

где  $p$  — импульс электрона до излучения,  $p'$  — после него,  $K$  — импульс кванта. Учитывая малость углов между  $K$ ,  $p$  и  $p'$ , рассмотрим сперва случай, когда они все параллельны. Разность  $p - p' - K$  равна  $m^2 K / 2EE'$ . Поэтому  $r_{эфф}$  порядка

$$\frac{EE'}{m^2 K}; \quad (12)$$

$p$ ,  $p'$  меняются из-за многократного рассеяния. Проекция  $p$ ,  $p'$  на направление  $K$  на расстоянии  $r_{эфф}$  меняются на величину

$$E \frac{E_s^2}{E^2} \frac{r_{эфф}}{L}, \quad E' \frac{E_s^2}{E'^2} \frac{r_{эфф}}{L} \quad \text{соответственно. С учетом этого (11)}$$

приобретает вид

$$\exp\left(i \frac{m^2 r K}{2EE'} + i \frac{r^2 E_s^2 K}{4EE'L}\right), \quad (13)$$

где  $r_{эфф}$  равно

$$r_{эфф} = \sqrt{\frac{LEE'}{E_s^2 K}} = \frac{EE'}{m^2 K} \sqrt{\frac{E_0 K}{EE'}}; \quad (14)$$

если  $E_0 K / EE' \ll 1$ , и равно (12), если  $E_0 K / EE' \gg 1$ . Таким образом, если  $E' < E_0$ ,  $K \approx E$ , то соответствующий акт излучения будет следовать Б.—Г. В противном случае матричный элемент будет меньше, чем у Б.—Г.:

$$M = M_{Б.-Г.} \sqrt{\frac{E_0 K}{EE'}}. \quad (15)$$

Вероятность испускания кванта данного направления приобретает вид

$$W = W_{Б.-Г.} \frac{E_0 K}{EE'}. \quad (16)$$

Однако телесный угол, в пределах которого испускаются кванты, возрастает. Если угол между  $K$  и  $p$  равен  $\vartheta$ , то в (11) появляется множитель  $\exp(iKr\vartheta^2/2)$ . Согласно (14) этот множитель не будет уменьшать излучения вплоть до  $\vartheta^2$  порядка

$$\vartheta^2 \sim \frac{m^2}{EE'} \sqrt{\frac{EE'}{KE_0}} = \vartheta_{Б.-Г.}^2 \sqrt{\frac{EE'}{KE_0}} \quad (17)$$

(выражение для  $\vartheta^2$  Б.—Г. легко получается из (12)),



Поэтому проинтегрированная по всем направлениям кванта вероятность излучения имеет вид

$$A dK = dK A_{Б.-Г.} \sqrt{\frac{E_0 K}{EE'}} \sim \frac{dK}{L} \sqrt{\frac{E_0}{EKE'}}. \quad (18)$$

Дифференциальное число квантов имеет минимум при  $K = E/2$ . Когда  $E - K \sim E_0$ ,  $A$  переходит в выражение Б.—Г.

Полное число излученных квантов в единицу времени конечно и равно

$$\int_0^E A dK = a_e \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_0}{E}}, \quad a_e \sim 1. \quad (19)$$

Энергия  $I$ , излученная в единицу времени,

$$I = \int_0^E KA dK = \frac{b}{L} \sqrt{EE_0} = \frac{E}{L(E)}, \quad b \sim 1. \quad (20)$$

Из (20) мы заключаем, что длина, на которой излучается энергия порядка  $E$ , растет с энергией пропорционально  $\sqrt{E}$ . Потери энергии на единицу длины пропорциональны не  $E$ , как у Б.—Г., а  $\sqrt{E}$ . Проникающая способность электронов и позитронов растет, когда  $E > E_0$ . Вероятность образования пар  $\gamma$ -квантами в соответствии с (18) равна

$$dA_\gamma = \frac{a_\gamma}{L} \sqrt{\frac{E}{E_+ E_- K}} dE_+; \quad a_\gamma \sim 1; \quad E_+, E_- > E_0. \quad (21)$$

Если  $E_-, E_+ \leq E_0$ , то  $dA_\gamma$  переходит в выражение Б.—Г.

Интегрирование (21) дает полную вероятность образования пар  $A_\gamma$  за единицу времени

$$A_\gamma = \frac{\pi a_\gamma}{L} \sqrt{\frac{E_0}{E}}. \quad (22)$$

Пробег квантов также растет пропорционально корню квадратному из энергии квантов.

Согласно (20) и (22), когда  $E/E_0, K/E \sim 300-500$ , пробег «мягкой компоненты» в веществах типа свинца становится равным 10—15 см и сравнивается с пробегом нуклонов большой энергии. При сверхвысоких энергиях мягкая компонента приобретает свойства жесткой компоненты.

Так как инфракрасная катастрофа отсутствует, то должны быть изменены выражения для радиационных поправок к различ-

ным процессам (упругому рассеянию электронов ядрами, комптон-эффекту, рассеянию электронов электронами), для которых важное значение имело существование инфракрасной катастрофы.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Ландау, И. Померанчук. ДАН СССР, 92, 535, 1953 (Собр. трудов, № 73).
- [2] См., например, Б. Росси, К. Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веществом, 1948, стр. 44.

# ИЗЛУЧЕНИЕ $\gamma$ -КВАНТОВ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ БЫСТРЫХ $\pi$ -МЕЗОНОВ С НУКЛОНАМИ

Совместно с И. Я. ПОМЕРАНЧУКОМ

ЖЭТФ, 24, 505, 1953

Для определения тормозного спектра  $\gamma$ -лучей, возникающего при столкновениях  $\pi$ -частиц большой энергии с нуклонами или ядрами, достаточно знания волновой функции  $\pi$ -мезона вне нуклона. Исходя из предположения, что нуклон «черен» по отношению к  $\pi$ -мезонам, находится внешняя  $\psi$ -функция в виде суммы плоской волны и волны, дифрагированной от черного шарика. При помощи этой функции определяются сечения излучения  $\gamma$ -квантов, возникающих при дифракции  $\pi$ -мезонов и при их захвате нуклонами. При больших энергиях  $\pi$ -мезонов дифференциальные сечения в области малых углов достигают очень больших значений. Выясняется влияние на испускание  $\gamma$ -квантов размеров  $\pi$ -мезона. При этом в формулы для излучения вводится формфактор  $\pi$ -мезона. Экспериментальное исследование тормозного  $\gamma$ -спектра  $\pi$ -мезонов могло бы дать возможность определения этого формфактора.

Сильное взаимодействие между  $\pi$ -мезонами больших энергий и нуклонами приводит к большой вероятности таких столкновений между ними, при которых  $\pi$ -частица и нуклон объединяются в сильно возбужденную короткоживущую систему [1], распадающуюся далее на несколько мезонов и, возможно, некоторое число нуклонных пар. Такой ход столкновений  $\pi$ -мезонов с нуклонами не может быть описан методами теории возмущений, поскольку он отвечает случаю очень сильного взаимодействия. В этих условиях нуклоны (или пары) представляют собой по отношению к  $\pi$ -мезону черное тело, радиус которого  $R$  определяет сечение  $\pi R^2$ . Волновая функция  $\psi$   $\pi$ -мезона вне  $R$ , очевидно, будет представлять собой суперпозицию плоской волны и волны, дифрагированной от «черного» нуклона. Оказывается, что в релятивистских условиях знание  $\psi$  во внешней области достаточно для точного вычисления тормозного излучения  $\gamma$ -квантов почти лю-

бой энергии, если эти кванты летят в направлении, мало отличающемся от направления падающей  $\pi$ -частицы. Положение здесь напоминает то, которое встречается при тормозном излучении электронов на кулоновых силах, когда в крайних релятивистских условиях излучение осуществляется на больших расстояниях от ядра. Физическая причина таких явлений одна и та же и заключается в том, что законы сохранения при излучении требуют все меньших передач импульса от излучающей частицы постороннему телу.

Излагаемая ниже теория может быть применена не только к «черному» нуклону (или ядру), но и к «серому», лишь частично поглощающему мезоны. Мы сначала рассмотрим первый случай, как более простой.

Волновое уравнение для частицы со спином 0 ( $\pi$ -мезон [2]) вне нуклона (ядра) с требуемой точностью имеет вид ( $\hbar = c = 1$ )

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \mu^2\right)\psi = \frac{2e}{i} \mathbf{A} \nabla \psi,$$

$$\mathbf{A} = \sum_{ij} \mathbf{j} \sqrt{\frac{2\pi}{j\Omega}} (a_{ij} e^{i(\mathbf{r}\mathbf{r}' - \omega t)} + a_{ij}^* e^{-i(\mathbf{r}\mathbf{r}' - \omega t)}). \quad (1)$$

Применяем к (1) теорию возмущений, считая правую часть малой и заменяя там  $\psi$  на  $\psi_0$ , равную сумме начальной плоской и расходящейся дифрагированной волн:

$$\psi_0 = \Phi_0(\mathbf{r}) e^{-iEt}.$$

Ищем решение в виде ряда

$$\psi = \psi_0 + \sum_{\mathbf{p}'} \Phi_{\mathbf{p}'} e^{-iE't},$$

где

$$(-E'^2 - \Delta + \mu^2) \Phi_{\mathbf{p}'} = \frac{2e}{i} \sqrt{\frac{2\pi}{j\Omega}} \Sigma \mathbf{j} \nabla \Phi_0 e^{-i\mathbf{r}\mathbf{r}'} a_{ij}^* \quad (2)$$

(сумма берется по направлениям  $\mathbf{f}$ ).

Компонента  $\Phi$ , отвечающая испусканию заданного кванта, равна

$$\Phi_{\mathbf{p}'} = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{2e}{i} \sqrt{\frac{2\pi}{j\Omega}} (\mathbf{j} \nabla \Phi_0) e^{-i\mathbf{r}\mathbf{r}'} d\tau', \quad (3)$$

где  $G$  — функция Грина уравнения (2),

$$p'^2 = (E - f)^2 - \mu^2. \quad (4)$$

Испускание  $\gamma$ -квантов может происходить либо при поглощении  $\pi$ -мезона с последующим вылетом многих частиц, либо при дифракционном рассеянии  $\pi$ -мезонов. Начнем рассмотрение со второго случая, при котором в конце процесса имеется  $\gamma$ -квант и рассеянный  $\pi$ -мезон, а нуклон (ядро) получает небольшую отдачу.

Функция  $G$ , входящая в (3), должна учитывать дифракцию около нуклона, поэтому она равна [3]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{p'}{2\pi i} \int \frac{e^{ip'|\mathbf{r}'-\mathbf{s}|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{s}|} \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{s}|} d\mathbf{s}. \quad (5)$$

Интегрирование по  $\mathbf{s}$  может производиться, например, по той части плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и проходящей через нуклон, которая находится «вне» нуклона (рис. 1). Дополняя область интегрирования по  $\mathbf{s}$  внутренностью нуклона, получаем

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + G_1, \quad (6)$$

где  $G_1$  имеет вид (5) с тем отличием, что область интегрирования лежит внутри нуклона.

Подставляем первый член (6) в (3):

$$\frac{e}{\sqrt{2\pi}\Omega i} \int \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (\mathbf{j}\nabla\Phi_0) e^{-i\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}'. \quad (7)$$

Для нахождения дифракционного излучения необходимо определить поток дифрагированных частиц, сопровождаемых  $\gamma$ -квантами. Для этого нужно найти  $\Phi$  при  $r \rightarrow \infty$ . Тогда (7) упрощается:

$$\begin{aligned} \frac{e e^{ip'r}}{\sqrt{2\pi}\Omega i r} \int e^{-ip'r'} (\mathbf{j}\nabla) \Phi_0 e^{-i\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' &= \\ &= \frac{(ip') e e^{ip'r}}{\sqrt{2\pi}\Omega r} \int \Phi_0 e^{-i(\mathbf{1}+p')\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}', \quad \mathbf{p}' = p' \frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned} \quad (8)$$

Вместо  $\Phi_0$  подставляем [3]

$$\Phi_0 = e^{ipr} - \frac{p}{2\pi i} \int \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{q}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} d\mathbf{q}, \quad (9)$$

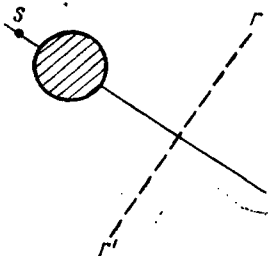


Рис. 1.

Второй член представляет дифракцию в исходном состоянии  $\pi$ -мезона (расходящаяся волна). Вектор  $\rho$ , перпендикулярный  $\mathbf{p}$ , лежит в плоскости, проходящей через нуклон, и удовлетворяет условию  $\rho^2 \ll R^2$ . Первый член в (9) дает нуль в силу законов сохранения. Вместо (8) имеем

$$\begin{aligned} & - \frac{e e^{i \mathbf{p}' \mathbf{r}}}{\sqrt{2\pi} f \Omega r} (\mathbf{j} \mathbf{p}') \frac{p}{2\pi i} \iint \frac{e^{i \mathbf{p}' |\mathbf{r}' - \mathbf{e}|}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{e}|} d\rho e^{-i(\mathbf{f} + \mathbf{p}', \mathbf{r})} d\tau' \approx \\ & \approx \frac{e e^{i \mathbf{p}' \mathbf{r}} (\mathbf{j} \mathbf{p}')}{\sqrt{2\pi} f \Omega r} \frac{1}{p - |\mathbf{p}' + \mathbf{f}|} \int e^{-i(\mathbf{f} + \mathbf{p}', \mathbf{e})} d\rho = \\ & = e \sqrt{\frac{2\pi}{f \Omega}} \frac{e^{i \mathbf{p}' \mathbf{r}}}{r} \frac{(\mathbf{j} \mathbf{p}')}{p - |\mathbf{p}' + \mathbf{f}|} R \frac{J_1(|\mathbf{f} + \mathbf{p}' \theta'| R)}{|\mathbf{f} + \mathbf{p}' \theta'|}. \quad (10) \end{aligned}$$

При вычислении (10) использовано условие малости углов  $\theta$  между  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{p}$  и  $\theta'$  между  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}$ .  $\theta$  и  $\theta'$  — двумерные векторы:

$$\mathbf{p}' = \frac{(\mathbf{p}' \mathbf{p})}{p^2} \mathbf{p} + \mathbf{p}' \theta'; \quad \mathbf{f} = \frac{(\mathbf{f} \mathbf{p})}{p^2} \mathbf{p} + \mathbf{f} \theta. \quad (11)$$

Перейдем теперь к вычислению члена, содержащего  $G_1$ :

$$2e \sqrt{\frac{2\pi}{f \Omega}} \frac{1}{i} \int G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\mathbf{j} \nabla \Phi_0) e^{-i \mathbf{f} \mathbf{r}'} d\tau'.$$

Рассматриваемое как функция  $\mathbf{r}'$ ,  $G_1$  отлично от нуля только в области геометрической тени по отношению к направлению  $\mathbf{r}$ , т. е.

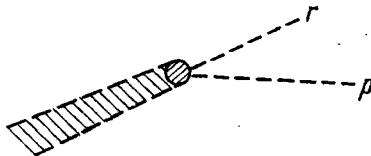


Рис. 2.

заштрихованной области рис. 2. Поскольку нас интересуют точки  $\mathbf{r}'$ , лежащие в пределах узкого дифракционного конуса, эти  $\mathbf{r}'$  лежат там, где падающая волна еще не дошла до ядра и потому еще не искажена дифракцией. Поэтому здесь  $\Phi_0$  совпадает с плоской волной  $e^{i \mathbf{p}' \mathbf{r}'}$ . Пользуясь (6) и (5), имеем при  $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & 2e \sqrt{\frac{2\pi}{f \Omega}} (\mathbf{j} \mathbf{p}) \int G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{f}, \mathbf{r}')} d\tau' = \\ & = - \frac{e}{\sqrt{8\pi^3 f \Omega}} \frac{(\mathbf{j} \mathbf{p})}{r} e^{i \mathbf{p}' \mathbf{r}} p' \iint \frac{e^{i \mathbf{p}' |\mathbf{r}' - \mathbf{s}'| + i(\mathbf{p} - \mathbf{f}, \mathbf{r}')}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{s}'|} ds' d\tau' = \\ & = e \frac{1}{\sqrt{2\pi} f \Omega} \frac{e^{i \mathbf{p}' \mathbf{r}}}{r} \frac{\mathbf{j} \mathbf{p}}{p' - |\mathbf{p} - \mathbf{f}|} \int e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{f}, \mathbf{s}')} ds'. \quad (12) \end{aligned}$$

Вектор  $s'$  перпендикулярен  $p'$  и по величине меньше или равен  $R'$ , где  $R'^2$  — сечение взаимодействия дифрагированной  $\pi$ -частицы с нуклоном ( $R'$  может и не совпадать с  $R$ ).

В (12) входит фурье-компонента дифрагированной волны в конечном состоянии:

$$e^{\frac{ip'r}{r}} e^{ip'r} \sqrt{\frac{2\pi}{j\Omega}} \frac{1}{p' - |p-f|} R' \frac{J_1(|p\theta' - f(\theta' - \theta)|R')}{|p\theta' - f(\theta' - \theta)|}. \quad (13)$$

Складывая (10) и (13), находим  $\Phi_p$  ( $r \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} \frac{e^{ip'r}}{r} e \sqrt{\frac{2\pi}{j\Omega}} \left\{ \frac{RJ_1(|p'\theta' + f\theta|R)}{|p'\theta' + f\theta|} \frac{jp'}{p - |p' + f|} + \right. \\ \left. + \frac{RJ_1(|p\theta' - f(\theta' - \theta)|R)}{|p\theta' - f(\theta' - \theta)|} \frac{jp}{p' - |p-f|} \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Поток дифрагированных частиц на единицу телесного угла равен

$$e^2 \frac{2\pi}{j\Omega} |\{ \} |^2 2p'$$

(здесь множитель  $2p'$  появляется при вычислении потока частиц спина 0). Деля его на плотность потока падающих частиц  $2p$  и умножая на число состояний кванта, получаем дифференциальное сечение испускания кванта частоты  $f$ , сопровождаемого  $\pi$ -частицей:

$$\begin{aligned} \sigma_0^d(j) df d\theta d\theta' = \frac{E'}{E} \frac{e^2}{4\pi^2} f \left| \frac{RJ_1(|p'\theta' + f\theta|R)}{|p'\theta' + f\theta|} \frac{jp'}{p - |p' + f|} + \right. \\ \left. + \frac{RJ_1(|p\theta' - f(\theta' - \theta)|R)}{|p\theta' - f(\theta' - \theta)|} \frac{jp}{p' - |p-f|} \right|^2 df d\theta d\theta'. \quad (15) \end{aligned}$$

Отметим, что (15) может быть также получено при рассмотрении радиационных переходов из начального состояния, взятого в виде плоской и расходящейся дифрагированной волны, в конечное состояние, описываемое плоской и сходящейся [4] дифрагированной волнами (впереди у которой тень).

При вычислении (10) и (13) главную роль играли расстояния от нуклона порядка

$$r_{\text{эфф}} \sim \frac{1}{p - |p' + f|} = \frac{1}{p - p' - f + (p'f\theta^2/2p)},$$

$$\vartheta = \theta - \theta'.$$

Воспользуемся законом сохранения энергии для преобразования  $p - p' - f$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{E^2 - \mu^2} - \sqrt{(E-f)^2 - \mu^2} - f &= E - \frac{\mu^2}{2E} - (E-f) + \\ &+ \frac{\mu^2}{2(E-f)} - f = \frac{\mu^2 f}{2(E-f)E} \approx \frac{\mu^2 f}{2p'p}, \quad (16) \\ r_{\text{эфф}} &\sim \frac{2p'p}{f(\mu^2 + p'^2 \theta^2)}. \end{aligned}$$

Из (16) следует, что при  $E \gg \mu$  и  $\theta \ll \mu/E$  имеем  $r_{\text{эфф}} \gg E/\mu^2 \gg R$ , что оправдывает пренебрежение областью внутри «нуклона». Заметим, что нуклон «черен» только при  $E \gg \mu$ .

Выражение для вероятности излучения (15) было получено на основании волнового уравнения (1), в котором взаимодействие  $\pi$ -частицы с электромагнитным полем рассматривается так, как если бы  $\pi$ -частица была точечной. Между тем сильное взаимодействие  $\pi$ -частицы с нуклонным фоном должно приводить к «размазыванию» заряда  $\pi$ -частицы по некоторой области, имеющей размеры порядка или меньше, чем  $1/\mu$ . При выполнении условия (16) все излучение осуществляется на большом расстоянии от ядра. Поэтому влияние электрических размеров  $\pi$ -частицы на испускание квантов должно в некоторых условиях привести к появлению в (1) и во всех последующих формулах «формфактора»  $\pi$ -частицы  $F$ . Он является функцией от инвариантной частоты кванта в системе покоя  $\pi$ -частицы:

$$F = F\left(\frac{E' - pf}{\mu^2}\right). \quad (17)$$

Если  $E \gg \mu$ ,  $\theta \ll 1$ , то

$$F = F\left(\frac{f}{2E} + \frac{E\theta^2}{2\mu^2}\right). \quad (18)$$

Когда аргумент  $F$  мал, то  $F = 1$ . При больших значениях аргумента  $F \rightarrow 0$ . При введении  $F$  следует подчеркнуть следующие три обстоятельства.

1) Излучение не зависит от деталей, характеризующих столкновение  $\pi$ -мезона с ядром. Существенно только знание  $\psi$ -функции на большом расстоянии от ядра; поэтому ядро не может оказать серьезного влияния на свойства нуклонного вакуума, окружающего  $\pi$ -частицу, и, следовательно, в излучении проявляется структура невозмущенной  $\pi$ -частицы.

2) В случае дифракционного излучения необходимо, чтобы инвариантные частоты кванта в системах покоя падающего



и дифрагированного мезонов мало отличались друг от друга. Это приводит к условию

$$\frac{Ef - pf}{\mu^2} - \frac{E'f - p'f}{\mu^2} = \frac{f^2 - (p - p', f)}{\mu^2} \ll 1.$$

При малых углах  $\theta$  и  $\theta'$  имеем

$$\left| \frac{\theta^2 E - (\theta - \theta')^2 E' - (\mu^2 f / EE')}{2\mu^2} f \right| \ll 1. \quad (19)$$

3) Даже при выполнении (19), по-видимому, необходимо, чтобы в процессе дифракции  $\pi$ -мезоны не испытывали очень больших ускорений; в противном случае эти ускорения могут повлиять на «форму» частицы. Математически это означает зависимость  $F$  от инварианта  $EE' - pp' - \mu^2$ , при малых значениях которого  $F$  является функцией только от инвариантной частоты. Введение формфактора, относящегося к  $\pi$ -частице, испытывающей небольшие ускорения, налагает условие

$$\frac{f^2}{2EE'} + \frac{EE'\theta^2}{2\mu^2} \ll 1. \quad (20)$$

Отсюда и из (19) следует

$$f \ll E, \quad \theta' < \frac{\mu}{2E}, \quad \theta \ll \frac{\mu^2}{E\theta'}. \quad (20a)$$

При этом формфактор оказывается зависящим от  $f\theta^2$ :

$$F = F\left(\frac{Ef\theta^2}{2\mu^2}\right). \quad (20b)$$

Когда (19) удовлетворено, но (20) не имеет места, то входит более сложный формфактор (по отношению к процессу излучения, при котором  $\pi$ -частица испытывает заданное ускорение). Если (19) не выполнено, то простое понятие формфактора теряет смысл. Вместо него в формулы для интенсивности излучения войдет более сложная величина, связанная с двумя инвариантными частотами кванта и учитывающая влияние ускорения, т. е. содержащая инвариант (20).

Таким образом, при выполнении условий (19), (20) вместо (15) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_0^d(\mathbf{j}) df d\theta d\theta' = & \frac{E'}{E} \frac{e^2}{4\pi^2} f \left| F\left(\frac{E\theta^2}{2\mu^2} f\right) \right|^2 \left| \frac{R J_1(|p'\theta' + f\theta| R)}{|p'\theta' + f\theta|} \frac{jp'}{p - |p' + f|} + \right. \\ & \left. + \frac{R J_1(|p\theta' - f(\theta' - \theta)| R)}{|p\theta' - f(\theta' - \theta)|} \frac{jp}{p' - |p - f|} \right|^2 df d\theta d\theta'. \quad (21) \end{aligned}$$

Так как  $p - f \approx p'$ , то аргумент бesselевой функции, входящей во второй член (21), равен  $|p'\theta' + f\theta| R'$  и при  $R' = R$  сов-

падает с аргументом бесселевой функции, входящей в первый член. Поэтому если  $R = R'$ , то имеет место более простое выражение:

$$\sigma_0^d(j) = \frac{E'}{E} \frac{e^2}{4\pi^2} f \frac{R^2 J_1^2(|p'\theta' + f\theta|R)}{|p'\theta' + f\theta|^2} \left| \frac{jp'}{p - |p' + f|} + \frac{jp}{p' - |p - f|} \right|^2 |F|^2. \quad (22)$$

Наиболее важную роль играют малые  $\theta$  и  $\theta'$ , при которых (22) существенно упрощается:

$$\sigma_0^d(j) = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{E'}{E} \frac{1}{f} R^2 \frac{J_1^2(|E'\theta' + f\theta|R)}{|E'\theta' + f\theta|^2} \times \\ \times \left| \frac{jp'}{\mu^2/E'^2 + (\theta - \theta')^2} \frac{E}{E'} - \frac{jp}{\mu^2/E^2 + \theta^2} \frac{E'}{E} \right|^2 |F|^2. \quad (23)$$

Здесь также использовано условие  $E, E' \gg \mu$ . Если же  $R \neq R'$ , то при малых  $\theta$  и  $\theta'$  (21) дает

$$\sigma_0^d(j) = \frac{E'}{E} \frac{e^2}{\pi^2} \frac{|F|^2}{f} \left| \frac{jp'}{\mu^2/E'^2 + (\theta - \theta')^2} \frac{E}{E'} R \frac{J_1(|E'\theta' + f\theta|R)}{|E'\theta' + f\theta|} - \right. \\ \left. - \frac{jp}{\mu^2/E^2 + \theta^2} \frac{E'}{E} R' \frac{J_1(|E'\theta' + f\theta|R)}{|E'\theta' + f\theta|} \right|^2. \quad (24)$$

Суммируя (23) по поляризациям, получаем

$$\sigma_0^d = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{1}{f} \frac{E'}{E} R^2 \frac{J_1^2(|E'\theta' + f\theta|R)}{|E'\theta' + f\theta|^2} \times \\ \times \left\{ \frac{|\theta\theta'|^2}{\mu^2/E'^2 + (\theta - \theta')^2} \frac{E^2}{\theta^2} + \left| \frac{E(\theta, \theta' - \theta)}{\mu^2/E'^2 + (\theta - \theta')^2} \frac{1}{\theta} + \frac{E'\theta}{\mu^2/E^2 + \theta^2} \right|^2 \right\} |F|^2. \quad (25)$$

Первый член в (25) обязан поляризации  $j_1 = [pf]/E/f\theta$ , второй  $j_2 = [fj_1]/f$ . Формулу (25) можно переписать также следующим образом:

$$\sigma_0^d = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{E'}{E} \frac{1}{f} |F|^2 R^2 \frac{J_1^2(|E'\theta' + f\theta|R)}{|E'\theta' + f\theta|^2} \times \\ \times \left\{ \frac{E'^2\theta^2}{(\mu^2/E'^2 + \theta^2)^2} + \frac{E^2(\theta - \theta')^2}{[\mu^2/E'^2 + (\theta - \theta')^2]^2} - 2 \frac{EE'(\theta, \theta - \theta')}{(\mu^2/E^2 + \theta^2)[\mu^2/E'^2 + (\theta - \theta')^2]} \right\}. \quad (26)$$

Для получения спектрального состава излучения необходимо проинтегрировать (26) по всем  $\theta$  и  $\theta'$ . В общем виде это приводит к сложным выражениям.

Рассмотрим сначала столкновение  $\pi$ -частицы с тяжелыми ядрами, когда можно считать  $R$  большим по сравнению с  $1/\mu$ , что приводит к существенным упрощениям. Если  $\theta$  и  $\theta'$  малы по сравнению с  $\mu/E$ ,  $\mu/E'$ , то фигурная скобка в (26) равна

$$\{ \} = \frac{E'^2 E^2}{\mu^4} |f\theta + E'\theta'|^2. \quad (27)$$

Таким образом, при  $\theta \ll \mu/E$ ,  $|\theta - \theta'| \ll \mu/E'$ ,  $\sigma_0^d$  равно

$$\sigma_0^d = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{E'}{E} \frac{R^2}{f} J_1^2(|E'\theta' + f\theta|R) \frac{E'^2 E^2}{\mu^4} |F|^2. \quad (28)$$

Если  $R \gg 1/\mu$ , то сравнение (26) и (28) показывает, что в интеграле по  $\theta$  и  $\theta'$  главную роль играют такие  $\theta$  и  $\theta'$ , при которых  $J_1^2$  можно заменить его средним значением:

$$J_1^2(|E'\theta' + f\theta|R) \approx \frac{1}{\pi} \frac{1}{|E'\theta' + f\theta|R}.$$

Это среднее значение получается при замене быстро осциллирующего множителя  $\cos^2(|E'\theta' + f\theta|R - 3\pi/4)$  на  $1/2$ . При этом

$$\begin{aligned} \sigma_0^d &= \frac{e^2}{\pi^2} \frac{E'}{E} \frac{R}{f} \frac{|F|^2}{|E'\theta' + f\theta|^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{E'^2 \theta^2}{(\mu^2/E^2 + \theta^2)^2} - 2 \frac{EE'(\theta, \theta - \theta')}{(\mu^2/E^2 + \theta^2)[\mu^2/E'^2 + (\theta - \theta')^2]} + \frac{E^2(\theta - \theta')^2}{[\mu^2/E'^2 + (\theta - \theta')^2]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Вводим вместо  $\theta$  и  $\theta'$  переменные  $s$  и  $\eta$ :

$$\theta = \frac{\mu}{E} s = \frac{1}{\gamma} s; \quad \theta' - \theta = \frac{\mu}{E'} \eta = \frac{1}{\gamma'} \eta, \quad (30)$$

при помощи которых (29) приобретает следующий вид:

$$\sigma_0^d d\theta d\theta' = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{R}{\mu} \frac{1}{f} \frac{1}{(s + \eta)^2} \left( \frac{s}{1 + s^2} + \eta \frac{1}{1 + \eta^2} \right)^2 |F \left( \frac{f}{2E} [s^2 + 1] \right)|^2 ds d\eta. \quad (31)$$

При интегрировании по  $s$  и  $\eta$  основную роль играют  $s$  и  $\eta \sim 1$ . При этом  $|E'\theta' + f\theta|R \sim \mu R \gg 1$ , что и оправдывает использование асимптотического разложения  $J_1$ . Кроме того, согласно (30) и (16) все излучение определяется областью вне ядра. Производя интегрирование по  $s$  и  $\eta$ , определяем сечение испускания

квантов данной частоты в том случае, когда  $F$  можно положить равным единице:

$$\sigma^d(f) = \frac{4e^2}{\pi} \frac{E'}{E} \frac{1}{f} \frac{R}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \left[ \operatorname{cth} 2\alpha - \frac{2\alpha}{\operatorname{sh}^2 2\alpha} \right] \approx 2,3 e^2 \frac{E'}{E} \frac{1}{f} \frac{R}{\mu}. \quad (32)$$

Таким образом, эффективное сечение испускания жестких  $\gamma$ -лучей, вызванных дифракцией  $\pi$ -частиц, пропорционально радиусу ядра  $R$ , т. е. медленно растет с увеличением атомного номера ( $\sim A^{1/2}$ ). Согласно (32) испускаемый спектр имеет простую зависимость от частоты. Угловое распределение квантов дается формулой (29).

Определим еще полную энергию, излученную при столкновении, полагая  $F = 1$ . По порядку величины она равна

$$\int \sigma^d f df = 2,3 e^2 \frac{R}{\mu} \int_0^E \frac{E'}{E} df = 1,15 e^2 \frac{R}{\mu} E. \quad (33)$$

Полное сечение испускания квантов с частотой, большей  $f$ , равно ( $F = 1$ ):

$$\int_f^E \sigma^d(f) df = 2,3 e^2 \frac{R}{\mu} \left( \ln \frac{E}{ef} + \frac{1}{E} \right) \quad (\mu R \gg 1). \quad (34)$$

Если  $A \sim 1$ , то  $R \leq 1/\mu$  и в общем случае интегрирование (26) по углам затруднительно.

В переменных  $s$  и  $\eta$  (26) имеет вид

$$\sigma_0^d d\theta d\theta' = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{E'}{E} \frac{R^2}{f} \frac{1}{|s + \eta|^2} J_1^2(\mu R |s + \eta|) \times \\ \times \left( \frac{s}{1 + s^2} + \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 \left| F \left( \frac{f}{2E} s^2 \right) \right|^2 ds d\eta. \quad (35)$$

Когда  $f\theta R \ll 1$ , то (26) упрощается:

$$\sigma_0^d = \frac{e^2}{\pi^2 f} \frac{E'}{E} \frac{R^2 J_1^2(E'\theta'R)}{\theta^2} \times \\ \times \left\{ \frac{\theta}{(1/\gamma^2 + \theta^2)^2} - 2 \frac{(\theta, \theta - \theta') E}{(1/\gamma^2 + \theta^2) [1/\gamma^2 + (\theta - \theta')^2] E'} + \frac{(\theta - \theta')^2 E^2}{E^2 [1/\gamma^2 + (\theta - \theta')^2]^2} \right\}. \quad (36)$$

Это выражение при малых  $f$  ( $f \ll E$ ) совпадает с классическим излучением, возникающим при «внезапном» изменении импульса  $\pi$ -частицы вследствие дифракции. В таких условиях соб-

людается общая связь между сечениями упругих и неупругих столкновений [5]. Интегрируя (36) по всем направлениям фотона  $\theta$  и полагая  $F = 1$ , находим полное сечение испускания квантов частоты  $f$  любых направлений при заданном угле дифракции  $\theta'$ , когда  $f \ll E$ :

$$\int \sigma_0^i d\theta = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{f} \frac{R^2 J_1^2(ER\theta')}{\theta'^2} \times \left[ \frac{1 + (\gamma^2 \theta'^2/2)}{(\gamma \theta'/2) \sqrt{1 + (\gamma^2 \theta'^2/4)}} \ln \left( \frac{\gamma \theta'}{2} + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 \theta'^2}{4}} \right) - 1 \right]. \quad (37)$$

Интегрируя (36) по всем углам дифракции при заданном направлении кванта  $\theta$ , определяем сечение испускания квантов частоты  $f$ , сопровождающихся произвольно дифрагированными  $\pi$ -частицами:

$$\int \sigma_0^i d\theta' = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{f} R^2 \gamma^2 \int_0^\infty \frac{J_1^2(\mu R b)}{b} db \times \left\{ \frac{2 + b^2}{1 + s^2} \frac{1}{\sqrt{(1 + s^2 + b^2)^2 - 4s^2 b^2}} - \frac{1 + s^2 + b^2}{[(1 + s^2 + b^2)^2 - 4s^2 b^2]^{3/2}} - \frac{1}{(1 + s^2)^2} \right\}, \quad (38)$$

$$s = (E/\mu) \theta.$$

Производим интегрирование (37) по всем углам дифракции  $\theta'$  и получаем полное сечение испускания фотонов частоты  $f$  ( $f \ll E$ ):

$$\sigma^d(f) = \frac{4}{f} e^2 R^2 \int_0^\infty \frac{J_1^2(2\mu R b)}{b} db \left[ \frac{1 + 2b^2}{b \sqrt{1 + b^2}} \ln(b + \sqrt{1 + b^2}) - 1 \right]. \quad (39)$$

Основную роль здесь играют  $b \sim 1$ , т. е. углы дифракции порядка  $1/\gamma$ . Если  $2\mu R \gg 1$ , то из (39) следует (32).

Когда  $f \sim E$ , то формула (35) ( $F = 1$ ) при интегрировании по углам  $\theta$  и  $\theta'$  дает следующее выражение для полного сечения испускания кванта частоты  $f$ :

$$\sigma^d(f) = 4 \frac{E'}{E} \frac{R^2 e^2}{f} \int_0^\infty \frac{J_1^2(2\mu R q)}{q^2} dq \left[ \frac{2q^2 + 1}{q \sqrt{q^2 + 1}} \ln(1 + \sqrt{q^2 + 1}) - 1 \right] \equiv \equiv 4 \frac{E'}{E} \frac{e^2}{f} R^2 \mathfrak{N}(\mu R). \quad (40)$$

Полная потеря энергии, связанная с дифракционным излучением, согласно (40) равна

$$\int f \sigma^d(f) df = 2ER^2 e^{2\Re} \Re(\mu R). \quad (41)$$

Интегральное сечение испускания квантов с частотой, большей  $f$ , равно

$$\int_f^E \sigma^d df = 4e^2 R^2 \left( \ln \frac{E}{ef} + \frac{f}{E} \right) \Re(\mu R). \quad (42)$$

Если  $\mu R \gg 1$ , то выражения (40), (41) и (42) переходят в (32), (33) и (34).

Обратимся теперь к излучению, сопровождающему захват  $\pi$ -частицы нуклоном (ядром), — его можно назвать излучением остановки. Для определения вероятности этого процесса необходимо найти поток  $\pi$ -частиц на нуклон, когда на бесконечности

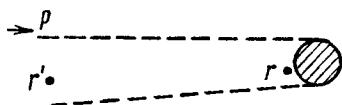


Рис. 3.

имеется квант. Это требует знания  $\Phi_{p'}$  при  $r = R$ . Но волны на поверхность нуклона приходят из области, лежащей перед нуклоном (рис. 3), где  $G$  и  $\Phi_0$  равны

$$G = \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad \Phi_0 = e^{ipr}. \quad (43)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi_{p'}(r \rightarrow R) &= \frac{F}{\sqrt{2\pi/\Omega}} e^{i(\mathbf{j}\mathbf{p})} \int \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{f}, \mathbf{r}')} d\tau' \approx \\ &\approx -\frac{\sqrt{2\pi} Fe^{i(\mathbf{j}\mathbf{p})}}{\sqrt{|\Omega} p'} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{f}, \mathbf{R})} \frac{1}{p' - |\mathbf{p}-\mathbf{f}|}. \end{aligned} \quad (44)$$

Отсюда находим поток частиц

$$\frac{4\pi}{f\Omega} e^2 \frac{(\mathbf{j}\mathbf{p})^2}{p'^2} \frac{\pi R^2}{(p' - |\mathbf{p}-\mathbf{f}|)^2} p' |F|^2.$$

Деля его на поток падающих частиц  $2p$  и суммируя по  $\mathbf{f}$ , находим дифференциальное сечение при заданной поляризации  $\mathbf{j}$ :

$$\sigma_{\text{ос}}(\mathbf{j}) df d\theta = \frac{e^2}{4\pi} R^2 \frac{(\mathbf{j}\mathbf{p})^2 |F|^2}{(p' - |\mathbf{p}-\mathbf{f}|)^2 p p'} f df d\theta. \quad (45)$$

Так как  $\theta$  мало, то (45) упрощается:

$$\sigma_{\text{ос}}(\mathbf{j}) = \frac{e^2}{\pi} R^2 \left( \frac{\mathbf{j}p}{p} \right)^2 \frac{|F|^2 E'}{E f} \frac{1}{(\mu^2/E^2 + \theta^2)^2}. \quad (46)$$

Суммируем по поляризации:

$$\sigma_{\text{ос}} = \frac{e^2}{\pi} R^2 \frac{\theta^2}{(\gamma^{-2} + \theta^2)^2} \frac{E - f}{E} \frac{1}{f} \left| F \left( \frac{fE\theta^2}{2\mu^2} \right) \right|^2. \quad (47)$$

Если  $f \ll E$ , то (47) соответствует классическому «остановочному» излучению, возникающему при внезапной остановке заряда, когда время его остановки мало.

Проинтегрированное по  $f \geq f_{\min}$  и  $\theta \leq \theta_{\max}$  сечение при  $F = 1$  равно

$$e^2 R^2 \left( \ln \frac{\theta_{\max}^2 E^2}{e\mu^2} \right) \left( \ln \frac{E}{f_{\min}} - 1 \right). \quad (48)$$

В отличие от дифференциального излучения, в котором главную роль играют углы  $\theta$  порядка  $1/\gamma$ , в «захватном» излучении основное место занимают значительно большие углы. Однако при  $\theta < \sqrt{2\mu^2/Ef}$  в соответствии с (20а, б) формфактор может начать существенно ограничивать интенсивность излучения. Поэтому полная вероятность «остановочного» излучения с учетом конечных размеров  $\pi$ -частицы получается при интегрировании (47) от  $F = 1$  до  $\theta \sim \sqrt{2\mu^2/Ef}$ :

$$\int_{f_{\min} \leq f \leq E} \sigma_{\text{ос}} df d\theta \approx e^2 R^2 \int_{f_{\min}}^E \frac{df}{f} \ln \frac{E}{f} = \frac{1}{2} e^2 R^2 \ln^2 \frac{E}{f}. \quad (49)$$

Если  $f \sim E$ , то (49) верно только по порядку величины. Сравнивая (49) с (42) или (34), мы видим, что остановочное излучение несколько больше дифракционного. Полная излученная энергия при остановочном излучении в рассматриваемых условиях равна по порядку величины

$$e^2 R^2 \int_0^E \ln \frac{E}{f} df = e^2 R^2 E. \quad (50)$$

Следует отметить, что, хотя интегральные сечения излучения  $\gamma$ -квантов малы по сравнению с  $\pi R^2$ , дифференциальные сечения излучения на малые углы быстро растут и при углах порядка  $\mu/E$  достигают очень больших значений, когда  $E$  растет.

Если  $\theta = \mu/E$ , то «остановочное» излучение имеет дифференциальное сечение, равное согласно (47)

$$\frac{e^2}{4\pi} R^2 \left( \frac{E}{\mu} \right)^2 \frac{E - f}{E} \frac{1}{f}. \quad (51)$$

Когда  $E/\mu = \sqrt{4\pi/e^2} \approx 40$ , то дифференциальное сечение оказывается равным

$$R^2 \frac{E - f}{E} \frac{1}{f} \quad (52)$$

и соответствует ядерным сечениям.

К рассмотренному здесь остановочному излучению, вызванному захватом  $\pi$ -мезона нуклоном или ядром, следует добавить излучение, обязанное возникающему движению нуклона или ядра как целого, а также  $\gamma$ -излучение от вторичных мезонов и нуклонов, возникающих при захвате первичного  $\pi$ -мезона.  $\gamma$ -излучение от движения нуклона или ядра относительно мало ввиду большой массы нуклона или ядра как целого. Что касается  $\gamma$ -излучения от вторичных частиц, то, во-первых, эти частицы распределены в сравнительно широком телесном угле [6], а, во-вторых, их энергия значительно меньше энергии первичной частицы, и поэтому даже в направлении, совпадающем с направлением одной из вторичных частиц, интенсивность  $\gamma$ -излучения будет малой по сравнению с интенсивностью излучения в направлении, близком к направлению первичной  $\pi$ -частицы.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Э. Ферми. УФН, 46, 71, 1952; Progr. Theor. Phys., 5, 570, 1950.
- [2] R. Durbin, H. Loar, J. Steinberger. Phys. Rev., 83, 646, 1954; D. Clark, A. Roberts, R. Wilson. Phys. Rev., 83, 649, 1951.
- [3] Л. Ландау, Е. Лифшиц. Теория поля, 2-е изд. ГИТТЛ, 1948, стр. 168.
- [4] Л. Ландау, Е. Лифшиц. Квантовая механика, ГИТТЛ, 1948, стр. 481.
- [5] A. Nordieck. Phys. Rev., 52, 62, 1937.
- [6] Л. Д. Ландау. Изв. АН СССР, серия физ., 17, 51, 1953 (Собр. трудов, № 72).



ОБ УСТРАНЕНИИ БЕСКОНЕЧНОСТЕЙ  
В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕСовместно с А. А. АБРИКОСОВЫМ  
и И. М. ХАЛАТНИКОВЫМ

ДАН СССР, 95, 497, 1954

Как известно, решение большинства задач в квантовой электродинамике приводит к бесконечностям. Хотя в настоящее время существуют способы вычитания этих бесконечностей (регуляризация), несомненно приводящие к правильным результатам, такой метод действий имеет искусственный характер. Бесконечности возникают в теории из точечного взаимодействия, описываемого  $\delta$ -функциями (операторы взаимодействующих полей берутся в одной точке). Целью настоящей работы является развитие идеи, что происхождение бесконечностей лежит не в точечности взаимодействия, а в том, что описание взаимодействия при помощи  $\delta$ -функций недопустимо.

Общий метод должен заключаться в том, что, рассматривая взаимодействие со сколь угодно малым, но конечным радиусом  $a$ , мы должны считать коэффициент при соответствующем выражении не постоянной, а величиной, зависящей от радиуса взаимодействия. В общем случае зависимость коэффициента от  $a$  должна определяться тем, что при уменьшении радиуса  $a$  все физические результаты должны стремиться к конечным пределам.

В случае электродинамики это означает, что мы должны считать стоящий в выражении взаимодействия между электроном и электромагнитным полем заряд  $e$ , неизвестной заранее функцией радиуса взаимодействия.

При проведении программы нельзя пользоваться теорией возмущений, ибо, как это было впервые указано Эдвардсом [1], одним из источников бесконечностей является решение уравнений последовательными приближениями. Если имеется уравнение  $f + \lambda I(f) = f_0$ , где  $I$  — некоторый интегральный оператор, а  $\lambda$  — малая величина, то уравнение может иметь конечное ре-

шение и в случае, когда  $I(f_0) = \infty$ . При этом  $\lambda I(f)$  не стремится к нулю при  $\lambda \rightarrow 0$ , так что этот член участвует уже в определении нулевого приближения для  $f$ .

Мы поставим своей целью получить нулевые приближения для основных величин квантовой электродинамики. Поэтому нам достаточно рассматривать только такие диаграммы, в которых интегралы компенсируют стоящие перед ними малые коэффициенты

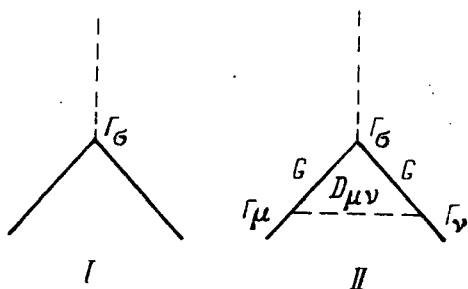


Рис. 1.

(степени  $e_1^2$ ). Как известно, в электродинамике все расходящиеся интегралы имеют логарифмический характер<sup>1</sup>.

Из предыдущего ясно, что такой логарифмически расходящийся интеграл имеет в действительности порядок  $1/e_1^2$ . Поскольку мы интересуемся нулевым приближением, нам достаточно рассматривать только такие диаграммы, в которых степень логарифма совпадает со степенью  $e_1^2$ .

Еще Дайсоном [2] были получены точные уравнения, связывающие функции Грина  $G$  и  $D_{\mu\nu}$ , соответствующие электронным и фотонным линиям, с вершинной частью  $\Gamma_\mu$ . Покажем, что в нулевом приближении можно написать замкнутые интегральные уравнения для величин  $\Gamma_\mu$ .

Для этого учтем, что добавление фотонной линии, охватывающей две вершины, не дает расходящегося интеграла. Поэтому в диаграммах, представляющих последовательные приближения вершинной части, мы можем не рассматривать линий, изображающих интерференцию вершин, которые приводят к логарифмам в степенях, более низких, чем порядок теории возмущений. В частности, мы можем не рассматривать диаграмм с пересекающимися

<sup>1</sup> Что касается расходящейся более сильно так называемой собственной массы фотона, то она должна равняться нулю в силу закона сохранения заряда. Это означает, что размазывание взаимодействия должно производиться таким образом, чтобы удовлетворять этому требованию.

са фотонными линиями. Кроме того, аналогичным образом исключаются более сложные диаграммы. Все остающиеся в результате диаграммы представляют собой лестницу, в которой каждая вершина должна быть снабжена аналогичной дополнительной лестницей. При этом подразумевается, что фотонные и электронные линии просуммированы во всех приближениях, т. е. изображаются истинными функциями  $D_{\mu\nu}$  и  $G$ . Суммирование такой схемы в указанных предположениях может быть легко произведено. Именно, полная сумма всех высших приближений для диаграммы  $I$  (рис. 1) совпадает с диаграммой  $II$  (рис. 1), в которую включены все высшие приближения. Отсюда получаем следующее уравнение<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma}(p, p-l; l) = \\ = \gamma_{\sigma} + \frac{e_1^2}{\pi i} \int \Gamma_{\mu}(p, p-k; k) G(p-k) \Gamma_{\sigma}(p-k, p-k-l; l) \times \\ \times G(p-k-l) \Gamma_{\nu}(p-k-l, p-l; -k) D_{\mu\nu}(k) d^4k. \quad (1) \end{aligned}$$

К этому уравнению прибавляются уравнения для  $G$  и  $D_{\mu\nu}$ . Эти уравнения были выведены Дайсоном суммированием диаграмм,

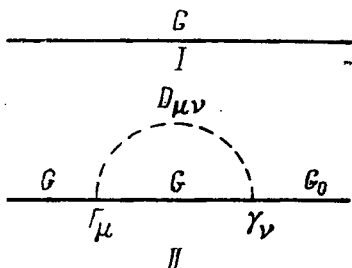


Рис. 2.

причем в данном случае без каких-либо пренебрежений. Для этого сравнивается (в случае  $G$ ) сумма высших приближений к диаграмме  $I$  (см. рис. 2) с полной суммой всех приближений диаграммы  $II$  (рис. 2). При этом в диаграмме  $II$  для того, чтобы не учитывать диаграмм высшего порядка многократно, следует прибавлять дополнительные фотонные линии только с одной стороны диаграммы. Это дает

$$\begin{aligned} G(p) = \\ = G^0(p) + \frac{e_1^2}{\pi i} G(p) \int \Gamma_{\mu}(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_{\nu} D_{\mu\nu}(k) d^4k G_0(p). \quad (2) \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Мы пользуемся обозначениями Фейнмана [3]; в частности,  $\gamma_{1,2,3} = \beta\alpha_{1,2,3}$ ;  $\gamma_0 = \beta$ ;  $d^4k = (2\pi)^{-4} dk_0 dk_1 dk_2 dk_3$ .

Здесь  $G_0$  — электронная линия в нулевом приближении теории возмущений

$$G_0 = \frac{1}{\hat{p} - m_1}, \quad (3)$$

где  $m_1$  обозначает «собственную массу» электрона, которую он имел бы «при отсутствии заряда». Это уравнение может быть написано в виде

$$G(p) \left[ \hat{p} - m_1 - \frac{e_1^2}{\pi i} \int \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_\nu D_{\mu\nu}(k) d^4k \right] = 1. \quad (4)$$

Аналогичным образом получаем уравнение для  $D_{\mu\nu}$ :

$$D_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}^0(k) - \frac{e_1^2}{\pi i} D_{\mu\sigma}(k) \text{Sp} \left[ \int G(p) \Gamma_\sigma(p, p-k; k) \times \right. \\ \left. \times G(p-k) \gamma_\tau d^4p \right] D_{\tau\nu}^0(k). \quad (5)$$

Обычно  $D_{\mu\nu}^0$  полагается равным  $\delta_{\mu\nu}/k^2$ . Однако это не является ни наиболее общим, ни, как мы увидим далее, наиболее удобным определением. Ввиду градиентной инвариантности «продольные» (в четырехмерном смысле) фотоны не взаимодействуют с заряженными частицами, и поэтому продольная (пропорциональная  $k_\mu k_\nu$ ) часть тензора  $D_{\mu\nu}$  может быть выбрана произвольно. Более того, по тем же причинам она не может меняться под влиянием возмущений. С этим полностью согласуется то, что интегральный член в уравнении (5), соответствующий дираковскому току, всегда поперечен. Мы можем поэтому при любом выборе продольной части  $D_{\mu\nu}^0$  без изменения результата заменить в нем  $D_{\mu\nu}^0$  на  $\delta_{\mu\nu}/k^2$ . Окончательно получается следующее уравнение для поперечной части  $D_{\mu\nu}^t$  ( $D_{\mu\nu}^t k_\mu = 0$ ) тензора  $D_{\mu\nu}$ :

$$D_{\mu\sigma}^t \left( k^2 \delta_{\sigma\nu} + \frac{e^2}{\pi i} \text{Sp} \left[ \int G(p) \Gamma_\sigma(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_\nu d^4p \right] \right) = \\ = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (6)$$

В последующих работах мы займемся решением уравнений (1), (4), (6), а сейчас укажем на некоторые важные свойства интегралов, входящих в эти уравнения. Неприятной их особенностью является интегрирование по четырехмерному псевдоевклидову пространству. Покажем, что если мы будем ограничиваться пространственными векторами, то интегрирования могут быть перенесены в четырехмерное евклидово пространство. Сущест-

венным для этого является то, что все встречающиеся в уравнениях функции в конечном счете сводятся к скалярным функциям выражений типа  $(k - a)^2$ ,  $(k - b)^2$  и т. д., где  $a, b, \dots$  — постоянные векторы, а  $k$  — переменный вектор, по которому происходит интегрирование. Эти функции определены таким образом, что при изменении знака  $(k - a)^2$  необходимо аналитически продолжать их через верхнюю полуплоскость, в которой они не имеют особенностей. Поскольку мы исходим из «размазанного» взаимодействия, то  $\Gamma_{\mu}$ , а следовательно, подынтегральные выражения должны обращаться в нуль при  $k \rightarrow \infty$ .

Пусть постоянные при интегрировании вектора  $a, b$  и т. д. имеют равные нулю временные компоненты. Тогда интегрирование по временной компоненте  $k_0$  можно написать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k_0^2) dk_0 = \int_0^{\infty} F(x) \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

(конечно,  $F$  зависит и от других компонент вектора  $k$ ). Поскольку  $F(x)$  не имеет особенности в верхней полуплоскости и обращается в нуль на бесконечности, мы имеем тождество

$$\int_0^{\infty} F(x) \frac{dx}{\sqrt{x}} = i \int_0^{\infty} F(-x) \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Это соответствует тому, что мы можем в указанном случае во всех четырехмерных интегралах заменить  $k_0$  на  $ik_0$ , после чего интегрирование сведется к интегрированию по четырехмерному евклидову пространству.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность А. Д. Галанину, И. Я. Померанчуку, Б. Д. Иоффе за дискуссию и ценные замечания, способствующие выяснению вопроса.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. F. Edwards. Phys. Rev., 90, 284, 1953.
- [2] F. Dyson. Phys. Rev., 75, 1736, 1949.
- [3] R. P. Feynman. Phys. Rev., 76, 749, 769, 1949.

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ГРИНОВСКОЙ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРОНА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Совместно с А. А. АБРИКОСОВЫМ  
и И. М. ХАЛАТНИКОВЫМ

ДАН СССР, 95, 773, 1954

В предыдущей работе [1] нами были получены уравнения для основных функций квантовой электродинамики. Поскольку мы поставили своей задачей точное решение этих уравнений, то не можем пользоваться для величин  $G$ ,  $D_{\mu\nu}$  и  $\Gamma_\mu$  их обычными выражениями даже с перенормированными коэффициентами.

Ввиду аналитичности функций  $G$  и  $D_{\mu\nu}$  нам достаточно определить их при отрицательных значениях  $p^2$  и  $k^2$  (пространственные векторы), после чего они могут быть аналитически продолжены через верхнюю полуплоскость на положительные (временные) значения. Пользуясь преобразованием, указанным в работе [1], мы можем перевести интегрирование в уравнениях для  $G$  и  $D_{\mu\nu}$  в евклидовское четырехмерное пространство. Поэтому для определения  $G$  и  $D_{\mu\nu}$  существенную роль играют  $\Gamma_\mu$  от чисто пространственных векторов. Проводя то же преобразование в уравнении для  $\Gamma_\mu$ , мы видим, что такие «пространственные»  $G$ ,  $D_{\mu\nu}$  и  $\Gamma_\mu$  составляют замкнутую систему величин, не требующих для своего определения рассмотрения  $\Gamma_\mu$  в других областях значений импульсов. В этой работе мы ограничимся получением, кроме  $G$  и  $D_{\mu\nu}$ , только «пространственных»  $\Gamma_\mu$  и тех, которые могут быть получены из них аналитическим продолжением.

При решении уравнений основное значение имеет поведение всех функций при больших значениях импульсов  $p \gg m$  и  $k \gg m$ . Будем искать функции  $G$  и  $D_{\mu\nu}$  в виде

$$G(p) = \frac{\beta(p^2)}{\hat{p}}; \quad (1)$$

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \left[ d_1(k^2) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + d_2(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right], \quad (2)$$

где функции  $\beta(p^2)$ ,  $d_l(k^2)$ ,  $d_l(k^2)$  — медленно меняющиеся функции от  $p^2$  и  $k^2$ . Что касается  $\Gamma_\mu$ , то покажем, что уравнению для  $\Gamma_\mu$  удовлетворяет выражение вида

$$\Gamma_\mu(p, q; l) = \gamma_\mu \alpha(f^2), \quad (3)$$

где  $\alpha(f^2)$  — медленно меняющаяся функция аргумента;  $f^2$  — любая из величин  $p^2$ ,  $q^2$  и  $l^2$ , когда они одного порядка. В случае, когда одна из этих величин мала по сравнению с двумя другими, в качестве  $f^2$  надо брать наибольшую. Поскольку мы вычисляем «пространственные»  $\Gamma_\mu$ , для которых  $\sqrt{-p^2}$ ,  $\sqrt{-q^2}$ ,  $\sqrt{-l^2}$  представляют стороны обычного треугольника (т. е. удовлетворяют неравенствам  $\sqrt{-q^2} + \sqrt{-l^2} > \sqrt{-p^2}$  и т. д.), мы сможем аналитически продолжить получаемые решения только на такие не чисто пространственные  $\Gamma_\mu$ , для которых либо  $p^2$ ,  $q^2$  и  $l^2$  одного порядка величины, либо при малости одного из них два других достаточно близки друг к другу.

Подставим выражения (1), (2), (3) в уравнение (1) работы [1]. Легко видеть, что стоящий в правой части интеграл, за исключением слабо меняющихся функций, логарифмически расходится при  $|k^2| \gg |p^2|$  и  $|k^2| \gg |q^2|$ . Соответственно эта область интегрирования играет в интеграле основную роль. В этой области можно пренебречь  $p$ ,  $q$  и  $l$  по сравнению с  $k$ , и все стоящие под интегралом выражения становятся функциями только от  $k$ . После усреднения по направлениям вектора  $k$   $\gamma_\mu$  выходит за знак интеграла, подтверждая этим формулу (3), а под интегралом остается скалярное выражение. Для того чтобы перевести интегрирование по  $d^4k$  в простое интегрирование по  $dk^2$ , воспользуемся преобразованием  $k_0 \rightarrow ik_0$ , указанным в работе [1]. Тогда  $d^4k$  перейдет в  $i(2\pi)^{-2}d\Omega$ ;  $d\Omega$  есть элемент объема в четырехмерном евклидовом пространстве и может быть записан в виде  $2\pi^2 R^3 dR$ , где  $R$  — радиус, в данном случае равный  $\sqrt{-k^2}$ . Таким образом, имеем

$$d^4k \rightarrow \frac{i}{4} (-k^2) d(-k^2). \quad (4)$$

Вводя новую переменную  $\xi = \ln(-p^2/m^2)$ , получаем окончательно

$$\alpha(\xi) = 1 + \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} \alpha^3(z) \beta^2(z) d_l(z) dz. \quad (5)$$

Отметим, что в это уравнение не входит величина  $d_l$ .

Перейдем теперь к уравнению для  $G$  (4) [1]. Легко видеть, что стоящий здесь интеграл при больших  $k \gg p$  расходится. Хотя

эта расходимость на первый взгляд первого порядка по  $k$ , усреднение по направлениям приводит, как известно, ввиду векторного характера величины  $k$  снова к логарифмической расходимости. Это значит, что при разложении подынтегрального выражения по обратным степеням  $k$  мы должны всюду учитывать члены следующего порядка малости. Соответствующие члены в  $G$  находятся непосредственно из формулы (1), где мы, разумеется, можем ввиду слабой зависимости  $\beta$  от  $p^2$  ограничиться разложением в ряд знаменателя, т. е. написать

$$G(p-k) \approx -\frac{\beta(k^2)}{k} - \beta(k^2) \frac{1}{k} \hat{p} \frac{1}{k}. \quad (6)$$

Необходимо, однако, также учесть поправки порядка  $p/k$  и в  $\Gamma_\mu(p, p-k; k)$ . Для определения этих поправок мы должны обратиться снова к уравнению для  $\Gamma_\mu$ . Поскольку дело идет о малых добавках, возникающих при переходе от  $p=0$  к конечному  $p$ , мы можем рассматривать изменение интеграла в правой части как сумму изменений, происходящих от каждого члена под интегралом. Оценка получающегося при этом выражения показывает, что при  $k \gg l$  подынтегральная функция обратно пропорциональна  $k^5$ , т. е. интеграл при больших  $k$  сходится. Однако интеграл приобретает логарифмический вид в области значений  $k \cdot l \gg k \gg p$ , которая, таким образом, и должна явиться главной областью интегрирования. При больших и меньших значениях  $k$  интеграл дает относительно малые поправки, которыми можно пренебречь с рассматриваемой точностью.

В указанной области интегрирования достаточно, очевидно, учитывать только добавки  $p/k$ , так как они гораздо больше, чем  $p/l$ . Можно показать, что в выражении для  $\Gamma_\sigma(p, p-l; l)$  достаточно ограничиться добавками вида

$$[\Delta_1(p^2, l^2) \hat{l} \gamma_\sigma + \Delta_2(p^2, l^2) \gamma_\sigma \hat{l}] \frac{\hat{p}}{l^2}; \quad (7)$$

нетрудно проверить, что добавки другого вида не возникают от  $G$  в форме (6), сами при подстановке в интеграл дают опять выражения типа (7), а поэтому при сравнении левой и правой частей уравнения оказываются равными нулю.

Подставляя (6) и (7) в уравнение для  $\Gamma_\sigma$  (1) [1] и используя преобразование (4), получаем для  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  уравнения

$$\Delta_1(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{8\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) \int_{\xi}^{\eta} \beta(z) \{ \Delta_1(\xi, z) [d_1(z) - d_1(z)] + \\ + [\Delta_2'(\xi, z) + \alpha(z)] [d_1(z) + d_1(z)] \};$$



$$\Delta_2(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{8\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) \int_{\xi}^{\eta} \beta(z) \{ \Delta_1(\xi, z) [d_l(z) + d_l(z)] + \\ + [\Delta_2(\xi, z) + \alpha(z)] [d_l(z) - d_l(z)] \}. \quad (8)$$

Здесь  $\xi = \ln(-p^2/m^2)$  и  $\eta = \ln(-l^2/m^2)$ .

Подставляя выражения (6) и (7) в интеграл в уравнении для  $G$ , в котором основная область интегрирования  $p \ll k < \infty$ , получаем после аналогичных преобразований

$$\frac{1}{\beta(\xi)} = 1 + \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} [\alpha(z) + \Delta_1(\xi, z) + \Delta_2(\xi, z)] \beta(z) d_l(z) dz. \quad (9)$$

Складывая оба уравнения (8), получаем для суммы  $\Delta_1 + \Delta_2$

$$\Delta_1(\xi, \eta) + \Delta_2(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) \int_{\xi}^{\eta} \beta(z) d_l(z) [\Delta_1(\xi, z) + \\ + \Delta_2(\xi, z) + \alpha(z)] dz. \quad (10)$$

Отметим, что в этом уравнении и в уравнении (9) снова выпала величина  $d_l$ . Таким образом, уравнения для определения  $\Gamma_\mu$  и  $G$  могут решаться независимо от вычисления фотонной функции  $D_{\mu\nu}$ . Продольная часть  $d_l$  является, как уже указывалось, произвольной величиной, которую мы сохраняем в уравнениях для доказательства их градиентной инвариантности. Само собой разумеется, что зависимость  $G$  и  $\Gamma_\mu$  от  $d_l$  ни в какой мере не противоречит градиентной инвариантности уравнений, поскольку эти величины при градиентном преобразовании не остаются неизменными.

Введем обозначение

$$\frac{\Delta_1(\xi, \eta) + \Delta_2(\xi, \eta)}{\alpha^2(\eta) \beta(\eta)} = q(\xi, \eta); \quad (11)$$

тогда  $q(\xi, \eta)$  удовлетворяет уравнению

$$q(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha^2(z) \beta^2(z) d_l(z) q(\xi, z) dz + \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha(z) \beta(z) d_l(z) dz. \quad (12)$$

Уравнение (9) может быть теперь записано в виде

$$\frac{1}{\beta(\xi)} = 1 + q(\xi, \infty). \quad (13)$$

Уравнения (5), (12) и (13) дают возможность однозначно определить  $\alpha$  и  $\beta$ . После дифференцирования уравнений (5) и (12) (последнего по  $\eta$ ) получаем

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = -\frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\xi) \beta^2(\xi) d_l(\xi); \quad (14)$$

$$\frac{\partial q(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\eta) \beta^2(\eta) d_l(\eta) q(\xi, \eta) + \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha(\eta) \beta(\eta) d_l(\eta). \quad (15)$$

К этому надо добавить граничные условия из интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow 1 \text{ при } \xi \rightarrow \infty; \\ q &= 0 \text{ при } \xi = \eta. \end{aligned}$$

Вводя новую функцию  $r(\xi, \eta) = \alpha(\eta) q(\xi, \eta)$ , имеем

$$\frac{\partial r(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) d_l(\eta).$$

Отсюда

$$r(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha^2(z) \beta(z) d_l(z) dz, \quad \frac{\partial r(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\xi) \beta(\xi) d_l(\xi).$$

При  $\eta \rightarrow \infty$  имеем из (13)  $r(\xi, \infty) = \frac{1}{\beta(\xi)} - 1$ , откуда

$$\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\xi) \beta^3(\xi) d_l(\xi).$$

Из этого уравнения и (14) следует  $\alpha\beta = \text{const}$  или, учитывая граничные условия,

$$\alpha(\xi) \beta(\xi) = 1. \quad (16)$$

Легко видеть, что это условие непосредственно следует из теоремы Уорда [12]

$$\Gamma_{\mu}(p, p; 0) = \frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial p_{\mu}},$$

если учесть, что медленно меняющаяся функция  $\beta$  дает при дифференцировании член более высокого порядка.

После подстановки (16) в уравнение (14) получаем окончательно с учетом граничного условия

$$\alpha(\xi) = \exp\left[\frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} d_l(z) dz\right], \quad \beta(\xi) = \exp\left[-\frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} d_l(z) dz\right]. \quad (17)$$

Формулы (17) изображают по существу градиентное преобразование величин  $G$  и  $\Gamma_\mu$  (для медленно меняющихся величин  $d_i$ ). Наиболее удобным выбором является, очевидно, выбор  $d_i = 0$  (в противоположность обычно полагаемому  $d_i = 1$ ). При этом никаких расходимостей у  $\Gamma_\mu$  и  $G$  не возникает вообще, и эти величины ( $\Gamma_\mu$  с указанными выше ограничениями) просто равны своим нулевым значениям. Отметим, что такая нормировка по существу соответствует условию Лоренца  $\partial A_i / \partial x_i = 0$ .

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников.  
ДАН СССР, 95, 497, 1954 (Собр. трудов, № 76).  
[2] J. C. Ward. Phys. Rev., 78, 182, 1950.

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ГРИНОВСКОЙ ФУНКЦИИ ФОТОНА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Совместно с А. А. АБРИКОСОВЫМ  
и И. М. ХАЛАТНИКОВЫМ

ДАН СССР, 95, 1177, 1954

В предыдущих работах [1, 2] нами были получены общие интегральные уравнения квантовой электродинамики нулевого приближения и найдены асимптотические выражения для электронной гриновской функции  $G$  и вершинной части  $\Gamma_\mu$ . Теперь мы применим полученные результаты для нахождения фотонной гриновской функции  $D_{\mu\nu}$ .

Интеграл, стоящий в уравнении для  $D_{\mu\nu}$  (6) [1], при больших  $p$  расходится в данном случае квадратично. Однако, поскольку значение интеграла при  $k = 0$  должно равняться нулю вследствие закона сохранения заряда (поперечность дираковского тока), мы должны рассматривать лишь разности между этим интегралом и его значением при  $k = 0$ . Учитывая, что члены, содержащиеся в знаменателе  $p^3$ , дают нуль, при усреднении мы придем опять к интегралу логарифмического типа. Поскольку область  $p \ll k$ , как легко видеть, ничего существенного в интеграле не дает, нам достаточно рассматривать область  $p \gg k$ .

При вычислении логарифмического интеграла необходимо, разумеется, наподобие того, как это делалось в предыдущей работе, учесть в  $\Gamma_\mu(p, p-k; k)$  добавки второго порядка по  $k/p$ . Для нахождения этих добавок воспользуемся уравнением для  $\Gamma_\sigma(1)$  [1], причем в стоящем здесь интеграле перейдем от переменной интегрирования  $k$  к переменной  $k' = p - k$ . Тогда он примет форму

$$\int D_{\mu\nu}(p-k') \Gamma_\mu(p, k'; p-k') G(k') \Gamma_\sigma(k', k'-l; l) \times \\ \times G(k'-l) \Gamma_\nu(k'-l, p-l; k'-p) d^4k.$$

Здесь считается  $p \gg l$ . Очевидно, что от разложения  $G(k' - l)$  по степеням  $l/k'$  действительно возникают члены второго порядка по  $l$ , приводящие к интегралу, логарифмическому в области  $p \gg k' \gg l$ . Членов первого порядка по  $l$  не может возникнуть, так как они содержат в знаменателе  $k'^3$  и исчезают при интегрировании по углам. Члены рассматриваемого типа могут возникнуть как от  $G(k' - l)$ , так и от  $\Gamma_\sigma(k', k' - l; l)$ . Зависимость от  $l$  в последнем  $\Gamma_\mu$  дает члены не порядка  $l^2/k'^2$ , а порядка  $l^2/p^2$ , которыми можно пренебречь.

Мы начнем с вычисления добавок, возникающих от  $G(k' - l)$ .

В результате вычислений находим искомое выражение

$$\frac{e_1^2}{24\pi} \left\{ 2d_l(\xi) \frac{\hat{l}\gamma_\sigma \hat{l} - l^2\gamma_\sigma}{p^2} + [d_l(\xi) - d_l(\xi)] \frac{l^2 \hat{p}\gamma_\sigma \hat{p} - \hat{p} \hat{l}\gamma_\sigma \hat{l} \hat{p}}{p^4} \right\} \times \\ \times \alpha^2(\xi) \int_{\eta}^{\xi} \alpha(z) \beta^2(z) dz. \quad (1)$$

Здесь  $\xi = \ln(-p^2/m^2)$ ,  $\eta = \ln(-l^2/m^2)$ .

Оказывается, что достаточно искать поправку к  $\Gamma_\sigma(p, p - l; l)$  в виде

$$s(\xi, \eta) \alpha^2(\xi) \left\{ 2d_l(\xi) \frac{\hat{l}\gamma_\sigma \hat{l} - l^2\gamma_\sigma}{p^2} + [d_l(\xi) - d_l(\xi)] \times \right. \\ \left. \times \frac{l^2 \hat{p}\gamma_\sigma \hat{p} - \hat{p} \hat{l}\gamma_\sigma \hat{l} \hat{p}}{p^4} \right\}. \quad (2)$$

Подставив это выражение в интеграл и сравнивая члены в левой и правой частях уравнения для  $\Gamma_\sigma$  (1) [4], получаем уравнение для  $s(\xi, \eta)$ :

$$s(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\eta}^{\xi} \alpha^2(z) \beta^2(z) d_l(z) s(z, \eta) dz + \frac{e_1^2}{24\pi} \int_{\eta}^{\xi} \alpha(z) \beta^2(z) dz. \quad (3)$$

Подставляя выражение (2) для добавки к  $\Gamma_\sigma$  в уравнение для  $D_{\mu\nu}$  (6) [4], получаем

$$d_l(\eta) = 1 - 8d_l(\eta) \left[ \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\eta}^L \alpha^2(z) \beta^2(z) d_l(z) s(z, \eta) dz + \right. \\ \left. + \frac{e_1^2}{24\pi} \int_{\eta}^L \alpha(z) \beta^2(z) dz \right]. \quad (4)$$

Через  $L$  здесь обозначен верхний предел рассматриваемых нами значений величины  $\eta$ , который определяется радиусом «размазывания» взаимодействия. Согласно принятой нами схеме «размазанного взаимодействия» величина взаимодействия должна быстро падать, когда импульс превышает критическую величину  $P \sim 1/a$ , где  $a$  — радиус взаимодействия. Условие  $p \gg P$  переходит в логарифмической шкале просто в условие  $\xi > L$ , где  $L = \ln(-P^2/m^2)$ , поскольку значительное изменение величины  $p$  соответствует относительно ничтожным изменениям  $\ln(-p^2/m^2)$ . Поэтому факт размазывания приводит к тому, что все интегралы, связанные с взаимодействием, должны браться до верхнего предела  $L$ . Подчеркнем, что согласно основной схеме константа  $e_1$  является в действительности функцией «радиуса размазывания»  $a$ , т. е. величины  $L$ . При вычислении функций  $G$  и  $\Gamma_\mu$  (2) нам не было необходимости пользоваться размазыванием, поскольку там расходимость определялась функцией  $d_l(\xi)$  произвольной, а не связанной с характером взаимодействия. Однако, если мы вводим размазывание, то должны автоматически и в интегралах, стоящих в показателях  $\alpha$  и  $\beta$ , поставить верхний предел  $L$  вместо бесконечности.

Отметим, что при этом  $\beta(L) = 1$ . Это соответствует тому очевидному обстоятельству, что при импульсах  $p \gg P$  взаимодействие исчезает и электрон должен вести себя как свободный, не взаимодействующий с полем.

Сравнивая формулу (4) с формулой (3), получаем

$$\frac{1}{d_l(\eta)} = 1 + 8s(L, \eta). \quad (5)$$

Дифференцируя уравнение (3) по  $\xi$  и учитывая соотношения

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \quad \text{и} \quad \frac{d\beta(\xi)}{d\xi} = \frac{e_1^2}{4\pi} d_l(\xi) \beta(\xi) \quad [2],$$

получаем

$$\frac{\partial s(\xi, \eta)}{\partial \xi} = s(\xi, \eta) \frac{1}{\beta(\xi)} \frac{d\beta(\xi)}{d\xi} + \frac{e_1^2}{24\pi} \beta(\xi), \quad (6)$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{s(\xi, \eta)}{\beta(\xi)} \right) = \frac{e_1^2}{24\pi},$$

и, учитывая, что при  $\xi = \eta$   $s = 0$ , согласно (3)

$$s(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{24\pi} (\xi - \eta) \beta(\xi). \quad (7)$$

Подставляя сюда  $\xi = L$  и учитывая  $\beta(L) = 1$ , получаем окончательно из (5)

$$d_i(\eta) = \frac{1}{1 + \frac{e_1^2}{3\pi} L - \frac{e_1^2}{3\pi} \eta}. \quad (8)$$

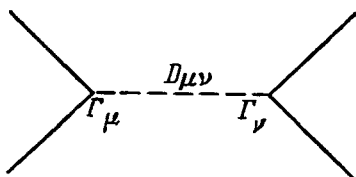
Отметим, что это выражение, в отличие от выражений для  $G$  и  $\Gamma_\mu$ , не содержит произвольной функции  $d_i$ , как это и требуется градиентной инвариантностью.

Эта формула применима при  $|k^2| \gg m^2$ . При  $k^2 \sim m^2$  она дает

$$d_i^0 = \frac{1}{1 + \frac{e_1^2}{3\pi} L}. \quad (9)$$

Поскольку при  $k$ , малых по сравнению с  $m$ , интегрирование ведется не по  $p \gg k$ , а по  $p \gg m$ , формула (9) имеет место и для  $k \ll m$ , в частности и для  $k \rightarrow 0$ .

Теперь мы можем найти связь между константой  $e_1$  и истинным зарядом электрона. Для этого рассмотрим, например, рассеяние электрона на электроне. Оно изображается диаграммой



на рисунке. Свободные концы соответствуют  $p^2 = m^2$ . Для того чтобы мы могли применять полученные нами формулы для  $\Gamma_\mu$  [2], необходимо, чтобы и импульс фотона на фотонной линии не был очень велик по сравнению с  $m$ . При этом можно пренебречь  $\eta$  в знаменателе формулы (8), т. е. заменить  $d_i$  на  $d_i^0$ . Согласно Дайсону [3], каждому свободному концу соответствует дополнительный множитель

$$\sqrt{\lim_{p^2 \rightarrow m^2} (\hat{p} - m) G(p)},$$

в нашем случае равный  $\sqrt{\beta(\xi = 0)}$ .

Учитывая, что диаграмма на рисунке содержит 4 электронных свободных конца, две вершины и одну фотонную линию, легко видеть, что в результате мы получим для амплитуды рассеяния обычную формулу, где вместо квадрата заряда будет

стоять произведение  $e_1^2 \alpha^2(0) \beta^2(0) d_t^0$ . Подставляя соответствующие выражения, получаем окончательно

$$e^2 = \frac{e_1^2}{1 + \frac{e_1^2}{3\pi} L}.$$

Разумеется, та же формула получается и из рассмотрения любого другого эффекта. Она, как и следовало, удовлетворяет требованию градиентной инвариантности. Выражая  $e_1^2$  через  $e^2$ , имеем

$$e_1^2 = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{3\pi} L}. \quad (10)$$

Из этой формулы видно, что при заданном  $e^2$  значение  $e_1^2$  растет с увеличением  $L$  и становится порядка единицы при значениях  $L$ , близких к  $3\pi/e^2$ . Поскольку наши основные уравнения выведены в предположении  $e_1^2 \ll 1$ , наши формулы (в том числе и формула (10)) перестают быть применимыми при  $L > 3\pi/e^2$ . Это означает, что вся рассматриваемая теория применима лишь при  $\xi < 3\pi/e^2$  и рассмотрение меньших размеров и больших энергий с ее помощью невозможно.

В действительности предлагаемая теория становится неприменимой значительно раньше из-за гравитации. Гравитационное взаимодействие становится порядка электромагнитного при  $r^2 \sim e^2/K$  ( $K$  — гравитационная постоянная). Это соответствует  $r \sim 2 \cdot 10^{-6}$  г  $\sim 10^{27}$  эв и  $L \sim 100$ .

Формула для  $d_t$  может быть теперь написана в виде

$$d_t(k^2) = \frac{e^2}{e_1^2} \frac{1}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln\left(-\frac{k^2}{m^2}\right)} \quad (11)$$

(при  $k > m$ ). С точностью до «перенормировочного» множителя  $d_t$  оказывается, как и следовало, не зависящим от радиуса «размазывания».

При выводе формулы (11) было существенно то, что мы не рассматривали никаких других заряженных частиц, кроме электронов. По отношению к частицам, сильно взаимодействующим с неэлектромагнитными полями ( $\pi$ -мезоны, нуклоны), такое пренебрежение, несомненно, оправдано, поскольку они благодаря специфическим взаимодействиям получают конечный «радиус» и взаимодействие их с электромагнитным полем убывает с увели-



чением волнового вектора быстрее, чем это имеет место в формуле (11).

С другой стороны, возможно, что в природе существуют частицы, не способные к сильным взаимодействиям ( $\mu$ -мезоны?). В этом случае в знаменателе формулы для  $d_t$  вместо второго члена будет стоять сумма аналогичных выражений для разных сортов частиц. Поскольку произведение  $e^2/3\pi$  на логарифмы отношения масс есть всегда малая величина, это практически сведется к умножению второго члена в знаменателе на целочисленный множитель, равный числу сортов такого рода частиц.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 497, 1954 (Собр. трудов, № 76).
- [2] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 773, 1954 (Собр. трудов, № 77).
- [3] F. J. D y s o n. Phys. Rev., 75, 1736, 1949.

# МАССА ЭЛЕКТРОНА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Совместно с А. А. АБРИКОСОВЫМ  
и И. М. ХАЛАТНИКОВЫМ

ДАН СССР, 96, 261, 1954

Одним из наиболее интересных вопросов квантовой электродинамики является вопрос о массе электрона, в частности о роли электромагнитной и «собственной» масс. Основное значение при решении этого вопроса имеет поведение гриновской функции электрона  $G(p)$  при  $p \sim m$ . В работе [1] найдено асимптотическое выражение для гриновской функции электрона, справедливое при  $p \gg m$ . Для решения вопроса о массе электрона недостаточно ограничиться только значением этого выражения для  $G(p)$  при  $p \sim m$ , а надо рассмотреть поправки к тому выражению.

Предположим, что функция  $G(p)$  имеет вид

$$G(p) = \frac{\beta(p^2)}{\hat{p} - m(p^2)}, \quad (1)$$

где  $\beta(p^2)$  — функция, введенная в [1], а  $m(p^2)$  — новая медленно меняющаяся функция от  $p^2$ . При больших значениях  $p$  отношение второго члена в знаменателе к первому становится совершенно ничтожным и, во всяком случае, значительно меньше, чем неточность в определенной нами функции  $\beta(p^2)$ . Тем не менее рассмотрение такого члена закономерно, поскольку он в противоположность первому представляет собой четную функцию от вектора  $p$ , и поэтому погрешность в определении  $\beta$  не может сказаться на его величине. При больших  $p$   $G(p)$  может быть написано в виде

$$G(p) = \frac{\beta(p^2)}{\hat{p}} + \frac{\beta(p^2)m(p^2)}{p^2}; \quad (2)$$

здесь первый член является нечетной функцией, а второй — четной функцией от  $p$ .

Напишем уравнение для функции  $G$  [2]

$$G^{-1}(p) = \hat{p} - m_1 + \frac{e_1^2}{\pi i} \int \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_\nu D_{\mu\nu}(k) d^4k \quad (3)$$

и выделим с обеих сторон четные функции  $p$ , которые должны равняться друг другу. При определении четной части стоящего с правой стороны интеграла будем, изменяя знак  $p$ , менять также знак у переменной интегрирования  $k$ . Тогда четная часть стоящего под интегралом выражения будет состоять из произведения четной части  $\Gamma_\mu$  (по отношению к изменению знака всех входящих в нее переменных) на четную часть  $G$  и произведения нечетной части  $\Gamma_\mu$  на нечетную часть  $G$ . В первом случае нам достаточно для  $\Gamma_\mu$  взять выражение  $\alpha(k^2) \gamma_\mu$ , а для  $G$  — второй член формулы (2). Во втором случае  $G$  берется в прежнем виде  $\beta(p^2)/\hat{p}$ , а нечетная часть  $\Gamma_\mu$  должна быть определена из уравнения для  $G_\sigma$  (1) [2].

Приравнявая нечетные части выражений, стоящих в обеих сторонах уравнения, мы опять, меняя знак  $p$  и  $l$ , изменим в стоящем с правой стороны интеграле знак у переменной интегрирования  $k$ . После этого нечетная часть интегрального выражения будет содержать либо четную часть одного из  $G$ , либо нечетную часть одного из  $\Gamma_\mu$ . Другие варианты приводят к членам более высокого порядка малости. Рассмотрим раньше влияние четной добавки к  $G$ . Пусть  $p \ll l$ . Тогда легко убедиться, что главный член выражения возникает от нечетной добавки к  $G(p-k)$ . Соответствующий интеграл логарифмичен в области  $p \ll k \ll l$  и быстро сходится за ее пределами. Непосредственное вычисление дает для него выражение

$$-\frac{e_1^2}{4\pi} \frac{l_\sigma}{l^2} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) \int_{\xi}^{\eta} \beta(z) \alpha(z) m(z) [3d_l(z) + d_l(z)] dz,$$

где по-прежнему  $\xi = \ln(-p^2/m^2)$ ,  $\eta = \ln(-l^2/m^2)$ .

Будем теперь искать нечетную часть  $G_\sigma(p, p-l; l)$  в виде  $(l_\sigma/l^2) \alpha^2(\eta) \beta(\eta) t(\xi, \eta)$  и подставим соответствующую добавку в  $\Gamma_\mu(p, p-k; k)$ . Можно убедиться в том, что поправки к остальным  $\Gamma$  дают выражения более высокого порядка малости. После этого получаем для  $t(\xi, \eta)$  следующее интегральное уравнение:

$$t(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha^2(z) \beta^2(z) d_l(z) t(\xi, z) dz - \\ - \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha(z) \beta(z) m(z) [3d_l(z) + d_l(z)] dz. \quad (4)$$

Подставляя в подынтегральное выражение в (3) выражения для добавок к  $G$  и  $\Gamma_\mu$ , получаем окончательно для четной части уравнения (3)

$$-\frac{m(\xi)}{\beta(\xi)} = -m_1 + \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^L \alpha^2(z) \beta^2(z) d_l(z) t(\xi, z) dz - \\ - \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^L \alpha(z) \beta(z) m(z) [3d_l(z) + d_l(z)] dz, \quad (5)$$

откуда

$$m(\xi) = \beta(\xi) [m_1 - t(\xi, L)]. \quad (6)$$

Дифференцируя уравнение (4) по  $\eta$  и воспользовавшись формулами  $\alpha\beta = 1$  и  $\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{e_1^2}{4\pi} \beta d_l$ , получаем

$$\frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{\beta(\eta)} \frac{d\beta(\eta)}{d\eta} t(\xi, \eta) - \frac{e_1^2}{4\pi} m(\eta) [3d_l(\eta) + d_l(\eta)], \quad (7)$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{t(\xi, \eta)}{\beta(\eta)} \right) = - \frac{e_1^2}{4\pi} \frac{m(\eta)}{\beta(\eta)} [3d_l(\eta) + d_l(\eta)];$$

учитывая, что согласно (4)  $t(\xi, \eta) = 0$  при  $\xi = \eta$ ,

$$\frac{t(\xi, \eta)}{\beta(\eta)} = - \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \frac{m(z)}{\beta(z)} [3d_l(z) + d_l(z)] dz;$$

дифференцируя по  $\xi$ , получаем отсюда

$$\frac{1}{\beta(\eta)} \frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{e_1^2}{4\pi} \frac{m(\xi)}{\beta(\xi)} [3d_l(\xi) + d_l(\xi)].$$

Подставляя сюда  $\eta = L$ , получаем (учитывая  $\beta(L) = 1$  из (6))

$$\frac{d}{d\xi} \frac{m(\xi)}{\beta(\xi)} = - \frac{e_1^2}{4\pi} \frac{m(\xi)}{\beta(\xi)} [3d_l(\xi) + d_l(\xi)]$$

или, воспользовавшись соотношением  $\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{e_1^2}{4\pi} \beta d_l$ ,

$$\frac{dm(\xi)}{d\xi} = - \frac{3e_1^2}{4\pi} d_l(\xi) m(\xi).$$

Подставляя для  $d_t$  полученное в [3] выражение, получаем окончательно

$$m(\xi) = m(0) \left( 1 - \frac{e_1^2}{3\pi} \xi \right)^{1/4}, \quad (8)$$

где константа  $m(0)$  есть значение  $m(\xi)$  при  $\xi = 0$ , т. е. наблюдаемая масса электрона.

Эта формула имеет место только в том случае, если в природе нет других частиц, кроме электрона, не взаимодействующих существенно ни с какими полями, кроме электромагнитного. Если все такого рода частицы имеют спин  $1/2$ , то написанная формула переходит в

$$m(\xi) = m \left[ 1 - \frac{v e^2}{3\pi \xi} \right]^{1/v},$$

где  $v$  — число сортов частиц. В обычных обозначениях (8) имеет вид

$$m(p^2) = m \left[ 1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \left( -\frac{p^2}{m^2} \right) \right]^{1/4}. \quad (9)$$

Формула (8) определяет  $m(p^2)$  при  $|p^2| \gg m^2$ . Случай  $p^2 \ll m^2$  ничем не отличается от  $p^2 \sim m^2$ , т. е. ему соответствует с нашей точностью  $m(p^2) = m$ . При  $p^2 = m^2$  знаменатель формулы (1) обращается в нуль, поэтому случай  $p^2$ , очень близких к  $m^2$  ( $e^2 \ln \frac{m^2}{p^2 - m^2} \sim 1$ ), нуждается в особом рассмотрении.

Как и следовало, формула (9) оказывается градиентно инвариантной и в нее не входит явно радиус «размазывания». Из нее следует, что с увеличением  $k^2$  масса частицы падает. Величина  $m_1$  согласно (6) равна  $m(L)$ , т. е. соответствует значению  $k^2$ , отнесенному к радиусу «размазывания»,

$$m_1 = m \left( \frac{e^2}{e_1^2} \right)^{1/4}.$$

На границе применимости теории  $e_1 \sim 1$  и  $m_1 \sim m e^{1/2}$ , т. е. очень малая величина. Как уже указывалось [3], эта область в действительности не достигается из-за необходимости учета гравитационных эффектов. По-видимому, можно предполагать, что окажется  $m(\infty) = 0$ , т. е. вся масса электрона электромагнитного происхождения.

Таким образом, анализ (см. также [1—3]) показывает, что в квантовой электродинамике можно найти выражения для основ-

ных функций, которые непосредственно удовлетворяют уравнениям, так что регуляризация сводится просто к изменению обозначений:

$$\Gamma_{\mu} = \exp \left[ \frac{e^2}{4\pi} \int_0^L d_l(\xi) d\xi \right] \Gamma'_{\mu}, \quad G = \exp \left[ -\frac{e^2}{4\pi} \int_0^L d_l(\xi) d\xi \right] G',$$

$$D = \frac{e^2}{e_1^2} D',$$

где  $\Gamma'_{\mu}$ ,  $G'$  и  $D'$  — функции, переходящие при малых  $p^2$  в функции свободных частиц. При этом удается получить асимптотические выражения при импульсах  $e^2 \ln(p^2/m^2) \sim 1$ , которые не могут быть получены при использовании обычной теории возмущений.

Применимость полученных формул ограничена двумя обстоятельствами: во-первых, ролью гравитации; во-вторых, как уже указывалось в [3], с увеличением  $p^2$  эффективный заряд растет и при достаточно больших  $p^2$  становится порядка единицы, нарушая этим условие применимости теории. Последнее обстоятельство имеет большое принципиальное значение, поскольку оно, по всей вероятности, относится не только к электродинамике, но и к другим взаимодействиям. По-видимому, при больших  $p^2$  мы всегда попадаем в область «сильной связи», даже если в области небольших энергий имеем слабую связь.

Полученные формулы в применении к процессам при обычных энергиях, естественно, дают результаты первого не исчезающего приближения теории возмущений. Исключением из этого является рассеяние света светом. В обычной теории возмущений такое рассеяние описывается диаграммой в виде квадрата из четырех электронных линий с четырьмя фотонными хвостами. Между тем легко видеть, что соединение двумя фотонными линиями двух квадратов (причем опять остаются четыре свободных хвоста) дает эффект, отличающийся на  $e^4$ , но содержащий вторую степень логарифма, т. е. с точки зрения нашей теории того же порядка величины. Поэтому решение задачи в этом случае должно даваться суммированием диаграмм с бесчисленным множеством квадратов, соединенных фотонными линиями.

Что касается эффектов при очень больших энергиях, то их вычисление на базе предложенной теории требует дополнительно вычисления величин  $\Gamma_{\sigma}(p, q; k)$  для случаев, когда одна из величин  $p^2$ ,  $q^2$  и  $k^2$  велика по сравнению с двумя другими. Кроме того, можно видеть, что в ряде случаев (например, комптон-эффект при очень больших энергиях) охватывающие фотонные

линии дают эффект с точки зрения нашей теории того же порядка, что требует составления по тем же принципам новых интегральных уравнений.

В заключение выражаем благодарность И. Я. Померанчуку, А. Д. Галанину и Б. Л. Иоффе за ценные дискуссии.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 773, 1954 (Собр. трудов, № 77).
- [2] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 497, 1954 (Собр. трудов, № 76).
- [3] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 1177, 1954 (Собр. трудов, № 78).

# ОБ АНОМАЛЬНОМ ПОГЛОЩЕНИИ ЗВУКА ВБЛИЗИ ТОЧЕК ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ВТОРОГО РОДА

Совместно с И. М. ХАЛАТНИКОВЫМ

ДАН СССР, 96, 469, 1954

Общая теория фазовых переходов позволяет рассмотреть явление поглощения звука вблизи  $\lambda$ -точки. Мы покажем, что вблизи  $\lambda$ -точки должно наблюдаться аномально большое поглощение звука.

Вблизи точки фазового перехода второго рода термодинамический потенциал  $\Phi$  может быть представлен в виде

$$\Phi(p, T, \eta) = \Phi_0(p, T) + A(p, T)\eta^2 + C(p, T)\eta^4 + \dots \quad (1)$$

Здесь  $C > 0$ ,  $A < 0$  в низкотемпературной (несимметричной) фазе;  $A > 0$  в высокотемпературной (симметричной) фазе; точка перехода определяется условием  $A(p, T) = 0$ . При заданном давлении вблизи точки перехода функция  $A(p, T)$  разлагается в ряд по разности  $T - T_\lambda$  ( $T_\lambda$  — температура перехода):

$$A(p, T) = a(p)(T - T_\lambda). \quad (2)$$

Параметр  $\eta$  характеризует степень несимметрии. В симметричной фазе  $\eta \equiv 0$ , в несимметричной же фазе параметр  $\eta$  отличен от нуля. Зависимость  $\eta$  от температуры вблизи  $\lambda$ -точки определяется из условия минимальности потенциала  $\Phi$ . Из условия  $\partial\Phi/\partial\eta = 0$  находим не равное нулю значение  $\eta_0^2$ :

$$\eta_0^2 = -\frac{A}{2C} = \frac{a}{2C}(T_\lambda - T), \quad (3)$$



соответствующее некоторому равновесному состоянию несимметричной фазы. Пусть система, находящаяся в несимметричном состоянии, выведена из состояния равновесия. Скорость приближения параметра  $\eta$  к равновесному значению  $\eta_0$  определяется кинетическим уравнением

$$\frac{d\eta}{dt} = \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \quad (4)$$

здесь  $\gamma$  — кинетический коэффициент, о котором мы будем предполагать, что он не обладает какими-либо особенностями вблизи  $T_\lambda$ . Разлагая производную  $\partial \Phi / \partial \eta$  в ряд по разности  $\eta - \eta_0$  при помощи (4), находим

$$\frac{d\eta}{dt} = 2\gamma C \eta_0^2 (\eta - \eta_0) = -\frac{1}{\tau} (\eta - \eta_0). \quad (5)$$

Отсюда следует, что время релаксации  $\tau$ , характеризующее установление равновесия в несимметричной фазе, равно

$$\tau = -\frac{1}{2C\gamma\eta_0^2}. \quad (6)$$

Вблизи  $\lambda$ -точки имеем

$$\tau = \frac{1}{\gamma a (T_\lambda - T)}. \quad (7)$$

Следовательно, время релаксации вблизи точки перехода быстро возрастает по мере приближения к  $\lambda$ -точке. Установление равновесия, таким образом, вблизи  $\lambda$ -точки происходит чрезвычайно медленно, а это должно приводить к заметному затуханию звука. Совершенно очевидно, что такое аномальное затухание звука будет наблюдаться только в несимметричной фазе, т. е. ниже  $T_\lambda$  (при заданном давлении). В симметричной же фазе параметр  $\eta$  тождественно равен нулю во всех состояниях, как равновесных, так и неравновесных, а следовательно, никаких аномалий в поглощении звука не будет.

Пусть в рассматриваемой системе распространяется звуковая волна частоты  $\omega$ , т. е. в системе происходит адиабатическое периодическое сжатие и разрежение. Согласно М. Леонтовичу и Л. Манделъштаму<sup>1</sup>, квадрат скорости звука в низкотемпературной фазе будет равен

$$c^2 = \frac{1}{1 - i\omega\tau} [c_{\text{равн}}^2 - i\omega\tau c_\eta^2]. \quad (8)$$

<sup>1</sup> См., например, [1].

Здесь  $c_{\text{равн}}$  — скорость звука при процессе, столь медленном, что система все время находится в равновесии. Эта скорость в нашем случае, очевидно, равна равновесной скорости звука  $c_{II}$  в низкотемпературной фазе<sup>2</sup>:

$$c_{\text{равн}} = c_{II}. \quad (9)$$

Скорость же  $c_{\eta}$  — скорость звука при процессе, столь быстром, что параметр  $\eta$  при распространении звуковой волны остается постоянным. Вблизи  $\lambda$ -точки скорость  $c_{\eta}$  равна равновесной скорости звука в высокотемпературной фазе:

$$c_{\eta} = c_I. \quad (10)$$

Таким образом, окончательно имеем

$$c^2 = \frac{1}{1 - i\omega\tau} [c_{II}^2 - i\omega\tau c_I^2]. \quad (11)$$

Величина коэффициента поглощения звука  $\alpha$  равна мнимой части волнового вектора:

$$k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\frac{1 - i\omega\tau}{c_{II}^2 - c_I^2 i\omega\tau}}. \quad (12)$$

Предполагая разность значений скоростей  $c_{II}$  и  $c_I$  малой по сравнению с  $c_I$ , находим<sup>3</sup>

$$\alpha = \text{Im } k = \frac{\omega^2\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{1}{2c_I^3} (c_I^2 - c_{II}^2). \quad (13)$$

Время релаксации  $\tau$  вблизи  $\lambda$ -точки определяется формулой (7). Оно быстро возрастает при приближении к  $\lambda$ -точке. Согласно (13), при приближении к  $\lambda$ -точке (при заданной частоте звука  $\omega$ ) коэффициент поглощения звука также возрастает. В непосредственной же окрестности  $\lambda$ -точки ( $\omega\tau \approx 1$ ) величина  $\alpha$  достигает максимума, а затем начинает убывать. Такова общая картина явления аномального поглощения звука вблизи  $\lambda$ -точки в низкотемпературной фазе. В высокотемпературной же фазе никакого аномального поглощения звука не должно быть.

<sup>2</sup> Значения величин в низкотемпературной фазе обозначаем римской цифрой II, а в высокотемпературной — цифрой I.

<sup>3</sup> Формулой, аналогичной (13), пользовался П. Е. Степанов [2] при анализе данных о поглощении упругих колебаний в  $\beta$ -латуни вблизи точки Кюри. Автор, однако, не учитывал существенной вблизи точки фазового перехода температурной зависимости величины времени релаксации.

Величина скачка скорости звука в  $\lambda$ -точке  $c_{II} - c_I$ , входящая в формулу для  $\alpha$ , может быть выражена через обычно хорошо известную величину скачка теплоемкости в  $\lambda$ -точке.

Имея в виду в дальнейшем применять результаты к случаю  $\lambda$ -точки в гелии II, мы искомую связь получим для перехода в жидкости. Исходим из того, что объем  $V$  и температура  $T$  в точке перехода непрерывны (в качестве же независимых переменных выбираем давление  $p$  и энтропию  $S$ ), т. е. их скачки  $\Delta V$  и  $\Delta T$  равны нулю:

$$\Delta V = 0, \quad \Delta T = 0. \quad (14)$$

Дифференцируя эти равенства по энтропии вдоль кривой перехода, имеем

$$\Delta \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{dp}{dS} \Delta \frac{\partial V}{\partial p} = 0, \quad (15)$$

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial S} + \frac{dp}{dS} \Delta \frac{\partial T}{\partial p} = 0. \quad (16)$$

Учитывая равенство производных  $\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial T}{\partial p}$ , исключим из обоих равенств величину  $\Delta \frac{\partial V}{\partial S}$ :

$$\Delta \frac{\partial V}{\partial p} = \Delta \frac{\partial T}{\partial S} \left( \frac{dS}{dp} \right)^2. \quad (17)$$

Отсюда получаем искомое соотношение, связывающее скачки скорости звука и теплоемкости в  $\lambda$ -точке:

$$\Delta \frac{1}{c^2} = - \frac{T}{V} \left( \Delta \frac{1}{c_p} \right) \left( \frac{dS}{dp} \right)^2. \quad (18)$$

Производную  $dS/dp$  вдоль кривой равновесия фаз можно выразить через коэффициент теплового расширения  $\partial V/\partial T$  и производную  $\partial T_\lambda/\partial p$ :

$$\frac{dS}{dp} = \left( \frac{dS}{dp} \right)_T + \left( \frac{dS}{dT} \right)_p \frac{dT_\lambda}{dp} = - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + c_p \frac{d \ln T_\lambda}{dp}. \quad (19)$$

Полученные выше результаты относительно поглощения звука вблизи  $\lambda$ -точки применимы во всех случаях фазовых переходов второго рода<sup>4</sup>. Мы их применим для анализа данных по поглощению первого (обычного) звука вблизи  $\lambda$ -точки в гелии II.

<sup>4</sup> В частности, они должны быть применимы для переходов из нормального в сверхпроводящее состояние, где аномальное поглощение звука вблизи точки перехода экспериментально еще никем не наблюдалось.

Чейз [3] наблюдал аномальный рост коэффициента поглощения звука в гелии II при приближении к  $\lambda$ -точке. Выше же  $\lambda$ -точки аномально большого поглощения звука не наблюдалось. Пользуясь данными [4] для  $c_p$  и  $\partial V/\partial T$  и данными [5] о зависимости  $T_\lambda$  от давления, при помощи (18) находим величину скачка скорости звука в  $\lambda$ -точке:

$$c_{II} - c_I \approx 12,5 \text{ м/сек.} \quad (20)$$

Далее, сравнив экспериментальные значения коэффициента поглощения при различных температурах (применявшиеся частоты в [3] равнялись 2 и 12,1 мегациклов в секунду), находим величину времени релаксации  $\tau$ . Экспериментально полученное значение времени релаксации прекрасно следует температурной зависимости, даваемой формулой (7):

$$\tau = \frac{4 \cdot 10^{-13}}{T_\lambda - T} \text{ (сек).} \quad (21)$$

В интервале температур, в котором производились измерения, величина  $\omega\tau$  не превышала  $10^{-2}$ . Поэтому член  $\omega^2\tau^2$  в знаменателе выражения (13) можно при этом не учитывать. Указанный член мог бы оказать влияние лишь при  $T_\lambda - T \approx 3 \cdot 10^{-50}$  К (для рассматриваемых частот звука). Выше этого значения  $T$  следовало бы ожидать уменьшения величины коэффициента поглощения звука  $\alpha$ .

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Ландау, Е. Лифшиц. Механика сплошных сред, 1953.
- [2] П. Е. Степанов. ДАН СССР, 74, 217, 1950
- [3] C. Chase. Proc. Roy. Soc., 220, 116, 1953.
- [4]. В. Кеезом. Гелий. ИЛ, 1949.
- [5] W. Keesom, K. Clusius. Lieden University. Phys. Labor. Comm., N 246b, 1931.

Совместно с Е. М. ЛИФШИЦЕМ

ДАН СССР, 96, 725, 1954

Рассмотрим отражение слабого разрыва (разрыв первых производных скорости по координатам) от звуковой линии. Точку их пересечения выбираем в качестве начала координат  $x, y$ , а ось  $x$  — вдоль направления скорости в этой точке; тогда ей соответствует начало координат и в плоскости годографа  $\eta, \theta$ <sup>1</sup>. Пусть падающему разрыву соответствует в плоскости годографа характеристика  $Oa$  (рис. 1). Непрерывность координат  $x, y$  на разрыве означает непрерывность первых производных  $\Phi_\eta, \Phi_\theta$ . Напротив, вторые производные от  $\Phi(\eta, \theta)$  выражаются через первые производные скорости по координатам и потому должны испытывать разрыв. Сами же функции  $\Phi$  в областях 1 и 2 по обе стороны характеристики  $Oa$  не должны иметь на ней никаких особенностей. Такое решение уравнения Эйлера — Трикоми  $\Phi_{\eta\eta} - \eta\Phi_{\theta\theta} = 0$  имеет вид

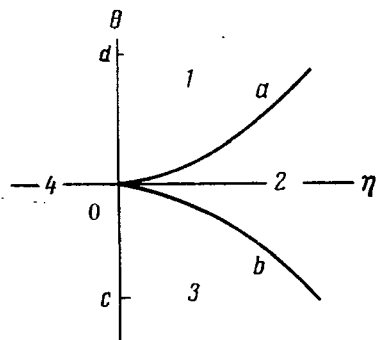


Рис. 1.

испытывать разрыв. Сами же функции  $\Phi$  в областях 1 и 2 по обе стороны характеристики  $Oa$  не должны иметь на ней никаких особенностей. Такое решение уравнения Эйлера — Трикоми  $\Phi_{\eta\eta} - \eta\Phi_{\theta\theta} = 0$  имеет вид

$$\Phi = -A\eta\theta - B\theta^{\frac{11}{12}}\zeta^2 F\left(\frac{13}{12}, \frac{19}{12}, 3; \zeta\right) \quad (1)$$

<sup>1</sup> Обозначения те же, что в [1], § 110, 111.

в области 1, и такой же вид с другой постоянной  $C$  вместо  $B$  — в области 2. Первый член здесь есть наиболее низкое по степеням  $\theta$  и  $\eta$  частное решение, не приводящее ни к каким особенностям течения в физической плоскости (ср. [1], § 111). Вторым же член приводит к скачку вторых производных по  $\Phi$  при непрерывных первых (это есть второй член в [1](110.6) с  $k = 11/12$ ). В (1) введено обозначение  $\xi = 1 - (4\eta^3/9\theta^2)$ .

Отраженному от звуковой линии разрыву соответствует вторая характеристика ( $Ob$ ). Вид функции  $\Phi$  вблизи нее устанавливается путем аналитического продолжения функции (1) согласно формулам [1] (110, 11—13) (в которых надо при этом положить  $k = 11/12 + \varepsilon$ , после чего стремиться  $\varepsilon$  к нулю). В результате вычисления для функции  $\Phi$  в области 4 вблизи характеристики  $Ob$  получается следующее выражение, в котором сохранены члены вплоть до порядка  $\xi^2$  включительно:

$$\begin{aligned} \Phi &= -A\theta\eta + \frac{B}{\pi} (-\theta)^{11/6} \left\{ \xi^2 \ln |\xi| - \frac{2^9 \cdot 3^4}{385} + \frac{288}{7} \xi + \right. \\ &\quad \left. + \left[ 2\gamma - 2 \ln 2 + \frac{2781}{770} + \psi\left(\frac{17}{6}\right) + \psi\left(\frac{13}{6}\right) \right] \right\} = \\ &= -A\theta\eta + \frac{B}{\pi} (-\theta)^{11/6} \left\{ \xi^2 \ln |\xi| - 108 - 41,1 \xi + 4,86 \xi^2 \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

( $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ ,  $\gamma$  — постоянная Эйлера). Аналогичное преобразование функции  $\Phi$  в области 1 от окрестности  $Oa$  к окрестности  $Ob$  дает такое же выражение (2) с  $C/2$  вместо  $B$ . Условие непрерывности координат  $x, y$  на отраженном разрыве приводит, следовательно, к соотношению  $C = 2B$ .

Условие положительности якобиана  $\Delta = \partial(x, y)/\partial(\theta, \eta)$  автоматически выполняется вблизи  $Oa$  (где  $\Delta \approx A^2$ ), а вблизи  $Ob$  вычисление при помощи (2) дает

$$\Delta \approx -\frac{16}{\pi} \left(\frac{3}{2}\right)^{11/6} AB\eta^{11/6} \ln |\xi|.$$

При приближении к  $Ob$   $\ln |\xi| \rightarrow -\infty$ , а потому из условия  $\Delta > 0$  имеем  $AB > 0$ .

На падающем разрыве (характеристика  $\theta = +2/3 \eta^{1/2}$ ) имеем  $x = \Phi_\eta = -A\theta$ ,  $y = \Phi_\theta = -A\eta$ . Поскольку скорость газа направлена в положительном направлении оси  $x$ , то этот разрыв, для того чтобы быть «приходящим» по отношению к точке пересечения, должен лежать в полуплоскости  $x < 0$ . Отсюда следует, что постоянная  $A$ , а с нею и  $B, C$  положительны. Уравнение линии разрыва в физической плоскости будет

$$-y = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} A^{1/3} (-x)^{2/3} = 1,31 A^{1/3} (-x)^{2/3}. \quad (3)$$

Уравнение же отраженного разрыва получается дифференцированием по  $\theta$  и  $\eta$  функции (2) и гласит

$$-y = 1,31 A^{1/2} x^{3/2} + 115BA^{-3/2} x^{3/2}, \quad (4)$$

где сохранен также и поправочный член, отсутствующий в (3).

Для определения формы линии перехода производим аналитическое продолжение функции (1) в область вблизи оси  $\eta = 0$ . Вблизи верхней полуоси получим

$$\Phi = -A\eta\theta - B|\theta|^{11/2} \frac{2\Gamma(1/3)}{\Gamma(17/12)\Gamma(33/12)} = -A\eta\theta - 6,25 B|\theta|^{11/2}, \quad (5)$$

а вблизи нижней полуоси — такое же выражение с  $\sqrt{3}B$  вместо  $B$  (здесь сохранены лишь члены наиболее низких степеней по  $\eta$ ). Производя дифференцирование по  $\theta$  и  $\eta$  и положив затем  $\eta = 0$ , получим следующие уравнения двух ветвей линии перехода:

$$y = -11,4 BA^{-3/2} (-x)^{3/2}, \quad y = 11,4 \sqrt{3} BA^{-3/2} x^{3/2}. \quad (6)$$

Взаимное расположение всех линий показано на рис. 2, где обозначения линий и областей соответствуют обозначениям на рис. 1.

Разрыв производных скоростей на падающем разрыве можно характеризовать скачком производной

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_y = -\frac{\Phi_{\theta\eta}}{\Delta}.$$

Вычисление при помощи (1) дает

$$\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_y\right]_2^1 = 8\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{B}{A^2} \eta^{-1/2} = 8,56BA^{-7/2} |y|^{-1/2}. \quad (7)$$

На отраженном же слабом разрыве производные скорости вообще не испытывают скачка, но распределение скоростей имеет своеобразную трансцендентную особенность. Вычислив из функции (2) (сохранив в ней лишь первый член в скобках) координаты  $x$ ,  $y$ , можно представить зависимость  $\eta$  от  $x$  при заданном  $y$  в следующем параметрическом виде:

$$\eta = \frac{|y|}{A} + \frac{x-x_0}{\sqrt{A|y|}} - \frac{1}{6A} |y|\zeta,$$

$$x-x_0 = \frac{1}{3\sqrt{A}} |y|^{3/2}\zeta - \frac{8}{\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{B|y|^{1/2}}{A^{3/2}} \zeta \ln|\zeta|, \quad (8)$$

где  $\zeta$  играет роль параметра, а  $x_0 = x_0(y)$  — уравнение линии разрыва в физической плоскости.

Уравнение Эйлера — Трикоми должно быть применено и к вопросу о возможности окончания ударной волны вниз по течению при ее пересечении со звуковой линией (точка  $O$  на рис. 3, а, по отношению к которой ударная волна является «приходящей»)<sup>2</sup>;

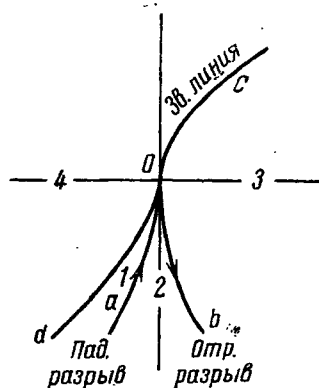


Рис. 2.

вблизи такой точки интенсивность ударной волны была бы малой, т. е. течение — околосвуковым. Нами были рассмотрены различные варианты картины течения, отличающиеся, в частности, числом характеристик, оканчивающихся в точке  $O$  (при этом следует учитывать, что на «приходящих» характеристиках не должно быть никаких особенностей, так как таковые могли бы возникнуть лишь от каких-либо посторонних причин, не имеющих отношения к окончанию ударной волны). Ни в одном из этих вариантов, однако, не удается построить решения уравнения Эйлера — Трикоми, которое бы удовлетворяло всем не-

обходимым условиям. Не существует, по-видимому, и решений, которые соответствовали бы окончанию ударной волны вместе со звуковой линией в точке их пересечения (рис. 3, б). Мы полагаем

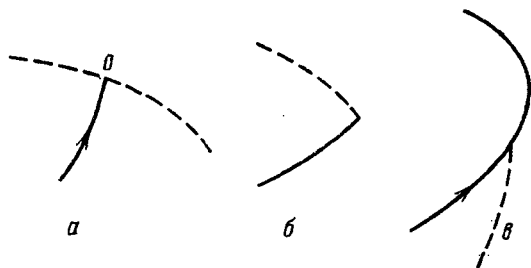


Рис. 3. Сплошные линии — ударная волна, штриховые — звуковая волна

поэтому (хотя и не имеем строгого доказательства этого утверждения), что ударная волна не может «окончиться», а потому должна либо уходить на бесконечность, либо перегибаться, как это

<sup>2</sup> Что касается «начала» ударной волны, то оно может иметь место в любой точке сверхзвукового потока, и исследование его свойств не представляет особых затруднений (ср., например, [1], § 107).



показано на рис. 3, *в*, так чтобы быть «исходящей» по отношению к обоим своим концам. Последний случай должен, во всяком случае, иметь место для ударной волны, возникающей в местной сверхзвуковой зоне.

Сделаем также некоторые замечания по поводу формы местной сверхзвуковой зоны, образующейся при обтекании с  $M < 1$ . До тех пор, пока в ней не возникает ударной волны, эта зона должна целиком примыкать к поверхности обтекаемого тела. В противном случае звуковая линия, проходя позади тела, хотя бы в одной точке была бы перпендикулярна линии тока, будучи при этом обращена своей вогнутостью в сторону сверхзвуковой зоны; между тем в такой точке звуковая линия может быть вогнута лишь в сторону дозвуковой области (см, например, [1], § 111). Если же граница сверхзвуковой области проходит позади тела (что, во всяком случае, должно наступить при каких-то значениях  $M$ , достаточно близких к 1), то эта граница должна складываться как из звуковой линии, так и из куска пересекающей ее ударной волны (причем, однако, в точках пересечения интенсивность ударной волны отнюдь не обращается в нуль).

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, 2-е изд., 1953.

В сборнике «Нильс Бор и развитие физики»  
Лондон, 1955; М., ИЛ, 1958

За последние семь или восемь лет благодаря замечательным работам Швингера, Фейнмана, Дайсона и других квантовая электродинамика достигла очень больших успехов. Теория возмущений была перестроена релятивистски инвариантным образом, и было показано, что она может послужить основой для развития однозначной методики, приводящей к конечным выражениям для тех эффектов, для которых ранее получались бесконечности. Более того, с помощью той же методики оказалось возможным вычислить в замкнутой форме поправки любого порядка. Поразительное согласие между полученными таким образом результатами и опытом полностью подтвердило правильность развитых методов.

Таким образом, из электродинамики, основанной на понятии точечного взаимодействия, которое описывается произведением операторов, взятых в одной и той же точке пространства, можно было устранить бесконечности. Вследствие этого замечательным образом расширилась область применимости электродинамики.

В теории  $\pi$ -мезонных взаимодействий положение существенно иное. Для некоторых типов взаимодействия (в частности, псевдовекторной связи) устранение бесконечностей тем же способом, что в электродинамике, оказалось совершенно невозможным. В случае чисто псевдоскалярной связи, когда эту программу формально можно провести, сравнение с наблюдениями показывает, что значение константы связи делает невозможным какое-либо приложение теории возмущений. С другой стороны, существующая теория не предлагает иных возможностей подсчета величин, кроме как в виде рядов теории возмущений. Эти ряды, ско-

рее всего, являются асимптотическими, и потому при больших значениях константы связи они не дают никаких сведений о тех величинах, которые они описывают.

Однако даже в электродинамике существующий в настоящее время метод устранения бесконечностей в значительной мере сохранил характер рецепта, что является серьезной помехой для дальнейшего развития теории. Поэтому попытаемся прежде всего объяснить существующую теорию, не используя действительно бесконечных величин. Одновременно мы сможем установить область применимости этой теории, которая обычно необоснованно полагается неограниченной.

Поскольку рассмотрение точечного взаимодействия сразу приводит к бесконечностям, представляется разумным рассматривать его как предел некоего «размазанного» взаимодействия конечного радиуса, когда этот радиус уменьшается до нуля. Делая так, мы не предполагаем, что постоянная  $e_1$ , которая входит во взаимодействие как коэффициент и представляет собой «внутренний» заряд электрона в квантовой электродинамике, не зависит от радиуса взаимодействия. Наоборот, зависимость этой постоянной от радиуса взаимодействий должна быть определена так, чтобы окончательные результаты теории (выражения для физических эффектов) не зависели от радиуса взаимодействия, поскольку последний вводится как вспомогательная величина и потому лишен физического смысла. Подход такого рода означает, по существу, отказ от какого-либо неоправданного рассмотрения точечного взаимодействия при помощи  $\delta$ -функции.

Как известно, все расходимости в электродинамике логарифмические. Единственное исключение — это квадратичная расходимость собственной массы фотона. Последний факт, однако, не является серьезным возражением, поскольку, как легко видеть, появление массы у фотона под влиянием его взаимодействия с заряженными частицами противоречит закону сохранения заряда. Если «размазывание» производится таким образом, что закон сохранения заряда при этом не нарушается, то соответствующие выражения тождественно сведутся к нулю.

Логарифмическая расходимость интегралов в теории возмущений, которые берутся по импульсу виртуальной частицы, всегда возникает в интервале  $p \ll k \ll \Lambda$ , где  $k$  — переменная интегрирования,  $\Lambda \sim 1/a$  — верхний предел интегрирования,  $a$  — порядок величины радиуса «размазанного» взаимодействия и  $p$  — порядок величины рассматриваемого четырехмерного импульса, если он велик по сравнению с массой покоя  $m$  электрона. Если же  $|p|^2 \ll m^2$ , то нижним пределом логарифмического интервала интегрирования является  $m$ . Если  $p^2$  для электрона близок к  $m^2$ , то возникает дополнительная логарифмическая область,

связанная с так называемой инфракрасной катастрофой, которой мы коснемся ниже.

Известно также, что степень логарифмической расходимости нигде не превосходит использованного порядка теории возмущений, т. е. величина  $\ln(\Lambda^2/p^2)$  входит в любое выражение в степени, не превышающей степень  $e_1^2$  квадрата заряда<sup>1</sup>. Мы подчеркиваем, что при таком подходе к проблеме заряд  $e_1$  является ненаблюдаемым зарядом электрона, который зависит от выбранного значения  $\Lambda$  и никоим образом не совпадает с физическим зарядом  $e$ .

Таким образом, сходимость ряда в теории возмущений непосредственно связана со значением параметра  $e_1^2 \ln(\Lambda^2/p^2)$ . Условием применимости теории возмущений во всем интервале будет

$$e_1^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \ll 1. \quad (1)$$

Как известно, полученные таким путем результаты можно перенормировать, т. е. если физический заряд электрона определяется его взаимодействием с квантом нулевой частоты и его массой как физической массой электрона, то неопределенная постоянная  $\Lambda$  исчезает из формул для физических эффектов. Величины  $e$  и  $m$  будут выражаться через «внутренние» значения  $e_1$  и  $m_1$  при помощи разложения в ряды по степеням  $e_1^2$  и  $\ln(\Lambda^2/m^2)$ .

Эта перенормируемость теории в действительности является приближенной, так как при этом пренебрегается членами порядка  $p^2/\Lambda^2$ . Поскольку при использовании теории возмущений  $\Lambda$  ограничена неравенством (1), эту ошибку, вероятно, нельзя сделать произвольно малой. Легко видеть, однако, что вносимая этим пренебрежением ошибка по порядку величины составляет  $\sim \exp(-\text{const}/e^2)$ , т. е. крайне мала вследствие малости  $e^2$ . Отметим, что экспоненциальный характер погрешности является дополнительным аргументом в пользу асимптотической природы ряда.

Если неравенство (1) не выполняется, использование теории возмущений становится невозможным. Тогда возникает задача о нахождении основных величин без прямого использования теории возмущений. В работах Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосова и И. М. Халатникова [1—4] такого рода выкладки были произведены при предположении, что

$$e_1^2 \ll 1, \quad (2)$$

<sup>1</sup> Для простоты мы всегда будем писать  $\ln(\Lambda^2/p^2)$ , имея в виду, что при  $|p|^2 \ll m^2$  это следует заменить на  $\ln(\Lambda^2/m^2)$ .

что значительно слабее, чем (1). При вычислении необходимо принять во внимание, что, когда условие (2) выполнено, можно пренебречь всеми членами, содержащими при заданной степени логарифма более высокие степени  $e_1^3$ , чем главный член. Как мы уже говорили, самая низкая степень  $e_1^2$  равна степени логарифма. Следовательно, чтобы получить первое приближение, достаточно ограничиться комбинацией членов типа  $[e_1^2 \ln(\Lambda^2/p^2)]^n$ .

В качестве исходных функций естественно взять функции Грина для электрона  $G(p)$  и фотона  $D_{\mu\nu}(k)$ , т. е. точные выражения для электронных и фотонных линий с учетом поправок всех порядков. Эти функции выражаются через соответствующие операторы  $\psi$  и  $A$  для электрона и векторного потенциала. В координатном представлении

$$D_{\mu\nu}(x-x') = \frac{i}{4\pi} \langle T(A_\mu(x) A_\nu(x')) \rangle, \quad (3)$$

$$G(x-x') = -i \langle T(\psi(x) \bar{\psi}(x')) \rangle,$$

где среднее берется по физическому вакууму и символ  $T$  означает, что произведение берется в порядке временной последовательности величин  $x$  и  $x'$  с надлежащим знаком в случае  $G$ .

Чтобы определить эти функции, необходимо использовать также вершинную часть  $\Gamma_\mu(p, q; k)$ , где  $q = p - k$ . Здесь можно показать, что при определении функций  $G(p)$  и  $D(k)$  для пространственных векторов  $p$  и  $k$  достаточно использовать те  $\Gamma_\mu$ , в которых все три вектора также пространственны [1, 2]. Поскольку  $G$  и  $D$  для временных векторов можно найти из  $G$  и  $D$  для пространственных векторов путем аналитического продолжения, достаточно рассматривать только «пространственные»  $\Gamma_\mu$ . В таких  $\Gamma_\mu$  либо все величины  $p^2$ ,  $q^2$  и  $k^2$  одного порядка, либо из них одна сравнительно мала, а две другие почти равны. Случай, когда одна из трех величин велика по сравнению с двумя другими, что вполне возможно для непространственных векторов, здесь исключен. Для таких  $\Gamma_\mu$  ряд в теории возмущений содержит только логарифмы типа  $\ln(\Lambda^2/f^2)$ , где  $f^2$  — наибольшая из величин  $p^2$ ,  $q^2$  и  $k^2$ , и только в степенях, не больших степени  $e_1^2$ . Мы замечаем, что это, вообще говоря, не выполняется для непространственных  $\Gamma_\mu$ . В частности, если  $k^2$  велико по сравнению с  $p^2$  и  $q^2$ , то в формулы входят  $\ln(k^2/p^2)$  и  $\ln(k^2/q^2)$  и их общая степень может вдвое превосходить степень  $e_1^2$  [5]. Этот вопрос более подробно обсуждался В. В. Судаковым [6].

Функцию Грина для фотона из соображений релятивистской инвариантности можно всегда записать в виде

$$D_{\mu\nu}(k) = D_l(k^2) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + D_t(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (4)$$

При использовании теории возмущений обычно предполагается, что в нулевом приближении  $D_i^0 = D_i^0 = 1/k^2$ . В результате возмущений  $D_i$  меняется, тогда как функция  $D_i$  остается равной своему нулевому приближению благодаря поперечности дираковского тока (сохранение заряда). Однако такой выбор  $D_i$  в высшей степени неудобен. Существенно, что вследствие градиентной инвариантности выбор функции  $D_i(k^2)$ , вообще говоря, произволен. Это означает, что выражения для физических эффектов не зависят от  $D_i$ . Величины, которые мы рассматриваем, если не считать  $D_i$ , не обладают градиентной инвариантностью. Градиентная инвариантность  $D_i$  следует из того, что поперечные компоненты  $A_\mu$  ( $A_\mu - k_\mu k_\nu A_\nu/k^2$ ) не изменяются при градиентном преобразовании. С другой стороны, оператор  $\psi$  меняется при градиентном преобразовании и величины  $G$  и  $\Gamma_\mu$  меняются соответственно.

Мы не будем обсуждать здесь эти изменения. И. М. Халатников и автор развили общую теорию градиентных преобразований, позволяющую в случае произвольных  $D_i$  вычислять  $G$  и  $\Gamma$ , зная их значения для  $D_i = 0$ . Поэтому ниже будем использовать условие  $D_i = 0$ , что значительно упрощает формулы и обычно является более естественной процедурой (это соответствует непосредственно условию Лоренца  $\partial A_\mu/\partial x_\mu = 0$ ).

Полагая  $D_i = 0$ , можно показать, используя теорию возмущений для величины  $\Gamma_\mu$  (которые являются пространственными), что члены типа  $[e_1^2 \ln(\Lambda^2/p^2)]^n$ , которые мы рассматриваем, тождественно обращаются в нуль. То же самое имеет место и для радиационных поправок к  $G$  в предположении  $|p^2| \gg m^2$ , т. е. если пренебрегается поправкой к массе.

Теперь для определения  $D_i$  можно использовать уравнение Дайсона [7]

$$D_i \left( k^2 + \frac{e_1^2}{3\pi i} \text{Sp} \left[ \int G(p) \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_\mu d^4p \right] \right) = 1,$$

в котором можно положить  $\Gamma_\mu = \gamma_\mu$  и  $G = 1/(\gamma p - m)$ . Тогда получим

$$k^2 D_i(k^2) = \frac{1}{1 + \frac{e_1^2}{3\pi} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{-k^2} \right)} \quad (k^2 = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2). \quad (5)$$

В случае  $k^2 \ll m^2$  в этой формуле стоит  $\ln(\Lambda^2/m^2)$  вместо  $\ln(\Lambda^2/-k^2)$ . Для  $k^2 = \Lambda^2$  формула (5) дает  $D_i = 1/k^2$ , означающее, что для значений  $k^2 \gg \Lambda^2$  взаимодействие отсутствует и частица рассматривается как свободная.

Формула (5) по своей природе условна в следующем смысле. При ее выводе предполагалось, что единственной частицей, поляризующей вакуум, является электрон, что, возможно, неправильно. Очень вероятно, что взаимодействие с электромагнитным полем частиц, способных к сильному неэлектромагнитному взаимодействию (нуклоны,  $\pi$ -мезоны), вне «радиуса» этих частиц быстро уменьшается с длиной волны, так что они не дают заметного вклада в поляризацию вакуума. Возможно, однако, что имеются частицы, не способные к сильному взаимодействию ( $\mu$ -мезоны?), вносящие значительный вклад в поляризацию вакуума. В настоящее время ничего нельзя сказать относительно количества сортов таких частиц или их свойств.

Если поляризация вакуума вызывается только частицами со спином  $1/2$  и зарядом, равным заряду электрона, то в формуле (5) появляется коэффициент, равный числу  $\nu$  сортов частиц:

$$k^2 D_l(k^2) = \frac{1}{1 + \frac{\nu e_1^2}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-k^2}\right)} \quad (|k^2| \gg m^2),$$

$$k^2 D_l(k^2) = \frac{1}{1 + \frac{\nu e_1^2}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)} \quad (|k^2| \lesssim m^2). \quad (6)$$

Частицы с зарядом  $Ze$  приводят в члене с  $\nu$  к коэффициенту  $Z^2$ . Частицы со спином 0 приводят в члене с  $\nu$  к коэффициенту  $1/4 Z^2$ , как это можно показать, применяя теорию возмущений [8]; этот вопрос был очень детально исследован Л. П. Горьковым и И. М. Халатниковым. В случае частиц со спином 1 возникающие расходимости будут не логарифмическими, а квадратичными [9]. Более подробно мы исследуем это обстоятельство ниже.

Анализ физических эффектов показывает, что физический заряд  $e$  связан с  $e_1$  соотношением

$$e^2 = e_1^2 \lim_{k^2 \rightarrow 0} k^2 D_l(k^2). \quad (7)$$

Из формулы (6) при этом получается

$$e^2 = \frac{e_1^2}{1 + \frac{\nu e_1^2}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)} \quad (8)$$

или

$$e_1^2 = \frac{e^2}{1 - \frac{\nu e^2}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)}. \quad (9)$$

Выразив функцию  $D_t$  через  $e^2$ , получим

$$k^2 D_t(k^2) = \frac{e^2}{e_1^2} \frac{1}{1 - \frac{ve^2}{3\pi} \ln\left(-\frac{k^2}{m^2}\right)}. \quad (10)$$

Выражение (10), очевидно, перенормируемо, т. е. мы можем заменить ненаблюдаемый заряд  $e_1$  физическим зарядом  $e$  в каждой формуле, умножая функцию  $D$  на перенормирующий множитель  $Z_3 = e_1^2/e^2$ , после чего все величины уже не будут содержать параметра обрезания  $\Lambda$  или связанного с ним заряда  $e_1$ .

Заряд  $e_1$ , определяемый формулой (9), всегда больше заряда  $e$ . Это естественно, поскольку поляризация вакуума ведет к уменьшению «истинного» заряда. Такой результат связан со свойствами функции  $D_t$ , которая монотонно растет с увеличением  $k^2$ . Это пример общего свойства функции Грина, описанного в работах Челлена [10] и Лемана [11].

Выражение (10) удовлетворяет условиям, выведенным в работе Гелл-Манна и Лоу [12]. Особенно просто это условие можно вывести, если исходить из развитых здесь концепций.

Изложенная выше теория показывает, что при вычислении исходных функций, соответствующих некоторым значениям  $(k^2)_0$ , достаточно рассмотреть область значений  $k^2$  порядка  $(k^2)_0$  и в особенности значения, большие  $(k^2)_0$ . Область значений  $k^2 \ll \ll (k^2)_0$  дает пренебрежимо малый эффект (в действительности порядка  $[k^2/(k^2)_0]^2$ ), поскольку соответствующая область интегрирования мала и для малых  $k$  интеграл сходится. Мы можем, таким образом, «спуститься» от предела  $\Lambda$  к значениям  $k$ , которые нас интересуют, не обращая внимания при вычислении на очень малые значения  $k$ .

Отсюда следует, что при рассмотрении значений  $k^2 \gg m^2$  в формуле для  $D_t$  масса не может появиться. Следовательно, из соображений размерности безразмерная величина  $k^2 D_t$  может зависеть только от двух безразмерных величин:  $e_1^2$  и  $k^2/\Lambda^2$ . С другой стороны, величина  $e_1^2 D_t$  определяет физические эффекты, и поэтому для заданного значения физического заряда  $e$  она не может зависеть от параметра обрезания  $\Lambda$ . Это возможно только при условии, что

$$e_1^2 k^2 D_t = f\left[\frac{-k^2}{\Lambda^2} \psi(e_1^2)\right],$$

где  $f$  и  $\psi$  — произвольные функции, причем выполняется соотношение

$$\frac{m^2}{\Lambda^2} \psi(e_1^2) = \chi(e^2),$$



где  $\chi$  — снова некоторая произвольная функция. Вводя функцию  $\varphi$ , обратную к  $f$ , можно для удобства записать эти соотношения в виде

$$\varphi(e_1^2 k^2 D_1) = \frac{-k^2}{\Lambda^2} \psi(e_1^2) = \frac{-k^2}{m^2} \chi(e^2). \quad (11)$$

Сравнение с формулой (6) показывает, что в рассматриваемом нами приближении

$$\varphi(x) = \psi(x) = \chi(x) = e^{-3\pi/\nu x}.$$

Эти формулы следует рассматривать как асимптотические выражения функций для малых  $x$ . Результаты работы [13] позволяют вычислить следующее приближение. Мы получаем здесь

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= e^{-3\pi/\nu x} x^{-9/4\nu}, \\ \chi(x) &= \psi(x) e^{-1/s}. \end{aligned}$$

Уточнять различие между  $\psi(x)$  и  $\varphi(x)$  нет смысла, поскольку при этом должна сказаться лишь природа «размазывания».

В более высоких приближениях мы получили бы

$$\varphi(x) = e^{-3\pi/\nu x} x^{-9/4\nu} F(x), \quad (12)$$

где  $F(x)$  — некоторый ряд по степеням  $x$ , и подобное же выражение для  $\chi(x)$ .

Отметим, что появление экспоненциального члена, не разлагаемого в ряд, является аргументом в пользу асимптотического характера ряда  $F(x)$ .

Область применения формулы (6) значительно шире области, получаемой по теории возмущений. Однако даже формула (6) не дает возможности сделать какие-либо заключения при переходе к пределу. Как следует из (9), при достаточно больших  $\Lambda$  всегда имеется точка, где  $e_1$  становится порядка единицы и соответствующее приближение становится неприменимым.

Таким образом, теория «слабой связи» в электродинамике является принципиально логически неполной. Можно было бы думать, что в силу этого необходимо дополнить ее «сильной связью» при высоких энергиях. Мы, однако, покажем, что имеются серьезные основания предположить, что если мы рассматриваем физический заряд  $e$  как функцию  $e_1$  и  $\Lambda$ , то при заданном  $\Lambda$  никакое увеличение  $e_1$  не может вести к увеличению  $e$  выше некоторого предела, стремящегося к нулю при росте  $\Lambda^2$ .

<sup>2</sup> Рассуждения, приведенные ниже, принадлежат И. Я. Померанчуку и автору [14].

Чтобы показать это, рассмотрим значения  $e_1$ , не слишком малые по сравнению с единицей, и значения  $k$ , малые по сравнению с  $\Lambda$ , так что  $(ve_1^2/3\pi) \ln(\Lambda^2/k^2) \gg 1$ . Тогда из формулы (6) следует, что  $D_t = 3\pi/ve_1^2 k^2 \ln(\Lambda^2/-k^2)$ . Введем вместо векторного потенциала величину  $\mathfrak{M}_\mu = e_1 A_\mu$ . В этом случае член взаимодействия в лагранжиане не будет содержать заряда  $e_1$ , в то время как член, соответствующий лагранжиану свободного поля, будет содержать  $e_1^2$  в знаменателе. Функция  $\mathfrak{D}_t$ , соответствующая вектору  $\mathfrak{M}$ , принимает вид

$$\mathfrak{D}_t = \frac{3\pi}{vk^2 \ln(\Lambda^2/-k^2)}. \quad (13)$$

В этом выражении не содержится заряд  $e_1$ . Следовательно, можно думать, что оно, по существу, получается при пренебрежении членом свободного поля в лагранжиане. Трудно предполагать, что законность пренебрежения этим членом будет уменьшаться при законнейшем увеличении  $e_1$ .

Применимость выражения (13) для больших  $e_1$  означает, что заряды  $e_1 \gg 1$  настолько поляризуют вакуум, что «эффективный заряд»  $\sqrt{e_1^2 k^2 D_t(k^2)}$  становится по величине порядка единицы, даже если отношение  $\Lambda^2/k^2 \sim 1$ . Другими словами, если в пределах некоторого радиуса  $a$  сконцентрирован произвольно большой заряд, то благодаря поляризации вакуума полный заряд внутри радиуса  $2a$  будет по величине порядка единицы.

Рассмотрим физический заряд  $e$  в зависимости от  $e_1$  и  $\Lambda$ . Так как мы предположили, что при стремлении  $e_1$  к бесконечности  $\mathfrak{D}_t$  стремится в пределе к выражению (13), то для физического заряда можно написать (см. (7), (8))

$$e^2 \rightarrow \frac{3\pi}{v \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)}. \quad (14)$$

Так как это выражение стремится к нулю при  $\Lambda \rightarrow \infty$ , то мы приходим к заключению, что в рамках чистой электродинамики точечное взаимодействие любой интенсивности ( $e_1^2 \rightarrow \infty$ ) эквивалентно полному отсутствию взаимодействия.

Любопытно, что в результате мы пришли к совершенно парадоксальным выводам. В течение 25 лет предполагалось, что использование  $\delta$ -функции неизбежно приводит к бесконечным взаимодействиям. Формула (8), однако, убедительно доказывает, что  $\delta$ -функция ( $e_1$  не зависит от радиуса обрезания) в действительности приводит к нулевому взаимодействию, и даже неограниченное увеличение  $e_1$ , по-видимому, не спасает положения.

Обратно, излагаемая теория при данной величине физического заряда  $e$ , по-видимому, имеет «потолок», ибо ее в принципе нельзя использовать для рассмотрения энергий, больших  $\Lambda_h$ , — такого значения  $\Lambda$ , при котором  $e_1 \rightarrow \infty$  (как мы уже говорили, это практически совпадает со значением, соответствующим  $e_1 \sim 1$ ), или соответственно расстояний, меньших  $1/\Lambda_h$ .

Само собой разумеется, что из полученного результата обращение в нуль точечного взаимодействия в случае электродинамики нельзя извлечь никаких однозначных физических выводов. Энергии  $\Lambda$ , при которых  $e^2 \approx 3\pi/\nu \ln(\Lambda^2/m^2)$ , во всяком случае, очень велики. При таких энергиях эффекты гравитационного взаимодействия могут превышать электромагнитные эффекты, и рассмотрение электродинамики как замкнутой системы становится физически неправильным. Очень привлекательна идея, по которой этот «кризис» в электродинамике происходит как раз при тех энергиях, где гравитационное взаимодействие становится сравнимым с электромагнитным. Так как эффективный заряд в критической области порядка единицы, это означает, что

$$\kappa\Lambda^2 \sim 1,$$

где  $\kappa$  — гравитационная постоянная. Отсюда для критического значения  $\Lambda$  получается величина порядка  $10^{23}$  эв. Используя формулу (14), получаем  $\nu \approx 12$ . С этой точки зрения величина физического заряда  $e$  электрона будет автоматически определяться из теории. Пока, конечно, нельзя сказать, насколько реальны все эти идеи. Возможно, в частности, что  $\nu < 12$  и что гравитационные эффекты начнут проявляться гораздо раньше, чем эффективный заряд достигнет значения порядка единицы<sup>3</sup>.

Если в процессе поляризации вакуума участвуют частицы со спином 1, то положение существенно меняется. Как уже говорилось, в этом случае расходимость будет не логарифмической, а квадратичной. Это приводит к тому, что упомянутые выше трудности возникают не при чрезвычайно больших значениях  $\Lambda$ , а при значениях, соответствующих  $e^2\Lambda^2/M^2 \sim 1$ , где  $M$  — масса частицы. При этом ясно, что приведенная выше возможность обхода этих трудностей отпадает. Ниже мы обсудим ситуацию, которая возникает в этом случае. Очевидно, что все эти трудности усугубляются для частиц с высшими спинами [15]. Однако пока нет указаний на существование таких частиц.

<sup>3</sup> Мы не рассмотрели здесь возможности того, что при высоких энергиях начнут играть важную роль и какие-либо другие неэлектромагнитные взаимодействия.

Перейдем теперь к вопросу о массе электрона. Чтобы найти соотношение между физической и «собственной» массой, мы запишем функцию Грина для электрона в виде

$$G(p) = \frac{1}{\gamma p - m(p^2)}. \quad (15)$$

При больших значениях  $p^2$  отношение второго члена в знаменателе к первому становится пренебрежимо малым и всегда намного меньше по величине, чем неточности в выражении (15). Тем не менее этот член удается учесть, так как он в отличие от первого является четной функцией импульса.

Выпишем теперь формулу Дайсона [7] для  $G$

$$G^{-1}(p) = \gamma p - m_1 - \frac{e_1^2}{4\pi} \int \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_\nu D_{\mu\nu}(k) d^4k \quad (16)$$

и подставим в нее выражение (15) для  $G$  (вместо  $\Gamma_\mu$  мы, как и прежде, пишем  $\gamma_\mu$ ; законность этого подробно исследована в [4]). После некоторых вычислений получаем

$$m(p^2) = m_1 + \frac{3e_1^2}{4\pi} \int_{p^2}^{\Lambda^2} m(k^2) D_t(k^2) d(k^2). \quad (17)$$

Это интегральное уравнение решается элементарными методами, и после подстановки выражения (6) для  $D_t(k^2)$  можно получить

$$m(p^2) = m_1 \left[ 1 + \frac{\nu e_1^2}{3\pi} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{-p^2} \right) \right]^{1/4 \nu} \quad \text{для } |p^2| \gg m^2. \quad (18)$$

Отсюда можно получить физическую массу, положив  $p^2 \sim -m^2$ , и соотношение между  $m_1$  и  $m$  дается формулой

$$m_1 = m \left( \frac{e^2}{e_1^2} \right)^{1/4 \nu}. \quad (19)$$

Согласно этой формуле  $m_1$  уменьшается при увеличении  $\Lambda$ . Поэтому разумно предположить, что если бы мы смогли распространить теорию на случай  $\Lambda \rightarrow \infty$ , то масса  $m$  обратилась бы при этом в нуль; это означало бы, что масса электрона имеет электромагнитное происхождение. Итак, эти концепции ведут к своеобразному возвращению к давно отвергнутой идее о чисто электромагнитной массе электрона.

Особого рассмотрения требуют функции Грина для электрона  $G$  и вершинная часть  $\Gamma_\mu$ , когда квадрат импульса электрона приближается к  $m^2$  — положение, которое соответствует так называемой инфракрасной катастрофе. Этот вопрос был исследован А. А. Абрикосовым [16], который показал, что соответствующее выражение функции  $G$  дается формулой

$$m^2 G = - \frac{\hat{p} + m}{\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right)^{1+3e^2/2\pi}}. \quad (20)$$

В противоречии с общепринятым мнением эта функция при  $p^2 = m^2$  имеет не простой полюс, а точку ветвления. Отметим, что для  $D_l \neq 0$  степень знаменателя зависит от

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} k^2 D_l(k^2).$$

Выражение для  $\Gamma_\mu(p, q; k)$  (где  $q = p - k$ ) отличается от  $\gamma_\mu$ , только когда  $p^2$  и  $q^2$  близки к  $m^2$ . Мы не будем выписывать здесь соответствующие формулы.

Как уже говорилось, изложенная выше теория не применима к  $\Gamma_\mu(p, q; k)$ , когда наименьшее из  $p^2$ ,  $q^2$  и  $k^2$  очень мало по сравнению с наибольшим и когда два самых больших из этих чисел не очень близки друг к другу. Наиболее существенные эффекты обнаруживаются при выполнении неравенств  $k^2 \gg p^2$  и  $k^2 \gg q^2$ . В этом случае в формуле появляются члены, зависящие от произведения  $e^2 \ln(k^2/p^2) \ln(k^2/q^2)$  и возрастающие с ростом  $k$  значительно быстрее, чем члены, рассмотренные выше. Выполненный В. В. Судаковым [6] анализ показал, что возникающие здесь эффекты также связаны с «инфракрасной катастрофой».

Если мы обратимся к физическим эффектам при очень высоких энергиях, то необходимо учесть, что не приведенные здесь диаграммы высших порядков (т. е. диаграммы, которые не сводятся к изменению  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$  в простейших диаграммах), хотя и не приводят к расходимости, но содержат логарифмы отношений энергий различных частиц. Следовательно, при вычислении соответствующих эффектов мы должны, следуя развитому выше методу, суммировать диаграммы, которые в данном приближении теории возмущений содержат наиболее высокие степени логарифмов. Отметим здесь, что степень логарифма обычно вдвое превышает порядок диаграммы.

При рассмотрении комптон-эффекта (А. А. Абрикосов [16]) было обнаружено, что основное отличие по сравнению с элементарной теорией связано с «инфракрасной катастрофой». Комптоновская диаграмма с электронными линиями, у которых

$p^2 = m^2$ , дает, как это и должно быть, нулевой результат. При этом можно показать, что если учесть испускание дополнительных фотонов, то полное эффективное сечение такого комптон-эффекта в рассматриваемом приближении <sup>4</sup> просто дается формулой Клейна — Нишины. Следует, однако, упомянуть, что амплитуда когерентного рассеяния (рассеяние при  $\theta = 0$ ) умножается на величину  $\exp[(e^2/4\pi) \ln^2(\omega/m)]$ , которая возрастает с ростом энергии фотона.

Перейдем теперь от квантовой электродинамики к другой фундаментальной проблеме теории квантовых полей — к теории мезонных взаимодействий. Положение в этом случае коренным образом отличается от положений в квантовой электродинамике. В это время как квантовая электродинамика позволяет вычислить даже малые поправки, мезонные теории вообще не дают правильных количественных результатов.

Главной причиной такой неудачи мезонных теорий является большая величина мезонных взаимодействий. Взаимодействие электрона с электромагнитным полем является слабым. Соответствующая безразмерная постоянная, содержащая заряд электрона, очень мала ( $e^2/3\pi \sim 1/1000$ ). С другой стороны, все экспериментальные данные показывают, что мезонные взаимодействия ни с какой точки зрения не могут рассматриваться как слабые.

Бесчисленные попытки количественного расчета мезонных взаимодействий главным образом относятся к двум типам взаимодействий — псевдоскалярному и псевдовекторному. Оба эти взаимодействия связаны с мезонами, которые, как показывает эксперимент, имеют нулевой спин и нечетную по сравнению с нейтроном и протоном четность (у  $\pi^0$ -мезона отрицательная четность абсолютна). Далее эти взаимодействия записаны в виде, который аналогичен записи взаимодействия частиц с электромагнитным полем, причем мезонное поле (псевдоскалярная связь) или его градиент (псевдовекторная связь) играют роль векторного потенциала. Теория с псевдовекторной связью не может быть перенормирована (более подробно мы обсудим этот вопрос ниже). Попытки применить теорию возмущений к теории с псевдоскалярной связью привели пока только к тому результату, что величины соответствующих постоянных, получающихся из различных экспериментов, отличаются друг от друга в десятки раз. Заметим также, что соответствующая безразмерная постоянная  $g^2$ , аналогичная заряду, по порядку равна 10—15 для большин-

<sup>4</sup> Заметим, что, поскольку, как мы уже говорили, в этом случае появляются члены с квадратами логарифмов, здесь предполагается, что произведение  $e^2$  на логарифм мало по сравнению с единицей в противоположность тому, что предполагалось в предыдущей части настоящей статьи.

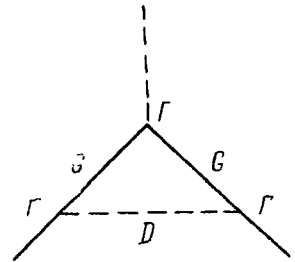
ства эффектов, и это полностью исключает возможность применения теории возмущений.

Несмотря на то что рассмотрение слабых мезонных взаимодействий оказалось, таким образом, физически недостаточным, мы проанализируем тем не менее положение, которое здесь возникает, поскольку такой анализ является существенным для понимания самой проблемы.

Начнем со слабой псевдоскалярной связи. Здесь также встречаются только интегралы, расходящиеся логарифмически (исключая случай массы покоя мезона). Поэтому мы можем применить приближение, которое было изложено в начале этой статьи. Однако здесь отсутствует упрощение, которое имеется в электродинамике, где при  $D_f = 0$  верхняя часть  $\Gamma$  в рассматриваемом приближении оказывается просто равной своему значению «нулевого порядка». Здесь в рассматриваемом приближении, однако, оказалось возможным просуммировать все диаграммы, дающие эффекты требуемого порядка (точно так же, как в электродинамике, мы обсуждаем «пространственную» функцию  $\Gamma$ ). Можно показать [1], что в этом случае  $\Gamma$  является суммой своего нулевого значения  $\gamma_5$  и диаграммы, изображенной на рис. 1, в которой все линии соответствуют точным функциям Грина  $G$  и  $D$ , а все углы — точным значениям  $\Gamma$ . Все дополнительные поправки к этой диаграмме содержат степени  $g^2$ , превышающие степень логарифма по крайней мере на единицу.

Так же как и в уравнениях Дайсона, мы получаем, таким образом, всю систему уравнений, из которой можно определить функции  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$ . Решение этой системы довольно сложно, в особенности поскольку при вычислении  $G$  и  $D$  необходимо учитывать в  $\Gamma$  ( $p$ ,  $p - k$ ;  $k$ ) малые поправки порядка  $p/k$  для  $k \gg p$  и поправки порядка  $k^2/p^2$  для  $k \ll p$ .

Этот вопрос подробно рассмотрен в работе А. А. Абрикосова, А. Д. Галанина и И. М. Халатникова [17], в которой было показано, что для зарядово-симметричной теории



$$G(p) = \frac{1}{\gamma p - M} \left[ 1 + \frac{5g_1^2}{4\pi} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{-p^2} \right) \right]^{-3/2},$$

$$D(k) = \frac{1}{k^2} \left[ 1 + \frac{5g_1^2}{4\pi} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{-k^2} \right) \right]^{-1/2},$$

$$\Gamma(p, p-k; k) = \gamma_5 \left[ 1 + \frac{5g_1^2}{4\tau} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{-j^2} \right) \right]^{1/5}, \quad (21)$$

причем  $f^2$  — наибольшее из значений  $p^2$ ,  $(p-k)^2$  и  $k^2$ ,  $\Lambda$  — верхний параметр обрезания, а  $g_1$  — значение ненаблюдаемой константы псевдоскалярного взаимодействия. Все формулы написаны для  $p^2 \gg M^2$ ,  $k^2 \gg M^2$ ,  $f^2 \gg M^2$ . Если эти неравенства не соблюдаются, то в каждой формуле нужно писать  $\ln(\Lambda^2/M^2)$ .

Эту теорию можно перенормировать. Значение физической константы  $g$ , характеризующей взаимодействие при малых энергиях, получается при сравнении с физическими эффектами в виде

$$g^2 = g_1^2 (\gamma_5 \Gamma)^2 [(\gamma p - M) G]^2 (k^2 D), \quad (22)$$

где все величины взяты для малых энергий. Это дает

$$g^2 = \frac{g_1^2}{1 + \frac{5g_1^2}{4\pi} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{M^2} \right)} \quad (23)$$

или

$$g_1^2 = \frac{g^2}{1 - \frac{5g^2}{4\pi} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{M^2} \right)}. \quad (24)$$

Подстановка (24) в (21) дает

$$G(p) = \frac{1}{\gamma p - M} \left[ \frac{g_1^2}{g^2} \left( 1 - \frac{5g^2}{4\pi} \ln \left( \frac{-p^2}{M^2} \right) \right) \right]^{-3/10},$$

$$D(k) = \frac{1}{k^2} \left[ \frac{g_1^2}{g^2} \left( 1 - \frac{5g^2}{4\pi} \ln \left( \frac{-k^2}{M^2} \right) \right) \right]^{-1/5},$$

$$\Gamma(p, p-k; k) = \gamma_5 \left[ \frac{g_1^2}{g^2} \left( 1 - \frac{5g^2}{4\pi} \ln \left( \frac{-j^2}{M^2} \right) \right) \right]^{1/5}.$$

Эти формулы, если отвлечься от несущественных постоянных множителей, зависят только от  $g$  и не зависят от  $g_1$  или  $\Lambda$ .

Формулы (23), (24), перенормирующие  $g$ , с точностью до коэффициентов совпадают соответственно с формулами (8), (9), перенормирующими заряд. В частности, из них следует, что  $g_1$  увеличивается с  $\Lambda$ , а это соответствует усилению взаимодействия при увеличении энергии. Как бы ни было мало значение  $g$ , для достаточно больших  $\Lambda$  мы всегда достигаем области, где  $g_1 \sim 1$ , т. е. где взаимодействие нельзя считать слабым.



Обсуждая псевдоскалярную теорию мезонного взаимодействия, рассмотрим также проблему рассеяния мезона на мезоне. Обычно утверждается, что это явление, не поддающееся перенормировке, нельзя рассматривать в рамках теории. Для устранения неперенормируемости была сделана попытка ввести в лагранжиан дополнительные члены [18], но тогда в конечном счете появилась новая неопределенная постоянная.

Посмотрим, как можно представить себе проблему рассеяния мезона на мезоне с точки зрения настоящей статьи. При применении теории возмущений амплитуда рассеяния мезона на мезоне при малых энергиях принимается равной, с точностью до численного множителя,  $g_1^4 \ln(\Lambda^2/M^2)$ . Этот результат, очевидно, нельзя перенормировать, т. е. для данного значения  $g_1$  он зависит также от параметра обрезания  $\Lambda$ . Однако эту неперенормируемость не следует рассматривать как дефект теории; напротив, она имеет определенный физический смысл. Введение обрезания означает, что виртуальные частицы с энергиями выше  $\Lambda$  исключаются из рассмотрения. Перенормируемость, например, рассеяния мезонов нуклонами следует в действительности рассматривать только как указание на то, что в этом явлении принимают участие лишь виртуальные частицы с энергиями порядка энергий сталкивающихся частиц. В рассеянии мезонов на мезонах, однако, участвуют также частицы с большими энергиями.

Ясно, что для получения конкретных результатов необходимо, чтобы влияние частиц с разными начальными энергиями уменьшалось начиная с некоторой энергии. Если теория псевдоскалярного мезонного взаимодействия может существовать, то, как мы видели, при некоторой энергии слабое взаимодействие должно переходить в сильное. Естественно предположить, что в этом случае наибольшее значение имеет энергия, при которой слабое взаимодействие переходит в сильное.

Таким образом, мы приходим к следующему методу решения проблемы. Надо получить выражение для рассеяния мезона на мезоне, учитывая все поправки относительного порядка  $[g_1^3 \ln(\Lambda^2/M^2)]^n$ , и подставить в нем  $g_1^2 \sim 1$  и  $\ln(\Lambda^2/M^2) = 4\pi/5g^2$ . Однако оказывается, что при учете поправок требуемого порядка необходимо суммировать ряд «паркетных» диаграмм, состоящих из бесконечного числа нуклонных квадратов, соединенных мезонными линиями, и найти соответствующие формулы трудно.

Рассмотрим теперь проблему псевдовекторной связи. Эта связь заметно отличается от псевдоскалярной связи в следующих отношениях. В псевдоскалярной связи (как и в электродинамике) коэффициент при операторе взаимодействия дает прямую меру силы связи. Из сравнения с псевдоскалярной связью ясно, что в псевдовекторной теории аналогичную роль играет не коэффици-

ент  $f$  в операторе взаимодействия, а  $fk/M$ . Другими словами, псевдовекторная связь с малой константой  $f$  в отличие от псевдоскалярной связи для данного  $g_1$  автоматически дает сильную связь при высоких энергиях.

Отсюда вытекает следствие, которое обычно называется перенормируемостью псевдовекторной связи. Все расходимости здесь не логарифмические, а квадратичные, и отсутствие логарифмов в корне меняет характер теории. Характерной чертой рассмотренных выше вариантов было очень медленное изменение силы связи с ростом энергии. Между теорией возмущений и сильной связью лежала область «перенормируемой» теории, достаточно большая для малых  $g$ . В случае псевдовекторной теории область между теорией возмущений и сильной связью совершенно отсутствует. Заметим, что положение полностью аналогично положению в электродинамике частиц со спином 1 (и, вероятно, с высшими спинами).

Следовательно, мы приходим к выводу, что во всех вариантах мезонной теории мы неизбежно встречаемся с сильной связью при высоких энергиях. Поскольку мезонная связь на самом деле не является слабой даже при энергиях порядка  $Mc^2$ , это означает, что связь становится сильной даже для  $E \gg Mc^2$ . Здесь речь идет не о связи данной интенсивности, а об увеличении эффективной связи с ростом энергии. Построение подобной теории сильной связи при высоких энергиях представляется главной задачей в этой области. Теория мезонных ливней, выдвинутая Ферми [19] и в дальнейшем развитая автором [20], показывает, что теория сильной связи в конце концов должна привести к гидродинамической картине. Рассмотрение диаграмм с малым числом линий в случае сильной связи, конечно, недостаточно, и важным фактором должны быть диаграммы с большим числом линий; будущая теория должна связать такие диаграммы с уравнениями релятивистской гидродинамики.

Существует, однако, другая возможность. В случае электродинамики мы видели, что точечное взаимодействие может приводить к отсутствию всякого взаимодействия, даже если его интенсивность беспредельно увеличивается. Нельзя исключить предположение, что это является общим свойством точечных взаимодействий. Тогда построение мезонных теорий возможно только при отказе от точечного взаимодействия, т. е. в сущности при отказе от всех существующих в настоящее время методов. Хорошо известны большие трудности, возникающие при физическом «размазывании» частиц в противовес чисто формальному «размазыванию», аналогичному тому, которое обсуждалось в настоящей статье. В этом случае, следовательно, теория мезонных взаимодействий потерпела бы неудачу.

Подчеркнем, что физическое «размазывание», связанное с введением некой «фундаментальной» длины порядка  $10^{-13}$  см, неизбежно должно оказать какое-то влияние на электродинамику, хотя при этих энергиях не возникает никаких логических трудностей. К несчастью, главные электродинамические явления при высоких энергиях, а именно тормозное излучение и образование пар фотонами, происходят (в системе, где электрон покоится) при значениях энергии порядка его массы покоя, так что изучение этих явлений не может дать информации в этом направлении. Элементарное вычисление показывает, что фундаментальная длина порядка  $10^{-13}$  см должна привести к важным изменениям в комптон-эффекте или аннигиляции позитронов при энергиях порядка  $10^{11}$  эв. Изучение этих влияний могло бы иметь величайшее значение для теоретической физики.

\* \* \* \* \*

Для меня было большой честью написать статью в сборник, посвященный Нильсу Бору, великому физика, чья пионерская работа предопределила замечательный прогресс современной квантовой теории.

*Замечание при корректуре.* После того как эта статья была написана, И. Я. Померанчук выдвинул новые аргументы в пользу отсутствия физического взаимодействия для точечных частиц. Ему удалось строго доказать это утверждение для электродинамики (по сравнению с не вполне строгими рассуждениями в тексте). Он привел также убедительные доводы в пользу аналогичного результата для псевдоскалярной мезонной связи. Эти важные результаты еще раз оправдывают ту точку зрения, что мезонные теории нельзя построить без глубоких изменений в основных принципах современной теоретической физики; однако, конечно, нельзя совсем исключить и другую возможность.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 497, 1954 (Собр. трудов, № 76).
- [2] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 773, 1954 (Собр. трудов, № 77).
- [3] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 1177, 1954 (Собр. трудов, № 78).
- [4] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 96, 261, 1954 (Собр. трудов, № 79).

- [5] R. P. Feynman. *Phys. Rev.*, 76, 769, 1949.
- [6] В. В. Судаков. Дисс. ИФП АН СССР, 1954.
- [7] F. J. Dyson. *Phys. Rev.*, 75, 1736, 1949.
- [8] M. Neuman, W. H. Furry. *Phys. Rev.*, 76, 1677, 1949.
- [9] D. C. Peaslee. *Phys. Rev.*, 81, 94, 1951.
- [10] G. Källén. *Helv. Phys. Acta*, 25, 417, 1952.
- [11] H. Lehmann. *Nuovo Cim*, 11, 342, 1954.
- [12] M. Gell-Mann, F. E. Low. *Phys. Rev.*, 95, 1300, 1954.
- [13] R. Jost, J. M. Luttinger. *Helv. Phys. Acta*, 23, 201, 1950.
- [14] Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук. *ДАН СССР*, 102, 489, 1955 (Собр. трудов, № 83).
- [15] S. N. Gupta. *Phys. Rev.*, 95, 1334, 1954.
- [16] А. А. Абрикосов. Дисс. ИФП АН СССР, 1955.
- [17] А. А. Абрикосов, А. Д. Галанин, И. М. Халатников. *ДАН СССР*, 97, 793, 1954.
- [18] P. Matthews, A. Salam. *Rev. Mod. Phys.*, 23, 311, 1951.
- [19] E. Fermi. *Phys. Rev.*, 81, 683, 1951.
- [20] Л. Д. Ландау. *Изв. АН СССР, серия физ.*, 17, 51, 1953 (Собр. трудов, № 72).

## О ТОЧЕЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Совместно с И. Я. ПОМЕРАНЧУКОМ

ДАН СССР, 102, 489, 1955

В основе квантовой электродинамики лежит идея о точечном взаимодействии между квантами и электронами. Как известно, при таком взаимодействии непосредственное вычисление приводит к бесконечностям. В последние годы была создана релятивистски-инвариантная теория возмущений [1] и показано, что на ее основе можно разработать однозначную процедуру, приводящую к конечным выражениям для тех эффектов, для которых раньше получались бесконечности. Иной подход к решению уравнений квантовой электродинамики был развит в [2]. Он основан на рассмотрении точечного взаимодействия как предела некоторого «размазанного» взаимодействия с конечным радиусом, когда этот радиус уменьшается до нуля. При этом константа  $e_1$ , стоящая в виде множителя при взаимодействии, является функцией радиуса «размазывания»  $1/\Lambda$ . С увеличением  $\Lambda$  (приближение к центру частицы)  $e_1$  растет. Это связано с очевидным свойством поляризации вакуума уменьшать всякий заряд, «внесенный» в вакуум (см. также [3]).

Пока  $e_1^2 \ll 1$ , связь между  $e_1$  и перенормированным зарядом  $e$  осуществляется при помощи  $D$ -функции, найденной в [2]. Фурье-компонента этой функции равна

$$D(k^2) = \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2}}. \quad (1)$$

Здесь  $v$  — эффективное число различных слабо взаимодействующих частиц в природе (подробнее по этому поводу см. [2]). Фор-

мула (1) справедлива, когда  $k^2 \gg m^2$  ( $m$  — масса электрона). Если же  $k^2 \ll m^2$ , то в (1)  $k^2$  нужно заменить на  $m^2$ .

Связь между  $e_1^2$  и  $e^2$ , как известно, получается из соотношения

$$e^2 = e_1^2 \lim_{k^2 \rightarrow 0} k^2 D(k^2) = \frac{e_1^2}{1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}. \quad (2)$$

Выражения (1) и (2) переходят в более простые:

$$D(k^2) = \frac{3\pi}{ve_1^2} \frac{1}{\ln \frac{\Lambda^2}{k^2}} \frac{1}{k^2}, \quad (3)$$

$$e^2 = \frac{3\pi}{v} \frac{1}{\ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}, \quad (4)$$

когда выполнено условие

$$\frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2} \gg 1. \quad (5)$$

При  $e_1^2$  не очень малых по сравнению с единицей это условие удовлетворяется уже для таких  $k^2$ , которые не исчезающе малы по сравнению с  $\Lambda^2$ .

Обратная пропорциональность  $D$ -функции  $e_1^2$  указывает на возможность пренебречь в лагранжиане системы электронов и квантов действием свободного электромагнитного поля<sup>1</sup>.

В самом деле, во взаимодействие поля с электронами входит  $e_1 A$ , а в свободное поле само  $A$ . Если отбрасывается действие свободного поля, то среднее значение по физическому вакууму от

$$\langle T A(X) A(Y) \rangle \quad (6)$$

должно быть обратно пропорционально  $e_1^2$ . С другой стороны, (6) лишь несущественным множителем отличается от  $D$ -функции, которая, таким образом, оказывается обратно пропорциональной  $e_1^2$ . Именно этот результат и зафиксирован в (3).

Если лагранжиан свободного поля перестает играть существенную роль уже при  $e_1^2 \ll 1$ , то представляется естественным думать, что при дальнейшем возрастании  $e_1^2$  роль свободного поля будет еще меньше. Поэтому  $D$ -функция должна быть обратно

<sup>1</sup> При этом подразумевается, что  $k^2$  не очень близко к  $\Lambda^2$ .

пропорциональна  $e_1^2$  и при  $e_1^2 > 1$ . Отсюда следует, что  $e_1^2 D$  не зависит от  $e_1^2$  и поэтому всегда имеет вид

$$e_1^2 D = \frac{3\pi}{v \ln \frac{\Lambda^2}{k^2}} \frac{1}{k^2} \quad (7)$$

(если только  $k^2$  не очень близко к  $\Lambda^2$ ). Равенства (2) и (7) приводят к следующей связи  $e_1^2$  и  $e$ :

$$e^2 = \frac{3\pi}{v \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}} \rightarrow 0, \quad \Lambda^2 \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Обращение  $e$  в нуль может быть пояснено следующим образом. Пусть в сфере радиуса  $1/\Lambda$  находится сколько угодно большой заряд  $e_1$  ( $\Lambda$ ). Тогда на расстоянии  $1/k$ , всего лишь в несколько раз большем, чем  $1/\Lambda$ , будет заряд

$$\sqrt{e_1^2 k^2 D(k^2)} \approx \sqrt{\frac{3\pi}{v \ln \frac{\Lambda^2}{k^2}}},$$

равный по порядку величины единице. Это означает, что «внесенный» заряд  $e_1$ , имеющий протяжение  $1/\Lambda$ , окружается плотным облаком размерами также порядка  $1/\Lambda$ , образованным заполяризованными зарядами, в результате чего полный заряд внутри радиуса  $2/\Lambda$  будет порядка единицы. (Ситуация здесь напоминает ту, которая осуществляется вблизи кулонова центра с зарядом, большим, чем  $\sqrt{137}$ .)

Быстрое падение  $e_1^2$  до единицы фактически означает отсутствие широкой области сильного взаимодействия в электродинамике, обсуждаемой в [2]. Только существование этой области могло бы сделать  $e^2 \neq 0$ .

Мы приходим к фундаментальному выводу, что из формальной квантовой электродинамики, вероятно, следует равенство нулю заряда электрона. Оговорка, «по-видимому», относится к некоторой нестрогости изложенной выше аргументации.

Полученный нами результат указывает на логическую незамкнутость квантовой электродинамики. Следует подчеркнуть при этом, что указываемая здесь несостоятельность теории вызвана непосредственно не бесконечностями (как считалось последние 25 лет), а обращением физического взаимодействия в нуль.

Физические следствия из внутренних противоречий квантовой электродинамики могут быть различными.

Энергии  $\Lambda_0$ , при которых

$$e^2 \approx \frac{3\pi}{v \ln \frac{\Lambda_0^2}{m^2}}, \quad (8a)$$

во всяком случае, очень велики. При этих энергиях эффекты гравитационного взаимодействия могут превышать электромагнитные. Соблазнительна идея, что «кризис» электродинамики происходит именно при тех энергиях, при которых гравитационное взаимодействие сравнивается с электромагнитным. Поскольку эффективный заряд в критической зоне порядка единицы, это соответствует

$$\kappa \Lambda_0^2 \sim 1, \quad (9)$$

где  $\kappa$  — гравитационная постоянная; (8a) и (9) дают для  $v$  значение  $v \approx 12$ . При такой точке зрения величина физического заряда  $e$  автоматически определялась бы из теории. Если  $v < 12$ , гравитационные эффекты наступят значительно раньше, чем эффективный заряд станет порядка единицы. Напротив, при  $v > 12$  гравитационные эффекты не «спасут» электродинамики, так как они наступят слишком поздно.

Вывод о том, что  $e = 0$ , был нами получен из рассмотрения только чисто электромагнитных взаимодействий. Не исключена возможность того, что учет неэлектромагнитных взаимодействий частиц (типа  $\mu - e$ -распада<sup>2</sup> и др.) может сильно изменить свойства электродинамики при больших энергиях, что соответственно отразится на перенормировке заряда.

Изложенный выше способ рассмотрения вопроса о перенормировке заряда не переносится непосредственно на мезонную теорию [4]. Если, однако, обращение  $e$  в нуль есть отражение общих свойств всякого точечного взаимодействия, то современная мезонная теория окажется полностью несостоятельной. При этом надо иметь в виду, что из-за большого значения  $g^2$  роль гравитации в мезонной области совершенно ничтожна. По той же причине в мезонных теориях нет области применимости теории возмущений. В электродинамике такая область заведомо есть ввиду малости  $e^2$ , и ее свойства не могут серьезно измениться при любом изменении электродинамики в области больших энергий.

Исправление существующих теорий в том случае, если из теории следует, что  $g$  наряду с  $e$  также равно нулю, потребовало бы введения совершенно новых физических представлений. Такие

<sup>2</sup> На возможную роль этого взаимодействия обратил наше внимание Я. Б. Зельдович.



представления должны были бы дать возможность отразить в теории свойства *протяженных* элементарных частиц. Это означает, что в физику была бы введена новая универсальная длина, которая автоматически ограничивала бы  $\Lambda$  сверху. Существование новой длины должно было бы проявиться не только в мезонной области, но и в чисто электромагнитных процессах. Не исключена поэтому возможность, что все электромагнитные процессы, сопровождаемые большими передачами импульса, происходят совсем иначе, чем предсказывает современная теория. Эти отклонения могут наступить в таких условиях, когда передаваемый импульс в системе центра инерции порядка нескольких сот  $M\epsilon\epsilon$ , если новая длина  $\leq 10^{-13}$  см. Таким образом, эксперимент типа комптон-эффекта при энергиях порядка  $(2-5) \cdot 10^{10}$  эв мог бы явиться решающим для современной теории поля. Аналогичную роль могут играть такие явления, как аннигиляция позитронов очень большой энергии ( $10^{10}-10^{11}$  эв), рассеяние на большие углы электронов электронами той же области энергий и другие эффекты при тех же условиях. Важные сведения для теории могут дать эксперименты, сделанные при меньших энергиях, но зато с большей точностью.

Надо, однако, подчеркнуть, что обычное тормозное излучение или образование пар  $\gamma$ -квантами даже в области сверхбольших энергий не может пролить свет на область применимости электродинамики. Дело в том, что, как хорошо известно [5], тормозное излучение обязано в системе покоя электрона его взаимодействию с мягкими квантами ( $\omega \sim m$ ) совершенно независимо от того, чему равна начальная энергия частицы в лабораторной системе. Такого же типа соображения относятся и к явлению образования пар.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Р. Фейнман. Сб.: Новейшее развитие квантовой электродинамики. ИЛ, 1954, стр. 138—205; Ю. Швингер. Там же, стр. 12—108; Ф. Дайсон. Там же, стр. 205—238; Phys. Rev., 75, 486, 1949; A. Salam. Phys. Rev., 82, 217, 1951.
- [2] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 497, 1177, 1954; 96, 261, 1954 (Собр. трудов, № 76, № 78 № 79).
- [3]. H. Lehmann. Nuovo Sim., 11, 342, 1954.
- [4]. А. А. Абрикосов, А. Д. Галанин, И. М. Халатников. ДАН СССР, 97, 793, 1954.
- [5] C. F. Weizsacker. Zs Phys., 88, 612, 1934.

Совместно с И. М. ХАЛАТНИКОВЫМ

ЖЭТФ, 29, 89, 1955

Решается задача о градиентном преобразовании функций Грина и вершинных частей для заряженных частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем.

В теории, описывающей поле заряженных частиц, связанное с электромагнитным полем, имеет место градиентная инвариантность. При градиентном преобразовании потенциалов электромагнитного поля

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \quad (1)$$

( $\varphi$  — произвольная операторная функция)  $\psi$ -функции частиц преобразуются следующим образом:

$$\psi \rightarrow \psi e^{ie\varphi} \quad (2)$$

( $e$  — заряд,  $\hbar$  и  $c$  полагаем равными единице).

Мы попытаемся здесь выяснить, как при этом преобразовании изменяются функции Грина частицы. Функция Грина частицы, как известно, равна

$$G(xx') = \langle (\psi(x) \bar{\psi}(x'))_+ \rangle. \quad (3)$$

Скобка обозначает среднее вакуумное значение.

При градиентном преобразовании (1) функция Грина  $G(xx')$  изменит свое значение. Согласно (2) она может быть записана в виде

$$G(xx') = G_0(xx') \langle (e^{ie\varphi}(x) e^{-ie\varphi}(x'))_+ \rangle, \quad (4)$$

где  $G_0(x, x')$  — значение функции Грина, вычисленное для частного случая, когда продольная (в четырехмерном смысле) часть фотонной функции Грина равна нулю [1]. Фурье-компонента фотонной функции Грина

$$D_{\mu\nu}(x, x') = i \langle (A_\mu(x) A_\nu(x'))_+ \rangle \quad (5)$$

в общем случае может быть записана в виде [1]

$$D_{\mu\nu}(k) = 4\pi d_t \frac{1}{k^2} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + 4\pi d_l \frac{k_\mu k_\nu}{k^4}. \quad (6)$$

Член с  $d_t$  представляет собой поперечную, а член с  $d_l$  — продольную части функции  $D_{\mu\nu}$ . Перейдем к вычислению среднего вакуумного значения хронологизированного произведения. Продольная часть функции Грина является заданной функцией. Она не зависит от взаимодействия рассматриваемых полей. Поэтому задача сводится к усреднению по вакууму выражения  $e^{i\varphi(x)} e^{-i\varphi(x')}$ , где операторы  $\varphi$  представляют собой свободное поле. Разложим свободное поле в ряд по плоским волнам; имеем

$$\varphi = \sum_k \varphi_k = \sum_k \lambda(k^2) (a_k e^{ikx} + a_k^+ e^{-ikx}). \quad (7)$$

Здесь  $a_k$  и  $a_k^+$  — соответственно операторы рождения и уничтожения продольных фотонов;  $\lambda(k^2)$  — амплитуда, характеризующая вклад фотонов с четырехмерным волновым вектором  $k$ . В величину  $\lambda(k^2)$  мы также включаем нормировочный множитель. Благодаря малости указанного множителя (он содержит обратную величину объема) ниже будем опускать степени  $\lambda$  выше второй. Выражения типа  $e^{i\varphi}$  согласно (7) можно представить в виде бесконечного произведения

$$e^{i\varphi(x)} = \prod_k e^{i\varphi_k}, \quad e^{-i\varphi(x')} = \prod_l e^{-i\varphi_l}. \quad (7')$$

Операторы  $a_k$  и  $a_k^+$ , соответствующие неравным значениям волновых векторов, коммутируют между собой. Воспользуемся теперь этим обстоятельством и учтем, что среднее по вакууму значение от первых степеней операторов  $a_k$  (или  $\varphi_k$ ) равно нулю. Среднее же вакуумное значение парных произведений  $\varphi_k \varphi_l$  отлично от нуля согласно сказанному только в том случае, когда  $k = l$ . При помощи (7') для среднего вакуумного значения про-

изведения  $e^{ie\varphi(x)}e^{-ie\varphi(x')}$  получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \langle (e^{ie\varphi(x')}e^{-ie\varphi(x)})_+ \rangle &= \left\langle \left( \prod_k \left( 1 + ie\varphi_k - \frac{e^2}{2} \varphi_k^2 \right) \prod_k \left( 1 - ie\varphi'_k - \frac{e^2}{2} \varphi'^2_k \right) \right)_+ \right\rangle = \\ &= \prod_k \left[ 1 - \frac{e^2}{2} \langle \varphi_k^2 \rangle - \frac{e^2}{2} \langle \varphi'^2_k \rangle + e^2 \langle (\varphi_k \varphi'_k) \rangle \right] = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} e^2 \sum_k \langle \varphi_k^2 \rangle + \langle \varphi'^2 \rangle - 2 \langle (\varphi_k \varphi'_k)_+ \rangle \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Как мы уже отмечали, среднее вакуумное значение произведения двух операторов  $a_k$  и  $a_l^+$  равно нулю всегда, кроме случая  $k = l$ . Функция Грина для поля  $\varphi$  поэтому равна

$$\Delta_F(x x') = i \langle (\varphi(x) \varphi(x'))_+ \rangle = i \langle (\varphi_k \varphi'_k)_+ \rangle. \quad (9)$$

Учитывая (9), перепишем (8) в виде

$$\langle (e^{ie\varphi(x)} e^{-ie\varphi(x')})_+ \rangle = \exp \{ ie^2 (\Delta_F(0) - \Delta_F(x x')) \}. \quad (10)$$

Воспользуемся теперь полученным результатом и запишем окончательную формулу для функции Грина  $G(x x')$  заряженной частицы; согласно (4) и (10) имеем

$$G(x x') = G_0(x x') \exp \{ ie^2 (\Delta_F(0) - \Delta_F(x x')) \}. \quad (11)$$

Формула (11) связывает функцию Грина заряженной частицы  $G(x x')$  с ее значением  $G_0(x x')$ , вычисленным в предположении, что продольная часть фотонной  $D$ -функции равна нулю. Продольная часть фотонной функции Грина связана с введенной  $\Delta$ -функцией поля  $\varphi$  очевидным соотношением

$$D_{F\mu\nu}(x x') = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \Delta_F(x x'). \quad (12)$$

Для фурье-компонент это соотношение согласно (6) сводится к

$$\Delta_F(k) = 4\pi \frac{d_l(k)}{k^2}. \quad (13)$$

Переписать формулу (11) для фурье-компонент функций Грина в общем случае не удастся. Можно, однако, получить формулу, определяющую изменение фурье-компоненты функции Грина частицы при бесконечно малом градиентном преобразовании потенциалов. Варьируя соотношение (11), имеем

$$\delta G(x x') = ie^2 G(x x') (\delta \Delta_F(0) - \delta \Delta_F(x x')). \quad (14)$$

Перепишем это соотношение в фурье-компонентах; учитывая (13), находим

$$\delta G(p) = \frac{ie^2}{\pi} \int \frac{\delta d_l(k)}{k^4} \{G(p) - G(p-k)\} d^4k. \quad (15)$$

Применим полученную формулу к случаю частиц со спином  $1/2$ . Невозмущенная функция Грина свободной частицы равна

$$G_0(p) = \frac{1}{(\hat{p} - m)}, \quad \hat{p} = \gamma_\mu p_\mu.$$

Пусть  $d_l(k)$  — медленно меняющаяся функция аргумента ( $k^2$ ), так что выполнено условие  $\frac{e^2}{\pi} d_l(k) \ll 1$ . Подставим в правую часть формулы (15) невозмущенные значения функции  $G(p)$ . При медленно меняющейся функции  $d_l(k)$  в интеграле (15) существенно интегрирование по области больших значений  $k^2 \gg \gg p^2$ . Поэтому членом  $G(p-k)$  по сравнению с  $G(p)$  в правой части (15) можно пренебречь. Уравнению (15) тогда удовлетворяет функция Грина вида

$$G(p) = \frac{\beta(p^2)}{(\hat{p} - m)} \quad (16)$$

с  $\beta(p^2)$  — медленно меняющейся функцией аргумента.

Для больших значений  $p^2 \gg m^2$  из (15), учитывая соотношение

$$d^4k = \frac{i}{4} (-k^2) d(-k^2),$$

находим

$$\delta\beta(p^2) = -\frac{e^2}{4\pi} \beta(p^2) \int_{-p^2}^{\infty} \frac{\delta d_l}{-k^2} d(-k^2). \quad (17)$$

Обозначим значение  $\beta(p^2)$  при  $d_l = 0$  через  $\beta_t(p^2)$ . Расчет показывает, что в случае спина  $1/2$  с рассматриваемой точностью  $\beta_t(p^2) = 1$  [1].

Из (17) для конечного градиентного преобразования получаем известную формулу

$$\beta(p^2) = \exp \left\{ -\frac{e^2}{4\pi} \int_{-p^2}^{\infty} d_l \frac{d(-k^2)}{-k^2} \right\}. \quad (18)$$

Аналогичным образом решается задача для случая спина нуль. В этом случае функция Грина частицы записывается в виде

$$G(p) = \frac{\beta(p^2)}{p^2 - m^2}. \quad (19)$$

Расчет показывает, что  $\beta(p^2)$  для медленно меняющихся  $d_l$  также оказывается медленно меняющейся функцией. Для конечно-го градиентного преобразования получаем формулу, аналогичную (18):

$$\beta(p^2) = \beta_l(p^2) \exp \left\{ -\frac{e^2}{4\pi} \int_{-p^2}^{\infty} d_l \frac{d(-k^2)}{-k^2} \right\}, \quad (20)$$

где  $\beta_l(p^2)$  — значение  $\beta(p^2)$  при  $d_l = 0$ .

Остановимся теперь на вопросе о градиентном преобразовании вершинных частей  $\Gamma_\mu(x x'; \xi)$ . Будем исходить из выражения для среднего вакуумного значения хронологизированного произведения

$$\langle (\psi(x) A_\mu(\xi) \bar{\psi}(x'))_+ \rangle. \quad (21)$$

Вершинная часть  $\Gamma_\mu(x x'; \xi)$  связана с функцией  $B_0(x x'; \xi)$  интегральным соотношением

$$B_\mu(x x'; \xi) = e^2 \int G(x x'') \Gamma_\nu(x'' x'''; \xi') G(x''' x') D_{\nu\mu}(\xi' \xi) d^4 x'' d^4 x''' d^4 \xi'. \quad (22)$$

При градиентном преобразовании потенциалов (1) функция  $B_\mu(x x'; \xi)$  преобразуется следующим образом:

$$B_\mu(x x'; \xi) \rightarrow B_{0\mu}(x x'; \xi) \langle (e^{ie\Phi(x)} e^{-ie\Phi(x')})_+ \rangle + G_0(x x') \left\langle \left( e^{ie\Phi(x)} \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi_\mu} e^{-ie\Phi(x')} \right)_+ \right\rangle. \quad (23)$$

Здесь  $B_{0\mu}(x x'; \xi)$  — значение функции  $B_\mu$  при равной нулю продольной части фотонной  $D$ -функции. Среднее вакуумное значение произведения, стоящего в члене  $B_{0\mu}$  в (23), определяется формулой (10). Для множителя, стоящего при  $G_0(x x')$ , после сложных вычислений при помощи (7) и (8) находим

$$\left\langle \left( e^{ie\Phi(x)} \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi_\mu} e^{-ie\Phi(x')} \right)_+ \right\rangle = \exp \{ ie^2 [\Delta_F(0) - \Delta_F(x x')] \} \times \\ \times e \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} (\Delta_F(x \xi) - \Delta_F(\xi x')). \quad (24)$$

Подставим (24) в (23) и учтем (11), после чего окончательно получаем

$$B_\mu(x x'; \xi) = B_{0\mu}(x x'; \xi) \exp \{ ie^2 (\Delta_F(0) - \Delta_F(x x')) \} + B_{1\mu}(x x'; \xi), \quad (25)$$

$$B_{1\mu}(x x'; \xi) = e G(x x') \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} (\Delta_F(x \xi) - \Delta_F(\xi x')). \quad (26)$$

Выясним связь каждого из слагаемых в формуле (25) с функциями Грина частицы и фотона. Вначале покажем, что второе слагаемое в формуле (25) в точности совпадает с той частью выражения (22), которая содержит явно продольную часть фотонной функции  $D_{\mu\nu}^l$ :

$$B_{1\mu}(xx'; \xi) = e \int G(xx'') \Gamma_\nu(x''x'''; \xi') G(x'''x') D_{\nu\mu}^l(\xi'\xi) d^4x'' d^4x''' d^4\xi'. \quad (27)$$

Справедливость этого соотношения может быть установлена, если перейти к фурье-компонентам. Фурье-компонента  $B_{1\mu}(xx'; \xi)$  согласно (26) равна

$$B_{1\mu}(p, p-k; k) = e(G(p) - G(p-k)) k_\mu \Delta_F(k). \quad (28)$$

Фурье-компонента правой части соотношения (27), очевидно, равна (см. (6))

$$eG(p) \Gamma_\nu(p, p-k; k) G(p-k) \frac{k_\nu k_\mu}{k^4} 4\pi d_l(k). \quad (29)$$

Далее воспользуемся известным обобщением теоремы Уорда [2]

$$k_\nu \Gamma_\nu(p, p-k; k) = -(G^{-1}(p) - G^{-1}(p-k)). \quad (30)$$

Выражение (29) при этом приобретает вид

$$e(G(p) - G(p-k)) \frac{k_\mu}{k^4} 4\pi d_l(k). \quad (31)$$

Сравнив (31) с (28), учитывая (13), убеждаемся в справедливости соотношения (27). Если соотношение (27) доказано, то из (22) и (25) следует, что

$$\begin{aligned} B_{0\mu}(xx'; \xi) \exp\{ie^2[\Delta_F(0) - \Delta_F(xx')]\} = \\ = e \int G(xx'') \Gamma_\nu(x''x'''; \xi') G(x'''x') D_{\nu\mu}^l(\xi'\xi) d^4x'' d^4x''' d^4\xi', \quad (32) \end{aligned}$$

( $D_{\mu\nu}^l$  — поперечная часть  $D$ -функции).

Перепишем это соотношение для бесконечно малого градиентного преобразования и перейдем к фурье-компонентам; находим

$$\begin{aligned} ie^2 \int \{G(p) \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) - G(p-r) \Gamma_\mu(p-r, p-r- \\ -k; k) G(p-k-r)\} \frac{\delta d_l(r)}{r^4} d^4r = G(p) \delta l_\mu^l(p, p-k; k) G(p-k) + \end{aligned}$$

$$+ ie^2 \int \{ [G(p) - G(p-r)] \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) + \\ + G(p) \Gamma_\mu(p, p-k; k) [G(p-k) - G(p-k-r)] \} \frac{\delta d_l(r)}{r^4} d^4 r. \quad (33)$$

Разрешив это соотношение относительно  $\delta \Gamma_\mu$ , окончательно получаем

$$G(p) \delta \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) = -ie^2 \int \{ G(p) \Gamma_\mu(p, p-k; k) \times \\ \times (G(p-k) - G(p-k-r)) + G(p-r) [\Gamma_\mu(p-r, p-r-k; k) \times \\ \times G(p-k-r) - \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k)] \} \frac{\delta d_l(r)}{r^4} d^4 r. \quad (34)$$

Для случая частиц со спином  $1/2$  изменение вершинной части  $\Gamma_\mu(p, p-k; k)$  при бесконечно малом градиентном преобразовании ( $p^2 \gg m^2$ ) может быть найдено совершенно аналогично тому, как это было сделано для функции Грина. Для медленно меняющихся  $d_l(r)$  в формуле (34) можно пренебречь в правой части всеми членами, кроме первого (при интегрировании существенна область больших значений  $r^2$ ). После этого без труда находим (предполагаем, что  $(p-k)^2$ ,  $p^2$  и  $k^2$  одного порядка)

$$\delta \Gamma_\mu(p, p-k; k) = -ie^2 \Gamma_\mu(p, p-k; k) \int_{-p^2}^{\infty} \frac{\delta d_l(r)}{-r^2} d(-r^2). \quad (35)$$

Этот результат находится в соответствии с теоремой Уорда.

В заключение выражаем благодарность А. А. Абрикосову за участие в дискуссии.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 773, 1954 (Собр. трудов, № 77).  
[2] Н. Г. Гееп. Proc. Phys. Soc., 66, 837, 1913.



Совместно с С. З. БЕЛЕНЬКИМ

УФН, 56, 309, 1955

## § 1. Введение

Как показывает опыт, при соударениях сверхбыстрых частиц происходит образование большого числа новых частиц (многолучевые звезды).

Энергия частиц, создающих такие звезды, порядка  $10^{12}$  эв и выше. Характерно, что такие соударения происходят не только между нуклоном и ядром, но и между двумя нуклонами. Так, образование двух мезонов при соударениях нейтронов с протонами наблюдалось уже при сравнительно небольших энергиях, порядка  $10^9$  эв, в опытах, проведенных на космотроне [1].

Ферми [2, 3] принадлежит остроумная идея рассматривать процесс соударения при очень больших энергиях с помощью термодинамических методов.

Основные положения теории Ферми сводятся к следующим:

1. Предполагается, что при соударении двух очень энергичных нуклонов энергия в системе их центра тяжести выделяется в очень малом объеме  $V$ . Так как ядерное взаимодействие очень велико, а размеры объема малы, то распределение энергии будет определяться статистическими законами. Это позволяет рассматривать столкновение частиц большой энергии, не пользуясь какими-либо конкретными теориями ядерного взаимодействия.

2. Объем  $V$ , в котором выделяется энергия, определяется размером мезонного облака вокруг нуклонов, радиус которого порядка  $\hbar/\mu c$ , где  $\mu$  — масса  $\pi$ -мезона. Однако так как нуклоны движутся с большой скоростью, то мезонное облако, окружающее их, испытывает лоренцово сжатие вдоль направления движения

нуклонов. Таким образом, объем  $V$  по порядку величины будет равен

$$V = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{\hbar}{\mu c} \right)^3 \frac{2Mc^2}{E'}, \quad (1.1)$$

где  $M$  — масса нуклона,  $E'$  — энергия нуклонов в системе центра тяжести.

3. Ферми предполагает, что частицы образуются, согласно законам статистического равновесия, в объеме  $V$  в самый момент столкновения. Образовавшиеся частицы, не взаимодействуя более друг с другом, вылетают из объема в «замороженном» состоянии.

4. Ферми рассмотрел как лобовые соударения, которые согласно его расчетам приводят к изотропному угловому распределению, так и нелобовые (периферические) соударения. В этом случае при статистическом расчете учитывалось кроме сохранения энергии также сохранение момента количества движения. При нелобовых соударениях получается уже не изотропное угловое распределение в системе центра тяжести.

Основная идея Ферми о применении статистических методов к исследованию процессов соударения является, несомненно, весьма плодотворной, однако отдельные предположения и количественные расчеты представляются неубедительными (см. [4,5]).

Необосновано утверждение, что число частиц в многочечевой звезде определяется числом частиц, возникающим в объеме  $V$  в самый момент столкновения. В этот момент из-за большой плотности частиц и сильного взаимодействия между ними вообще не имеет смысла говорить о числе частиц. Если даже принять, что частицы образуются в первый момент, то предположение о сильном взаимодействии нельзя согласовать с допущением, что это взаимодействие сразу прекращается после вылета частиц из объема.

В действительности происходит расширение системы, и число частиц становится определенным лишь тогда, когда взаимодействие между ними становится малым. Именно тогда и происходит свободный разлет частиц. На это обстоятельство было указано И. Я. Померанчуком [4]. Далее, Ферми [3] некорректно рассчитал периферические соударения и, следовательно, угловые и энергетические распределения частиц. Это вычисление Ферми трудно совместить с теорией относительности. Согласно Ферми, при существовании нелобовом соударении за время соударения порядка  $\left( \frac{\hbar}{\mu c} \right) \left( \frac{Mc^2}{E'} \right) \frac{1}{c}$  взаимодействие распространяется на весь объем мезонного облака, т. е. на расстояние порядка  $\hbar/\mu c$ .

Это означает, что возмущение должно распространиться со скоростью, значительно превышающей скорость света.

Недостатки теории Ферми в основном связаны с тем, что неправильно учитывается расширение составной системы. Как показал Ландау [6], расширение системы может быть рассмотрено на основе релятивистской гидродинамики. Использование гидродинамики в данном случае так же последовательно, как использование термодинамики, так как области применимости и той и другой совпадают<sup>1</sup>.

С качественной стороны процесс соударения выглядит следующим образом [6].

1. При соударении двух нуклонов возникает составная система, причем энергия выделяется в малом, лоренцово-сокращенном в поперечном направлении объеме  $V$ .

В момент столкновения возникает большое число «частиц»; «длина пробега» в возникшей системе мала по сравнению с ее размерами, и в системе устанавливается статистическое равновесие.

2. Второй этап столкновения заключается в расширении системы. К этому этапу следует применить гидродинамический подход, причем расширение можно рассматривать как движение идеальной (невязкой и нетеплопроводной) жидкости<sup>2</sup>. В процессе расширения «длина пробега» продолжает оставаться малой по сравнению с размерами системы, что и оправдывает применение гидродинамики.

Так как скорости в системе сравнимы со скоростью света, то следует применять не обычную, а релятивистскую гидродинамику. За время первого и второго этапов соударения в системе все время происходит образование и поглощение частиц. Здесь существенна большая плотность энергии в системе. Система в данном случае вообще не характеризуется числом частиц вследствие сильного взаимодействия между отдельными частями системы.

3. По мере расширения системы взаимодействие ослабевает и длина пробега возрастает. Число частиц как физическая характеристика появляется, когда взаимодействие достаточно мало. Когда длина пробега становится сравнимой с линейными размерами системы, происходит распад системы на отдельные частицы.

<sup>1</sup> Действительно, условия применимости термодинамики и гидродинамики заключаются в требовании  $l/L \ll 1$ , где  $l$  — «длина пробега», а  $L$  — наименьшие размеры системы.

<sup>2</sup> Поясним это следующими качественными соображениями. Для того чтобы можно было пренебречь вязкостью и теплопроводностью, число Рейнольдса  $Lv/l\nu$  должно быть больше единицы. Здесь  $L$  — наименьшие размеры системы,  $V$  — «макроскопическая» скорость,  $v$  — «молекулярная» скорость,  $l$  — длина пробега. Так как  $V$  и  $v$  порядка  $c$ , то условие  $R \gg 1$  совпадает с условием  $l/L \ll 1$ .

Эту стадию мы будем называть «разлетом». Разлет осуществляется при температуре системы порядка  $T \approx \mu c^2$ , где  $\mu$  — масса  $\pi$ -мезона (температура всюду измеряется в энергетических единицах).

## § 2. Термодинамические соотношения при разлете системы

При разлете системы взаимодействием между частицами можно пренебречь, и поэтому получается ряд простых соотношений.

Рассмотрим некоторый участок системы, находящийся при температуре разлета  $T_k$ . Используем следующее выражение для релятивистской плотности  $\pi$ -мезонов в этом участке:

$$n_\pi = \frac{g_\pi}{2\pi^2} \left( \frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 F(z_\pi), \quad (2.1)$$

где

$$z_\pi = \frac{\mu c^2}{T_k}.$$

Здесь  $g_\pi$  — число возможных состояний частицы, в нашем случае (соответственно наличию  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  и  $\pi^0$ -мезонов)  $g_\pi = 3$ ;

$$F(z_\pi) = z_\pi^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\exp(z_\pi \sqrt{1+x^2}) - 1}. \quad (2.2)$$

Функция  $F(z_\pi)$  может быть представлена в следующем виде:

$$F(z_\pi) = z_\pi^3 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_2[z_\pi(1+m)]}{1+m}, \quad (2.3)$$

где  $K_2(z)$  — видоизмененная функция Бесселя второго рода (см. [7, 8]). Ряд (2.3) быстро сходится. Приведем асимптотические выражения  $K_2(z)$  для больших и малых значений  $z$ :

$$K_2(z) = \left( \frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \left[ 1 + \frac{15}{8} \frac{1}{z} \right] \quad \text{для } z \gg 1, \\ K_2(z) = \frac{2}{z^2} \quad \text{для } z \ll 1. \quad (2.4)$$

Пользуясь (2.4), нетрудно убедиться, что при высоких температурах

$$n_\pi = 0,365 \left( \frac{T}{\hbar c} \right)^3,$$

а при малых температурах

$$n_{\pi} = g_{\pi} \left( \frac{T\mu}{2\pi\hbar^3} \right)^{3/2} e^{-\mu c^2/T}.$$

Для плотности энергии  $\pi$ -мезонов  $\varepsilon_{\pi}$  имеем следующее выражение:

$$\varepsilon_{\pi} = T_k \left( \frac{g_{\pi}}{2\pi^2} \right) \left( \frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 \Phi(z_{\pi}), \quad (2.5)$$

где

$$\Phi(z_{\pi}) = z_{\pi}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3K_2[z_{\pi}(1+m)] + z_{\pi}(1+m)K_1[z_{\pi}(1+m)]}{(1+m)^2}. \quad (2.6)$$

Здесь  $K_1(z)$  — видоизмененная функция Бесселя первого рода.

Напомним асимптотические выражения  $K_1(z)$  для больших и малых значений  $z$ :

$$K_1(z) = \left( \frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \left[ 1 + \frac{3}{8} \frac{1}{z} \right] \quad \text{для } z \gg 1,$$

$$K_1(z) = \frac{1}{z} \quad \text{для } z \ll 1. \quad (2.7)$$

Нетрудно убедиться, что при  $z_{\pi} \rightarrow 0$  (очень высокие температуры)  $\Phi(0) = 6,49$ , а при  $z \gg 1$  получим, что  $\varepsilon_{\pi}/n_{\pi} = \mu c^2 + 3/2 T$ . Приведем, наконец, выражение для плотности энтропии  $\pi$ -мезонов (в абсолютных единицах):

$$s_{\pi} = \left( \frac{T}{\hbar c} \right)^3 \frac{g_{\pi}}{2\pi^2} G(z_{\pi}), \quad (2.8)$$

где

$$G(z_{\pi}) = z_{\pi}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4K_2[z_{\pi}(1+m)] + z_{\pi}(1+m)K_1[z_{\pi}(1+m)]}{(1+m)^2}. \quad (2.9)$$

Значения функций  $F(z)$ ,  $\Phi(z)$  и  $G(z)$  даны в табл. 1 вместе со значениями аналогичных функций  $F^*(z)$ ,  $\Phi^*(z)$ ,  $G^*(z)$  для газа Ферми. Для газа Ферми вместо формулы (2.2), относящейся к газу Бозе, будем иметь

$$F(z) = z^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\exp(z\sqrt{1+x^2}) + 1},$$

а ряды (2.3), (2.6), (2.8) будут знакопеременными.

Таблица 1

$z$	$F(z)$	$\Phi(z)$	$G(z)$	$F^*(z)$	$\Phi^*(z)$	$G^*(z)$
0	2,40	6,49	8,65	1,80	5,63	7,57
0,5	2,17	6,30	8,31	1,72	5,58	7,37
0,7	2,02	6,12	8,02	1,65	5,47	7,19
0,9	1,86	5,90	7,67	1,56	5,33	6,95
1	1,78	5,78	7,48	1,52	5,24	6,81
1,2	1,62	5,51	7,07	1,41	5,05	6,51
1,5	1,39	5,06	6,42	1,25	4,72	6,00
2	1,05	4,27	5,31	0,982	4,07	5,07
3	0,561	2,78	3,33	0,546	2,72	3,27
6	0,0599	0,471	0,531	0,0599	0,471	0,531
7	0,0268	0,237	0,263	0,0268	0,237	0,263
8	0,0117	0,115	0,127	0,0117	0,115	0,127

Для  $z \gg 1$

$$F(z) \approx F^*(z) \approx z^2 \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{15}{8} \frac{1}{z}\right),$$

$$\Phi(z) \approx \Phi^*(z) \approx z^3 \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{27}{8} \frac{1}{z}\right),$$

$$G(z) \approx G^*(z) \approx z^3 \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{35}{8} \frac{1}{z}\right).$$

Кроме  $\pi$ -мезонов в системе, вообще говоря, могут образоваться и другие частицы. Как показано в работе [7], равновесное число мезонов с массами, превышающими массу  $\pi$ -мезона, может быть значительно при  $T_h \approx \mu c^2$ . Однако некоторые из тяжелых мезонов, вероятно, слабо взаимодействуют с нуклонами и потому не рождаются в звездах. Далее, другие тяжелые частицы, по-видимому, образуются в звездах парами (например,  $\Lambda$ -частицы образуются вместе с  $K$ -мезонами)<sup>3</sup>, но доля этих частиц относительно невелика и экспериментальные данные недостаточны для того, чтобы сделать определенные выводы. Поэтому мы их здесь рассматривать не будем.

Необходимо учесть, кроме того, наличие нуклонов в системе. Так как при соударениях большой энергии принимают уча-

<sup>3</sup> Относительно большие времена жизни всех тяжелых частиц трудно совместить с предположением об их сильном взаимодействии с ядрами, если не допустить, что эти частицы образуются парами.

стие несколько нуклонов (не меньше двух), то при этом следует учесть также сохранение ядерного заряда (см. [9]).

Выражения для плотности нуклонов  $n_{\text{нн}}$  и антинуклонов  $n_{\text{ан}}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} n_{\text{нн}} &= \frac{g_{\text{н}}}{2\pi^2} \left( \frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 F_1(z_{\text{н}}, y_{\text{нн}}), \\ n_{\text{ан}} &= \frac{g_{\text{н}}}{2\pi^2} \left( \frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 F_1(z_{\text{н}}, y_{\text{ан}}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь  $g_{\text{н}}$  — число возможных состояний частицы при данном импульсе; для нуклонов  $g_{\text{н}} = 4$  (два зарядовых состояния и два направления спина);

$$F_1(z_{\text{н}}, y) = z_{\text{н}}^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\exp(-y + z_{\text{н}} \sqrt{1+x^2}) + 1}, \quad (2.11)$$

где  $z_{\text{н}} = Mc^2/T$ ,  $M$  — масса нуклона,  $y = \mu/T$ ,  $\mu$  — химический потенциал.

Условие равновесия по отношению к образованию и аннигиляции пар гласит  $y_{\text{нн}} + y_{\text{ан}} = 0$ . Обозначив  $y_{\text{нн}}$  через  $y$ , получим, что  $y_{\text{ан}} = -y$ .

В интересующих нас случаях  $y \ll z$  и  $z > 1$ . Поэтому в формуле (2.11) знаменатель можно разложить в ряд по степеням величины  $(y - z \sqrt{1+x^2})$ . Ограничиваясь первым членом в разложении, получим

$$n_{\text{нн}} = \frac{g_{\text{н}}}{2\pi^2} \left( \frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 F_0(z_{\text{н}}) e^y; \quad n_{\text{ан}} = \frac{g_{\text{н}}}{2\pi^2} \left( \frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 F_0(z_{\text{н}}) e^{-y}. \quad (2.10')$$

Для плотностей энергии ( $\epsilon_{\text{нн}}$  и  $\epsilon_{\text{ан}}$ ) и плотностей энтропии ( $s_{\text{нн}}$  и  $s_{\text{ан}}$ ) нуклонов и антинуклонов имеем

$$\epsilon_{\text{нн}} = T_k \left( \frac{g_{\text{н}}}{2\pi^2} \right) \left( \frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 \Phi_0(z_{\text{н}}) e^y, \quad (2.12)$$

$$\epsilon_{\text{ан}} = T_k \left( \frac{g_{\text{н}}}{2\pi^2} \right) \left( \frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 \Phi_0(z_{\text{н}}) e^{-y};$$

$$s_{\text{нн}} = \left( \frac{g_{\text{н}}}{2\pi^2} \right) \left( \frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 [G_0(z_{\text{н}}) - y F_0(z_{\text{н}})] e^y, \quad (2.13)$$

$$s_{\text{ан}} = \left( \frac{g_{\text{н}}}{2\pi^2} \right) \left( \frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 [G_0(z_{\text{н}}) + y F_0(z_{\text{н}})] e^{-y}.$$

Величина  $y$  (химический потенциал) определяется с помощью условия, что разность между числом нуклонов и антинуклонов

во всей системе должна оставаться постоянной и равной числу начальных нуклонов  $N_0$ .

Используем приведенные формулы (2.1) — (2.13) для вычисления некоторых величин.

Оценим прежде всего температуру разлета системы  $T_k$ . Так как плотность  $\pi$ -мезонов значительно больше плотности нуклонов, то эта величина определяется в основном плотностью  $\pi$ -мезонов. Чтобы при температуре  $T_k$  был возможен разлет системы, длина свободного пробега частиц  $l$  должна быть при  $T_k$  порядка характерных размеров системы  $L$ . Как можно показать на основе более детального гидродинамического расчета, приведенного в § 4,  $L$  приближенно может быть записано так:  $L \approx (\hbar/\mu c) (E/Mc^2)^{1/2}$ , где  $E$  — энергия первичного нуклона и  $M$  — его масса. Длина пробега  $l \approx 1/n\sigma$ . Допустим для оценки, что по порядку величины  $\sigma = \pi (\hbar/\mu c)^2$ . Если в качестве  $n$  взять выражение, определяемое формулой (2.1), то получим

$$\frac{l}{L} = \frac{2\pi}{3} \frac{z_\pi^3}{E(z_\pi)} \left( \frac{Mc^2}{E} \right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Результаты вычисления по формуле (2.14) приведены в табл. 2.

Отсюда видно, что температура разлета  $T_k$  лежит в пределах 0,7—1,5  $\mu c^2$ . Действительно, при значении  $l/L \ll 1$ , разлет не может произойти, так как длина пробега чересчур мала, а при  $l/L \gg 1$  система не может существовать из-за малости ее размеров. Следует отметить, что неопределенность нашего расчета, связанная с тем, что и  $\sigma$  и  $L$  известны только по порядку величины, не позволяет теоретически определить температуру разлета  $T_k$ .

Величина  $T_k$  довольно слабо зависит от величины  $l/L$  (при изменении  $l/L$  почти в 100 раз  $T_k$  меняется в четыре раза). С другой стороны, так как  $l/L$  крайне слабо зависит от начальной энергии, то  $T_k$  зависит от нее еще слабее. Таким образом, введение величи-

Таблица 2

$\frac{T_k}{\mu c^2}$	$\frac{l^*}{L}$
0,5	9
0,7	3
1,0	0,7
1,5	0,21
2	0,07

\* Здесь  $l/L$  взято при  $E = 10^{11}$  эв.



ны  $T_h$ , практически не зависящей от свойств системы (т. е. от начальной энергии), имеет физический смысл.

Перейдем теперь к вычислению числа антинуклонов. Будем предполагать, что каждый из участков системы распадается при одинаковой температуре системы  $T_h$ , хотя моменты распада для различных участков могут и не совпадать. Тогда отношение полного числа нуклонов в системе к полному числу  $\pi$ -мезонов будет равно отношению их плотностей. Из формул (2.1) и (2.10') нетрудно получить

$$\operatorname{sh} y = \frac{N_{\pi}^0}{N_{\pi}^0} \frac{N_0}{N_{\pi}}, \quad \operatorname{ch} y = \frac{N_{\pi}^0}{N_{\pi}^0} \frac{N_H}{N_{\pi}}. \quad (2.15)$$

Здесь  $N_{\pi}^0$  и  $N_H^0$  — полные числа  $\pi$ -мезонов и нуклонов (нуклонов и антинуклонов) в системе при условии, что начальные нуклоны отсутствуют.  $N_0$  — число начальных нуклонов,  $N_{\pi}$  и  $N_H$  — полные числа  $\pi$ -мезонов и нуклонов (нуклонов и антинуклонов) при наличии начальных нуклонов. Из формулы (2.15) получаем

$$\frac{N_H}{N_{\pi}} = \sqrt{\left(\frac{N_H^0}{N_{\pi}^0}\right)^2 + \left(\frac{N_0}{N_{\pi}^0}\right)^2}. \quad (2.16)$$

Аналогичным образом получим отношение суммарной плотности энергии нуклонов и антинуклонов  $\varepsilon_H$  к плотности энергии  $\varepsilon_{\pi}$   $\pi$ -мезонов:

$$\frac{\varepsilon_H}{\varepsilon_{\pi}} = \left(\frac{\varepsilon_H^0}{\varepsilon_{\pi}^0}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{N_H^0}{N_{\pi}^0}\right)^2 \left(\frac{N_0}{N_{\pi}^0}\right)^2}. \quad (2.17)$$

Здесь  $\varepsilon_H^0$  и  $\varepsilon_{\pi}^0$  — плотности энергий нуклонов и  $\pi$ -мезонов, когда число начальных нуклонов  $N_0 = 0$ . Отношение  $\varepsilon_H/\varepsilon_{\pi}$  не зависит от системы координат, в которой рассматривается процесс соударения.

Действительно, пусть частица с массой  $M$  обладает в системе координат, где данный элемент вещества покоится, энергией  $E$ . В другой системе координат, движущейся относительно данной со скоростью  $v$ , эта частица будет обладать энергией

$$E' = \frac{E + p_x v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где  $p_x$  — проекция импульса частицы на направление скорости  $v$ .

Так как в данной системе координат распределение изотропно, то, усредняя по всем направлениям, получим

$$E' = \frac{E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Энергия частицы с другой массой  $\mu$  будет преобразовываться по тому же закону. Таким образом, отношение энергий не будет зависеть от скорости  $v$ .

Отношения  $N_{\text{H}}^0/N_{\pi}^0$  и  $\epsilon_{\text{H}}^0/\epsilon_{\pi}^0$  легко находятся из формул (2.1), (2.5), (2.10) и (2.12), если положить в формулах (2.10) и (2.12)  $y = 0$ . Соответствующие значения приведены в табл. 3.

Таблица 3

$\frac{T_k}{\mu c^2}$	$\frac{N_{\text{H}}^0}{N_{\pi}^0}$	$\frac{\epsilon_{\text{H}}^0}{\epsilon_{\pi}^0}$
1,0	0,06	0,14
1,2	0,126	0,30
1,5	0,27	0,57
2,0	0,56	1,0

Если температура разлета порядка  $1,2-1,5 \mu c^2$ , то известную роль может играть возбуждение «изобарных» состояний системы и образование  $\Lambda$ -частиц. Возбуждение «изобарных» состояний приведет к некоторому увеличению числа рождающихся  $\Lambda$ -мезонов, которое при  $N_{\pi} > N_0$  несущественно. Что касается  $\Lambda$ -частиц, то роль их приближенно оценена в работах [7, 9]. Однако, так как спин  $\Lambda$ -частиц неизвестен и они образуются парами с  $K$ -частицами (это не учтено в указанных работах), эта оценка является весьма предварительной.

Рассмотрим следующий пример. Пусть  $T_k = 1,5 \mu c^2$ , тогда  $N_{\text{H}}^0/N_{\pi}^0 = 0,27$ , а число антинуклонов равно 0,135. Допустим, что  $N_0/N_{\pi} = 0,15$  (что соответствует, например, трем начальным нуклонам при 20 образовавшихся мезонах). Тогда из формулы (2.16) получим, что  $N_{\text{H}}/N_{\pi} = 0,3$ . Число всех образовавшихся нуклонов равно 0,15, а антинуклонов — 0,075. Таким образом, в этом случае число антинуклонов с учетом начальных нуклонов уменьшится почти вдвое. Формула (2.8) дает отношение энергии, уносимой нуклонами, к энергии, уносимой  $\Lambda$ -мезонами. Пусть  $T_k = 1,2 \mu c^2$ . Тогда  $\epsilon_{\text{H}}^0/\epsilon_{\pi}^0 = 0,3$ ,  $N_{\text{H}}^0/N_{\pi}^0 = 0,13$ . При  $N_0/N_{\pi} = 0,15$ ,  $\epsilon_{\text{H}}/\epsilon_{\pi} = 0,42$ . Ес-

ли же  $N_0/N_\pi \approx 1$ , то  $\epsilon_H/\epsilon_\pi \approx 2,3$ , т. е. нуклоны уносят около 70% всей энергии. Следует, однако, подчеркнуть, что при  $N_0 \approx N_\pi$  число образующихся частиц невелико и развиваемая теория является грубо приближенной.

Заметим, что число антинуклонов может, вообще говоря, определяться более высокой температурой, чем температура разлета; в этом смысле формула (2.16) дает нижний предел. С другой стороны, формулы (2.16) и (2.17) содержат два параметра — температуру разлета системы  $T_k$  и величину  $N_0/N_\pi$ . Можно, однако, образовать величину, которая не зависит от  $N_0/N_\pi$  и которая определяется только температурой разлета системы  $T_k$ , даже если число нуклонов фиксируется и при более высокой температуре. Нетрудно видеть, что отношение энергии, приходящейся на один нуклон, к энергии, приходящейся на один л-мезон, зависит только от температуры разлета  $T_k$  и экспериментальное определение этого отношения явилось бы, по-видимому, лучшим способом определения температуры разлета. Заметим, что это отношение не зависит от системы отсчета. Значения этого отношения приводятся в табл. 4.

Таблица 4

$\frac{T_k}{\mu c^2}$	$\alpha = \frac{\epsilon_H n_\pi}{\epsilon_\pi n_H}$
$\geq 1$	6,8
0,5	3,76
0,7	3,28
0,8	2,92
1	2,65
1,5	2,16
2	1,83

Весьма существенным является нахождение связи между энтропией и числом частиц. Напомним, что расширение системы (второй этап) рассматривается как движение идеальной жидкости и потому является адиабатическим. Эту адиабатичность могли бы нарушить ударные волны, но они не образуются в процессе расширения. Поэтому энтропия системы и ее отдельных участков изменяется на первом этапе соударения и остается неизменной в продолжение всей гидродинамической стадии расширения вплоть до разлета на отдельные частицы.

Из уравнений (2.1), (2.8), (2.10), (2.13) получим следующее выражение для энтропии системы:

$$S = \left\{ \frac{G_0(z_H)}{F_0(z_H)} - y \operatorname{th} y \right\} N_H + \frac{G_0(z_\pi)}{F(z_\pi)} N_\pi. \quad (2.18)$$

Если  $N_0 = 0$ , то и  $y = 0$ , и формула (2.18) сведется к следующей:

$$N^* = \alpha S, \quad (2.19)$$

где  $N^* = N + N_\pi$ , т. е.  $N^*$ , равно сумме чисел образующихся частиц (нуклонов и  $\pi$ -мезонов), а коэффициент  $\alpha$  равен

$$\alpha = \frac{8F_0(z_H) + 3F(z_\pi)}{8G_0(z_H) + 3G(z_\pi)}. \quad (2.20)$$

Функция  $\alpha$  дана в табл. 5.

Таблица 5

$\frac{T_k}{\mu c^2}$	$\alpha$
0,17	0,113
0,5	0,193
0,67	0,215
0,83	0,222
1	0,223
1,43	0,216
2	0,213
$\geq 1$	0,25

Как следует из этой таблицы, функция  $\alpha$  слабо зависит от температуры разлета  $T_k$ . В интервале изменения  $T_k$  от 0,7 до 1,5  $\mu c^2$  коэффициент  $\alpha$  практически не меняется.

Переходя к случаю, когда число начальных нуклонов не равно нулю, обратимся к уравнению сохранения ядерного заряда:

$$N_{\text{нн}} - N_{\text{ан}} = \left(\frac{T_k}{\hbar c}\right)^3 \frac{g_H}{2\pi^2} F(z_H) [e^y - e^{-y}] V_{\text{ср}} = N_0. \quad (2.21)$$

Здесь  $V_{\text{ср}}$  — суммарный объем системы. С другой стороны, полное число нуклонов равно

$$N_H = N_{\text{нн}} + N_{\text{ан}} = \left(\frac{T_k}{\hbar c}\right)^3 \frac{g_H}{2\pi^2} F(z_H) [e^y + e^{-y}] V_{\text{ср}}. \quad (2.22)$$

Вернемся теперь к уравнению (2.18). Вместо  $S$  возьмем отношение числа частиц  $N^*$ , образующихся при  $N_0 = 0$ , к начальному числу нуклонов  $N_0$ . Для этого умножим правую и левую части уравнения (2.12) на  $\alpha$  и разделим на  $N_0$  (см. (2.21)).

В результате преобразований получим

$$\frac{N^*}{N_0} = \left[ \frac{G_0(z_H)}{F_0(z_H)} \operatorname{cth} y - y + \frac{g_\pi G(z_\pi)}{2g_H F_0(z_H) \operatorname{sh} y} \right] \alpha. \quad (2.23)$$

С помощью уравнений (2.1), (2.10), (2.22) получаем

$$\frac{N}{N_0} = \frac{g_\pi F_0(z_\pi)}{2g_H F_0(z_H)} \frac{1}{\operatorname{sh} y} + \operatorname{cth} y. \quad (2.24)$$

Из этих уравнений можно найти отношение  $N/N_0$  как функцию  $N^*/N_0$  (величина  $y$  является параметром). Вычисления показывают, что в широком интервале температур (от  $T_h = 0,5$  до  $T_h = 2 \mu\text{с}^2$ ) и до значений  $N^*/N_0 \approx 2$ ,  $N/N_0$  будет всегда меньше  $N^*/N_0$ . При этом отличие  $N/N_0$  от  $N^*/N_0$  будет тем больше, чем меньше температура  $T_h$ . Однако уже при  $N^*/N_0 = 3$  и  $T_h = 0,5 \mu\text{с}^2$   $N/N_0 = 2,54$ , т. е. отношение  $N/N^* = 0,85$ . При  $N^*/N_0 < 2$  число вновь образованных частиц быстро падает и  $N/N_0$  стремится к единице. Таким образом, соотношение

$$N = \alpha S \quad (2.25)$$

справедливо и при наличии начальных нуклонов вплоть до значений  $N^*/N_0$  порядка 2, причем под  $N$  следует понимать сумму образованных при соударениях частиц и начальных нуклонов.

### § 3. Полное число частиц

Для гидродинамического рассмотрения системы, которое используется при двух первых этапах соударения, необходимо знать уравнение состояния вещества.

В качестве уравнения состояния сильно сжатого вещества при температурах  $T \gg \mu\text{с}^2$  примем следующее (см. [6]):

$$p = \frac{\varepsilon}{3}, \quad (3.1)$$

где  $p$  — давление, а  $\varepsilon$  — плотность энергии. Как известно, для давления и плотности макроскопических тел имеет место неравенство  $p \leq \varepsilon/3$ , причем знак равенства справедлив в крайне релятивистском случае. Однако это неравенство выведено в предположении электромагнитного взаимодействия между частицами и в настоящее время нет доказательств, что оно должно быть справедливо в случае любого взаимодействия. Тем не менее выбор уравнения состояния (3.1) представляется нам весьма правдоподобным. Так как

число частиц в системе не задано, а само определяется из статистического равновесия, то химический потенциал равен нулю. Отсюда  $\varepsilon - Ts + p = 0$ , где  $s$  — энтропия единицы объема. Используя уравнение состояния, имеем  $Ts = \varepsilon + p = 4/5 \varepsilon$ . Так как при заданном объеме  $d\varepsilon = Tds$ , то нетрудно видеть, что

$$s \propto \varepsilon^{3/4}, \quad T \propto \varepsilon^{1/4}. \quad (3.2)$$

Соотношения (3.2) совпадают с соотношениями для «черного излучения», чего, конечно, и следовало ожидать.

Мы уже указывали, что энтропия системы остается постоянной в течение гидродинамической стадии расширения и меняется только на первом этапе, в первый момент столкновения. С другой стороны, число частиц в звезде связано с энтропией соотношением (2.25). Отсюда следует, что для определения полного числа частиц надо вычислить изменение энтропии в первый момент столкновения. Это изменение энтропии проще всего вычислить в случае столкновения двух одинаковых частиц, например двух нуклонов. Пусть  $E'$  — энергия нуклонов в системе центра инерции. В системе центра инерции, в силу симметрии системы, вещество в момент, непосредственно следующий за столкновением, покоится. Полная энтропия системы пропорциональна  $\varepsilon^{3/4} V_1$ , где  $\varepsilon$  — плотность энергии,  $V_1$  — объем, в котором концентрируется энергия. Поэтому  $\varepsilon = E'/V_1$ ; энтропия, а следовательно, и число частиц пропорциональны  $V_1^{1/4} E'^{3/4}$ . Так как объем  $V_1$  благодаря лоренцову сокращению преобразуется обратно пропорционально  $E'$ , а энергия  $E$  в лабораторной системе пропорциональна  $E'^2$ , то окончательно получим

$$N \propto E^{1/4}, \quad (3.3)$$

где  $E$  — энергия в лабораторной системе. Из размерностных соображений формула (3.3) может быть написана в форме

$$N = k \left( \frac{E}{2Mc^2} \right)^{1/4}, \quad (3.3')$$

где  $k$  — постоянная порядка единицы. Из опыта следует, что  $k \approx 2$ . Соотношение (3.3) совпадает с полученным Ферми, что естественно, так как при выводе его мы исходили из уравнения состояния для черного излучения, которое принимает и Ферми, и из соотношения  $N \propto S$ , которое справедливо при любой «температуре» разлета системы. Согласно Ферми, температура разлета определяется в первый момент после столкновения. Это предположение, являющееся, как было показано [4], внутренне противоречивым, не влияет, однако, на справедливость соотношения (3.3).

Мы рассматривали лобовые столкновения, когда частицы пролетают на расстояниях, сравнимых с их радиусом действия. Теперь обратимся к периферическим столкновениям, когда расстояние пролета велико по сравнению с радиусом действия сил обеих частиц. На первый взгляд может показаться, что среднее число рождающихся частиц должно быстро падать с увеличением прицельного расстояния. Это связано с тем, что энергия мезонного поля столкнувшихся нуклонов, сосредоточенная в каждом участке, казалось бы (в системе, в которой этот участок покоится), быстро падает с увеличением расстояния от их центров. Такая точка зрения проводится в работах Гейзенберга [10] и Баба [11], посвященных множественному образованию частиц при больших энергиях. Между тем эта точка зрения находится в противоречии с квантовым соотношением неопределенности и потому является ошибочной [6]. Подробнее этот вопрос рассмотрен в работе Е. Л. Фейнберга и Д. С. Чернавского [12]. Действительно, если бы энергия участка системы убывала, то она оказалась бы весьма скоро малой по сравнению с неопределенностью  $\Delta E \sim \hbar c/l$ , где  $l$  — толщина участка, сокращенная вследствие лоренцова сжатия<sup>4</sup>. Отсюда следует, что малой является не истинная полная энергия системы, а ее математическое ожидание. Другими словами, уменьшается не полная энергия системы и полное число частиц, а лишь вероятность, что такое столкновение вообще произойдет. При детальном анализе нелобовых столкновений необходимо квантовое рассмотрение, так как классическое несправедливо из-за нарушения соотношения неопределенности.

Последовательное квантовое рассмотрение проблемы нелобовых соударений представляет большие трудности. Это рассмотрение требует привлечения мезонной теории ядерных сил, которая еще не разработана. Не исключена возможность, что при нелобовом соударении (которое само маловероятно) передается в процессе соударения лишь некоторая доля энергии первичного нуклона. Однако в настоящее время теория не в состоянии решить этот вопрос. Нам представляется, что вообще на современном уровне теории нет особого смысла различать центральные и периферические столкновения при соударениях двух нуклонов. Эффективные же сечения соударения с возникновением многолучевой звезды определяются по порядку величины «радиусом» нуклона  $\hbar/\mu c$ .

Гейзенберг [10] из-за неправильного учета периферических соударений приходит к ошибочному выводу, что сечение соударения логарифмически растет с энергией. Остановимся подробнее

<sup>4</sup> Так как  $l \sim \frac{\hbar}{\mu c} \frac{Mc^2}{E}$ , то  $\frac{\Delta E}{E} \sim \frac{\mu}{M}$ .

на этом вопросе (см. [12]). Гейзенберг рассматривает соударение сверхбыстрых нуклонов в системе их общего центра тяжести. Мезонные поля нуклонов убывают в перпендикулярном направлении  $y$  по закону  $e^{-y/r_0}$ , где  $r_0 = \hbar/\mu c$ . Чтобы оценить долю  $\gamma$  первоначальной энергии нуклона  $E$ , переходящую в образовавшиеся частицы, рассматривается область, в которой перекрываются мезонные облака обеих частиц при параметре соударения  $b$ . При этом получается  $\gamma \sim e^{-b/r_0}$ , а число образующихся частиц равно по порядку величины

$$N \sim \frac{\gamma E}{\mu c^2} \sim \frac{E}{\mu c^2} e^{-b/r_0}. \quad (3.4)$$

Сечение для образования некоторого числа  $N$  мезонов равно  $\pi b_0^2$  при  $b_0$ , соответствующем  $N$ . Например, при  $N \approx 2$  имеем

$$\sigma_{N \geq 2} \approx \pi r_0^2 \left( \ln \frac{E}{\mu c^2} \right)^2. \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что должны возникать главным образом ливни с малым числом частиц, а сечение логарифмически растет с энергией. Но, как указывалось выше, подход Гейзенберга к нелобовым соударениям неверен, и потому формула (3.5) ошибочна.

Действительно, при  $\gamma E \lesssim \Delta E$  ее вывод приходит в противоречие с соотношением неопределенности. Это соответствует параметрам соударения  $b \sim r_0$ .

В работе Баба [11] делается попытка на основе изучения многолучевых звезд сделать определенные выводы о структуре нуклона. При этом автор с классической точки зрения рассматривает далекие соударения и, следовательно, также входит в противоречие с соотношением неопределенности. Квантовое же рассмотрение, как уже указывалось, в настоящее время провести нельзя. Поэтому какие-либо выводы о структуре нуклона не могут быть сделаны исходя из анализа многолучевых звезд.

Соударения нуклонов с ядрами, а также ядер с ядрами будут рассмотрены в § 5.

#### § 4. Энергетическое и угловое распределения частиц

Мы рассмотрим в этом параграфе стадию расширения при соударении двух нуклонов. Для исследования расширения системы следует использовать уравнения релятивистской гидродинамики

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (4.1)$$

$$T_{ik} = \omega u_i u_k + p g_{ik}, \quad (4.2)$$



где  $\omega = \varepsilon + p$  — тепловая функция единицы объема;  $u_i$  — 4-скорость;  $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ ;  $g_{44} = -1$ ; ниже положено  $c=1$ ,  $x_i = x_1, x_2, x_3, it$ .

Проекция уравнения (4.1) на направление  $u_i$  приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial s u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (4.3)$$

где  $s$  — плотность энтропии. Уравнение (4.3) выражает адиабатический характер движения. При выводе уравнения (4.3) учитывались термодинамические соотношения  $de = Tds$  и  $\omega = Ts$ . (Напомним, что, так как число частиц в системе не задано, химический потенциал  $\mu$  равен нулю.)

«Спроектируем» теперь уравнение (4.1) на направление, перпендикулярное к  $u_i$ . Эта проекция равна, очевидно,

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial T_{ll}}{\partial x_l} = 0,$$

так как при скалярном умножении на  $u_i$  она дает нуль. Вычисление [13] приводит к следующему уравнению:

$$\omega u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \quad (4.4)$$

Учитывая, что в нашем случае  $\omega = Ts$  и  $dp = sdT$  (так как  $d\omega = dp + Tds$ ), из уравнения (4.4), получим

$$u_k \frac{\partial T u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0. \quad (4.5)$$

В системе центра тяжести система имеет в момент столкновения форму сильно сплюснутого диска (вначале поперечные размеры этого диска  $a$  в  $E'/2M$  раз больше его толщины  $\Delta$ ). Такой характер движения сохраняется в течение значительной части стадии расширения. Движение вещества при этом можно рассматривать как одномерное. Решение как для одномерной, так и для последующей трехмерной стадий расширения было впервые получено Ландау [6]. Позднее И. М. Халатников [14] получил более точное решение для одномерной стадии, исходя из исследования общей одномерной задачи в релятивистской гидродинамике. В настоящем параграфе мы при рассмотрении одномерной стадии будем следовать вначале работе [14] и далее работе [6].

В одномерном случае мы будем иметь лишь координаты  $x_1$  и  $x_4$ . Нетрудно видеть, что уравнение (4.5) можно тогда записать сле-

дующим образом (см. [14]):

$$\frac{\partial T u_1}{\partial x_4} = \frac{\partial T u_4}{\partial x_1}, \quad (4.6)$$

и, следовательно, существует такая функция  $\varphi$ , что

$$T u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad T u_4 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_4}. \quad (4.7)$$

Функция  $\varphi$  является потенциалом одномерного движения релятивистской гидродинамики. Для потенциала  $\varphi$  имеем следующее дифференциальное соотношение:

$$d\varphi = T u_4 dx_4 + T u_1 dx_1. \quad (4.8)$$

В дальнейшем вместо  $x_4$  мы будем использовать величину  $t$  ( $x_4 = = it$ ), вместо  $u_4$  — величину  $u_0 = 1/\sqrt{1-v^2}$  ( $u_4 = iu_0$ ) и вместо  $x_1$  — величину  $x$ . Уравнение (4.8) примет тогда следующий вид:

$$d\varphi = -T u_0 dt + T u_1 dx. \quad (4.8')$$

Введем переменную  $\alpha$ , связанную со скоростями  $u_0$  и  $u_1$  соотношениями

$$u_1 = \text{sh } \alpha, \quad u_0 = \text{ch } \alpha. \quad (4.9)$$

Теперь совершим преобразование Лежандра по отношению к переменным  $\omega$  и  $\alpha$ . Для нового потенциала  $\chi$  получим

$$d\chi = d(\varphi + T u_0 t - T u_1 x) = (t \text{ch } \alpha - x \text{sh } \alpha) dT + \\ + (t \text{sh } \alpha - x \text{ch } \alpha) T d\alpha. \quad (4.10)$$

Из соотношения (4.10) следует

$$\frac{\partial \chi}{\partial T} = t \text{ch } \alpha - x \text{sh } \alpha, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} = T (t \text{sh } \alpha - x \text{ch } \alpha), \quad (4.11)$$

$$t = \frac{\partial \chi}{\partial T} \text{ch } \alpha - \frac{1}{T} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \text{sh } \alpha, \quad x = \frac{\partial \chi}{\partial T} \text{sh } \alpha - \frac{1}{T} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \text{ch } \alpha. \quad (4.12)$$

Теперь обратимся к уравнению (4.3), которое в случае одномерного движения записывается следующим образом:

$$\frac{\partial s u_0}{\partial t} + \frac{\partial s u_1}{\partial x} = 0.$$

Перейдем в этом уравнении от переменных  $t$  и  $x$  к переменным  $T$  и  $\alpha$ :

$$\frac{\partial (t, x)}{\partial (T, \alpha)} \left\{ \frac{\partial (s \text{ch } \alpha, x)}{\partial (t, x)} - \frac{\partial (s \text{sh } \alpha, t)}{\partial (t, x)} \right\} = \frac{\partial (s \text{sh } \alpha, x)}{\partial (T, \alpha)} - \frac{\partial (s \text{ch } \alpha, t)}{\partial (T, \alpha)}.$$

Так как в нашем случае  $s$  полностью определяется температурой  $T$ , то получим

$$\frac{1}{s} \frac{ds}{dT} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (x \operatorname{ch} \alpha - t \operatorname{sh} \alpha) - (x \operatorname{sh} \alpha - t \operatorname{ch} \alpha) \right\} + \frac{\partial}{\partial T} (t \operatorname{ch} \alpha - x \operatorname{sh} \alpha) = 0. \quad (4.13)$$

Пользуясь соотношениями (4.11), (4.12), уравнение (4.13) преобразуем к следующему виду:

$$\frac{1}{s} \frac{ds}{dT} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial T} - \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} \right\} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial T^2} = 0. \quad (4.14)$$

Но

$$\frac{s}{T} \frac{dT}{ds} = \frac{1}{T} \frac{dp}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{dp}{d\varepsilon} = c_0^2,$$

где  $c_0$  — скорость звука в среде.

Введя вместо переменной  $T$  переменную  $y = \ln T$ , получим

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + (c_0^2 - 1) \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0. \quad (4.15)$$

Так как уравнение состояния среды  $p = \varepsilon/3$ , то  $c_0^2 = 1/3$ . Подставляя это значение в уравнение (4.15), имеем<sup>5</sup>

$$3 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0. \quad (4.15')$$

Таким образом, решение одномерной задачи релятивистской гидродинамики сводится к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Переход от потенциала  $\chi$  к переменным  $x$  и  $t$  совершается по формулам (4.12).

Вернемся теперь к интересующей нас задаче о расширении плоского диска толщины  $\Delta$ . В системе центра тяжести диск расширяется симметрично в обе стороны. Поэтому мы рассмотрим расширение только в одну сторону. Выберем  $x = 0$  так, чтобы расширение было симметрично относительно плоскости  $x_1 = -l$ , где  $l = \Delta/2$ . Прежде всего следует выяснить граничные условия для нашей задачи. Очевидно, что в плоскости  $x_1 = -l$  (которая в силу симметрии может рассматриваться как неподвижная стенка) среда должна покоиться, а это означает, что  $\alpha = 0$ . Используя уравне-

<sup>5</sup> Вследствие опечатки в работе И. М. Халатникова [14] коэффициенты в уравнениях (4.15) и (4.15') отличаются от соответствующих коэффициентов, приведенных в его работе.

ние (4.12), это условие запишем следующим образом:

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = l e^{-y}. \quad (4.16)$$

Со стороны вакуума искомое решение должно граничить с простой (римановской) волной, для которой имеет место автомодельное решение

$$x = t \frac{v - c_0}{1 - v c_0}, \quad (4.17)$$

где  $v$  — скорость (обычная) движения. Можно показать (см. [13]), что в простой волне величины  $\alpha$  и  $y$  связаны соотношением

$$\alpha = -\frac{y}{c_0}. \quad (4.18)$$

Для того чтобы найти условие сшивания простой волны с общим решением, следует подставить выражения (4.12) для  $x$  и  $t$  в уравнение (4.17). Совершив эту подстановку и использовав условие (4.18), получим, что  $\chi = 0$ .

Таким образом, второе граничное условие запишется так:

$$\chi = 0 \text{ при } \alpha = -\frac{y}{c_0}. \quad (4.19)$$

Введем вместо потенциала  $\chi$  потенциал  $\chi_1$ :

$$\chi = \chi_1 e^{-y}, \quad (4.20)$$

а в качестве переменных — величины  $\alpha$  и  $z$  (вместо  $y$ ):

$$z = -\alpha - \frac{y}{c_0}. \quad (4.21)$$

Уравнение (4.15) и граничные условия (4.16) и (4.19) примут в новых переменных следующий вид:

$$\left(6 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z} - 3 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 1\right) \chi_1 = 0, \quad (4.22)$$

$$\chi_1 = 0 \text{ при } z = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \chi_1}{\partial z} = -l e^{-2z/\sqrt{3}} \text{ при } \alpha = 0. \quad (4.24)$$

Далее совершаем преобразование Лапласа по переменной  $z$ :

$$\psi = \int \chi_1(z) e^{-zq} dz. \quad (4.25)$$

Тогда уравнение (4.22) переходит в следующее:

$$6q \frac{\partial \psi}{\partial x} - 3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi = 0, \quad (4.26)$$

а граничные условия сведутся к условию

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - q\psi = l \frac{1}{q + 2/\sqrt{3}} \text{ при } x = 0. \quad (4.27)$$

Ищем решение в виде  $\psi = a(q)e^{p(q)\alpha}$ . Для  $p(q)$  получаем из уравнения (4.26) квадратное уравнение. Выбираем решение, соответствующее затуханию  $\psi$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Функция  $a(q)$  определяется из уравнения (4.27). В результате получаем

$$\psi = l \frac{\exp\{(q - \sqrt{q^2 - 1/3})\alpha\}}{\sqrt{q^2 - 1/3}(q + 2/\sqrt{3})}. \quad (4.28)$$

Далее согласно формуле обращения находим функцию  $\chi_1$ :

$$\chi_1 = \frac{1}{2\pi i} l \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{\exp\{-\sqrt{q^2 - 1/3}\alpha - yq\sqrt{3}\} dq}{\sqrt{q^2 - 1/3}(q + 2/\sqrt{3})}, \quad \text{Re } q < \delta. \quad (4.29)$$

Интеграл в (4.29) берется так, чтобы полюсы подынтегрального выражения лежали левее прямой, вдоль которой производится интегрирование.

Окончательно потенциал  $\chi$ , удовлетворяющий граничным условиям, имеет следующий вид:

$$\chi = l\sqrt{3}e^y \int_{\alpha/\sqrt{3}}^{-y} e^{2y'} I_0\left(\sqrt{y'^2 - \frac{\alpha^2}{3}}\right) dy', \quad (4.30)$$

где  $I_0$  — функция Бесселя мнимого аргумента (см. Дополнение I).

При помощи соотношений (4.12), которые удобно переписать в форме

$$\begin{aligned} t &= e^{-y} \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \text{ch } \alpha - \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \text{sh } \alpha \right), \\ x &= e^{-y} \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \text{sh } \alpha - \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \text{ch } \alpha \right), \end{aligned} \quad (4.12')$$

можно найти теперь зависимость  $y$  (т. е.  $T$ ) и  $\alpha$  (т. е.  $v$ ) от  $x$  и  $t$  и получить, таким образом, полное решение задачи.

Рассмотрим позднюю стадию одномерного разлета, когда  $y$  и  $\alpha$  велики и  $y > \alpha$ . Эти условия означают относительно низкую тем-

пературу ( $y$  отрицательно) и ультрарелятивистские скорости частиц. Воспользуемся для этой стадии асимптотическим выражением для  $I_0$ :

$$I_0 \left( \sqrt{y^2 - \frac{\alpha^2}{3}} \right) \approx \exp \sqrt{y^2 - \frac{\alpha^2}{3}}.$$

Потенциал  $\chi$  тогда будет порядка

$$\chi \approx \Delta \exp \left( -y + \sqrt{y^2 - \frac{\alpha^2}{3}} \right).$$

Если ограничиться логарифмической точностью, то, используя (4.12), нетрудно получить<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \frac{t+x}{\Delta} &\approx \exp \left( \alpha - 2y + \sqrt{y^2 - \frac{\alpha^2}{3}} \right), \\ \frac{t-x}{\Delta} &\approx \exp \left( -\alpha - 2y + \sqrt{y^2 - \frac{\alpha^2}{3}} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \ln \frac{t+x}{t-x}, \\ y &= -\frac{1}{3} \left[ \ln \frac{t+x}{\Delta} + \ln \frac{t-x}{\Delta} - \sqrt{\ln \frac{t+x}{\Delta} \cdot \ln \frac{t-x}{\Delta}} \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Введем следующие обозначения:

$$\ln \frac{t+x}{\Delta} = \tau, \quad \ln \frac{t-x}{\Delta} = \eta.$$

Так как  $y = \ln T$ , а плотность энергии  $\varepsilon \propto T^4$ , то второе из уравнений (4.32) можно записать так:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp \left\{ -\frac{4}{3} (\eta + \tau - \sqrt{\tau\eta}) \right\}. \quad (4.33)$$

Далее при  $\alpha > 1$   $u_1 \approx u_0 \approx 1/\sqrt{1-v^2}$  (см. (4.9)). Обозначим

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

<sup>6</sup> Легко видеть, что

$$\frac{t-x}{t+x} \approx e^{-2\alpha} \ll 1.$$

Из уравнения (4.9) следует  $\alpha = \text{Arsh } u \approx \ln 2u$ ; первое из уравнений (4.32) тогда дает

$$u^2 \approx \frac{t+x}{t-x}. \quad (4.34)$$

Уравнения (4.33) и (4.34) совпадают с полученными ранее Ландау другим способом уравнениями (16) и (24) работы [6].

Для одномерной стадии расширения возможно (исходя из формулы (4.30)) и более точное решение, чем решение (4.33), (4.34), справедливое лишь с логарифмической точностью. Однако, так как следующая трехмерная стадия решается весьма приближенно, в настоящее время нет необходимости в дальнейшем уточнении.

Рассмотрим распределение энергии и энтропии вдоль толщины диска. Плотность энергии, как нетрудно видеть, порядка  $\epsilon u^2$ <sup>7</sup>. Для энергии  $dE$ , приходящейся на слой толщины  $d\delta$ , где  $\delta = t - x$ , имеем

$$dE \sim \epsilon a^2 u^2 d\delta,$$

где  $a$  — радиус диска.

Воспользовавшись формулами (4.33), (4.34), получим

$$dE \propto \exp \left\{ -\frac{1}{3} (V\bar{\tau} - 2V\bar{\eta})^2 \right\} d\eta. \quad (4.35)$$

Из формулы (4.35) следует, что распределение энергии имеет максимум при  $\eta = \tau/4$ . Это значит, что энергия сконцентрирована в основном в области  $\delta \sim (t\Delta^3)^{1/4}$ . При  $t \gg \Delta$   $\delta \ll t$ . Таким образом, большая часть энергии сконцентрирована в узком слое  $\delta \ll t$ , близком к границе области. Найдем теперь распределение энтропии. Плотность энтропии равна  $su^3$ . Поскольку  $s \propto \epsilon^{3/4}$ , то для энтропии, приходящейся на слой толщины  $d\delta$ , находим

$$dS \sim sua^2 d\delta$$

или, используя (4.33) и (4.34),

$$dS \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} V\bar{\tau} - V\bar{\eta}^2 \right\} d\eta. \quad (4.36)$$

Это распределение имеет максимум при  $\eta = \tau$ . Это означает, что энтропия сконцентрирована в области  $L \sim t$ . Отсюда видно (см.

<sup>7</sup> Действительно, плотность энергии дается компонентой  $T_{44}$  тензора энергии импульса  $T_{44} \approx \epsilon u^2$ .

<sup>8</sup> Плотность энтропии дается компонентой  $s^0$  четырехмерного вектора плотности потока энтропии  $s^0 = su^0$ .

(4.34)), что в области максимума частиц  $u^2 \approx 1$ , и, следовательно, условие  $\alpha > 1$  выполняется приближенно. Вещество в этой области движется со скоростями порядка скорости света, но не ультрарелятивистскими.

Обратимся теперь к пространственной стадии разлета.

Полученное решение справедливо до тех пор, пока движение можно считать одномерным. Для этого необходимо, чтобы был мал угол разлета  $\vartheta$ , т. е. угол, образуемый траекторией данного элемента вещества с осью  $x$ . Точнее, необходимо, чтобы расстояние, проходимое данным элементом в поперечном направлении, было меньше размеров системы  $a$ . Это условие можно записать в виде

$$t\vartheta \ll a. \quad (4.37)$$

Для оценки угла  $\vartheta$  обратимся к неиспользованным поперечным компонентам уравнения (4.1). Имеем

$$\frac{\partial T_{42}}{\partial t} \approx \frac{\partial T_{22}}{\partial y}$$

или по порядку величины  $T_{42}/t \sim T_{22}/y$ . Но  $T_{42} \approx \varepsilon u^2 \vartheta$  и  $T_{22} \approx \varepsilon$ , откуда  $u^2 \vartheta \sim t/a$ . Так как согласно (4.34)  $u^2 \sim t/\delta$ , то окончательно получим

$$\vartheta \sim \frac{\delta}{a}. \quad (4.38)$$

Это означает, что чем дальше частица от фронта и чем, следовательно, меньше ее энергия, тем больше она отклоняется. Формулы (4.37) и (4.38) дают

$$t \ll \frac{a^2}{\delta}. \quad (4.39)$$

Неравенство (4.39) определяет условие применимости одномерного решения. Граница применимости лежит тем дальше, чем ближе частица к фронту. Начиная с момента  $t_1 = a^2/\delta$  становится существенным боковое отклонение. Возникающее движение может быть рассмотрено только приближенно. Качественно его можно характеризовать как конический разлет. Обратимся к производной

$$\frac{d\delta}{dt} = 1 - \frac{dx}{dt} = 1 - v \approx \frac{1}{2u^2}.$$

Во второй (трехмерной) стадии расширения  $u$  значительно больше, чем в первой. Поэтому величина  $\delta$  остается практически постоянной для каждого элемента вещества. Кроме того, можно



показать, что всеми производными гидродинамических величин как по направлению  $\delta$ , так и по поперечному направлению можно пренебречь. Это означает, что боковые силы малы и мы имеем как бы разлет по инерции (радиальный разлет). Резюмируем качественное описание разлета: угловое отклонение траектории каждого элемента, достигаемое на первой, в основном одномерной, стадии расширения, остается неизменным на следующей, пространственной стадии.

Отсюда следует, что как поток энергии, так и поток энтропии, переносимые внутри всякого конуса с заданным углом раствора  $\vartheta$ , должен оставаться постоянным. Так как  $\delta = t - x \ll t$ , площадь сечения этого конуса  $\sim t^2$  и постоянство потоков энергии и энтропии означает

$$\varepsilon u^2 t^2 = \text{const}; \quad sut^2 \sim \varepsilon^{3/4} \quad ut^2 = \text{const}. \quad (4.40)$$

Отсюда находим

$$u \sim t, \quad \varepsilon \sim \frac{1}{t^4}. \quad (4.41)$$

Эти соотношения определяют изменение со временем величин  $u$  и  $t$  при коническом расширении. На первой стадии, как следует из (4.34),  $u \approx (t/\delta)^{1/2}$ , на второй стадии  $u \sim t$ , и, следовательно, скорость в этом случае меньше отличается от скорости света, чем на первой стадии. Область перехода от первой ко второй стадии весьма сложна и детально не рассматривается. Вместо этого ставится задача «сплечь» полученное решение для второй стадии с одномерным решением в точке, где последнее становится непригодным, т. е. в точке  $t_1 = a^2/\delta$ .

Введем следующие обозначения:

$$\frac{\delta}{a} = e^{-\lambda}, \quad \frac{\Delta}{a} = e^{-L}. \quad (4.42)$$

Напомним, что  $\Delta/a \approx M/E' = \sqrt{2M/E}$ , откуда

$$L = \frac{1}{2} \ln \frac{E}{2M},$$

где  $E'$  — энергия в системе центра тяжести, а  $E$  — в лабораторной системе. Тогда

$$\eta = \ln \frac{\delta}{\Delta} = L - \lambda; \quad \tau_1 = \ln \frac{t_1}{\Delta} = \ln \frac{a^2}{\delta \Delta} = L + \lambda. \quad (4.43)$$

Подставив эти выражения в формулу (4.36), получим

$$dS \sim e^{\sqrt{L^2 - \lambda^2}} d\lambda.$$

В пространственной стадии, как уже было выяснено,  $\delta = \text{const}$ , следовательно, и  $\lambda = \text{const}$  для каждого элемента вещества. Поэтому энтропия элемента вещества определяется этой же формулой вплоть до разлета системы на отдельные части. Но мы знаем, что число частиц пропорционально энтропии. Следовательно, для распределения частиц имеем

$$dN \propto e^{\sqrt{L^2 - \lambda^2}} d\lambda, \quad (4.44)$$

$$\vartheta = \frac{\delta}{a} = e^{-\lambda}. \quad (4.45)$$

Угол разлета  $\vartheta$  остается постоянным вместе с  $\delta$  для каждого элемента вещества. Формулы (4.44), (4.45) определяют в параметрическом виде угловое распределение частиц в системе центра инерции. Большинство частиц образуется при  $\delta \sim t$ , так как в этой области находится максимум энтропии. Для этих частиц конец одномерной стадии наступает при  $t_k \sim a$ . Поэтому угол разлета таких частиц  $\sim 1$ . При малых углах образуется меньше частиц, но они обладают большей энергией. Из формул (4.44) — (4.45) следует, что при лобовом соударении угловое распределение в системе центра инерции отнюдь не изотропно, как предполагал Ферми [2]. Заметим, что наибольшее значение величин  $\lambda$ , которое еще имеет смысл учитывать, определяется из условия

$$\int_{\lambda_{\max}}^L dN \approx 1.$$

Отсюда можно вывести, что <sup>9</sup>

$$\lambda_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} L. \quad (4.46)$$

Определим распределение частиц по энергиям. В стадии одномерного движения  $u \approx \sqrt{t/\delta}$ , в стадии конического  $u \propto t$ .

<sup>9</sup> Так как  $dN \propto e^{\sqrt{L^2 - \lambda^2}} d\lambda$ , то из условия  $\int_{\lambda_{\max}}^L dN \approx 1$  имеем

$$C \exp \sqrt{L^2 - \lambda_{\max}^2} \approx 1$$

(с логарифмической точностью). Но  $N \approx e^{L/2}$ . Поэтому

$$\int_{\lambda=0}^{\lambda=L} dN \approx C e^L \approx e^{L/2}.$$

Это значит, что  $C \approx e^{L/2}$  и отсюда (4.46).

Из условия сшивания этих величин при  $t = t_1$  получаем

$$u \approx \frac{t}{a}. \quad (4.47)$$

Далее сшиваем выражения для плотности энергии  $\varepsilon$ . При  $t = t_1$  из формулы (4.33) получим

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp \left\{ -\frac{4}{3} (2L - \sqrt{L^2 - \lambda^2}) \right\}.$$

С другой стороны, в стадии конического разлета  $\varepsilon \propto 1/t^4$ . Из условия сшивания получим

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left( \frac{t_1}{t} \right)^4 \exp \left\{ -\frac{4}{3} (2L - \sqrt{L^2 - \lambda^2}) \right\}. \quad (4.48)$$

Свободный разлет частиц начинается в момент  $t_k$ , когда температура участка системы становится равной «критической» температуре  $T_k$  (см. § 2). Этому моменту соответствует определенная плотность энергии  $\varepsilon_k$ . Из формулы (4.48) находим выражение для момента  $t_k$ :

$$t_k \approx t_1 \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_k} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{3} (2L - \sqrt{L^2 - \lambda^2}) \right\}.$$

Отсюда согласно (4.47) находим значение величины  $u$  в момент разлета:

$$u_k \approx \frac{t_k}{a}. \quad (4.49)$$

Величина  $u_k$  просто связана с энергией разлетающихся частиц. Если энергия частицы в системе отсчета, где данный элемент вещества покоится, равна  $E_0$ , то в системе центра инерции она равна  $E_0 u_k$ . Из формулы (4.49) видно, что чем позже данный элемент системы распадается, тем большей энергией обладают вылетающие частицы:

$$u_k = \text{const} \exp \left( \lambda + \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \lambda^2} \right).$$

Постоянная в этом соотношении определяется из равенства

$\int E_0 u_k dN = E'$ . Отсюда получаем для энергии частицы  $\mathcal{E} = E_0 u_k$  выражение

$$\mathcal{E} \approx M \exp \left( -\frac{L}{6} + \lambda + \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \lambda^2} \right). \quad (4.50)$$

Уравнения (4.44) и (4.50) дают распределение по энергиям в параметрическом виде. Если образуются частицы с различными массами или существенную роль играет энергия, уносимая нуклонами,

то это обстоятельство может быть учтено на основе соображений, развитых в § 2.

Из формул (4.44), (4.45), (4.49) видно, что энергия частиц однозначно связана с углом, под которым они вылетают. Большинство частиц ( $\lambda = 0$ ) имеет сравнительно небольшую энергию. Те частицы, которые идут под малыми углами, обладают, однако, значительной энергией. Таким образом, имеется концентрированный поток энергии, идущий под небольшими углами.

Далее следует перейти от системы центра инерции к лабораторной системе отсчета. Не останавливаясь на деталях пересчета (см Дополнение II), приведем окончательные формулы:

$$dN = \frac{k}{\sqrt{2\pi L}} \exp\left(-\frac{L}{2} + \sqrt{L^2 - \lambda^2}\right) d\lambda, \quad (4.51)$$

$$\mathcal{E} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} M \exp\left(\frac{5L}{6} + \lambda + \frac{1}{3}\sqrt{L^2 - \lambda^2}\right). \quad (4.52)$$

Коэффициенты в формулах (4.51) и (4.52) получаются из соотношений

$$\int dN = N, \quad \int \mathcal{E} dN = E.$$

Угол вылета в лабораторной системе равен

$$\chi = e^{-L-\lambda}. \quad (4.53)$$

Заметим, что имеет место также следующая полезная формула:

$$\overline{\ln \chi} = -L, \quad (4.54)$$

справедливая при столкновении двух одинаковых частиц. Это означает, что среднее геометрическое из всех углов разлета определяет значение энергии налетевшей частицы (при столкновении одинаковых частиц).

На рис. 1 приведены распределения частиц, вычисленные по формулам (4.42) — (4.54).

Распределения частиц как по углам, так и по энергиям оказываются близкими к гауссовому при пользовании в качестве переменных логарифмами этих величин. Распределения имеют длинные «хвосты» по обе стороны максимума. В Дополнении II указано, что удобно определить  $\lambda$  следующим образом:  $\lambda = -\ln \operatorname{tg}(\vartheta/2)$ . При этом формула (4.44) переходит в следующую:

$$dN \propto \exp \sqrt{L^2 - \ln^2 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}} \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta}. \quad (4.55)$$

Эта формула дает явное распределение частиц по углам. Пользуясь формулой (4.50), получим непосредственно связь энергии частицы с углом  $\vartheta$  (в системе центра инерции):

$$\mathcal{E} \approx M \exp\left(-\frac{L}{6} - \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \ln^2 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}\right). \quad (4.56)$$

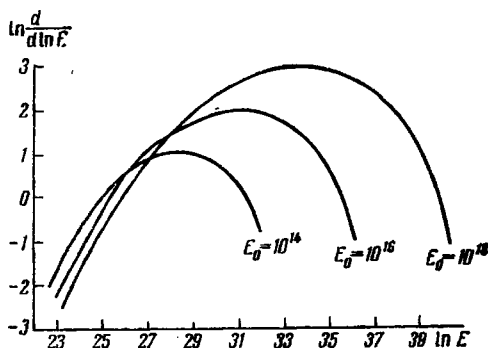


Рис. 1.

Дифференциальные энергетические спектры вторичных частиц, образующихся при соударениях нуклонов,  $E_0$  — энергия первичной частицы (вычисления Л. И. Сарычевой).

Важной характеристикой акта соударения является угол, в котором излучается половина энергии. Мы приводим значения этой величины, вычисленные как по теории Ландау (формулы (4.51) — (4.53)), так и по теории Ферми, учитывающей нелобовые соударения (табл. 6).

Таблица 6<sup>10</sup>

Энергия, эв	$\vartheta_{1/2}$ , по Ферми	$\chi_{1/2}$ , по Ферми	$\vartheta_{1/2}$ , по Ландау	$\chi_{1/2}$ , по Ландау
$10^{14}$	0,31	$0,7 \cdot 10^{-4}$	0,10	$1,3 \cdot 10^{-4}$
$10^{15}$	—	$2,1 \cdot 10^{-4}$	0,0154	$2,2 \cdot 10^{-5}$
$10^{16}$	—	$6,7 \cdot 10^{-5}$	0,031	$3,8 \cdot 10^{-6}$

<sup>10</sup> Заимствована из статьи И. Л. Розенталя и Д. С. Чернавского [15].

Значения параметра соударения  $r/R$ , входящего в теорию Ферми, равны  $r/R = 0,712$ .  $\vartheta_{1/2}$  — угол в системе центра инерции,  $\chi_{1/2}$  — угол в лабораторной системе.

Несмотря на то что расчет углового распределения, проделанный Ферми, представляется нам неправильным, мы приводим здесь для сравнения его результаты, так как они часто используются при сопоставлении с опытом.

Из табл. 6 видно, что распределение потоков энергии значительно уже по развиваемой теории, чем по теории Ферми.

### § 5. Соударения частиц с различными массами

До сих пор рассматривались лишь соударения нуклонов с нуклонами. Между тем на опыте наблюдаются при больших энергиях соударения нуклонов с ядрами и ядер с ядрами, и без теоретического их истолкования, строго говоря, вообще невозможно сравнение результатов теории с опытом.

Было бы неправильно рассматривать столкновение нуклонов с ядрами или ядер с ядрами как ряд соударений ядерных протонов и нейтронов. Так как расстояние между частицами в ядре порядка радиуса ядерных сил, а в каждом акте соударения рождается несколько частиц, то столкновение должно приводить к процессу образования частиц сразу во всей области, через которую проходит нуклон в ядре, или меньшее ядро в большем. Нуклон будет взаимодействовать не со всем ядром, а лишь с частью ядра, т. е. им будет вырезаться из ядра «трубка» (см. [15]). Число возникающих при соударении частиц будет связано с энтропией соотношением (2.25), причем под  $N$  следует понимать сумму вновь образованных частиц и нуклонов, участвующих в соударении.

Проще всего рассмотреть лобовое столкновение двух одинаковых ядер атомного веса  $A$ . При этом целиком применимы соображения, приведенные нас к формуле (2.28). Нетрудно видеть, как при этом изменяется формула (2.28) (см. [6]). Пусть скорость валетающего ядра равна скорости нуклона при соударении нуклона с нуклоном. Для этого его энергия должна быть в  $A$  раз больше. Поскольку плотность массы в ядре примерно равна плотности массы протона, отнесенной к его сфере действия, плотность энергии непосредственно после столкновения остается такой же, как при соударении нуклонов. Поскольку, очевидно, остается неизменным и лоренцово сокращение, изменение энтропии будет просто пропорционально объему ядер, т. е.  $A$ . Таким образом, получим окончательно

$$N = kA \left( \frac{E}{2Amc^2} \right)^{1/4} = kA^{3/4} \left( \frac{E}{2Mc^2} \right)^{1/4}. \quad (5.1)$$

Значительно сложнее вычисление соударения нуклона с ядром или соударения ядер разных весов. Остановимся сейчас на столкновении нуклона с ядром. Вычисление числа частиц, образующихся в звезде, сводится к вычислению энергии на первом этапе соударения, так как в процессе гидродинамического расширения энтропия не меняется. При соударении нуклона с нуклоном для

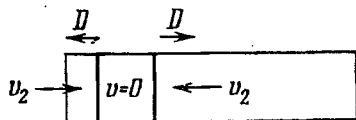


Рис. 2.

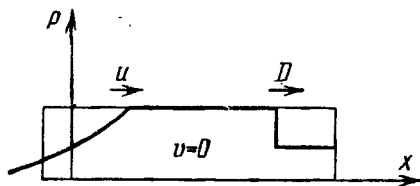


Рис. 3.

вычисления энтропии не было необходимости рассматривать механизм сжатия, так как результат получался сразу из соображений симметрии. Иначе обстоит дело при соударении нуклона с ядром (эта задача рассмотрена в работе [16]).

Распространим представление об ядерном веществе как о сплошной среде и на рассмотрение первого этапа соударения — сжатия ядерного вещества. Такое рассмотрение является, конечно, весьма приближенным и используется только для оценки. Говорить о «распространении ударной волны или бегущей волны по нуклону» можно лишь в условном смысле.

Выберем систему отсчета, в которой нуклон и ядро обладают равными, но противоположно направленными скоростями. Благодаря лоренцову сокращению в этой системе отсчета нуклон и ядро представляют собой два очень тонких диска. Вследствие этого задача в начале соударения может рассматриваться как одномерная. Соударение нуклона с ядром является, таким образом, соударением нуклона с трубкой, вырезанной из ядра, сечение которой равно сечению нуклона, а длина меняется от диаметра ядра до «диаметра» нуклона. При сближении нуклона с трубкой по веществу трубки и по веществу нуклона «распространяются» в обе стороны ударные волны (рис. 2). В выбранной нами системе отсчета вещество между ударными волнами будет покоиться. Ударная волна, идущая по более легкой частице, раньше дойдет до края, чем ударная волна, идущая по трубке. Когда волна дойдет до края, то из края начнется истечение вещества (рис. 3). По ядерному веществу пойдет волна разрежения со скоростью, равной скорости звука в среде. В то же время и в ту же сторону будет идти ударная волна, еще не дошедшая до края. Вычисление энтропии будет различно в за-

висимости от того, успеет ли бегущая волна догнать ударную прежде, чем ударная волна дойдет до края и процесс сжатия окончится. Так как мы исходим из уравнения состояния  $p = \varepsilon/3$ , то скорость звука  $c_0 = \sqrt{(\partial p/\partial \varepsilon)_S} = 1/\sqrt{3}$ . Вычислим теперь скорость ударной волны  $D$ . Перейдем к системе координат, в которой ударная волна покоится. Тогда скорость вещества за ударной волной (см. рис. 2) будет равна  $D$ , а перед волной  $v'_2 = \frac{v_2 + D}{1 + v_2 D}$ , где  $v_2$  — скорость частиц в системе «равных скоростей». В силу непрерывности потоков энергии и импульса через поверхность разрыва имеем (см. [13]):

$$\frac{p_1 + D^2 \varepsilon_1}{1 - D^2} = \frac{p_2 + v_2'^2 \varepsilon_2}{1 - v_2'^2}, \quad (5.2)$$

$$\frac{D(p_1 + \varepsilon_1)}{1 - D^2} = \frac{v_2'(p_2 + \varepsilon_2)}{1 - v_2'^2}. \quad (5.3)$$

Здесь  $p_1$  и  $\varepsilon_1$  — давление и плотность энергии за ударной волной, а  $p_2$  и  $\varepsilon_2$  — давление и плотность энергии перед ударной волной. Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{p_1 + D^2 \varepsilon_1}{D(p_1 + \varepsilon_1)} = \frac{p_2 + v_2'^2 \varepsilon_2}{v_2'(p_2 + \varepsilon_2)}. \quad (5.4)$$

Так как скорость  $v_2$  налетающих частиц очень близка к скорости света, то близка к скорости света будет и скорость  $v_2'$ . Положив  $v_2' = 1$ , мы увидим, что правая часть уравнения (5.4) равна 1 и, следовательно, наши результаты не зависят от уравнения состояния перед ударной волной. Используя за ударной волной для вещества уравнение состояния  $p_2 = \varepsilon_2/3$ , получим для  $D$  следующее соотношение:

$$\frac{1}{3} + D^2 = \frac{4}{3} D,$$

откуда

$$D = \frac{1}{3}. \quad (5.5)$$

Теперь можно найти минимальную длину трубки  $l_k$ , при которой бегущая волна разрежения догонит ударную волну. Она определится из соотношения

$$\frac{l_k}{d} = \frac{D + c_0}{c_0 - D},$$

где  $d$  — «диаметр» нуклона.



Подставляя соответствующие значения  $D$  и  $c_0$ , получим

$$\frac{l_k}{d} = 3,7. \quad (5.6)$$

При длинах трубки  $l < l_k$  изменение энтропии вычисляется просто. Следует подсчитать энтропию отдельных участков системы непосредственно после того, как по ним прошла ударная волна и когда они, следовательно, покоятся в нашей системе отсчета. Нетрудно видеть, что изменение энтропии всей системы будет тогда равно

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{l}{d} + 1 \right) \text{ при } \frac{l}{d} \leq 3,7, \quad (5.7)$$

где  $S_0$  — изменение энтропии при соударении нуклона с нуклоном.

Формула (5.7) неточна в значительной степени из-за неопределенности «диаметра» нуклона. Если применять эту формулу к соударению легкого ядра с тяжелым, она становится более точной. Под  $d$  в этом случае следует понимать размер легкого ядра.

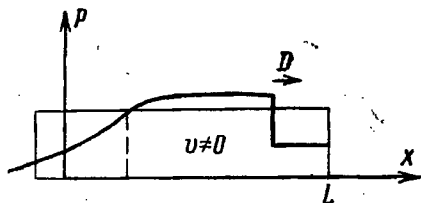


Рис. 4.

При длинах трубок, превышающих  $l_k = 3,7 d$ , решение становится более сложным. Бегущая волна в этом случае догонит ударную волну, но не сможет пройти через разрыв, так как ударная волна движется в веществе набегающего ядра со скоростью, превышающей скорость звука в веществе. Бегущая волна отразится от ударной волны. Возникнет область, ограниченная ударной волной справа и бегущей волной слева (рис. 4). Для того чтобы описать движение среды в этой области, следует обратиться к уравнению (4.15) — (4.15') для произвольного одномерного движения релятивистского газа:

$$3 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0, \quad (4.15')$$

Независимыми переменными здесь являются величины  $\alpha = \text{Arth } v$ , где  $v$  — скорость среды, и  $y = \ln (T/T_0)$ , где  $T_0$  —

температура при  $v = 0$ . Координата  $x$  и время  $t$  выражаются через функцию  $\chi$  по формулам (4.12'). Интересующая нас область решения ограничена бегущей волной с одной стороны и ударной — с другой. Выясним граничные условия для функции  $\chi$ .

На границе с бегущей волной будем иметь условие, аналогичное (4.19):

$$\chi = 0 \text{ при } \alpha = \frac{y}{c_0}, \text{ т. е. } \alpha = \sqrt{3} y. \quad (5.8)$$

Перейдем теперь к условию на ударной волне. Так как в этом случае вещество за ударной волной не покоится, то при переходе к системе координат, в которой скорость разрыва равна нулю, скорость за разрывом будет

$$v'_1 = \frac{v_1 + D}{1 + v_1 D}, \quad (5.9)$$

где  $v_1$  — скорость за ударной волной в системе, где скорости налетающих частиц равны. Формулы (5.2) — (5.4) остаются применимыми в рассматриваемом случае, если в них вместо  $D$  подставить  $v'_1$ . Отсюда следует, в частности, что  $v'_1 = 1/3$ . Уравнение (5.9) дает связь между  $v_1$  и  $D$  (при  $v'_1 = 1/3$ ), которую можно записать следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 + 3 \operatorname{th} \alpha}{3 + \operatorname{th} \alpha}, \quad (5.10)$$

так как  $v_1 = -\operatorname{th} \alpha$ . Из соотношений (5.2) — (5.4) (в которые вместо  $D$  следует подставить  $v'_1$ ) можно получить следующее соотношение на ударной волне (см. Дополнение III):

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = \left(\frac{T}{T_0}\right)^4 = \frac{1 - v_1}{1 + v_1}. \quad (5.11)$$

В переменных  $\alpha$  и  $y$  ( $v_1 = -\operatorname{th} \alpha$ ,  $y = \ln(T/T_0)$ ) это означает

$$\alpha = 2y. \quad (5.12)$$

Подставляя в уравнение (5.10) значение  $dx/dt$ , вычисленное по формулам (4.12), и учитывая соотношение (5.12), окончательно получим следующее условие на ударной волне:

$$\left(3 \frac{\partial}{\partial y} + 5 \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \chi = 0 \text{ при } \alpha = 2y. \quad (5.13)$$

Нас интересует изменение энтропии за время прохождения ударной волны. Изменение энтропии до того, как бегущая волна до-

гнала ударную, дается (5.7). Дальнейшее изменение энтропии запишется следующим образом:

$$S_1 = \sigma_0 \int_{t_1}^{t_2} s u_1 dt'. \quad (5.14)$$

Здесь  $\sigma_0$  — сечение трубки,  $S$  — плотность энтропии за ударной волной,  $u_1 = v_1' / \sqrt{1 - v_1'^2}$  (где  $v_1'$  — скорость вещества за ударной волной),  $t_1$  — момент времени, когда бегущая волна догонит ударную, и  $t_2$  — момент времени, когда ударная волна доходит до правого края, и, таким образом, процесс сжатия оканчивается,  $dt'$  — элемент времени в системе, где разрыв покоится:

$$dt' = dt \sqrt{1 - D^2}.$$

Используя формулы (4.12'), (5.12), получим

$$S_1 = \sigma_0 \frac{1}{9} \int_0^{y_k} e^{2y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} - 1 \right) \chi \right]_{\alpha=2y} dy. \quad (5.15)$$

Здесь  $y_k$  — значение  $y$  в тот момент, когда ударная волна доходит до края системы.

Производя соответствующие довольно сложные вычисления, подробности которых приведены в работе [16], получим

$$\frac{S}{S_0} = 0,92 \left( \frac{l}{d} - \frac{1}{4} \right)^{3/4} \text{ при } \frac{l}{d} \geq 3,7, \quad (5.16)$$

где  $S_0$  — изменение энтропии при соударении нуклона с нуклоном, а  $S$  — полное изменение энтропии при соударении нуклона с трубкой длины  $l$ .

Если усреднить формулы (5.7) и (5.16) по всем возможным соударениям в ядре от лобового соударения до соударения налетающего нуклона с периферийным, то получим следующие выражения:

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{3} \frac{A - (2A^{1/3} - 1)^{3/2}}{(A^{1/3} - 1)^2} + 0,5 \text{ для } A < 51, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{S}{S_0} &= \frac{4}{(A^{1/3} - 1)^2} \left[ 0,167 (A^{1/3} - A_0^{1/3}) + \frac{1}{12} \{ A_0 - (2A^{1/3} - 1)^{3/2} \} \right] - \\ &= 0,6 \frac{A^{1/3} - A_0^{1/3}}{(A^{1/3} - 1)^2} + 0,5 \text{ для } A \geq 51, \quad A_0 = 51, \quad (5.18) \end{aligned}$$

Здесь  $A$  — атомный вес. Полученная зависимость может быть с точностью до 5% аппроксимирована следующей формулой:

$$\frac{S}{S_0} = A^{0,19}. \quad (5.19)$$

Отсюда для числа частиц имеем

$$\frac{N}{N_H} = A^{0,19}, \quad (5.20)$$

где  $N_H$  — число частиц, образованное при соударении нуклона с нуклоном. Зависимость множественности от атомного веса оказывается в согласии с опытом (см. [15]) слабой. Так, множественность в свинце ( $A = 207$ ) отличается от множественности в азоте ( $A = 14$ ) всего в 1,7 раза.

Угловое и энергетическое распределения при соударениях нуклона с ядром, по-видимому, мало отличаются, в пределах точности наших вычислений, от соответствующих распределений при соударении нуклона с нуклоном.

#### Дополнение I

Остановимся подробнее на выводе формулы (4.30) из (4.29). Формулу (4.29) можно записать в следующем виде:

$$h(-y) = \frac{\chi_1}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\exp\left(-\sqrt{p^2-1} \frac{\alpha}{\sqrt{3}} - yp\right)}{\sqrt{p^2-1}(p+2)} dp. \quad (I.1)$$

Согласно основным соотношениям операционного исчисления (см. [17], стр. 29)

$$f(p) = p \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} h(t) dt,$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{pt} \frac{f(p)}{p} dp. \quad (I.2)$$

Таким образом, функция

$$f(p) = \frac{\exp\left(-\sqrt{p^2-1} \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right) p}{\sqrt{p^2-1}(p+2)}$$

является «изображением оригинала»  $h(-y)$ ,

Воспользуемся далее правилом операционного исчисления, которое носит название правила «умножения изображений» (см. [17], стр. 55). Согласно этому правилу, если «изображению»  $f_1(p)$  соответствует «оригинал»  $h_1(t)$ , а «изображению»  $f_2(p)$  — «оригинал»  $h_2(t)$ , то «изображению»  $f(p) = f_1(p) f_2(p)/p$  соответствует «оригинал»

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\zeta) h_1(t - \zeta) d\zeta. \quad (I.3)$$

Таким образом, если известны «оригиналы»  $h_1(t)$  и  $h_2(t)$ , то, пользуясь соотношением (I.3), можно найти и «оригинал» для «изображения»  $f(p)$ . Разобьем изображение  $f(p)$  на следующие множители:

$$f_1(p) = \frac{p}{p+2}, \quad f_2(p) = \frac{p \exp\left(-\sqrt{p^2-1} \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{p^2-1}}. \quad (I.4)$$

«Изображению»  $f_1(p)$  соответствует «оригинал»  $h_1(-y)$ :

$$h_1(-y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{8-i\infty}^{8+i\infty} \frac{1}{p+2} e^{-yp} dp = e^{2y} U(-y). \quad (I.5)$$

«Изображению»  $f_2(p)$  соответствует «оригинал»  $h_2(-y)$  (см. [17], формула XV, 15):

$$h_2(-y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{8-i\infty}^{8+i\infty} e^{-yp} \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \exp\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \sqrt{p^2-1}\right) dp = I_0\left(\sqrt{y^2 - \frac{\alpha^2}{3}}\right) U\left(-y - \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right). \quad (I.6)$$

Здесь  $I_0$  — бesselева функция мнимого аргумента,

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 1/2 & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Подстановка выражений (I.5) и (I.6) в формулу (I.3) дает

$$h(-y) = \int_{\alpha/\sqrt{3}}^{-y} e^{2(y+h)} I_0\left(\sqrt{y_1^2 - \frac{\alpha^2}{3}}\right) dy_1. \quad (I.7)$$

Отсюда сразу получаем формулу (4.30)

$$\chi = l\sqrt{3} e^{\psi} \int_{\alpha/\sqrt{3}}^{-\eta} e^{2\nu_1} I_0 \left( \sqrt{y_1^2 - \frac{\alpha^2}{3}} \right) dy_1.$$

В работе И. М. Халатникова [14] в формуле (4.36) для  $\chi$  опущен множитель  $l\sqrt{3}$ .

### Дополнение II

Для того чтобы получить формулы (4.51), (4.52), произведем переход от распределений в системе центра тяжести к распределениям в лабораторной системе координат.

Рассмотрим сначала преобразования углов.

Угол разлета  $\chi$  в лабораторной системе связан с углом  $\vartheta$  в системе центра инерции следующей формулой:

$$\operatorname{tg} \chi \approx \chi = \frac{v' \sqrt{1 - V^2} \sin \vartheta}{v' \cos \vartheta + V}, \quad (\text{II.1})$$

где  $v'$  — скорость частицы в системе центра инерции,  $V$  — скорость центра инерции по отношению к лабораторной системе. Представим знаменатель этого выражения в форме

$$v' \cos \vartheta + V \approx v' \cos \vartheta + v' + \frac{1}{2}(V^2 - v'^2),$$

так как

$$V^2 - v'^2 = (V + v')(V - v') \approx 2(V - v').$$

Учитывая, что  $V$  ближе к единице, чем  $v'$ , имеем

$$v' \cos \vartheta + V \approx (1 + \cos \vartheta) + \frac{1}{2}(1 - v'^2).$$

Используя соотношение  $u' = 1/\sqrt{1 - v'^2}$ , получим

$$v' \cos \vartheta + V = 1 + \cos \vartheta + \frac{1}{2u'^2}. \quad (\text{II.2})$$

Последний член может играть существенную роль лишь при углах  $\vartheta$ , близких к  $\pi$ . Для того чтобы и в этом случае последний член был мал, должно выполняться неравенство

$$\vartheta \gg \frac{1}{u'}. \quad (\text{II.3})$$

Согласно (4.45)  $\vartheta \approx e^{-\lambda}$ , а из (4.50) следует, что

$$u' \approx \exp\left(-\frac{L}{6} + \lambda + \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \lambda^2}\right).$$

Неравенство (II.3) означает, таким образом, что

$$\exp\left(\frac{L}{6} - \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \lambda^2}\right) \ll 1. \quad (\text{II.4})$$

Это неравенство всегда выполняется, так как при  $\lambda = 0$  правая часть равна  $e^{-L/6}$  и лишь при  $\lambda = \lambda_{\max}$  она становится равной единице. Положив в числителе выражения (II.1)  $v' = 1$  и заменив  $v' \cos \vartheta + V$  на  $1 + \cos \vartheta$ , мы получим

$$\chi = \sqrt{1 - V^2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (\text{II.5})$$

Независимо от конкретных расчетов разлет в системе центра инерции при любом столкновении двух одинаковых частиц симметричен. Это означает, что углы  $\vartheta$  встречаются также часто, как углы  $\pi - \vartheta$ . Но  $\operatorname{tg} \frac{\pi - \vartheta}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\vartheta/2)}$ . Произведем усреднение  $\ln \chi$  по всем частицам. Тогда получим

$$\overline{\ln \chi} = \ln \sqrt{1 - V^2} = -L, \quad (\text{II.6})$$

т. е. формулу (4.54).

Чтобы учесть углы порядка единицы, определим  $\lambda$  следующим образом:

$$\lambda = -\ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (\text{II.7})$$

Если подставить в формулу (II.5)

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = e^{-\lambda} \text{ и } \operatorname{tg} \frac{\pi - \vartheta}{2} = e^{\lambda}$$

для частиц, лежащих в системе центра инерции в противоположные стороны, то нетрудно убедиться, что переход от частиц, идущих направо, к частицам, идущим налево (в системе центра инерции), осуществляется изменением знака  $\lambda$ . Поэтому можно написать

$$\chi = e^{-L-\lambda}. \quad (\text{II.8})$$

Формулы (II.8) и (4.44) дают, таким образом, угловое распределение частиц в лабораторной системе, причем  $\lambda$  принимает положительные и отрицательные значения. Эти формулы по существу совпадают с формулами (4.51) и (4.53).

Перейдем теперь к преобразованию энергии от системы центра инерции к лабораторной системе.

Пусть  $\mathcal{E}$  — энергия частицы в системе центра инерции. Если частица летит направо, то энергия ее в лабораторной системе равна

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E} + P_x V}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad (\text{II.9})$$

где  $P_x$  — проекция импульса на направление скорости центра инерции:

$$P_x = \sqrt{\mathcal{E}^2 - (\mu c^2)^2} - P_y, \quad P_y = P \sin \vartheta,$$

где  $P$  — абсолютная величина импульса,  $\mu$  — масса частицы. Если скорость частиц в системе центра инерции приближается к скорости света, то

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E} (1 + \cos \vartheta)}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} e^L \frac{2}{1 + e^{-2\lambda}} \approx \mathcal{E} e^L. \quad (\text{II.10})$$

Если частицы движутся налево, то

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E} - P_x V}{\sqrt{1 - V^2}} = \frac{1 - \cos \vartheta}{\sqrt{1 - V^2}} \mathcal{E}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E} e^{L-2\lambda} \cdot 2}{1 + e^{-2\lambda}} \approx \mathcal{E} e^{L-2\lambda}. \quad (\text{II.11})$$

При подстановке этих выражений в уравнение (4.50) получим

$$\mathcal{E}' \approx M \exp\left(\frac{5L}{6} + \lambda + \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \lambda^2}\right). \quad (\text{II.12})$$

Эта формула обладает тем свойством, что она описывает в лабораторной системе частицы, движущиеся в системе центра тяжести как направо, так и налево, если приписывать  $\lambda$  оба знака.



## Дополнение III

Выведем соотношение (5.11).

Пусть в системе координат, где ударная волна покоится, скорость за ударной волной равна  $v_1$ , а скорость перед волной равна  $v_2$ .

Уравнения (5.2) и (5.3) запишутся тогда следующим образом:

$$\frac{p_1 + v_1'^2 \varepsilon_1}{1 - v_1'^2} = \frac{p_2 + v_2'^2 \varepsilon_2}{1 - v_2'^2}, \quad (\text{III.1})$$

$$\frac{v_1' (p_1 + \varepsilon_1)}{1 - v_1'^2} = \frac{v_2' (p_2 + \varepsilon_2)}{1 - v_2'^2}. \quad (\text{III.2})$$

Величины  $v_1'$  и  $v_2'$  связаны со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  в системе координат, где скорости налетающих частиц равны, соотношениями

$$v_1' = \frac{v_1 + D}{1 + v_1 D}, \quad (\text{III.3})$$

$$v_2' = \frac{v_2 + D}{1 + v_2 D}. \quad (\text{III.4})$$

Исключая из уравнений (III.1) и (III.2)  $v_1'$  или  $v_2'$ , получим соответственно следующие выражения:

$$v_1'^2 = \frac{(p_1 - p_2)(p_1 + \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(p_2 + \varepsilon_1)}, \quad (\text{III.5})$$

$$v_2'^2 = \frac{(p_2 - p_1)(p_2 + \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(p_1 + \varepsilon_2)}. \quad (\text{III.6})$$

Из двух последних формул получим

$$v_1' v_2' = \frac{p_1 - p_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}. \quad (\text{III.7})$$

Для упрощения вывода примем, что по обе стороны ударной волны уравнение состояния одинаково ( $p = \varepsilon/3$ ). Заметим, однако, что при больших скоростях  $v_2$  достаточно допустить справедливость этого уравнения лишь за ударной волной. Из (III.7) следует

$$v_1' v_2' = \frac{1}{3}. \quad (\text{III.7}')$$

Уравнение (III.5) примет следующий вид:

$$v_1'^2 = \frac{1}{3} \frac{p_1 + \varepsilon_2}{\frac{\varepsilon_2}{3} + 3p_1} \quad (\text{III.5}')$$

и отсюда

$$p_1 = \varepsilon_2 \frac{1 - v_1'^2}{9v_1'^2 - 1}. \quad (\text{III.8})$$

Подставляя в уравнение (III.7) формулы (III.3) и (III.4), с помощью несложных преобразований получим выражение для  $D$ :

$$D = \frac{-(v_1 + v_2) + \sqrt{(v_1 + v_2)^2 - (3v_1v_2 - 1)(3 - v_1v_2)}}{3 - v_1v_2}. \quad (\text{III.9})$$

Найдем теперь отношение  $p_{1v_1}/p_{10}$ , где  $p_{1v_1}$  — значение давления при скорости за ударной волной, равной  $v_1$ , и  $p_{10}$  — значение давления при скорости за ударной волной, равной нулю. Это отношение согласно (III.8) равно

$$\frac{p_{1v_1}}{p_{10}} \left[ \frac{(1 - v_1'^2)}{(9v_1'^2 - 1)} \right] \left[ \frac{(9v_1'^2 - 1)}{(1 - v_1'^2)} \right]_0. \quad (\text{III.10})$$

Так как при больших скоростях  $v_2 \rightarrow 1$  также и  $v_2' \rightarrow 1$  (см. (III.4)), то согласно соотношению (III.7)  $v_1' \rightarrow 1/3$ . Отношение (III.10) становится неопределенным. Поэтому следует совершить предельный переход:

$$\left[ \frac{p_{1v_1}}{p_{10}} \right]_{v_2 \rightarrow 1} = \frac{[9v_1'^2 - 1]_{v_1=0}}{[9v_1'^2 - 1]_{v_1}} = \left\{ \frac{\left[ \frac{\partial v_1'}{\partial v_2} \right]_{v_1=0}}{\left[ \frac{\partial v_1'}{\partial v_2} \right]_{v_1}} \right\}_{v_2=1}. \quad (\text{III.11})$$

Но

$$\frac{\partial v_1'}{\partial v_2} = \left[ \frac{\partial v_1'}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial v_2} \right]_{v_2=1}. \quad (\text{III.12})$$

Производная  $\partial v_1'/\partial D$  определяется из уравнения (III.3), производная  $\partial D/\partial v_2$  — из уравнения (III.9):

$$\left( \frac{\partial v_1'}{\partial D} \right)_{v_2=1} = \frac{(3 - v_1)^2}{9(1 - v_1^2)}, \quad \left( \frac{\partial D}{\partial v_2} \right)_{v_2=1} = -\frac{3(v_1 + 1)^2}{2(3 - v_1)^2}. \quad (\text{III.13})$$

Отсюда нетрудно получить:

$$\frac{p_1 v_1}{p_{10}} = \frac{1 - v_1}{1 + v_1}. \quad (\text{III.14})$$

В силу уравнения состояния из выражения (III.14) непосредственно следует формула (5.11).

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. B. Fowler, R. P. Shutt, A. M. Thorndike, W. L. Whittemore. Phys. Rev., 95, 1026, 1954.
- [2] E. Fermi. Progr. Theor. Phys., 5, 570, 1950.
- [3] E. Fermi. Phys. Rev., 81, 683, 1951.
- [4] И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 78, 889, 1951.
- [5] Е. Л. Фейнберг, Д. С. Чернавский. ДАН СССР, 81, 795, 1951.
- [6] Л. Д. Ландау. Изв. АН СССР, серия физ., 17, 51, 1953 (Собр. трудов, № 72).
- [7] С. З. Беленький. ДАН СССР, 99, 4, 523, 1954.
- [8] С. Чандрасекар. Введение в учение о строении звезд. ИЛ, 1950.
- [9] С. З. Беленький. ЖЭТФ, 28, 111, 1955.
- [10] W. Heisenberg. Zs. Phys., 133, 65, 1952.
- [11] V. H. V. Proc. Roy. Soc., 219, 293, 1953.
- [12] Е. Л. Фейнберг, Д. С. Чернавский. ДАН СССР, 91, 511, 1953.
- [13] Л. Ландау, Е. Лифшиц. Механика сплошных сред, изд. 2. Гостехиздат, 1954.
- [14] И. М. Халатников. ЖЭТФ, 27, 529, 1954.
- [15] И. Л. Розенталь, Д. С. Чернавский. УФН, 52, 185, 1954.
- [16] С. З. Беленький, Г. А. Милехин. ЖЭТФ, 29, 20, 1955.
- [17] Б. Ван-дер-Поль, Х. Бреммер. Операционное исчисление. ИЛ, 1952.

Совместно с А. А. АБРИКОСОВЫМ  
и И. М. ХАЛАТНИКОВЫМ

Nuovo Cimento, Suppl., 3, 80, 1956

### 1. Основные уравнения [1]

Как известно, главные трудности квантовой теории поля происходят от бесконечностей. Существующие методы устранения этих бесконечностей (регуляризация) иногда дают вполне правильные результаты, но, вообще говоря, они весьма искусственны, а во многих случаях не применимы. Поэтому представляется необходимым построить теорию, которая не рассматривает актуально бесконечных величин.

В соответствии с обычными методами теоретической физики естественно рассматривать точечное взаимодействие как предел «размазанного» взаимодействия с конечным сколь угодно уменьшающимся радиусом. Порядок величины этого радиуса мы обозначим через  $a$ . Тогда  $\Lambda \sim 1/a$  является верхним пределом интегрирования в пространстве импульсов. Все вычисления будут проведены в предположении, что перенормированный голый заряд  $e_1$ , появляющийся в члене взаимодействия в лагранжиане, удовлетворяет условию  $e_1^2 \ll 1$ .

Гриновские функции электрона  $G(p)$  и фотона  $D(p)$  связаны с вершинной частью  $\Gamma_\mu(p, p-k; k)$  уравнениями Дайсона

$$G(p) \left\{ \not{p} - m_1 - \frac{e_1^2}{\pi i} \int \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_\nu D_{\mu\nu}(k) d^4k \right\} = 1, \quad (1.1)$$

$$D_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}^0(k) - \frac{e_1^2}{\pi i} D_{\mu\sigma}(k) \text{Sp} \left[ \int G(p) \Gamma_\sigma(p, p-k; k) G(p-k) \times \right. \\ \left. \times \gamma_\nu d^4p \right] D_{\sigma\nu}^0(k). \quad (1.2)$$

Здесь и далее используются фейнмановские обозначения.  $D_{\mu\nu}^0$  представляет собой функцию Грина фотона в нулевом приближении. Обычно ее полагают равной  $\delta_{\mu\nu}/k^2$ . Однако такой выбор неудобен. В действительности, продольная (пропорциональная  $k_\mu k_\nu$ ) часть тензора  $D_{\mu\nu}$  вследствие градиентной инвариантности может быть выбрана произвольно и не меняется в результате возмущения (благодаря поперечности дираковского тока, см. интегральный член в уравнении (1.2)).

Мы выберем  $D_{\mu\nu}^0$  в виде  $\frac{1}{k^2} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$ . Тогда уравнением для поперечной части тензора  $D_{\mu\nu}$  будет

$$D_{\mu\sigma}^i \left( k^2 \delta_{\sigma\nu} + \frac{e_1^2}{\pi i} \text{Sp} \left[ \int G(p) \Gamma_\sigma(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_\nu d^4 p \right] \right) = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (1.3)$$

Неприятным свойством интегралов в (1.1) и (1.3) является интегрирование в псевдоевклидовом пространстве. Пусть времениподобная компонента вектора  $k$  в (1.3) равна нулю. Тогда все интегрируемое выражение является функцией от  $p_0$ , а после ряда простых преобразований мы останемся с функцией от  $p_0^2$ . Как хорошо известно, эта функция регулярна в верхней полуплоскости и благодаря размазыванию исчезает на бесконечности. Следовательно, мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p_0^2) dp_0 = \int_0^{\infty} f(x) \frac{dx}{\sqrt{x}} = i \int_0^{\infty} f(-x) \frac{dx}{\sqrt{x}} = i \int_0^{\infty} f(-p_0^2) dp_0. \quad (1.4)$$

Это соответствует тому, что  $p_0$  в интеграле заменяется на  $ip_0$ . Интегрирование теперь будет происходить по евклидову пространству. В результате преобразования  $G$  и  $D$  для пространственно-подобных векторов выражаются через пространственно-подобные  $\Gamma_\mu$ . Для времениподобных векторов  $G$  и  $D$  можно найти при помощи аналитического продолжения. Исключением является лишь  $G$  при  $p^2$ , приближающихся к  $m^2$ ; этот случай будет обсужден позднее. Что же касается полученного таким образом  $\Gamma_\mu$ , то аналитическое продолжение дает его значение только для случая, когда  $p^2$ ,  $q^2$  и  $k^2$  имеют один и тот же порядок величины или, если один из этих квадратов мал, когда два других квадрата близки друг к другу.

Как известно, степень логарифмической расходимости никогда

не превосходит соответствующего ей порядка теории возмущений<sup>1</sup>. Это означает, что главными членами в ряду теории возмущений являются члены, пропорциональные<sup>2</sup>  $\left(e_1^2 \ln \frac{\Lambda^2}{p^2}\right)^n$ , которые только мы и будем учитывать при вычислениях в основном приближении.

Покажем прежде всего, что для пространственно-подобных  $\Gamma_\mu$  можно написать замкнутое интегральное уравнение. Для этого мы воспользуемся тем обстоятельством, что добавление виртуальной фотонной линии, охватывающей две вершины, дает лишь сходящийся интеграл. Поэтому в диаграммах, представляющих последовательные приближения для вершинной части, можно пренебречь линиями, соответствующими интерференции вершин, которые содержат степени логарифма, более низкие, чем порядок теории возмущений. В частности, можно пренебречь диаграммами с пересекающимися фотонными линиями. По той же причине исключаются и более сложные диаграммы. Оставшиеся диаграммы имеют форму лестниц, причем каждая вершина содержит дополнительную лестницу того же вида, а фотонная и электронная линии просуммированы во всех приближениях, т. е. представляют собой истинные  $G$  и  $D$ . С учетом сделанных предположений суммирование описанных диаграмм выполняется просто. В результате мы приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma(p, p-l; l) = & \\ = \gamma_\sigma + \frac{e_1^2}{\pi i} \int \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) \Gamma_\sigma(p-k, p-k-l; l) \times & \\ \times G(p-k-l) \Gamma_\nu(p-k-l, p-l, k) D_{\mu\nu}(k) d^4k. & \quad (1.5) \end{aligned}$$

## 2. Асимптотическое выражение для гриновской функции электрона [3]

В предыдущем разделе были выведены уравнения для основных функций в квантовой электродинамике. Поскольку нашей целью является точное решение этих уравнений, мы не можем воспользоваться обычными выражениями для величин  $G$ ,  $D_{\mu\nu}$  и  $\Gamma_\mu$ .

<sup>1</sup> Квадратично расходящуюся массу фотона следует положить равной нулю. Существование конечной массы фотона нарушало бы закон сохранения заряда.

<sup>2</sup> Следует упоминать, что сказанное, вообще говоря, несправедливо в случае времениподобных  $\Gamma_\mu$ . В частности, если  $k^2$  велико по сравнению с  $p^2$  и  $q^2$ , формулы содержат  $\ln \frac{k^2}{q^2}$  и общая степень логарифмов может вдвое превосходить степень  $e_1^2$ . Более детально этот вопрос обсуждался В. В. Судановым [2].

даже с перенормированными коэффициентами. Выше упоминалось, что ввиду аналитических свойств функций  $G$  и  $D_{\mu\nu}$  можно ограничиться их вычислением только для отрицательных  $p^2$  и  $k^2$  (пространственно-подобные векторы). При решении уравнений основной интерес представляет поведение всех функций при больших значениях импульсов  $p \gg m$ ,  $k \gg m$ . Мы будем предполагать, что  $G$  и  $D_{\mu\nu}$  имеют вид

$$G(p) = \frac{\beta(p^2)}{\hat{p}}, \quad (2.1)$$

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \left[ d_t(k^2) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + d_l(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right], \quad (2.2)$$

где функции  $\beta(p^2)$ ,  $d_t(k^2)$ ,  $d_l(k^2)$  являются медленно меняющимися функциями  $p^2$  и  $k^2$ . Что же касается  $\Gamma_\mu$ , то ниже будет показано, что уравнение (1.5) удовлетворяется выражением следующего вида:

$$\Gamma_\mu(p, q; l) = \gamma_\mu \alpha(f^2), \quad (2.3)$$

где  $\alpha(f^2)$  — медленно меняющаяся функция, а  $f^2$  представляет собой любую из величин  $p^2$ ,  $q^2$  и  $l^2$ , когда все они имеют один и тот же порядок величины. Если один из квадратов мал по сравнению с двумя другими,  $f^2$  равно наибольшему квадрату.

Подставим выражения (2.1), (2.2) и (2.3) в уравнение (1.5). Легко видеть, что, если отвлечься от медленно меняющихся функций, интеграл в правой части уравнения логарифмически расходится при  $|k^2| \gg |p^2|$  и  $|k^2| \gg |q^2|$ . Таким образом, эта область играет главную роль при интегрировании. При этом можно пренебречь  $p$ ,  $q$  и  $l$  по сравнению с  $k$ , и все интегрируемое выражение становится функцией только от  $k$ . После усреднения по направлениям  $k$  интеграл превращается в скалярную функцию, умноженную на  $\gamma_\mu$ . Этим подтверждается предположенная выше формула (2.3). Для преобразования интегрирования по  $k$ -пространству в простое интегрирование по  $k^2$  используем подстановку  $k_0^- \rightarrow ik_0^-$ . Тогда  $d^4k$  перейдет в  $i(2\pi)^{-2}d\Omega$ .  $d\Omega$  представляет собой элемент объема в четырехмерном евклидовом пространстве и имеет вид  $2\pi^2 R^3 dR$ , где  $R$  — радиус, равный  $\sqrt{-k^2}$ . Таким образом, имеем

$$d^4k \rightarrow \frac{i}{4} (-k^2) d(-k^2). \quad (2.4)$$

Введя новую переменную  $\xi = \ln(-p^2/m^2)$ , получим окончательное уравнение

$$\alpha(\xi) = 1 + \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} \alpha^3(z) \beta^2(z) d_l(z) dz. \quad (2.5)$$

Следует упомянуть, что это уравнение не содержит  $d_t$ .

Перейдем теперь к уравнению (1.1) для  $G$ . Можно убедиться, что интеграл в этом уравнении расходится при  $k \gg p$ . Хотя на первый взгляд эта расходимость является линейной по  $k$ , однако усреднение по направлениям благодаря векторному характеру  $k$  снова дает логарифмическую расходимость. Это означает, что при разложении подынтегральных выражений по обратным степеням  $k$  всегда следует учитывать члены следующего порядка. Соответствующие члены в  $G$  находятся непосредственно из формулы (2.1), в которой, несмотря на слабую зависимость  $\beta$  от  $p^2$ , можно, разумеется, ограничиться разложением знаменателя, т. е.

$$G(p-k) \approx -\frac{\beta(k^2)}{\hat{k}} - \beta(k^2) \frac{1}{\hat{k}} \hat{p} \frac{1}{\hat{k}}. \quad (2.6)$$

Однако следует принимать во внимание также поправки порядка  $p/k$ , возникающие от  $\Gamma_\mu(p, p-k; k)$ . Для нахождения этих поправок вернемся снова к уравнению для  $\Gamma_\mu$ . Так как мы хотим вычислить малые поправки, появляющиеся при переходе от  $p=0$  к конечным  $p$ , изменение интеграла в правой части (1.5) можно считать равным сумме изменений, возникающих от каждого члена в подынтегральном выражении в отдельности. Вычисление получающегося таким образом выражения показывает, что при  $k \gg l$  подынтегральная функция имеет порядок  $1/k^5$ , т. е. интеграл сходится при больших  $k$ . Однако интеграл становится логарифмическим, когда  $k$  лежит в интервале  $l \gg k \gg p$ . Поэтому этот интервал является главной областью интегрирования. При больших и меньших значениях  $k$  интеграл дает относительно малые поправки, которые в принятом приближении можно не рассматривать.

В упомянутой области интегрирования достаточно рассмотреть лишь поправки порядка  $p/k$ , поскольку они значительно больше, чем  $p/l$ . Можно показать, что поправки в выражении для  $\Gamma_0(p, p-l; l)$  будут иметь вид

$$[\Delta_1(p^2, l^2) \hat{l} \gamma_0 + \Delta_2(p^2, l^2) \gamma_0 \hat{l}] \frac{p}{l^2}. \quad (2.7)$$

В самом деле, легко проверить, что поправки других типов не появляются, если  $G$  взято в виде (2.6). Более того, будучи подставлены в интеграл, они снова дают выражение вида (2.7) и поэтому обращаются в нуль при сравнении правой и левой частей уравнения.

Подставляя (2.6) и (2.7) в уравнение для  $\Gamma_0$  и воспользовавшись преобразованием (2.4), приходим к следующим уравнениям для  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ :



$$\begin{aligned} \Delta_1(\xi, \eta) &= \frac{e_1^2}{8\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) \int_{\xi}^{\eta} \beta(z) \{ \Delta_1(\xi, z) [d_l(z) - d_l(z)] + \\ &\quad + [\Delta_2(\xi, z) + \alpha(z)] [d_l(z) + d_l(z)] \} dz, \\ \Delta_2(\xi, \eta) &= \frac{e_1^2}{8\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) \int_{\xi}^{\eta} \beta(z) \{ \Delta_1(\xi, z) [d_l(z) - d_l(z)] + \\ &\quad + [\Delta_2(\xi, z) + \alpha(z)] [d_l(z) - d_l(z)] \} dz, \quad (2.8) \end{aligned}$$

где  $\xi = \ln(-p^2/m^2)$ ,  $\eta = \ln(-l^2/m^2)$ . Подставляя (2.6) и (2.7) в интеграл в уравнении для  $G$ , в котором главной областью интегрирования является  $p \ll k < \infty$ , получаем после простых преобразований

$$\frac{1}{\beta(\xi)} = 1 + \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} [\alpha(z) \Delta_1(\xi, z) + \Delta_2(\xi, z)] \beta(z) d_l(z) dz. \quad (2.9)$$

Складывая оба уравнения (2.8), находим

$$\begin{aligned} \Delta_1(\xi, \eta) + \Delta_2(\xi, \eta) &= \\ &= \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) \int_{\xi}^{\eta} \beta(z) d_l(z) [\Delta_1(\xi, z) + \Delta_2(\xi, z) + \alpha(z)] dz. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Следует отметить, что величина  $d_l$  не входит в формулы (2.9) и (2.10). Поэтому уравнения для  $\Gamma_\mu$  и  $G$  можно решать независимо от вычисления гриновской функции фотона  $D_{\mu\nu}$ . Как уже упоминалось, продольная часть  $d_l$  представляет собой произвольную величину, которую мы сохраняли в уравнениях только для доказательства их градиентной инвариантности. Разумеется, зависимость  $G$  и  $\Gamma_\mu$  от  $d_l$  градиентной инвариантности не противоречит. Общее градиентное преобразование  $G$  и  $\Gamma_\mu$  будет найдено позже. Здесь мы ограничимся случаем медленно меняющихся  $d_l(k^2)$ .

Введем обозначение

$$q(\xi, \eta) = \frac{\Delta_1(\xi, \eta) + \Delta_2(\xi, \eta)}{\alpha^2(\eta) \beta(\eta)}. \quad (2.11)$$

Функция  $q(\xi, \eta)$  удовлетворяет уравнению

$$q(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha^2(z) \beta^2(z) d_l(z) q(\xi, z) dz + \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha(z) \beta(z) d_l(z) dz. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.9) можно теперь записать в виде

$$\frac{1}{\beta(\xi)} = 1 + q(\xi, \infty). \quad (2.13)$$

Уравнения (2.5), (2.12), (2.13) могут быть решены относительно  $\alpha$  и  $\beta$ . Дифференцируя уравнения (2.5) и (2.12) (второе по  $\eta$ ), получаем

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = -\frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^3(\xi) \beta^2(\xi) d_l(\xi), \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial q(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\eta) \beta^2(\eta) d_l(\eta) q(\xi, \eta) + \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha(\eta) \beta(\eta) d_l(\eta). \quad (2.15)$$

Сюда следует добавить граничные условия

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow 1, \text{ когда } \xi \rightarrow 1, \\ q &= 0 \text{ при } \xi = \eta. \end{aligned}$$

Введя новую функцию  $r(\xi, \eta) = \alpha(\eta) q(\xi, \eta)$ , имеем

$$\frac{\partial r(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) d_l(\eta).$$

Следовательно,

$$r(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha^2(z) \beta(z) d_l(z) dz,$$

$$\frac{\partial r(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\xi) \beta(\xi) d_l(\xi).$$

Из (2.13) видно, что  $r(\xi, \infty) = \frac{1}{\beta(\xi)} - 1$ , когда  $\eta \rightarrow \infty$ .

Отсюда

$$\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\xi) \beta^3(\xi) d_l(\xi).$$

Из этого уравнения и (2.14) следует, что  $\alpha\beta = \text{const}$ , и, приняв во внимание граничные условия, находим

$$\alpha(\xi) \beta(\xi) = 1. \quad (2.16)$$

Легко видеть, что эта формула вытекает непосредственно из теоремы Уорда [4]

$$\Gamma_{\mu}(p, p; 0) = \frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial p_{\mu}},$$

если вспомнить, что при дифференцировании медленно меняющаяся функция  $\beta$  дает члены более высокого порядка.

Подставляя (2.16) в уравнение (2.14) и используя также граничное условие, получаем окончательно

$$\alpha(\xi) = \exp \left[ \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} d_l(z) dz \right], \quad \beta(\xi) = \exp \left[ -\frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} d_l(z) dz \right]. \quad (2.17)$$

Полученные формулы фактически выражают градиентное преобразование  $G$  и  $\Gamma_\mu$  (для медленно меняющихся  $d_l$ ). Наиболее удобным выбором является, очевидно,  $d_l = 0$  (в противоположность обычному предположению  $d_l = 1$ ). Тогда с рассматриваемой точностью  $\Gamma_\mu$  и  $G$  вообще не содержат расходимостей и равны ( $\Gamma_\mu$  с упоминавшимися выше ограничениями) своим значениям в нулевом приближении.

Следует упомянуть, что эта калибровка фактически соответствует условию Лоренца  $\partial A_i / \partial x_i = 0$ .

### 3. Асимптотическое выражение для гриновской функции фотона [5]

Перейдем теперь к вычислению гриновской функции фотона  $D_{\mu\nu}$ . На этот раз интеграл, стоящий в уравнении (1.3) для  $D_{\mu\nu}$ , расходится при больших  $k$  квадратично. Однако, поскольку значение интеграла при  $k = 0$  должно исчезать вследствие сохранения заряда (поперечного характера дираковского тока), можно рассматривать только разность между этим интегралом и его значением при  $k = 0$ . Принимая во внимание, что члены, содержащие  $p^3$  в знаменателе, будучи усреднены по углам, дают нуль, мы снова приходим к логарифмическому интегралу.

В соответствии с тем, что, как легко убедиться, область  $p \ll k$  не вносит заметного вклада в интеграл, достаточно рассмотреть лишь область  $p \gg k$ .

При вычислении логарифмического интеграла нужно принять во внимание поправки к  $\Gamma_\mu(p, p - k; k)$ , квадратичные по  $k/p$ , как это было сделано в предыдущем разделе. Для нахождения этих поправок мы воспользуемся уравнением (1.5) для  $\Gamma_\sigma$ , проведя в нем замену переменной интегрирования:  $k' \rightarrow p - k$ . Интеграл тогда примет вид

$$\int D_{\mu\nu}(p - k') \Gamma_\mu(p, k'; p - k') \times \\ \times G(k') \Gamma_\sigma(k', k' - l; l) G(k' - l) \Gamma_\nu(k' - l, p - l; k' - p) d^4 k'.$$

Здесь предполагается, что  $p \gg l$ . Очевидно, что в разложении  $G(k' - l)$  по степеням  $l$  возникают члены второго порядка по  $l$ , которые дают логарифмический интеграл в области  $p \gg k' \gg l$ . Члены первого порядка по  $l$  появиться не могут, поскольку они содержат  $k'^3$  в знаменателе и исчезают после интегрирования по углам. Члены рассматриваемого порядка могут возникать от  $G(k' - l)$  и  $\Gamma_\sigma(k', k' - l; l)$ . Зависимость последнего  $\Gamma_\sigma$  от  $l$  дает вместо членов порядка  $l^2/k'^2$  члены порядка  $l^2/p^2$ , которыми можно пренебречь.

Мы начнем с вычисления поправок, происходящих от  $G(k' - l)$ . После некоторых вычислений находим

$$\frac{e_1^2}{24\pi} \left\{ 2d_l(\xi) \frac{\hat{l}\gamma_\sigma l - l^2\gamma_\sigma}{p^2} + [d_l(\xi) - d_i(\xi)] \frac{l^2 \hat{p}\gamma_\sigma \hat{p} - \hat{p} \hat{l}\gamma_\sigma \hat{l} \hat{p}}{p^4} \right\} \times \\ \times \alpha^2(\xi) \int_\eta^\xi \alpha(z) \beta^2(z) dz, \quad (3.1)$$

где  $\xi = \ln(-p^2/m^2)$ ,  $\eta = \ln(-l^2/m^2)$ .

Оказывается можно считать, что поправки к  $\Gamma_\sigma(p, p-l; l)$  имеют вид

$$s(\xi, \eta) \alpha^2(\xi) \left\{ 2d_l(\xi) \frac{\hat{l}\gamma_\sigma \hat{l} - l^2\gamma_\sigma}{p^2} + [d_l(\xi) - d_i(\xi)] \frac{l^2 \hat{p}\gamma_\sigma \hat{p} - \hat{p} \hat{l}\gamma_\sigma \hat{l} \hat{p}}{p^4} \right\}. \quad (3.2)$$

Подставляя это выражение в интеграл и сравнивая члены в левой и правой частях уравнения (1.5) для  $\Gamma_\sigma$ , получаем следующее уравнение для  $s(\xi, \eta)$ :

$$s(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{4\pi} \int_\eta^\xi \alpha^2(z) \beta^2(z) d_l(z) s(z, \eta) dz + \frac{e_1^2}{24\pi} \int_\eta^\xi \alpha(z) \beta^2(z) dz. \quad (3.3)$$

Подставляя выражение (3.2), дающее поправки к  $\Gamma_\sigma$ , в уравнение (1.3) для  $D_{\mu\nu}$ , получим

$$d_l(\eta) = 1 - 8d_l(\eta) \left[ \frac{e_1^2}{4\pi} \int_\eta^L \alpha^2(z) \beta^2(z) d_l(z) s(z, \eta) dz + \right. \\ \left. + \frac{e_1^2}{24\pi} \int_\eta^L \alpha(z) \beta^2(z) dz \right]. \quad (3.4)$$

В этой формуле  $L$  означает верхний предел для рассматриваемых значений величины  $\eta$ , который определяется радиусом раз-

мазывания взаимодействия. Как уже говорилось, согласно нашей схеме размазанного взаимодействия интенсивность взаимодействия быстро падает, когда импульс превосходит критическую величину  $\Lambda \sim 1/a$ , где  $a$  — радиус взаимодействия. Условие  $p \ll \Lambda$  превращается в логарифмической шкале в  $\xi \ll L$ , поскольку значительным изменениям  $p$  соответствуют относительно малые изменения  $\ln(-p^2/m^2)$ . Поэтому сам факт размазывания приводит к  $L$  в качестве верхнего предела во всех интегралах. Следует подчеркнуть, что согласно общей схеме постоянная  $e_1$  в действительности является функцией радиуса взаимодействия, т. е. величины  $\Lambda$ . При вычислении  $G$  и  $\Gamma_\mu$  не было необходимости в учете размазывания в связи с расходимостью в  $d_l(\xi)$ , так как функция  $d_l(\xi)$  является произвольной и не зависит от характера взаимодействия. Но если размазывание введено, то в интегралах, стоящих в экспонентах в выражениях для  $\alpha$  и  $\beta$ , вместо бесконечности следует подставить верхний предел  $L$ .

Следует упомянуть, что тогда  $\beta(L) = 1$ . Это соответствует тому очевидному факту, что при  $p \gg \Lambda$  электрон должен вести себя как свободный, не взаимодействующий с полем фотонов. Сравнивая формулу (3.4) с формулой (3.3), получаем

$$\frac{1}{d_l(\eta)} = 1 + 8s(L, \eta). \quad (3.5)$$

Дифференцируя уравнение (3.3) по  $\xi$  и принимая во внимание соотношения  $\alpha = \frac{1}{\beta}$  и  $\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{e_1^2}{4\pi} d_l(\xi) \beta(\xi)$ , находим

$$\frac{\partial s(\xi, \eta)}{\partial \xi} = s(\xi, \eta) \frac{1}{\beta(\xi)} \frac{d\beta(\xi)}{d\xi} + \frac{e_1^2}{24\pi} \beta(\xi). \quad (3.6)$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{s(\xi, \eta)}{\beta(\xi)} \right) = \frac{e_1^2}{24\pi}.$$

Замечая, что в согласии с (3.3)  $s = 0$  при  $\xi = \eta$ , находим

$$s(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{24\pi} (\xi - \eta) \beta(\xi). \quad (3.7)$$

Полагая здесь  $\xi = L$  и вспоминая, что  $\beta(L) = 1$ , приходим к окончательному выражению

$$d_l(k^2) = \frac{1}{1 + \frac{e_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{-k^2}}. \quad (3.8)$$

Следует упомянуть, что в противоположность  $G$  и  $\Gamma_\mu$  это выражение не содержит произвольной функции  $d_l$ , как и должно было бы быть в соответствии с градиентной инвариантностью. При  $k^2 \ll m^2$  вместо  $\ln(\Lambda^2/(-k^2))$  в этой формуле стоит  $\ln(\Lambda^2/m^2)$ . Если в поляризации вакуума кроме электронов участвуют и другие частицы, то формула принимает вид

$$d_l(k^2) = \frac{1}{1 - \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{-k^2}}, \quad (3.9)$$

где вклад частиц со спином  $1/2$  и зарядом  $Ze$  равен  $Z^2$ , а вклад частиц со спином 0 равен  $Z^2/4$ . Частицы с большими спинами дают квадратично расходящиеся выражения, которых мы здесь не рассматривали, тем более что до сих пор не существует указаний на существование таких частиц в природе.

Анализ физических эффектов показывает, что физический заряд  $e$  выражается через  $e_1$  при помощи соотношения

$$e^2 = e_1^2 \lim_{k^2 \rightarrow 0} d_l(k^2). \quad (3.10)$$

Поэтому из формулы (3.9) следует

$$e^2 = \frac{e_1^2}{1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}} \quad (3.11)$$

или

$$e_1^2 = \frac{e^2}{1 - \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}. \quad (3.12)$$

Выражая  $d_l$  через  $e^2$ , находим

$$d_l(k^2) = \frac{e^2}{e_1^2} \frac{1}{1 - \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{-k^2}{m^2}}. \quad (3.13)$$

Формула (3.13) явным образом перенормируема, т. е. во всех формулах можно заменить «голый» заряд  $e_1$  на физический заряд  $e$ , одновременно умножив  $D_{\mu\nu}$  на перенормирующий множитель  $Z_3 = e_1^2/e^2$ . После этого величины не будут зависеть от предела обреза и связанного с ним заряда  $e_1$ .

Из формулы (3.12) следует, что при достаточно больших  $\Lambda$  заряд  $e_1^2$  может стать по порядку величины равным единице и рас-

сма­три­вае­мое при­бли­же­ние бу­дет несправедли­вым. Сле­до­ва­тель­но, элек­тро­ди­на­ми­ка со сла­бой свя­зью не яв­ля­ет­ся ло­гиче­ски зам­кну­той те­о­ри­ей. Мож­но бы­ло бы пред­по­ла­гать, что при боль­ших энер­гиях эту те­о­рию сле­ду­ет до­пол­нить те­о­ри­ей силь­ной свя­зи. Од­на­ко И. Я. По­ме­ран­чук и Л. Д. Лан­дау вы­ска­за­ли мы­сль о том, что на са­мом де­ле име­ют­ся при­чи­ны, по ко­то­рым мож­но по­нять си­ту­а­цию со­вер­шен­но по-и­но­му. Со­глас­но их рас­суж­де­ни­ям, фор­му­ла (3.11) оста­ет­ся спра­вед­ли­вой не толь­ко при ма­лых  $e_1^2$ , но так­же и при  $e_1^2 \gg 1$ . Тог­да, рас­сма­три­вая фи­зи­че­ский заряд  $e$  как функ­цию  $e_1$  и  $\Lambda$ , мож­но убе­дись, что как бы ни бы­ло ве­ли­ко  $e_1^2$ ,  $e^2$  при задан­ном  $\Lambda$  не мож­ет пре­зой­ти не­ко­то­ро­го пре­де­ла, стре­мя­ще­го­ся к ну­лю с воз­рас­та­ни­ем  $\Lambda$ . Это при­водит нас к за­к­лю­че­нию, что в чи­стой элек­тро­ди­на­ми­ке то­че­чное вза­им­о­дей­ствие не­воз­мож­но.

Сле­ду­ет, од­на­ко, упо­мя­нуть, что для элек­тро­ди­на­ми­ки весь во­прос име­ет чи­сто ме­то­ди­че­ское зна­че­ние, по­сколь­ку при боль­ших энер­гиях су­щес­твен­ную роль мо­гут иг­рать и дру­гие ти­пы вза­им­о­дей­ствия, в ча­ст­но­сти гра­ви­та­ция.

До сих пор мы всю­ду пред­по­ла­га­ли, что ра­ди­усы раз­ма­зы­ва­ния в ди­ра­ков­ском то­ке и во вза­им­о­дей­ствии это­го то­ка с элек­тро­маг­нит­ны­ми по­тен­ци­ала­ми рав­ны. Это пред­по­ло­же­ние мож­ет быть от­бро­ше­но. Мы пока­жем, как из­ме­ня­ет­ся ре­зуль­та­ты, если ра­ди­усы раз­лич­ны. Вве­дем два раз­ных пре­де­ла об­ре­за­ния:  $\Lambda_\psi$ , со­от­вет­ст­вую­щий раз­ма­зы­ва­нию ди­ра­ков­ско­го то­ка, и  $\Lambda_A$ , со­от­вет­ст­вую­щий раз­ма­зы­ва­нию элек­тро­маг­нит­но­го вза­им­о­дей­ствия это­го то­ка. Сле­ду­ет за­метить, что оба  $\Lambda$  долж­ны удо­в­ле­тво­рять усло­вию  $\Lambda_A \lesssim \Lambda_\psi$ . Тог­да фор­му­ла (2.17) для  $\alpha(\xi)$  и  $\beta(\xi)$  пе­ре­идет в

$$\alpha(\xi) = \beta^{-1}(\xi) = \exp \left[ \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{L_A} d_t(z) dz \right], \quad L_A = \ln \frac{\Lambda_A^2}{m^2}. \quad (3.14)$$

Что же ка­са­ет­ся  $d_t$ , то про­стые вы­чис­ле­ния да­ют сле­ду­ю­щий ре­зуль­та­т:

$$d_t = \frac{1}{1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda_\psi^2}{-k^2}} \quad \text{при } |k^2| > \Lambda_A^2, \quad (3.15)$$

$$d_t = 1 \quad \text{при } |k^2| > \Lambda_A^2. \quad (3.16)$$

Мож­но уви­деть, что в слу­чае  $\Lambda_\psi \gg \Lambda_A$  функ­ция  $d_t$  пре­тер­пе­ва­ет бы­строе из­ме­не­ние вб­ли­зи  $k^2 = \Lambda_A^2$ .

## 4. Масса электрона в квантовой электродинамике [6]

Рассмотрим теперь массу электрона и, в частности, роль электромагнитной и «голой» масс. Наиболее существенным пунктом в этом отношении является поведение гриновской функции электрона, когда  $p^2$  становится порядка величины  $m^2$ . В разделе 2 мы получили асимптотическое выражение электронной функции Грина, справедливое при  $p \gg m$ . Однако для вычисления массы отнюдь не достаточно рассмотреть это выражение при  $p \sim m$ , а следует найти поправки к этому выражению. Предположим, что  $G(p)$  имеет вид

$$G(p) = \frac{\beta(p^2)}{\hat{p} - m(p^2)}, \quad (4.1)$$

где  $\beta(p^2)$  — функция, введенная в разделе 2, а  $m(p^2)$  представляет собой новую медленно меняющуюся функцию  $p^2$ . При больших значениях  $p$  отношение второго члена в знаменателе к первому становится пренебрежимым, во всяком случае значительно меньшим, чем неточность, допущенная при вычислении функции  $\beta(p^2)$ . Тем не менее рассмотрение этого члена законно, поскольку в противоположность первому члену он является четной функцией вектора  $p$ . Поэтому неточность в  $\beta$  не может повлиять на величину  $m(p^2)$ . Функция  $G(p)$  при больших значениях  $p$  может быть записана в виде

$$G(p) = \frac{\beta(p^2)}{\hat{p}} + \frac{\beta(p^2) m(p^2)}{p^2}, \quad (4.2)$$

где первый член является нечетной, а второй — четной функцией  $p$ .

Запишем уравнение для функции  $G$

$$G^{-1}(p) = \hat{p} - m_1 + \frac{e^2}{\pi i} \int \Gamma_\mu(p; p-k; k) G(p-k) \gamma_\nu D_{\mu\nu}(k) d^4k \quad (4.3)$$

и выделим из обеих частей четные функции  $p$ , которые должны быть равны друг другу. При определении четной части интеграла в первой части мы изменим также знак у  $k$ . Тогда четная часть подынтегрального выражения будет состоять из произведения четной (по отношению к изменению знака всех переменных) части  $\Gamma_\mu$  на четную часть  $G$  и из произведения нечетной части  $\Gamma_\mu$  на нечетную часть  $G$ . В первом случае для  $\Gamma_\mu$  можно использовать  $\alpha(k^2)\gamma_\mu$ , а для  $G$  — второй член в (4.2). В последнем случае  $G$  берется в старом виде  $\beta(p^2)/\hat{p}$ , а нечетную часть  $\Gamma_\mu$  следует определить из уравнения (1.5).



Приравнивая нечетные части выражений в обеих частях последнего уравнения, мы наряду с изменением знака переменной  $k$  изменим знаки  $p$  и  $l$ . Поэтому нечетная часть подынтегрального выражения будет содержать либо четную часть одного из  $G$ , либо нечетную часть одного из  $\Gamma$ . Другие возможности дают члены более высокого порядка. Рассмотрим прежде всего влияние четной добавки к  $G$ . Предположим, что  $p \ll l$ . Тогда легко видеть, что главный член выражения происходит от четной добавки только к одному из  $G$ , а именно к  $G(p - k)$ . Соответствующий интеграл является логарифмическим в области  $p \ll k \ll l$  и быстро сходится в других областях. Прямые вычисления дают следующее выражение:

$$-\frac{e_1^2}{4\pi} \frac{l_\sigma}{l^2} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) \int_{\xi}^{\eta} \beta(z) \alpha(z) m(z) [3d_t(z) + d_l(z)] dz,$$

где, как и раньше,

$$\xi = \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right), \quad \eta = \ln\left(\frac{-l^2}{m^2}\right).$$

Определим теперь нечетную часть  $\Gamma_\sigma$ , о которой мы предположим, что она имеет вид  $(l_\sigma/l^2)\alpha^2(\eta)\beta(\eta)t(\xi, \eta)$ .

Легко проверить, что существенные члены дает только добавка к первому  $\Gamma_\mu(p, p - k; k)$  в (1.5). После подстановки в (1.5) получаем интегральное уравнение для  $t(\xi, \eta)$ :

$$t(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha^2(z) \beta^2(z) d_l(z) t(\xi, z) dz - \\ - \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha(z) \beta(z) m(z) [3d_t(z) + d_l(z)] dz. \quad (4.4)$$

Подставляя в уравнение (4.3) выражения для добавок к  $G$  и  $\Gamma_\mu$ , получим из четной части этого уравнения

$$-\frac{m(\xi)}{\beta(z)} = -m_1 + \frac{e_1^2}{4\pi} \int_m^L \alpha^2(z) \beta^2(z) d_l(z) t(\xi, z) dz - \\ - \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha(z) \beta(z) m(z) [3d_t(z) + d_l(z)] dz. \quad (4.5)$$

Отсюда следует

$$m(\xi) = \beta(\xi) [m_1 - t(\xi, L)]. \quad (4.6)$$

Дифференцируя уравнение (4.4) по  $\eta$  и воспользовавшись формулами  $\beta\alpha = 1$  и  $d\beta/d\xi = (e_1^2/4\pi)\beta d_l$ , получим

$$\frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{\beta(\eta)} \frac{d\beta(\eta)}{d\eta} t(\xi, \eta) - \frac{e_1^2}{4\pi} m(\eta) [3d_l(\eta) + d_l(h)]$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{t(\xi, \eta)}{\beta(\eta)} \right) = - \frac{e_1^2}{4\pi} \frac{m(\eta)}{\beta(\eta)} [3d_l(\eta) + d_l(\eta)].$$

Принимая во внимание, что согласно (4.4)  $t(\xi, \eta) = 0$  при  $\xi = \eta$ , находим

$$\frac{t(\xi, \eta)}{\beta(\eta)} = - \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \frac{m(z)}{\beta(z)} [3d_l(z) + d_l(z)] dz. \quad (4.7)$$

Продифференцировав по  $\xi$ , получим

$$\frac{1}{\beta(\eta)} \frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{e_1^2}{4\pi} \frac{m(\xi)}{\beta(\xi)} [3d_l(\xi) + d_l(\xi)].$$

Подставив  $\eta = L$  и замечая, что  $\beta(L) = 1$ , находим

$$\frac{d}{d\xi} \frac{m(\xi)}{\beta(\xi)} = - \frac{e_1^2}{4\pi} \frac{m(\xi)}{\beta(\xi)} [3d_l(\xi) + d_l(\xi)]$$

или, используя соотношение  $d\beta/d\xi = (e_1^2/4\pi)\beta d_l$ ,

$$\frac{dm}{d\xi} = - \frac{3e_1^2}{4\pi} d_l(\xi) m(\xi).$$

Подставив  $d_l$  из формулы (3,9), приходим, наконец, к выражению

$$m(\xi) = m(0) \left( 1 - \frac{e^2}{3\pi} v \xi \right)^{3/4 v}, \quad (4.8)$$

где постоянная  $m(0)$  представляет собой значение  $m(\xi)$  при  $\xi = 0$ , т. е. наблюдаемую массу электрона.

В обычных обозначениях (4.8) имеет вид

$$m(p^2) = m \left[ 1 - \frac{e^2}{3\pi} v \ln \left( \frac{-p^2}{m^2} \right) \right]^{3/4 v}. \quad (4.9)$$

Формула (4.8) определяет  $m(p^2)$  при  $|p^2| \gg m^2$ . Случай  $|p^2| \ll m^2$  не отличается существенно от случая  $p^2 \sim m^2$ , т. е. в этом

случае  $m(p^2) = m$ . При  $p^2 = m^2$  знаменатель формулы (4.1) обращается в нуль, поэтому случай  $p^2$ , настолько близких к  $m^2$ , что  $e^2 \ln(m^2/(p^2 - m^2)) \sim 1$ , следует рассматривать отдельно.

Формула (4.9) градиентно инвариантна и не зависит от радиуса размазывания. Из (4.9) следует, что масса частицы уменьшается с возрастанием  $k^2$ . Величина  $m_1$  согласно (4.6) равна  $m(L)$ , т. е. соответствует значениям  $k^2$ , связанным с радиусом размазывания:

$$m_1 = m \left( \frac{e^2}{e_1^2} \right)^{1/4\nu}. \quad (4.10)$$

На границе применимости теории  $e_1 \sim 1$  и  $m_1 \sim me^{1/4\nu}$ , т. е. представляет собой очень малую величину. Согласно (4.10)  $m_1$  убывает с увеличением  $\Lambda$ . Поэтому можно предполагать, что если бы теория была замкнутой, то  $m_1$  обратилось бы в нуль. Это означает, что масса электрона имеет электромагнитную природу. Таким образом, принятая выше концепция возвращает нас к давно оставленной идее чисто электромагнитной массы электрона.

## 5. Инфракрасная катастрофа [7]

До сих пор мы не рассматривали поведения гриновской функции электрона в случае, когда импульс  $p$  приближается к  $m$  настолько, что  $e^2 \ln(m^2/(p^2 - m^2)) \gtrsim 1$ . Нас не интересовали также вершинные части  $\Gamma_\mu$ , аргументы которых не удовлетворяют неравенствам треугольника.

Мы начнем с вычисления  $G(p)$  при  $p$ , приближающихся к  $m$ . В согласии с общим методом просуммируем члены, содержащие при заданной степени  $e$  наибольшую степень  $\ln(m^2/(p^2 - m^2))$ . При этом мы будем использовать физический заряд и перенормированную  $D$ -функцию. Тогда интересующие нас члены относятся к типу  $[e^2 \ln(m^2/(p^2 - m^2))]^n$ . Анализ диаграмм для  $\Gamma_\mu$  показывает, что такие члены возникают только от диаграмм с параллельными виртуальными линиями. Таким образом, полностью применимо уравнение (1.5). Поскольку в интересующей нас области  $p$  является существенно времениподобным вектором, в интеграле в уравнении (1.1) нельзя перейти к евклидову пространству тем же способом, что и раньше. Это можно, однако, сделать путем поворота пространственных осей:  $k_m \rightarrow -ik_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ). При этом оказывается, что существенными являются лишь те  $\Gamma_\mu$ , чьи аргументы удовлетворяют правилу треугольника. Вместе с  $G$  эти  $\Gamma_\mu$  образуют замкнутую систему.

Предполагается, что при  $p^2 \approx m^2$  функция  $G$  имеет вид

$$G(p) = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2} \beta(m^2) \sigma(m^2 - p^2), \quad (5.1)$$

где  $\sigma$  — новая медленно меняющаяся функция. Анализ интеграла в уравнении (1.5) приводит к заключению, что главную роль в интеграле играет область, где  $p^2 - m^2 \ll (p - k)^2 - m^2 \ll m^2$ . Будем считать, что в этой области  $\Gamma_\mu(p, p - l; l)$  имеет вид

$$(\hat{p} + m) \Gamma_\mu(p, q; l) (\hat{q} + m) = (\hat{p} + m) \gamma_\mu(\hat{q} + m) \tau(m^2 - p^2) \alpha(m^2), \quad \hat{q} = \hat{p} - \hat{l}, \quad (5.2)$$

где  $\tau$  — новая медленно меняющаяся функция.

Можно убедиться, что во всех приложениях используется не  $\Gamma_\mu$  само по себе, а умноженное слева на  $\hat{p} + m$  и справа на  $\hat{q} + m$ . Эту величину нам и предстоит определить. В интеграле в уравнении для  $\Gamma_\mu$  главной областью является  $q^2 - m^2 \ll (p - k)^2 - m^2 \ll m^2$ . Преобразуя уравнение для  $\Gamma_\mu$  в этой области, получаем уравнение для  $\tau$

$$\tau(\eta) = 1 - \frac{3e^2}{2\pi} \int_0^\eta \tau^3(z) \sigma^2(z) dz, \quad (5.3)$$

где

$$\eta = \ln \frac{m^2}{m^2 - q^2}, \quad z = \ln \frac{m^2}{m^2 - (p - k)^2}.$$

Анализ интеграла в уравнении (1.1) показывает, что, как и раньше, нам надо найти поправки к выражению (5.2) для  $\Gamma_\mu$ , пропорциональные  $(p^2 - m^2)/(q^2 - m^2)$ .

Эти поправки находятся из уравнения (1.5), главной областью в котором является  $p^2 - m^2 \ll (p - k)^2 - m^2 \ll q^2 - m^2$ . Опуская детали вычислений, выпишем окончательные результаты:

$$\tau(\xi) \sigma(\xi) = 1, \quad (5.4)$$

$$\sigma(p) = \left( \frac{m^2}{m^2 - p^2} \right)^{(e^2/2\pi)(3-d^{(0)})}, \quad (5.5)$$

где  $d_i^{(0)} = d_i(k^2 = 0)$ .

Таким образом, оказывается, что  $G$  при  $p^2 = m^2$  имеет в общем случае не полюс, а точку ветвления.

Вычисленное  $\tau$  относится к  $\Gamma_\mu(p, q; l)$  с  $p^2 \approx m^2$ ,  $q^2 \approx m^2$  и  $l^2 \ll m^2$ .  $\Gamma_\mu$  было определено также и в более общем случае:  $(pq) \gg p^2 - m^2$ ,  $q^2 - m^2$ . Как и ранее, учитывались лишь члены с наивысшими степенями логарифмов, а именно члены, соответствующие

щие  $[e^2 \ln(m^2/(p^2 - m^2))]^n$  и  $[e^2 \ln^2((pq)/m^2)]^n$ . Для вычисления  $\Gamma_\mu$  приходится суммировать диаграммы со всеми виртуальными линиями, охватывающими исходную вершину. Мы опустим вычисления. Результат имеет вид

$$(\hat{p} + m) \Gamma_\mu(p, q; l)(\hat{q} + m) = \alpha(m^2)(\hat{p} + m) \gamma_\mu(\hat{q} + m) \exp\left[-\frac{e^2}{2\pi} f\right], \quad (5.6)$$

где

$$f = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} S + \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 - d_i^0)(L_1 + L_2). \quad (5.7)$$

Здесь  $a = (pq)/m^2$ ,  $S$  представляет собой площадь области на плоскости  $\lambda$  и  $\mu$ , ограниченной неравенствами

$$0 < \lambda < \ln \frac{(pq)}{p^2 - m^2}, \quad (5.8)$$

$$0 < \mu < \ln \frac{(pq)}{q^2 - m^2},$$

$$\mu + \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) > \lambda > \mu - \ln(a - \sqrt{a^2 - 1}), \quad (5.9)$$

а  $L_1, L_2$  — длины отрезков прямых  $\lambda = \mu \pm \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})$ , отсекаемых условиями (5.8).

Метод, аналогичный примененному для вычисления  $\Gamma_\mu$ , был использован далее для исследования вопроса об излучении дополнительных квантов в физических процессах, так называемой инфракрасной катастрофы. Оказалось, что вероятность такого излучения представляется формулой Пуассона

$$W(n) = \frac{e^{-\bar{n}}}{n!} (\bar{n})^n. \quad (5.10)$$

Множитель  $e^{-\bar{n}}$  в этой формуле возникает от интегрирования по виртуальным квантам и в основном определяется формулой (5.6). Отсюда становится ясным, что найденные отклонения  $\Gamma_\mu$  от нулевого приближения теории возмущений происходят от инфракрасной катастрофы.

Представленные здесь результаты в своих существенных чертах сохраняются и для дополнительного излучения в других физических процессах.

Таким образом, оказывается, что при больших энергиях основные отклонения от нулевого приближения теории возмущений (эффекты порядка  $e^2 \ln(E/m)$ ) связаны с инфракрасной катастрофой.

## 6. Градиентные преобразования гриновских функций заряженных частиц

Теория, описывающая поле заряженных частиц, связанных с электромагнитным полем, обладает свойством градиентной инвариантности. При градиентном преобразовании потенциалов электромагнитного поля

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \quad (6.1)$$

( $\varphi$  — произвольный скалярный оператор)  $\psi$ -операторы частиц преобразуются следующим образом:

$$\psi \rightarrow \psi \exp [ie\varphi]. \quad (6.2)$$

Мы рассмотрим здесь, как меняются гриновские функции частиц под действием градиентного преобразования. Гриновская функция частицы, как известно, равна

$$G(x, x') = -i \langle (\psi(x) \psi(x'))_+ \rangle. \quad (6.3)$$

Здесь угловые скобки обозначают среднее по вакууму.

При градиентном преобразовании (6.1) функция Грина меняется. Согласно (6.2) это изменение можно записать в виде

$$G(x, x') = G_0(x, x') \langle (\exp[ie\varphi(x)] \exp[-ie\varphi(x')])_+ \rangle. \quad (6.4)$$

Здесь  $G_0(x, x')$  представляет собой функцию Грина, вычисленную в том частном случае, когда продольная (в четырехмерном смысле) часть гриновской функции фотона равна нулю.

В соответствии с поперечным характером дираковского тока продольная часть потенциала не принимает участия во взаимодействии полей, и поэтому задача состоит в усреднении выражения  $\exp[ie\varphi(x)] \exp[-ie\varphi(x')]$  по состоянию вакуума, в котором операторы  $\varphi$  принадлежат к свободному полю. Тогда находим

$$G(x, x') = G_0(x, x') \exp[ie^2 (\Delta_F(0) - \Delta_F(x, x'))], \quad (6.5)$$

где  $\Delta_F$  является функцией Грина поля  $\varphi$ :

$$\Delta_F(x, x') = i \langle (\varphi(x) \varphi(x'))_+ \rangle. \quad (6.6)$$

Гриновская функция фотона в общем случае содержит наряду с поперечной частью также и продольную часть (формула (2.2)).

Легко видеть, что  $d_l(k^2)$  следующим способом связана с фурье-компонентой  $\Delta_F(k)$  функции  $\Delta_F(x, x')$ :

$$\Delta_F(k) = 4\pi \frac{d_l(k^2)}{k^4}. \quad (6.7)$$

Градиентное преобразование компонент Фурье гриновских функций может быть найдено только для бесконечно малых градиентных преобразований потенциалов.

Варьируя соотношение (6.5), имеем:

$$\delta G(x, x') = ie^2 G(x, x') (\delta \Delta_F(0) - \delta \Delta_F(x, x')). \quad (6.8)$$

Переходя в обеих частях к фурье-компонентам и принимая во внимание (6.7), находим

$$\delta G(p) = -\frac{e^2}{\pi i} \int \frac{\delta d_l(k^2)}{k^4} \{G(p) - G(p-k)\} d^4k. \quad (6.9)$$

Для частиц со спином  $1/2$  в случае, когда  $d_l(k^2)$  является медленно меняющейся функцией, эта формула сводится к уравнению (2.17).

Аналогичным способом можно получить градиентное преобразование  $\Gamma_\mu$ . Опуская детали вычислений, выпишем только результат:

$$\begin{aligned} G(p) \delta \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) &= \frac{e^2}{\pi i} \int \{G(p) \Gamma_\mu(p, p-k; k) \times \\ &\times [G(p-k) - G(p-k-r)] + G(p-r) [\Gamma_\mu(p-r, p-r-k; k) \times \\ &\times G(p-r-k) - \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k)]\} \frac{\delta d_l(r)}{r^4} d^4r. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Для частиц со спином  $1/2$  и медленно меняющихся  $d_l(k^2)$  это дает (2.17). Однако в действительности формулы (6.9) и (6.10) применимы для заряженных частиц с произвольным спином.

## 7. Гриновские функции в мезонной теории со слабой псевдоскалярной связью [8]

Теперь мы попытаемся применить методы, использованные в предыдущих разделах для квантовой электродинамики, к мезонной теории со слабой псевдоскалярной связью. Как и в электродинамике, найдем выражения для основных функций: гриновской функции нуклона  $G(p)$ , гриновской функции мезона  $D(k)$  и соответствующей вершинной части  $\Gamma(p, q; l)$  для пространственных век-

торов  $p$ ,  $q$  и  $l$ . Основные уравнения аналогичны уравнениям, введенным в разделе 1, и имеют следующий вид:

$$G(p) \left\{ \hat{p} - M_1 - \frac{g_1^2}{\pi i} \int \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) \tau_\nu \gamma_5 D_{\mu\nu}(k) d^4k \right\} = 1, \quad (7.1)$$

$$D_{\mu\tau}(k) \left\{ (k^2 - \mu_1^2) \delta_{\tau\nu} + \frac{g_1^2}{\pi i} \text{Sp} \left[ \int G(p) \Gamma_\tau(p, p-k; k) G(p-k) \tau_\nu \gamma_5 d^4p \right] \right\} = \delta_{\mu\nu}, \quad (7.2)$$

$$\Gamma_\sigma(p, p-l; l) = \gamma_5 \tau_\sigma + \frac{g_1^2}{\pi i} \int \Gamma_\mu(p, p-k; k) G(p-k) \times \\ \times \Gamma_\sigma(p-k, p-k-l; l) G(p-k-l) \times \\ \times \Gamma_\nu(p-k-l, p-l; k) D_{\mu\nu}(k) d^4k. \quad (7.3)$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0$  ( $\gamma_{1,2,3} = \beta\alpha_{1,2,3}$ ,  $\gamma_0 = \beta$ );  $M_1$ ,  $\mu_1$  представляют собой голые массы нуклона и мезона,  $g_1$  — голую константу связи, зависящую от предела обрезания. Греческие индексы обозначают здесь компоненты в изотопическом пространстве,  $\tau_\mu$  являются операторами изотопического спина. Следует упомянуть также, что  $\text{Sp}$  в (7.2) распространяется как на изотопические, так и на дираковские матрицы.

Из уравнения (7.2) легко увидеть, что  $D_{\mu\nu}(k) = \delta_{\mu\nu} D(k)$ . Это дает возможность исключить операторы  $\tau_\mu$  из уравнения, введя  $\Gamma_\mu = \tau_\mu \Gamma$ . После этого уравнения примут вид

$$\Gamma(p, p-l; l) = \gamma_5 - \frac{g_1^2}{\pi i} \int \Gamma(p, p-k; k) G(p-k) \Gamma(p-k, p-k-l; l) \times \\ \times G(p-k-l) \Gamma(p-k-l, p-l; k) D(k) d^4(k), \quad (7.4)$$

$$G(p) \left\{ \hat{p} - M_1 - \frac{3g_1^2}{\pi i} \int \Gamma(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_5 D(k) d^4k \right\} = 1, \quad (7.5)$$

$$D(k) \left\{ k^2 - \mu_1^2 + \frac{2g_1^2}{\pi i} \text{Sp} \left( \int G(p) \Gamma(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_5 d^4p \right) \right\} = 1, \quad (7.6)$$

где знак  $\text{Sp}$  относится к дираковским матрицам.



Найдем из этих уравнений асимптотический вид функций  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$ . Предположим, что для больших значений импульсов  $p \gg M$ ,  $k \gg M$  функции  $G(p)$  и  $D(k)$  имеют вид

$$G(p) = \frac{\beta(p^2)}{p - M(p^2)}, \quad D(k) = \frac{d(k^2)}{k^2}. \quad (7.7)$$

Хотя  $M(p^2) \ll p$ , функция  $M(p^2)$ , как и раньше, может быть вычислена, поскольку она является четной частью  $G^{-1}(p)$ . Что же касается функции  $\mu(k^2)$ , ее определение при нашем рассмотрении невозможно, так как ее нельзя отделить от гораздо большего  $k^2$ . Поэтому мы ограничимся для  $D(k)$  выражением (7.7).

Функция  $\Gamma$  в случае, когда  $p$ ,  $q$  и  $l$  одного и того же порядка или два из них много больше, чем третий, дается формулой  $\Gamma = \gamma_5 \alpha(f^2)$ , где  $f^2$  — наибольший из квадратов. Замечая, что интеграл в (7.4) является логарифмическим в области  $f^2 \ll k^2 \ll \infty$ , уравнение для  $\alpha$  можно записать в виде

$$\alpha(\xi) = 1 + \frac{g_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^L d(z) \alpha^3(z) \beta^2(z) dz, \quad (7.8)$$

где  $\xi = \ln(-p^2/M^2)$ ,  $L = \ln(-\Lambda^2/M^2)$ ;  $\Lambda$  представляет собой импульс, соответствующий радиусу размазывания.

В соответствии с тем, что подынтегральное выражение в уравнении (7.5) содержит  $k^3$  в знаменателе, в  $G$  и  $\Gamma$  следует учесть члены первого порядка по  $p/k$ . Такие члены в  $G$  возникают непосредственно из формулы (7.7), а в  $\Gamma$  — из уравнения (7.4).

Найдя изменения, возникающие в результате этого от  $G(p-k)$  в интеграле в уравнении (7.4), можно убедиться, что добавка к  $\Gamma$  должна иметь вид

$$\alpha^3(l^2) \beta(l^2) \left( \frac{\hat{p} \hat{l}}{l^2} \Delta_1(p^2, l^2) + \frac{\hat{l} M}{l^2} \Delta_2(p^2, l^2) \right) \gamma_5. \quad (7.9)$$

Здесь новый член в скобках принадлежит к четной части  $\Gamma$ , а второй — к нечетной. Приравнявая четную и нечетную части уравнения (7.4), находим уравнения для  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ :

$$\begin{aligned} \Delta_1(\xi, \eta) = \frac{g_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha^2(z) \beta^2(z) d(z) \Delta_1(\xi, z) dz - \\ - \frac{g_1^2}{8\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha(z) \beta(z) d(z) dz, \quad (7.10) \end{aligned}$$

$$\Delta_2(\xi, \eta) = \frac{g_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha^2(z) \beta^2(z) d(z) \Delta_2(\xi, z) dz - \\ - \frac{g_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha(z) \beta(z) d(z) dz, \quad (7.11)$$

где  $\xi = \ln(-p^2/M^2)$ ,  $\eta = \ln(-l^2/M^2)$ .

Подставляя формулу (7.9) в уравнение (7.5), мы замечаем, что в нем появляются те же самые интегралы, что и в формулах (7.10) и (7.11), но с пределом  $L$ , т. е. соответственно  $\Delta_1(\xi, L)$  и  $\Delta_2(\xi, L)$ . Отделяя в выведенном уравнении четную и нечетную части, получим два уравнения:

$$\frac{1}{\beta(\xi)} = 1 - 3\Delta_1(\xi, L), \quad (7.12)$$

$$\frac{M(\xi)}{\beta(\xi)} = M_1 + 3\Delta_2(\xi, L). \quad (7.13)$$

Полученные уравнения (7.8) и (7.10) — (7.13) не образуют замкнутой системы, поскольку они содержат величину  $d(\xi)$ , уравнение для которой еще не написано. Тем не менее полученные уравнения можно использовать для нахождения связи между функциями  $\alpha(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$  и  $M(\xi)$ .

Дифференцируя (7.9), получим

$$\frac{d\alpha(\xi)}{d\xi} = -\frac{g_1^2}{4\pi} \alpha^2(\xi) \beta^2(\xi) d(\xi). \quad (7.14)$$

Введя новые переменные  $\tau_1(\xi, \eta) = \alpha(\eta) \Delta_1(\xi, \eta)$  и  $\tau_2(\xi, \eta) = \alpha(\eta) \Delta_2(\xi, \eta)$ , дифференцируя уравнения (7.10) и (7.11) и используя уравнение (7.14), имеем

$$\frac{\partial \tau_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{g_1^2}{8\pi} \alpha^3(\eta) \beta(\eta) d(\eta), \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial \tau_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{g_1^2}{8\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) d(\eta) M(\eta). \quad (7.16)$$

Согласно (7.10) и (7.11)  $\tau_1(\xi, \eta)$  и  $\tau_2(\xi, \eta)$  должны обращаться в нуль при  $\xi = \eta$ , т. е. они имеют вид интегралов от  $\xi$  до  $\eta$ . Поэтому  $\partial \tau_1(\xi, \eta)/\partial \xi$  и  $\partial \tau_2(\xi, \eta)/\partial \xi$  представляются правыми частями уравнений (7.15) и (7.16), взятыми с обратным знаком, с переменной  $\xi$  вместо  $\eta$ . Дифференцируя уравнения (7.12) и (7.13) по  $\xi$  и подставляя выражения для производных от  $\Delta$  ( $\Delta_{1,2}(\xi, L) = \tau_{1,2}(\xi, L)$ ),

вследствие того, что  $\alpha(L) = 1$ , получаем

$$\frac{d\beta(\xi)}{d\xi} = \frac{3g_1^2}{8\pi} \alpha^2(\xi) \beta^3(\xi) d(\xi), \quad (7.17)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{M(\xi)}{\beta(\xi)} \right) = -\frac{3g_1^2}{4\pi} \alpha^2(\xi) \beta(\xi) d(\xi) M(\xi). \quad (7.18)$$

Сравнивая уравнения (7.17) и (7.14) и вспоминая, что согласно (7.12)  $\beta(L) = 1$ , получаем

$$\alpha(\xi) = [\beta(\xi)]^{-1/2}, \quad (7.19)$$

$$\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{3g_1^2}{8\pi} [\beta(\xi)]^{3/2} d(\xi). \quad (7.20)$$

Сравнивая уравнения (7.17) и (7.18) и принимая во внимание, что согласно (7.13)  $M(L) = M_1$ , получаем

$$M(\xi) = \frac{M_1}{\beta(\xi)}. \quad (7.21)$$

Найдем теперь уравнение для  $d(\xi)$ . С этой целью рассмотрим уравнение (7.6). Легко убедиться, что подынтегральное выражение содержит  $p^2$  в знаменателе. Необходимо поэтому принять во внимание члены вплоть до порядка  $k^2/p^2$ , возникающие при разложении подынтегрального выражения. При этом члены нулевого порядка дадут квадратично расходящийся интеграл, который не зависит от  $k$  и может быть включен в собственную массу мезона.

Члены порядка  $k^2/p^2$  в  $G(p-k)$  получают непосредственно при помощи разложения (7.7). Что же касается добавки, происходящей от  $\Gamma$ , то она получается из уравнения (7.4), в котором следует сделать замену переменной  $k' = p - k$ . Находя изменение интеграла, происходящее от добавки к  $G$ , мы заключаем, что добавка к  $\Gamma$  должна иметь вид

$$\frac{l^2}{p^2} \alpha^2(p^2) d(p^2) \Delta(p^2, l^2). \quad (7.22)$$

Проведя дальнейшие вычисления в согласии с процедурой, описанной выше, приходим к соотношению

$$d(\eta) = [\beta(\eta)]^{1/2}. \quad (7.23)$$

Подставляя (7.23) в уравнение (7.20) и принимая во внимание, что  $\beta(L) = 1$ , получаем

$$\beta(p^2) = \left[ 1 + \frac{5g_1^2}{4\pi} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{-p^2} \right) \right]^{-1/2}. \quad (7.24)$$

Функции  $\alpha(p^2)$  и  $d(p^2)$  получаются из (7.19) и (7.23):

$$\alpha(p^2) = \left[ 1 + \frac{5g_1^2}{4\pi} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{-p^2} \right) \right]^{1/2}, \quad (7.25)$$

$$\alpha(p^2) = \left[ 1 + \frac{5g_1^2}{4\pi} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{-p^2} \right) \right]^{-1/2}. \quad (7.26)$$

Рассмотрев теперь какой-либо частный процесс (например, комптон-эффект), мы приходим к выводу, что  $g_1^2 \alpha^2(0) \beta^2(0) d(0)$  играет роль физической константы связи  $g^2$ , т. е.

$$g^2 = \frac{g_1^2}{1 + \frac{5g_1^2}{4\pi} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{-p^2} \right)}, \quad g_1^2 = \frac{g^2}{1 - \frac{5g^2}{4\pi} \ln \left( \frac{\Lambda}{M^2} \right)}. \quad (7.27)$$

Подставляя (7.24) в (7.21) и определяя физическую массу как  $M$  ( $\xi = 0$ ), находим

$$M_1 = M \left( \frac{g^2}{g_1^2} \right)^{1/2}. \quad (7.28)$$

Эти результаты близки к результатам, полученным в электродинамике. Как и в электродинамике, эффективная константа связи  $g_1^2$  возрастает с увеличением  $\Lambda$ . Таким образом, можно было бы сделать заключение, что при больших энергиях даже слабая связь становится сильной. Однако существуют определенные соображения, принадлежащие И. Я. Померанчуку, которые показывают, что и в этом случае ситуация, по существу, такая же, как и в электродинамике. Мы не будем здесь обсуждать этот вопрос более детально.

Стоит указать на следующую интересную особенность теории со слабой псевдоскалярной связью между мезонным и нуклонным полями. В. Б. Берестецкий рассмотрел заряженные нуклоны, взаимодействующие с электромагнитным полем и полем псевдоскалярных мезонов, в предположении, что константа связи мезонов с нуклонами, будучи гораздо больше, чем электрический заряд, в то же самое время мала по сравнению с единицей ( $e^2 \ll g^2 \ll 1$ ). Тогда он мог воспользоваться нашим методом вычислений. Оказалось, что асимптотическое выражение для гриновской функции фотона  $D_{\mu\nu}$  не зависит от константы связи  $g^2$ . Таким образом, слабое псевдоскалярное взаимодействие нуклонов с мезонами никак не влияет на гриновскую функцию фотона.

Опишем теперь кратко, как изменяются полученные выражения, если предположить, как это уже было сделано в электродина-

наиме, что пределы обрезания различаются по порядку величины. Пусть  $\Lambda_\psi$  представляет собой предел обрезания в дираковском токе, а  $\Lambda_\phi$  — во взаимодействии тока с мезонным полем (разумеется, должно быть  $\Lambda_\psi \gg \Lambda_\phi$ ). Тогда выражения для  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $d$  изменятся следующим образом:

$$\beta(p^2) = Q(p^2)^{-1/2}, \quad (7.29)$$

$$\alpha(p^2) = Q(p^2)^{1/2}, \quad (7.30)$$

$$d(p^2) = \frac{Q(p^2)^{-1/2}}{1 + \frac{g_1^2}{\pi} \ln\left(\frac{\Lambda_\phi^2}{\Lambda_\psi^2}\right)}, \quad (7.31)$$

где

$$Q(p^2) = 1 + \frac{5g_1^2}{4\pi} \frac{\ln\left(\frac{\Lambda_\phi^2}{-p^2}\right)}{1 + \frac{g_1^2}{\pi} \ln\left(\frac{\Lambda_\phi^2}{\Lambda_\psi^2}\right)} \quad (7.32)$$

при  $p^2 \ll \Lambda_\phi^2$  и

$$\beta(p^2) = d(p^2) = 1 \quad (7.33)$$

при  $p^2 \gg \Lambda_\phi^2$ .

Мы снова видим, что функция  $d$  претерпевает быстрое изменение вблизи  $p^2 \approx \Lambda_\phi^2$ .

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 497, 1954 (Собр. трудов, № 76).
- [2] В. В. Судаков. Дисс. Институт физических проблем АН СССР, 1954.
- [3] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 773, 9154 (Собр. трудов, № 77).
- [4] I. Ward. Phys. Rev., 78, 182, 1950.
- [5] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 1177, 1954 (Собр. трудов, № 78).
- [6] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 96, 261, 1954 (Собр. трудов, № 79).
- [7] А. А. Абрикосов. Дисс. Институт физических проблем АН СССР, 1955.
- [8] А. А. Абрикосов, А. Д. Галанин, И. М. Халатников. ДАН СССР, 97, 793, 1954.

Построена теория ферми-жидкости, основанная на представлении энергии возбуждений как функционала от функции распределения. Находится эффективная масса возбуждений, сжимаемость и магнитная восприимчивость ферми-жидкости. Получены выражения для потока импульса и потока энергии.

Как известно, в целом ряде случаев для рассмотрения системы ферми-частиц применяется модель ферми-газа, несмотря на то, что взаимодействие между частицами отнюдь не является слабым. Классическим примером могут служить электроны в металле. Такое состояние теории не удовлетворительно, так как остается неясным, какие свойства газовой модели отвечают действительности, а какие присущи только газу.

При этом надо иметь в виду, что речь идет об определенных свойствах энергетического спектра («спектр фермиевского типа»), для существования которых необходимо, но не достаточно, чтобы составляющие систему частицы подчинялись статистике Ферми, т. е. обладали полуцелым спином. Например, атомы дейтерия взаимодействуют таким образом, что образуют молекулы. В результате этого жидкий дейтерий обладает энергетическим спектром бозевского типа. Таким образом, наличие фермиевского энергетического спектра связано не только со свойствами частиц, но и со свойствами их взаимодействия.

Жидкость бозевского типа впервые была рассмотрена автором настоящей статьи применительно к свойствам гелия II. Из характера спектра такой жидкости следует, что всякая жидкость из бозе-частиц обязательно обладает сверхтекучестью. Обратная теорема о том, что жидкость, состоящая из ферми-частиц, не может быть сверхтекучей, согласно предыдущему в общем виде неверна.

### 1. Энергия как функционал от функции распределения

Если мы рассмотрим ферми-газ при температурах, низких по сравнению с температурой вырождения, и введем некоторое слабое взаимодействие между атомами этого газа, то, как известно, вероятность столкновения для данного атома, находящегося в фермиевской зоне размытия, пропорциональна не только интенсивности взаимодействия, но и квадрату температуры. Это показывает, что при заданной интенсивности взаимодействия «неопределенность импульсов», связанная с конечной длиной пробега, при низких температурах всегда мала, причем не только по сравнению с величиной самого импульса, но и по сравнению с шириной фермиевской зоны размытия, пропорциональной первой степени температуры.

В основе построения рассматриваемого типа спектра лежат предположение, что по мере постепенного «включения» взаимодействия между атомами, т. е. при переходе от газа к жидкости, классификация уровней остается неизменной. Роль частиц газа в этой классификации принимают на себя «элементарные возбуждения» («квазичастицы»), причем каждая из них обладает определенным импульсом. Они подчиняются статистике Ферми, а их число всегда совпадает с числом частиц в жидкости. «Квазичастицу» можно в известном смысле рассматривать как частицу, находящуюся в самосогласованном поле окружающих частиц. При наличии самосогласованного поля энергия частицы зависит от состояния окружающих частиц, а энергия всей системы уже не равна сумме энергий отдельных частиц и является функционалом от функции распределения.

Рассмотрим бесконечно малое изменение функции распределения квазичастиц  $n$ . Тогда мы можем записать изменение плотности энергии системы в виде

$$\delta E = \int \varepsilon \delta n d\tau, \quad (1)$$

где  $d\tau = dp_x dp_y dp_z / (2\pi\hbar)^3$ . Величина  $\varepsilon(p)$  является функциональной производной энергии по функции распределения. Она соответствует изменению энергии системы при добавлении одной квазичастицы с импульсом  $p$ , и ее можно рассматривать как функцию Гамильтона добавленной квазичастицы с заданным импульсом в самосогласованном поле.

Однако в формуле (1) не учтено то обстоятельство, что частицы имеют спин. Так как спин является квантовомеханической величиной, то он не может быть рассмотрен классическим способом, ввиду чего мы должны считать функцию распределения статистической матрицей в отношении спина и писать вместо формулы (1) следующее соотношение:

$$\delta E = \text{Sp}_\sigma \int \varepsilon \delta n d\tau, \quad (2)$$

где  $Sp_\sigma$  — шпур по спиновым состояниям. Величина  $\varepsilon$  в общем случае также является оператором, зависящим от операторов спина. Если мы имеем равновесную жидкость, не находящуюся во внешнем магнитном поле, то вследствие изотропии энергия не может зависеть от операторов спина. Мы ограничимся рассмотрением частиц с  $s = 1/2$ . Можно показать, что именно эта энергия  $\varepsilon$  входит в формулу распределения Ферми для квазичастиц. Действительно, энтропию жидкости разумно определить комбинаторным образом:

$$S = - Sp_\sigma \int \{n \ln n + (1 - n) \ln (1 - n)\} d\tau. \quad (3)$$

Из этой формулы путем варьирования при дополнительных условиях

$$\delta N = Sp_\sigma \int \delta n d\tau = 0, \quad \delta E = Sp_\sigma \int \varepsilon \delta n d\tau = 0,$$

можно получить распределение Ферми

$$n(\varepsilon) = [e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1]^{-1}. \quad (4)$$

Отметим, что  $\varepsilon$ , будучи функционалом от  $n$ , конечно, зависит и от температуры.

В соответствии с (4) теплоемкость ферми-жидкости при низких температурах будет пропорциональна температуре; она определяется той же формулой, что и для ферми-газа, с той лишь разницей, что вместо истинной массы  $m$  частиц в нее войдет эффективная масса квазичастицы, определяемая как

$$m^* = \left. \frac{p}{\partial \varepsilon / \partial p} \right|_{p=p_0}, \quad (5)$$

где  $p_0$  — граничный импульс ферми-распределения квазичастиц при абсолютном нуле.

Существенное значение для теории ферми-жидкости имеет не только  $\varepsilon(p)$  при заданном распределении, но и изменение  $\varepsilon$ , вызываемое изменением  $n$ :

$$\delta \varepsilon(p) = Sp_{\sigma'} \int f(p, p') \delta n' d\tau'. \quad (6)$$

Будучи второй вариационной производной, функция  $f$  симметрична относительно  $p$  и  $p'$ ; кроме того, она зависит от спинов.

Если основное распределение  $n$  изотропно, то функция  $f$  в общем случае содержит члены вида  $\varphi_{ik}(p, p') \sigma_i \sigma_k$ , где  $\sigma_i$  — операторы спина, а если взаимодействие является обменным, то только члены вида

$$\varphi(p, p') (\sigma \sigma').$$



Функцию  $f$  можно рассмотреть со следующей точки зрения. Число актов рассеяния квазичастиц в единице объема за единицу времени можно записать в виде

$$dW = \frac{2\pi}{\hbar} |F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)|^2 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) \times \\ \times n_1 n_2 (1 - n'_1) (1 - n'_2) d\tau_1 d\tau_2 d\tau'_1, \quad (7)$$

где предполагается выполненным закон сохранения импульса

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2.$$

Величина  $f$  есть не что иное, как  $-F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$ , т. е. амплитуда рассеяния на  $0^\circ$  (с обратным знаком). Вообще говоря, эта амплитуда комплексна, ее мнимая часть определяется полным эффективным поперечником рассеяния. Поскольку мы предполагаем, что реальные акты рассеяния маловероятны, то мнимой частью можно пренебречь.

## 2. Соотношение, вытекающее из принципа относительности Галилея

Если мы имеем дело с жидкостью, не находящейся во внешнем поле, то из принципа относительности Галилея следует, что импульс, приходящийся на единицу объема, должен быть равен плотности потока массы<sup>1</sup>. Поскольку скорость квазичастицы есть  $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ , а число квазичастиц совпадает с числом истинных частиц, имеем

$$\text{Sp}_\sigma \int \mathbf{p} n d\tau = \text{Sp}_\sigma \int m \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} n d\tau. \quad (8)$$

Ввиду этого должны равняться и вариационные производные по  $n$  от обеих частей этого соотношения. Это дает

$$\frac{1}{m} \text{Sp}_\sigma \int \mathbf{p} \delta n d\tau = \text{Sp}_\sigma \int \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} \delta n d\tau + \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n' n d\tau d\tau'.$$

Так как величина  $\delta n$  произвольна, то отсюда следует

$$\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} + \text{Sp}_{\sigma'} \int \frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}} n' d\tau' = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} - \text{Sp}_{\sigma'} \int f \frac{\partial n'}{\partial\mathbf{p}'} d\tau' \quad (9)$$

(слева подразумевается единичная матрица по спинам).

<sup>1</sup> Этот вывод не относится, в частности, к электронам в металле, поскольку для них  $\mathbf{p}$  не импульс, а квазиимпульс.

Если мы имеем дело с изотропным случаем, то достаточно, чтобы формула (9) имела место для шпуров, т. е.

$$\frac{p}{m} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} - \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int f \frac{\partial n'}{\partial p'} d\tau'. \quad (10)$$

Отметим, что эта формула определяет функцию  $\varepsilon$  через величину  $f$  с точностью до постоянной.

Рассмотрим соотношение (10) для импульсов, близких к границе распределения Ферми. При низких температурах функция  $\partial n/\partial p$  будет мало отличаться от  $\delta$ -функции. Ввиду этого в интеграле в (10) мы можем выполнить интегрирование по абсолютной величине импульса, оставляя лишь интегрирование по углу. Это дает следующее соотношение между истинной и эффективной массами:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*} + \frac{p_0}{2(2\pi\hbar)^3} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int f \cos \theta d\Omega. \quad (11)$$

Поскольку в этой формуле оба векторных аргумента в  $f$  соответствуют ферми-поверхности, то функция  $f$  зависит только от угла между ними.

### 3. Сжимаемость ферми-жидкости

Выразим сжимаемость (при абсолютном нуле) через более удобную для нас величину  $\partial\mu/\partial N$ . Для этого замечаем, что вследствие однородности химический потенциал  $\mu$  зависит лишь от отношения  $N/V$ . Следовательно, имеем

$$\frac{\partial\mu}{\partial N} = - \frac{V\partial\mu/\partial V}{N} = - \frac{V^2}{N} \frac{\partial p}{\partial V}. \quad (12)$$

Для квадрата скорости звука получаем

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial(mN/V)} = \frac{1}{m} \left( N \frac{\partial\mu}{\partial N} \right). \quad (13)$$

Таким образом, задача свелась к вычислению производной  $\partial\mu/\partial N$ . Поскольку  $\mu = \varepsilon(p_0) \equiv \varepsilon_0$ , изменение химического потенциала  $\delta\mu$ , происходящее вследствие изменения полного числа частиц  $\delta N$ , будет равно <sup>2</sup>

$$\delta\mu = \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int f \delta n' d\tau' + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial p_0} \delta p_0. \quad (14)$$

<sup>2</sup> Соотношение (14) получается в результате взятия  $\text{Sp}$  от аналогичного выражения, содержащего спинные операторы.

Второй член обязан тому, что при изменении  $\delta N$  граничный импульс  $p_0$  меняется на величину  $\delta p_0$ .

Для случая спина  $1/2$ ,  $\delta N$  и  $\delta p_0$  связаны соотношением

$$\delta N = \frac{8\pi p_0^2 \delta p_0 V}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (15)$$

В (14) под интегралом существенны значения функции лишь при близких к  $p_0$  значениях импульсов. Поэтому интегрирование по абсолютной величине  $p$  можно произвести, после чего получается

$$\text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int f \delta n' d\tau' = \frac{1}{8\pi V} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int f d\theta \delta N. \quad (16)$$

Из (14) с учетом (15) и (16) получаем

$$\frac{\partial \mu}{\partial N} = \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int \frac{f d\theta}{16\pi V} + \frac{(2\pi\hbar)^3}{8\pi p_0 m^* V}. \quad (17)$$

Воспользуемся теперь соотношением (11) и выразим в полученной формуле эффективную массу  $m^*$  через массу частиц  $m$ . Имеем

$$\frac{\partial \mu}{\partial N} = \frac{1}{16\pi V} \int \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} f (1 - \cos \theta) d\theta + \frac{(2\pi\hbar)^3}{8\pi p_0 m V}.$$

Далее, умножив полученное соотношение на  $\frac{N}{m} = \frac{1}{m} \frac{8\pi p_0^3 V}{3(2\pi\hbar)^3}$ , находим выражение для квадрата скорости звука

$$c^2 = \frac{p_0^2}{3m^2} + \frac{1}{6m} \left( \frac{p_0}{2\pi\hbar} \right)^3 \int \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} f (1 - \cos \theta) d\theta. \quad (18)$$

#### 4. Магнитная восприимчивость

Вычислим магнитную восприимчивость ферми-жидкости. Если система находится в магнитном поле  $H$ , то дополнительная энергия свободной частицы в этом поле равна  $\beta \sigma H$ . Кроме того, необходимо еще учесть тот факт, что в присутствии магнитного поля вид функции распределения также меняется. Следовательно, при вычислении магнитной восприимчивости необходимо иметь в виду, что

$$\delta \varepsilon = -\beta (\sigma H) + \text{Sp}_{\sigma'} \int f \delta n' d\tau', \quad (19)$$

т. е. нельзя пренебрегать влиянием члена  $s f$ . Запишем  $f$  в виде

$$f = \varphi + \psi(\sigma\sigma'), \quad (20)$$

где второй член учитывает обменное взаимодействие между частицами. Далее, при вычислении добавки  $\delta n$ , зависящей от поля, изменение химического потенциала  $\delta\mu$  можно не учитывать. Это изменение является величиной второго порядка малости по полю  $H$ , в то время как  $\delta\varepsilon$  — первого порядка по полю. Поэтому в формулу (19) можно подставить  $\delta n = (\partial n/\partial\varepsilon)\delta\varepsilon$ ; имеем

$$\delta\varepsilon = -\beta(\sigma H) + \text{Sp}_{\sigma'} \int f \frac{\partial n'}{\partial\varepsilon'} \delta\varepsilon' d\tau'. \quad (21)$$

Будем искать  $\delta\varepsilon$  в виде

$$\delta\varepsilon = -\gamma(\sigma H). \quad (22)$$

Величина  $\gamma$  определяется из формулы (21)<sup>3</sup>

$$\gamma = \beta + \frac{1}{2} \int \psi \frac{\partial n'}{\partial\varepsilon'} \gamma' d\tau'. \quad (23)$$

Учитывая  $\delta$ -образный характер  $\partial n/\partial\varepsilon$ , получаем отсюда

$$\gamma = \beta - \frac{1}{2} \overline{\psi_0} \gamma \left( \frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon} \right)_0. \quad (24)$$

Здесь индекс 0 указывает, что берутся значения всех функций при  $p = p_0$ ; черта сверху означает усреднение по углам. С другой стороны, восприимчивость определяется из формулы

$$\chi H = \beta \text{Sp} \int n \sigma d\tau$$

или

$$\chi H = -\beta \text{Sp} \int \frac{\partial n}{\partial\varepsilon} \gamma(H\sigma) \sigma d\tau = \frac{H}{2} \beta \gamma \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_0. \quad (25)$$

Отсюда окончательно получаем

$$\frac{1}{\chi} = \frac{2}{\beta \gamma_0 \left( \frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon} \right)_0} = \frac{2}{\beta^2 \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_0} \left( 1 + \frac{1}{2} \overline{\psi_0} \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_0 \right). \quad (26)$$

Далее,  $(d\tau/d\varepsilon)_0$  можно выразить через коэффициент  $\alpha$  в линейном законе теплоемкости. Таким путем находим

<sup>3</sup> При этом используются соотношения  $\text{Sp}_{\sigma'}(\sigma\sigma')\sigma = \frac{1}{3}\sigma \text{Sp}_{\sigma'}(\sigma'\sigma') = \frac{1}{2}\sigma$   
( $\sigma = 1/2 \times$  матрицы Паули).

$$\frac{1}{\chi} = \left( \frac{4\pi^2 k^2}{3\alpha} + \bar{\psi}_0 \right) \frac{1}{\beta^2}. \quad (27)$$

Отсюда видно, что в жидкости не существует связи между теплоемкостью и восприимчивостью, которая имеет место в газах. Член с  $\bar{\psi}_0$  учитывает обменное взаимодействие, существенное для жидкостей. Так, для  $\text{He}^3$  анализ экспериментальных данных [1] показывает, что  $\bar{\psi}_0$  отрицательна и составляет примерно  $2/3$  от первого члена.

### 5. Кинетическое уравнение

В отсутствие магнитного поля и при пренебрежении магнитным взаимодействием спин-орбита  $\varepsilon$  не зависит от оператора  $\sigma$ , и кинетическое уравнение в квазиклассическом приближении приобретает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = I(n). \quad (28)$$

Необходимость учета производных от энергии  $\varepsilon$  по координатам в отсутствие внешнего поля связана с тем, что  $\varepsilon$  является функционалом  $n$ , а функция распределения  $n$  зависит от координат.

Найдем выражение для потока импульса. Для этого умножим левую и правую части полученного уравнения на импульс  $p_i$  и проинтегрируем по всему фазовому объему. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Sp} \int p_i n d\tau + \text{Sp} \int p_i \left( \frac{\partial n}{\partial x_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} - \frac{\partial n}{\partial p_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) d\tau = \text{Sp} \int p_i I(n) d\tau. \quad (29)$$

Вследствие сохранения импульса при столкновениях правая часть полученного уравнения равна нулю, в левой же части после несложных преобразований получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_i n d\tau + \frac{\partial}{\partial x_k} \int p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} n d\tau - \int p_i \frac{\partial}{\partial p_k} \left( n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) d\tau = 0. \quad (30)$$

Наконец, преобразовав третий интеграл по частям, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_i n d\tau + \frac{\partial}{\partial x_k} \int p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} n d\tau + \int n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} d\tau = 0. \quad (31)$$

Интеграл  $\text{Sp} \int n (\partial \varepsilon / \partial x_i) d\tau$  можно представить в виде (см. (2))

$$\text{Sp} \int n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} d\tau = \text{Sp} \frac{\partial}{\partial x_i} \int n \varepsilon d\tau - \text{Sp} \int \varepsilon \frac{\partial n}{\partial x_i} d\tau = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \text{Sp} \int n \varepsilon d\tau - E \right].$$

Таким образом, окончательно имеем закон сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Sp} \int p_i n d\tau + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (32)$$

где тензор потока импульса

$$\Pi_{ik} = \text{Sp} \int p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} n d\tau + \delta_{ik} \left[ \text{Sp} \int n \varepsilon d\tau - E \right]. \quad (33)$$

Аналогичным путем получаем выражение для потока энергии. Умножаем левую и правую части кинетического уравнения (28) на  $\varepsilon$  и интегрируем по всему фазовому объему. Имеем

$$\text{Sp} \int \varepsilon \frac{\partial n}{\partial t} d\tau + \text{Sp} \int \varepsilon \left( \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \right) d\tau = \text{Sp} \int \varepsilon J(n) d\tau.$$

Вследствие сохранения энергии при соударениях правая часть полученного уравнения равна нулю, левая же часть без труда приводится к виду

$$\int \varepsilon \frac{\partial n}{\partial t} d\tau + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int n \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} d\tau = 0.$$

Учитывая (2), окончательно получаем

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div} \mathbf{Q} = 0, \quad (34)$$

где поток энергии

$$\mathbf{Q} = \text{Sp} \int n \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} d\tau. \quad (35)$$

При решении конкретных кинетических задач необходимо иметь в виду следующее обстоятельство. При таком решении мы обычно записываем функцию  $n$  в форме суммы равновесной функции  $n_0$  и добавки  $\delta n$ . При этом отклонение тензора потока импульса  $\Pi_{ik}$  и вектора потока энергии  $\mathbf{Q}$  от их равновесных значений будет происходить как за счет непосредственного изменения функции  $n$  на величину  $\delta n$ , так и за счет изменения  $\varepsilon$ , происходящего вследствие функциональной зависимости  $\varepsilon$  от  $n$  (2).

В заключение выражаю благодарность И. М. Халатникову и А. А. Абрикосову за полезную дискуссию.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Fairbank, W. Ard, G. Walters. Phys. Rev., 95, 566, 1954.

Исследованы различные типы волн, которые могут распространяться в ферми-жидкости как при абсолютном нуле, так и при отличных от нуля температурах. Рассмотрен вопрос о поглощении этих волн.

Настоящая статья посвящена исследованию распространения волн в ферми-жидкости исходя из развитой автором общей теории таких жидкостей [1]. Эти явления должны отличаться в ферми-жидкости большим своеобразием, связанным прежде всего с невозможностью распространения в ней при абсолютном нуле температуры обычных гидродинамических звуковых волн. Последнее обстоятельство очевидно уже из того, что длина пробега, а с ней и вязкость ферми-жидкости стремятся к бесконечности при  $T \rightarrow 0$ , в связи с чем неограниченно возрастает коэффициент поглощения звука.

Оказывается, однако, что в ферми-жидкости при абсолютном нуле могут распространяться другие волны, по своей природе существенно отличающиеся от обычного звука; мы будем называть их волнами «нулевого звука».

Впервые вопрос о колебаниях ферми-жидкости был рассмотрен Гольдманом [2] в применении к электронному газу с кулоновым взаимодействием между частицами. Задача же о газе незаряженных частиц, подобная рассматриваемой здесь для жидкости, впервые рассматривалась в работе Ю. Л. Климонтовича и В. П. Силина [3] и затем в ряде работ В. П. Силина [4—6]. При этом газ предполагался слабо идеальным с взаимодействием, удовлетворяющим условиям применимости теории возмущений.

## 1. Колебания ферми-жидкости при абсолютном нуле

Начнем с исследования тех колебаний при абсолютном нуле температуры, которые не затрагивают спиновых характеристик жидкости. Это значит, что от спиновых переменных не зависит не только равновесная функция распределения  $n_0$ , но и «возмущенная» функция

$$n = n_0 + \delta n(p). \quad (1)$$

При абсолютном нуле  $n_0$  представляет собой «ступенчатую» функцию, обрывающуюся у предельного импульса  $p = p_0$ <sup>1</sup>.

Энергия квазичастиц (элементарных возбуждений) является функционалом от  $n$ , т. е. вид функции  $\varepsilon(p)$  зависит от вида  $n(p)$ . Аналогично (1) напомним ее в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0(p) + \delta\varepsilon(p), \quad (2)$$

где функция  $\varepsilon_0(p)$  соответствует распределению  $n_0(p)$ . Величина же  $\delta\varepsilon$  связана с  $\delta n$  формулой вида (см. [1])

$$\delta\varepsilon(p) = \text{Sp}_{\sigma'} \int f(p, p') \delta n' d\tau', \quad d\tau = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (3)$$

Поскольку  $\delta n$  предполагается не зависящим от спиновой переменной, то операция  $\text{Sp}$  применяется только к амплитуде рассеяния  $f$ . Но скалярная функция  $\text{Sp}_{\sigma'} f$  может содержать оператор спина  $\sigma$  лишь в виде произведения ( $\sigma[\mathbf{p}\mathbf{p}']$ ) двух аксиальных векторов:  $\sigma$  и  $[\mathbf{p}\mathbf{p}']$  (выражения же, содержащие двойные произведения компонент  $\sigma$ , можно не рассматривать, так как для спина  $1/2$  они, как известно, сводятся к выражениям, содержащим  $\sigma$  в нулевой или первой степени). Но это произведение не инвариантно по отношению к изменению знака времени и потому не может войти в инвариантную величину  $\delta\varepsilon$ . Таким образом,  $\sigma$  выпадает вовсе, и  $\delta\varepsilon$  оказывается не зависящим от спиновой переменной.

Кинетическое уравнение для ферми-жидкости имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = I(n), \quad (4)$$

где  $I(n)$  — интеграл столкновений между квазичастицами. Число столкновений пропорционально квадрату ширины зоны размы-

<sup>1</sup> Во избежание излишнего усложнения исследования мы ограничимся простым и наиболее важным случаем энергетического спектра с областью заполнения, представляющей собой одну сплошную сферу радиуса  $p_0$ .



тости распределения, так что при абсолютном нуле  $I(n) = 0$ . Подставляя (1) и (2) в (4) и учитывая, что  $n_0$  и  $\varepsilon_0$  от  $\gamma$  не зависят, получим

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{r}} = 0,$$

а предполагая  $\delta n$  и  $\delta \varepsilon$  пропорциональными  $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ ,

$$(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) \delta n = \mathbf{k}\mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon, \quad (5)$$

где введена скорость квазичастиц  $\mathbf{v} = \partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}$ . Ввиду наличия в правой стороне этого уравнения  $\delta$ -образной функции  $\partial n_0 / \partial \varepsilon$ , фактически в нем фигурируют лишь значения всех величин, взятые у границы  $p = p_0$  (невозмущенного) фермиевского распределения. Введем удобное для дальнейшего новое обозначение:

$$F = \text{Sp}_{\sigma'} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\mathbf{p}}{d\varepsilon}. \quad (6)$$

Тогда (3) напишется в виде:

$$\delta \varepsilon = \iint \frac{1}{4\pi} F \delta n' d\varepsilon' d\omega'.$$

Быстро меняющейся с  $\varepsilon'$  функцией является здесь лишь  $\delta n'$ . Поэтому можно переписать это выражение в виде

$$\delta \varepsilon = \int \frac{1}{4\pi} F \mathbf{v}' d\omega', \quad (7)$$

где введена согласно

$$\mathbf{v}(\mathbf{n}) = \int \delta n(\mathbf{p}) d\varepsilon \quad (8)$$

функция  $\mathbf{v}$ , зависящая только от направления  $\mathbf{n}$  вектора  $\mathbf{p}$ , а функция  $F(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  берется на границе (невозмущенного) фермиевского распределения; при этом  $F$  зависит только от угла  $\chi$  между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ .

Заметим для дальнейшего, что полученное в [1] соотношение, связывающее истинную массу частиц  $m$  с эффективной массой квазичастиц  $m^*$ , при помощи функции  $F(\chi)$  напишется в виде

$$\overline{F \cos \chi} = \frac{m^*}{m} - 1, \quad (9)$$

где черта означает усреднение по направлениям (при выводе этого соотношения полагаем в (6)  $\varepsilon = p^2/2 m^*$ ). Уравнение же для скорости «обычного звука»  $c$  можно привести к виду

$$\overline{F} = 3mm^* \frac{c^2}{p_0^2} - 1. \quad (10)$$

Подставим (7) в уравнение (5) и проинтегрируем последнее по  $d\epsilon$ . Это дает

$$(kv - \omega)v = -kv \int \frac{1}{4\pi} Fv' d\omega'.$$

Выберем направление  $k$  в качестве полярной оси, и пусть углы  $\theta, \varphi$  определяют направление импульса  $p$  (и совпадающее с ним направление  $v$ ) относительно этой оси. Введя также скорость  $u = \omega/k$  распространения волн и обозначение  $\eta = u/v$ , напомним окончательно полученное уравнение в виде

$$(\eta - \cos\theta)v(\theta, \varphi) = \cos\theta \int \frac{1}{4\pi} F(\chi)v(\theta', \varphi') d\omega'. \quad (11)$$

Это интегральное уравнение определяет в принципе скорость распространения волн и вид функции  $v(\theta, \varphi)$  в них. Последняя имеет следующий наглядный смысл. Тот факт, что  $\delta n$  пропорционально (как это видно из (5)) производной  $\delta n_0/\delta \epsilon$ , означает, что изменение функции распределения при колебаниях сводится к деформации граничной фермиевской поверхности (сферы в невозмущенном распределении). Интеграл же (8) представляет собой величину смещения (в единицах энергии) этой поверхности в заданном направлении  $n$ .

Отметим сразу же, что из вида уравнения (11) следует, что вещественная (нас интересуют лишь незатухающие колебания) величина  $\eta$  должна превышать 1, т. е. скорость распространения волн удовлетворяет неравенству

$$u > v. \quad (12)$$

Исследуем в качестве примера случай, когда функция  $F(\chi)$  сводится к постоянной (обозначим ее  $F_0$ ). Интеграл в правой стороне уравнения (11) не зависит при этом от углов  $\theta, \varphi$ . Поэтому искомая функция  $v$  имеет вид (экспоненциальный множитель опускаем)

$$v = \frac{\text{const} \cdot \cos\theta}{\eta - \cos\theta}. \quad (13)$$

Граничная фермиевская поверхность приобретает форму поверхности вращения, вытянутой в направлении вперед по направлению распространения волны и сплюснутой в обратном направлении. Укажем для сравнения, что обычной звуковой волне соответствует функция  $v$  вида  $v = \text{const} \cdot \cos\theta$ , представляющая собой смещение фермиевской сферы как целого без изменения ее формы.

Для определения скорости  $u$  подставляем (13) в (11) и получаем

$$\frac{F_0}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\eta - \cos \theta} 2\pi \sin \theta d\theta = 1.$$

Произведя интегрирование, найдем следующее уравнение, определяющее в неявном виде скорость волны по заданной величине  $F_0$ :

$$\varphi(\eta) \equiv \frac{\eta}{2} \ln \frac{\eta+1}{\eta-1} - 1 = \frac{1}{F_0}. \quad (14)$$

Функция  $\varphi(\eta)$  монотонно убывает от  $+\infty$  до 0 при изменении  $\eta$  от 1 до  $\infty$ , оставаясь всегда положительной. Отсюда следует, что рассматриваемые волны могут существовать лишь при  $F_0 > 0$ . Поскольку функция  $F$  пропорциональна взятой с обратным знаком амплитуде рассеяния (на угол  $0^\circ$ ) квазичастиц друг на друга (см. [4]), то последняя должна быть отрицательной, что соответствует взаимному отталкиванию квазичастиц. Следует, однако, подчеркнуть, что этот вывод относится именно к случаю  $F = \text{const}$ . Если функция  $F(\chi)$  не сводится к постоянной (и в то же время не мала по сравнению с 1; см. ниже), то распространение нулевого звука, вообще говоря, возможно как при отталкивательном, так и при притягательном взаимодействии квазичастиц.

При  $\eta \rightarrow \infty$ :  $\varphi(\eta) \approx \frac{1}{3} \eta^2$ . Поэтому большим  $F_0$  соответствует  $\eta = \sqrt{F_0/3}$ . В обратном же случае  $F_0 \rightarrow 0$  мы найдем, что  $\eta$  стремится к 1 по закону

$$\eta - 1 \sim e^{-2/F_0}. \quad (15)$$

Последний случай имеет более общее значение: он соответствует нулевому звуку в почти идеальном ферми-газе при произвольном виде функции  $F(\chi)$ . Действительно, почти идеальному газу соответствует малая по абсолютной величине функция  $F$ . Из уравнения (11) видно, что при этом  $\eta$  будет близким к 1, а функция  $v$  будет заметно отлична от нуля лишь при малых углах  $\theta$ . На этом основании, интересуясь лишь этой областью углов, можно заменить в интеграле в правой стороне уравнения (11) функцию  $F$  ее значением при  $\chi = 0$  (при  $\theta \rightarrow 0$  и  $\theta' \rightarrow 0$  также и  $\chi \rightarrow 0$ ). В результате мы снова вернемся к формулам (13) и (15) с заменой константы  $F_0$  на  $F(0)$  (этот результат совпадает с полученным ранее В. П. Силиным [4]).

Отметим, что в слабо неидеальном ферми-газе скорость нулевого звука превышает скорость обычного звука в  $\sqrt{3}$  раз. Действительно, для первой имеем  $\eta \approx 1$ , т. е.  $u \approx v$ . Для скорости же

обычного звука из формулы (10), пренебрегая в ней членом  $\bar{F}$  и положив  $m^* \approx m$ , имеем  $c^2 \approx p_0^2/3m^2 = v^2/3$ .

В общем случае произвольной зависимости  $F(\chi)$  решение уравнения (11) неоднозначно. Оно в принципе допускает существование различных типов нулевого звука, отличающихся друг от друга угловой зависимостью их амплитуды  $v(\theta, \varphi)$  и распространяющихся с различными скоростями. При этом наряду с аксиально-симметрическими решениями  $v(\theta)$  могут существовать и асимметрические решения, в которых  $v$  содержит азимутальные множители  $e^{\pm im\varphi}$  ( $m$  — целое число).

Так, при функции  $F(\chi)$  вида

$$F = F_0 + F_1 \cos \chi = F_0 + F_1 (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi')) \quad (16)$$

могут существовать решения с  $v \propto e^{\pm i\varphi}$ . Действительно, подставляя (16) в (11) и проведя интегрирование по  $d\varphi'$  (предполагая при этом, что  $v = f(\theta) e^{i\varphi}$ ), получим

$$(\eta - \cos \theta) f = \frac{F_1}{4} \cos \theta \sin \theta \int_0^\pi \sin^2 \theta' f' d\theta'.$$

Отсюда

$$v = \text{const} \cdot \frac{\sin \theta \cos \theta}{\eta - \cos \theta} e^{i\varphi}. \quad (17)$$

Подставляя же это выражение обратно в уравнение, получим соотношение

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta \cos \theta}{\eta - \cos \theta} d\theta = \frac{4}{F_1}, \quad (18)$$

определяющее зависимость скорости распространения от  $F_1$ . Интеграл в левой стороне равенства является монотонно убывающей положительной функцией  $\eta$ . Поэтому его наибольшее возможное значение достигается при  $\eta = 1$ . Вычислив интеграл, мы найдем, что соответствующее (наименьшее допустимое) значение  $F$  есть 6. Таким образом, распространение асимметричной волны вида (17) возможно лишь при  $F_1 > 6$ .

Обращаясь к реально существующей ферми-жидкости — жидкому  $\text{He}^3$ , имеет смысл попытаться аппроксимировать неизвестную нам его функцию  $F(\chi)$  двухчленной формулой (16). Входящие в нее коэффициенты  $F_0$  и  $F_1$  можно определить при помощи формул

$$F_0 = \frac{3mm^*c^3}{p_0^2} - 1, \quad \frac{F_1}{3} = \frac{m^*}{m} - 1$$

(см. [9] и (10)), зная значения эффективной массы  $m^*$  и скорости обычного звука  $c$ . Первую можно извлечь из экспериментальных данных о температурной зависимости энтропии (в наиболее низкотемпературной области); из имеющихся в настоящее время данных [7] получается  $m^* = 1,43 m$  ( $m$  — масса атома  $\text{He}^3$ ). Для скорости же  $c$ , согласно данным Вальтерса и Фербанка [8] о сжимаемости жидкого  $\text{He}^3$ , имеем  $195 \text{ м/сек}$ . Наконец,  $p_0$  получается непосредственно из плотности жидкости:  $p_0/\hbar = 0,76 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}$ .

На основании приведенных данных получаем

$$F_0 = 5,4; \quad F_1 = 1,3. \quad (19)$$

Из этих значений можно сделать ориентировочное заключение о том, что в жидком  $\text{He}^3$  распространение асимметричного нулевого звука невозможно. Для симметричного же нулевого звука решение уравнения с функцией  $F(\chi)$  из (16) и (19)<sup>2</sup> приводит к значению  $\eta = 1,83$ , откуда для скорости волны:  $u = 1,83 v = 1,83 p_0/m^* = 206 \text{ м/сек}$ .

Возможность распространения волн в ферми-жидкости при абсолютном нуле означает, что ее энергетический спектр может автоматически содержать «бозевскую ветвь» в виде фононов с энергией  $\epsilon = \hbar v$ . Следует, однако, оговорить, что было бы неправильным вводить соответствующие этой ветви поправки в термодинамические величины ферми-жидкости, поскольку они содержат более высокие степени температуры ( $T^3$  в теплоемкости), чем отклонения от развитой в [1] приближенной теории.

## 2. Колебания ферми-жидкости при температурах выше нуля

При низких, но отличных от нуля температурах в ферми-жидкости происходят взаимные столкновения квазичастиц, причем число столкновений пропорционально  $T^2$ . Соответствующее же время релаксации (время свободного пробега)  $\tau \propto 1/T^2$ . Характер распространяющихся в жидкости волн существенно зависит от отношения между их частотой и обратным временем релаксации.

При  $\omega\tau \ll 1$  (что фактически эквивалентно условию малости длины пробега квазичастиц по сравнению с длиной волны  $\lambda$ ) столкновения успевают установить термодинамическое равновесие в каждом (малом по сравнению с  $\lambda$ ) элементе объема жидкости. Это значит, что мы имеем дело с обычными гидродинамическими звуковыми волнами, распространяющимися со скоростью  $c$ .

<sup>2</sup> Эти вычисления произведены А. А. Абрикосовым и И. М. Халатниковым.

Если же  $\omega\tau \gg 1$ , то, напротив, столкновения не играют существенной роли в процессе распространения колебания, и мы будем иметь рассмотренные в предыдущем разделе волны нулевого звука.

В обоих этих предельных случаях распространение волн сопровождается сравнительно слабым их поглощением. В промежуточной же области,  $\omega\tau \sim 1$ , поглощение весьма сильно и выделение различных типов волн как незатухающих процессов здесь невозможно.

Частотную и температурную зависимости коэффициента поглощения  $\gamma$  в области обычного звука легко получить при помощи известной формулы для поглощения звука (см., например, [9]), согласно которой  $\gamma$  пропорциональна квадрату частоты и коэффициенту вязкости<sup>3</sup>. Поскольку вязкость ферми-жидкости пропорциональна  $1/T^2$  [10], то мы находим, что

$$\gamma \propto \frac{\omega^2}{T^2} \quad \text{при} \quad \omega \ll \frac{1}{\tau}. \quad (20)$$

Поглощение в области нулевого звука существенно отличается по своему характеру от поглощения обычного звука. В последнем столкновения не могут привести к диссипации энергии «на фоне» распределения, измененного лишь звуковыми колебаниями как таковыми; это связано с упоминавшимся уже обстоятельством, что измененное таким образом распределение остается в каждом элементе объема жидкости термодинамически равновесным. Поэтому поглощение обычного звука связано с влиянием столкновений на самую функцию распределения.

В области же нулевого звука столкновения приводят к поглощению уже «на фоне» распределения, измененного лишь самими колебаниями, не являющегося в этом случае термодинамически равновесным (поскольку деформируется форма граничной фермиевской поверхности). Это изменение функции распределения не зависит от частоты, а потому не будет зависеть от частоты и коэффициент поглощения. Зависимость же  $\gamma$  от температуры определяется его пропорциональностью числу столкновений, т. е.

$$\gamma \propto T^2 \quad \text{при} \quad \frac{\kappa T}{\hbar} \gg \omega \gg \frac{1}{\tau}. \quad (21)$$

Верхний предел указанной здесь области применимости этой формулы определяется неравенством  $\hbar\omega \ll \kappa T$  ( $\kappa$  — постоянная Больцмана), допускающим классическое рассмотрение столкновений.

<sup>3</sup> Вклад же в  $\gamma$  со стороны второй вязкости и теплопроводности оказывается пропорциональным более высоким степеням  $T$  и потому не существен.

Напомним, что предполагающееся здесь неравенство  $\kappa T/\hbar \gg 1/\tau$ , т. е.  $\hbar/\tau \ll \kappa T$  (малость квантовой неопределенности энергии квазичастиц по сравнению с  $\kappa T$ ), заведомо должно иметь место, так как оно является условием применимости всей вообще развитой в [1] теории ферми-жидкости.

Определение же коэффициента поглощения нулевого звука в области частот  $\hbar\omega \lesssim \kappa T$  требует квантового рассмотрения. Соответствующие вычисления могут быть упрощены, если производить их таким образом, чтобы выразить искомый «квантовый» коэффициент поглощения через «классический» из (21).

Поглощение звуковых квантов  $\hbar\omega$  происходит при столкновениях квазичастиц. Если обозначить посредством  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и  $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2$  энергии квазичастиц до и после столкновения, то при заданной частоте  $\omega$  они связаны законом сохранения энергии  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \hbar\omega = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$ . Наряду с такими столкновениями надо учесть также и обратные столкновения, сопровождающиеся испусканием звуковых квантов. Учитывая известные свойства вероятности столкновения ферми-частиц, мы найдем, что полная скорость убывания числа звуковых квантов в результате столкновений дается выражением вида

$$\iiint \omega(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) \{n_1 n_2 (1 - n'_1)(1 - n'_2) - n'_1 n'_2 (1 - n_1)(1 - n_2)\} \times \\ \times \delta(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k}) \delta(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega) d\tau_1 d\tau_2 d\tau'_1 d\tau'_2. \quad (22)$$

$\delta$ -функции в подынтегральном выражении обеспечивают выполнение законов сохранения импульса и энергии.

В интеграле (22) существенны значения энергии лишь в области размытости распределения Ферми. В этой области сильно меняются в подынтегральном выражении лишь те множители, которые содержат  $n(\varepsilon)$ . Кроме того, следует учесть, что угловые интегралы в (22) практически не меняются при переходе от «классической» области  $\hbar\omega \ll \kappa T$  к «квантовой»  $\hbar\omega \gg \kappa T$ . Ввиду этого нам будет достаточно вычислить интеграл

$$J = \iiint \{n_1 n_2 (1 - n'_1)(1 - n'_2) - n'_1 n'_2 (1 - n_1)(1 - n_2)\} \times \\ \times \delta(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon'_1 d\varepsilon'_2,$$

взятый только по энергиям. Подставив сюда

$$n(\varepsilon) = [e^{(\varepsilon - \mu)/\kappa T} + 1]^{-1}$$

и введя обозначения

$$x = \frac{\varepsilon - \mu}{\kappa T}, \quad \xi = \frac{\hbar\omega}{\kappa T},$$

получим (опуская множитель  $T^3$ )

$$J = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - e^{-\xi}) \delta(x'_1 + x'_2 - x_1 - x_2 - \xi) dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)(1 + e^{-x'_1})(1 + e^{-x'_2})}.$$

Ввиду быстрой сходимости интеграла область интегрирования может, очевидно, быть распространена от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Для проведения интегрирования переходим к переменным  $x_1, x_2, y_1, y_2$ , где  $y = x - x'$ . Интегрирование по  $x_1$  и  $x_2$  производится элементарно и дает

$$\begin{aligned} J &= (1 - e^{-\xi}) \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(y_1 + y_2 + \xi) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)(1 + e^{-x_1 + y_1})(1 + e^{-x_2 + y_2})} = \\ &= (1 - e^{-\xi}) \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_1 y_2 \delta(y_1 + y_2 + \xi) dy_1 dy_2}{(1 - e^{y_1})(1 - e^{y_2})} = \\ &= -(1 - e^{-\xi}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(\xi + y) dy}{(e^y - 1)(e^{-y - \xi} - 1)} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(\xi + y) \left\{ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{e^{y + \xi} - 1} \right\} dy. \end{aligned}$$

Для вычисления получившейся разности двух расходящихся интегралов вводим предварительно конечный нижний предел  $-\Lambda$  и пишем

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y(\xi + y) dy}{e^y - 1} - \int_{-\Lambda + \xi}^{\infty} \frac{y(y - \xi) dy}{e^y - 1} = \\ &= 2\xi \int_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y dy}{e^y - 1} - \int_{-\Lambda + \xi}^{-\Lambda} \frac{y(y - \xi) dy}{e^y - 1}. \end{aligned}$$

Имея в виду перейти к пределу  $\Lambda \rightarrow \infty$ , во втором из стоящих здесь интегралов пренебрегаем  $e^y$  в знаменателе. Первый же переписываем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y dy}{e^y - 1} &= \int_0^{\infty} \frac{y dy}{e^y - 1} + \int_{-\Lambda}^0 \frac{y dy}{e^y - 1} = \frac{\pi^2}{6} + \int_{-\Lambda}^0 \left( \frac{y}{1 - e^{-y}} - y \right) dy = \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\Lambda} \frac{y dy}{e^y - 1} + \frac{\Lambda^2}{2}. \end{aligned}$$



Произведя сокращения и переходя после этого к  $\Lambda \rightarrow \infty$ , получим окончательно

$$J = \frac{2\xi\pi^2}{3} \left( 1 + \frac{\xi^2}{4\pi^2} \right).$$

Искомый коэффициент поглощения  $\gamma$  пропорционален  $J$ . Коэффициент пропорциональности между ними определяется тем, что при  $\xi \ll 1$  должно быть  $\gamma = \gamma_{\text{кл}}$ . Поэтому получаем окончательно

$$\gamma = \gamma_{\text{кл}} \left[ 1 + \left( \frac{\hbar\omega}{2\pi\kappa T} \right)^2 \right] \text{ при } \hbar\omega \gtrsim \kappa T. \quad (23)$$

Учитывая, что  $\gamma_{\text{кл}} \propto T^2$ , найдем, что в пределе больших частот

$$\gamma \propto \omega^2 \text{ при } \hbar\omega \gg \kappa T, \quad (24)$$

т. е. коэффициент поглощения снова становится пропорциональным квадрату частоты, но не зависит от температуры. Отметим, что переход от формулы для «малых» к формуле для «высоких» частот происходит при  $\hbar\omega \sim 2\pi\kappa T$  (а не  $\hbar\omega \sim \kappa T$ )<sup>4</sup>. Результат (24) относится, в частности, к нулевому звуку всех частот при абсолютном нуле температуры.

### 3. Спиновые волны в ферми-жидкости

Наряду с рассмотренными в разделе 1 волнами нулевого звука, не затрагивающими распределение спинов, в ферми-жидкости при абсолютном нуле могут распространяться также и волны других типов, которые можно назвать спиновыми<sup>5</sup>.

Будем обозначать в этом разделе посредством  $K$  функцию

$$K = f(p, p') \frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dp}{d\varepsilon}, \quad (25)$$

в которой не применяется операция Sp. При учете обменного взаимодействия между квазичастицами эта функция содержит член,

<sup>4</sup> Рассматривая частоты  $\omega \gg \kappa T/\hbar$ , мы в то же время предполагаем выполненным неравенство  $\hbar\omega \ll \kappa T_0$  ( $T_0$  — температура вырождения распределения Ферми). В противном случае в поглощении участвовали бы частицы из «глубины» распределения Ферми и вся развиваемая теория стала бы неприменимой.

<sup>5</sup> Уравнение для спиновых волн в слабо неидеальном ферми-газе рассматривалось В. П. Силиным [6].

пропорциональный произведению  $\sigma\sigma'$ , т. е. имеет вид [1]

$$K = \frac{F(x)}{2} + \frac{G(x)}{2} \sigma\sigma' \quad (26)$$

( $F$  совпадает с использованной выше функцией (6)).

Вместо уравнения (11) теперь будем иметь

$$(\eta - \cos \theta) v = \cos \theta \text{Sp}_{\sigma'} \int \frac{1}{4\pi} F v' d\omega'. \quad (27)$$

Наряду с рассмотренными ранее решениями  $v(n)$ , не зависящими от спина, это уравнение имеет также решение вида

$$v = \mu(n)\sigma. \quad (28)$$

Подставив (26) и (28) в (27), выполнив операцию  $\text{Sp}$  и сократив обе стороны уравнения на  $\sigma$ , получим

$$(\eta - \cos \theta) \mu = \cos \theta \int \frac{1}{16\pi} G \mu' d\omega'. \quad (29)$$

Мы видим, что для каждой из компонент вектора  $\mu$  получается уравнение, отличающееся от (11) лишь заменой  $F$  на  $G/4$ . Поэтому все дальнейшие вычисления раздела 1 могут быть непосредственно применены и к спиновым волнам.

У реального жидкого  $\text{He}^3$  из имеющихся экспериментальных данных по его магнитной восприимчивости можно определить лишь среднее значение  $\bar{G}$ , оказывающееся равным  $-1,9$ . Поскольку эта величина отрицательна, то (ввиду результатов раздела 2) вероятнее всего, что распространение спиновых волн в жидком  $\text{He}^3$  невозможно. Такой вывод, однако, ни в какой степени не является категорическим.

В заключение выражаю благодарность А. А. Абрикосову, Е. М. Лифшицу и И. М. Халатникову за полезную дискуссию.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 30, 1058, 1956 (Собр. трудов, № 87).
- [2] И. И. Гольдман. ЖЭТФ, 17, 681, 1947.
- [3] Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин. ЖЭТФ, 23, 151, 1952.
- [4] В. П. Силин. ЖЭТФ, 23, 641, 1952.
- [5] В. П. Силин. ЖЭТФ, 27, 269, 1954.
- [6] В. П. Силин. ЖЭТФ, 28, 749, 1955.
- [7] В. Абрахам, Д. Осборн, В. Уайнсток. Phys. Rev., 98, 551, 1955.
- [8] G. K. Walters, W. M. Fairbank. Phys. Rev., 103, 263, 1956.
- [9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, 2-е изд. М., 1954, § 77.
- [10] И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 20, 919, 1950.

ЖЭТФ, 32, 405, 1957

Как известно, свойства  $K$ -мезонов создали в современной теоретической физике трудное положение. Корреляции между мезонами при  $\tau$ -распаде ( $K^+ \rightarrow 2\pi^+ + \pi^-$ ) приводят к необходимости приписать  $K^+$ -мезонам состояние  $0^-$ . Такая система, однако, не может распасться на два  $\pi$ -мезона ( $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ ). Этот результат ставит нас перед дилеммой: либо считать, что имеются два различных  $K$ -мезона, либо что при распаде  $K$ -мезонов имеет место нарушение законов сохранения. В первом случае приходится объяснять равенство масс (с точностью до 2 электронных масс) и близость времен жизни, связанных с  $\theta$ - и  $\tau$ -распадами. Равенство масс  $K$ -мезонов можно пытаться объяснить наличием неизвестного нам свойства симметрии ядерных сил, переводящего  $\tau$ -мезон в  $\theta$ -мезон, как это было сделано Ли и Янгом [1]. При этом, однако, если считать, что распад с учетом нейтрино ( $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ ,  $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu + \pi^0$ ,  $K^+ \rightarrow e^+ + \nu + \pi^0$ ) происходит одинаково у частиц различной четности, надо ожидать отличия во временах жизни, связанного с различной частотой соответственно  $\tau$ - и  $\theta$ -распадов ( $\sim 8$  и  $\sim 25\%$ ). Это отличие должно составлять не менее 30—40% и противоречит последним экспериментальным данным [2].

Таким образом мы, по-видимому, должны прийти к выводу, что гипотеза двух различных  $K$ -мезонов противоречит эксперименту и остается лишь возможность допустить, что при  $K$ -распаде нарушаются принятые в настоящее время законы сохранения. Поскольку нет никаких оснований сомневаться в законе сохранения момента, дело идет о прямом нарушении закона сохранения четности.

На первый взгляд кажется, что несохранение четности означает асимметрию пространства по отношению к инверсии. Такая

асимметрия, учитывая полную изотропию пространства (сохранение момента), представляется более чем странной, и, на мой взгляд, простой отказ от сохранения четности поставил бы теоретическую физику в тяжелое положение. Я хотел бы обратить внимание на то, что из этого положения существует выход, заключающийся в следующем. Как мы знаем, в сильных взаимодействиях несомненно имеют место как закон сохранения четности, так и инвариантность относительно зарядового сопряжения. Предположим, что при слабых взаимодействиях оба эти закона сохранения не имеют места в отдельности. Однако имеет место инвариантность относительно совокупности обеих операций, которую мы назовем комбинированной инверсией. При комбинированной инверсии происходит одновременно пространственная инверсия и переход частиц в античастицы.

Инвариантность всех взаимодействий относительно комбинированной инверсии оставляет, как легко видеть, пространство полностью симметричным, асимметричными же оказываются электрические заряды. Эта асимметрия в такой же мере не затрагивает симметрии пространства, как ее не затрагивает существование химической стереоизомерии.

С другой стороны, у заряженных частиц не возникает никакого закона сохранения четности, так как оператор комбинированной инверсии не переводит заряженные частицы сами в себя.

Далее легко видеть, что все константы, характеризующие частицы и античастицы (массы, времена жизни), должны быть одинаковы, поскольку процессы, происходящие с частицами и античастицами, ввиду инвариантности относительно комбинированной инверсии отличаются друг от друга лишь инверсией в пространстве. Выражаясь наглядно,  $K^-$ -мезон есть  $K^+$ -мезон, отраженный в зеркале.

Истинно нейтральные частицы, т. е. частицы, тождественные со своими античастицами, переходят при комбинированной инверсии сами в себя. Поэтому для таких частиц комбинированная инверсия имеет характер обычной пространственной инверсии, и для таких частиц закон сохранения четности имеет место при всех взаимодействиях. Следует подчеркнуть, что сохраняющаяся четность есть произведение обычной четности и зарядовой четности этих частиц. Очевидно, что  $\pi^0$ -мезон есть в этом смысле нечетная частица,  $K_1^0$  ( $\theta^0$ )-мезон, распадающийся на  $2\pi$ -мезона, есть четная частица, а  $K^0$ , предсказанный Гелл-Манном и Пайсом [3] и недавно экспериментально обнаруженный [4], является нечетной частицей. У фотонов при комбинированной инверсии меняет знак магнитное поле и не меняет знака электрическое. Обычные четности электрических и магнитных мультиполей меняются при комбинированной инверсии на обратные. Можно легко показать,

что в изложенной схеме, несмотря на отсутствие обычной четности, частицы не могут иметь дипольных моментов.

Действительно единственный вектор, который можно образовать для покоящейся частицы из  $\psi$ -операторов, — это вектор ее спина, являющийся инверсионно четным и зарядово нечетным. Таким образом, он является нечетным по отношению к комбинированной инверсии и соответственно тому, что было сказано выше об электромагнитном поле, может определять собой только магнитный, а не электрический момент.

Как было показано Ли и Янгом [5]<sup>1</sup>, несохранение четности приводит к корреляциям в ряде процессов образования и распадов гиперонов. Можно показать, что инвариантность по отношению к комбинированной инверсии приводит к тому, что операторы слабого взаимодействия стоят в лагранжиане с действительными коэффициентами. Это обстоятельство, однако, не вносит изменений в качественную картину, получающуюся в общем случае несохранения четности. Поэтому предсказанная Ли и Янгом [5] асимметрия распада гиперонов по отношению к плоскости их рождения имеет место и в рассматриваемой схеме.

В заключение я хотел бы выразить глубокую благодарность Л. Окуню, Б. Иоффе, А. Рудику, из дискуссии с которыми возникла идея данной работы.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] T. Lee, C. Yang. Phys. Rev., 102, 290, 1956.
- [2] Proc. of Sixth Ann. Rochester conference, April, 1956.
- [3] M. Gell-Mann, A. Pais. Phys. Rev., 97, 1387, 1955.
- [4] K. Lardø, E. Booth, J. Impeduglia, L. Lederman, W. Chinovsky. Phys. Rev., 103, 1901, 1950.
- [5] T. Lee, G. Yang. Phys. Rev., 104, 254, 1956.

<sup>1</sup> Я хотел бы искренне поблагодарить авторов, любезно приславших рукопись своей статьи до ее напечатания.

Отказ от закона сохранения четности приводит к возможности существования новых свойств у нейтрино. Уравнение Дирака для случая равной нулю массы распадается на две пары не связанных друг с другом уравнений. Ограничиться одной из этих пар в обычной теории, как известно, невозможно, поскольку при инверсии обе пары уравнений переходят друг в друга. Если же требовать симметрии лишь относительно комбинированной инверсии [1], то имеется возможность считать, что нейтрино описывается только одной парой уравнений. В смысле обычной схемы это соответствует тому, что нейтрино всегда поляризовано только по (или только против) направлению движения. Антинейтрино соответственно поляризовано противоположным образом. Нейтрино в такой модели не является истинно нейтральной частицей, что, однако, вполне согласуется с необнаружением двойного  $\beta$ -распада и особенно с опытами по индуцированному  $\beta$ -распаду. Мы назовем такое нейтрино продольно поляризованным нейтрино или, сокращенно, продольным нейтрино.

В обычной теории масса нейтрино равна нулю, так сказать, «случайно». Поэтому рассмотрение нейтринных взаимодействий приводит автоматически к возникновению, хотя и ничтожной, массы покоя. Масса продольного нейтрино, наоборот, равна нулю автоматически, и это обстоятельство не может быть изменено никакими взаимодействиями.

Представление о продольных нейтрино существенно уменьшает число возможных типов операторов слабых взаимодействий. Рассмотрим распад  $\mu$ -мезона на электрон и два нейтрино. Напишем оператор взаимодействия, как это обычно делается, в виде произведения операторов, составленных из  $\psi$ -операторов

$\mu$ -мезона и электрона, с одной стороны, и  $\psi$ -операторов обоих нейтрино, — с другой стороны. Для продольного нейтрино из двух  $\psi$ -операторов можно составить только одну комбинацию — скаляр (скаляр по отношению к повороту, операция обычной инверсии к нему не применима). Тензорная комбинация, как известно, обращается в нуль у двух одинаковых операторов, подчиняющихся статистике Ферми. Из  $\mu$ -мезона и электрона можно при этом составить две комбинации — скалярную и псевдоскалярную (в обычном смысле слова).

Если при распаде  $\mu$ -мезона получается нейтрино и антинейтрино, ситуация меняется. В этом случае из операторов продольных нейтрино и антинейтрино можно составить только четырехмерный вектор. Из операторов же  $\mu$ -мезона и электрона можно составить две комбинации — вектор и псевдовектор. Таким образом, мы в обоих случаях, несмотря на отсутствие инвариантности относительно инверсии, имеем лишь по два возможных оператора взаимодействия.

Легко вычислить энергетический спектр электронов  $\mu$ -распада. Он оказывается полностью совпадающим с вычисленным Мишелем [2]. Случай двух нейтрино дает, таким образом, для константы  $\rho$  Мишеля  $\rho = 0$ , случай же нейтрино и антинейтрино дает  $\rho = 0,75$ . Первый вариант, по-видимому, противоречит эксперименту, а второй согласуется с данными [3, 4], которые дают  $\rho = 0,64 \pm 0,10$ .

Таким образом, эксперименты по  $\mu$ -распаду не противоречат представлению о продольном нейтрино и в этом случае приводят к однозначному результату, что при распаде  $\mu$ -мезона получаются нейтрино и антинейтрино.

Рассмотрим теперь распад  $\pi \rightarrow \mu + \nu$ . Ввиду отсутствия спина у  $\pi$ -мезонов мы должны составить в операторе этого распада из  $\psi$ -операторов  $\mu$  и  $\nu$  скалярное выражение. Это автоматически приводит к тому, что при продольности нейтрино  $\mu$ -мезоны при  $\pi \rightarrow \mu + \nu$ -распаде будут полностью поляризованы в направлении своего движения (или противоположном).

Как обратили внимание Ли и Янг [5], несохранение четности может приводить к корреляции между направлениями  $\mu$ -мезона и электрона при  $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ -распаде. Если исходить из предлагаемой схемы, то несложные вычисления приводят к следующему распределению вылетающих электронов по углам и энергиям:

$$\frac{dN}{N} = 2\varepsilon^2 [(3 - 2\varepsilon) + \lambda \cos \theta (2\varepsilon - 1)] d\varepsilon. \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon$  — отношение энергии электрона к максимальной возможной энергии,  $\theta$  — угол между направлениями движения  $\mu$ -мезона и электрона, а  $\lambda$  — константа, зависящая от соотношения между

векторной и псевдовекторной частями в комбинации  $\psi$ -операторов  $\mu$ -мезона и электрона, а именно:

$$\lambda = \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  — коэффициенты при соответствующих слагаемых, которые, согласно изложенному ранее [1], действительны. Ясно, что величина  $\lambda$  заключена в пределах от  $-1$  до  $1$ . Не исключена возможность, что в действительности  $\lambda$  равна нулю. Интегральное распределение электронов, очевидно, пропорционально  $(1 + \frac{1}{3}\lambda \cos \theta)$ , т. е. максимально возможная асимметрия вперед — назад равна двум. Отметим, что даже в случае заметно отличного от нуля значения  $\lambda$  наблюдение  $\mu \rightarrow e$  корреляции может оказаться крайне затруднительным благодаря деполяризации мезонов в связи с их замедлением и, в особенности (для  $\mu^+$ -мезонов), образованием мезония (системы  $\mu^+ + e^-$ ).

Рассмотрим теперь влияние продольности нейтрино на  $\beta$ -распад. Как известно из эксперимента, операторы  $\beta$ -распада представляются в виде суммы скалярного и тензорного вариантов. Можно показать, что в обоих вариантах возникает поляризация электронов в направлении их движения, равная  $v/c$  (или  $-v/c$ ) — отношению скорости электрона к скорости света. Электроны больших энергий будут, таким образом, полностью поляризованы в направлении движения.

*Примечание при корректуре.* В самое последнее время Ву, Амблер, Хайлард, Хопес и Худзон показали, что при  $\beta$ -распаде ориентированных ядер  $\text{Co}^{60}$  действительно нет зеркальной симметрии. Этим самым несохранение четности при  $\beta$ -распаде можно считать доказанным. Эксперименты Ву и других находятся в согласии с теорией продольных нейтрино, однако точность этих экспериментов, по-видимому, недостаточна для количественной проверки теории. Из опытов Ву и других следует, что направление спина нейтрино совпадает с направлением движения, а антинейтрино — противоположно движению.

Джарвин, Ледерман и Вейнрих наблюдали корреляцию при  $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ -распаде. Величина корреляции оказалась значительной, что соответствует, по-видимому, значению параметра  $\lambda$ , равному единице. Правда, зависимость корреляции от энергии, наблюдаемая в этой работе, не соответствует формуле (1). Трудно в настоящее время сказать, в какой мере это расхождение лежит за пределами точности эксперимента.

Я очень обязан проф. Ледерману, любезно приславшему рукописи обеих работ до их опубликования.



## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 32, 405, 1957 (Собр. трудов, № 89).
- [2] L. Michel. Proc. Phys. Soc., A63, 514, 1371, 1950.
- [3] C. P. Sargent, M. Rinehart, L. M. Lederman, K. C. Rogers. Phys. Rev., 99, 885, 1955.
- [4] A. Bonetti, R. Levi Setti, M. Panetti, G. Rossi, G. Tomasini. Nuovo. Cim., 111, 33, 1956.
- [5] T. Lee, C. Yang. Phys. Rev., 104, 254, 1956.

Совместно с Е. М. ЛИФШИЦЕМ

ЖЭТФ, 32, 618, 1957

Общая теория гидродинамических флуктуаций может быть построена путем введения в уравнения движения жидкости дополнительных «сторонних» членов, подобно тому как это было сделано С. М. Рытовым [1] для флуктуаций электромагнитного поля в сплошных средах путем введения соответствующих «сторонних полей» в уравнения Максвелла.

Введение таких дополнительных членов может быть осуществлено в различных эквивалентных формах, но наибольшие преимущества представляет такая форма, при которой флуктуации «сторонних величин» в различных точках жидкости не коррелированы друг с другом. Это достигается введением «стороннего тензора напряжений»  $s_{ik}$  в уравнение Навье — Стокса и вектора «стороннего теплового потока»  $\mathbf{g}$  в уравнение переноса тепла (уравнение же непрерывности остается неизменным). Система гидродинамических уравнений принимает тогда вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla) v_i = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \quad (2)$$

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \frac{1}{2} \sigma'_{ik} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \operatorname{div} \mathbf{q}, \quad (3)$$

$$\sigma'_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} + s_{ik}, \quad (4)$$

$$\mathbf{q} = - \kappa \nabla T + \mathbf{g} \quad (5)$$

(все обозначения совпадают с принятыми в нашей книге [2]). К этим уравнениям должны быть присоединены соотношения, определяющие средние значения произведений компонент  $s_{ik}$  и  $g_i$ . Сделаем это, предполагая сначала флуктуации классическими (т. е. их частоты  $\omega \ll kT / \hbar$ ), а вязкость и теплопроводность жидкости — не диспергирующими.

Скорость изменения полной энтропии жидкости  $S$  дается выражением (см. [2], § 49)

$$\dot{S} = \int \left\{ \frac{\sigma'_{ik}}{2T} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\mathbf{q} \nabla T}{T^2} \right\} dV. \quad (6)$$

Следуя общим правилам теории флуктуаций, изложенным в [3] § 117, 120, выберем в качестве фигурирующих в этой теории величин  $\hat{x}_a$  компоненты тензора  $\sigma_{ik}$  и вектора  $\mathbf{q}$ . Тогда из (6) видно, что роль соответствующих величин  $X_a$  будут играть

$$-\frac{1}{2T} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \Delta V \quad \text{и} \quad \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} \Delta V,$$

а формулы (4), (5) — роль соотношений  $\hat{x}_a = -\gamma_{ab} X_b + y_a$  (см. [3], § 120), причем величинами  $y_a$  являются  $s_{ik}$  и  $g_i$ . Коэффициенты  $\gamma_{ab}$  в этих соотношениях непосредственно определяют средние значения

$$\overline{y_a(t_1) y_b(t_2)} = k (\gamma_{ab} + \gamma_{ba}) \delta(t_1 - t_2).$$

Окончательные формулы имеют вид

$$\overline{s_{ik}(r_1, t_1) s_{lm}(r_2, t_2)} = 2kT [\eta (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) + \left( \zeta - \frac{2\eta}{3} \right) \delta_{ik} \delta_{lm}] \delta(r_2 - r_1) \delta(t_2 - t_1),$$

$$\overline{g_i(r_1, t_1) g_k(r_2, t_2)} = 2kT^2 \kappa \delta_{ik} \delta(r_2 - r_1) \delta(t_2 - t_1),$$

$$\overline{g_i(r_1, t_1) s_{lm}(r_2, t_2)} = 0. \quad (7)$$

Несущественное отличие, связанное с тем, что мы имеем здесь дело с непрерывным (значения в каждой точке жидкости), а не с дискретным рядом флуктуирующих величин (для которых сформулированы приведенные в [3] формулы), легко устранить формальным путем, разделив объем жидкости на малые, но конечные участки  $\Delta V$  и произведя переход к пределу  $\Delta V \rightarrow 0$  в окончательных формулах.

Если пользоваться спектральными компонентами флуктуирующих величин, определенными согласно

$$x_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt, \quad \overline{x^2} = \iint_{-\infty}^{\infty} \overline{x_{\omega} x_{\omega'}} d\omega d\omega',$$

то в формулах (7) множитель  $\delta(t_2 - t_1)$  заменяется на  $\delta(\omega + \omega')/2\pi$ .

Изложенные результаты без труда обобщаются на случай наличия дисперсии коэффициентов вязкости или теплопроводности и квантовости флуктуаций при помощи общей теории Каллена и др. в форме, изложенной в [4]. В выражениях для средних значений произведений спектральных компонент  $s_{ik}$  и  $g_i$  появляется лишний множитель  $(\hbar\omega/2kT) \operatorname{cth}(\hbar\omega/2kT)$ , а вместо величин  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\kappa$  должны стоять их вещественные части.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. М. Рытов. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. Изд-во АН СССР, 1953.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, 2-е изд. Гостехиздат, 1954.
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика, 3-е изд. Гостехиздат, 1951.
- [4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1959.

ЖЭТФ, 34, 262, 1958

При попытках применить разработанные в последние годы методы квантовой электродинамики для целей статистики возникает вопрос о свойствах, которыми будут при этом обладать основные фигурирующие в этих методах величины. Здесь будет показано, что можно вывести некоторое весьма общее соотношение для гриновской функции частиц  $G$ , определяемой известным образом как

$$G = -i \langle T \psi_1 \psi_2^+ \rangle, \quad (1)$$

где индексы 1 и 2 указывают, что  $\psi$ -операторы берутся в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ ;  $T$  — символ хронологизированного произведения, а усреднение производится по фактическому состоянию данной макроскопической системы. Хронологизация означает, как известно, что

$$\begin{aligned} G &= -i \langle \psi_1 \psi_2^+ \rangle \text{ при } t_1 > t_2, \\ G &= \mp i \langle \psi_2^+ \psi_1 \rangle \text{ при } t_1 < t_2, \end{aligned} \quad (2)$$

причем верхний и нижний знаки относятся соответственно к случаям статистики Бозе и Ферми.

Временная и пространственная зависимости матричных элементов оператора  $\psi$  даются формулами вида

$$\begin{aligned} \psi_{nm}(t, \mathbf{r}) &= \psi_{nm}^{(0)} \exp \{i(\omega_{nm}t - \mathbf{k}_{nm}\mathbf{r})\}, \\ \omega_{nm} &= \frac{E_n - E_m}{\hbar}, \quad \mathbf{k}_{nm} = \frac{\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_m}{\hbar}, \end{aligned}$$

где индексы  $n, m$  отмечают состояния замкнутой системы, а  $E$  и

$P$  — ее полная энергия и импульс. При этом по определению сопряженного оператора  $(\psi^+)_{mn} = (\psi_{nm})^*$ .

При помощи этих матричных элементов выражения (2) запишутся в виде

при  $t_1 > t_2$ :

$$G = -i \sum_m |\psi_{nm}^{(0)}|^2 \exp \{i\omega_{nm}t - ik_{nm}r\},$$

при  $t_1 < t_2$ :

$$G = \mp i \sum_m |\psi_{mn}^{(0)}|^2 \exp \{i\omega_{mn}t - ik_{mn}r\}, \quad (3)$$

где обозначено  $t = t_1 - t_2$ ,  $r = r_1 - r_2$ , а индекс  $n$  относится к заданному состоянию, по которому производится усреднение в (1) или (2).

Произведем теперь статистическое усреднение выражений (3) по распределению Гиббса. Согласно основным принципам статистики смысл этой операции сводится к тому, чтобы выразить величину  $G$  в виде функции температуры  $T$  и химического потенциала  $\mu$  вместо функции энергии  $E$  и числа частиц  $N$  в системе. Имеем

при  $t > 0$ :

$$G = -i \sum_{n,m} \exp \left\{ \frac{\Omega + \mu N_n - E_n}{T} \right\} |\psi_{nm}^{(0)}|^2 \exp \{i\omega_{nm}t + ik_{nm}r\}$$

(температура измеряется в энергетических единицах). Поскольку суммирование производится теперь по обоим индексам  $n$  и  $m$ , то в такой сумме можно менять обозначения этих индексов. Воспользуемся этой возможностью в выражении для  $G$  при  $t_1 < t_2$  и напишем

при  $t < 0$ :

$$\begin{aligned} G &= \mp i \sum_{n,m} \exp \left\{ \frac{\Omega + \mu N_m - E_m}{T} \right\} |\psi_{nm}^{(0)}|^2 \exp \{i\omega_{nm}t - ik_{nm}r\} = \\ &= \mp i \sum_{m,n} \exp \left\{ \frac{\Omega + \mu N_n - E_n}{T} \right\} \exp \left\{ \frac{\hbar\omega_{nm} + \mu}{T} \right\} |\psi_{nm}^{(0)}|^2 \times \\ &\quad \times \exp \{i\omega_{nm}t - ik_{nm}r\}. \end{aligned}$$

В последнем преобразовании учтено, что матричный элемент  $\psi_{nm}^{(0)}$  отличен от нуля лишь при  $N_m = N_n + 1$ .

Перейдем от пространственно-временного представления функции Грина к ее компонентам Фурье:

$$G(\omega, \mathbf{k}) = \iint G(t, \mathbf{r}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} dt d^3\mathbf{r}.$$

Интегрирование по пространству дает  $\delta$ -функции от  $\mathbf{k} - \mathbf{k}_{mn}$ . Интегрирование по  $dt$  надо производить отдельно по интервалам от  $-\infty$  до 0 и от 0 до  $+\infty$ , используя при этом известную формулу

$$\int_0^{\infty} e^{i\alpha x} dx = \pi \delta(\alpha) + \frac{i}{\alpha}.$$

В результате получим

$$G(\omega, \mathbf{k}) = -(2\pi)^3 \sum_{n,m} \exp\left\{\frac{\Omega + \mu N_n - E_n}{T}\right\} |\psi_{nm}^{(0)}|^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{mn}) \times \\ \times \left\{ i\pi \delta(\omega - \omega_{mn}) \left[ 1 \pm e^{(\mu - \hbar\omega_{mn})/T} \right] + \frac{1}{\omega_{mn} - \omega} \left[ 1 \mp e^{(\mu - \hbar\omega_{mn})/T} \right] \right\}. \quad (4)$$

Сравнивая между собой два члена, стоящих в фигурных скобках, мы видим, что между вещественной ( $G'$ ) и мнимой ( $G''$ ) частями гриновской функции существует определенное соотношение. В случае статистики Бозе оно гласит:

$$G'(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{th} \frac{\hbar x - \mu}{2T} \cdot \frac{G''(x, \mathbf{k})}{x - \omega} dx, \quad (5)$$

где интеграл берется в смысле главного значения. При этом всегда

$$G''(\omega, \mathbf{k}) < 0, \quad (6)$$

как это видно из той же формулы (4).

В случае же статистики Ферми

$$G'(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{cth} \frac{\hbar x - \mu}{2T} \cdot \frac{G''(x, \mathbf{k})}{x - \omega} dx, \quad (7)$$

причем знак  $G''(\omega, \mathbf{k})$  противоположен знаку разности  $\hbar\omega - \mu$  и обе эти величины одновременно проходят через нуль:

$$\frac{G''(\omega, \mathbf{k})}{\hbar\omega - \mu} < 0. \quad (8)$$

При температуре, равной нулю, формулы (5) и (7) переходят в

$$G'(\omega, \mathbf{k}) = \pm \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G''(x, \mathbf{k})}{x - \omega} dx, \quad (9)$$

где знак  $+$  относится к  $\hbar x > \mu$ , а знак  $-$  к  $\hbar x < \mu$ ,

Любопытно, что эти формулы показывают, что функция  $G$  не является аналитической функцией переменной  $\omega$ . Аналитическими же функциями (причем не имеющими особенностей в верхней полуплоскости) являются соответственно

$$G' + i \operatorname{th} \frac{\hbar\omega - \mu}{2T} \cdot G'' \text{ и } G' + i \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega - \mu}{2T} \cdot G''.$$

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*



Рассмотрены свойства рассеяния на угол  $0^\circ$  при столкновениях квазичастиц в ферми-жидкости. Показано, что амплитуда этого рассеяния существенно зависит от предела, к которому стремится отношение передачи импульса и энергии при столкновении, при их стремлении к нулю. Выяснено, какой из этих пределов связан с энергией взаимодействия квазичастиц, фигурирующей в ранее развитой автором общей теории ферми-жидкостей.

В предыдущих работах автора [1, 2] была разработана общая теория ферми-жидкостей<sup>1</sup>. Существенную роль в этой теории в качестве одной из характеристик свойств жидкости играет функция  $f(p, p')$ , определяющая энергию взаимодействия квазичастиц, т. е. вариацию энергии  $\varepsilon(p)$  квазичастиц при изменении их функции распределения:

$$\delta\varepsilon(p) = \text{Sp}_{p'} \int f(p, p') \delta n(p') d\tau' \quad (1)$$

(где  $d\tau = d^3p / (2\pi)^3$ ; здесь и ниже полагаем  $\hbar = 1$ ).

В [1] было указано, что функция  $f(p, p')$  определенным образом связана с амплитудой рассеяния квазичастиц в жидкости при их взаимных столкновениях. Однако данная в [1] формулировка этой связи, как выяснится в настоящей статье, не вполне точна.

<sup>1</sup> Во избежание недоразумений подчеркнем, что речь идет не просто о жидкости, состоящей из ферми-частиц, а предполагается также, что эта жидкость имеет энергетический спектр фермиевского типа, т. е. не является сверхтекучей.

Мы воспользуемся ниже методами, заимствованными из квантовой теории поля; эти методы, как известно, с успехом применялись в последнее время различными авторами к исследованию свойств квантовых систем многих частиц.

Основную роль в этих методах играют гриновская функция  $G$  и «вершинная часть»  $\Gamma$ . Напомним определения и основные свойства этих функций.

Функция  $G$  определяется как среднее значение по основному состоянию системы от хронологизированного произведения двух  $\psi$ -операторов:

$$G_{12} = -i \langle T (\psi_1 \psi_2^+) \rangle. \quad (2)$$

Индексы 1,2 обозначают совокупности значений трех координат и времени, а также спинового индекса. Ниже используется, как обычно, вместо пространственно-временного представления (2) фурье-разложение этой функции. При этом отличны от нуля лишь компоненты с совпадающими значениями двух импульсов и двух энергий (т. е. волновых векторов и частот):  $P_1 = P_2 \equiv P$ ; посредством  $P$  мы обозначаем «4-импульс», т. е. совокупность импульса  $p$  и энергии  $\epsilon$ . В отношении спиновых индексов (которые мы обозначаем ниже греческими буквами) фурье-компоненты

$$G_{\alpha\beta}(P) = \int G_{\alpha\beta}(X_1 - X_2) e^{-iP(X_1 - X_2)} d^4(X_1 - X_2)$$

пропорциональны  $\delta_{\alpha\beta}$ ; будем писать

$$G_{\alpha\beta}(P) = G(P) \delta_{\alpha\beta}. \quad (3)$$

Полюсы функции  $G(P)$ , как известно, определяют энергию квазичастиц (элементарных возбуждений). Соответственно этому при  $p$ , близких к граничному импульсу  $p_0$ , и  $\epsilon$ , близком к граничной энергии  $\mu$ ,  $G(P)$  имеет вид

$$G(P) \rightarrow \frac{a}{\epsilon - \mu - v(p - p_0) + i\delta} \quad (4)$$

( $\mu$  — химический потенциал газа,  $v$  — скорость квазичастиц у границы Ферми). Это выражение имеет полюс при

$$\epsilon - \mu = v(p - p_0), \quad (5)$$

а малая постоянная  $\delta$  введена обычным образом для определения правила обхода особенности при интегрированиях; знак  $\delta$  совпадает со знаком  $\epsilon - \mu$  (или, что то же вблизи полюса, со знаком  $p - p_0$ ). «Перенормировочный» множитель  $a$  положителен и, как

было показано Мигдалом [3], меньше единицы:

$$a < 1. \quad (6)$$

Вершинная часть  $\Gamma$  определяется при помощи четырехчастичного среднего значения

$$\Phi_{1234} = \langle T (\psi_1 \psi_2 \psi_3^+ \psi_4^+) \rangle. \quad (7)$$

Фурье-компоненты этой функции содержат часть, выражающуюся через одни только функции  $G(P)$ , и остаток, дающий определение фурье-компонент вершинной части по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta,\gamma\delta}(P_1, P_2; P_3, P_4) = & (2\pi)^4 G(P_1)G(P_2) [\delta(P_1 - P_3)\delta(P_2 - P_4) \times \\ & \times \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta(P_1 - P_4)\delta(P_2 - P_3)\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}] + iG(P_1)G(P_2)G(P_3)G(P_4) \times \\ & \times \Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(P_1, P_2; P_3, P_4) (2\pi)^4 \delta(P_1 + P_2 - P_3 - P_4). \quad (8) \end{aligned}$$

При этом значения аргументов связаны соотношением

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4. \quad (9)$$

При перестановке индексов 1 и 2 (или 3 и 4) функция (7) меняет знак; из определения (8) поэтому следует, что  $\Gamma$  обладает свойством симметрии:

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(P_1, P_2; P_3, P_4) = -\Gamma_{\beta\alpha,\gamma\delta}(P_2, P_1; P_3, P_4). \quad (10)$$

В образовании вершинной части фигурируют промежуточные состояния, отвечающие различным значениям полного числа частиц в системе: с неизменным числом  $N$  и с числами  $N \pm 2$ . Последние возникают при такой, например, последовательности  $\psi$ -операторов в  $T$ -произведении, как  $\psi_1 \psi_2 \psi_3^+ \psi_4^+$ ; первые же отвечают таким последовательностям, как, например,  $\psi_1 \psi_3^+ \psi_2 \psi_4^+$ . Соответственно этому вклады в функцию  $\Gamma$ , обязанные этим промежуточным состояниям, имеют различный характер в отношении своих особенностей. Именно, члены, связанные с состояниями, возникающими при добавлении или отнятии двух частиц, имеют особенности по переменным  $P_1 + P_2$ ; члены же, отвечающие промежуточным состояниям с неизменным числом частиц, имеют особенности по переменным  $P_1 - P_3$  или  $P_2 - P_4$ .

Вероятность рассеяния квазичастиц с переходом

$$P_1\alpha, P_2\beta \rightarrow P_3\gamma, P_4\delta \quad (11)$$

определяется через функцию  $\Gamma$  по формуле

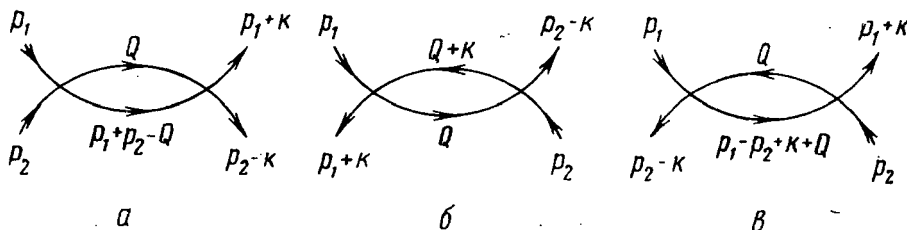
$$\begin{aligned} dW_{\alpha\beta,\gamma\delta}(P_1, P_2; P_3, P_4) = & 2\pi |a^2 \Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(P_1, P_2; P_3, P_4)|^2 \times \\ & \times \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) n_1 n_2 (1 - n_3) (1 - n_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (12) \end{aligned}$$

(где  $n_1, n_2, \dots$  — значения функции распределения для  $P_1\alpha, P_2\beta$  и т. д.,  $a$  — перенормировочная постоянная из (4)). Знак  $\Gamma$  определяется таким образом, что он соответствует положительной амплитуде рассеяния при отталкивании и отрицательной — при притяжении.

Ниже будем рассматривать функцию  $\Gamma$  при близких значениях пар переменных  $P_1, P_3$  и  $P_2, P_4$ , т. е. положим  $P_3 = P_1 + K, P_4 = P_2 - K$  с малым  $K$ , при этом будем писать

$$\Gamma(P_1, P_2; P_1 + K, P_2 - K) \equiv \Gamma(P_1, P_2; K). \quad (13)$$

В терминах процессов рассеяния (11) это значит, что рассматриваются столкновения квазичастиц, близкие к «рассеянию вперед».



В низшем порядке теории возмущений вклад в функцию  $\Gamma(P_1, P_2; K)$  дают диаграммы, изображенные на рисунке (а, б, в).

Внутренним частям этих диаграмм соответствуют следующие функции распространения:

$$\begin{aligned} \text{а) } & G(Q)G(P_1 + P_2 - Q), & \text{б) } & G(Q)G(K + Q), \\ \text{в) } & G(Q)G(P_1 - P_2 + K + Q), \end{aligned}$$

где  $Q$  — промежуточный 4-импульс, по которому производится интегрирование. При произвольных  $P_1$  и  $P_2$  для функций «а» и «в» значение  $K = 0$  ничем не выделяется, и при малых  $K$  в них можно положить  $K = 0$ . В случае же «б» при  $K \rightarrow 0$  полюсы обоих множителей сближаются, и потому диаграммы этого типа требуют специального рассмотрения.

Для вычисления  $\Gamma$  надо просуммировать весь ряд теории возмущений. Поскольку при этом наша цель состоит в выделении части, имеющей особенность при  $K = 0$ , надо прежде всего отделить вклад от всех диаграмм, не имеющих вовсе параллельных пар линий с близкими (отличающимися на  $K$ ) значениями 4-импульса. Эту часть функции  $\Gamma$ , не имеющую особенностей при  $K = 0$ , обозначим как  $\Gamma^{(1)}$ ; в ней можно просто положить  $K = 0$ , так

что  $\Gamma^{(1)}$  будет функцией лишь переменных  $P_1$  и  $P_2$ :  $\Gamma^{(1)} = \Gamma^{(1)}(P_1, P_2)$ . Весь ряд, подлежащий суммированию, можно символически записать в виде

$$(: \Gamma :) = (: \Gamma_1 :) + (: \Gamma_1 : \Gamma_1 :) + (: \Gamma_1 : \Gamma_1 : \Gamma_1 :) + \dots, \quad (14)$$

где двоеточия заменяют пары линий диаграмм с близкими значениями 4-импульса, а  $\Gamma_1$  обозначает совокупность всех возможных элементов диаграммы, не имеющих таких пар.

Задача о суммировании этого ряда (так называемое лестничное суммирование) сводится к решению интегрального уравнения, для получения которого «умножим» ряд (14) на  $\Gamma_1$ , т. е. заменим рядом

$$(: \Gamma_1 : \Gamma :) = (: \Gamma_1 : \Gamma_1 :) + (: \Gamma_1 : \Gamma_1 : \Gamma_1 :) + \dots$$

Сравнение с (14) приводит к равенству

$$(: \Gamma :) - (: \Gamma_1 :) = (: \Gamma_1 : \Gamma :),$$

которое, будучи записано в явной форме, представляет собой искомое интегральное уравнение

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(P_1, P_2; K) = \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(1)}(P_1, P_2) - \frac{i}{(2\pi)^4} \int \Gamma_{\alpha\epsilon, \gamma\zeta}^{(1)}(P_1, Q) G(Q) G(Q+K) \Gamma_{\zeta\beta, \epsilon\delta}(Q, P_2; K) d^4Q \quad (15)$$

(в первом множителе под знаком интеграла вместо аргумента  $Q$  должно, строго говоря, стоять  $Q + K$ ; однако ввиду отсутствия особенности у  $\Gamma^{(1)}$  здесь можно положить  $K = 0$ ). Для исследования этого уравнения рассмотрим стоящее в подынтегральном выражении произведение  $G(Q)G(Q+K)$ . При подстановке сюда  $G(P)$  в виде (4) получаем

$$\frac{a^2}{[e - \mu - v(q - p_0) + i\delta_1][e + \omega - \mu - v(|q + k| - p_0) + i\delta_2]} \cdot \quad (16)$$

Здесь  $e$  и  $q$  обозначают соответствующие 4-импульсу  $Q$  энергию и импульс, а  $e + \omega$  и  $q + k$  — энергию и импульс, соответствующие 4-импульсу  $Q + K$ .

При малых  $k$  и  $\omega$  выражение (16), как функция от  $e$  и  $q$ , близко к  $\delta$ -функциям аргументов  $e - \mu$  и  $q - p_0$ , т. е. имеет вид

$$A\delta(e - \mu)\delta(q - p_0), \quad (17)$$

где коэффициент  $A$  зависит от угла  $\theta$  между векторами  $k$  и  $q$ . Срав-

нивая (16) и (17), мы видим, что этот коэффициент определяется как интеграл

$$A = \iint \frac{a^2 d\varepsilon dq}{[\varepsilon - \mu - v(q - p_0) + i\delta_1][\varepsilon + \omega - \mu - v(|q + k| - p_0) + i\delta_2]}. \quad (18)$$

Произведем сначала интегрирование по  $d\varepsilon$ . Результат интегрирования существенно зависит от значения  $q$ . Если обе разности  $q - p_0$  и  $|q + k| - p_0$  имеют одинаковый знак, то одинаковый знак должен быть приписан также и величинам  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Полюсы подынтегрального выражения лежат тогда в одной полуплоскости комплексного переменного  $\varepsilon$ , и, замкнув путь интегрирования через другую полуплоскость, мы убедимся, что интеграл обращается в нуль. Таким образом, интеграл отличен от нуля лишь при противоположных знаках разностей  $q - p_0$  и  $|q + k| - p_0$ . Предположим сначала, что  $qk > 0$ , т. е.  $\cos \theta > 0$ . Тогда интеграл отличен от нуля при  $q < p_0$ ,  $|q + k| > p_0$ , что ввиду малости  $k$  эквивалентно условию

$$p_0 - k \cos \theta < q < p_0. \quad (19)$$

При этом величины  $\delta$  должны быть  $\delta_1 < 0$ ,  $\delta_2 > 0$ , так что два полюса подынтегрального выражения лежат в различных полуплоскостях. Замкнув путь интегрирования через одну из них и вычисляя интеграл по вычету в соответствующем полюсе, найдем

$$A = \int \frac{2\pi i a^3 dq}{\omega - v(|q + k| - q)}.$$

Поскольку  $q$  в силу (19) близко к  $p_0$  и меняется в интервале  $k \cos \theta$ , можно положить  $|q + k| - q \approx k \cos \theta$ , после чего

$$A = \frac{2\pi i a^3 k \cos \theta}{\omega - vk \cos \theta}.$$

Обратим внимание на особый характер этого выражения: его предел при  $k \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow 0$  зависит от предела, к которому стремится при этом отношение  $\omega/k$ . Легко показать тем же способом, что при  $\cos \theta < 0$  (когда интегрирование должно производиться по области  $q > p_0$ ,  $|q + k| < p_0$ ) для  $A(\theta)$  получается то же самое выражение. Таким образом, имеем

$$G(Q)G(Q + K) = \frac{2\pi i a^3 \mathbf{l}k}{\omega - v\mathbf{l}k} \delta(\varepsilon - \mu) \delta(q - p_0) + g(Q), \quad (20)$$

где написано  $\mathbf{l}k$  вместо  $k \cos \theta$  ( $\mathbf{l}$  — единичный вектор в направлении  $q$ ), а  $g(Q)$  не содержит (при малых  $K$ )  $\delta$ -функциональной части, и потому в ней можно положить  $K = 0$ ,

Подставив (20) в (15), получим основное интегральное уравнение в виде

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(P_1, P_2; K) = \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(1)}(P_1, P_2) - \\ - \frac{i}{(2\pi)^4} \int \Gamma_{\alpha\varepsilon, \gamma\zeta}^{(1)}(P_1, Q) g(Q) \Gamma_{\zeta\beta, \varepsilon\delta}(Q, P_2; K) d^4Q + \\ + \frac{a^2 P_0^2}{(2\pi)^3} \int \Gamma_{\alpha\varepsilon, \gamma\zeta}^{(1)}(P_1, Q) \Gamma_{\zeta\beta, \varepsilon\delta}(Q, P_2; K) \frac{lk}{\omega - v|k|} d\omega. \quad (21)$$

В последнем члене подставлено  $d^4Q = q^2 dq d\omega d\Omega$ , где  $d\Omega$  — элемент телесного угла в направлении  $l$ , и произведено интегрирование по  $dq d\omega d\Omega$  содержащихся в подынтегральном выражении  $\delta$ -функций. В этом члене в аргументах функций  $\Gamma^{(1)}$  и  $\Gamma Q$  берется на поверхности Ферми, т. е. представляет собой совокупность импульса  $q = p_0 l$  и постоянной энергии  $\mu$ .

Ввиду отмеченного выше особого характера ядра интегрального уравнения таким же характером обладает и его решение: предел функции  $\Gamma(P_1, P_2; K)$  при  $K \rightarrow 0$  зависит от способа стремления к нулю  $k$  и  $\omega$ , т. е. от предела отношения  $\omega/k$ .

Обозначим посредством  $\Gamma^\omega(P_1, P_2)$  предел

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^\omega(P_1, P_2) = \lim_{K \rightarrow 0} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(P_1, P_2; K) \text{ при } \frac{k}{\omega} \rightarrow 0 \quad (22)$$

(мы увидим ниже, что именно с этой величиной связана функция  $f(p, p')$  в (1)). При таком способе перехода к пределу ядро последнего члена в (21) обращается в нуль, так что  $\Gamma^\omega$  удовлетворяет уравнению

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^\omega(P_1, P_2) = \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(1)}(P_1, P_2) - \\ - \frac{i}{(2\pi)^4} \int \Gamma_{\alpha\varepsilon, \gamma\zeta}^{(1)}(P_1, Q) g(Q) \Gamma_{\zeta\beta, \varepsilon\delta}^\omega(Q, P_2) d^4Q. \quad (23)$$

Из двух уравнений (21) и (23) можно исключить  $\Gamma^{(1)}$ . Результат исключения:

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(P_1, P_2; K) = \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^\omega(P_1, P_2) + \\ + \frac{a^2 P_0^2}{(2\pi)^3} \int \Gamma_{\alpha\varepsilon, \gamma\zeta}^\omega(P_1, Q) \Gamma_{\zeta\beta, \varepsilon\delta}(Q, P_2; K) \frac{lk}{\omega - v|k|} d\omega. \quad (24)$$

Действительно, если формально записать (23) в виде

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(1)}(P_1, P_2) = \hat{L}\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{\omega}(P_1, P_2), \quad (25)$$

то (24) напишется как

$$\begin{aligned} \hat{L}\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(P_1, P_2; K) &= \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(1)}(P_1, P_2) + \\ &+ \frac{a^2 P_0^2}{(2\pi)^3} \int \Gamma_{\alpha\alpha, \gamma\zeta}^{(1)}(P_1, Q) \Gamma_{\zeta\beta, \varepsilon\delta}(Q, P_2; K) \frac{ik}{\omega - v|k} do; \end{aligned}$$

подставляя сюда (25) и применив затем к обеим сторонам равенства оператор  $\hat{L}^{-1}$ , получим (24).

Введем теперь функцию  $\Gamma^k$  согласно

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^k(P_1, P_2) = \lim_{K \rightarrow 0} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(P_1, P_2; K) \text{ при } \frac{\omega}{k} \rightarrow 0. \quad (26)$$

Эта функция (умноженная на перенормировочную постоянную  $a^2$ ) представляет собой амплитуду рассеяния «вперед» (т. е. перехода  $P_1, P_2 \rightarrow P_1, P_2$ ), отвечающую реальным физическим процессам, происходящим с квазичастицами на поверхности Ферми: столкновения, оставляющие квазичастицы на этой поверхности, сопровождаются изменением их импульса без изменения энергии, и потому переход к пределу равной нулю передачи импульса  $k$  должен производиться при строго равной нулю передаче энергии  $\omega$ . Введенная же выше функция  $\Gamma^{\omega}$  отвечает нефизическому предельному случаю «рассеяния» с малой передачей энергии при строго равной нулю передаче импульса.

Положив в (24)  $\omega = 0$ , перейдя к пределу  $K \rightarrow 0$  и умножив обе стороны равенства на  $a^2$ , получим

$$\begin{aligned} a^2 \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^k(P_1, P_2) &= a^2 \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{\omega}(P_1, P_2) - \\ &- \frac{P_0^2}{v(2\pi)^3} \int a^2 \Gamma_{\alpha\alpha, \gamma\zeta}^{\omega}(P_1, Q) \cdot a^2 \Gamma_{\zeta\beta, \varepsilon\delta}^k(Q, P_2) do. \quad (27) \end{aligned}$$

Таким образом, существует общее соотношение, связывающее обе предельные формы амплитуды рассеяния вперед.

Обратимся теперь к исследованию полюсов  $\Gamma(P_1, P_2; K)$  как функции от  $K$ . Как уже было указано в начале статьи, полюсы по переменной  $K = P_3 - P_1$  обязаны вкладываться в  $\Gamma$ , связанным с промежуточными состояниями без изменения числа частиц в системе. Поэтому эти полюсы соответствуют элементарным возбуждениям жидкости без изменения числа квазичастиц в ней. Очевидно, что это есть те возбуждения, которые могут быть описаны как звуковые возбуждения в газе квазичастиц (фононы «нулевого звука»).

Вблизи полюса функции  $\Gamma(P_1, P_2; K)$  левая сторона и интеграл



в правой стороне уравнения (24) сколь угодно велики; член же  $\Gamma^\omega(P_1, P_2)$  остается конечным и потому может быть опущен. Далее замечаем, что переменные  $P_2$ , а также индексы  $\beta$  и  $\delta$  не затрагиваются операциями, производимыми в уравнении (24) над функцией  $\Gamma$ , т. е. играют в нем роль параметров. Наконец, мы будем рассматривать  $\Gamma$  вблизи поверхности Ферми, т. е. будем считать входящую в состав  $P_1$  энергию квазичастицы равной  $\mu$ , а импульс равным  $p_0$ , т. е. будем писать его в виде  $p_0 \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  — переменный единичный вектор. Имея все это в виду, заключаем, что определение звуковых возбуждений в жидкости сводится к задаче о собственных значениях интегрального уравнения

$$\chi_{\alpha\gamma}(\mathbf{n}) = \frac{a^2 p_0^2}{(2\pi)^3} \int \Gamma_{\alpha\epsilon, \gamma\zeta}^\omega(\mathbf{n}, \mathbf{l}) \chi_{\zeta\epsilon}(\mathbf{l}) \frac{\mathbf{l}\mathbf{k}}{\omega - v\mathbf{l}\mathbf{k}} d\mathbf{o}, \quad (28)$$

где  $\chi_{\alpha\gamma}(\mathbf{n})$  — вспомогательная функция.

Преобразуем это уравнение, введя вместо  $\chi$  новую функцию, согласно

$$v_{\alpha\gamma}(\mathbf{n}) = \frac{\mathbf{n}\mathbf{k}}{\omega - v\mathbf{n}\mathbf{k}} \chi_{\alpha\gamma}(\mathbf{n}). \quad (29)$$

Тогда уравнение (28) примет вид

$$(\omega - v\mathbf{n}\mathbf{k}) v_{\alpha\gamma}(\mathbf{n}) = (\mathbf{k}\mathbf{n}) \frac{p_0^2 a^2}{(2\pi)^3} \int \Gamma_{\alpha\epsilon, \gamma\zeta}^\omega(\mathbf{n}, \mathbf{l}) v_{\zeta\epsilon}(\mathbf{l}) d\mathbf{o}. \quad (30)$$

Это уравнение по форме в точности совпадает с полученным в [2] уравнением (11) для функции распределения  $F$  в нулевом звуке, причем сравнение обоих уравнений (с учетом определения  $F$  по формуле (6) в [2]) приводит к следующему соответствию между функцией  $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ <sup>2</sup> и функцией  $\Gamma^\omega$ :

$$f_{\alpha\beta, \gamma\delta}(\mathbf{n}\mathbf{l}) = a^2 \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^\omega(\mathbf{n}, \mathbf{l}). \quad (31)$$

Тем самым выясняется искомая связь между  $f$  и свойствами рассеяния квазичастиц. Для ясности отметим, что четыре спиновых индекса у этой функции соответствуют тому, что  $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  (или, подробнее,  $f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma')$ ) зависит от операторов (двухрядных матриц) спинов  $\sigma$  и  $\sigma'$  двух частиц; при этом двум частицам (импульсы  $p_0 \mathbf{n}, p_0 \mathbf{l}$ ) соответствуют пары индексов  $\alpha, \gamma$  и  $\beta, \delta$  (в функции  $\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(P_1, P_2; P_3, P_4)$  эти пары соответствовали парам близких 4-импульсов  $P_1, P_3$  и  $P_2, P_4$ ).

<sup>2</sup> В [1, 2] мы не писали в явном виде спиновых индексов.

Выяснив таким образом связь функции  $f$  со свойствами рассеяния квазичастиц, вернемся снова к формуле (27) и получим с ее помощью явные соотношения между функцией  $f$  и «физической» амплитудой рассеяния на угол  $0^\circ$  на поверхности Ферми, которую обозначим как

$$A(\mathbf{n}_1, \sigma_1; \mathbf{n}_2, \sigma_2) = a^2 \Gamma^k(\mathbf{n}_1, \sigma_1; \mathbf{n}_2, \sigma_2). \quad (32)$$

Соотношение (27) на поверхности Ферми принимает вид

$$A(\mathbf{n}_1, \sigma_1; \mathbf{n}_2, \sigma_2) = f(\mathbf{n}_1, \sigma_1; \mathbf{n}_2, \sigma_2) - \frac{1}{4\pi} \frac{d\tau}{d\varepsilon} \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{n}_1, \sigma_1; \mathbf{n}', \sigma') A(\mathbf{n}', \sigma'; \mathbf{n}_2, \sigma_2) d\sigma' \quad (33)$$

(где  $d\tau/d\varepsilon = 4\pi p_0^2 / v (2\pi)^3$ ). Скалярные функции  $A$  и  $f$  зависят от всех скалярных комбинаций четырех векторов:  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \sigma_1, \sigma_2$ . Если, однако, взаимодействие между частицами является обменным, то единственными допустимыми скалярными произведениями являются  $\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2$  и  $\sigma_1 \sigma_2$ . Тогда можно разложить функции  $A$  и  $f$  от  $\cos \theta$  по полиномам Лежандра:

$$A(\cos \theta) = \sum_l A_l P_l(\cos \theta), \quad f(\cos \theta) = \sum_l f_l P_l(\cos \theta). \quad (34)$$

Подставив это в (33) и произведя интегрирование по  $d\sigma'$ , получим

$$A_l(\sigma_1, \sigma_2) = f_l(\sigma_1 \sigma_2) - \frac{1}{2l+1} \frac{d\tau}{d\varepsilon} \text{Sp}_{\sigma'} f_l(\sigma_1 \sigma') A_l(\sigma' \sigma_2). \quad (35)$$

Спиновая зависимость функции  $f$  сводится в случае обменного взаимодействия к члену, пропорциональному  $\sigma_1 \sigma_2$  (см. [1]), так что

$$f_l = \varphi_l + \psi_l \sigma_1 \sigma_2, \quad (36)$$

где  $\varphi_l, \psi_l$  от спинов не зависят. Соответственно этому полагаем также

$$A_l = B_l + C_l \sigma_1 \sigma_2. \quad (37)$$

Подставив (36) и (37) в (35), получим без труда

$$B_l = \varphi_l - \frac{2}{2l+1} \frac{d\tau}{d\varepsilon} B_l \varphi_l, \quad C_l = \psi_l - \frac{1}{2(2l+1)} \frac{d\tau}{d\varepsilon} C_l \psi_l. \quad (38)$$

Этими формулами устанавливается простая алгебраическая связь между коэффициентами разложения  $f$  и  $A$  по шаровым функциям.

Отметим, что связаны друг с другом только члены с одинаковыми  $l$  и что  $B$  связано только с  $\varphi$  и  $C$  только с  $\psi$ .

В заключение я хотел бы поблагодарить А. Б. Мигдала, обратившего мое внимание на зависимость амплитуды рассеяния вперед от отношения  $\omega/k$ , а также Е. М. Лифшица и Л. П. Горькова за обсуждение работы.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 30, 1058, 1956 (Собр. трудов, № 87).
- [2] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 32, 59, 1957 (Собр. трудов, № 88).
- [3] А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, 32, 399, 1957.

# О ВОЗМОЖНОСТИ ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРИИ СИЛЬНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ФЕРМИОНОВ

Совместно с А. А. АБРИКОСОВЫМ, А. Д. ГАЛАНИНЫМ,  
Л. П. ГОРЬКОВЫМ, И. Я. ПОМЕРАНЧУКОМ  
и К. А. ТЕР-МАТИРОСЯНОМ

Phys. Rev., 111, 321, 1958

Исследовано фермионное поле с плотностью лагранжиана взаимодействия  $g(\bar{\psi}O_j\psi)(\bar{\psi}O_i\psi)$ . Это точечное взаимодействие рассматривается как предел протяженного, которое предполагается исчезающим, если импульс частицы превышает  $\Lambda$  и (или) если передача импульса при столкновении двух частиц превосходит  $\lambda$ . Соотношение между  $\Lambda$  и  $\lambda$  таково, что величина  $\lambda^2/\ln(\Lambda/\lambda)$  становится сколь угодно малой при  $\lambda \rightarrow \infty$  и  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Такой выбор предельного перехода значительно упрощает исследование теории. Показано, что в пределе  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda \rightarrow \infty$  физическое взаимодействие между частицами исчезает во всех типах четырехфермионного взаимодействия. Рассмотрен также случай двух взаимодействующих полей  $\psi$  и  $\chi$  с различными изотопическими спинами. И в этом случае физическое взаимодействие исчезает при переходе к локальной теории.

Эти результаты показывают, что в рассмотренных случаях не может быть построена теория сильновзаимодействующих фермионов. Для слабого взаимодействия, хотя построение логически замкнутой теории и невозможно, существует (как в электродинамике) теория возмущений, применимая для достаточно малых энергий.

## 1. Введение

Переход к пределу точечного взаимодействия в электродинамике [1] или мезонной теории [2] приводит к затруднению, которое связано с обращением в нуль перенормированного заряда и исчезновением физического взаимодействия между частицами. Представляется интересным выяснить, можно ли обойти это затруднение, заменив взаимодействие типа Юкавы  $g_0(\bar{\psi}O_j\psi)\phi$  между фермионами и бозонами другими типами взаимодействия, такими, как взаимодействия между одними бозонами или между одними фермионами. Трудность, создаваемая исчезновением перенор-

мированного заряда, остается в случае системы бозонов, взаимодействие между которыми описывается оператором

$$\frac{g_0}{4!} \int \varphi^4(x) dv.$$

В этом случае зависимость  $g_c$  от  $g_0$  и  $\Lambda$  ( $\Lambda$  — импульс обрезания имеет вид [3] <sup>1</sup>

$$g_c = \frac{g_0}{1 + \frac{3}{2} g_0 \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}} \quad (1)$$

и  $g_c$  исчезает при  $\Lambda \rightarrow \infty$  и произвольной зависимости  $g_0$  от  $\Lambda$  при условии положительности  $g_0$ . Отрицательные значения  $g_0$  (для которых  $g_c$  может не обращаться в нуль в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$ ) вообще не допустимы, поскольку при  $g_0 < 0$  не существует стационарного состояния системы бозонов. В самом деле, для бозонных полей существует классический предельный случай, когда каждое состояние может содержать много частиц. При  $g_0 < 0$  энергия классического поля  $\varphi$

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right)^2 + \mu^2 \varphi^2 \right] + \frac{g_0}{4!} \varphi^4(x)$$

не является положительно определенной и может неограниченно убывать с ростом амплитуды поля  $\varphi$ . Физически это означает, что энергетически стало бы возможным порождение из вакуума бесконечного числа частиц. Следовательно, вакуум не может существовать при  $g_0 < 0$ .

Константа  $g_0$  во взаимодействии Ферми

$$V = 2\lambda^2 g_0 \int (\bar{\psi} O_j \psi) (\bar{\psi} O_j \psi) dv \quad (2)$$

(где  $O_j$  — операторы обыкновенного и изотопического спинов фермионов) может иметь любой знак, поскольку числа заполнения не могут превзойти единицу и стационарное состояние существует при произвольном знаке  $g_0$ . В данном случае включение взаимодействия приводит просто к перераспределению уровней с отрицательной и положительной энергиями. Новое стационарное состояние с минимальной энергией, которое возникает после того, как взаимодействие «включено», и является состоянием физического вакуума.

<sup>1</sup> Эта формула была выведена для  $g_0 < 1$ ; однако, если ввести два обрезывающих момента, можно показать, что она остается справедливой при произвольном положительном значении  $g_0$ .

Следовательно, если бы и в этом случае связь между  $g_c$  и  $g_0$  также определялась формулой, аналогичной (1), то перенормированный заряд не исчезал бы при  $g_0 < 0$ . Тогда мезонная теория могла бы строиться на основе взаимодействия (2) и мезоны с самого начала были бы похожи (в смысле схемы Ферми — Янга [4]) на нелокальные образования из фермионов.

В дальнейшем мы рассмотрим возможность построения теории такого рода <sup>2</sup>.

## 2. Уравнение для вершинного оператора

В случае, когда взаимодействие имеет такую же форму, что и (2), матричные элементы будут содержать квадратичные и линейные расходимости. Мы будем обрезать расходящиеся интегралы, предполагая, что взаимодействие (2) как-то «размазано». Будем считать, что взаимодействие в импульсном

представлении исчезает, если импульсы  $P$  и  $Q$ , направленные вдоль фермионных линий, как на рис. 1<sup>3</sup>, превосходят некоторый предельный импульс  $\Lambda$  или если импульс  $p$ , переданный от одной линии к другой, превосходит  $\lambda$ , где <sup>4</sup>  $\lambda \ll \Lambda$ . Для перехода к пределу точечного взаимодействия следовало бы положить  $\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ , считая соотношение между  $\Lambda$  и  $\lambda$  произвольным.

Если теория внутренне непротиворечива, можно ожидать, что результат предельного процесса не зависит от способа перехода. Последний, разумеется, не должен нарушать общих условий, необходимых в любой физически разумной теории, таких, как общие тео-

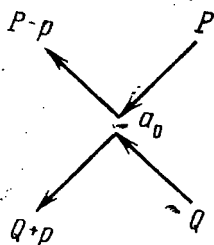


Рис. 1. Простейшая четырёхфермионная вершина

<sup>2</sup> Взаимодействие такого же типа, что и (2), обсуждалось в ряде статей; см., например, [5].

<sup>3</sup> Разрывы линий на рисунках означают, что большой импульс (превосходящий  $\lambda$ , но меньший, чем  $\Lambda$ ) не может быть передан в точке разрыва.

<sup>4</sup> Это соответствует написанию (2) с формфактором  $F_{\Lambda\lambda}$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(t) dt = 2\pi^2 g_0 \int (\bar{\psi}(x) O_j \psi(x')) (\bar{\psi}(y) O_j \psi(y')) F_{\Lambda\lambda}(x-x', y-y', x-y) \times \\ \times dx dx' dy dy',$$

в котором ширины распределения по отношению к  $x - x'$  и  $y - y'$  одинаковы и равны  $1/\Lambda$ , а ширина распределения по отношению к  $x - y$  равна  $1/\lambda$ .

ремы, касающиеся поведения гриновских функций [6], градиентной инвариантности и т. д. Мы ограничимся случаем предельного перехода, при котором  $\lambda/\Lambda$  остается сколь угодно малым, поскольку в этом случае анализ значительно упрощается.

Далее будет показано, что если считать  $g_0$ , вообще говоря, зависящим от пределов обрезания, то оказывается, что при любой форме этой зависимости точное решение в пределе точечного взаимодействия дает результат, соответствующий отсутствию физического взаимодействия между фермионами.

Из всех графиков, определяющих вершинный оператор  $\Gamma(P, Q, p)$  (у которого расположение импульсов соответствует изображенному на рис. 1), наибольший вклад дают те, для которых интегрирование по виртуальным импульсам происходит вдоль замкнутых петель (т. е. до  $\Lambda^2$ ) и степень расходимости которых максимальна. Такими графиками являются последовательности петель, показанные на рис. 2.

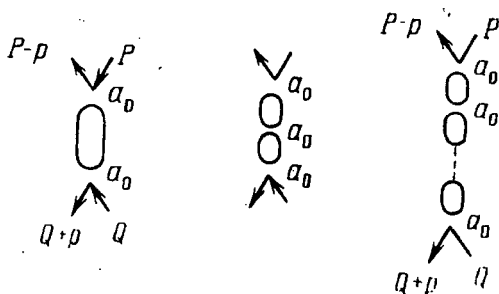


Рис. 2. Последовательности замкнутых петель, соответствующие наибольшему вкладу в вершинный оператор

Найдем теперь полный вклад ( $\Gamma_1$ ) всех таких графиков в вершинный оператор и покажем, воспользовавшись значением полученного таким образом вершинного оператора, что вклад остальных графиков (см. рис. 4) в  $\Gamma$  при достаточно малом  $\lambda/\Lambda$  сколь угодно мал и что гриновская функция фермиона не отличается от гриновской функции свободного фермиона  ${}^5 G_0 = (-i\hat{p} - m)^{-1} \approx \approx i/\hat{p}$ .

<sup>5</sup> Или равна  $\beta G_0$ , где  $\beta$  — постоянная, величину которой можно определить из уравнения для  $G$  (см. ниже). Мы использовали здесь следующие обозначения:

$$\hat{p} = \gamma_\mu p_\mu, \quad \gamma_\mu^+ = \gamma_\mu.$$

Бесконечная сумма величин, соответствующих графикам на рис. 2, удовлетворяет уравнению (рис. 3)

$$\Gamma_1(P, Q, p) = a_0 - i \int^{\Lambda^2} a_0 G(l-p) G(l) \Gamma_1(l, Q, p) d^4l, \quad (3)$$

где

$$a_0 = g_0 (O_j \times O_j) \quad (3a)$$

представляет собой величину, соответствующую <sup>6</sup> простейшему графику на рис. 1, а  $d^4l = (2\pi)^{-2} dl_1 dl_2 dl_3 dl_4$ . Спинорные индексы

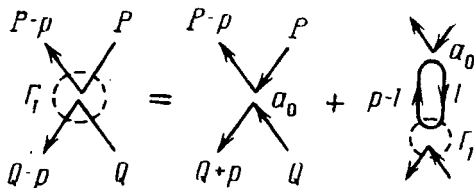


Рис. 3. Графическое представление уравнения (3)

в интегральном члене расставлены в соответствии с замкнутой петлей на рис. 3, т. е. интеграл содержит шпур. Легко проверить, что следствием этого является отсутствие интерференции между различными взаимодействиями (3a) в (3).

### 3. Скалярное взаимодействие

Уравнение (3) имеет решение, зависящее только от  $p$ . В простейшем случае скалярной ( $O_j = 1$ ) или псевдоскалярной ( $O_j = i\gamma_5$ ) теории решение имеет вид  $\Gamma_1 = \alpha(p)(O_j \times O_j)$ , где

$$\alpha(p) = g_0 \left\{ 1 + g_0 i \int^{\Lambda^2} \text{Sp} [O_j G(l-p) O_j G(l)] d^4l \right\}^{-1}.$$

Подставив  $G(l) = G_0(l) = i/\hat{l}$ , вычислим входящий сюда квадратично расходящийся интеграл:

$$i \int^{\Lambda^2} \text{Sp} [O_j G(l-p) O_j G(l)] d^4l = \\ = \frac{1}{4} \text{Sp} (O_j \gamma_\nu O_j \gamma_\mu) \left( \frac{1}{2} J_0 \delta_{\mu\nu} + \frac{P_\mu P_\nu}{p^2} J_1 \right), \quad (4)$$

<sup>6</sup> Отвлекаясь от множителя  $(2\pi)^2 i$ , которым мы всюду пренебрегаем.



где <sup>7</sup>

$$J_0 = \frac{8}{3i} \int^{\Lambda^2} \frac{k^2 - (pk)^2/p^2}{\left(k - \frac{1}{2}p\right)^2 \left(k + \frac{1}{2}p\right)^2} d^4k =$$

$$= \frac{8}{3\pi} \int^{\Lambda^2} (k^2)^2 dk^2 \int_0^1 \frac{(1-x^2)^{1/2} dx}{\left(k^2 + \frac{1}{4}p^2\right)^2 - p^2 k^2 x^2} = \frac{1}{2} \Lambda^2 - \frac{1}{6} p^2 \ln \frac{\Lambda^2}{\xi_0^2 p^2},$$

$$J_1 = \frac{4}{i} \int^{\Lambda^2} \frac{\frac{4}{3} \left(\frac{(pk)^2}{p^2} - \frac{1}{4}k^2\right) - \frac{1}{4}p^2}{\left(k - \frac{1}{2}p\right)^2 \left(k + \frac{1}{2}p\right)^2} d^4k =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int^{\Lambda^2} k^2 dk^2 \int_0^1 \frac{\frac{4}{3} k^2 \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} p^2}{\left(k^2 + \frac{1}{4} p^2\right)^2 - p^2 k^2 x^2} (1-x^2)^{1/2} dx = -\frac{1}{6} p^2 \ln \frac{\Lambda^2}{\xi_1^2 p^2};$$

$\xi_0$  и  $\xi_1$  представляют собой постоянные, точное значение которых несущественно для дальнейшего. Подставляя эти значения  $J_0$  и  $J_1$  в (4), получим

$$\alpha(p) = g_0 \left\{ 1 + g_0 \left[ \Lambda^2 - \frac{1}{2} p^2 \ln \frac{\Lambda^2}{\xi_1^2 p^2} \right] \right\}^{-1}, \quad (5)$$

где  $\xi = (\xi_0^2 \xi_1^2)^{1/2}$ . Квадратичная расходимость в знаменателе сокращается, если  $g_0 = -1/\Lambda^2$  (или если  $1 + g_0 \Lambda^2$  представляет собой величину, убывающую с ростом  $\Lambda^2$ ); если, напротив,  $g_0 \neq -1/\Lambda^2$ , то  $\alpha(p)$  практически не будет зависеть от  $p^2$  (можно напомнить, что  $p^2 \ll \lambda^2 \ll \Lambda^2$ ) и при  $\Lambda \rightarrow \infty$  обращается в нуль, как  $1/\Lambda^2$ . Отложив обсуждение последнего случая, предположим сначала, что

$$1 + g_0 \Lambda^2 = \frac{\mu^2}{\Lambda^2},$$

где  $\mu$  является величиной порядка нижнего предела обрезания. Пренебрегая  $\mu^2/\Lambda^2$  по сравнению с единицей, получаем из (5)

$$\alpha(p) = \frac{1}{p^2 L + \mu^2}, \quad (5a)$$

<sup>7</sup> Здесь переменная  $l$  заменена на  $k \doteq l + \frac{1}{2}p$  и произведен переход от псевдоевклидовой метрики к евклидовой:  $(4/i) d^4k = (2/\pi) k^2 dk^2 (1-x^2)^{1/2} dx$ , где  $x^2 = (pk)^2/p^2 k^2$ . При вычислении  $J_0$  и  $J_1$  опущены члены, которые остаются конечными при  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

где  $L = \ln (\Lambda / \lambda)$  (здесь  $\xi p^2$  заменено на  $\lambda^2$ , в результате чего  $d(p)$  только увеличится). Оценим с помощью этого значения  $d(p)$  величину вклада графика на рис. 4, а, который определяет разность  $G - G_0$ , где  $G = G_0\beta$ , т. е. разность между  $\beta$  и единицей.

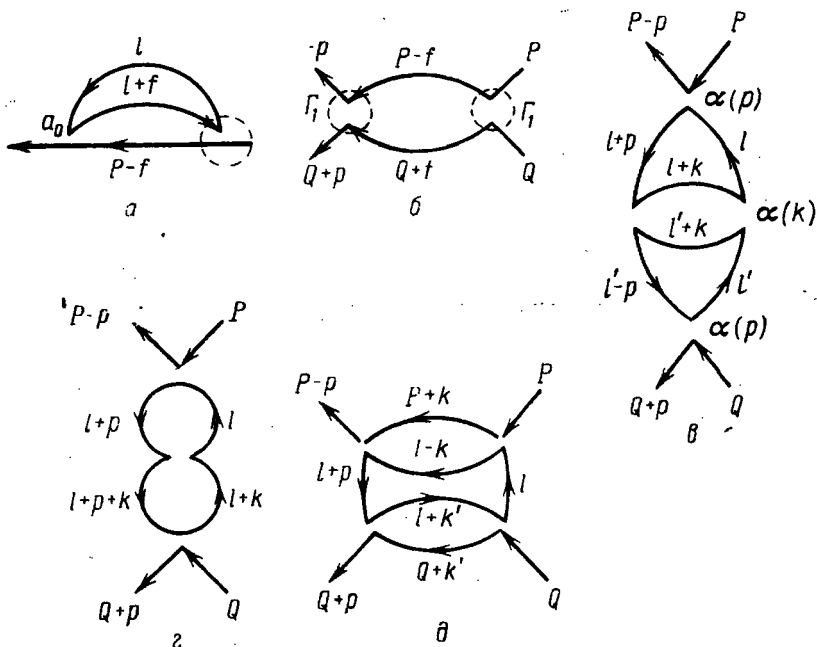


Рис. 4. а — графики, приводящие к отклонению  $\beta$  от единицы; б — д — графики, приводящие к отклонению  $\alpha$  от значения, даваемого уравнением (5)

При оценке интеграла, соответствующего рис. 4,а, можно пренебречь спинорными индексами, поскольку нас интересует только его порядок величины. Интеграл для рис. 4, а имеет следующий вид ( $d$  в данном случае является функцией  $f^2$ ):

$$g_0 \int \frac{\alpha(f^2) d^4 f}{p-f} \int \frac{d^4 l}{l(l+f)}. \tag{6}$$

Интегрирование по  $l$  дает  $\Lambda^2$  (так как  $f^2 \ll \lambda^2 \ll \Lambda^2$  и интеграл по  $l$  расходится, и поэтому  $l + f \approx l$ ). При интегрировании по  $f$  множитель  $(p - f)^{-1}$  следует разложить в ряд по  $p$ :

$$(p - f)^{-1} = -\frac{1}{f} - \frac{1}{f} p \frac{1}{f}.$$

Интеграл от первого члена дает нуль; если принять во внимание (5а), то второй член после интегрирования дает  $(1/L) \ln(\lambda^2/p^2)$ . Учитывая, что  $g_0 = -1/\Lambda^2$ , получаем

$$G^{-1} - G_0^{-1} = -i\hat{p} \frac{\ln(\lambda^2/p^2)}{L}$$

или при  $L \gg \ln(\lambda^2/m^2)$

$$\beta - 1 = -\frac{\ln(\lambda^2/p^2)}{L}.$$

Следовательно, при достаточно больших значениях  $L$  (и при  $L \gg \ln(\lambda^2/m^2)$ ) разность между  $\beta$  и единицей сколь угодно мала.

Подобным же образом рассмотрим отношение интегралов, соответствующих рис. 4, б, в, г и д (не включенных в уравнение (3)) к  $\alpha(p)$ . Для рис. 4, б это соотношение равно

$$\frac{1}{\alpha(p)} \int \frac{\Lambda^2}{(P-f)(Q+f)} d^4 f.$$

В зависимости от величины импульсов  $P$  и  $Q$ , а именно при  $\lambda \ll P \sim Q \ll \Lambda$ ,  $Q \ll \lambda \ll P \ll \Lambda$  или  $p \sim P \sim Q \ll \lambda \ll \Lambda$ , получаем соответственно, приняв во внимание (5а),

$$\frac{\Lambda^2}{PQL}, \quad \frac{P}{Q} \frac{\ln(\lambda^2/p^2)}{L} \quad \text{или} \quad \frac{\ln(\lambda^2/p^2)}{L}.$$

Во всех рассмотренных случаях отношение может быть сделано сколь угодно малым.

Для диаграммы на рис. 4, в получаем

$$\frac{1}{\alpha(p)} \int \Lambda^2 \int \Lambda^2 \int \lambda^2 d^4 l \int d^4 l' \int d^4 k \frac{1}{l(l+p)(l+k)} \frac{1}{l'(l'+k)(l'-p)} \times \\ \times \alpha^2(p) \alpha(k) \alpha(p-k).$$

Для вычисления интеграла по  $l$  (и  $l'$ ) следует разложить подынтегральное выражение в ряд по  $k$  и положить  $p$  равным нулю. Результат имеет вид

$$\alpha(p) \int \lambda^2 k^2 \alpha(k) \alpha(p-k) \ln^2 \frac{\Lambda^2}{k^2} d^4 k \approx \frac{1}{p^2 L} \int \frac{d^4 k}{k^2} \approx \frac{\lambda^2}{p^2 L}.$$

Рис. 4, г приводит к следующему интегралу:

$$\frac{1}{\alpha(p)} \int \Lambda^2 \int \lambda^2 d^4 l \int d^4 k \frac{1}{l(l+p)(l+k)(l+p+k)} \alpha^2(p) \alpha(k).$$

Интегрирование по  $l$  дает  $\ln(\Lambda^2/k^2)$ , и мы получаем

$$\frac{1}{p^2 L} \int^{\lambda^2} \alpha(k) \ln \frac{\Lambda^2}{k^2} d^4 k \approx \frac{\lambda^2}{p^2 L}.$$

Рассмотрим, наконец, рис. 4,  $\delta$ . В этой диаграмме интегрирование до малого предела, проведенное для рис. 4, б, повторяется дважды. Поэтому можно ожидать, что она будет меньше, чем диаграмма рис. 4, б. Соответствующее отношение равно

$$\frac{1}{\alpha(p)} \int^{\Lambda^2} d^4 l \int^{\lambda^2} d^4 k \int^{\lambda^2} d^4 k' \frac{\alpha(k) \alpha(k') \alpha(k-p) \alpha(k'-p)}{l(l+p)(l-k)(l+k')(p+k)(Q+k')}.$$

В зависимости от величины  $P$  и  $Q$ , а именно при  $\lambda \ll P \sim Q \ll \Lambda$   $p \sim Q \ll \lambda \ll P$  или  $p \sim P \sim Q \ll \lambda$ , получаем соответственно

$$\frac{p^2}{PQ} \left( \frac{\ln(\lambda^2/p^2)}{L} \right)^2, \quad \frac{p}{P} \frac{\ln(\lambda^2/p^2)}{L} \quad \text{или} \quad \frac{1}{L^2}.$$

Эти выражения могут быть сделаны сколь угодно малыми, если процедура перехода к пределу проводится таким образом, что  $\lambda^2/m^2 L$  остается достаточно малым при  $L \rightarrow \infty$ . Более сложные графики для вершинного оператора, не показанные на рис. 4, пропорциональны более высоким степеням того же отношения  $\lambda^2/m^2 L$  (или еще меньшей величины) и поэтому с определенностью малы.

Таким образом, выражение (5а), полученное для  $\alpha(p)$ , является точным решением.

Физическое взаимодействие между двумя фермионами определяется произведением  $\alpha\beta^2$ . Полученные выше результаты показывают, что  $\alpha\beta^2$  исчезает при  $\Lambda \rightarrow \infty$ , и, следовательно, физическое взаимодействие между точечными фермионами отсутствует.

Случай, когда  $1 + g_0 \Lambda^2$  отрицательно, следует исключить. В самом деле, если  $1 + g_0 \Lambda^2$  отрицательно и по порядку величины равно  $-1$ , логарифмическим членом в выражении для  $\Gamma$  можно пренебречь. Вычисляя дополнительный член в  $G$  с отрицательным  $\Gamma$ , мы видим, что  $\beta$  будет превосходить единицу, а это несовместимо с общими теоремами теории поля [6].

Если абсолютная величина  $1 + g_0 \Lambda^2$  меньше, чем  $g_0 \lambda^2$ , в формуле для  $\Gamma$  возникает полюс при пространственно-подобных  $p$ . Если считать, что взаимодействие между фермионами осуществляется посредством бозонов, то  $\Gamma$  имеет смысл гриновской функции бозона. Тогда очевидно, что этот полюс отвечает мнимой бозонной массе. Такие бозоны давали бы в гамильтониане член

—  $|m|^2 \varphi^2$ , что указывало бы на неустойчивость вакуума в этом случае.

Возвращаясь к случаю  $g_0 \neq -1/\Lambda^2$ , заметим, что (3) следует решать одновременно с уравнением для гриновской функции  $G(p)$

$$\left[ -i\hat{p} - \frac{2}{g_0} \int a_0 G(p-f) \Gamma_1(f) G(l) G(l+f) d^4 l d^4 f \right] G(p) = 1$$

(порядок спинорных индексов соответствует рис. 4, а, поэтому интегральный член содержит интеграл по  $l$  такого же типа, что и (4)).

Пренебрегая членами вида  $p^2 \ln(\Lambda^2/p^2)$  по сравнению с  $\Lambda^2$  и принимая во внимание, что в этом случае интеграл (4) равен  $\Lambda^2$ , получаем следующее решение:

$$\Gamma_1(p) = (O_j \times Q_j) \alpha; \quad G(p) = \frac{i\beta}{\hat{p}},$$

где  $\alpha = g_0 [1 + g_0 \beta^2 \Lambda^2]^{-1}$  и  $\beta = [1 + \frac{1}{8} g_0 \lambda^2 \Lambda^2 \alpha \beta^3]^{-1}$  являются величинами, не зависящими от  $p$ . Подставляя  $\alpha$  в формулу для  $\beta$ , получаем уравнение четвертой степени относительно  $\beta$ . Его решение легко найти в случаях, когда  $g_0 \Lambda^2 \ll 1$  или когда  $g_0 \Lambda^2 \sim 1$ ,  $g_0 \lambda^2 \ll 1$ . В первом случае получаем

$$\beta = \frac{4}{g_0 \lambda^2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} g_0 \lambda^2 \right)^{1/2} - 1 \right],$$

а во втором  $\beta \approx 1$ .

В обоих случаях (которые включают всю область значений  $g_0$ , могущую представить какой-нибудь интерес) величина  $\xi = \alpha \beta^2 \Lambda^2$  в пределе при  $\Lambda \rightarrow \infty$  остается порядка единицы. Теперь легко продемонстрировать, что неучтенные графики, изображенные на рис. 4, будут много меньше, чем  $\alpha$ . Например, отношение величин, соответствующих графикам на рис. 4, б, г, к  $\alpha$  равно

$$\alpha \beta^2 \frac{\lambda^4}{PQ} = \xi \frac{\lambda^4}{PQ\Lambda^2} \quad \text{и} \quad \alpha^2 \beta^4 \Lambda^2 \lambda^2 = \xi^2 \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}.$$

Эти величины сколь угодно малы при  $\lambda^2/\Lambda^2 \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что полученные решения для  $G$  и  $\Gamma$  являются точными, и, поскольку  $\alpha \beta^2 \Lambda^2 \sim 1$ , физическое взаимодействие  $\alpha \beta^2$  при  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$  обращается в нуль, как  $1/\Lambda^2$ .

Для проведенного анализа важным пунктом являлось то, что интеграл  $J_0$  содержит  $\Lambda^2$ . Однако величина квадратично расходящегося интеграла существенно зависит от формфактора, применявшегося для ее вычисления. Допустим, например, что мы

обратили квадратично расходящийся интеграл в нуль, воспользовавшись осциллирующим фактором. Тогда вместо (5) мы получим

$$\alpha(p) = \frac{g_0}{1 - \frac{1}{2} g_0 p^2 \ln \frac{\Lambda^2}{p^2}}. \quad (7)$$

Если  $g_0$  ведет себя при  $\Lambda \rightarrow \infty$ , как  $1/m^2 L$ , то разность между  $\beta$  и 1 будет порядка  $\lambda^2/m^2 L$ . В самом деле, интеграл по  $l$  в формуле (6) теперь не содержит квадратично расходящейся части и поэтому равен  $\sim f^2 \ln(\Lambda^2/f^2)$ . Оставшийся интеграл по  $f$  дает  $g_0 \lambda^2 \hat{p} \sim (\lambda^2/m^2 L) \hat{p}$ , если учесть, что  $\alpha \sim 1/f^2 L$ , и разложить подынтегральное выражение в ряд по  $p$ .

Если  $g_0$  не мало, уравнения для  $\alpha$  и  $\beta$  следует решать одновременно. Уравнение в этом случае для  $\beta$  может быть удовлетворено, если принять, что  $\beta$  не зависит от  $p$ . Тогда получим вместо (7)

$$\alpha(p) = \frac{g_0}{1 - \frac{1}{2} g_0 \beta^2 p^2 \ln \frac{\Lambda^2}{p^2}}. \quad (7a)$$

Интеграл в уравнении для  $\beta$  имеет следующий вид:

$$g_0 \beta^3 \int \frac{\alpha(f)}{\hat{p} - f} d^4 f \int \frac{d^4 l}{l(l-f)} \approx g_0 \beta^3 \hat{p} \int \frac{\alpha(f)}{f^2} d^4 f \cdot f^2 \ln \frac{\Lambda^2}{f^2}.$$

При достаточно больших  $L$ , когда  $g_0 \beta^2 \lambda^2 L \gg 1$ , этот интеграл равен  $g_0 \beta \lambda^2 \hat{p}$ , и для  $\beta$  получается следующее уравнение:

$$\beta \left[ 1 + \frac{1}{16} g_0 \beta \lambda^2 \right] = 1.$$

Отсюда

$$\beta = \frac{8}{g_0 \lambda^2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{4} g_0^2 \lambda^4 \right)^{1/2} - 1 \right],$$

т. е.  $\beta$  не зависит от  $L$ . Поэтому из (7a) следует, что при достаточно больших значениях  $L$

$$\alpha \beta^2 \sim \frac{1}{p^2 L}$$

(при  $p^2 \rightarrow 0$  формулу (7a) следует уточнить, приняв во внимание конечность массы; при этом  $\alpha \beta^2 \sim 1/m^2 L$ ). И в этом случае можно быстро проверить, что как диаграммы рис. 4, так и более сложные малы по сравнению с  $\alpha$  из (7a).

Таким образом, вывод относительно исчезновения взаимодействия точечных фермионов, к которому мы пришли выше, не за-

висит от того, считать ли квадратично расходящийся интеграл равным  $\Lambda^2$  или нулю. Этим подтверждается наша точка зрения, состоящая в том, что *физические* результаты теории (в данном случае исчезновение взаимодействия) не должны зависеть от вида обрезающего множителя.

#### 4. Векторное и тензорное взаимодействия

Рассмотрим теперь теории векторного взаимодействия ( $O_j = i\gamma_\mu$ ,  $O_j = i\gamma_5\gamma_\mu$ ). Мы начнем с псевдовекторной теории. Согласно (4) подстановка  $\Gamma_1$  в виде  $\alpha(p)(i\gamma_5\gamma_\mu \cdot i\gamma_5\gamma_\mu)$  в (3) приводит к появлению новой спинорной формы  $(1/p^2)(i\gamma_5\hat{p} \cdot i\gamma_5\hat{p})$  в правой части уравнения (3). Поэтому решение уравнения (3) следует искать в виде

$$\Gamma_1 = \alpha(p)(i\gamma_5\gamma_\mu \cdot i\gamma_5\gamma_\mu) + \alpha_1(p)(i\gamma_5\hat{p} \cdot i\gamma_5\hat{p}) \frac{1}{p^2}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в уравнение (3) и приравнивая коэффициенты при каждой из спинорных форм, получаем

$$\alpha(p) = g_0 - g_0(J_0 + J_1), \quad (9)$$

$$\alpha_1(p) = 2g_0J_1\alpha(p) - g_0(J_0 - J_1)\alpha_1(p)$$

или

$$\alpha(p) = \frac{g_0}{1 + g_0(J_0 + J_1)}, \quad \alpha(p) + \alpha_1(p) = \frac{g_0}{1 + g_0(J_0 - J_1)}. \quad (10)$$

Принимая во внимание значения интегралов  $J_0$  и  $J_1$ , получим

$$\alpha(p) = \frac{g_0}{1 + g_0 \left[ \frac{1}{2} \Lambda^2 - \frac{1}{3} p^2 \ln \frac{\Lambda^2}{p^2} \right]}, \quad \alpha(p) + \alpha_1(p) = \frac{g_0}{1 + \frac{1}{2} g_0 \Lambda^2}. \quad (11)$$

Таким образом,  $\alpha(p)$  имеет такой же вид, что и (5), и при  $g_0 \sim \Lambda^{-2}$  падает с увеличением  $\Lambda^2$ , как  $1/L$ , в то время как  $\alpha_1(p)$  не содержит  $\ln(\Lambda^2/p^2)$  в знаменателе и не стремится к нулю при  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ .

Однако член, содержащий  $\alpha_1(p)$ , не соответствует какому-либо реальному взаимодействию, поскольку его можно исключить с помощью преобразования, подобного градиентному. Рассмотрим, например, систему, состоящую из фермионов и невзаимодействующих с ними бозонов. Лагранжиан системы имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_b^{(0)} + \mathcal{L}_f^{(0)} + \mathcal{L}_f^{(1)},$$

где  $\int \mathcal{L}_f^{(1)} dv = -V$ ,  $\mathcal{L}_b^{(0)}$  представляет собой лагранжиан свободного поля бозонов, а  $\mathcal{L}_f^{(0)} = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial / \partial x_\mu + m)\psi$  — лагранжиан свободных фермионов.

Система фермионов может быть описана волновым полем  $\psi_1$ , связанным с  $\psi$  при помощи соотношения

$$\psi_1 = \exp[i\gamma_5 \tilde{\epsilon} \varphi(x)] \psi; \quad \bar{\psi}_1 = \bar{\psi} \exp[i\gamma_5 \tilde{\epsilon} \varphi(x)], \quad (12)$$

где  $\varphi$  — квантованное поле бозонов, а  $\tilde{\epsilon}$  представляет собой оператор, определяемый в импульсном представлении посредством функции  $\epsilon(p^2)$  (т. е.  $\tilde{\epsilon} = \epsilon(-\partial^2 / \partial x_\mu^2)$ ). При таком преобразовании поля  $\psi$  лагранжиан  $\mathcal{L}_f^{(1)}$  (т. е. взаимодействие (2)) остается постоянным, в то время как  $\mathcal{L}_f^{(0)}$  меняется:

$$\mathcal{L}_f^{(0)} = \mathcal{L}_f^{(0)} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2,$$

где

$$\mathcal{L}_1 = -\bar{\psi}_1 i\gamma_\mu \gamma_5 \tilde{\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \psi_1$$

и

$$\mathcal{L}_2 = m\bar{\psi}_1 \{ \exp[-2i\gamma_5 \tilde{\epsilon} \varphi(x)] - 1 \} \psi_1.$$

Лагранжиан  $\mathcal{L}_1$  соответствует добавлению к (2) фиктивного взаимодействия

$$V' = \int \bar{\psi}_1 i\gamma_\mu \gamma_5 \tilde{\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \psi_1 dv.$$

Это взаимодействие приводит во втором порядке к рассеянию фермионов на фермионах ( $f_0 / p^2$ )( $i\gamma_5 \hat{p} \cdot i\gamma_5 \hat{p}$ ), соответствующему простейшей диаграмме на рис. 5. Здесь  $f_0 = e^2(p^2) / \pi \cong 0$ . Наличие такого взаимодействия (т. е. всех диаграмм, образованных из простейшей диаграммы на рис. 5) можно учесть при вычислении  $\Gamma_1$ , подставив в (3) вместо (2а) выражение

$$a'_0 = g_0 (i\gamma_5 \gamma_\mu \cdot i\gamma_5 \gamma_\mu) + \frac{f_0}{p^2} (i\gamma_5 \hat{p} \cdot i\gamma_5 \hat{p}).$$

После простых преобразований из (3) можно вывести следующий результат:

$$\alpha(p) = \frac{g_0}{1 + g_0(J_0 + J_1)}; \quad \alpha(p) + \alpha_1(p) = \frac{g_0 + f_0}{1 + (g_0 + f_0)(J_0 - J_1)}. \quad (11a)$$



Подставив верхнее уравнение в нижнее, замечаем, что  $\alpha_1(p)$  обращается в нуль, если

$$f_0 = - \frac{2g_0^2 J_1}{1 + 2g_0 J_1}. \quad (13)$$

Выражение для  $\alpha(p)$  идентично (11); это приводит к тому, что взаимодействие будет максимальным при  $g_0 = -2/\Lambda^2$ . Из (13) тогда получаем

$$f_0 = \frac{p^2}{3\Lambda^4} L.$$

Таким образом, для того, чтобы исключить член  $\alpha_1(p)$  в выражении для  $\Gamma_1$ , достаточно выбрать  $\epsilon(p^2)$  равным  $[(p^2/3\Lambda^4)L]^{1/2}$ ; это выражение сколь угодно мало при  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Поэтому можно было с самого начала рассматривать фиктивное взаимодействие  $V'$  в низшем приближении; добавим еще, что лагранжиан  $L_2$  исчезает при  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Формула (11а) для  $\alpha(p)$  во всех отношениях похожа на выражение (5), полученное в скалярных теориях, что, как и в последних случаях, приводит к исчезновению фиктивного взаимодействия при  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим теперь теорию векторного взаимодействия. В этом случае квадратично расходящийся интеграл можно считать равным нулю. В самом деле, в векторной теории интеграл (4) может быть записан в следующем виде:

$$\int T \langle j_\nu(x) j_\mu(y) \rangle_0 e^{ip(x-y)} d^4x d^4y, \quad (14)$$

где  $j_\nu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x)$  и  $\partial j_\nu(x)/\partial x_\nu = 0$ . Если в (14) положить  $p = 0$ , то формально получится квадратично расходящийся интеграл. Его структура совпадает со структурой интеграла, определяющего массу фотона в электродинамике (так как  $j_\nu$  удовлетворяет в электродинамике уравнению непрерывности), и поэтому он должен исчезнуть<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> Это уравнение справедливо не только для свободных операторов, но точно так же и для связанных.

<sup>9</sup> Формальное доказательство, не базирующееся на аналогии с электродинамикой, может быть проведено, например, следующим образом. Рассмотрим

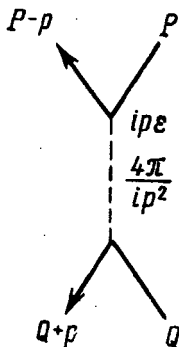


Рис. 5. Простейший граф, соответствующий взаимодействию второго порядка, возникшему от члена  $L_j^{(0)}$

В  $\Gamma_1$  в векторной теории появляется член  $\alpha_1(p)(i\hat{p} \times i\hat{p}/p^2)$ , и формула (10) справедлива, как и прежде. Однако вместо (11) получается

$$\alpha(p) = g_0 \left[ 1 - \frac{1}{3} g_0 p^2 \ln \frac{\Lambda^2}{p^2} \right]^{-1}; \quad \alpha(p) + \alpha_1(p) = g_0. \quad (116)$$

Заметим теперь, что для реальных частиц взаимодействие  $\alpha_1(p)(i\hat{p} \cdot i\hat{p}/p^2)$  тождественно равно нулю. В самом деле,  $p$  представляет собой разность между конечным и начальным импульсами частицы. Поскольку волновые функции начального и конечного состояний подчиняются свободному уравнению Дирака, матричный элемент от  $\hat{p}$  будет обращаться в нуль<sup>10</sup>. Так как  $\alpha(p)$  в (116) практически совпадает с (7), все доводы, а с ними и результаты, полученные в разделе 3 для скалярной теории (в случае, когда квадратичный интеграл обращается в нуль), остаются справедливыми и в данном случае.

Нам осталось рассмотреть тензорную теорию. Заменяя  $O_j$  в (4) на  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} i (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$ , убеждаемся, что

$$\text{Sp}(\sigma_{\alpha\beta} \gamma_\nu \sigma_{\lambda\rho} \gamma_\nu) = 0.$$

Поэтому тензорная теория не содержит квадратичных расходимостей. Для  $\Gamma_1$  возникают новые спинорные формы, однако в тензорной теории  $\alpha_1(p)$  содержит  $\ln(\Lambda^2/p^2)$  в знаменателе. Рассуждения не отличаются от таковых, применявшихся в случае скалярной теории (когда квадратичный интеграл считался равным нулю).

Интеграл

$$\int T \langle j_\nu(x) i_\mu(y) \rangle \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_\nu} d^4x d^4y = \int \frac{\partial}{\partial x_\nu} T \langle j_\nu(x) i_\mu(y) \rangle \Phi(x) d^4x d^4y - \\ - \int T \left\langle \frac{\partial j_\nu(x)}{\partial x_\nu} i_\mu(y) \right\rangle \Phi(x) d^4x d^4y.$$

Первый интеграл в правой части обращается в нуль, если исчезает на бесконечности; второй интеграл равен нулю, поскольку  $\partial j_\nu(x)/\partial x_\nu = 0$ . Если  $\partial \Phi(x)/\partial x_\nu$  является достаточно медленно меняющейся функцией координат, ее можно вынести из-под знака интеграла; тогда в силу произвольности вектора  $\partial \Phi/\partial x_\nu$ , мы получаем

$$\int T \langle j_\nu(x) i_\mu(y) \rangle d^4x d^4y = 0.$$

<sup>10</sup> См. похожую аргументацию в статье Р. Фейнмана [7]. При малых  $p^2$  знаме-

Следовательно, если рассматривается только одно фермионное поле, то физическое взаимодействие отсутствует во всех типах четырехфермионных взаимодействий.

### 5. Взаимодействие нескольких полей

Рассмотрим теперь взаимодействие между несколькими полями. В случае, когда существуют два типа нейтральных частиц (соответствующие поля обозначены через  $\psi$  и  $\chi$ ), мы приходим к трем типам взаимодействия

$$V = 2\pi^2 \int [g_1 (\bar{\psi} O_j \psi) (\bar{\psi} O_j \psi) + g_2 (\bar{\chi} O_j \chi) (\bar{\chi} O_j \chi) + 2g_3 (\bar{\psi} O_j \psi) (\bar{\chi} O_j \chi)] dv \quad (15)$$

с соответствующими константами  $g_1, g_2, g_3$ . Может возникнуть вопрос, нельзя ли выбрать эти константы таким образом, чтобы сократить логарифм в выражении для  $\alpha(p)$ , которое относится к тому же типу, что и (5).

Для удобства будем характеризовать обе частицы столбцом

$$\Phi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Тогда во взаимодействии (15) простейшей диаграмме рис. 1 соответствует величина

$$a_0 = \sum_{i=1}^3 g_i V'_i,$$

где

$$V'_1 = Q'_1 \cdot Q'_1, \quad V'_2 = Q'_2 \cdot Q'_2, \quad V'_3 = Q'_1 \cdot Q'_2 + Q'_2 \cdot Q'_1;$$

$$Q'_1 = Q_j \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q'_2 = Q_j \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3) имеет решение вида

$$\Gamma_1 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(p) V'_i.$$

Мы рассмотрим скалярную теорию ( $O_j = 1, O_j = i\gamma_5$ ); в других теориях получаются похожие результаты.

натель в выражении  $(i\hat{p} \cdot i\hat{p})/p^2$  не исчезает, если принять во внимание конечность массы. Исчезновение взаимодействия  $\alpha_1$  можно также доказать применив преобразование, подобное преобразованию (12).

Подставив приведенные выше выражения для  $\alpha_0$  в (3), получаем после приравнивания коэффициентов перед  $V_i$  следующую систему уравнений для  $\alpha_i$ :

$$\begin{aligned} (1 + g_1 I) \alpha_1 + g_3 \alpha_3 I &= g_1, \\ (1 + g_2 I) \alpha_2 + g_3 \alpha_3 I &= g_2, \\ \frac{1}{2} g_3 \alpha_1 I + \frac{1}{2} g_3 \alpha_2 I + \left[ 1 + \frac{1}{2} (g_1 + g_2) I \right] \alpha_3 &= g_3, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $I = 2J_0 + J_1 \approx \Lambda^2 - p^2 L$ . Решением этих уравнений является

$$\alpha_1 = \frac{g_1 + f^2 I}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{g_2 + f^2 I}{\Delta}, \quad \alpha_3 = \frac{g_3}{\Delta}, \quad (17)$$

где  $\Delta = 1 + 2gI + f^2 I^2$ ,  $g = \frac{1}{2} (g_1 + g_2)$  и  $f^2 = g_1 g_2 - g_3^2$ . Оставляя лишь члены, линейные по  $p^2 L$  (легко проверить, что они являются главными, когда  $g_i \Lambda^2$  по порядку равны единице), получим

$$\Lambda^2 \Delta = (1 + F_0) \Lambda^2 - F_1 p^2 L.$$

где  $F_0 = 2\tilde{g} + \tilde{f}^2$  и  $F_1 = 2(\tilde{g} + \tilde{f}^2)$ . Здесь введены безразмерные константы  $\tilde{g} = \Lambda^2 g$  и  $\tilde{f} = \Lambda^2 f$ ; в интересующем нас случае эти константы по порядку величины равны единице. Член, пропорциональный  $\Lambda^2$ , в выражении  $\Lambda^2 \Delta$  (т. е. в знаменателях  $\alpha_i(p)$ ) будет отсутствовать, а величина  $L$  в том же выражении сократится, если выполнены условия  $1 + F_0 = 0$  и  $F_1 = 0$ . Подставляя значения  $F_0$  и  $F_1$ , получим  $\tilde{g} = -1$  и  $\tilde{f}^2 = 1$ , т. е.  $\tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 = -2$  и  $\tilde{g}_1 \tilde{g}_2 - \tilde{g}_3^2 = 1$ , где  $\tilde{g}_i = \Lambda^2 g_i$ . Отсюда  $\tilde{g}_1 = -2 - \tilde{g}_2$  и  $-\tilde{g}_3^2 = (1 + \tilde{g}_2)^2$ .

Таким образом, квадратичные и логарифмические расходимости могут быть устранены из знаменателей в выражениях для  $\alpha_i$  лишь при условии, что константа  $g_1$  является мнимой (после умножения числителей в выражениях для  $\alpha_i$  на  $\Lambda^2$  они станут по порядку величины равными единице, если  $\tilde{g}_i \sim 1$ ). Поэтому для эрмитовских лагранжианов физическое взаимодействие исчезает при  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$  также и в этом случае.

Того же типа доводы, что и те, которые приводились в разделе 3 для одного поля, можно повторить для случая, когда квадратичные интегралы исчезают (векторная и тензорная теории). Никакого физического взаимодействия не возникает и в этом случае.

Обратимся теперь к рассмотрению заряженных полей. При использовании формфакторов для анализа заряженных полей должна быть проявлена осторожность. Так, если формфактор введен просто как предел интегрирования в пространстве импульсов,

при  $\lambda^2 \ll \Lambda^2$  возникает противоречие с тождеством Уорда (в частности, в результате взаимодействия нейтральная частица приобретает заряд). Для того чтобы избежать такой несогласованности, следует ввести формфактор, имеющий, например, вид

$$\left( \frac{\Lambda^2}{(p-A)^2 - \Lambda^2} \right)^2,$$

где  $A$  — электромагнитный потенциал<sup>11</sup>. При этом соотношение между  $\lambda^2$  и  $\Lambda^2$  станет градиентно-инвариантным, и, следовательно, можно пользоваться методами, применявшимися выше.

Рассмотрим взаимодействие между полем с изотопическим спином  $1/2$  (поле  $\psi$ ) и полем с изотопическим спином 1 (поле  $\Sigma$ ). Имеем вместо (15)

$$V = 2\pi^2 \int [g_1 (\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\psi) + g_2 (\bar{\Sigma}\Sigma)(\bar{\Sigma}\Sigma) + 2g_3 (\bar{\psi}\psi)(\bar{\Sigma}\Sigma) + \\ + g_4 (\bar{\psi}\tau_\alpha\psi)(\bar{\psi}\tau_\alpha\psi) + g_5 (\bar{\Sigma}T_\alpha\Sigma)(\bar{\Sigma}T_\alpha\Sigma) + 2g_6 (\bar{\psi}\tau_\alpha\psi)(\bar{\Sigma}T_\alpha\Sigma) + \\ + g_7 (\bar{\Sigma}S_{\alpha\beta}\Sigma)(\bar{\Sigma}S_{\alpha\beta}\Sigma)] dv, \quad (18)$$

где  $\tau_\alpha$  — операторы изотопического спина  $1/2$ ,  $T_\alpha$  — спина 1 и  $S_{\alpha\beta} = T_\alpha T_\beta - T_\beta T_\alpha - \frac{4}{3} \delta_{\alpha\beta}$ ; операторы обычного спина для краткости явно не выписаны. Для вычисления интеграла (4) надо взять шпур по переменным изотопического спина. Легко проверить, что при этом взаимодействие (18) распадается на три независимые части: (1)  $g_1, g_2, g_3$ ; (2)  $g_4, g_5, g_6$  и (3)  $g_7$ . Первые две путем изменения обозначений могут быть сведены к обсуждавшемуся выше случаю двух нейтральных полей. Так, в первом случае следует сделать следующие подстановки:  $2g_1 = g_1, 3g_2 = g_2, \sqrt{6}g_3 = g_3; 2\alpha_1 = \alpha'_1, 3\alpha_2 = \alpha'_2$  и  $\sqrt{6}\alpha_3 = \alpha'_3$ . Во втором случае то же уравнение (16) получается после выполнения подстановки  $2g_i = g_i$ . В третьем случае вообще участвует только одно поле.

Можно рассмотреть и более сложные случаи, включающие, например, взаимодействие между тремя полями. Тогда наряду с взаимодействиями типа (18) может быть построено взаимодействие  $\beta$ -распадного типа  $(\bar{\psi}\psi)(\bar{\varphi}, \chi)$ . Для рассмотрения этих случаев применимы те же самые методы, однако задача становится гораздо более обременительной. Хотя изучение этих более сложных случаев, по-видимому, не лишено интереса, нет никаких ясных фи-

<sup>11</sup> Авторы благодарны Б. Л. Иоффе, указавшему, что формфактор приведенного вида устраняет противоречие с тождеством Уорда.

зических оснований, позволяющих рассчитывать на получение других результатов.

Таким образом, выраженная во «Введении» надежда на то, что выбор знака константы взаимодействия мог бы привести к результату, отличному от получающегося в других типах локальных взаимодействий, не оправдалась.

Во всех рассмотренных до настоящего времени простейших случаях локального взаимодействия физическое взаимодействие между полями отсутствует.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 102, 489, 1955 (Собр. трудов, № 83).
- [2] И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 103, 1005, 1955; 104, 51, 1955; 105, 461, 1955.
- [3] I. Ya. Pomeranchuk, V. V. Sudakov, K. A. Ter-Margharosyan. Phys. Rev., 103, 784, 1956.
- [4] E. Fermi, C. Yang. Phys. Rev., 76, 1739, 1949.
- [5] B. Jovet. Nuovo Cim., 5, 1, 1957.
- [6] H. Lehmann. Nuovo Cim., 11, 342, 1954.
- [7] R. Feynman. Phys. Rev., 76, 769, 1949.

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДОМ СЕТОК

Совместно с Н. Н. МЕЙМАНОМ и И. М. ХАЛАТНИКОВЫМ

Труды III Всесоюзного математического съезда.

Москва, июнь — июль, 1956; 3, Обзорные доклады. Изд-во АН СССР, 1958, стр. 92

В докладе изложены некоторые способы численного интегрирования уравнений гиперболического и параболического типов, разработанные нами в 1951—1952 гг.

Авторы надеются в скором времени опубликовать специальную статью, и поэтому здесь дается лишь эскизное и беглое описание методов. Шаги по пространственной координате  $x$  и по времени  $t$  обозначим через  $\Delta x$  и  $\Delta t$ . Значение функции  $u(x, t)$  в узлах сетки  $(m\Delta x, n\Delta t)$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа, будем обозначать через  $u_m^n$ .

## § 1. Общие соображения

При замене дифференциального уравнения разностным сразу же возникает вопрос о степени аппроксимации решения дифференциального уравнения решением разностного уравнения. Имеются два принципиально разных источника неточности: 1) неточность решения разностного уравнения, 2) неточности, вытекающие из замены дифференциального оператора разностным.

Роль неточностей первого рода обычно крайне преувеличивается. При устойчивости разностной схемы — смысл этого будет указан ниже — ошибки этого рода доступны нашему контролю: увеличивая число знаков в счете, мы можем уменьшить ошибки.

Смысл неточности второй категории раскрыт в работе одного из авторов (ДАН СССР, 97, вып. 4, 1954). В той же работе показано, как можно строго определить понятие устойчивости разностной схемы. Строгое определение устойчивости не допускает удобных критериев проверки и поэтому не является рабочим.

Мы пользовались тем же определением устойчивости, что и Дж. Нейман. Пусть  $u_m^n$  — искомая функция, определяемая из разностного уравнения и начальных данных. В случае постоянных коэффициентов начальному возмущению вида  $\delta u = \delta^0 e^{irm}$  соответствует возмущение решения  $\delta u_m^n = \delta^n e^{irm}$ . Схема считается устойчивой, если отношение амплитуды возмущения на  $n$ -м слое  $\delta^n$  к  $\delta^0$ ,  $n = t/\Delta t$  остается ограниченным при  $\Delta t \rightarrow 0$  для всех  $l$ . Это определение изменяется очевидным образом в случае нескольких неизвестных функций.

Не вдаваясь в детали, заметим только, что критерий понимаемой таким образом устойчивости сводится к вполне обозримым алгебраическим неравенствам.

Естественно различать два вида разностных схем: локальные и нелокальные. Локальные схемы характерны тем, что разностное уравнение содержит точно один член со старшим временным индексом. В этом случае значение  $u_m^{n+1}$  вычисляется непосредственно по значениям в соседних точках решетки на низших слоях.

Можно показать, что для модельного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

все устойчивые локальные схемы должны удовлетворять условию

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < \min \frac{1}{|a|},$$

что делает счет весьма трудоемким и менее точным, так как искусственно увеличивается область влияния начальных данных.

От этого жесткого условия свободны нелокальные схемы, при которых разностный оператор содержит не менее двух старших по временному индексу членов. При этом, однако, нужно кроме устойчивости по временному индексу требовать устойчивости и по пространственному индексу. Рассмотрим, например для уравнения (1.1) следующую схему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\approx \frac{1}{2\Delta t} [(u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n) + (u_m^{n+1} - u_m^n)], \\ \frac{\partial u}{\partial x} &\approx \frac{1}{2\Delta x} [(u_{m+1}^n - u_m^n) + (u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1})]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Разностное уравнение имеет вид

$$(u_{m+1}^{n+1} + u_m^{n+1} - u_{m+1}^n - u_m^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1} + u_{m+1}^n - u_m^n) = 0. \quad (1.3)$$



Для исследования устойчивости по временному индексу считаем коэффициент  $a$  постоянным и полагаем  $u_m^n = \zeta^n e^{ir m}$ . Тогда получим

$$\zeta(r) = \frac{\cos \frac{r}{2} - ia \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \frac{r}{2}}{\cos \frac{r}{2} + ia \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \frac{r}{2}}. \quad (1.4)$$

При любом значении  $a \frac{\Delta t}{\Delta x} |\zeta(r)| = 1$  и схема устойчива по временному индексу. Рассматривая в уравнении (1.3) члены на  $n$ -м слое как известные, запишем уравнение в виде

$$\left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_{n+1}^{n+1} + \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_m^{n+1} = D_m^n, \quad (1.5)$$

где  $D_m^n$  — известная величина. Решение складывается из частного решения неоднородного и общего решения однородного уравнения

$$\left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_{m+1} + \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_m = 0. \quad (1.6)$$

Это решение имеет вид  $u_m = q^m$ , где

$$q = - \frac{1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}}{1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x}}. \quad (1.7)$$

При счете слева направо условие устойчивости по пространству заключается в неравенстве  $|q| < 1$ , т. е.  $a > 0$ ; при счете справа налево условием устойчивости является неравенство  $|q| > 1$ , т. е.  $a < 0$ .

Если счет ведется слева направо, то из какого-то условия нужно определить значение  $u_m^{n+1}$  в крайней левой точке. Аналогично при счете справа налево.

Принципиальное преимущество нелокальных схем состоит в том, что такие схемы можно составлять так, что отношение шагов  $\Delta t / \Delta x$  не ограничено условиями устойчивости. Шаги по  $t$  и  $x$  лимитируются лишь степенью однородности коэффициентов уравнения. Эти схемы точнее локальных.

## § 2. Интегрирование уравнений гидродинамики

Обозначим через  $\rho$  плотность,  $p$  — давление,  $v$  — скорость,  $S$  — энтропию. Уравнения имеют вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = g_1, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = g_2, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g_3, \quad (2.3)$$

где  $g_1, g_2, g_3$  — известные функции от всех величин.

Величины  $S, p$  и  $\rho$  должны удовлетворять еще уравнению состояния  $S = F(\rho, p)$ ,  $F$  — известная функция.

Решается задача на полуоси  $0 \leq x < \infty$  при  $0 \leq t$ . На интервале  $0 \leq x < \infty$  заданы начальные данные функций  $p, v$  и  $S$ ; а на границе  $x = 0$  заданы соотношения

$$\Phi_1(p, v, S) = 0 \text{ и } \Phi_2(p, v, S) = 0.$$

Уравнения (2.2), (2.3) можно заменить равносильными уравнениями

$$\left( \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c \frac{\partial v}{\partial t} \right) + (v + c) \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial v}{\partial x} \right) = c^2 \overbrace{\left( g_2 - g_1 \frac{\partial \rho}{\partial S} \right)}^{\varphi_1} + \rho c g_3, \quad (2.2')$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial t} - \rho c \frac{\partial v}{\partial t} \right) + (v - c) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial v}{\partial x} \right) = c^2 \overbrace{\left( g_2 - g_1 \frac{\partial \rho}{\partial S} \right)}^{\varphi_2} - \rho c g_3, \quad (2.3')$$

где  $c = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$  — местная скорость звука.

Система (2.1), (2.2'), (2.3') обладает тем свойством, что в каждое уравнение входит лишь одна характеристическая комбинация  $dS, dp + \rho c dv, dp - \rho c dv$ , которая переносится с соответствующей скоростью  $v, v + c, v - c$ . Скорости  $v$  и  $v + c$  остаются положительными, а скорость  $v - c$  при переходе из дозвуковой области в сверхзвуковую переходит от отрицательных значений к положительным.

Не выписывая формул, опишем принцип счета. Пусть система проинтегрирована до момента  $n\Delta t$  и нужно найти значения функций в момент  $(n + 1)\Delta t$ . Воспользуемся описанной выше схемой с большими шагами по  $t$ . Определим в  $n$ -м ряду звуковую точку, т. е. точку, в которой  $v = c$ . Характеристика уравнения (2.3') в этой точке параллельна оси  $t$ . Проинтегрируем уравнение (2.3')

вдоль куска этой характеристики. Так как  $v - c = 0$ , то интегрирование сводится к вычислению комбинаций  $\Delta p - \rho c \Delta v = \varphi_2 \Delta t$ , где  $\Delta$  — символ приращения за время  $\Delta t$ . Уравнение (2.3') мы рассматриваем как уравнение относительно  $\Delta p_m - \rho c \Delta v_m$ , причем в звуковой точке это значение уже известно. Слева от этой точки  $v - c < 0$ , справа  $v - c > 0$ , поэтому, как показано выше, вычисление неголономного дифференциала  $\Delta p - \rho c \Delta v$  устойчиво по пространству и при счете налево от звуковой точки и счете направо. Двигаясь налево, мы дойдем до точки  $x = 0$  и вычислим  $\Delta p - \rho c \Delta v$  в точке  $(0, n \Delta t)$ . Вместе с граничными условиями это дает возможность найти в граничной точке  $(0, n \Delta t)$  значения  $\Delta p + \rho c \Delta v$  и  $\Delta S$ . Так как  $v + c$  и  $v$  положительны, то для уравнений (2.2') и (2.1) устойчив счет направо, и, двигаясь направо, мы найдем приращения  $\Delta p + \rho c \Delta v$  и  $\Delta S$  во всех точках  $n$ -го ряда. Зная  $\Delta p - \rho c \Delta v$ ,  $\Delta p + \rho c \Delta v$  и  $\Delta S$  во всех точках  $n$ -го ряда, мы определим значения  $p$ ,  $v$  и  $S$  во всех точках  $n + 1$ -го ряда. Так как при  $n = 0$  значения функций известны, то счет полностью определен.

### § 3. Разностные схемы для уравнения теплопроводности

Для более наглядного выяснения принципиальной стороны вопроса будем сначала рассматривать одномерное уравнение теплопроводности с постоянным коэффициентом температуропроводности

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (3.1)$$

Остановимся сначала коротко на таких схемах счета, в которых искомое значение функции в некоторой точке непосредственно выражается через значение функции в соседних точках («локальные схемы»).

Простейший пример устойчивой локальной схемы для уравнения теплопроводности дает схема

$$f_m^{n+1} - f_m^n = \bar{\chi} [f_{m+1}^n - 2f_m^n + f_{m-1}^n], \quad \bar{\chi} = \chi \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}. \quad (3.2)$$

Для выяснения пределов ее устойчивости полагаем

$$f_m^n = S^n e^{ikm}.$$

Тогда  $S = 1 - 2\bar{\chi}(1 - \cos k)$  и условие  $|S| < 1$  сводится к неравенству  $2\bar{\chi}(1 - \cos k) < 2$ , откуда

$$\bar{\chi} < \frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

Это условие можно назвать естественным условием задачи; оно представляет собой очень тяжелое ограничение, накладываемое на шаги.

Этим недостатком не обладает другая схема — «ромбическая»; она имеет вид

$$\frac{1}{2} (f_m^{n+1} - f_m^{n-1}) = \bar{\chi} [f_{m+1}^n - (f_m^{n+1} + f_m^{n-1}) + f_{m-1}^n] \quad (3.4)$$

или

$$(1 + 2\bar{\chi}) f_m^{n+1} - (1 - 2\bar{\chi}) f_m^{n-1} = 2\chi (f_{m+1}^n + f_{m-1}^n).$$

Характеристическое уравнение устойчивости для этого конечно-разностного уравнения есть

$$(1 + 2\bar{\chi})S^2 - (1 - 2\chi) = 4\bar{\chi}S \cos k. \quad (3.5)$$

Для квадратного уравнения  $aS^2 + bS + c = 0$  ( $a > 0$ ) с вещественными коэффициентами условие того, чтобы оба корня были по модулю меньше единицы, таково:

$$|b| < a + c,$$

$$|c| < a.$$

Для уравнения (3.5) второе условие выполнено, а первое дает

$$|\cos k| < 1.$$

Это неравенство превращается в равенство при  $k = \pi$  ( $S = -1$ ), так что имеет место, по нашей терминологии, слабая устойчивость. В реальных условиях счета это приводит к разбалтыванию, для устранения которого следует воспользоваться тем или иным способом усреднения по пространству. В ромбической схеме отсутствует, таким образом, условие, ограничивающее величину шагов в смысле устойчивости. Ее существенный недостаток заключается, однако, в значительной неточности, связанной с введением второй производной по времени. Эта неточность такова, что практически вводит условие, совпадающее с (3.3). Поэтому ромбическая схема могла бы позволить вести счет со сравнительно большими шагами лишь с помощью введения громоздких итерационных схем; на этом вопросе мы остановимся еще в заключение этого раздела.

Далее излагаются методы, свободные от ограничений шага, налагаемых требованиями устойчивости или связанных с вводимыми в разностную схему (по сравнению с дифференциальным уравнением) неточностями. Эти методы в известном смысле соответствуют изложенному нами ранее методу «бегущего» счета для гидродинамических (гиперболических) уравнений. В отличие от локаль-

ных схем к вычислению искомой функции в каждой точке при этих методах привлекаются значения функции в предыдущие моменты и в удаленных пространственных точках.

Исходим из следующей разностной схемы:

$$f_m^{n+1} - f_m^{n-1} = \bar{\chi} \{ (f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1})^{n+1} + (f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1})^{n-1} \}. \quad (3.6)$$

Эта схема сама по себе устойчива при любых шагах по времени и имеет достаточную точность, так как не вводит лишней второй производной по времени. Ее характеристическое условие устойчивости есть

$$\left( S - \frac{1}{S} \right) = 2\bar{\chi} (\cos k - 1) \left( S + \frac{1}{S} \right),$$

откуда

$$S^2 = \frac{1 - 2\bar{\chi}(1 - \cos k)}{1 + 2\bar{\chi}(1 - \cos k)},$$

так что всегда (в том числе и для  $k = \pi$ )  $S^2 < 1$ . Следует, однако, иметь в виду, что при счете очень большими шагами по времени параметр устойчивости  $S$  оказывается близким к  $-1$ . Это может привести к практической необходимости усреднения по времени. Подобное усреднение можно, например, проводить по схеме

$$f^n = \frac{1}{4} (f^{n-1} + 2f^n + f^{n+1}). \quad (3.7)$$

Уравнение (3.6) представляет собой конечно-разностное уравнение второго порядка, решения которого однозначно определяются заданием граничных условий на двух краях области интегрирования. Нахождение этого решения может быть осуществлено приведением уравнения (3.6) к разностной схеме «бегущего» счета. Для этой цели нами были развиты два метода.

а) П е р в ы й в а р и а н т б е г у щ е г о с ч е т а. Вводим симметричную сумму

$$\Phi_m^n = f_m^{n+1} + f_m^{n-1}. \quad (3.8)$$

Тогда схема (3.6) переписется в виде

$$\Phi_m - 2f_m^{n-1} = \bar{\chi} [\Phi_{m+1} - 2\Phi_m + \Phi_{m-1}]$$

или

$$\bar{\chi}\Phi_{m+1} - (2\bar{\chi} + 1)\Phi_m + \bar{\chi}\Phi_{m-1} = -2f_m^{n-1}, \quad (3.9)$$

где в правую сторону перенесено выражение, содержащее значения  $f$  только в ранний момент времени.

Составляем характеристическое уравнение

$$\bar{\chi} q^2 - (2\bar{\chi} + 1)q + \bar{\chi} = 0.$$

В дальнейшем под  $q$  мы будем понимать тот из корней этого уравнения, который меньше единицы:

$$q = \frac{1}{2\bar{\chi}} [2\bar{\chi} + 1 - \sqrt{4\bar{\chi} + 1}] \quad (3.10)$$

(второй корень есть  $1/q$ ). Тогда разностное уравнение (3.9) может быть переписано в следующем операторном виде:

$$\left(\frac{T}{q} - E\right) \bar{\chi} (qT - E) \Phi_{m-1} = -2f_m^{n-1}, \quad (3.11)$$

где  $E$  — единичный оператор, а  $T$  — оператор сдвига ( $T\Phi_{m-1} = \Phi_m$ ). Вид этого уравнения показывает, что можно произвести его «факторизацию» путем введения вспомогательных величин, получающихся при действии на  $\Phi_{m-1}$  каждого из двух операторных множителей:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \bar{\chi} (E - qT) \Phi_{m-1} = \chi (\bar{\Phi}_{m-1} - q\Phi_m), \\ \psi_m &= -\bar{\chi} \left(E - \frac{1}{q} T\right) \Phi_{m-1} = -\bar{\chi} \left(\Phi_{m-1} - \frac{1}{q} \Phi_m\right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из уравнения (3.11), следует тогда, что эти величины удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left(E - \frac{1}{q} T\right) \varphi_m &= \varphi_m - \frac{1}{q} \varphi_{m+1} = -2\bar{\chi} f_m^{n-1}, \\ (E - qT) \psi_m &= \psi_m - q\psi_{m+1} = 2\bar{\chi} f_m^{n-1}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

а сложив оба равенства (3.12), получим

$$\psi_m + \varphi_m = \bar{\chi} \left(\frac{1}{q} - q\right) \Phi_m \quad (3.14)$$

или

$$f_m^{n+1} = f_m^{n-1} + \frac{\varphi_m + \psi_m}{\sqrt{4\bar{\chi} + 1}}.$$

Формулы (3.13) и (3.14) сводят разностную схему к «бегущему» счету двух вспомогательных величин, причем одна из них ( $\psi$ ) считается справа налево (от больших  $m$  к меньшим), а другая ( $\varphi$ ) — слева направо, после чего искомые значения  $f^{n+1}$  определяются по суммам  $\psi_m + \varphi_m$ .

Обычные граничные условия на краях области интегрирования представляют собой линейную связь между  $f$  и  $\partial f / \partial x$ ; такое условие эквивалентно линейной связи между значениями  $\psi$  и  $\varphi$  в данной точке. Общий порядок вычислений при таких граничных условиях заключается поэтому в следующем. Взяв какое-либо значение  $\psi = \psi_a$  на правом краю области (точка  $a$ ), производим «прогонку»  $\psi$  справа налево до точки  $b$  (левый край). По полученному значению  $\psi_b$  с помощью граничного условия в точке  $b$  определяем значение  $\varphi = \varphi_b$  и затем производим «прогонку»  $\varphi$  слева направо. Мы придем в результате обратно в точку  $a$  с определенным значением  $\varphi = \varphi_a$ , но  $\varphi_a$  и  $\psi_a$  не будут, вообще говоря, удовлетворять требуемому граничному условию в точке  $a$ . Пусть  $\psi_a$  — значение  $\psi$ , которое вместе с  $\varphi_a$  удовлетворяет этому условию. Тогда, строго говоря, для получения точного решения надо произвести еще раз описанную «прогонку» исходя из значения  $\psi = \psi_a$  величины  $\psi$  в точке  $a$ . Фактически, однако, влияние всякого изменения  $\psi$  или  $\varphi$  чрезвычайно быстро затухает «вниз по направлению прогонки». Поэтому оказывается достаточным ввести соответствующую поправку лишь в значения в нескольких точках, примыкающих к правому краю; величины же  $\varphi$  вообще не меняются.

б) Второй вариант бегущего счета. В отличие от предыдущего метода здесь нет двух независимых вспомогательных величин, «прогоняемых» каждая в своем направлении, а производится непосредственное решение конечно-разностного уравнения путем «прогонки» величин, непосредственно в него входящих. Это решение может быть осуществлено различными алгебраически тождественными способами.

Запишем исходное конечно-разностное уравнение второго порядка в виде двух уравнений первого порядка. Этому соответствует запись дифференциального уравнения теплопроводности в виде двух уравнений первого порядка путем введения в качестве вспомогательной величины теплового потока:

$$\begin{aligned} q &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \\ C \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\partial q}{\partial x} + K. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Эти уравнения записываем в виде разностной схемы

$$F_{m+1/2} - F_{m-1/2} = -\frac{\Delta x}{\kappa_m^n} I_m, \quad (3.16)$$

$$I_{m+1} - I_m = -\frac{\Delta x}{\Delta t} C_{m+1/2}^n F_{m+1/2} + 2\Delta x K_{m+1/2}^n + 2\frac{\Delta x}{\Delta t} C_{m+1/2}^n T_{m+1/2}^{n-1}, \quad (3.17)$$

где введены обозначения:

$$F_{m+1/2} = T_{m+1/2}^{n+1} + T_{m+1/2}^{n-1},$$

$$I_m = (q_m^{n+1} + q_m^{n-1}).$$

Значения  $I$  вычисляются в целых точках ( $x = m\Delta x$ ), а  $F$  — в полудельных точках в соответствии с применяемой нами «шахматной» счетной сеткой. Граничные условия записываются также в разностной схеме. Возьмем, например, в качестве левого граничного условия  $I_0 = 0$ .

Наряду с разностными неоднородными уравнениями (3.16) вводим однородные уравнения

$$\tilde{F}_{m+1/2} - \tilde{F}_{m-1/2} = -\frac{\Delta x}{x_m^n} \tilde{I}_m, \quad (3.18)$$

$$\tilde{I}_{m+1} - \tilde{I}_m = -\frac{\Delta x}{\Delta t} C_{m+1/2}^n \tilde{F}_{m+1/2}.$$

Если построить решения неоднородной и однородной систем, удовлетворяющие граничному условию на левом (или на правом) конце, то их сумма с надлежащим образом подобранным коэффициентом даст искомое решение, удовлетворяющее также и граничному условию на правом (или левом) конце. Построение этих частных решений осуществляется следующим образом. Задавшись в точке  $m = 0$  значением  $I_0 = 0$  и взяв произвольное (лучше экстраполированное из предыдущего момента) значение  $F_{1/2}$ , путем «прогонки» по уравнениям (3.16) и (3.18) слева направо последовательно определим  $I$  и  $F$  во всех точках. Из условия на правом конце определяется затем коэффициент, с которым надо сложить оба решения для того, чтобы получить решение, удовлетворяющее условиям на обеих границах. Аналогичным образом можно получить искомое решение с помощью двух частных решений однородного и неоднородного уравнений, удовлетворяющих граничному условию на правом конце и получающихся путем «прогонки» справа налево.

Описанный способ весьма прост, но имеет тот недостаток, что при определении искомого решения как суммы двух частных решений происходит, вообще говоря, значительное сокращение знаков; это сокращение тем значительнее, чем менее удачно выбрано значение  $F_{1/2}$ , с которым производилась «прогонка».

Этим недостатком не обладает способ, в котором искомое решение неоднородного уравнения строится по двум частным решениям однородного уравнения, удовлетворяющим соответственно граничному условию на правом и на левом краях. Пусть  $\tilde{F}^{(1)}$ ,



$\tilde{I}^{(1)}$  — решение однородных уравнений, удовлетворяющее условию на левом краю с произвольным параметром  $\tilde{F}_{1/2}^{(1)}$ , а  $\tilde{F}^{(2)}$  и  $\tilde{I}^{(2)}$  — решение тех же уравнений, удовлетворяющее граничному условию на правом конце с произвольным параметром  $I_{\mu}^{(2)}$ . Первое получается «прогонкой» по уравнениям (3.18) слева направо, а второе — «прогонкой» справа налево. Обозначим через  $W$  вронсиан:

$$W = \tilde{F}_{m+1/2}^{(1)} \tilde{I}_m^{(2)} - \tilde{F}_{m+1/2}^{(2)} \tilde{I}_m^{(1)};$$

эта величина не зависит от индекса  $m$ . Легко убедиться в том, что решение неоднородной системы (3.16), удовлетворяющее обоим граничным условиям, есть

$$\begin{aligned} F_{m+1/2} &= C_{m+1/2}^{(1)} \tilde{F}_{m+1/2}^{(1)} + C_{m+1/2}^{(2)} \tilde{F}_{m+1/2}^{(2)}, \\ I_m &= C_{m+1/2}^{(1)} \tilde{I}_m^{(1)} + C_{m+1/2}^{(2)} \tilde{I}_m^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$\begin{aligned} C_{m+1/2}^{(1)} &= \frac{1}{W} \sum_{k=\mu-1}^m L_{k+1/2} \tilde{F}_{k+1/2}^{(2)}, \\ C_{m+1/2}^{(2)} &= \frac{1}{W} \sum_{k=0}^m L_{k+1/2} \tilde{F}_{k+1/2}^{(1)}, \\ C_{\mu+1/2}^{(1)} &= 0, \quad C_{\mu+1/2}^{(2)} = -\frac{1}{W} L_{\mu+1/2} \tilde{F}_{\mu+1/2}^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

( $L_{m+1/2}$  из (3.21)), где  $\mu$  — номер крайней правой точки.

В этом способе построения решения не происходит сокращения знаков; его недостаток — большая громоздкость вычислений.

Наиболее удобным является, по-видимому, видоизменение «прогонки», предложенное И. М. Гельфандом. В этом способе исходим непосредственно из конечно-разностного уравнения второго порядка, получающегося путем исключения  $I$  из уравнения (3.16):

$$\begin{aligned} x_m F_{m+1/2} + x_{m-1} F_{m-1/2} - M_{m-1/2} F_{m-1/2} &= -L_{m-1/2}, \\ M_{m-1/2} &= x_m + x_{m-1} + C_{m-1/2} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}, \\ L_{m-1/2} &= 2K_{m-1/2} (\Delta x)^2 + 2C_{m-1/2} f_{m-1/2}^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Это уравнение связывает значения  $F$  в трех соседних пространственных точках. Если написать связь двух соседних значений  $F$  в виде

$$F_{m+1/2} = A_m F_{m-1/2} + B_m, \quad (3.22)$$

то уравнение (3.21) переписывается в виде рекуррентного соотношения между последовательными значениями  $A_m$  и  $B_m$ . Именнo, подставив (3.22) в (3.21), получим связь между  $F_{n-1/2}$  и  $F_{n-3/2}$  с коэффициентами

$$\begin{aligned} A_{m-1} &= \frac{\kappa_{m-1}}{M_{m-1/2} - \kappa_m A_m}, \\ B_{m-1} &= \frac{L_{m-1/2} + \kappa_m B_m}{M_{m-1/2} - \kappa_m A_m}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Граничное условие на правом конце может быть записано в виде

$$F_{\mu+1/2} = A_\mu F_{\mu-1/2} + B_\mu \quad (3.24)$$

с известными  $A_\mu$  и  $B_\mu$ . Граничное же условие на левом краю можно написать в виде  $F_{-1/2} = F_{1/2}$ , откуда  $F_{1/2} = A_0 F_{1/2} + B_0$  или

$$F_{1/2} = \frac{B_0}{1 - A_0}. \quad (3.25)$$

Вычисления располагаются следующим образом. Путем прогонки справа налево по рекуррентным соотношениям (3.23), начиная от точки  $\mu$ , последовательно определяем все коэффициенты  $A_m$  и  $B_m$ . По полученным значениям  $A_0$  и  $B_0$  определяется значение  $F_{1/2}$  из (3.25), вслед за чем по соотношениям (1.22) вычисляются значения  $F$  во всех точках.

Независимо от способа прогонки решение устойчиво по пространству в том смысле, что (при заданных граничных условиях) всякая ошибка экспоненциально затухает в обе стороны от места ошибки. Что же касается устойчивости по времени, то сюда относится все сказанное на стр. 399, поскольку исходное конечно-разностное уравнение осталось тем же. Как уже было указано, практически оказывается необходимым (при интегрировании с большими шагами по времени) производить усреднение по схеме (3.7), при этом определение (3.17) величины  $F$  надо писать в виде

$$F_{m+1/2} = T_{m+1/2}^{n+1} + \bar{T}_{m+1/2}^{n-1}.$$

Покажем теперь, что это усреднение не отражается заметным образом на точности. Для этого рассмотрим модельное уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = e^{\lambda t}$$

с разностной схемой (полагаем  $\Delta t = 1$ ):

$$f^{n+1} - f^{n-1} = 2e^{\lambda n},$$

$$f^n = \frac{1}{4} (f^{n+1} + 2f^n + f^{n-1}),$$

воспроизводящей основные особенности нашей задачи. Решение этих разностных уравнений есть

$$f^n = e^{\lambda n} \frac{e^\lambda + 2}{2e^\lambda - 1 - e^{-\lambda}}.$$

Точное же решение дифференциального уравнения есть  $f = e^{\lambda t} / \lambda$ . Отношение обоих решений равно

$$\frac{\lambda(2 + e^\lambda)}{2e^\lambda - 1 - e^{-\lambda}}$$

или при малых  $\lambda$  равно  $1 + \lambda / 6$ . Таким образом, даже при  $\lambda = 0,3$ , чему соответствует возрастание  $f$  в 1,35 раза на шаге, погрешность достигает всего 5%.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

# ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ВЕРШИННЫХ ЧАСТЕЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ЖЭТФ, 37, 62, 1959

Развит общий метод нахождения особенностей величин квантовой теории поля на основе диаграммной техники.

В последние годы большое число работ было посвящено так называемым дисперсионным соотношениям. Эти соотношения выражают собой, как известно, аналитические свойства величин квантовой теории поля. Поэтому основным здесь является вопрос о местонахождении особенностей соответствующих величин. Как выяснилось в последнее время [1, 2], наиболее эффективным способом исследования расположения и характера особенностей вершинных частей является непосредственное рассмотрение диаграмм. Часто считается, что рассмотрение с помощью диаграмм недостаточно убедительно, поскольку оно будто бы связано с применением теории возмущений в отличие от других будто бы более строгих методов. Такой взгляд в действительности основан на недоразумении. Поскольку строгая теория, использующая гамильтониан, обращает взаимодействие в нуль, то единственное полностью строгое дисперсионное соотношение в этой теории есть  $0 = 0$ . Ставя задачу об изучении аналитических свойств величин квантовой теории поля, мы в действительности выходим за рамки существующей теории. При этом автоматически делается допущение, что существует не обращающаяся в нуль теория, не пользующаяся  $\psi$ -операторами и гамильтонианами, но сохраняющая диаграммную технику. Поэтому использование диаграммной техники при выводе дисперсионных соотношений является в действительности единственно последовательным, поскольку если отказаться от диаграммной техники, то теряет смысл самая постановка вопроса.

Диаграммный способ отнюдь не эквивалентен теории возмущений, поскольку в нем в качестве частиц рассматриваются все стабильные, с точки зрения сильных взаимодействий, частицы независимо от того, являются ли они «простыми» или «сложными». Фактически при таком рассмотрении делаются первые шаги к построению новой диаграммной техники, являющейся обобщением старой. Эта техника должна будет стать основой будущей теории. Разумеется, применимость диаграммной техники в таком виде в будущей теории сама гипотетична, и проверка получающихся при этом результатов будет также и проверкой самой гипотезы.

К сожалению, получающиеся при рассмотрении более сложных диаграмм выражения становятся очень длинными, что затрудняет их исследование. Можно, однако, показать, что такое исследование может быть проведено в общей форме и очень успешно соответствующим графическим изображением.

Произвольная диаграмма изображает некоторый интеграл

$$\int \frac{B d^4 k d^4 l \dots}{A_1 A_2 A_3 \dots}, \quad (1)$$

где

$$A_i = m_i^2 - q_i^2, \quad (2)$$

$q_i$  — некоторый 4-импульс, соответствующий данной линии в диаграмме,  $m_i$  — масса соответствующей частицы, а  $B$  — некоторым многочлен от векторов  $q_i$ . Согласно известному методу Фейнмана, можно написать

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = (n-1)! \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n \cdot \delta(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - 1)}{(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n)^n}. \quad (3)$$

Выражение  $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots$ , стоящее в знаменателе, представляет собой полином второй степени по отношению к переменным интегрирования  $k, l, \dots$ . Путем преобразования переменных интегрирования из этого многочлена всегда можно устранить члены, линейные по отношению к  $k, l, \dots$ , после чего получим

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots = \varphi + K(k', l', \dots). \quad (4)$$

Здесь  $K$  — однородная квадратичная форма от новых переменных интегрирования с коэффициентами, зависящими только от параметров  $\alpha_i$ , а  $\varphi$  — неоднородная квадратичная форма от векторов  $p_i$ , характеризующих свободные концы рассматриваемой диаграммы.

Ограничимся случаем действительных значений как квадратов, так и скалярных произведений векторов  $p_i$ . Легко убедиться в том, что при положительных значениях  $\varphi$  интеграл по  $k, l, \dots$  есть действительная величина (в случае спинорных функций — самосопряженный спинор), поскольку квадратичная форма  $K$  при подстановке  $k_k \rightarrow ik, l_k \rightarrow il, \dots$  становится положительно определенной (ввиду положительности всех  $\alpha_i$ ). Поэтому если  $\varphi > 0$  при всех значениях  $\alpha_i$ , то вершинная часть является действительной; наоборот, если при некоторых значениях  $\alpha_i$   $\varphi < 0$ , то вершинная часть становится комплексной. Ближайшая особенность вершинной части находится, очевидно, при значениях  $p_i$ , при которых  $\varphi$  обращается в нуль при определенных значениях всех величин  $\alpha_i$  и положительна при всех других значениях  $\alpha_i$ ; другими словами, особенности соответствуют обращению в нуль минимального значения  $\varphi$ , рассматриваемого как функция  $\alpha_i$ . Если речь идет об особенностях уже в области комплексности, то следует рассматривать любой экстремум функции  $\varphi$ . Отметим, что поскольку  $\varphi$  есть однородная функция первого порядка относительно переменных  $\alpha_i$ , то при нахождении условий существования равного нулю экстремума можно исключить условие  $\sum \alpha_i = 1$ .

Обозначим величину  $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A + \dots$  буквой  $f$ . Поскольку  $K$  — квадратичная форма от переменных  $k', l', \dots$ , то ясно, что  $\varphi$  есть значение функции  $f$  при дополнительных условиях

$$\frac{\partial f}{\partial k'} = \frac{\partial f}{\partial l'} = \dots = 0,$$

или, поскольку  $k$  отличается от  $k'$  на постоянный вектор, последнее условие можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \frac{\partial f}{\partial l} = \dots = 0. \quad (5)$$

При нахождении условий минимума необходимо учесть положительность величин  $\alpha_i$ . Отсюда следует, что для каждой величины  $\alpha_i$  должно иметь место либо условие  $\partial \varphi / \partial \alpha_i = 0$ , либо  $\alpha_i = 0$ . В последнем случае для ближайшей особенности, очевидно, должно быть  $\partial \varphi / \partial \alpha_i > 0$ . Далее имеем по определению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial f}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \alpha_i} + \dots$$

Поскольку согласно (5) все  $\partial f / \partial k, \dots$  равны нулю, отсюда следует, что условие  $\partial \varphi / \partial \alpha_i = 0$  эквивалентно условию  $\partial f / \partial \alpha_i = 0$ , т. е. согласно определению  $f$

$$A_i = 0. \quad (6)$$

Таким образом, особенность вершинной части может быть получена путем совместного решения уравнений  $A_i = 0$  (или  $\alpha_i = 0$ ) при дополнительных условиях

$$\sum_i \alpha_i \frac{\partial A_i}{\partial k} = \sum_i \alpha_i \frac{\partial A_i}{\partial l} = \dots = 0. \quad (7)$$

Существенно, что эти уравнения должны иметь решения с положительными  $\alpha_i$ .

Таким образом, относительно каждой линии фейнмановской диаграммы можно утверждать, что она либо удовлетворяет условию  $q_i^2 = m_i^2$ , либо вовсе выпадает из рассмотрения (когда



Рис. 1



Рис. 2

$\alpha_i = 0$ ). В последнем случае рассматриваемую особенность можно приписать не данной диаграмме, а диаграмме, в которой  $i$ -я линия отсутствует, т. е. соединяемые ею вершины сливаются. Поэтому при анализе особенностей диаграммы достаточно ограничиваться случаем, когда все  $\alpha_i \neq 0$ .

Легко видеть, что условие (7) можно написать в виде  $\sum \alpha_i q_i = 0$ , где суммирование производится не по всем линиям фейнмановской диаграммы, а по совокупности линий, образующих замкнутые контуры, причем направление вектора  $q_i$  соответствует направлению обхода контура. Положительность коэффициентов  $\alpha_i$  означает, что если представлять себе векторы  $q_i$  как направления сил, то возможность решения уравнений (7) означает возможность подобрать такие значения сил, при которых они могли бы уравновешиваться. С помощью предлагаемого метода можно сравнительно просто разбираться в возникающих особенностях. Начнем с рассмотрения диаграмм для гриновской функции. В этом случае все векторы  $q$ , определяющиеся из указанных уравнений, очевидно, параллельны вектору  $p$ .

Рассмотрим диаграмму рис. 1. Написав формулу  $\sum \alpha_i q_i = 0$  для контура, образованного любой парой линий, и учитывая положительность величин  $\alpha_i$ , мы приходим к выводу, что все векторы  $q_i$  одинаково направлены по отношению к вершинам диаграмм. Учитывая, что длины векторов равны соответствующим массам, мы без труда получим для особенностей очевидный результат  $p^2 = (\sum m_i)^2$ . Отметим, что в случае гриновских функций рассмот-

рение каких-либо других диаграмм, например диаграммы типа рис. 2, является излишним. Действительно, число уравнений для определения величин  $\alpha_i$  равно числу независимых контуров на диаграмме, т. е. в данном примере равно 2. Между тем полное количество величин  $\alpha_i$  в данном примере равно 5; отсюда ясно, что одна из них может быть положена равной нулю, в результате чего эта диаграмма сведется к одной из диаграмм уже рассмотренного



Рис. 3

типа. Отметим, что все эти рассуждения в равной степени применимы и к диаграммам типа рис. 3, где роль импульса играет соответствующая сумма импульсов.

Перейдем теперь к вершинной части с тремя внешними концами. Поскольку эти три конца представляют собой благодаря

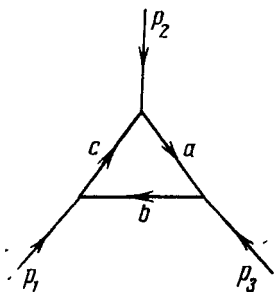


Рис. 4

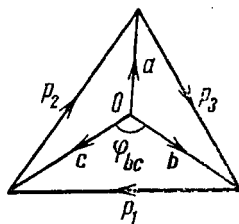


Рис. 5

закону сохранения три вектора, лежащих в одной плоскости, а векторы  $k, l, \dots$  определяются из формул (6), (7), то ясно, что эти векторы лежат в той же плоскости. Таким образом, в этом случае задача сводится к рассмотрению плоской системы векторов.

Рассмотрим прежде всего простейший пример, подробно разобранный Карплюсом, Зоммерфильдом и Уичменом [3] (рис. 4). Легко видеть, что соотношение между векторами изображается схемой на рис. 5. Условие (7), очевидно, требует, чтобы точка  $O$  лежала внутри треугольника. При этом молчаливо предполагается, что все векторы обладают свойствами евклидовских (а не псевдоевклидовских) векторов, что для ближайших особенностей легко доказывается.



Предварительно покажем, как сформулировать аналитически соотношения, выражаемые графически на языке схем. Рассмотрим прежде всего схему рис. 5, соответствующую диаграмме рис. 4. Если ввести единичные векторы  $n_a = q_a / m_a$ ,  $n_b = q_b / m_b$ ,  $n_c = q_c / m_c$ , то условие (7) может быть написано в виде

$$\beta_a n_a + \beta_b n_b + \beta_c n_c = 0, \quad (8)$$

где  $\beta_i = \alpha_i m_i$  — очевидно, также положительные величины. Проектируя эти уравнения последовательно на векторы  $n_a$ ,  $n_b$ ,  $n_c$  и вводя обозначения  $(n_a n_b) = \mu_c = \cos \varphi_{ab}$  и т. д., мы получаем три уравнения:

$$\begin{aligned} \beta_a + \beta_b \mu_c + \beta_c \mu_b &= 0, & \beta_a \mu_c + \beta_b + \beta_c \mu_a &= 0, \\ \beta_a \mu_b + \beta_b \mu_a + \beta_c &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Равенство нулю определителя этой системы дает уравнение

$$1 + 2\mu_a \mu_b \mu_c = \mu_a^2 + \mu_b^2 + \mu_c^2, \quad (10)$$

которое определяет положение особенности при одновременном условии положительности всех  $\beta$ , если учесть, что  $\mu_a$ ,  $\mu_b$ ,  $\mu_c$  связаны с  $p_1^2$ ,  $p_2^2$ ,  $p_3^2$  формулами

$$\mu_a = \frac{m_b^2 + m_c^2 - p_1^2}{2m_b m_c}, \quad \mu_b = \frac{m_a^2 + m_c^2 - p_2^2}{2m_a m_c}, \quad \mu_c = \frac{m_a^2 + m_b^2 - p_3^2}{2m_a m_b}. \quad (11)$$

Возвращаясь к вопросу о свойствах векторов для ближайших особенностей, рассмотрим любой угол, скажем  $\varphi_{bc}$ . Согласно (11)  $\mu_a$  — действительная величина. Она больше  $-1$ , поскольку в противном случае было бы  $p^2 > (m_b + m_c)^2$ , т. е. мы зашли бы

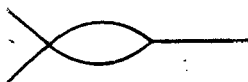


Рис. 6

далее особенности, определяемой диаграммой рис. 6, которая получается из рассматриваемой диаграммы путем ликвидации одной из линий. В то же время из (9) мы видим, что из трех косинусов углов не менее двух должны быть отрицательными. Но отрицательному косинусу, большему  $-1$ , всегда соответствует действительный угол. Поэтому два из трех углов, во всяком случае, действительны, а поскольку сумма их равна  $2\pi$ , то действителен

и третий. Рис. 5, о котором упоминается уже в работе [2], таким образом, полностью решает поставленный вопрос.

Перейдем теперь к более сложным диаграммам. Рассмотрим, например, диаграмму, изображенную на рис. 7. Ей соответствует схема на рис. 8. Построение такой схемы очень просто, если учесть,

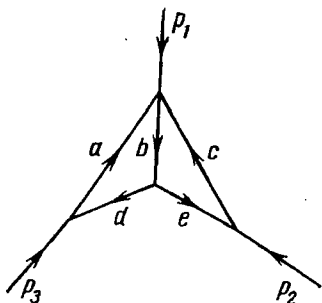


Рис. 7

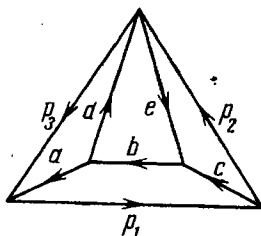


Рис. 8

что каждой точке на фейнмановской диаграмме на схеме соответствует многоугольник с числом сторон, равным числу лучей, сходящихся в этой точке, а каждому многоугольнику на фейнмановской диаграмме соответствует точка на рисунке. Условие (7) требует соответствующего расположения векторов  $a$ ,  $b$  и  $d$ , с одной стороны, и  $b$ ,  $c$  и  $e$  — с другой. Нетрудно написать аналитическое выражение этого рисунка. Треугольник  $bde$ , как и все части рисунка, действителен, поскольку в диаграмме участвуют только устойчивые частицы, и поэтому масса каждой из частиц в  $b$ ,  $d$ ,  $e$  меньше суммы двух других.

В случае, когда один или несколько коэффициентов  $\alpha_i = 0$ , диаграмма упрощается. Так, например, если  $\alpha_c = 0$ , диаграмма рис. 7 перейдет в диаграмму рис. 9, аналогичную рис. 4.

При переходе к более сложным фейнмановским диаграммам обнаруживается, что часто случай, когда все  $\alpha_i \neq 0$ , невозможен. Рассмотрим, например, диаграмму на рис. 10. Число векторных уравнений для  $\alpha_i$  в этом случае равно 2, т. е., учитывая плоский характер векторов, мы имеем четыре уравнения, число же величин  $\alpha_i$  равно 6, и поэтому одна из них может быть положена равной нулю. То же самое относится к диаграмме типа рис. 11.

Легко видеть, как меняются предыдущие результаты, когда дело идет не о ближайших особенностях, т. е. о появлении комплексности, а об особенности в уже комплексных величинах. Если особенность не является ближайшей, то уже нельзя, вообще говоря, считать все углы действительными, как это имело место ранее для ближайших особенностей.

Рассмотрим прежде всего схему рис. 5, соответствующую диаграмме рис. 4. В «евклидовом» случае, когда все углы в ней действительны, все  $\mu_i$  лежат между  $-1$  и  $+1$ . В общем случае изучение уравнения (10) показывает, что соответствующая поверхность в пространстве  $\mu_a, \mu_b, \mu_c$  состоит из четырех частей, пересекающихся друг с другом в трех точках:  $\mu_a = 1, \mu_b = -1, \mu_c = -1$ , и точках, получающихся перестановками индексов  $a, b, c$ . Одна из этих поверхностей представляет собой искривленный треугольник, опирающийся на прямые линии, соединяющие три указанные точки. Этот треугольник соответствует «евклидовому» случаю. Три другие поверхности идут в бесконечность, начинаясь каждая от соответствующей точки пересечения. На каждой из этих поверхностей одно из  $\mu$  положительно и больше единицы, а два других — отрицательны и по абсолютной величине также больше единицы. Как уже указывалось, эти поверхности всегда соответствуют ближайшим особым точкам.

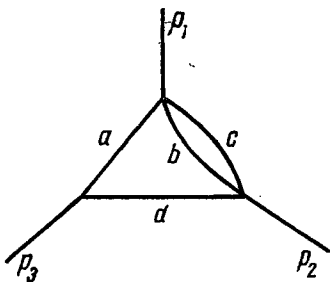


Рис. 9

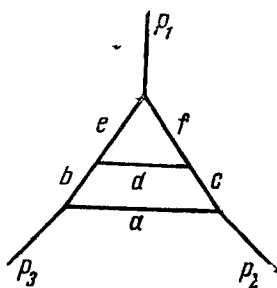


Рис. 10

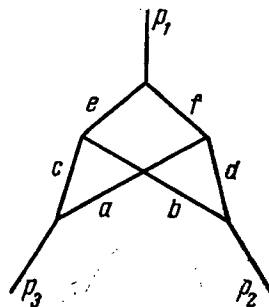


Рис. 11

Легко видеть, что «неевклидов» случай возможен в рассмотренных диаграммах исключительно в диаграмме рис. 4. Например, в схеме рис. 8, соответствующей диаграмме рис. 7, роль векторов  $a, b, c$  играют векторы  $a, b, d$ , с одной стороны, и  $b, c, e$  — с другой. Но углы в треугольнике, составленном векторами  $b, d, e$ , как указывалось, обязательно действительны. В противном случае одна из частей  $b, d, e$  была бы нестабильной. Между тем, как было только что указано, в неевклидовом случае все косинусы должны превышать по абсолютной величине единицу, а следовательно, все углы должны быть комплексными.

Перейдем теперь к рассмотрению фейнмановских диаграмм с четырьмя концами. В этом случае приходится, очевидно, рассматривать схемы, расположенные не на плоскости, а в пространстве, что, естественно, очень усложняет вопрос. Наиболее важными из таких диаграмм являются диаграммы с физическими концами,

т. е. те, в которых квадраты соответствующих импульсов равны квадратам масс частиц. Простейшие особенности связаны с диаграммами типа рис. 12. Средняя линия может здесь соответствовать как одной, так и нескольким частицам. Особенности такой диаграммы соответствуют, очевидно,

$$(p_1 + p_2)^2 = m_a^2,$$

где  $m_a$  — сумма масс соответствующих частиц. Случай одной

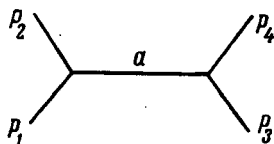


Рис. 12

частицы дает изолированный полюс. Случай же двух частиц является границей комплексной области.

Диаграмма на рис. 13 по своим свойствам полностью соответствует диаграмме на рис. 4 и потому не нуждается в дополнительном разборе.

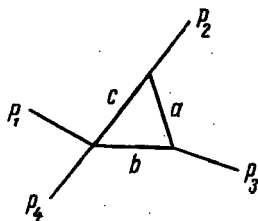


Рис. 13

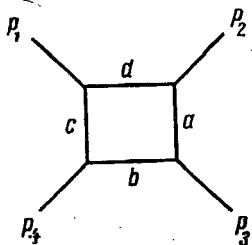


Рис. 14

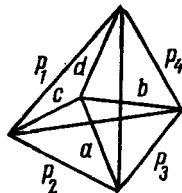


Рис. 15

Диаграмме на рис. 14 соответствует схема рис. 15, где четыре из шести ребер тетраэдра определяются длиной свободных концов, а два других равны соответственно  $p_1 + p_2$  и  $p_2 + p_3$ . (Отметим, что такое графическое построение для этой диаграммы имеется в работе Карплюса и др. [3].) Подробный анализ показывает и здесь, что если речь идет о ближайшей особенности, то все углы действительны и условию положительности коэффициентов  $\alpha$  соответствует условие, чтобы центральная точка находилась внутри тетраэдра. Особенности в комплексной области соответствует более

сложная ситуация, которую мы не будем рассматривать. Подобно тому, как это делалось при анализе диаграмм с тремя концами, удобно ввести четыре единичных вектора в направлениях векторов  $a, b, c, d$  и находить уравнение, связывающее косинусы углов между ними. Оказывается, что вместо уравнения (10) возникает уравнение четвертой степени. Отметим следующее любопытное обстоятельство. Если мы рассматриваем диаграммы с четырьмя физическими концами, то для диаграммы рис. 13, как видно из схемы на рис. 5, необходимо выполнение условия, что сумма угла треугольника  $abr_2$  между сторонами  $a$  и  $b$  и угла треугольника  $acr_2$  между сторонами  $a$  и  $c$ , которые оба задаются массами соответствующих частиц, должна превышать  $\pi$ . Аналогичным условием для диаграммы рис. 14 является, очевидно, чтобы сумма четырех углов в треугольниках, соответствующих всем четырем вершинам, превышала  $2\pi$ . Отсюда непосредственно следует, что необходимым, хотя, конечно, и недостаточным, условием существования «нетривиальных» ближайших особенностей является наличие по крайней мере в одном из треугольников тупого угла, для чего, в свою очередь, необходимо, чтобы при виртуальном распаде хотя бы одной из частиц имело место неравенство типа

$$m_2^2 > m_a^2 + m_c^2.$$

Это соотношение, очевидно, не может выполняться ни для  $\pi$ -мезонов, ни для нуклонов. Поэтому ближайшие особенности при рассеянии этих частиц друг на друге соответствуют диаграмме рис. 12. Подчеркнем, однако, что это не относится к особенностям в комплексной области.

Рассмотрим теперь характер получающихся особенностей. Для этого вернемся к основной формуле (1), записав ее в виде

$$\int (\varphi + K)^{-n} B d^4 k' d^4 l' \dots d\alpha_1 d\alpha_2 \dots \delta(\alpha_1 + \dots + \alpha_n - 1).$$

Разлагая  $\varphi$  по степеням  $\alpha_i = \alpha_i - \alpha_{0i}$ , где  $\alpha_{0i}$  соответствуют минимальному значению  $\varphi$ , мы можем написать этот интеграл в виде

$$\int (\varphi_0 + Q)^{-n} B d^4 k' d^4 l' \dots d\alpha'_1 d\alpha'_2 \dots \delta(\alpha'_1 + \dots + \alpha'_n), \quad (12)$$

где  $\varphi_0$  — минимальное значение  $\varphi$ , равное нулю в самой особенности (при заданных значениях векторов на внешних концах), а  $Q$  — квадратичная функция как от переменных  $k', l', \dots$ , так и от переменных  $\alpha'_i$ . Для выяснения характера особенности достаточно ограничиться значениями  $B$  при  $k' = l' = \dots = 0$ . Если степень числителя по отношению к переменным интегрирования ни-

же, чем степень выражения  $Q^n$ , то интеграл (12) сходится при больших значениях этих переменных; другими словами, его значение определяется значениями переменных, соответствующих  $Q \sim \varphi_0$ , т. е. интегрирование происходит при малых значениях переменных, для которых выражение (12) обладает достаточной точностью. Очевидно, что в этом случае (12) может быть написано в виде

$$\text{const} \cdot \varphi_0^{m/2-n},$$

где  $m$  — число интегрирований. Если  $m \geq 2n$ , то интеграл (12) расходится наверху и эти рассуждения не применимы. Для того чтобы определить характер особенности в этом случае, проще всего продифференцировать (12) по  $\varphi_0$  столько раз, сколько нужно, чтобы степень знаменателя стала больше степени числителя. После этого можно воспользоваться полученной формулой, которую теперь следует проинтегрировать соответствующее число раз. Возникающие при интегрировании постоянные дают, очевидно, целые степени  $\varphi_0$ , не имеющие особенности при  $\varphi_0 = 0$ . Соответственно этому мы снова получаем формулу (12) за исключением случая, когда  $m/2 - n$  есть нуль или положительное целое число. В этом случае вместо (13), очевидно, получается

$$\text{const} \cdot \varphi_0^{m/2-n} \ln \varphi_0.$$

Отметим, что хотя мы говорим здесь о минимуме, эти результаты применимы к любому экстремуму  $\varphi$ .

Величина  $n$  равна числу внутренних линий на фейнмановской диаграмме; число векторов  $k$ , по которым происходит интегрирование, равно числу независимых контуров, из которых состоит рассматриваемая диаграмма. Соответственно этому

$$m = 4v + n - 1.$$

Отсюда следует, что характер особенности определяется выражением

$$\varphi_0^{2v-(n+1)/2},$$

а если  $2v - (n + 1)/2$  есть нуль или целое положительное число, то

$$\varphi_0^{2v-(n+1)/2} \ln \varphi_0.$$

Величина  $\varphi_0$ , очевидно, пропорциональна расстоянию рассматриваемой точки от гиперповерхности в пространстве  $p_i^2, (p_i p_k), \dots$ , на которой расположены особые точки. В число контуров надо

включить и «двухугольники», которые возникают, когда по одной линии передается не одна, а несколько частиц. Например, на диаграмме рис. 9  $v=2$ , и, поскольку  $n=4$ , особенность имеет характер  $\varphi_3^{7/2}$ .

Отметим, что вместо числа независимых контуров можно пользоваться более удобным числом вершин. Действительно, число независимых контуров, т. е. число независимых интегрирований, равно числу линий минус число дополнительных условий. Последнее равно числу вершин без одной, поскольку одна  $\delta$ -функция переходит в окончательный ответ. Таким образом,

$$v = n - v + 1$$

(где  $v$  — число вершин)<sup>1</sup> и степень, стоящая в особенности, может быть написана в виде  $3/2 (n + 1) - 2v$ .

Сформулируем вкратце общие правила нахождения особенностей. Рассматриваются различные диаграммы с данными внешними концами. При построении таких диаграмм в каждой их вершине может сходиться произвольное число линий с соблюдением, разумеется, законов сохранения (например, в одной точке не может пересекаться нечетное число  $\pi$ -мезонных линий). В качестве линий могут фигурировать все стабильные в сильных взаимодействиях частицы. После этого изучается схема, построенная по принципу замены многоугольников на диаграмме вершинами на схеме, из которых исходит соответствующее число отрезков прямых. Длина всех внутренних линий на схеме равна соответствующим массам. В существенных пересечениях на схеме (таких, которые получаются из многоугольников на диаграмме) должно выполняться соотношение  $\sum \alpha_i q_i = 0$ , где  $q_i$  — векторы, исходящие из этого пересечения, и все  $\alpha_i > 0$ . Ближайшие особенности отвечают схеме в евклидовом пространстве.

При применении полученных результатов к амплитуде рассеяния надо иметь в виду ряд обстоятельств. Будем рассматривать амплитуду рассеяния как функцию одной переменной  $x$  (это может быть, например, полная энергия или переданный импульс), считая все другие переменные заданными. Рассмотренные выше интегралы определяют, как известно, функции, значения которых в верхней и нижней полуплоскостях связаны соотношением  $f(x^*) = = f^*(x)$ ; другими словами, выше и ниже оси рассматриваются, по существу, различные функции, отнюдь не являющиеся аналитическим продолжением друг друга, и при действительных значениях  $x$  мы имеем, вообще говоря, скачок. Амплитуда рассеяния, которая получается при учете фейнмановских правил обхода,

<sup>1</sup> На это обстоятельство обратили мое внимание Л. Б. Окунь и А. П. Рудик.

имеет, вообще говоря, вид  $a(x + i\delta) + b(x - i\delta)$  ( $\delta$  — бесконечно малая). Рассмотренные ранее аналитические свойства относятся к функции  $a(x + i\delta)$ , продолженной в верхнюю полуплоскость переменной  $x$ , и к функции  $b(x - i\delta)$ , продолженной в нижнюю полуплоскость. Как ведет себя аналитическое продолжение функции  $a(x + i\delta)$  в нижнюю полуплоскость и функции  $b(x - i\delta)$  в верхнюю полуплоскость, никак не явствует из предыдущего.

В «чужой» полуплоскости функции  $a$  и  $b$  могут иметь любые и любым образом расположенные особенности, которые вообще не могут быть определены из каких-либо общих соображений. Так, например, амплитуда рассеяния протон — нейтрон кроме особенности, связанной с образованием дейтрона, имеет, как известно, особенность, связанную с так называемым виртуальным состоянием этой системы, которому не соответствует никакая реальная частица и которая как раз лежит в «чужой» полуплоскости по полной энергии системы. Другим примером является хорошо известный резонанс в рассеянии  $\pi$ -мезонов на нуклонах, которому также соответствует особенность в «чужой» полуплоскости, причем явно при комплексном значении полной энергии системы. Ясно, что такие особенности принципиально не могут быть предсказаны из общих соображений, а могут быть получены только из теории, дающей конкретные выражения для амплитуды рассеяния.

Вопрос очень упрощается в случае, когда существует область значений  $x$ , при которых рассматриваемая амплитуда является действительной. Тогда мы имеем в комплексной плоскости два разреза по действительной оси, причем легко видеть, что функция  $a(x + i\delta)$  имеет только правый разрез, а функция  $b(x - i\delta)$  — только левый. Если вместо амплитуды рассеяния рассмотреть величину  $a + b^*$ , для чего достаточно изменить знак у мнимой части амплитуды на левом разрезе, то мы получим функцию, не имеющую особенностей в верхней полуплоскости, что и приводит к обычным дисперсионным соотношениям.

В заключение мне хотелось бы искренне поблагодарить Л. Б. Окуня, А. П. Рудика и Я. А. Смородинского за многочисленные ценные замечания.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] X. N a m b u. Nuovo Cim., 6, 1064, 1957.
- [2] R. K a r p l u s, C. M. S o m m e r f i e l d, E. H. W i c h m a n. Phys. Rev., 111, 1187, 1958.
- [3] R. K a r p l u s, C. M. S o m m e r f i e l d, E. H. W i c h m a n. Preprint.



ЖЭТФ, 39, 1856, 1960

В последнее время развивается направление в квантовой теории поля, в котором не рассматриваются гамильтонианы, а используются только соотношение унитарности и аналитические свойства диаграмм, выражающие локальность взаимодействия. Правда, полных уравнений такой теории пока еще не удалось написать, однако можно надеяться, что такие уравнения представляли бы собой, по существу, новую теорию, принципиально отказывающуюся от рассмотрения процессов взаимодействия.

Иногда высказывается мысль, что такого рода теория представляла бы собой только «рамку», т. е. допускала бы введение самых разнообразных частиц и самых разнообразных соотношений между ними. Цель данной заметки — показать, что для слабо связанных (но сильно взаимодействующих) частиц в такой теории возникает прямое соотношение между константой связи и энергией связи частиц.

Обозначим буквой  $c$  частицу, которая может, получив сравнительную малую энергию, распасться на две частицы:  $a$  и  $b$ . Очевидно,

$$M_c = M_a + M_b - \varepsilon, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  — энергия связи. Такое положение, как известно, имеет место у дейтрона. Правда, дейтрон обычно рассматривается как сложная частица, «состоящая» из протона и нейтрона. В действительности, однако, в релятивистской квантовой теории понятия «элементарности» и «сложности» лишаются смысла, и утверждение о «сложности» дейтрона лишь количественно отличается от утверждения, что мезоны «состоят» из нуклонов и антинуклонов. Существенно лишь предположение, что взаимодействие всех рассматриваемых частиц является сильным.

Для простоты предположим, что спины всех частиц равны нулю. Разумеется, частица  $c$  предполагается четной по отношению к частицам  $a$  и  $b$  ( $s$ -состояние!). Обозначим полную вершинную часть для перехода  $a + b \rightarrow c$  буквой  $g$ . Рассмотрим теперь амплитуду взаимного рассеяния частиц  $a$  и  $b$ . Эта амплитуда имеет полюсный член, связанный с виртуальным образованием частицы  $c$ , равный

$$\frac{g^2/8\pi}{(M_a + M_b) [(p_a + p_b)^2 - M_c^2]} \quad (2)$$

Заменяя  $(p_a + p_b)^2$  на  $(M_a + M_b + E)^2$  (где  $E$  — энергия в системе центра инерции за вычетом энергии покоя, а  $M_c$  выражается формулой (1)), и считая  $E$  и  $\varepsilon$  малыми, получаем

$$\frac{g^2/16\pi}{(M_a + M_b)^2 (E + \varepsilon)} \quad (3)$$

Сравним это выражение с известным выражением для амплитуды резонансного рассеяния для не слишком больших энергий. Она равна

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{M_a} + \frac{1}{M_b} \right)}}{\sqrt{\varepsilon + i\sqrt{E}}} \quad (4)$$

Вычет выражения  $1/(\sqrt{\varepsilon} + i\sqrt{E})$  в точке  $E = -\varepsilon$ , очевидно, равен  $2\sqrt{\varepsilon}$ . Таким образом, можно утверждать, что

$$\frac{g^2}{16\pi (M_a + M_b)^2} = \sqrt{2 \left( \frac{1}{M_a} + \frac{1}{M_b} \right) \varepsilon}$$

Наконец, окончательно получаем

$$\varepsilon = \frac{g^4}{512\pi^2} \frac{M_a M_b}{(M_a + M_b)^5} \quad (5)$$

Эта формула и определяет энергию связи через соответствующую константу связи в предположении их малости.

Следует отметить, что с аналогичным соотношением сталкивались уже В. Файнберг и Е. Фрадкин [1] при написании дисперсионных соотношений для рассеяния нуклонов. Мне кажется, что представляло бы интерес вывести эту формулу непосредственно из унитарности и аналитических свойств амплитуд.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Файнберг, Е. Фрадкин. ДАН СССР, 109, 507, 1956.

В сборнике «Теоретическая физика в XX веке», посвященном памяти В. Паули, 1960

Чувством глубокой печали я посылаю эту статью, написанную в честь 60-летия Вольфганга Паули, в сборник, посвященный его памяти, которая навсегда останется дорогой для всех, кто имел счастье быть знакомым с ним лично.

Теперь уже невозможно узнать его мнение об идеях, выраженных в этой статье, но мне все же кажется, что мои взгляды на этот опрос были бы недалеки от взглядов самого Паули.

Как известно, в вопросе о сильных взаимодействиях теоретическая физика в настоящее время в значительной степени беспомощна. Поэтому высказывания на эту тему должны неизбежно носить характер пророческих, и авторы их подвергаются повышенной опасности попасть пальцем в небо.

Долгое время считалось, что основная трудность теории заключается в возникновении бесконечностей, устранение которых возможно только в рамках теории возмущений. Привычка к процедуре перенормировок, блестяще оправдавшей себя в рамках теории возмущений, дошла до такой степени, что понятие перенормировки приобрело несколько мистический характер. Вопрос ставится ясным, если, как это обычно делается в теоретической физике, рассматривать точечное взаимодействие как предел некоторого размазанного взаимодействия. Такое рассмотрение, хотя и предполагающее слабость взаимодействия, но существенно выходящее за рамки теории возмущений, дает возможность получить асимптотические выражения для зависимости основных физических величин от энергии [1]. Эти формулы показывают, что эффективное взаимодействие с уменьшением энергии всегда падает, и что физическое взаимодействие при конечных энергиях всегда выше, чем взаимодействие на энергиях порядка предела обрезания.

ния, которое определяется «затравочной» константой, входящей в гамильтониан.

Поскольку, как и следовало ожидать, величина перенормировки неограниченно возрастает с увеличением предела обрезания, отсюда следовало, что даже крайне слабое взаимодействие при достаточно высоких пределах обрезания требует большой «затравочной» константы. Таким образом, представлялось, что главная задача заключается в построении теории сверхсильного взаимодействия.

Дальнейший анализ показал, однако, что дело обстоит гораздо ехиднее. И. Я. Померанчуком в ряде работ [2] было показано, что при повышении предела обрезания взаимодействие стремится к нулю даже при сколь угодно большой затравочной константе. Примерно одновременно такой же результат был получен Паули и Челленом [3] для так называемой модели Ли.

Достоверность «нулификации» теории часто подвергалась сомнению. Модель Ли есть весьма частная модель, существенно в ряде пунктов отличающаяся от физических взаимодействий; что же касается доказательств Померанчука, то высказывались сомнения в их убедительности. Мне эти сомнения представляются малоосновательными. Так, Челлен многократно высказывал мысль, что дело связано со своеобразными свойствами суммируемых рядов. Однако им не было приведено каких-либо оснований для такого предположения. Можно сказать, что в настоящее время «нулификация» теории молчаливо признается и теоретиками, формально ее оспаривающими. Это видно уже из почти полного исчезновения мезонно-теоретических работ и особенно ясно подчеркивается утверждениями Дайсона [4] о том, что правильная теория будет построена только через сто лет — пессимизм, который было бы невозможно понять, если считать, что существующая мезонная теория приводит к конечным результатам, которые мы пока только не умеем вычислять. Поэтому мне кажется мало актуальным заниматься увеличением строгости доказательств Померанчука, поскольку ввиду краткости нашей жизни мы не можем позволить себе роскошь заниматься вопросами, не обещающими новых результатов.

Обращение в нуль точечного взаимодействия в современной теории приводит к мысли о необходимости рассмотрения «размазанных» нелокальных взаимодействий. К сожалению, нелокальность взаимодействия приводит к полному перечеркиванию всего аппарата современной теории. Конечно, неприятность такого положения дел не может считаться серьезным аргументом против нелокальности взаимодействия. Есть, однако, и более реальные аргументы против нелокальности. Все следствия, выводимые из аппарата квантовой теории поля без применения конкретных

гамильтонианов, склонны подтверждаться на эксперименте. Это прежде всего дисперсионные соотношения. Наконец, число мезонов, образующихся при столкновениях с большой энергией, согласуется с формулой Ферми [5, 6], которая требует применения статистико-термодинамических соображений к размерам, неизмеримо меньшим, чем любой возможный радиус размазывания.

Идея о возможности существенного изменения существующей теории без отказа от локальности была впервые выдвинута В. Гейзенбергом [7]. Параллельно с общей идеей Гейзенбергом был высказан еще ряд дополнительных допущений, которые кажутся мне довольно сомнительными. Поэтому я попытаюсь изложить общую ситуацию в форме, представляющейся мне наиболее убедительной.

Почти 30 лет назад Пайерлс и я указали, что согласно релятивистской квантовой теории нельзя измерить никакие величины, характеризующие взаимодействующие частицы, и единственными измеримыми величинами являются импульсы и поляризации свободно движущихся частиц. Поэтому, если мы не хотим пользоваться ненаблюдаемыми величинами, мы должны вводить в теорию в качестве фундаментальных величин только амплитуды рассеяния.

Операторы  $\psi$ , содержащие ненаблюдаемую информацию, должны исчезнуть из теории; и поскольку гамильтониан можно построить только из операторов  $\psi$ , мы с необходимостью приходим к выводу, что гамильтонов метод для сильных взаимодействий изжил себя и должен быть похоронен, конечно, со всеми почестями, которые он заслужил.

Основой для новой теории должна служить новая диаграммная техника, которая использует только диаграммы со «свободными» концами, т. е. амплитуды рассеяния и их аналитические продолжения. Физическую основу этого аппарата образуют соотношения унитарности и принцип локальности взаимодействия, который проявляется в аналитических свойствах фундаментальных величин теории, например в различного рода дисперсионных соотношениях.

Поскольку такая новая диаграммная техника еще не построена, мы вынуждены находить аналитические свойства вершинных частей, исходя из гамильтонова формализма. Однако нужно быть очень наивным, чтобы пытаться придать «строгость» таким выводам; нельзя забывать, что мы получаем реально существующие уравнения из гамильтонианов, которые в действительности не существуют.

В результате такого подхода к теории, в частности, окончательно теряет смысл старая проблема элементарности частиц, так как ее нельзя сформулировать, не вводя взаимодействий между частицами.

Мне кажется, что за последние годы теория заметно прогрессировала в указанном направлении и недалеко то время, когда будут окончательно написаны уравнения новой теории.

Нужно, однако, иметь в виду, что в этом случае в отличие от ситуации, существовавшей ранее в теоретической физике, написание уравнений ознаменует не конец, а начало создания теории. Уравнения теории будут представлять собой бесконечную систему интегральных уравнений, каждое из которых имеет вид бесконечного ряда, и будет очень трудно научиться работать с такими уравнениями.

Сейчас, конечно, невозможно предсказать, сколько констант в теории можно будет выбрать произвольно. Мы не можем даже исключить возможность того, что уравнения вообще не будут иметь решений, т. е. что в теории снова возникнет нулификация. Это можно будет рассматривать как строгое доказательство нелокальности природы, но это может означать и то, что не существует теории одних только сильных взаимодействий и в общую схему должны быть включены также слабые взаимодействия и, в частности, электродинамика. Тогда инфракрасная «катастрофа» бесконечно усложнит ситуацию.

Но даже в лучшем случае нам предстоит тяжелая борьба, борьба которая стала еще труднее, когда ее не освещает яркая безошибочная мысль Вольфганга Паули.

*Институт физических проблем  
Академии наук СССР*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Д. Ландау. О квантовой теории поля; в книге «Нильс Бор и развитие физики», 1958 (Собр. трудов, № 82); Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. *Nuovo Cim., Suppl.*, 3, 80, 1956 (Собр. трудов, № 86).
- [2] И. Я. Померанчук. *ДАН СССР*, 103, 1005, 1955; 104, 51, 1955; 105, 461, 1955; А. А. Абрикосов, А. Д. Галанин, Л. П. Горьков, Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, К. А. Тер-Мартиросян. *Phys. Rev.*, 111, 321, 1958 (Собр. трудов, № 94).
- [3] G. Källén, W. Pauli. *Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd.*, 30, N 7, 1955.
- [4] F. J. Dyson. *Sci. Amer.*, 199 (3), 74, 1958.
- [5] E. Fermi. *Progr. Theor. Phys.*, 5, 570, 1950; *Phys. Rev.*, 81, 683, 1951.
- [6] С. З. Бельский, Л. Д. Ландау. *Nuovo Cim., Suppl.*, (10) 6, 15, 1956 (Собр. трудов, № 85).
- [7] W. Heisenberg. *Rev. Mod. Phys.*, 29, 269, 1957.

---

# П Р И Л О Ж Е Н И Я

---





# ЛЕВ ДАВИДОВИЧ ЛАНДАУ

(1908—1968)

Это Собрание трудов было подготовлено еще при жизни Льва Давидовича, и составители руководствовались определенно высказанным им самим пожеланием, чтобы Собрание имело чисто научный, а не биографический характер. Это означало, что из него должны были быть изъяты все статьи, оказавшиеся неправильными \*. Такое пожелание вполне отвечало всему характеру Льва Давидовича и духу его отношения к науке. Оно было проявлением тех же черт, в силу которых он не оставил после себя никакого архива — ничего, что не нужно для самой науки, а могло бы представить интерес лишь для будущих биографов.

Естественно, что в таком Собрании не должно было быть места и для биографической статьи. Но 1 апреля 1968 г. Лев Давидович скончался, и эти книги выходят в свет уже после его смерти. Статья, посвященная его жизни и работе, становится теперь данью памяти ушедшего от нас великого физика.

Хотя со дня смерти Льва Давидовича прошло еще совсем мало времени, но волею судьбы получилось так, что уже сейчас мы смотрим на него как бы с некоторого расстояния. С этого расстояния яснее видно не только величие ученого, значение работ которого со временем становится все более очевидным. Яснее видно и величие самого человека большой души. Он был на редкость справедлив и доброжелателен. Несомненно, что и в этом лежат корни его популярности как ученого и учителя, корни той непод-

\* Таких статей, впрочем, набралось всего около десятка (их список приведен наряду с несколькими краткими сообщениями и критическими замечаниями в Приложении).

дельной любви и уважения, которые испытывали по отношению к нему его прямые и непрямые ученики и которые с такой исключительной силой проявились в дни борьбы за спасение его жизни после ужасной катастрофы.

На его долю выпала трагическая судьба — умереть дважды. В первый раз это случилось шесть лет назад, 7 января 1962 г., когда на шоссе, по дороге из Москвы в Дубну, легковая машина столкнулась со встречным грузовиком. Эпическая история последующей борьбы за спасение жизни Льва Давидовича — в первую очередь история самоотверженного труда и искусства многочисленных врачей и медицинских сестер. Но она же есть и история замечательного подвига товарищества. Несчастный случай всколыхнул всю физическую общественность, вызвав спонтанную и мгновенную реакцию. Больница, в которой лежал без сознания Ландау, стала центром для тех — учеников и коллег, — кто стремился внести свой посильный вклад в помощь врачам в их отчаянной борьбе за спасение жизни Льва Давидовича.

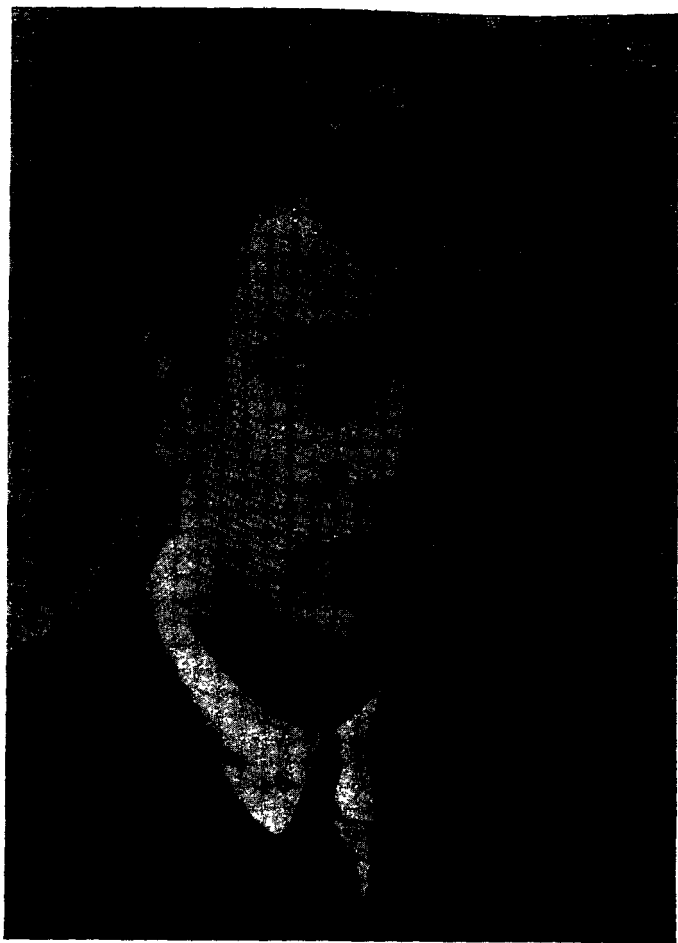
«С первого дня начался их подвиг товарищества \*. Превосходные ученые, ничего, однако, не смыслящие в медицине, академики, члены-корреспонденты, доктора, кандидаты, люди одного поколения с пятидесятичетырехлетним Ландау и его ученики, и совсем молодые ученики его учеников, все они взяли на себя добровольно роли курьеров, водителей машин, посредников, снабженцев, секретарей, дежурных, наконец, носильщиков и чернорабочих. Их стихийно возникший штаб обосновался в кабинете главного врача 50-й больницы и стал круглосуточным организационным центром по безусловному, сверхсрочному выполнению всех велений лечащих врачей.

87 теоретиков и экспериментаторов стали участниками этого добровольного спасательного содружества. Появилась алфавитная книга с телефонами и адресами всех и вся — лиц и учреждений, связь с которыми могла потребоваться в любую минуту. Там записано 223 телефонных номера. Другие больницы, автобазы, аэродромы, таможни, аптеки, министерства, места возможного пребывания врачей-консультантов.

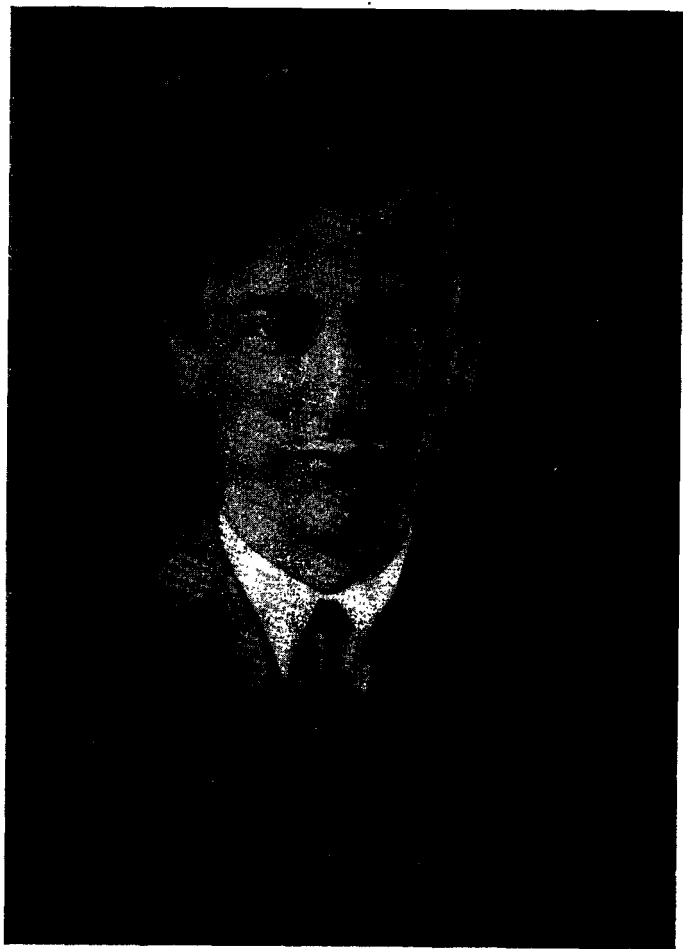
В самые трагические дни, когда казалось, что «Дау умирает», — а таких дней было по меньшей мере четыре, — у входа в семиэтажный корпус больницы дежурило 8—10 машин...

Когда от машины искусственного дыхания зависело все, 12 января один теоретик предложил немедленно изготовить ее в мастерских Института физических проблем. Это было не нужно и наивно, но как удивительно по движению души! Физики

\* Последующая выдержка взята из статьи Д. Данина «Товарищество» («Литературная газета», 21 июля 1962 г.).



**Л. Д. ЛАНДАУ**  
**Ленинград, конец 20-х годов**



Л. Д. ЛАНДАУ.  
Харьков, начало 30-х гг.

доставили машину из Института по изучению полиомиелита и принесли ее на руках в палату, где задыхался Ландау. Они спасли своего коллегу, учителя, друга.

Всего не рассказать... Это было настоящее братство физиков...»

Итак, жизнь Ландау была спасена. Но когда через три месяца к нему вернулось сознание, это уже не был тот человек, которого мы знали прежде. Он так и не смог оправиться от всех последствий аварии и уже никогда не восстановил полностью своих исключительных способностей, История последующих шести лет есть лишь история длительных страданий и боли.

Лев Давидович Ландау родился 22 января 1908 г. в Баку в семье инженера-нефтяника, работавшего на бакинских нефтепромыслах. Его мать была врачом, одно время занималась научной работой по физиологии.

Лев Давидович закончил школу тринадцати лет. Он уже тогда увлекался точными науками, а его математические способности проявились очень рано. Он самостоятельно изучил математический анализ, а впоследствии говорил, что почти не помнит себя не умеющим дифференцировать и интегрировать.

Родители Льва Давидовича считали сына слишком молодым для поступления в университет, и в течение года он учился в Бакинском экономическом техникуме. В 1922 г. он поступил в Бакинский университет, где учился одновременно на двух факультетах: физико-математическом и химическом. Впоследствии Лев Давидович не стал продолжать свое химическое образование, но интерес к химии сохранился у него на всю жизнь.

В 1924 г. Лев Давидович перешел на физическое отделение Ленинградского университета. В этом городе — главном центре советской физики того времени — Л. Д. впервые приобщился к переживавшей бурные времена настоящей теоретической физике. Он бросился в ее изучение со всей страстью юношеского энтузиазма, и чрезмерным грузом часто доводил себя до такой степени переутомления, что по ночам не мог спать от мерещившихся ему формул.

Он рассказывал позднее, как в то время он был потрясен невероятной красотой общей теории относительности (иногда он говорил даже, что такое восхищение при первом знакомстве с этой теорией должно быть, по его мнению, вообще признаком всякого прирожденного физика-теоретика). Он рассказывал также об экстазе, в который привело его изучение статей Гейзенберга и Шредингера, ознаменовавших рождение новой квантовой механики. Он говорил, что они дали ему не только наслаждение ис-

тинной научной красотой, но и острое ощущение силы человеческого гения, величайшим триумфом которого является то, что человек способен понять вещи, которые он уже не в силах вообразить. И конечно же, именно таковы кривизна пространства-времени и принцип неопределенности.

В 1927 г. Лев Давидович закончил университет и стал штатным аспирантом Ленинградского физико-технического института, где он еще с 1926 г. состоял в сверхштатной аспирантуре. К этим годам относятся его первые научные работы. В 1926 г. им была опубликована теория интенсивностей в спектрах двухатомных молекул [1] \*, а уже в 1927 г. — работа о проблеме торжества в квантовой механике, в которой было впервые введено описание состояния систем с помощью матрицы плотности.

Увлеченность физикой и первые успехи на научном пути омрачались, однако, в это время болезненной стеснительностью в общении с людьми. Это свойство причиняло ему много страданий и временами — по его собственным признаниям в более поздние годы — доводило до отчаяния. Те изменения, которые произошли в нем с годами и превратили в жизнерадостного, везде и всегда свободно чувствовавшего себя человека, — в значительной степени результат столь характерной для него самодисциплинированности и чувства долга перед самим собой. Эти свойства, вместе с трезвым и самокритичным умом, позволили ему воспитать себя и превратить в человека с редкой способностью — умением быть счастливым. Та же трезвость ума позволяла ему всегда отличать настоящее в жизни от пустого, чему не следует придавать слишком большого значения и тем самым сохранять равновесие духа в трудные моменты, которые были и в его жизни.

В 1929 г. по командировке Наркомпроса Лев Давидович уехал за границу и в течение полутора лет работал в Дании, Англии и Швейцарии. Наиболее важным для него было пребывание в Копенгагене, где в Институте теоретической физики у великого Нильса Бора собирались физики-теоретики со всей Европы и на руководимых Бором знаменитых семинарах обсуждались все основные вопросы теоретической физики того времени. Эта научная атмосфера, усиливаемая обаянием самой личности Бора, оказала решающее влияние на формирование физического мировоззрения Льва Давидовича, и в дальнейшем он всегда считал себя учеником Нильса Бора. Еще два раза он посетил Копенгаген: в 1933 и 1934 годах.

\* Он не знал, однако, в то время, что эти результаты были уже опубликованы годом раньше Гёнтлем и Лондоном (цифры в квадратных скобках здесь и ниже — номера статей в этом Собрании).

Ко времени пребывания Льва Давидовича за границей относятся, в частности, его работы по теории диамагнетизма электронного газа [4] и исследование дополнительных ограничений, налагаемых на измеримость физических величин в релятивистской квантовой области [15], совместно с Пайерлсом).

По возвращении в Ленинград в 1931 г. Лев Давидович работал в Ленинградском физико-техническом институте, а в 1932 г. переехал в Харьков, где возглавил теоретический отдел вновь организованного, отпочковавшегося от ЛФТИ Украинского физико-технического института. Одновременно он заведовал кафедрой теоретической физики на физико-механическом факультете Харьковского механико-машиностроительного института (аналог Ленинградского физмеха), а с 1935 г. стал заведующим кафедрой общей физики в Харьковском университете.

Харьковский период был для Льва Давидовича временем напряженной и многообразной исследовательской работы \*. Именно здесь началась его деятельность как учителя, здесь начала создаваться его школа теоретической физики.

Теоретическая физика XX века богата блестящими именами творцов нового. Одним из таких творцов был и Ландау. Но его влияние на развитие науки далеко не исчерпывалось его личным вкладом в нее. Выдающийся физик, он был в то же время и поистине выдающимся учителем, учителем по призванию. В этом отношении, может быть, позволительно сравнить Льва Давидовича лишь с его собственным учителем — Нильсом Бором.

Вопросы обучения теоретической физике, как и физике в целом, заинтересовали его еще совсем молодым. Именно здесь, в Харькове, он впервые стал разрабатывать программы «теоретического минимума» — основных знаний по теоретической физике, необходимых для физиков экспериментаторов и, отдельно, для тех, кто хочет посвятить себя профессиональной исследовательской работе по теоретической физике. Не ограничиваясь разработкой одних лишь программ, он читал лекции по теоретической физике для сотрудников УФИ, а на физмехе — для студентов. Увлеченный идеями перестройки преподавания физики в целом, он принял заведование кафедрой общей физики в ХГУ

\* О степени научной активности Л. Д. в это время можно судить хотя бы по списку работ, законченных им в течение одного лишь 1936 г.: теория фазовых переходов второго рода [28, 29], теория промежуточного состояния сверхпроводников [30], кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия [23], теория мономолекулярных реакций [22], свойства металлов при очень низких температурах [24], теория дисперсии и поглощения звука [21, 27], теория фотоэлектрических явлений в полупроводниках [20].

(а в дальнейшем, уже после войны, продолжал читать лекции по общей физике на физико-техническом факультете МГУ).

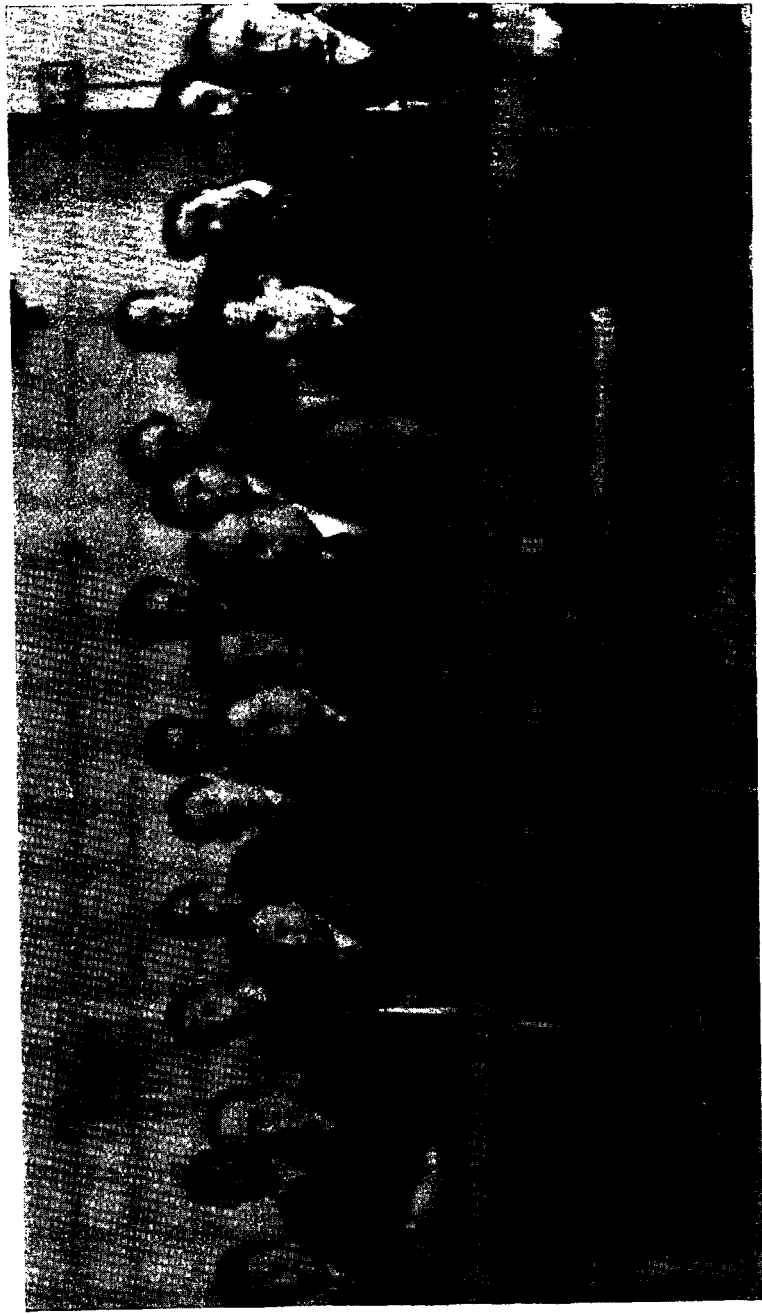
Здесь же, в Харькове, появилась идея и началось осуществление программы составления полного Курса теоретической физики и Курса общей физики. В течение всей жизни Лев Давидович мечтал написать книги по физике на всех уровнях — от школьных учебников до курса теоретической физики для специалистов. Фактически, до роковой катастрофы, при его жизни были закончены почти все тома «Теоретической физики» и первые тома «Курса общей физики» и «Физики для всех». Он строил также планы составления таких учебников по математике для физиков, которые должны были быть «руководством к действию», обучать практическому применению математики к физике и должны были быть освобождены от излишних для такого курса строгостей и сложностей. Приступить к осуществлению этой программы он не успел.

Владению физиком-теоретиком математической техникой Лев Давидович придавал вообще большое значение. Степень этого владения должна быть такой, чтобы математические затруднения по возможности не отвлекали внимания от физических трудностей задачи — по крайней мере там, где речь идет о стандартных математических приемах. Это может быть достигнуто лишь достаточной тренировкой. Между тем опыт показывает, что существующий стиль и программы университетского математического образования физиков часто не обеспечивают такой тренировки. Опыт показывает также, что изучение математики после того, как физик начинает самостоятельную исследовательскую деятельность, оказывается для него слишком «скучным».

Поэтому первое, чему подвергал Лев Давидович всякого, кто хотел вступить в число его непосредственных учеников, было испытанием по математике — в ее «практических», вычислительных аспектах\*. Прошедший через это испытание мог затем перейти к изучению и сдаче экзаменов по семи последовательным разделам программы «теорминимума», включающим в себя основные знания по всем разделам теоретической физики. Этими знаниями, по мнению Льва Давидовича, должны обладать все теоретики, вне зависимости от своей будущей специализации. Разумеется,

\* Требовалось: умение взять любой неопределенный интеграл (выражающийся через элементарные функции) и решить любое обыкновенное дифференциальное уравнение стандартного типа, знание векторного анализа и тензорной алгебры, а также основ теории функций комплексного переменного (теория вычетов, метод Лапласа). Предполагалось при этом, что такие разделы, как тензорный анализ, теория групп и др., будут изучены вместе с теми разделами теоретической физики, где они находят себе применение.

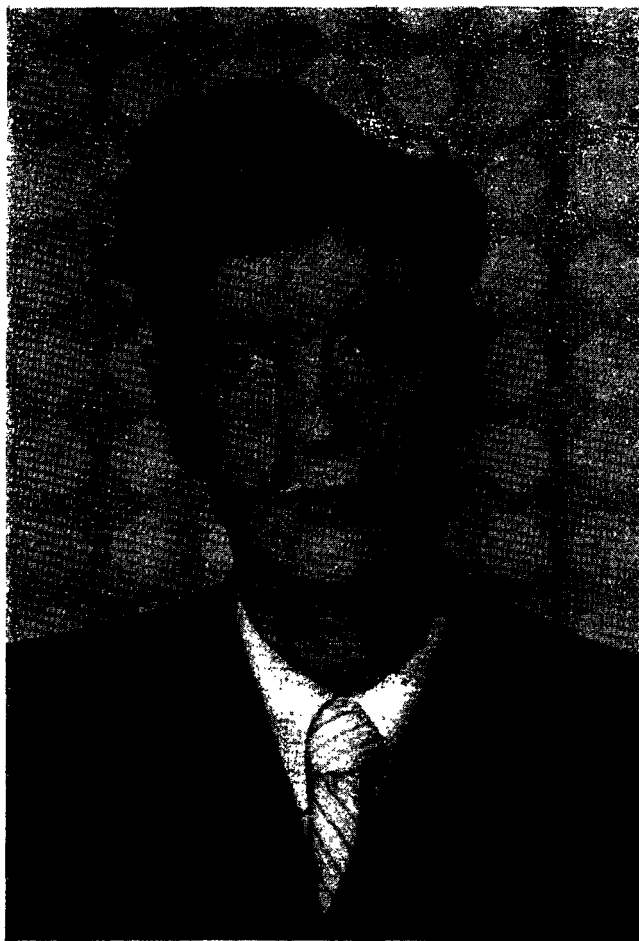




**СЕМИНАР В ИНСТИТУТЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В КОПЕНГАГЕНЕ, 1930 г.**

В первом ряду, слева направо:

**О. Клейн, Н. Бор, В. Гейзенберг, В. Паули, Г. Гамов, Л. Ландау, Г. Крамерс**



**Л. Д. ЛАНДАУ**

Москва, конец 40 — начало 50-х гг.

и не требовал ни от кого быть универсалом в той же степени, в которой он был им сам. Но здесь проявлялось его убеждение целостности теоретической физики как единой науки с едиными методами.

Первое время Лев Давидович сам принимал все экзамены по термодинамике. В дальнейшем, когда число желающих стало слишком большим, эти обязанности были распределены также и между его ближайшими сотрудниками. Но первый экзамен, первое знакомство с каждым новым молодым человеком Лев Давидович всегда оставлял за собой. Встретиться с ним для этого мог каждый — достаточно было позвонить по телефону и выразить свое желание.

Конечно, не у всех, кто приступал к изучению термодинамики, хватало способностей и настойчивости для того, чтобы закончить ее. Всего за время с 1934 по 1961 г. прошли до конца через это испытание 43 человека. Об эффективности такого отбора можно судить хотя бы по следующим формальным признакам: из числа их лиц 7 уже стали членами Академии наук, а еще 16 — докторами наук.

Весной 1937 г. Лев Давидович переехал в Москву, где он стал ведущим теоретическим отделом Института физических проблем, незадолго до этого построенного для П. Л. Капицы. Здесь и оставался до конца своей жизни; в этом институте, ставшем у него родным домом, его многообразная деятельность достигла своего расцвета. Здесь же, в замечательном взаимодействии с экспериментальными исследованиями, Лев Давидович создал то, что, может быть, является главным делом его научной жизни — теорию квантовых жидкостей.

Здесь же к нему пришли многочисленные внешние проявления признания его заслуг. В 1946 г. он был избран действительным членом Академии наук СССР. Он был награжден орденами СССР (в том числе двумя орденами Ленина) и удостоен звания Героя Социалистического Труда — награды как за чисто научные достижения, так и за его вклад в выполнение практических государственных заданий. Трижды ему присуждалась Государственная премия, а в 1962 г. — Ленинская премия. Не было недостатка и в почетных наградах из других стран. Еще в 1951 г. он был избран членом Датской, а в 1956 — Нидерландской академии наук. В 1959 г. он стал членом Британского физического общества, а в 1960 г. — иностранным членом Британского Королевского общества. В том же году он был избран в Национальную академию наук США и Американскую Академию наук и искусств. В 1960 г. Льву Давидовичу была присуждена премия имени Лондона (США) и медаль имени Макса Планка (ФРГ). Наконец, в 1962 г. ему была присуждена Нобелевская премия по

физике «за пионерские исследования в теории конденсированного состояния материи, в особенности жидкого гелия».

Научное влияние Льва Давидовича, конечно, далеко не ограничивалось его непосредственными учениками. Он был глубоко демократичен в научной жизни (как, впрочем, и в жизни вообще; ему всегда были полностью чужды всякие напыщенность и чиновничество). За советом и критикой — которые были всегда четки и ясны — к нему мог обратиться каждый, вне зависимости от своих научных заслуг и званий, при одном лишь условии: речь должна идти о настоящем деле, а не о том, чего он больше всего не любил в науке — пустом умствования, бессодержательном и безрезультатном, прикрытом лишь наукообразными сложностями. Его ум был остро критичен; это свойство, вместе с глубоко физическим подходом к вопросам, делало дискуссии с ним столь привлекательными и полезными.

В дискуссиях он бывал горяч и резок, но не груб; остроумен и ироничен, но не едок. Надпись, повешенная им на дверях своего кабинета в УФТИ, гласила:

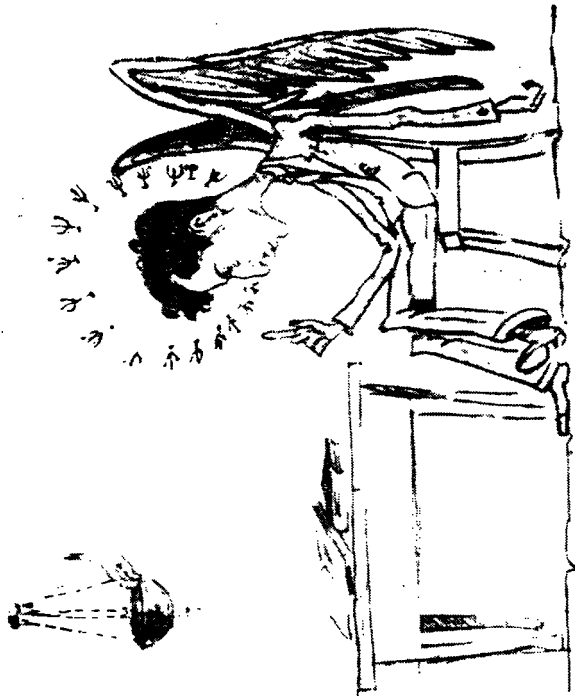
«Л. Ландау. Осторожно — кусается!»

С годами его характер и манеры становились несколько мягче, но его энтузиазм к науке, бескомпромиссная научная принципиальность оставались неизменными. И, во всяком случае, за его внешней резкостью всегда скрывалась научная беспристрастность, большое человеческое сердце и человеческая доброта. Насколько резкой и беспощадной была его критика, настолько же искренне было его желание содействовать своим советом чужому успеху и столь же горячо было его одобрение.

Эти черты научной личности и таланта Льва Давидовича фактически привели его к положению верховного научного судьи для его учеников и коллег \*. Несомненно, что и эта сторона деятельности Льва Давидовича, его научный и моральный авторитет, оказывая сдерживающее влияние на скороспелые работы, в значительной степени определяла высокий уровень нашей теоретической физики.

Его постоянный научный контакт с множеством учеников и коллег был для Льва Давидовича также и источником знаний. Свообразная черта его стиля работы состояла в том, что он уже с давнего времени — еще с харьковских лет — почти не читал сам научных статей или книг. Тем не менее он был всегда в курсе всего нового в физике. Знание приходило к нему из многочисленных дискуссий, из докладов на руководимом им семинаре.

\* Это положение символизировано в воспроизводимом здесь известном дружеском шарже А. Юзефовича — «Дау сказал».



Ты чужа.....

Этот семинар проводился регулярно, раз в неделю, в течение почти тридцати лет, а в последние годы его заседания приобрели характер общемосковских собраний физико-теоретиков. Докладывание на семинаре вменялось в святой долг всем ученикам и сотрудникам, и сам Лев Давидович с чрезвычайной серьезностью и тщательностью относился к отбору материала для докладов. Он интересовался и был равно компетентен во всем в физике, и участникам семинара часто было нелегко мгновенно переключаться, вслед за ним, с обсуждения, скажем, свойств «странных» частиц к обсуждению энергетического спектра электронов в кремнии. Для самого Льва Давидовича прослушивание докладов никогда не было формальностью: он не успокаивался до тех пор, пока существо работы не выяснялось полностью и в ней не отыскивались все следы «филологии» — бездоказательных утверждений или предположений, выдвигаемых по принципу: «почему бы не так». В результате такого обсуждения и критики многие работы объявлялись «патологией», и Лев Давидович терял к ним всякий интерес.

С другой стороны, статьи, действительно содержавшие новые идеи или результаты, зачислялись в так называемый «золотой фонд», и Л. Д. запоминал их навсегда.

Фактически ему было обычно достаточно знать лишь основную идею работы для того, чтобы воспроизвести все ее результаты. Как правило, ему было легче получить их своим собственным путем, чем следовать за деталями рассуждений автора. Таким образом он воспроизвел для себя и глубоко продумал большинство основных результатов во всех областях теоретической физики\*. Этому же была, вероятно, обязана и его феноменальная способность — давать ответ почти на всякий задаваемый ему физический вопрос.

Научному стилю Льва Давидовича была противна тенденция — к сожалению, довольно распространенная — превращать простые вещи в сложные (часто аргументируемая общностью и строгостью, которые, однако, обычно оказываются иллюзорными). Сам он всегда стремился к обратному — сделать сложные вещи простыми, наиболее ясным образом выявить истинную простоту лежащих в основе явлений законов природы. Умение сделать это, «тривиализовать» вещи, как он сам говорил, составляло предмет его особой гордости.

\* Кстати, этим объясняется отсутствие некоторых нужных ссылок в статьях Л. Д., которое было обычно не намеренным актом. Впрочем, он мог в некоторых случаях опустить ссылку и намеренным образом, если считал соответствующий вопрос слишком тривиальным, — а у него были свои, весьма высокие критерии на этот счет.

Стремление к простоте и порядку было вообще свойственно всему складу ума Льва Давидовича. Оно проявлялось не только в серьезных, но и в полусерьезных, и даже в типичных для него чисто шуточных вещах \*. Так, он любил классифицировать все — от женщин по степени их красоты и до физиков-теоретиков по степени значительности их вклада в науку. Эта последняя классификация производилась по пятибалльной системе в логарифмической шкале: так, подразумевалось, что физик 2-го класса сделал в 10 раз больше, чем физик 3-го класса (в пятый же класс помещались «патологи»). В этой шкале Эйнштейн занимал половинный класс, а Бор, Гейзенберг, Шредингер, Дирак и некоторые другие относились к первому классу. Себя самого Лев Давидович долго относил скромно к двух с половиною классу и лишь сравнительно поздно «перевел» себя во второй класс.

Он работал всегда и много (никогда за столом, а обычно — полулежа у себя на диване). Признание результатов своей работы в той или иной степени важно для всякого ученого; оно было существенно, конечно, и для Льва Давидовича. Но все же можно сказать, что он придавал вопросам приоритета значительно меньше значения, чем это бывает обычно. И во всяком случае несомненно, что внутренним стимулом к работе было для него не стремление к славе, а неистощимое любопытство, неистощимая страсть к познанию законов природы в их больших и малых проявлениях. Никогда не следует работать ради посторонних целей, ради того, чтобы сделать великое открытие: так все равно ничего не получится, — эту простую истину он никогда не упускал случая повторять.

Очень широк был и круг интересов Льва Давидовича вне физики. Помимо точных наук он очень любил — и хорошо знал — историю. Его горячо интересовали и глубоко впечатляли все виды искусства — за исключением, однако, музыки (а также и балета).

Те, кто имел счастье в течение многих лет быть среди его учеников и друзей, знали, что наш Дау — как его звали друзья и товарищи \*\* — не старел. С ним никогда не было скучно. Яркость его личности не тускнела, а научная мощь не ослабевала. Тем нелепее и страшнее случай, прервавший в расцвете его блестящую деятельность.

\* Характерно, однако, что эта черта не относилась к привычкам Л. Д., так сказать, в обыденной жизни. Здесь он отнюдь не был педантично аккуратен, и вокруг него довольно быстро создавалась «зона беспорядка».

\*\* Сам Л. Д. любил говорить, что имя Дау происходит от французского прочтения его фамилии: Landau=L'âne Dau (осел Дау).

Для читателей этого Собрания нет необходимости в разъяснении содержания помещенных в нем статей. Тем более что их изложение, как правило, несет на себе все признаки свойственного Ландау научного стиля: ясность и четкость физической постановки вопросов, наиболее прямой и элегантный путь к их решению, ничего лишнего. Даже сейчас, спустя много лет, большая часть его статей не требовала бы никаких изменений.

Следующий ниже краткий обзор должен поэтому служить лишь некоторой ориентировкой среди изобилия и разнообразия работ Льва Давидовича, а также несколько пояснить место, занимаемое этими работами в истории физики, — которое, может быть, не всегда очевидно для современного читателя.

Характернейшей чертой научного творчества Ландау является его широта, почти беспрецедентная по своему диапазону; оно охватывает собой всю теоретическую физику, от гидродинамики до квантовой теории поля. В наш век все усиливающейся узкой специализации расходились постепенно и научные пути его учеников. Сам же Лев Давидович объединял их всех, всегда сохраняя поистине удивительную заинтересованность во всем. В его лице ушел из физики, возможно, один из последних великих универсалов.

Уже беглый взгляд на оглавление этого Собрания покажет, что в жизни Ландау нельзя выделить сколько-нибудь длительных периодов, в течение которых он работал лишь в какой-либо одной области физики. Поэтому и перечисление ряда его работ составлено не в хронологическом порядке, а, по возможности, по тематическому признаку. Начнем с работ, посвященных общим вопросам квантовой механики.

Сюда относятся прежде всего несколько ранних работ Ландау. В связи с рассмотрением проблемы торможения излучением им было впервые введено понятие о неполном квантово-механическом описании, осуществляемом с помощью величины, которая в дальнейшем получила название матрицы плотности [2]. В этой работе матрица плотности была введена в энергетическом представлении.

Две статьи [6, 7] посвящены вычислению вероятностей квазиклассических процессов. Трудность этого вопроса связана с тем, что ввиду экспоненциальности (с большой мнимой экспонентой) квазиклассических волновых функций подынтегральное выражение в матричных элементах оказывается быстро осциллирующей функцией, что сильно затрудняет даже оценку интеграла; фактически до работ Ландау все исследования подобных вопросов оказывались ошибочными. Ландау впервые дал общий метод вычисления квазиклассических матричных элементов, а также применил его к ряду конкретных процессов.



В 1930 г. Ландау (совместно с Р. Пайерлсом) опубликовал детальное исследование ограничений, вводимых в квантово-механическое описание релятивистскими требованиями [5]; эта статья вызвала в свое время оживленные дискуссии. Ее основной результат состоит (помимо уточнения вопроса об индивидуальной неопределенности координаты) в установлении принципиальных границ возможности измерения импульса частицы за конечное время. Отсюда следовало, что в релятивистской квантовой области не могут быть измерены никакие динамические переменные, характеризующие частицы в их взаимодействии, и единственными измеримыми величинами оказываются импульсы (и поляризации) свободных частиц. В этом и лежит физический корень тех затруднений, которые возникают при переносе в релятивистскую область методов обычной квантовой механики, использующих понятия, теряющие здесь свой смысл. К этому вопросу Ландау снова вернулся в своей последней опубликованной статье [98], выразив в ней свое убеждение в том, что  $\psi$ -операторы как носители ненаблюдаемой информации, а с ними и весь гамилтонов метод должны будут исчезнуть из будущей теории.

Одним из оснований для этого убеждения послужили Льву Давидовичу результаты проведенных им в 1954—1955 гг. (совместно с А. А. Абрикосовым, И. М. Халатниковым и И. Я. Померанчуком) исследований основ квантовой электродинамики [76—79, 83]. В этих исследованиях авторы исходили из представления о точечном взаимодействии как пределе «размазанного» взаимодействия при стремлении к нулю радиуса размазывания, что позволило сразу иметь дело с конечными выражениями. Далее, оказалось возможным произвести суммирование основных членов всего ряда теории возмущений, и в результате были получены асимптотические (при больших импульсах) выражения для основных величин квантовой электродинамики — гриновских функций и вершинной части. Из этих выражений в свою очередь была найдена связь между истинными зарядом и массой электрона и их «затравочными» значениями. Хотя эти вычисления были произведены в предположении малости «затравочного» заряда, но были высказаны аргументы в пользу того, что формула для связи истинного и «затравочного» зарядов сохраняет свою применимость и при любой величине последнего. Тогда исследование формулы показывает, что в пределе точечного взаимодействия истинный заряд обращается в нуль — теория «нуллифицируется» (обзор относящихся сюда вопросов дан в статьях [82] и [86]) \*.

\* В связи с поисками более строгого доказательства этого утверждения, в статье [98] содержится характерное для Л. Д. высказывание о том, что «ввиду краткости нашей жизни мы не можем позволить себе роскошь заниматься вопросами, не обещающими новых результатов».

Только будущее сможет показать, насколько оправдывается намеченная Ландау [98] программа построения релятивистской квантовой теории поля. Он сам усиленно работал в этом направлении в последние годы перед катастрофой. В этом плане, в частности, им были разработан общий метод для определения особенностей величин, фигурирующих в диаграммном методе квантовой теории поля [96].

На открытие в 1956 г. несохранения четности в слабых взаимодействиях Ландау сразу же откликнулся предложением теории нейтрино с фиксированной спиральностью («двухкомпонентное» нейтрино) [90] \*, а также выдвинул принцип сохранения «комбинированной четности» — так он назвал совместное применение пространственной инверсии и зарядового сопряжения. По мысли Ландау, тем самым должна была быть «спасена» симметрия пространства — асимметрия переносилась на сами частицы. Этот принцип действительно оказался имеющим более широкую применимость, чем закон сохранения четности. Как известно, однако, в последние годы были открыты и процессы, не сохраняющие также и комбинированную четность; смысл этого нарушения в настоящее время еще не ясен.

К ядерной физике относится опубликованная в 1937 г. работа Ландау [31]. Эта работа — количественное воплощение идей, выдвинутых незадолго до того Н. Бором. Здесь ядро рассматривается методами статистической физики как капля «квантовой жидкости». Замечательно, что при этом не было сделано никаких сколько-нибудь далеко идущих модельных представлений, как это делалось до того в работах других авторов. Была, в частности, впервые получена связь между средними расстояниями между уровнями составного ядра и их шириной.

Отсутствие модельных представлений характерно и для развитой Ландау (совместно с Я. А. Смородинским) теории рассеяния протонов на протонах. Сечение рассеяния было выражено при этом через параметры, смысл которых не связан с какими-либо конкретными предположениями о потенциале взаимодействия частиц.

Пример технической виртуозности представляет работа (совместная с Ю. Б. Румером) по каскадной теории электронных ливней в космических лучах [36]; физические основания этой теории были сформулированы ранее рядом авторов, однако количественная теория по существу отсутствовала. В этой работе был создан математический аппарат, ставший основой всех последующих работ в этой области. Сам Л. Д. принял участие в дальней-

\* Одновременно и независимо эта теория была предложена Саламом, а также Ли и Янгом.

шей разработке теории ливней еще двумя работами — об угловом распределении частиц [41] и о вторичных ливнях [42].

В наименьшей степени виртуозна работа Ландау, посвященная развитию идеи Ферми о статистическом характере множественного рождения частиц при столкновениях [72] \*. Эта работа — также и блестящий пример методического единства теоретической физики, когда решение задачи осуществляется путем применения методов из, казалось бы, совершенно иной области. Ландау показал, что процесс множественного рождения проходит через стадию расширения «облака», размеры которого велики по сравнению с длиной пробега частиц в нем; соответственно, эта стадия должна описываться уравнениями релятивистской гидродинамики. Решение этих уравнений потребовало ряда остроумных приемов и глубокого анализа. Л. Д. говорил, что эта работа стоила ему большего труда, чем любая другая из решенных им задач.

Лев Давидович всегда охотно откликнулся на запросы и нужды экспериментаторов. Таково, в частности, происхождение его работы [54], в которой было найдено энергетическое распределение ионизационных потерь быстрых частиц при прохождении через вещество (до того существовала лишь теория средних потерь энергии). Переходя к работам Ландау по макроскопической физике, начнем с нескольких статей, составляющих его вклад в физику магнетизма.

Согласно классической механике и статистике, изменение характера движения свободных электронов в магнитном поле не может привести к появлению новых магнитных свойств системы. Ландау был первым, выяснившим характер квантовомеханического движения в магнитном поле и указавшим, что квантование полностью меняет ситуацию, приводя к появлению диамагнетизма газа свободных электронов («диамагнетизм Ландау», как теперь называют это явление) [4]. В этой же работе была качественно предсказана периодическая зависимость магнитной восприимчивости от величины магнитного поля при больших значениях последнего. В то время (1930 г.) это явление еще никем не наблюдалось, и оно было открыто экспериментально лишь впоследствии (эффект де Гааза—ван Альфена); количественная теория этого эффекта была дана Ландау в более поздней работе [37].

Небольшая статья, опубликованная в 1933 г. [11], имеет значение, далеко выходящее за рамки поставленного в ее заглавии вопроса — о возможном объяснении зависимости магнитной восприимчивости определенного класса веществ от поля при низких температурах. В ней впервые было введено понятие об анти-

\* Более подробное изложение и дальнейшая детализация этой работы даны в обзорной статье [85] (совместно с С. З. Беленьким).

ферромагнетизме (хотя этот термин и не был применен) как особой фазе магнетика, отличающейся от парамагнитной фазы своей симметрией; соответственно этому переход между обоими состояниями должен происходить в строго определенной точке\*. Конкретно в этой работе была рассмотрена модель слоистого антиферромагнетика с сильной ферромагнитной связью в каждом слое и слабой антиферромагнитной связью между слоями; для этого случая проведено количественное исследование и найдены характерные особенности магнитных свойств вблизи точки перехода. Примененный при этом Ландау метод опирался на идеи, которые были в дальнейшем развиты им в общей теории фазовых переходов второго рода.

Еще одна работа относится к теории ферромагнетизма. Идея о структуре ферромагнитных тел как состоящих из элементарных областей, спонтанно намагниченных в различных направлениях («магнитные домены» по современной терминологии), была высказана П. Вейссом еще в 1907 г. Однако не существовало подхода к вопросу о количественной теории этой структуры. В работе Ландау (совместно с Е. М. Лифшицем) [17] в 1936 г. было показано, что такая теория должна строиться на основании термодинамических соображений и были определены, для типичного случая, формы и размеры доменов. В этой же работе было установлено макроскопическое уравнение движения вектора намагниченности доменов, и с его помощью развиты основы теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнетиков в переменном магнитном поле; в частности, предсказано явление, известное в настоящее время под названием ферромагнитного резонанса.

В опубликованной в 1933 г. небольшой заметке [9] была высказана идея о возможности «автолокализации» электрона в кристаллической решетке в потенциальной яме, возникающей в силу его собственного поляризационного действия. Эта идея в дальнейшем явилась основой для так называемой полярной теории проводимости ионных кристаллов. Сам Ландау еще раз вернулся к этим вопросам в более поздней работе (совместно с С. И. Пекаром) [65], посвященной установлению уравнений движения полярона во внешнем поле.

В другой маленькой заметке были сообщены результаты, полученные Ландау (совместно с Г. Плачком) относительно струк-

\* Примерно за год до того, в работе Нееля (которая была неизвестна Ландау), была предсказана возможность существования веществ, которые состоят в магнитном отношении из двух подрешеток с противоположными моментами. Неель, однако, не предполагал, что речь идет об особом состоянии вещества, а просто считал, что парамагнетик с положительным обменным интегралом при низких температурах постепенно переходит в структуру, состоящую из нескольких магнитных подрешеток.

туры линии релеевского рассеяния в жидкостях или газах [13]. Еще в начале двадцатых годов Бриллюэном и Манделъштамом было показано, что благодаря рассеянию на звуковых колебаниях эта линия должна расщепиться в дублет. Ландау и Плачек обратили внимание на необходимость существования еще и рассеяния на флуктуациях энтропии, не сопровождающегося никаким изменением частоты; в результате вместо дублета должен наблюдаться триплет\*.

К физике плазмы относятся две работы Ландау. В одной из них было впервые получено кинетическое уравнение с учетом кулоновского взаимодействия между частицами [23]; медленность убывания этих сил делала неприменимыми в этом случае обычные способы составления кинетических уравнений. В другой работе, посвященной колебаниям плазмы [59], было показано, что даже в условиях (большие частоты), когда столкновениями между частицами в плазме можно пренебречь, колебания будут все же затухать («затухание Ландау»)\*\*.

Работа над составлением одного из очередных томов Курса теоретической физики явилась для Льва Давидовича стимулом к глубокому изучению гидродинамики. Как всегда, он занялся самостоятельным продумыванием и выводом всех основных положений и результатов этой науки. Его свежий и оригинальный взгляд привел, в частности, к новому подходу к проблеме возникновения турбулентности: при этом он выяснил основные свойства процесса постепенного развития нестационарности при увеличении числа Рейнольдса после потери устойчивости ламинарным движением и предсказал качественно различные варианты, которые могут здесь иметь место [50]. Исследуя качественные свойства сверхзвукового обтекания тел, Лев Давидович пришел к неожиданному результату, что вдали от тела должна существовать не одна, как это обычно считалось, а две следующие друг за другом ударные волны [58]. Даже в таком «классическом» вопросе, как теория струй, ему удалось найти новое, не замеченное до него, точное решение для осесимметричной «затопленной» струи вязкой несжимаемой жидкости [49].

Выдающееся положение в научном творчестве Ландау — как по непосредственному значению, так и по объему вызванных ею

\* Подробное изложение выводов и результатов этой работы так и не было опубликовано в виде статьи. Частично оно дано в книге «Электродинамика сплошных сред», § 96 (Физматгиз, 1959).

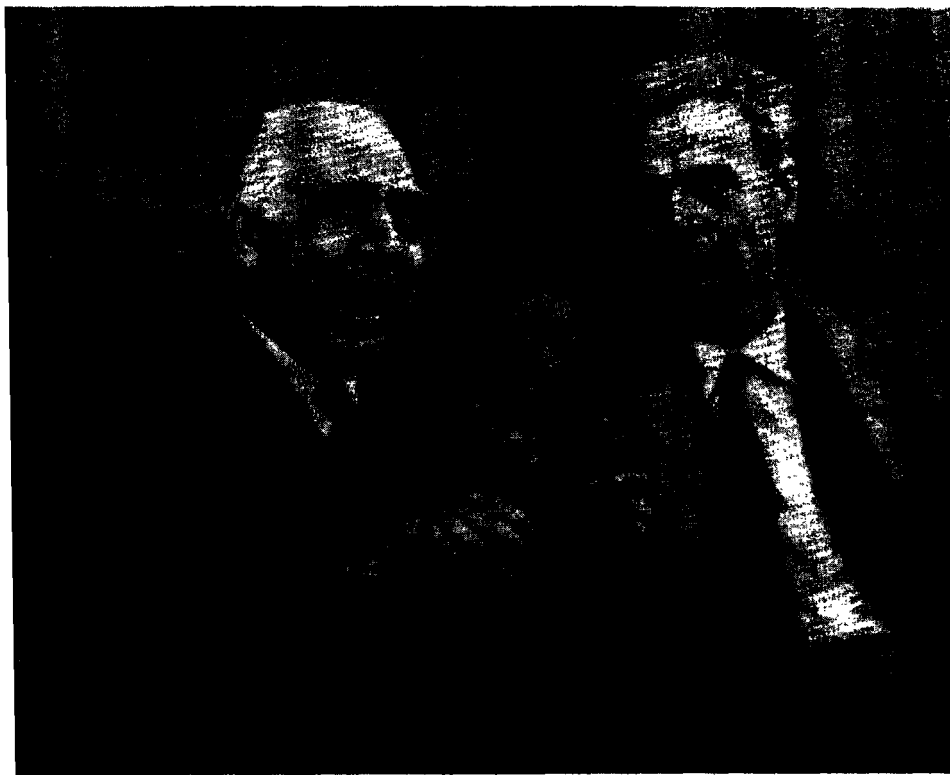
\*\* Интересно, что эта работа возникла как реакция Льва Давидовича на «фидологию», содержащуюся, по его мнению, в предыдущих работах на эту тему (например, бесосновательную замену расходящихся интегралов их главными значениями). Чтобы доказать свою правоту, он и занялся сам этим вопросом.

к жизни применений — занимает теория фазовых переходов второго рода [28, 29]; первый набросок лежащих в ее основе идей содержится уже в заметке [16] \*. Понятие о фазовых переходах различного порядка было впервые введено Эренфестом чисто формальным образом, в зависимости от порядка термодинамических производных, которые могли бы испытывать скачок в точке перехода. Вопросы же о том, какие именно из этих переходов могут в действительности существовать и в чем заключается их физическая природа, оставались открытыми; по этому поводу в литературе высказывались лишь довольно смутные и необоснованные предположения. Ландау впервые указал на глубокую связь между возможностью существования непрерывного (в смысле изменения состояния тела) фазового перехода и скачкообразным изменением какого-либо свойства симметрии тела в точке перехода. Он показал также, что в точке перехода возможно далеко не всякое изменение симметрии, и дал метод, позволяющий определить допустимые типы изменения симметрии. Развитая Ландау количественная теория была основана на предположении о регулярности разложения термодинамических величин вблизи точки перехода. В настоящее время ясно, что такая теория, не учитывающая возможной особенности этих величин в точке перехода, не отражает всех свойств фазового перехода. Вопрос о характере этой особенности очень интересовал Ландау, и в последние годы своей деятельности он много работал над этой трудной проблемой, не успев, однако, прийти к каким-либо определенным результатам.

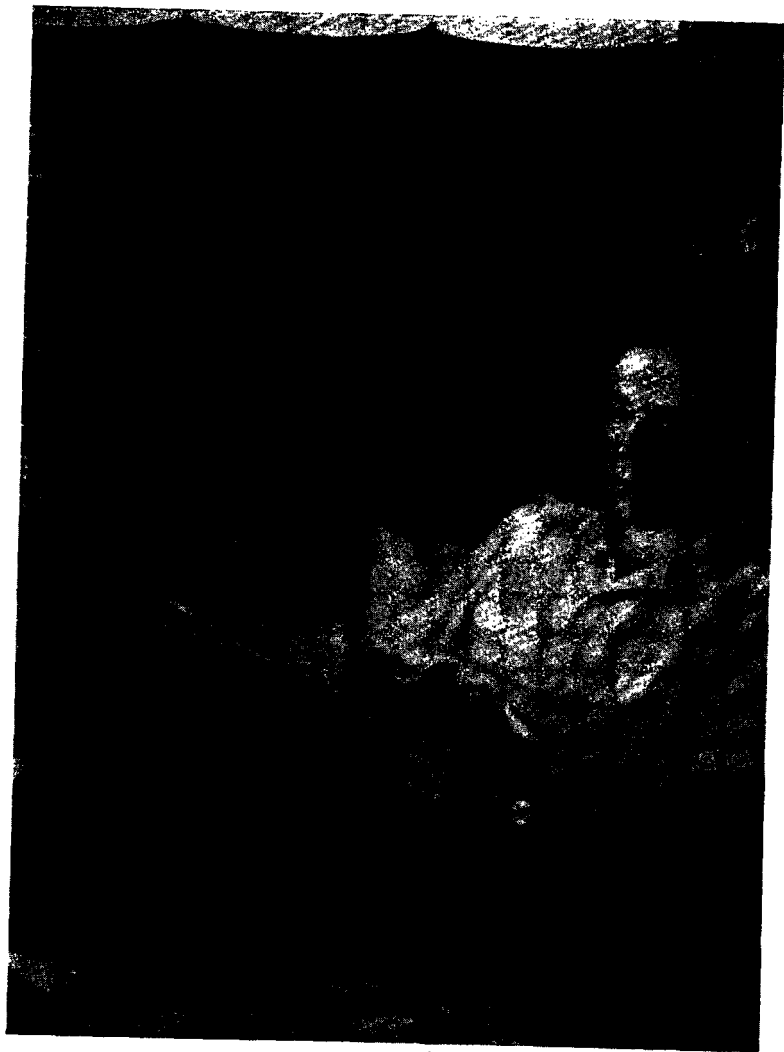
В духе идей теории фазовых переходов построена также и созданная в 1950 г. Ландау (совместно с В. Л. Гинзбургом) феноменологическая теория сверхпроводимости [71]; она явилась в дальнейшем, в частности, основой для теории сверхпроводящих сплавов. В этой теории фигурирует ряд величин и параметров, смысл которых в момент ее создания был не вполне ясен и стал понятным лишь после появления в 1957 г. микроскопической теории сверхпроводимости, позволившей дать строгое обоснование уравнений Гинзбурга — Ландау и установить область их применимости. В этой связи поучительна история (рассказанная В. Л. Гинзбургом) одного ошибочного утверждения, содержавшегося в их оригинальной статье. Основное уравнение теории, определяющее эффективную волновую функцию сверхпроводящих электронов  $\Psi$ , содержит векторный потенциал поля  $A$  в члене вида

$$\frac{1}{2m} \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c} A \right) \Psi,$$

\* Самому Ландау принадлежит применение этой теории к рассеянию рентгеновских лучей кристаллами [32] и, совместно с И. М. Халатниковым, к поглощению звука [80] вблизи точки перехода.



**БОР и Л. Д. ЛАНДАУ НА ПРАЗДНИКЕ «АРХИМЕДА» в МГУ, 1961 г.**



Л. Д. ЛАНДАУ  
Москва, 1959 г.



олне аналогичном соответствующему члену в уравнении Шредингера. Можно было бы думать, что в феноменологической теории параметр  $e^*$  должен представлять собой некоторый эффективный заряд, не обязанный находиться в прямой связи с зарядом ободного электрона  $e$ . Ландау, однако, отверг эту мысль, указав, что эффективный заряд не универсален и должен был бы зависеть от различных факторов (давления, состава образца и т. п.); тогда в неоднородном образце  $e^*$  было бы функцией координат. Это нарушило бы градиентную инвариантность теории. Поэтому в статье было сказано, что заряд  $e^*$  «нет оснований считать личным от заряда электрона». Мы знаем теперь, что в действительности  $e^*$  совпадает с зарядом куперовской пары электронов,  $e. e^* = 2e$ , а не  $e$ . Это значение можно было предвидеть, разумеется, лишь на основании идеи о спаривании электронов, лежащей в основе микроскопической теории сверхпроводимости. значение  $2e$  так же универсально, как и  $e$ , так что выдвинутый Ландау аргумент сам по себе был правилен.

Другой вклад Ландау в физику сверхпроводимости состоит в выяснении природы так называемого промежуточного состояния. понятие об этом состоянии было впервые введено Р. Пайерлсом Ф. Лондоном (1936 г.) для описания наблюдавшегося факта степенности сверхпроводящего перехода в магнитном поле. Эта теория, однако, имела чисто феноменологический характер, и вопрос о природе промежуточного состояния оставался открытым. Ландау показал, что это состояние не является каким-либо новым, а в действительности сверхпроводник в нем состоит из следовательных тонких слоев нормальной и сверхпроводящих фаз. В 1937 г. [30] Ландау рассмотрел модель, в которой эти слои переходят на поверхность образца; изящным и остроумным методом ему удалось полностью определить форму и размеры слоев по такой модели \*. В 1938 г. он предложил новый вариант теории, согласно которому при выходе к поверхности слои подвергаются многократному разветвлению; такая структура должна стать термодинамически более выгодной при достаточно больших размерах образца \*\*.

Но наиболее значительный вклад, которым физика обязана Ландау, — это создание им теории квантовых жидкостей. Значение этой новой области в настоящее время все более возрастает; сомненно, что ее развитие за последние десятилетия оказало революционизирующее влияние и на другие области физики — физику твердого тела и даже на физику ядра.

Сам Л. Д. писал по этому поводу, что «удивительным образом оказывается возможным точное определение формы слоев» [30].  
Подробное изложение этой работы опубликовано в 1943 г. [47].

Теория сверхтекучести была создана Ландау в 1940—1941 гг., вскоре после открытия в конце 1937 г. П. Л. Капицей этого основного свойства гелия II. До того предпосылки для понимания физической природы наблюдавшегося в жидком гелии фазового перехода по существу отсутствовали, и не удивительно, что по этому поводу высказывались взгляды, которые в настоящее время могли бы даже показаться наивными \*. Замечательна та полнота, с которой теория гелия II была создана с самого начала: уже в первой классической статье Ландау [44] содержатся почти все основные идеи как микроскопической теории гелия II, так и построенной на ее основе макроскопической теории — термодинамики и гидродинамики этой жидкости (последней посвящена также и статья [51]).

В основе теории Ландау лежит представление о квазичастицах (элементарных возбуждениях), составляющих энергетический спектр гелия II. Именно Ландау впервые поставил вопрос об энергетическом спектре макроскопического тела в таком наиболее общем виде, и он же нашел характер спектра для квантовой жидкости того типа, к которому относится жидкий гелий (изотоп He <sup>4</sup>) — как теперь говорят, бозевского типа. В работе 1941 г. Ландау предполагал, что спектр элементарных возбуждений состоит из двух ветвей: фононов — с линейной зависимостью энергии  $\varepsilon$  от импульса  $p$  — и «ротонов» — с квадратичной зависимостью, отделенной от основного состояния энергетической щелью. Впоследствии Ландау нашел, что такой вид спектра не удовлетворителен с теоретической точки зрения (он не был бы устойчив), а тщательный анализ появившихся к тому времени более полных и точных экспериментальных данных привел его в 1946 г. к установлению знаменитого спектра, содержащего всего одну ветвь, в которой «ротоном» отвечает минимум на кривой  $\varepsilon(p)$ . Макроскопические представления теории сверхтекучести широко известны. В своей основе они сводятся к представлению о двух одновременно происходящих в жидкости движениях — «нормальном» и «сверхтекучем», которые можно, для наглядности, рассматривать как движения двух «компонент жидкости» \*\*. Нормальное

\* Так, сам Ландау в своей работе по теории фазовых переходов [29] высказал предположение о том, не является ли гелий II жидким кристаллом, хотя и подчеркивал сомнительность такого представления.

\*\* Некоторые идеи «двухкомпонентного» макроскопического описания жидкого гелия (хотя и без ясной их физической интерпретации) были введены, независимо от Ландау, Л. Тиссой. Его подробная статья, опубликованная во Франции в 1940 г., в силу условий военного времени была получена в СССР лишь в 1943 г., а небольшая заметка 1938 г. в Докладах Парижской академии осталась, к сожалению, незамеченной. Критика количественной стороны теории Тиссы дана Ландау в статье [64].

движение сопровождается, как и у обычных жидкостей, внутренним трением. Определение коэффициента вязкости представляет собой кинетическую проблему, требующую анализа процессов установления равновесия в «газе квазичастиц»; основы теории вязкости гелия II были развиты Ландау (совместно с И. М. Халатниковым) в 1949 г. [67, 68]. Наконец, еще в одной работе (совместно с И. Я. Померанчуком) рассмотрен вопрос о поведении посторонних атомов в гелии II [62]; было показано, в частности, что всякий такой атом войдет в состав «нормальной компоненты» жидкости, вне зависимости от того, обнаружило бы само по себе вещество примеси свойство сверхтекучести — в противоположность высказывавшемуся до того в литературе неправильному взгляду.

Жидкий изотоп  $\text{He}^3$  представляет собой квантовую жидкость другого типа, как теперь говорят, фермиевского. Хотя ее свойства не так эффектны, как свойства жидкого  $\text{He}^4$ , но с принципиальной теоретической точки зрения они не менее интересны. Теория таких жидкостей была создана Ландау и изложена им в трех статьях, опубликованных в 1956—1958 гг. В двух первых работах [87, 88] был установлен характер энергетического спектра ферми-жидкости, рассмотрены ее термодинамические свойства и установлено кинетическое уравнение для релаксационных процессов в ней. Исследование кинетического уравнения привело Ландау к предсказанию особого типа колебательного процесса в жидком  $\text{He}^3$  вблизи абсолютного нуля, который был назван им нулевым звуком. В третьей работе [93] кинетическое уравнение, вывод которого содержал в себе ранее ряд интуитивных предположений, получило строгое микроскопическое обоснование.

Заканчивая этот краткий и далеко не полный обзор, остается лишь повторить, что для физиков нет необходимости в подчеркивании значения вклада Льва Давидовича Ландау в теоретическую физику. Сделанное им имеет непреходящее значение и останется в науке навсегда.

Е. М. ЛИФШИЦ

**СПИСОК СТАТЕЙ,  
НЕ ВКЛЮЧЕННЫХ В ЭТО СОБРАНИЕ.**

1. К выводу уравнения Клейна — Фока (совместно с Д. Иваненко). *Zs. Phys.*, 40, 161, 1926.  
Вывод уравнения Клейна — Фока гамильтоновым методом, аналогичный выводу нерелятивистского уравнения Шредингера.
2. Замечания о квантовой статистике (совместно с Д. Иваненко). *Zs. Phys.*, 42, 562, 1927.  
Возражение против обоснования квантовой статистики электронов антисимметричностью волновых функций.
3. Связь волновой механики с классической (совместно с Д. Иваненко). *Ж. Русского физ.-хим. Общества, физический отдел*, 59, 255, 1927.  
Обсуждаются различные аспекты связи между уравнением Гамильтона — Якоби и уравнением Шредингера или Клейна — Фока.
4. К теории магнитного электрона (совместно с Д. Иваненко). *Zs. Phys.*, 48, 340, 1928.  
Попытка ввести четвертое квантовое число электрона путем введения, в качестве волновых функций, антисимметричных тензоров различного ранга.
5. Мировые постоянные и предельный переход (совместно с Г. Гамовым и Д. Иваненко). *Ж. Русского физ.-хим. Общества, физический отдел*, 60, 13, 1928.  
Общее обсуждение вопроса о размерности мировых постоянных и выборе независимых единиц измерения.
6. О спиновых эффектах в задаче многих тел. *Zs. Phys.*, 30, 654, 1929.  
Обсуждение возможных обобщений уравнения Дирака на многоэлектронные системы.
7. Замечание о рассеянии жестких  $\gamma$ -лучей. *Naturwiss.*, 18, 1112, 1930.  
Возражение против статьи Г. Бека того же наименования; подчеркнута необходимость учета правила сумм при оценке матричных элементов перехода.
8. О теории электрического пробоя А. Иоффе (совместно с Л. Розенкевичем). *Zs. Phys.*, 78, 847, 1932.

Критика теории электрического пробоя, предложенной А. Иоффе. Подчеркивается невозможность существования для ионов в кристалле «длин свободного пробега», превосходящих атомные расстояния.

9. К теории сверхпроводимости. Phys. Zs. Sowjet., 4, 43, 1933.  
Обсуждается возможность объяснения сверхпроводимости, исходя из предположения о существовании тока насыщения в каждом малом участке сверхпроводника.
10. Об отклонении от закона Ома в полупроводниках в сильных электрических полях (совместно с А. Компанейцем). ЖЭТФ, 5, 276, 1935; Phys. Zs. Sowjet., 6, 163, 1934.  
Определена немаксвелловская функция распределения электронов в полупроводнике в сильном электрическом поле и с ее помощью — проводимость как функция поля. Однако, ввиду ошибки, допущенной при составлении кинетического уравнения, количественные результаты оказались не вполне правильными (ошибка была исправлена Б. И. Давыдовым, ЖЭТФ, 6, 479, 1936).
11. Теория фазовых переходов. Nature, 138, 840, 1936.  
Краткое сообщение о работах [28, 29].
12. Промежуточное состояние сверхпроводников. Nature, 141, 688, 1938.  
Краткое сообщение о работе [47].
13. Теория сверхтекучести гелия II. Phys. Rev., 60, 356, 1941.  
Краткое сообщение о работе [44].
14. Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемой жидкости. ДАН СССР, 44, 151, 1944.  
Полученный в этой статье результат об устойчивости тангенциальных разрывов при достаточно больших скоростях ошибочен и связан с тем, что (как указал С. И. Сыроватский) были рассмотрены не все возможные типы возмущений.
15. К теории вязкости гелия II (совместно с И. М. Халатниковым). Изв. АН СССР, серия физическая, 12, 216, 1948.  
Краткое сообщение о работах [67, 68].
16. Относительно критики В. Аллисом моей статьи о кулоновском взаимодействии в плазме. Phys. Rev., 77, 567, 1950.  
Показано, что возражения Аллиса против работы [23] были основаны на неправильном разложении интеграла столкновений.
17. О вращении жидкого гелия II (совместно с Е. М. Лифшицем). ДАН СССР, 100, 669, 1955.  
Рассмотрена модель слоистой структуры вращающегося гелия II; такая структура, однако, термодинамически менее выгодна, чем возникновение в жидкости вихревых нитей.

### КНИГИ Л. Д. ЛАНДАУ

1. Задачи по теоретической физике; часть I, Механика (совместно с Е. М. Лифшицем и Л. В. Розенквичем). Харьков, 1935.
2. Электропроводность металлов (совместно с А. С. Компанейцем). Харьков, 1935.

3. Теоретическая физика (совместно с Е. М. Лифшицем) \*  
 Механика (1940 \*\*, 1958, 1965);  
 Теория поля (1941, 1948, 1960, 1962, 1967);  
 Квантовая механика (1948, 1963);  
 Статистическая физика (1938, 1940, 1951, 1964);  
 Механика сплошных сред (1944, 1954);  
 Теория упругости (1965);  
 Электродинамика сплошных сред (1959).
4. Курс лекций по общей физике. Издание МГУ, 1948.
5. Лекции по теории атомного ядра (совместно с Я. А. Смородинским). М., 1955.
6. Что такое теория относительности (совместно с Ю. Б. Румером). Изд-во «Советская Россия», 1959, 1963.
7. Физика для всех. Движение и теплота (совместно с А. И. Китайгородским). Физматгиз, (1963, 1965).
8. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика (совместно с А. И. Ахисзером и Е. М. Лифшицем). Изд-во «Наука», 1965.

#### О ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Л. Д. ЛАНДАУ

1. В. Б. Берестецкий. Лев Давидович Ландау (к пятидесятилетию со дня рождения). УФН, 64, 615, 1958.
2. Научное творчество Л. Д. Ландау. Сборник. Изд-во «Знание», 1963.
3. А. А. Абрикосов. Академик Л. Д. Ландау (краткая биография и обзор научных работ). Изд-во «Наука», 1965.
4. J. Pella m. Речь по случаю присуждения Л. Д. Ландау премии им. Ф. Лондона. Physics Today, 14, 42, 1961.
5. В. Л. Гинзбург. Лев Давидович Ландау (к шестидесятилетию со дня рождения), УФН, 94, 131, 1968.
6. Е. М. Лифшиц. История открытия и объяснения сверхтекучести (к шестидесятилетию академика Л. Д. Ландау). «Природа», № 1, 1968.
7. Э. Л. Андроникашвили. Ландау каким мы его запомним, «Литературная газета», № 15, 1968.

\* В скобках указаны годы последовательных изданий (Гостехиздат, затем Физматгиз и изд-во «Наука». М.). Эти книги были также переведены и изданы в Англии, ГДР, Испании, Китае, Польше, Румынии, США, Югославии, Японии, а также на французском языке издательством «Мир».

\*\* Первое издание этой книги было опубликовано совместно с Л. Пятигорским.