Е. М. ЛАНДИС

УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

517.2
Л 15
УДК 517.944

Уравиеиия второго порядка эллиптического и параболического типов. Ландис Е. М. Главная редакция физико-математической литературы, изд-во «Наука», 1971.

Книга посвящена теории эллиптических и параболических уравнений 2-го порядка, главным образом, линейных.

Значительное внимание уделено вопросам качественного поведения решений вблизи граничных точек и на бесконечности.

Библ. 68 названий, рис. 42.

$\frac{2-2-3}{41-71}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана на основе курса лекций, прочитанных студентам III—IV курсов механико-математического факультета МГУ в 1967—1968 гг.

Она предназначена для читателя, знакомого только с первоначальными сведениями об уравнениях с частными производными (например, в объеме курса лекций И. Г. Петровского [1]), и имеет целью подвести его к некоторым современным задачам по теории эллиптических и параболических уравнений 2-го порядка.

При этом мне хотелось, с одной стороны, исключить необходимость обращаться при чтении к другим пособиям, а с другой — чтобы книга не была «толстой».

Поэтому я выбрал сравнительно небольшое число вопросов — перечень их виден из оглавления, — но постарался изложить их последовательно и подробно.

Основным инструментом для исследования решений уравнения в первой главе (несамосопряженные эллиптические уравнения) и в третьей главе (параболические уравнения) служат суб- и суперфундаментальные решения, строящиеся при помощи потенциала Рисса. Такой подход делает простым качественное исследование поведения решений в окрестности граничных точек (теоремы винеровского типа) и на бесконечности (теоремы типа Фрагмена — Линделёфа, лиувиллевы теоремы). Этот же метод позволяет просто получать априорную оценку нормы Гёльдера решения для уравнений с малым разбросом корней характеристического уравнения с тем, чтобы использовать ее в дальнейшем для доказательства существования решения краевой задачи для квазилинейного уравнения.

Во второй главе (самосопряженные эллиптические уравнения) я знакомлю с новыми и, мне кажется, перспективными методами, основанными на теоремах теории функций многих действительных переменных.

Все эти вопросы мало пересекаются с материалом, содержащимся в существующих монографиях и учебниках. В то же время желание сделать изложение цельным и иметь возможность не отсылать читателя к другим источникам привело к потребности излагать значительное количество традиционного материала (метод Лере — Шаудера, решение задачи Дирихле вариационным методом в энергетических пространствах, тепловые потенциалы и т. д.).

Несколько технических замечаний.

В каждой из трех глав книги своя нумерация параграфов и своя (сплошная для данной главы) нумерация формул.

Теоремы и леммы имеют двойной номер: номер параграфа и порядковый номер в данном параграфе.

Каждый параграф, как правило, завершается «Примечаниями», комментирующими содержание параграфа и содержащими литературные указания. Приводимый при этом в квадратных скобках номер относится к номеру работы данного автора в списке литературы, приведенном в конце книги.

Материал, не трудный принципиально, но громоздкий, который прервал бы слитность изложения, я вынес в дополнения (Дополнения I—IV). Кроме того, в дополнения вынесена теорема о неподвижной точке (Дополнение II).

На всех этапах работы над курсом лекций, а затем над книгой мне помогал Ю. С. Ильяшенко. Благодаря ему был устранен ряд погрешностей и внесены улучшения в некоторые доказательства. Я очень благодарен ему за эту помощь.

Пользуюсь также случаем, чтобы поблагодарить М. И. Вишика, прочитавшего рукопись этой книги и сделавшего ряд полезных замечаний.

Е. М. Ландис

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В НЕДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ

Введение

Линейный дифференциальный оператор 2-го порядка

$$L = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x), \qquad (1)$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

называется *эллиптическим*, если квадратичная форма

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

положительно определена.

Мы всегда будем предполагать, что $a_{ik} = a_{ki}$. Оператор называется *равномерно эллиптическим* в некоторой области D, если существуют такие две положительные константы C_1 и C_2, что

$$C_1|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \leqslant C_2|\xi|^2 \qquad (2)$$

для всех ξ и для всех $x \in D$, а коэффициенты b_i и c ограничены по модулю.

Решением уравнения

$$Lu = 0 \qquad (3)$$

в этой главе будем называть (впоследствии мы введем еще и другое определение) *классическое* решение —

функцию, обладающую непрерывными частными производными до второго порядка включительно и обращающую его в тождество.

Аналогично *решением неравенства*

$$Lu \leqslant 0 \quad \text{или} \quad Lu \geqslant 0$$

также будем называть дважды непрерывно дифференцируемую функцию, удовлетворяющую соответствующему неравенству.

Функцию u, являющуюся решением неравенства

$$Lu \leqslant 0, \tag{4}$$

будем называть *суперэллиптической*, а функцию, являющуюся решением неравенства

$$Lu \geqslant 0, \tag{5}$$

— *субэллиптической*.

Вместо условия равномерной эллиптичности (2) будем обычно рассматривать эквивалентное ему условие

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,\xi_i\xi_k \geqslant a\,|\,\xi\,|^2, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) \leqslant M \tag{2'}$$

($x \in D$, ξ — произвольно), где $a > 0$ и $M > 0$ — некоторые константы. Константы a и M будем называть *константами эллиптичности*.

Всюду дальше мы будем придерживаться следующих обозначений:

R_n — n-мерное евклидово пространство,

$Q_R^{x^0}$ — открытый шар в R_n радиуса R с центром в точке x^0,

$S_R^{x^0}$ — сфера $|x - x^0| = R$,

$\Omega_{R_1, R_2}^{x^0}$ — шаровой слой, определяемый неравенствами $R_1 \leqslant |x - x^0| < R_2$.

Начало координат будет обозначаться буквой O, так что R_R^0 — шар радиуса R с центром в начале координат.

Через $\bar{E}$ будем обозначать замыкание множества E и через ∂E — его границу.

Для простоты мы в главе I, как правило, будем ограничиваться рассмотрением оператора L, не содержащего младших членов

$$L = \sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}. \qquad (1')$$

Всюду на протяжении главы I, если специально не оговорено противное, под L будем понимать именно этот оператор (1').

Для такого оператора нам важны будут не сами по себе константы a и M, а только их отношение.

Еще удобнее ввести в рассмотрение величину

$$e = \sup_{x \in D,\ |\xi|=1} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)}{\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}(x)\, \xi_i \xi_k}.$$

Число e будем называть *константой эллиптичности* оператора L.

Иными словами, для всякого $x \in D$ берется отношение суммы всех собственных чисел матрицы $\|a_{ik}(x)\|$ к наименьшему собственному числу, и константа эллиптичности e является верхней гранью этого отношения по всем $x \in D$.

Заметим, что всегда $e \geqslant n$, и если $e = n$, то оператор L после умножения на некоторую положительную функцию превращается в оператор Лапласа.

§ 1. Принцип максимума

Теорема 1.1. *Пусть $D \subset R_n$ — ограниченная область и L — эллиптический оператор* (1') *в ней.*

Пусть u — суперэллиптическая (субэллиптическая) в D функция, непрерывная в $\bar{D}$. Тогда

$$u(x) \geqslant \min_{\partial D} u \qquad (u(x) \leqslant \max_{\partial D} u), \qquad x \in D.$$

Достаточно доказать что-либо одно. Пусть для определенности u — суперэллиптическая.

Предварительно докажем лемму.

Лемма 1.1. *Если*

$$Lu < 0 \text{ в } D, \tag{6}$$

то и не может иметь минимум во внутренней точке.

Доказательство. Допустим, что, вопреки утверждению леммы, минимум достигается во внутренней точке x^0. Сделаем линейную замену переменных

$$x \longleftrightarrow y,$$

приводящую оператор L в точке x^0 к каноническому виду.

Мы имеем тогда

$$Lu\big|_{x=x^0} = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x^0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k}\bigg|_{x=x^0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}\bigg|_{y=y^0 \leftrightarrow x^0} \geqslant 0,$$

что противоречит неравенству (6).

Перейдем к доказательству теоремы.

Заметим, что из эллиптичности оператора следует $a_{ii} > 0$, и рассмотрим вспомогательную функцию

$$v_\varepsilon = u - \varepsilon x_1^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Так как

$$Lv_\varepsilon = Lu - \varepsilon a_{11} < 0,$$

то по лемме 1.1

$$v_\varepsilon(x) \geqslant \min_{\partial D} v_\varepsilon(x),$$

и так как

$$u(x) \geqslant v_\varepsilon(x)$$

и

$$v_\varepsilon(x) \to u(x) \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

то

$$u(x) \geqslant \min_{\partial D} u(x) \qquad \text{(ч. т. д.)}.$$

Задача. Доказать для полного оператора (1) принцип максимума в следующих формулировках:

1. Если $c(x) \leqslant 0$, то суперэллиптическая (субэллиптическая) функция достигает отрицательного минимума (положительного максимума) на границе области.

2. Пусть $c(x) \leqslant 0$ и $u(x)$ — решение уравнения $Lu = 0$, где L — оператор вида (1). Тогда $u(x)$ не может принимать равного нулю экстремального значения внутри области ($u \not\equiv 0$).

3. Если оператор L вида (1) равномерно эллиптичен, коэффициенты b_i ограничены по модулю, а коэффициент $c(x)$ ограничен сверху, то найдется такое $d_0 > 0$, зависящее от a и M неравенства (2'), а также от констант, ограничивающих коэффициенты b_i и c, что для всякой области D, диаметр которой меньше d_0, и для всякого решения $Lu = 0$ в ней, непрерывного в $\overline{D}$, справедливо

$$\max_{\overline{D}} |u| \leqslant 2 \max_{\partial D} |u|.$$

Вернемся к нашему оператору L вида (1').

При $n = 2$ один только принцип максимума позволяет делать некоторые заключения о поведении решений уравнения в целом.

Пусть $n = 2$, и пусть $u(x, y)$ — решение уравнения

$$Lu = 0 \tag{6'}$$

в некоторой плоской области D.

Заметив, что всякая линейная функция $ax + by + c$ удовлетворяет уравнению, рассмотрим множество точек (x, y), где

$$u(x, y) > ax + by + c.$$

Всякая связная компонента D' этого множества должна дотягиваться до границы D. В противном случае, применяя к функции

$$v(x, y) = \\ = u(x, y) - (ax + by + c)$$

в области D' принцип максимума, мы пришли бы к противоречию.

То же, разумеется, справедливо и для множества точек, где

$$u(x, y) < ax + by + c.$$

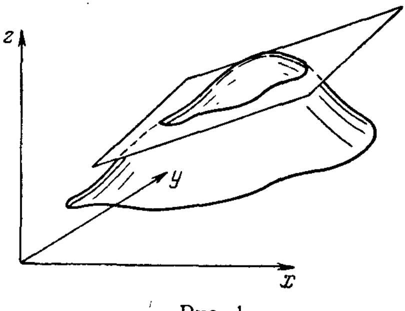

Рис. 1.

Геометрически этот факт можно выразить так: от графика функции нельзя срезать «шапочки» никакой плоскостью (рис. 1).

Про график непрерывной функции $f(x, y)$, от которого нельзя срезать шапочки никакой плоскостью, говорят, что он имеет *обобщенную неположительную кривизну*. Таким образом, график решения уравнения (6) имеет обобщенную неположительную кривизну.

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на всей плоскости и ее график имеет обобщенную неположительную кривизну. Этого, оказывается, достаточно, чтобы для $f(x, y)$ была справедлива теорема Лиувилля в следующей формулировке:

Положим

$$M(r) = \max_{x^2+y^2=r^2} |u(x, y)|.$$

Тогда либо

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{M(r)}{r} > 0,$$

либо график функции f есть цилиндр с образующей, параллельной плоскости xy.

(Заметим, что если решение уравнения (6), растущее медленнее чем линейно, есть такой цилиндр, то оно необходимо константа — почему?)

Эта теорема, принадлежащая Г. М. Адельсону-Вельскому, имеет довольно сложное доказательство. Ее мы доказывать не будем, а вместо нее докажем другое, родственное, свойство непрерывных функций с графиками обобщенной неположительной кривизны. Речь идет о теореме типа Фрагмена — Линделёфа.

Прежде чем формулировать ее, я сформулирую классическую теорему Фрагмена — Линделёфа из теории аналитических функций, для того чтобы выяснить связь той теоремы, которую мы будем доказывать, с классическим предложением. Тем более, что в дальнейшем мы будем заниматься различного рода его обобщениями.

Пусть в верхней комплексной полуплоскости z определена аналитическая функция $f(z)$, и для всякой точки x вещественной оси

$$\varlimsup_{z\to x} |f(z)| \leqslant 1.$$

Тогда либо $|f(z)| \leqslant 1$ во всей верхней полуплоскости, либо

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{r} > 0, \tag{7}$$

где $M(r)=\sup\limits_{|z|=r}|f(z)|$ (в неравенстве (7) верхний предел можно заменить нижним, но здесь сейчас будем заниматься обобщением более слабого неравенства (7)).

Эту теорему можно переформулировать для гармонической функции. Действительно, пусть в верхней полуплоскости $y>0$ определена гармоническая функция $u(x, y)$ и для всякого x_0

$$\varlimsup_{(x,\,y)\to(x_0,\,0)} u(x,\ y)\leqslant 0.$$

Тогда либо $u(x, y)\leqslant 0$ всюду в верхней полуплоскости, либо

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{M(r)}{r}>0,$$

где

$$M(r)=\sup_{x^2+y^2=r^2} u(x,\ y).$$

Действительно, пусть $v(x, y)$ — гармоническая функция, сопряженная $u(x, y)$. Надо положить

$$f(z)=e^{u+iv}$$

и применить к функции f сформулированное выше утверждение.

Эта последняя теорема (с некоторыми изменениями) оказывается справедливой для произвольной непрерывной функции с графиком обобщенной неположительной кривизны. Сформулируем ее.

Теорема 1.2. *Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в полуплоскости $y\geqslant 0$. Пусть график f имеет неположительную обобщенную кривизну. Пусть, далее, для всех x*

$$f(x,\ 0)\leqslant 0. \tag{8}$$

Тогда либо 1) $f(x, y)\leqslant 0$ *при* $y>0$,
либо 2)

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{M(r)}{r}>0,$$

где

$$M(r)=\sup_{x^2+y^2=r^2}|f(x,\ y)|,$$

либо 3) существует такое Y, что при $y \geqslant Y$ график $f(x, y)$ является цилиндром с образующей параллельной оси x.

Доказательство. Вместо условия (8) мы можем написать

$$f(x, 0) < 0,$$

так как вместо функции f можно рассмотреть $f - \varepsilon$ при произвольном $\varepsilon > 0$.

Допустим, что пп. 1) и 2) в условии теоремы не выполнены. Докажем, что в этом случае выполняется п. 3).

Пусть

$$f(x_0, y_0) = a > 0, \quad y_0 > 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - \frac{a}{2y_0} y.$$

Поскольку условие 2) не выполнено, найдется такое положительное число b, что $\varphi(x, y) < 0$, если $y \geqslant \max(|x|, b)$. Пусть П — заштрихованная на рис. 2 полоса (между осью x и ломаной $y = \max(|x|, b)$). На границе этой полосы функция φ отрицательна, а внутри полосы находится точка (x_0, y_0), где она положительна. Обозначим верхнюю (ломаную) границу этой полосы через L и введем в рассмотрение функцию $\eta(x)$, равную для каждого x максимальному значению, которое принимает функция $\varphi(x, y)$ на отрезке, параллельном оси y, имеющем абсциссу x и соединяющем L с осью x.

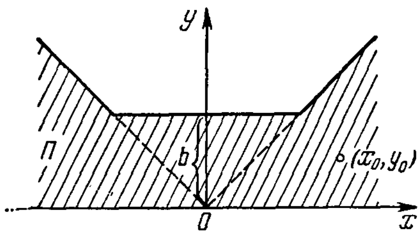

Рис. 2.

$\eta(x)$ — непрерывная функция одного переменного Докажем, что она — константа.

Предположим, что она не константа. Так как в точке x_0 она положительна и условие 2) не выполнено, найдутся три точки x_1, x_2, x_3, $x_1 < x_2 < x_3$ такие, что $\eta(x_1) > 0$,

$\eta(x_2)>0$, $\eta(x_3)>0$, и точка $(x_2, \eta(x_2))$ лежит на плоскости (x, z) выше отрезка прямой, соединяющего точки $(x_1, \eta(x_1))$ и $(x_3, \eta(x_3))$.

Тогда от графика функции $\eta(x)$ этот отрезок срезает «шапочку», направленную вверх и лежащую в верхней полуплоскости (x, z) (рис. 3).

Но тогда плоскость в пространстве (x, y, z), проходящая через этот отрезок и параллельная оси y, срезает «шапочку» от графика функции $\varphi(x, y)$, что невозможно.

Следовательно,

$$\eta(x) = \text{const} = A > 0.$$

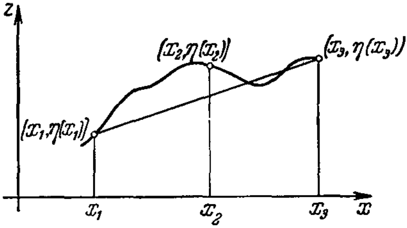

Рис. 3.

Рассмотрим множество уровня $\varphi(x, y) = A$. Обозначим его через E. Множество E замкнуто, как множество уровня непрерывной функции. Оно пересекается с каждой прямой $x = \text{const}$. Возьмем на каждой такой прямой самую нижнюю точку, принадлежащую E, и множество этих нижних точек обозначим через E_0. Докажем, что E_0 — прямая, параллельная оси x.

Допустим, что это не так: существуют две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), принадлежащие E_0 и такие, что $y_1 \neq y_2$. Пусть для определенности $x_2 < x_1$ и $y_2 < y_1$. Тогда левее (x_2, y_2) найдется точка $(x_3, y_3) \in E_0$ такая, что

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} > \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}.$$

Рассмотрим трапецию с вершинами в точках (x_1, y_1), $(x_1, 0)$, $(x_3, 0)$, (x_3, y_3). На нижней ее стороне и на вертикальных сторонах, кроме точек (x_1, y_1) и (x_3, y_3), имеем неравенство $\varphi(x, y) < A$. Проведем на плоскости (x, y) прямую l между точкой (x_2, y_2) и отрезком $[(x_1, y_1), (x_3, y_3)]$ параллельно этому отрезку так, чтобы она пересекала обе вертикальные стороны трапеции. Пусть

$$y = kx + b$$

— уравнение этой прямой, а точка пересечения этой прямой с вертикальными сторонами трапеции — соответственно (x_1, y_1') и (x_3, y_3') (рис. 4).

На отрезках $[(x_1, 0), (x_1, y_1')]$, $[(x_3, 0), (x_3, y_3')]$ и $[(x_3, 0), (x_1, 0)]$ имеет место неравенство $\varphi(x, y) < A - \delta$, где δ — некоторое положительное число. Выберем число $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы на этих же отрезках выполнялось

$$\varepsilon | y - kx - b | < \delta.$$

Тогда плоскость

$$z = A + \varepsilon(y - kx - b)$$

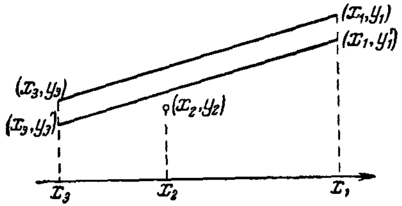

Рис. 4.

в пространстве (x, y, z) срежет «шапочку» от графика $\varphi(x, y)$. Действительно,

$$\varphi(x_2, y_2) - [A + \varepsilon(y_2 - kx_2 + b)] > 0,$$

а на всех четырех сторонах трапеции

$$\varphi(x, y) - [A + \varepsilon(y - kx - b)] < 0.$$

Таким образом, E_0 — прямая, параллельная оси x. Пусть Y — ее ордината. Итак, график функции $f(x, y)$ содержит прямую $y = Y$, $z = A$. Полагая

$$f_1(x, y) = f(x, y - Y) - A$$

и применяя к f_1 полученный только что результат, найдем, что график $f(x, y)$, содержащий одну прямую, параллельную оси x, всегда содержит еще и другую с большей ординатой.

Для того чтобы довести доказательство до конца, нам нужно еще заметить, что если график f содержит две прямые, параллельные оси x, то между ними непременно лежит еще и третья такая прямая. Для того чтобы показать это, проведем через эти две прямые плоскость и вычтем из f линейную функцию, графиком которой является эта плоскость (может быть, еще поменяем знак разности на обратный). Тогда проекции этих прямых на плоскость (x, y) могут служить в качестве границы полоски П, что и приводит к заключению о существовании нужной прямой, а вместе с тем и завершает доказательство теоремы.

Контрольный вопрос. Где в доказательстве мы использовали то обстоятельство, что $M(r)$ — верхняя грань *модуля* u при $x^2 + y^2 = r^2$, а не верхняя грань *самого* u? Почему нельзя здесь снять модуль?

Примечания.

Основное назначение этого параграфа заключается в том, чтобы продемонстрировать, какие свойства функций можно получить из одного только принципа максимума, как геометрического свойства, безотносительно к тому, какому уравнению удовлетворяет функция. При этом предполагалось, что принципу максимума удовлетворяет не только сама исходная функция, но и всякая функция, отличающаяся от нее на линейную.

Для функции двух переменных с такими свойствами, определенной на всей плоскости, *С. Н. Бернштейном* была доказана так называемая «двусторонняя» теорема Лиувилля: функция — константа, если она ограничена и сверху, и снизу [1]. Им же было доказано, что обычная «односторонняя» теорема Лиувилля в этом случае неверна.

Бернштейн в своем доказательстве предполагал, что функция обладает определенной гладкостью. *И. М. Гельфанд* высказал предположение, что гладкость здесь несущественна, для справедливости этого факта достаточно одной непрерывности. Это оказалось действительно так: соответствующая теорема была доказана *Г. М. Адельсоном-Вельским* [1].

Ведущая идея доказательства теоремы Фрагмена — Линделёфа для поверхностей обобщенной неположительной кривизны, рассмотренной в § 1, принадлежит Адельсону-Вельскому. Само же доказательство получено *Ю. К. Герасимовым* [1].

При $n > 2$ теорема Бернштейна (и тем более Адельсона-Вельского) неверна. Соответствующий пример был построен *Е. Хопфом* [1]. Как заметил А. А. Космодемьянский, небольшое видоизменение примера Е. Хопфа позволяет получить контрпример к теореме типа Фрагмена — Линделёфа для функций с графиком обобщенной неположительной кривизны в сформулированном в этом параграфе виде при $n > 2$.

Тем не менее кое-какие выводы о поведении в целом функций с графиком обобщенной неположительной кривизны при $n > 2$ сделать можно. Следующая теорема принадлежит *А. А. Космодемьянскому* [1].

Пусть в цилиндре $\sum\limits_{i=2}^{n} x_i^2 \leqslant h^2$, $-\infty < x_1 < \infty$, определена функция $f(x)$ с графиком обобщенной неположительной кривизны. Пусть на боковой поверхности цилиндра она неположительна. Обозначим $M(t) = \max\limits_{x_1=t} f(x)$. Тогда имеет место одно из трех: 1) $f(x)$ непол*о*-

жительна всюду в цилиндре, 2) $\lim\limits_{|x_1|\to\infty} M(x_1)/|x_1|>0$ или 3) $M(x_1)=\mathrm{const}>0$. В последнем случае максимальное значение достигается функцией $f(x)$ на прямой, параллельной оси x_1.

Скорость роста, даваемая п. 2), неулучшаема.

То что график имеет обобщенную неположительную кривизну означает, что он в какой-то мере «седлообразен». Мы видим, что некоторые выводы из одной такой «седлообразности», особенно при $n=2$, сделать можно. Но для более серьезных утверждений этого мало: нужна количественная оценка степени «седлообразности». В следующих параграфах это будет сделано в терминах s-емкости.

§ 2. s-емкость

Пусть s — положительное число. Пусть E и T — B-множества в R_n. Рассмотрим на E всевозможные меры μ — вполне аддитивные неотрицательные функции множества, определенные на некоторой σ-алгебре подмножеств E, содержащей B-множества (см. Халмош [1]). Меру μ назовем допустимой, если выполнено условие

$$\int\limits_E \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s}\leqslant 1 \quad \text{при} \quad x\in T. \tag{9}$$

Положим

$$\sup \mu E = C_s^T(E),$$

где верхняя грань берется по всем допустимым мерам.

Число $C_s^T(E)$ назовем *относительной s-емкостью* множества E по отношению к множеству T.

Относительную емкость множества E по отношению к своему дополнению будем называть просто *s-емкостью* и обозначать $C_s(E)$.

Таким образом,

$$C_s^{R_n\setminus E}(E)=C_s(E).$$

Нам понадобятся некоторые свойства s-емкости.

Теорема 2.1. *Пусть $E_1\subseteq E_2$ и $T_1\supseteq T_2$. Тогда*

$$C_s^{T_1}(E_1)\leqslant C_s^{T_2}(E_2)$$

(в частности, $C_s(E_1)\leqslant C_s(E_2)$ при $E_1\subset E_2$).

Действительно, если μ — некоторая допустимая мера на E_1, то на E_2 мера μ', определенная равенством

$$\mu' A=\mu(A\cap E_1),$$

будет тоже допустимой, и

$$\mu'(E_2)=\mu(E_1).$$

Теорема 2.2. *Если* $E=\bigcup_{i=1}^{m} E_i$, *то* $C_s^T(E)\leqslant \sum_{i=1}^{m} C_s^T(E_i)$.

Доказательство. Пусть μ — допустимая мера на E. Тогда μ является допустимой мерой и на E_i, и

$$\mu E\leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu E_i$$

по свойству меры.

Теорема 2.3. *При преобразовании подобия с коэффициентом k s-емкость умножается на k^s.*

Этот факт очевиден.

Теорема 2.4. *s-емкость шара $Q_R^{x^0}$ не меньше R^s.*

Действительно, пусть мера μ сосредоточена в центре шара и равна R^s. Такая мера является допустимой и

$$\mu\left(Q_R^{x^0}\right)=R^s, \text{ т. е. } C_s\left(Q_R^{x^0}\right)\geqslant R^s.$$

Теорема 2.5. *Пусть* $s>1$, $Ц_{\rho, h}$ — *цилиндр*:

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2<\rho^2, \quad 0<x_n<h$$

и

$$\rho<\frac{1}{4} h.$$

Тогда

$$C_s(Ц_{\rho, h})\geqslant ch\rho^{s-1}, \tag{10}$$

где c — положительная константа, зависящая от s.

Доказательство. Пусть мера μ сосредоточна на отрезке $[\rho, h-\rho]$ оси x_n и на нем распределена равномерно с линейной плотностью ν такой, что при x, не принадлежащем цилиндру, выполняется условие

$$\nu \int_{\rho}^{h-\rho} \frac{d\xi}{\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2+(x_n-\xi)^2\right]^{s/2}}\leqslant 1. \tag{11}$$

Тогда

$$C_s(Ц_{\rho, h})\geqslant \nu(h-2\rho)\geqslant \frac{\nu h}{2}. \tag{12}$$

Оценим интеграл в левой части неравенства (11). Пусть точка x расположена на боковой поверхности цилиндра. Исключим из отрезка $[\rho, h-\rho]$ оси x_n отрезок $[x_n-\rho, x_n+\rho]$. Обозначим оставшееся множество (быть может оно совпадает со всем отрезком $[\rho, h-\rho]$) через H. Мы имеем

$$\int_\rho^{h-\rho} \frac{d\xi}{\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2+(x_n-\xi)^2\right]^{s/2}} \leqslant \int_H \frac{d\xi}{|x_n-\xi|^s} < 2\int_\rho^\infty \frac{d\xi}{\xi^s} = \frac{2}{s-1}\,\frac{1}{\rho^{s-1}}.$$

Так как

$$\int_{x_n-\rho}^{x_n+\rho} \frac{d\xi}{\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2+(x_n-\xi)^2\right]^{s/2}} < 2\rho\,\frac{1}{\rho^s} = \frac{2}{\rho^{s-1}},$$

то для точки x, находящейся на боковой поверхности цилиндра,

$$\int_\rho^{h-\rho} \frac{d\xi}{\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2+(x_n-\xi)^2\right]^{s/2}} < \frac{2s}{s-1}\cdot\frac{1}{\rho^{s-1}}. \tag{13}$$

Если x находится на одном из донышек цилиндра, то

$$\int_\rho^{h-\rho} \frac{d\xi}{\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2+(x_n-\xi)^2\right]^{s/2}} < \int_\rho^\infty \frac{d\xi}{\xi^s} = \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{\rho^{s-1}}.$$

Итак, во всех случаях, когда точка x расположена на поверхности цилиндра, справедливо неравенство (13).

Поэтому, если положить

$$\nu = \frac{s-1}{2s}\,\rho^{s-1},$$

то неравенство (11) будет выполняться и, согласно (12),

$$C_s(Ц_{\rho,h}) \geqslant c\cdot h\cdot \rho^{s-1},$$

где

$$c = \frac{s-1}{4s}.$$

Теорема 2.6. *Пусть $s < n$. Существует положительная константа K, зависящая от s и n, такая, что для любого множества $E \subset Q_1^{x^0}$ справедливо*

$$C_s(E) \geqslant \frac{\operatorname{mes} E}{K},$$

где через $\operatorname{mes} E$ обозначена мера Лебега множества E.

Доказательство. Положим

$$K = \int\limits_{Q_1^0} \frac{dx}{|x|^s}.$$

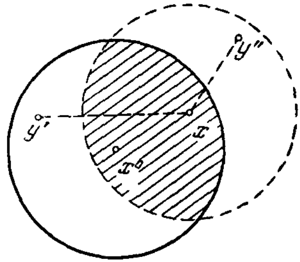

Рис. 5.

Тогда

$$\frac{1}{K}\int\limits_E \frac{dy}{|x-y|^s} \leqslant \frac{1}{K}\int\limits_{Q_1^{x^0}} \frac{dy}{|x-y|^s}.$$

Но, как видно из рис. 5

$$\int\limits_{Q_1^{x^0}} \frac{dy}{|x-y|^s} \leqslant \int\limits_{Q_1^{x}} \frac{dy}{|x-y|^s} = \int\limits_{Q_1^0} \frac{dy}{|y|^s}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{K}\int\limits_E \frac{dy}{|x-y|^s} \leqslant \frac{1}{K}\int\limits_{Q_1^0} \frac{dy}{|y|^s} = 1$$

и

$$C_s(E) \geqslant \frac{1}{K}\int\limits_E dx = \frac{\operatorname{mes} E}{K}.$$

Лемма 2.1. *Пусть L — равномерно эллиптический в области D оператор с константой эллиптичности e. Тогда для всякого s, удовлетворяющего неравенству*

$$s \geqslant e - 2$$

функция $\dfrac{1}{|x-x^0|^s}$ как функция x при произвольном $x^0 \in R_n$ является субэллиптической в области $D \setminus (x^0)$.

Доказательство. Положим

$$|x-x^0|=r, \quad \frac{x_i-x_i^0}{r}=\gamma_i, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Мы имеем тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}\left(\frac{1}{r^s}\right)=s(s+2)\frac{1}{r^{s+2}}\gamma_i\gamma_k \quad \text{при} \quad i\neq k$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r^s}\right)=s(s+2)\frac{1}{r^{s+2}}\gamma_i^2-s\frac{1}{r^{s+2}}.$$

Поэтому

$$L\left(\frac{1}{r^s}\right)=\frac{s}{r^{s+2}}\left[(s+2)\sum_{i,\,k=1}^{n}a_{ik}\gamma_i\gamma_k-\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\right]\geqslant$$
$$\geqslant\frac{s\sum\limits_{i,\,k=1}^{n}a_{ik}\gamma_i\gamma_k}{r^{s+2}}[(s+2)-e] \tag{14}$$

и, следовательно, при $s\geqslant e-2$ правая часть последнего неравенства будет неотрицательна.

Если s таково, что для данного оператора L функция $1/r^s$ является субэллиптической, то s-емкость (при данном s) всякого множества мы будем называть *верхней* для оператора L. Таким образом, $(e-2)$-емкость является верхней.

Для оператора Лапласа константа эллиптичности равна n (квадратичная форма на единичной сфере равна единице, а след матрицы равен n). Поэтому $(n-2)$-емкость является верхней для оператора Лапласа. $(n-2)$-емкость мы будем называть *винеровской* емкостью.

Замечание 2.1. Рассмотрим вместо оператора (1′) полный оператор (1). Действуя им на функцию $1/r^s$, получим

$$L\left(\frac{1}{r^s}\right)\geqslant\frac{s\sum a_{ik}\gamma_i\gamma_k[(s+2)-e]}{r^{s+2}}+\frac{\sum b_i\gamma_i}{r^{s+1}}+\frac{c}{r^s},$$

поэтому при $s>e-2$ и при достаточно малом r: $r<r_0$, где r_0 зависит от s и от оператора, функция

$1/|x-x^0|^s$ субэллиптична в $(D \cap Q_{r_0}^{x^0}) \setminus (x^0)$ (D — область, в которой определен оператор).

Примечания.

Превосходный обзор вопросов, связанных с понятием емкости и потенциала с самой подробной библиографией можно найти в книге *Н. С. Ландкофа* [1].

Здесь же мне хочется сказать несколько слов об отличии того подхода в использовании емкостей и потенциалов, который применен в этой книге, от традиционного. Традиционное желание состоит в том, чтобы рассматривать потенциал (порожденный ядром Рисса) *)

$$U(x) = \int\limits_E \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s}$$

во всем пространстве, и это накладывает на s условие: $s < n$. Если же интересоваться поведением $U(x)$ на множестве T, удаленном на положительное расстояние хотя бы от какой-нибудь одной точки из E, то размеры s могут нас не смущать. Для всякого линейного равномерно эллиптического оператора функции $U(x)$ при достаточно большом s (быть может, и бо́льшем n) является субэллиптической. Если интересоваться решением линейного уравнения без правой части, то $U(x)$ оказывается очень полезным барьером, причем E помещается вне области, где рассматривается уравнение, а $U(x)$ изучается как раз внутри этой области.

Для классической винеровской емкости может быть дано и другое эквивалентное определение через интеграл Дирихле внешней задачи для множества E с единичными граничными условиями. Ряд авторов предпочитает работать в терминах этого определения и его обобщений. Если речь идет об уравнениях с самосопряженной главной частью, то такой подход больше отвечает сути дела, так как он позволяет заменить в ядре потенциала грубое приближение фундаментального решения его главной частью или даже самим фундаментальным решением. О некоторых работах, использующих эти методы, я скажу позднее.

Тем не менее тот примитивный подход, который принят в этой книге, как мне кажется, не лишен привлекательности. Первое его качество — простота. Второе — уже более серьезное: если мы рассматриваем несамосопряженные уравнения с разрывными коэффициентами, то у нас нет возможности лучше уловить характеристическую особенность решения, чем это позволяет сделать разброс корней характеристического уравнения в точке, разброс, не устранимый из-за разрыва коэффициентов. В связи с этим появляется число — константа эллиптичности уравнения, обозначенная нами буквой e — отношение следа матрицы к наименьшему собственному

---

*) По поводу ядер Рисса также отсылаем читателя к цитированной книге Ландкофа, где, в частности, содержатся и все необходимые ссылки на оригинальные работы.

числу (надо было бы еще ее минимизировать по всем линейным преобразованиям). От этого числа действительно зависит поведение решения. В каком-то смысле оно не может быть лучше, чем то, которое можно описать потенциалом с ядром $1/r^{e-2}$. Заметим, что число e в ряде точных теорем играет роль размерности пространства n (сошлюсь, для примера, на теорему 5.3, гл. I, стр. 33, аналогичную теореме *Урысона* [1], в которой показатель $1/(e-3)$, аналогичный показателю $1/(n-3)$ Урысона, не может быть заменен на $\frac{1}{e-3}+\varepsilon$).

В этом параграфе введены понятия s-емкости и относительной s-емкости. По сути дела в книге серьезно используется только s-емкость. Относительная s-емкость, введение которой было продиктовано желанием получить полуаддитивность, тоже нашла свое применение. По этому поводу отсылаю читателя к статье *Е. М. Ландиса* [1].

§ 3. Лемма о нормальной производной и строгий принцип максимума

Лемма 3.1 (лемма о нормальной производной). *Пусть L — оператор вида (1) в шаре Q_R^0 и $u(x)$ — субэллиптическая (суперэллиптическая) в шаре функция, непрерывная в $\overline{Q}_R^0$. Пусть $x^0 \in S_R^0$, и*

$$u(x) < u(x^0) \qquad (u(x) > u(x^0))$$

при всех $x \in Q_R^0$. Пусть в точке x^0 существует производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ по внутренней нормали. Тогда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=x^0} < 0 \qquad \left(\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=x_0} > 0\right).$$

Доказательство. Будем для определенности считать, что $u(x)$ субэллиптична. Пусть e — константа эллиптичности оператора L. Положим $u(x^0)=m$. Тогда

$$\max_{|x|=R/2} u(x) = m - a, \quad a > 0.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x) = m - \frac{\varepsilon}{|x|^{e-2}} + \varepsilon \frac{1}{R^{e-2}},$$

где $\varepsilon > 0$ столь мало, что $v(x) > m - a$ при $|x| = R/2$.

Рассмотрим функции $u(x)$ и $v(x)$ в шаровом слое $\overline{\Omega}^0_{R/2,R}=\left\{\frac{R}{2}\leqslant x\leqslant R\right\}$. Так как по лемме 2.1

$$Lv<0$$

и

$$v\,|_{\partial\Omega^0_{R/2,\,R}}\geqslant u\,|_{\partial\Omega^0_{R/2,\,R}},$$

то по принципу максимума (теорема 1.1)

$$v(x)\geqslant u(x) \text{ при } x\in\Omega^0_{R/2,\,R}.$$

Далее $v(x^0)=u(x^0)$. Поэтому

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=x_0}\leqslant\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{x=x_0}<0 \qquad \text{(ч. т. д.)}.$$

Теорема 3.1 (строгий принцип максимума). *Пусть в области D определен оператор L вида* (1′).

Пусть $u(x)$ — субэллиптическая (суперэллиптическая) функция. Если $u(x)$ достигает максимума (минимума) во внутренней точке области D, то $u\equiv\mathrm{const}$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ субэллиптична и достигает максимума, равного M во внутренней точке. Обозначим через E множество уровня $u(x)=M$. E — замкнутое в D множество. Если оно не совпадает с D, то найдется точка $x'\in D\setminus E$ такая, что

$$0<\rho(x',\,E)<\rho(x',\,\partial D)$$

(через $\rho(x,A)$ мы обозначаем расстояние между точкой $x\in R_n$ и множеством $A\subset R_n$).

Положим $\rho(x',E)=\rho$. Тогда шар $Q^{x'}_\rho$ лежит в $D\setminus E$, а его граница $S^{x'}_\rho$ имеет с E общую точку x^0, так что $u(x)<u(x^0)$ при $x\in Q^{x'}_\rho$. По лемме 4.1 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=x_0}<0$, что невозможно, так как x^0 — точка максимума функции u. Значит, $E=D$, т. е. $u(x)\equiv M$ (ч. т. д.).

Задача. 1. Пусть в полном операторе (1) для коэффициента $c(x)$ выполнено неравенство $c(x)\leqslant 0$.

Докажите, что для него верна лемма о нормальной производной в той же формулировке, что и выше.

2. В предположении, что для полного оператора (1) выполнено то же неравенство $c(x)\leqslant 0$, докажите для

него строгий принцип максимума в следующей форме: если $u(x)$ — субэллиптическая (суперэллиптическая) в некоторой области D функция и во внутренней точке достигается положительный максимум (отрицательный минимум), то $u \equiv \mathrm{const}$ (при этом, естественно, $c \equiv 0$).

Примечание.

Лемма 3.1 для оператора (1) была впервые получена независимо *О. А. Олейник* [1] и *Е. Хопфом* [2].

§ 4. Лемма о возрастании

В этом параграфе мы докажем лемму, существенную для дальнейших рассуждений.

Лемма 4.1. *Пусть в шаре $Q_{4R}^{x^0}$ расположена область D, имеющая предельные точки на поверхности $S_{4R}^{x^0}$ шара $Q_{4R}^{x^0}$ и пересекающая шар $Q_R^{x^0}$. Пусть H — пересечение дополнения области D с шаром $Q_R^{x^0}$. Пусть Γ — та часть границы области D, которая расположена строго внутри $Q_{4R}^{x^0}$* (рис. 6).

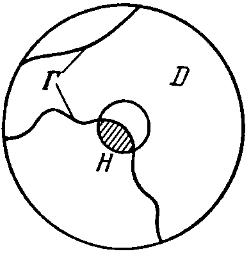

Рис. 6.

Пусть в D определен равномерно эллиптический оператор L. Пусть $u(x)$ — решение неравенства $Lu \geqslant 0$, положительное в D, непрерывное в $\overline{D}$ и обращающееся в нуль на Γ.

Пусть $s > 0$ таково, что s-емкость является верхней для оператора L (т. е. $s \geqslant e - 2$, где e — константа эллиптичности оператора L).

Тогда

$$\sup_{x \in D} u(x) \geqslant \left(1 + \xi \frac{C_s(H)}{R^s}\right) \sup_{x \in D \cap Q_R^{x_0}} u(x), \tag{15}$$

где $\xi > 0$ — константа, зависящая от s.

Доказательство. Так как при преобразовании подобия оператор умножается на квадрат коэффициента подобия, а потому константа эллиптичности сохраняется, и так как, с другой стороны (теорема 2.3), при таком преобразовании емкость множества умножается на s-ю степень коэффициента подобия, то достаточно рассмотреть случай, когда $R=1$. Итак, пусть $R=1$. Кроме того, конечно, можно считать, что $x^0=0$. При $C_s(H)=0$ неравенство (15) выполнено по принципу максимума. Будем считать, что $C_s(H)>0$. Зададим произвольное ε, $0<\varepsilon<C_s(H)$ и пусть мера μ такова, что

$$U(x)=\int\limits_H \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s}\leqslant 1 \quad \text{при} \quad x\notin H \quad \text{и} \quad \mu H>C_s(H)-\varepsilon.$$

Пусть

$$\sup_{x\in D} u(x)=M.$$

Положим

$$v(x)=M\left[1-U(x)+\frac{C_s(H)}{3^s}\right].$$

Так как $LU\geqslant 0$ вне H, то $Lv\leqslant 0$ в D. Далее, на границе области D функция v не меньше u. Действительно, граница D состоит из Γ и из точек, принадлежащих S_4^0, а мы имеем

$$u|_\Gamma=0, \quad v|_\Gamma>0,$$

$$u|_{S_4^0}\leqslant M, \quad v|_{S_4^0}\geqslant M\left[1-\frac{1}{\inf\limits_{\substack{x\in S_4^0\\ y\in Q_1^0}}|x-y|^s}\int d\mu+\frac{C_s(H)}{3^s}\right]\geqslant$$

$$\geqslant M\left[1-\frac{1}{3^s}C_s(H)+\frac{C_s(H)}{3^s}\right]=M.$$

Поэтому $u\leqslant v$ в D.

Здесь надо сделать следующее замечание: строго говоря, мы не можем писать $v|_\Gamma>0$ (хотя и имеем $v>\frac{C_s(H)}{3^s}>0$ в D), так как не знаем, существует ли предел у $U(x)$ при стремлении точки $x\in D$ к Γ. Но во всяком случае можно утверждать, что $\varliminf\limits_{x\in D,\, x\to\Gamma} v(x)>0$, а этого, конечно, достаточно для того, чтобы применить принцип максимума.

Итак, $u \leqslant v$ в D, и получаем

$$\sup_{x \in D \cap Q_1^0} u(x) \leqslant \sup_{x \in D \cap Q_1^0} v(x) \leqslant$$

$$\leqslant M\left(1 - \frac{1}{\sup\limits_{\substack{x \in Q_1^0 \\ y \in Q_1^0}} |x-y|^s} \int d\mu + \frac{C_s(H)}{3^s}\right) \leqslant$$

$$\leqslant M\left[1 - \left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) C_s(H) + \frac{\varepsilon}{2^s}\right],$$

что в силу произвольности ε доказывает лемму.

Если в условии только что доказанной леммы имеет место $s < n$ и $R < 1$, то, воспользовавшись неравенством

$$C_s(H) \geqslant \frac{\operatorname{mes} H}{K},$$

которое в этом случае имеет место по теореме 2.6, получим

$$\sup_{x \in D} u(x) \geqslant \left(1 + \frac{\xi}{K} \frac{\operatorname{mes} H}{R^s}\right) \sup_{x \in D \cap Q_R^{x^0}} u(x). \tag{16}$$

Однако условие $R < 1$ нежелательно. Кроме того, неравенство (16) можно улучшить, заменив в его правой части R^s на R^n.

Докажем следующую лемму.

Лемма 4.2. *Если в условиях леммы* 4.1 *имеет место* $s < n$, *то справедливо неравенство*

$$\sup_{x \in D} u(x) > \left(1 + \eta \frac{\operatorname{mes} H}{R^n}\right) \sup_{x \in D \cap Q_R^{x^0}} u(x), \tag{17}$$

где $\eta > 0$ — *константа, зависящая от* s *и* n.

Доказательство. Сделаем предварительно преобразование подобия переводящее $Q_{4R}^{x^0}$ в $Q_4^{x^0}$. При этом, как уже было замечено, оператор L лишь умножится на положительное число. Пусть при таком преобразовании H переходит в H'. Тогда

$$\operatorname{mes} H' = \frac{\operatorname{mes} H}{R^n} \quad \text{и, значит,} \quad C_s(H') \geqslant \frac{\operatorname{mes} H}{KR^n}$$

что и доказывает лемму.

Замечание 4.1. Из замечания 2.1 и задачи 1 на стр. 10 вытекает, что для полного оператора (1), для которого коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию $c(x) \leqslant 0$ и для которого $M/a < n+2$ справедливо утверждение леммы 4.2 при $R < R_0$, где R_0 зависит от M, a и от константы, ограничивающей коэффициенты b_i и c.

Задача. Докажите то же самое без предположения $c \leqslant 0$.

Примечания.

Пусть имеется некоторая область D и в ней — решение задачи Дирихле. Пусть на части границы области граничные условия нулевые, а про все решение в целом известно, что оно ограничено, скажем, единицей. Ясно, что наличие нулевых граничных условий на куске границы будет как-то влиять на величину решения: вблизи этого куска решение будет тоже близко к нулю, но и на некотором расстоянии от этого куска решение не сможет слишком близко подойти к единице. Для приложений нужна количественная оценка этого факта в зависимости от строения того куска границы, который несет на себе нулевые граничные условия.

Такой удобной формой оказалась «лемма о возрастании» этого параграфа: с одной стороны, доказательство ее элементарно, с другой, она удобна для приложений (см. §§ 5, 6, 7, 10).

Я не исключаю своей пристрастности в этом вопросе, ибо ряд своих теорем по качественной теории эллиптических уравнений второго порядка (см., например, *Ландис* [2]) я предпочитал доказывать, используя ту или иную форму этой леммы.

В этой лемме «мощность» куска границы, удерживающего нулевые данные Дирихле, оценивается через «размеры» части дополнения к области, в которой рассматривается решение, попадающей в некоторый шар. В цитированной выше и в других моих работах размеры этой части дополнения характеризовались его мерой. Было ясно, что мера есть грубая достаточная характеристика, не отвечающая существу дела. Существу дела отвечает *емкость*. Впервые лемма, о которой идет речь, уже в терминах емкости, была доказана *Блохиной* [1]. (Подробная публикация — в [2].)

§ 5. Поведение решения уравнения в окрестности граничной точки

Пусть $D \subset R_n$ — область и Γ — ее граница. Пусть $x^0 \in \Gamma$ и e — положительное число. Назовем точку x^0 *e-регулярной* точкой границы, если выполнены следующие условия.

Для каждой пары $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, каковы бы ни были область $D' \subset D$

с границей Γ', равномерно эллиптический оператор L, определенный на D', с константой эллиптичности $e' \leqslant e$ и субэллиптическая для него функция $u(x) < 1$, непрерывная в $\overline{D}'$, из того, что

$$u|_{\Gamma' \cap Q_{\varepsilon_1}^{x^0}} \leqslant 0$$

следует, что

$$u|_{D' \cap Q_{\delta}^{x^0}} < \varepsilon_2.$$

Теорема 5.1. *Пусть точка x^0 принадлежит границе Γ области D. Пусть $e \geqslant n$ — произвольное число. Положим $s = e - 2$.*

Обозначим

$$C_s\left(Q_{4^{-m}}^{x^0} \setminus D\right) = \gamma_m.$$

Для того чтобы точка x^0 была e-регулярной, достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} 4^{ms} \gamma_m$$

расходился.

Доказательство. Пусть даны $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$. Пусть, далее, имеются подобласти D' области D с границей Γ', оператор L, равномерно эллиптический на D', константа эллиптичности e' которого удовлетворяет неравенству $e' \leqslant e$, субэллиптическая функция $u(x)$, непрерывна на $\overline{D}'$ и удовлетворяющая неравенствам

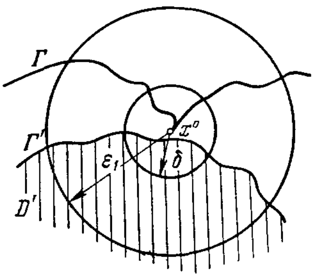

Рис. 7.

$$u(x) < 1, \quad u(x)|_{\Gamma' \cap Q_{\varepsilon_1}^{x^0}} \leqslant 0.$$

Надо показать, что существует $\delta > 0$, зависящая от e, ε_1 и ε_2, такое, что в точках $x \in D'$, попадающих внутрь δ-окрестности точки x^0, функция $u(x)$ меньше ε_2 (рис. 7).

Обозначим через m_0 такое наименьшее натуральное число, что

$$4^{-m_0} < \varepsilon_1.$$

Пусть число $m > m_0$ таково, что существует точка $x' \in D'$, удовлетворяющая неравенству

$$|x' - x^0| \leqslant 4^{-m}$$

и такая, что

$$u(x') \geqslant \varepsilon_2.$$

Наша задача состоит в том, чтобы показать, что число m меньше константы, зависящей от e, ε_1 и ε_2.

Для каждого i, $i = m_0, \ldots, m$ обозначим

$$M_i = \sup_{x \in D' \cap Q^{x^0}_{4-i}} u(x).$$

Рассмотрим теперь для каждого i, $i = m_0 + 1, \ldots, m$, шары $Q^{x^0}_{4-i}$ и $Q^{x^0}_{4-(i-1)}$.

Рассмотрим множество таких точек $x \in D' \cap Q^{x^0}_{4-(i-1)}$, в которых $u(x) > 0$, и в этом множестве выберем компоненту, содержащую ту точку сферы $S^{x^0}_{4-i}$, где функция u достигает значения M_i. Обозначим эту компоненту через D_i.

Имеем

$$C_s\left(Q^{x^0}_{4-i} \setminus D_i\right) \geqslant C_s\left(Q^{x^0}_{4-i} \setminus D\right) = \gamma_i.$$

Поэтому, применяя к шарам $Q^{x^0}_{4-i}$ и $Q^{x^0}_{4-(i-1)}$, к области D_i и к функции u в этой области лемму 4.1 о возрастании, получим

$$M_{i-1} \geqslant (1 + \xi \cdot 4^{is}\gamma_i)\, M_i$$

и, следовательно,

$$1 \geqslant M_{m_0} \geqslant \prod_{i=m_0+1}^{m} (1 + \xi \cdot 4^{is}\gamma_i)\, M_m \geqslant \prod_{i=m_0+1}^{m} (1 + \xi \cdot 4^{is}\gamma_i)\, \varepsilon_2,$$

откуда

$$\prod_{i=m_0+1}^{m} (1 + \xi \cdot 4^{is}\gamma_i) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_2}$$

и, значит,

$$\sum_{i=m_0+1}^{m} \ln (1 + \xi \cdot 4^{is}\gamma_i) \leqslant \ln \frac{1}{\varepsilon_2}.$$

Так как

$$\ln(1+\xi\cdot 4^{is}\gamma_i)\geqslant a\cdot 4^{is}\gamma_i,$$

где a — константа, зависящая от e, то

$$\sum_{i=m_0+1}^{m} 4^{is}\gamma_i\leqslant\frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon_2}. \tag{18}$$

В силу расходимости ряда $\sum 4^{is}\gamma_i$ есть такое m^*, что неравенство (18) может выполняться только при $m<m^*$. Это m^* зависит от m_0, от ε_2 и от a, т. е. от ε_1, ε_2 и e.

Тем самым теорема доказана.

Мы сформулировали эту теорему в том виде, как она понадобится в дальнейшем для исследования вопроса о разрешимости задачи Дирихле. Можно было бы дать немного более общее определение e-регулярности точки: можно было требовать чтобы функция $u(x)$ вместо условия непрерывности в

$$D'\cup\Gamma'$$

удовлетворяла условию непрерывности в

$$D'\cup\Gamma'\setminus(x^0).$$

В частности, область D' может совпадать с D. Тогда e-регулярность в этом последнем виде будет означать, что для ограниченного решения точка x^0 — устранимая особенность. Решение уравнения $Lu=0$, ограниченное и непрерывное вплоть до границы всюду, кроме этой точки, и принимающее на границе значения непрерывной (включая x^0) функции, будет необходимо непрерывно и в этой точке, причем модуль непрерывности в этой точке зависит только от модуля непрерывности граничной функции, от константы, ограничивающей решение, и от величины e.

Теорема 5.1 справедлива и для такого определения e-регулярности. Предлагаю доказать это в качестве задачи.

Дадим некоторые достаточные условия e-регулярности граничной точки.

Теорема 5.2. *Если точки x^0 границы Γ области D можно коснуться вершиной конуса, лежащего вне D, то точка x^0 e-регулярна.*

Доказательство. Обозначим конус через K. Пусть m_0 столь велико, что основание конуса K лежит вне шара $Q^{x^0}_{4^{-m_0}}$. Тогда по теореме 2.3 для любого $m > m_0$ справедливо

$$C_s\left(Q^{x^0}_{4^{-m}} \cap K\right) = 4^{-ms+m_0 s}\, C_s\left(Q^{x^0}_{4^{-m_0}} \cap K\right)$$

и, значит,

$$4^{ms}\gamma_m = C_s\left(Q^{x^0}_{4^{-m}} \setminus D\right) \geqslant 4^{m_0 s}\, C_s\left(Q^{x^0}_{4^{-m_0}} \cap K\right) = \mathrm{const} > 0.$$

Эта константа больше нуля, так как пересечение $Q^{x^0}_{4^{-m_0}} \cap K$ содержит, например, шар (рис. 8). И, значит, ряд $\sum 4^{ms}\gamma_m$ расходится.

Задача. Пусть точки x^0 границы Γ области D можно коснуться конусом извне области. Пусть $u(x)$ — решение уравнения $Lu = 0$, равномерно эллиптического в D. Пусть u непрерывно в $\overline{D}$ и при $x' \in \Gamma$ справедливо

$$|u(x') - u(x^0)| \leqslant K\,|x' - x^0|^{\alpha},$$

где $\alpha > 0$ и $K > 0$ — некоторые константы. Докажите, что

$$|u(x) - u(x^0)| \leqslant K'\,|x - x^0|^{\alpha'}$$

для всех достаточно близких к x^0 точек x области D.

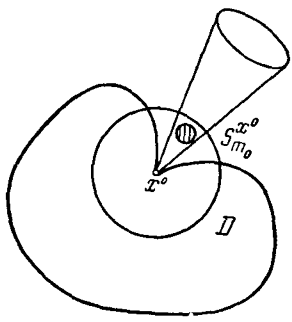

Рис. 8.

Можно дать более мягкое условие регулярности.

Теорема 5.3. *Пусть x^0 — точка границы Γ области D и $e \geqslant n$ — некоторое число, $n \geqslant 4$. Пусть область D такова, что можно ввести ортогональную систему координат $y_1, \ldots, y_n$ с началом в точке x^0 такую, что для некоторого $h > 0$ множество точек*

$$B = \left\{ y \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2\right)^{1/2} < \frac{y_n}{|\ln y_n|^{\frac{1}{e-3}}},\ 0 < y_n < h \right\}$$

принадлежит дополнению области D. Тогда точка x^0 является е-регулярной.

Доказательство. Рассмотрим цилиндр $Ц_m$, определяемый неравенствами

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2\right)^{1/2} < \frac{4^{-(m+1)}}{(\ln 4^{m+1})^{\frac{1}{e-3}}}; \quad 4^{-(m+1)} < y_n < 2\cdot 4^{-(m+1)}.$$

При m, большем некоторого m_0, такой цилиндр содержится в B, и выполняется неравенство

$$(\ln 4^{m+1})^{\frac{1}{e-3}} > 4.$$

Это неравенство нужно для того, чтобы цилиндр $Ц_m$ удовлетворял условиям теоремы 2.5. Цилиндр $Ц_m$ лежит между сферами $S^0_{4^{-(m+1)}}$ и $S^0_{4^{-m}}$, а потому, если мы обозначим

$$\gamma_m = C_{e-2}\left(Q^{x^0}_{4^{-m}} \setminus D\right),$$

то по теоремам 2.3 и 2.5

$$\gamma_m \geqslant C_{e-2}Ц_m \geqslant C\left[\frac{4^{-(m+1)}}{(\ln 4^{m+1})^{\frac{1}{e-3}}}\right]^{e-3}\cdot 4^{-(m+1)} =$$

$$= C\cdot 4^{-(m+1)s}\frac{1}{(m+1)\ln 4} = C_1\frac{4^{-ms}}{m+1}$$

и, значит, ряд

$$\sum 4^{ms}\gamma_m \geqslant C_1 \sum \frac{1}{m+1}$$

расходится.

Приложим полученные результаты к исследованию вопроса о разрешимости задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Будем считать известным, что для ограниченной области с достаточно гладкой границей задача Дирихле разрешима: при всякой непрерывной граничной функции существует гармоническая функция, непрерывная в замкнутой области и совпадающая на границе с данной.

Пусть теперь имеется произвольная ограниченная область D с границей Γ. Пусть на Γ задана непрерывная функция f. Введем понятие *обобщенного решения задачи Дирихле.*

Продолжим функцию f непрерывным образом внутрь области D. Продолженную функцию будем обозначать буквой F. Рассмотрим последовательность $\{D_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$ областей таких, что D_m имеет гладкую границу ∂D_m (той гладкости, при которой нам известно, что задача Дирихле разрешима) $\overline{D}_m \subset D$ и $D_m \to D$ при $m \to \infty$.

Пусть u_m — решение для области D_m задачи Дирихле

$$u_m|_{\partial D_m} = F.$$

Покажем, что последовательность u_m сходится к гармонической функции u_f. Функция u_f не зависит ни от способа продолжения функции f внутрь области, ни от выбора последовательности D_m. Эту функцию u_f мы и будем называть обобщенным решением исходной задачи Дирихле.

1. Пусть имеется некоторая фиксированная последовательность областей $\{D_m\}$. Пусть F_1 и F_2 — два разных продолжения функции f. Пусть u_m^1 и u_m^2 — соответственно решения задач

$$u_m^1\big|_{\partial D_m} = F_1 \quad \text{и} \quad u_m^2\big|_{\partial D_m} = F_2.$$

Тогда по принципу максимума

$$\max_{\overline{D}_m} |u_m^1 - u_m^2| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Поэтому, если u_m^1 сходится к некоторой функции u, то u_m^2 тоже сходится к той же функции.

2. Пусть $\{D_m\}$ — расширяющаяся последовательность областей: $D_m \subset D_{m+1}$. Покажем, что тогда последовательность u_m сходится.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Обозначим через Φ дважды непрерывно дифференцируемую функцию, определенную в окрестности $\overline{D}$ и такую, что

$$|\Phi - F|\,|_{\overline{D}} < \varepsilon.$$

Так как вторые производные функции Φ ограничены, то при достаточно большом A функции

$$\Phi^+ = \frac{\Phi}{2} + A \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \text{и} \quad \Phi^- = \frac{\Phi}{2} - A \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{19}$$

удовлетворяют неравенствам

$$\Delta(\Phi^+) > 0 \quad \text{и} \quad \Delta(\Phi^-) < 0. \tag{20}$$

С другой стороны,

$$\Phi^+ + \Phi^- = \Phi.$$

Пусть v_m^+ и v_m^- — соответственно решения задачи Дирихле

$$v_m^+ |_{\partial D_m} = \Phi^+ \quad \text{и} \quad v_m^- |_{\partial D_m} = \Phi^-.$$

Докажем, что каждая из последовательностей $\{v_m^+\}$ и $\{v_m^-\}$ сходится. В силу (20)

$$v_m^+ \geqslant \Phi^+ \qquad (v_m^- \leqslant \Phi^-),$$

а потому

$$v_{m-1}^+ \leqslant v_m^+ \qquad (v_{m-1}^- \geqslant v_m^-).$$

Следовательно, на каждом D_k последовательность

$$\{v_m^+\},\ m = k,\ k+1,\ \ldots \qquad (\{v_m^-\},\ m = k,\ k+1,\ \ldots)$$

монотонна, кроме того, она, разумеется (по принципу максимума), ограничена, а потому сходится.

Так как для решений u_m задач

$$u_m |_{\partial D_m} = F$$

мы имеем

$$\max_{\overline{D}_m} | u_m - v_m | < \varepsilon,$$

где

$$v_m = v_m^+ + v_m^-,$$

то и последовательность $\{u_m\}$ обязана сходиться.

3. Из первых двух пунктов следует, что для монотонной последовательности областей последовательность $\{u_m\}$ сходится к функции u_f, не зависящей от способа продолжения функции f. Но тогда она будет сходиться и при любой последовательности $\{D_m\}$ областей. Действительно, если бы для некоторой последовательности $\{D_m\}$ имела место расходимость, то можно было бы выбрать такую редкую подпоследовательность $\{D_{m_k}\}$, что

$$D_{m_k} \subset D_{m_{k+1}},$$

и по этой подпоследовательности также имеет место расходимость.

Замечание 5.1. Рассуждения пп.1—3 применимы к любому равномерно эллиптическому оператору L, про который нам известно, что задача Дирихле для него разрешима во всякой строго внутренней для D области с достаточно гладкой границей.

4. Предельная функция u_f гармоническая. Это следует, например, из теоремы о компактности во всякой строго внутренней для D подобласти семейства равномерно ограниченных в D гармонических функций.

Итак, определение обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа корректно.

Определение. Точка x^0 границы ∂D области D называется *регулярной*, если, какова бы ни была непрерывная на ∂D функция f, обобщенное решение u_f задачи

$$u|_{\partial D} = f$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in D}} u_f(x) = f(x^0).$$

Положим, как и раньше

$$\gamma_m = C_{n-2}\left(Q_{4^{-m}}^{x^0} \setminus D\right).$$

Теорема 5.4 (критерий Винера). *Для того чтобы точка x^0 была регулярной, необходимо и достаточно,* *чтобы ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} 4^{m(n-2)} \gamma_m \tag{21}$$

расходился.

Достаточность. Продолжим функцию f непрерывным образом внутрь D и, как и раньше, обозначим продолженную функцию через F.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем такое число $\varepsilon_1 > 0$, что

$$|F(x) - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad x \in \overline{D} \cap Q_{\varepsilon_1}^{x^0}.$$

Пусть D_m, $m = 1, 2, \ldots,$ — последовательность областей с гладкой границей ∂D_m, приближающая D изнутри. Пусть u_m — решение задачи Дирихле

$$u_m|_{\partial D_m} = F.$$

Положим $v_m = u_m - f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $v_m|_{\partial D_m \cap Q_{\varepsilon_1}^{x^0}} < 0$.

По теореме 5.1 найдется такое $\delta > 0$, что

$$v_m(x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad x \in D_m \cap Q_\delta^{x^0}$$

и, значит,

$$u_m(x) - f(x^0) < \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in D \cap Q_\delta^{x^0},$$

а потому для обобщенного решения u_f справедливо

$$u_f(x) - f(x^0) \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in D \cap Q_\delta^{x^0}.$$

Аналогично получается неравенство с другой стороны, и, следовательно, $u(x)$ стремится к $f(x^0)$ при $x \to x^0$.

Замечание 5.2. Рассмотрим вместо оператора Лапласа равномерно эллиптический оператор L с константой эллиптичности $e' \leqslant e$. Пусть u_m — решение задачи

$$Lu_m = 0, \qquad u_m|_{\partial D_m} = F,$$

и пусть u_m сходится к решению $u(x)$ уравнения $Lu = 0$.

Тогда из приведенного выше доказательства видно, что, если точка $x^0 \in \partial D$ является e-регулярной точкой, то

$$u_f(x) \to f(x^0) \quad \text{при} \quad x \to x^0, \quad x \in D.$$

Необходимость. Для того чтобы доказать необходимость, понадобятся еще некоторые свойства s-емкости и свойства специально винеровской емкости.

Лемма 5.1. *Пусть E — ограниченное замкнутое множество, $G' \supset E$ — открытое множество и $\varepsilon > 0$ — произвольное число.*

Тогда можно найти такое открытое множество G, $E \subset G \subset G'$ с дважды гладкой границей и такую меру μ на $\overline{G}$, что если

$$U(x) = \int_{\overline{G}} \frac{d\mu(y)}{|y-x|^{n-2}},$$

то

$$U|_{\partial G} = 1$$

и

$$\int_{\overline{G}} d\mu \leqslant C_{n-2}(E) + \varepsilon. \tag{22}$$

Доказательство этой леммы громоздко. Чтобы не разбивать изложения, доказательство вынесено в Дополнение I (стр. 247).

Лемма 5.2. *Пусть G — ограниченная область с дважды гладкой границей и r — положительное число. Пусть мера μ на $\overline{G}$ такова, что если*

$$U(x) = \int_{\overline{G}} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-2}},$$

то

$$U|_{\partial G} = 1$$

и

$$\int_{\overline{G}} d\mu < \frac{1}{8} r^{(n-2)}.$$

Тогда для любого $x^0 \in R_n$ в шаре $Q_r^{x^0}$ найдется точка x' такая, что

$$x' \notin G \quad \textit{и} \quad U(x') < \frac{1}{4}.$$

Доказательство. Так как $C_{n-2}(Q_r^{x^0}) \geqslant r^{n-2}$, то множество $Q_r^{x^0} \setminus G$ не пусто.

Допустим, что вопреки утверждению леммы в точках $x \in (Q_r^{x^0} \setminus G)$ имеет место $U(x) \geqslant 1/4$.

Пусть

$$v = \frac{r^{n-2}}{4\,|x - x^0|^{n-2}}.$$

Имеем

$$U(x) \geqslant v(x) \quad \text{при} \quad x \in R_n \setminus (G \cup Q_r^{x^0}).$$

Пусть R_0 столь велико, что вне шара радиуса R_0 нет точек из D. Тогда, в частности,

$$U(x)\,|_{|x-x^0|=R} > \frac{r^{n-2}}{4R^{n-2}} \quad \text{при} \quad R > R_0.$$

С другой стороны,

$$U(x)\,|_{|x-x^0|=R} = \frac{r^{n-2}}{8\,|R - R_0|^{n-2}} + o\left(\frac{1}{|R - R_0|^{n-2}}\right),$$

и при достаточно большом R мы получаем противоречивые неравенства.

Перейдем к доказательству необходимости условия Винера. Итак, пусть

$$\sum_{m=1}^{\infty} 4^{m\,(n-2)} \gamma_m < \infty.$$

Построим такую непрерывную граничную функцию f, при которой обобщенное решение задачи Дирихле u_f не будет стремиться к $f(x^0)$ при $x \to x^0$. Для этого найдем такое m_0, что

$$\sum_{m=m_0-1}^{\infty} 4^{m\,(n-2)} \gamma_m < \alpha,$$

где α будет выбрано ниже.

Пусть граничная функция такова, что

$$f(x^0)=1,\quad f(x)\leqslant 1$$

и

$$f(x)=0 \quad \text{при} \quad |x-x^0|\geqslant 4^{-m_0}.$$

Продолжим функцию f непрерывным образом на все пространство так, чтобы выполнялось по-прежнему:

$$F(x)\leqslant 1$$

и

$$F(x)=0 \quad \text{при} \quad |x-x^0|\geqslant 4^{-m_0}.$$

Пусть $\delta>0$ произвольно. Покажем, что найдется точка $x\in D$, $|x-x^0|<\delta$, для которой

$$u_f(x)<\frac{1}{2}.$$

Пусть имеется последовательность областей $\{D_k\}$ с дважды гладкими границами $\overline{D}_k\subset D$ и

$$\lim_{k\to\infty} D_k=D.$$

Пусть

$$u_k|_{D_k}=F, \qquad u_f=\lim_{k\to\infty} u_k.$$

Обозначим, как и раньше,

$$E_m=Q^{x^0}_{4^{-m}}\setminus D,$$

так что

$$C_{n-2}(E_m)=\gamma_m.$$

Пусть

$$H_m=\overline{E}_m\setminus E_{m+1}.$$

Тогда

$$H_m\subset E_{m-1}$$

и поэтому, если обозначить

$$\bar{\gamma}_m=C_{n-2}(H_m),$$

то

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} 4^{m(n-2)}\bar{\gamma}_m<4^{n-2}\alpha.$$

По лемме 5.1 каждое H_m можно погрузить в такое открытое множество G_m с дважды гладкой границей что

$$G_m \subset Q^{x^0}_{2\cdot 4^{-m}} \setminus Q^{x^0}_{1/2\cdot 4^{-(m+1)}}.$$

На $\overline{G}_m$ можно определить меру μ_m такую, что если

$$U_m(x) = \int\limits_{\overline{G}_m} \frac{d\mu_m(y)}{|x-y|^{n-2}},$$

то

$$U_m|_{\partial G_m} = 1$$

и

$$\int\limits_{\overline{G}_m} d\mu_m < \bar{\gamma}_m + \varepsilon_m \tag{23}$$

(ε_m будет выбрано позже).

Выберем число $m_1 > m_0$ столь большим, чтобы выполнялось

$$4^{-m_1} < \delta$$

и

$$\gamma_{m_1-1} < \frac{4^{-m_1(n-2)}}{8}. \tag{24}$$

По лемме 5.1 можно найти такое открытое множество G_0 с дважды гладкой границей, что

$$E_{m_1-1} \subset G_0$$

и на $\overline{G}_0$ можно определить меру μ_0 такую, что

$$\text{если } U_0(x) = \int\limits_{\overline{G}_0} \frac{d\mu_0(y)}{|x-y|^{n-2}}, \text{ то } U_0|_{\partial G_0} = 1$$

и

$$\int\limits_{\overline{G}_0} d\mu_0 < \frac{1}{8}\cdot 4^{-m_1(n-2)}.$$

Тогда, согласно лемме 5.2, найдется точка x',

$$|x' - x^0| < 4^{-m} < \delta, \qquad x' \notin G_0$$

такая, что

$$U_0(x') < \frac{1}{4}.$$

Положим

$$U = \sum_{m=m_0}^{m_1-2} U_m + U_0.$$

Пусть $G = \sum_{m=m_0}^{m_1-1} G_m + G_0$.

Мы имеем $Q^{x^0}_{4^{-m_0}} \setminus D \subset G$, $x' \notin G$.

Обозначим через ρ_m расстояние $\rho(x', \overline{G}_m)$ (рис. 9), так что $\rho_m > \frac{1}{2} \cdot 4^{-(m+1)} - 4^{-m_1}$, а при $m \geqslant m_1 - 2$ имеет

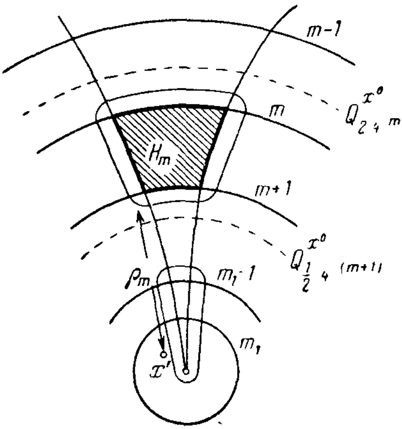

Рис. 9.

место $\rho_m > 4^{-m}/16$. (На рис. 9 сфера $|x - x^0| = 4^{-m}$ нумеруется числом m). Поэтому

$$U(x') < \frac{1}{4} + \sum_{m=m_0}^{m_1-2} U_m(x') \leqslant \frac{1}{4} + \sum_{m=m_0}^{m_1-2} \frac{\bar{\gamma}_m + \varepsilon_m}{\rho_m^{n-2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4} + 16^{n-2} \sum_{m=m_0}^{m_1-2} 4^{(n-2)m} (\bar{\gamma}_m + \varepsilon_m) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4} + 64^{n-2}\alpha + 16^{n-2} \sum_{m=m_0}^{m_1-2} 4^{(n-2)m} \varepsilon_m.$$

Выберем α и ε_m столь малыми, чтобы последние два слагаемых в сумме давали меньше чем 1/4. Тогда $U(x') < 1/2$. Далее,

$$U\,|_{\partial G} \geqslant 1.$$

При достаточно большом k каждая точка, принадлежащая ∂D_k, либо лежит внутри G, либо вне шара $Q^{x^0}_{4^{-m_0}}$.

Следовательно,

$$u_k\,|_{\partial D_k} \leqslant U\,|_{\partial D_k},$$

и потому $u_k(x') < 1/2$ и, значит, $u_f(x') \leqslant 1/2$ (ч. т. д.).

Таким образом, мы завершили доказательство критерия Винера.

Из доказанных ранее теорем 5.2 и 5.3 получаются следующие достаточные условия регулярности граничной точки для уравнения Лапласа.

1. Если точки границы можно коснуться вершиной конуса, лежащего вне области, то такая точка регулярна.

2. Если при $n \geqslant 4$ точки границы x^0 можно коснуться вершиной расположенной вне области воронки:

$$B = \left\{ y \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)^{1/2} < \frac{y_n}{|\ln y_n|^{\frac{1}{n-3}}};\quad 0 < y_n < h \right\},$$

где h, $0 < h < 1$ — любое и $y_1, \ldots, y_n$ — ортогональная система координат с началом в точке x^0, то такая точка регулярна.

Задача. Докажите, что в условии 2 в знаменателе нельзя прибавить к показателю $\varepsilon > 0$.

Задача. Докажите, что при $n = 3$ точка x^0 границы будет регулярной для уравнения Лапласа, если ее можно коснуться вершиной, расположенной вне области воронки:

$$B = \left\{ y \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2\right)^{1/2} < e^{-1/y_n};\ 0 < y_n < h \right\},$$

$h > 0$ любое и $y_1, \ldots, y_n$ — ортогональная система координат с началом в x^0.

Задача (другая формулировка критерия Винера). Имеется область D и $x^0 \in \partial D$. Задана последовательность $\{r_m\}$, $r_m > 0$, $\frac{r_{m+1}}{r_m} < q$, $0 < q < 1$. Положим

$$E_m = \Omega_{r_{m+1}}^{x^0} \setminus D.$$

Назовем меру μ_m, определенную на E_m, допустимой, если

$$\int_{E_m} \frac{d\mu_m(y)}{|x-y|^{n-2}} \leqslant 1 \quad \text{при} \quad x \notin E.$$

Положим

$$U_m(x^0) = \sup_{\mu_m} \int_E \frac{d\mu_m(y)}{|x^0-y|^{n-2}},$$

где верхняя грань берется по всем допустимым на E_m мерам.

Доказать, что для регулярности точки x^0 необходимо и достаточно условие

$$\sum_{m=1}^{\infty} U_m(x^0) = \infty.$$

Примечания.

Итак, необходимые и достаточные условия регулярности граничной точки задачи Дирихле для уравнения Лапласа дает критерий Винера (другое доказательство можно найти в статье *М. В. Келдыша* [1] и цитированной книге *Н. С. Ландкофа* [1]).

В 1949 г. *О. А. Олейник* [2] показала, что для линейного уравнения 2-го порядка с достаточно гладкими коэффициентами критерий регулярности граничной точки совпадает с аналогичным критерием для уравнения Лапласа. В дальнейшем условия на коэффициенты ослаблялись: в 1962 г. *Эрве* [1] доказала, что достаточно предположить коэффициенты удовлетворяющими условию Гёльдера. Наконец, недавно *Н. В. Крылов* [1] показал, что условия гладкости коэффициентов можно снизить до условия непрерывности при том ограничении, что модуль непрерывности равномерно удовлетворяет условию Дини.

Однако оказалось, что где-то здесь (по-видимому, по условию Дини) проходит граница. Можно построить пример уравнения с разрывными коэффициентами, как угодно близкого к уравнению Лапласа, для которого уже не будет регулярной точка, регулярная для уравнения Лапласа (см. по этому поводу мою цитированную выше статью [1], а также статью *Миллер* [1]). Более того, как показала *О. Н. Зограф* [1], коэффициенты в этом примере могут быть сделаны даже непрерывными.

Все, что говорилось сейчас, относится к недивергентному уравнению. Для равномерно эллиптического уравнения в дивергентной форме с произвольными измеримыми ограниченными коэффициентами, как это показали *В. Литтман, Дж. Стампаккья* и *Г. Ф. Вайнбергер* [1], условия регулярности совпадают с условиями регулярности для уравнения Лапласа.

Если коэффициенты уравнения сколько-нибудь хороши вплоть до окрестности граничной точки, например удовлетворяют условию Гёльдера в окрестности некоторой граничной точки, то условие Винера является необходимым и достаточным для ее регулярности. Пусть условие Винера выполнено — соответствующий ряд расходится, т. е. точка заведомо регулярна: обобщенное решение в ней непрерывно. Исследуя скорость расходимости ряда Винера, можно сказать большее о поведении решения в этой точке: можно дать точную границу для модуля непрерывности решения в этой точке. Такое исследование было впервые проведено *В. Г. Мазьей* [1]. При этом В. Г. Мазья использовал как раз другой, отличный от нашего подход к определению емкости, о котором говорилось на стр. 23.

Значительная часть параграфа посвящена доказательству необходимости и достаточности критерия Винера регулярности граничной точки для уравнения Лапласа. При этом достаточность доказывается довольно просто, и почти все остальное место отведено доказательству необходимости (учитывая также Дополнение I). Казалось бы, дело должно было обстоять наоборот: необходимость критерия Винера «почти очевидна». Достаточность «нуждается в доказательстве». Дело в том, что определяя s-емкость, мы не доказывали, что экстремальная мера реализуется. И действительно *нигде в другом месте* это не понадобилось. Здесь же фактически нам пришлось (в Дополнении I) построить меру, реализующую экстремум, что не так уж сложно само по себе, но производит тяжелое впечатление по контрасту с легкостью остальных построений этой главы.

§ 6. Поведение решений эллиптических уравнений на бесконечности

Вернемся к произвольному равномерно эллиптическому уравнению (1′). В этом параграфе мы применим лемму о возрастании для доказательства теорем типа Фрагмена — Линделёфа. Так мы будем называть теоремы, в которых рассматривается субэллиптическая функция в неограниченной области, неположительная на границе, и в зависимости от формы области определяется минимальная скорость роста этой функции на бесконечности, если только она положительна хоть в одной точке области.

Теорема 6.1. *Пусть D — неограниченная область, лежащая в слое:*

$$|x_n| < h, \quad -\infty < x_i < \infty, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Пусть в D определен равномерно эллиптический оператор L. Пусть u — субрешение, непрерывное в замкнутой области и неположительное на границе области D. Тогда

либо 1) $u \leqslant 0$ *в* D,

либо 2)

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{M(r)}{e^{\frac{c}{h} r}} > 0,$$

где

$$M(r) = \max_{x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2} u(x),$$

а $c > 0$ — константа, зависящая от константы эллиптичности e оператора L и от n.

Доказательство. С помощью преобразования подобия вопрос можно свести к случаю какого-нибудь одного фиксированного h. Нам будет удобно взять $h = \frac{1}{2}$.

Допустим, что случай 1) не имеет места: существует точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$ такая, что $u(x^0) = a > 0$.

Положим $r_0 = |x^0|$ и $r_k = r_0 + 4k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть y^k точка на сфере $S_{r_k}^0$, где

$$u(y^k) = M(r_k).$$

Рассмотрим шары $Q_1^{y^k}$ и $Q_4^{y^k}$. Разность $Q_1^{y^k} \setminus D$ содержит шар радиуса 1/4. Полагая $s = e - 2$, получим из леммы 4.1, что

$$\sup_{x \in D \cap Q_4^{y^k}} u(x) > \left(1 + \xi C_s\left(Q_{1/4}^0\right)\right) \sup_{x \in D \cap Q_1^{y^k}} u(x) =$$

$$= (1 + \gamma) \sup_{x \in D \cap Q_1^{y^k}} u(x),$$

где, таким образом, $\gamma > 0$ зависит от e и от n.

Так как по принципу максимума

$$M(r_{k+1}) \geqslant \sup_{x \in D \cap Q_4^{y^k}} u(x),$$

то

$$M(r_{k+1}) > (1+\gamma) M(r_k),$$

откуда

$$M(r_0 + 4k) > a(1+\gamma)^k = ae^{k \ln(1+\gamma)}$$

и при достаточно больших k

$$M(r_0 + 4k) > ae^{\frac{\ln(1+\gamma)}{5}[r_0 + 4(k+1)]},$$

что, учитывая принцип максимума, и доказывает утверждение теоремы.

Пусть B_h — внешность двойного прямого кругового конуса:

$$B_h = \left\{x \in R_n,\ x_n^2 \leqslant h^2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right\}.$$

Будем рассматривать неограниченную область, точка x которой при достаточно большом $|x|$ расположена внутри B_h. Мы выясним (в теореме 6.2), как растет неположительная на границе субэллиптическая в этой области функция (если она положительна где-то внутри области) в зависимости от величины h.

При этом мы будем предполагать, что h достаточно мало: $h < 1$ (можно было бы взять и другую константу). Если h велико, то делается несущественным то, что конус двойной. Этот случай будет разобран в теореме 6.3.

Теорема 6.2. *Пусть* $0 < h < 1$.

Пусть D — неограниченная область и найдется такое $R > 0$, что

$$D \setminus Q_R^0 \subset B_h.$$

Пусть в D определен равномерно эллиптический оператор L и $u(x)$ — субэллиптическая функция, непрерывная в замкнутой области и неположительная на ∂D. Тогда

либо 1) $u(x) \leqslant 0$ *всюду в* D, *либо* 2)

$$\varlimsup_{r\to\infty} M(r)/r^{c/h} > 0, \tag{25}$$

где

$$M(r) = \max_{|x|=r} u$$

и $c > 0$ — *константа, зависящая от* e.

Доказательство. Допустим, что случай 1) не имеет места: существует точка $x^0 \in D$ такая, что

$$u(x^0) = a > 0.$$

Положим

$$|x^0| = r_0 \text{ и } r_k = r_0(1+8h)^k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

Пусть $M(r_k)$ достигается в точке $y^k \in S^0_{2k}$.

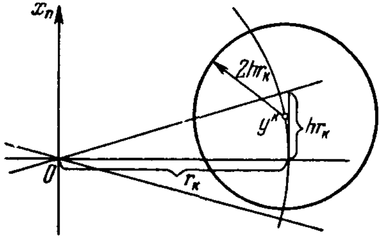

Рис. 10.

Рассмотрим шары $Q^{y^k}_{2hr_k}$ и $Q^{y^k}_{8hr_k}$. Поскольку $h < 1$, множество $Q^{y^k}_{2hr_k} \setminus D$ содержит шар радиуса $hr_k/4$ (рис. 10). Поэтому из леммы 4.1 получаем, что при $s = e - 2$

$$\sup_{x \in D \cap Q^{y^k}_{8hr_k}} u(x) > \left(1 + \eta \frac{C_s\left(Q^0_{\frac{1}{4}hr_k}\right)}{(2hr_k)^s}\right) M(r_k).$$

Полагая

$$\eta \frac{C_s Q^0_{\frac{1}{4}hr_k}}{(2hr_k)^s} = \eta \frac{C_s(Q^0_1)}{8^s} = \gamma,$$

видим, что γ зависит только от e, и так как

$$M(r_{k+1}) \geqslant \sup_{x \in D \cap D^{y^k}_{8hr_k}} u(x),$$

то

$$M(r_{k+1}) \geqslant (1+\gamma) M(r_k).$$

Отсюда
$$M(r_k) \geqslant a(1+\gamma)^k. \tag{27}$$
Из (26) и (27) получаем
$$k = \frac{\ln r_k - \ln r_0}{\ln(1+8h)};$$
при достаточно больших k
$$M(r_k) \geqslant a e^{\ln(1+\gamma)\frac{\ln r_k - \ln r_0}{\ln(1+8h)}} \geqslant a r_k^{\frac{1}{2}\frac{\ln(1+\gamma)}{\ln(1+8h)}},$$
и, следовательно, при достаточно больших r_k
$$M(r_k) > a r_k^{c/h} > b r_{k+1}^{c/h},$$
где c — константа, зависящая от e, что, учитывая принцип максимума, дает (25).

Теорема 6.3. *Обозначим через K_h конус*
$$x_n^2 > h^2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2, \quad x_n < 0 \text{ *)}.$$
Пусть $h > 1$.

Пусть D — неограниченная область и K_h принадлежит дополнению к D. Пусть в D определен равномерно эллиптический оператор L и $u(x)$ — субэллиптическая функция, непрерывная в $\overline{D}$ и неположительная на ∂D. Тогда

либо 1) $u(x) \leqslant 0$ *всюду в D,*

либо 2)
$$\varliminf_{r\to\infty} M(r)/r^{ch^{-s}} > 0,$$
где
$$M(r) = \max_{|x|=r} u(x),$$
$c > 0$ — *константа, зависящая от e и $s = e - 2$.*

Доказательство. Пусть не выполнено условие 1). Положим $H = 1/h$. Найдется точка $x^0 \in D$ такая, что $u(x^0) = a > 0$. Положим $|x^0| = r_0$ и $r_k = r_0 \cdot 4^k$; $k = 1, 2, \ldots$

---

*) Конус K_h отличается от $R^n \setminus B_h$ тем, что он состоит из одной нижней полости.

Рассмотрим шары $Q^0_{r_k}$ и $Q^0_{r_{k+1}}$. Разность $Q^0_{r_k} \setminus D$ содержит шар радиуса $\frac{1}{2} r_k H$ (пусть его центр в точке x'). Поэтому, полагая $s = e - 2$ и применяя лемму 4.1 и принцип максимума, получаем

$$M(r_k) > \left(1 + \xi \frac{C_s\left(Q^{x'}_{\frac{1}{2} r_k H}\right)}{r_k^s} \right) M(r_{k-1}) =$$

$$= \left(1 + \frac{\xi H^s}{2^s} C_s(Q^0_1)\right) M(r_{k-1}) = (1 + \gamma H^s) M(r_{k-1}),$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

где $\gamma > 0$, таким образом, константа, зависящая от e.

Отсюда мы получаем

$$M(r_k) > a(1 + \gamma H^s)^k. \tag{28}$$

Так как $\ln r_{k+1} = \ln r_0 + (k+1)\ln 4$, то, выражая отсюда k,

$$k = \frac{\ln r_{k+1} - \ln r_0 - \ln 4}{\ln 4},$$

и подставляя в (28), получаем

$$M(r_k) > a(1 + \gamma H^s)^{(\ln r_{k+1} - \ln r_0 - \ln 4)/\ln 4}$$

и при достаточно больших k

$$M(r_k) > a(1 + \gamma H^s)^{(\ln r_{k+1})/2 \ln 4} = a \cdot r_k^{[\ln(1+\gamma H^s)]/2\ln 4} \geqslant a r_{k+1}^{cH^s}.$$

Константа c выбрана так, что $\ln(1 + \gamma H^s) > 2c \ln 4 \, H^s$ (это можно сделать, так как $H < 1$). Применяя принцип максимума, получаем нужное неравенство.

Задача. Мы получили в последней теореме неравенство $M(r) > ar^{ch^{-s}}$ (при достаточно больших r). Докажите, что при $s > 1$ имеет место неравенство $M(r) > a \cdot r^{c_1 h^{-s+1}}$ (при достаточно больших r).

В теореме 6.3 мы предположили, что $h > 1$. Константа 1, конечно, условна: можно взять любую другую.

Суть дела заключается в том, что в оценке

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{M(r)}{r^{ch^{-s}}} > 0$$

константа c может быть взята общей лишь для h, больших некоторого числа h_0. С уменьшением h_0 константа c начнет уменьшаться.

Специальный интерес представляет случай, когда K_h превращается в полупространство ($h = 0$). Оказывается, в этом случае можно получить точную оценку — рост не медленнее линейного *). Когда на стр. 13 шла речь о теореме Фрагмена — Линделёфа для гармонической функции в случае полуплоскости, мы видели, что гармоническая функция, определенная на верхней полуплоскости, неположительная на оси x и положительная в некоторой точке, необходимо растет на бесконечности не медленнее чем линейно. Мы сейчас увидим, что это общий факт для субэллиптических функций в случае оператора (1′).

Теорема 6.4. *Пусть D — неограниченная область, лежащая в полупространстве $x_n > 0$. Пусть в D определен равномерно эллиптический оператор L и $u(x)$ — субэллиптическая функция, непрерывная в $\overline{D}$ и неположительная на ∂D.*

Тогда

либо 1) $u(x) \leqslant 0$ *всюду в* D,

либо 2)

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{M(r)}{r} > 0. \tag{29}$$

Как и выше, $M(r) = \max\limits_{|x|=r} u(x)$.

Доказательство. Пусть не выполнено условие 1), т. е. найдется точка $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ такая, что $u(x^0) = a > 0$. Положим

$$v(x) = u(x) - \frac{ax_n}{2x_n^0}.$$

---

*) Правда, в этой оценке нижний предел будет заменен на верхний.

Пусть D' — множество точек $x \in D$, где $v(x) > 0$ и D'' — та компонента D', которая содержит точку x^0.

По принципу максимума D'' — неограниченная область. Пусть c — константа теоремы 6.2, соответствующая константе эллиптичности оператора L. Выберем число h, $0 < h < 1$, так, чтобы выполнялось

$$\frac{c}{h} > 1.$$

Пусть B_h имеет тот же смысл, что и в теореме 6.2.

Возможны два случая:

1) Найдется такое R, что

$$D'' \setminus Q_R^0 \subset B_h.$$

2) Существует последовательность $\{x^m\}$, $x^m \in D'' \setminus B_h$, $|x^m| \to \infty$ при $m \to \infty$.

В первом случае применим теорему 6.2. Во втором

$$u(x^m) = \frac{ax_n^m}{2x_n^0} + v(x^m) > \frac{ax_n^m}{2x_n^0} > b\,|x^m|,$$

где b — некоторая константа.

Таким образом, в обоих случаях выполнено (29) (ч. т. д.).

Контрольный вопрос. Почему в нашем доказательстве $\overline{\lim}$ нельзя заменить на $\underline{\lim}$?

Задача. Покажите, что для гармонической функции на плоскости в теореме 6.1 точное значение константы c равно $\pi/2$, а в теореме 6.2 — π.

Нерешенные задачи.

1. Пусть K_h и D имеют тот же смысл, что и в теореме 6.3. Верно ли, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое малое $h > 0$, что если $u(x)$ субгармонична в D, непрерывна в $\overline{D}$, равна нулю на ∂D и положительна в D, то

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{M(r)}{r^{1-\varepsilon}} > 0?$$

2. Пусть K_h' — конус $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < h^2 x_n^2$, $x_n > 0$. Пусть D — неограниченная область, лежащая в K_h', и в D

определен равномерно эллиптический оператор L. Пусть $u(x)$ — субэллиптическая функция, непрерывная в $\bar{D}$, положительная в D и равная нулю на ∂D.

а) Верно ли, что $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{M(r)}{r} = \infty$?

б) Верно ли, что $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{M(r)}{r^{1-\varepsilon}} > 0$ для некоторого положительного ε?

Ответ неизвестен даже в плоском случае.

3. Функция $u(x, y)$ определена на полуплоскости $y > 0$ и удовлетворяет там равномерно эллиптическому уравнению

$$a(x, y)\, u_{xx} + 2b(x, y)\, u_{xy} + c(x, y)\, u_{yy} = 0. \tag{$*$}$$

Далее $u(x, y)$ непрерывна вплоть до оси x, $u(x, y) > 0$ при $y > 0$ и $u = 0$ при $y = 0$.

Верно ли, что тогда $u(x, y)$ — линейная функция?

4. Уравнение $(*)$ определено на всей плоскости. Его решение $u(x, y)$ определено на всей плоскости и $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{M(r)}{r} < \infty$ $\left(M(r) = \max\limits_{x^2+y^2=r^2} u(x, y)\right)$. Верно ли, что u — линейная функция?

Примечания.

Теорема 6.4 этого параграфа принадлежит *А. А. Космодемьянскому* [1]. Теоремы типа Фрагмена — Линделёфа для уравнений 2-го порядка первоначально были получены мною для областей, которые описывались в терминах объема (см. *Е. М. Ландис* [2], [3]). Для областей, описывающихся в терминах емкости первым их получил *В. Г. Мазья* [2]. Позднее, другим методом это было сделано *Г. Н. Блохиной* в уже упоминавшихся работах [1], [2].

Возможны два рода обобщений классической теоремы Фрагмена — Линделёфа из теории аналитических функций на решения эллиптических уравнений. Одно из них — это то, которое было проведено на стр. 13 и которому посвящен этот параграф. Такую постановку (конечно, область здесь может быть произвольной и число переменных любым) будем называть фрагмено-линделёфовской теоремой, связанной с условиями Дирихле. В этом обобщении с аналитической функцией $f(z)$ мы связывали гармоническую функцию $\ln|f(z)|$. Если с $f(z)$ связать гармоническую функцию $\operatorname{Re} f(z)$, то получится другая постановка, которую будем называть фрагмено-линделёфовской теоремой, связанной с условиями Коши.

Мне кажется, что теоремы типа Фрагмена — Линделёфа для уравнений второго порядка, связанные с условиями Дирихле, — в значительной мере исчерпанная задача.

Что касается эллиптических уравнений высокого порядка, то здесь дело обстоит так: задача во второй постановке решена в значительной общности (см. *Е. М. Ландис* [4]). Для задачи в первой постановке в цилиндрической области, когда коэффициенты уравнения не изменяются вдоль оси цилиндра, решение вопроса получено в очень большой общности (см. *Лакс* [1]), но если область не цилиндрическая или коэффициенты меняются в направлении оси, то не сделано ничего и нет идей, как это сделать. Вот задача, решение которой, я думаю, продвинуло бы вопрос.

Пусть в R_n в цилиндре $0 \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < 1$ расположена область, уходящая в бесконечность (в одну или в обе стороны — все равно): и граница Γ этой области как угодно гладка (рис. 11).

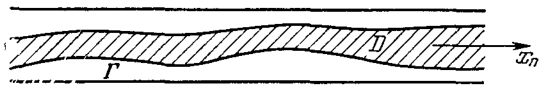

Рис. 11.

Пусть в области определено решение u уравнения $\Delta\Delta u = 0$ как угодно гладкое вплоть до границы и $u|_\Gamma = 0$ и $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$. Следует ли отсюда, что $u(x)$ неограниченно (экспоненциально растет при уходе на бесконечность)?

§ 7. Уравнения типа Кордеса. Априорная оценка нормы Гёльдера

Определение. Скажем, что функция $f(x)$, определенная на некотором множестве E, удовлетворяет на этом множестве *условию Гёльдера с показателем* $\alpha > 0$ и константой L, если для любой пары точек $x \in E$, $y \in E$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L\,|x - y|^\alpha.$$

Задача. Докажите, что функция, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем $\alpha > 1$ — константа.

Введем в рассмотрение пространства, связанные с условием Гёльдера.

Пусть D — ограниченная область в R_n.

Через $C_0(D)$ будет обозначать пространство непрерывных в D ограниченных функций с нормой

$$\|f\|_0^D = \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Через $C_m(D)$, где m — натуральное, — пространство m раз непрерывно дифференцируемых в D функций с ограниченными производными и нормой

$$\|f\|_m^D = \sum_{k_1+\ldots+k_n=0}^{m} \left\| \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1}, \ldots, \partial x_n^{k_n}} \right\|_0^D .$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}_\alpha$ функций, удовлетворяющих в D условию Гёльдера с показателем α, $0<\alpha<1$. Заметим, что каждая такая функция принадлежит $C_0(D)$ (почему?).

Для каждой функции $f \in \mathfrak{M}_\alpha$ положим

$$\|f\|_\alpha^D = \|f\|_0^D + \sup_{\substack{x,\, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}. \tag{30}$$

Если f и g принадлежат $\mathfrak{M}_\alpha$, то и их линейная комбинация принадлежит $\mathfrak{M}_\alpha$. Покажем, что $\|f\|_\alpha^D$ удовлетворяет аксиомам нормы и, таким образом, $\mathfrak{M}_\alpha$ с этой нормой является линейным нормированным пространством. Будем обозначать его через $C_\alpha(D)$.

Итак, нам надо проверить, что

1) $\|f\|_\alpha^D \geqslant 0$, $\|f\|_\alpha^D = 0$ при $f=0$

2) $\|\lambda f\|_\alpha^D = |\lambda| \cdot \|f\|_\alpha^D$.

3) $\|f+g\|_\alpha^D \leqslant \|f\|_\alpha^D + \|g\|_\alpha^D$.

Первые два условия удовлетворяются очевидным образом. Проверим третье.

Мы имеем

$$\|f+g\|_0^D \leqslant \|f\|_0^D + \|g\|_0^D$$

и

$$\sup_{\substack{x,\, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|[f(x)+g(x)]-[f(y)+g(y)]|}{|x-y|^\alpha} =$$
$$= \sup_{\substack{x,\, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|[f(x)-f(y)]-[g(x)-g(y)]|}{|x-y|^\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\substack{x,\, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_{\substack{x,\, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

а, значит,

$$\| f+g \|_{\alpha}^{D} \leqslant \| f \|_{\alpha}^{D} + \| g \|_{\alpha}^{D}.$$

Пространство $C_{\alpha}(D)$ полно. Действительно, пусть $\{f_m\}$ — фундаментальная последовательность в $C_{\alpha}(D)$.

Последовательность $\{f_m\}$ равномерно сходится к некоторой функции f.

Поэтому для всякой пары точек $x,\ y \in D,\ x \neq y$

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} = \lim_{m\to\infty} \frac{|f_m(x)-f_m(y)|}{|x-y|^{\alpha}}. \tag{31}$$

Так как $\{f_m\}$ фундаментальна в $C_{\alpha}(D)$, то существует такая константа M, что $\| f_m \|_{\alpha}^{D} < M$. Поэтому из (31) следует, что $f \in C_{\alpha}(D)$.

Рассмотрим функции

$$\varphi_m(x,\ y) = \frac{f_m(x)-f_m(y)}{|x-y|^{\alpha}}, \quad m = 1,\ 2,\ \ldots$$

и

$$\varphi(x,\ y) = \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\alpha}},$$

определенные на множестве G пар $x,\ y,\ x \in D,\ y \in D,\ x \neq y$. Так как

$$\frac{|(f_m(x)-f_n(x))-(f_m(y)-f_n(y))|}{|x-y|^{\alpha}} = \frac{|(f_m(x)-f_m(y))-(f_n(x)-f_n(y))|}{|x-y|^{\alpha}},$$

то последовательность $\{\varphi_m(x,\ y)\}$ фундаментальна в смысле равномерной сходимости на G и, значит, равномерно сходится к некоторой функции. Так как она поточечно сходится к $\varphi(x, y)$, то она равномерно сходится к $\varphi(x, y)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что при $m > N$

$$\sup_{\substack{x,\ y \in D\\ x \neq y}} |\varphi(x,\ y)-\varphi_m(x,\ y)| = \sup_{\substack{x,\ y \in D\\ x \neq y}} \left| \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\alpha}} - \frac{f_m(x)-f_m(y)}{|x-y|^{\alpha}} \right| = \sup_{\substack{x,\ y \in D\\ x \neq y}} \frac{|[f(x)-f_m(x)]-[f(y)-f_m(y)]|}{|x-y|^{\alpha}} < \varepsilon,$$

Полнота доказана.

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{M}_{m+\alpha}$ m раз дифференцируемых на D функций, m-е частные производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α.

Положим для $f \in \mathfrak{M}_{m+\alpha}$

$$\| f \|_{m+\alpha}^{D} = \| f \|_{m}^{D} + \sum_{k_1 + \ldots + k_n = m} \left\| \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\|_{\alpha}^{D}.$$

Из предыдущего следует, что аксиомы нормы удовлетворяются, и множество $\mathfrak{M}_{m+\alpha}$ с этой нормой есть линейное нормированное пространство. Это пространство будем обозначать через $C_{m+\alpha}(D)$. Из полноты $C_m(D)$ и $C_\alpha(D)$ вытекает, что пространство $C_{m+\alpha}(D)$ также *полно.*

В этом параграфе мы будем рассматривать равномерно эллиптическое уравнение вида (1′)

$$Lu = 0,$$

константа эллиптичности e которого удовлетворяет условию

$$e < n + 2. \tag{32}$$

Будем называть такое уравнение уравнением *типа Кордеса.*

Пусть имеется область D, и в ней определено уравнение типа Кордеса с константой эллиптичности $e' \leqslant e < n + 2$ и его решение $u(x)$.

Пусть D_ρ — совокупность точек $x \in D$, для которых расстояние от границы области D больше $\rho > 0$.

Докажем, что имеет место следующее неравенство:

$$\| u \|_{\alpha}^{D_\rho} \leqslant C \| u \|_{0}^{D}, \tag{33}$$

где число $\alpha > 0$ зависит только от e и от размерности пространства, а число C зависит, кроме того, еще и от ρ.

Эта оценка не зависит, таким образом, ни от конкретного вида оператора, ни от конкретного решения уравнения, ни от вида области D. Такую оценку будем называть априорной.

Априорная оценка нормы Гёльдера позволит нам в дальнейшем решить вопрос о существовании решения задачи Дирихле для квазилинейного уравнения.

Пусть имеется область D и в ней подобласть D_ρ, определенная так, как это было сказано выше. Дадим достаточное условие для того, чтобы класс функций, определенных в D, удовлетворял условию (33).

Введем следующее обозначение:

$$\operatorname*{osc}_E f = \sup_E f - \inf_E f.$$

Число $\operatorname*{osc}_E f$ будем называть *колебанием* функции f на множестве E.

Теорема 7.1. *Пусть f — функция, определенная в D и удовлетворяющая условию: существует константа $P > 1$ такая, что для всякого шара Q_R^x, содержащегося в D, справедливо*

$$\operatorname*{osc}_{Q_R^x} f \geqslant P \operatorname*{osc}_{Q_{R/4}^x} f.$$

Тогда

$$\| f \|_\alpha^{D_\rho} \leqslant C \| f \|_0^D,$$

где константа $\alpha > 0$ зависит только от P, а константа C — от P и ρ.

Доказательство.

1. Пусть x и y — две точки из D_ρ такие, что

$$| x - y | < \frac{\rho}{4}, \quad x \neq y.$$

Пусть натуральное число m таково, что

$$\rho \cdot 4^{-(m+1)} \leqslant | x - y | < \rho \cdot 4^{-m}.$$

Оценим колебание функции f в шаре $Q_{\rho \cdot 4^{-m}}^x$. Для всякого натурального k

$$\operatorname*{osc}_{Q_{\rho\cdot 4^{-k}}^x} f \geqslant P \operatorname*{osc}_{Q_{\rho\cdot 4^{-(k+1)}}^x} f,$$

а потому

$$\operatorname*{osc}_{Q_{\rho\cdot 4^{-m}}^x} f \leqslant \frac{1}{P^m} \operatorname*{osc}_{Q_\rho^x} f \leqslant P \frac{2}{P^{m+1}} \| f \|_0^D.$$

Далее

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \operatorname*{osc}_{Q^x_{\rho\cdot 4^{-m}}} f \leqslant P\frac{2}{P^{m+1}}\|f\|_0^D =$$

$$= P\frac{2}{4^{\log_4 P^{m+1}}}\|f\|_0^D = 2P\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\log_4 P}\left(\rho 4^{-(m+1)}\right)^{\log_4 P}\|f\|_0^D \leqslant$$

$$\leqslant 2P\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\log_4 P}|x-y|^{\log_4 P}\|f\|_0^D.$$

Итак,

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant C_1\|f\|_0^D,$$

где

$$\alpha = \log_4 P > 0 \quad \text{и} \quad C_1 = 2P\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\log_4 P}.$$

2. Пусть теперь x и y принадлежат D_ρ и

$$|x-y| \geqslant \frac{\rho}{4}.$$

Тогда

$$|f(x)-f(y)| \leqslant 2\cdot\frac{4^\alpha}{\rho^\alpha}|x-y|^\alpha\|f\|_0^D.$$

Полагая

$$C = \max\left(C_1, \frac{2\cdot 4^\alpha}{\rho^\alpha}\right)+1,$$

получаем

$$\|f\|_\alpha^{D_\rho} \leqslant C\|f\|_0^D,$$

где α зависит только от P, а C — от P и ρ.

Замечание. В действительности, всегда $\log_4 P \leqslant 1$, если только $f \not\equiv \text{const}$. Почему?

Теперь можно доказать теорему об априорной оценке.

Теорема 7.2. *Пусть дано число e, $n \leqslant e < n+2$. Пусть*

$$Lu = 0$$

— равномерно эллиптическое уравнение типа Кордеса с константой эллиптичности $e' \leqslant e$ и $u(x)$ — решение этого уравнения в D. Тогда

$$\|u\|_\alpha^{D_\rho} \leqslant C\|f\|_0^D,$$

где $\alpha > 0$ зависит только от e и от размерности пространства, а C еще и от ρ.

Доказательство. По предыдущей теореме достаточно доказать, что для всякого шара $Q_R^{x^0} \subset D$ и всякого решения $u(x)$ справедливо

$$\operatorname*{osc}_{Q_R^{x^0}} u \geqslant P \operatorname*{osc}_{Q_{R/4}^{x^0}} u,$$

где $P > 1$ — константа, зависящая только от e и размерности пространства. Докажем это.

Так как мы можем использовать преобразование подобия и сдвиг, то достаточно рассмотреть случай, когда $R = 4$ и $x^0 = 0$.

Итак, пусть в шаре Q_4^0 определено решение $u(x)$ уравнения типа Кордеса с константой эллиптичности $e' \leqslant e$ $(e < n + 2)$.

Можно считать, что

$$\max_{\overline{Q}_1^0} u = 1 \quad \text{и} \quad \min_{\overline{Q}_1^0} u = -1$$

(так как решение можно умножать на константу и прибавлять к нему константу), так что

$$\operatorname*{osc}_{Q_1^0} u = 2.$$

Пусть x^+ и x^- — те точки на сфере S_1^0, где соответственно $u(x^+) = 1$ и $u(x^-) = -1$.

Обозначим через H^+ и H^- множества точек $x \in Q_1^0$, где соответственно $u(x) \geqslant 0$ и $u(x) \leqslant 0$.

Справедливо по крайней мере одно из неравенств

$$\operatorname{mes} H^+ \geqslant \frac{1}{2} \Omega_n,$$

$$\operatorname{mes} H^- \geqslant \frac{1}{2} \Omega_n,$$

где Ω_n — объем единичного n-мерного шара.

Пусть для определенности $\operatorname{mes} H^- \geqslant \frac{1}{2} \Omega_n$ (второй случай получается из этого изменением знака решения на обратный).

Обозначим через D ту связную компоненту множества точек $x \in Q_4^0$, где $u(x) > 0$, которая содержит точку x^+. Пусть Γ — та часть границы D, которая лежит строго внутри шара Q_4^0. Мы имеем

$$u|_\Gamma = 0$$

и

$$\operatorname{mes}\left(Q_1^{x^0} \setminus D\right) \geqslant \operatorname{mes} H^- \geqslant \frac{1}{2}\Omega_n.$$

Поэтому, применяя лемму о возрастании 4.2 для случая

$$s = e - 2 < n,$$

получаем

$$\sup_D u > \left(1 + \eta \cdot \frac{1}{2}\Omega_n\right),$$

где $\eta > 0$ зависит от s и n, т. е. от e и n.

Следовательно,

$$\operatorname*{osc}_{Q_4^0} u \geqslant 2 + \frac{\eta}{2}\Omega_n = 2\left(1 + \frac{\eta\Omega_n}{4}\right),$$

и мы можем положить $P = \left(1 + \frac{\eta\Omega_n}{4}\right)$. При этом P оказывается зависящим только от e и размерности пространства. Теорема доказана.

Замечание 7.1. Из замечания 4.1 следует, что теорема 7.2 верна и для полного оператора (1) при условии, что $\frac{M}{a} < n + 2$.

Задача. Докажите неравенство (33) в случае $n=2$ без предположения $e < n + 2$.

Нерешенная задача. Верно ли неравенство (33) при $n \geqslant 3$ без ограничения на величину e?

На первый взгляд кажется, что результат, который мы получили, относится к довольно узкому классу уравнений: уравнения типа Кордеса — это уравнения, коэффициенты которых по размеру мало отличаются от коэффициентов уравнения Лапласа. Уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

с *постоянными* положительными коэффициентами уже не будет уравнением кордесовского типа, если только отношение наибольшего из λ_i к наименьшему больше либо равно 3.

Но это уравнение, как и всякое эллиптическое уравнение, содержащее члены только второго порядка и имеющее постоянные коэффициенты, может быть приведено к уравнению Лапласа с помощью линейного преобразования независимых переменных. Ясно, что при линейном преобразовании функция, удовлетворяющая условию Гёльдера, перейдет в функцию, удовлетворяющую условию Гёльдера с тем же показателем. Константа же изменится в конечное число раз, зависящее от преобразования.

Учитывая это, введем следующее определение:

Определение. Скажем, что эллиптическое уравнение

$$Lu = 0$$

приводится в области D к *кордесовскому типу*, если D можно покрыть конечным числом областей $D_1, \ldots, D_n$ таких, что для каждой D_i можно произвести такое линейное преобразование C_i пространства R_n, что после него оператор L будет в образе D_i иметь кордесовский тип.

Пусть после преобразования C_i оператор L в D_i перейдет в оператор с константой эллиптичности e_i. Тогда число

$$e = \max_i e_i$$

будем называть *приведенной константой эллиптичности* оператора L.

Теорема 7.3. *Пусть $e < n + 2$, и пусть*

$$Lu = 0$$

— уравнение, приводящееся к кордесовскому типу в области D и его приведенная константа эллиптичности e' удовлетворяет неравенству $e' \leqslant e$. Тогда для любого $\rho > 0$ и любого решения $u(x)$ этого уравнения в D имеет место

$$\| u \|_{\alpha}^{D_\rho} \leqslant C \| u \|_0^D,$$

где $\alpha > 0$ зависит от e и от размерности пространства, а C еще от ρ, от областей D_i и преобразований C_i.

Доказательство. Зададим некоторое $\rho > 0$. Существует такое $\rho_0 > 0$, что для любой пары точек $x \in D_\rho$, $y \in D_\rho$ из неравенства

$$|x-y| < \rho_0$$

следует, что найдется такое i, что

1) $x \in D_i$, $y \in D_i$,

2) $\rho(x, \partial D_i) > \rho_0$, $\rho(y, \partial D_i) > \rho_0$.

Действительно, рассмотрим множество D_ρ. Пусть $x \in \overline{D}_\rho$ — произвольная точка. Существует такое i, что $x \in D_i$. Так как x — внутренняя точка D_i, то существует такое $\rho(x) > 0$, что $\rho(x)$ — окрестность точки x принадлежит D_i. Обозначим через $U(x)$ $\frac{\rho(x)}{4}$-окрестность точки x. Окрестности $U(x)$ образуют покрытие $\overline{D}_\rho$. Выберем из него конечное подпокрытие. Обозначим через ρ_0 наименьший из радиусов окрестностей, входящих в это покрытие. Тогда любые две точки из D_ρ, расстояние между которыми меньше ρ_0, попадают внутрь одного и того же D_i и оказываются там на расстоянии, большем ρ_0 от его границы ∂D_i.

Производя для каждого D_i соответствующее линейное преобразование C_i и применяя теорему 7.2, получим требуемое неравенство для всех пар точек, расстояние между которыми меньше ρ_0. Но этого достаточно в силу очевидного неравенства

$$|u(x)-u(y)| \leqslant \frac{2}{\rho_0^\alpha}|x-y|^\alpha \|u\|_0^D \quad \text{при} \quad |x-y| \geqslant \rho_0.$$

Теперь мы можем приступить к вопросу о существовании решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений. Начнем с линейных уравнений, а затем уже перейдем к квазилинейным.

Примечания.

Г. О. Кордес [1] доказал, что для решения эллиптического уравнения

$$\sum a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = 0$$

во внутренней точке области имеет место априорная оценка $\| u \|_{1+\alpha}$, где $\alpha > 0$ — константа, зависящая только от констант эллиптичности уравнения и размеров коэффициентов.

При этом на уравнение им было наложено условие, близкое тому, которое мы назвали «условием приводимости к кордесовскому типу». Суть его состоит в том, что после некоторого линейного преобразования матрица коэффициентов при вторых производных должна иметь не слишком большой разброс характеристических корней. Это условие не совпадает буквально с «условием Кордеса». Небольшое расхождение между ними мне не кажется существенным.

Эти оценки Кордес использовал для доказательства существования решения квазилинейного уравнения

$$\sum a_{ik}\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+b\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=0.$$

Доказательство Кордеса довольно сложно.

Меня привлекла возможность дать очень простое доказательство априорной оценки (правда, оценки в норме $\| \ \|_\alpha$), отчетливо проясняющее роль условия Кордеса в форме $e < n+2$.

Я думаю, что независимо от приложений к квазилинейным уравнениям, вопрос о том, в какой мере оценка разброса корней характеристического уравнения нужна для получения внутренней априорной оценки в несамосопряженном случае (задача, сформулированная на стр. 62) — есть весьма интересный вопрос.

Я хочу поставить в связи с этим задачу, значительно более частную, но, как мне кажется, содержащую уже все трудности.

Пусть на плоскости имеется область D. Пусть $(x_0, y_0) \in \partial D$ является точкой плотности для дополнения к D, но при этом не принадлежит никакой связной компоненте ∂D. Пусть в D задано равномерно эллиптическое уравнение, коэффициенты которого сколь угодно хороши всюду в $\overline{D} \setminus (x_0, y_0)$, но рвутся в (x_0, y_0).

Спрашивается, регулярна ли точка (x_0, y_0)?

§ 8. Существование решения задачи Дирихле для линейных уравнений

Пусть D — область с трижды непрерывно дифференцируемой границей.

Пусть в D определен равномерно эллиптический оператор

$$L=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k} \tag{1'}$$

и при некотором $\alpha > 0$

$$a_{ik} \in C_\alpha(D), \quad i, k = 1, \ldots, n$$

(про такой оператор будем говорить, что он имеет *гёльдеровы* коэффициенты).

Пусть дана задача Дирихле

$$Lu = 0, \quad u\,|_{\partial D} = \varphi. \tag{34}$$

Докажем сначала, что решение задачи (34) существует при всякой $\varphi \in C_{2+\alpha}(\partial D)$ и u принадлежит $C_{2+\alpha}(D)$.

(Будем говорить, что $\varphi \in C_{2+\alpha}(\partial D)$, если φ можно продолжить на шар Q_R^0, $\partial D \subset Q_R^0$ так, что $\varphi \in C_{2+\alpha}(Q_R^0)$. Аналогично мы будем говорить, что $\varphi \in C_{2+\alpha}(\overline{D})$, если φ может продолжить на шар Q_R^0, $\overline{D} \subset Q_R^0$ так, что $\varphi \in C_{2+\alpha}(Q_R^0)$).

Начнем с того, что сведем вопрос о существовании решения задачи (34) к вопросу о существовании решения неоднородного уравнения при нулевых граничных условиях. Предварительно докажем лемму.

Лемма 8.1. *Пусть* $\varphi \in C_\alpha(D)$ *и* $\psi \in C_\alpha(D)$. Тогда $\varphi\psi \in C_\alpha(D)$ *и*

$$\begin{gathered} \|\varphi\psi\|_\alpha^D \leqslant \|\varphi\|_0^D \|\psi\|_\alpha^D + \|\psi\|_0^D \|\varphi\|_\alpha^D, \\ \|\varphi\psi\|_\alpha^D \leqslant \|\varphi\|_\alpha^D \|\psi\|_\alpha^D. \end{gathered} \tag{35}$$

Доказательство. По определению

$$\|\varphi\|_\alpha^D = \|\varphi\|_0^D + \sup_{\substack{x,\, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$\|\psi\|_\alpha^D = \|\psi\|_0^D + \sup_{\substack{x,\, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$\|\varphi\psi\|_\alpha^D = \|\varphi\psi\|_0^D + \sup_{\substack{x,\, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x)\,\psi(x) - \varphi(y)\,\psi(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Но

$$\sup_{\substack{x,\, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x)\psi(x) - \varphi(y)\psi(y)|}{|x-y|^\alpha} =$$

$$= \sup_{\substack{x,\, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi(y) + \varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{x,\, y \in D \\ x \neq y}} |\varphi(x)| \frac{|\psi(x)-\psi(y)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_{\substack{x,\, y \in D \\ x \neq y}} |\psi(y)| \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_0^D \sup_{\substack{x,\, y \in D \\ x = y}} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|}{|x-y|^\alpha} + \|\psi\|_0^D \sup_{\substack{x,\, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

откуда и вытекают неравенства (35).

Покажем теперь, что для того, чтобы установить разрешимость задачи (34), достаточно показать, что задача

$$Lu = f, \quad u|_{\partial D} = 0 \tag{36}$$

при тех же предположениях относительно коэффициентов оператора и относительно ∂D разрешима при всякой функции $f \in C_\alpha(D)$ и ее решение принадлежит $C_{2+\alpha}(D)$.

Действительно, продолжим φ с ∂D на $\overline{D}$ так, чтобы она принадлежала $C_{2+\alpha}(\overline{D})$ и положим

$$v = u - \varphi.$$

Тогда

$$Lv = -L\varphi, \quad v|_{\partial D} = 0. \tag{37}$$

Так как по лемме 8.1 $L\varphi \in C_\alpha(D)$, то из существования решения v задачи (37) следует существование решения $u = v + \varphi$ задачи (34).

Докажем существование решения задачи (36) при всякой $f \in C_\alpha(D)$. Для этого мы воспользуемся неравенством, которое называется *оценкой Шаудера вплоть до границы.*

Оценка Шаудера вплоть до границы. Пусть $u \in C_{2+\alpha}(D)$ — решение задачи (36) при тех же условиях на a_{ik}, f и ∂D, т. е. $a_{ik} \in C_\alpha(D)$, $f \in C_\alpha(D)$, ∂D — трижды гладкая.

Тогда
$$\| u \|_{2+\alpha}^{D} \leqslant C \| f \|_{\alpha}^{D}, \tag{38}$$
где константа C зависит от нормы Гёльдера коэффициентов и от констант эллиптичности оператора L. Так как мы рассматриваем здесь уравнение с правой частью и, кроме того, учитываем норму Гёльдера коэффициентов, то уже недостаточно одной константы эллиптичности e оператора L (уравнение изменяется от умножения оператора на функцию).

Напомним, что в самом начале мы ввели две константы эллиптичности
$$M = \sup_{x} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) \quad \text{и} \quad a = \inf_{x,\, |\xi|=1} \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik}(x) \xi_i \xi_k.$$

Константа C зависит от обеих констант M и a.

Таким образом, окончательно, константа C зависит от нормы коэффициентов в $C_\alpha(D)$, от области D, от M и от a.

Оценку Шаудера (38) мы получим позднее, в добавлении IV (стр. 261), а сейчас в предположении, что она имеет место, докажем существование решения задачи (36). Проведем это доказательство методом продолжения по параметру.

Рассмотрим семейство операторов, зависящих от параметра t:
$$L(t) = (1-t)\Delta + tL, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
где Δ — оператор Лапласа и L — данный оператор.

Докажем, что множество E точек t отрезка $[0, 1]$, при которых задача
$$L(t)\, u = f, \quad u|_{\partial D} = 0 \tag{39}$$
разрешима при всякой $f \in C_\alpha(D)$, непусто и является одновременно открытым и замкнутым на $[0, 1]$. Отсюда будет следовать, что E совпадает с отрезком $[0, 1]$, т. е. задача разрешима при $t = 1$, когда $L(t) = L$.

1. *Непустота множества* E. При $t = 0$ мы имеем задачу
$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial D} = 0. \tag{40}$$

Воспользуемся теоремой о том, что задача (40) разрешима при любой $f \in C_\alpha(D)$ и ее решение $u \in C_{2+\alpha}(D)$. К самой этой теореме мы вернемся позднее, одновременно с оценкой Шаудера, в добавлении IV.

2. *Открытость множества E.* Пусть при $t = t_0$ задача (39) разрешима при всякой $f \in C_\alpha(D)$. Пусть $\delta > 0$ — число, которое будет подобрано позднее, и $|t - t_0| < \delta$.

Представим уравнение

$$L(t)\, u = f$$

в виде

$$L(t_0)\, u = f - [L(t) - L(t_0)]\, u$$

и будем решать задачу

$$L(t_0)\, u = f - [L(t) - L(t_0)]\, u, \quad u|_{\partial D} = 0 \tag{41}$$

методом последовательных приближений.

Рассмотрим в пространстве $C_{2+\alpha}(D)$ подпространство $\mathring{C}_{2+\alpha}(D)$ функций, обращающихся в нуль на границе. $\mathring{C}_{2+\alpha}(D)$ замкнуто в $C_{2+\alpha}(D)$, а потому является полным пространством вместе с $C_{2+\alpha}(D)$.

Всякой функции $z \in \mathring{C}_{2+\alpha}(D)$ сопоставим функцию $u \in \mathring{C}_{2+\alpha}(D)$, являющуюся решением задачи

$$L(t_0)\, u = f - [L(t) - L(t_0)]\, z, \quad u|_{\partial D} = 0.$$

По нашему предположению относительно t_0 такая функция u существует и принадлежит $C_{2+\alpha}(D)$ и, следовательно, принадлежит $\mathring{C}_{2+\alpha}(D)$.

Обозначим через A оператор, который переводит z в u

$$u = Az.$$

Имеем

$$L(t) - L(t_0) = (1-t)\, L - (1-t_0)\, L + (t-t_0)\, \Delta = (t-t_0)(\Delta - L).$$

Поэтому, учитывая очевидное неравенство

$$\left\| \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_k} \right\|_\alpha^D \leqslant \| z \|_{2+\alpha}^D,$$

получаем отсюда по лемме 8.1

$$\| [L(t) - L(t_0)] z \|_{\alpha}^{D} \leqslant K |t - t_0| \| z \|_{2+\alpha}^{D}; \tag{42}$$

K — некоторая константа.

Выберем теперь δ столь малым, чтобы выполнялось

$$CK\delta < \frac{1}{2}, \tag{43}$$

где C — константа в неравенстве Шаудера (38). Покажем, что при этом оператор A *сжимающий*.

Пусть

$$u_1 = Az_1 \quad \text{и} \quad u_2 = Az_2, \quad z_1, z_2 \in \mathring{C}_{2+\alpha}(D).$$

Разность $u_1 - u_2$ является решением задачи

$$L(t_0)(u_1 - u_2) = [L(t) - L(t_0)](z_2 - z_1),$$

$$(u_1 - u_2)|_{\partial D} = 0.$$

Следовательно, согласно неравенству (38),

$$\| u_1 - u_2 \|_{2+\alpha}^{D} \leqslant C \| [L(t) - L(t_0)](z_1 - z_2) \|_{\alpha}^{D}, \tag{44}$$

и, согласно неравенствам (42) — (44),

$$\| u_1 - u_2 \|_{2+\alpha}^{D} \leqslant \frac{1}{2} \| z_1 - z_2 \|_{2+\alpha}^{D}.$$

Нам остается применить принцип сжатых отображений.

3. *Замкнутость множества* E. Пусть $t_n \to t$ и $t_n \in E$. Рассмотрим задачу

$$L(t)u = f, \quad u|_{\partial D} = 0, \quad f \in C_{\alpha}(D).$$

Пусть u_n ($n = 1, 2, \ldots$) — решение задачи

$$L(t_n)u_n = f, \quad u_n|_{\partial D} = 0.$$

Заметим, что для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, для операторов $L(t)$ мы можем взять общие константы эллиптичности и общие оценки нормы Гёльдера в $C_{\alpha}(D)$ коэффициентов. Поэтому в оценке Шаудера (38) можно взять общую константу C. Следовательно, для всех n

$$\| u_n \|_{2+\alpha}^{D} \leqslant C \| f \|_{\alpha}^{D} = M.$$

Поэтому из последовательности $\{u_n\}$ можно выбрать последовательность, равномерно сходящуюся с производными до второго порядка к некоторой функции u. Очевидно, тогда функция u является решением задачи

$$L(t)\,u = f, \quad u\,|_{\partial D} = 0.$$

Кроме того, из того, что нормы u_n в $C_{2+\alpha}(D)$ ограничены в совокупности, следует, что $u \in C_{2+\alpha}(D)$. Тем самым доказана замкнутость E и завершено доказательство существования решения задачи (36).

Итак, доказав существование решения задачи (36), мы доказали существование и принадлежность к $C_{2+\alpha}(D)$ решения задачи (34):

$$Lu = 0, \quad u\,|_{\partial D} = \varphi,$$

где оператор L имеет коэффициенты из $C_\alpha(D)$, $\varphi \in C_{2+\alpha}(D)$ и ∂D — трижды гладкая.

При этом у нас остались пока недоказанными оценка Шаудера (38) и теорема существования решения задачи (40) для оператора Лапласа.

Их рассмотрение перенесем в добавление IV. А сейчас займемся обобщением полученного результата на случай произвольной непрерывной граничной функции φ и на случай более общей границы ∂D. Для этого сформулируем еще одну шаудеровскую оценку, так называемую внутреннюю оценку (ее доказательство будет также дано в дополнении IV).

Внутренняя оценка Шаудера. Пусть D — произвольная область в R_n. Пусть L — оператор, равномерно эллиптический в D с коэффициентами из $C_\alpha(D)$ и $\rho > 0$ — произвольное число. Тогда для любой функции $u \in C_{2+\alpha}$ имеет место оценка

$$\| u \|_{2+\alpha}^{D_\rho} \leqslant C \left[\| Lu \|_\alpha^D + \| u \|_0^D \right], \tag{45}$$

где C — константа, зависящая от констант эллиптичности M и a оператора L, от нормы коэффициентов в $C_\alpha(D)$ и от ρ.

Рассмотрим теперь ограниченную область D с трижды непрерывно дифференцируемой границей и в ней оператор L тот же, что и выше. Пусть φ — произвольная непрерывная на ∂D функция.

Рассмотрим задачу Дирихле

$$Lu = 0, \quad u|_{\partial D} = \varphi.$$

Докажем, что эта задача имеет решение $u(x)$. При этом $u \in C_{2+\alpha}(D_\rho)$ при любом $\rho > 0$.

Действительно, выберем последовательность $\{\varphi_m\}$ трижды гладких функций, равномерно сходящуюся на ∂D к функции φ. По доказанному существует решение u_m задачи

$$Lu_m = 0, \quad u_m|_{\partial D} = \varphi_m.$$

По принципу максимума последовательность $\{u_m\}$ равномерно сходится в $\overline{D}$ к непрерывной функции $u(x)$ и $u|_{\partial D} = \varphi$.

Пусть $\rho > 0$ произвольно. Из (45), учитывая принцип максимума, получаем

$$\| u_m \|_{2+\alpha}^{D_\rho} \leqslant C \| \varphi_m \|_0^D < K,$$

где K — константа, не зависящая от m. Поэтому из последовательности $\{u_m\}$ можно выбрать подпоследовательность

$$u_{m_1}, \; u_{m_2}, \; \ldots, \; u_{m_k}, \; \ldots,$$

сходящуюся в D_ρ вместе с производными до 2-го порядка к функции из $C_{2+\alpha}(D)$, и так как $\{u_m\}$ сходится к u, то $u(x)$ удовлетворяет уравнению и принадлежит $C_{2+\alpha}(D_\rho)$.

Теперь мы уже имеем все для того, чтобы для уравнения $Lu = 0$ с гёльдеровыми коэффициентами в произвольной ограниченной области D и при произвольной непрерывной граничной функции f построить *обобщенное решение* и исследовать его поведение на границе подобно тому, как мы это сделали в § 5 для уравнения Лапласа. Более того, достаточно предположить, что L имеет гёльдеровы коэффициенты во всякой строго внутренней подобласти области D.

Пусть L — равномерно эллиптический в области D оператор. Пусть для каждого $\rho > 0$ существует такое

$\alpha(\rho) > 0$, что коэффициенты оператора L принадлежат $C_{\alpha(\rho)}(D_\rho)$.

Замечание 5.1 (стр. 37) позволяет построить функцию $u_f(x)$ с помощью описанного там процесса. Далее, внутренняя шаудеровская оценка (45) дает компактность во всякой замкнутой строго внутренней подобласти равномерно ограниченного в исходной области семейства решений. (Эта подобласть будет принадлежать некоторой области D_ρ; шаудеровскую же оценку мы применим, беря за исходную область $D_{\rho/2}$). Поэтому построенная функция будет решением (ср. с п. 4 на стр. 37).

Как и для случая уравнения Лапласа назовем граничную точку x^0 *регулярной*, если для любой непрерывной на границе ∂D области D функции φ обобщенное решение $u_\varphi(x)$ задачи

$$u\,|_{\partial D} = \varphi$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{x \to x^0} u_\varphi(x) = \varphi(x^0).$$

Тогда замечание 5.2 на стр. 38 дает нам теорему.

Теорема 8.1. *Пусть D — произвольная ограниченная область. Пусть $e \geqslant n$ — некоторое число. Пусть в D определен равномерно эллиптический оператор L с коэффициентами, принадлежащими $C_{\alpha(\rho)}(D_\rho)$ при всяком $\rho > 0$ и с константой эллиптичности $e' \leqslant e$.*

Пусть φ — произвольная непрерывная на ∂D функция. Тогда существует единственное обобщенное решение u_φ задачи Дирихле

$$Lu = 0, \quad u\,|_{\partial D} = \varphi.$$

Для всякого $\rho > 0$ это решение принадлежит $C_{2+\alpha(\rho)}(D_\rho)$. Если точка $x^0 \in \Gamma$ является e-регулярной, то $u_\varphi(x) \to \varphi(x^0)$ при $x \to x^0$ *).

Замечание 8.1. Из доказательства достаточности условия Винера на стр. 38 вытекает, что при заданной

*) Так как нам достаточно, чтобы коэффициенты принадлежали $C_{\alpha(\rho)}(D_\rho)$, то, в частности, коэффициенты могут даже не быть непрерывными вплоть до границы.

граничной функции φ для данной e-регулярной граничной точки x^0 справедливо: для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что, каков бы ни был оператор L с константой эллиптичности $e' \leqslant e$ и гёльдеровыми коэффициентами, для обобщенного решения $u_\varphi(x)$ задачи

$$Lu = 0, \quad u|_{\partial D} = \varphi$$

справедливо

$$|u_\varphi(x) - \varphi(x^0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - x^0| < \delta.$$

Замечание 8.2. Пусть дан полный оператор (1), для которого коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию $c(x) \leqslant 0$, так что выполнен принцип максимума. Для такого оператора имеют место оценки Шаудера (38) и (45) при условии, что его коэффициенты гёльдеровы. Поэтому для него существование решения задачи Дирихле может быть доказано так же, как и для оператора (1').

Примечания.

Изложенный метод доказательства существования решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка с гёльдеровыми коэффициентами с помощью продолжения по параметру (восходящий к *С. Н. Бернштейну*) является традиционным (см., например, книгу *Р. Куранта* [1] или монографию *О. А. Ладыженской* и *Н. Н. Уральцевой* [1]).

В этом параграфе мы рассматриваем произвольную область и строим в ней обобщенное решение задачи Дирихле.

Пусть для линейного уравнения

$$\sum a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = 0, \qquad c \leqslant 0 \quad (**)$$

задача Дирихле разрешима для любого достаточно малого шара, принадлежащего некоторой области D при произвольных граничных условиях на границе шара (например, коэффициенты уравнения удовлетворяют условию Гёльдера в любой внутренней подобласти D).

На то, что в этом случае может быть построено *обобщенное решение* задачи Дирихле для уравнения (**) по той же схеме, что и для уравнения Лапласа, впервые обратил внимание *П. Лакс*. Это решение может быть построено по методу Перрона (см. *И. Г. Петровский* [1], § 31 или цитированную книгу *Р. Куранта*, гл. IV, § 4) или по методу Винера, как это было проделано нами (см. также статью *М. В. Келдыша* [1]).

Как отмечается в ссылке на стр. 73 коэффициенты уравнения при подходе к границе могут как угодно рваться, лишь бы константа эллиптичности не превысила данную e. При этом условие e-регулярности граничной точки, даваемое теоремой 5.1 (стр. 30) будет точным условием.

Если бы мы наложили на граничную точку более жесткое условие, например «условие конуса», то можно было бы допустить рост константы эллиптичности при приближении к этой точке: можно допустить, чтобы e росло со скоростью $\ln\ln\frac{1}{r}$, где r — расстояние до той граничной точки, которой можно коснуться конусом извне области (по этому поводу см. статью *А. Аббасова* [1]).

§ 9. Существование решения задачи Дирихле для квазилинейных уравнений

Рассмотрим линейный оператор

$$L = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x,\,\xi)\,\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}, \tag{46}$$

зависящий от скалярного параметра ξ.

Пусть этот оператор определен для $x \in D$ и $|\xi| \leqslant K$ и равномерно эллиптичен по x при каждом значении ξ с константами эллиптичности $M(\xi)$ и $a(\xi)$. Пусть

$$M = \sup_{|\xi| \leqslant K} M(\xi) \quad \text{и} \quad a = \inf_{|\xi| \leqslant K} a(\xi).$$

Пусть, далее, коэффициенты a_{ik} удовлетворяют условию Гёльдера с некоторым показателем $\alpha > 0$ по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_n, \xi$ в $D \times [-K,\,K]$.

Скажем в этом случае, что квазилинейное уравнение

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x,\,u)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} = 0 \tag{47}$$

равномерно эллиптично с константами эллиптичности M и a и имеет *гёльдеровы коэффициенты* с показателем α при $|u| \leqslant K$.

Скажем, что равномерно эллиптическое уравнение (47) имеет *кордесовский тип* при $|u| \leqslant K$, если для его констант эллиптичности выполнено неравенство

$$\frac{M}{a} < n + 2. \tag{48}$$

Теорема 9.1. *Пусть уравнение* (47) *определено в области* D *и имеет гёльдеровы коэффициенты с показателем* α *и кордесовский тип при* $|u| \leqslant K$. *Пусть* M *и* a — *его константы эллиптичности. Пусть каждая точка границы области* D e-*регулярна, и* $M/a \leqslant e$.

Тогда при произвольной непрерывной на ∂D *функции* φ, *удовлетворяющей условию* $|\varphi| \leqslant K$, *задача Дирихле*

$$u|_{\partial D} = \varphi$$

имеет решение $u(x)$. *При любом* $\rho > 0$ $u \in C_{2+\alpha}(D_\rho)$.

При доказательстве этой теоремы воспользуемся следующей теоремой Шаудера о неподвижной точке, которую докажем позже в Дополнении II: *при непрерывном преобразовании в себя выпуклого компакта в банаховом пространстве существует неподвижная точка.*

Доказательство.

1. Зададим некоторую непрерывную граничную функцию φ. Рассмотрим последовательность чисел ρ_m положительных и монотонно стремящихся к нулю при $m \to \infty$. Рассмотрим в D произвольное *линейное* уравнение

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \tag{49}$$

имеющее константу эллиптичности $e' \leqslant M/a$ (M и a — константы эллиптичности данного квазилинейного уравнения (47)).

Пусть $u(x)$ — решение уравнения (49) в D, и $|u(x)| \leqslant K$. Так как это уравнение имеет кордесовский тип, то для $u(x)$ справедлива априорная оценка (теорема 7.2): существует показатель $\alpha_0 > 0$, зависящий от M/a и от n такой, что

$$\| u \|_{\alpha_0}^{D_\rho} \leqslant C_\rho \| u \|_0^D \leqslant C_\rho K,$$

где C_ρ зависит от ρ, от M/a и от n.

Положим $C_{\rho_m} \cdot K = C_m$, так что

$$\| u \|_{\alpha_0}^{D_{\rho_m}} \leqslant C_m. \tag{50}$$

Далее, из того, что все точки границы e-регулярны, следует (см. замечание 8.1, стр. 73), что для всякой точки $x \in \partial D$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(x, \varepsilon) > 0$ такое, что для решения задачи Дирихле

$$u|_{\partial D} = \varphi$$

любого линейного уравнения (49) с константой эллиптичности $e' < e$ имеет место

$$|u(y) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad |y - x| < \delta(x, \varepsilon). \tag{51}$$

Обозначим через Φ подмножество пространства $C_0(\overline{D})$, состоящее из функций $z(x)$, удовлетворяющих условиям:

1) $|z|_{\partial D} = \varphi$,

2) $|z| \leqslant K$,

3) при всяком натуральном m

$$z \in C_{\alpha_0}(D_{\rho_m}) \quad \text{и} \quad \|z\|_{\alpha_0}^{D_{\rho_m}} \leqslant C_m,$$

4) при $x \in \partial D$, $y \in \overline{D}$ и $|y - x| < \delta(x, \varepsilon)$ имеет место $|z(x) - z(y)| \leqslant \varepsilon$.

Покажем, что множество Φ — выпуклый компакт.

Пусть $z_1 \in \Phi$, $z_2 \in \Phi$. Тогда для

$$z = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

условия 1) и 2) выполнены очевидным образом. Далее

$$\|z\|_{\alpha_0}^{D_{\rho_m}} \leqslant \lambda \|z_1\|_{\alpha_0}^{D_{\rho_m}} + (1 - \lambda) \|z_2\|_{\alpha_0}^{D_{\rho_m}} \leqslant C_m,$$

и при

$$x \in \partial D, \quad y \in \overline{D}, \quad |x - y| < \delta$$

имеет место

$$|z(x) - z(y)| \leqslant \lambda |z_1(x) - z_1(y)| + (1 - \lambda) |z_2(x) - z_2(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Значит Φ — выпуклое множество. Для того чтобы показать, что Φ — компакт, достаточно показать, что Φ замкнуто в $C_0(\overline{D})$ и для элементов Φ имеет место равностепенная непрерывность. Начнем с последнего. Из условия 3) следует, что при $z \in \Phi$ для всякой точки

$x \in D$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(x, \varepsilon) > 0$, что имеет место

$$|z(y) - z(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - y| < \delta(x, \varepsilon).$$

По условию 4) то же выполнено для точек x, принадлежащих границе области D.

Но отсюда уже следует равностепенная непрерывность. Действительно, зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем для каждой точки $x \in \overline{D}$ число $\delta(x, \varepsilon/2)$. Тогда для каждой точки x внутри $\delta(x, \varepsilon/2)$-окрестности этой точки — колебание любой функции $z \in \Phi$ не превосходит ε. Из покрытия множества $\overline{D}$ $\frac{\delta(x, \varepsilon/2)}{2}$-окрестностями выберем конечное подпокрытие и из соответствующих этому подпокрытию чисел $\frac{1}{2}\delta(x, \varepsilon/2)$ выберем наименьшее. Обозначим его через $\delta(\varepsilon)$. Мы получили: для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что для всякой $z \in \Phi$ имеет место

$$|z(x) - z(y)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - y| \leqslant \delta(\varepsilon).$$

Покажем теперь, что Φ замкнуто в $C_0(\overline{D})$. Пусть имеется последовательность $\{z_k\}$ функций, принадлежащих $C_0(\overline{D})$, равномерно сходящаяся к некоторой функции z. Надо показать, что $z \in \Phi$. Условия 1) и 2) выполнены для z очевидным образом. Далее, так как

$$\frac{|z_k(x) - z_k(y)|}{|x - y|^{\alpha_0}} \leqslant C_m \quad \text{при} \quad x \neq y; \quad x, y \in D_{\rho_m},$$

то это же выполнено и для $z(x)$. Наконец, из

$$|z_k(x) - z_k(y)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - y| < \delta(x, \varepsilon),$$

$$x \in \partial D, \quad y \in \overline{D},$$

вытекает, что это же будет справедливо и для $z(x)$.

Значит, $z \in \Phi$ и Φ — компакт.

Множество Φ не пусто. Действительно, ему принадлежит решение задачи Дирихле

$$u|_{\partial D} = \varphi$$

для уравнения Лапласа.

2. Рассмотрим для всякого $z \in \Phi$ и оператора (46) уравнение

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x,\, z(x)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \tag{52}$$

и для него задачу Дирихле

$$u|_{\partial D} = \varphi. \tag{53}$$

Так как $a_{ik}(x,\, z(x))$ удовлетворяет условию Гёльдера (с показателем $\alpha \cdot \alpha_0 > 0$), то по теореме 8.1 задача (52), (53) имеет решение. Это решение принадлежит Φ. Действительно, условие 1) выполнено очевидным образом. Условие 2) выполнено по принципу максимума. Условие 3) — по смыслу выбора констант C_m из априорной оценки решений линейного уравнения (49). Условие 4) — по смыслу выбора $\delta(x,\, \varepsilon)$.

Мы получили отображение Φ в Φ. Обозначим через A оператор, осуществляющий его:

$$u = Az.$$

3. Докажем непрерывность отображения A.

Предварительно докажем следующую лемму, являющуюся обобщением принципа максимума.

Лемма 9.1. *Пусть имеется линейный равномерно эллиптический оператор*

$$L = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$$

с константами эллиптичности a и M, определенный в ограниченной области D с границей Γ. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее от ε, от a и от размера области D, что из того, что для дважды дифференцируемой в D и непрерывной в $\overline{D}$ функции v выполнено

$$|Lv| < \delta \quad \text{в} \quad D \quad \text{и} \quad |v|\,|_{\partial D} < \varepsilon,$$

следует

$$|v| < 2\varepsilon \quad \text{в} \quad D.$$

Доказательство. Пусть D содержится в шаре радиуса R с центром в начале координат. Возьмем $\delta = \frac{a\varepsilon}{2R^2}$ и положим

$$w = v + \frac{\varepsilon x_1^2}{2R^2}.$$

Тогда

$$Lw = Lv + \frac{\varepsilon}{R^2} a_{11} > -\delta + \frac{a\varepsilon}{R^2} = \frac{a\varepsilon}{2R^2} > 0.$$

Следовательно, функция w не имеет максимума внутри D, и, значит,

$$\sup_D w \leqslant \max_{\partial D} w.$$

Отсюда

$$\sup_D v \leqslant \max_{\partial D} v + \frac{\varepsilon R^2}{2R^2} < 2\varepsilon.$$

Аналогично $\inf\limits_D v > -2\varepsilon$ и лемма доказана.

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, что из $|z_1 - z_2| < \delta$ $(z_1,\ z_2 \in \Phi)$ следует $|Az_1 - Az_2| < \varepsilon$.

В силу равностепенной непрерывности множества Φ и свойства 1) найдется такое $\rho > 0$, что для любых u_1, u_2, принадлежащих Φ, имеет место

$$|u_1(x) - u_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad x \in \bar{D} \setminus D_\rho.$$

Из того, что $a_{ik}(x, \xi)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α по совокупности переменных, а $z \in \Phi$ удовлетворяет в $D_{\rho/2}$ условию Гёльдера с показателем α_0, следует, что $a_{ik}(x, z(x))$, как функция x, удовлетворяет в $D_{\rho/2}$ условию Гёльдера с показателем $\beta = \alpha \cdot \alpha_0 > 0$. Поэтому, беря в качестве исходной области $D_{\rho/2}$ и применяя внутреннюю оценку Шаудера (45), мы для всякой функции $u = Az$, $z \in \Phi$, получим

$$\|u\|_{2+\beta}^{D_\rho} \leqslant CK. \tag{54}$$

Пусть теперь $u_1 = Az_1$ и $u_2 = Az_2$, z_1, $z_2 \in \Phi$. Положим $u_1 - u_2 = v$.

Тогда

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x,\,z_1)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_k} = \sum_{i,\,k=1}^{n} [a_{ik}(x,\,z_2) - a_{ik}(x,\,z_1)]\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i\,\partial x_k}.$$

Отсюда

$$\left\| \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x,\,z_1)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_k} \right\|_0^{D_\rho} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,\,k=1}^{n} \| [a_{ik}(x,\,z_2) - a_{ik}(x,\,z_1)] \|_0^{D_\rho} \left\| \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i\,\partial x_k} \right\|_0^{D_\rho} \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot K \cdot \sum_{i,\,k=1}^{n} \| a_{ik}(x,\,z_2) - a_{ik}(x,\,z_1) \|_0^{D_\rho}. \tag{55}$$

Далее имеем

$$|\,v\,|\big|_{\partial D_\rho} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Подберем по лемме 9.1 такое $\delta_1 > 0$, что $|v| < \varepsilon$ в D_ρ при

$$\left\| \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x,\,z_1)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_k} \right\|_0^{D_\rho} < \delta_1.$$

Остается подобрать такое $\delta > 0$, чтобы при

$$\| z_1 - z_2 \|_0^{D_\rho} \leqslant \| z_1 - z_2 \|_0^{D} < \delta$$

выполнялось

$$C \cdot K \cdot \sum_{i,\,k=1}^{n} \| a_{ik}(x,\,z_2) - a_{ik}(x,\,z_1) \|_0^{D_\rho} < \delta_1.$$

Тогда при $\| z_1 - z_2 \|_0^D < \delta$ мы имеем $\| u_1 - u_2 \|_0^D < \varepsilon$ и, значит, A — непрерывное преобразование.

4. Применяя к преобразованию A выпуклого компакта Φ в себя теорему Шаудера о неподвижной точке, получаем, что решение $u(x)$ нашей задачи существует. При этом $u \in C_{2+\beta}(D_\rho)$ для всякого $\rho > 0$, где $\beta = \alpha \cdot \alpha_0$.

Покажем, что на самом деле

$$u \in C_{2+\alpha}(D_\rho).$$

Действительно, поскольку $u(x)$ непрерывно дифференцируема (и даже дважды), то коэффициенты $a_{i,k}(x, u(x))$, как функции x, удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α во всяком D_ρ.

По теореме 8.1 существования решения для линейного уравнения получаем, что при всяком $\rho > 0$ справедливо $u \in C_{2+\alpha}(D_\rho)$.

Итак, мы доказали теорему существования решения для квазилинейного уравнения кордесовского типа.

Скажем, что квазилинейное уравнение

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0 \tag{56}$$

приводится к кордесовскому типу при $|u| \leqslant K$ в области D, если область D можно покрыть конечным числом областей $D_1, \ldots, D_N$, в каждой из которых после некоторого линейного преобразования C_i $(i = 1, \ldots, N)$ уравнение принимает кордесовский тип при $|u| \leqslant K$.

Тогда, заменяя в доказательстве предыдущей теоремы априорную оценку, даваемую теоремой 7.2, на оценку теоремы 7.3, получаем следующее утверждение.

Теорема 9.2. *Пусть уравнение* (56) *определено в области D и приводится в ней к кордесовскому типу при $|u| \leqslant K$, а его коэффициенты являются гёльдеровыми. Пусть все точки границы области D являются e-регулярными, где $e = M/a$, а M и a — константы эллиптичности исходного уравнения.*

Тогда для всякой непрерывной на ∂D функции φ, для которой $|\varphi| \leqslant K$, задача Дирихле

$$u|_{\partial D} = \varphi$$

для уравнения (56) *имеет решение $u(x)$ и $u \in C_{2+\alpha}^{(D_\rho)}$, где $\rho > 0$ произвольно.*

Замечание. Анализируя доказательство теоремы 9.1, мы могли заметить, что нам нужна равномерная оценка решения уравнения $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, z)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0$ в D_{ρ_m} по норме $\| \ \|_{\alpha_0}^{D_{\rho_m}}$, но можно допустить при этом, чтобы α_0 зависело от номера m. Кроме того, нужна равномерная эллиптичность вблизи границы. Поэтому можно было бы доказать теорему существования решения квазилинейного уравнения для уравнения вида (56) при условии, что оно равномерно эллиптично в D и приводится к кордесовскому типу во всяком D_ρ, $\rho > 0$.

Примечание.

Целью этого параграфа было продемонстрировать, как с помощью метода неподвижной точки можно доказать существование решения задачи Дирихле квазилинейного уравнения, располагая априорной оценкой и теоремой о существовании решения такой задачи для линейного уравнения.

Желающим подробнее познакомиться с квазилинейными уравнениями рекомендую монографию *Ладыженской* и *Уральцевой* [1].

§ 10. Неравенство Харнака и теорема Лиувилля для уравнений типа Кордеса

Вспомним неравенство Харнака для гармонической функции на плоскости, известное нам из общего курса.

Пусть $u(x, y)$ — неотрицательная гармоническая в круге $x^2 + y^2 < R^2$ функция. Пусть точка (x, y) лежит внутри круга, и $x^2 + y^2 = r^2$. Тогда

$$\frac{R-r}{R+r}u(0, 0) \leqslant u(x, y) \leqslant \frac{R+r}{R-r}u(0, 0).$$

Отсюда следует, в частности, что если $r \leqslant R/2$ (рис. 12), то

$$\frac{1}{3}u(0, 0) \leqslant u(x, y) \leqslant 3u(0, 0)$$

и, значит, из того, что u гармонична и положительна в Q_R^0, следует, что для лежащего внутри круга половинного радиуса $Q_{R/2}^0$ справедливо

$$\sup_{Q_{R/2}^0} u / \inf_{Q_{R/2}^0} u \leqslant 9. \tag{57}$$

Число 9, стоящее справа в неравенстве (57), естественно, изменится, если изменить отношение радиусов внутреннего и внешнего кругов. В случае большего числа переменных получаем аналогичное неравенство со своей константой, зависящей от размерности пространства. Например, при $n = 3$ имеем

$$\frac{R(R-r)}{(R+r)^2}\,u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{R(R+r)}{(R-r)^2}\,u(0),$$

а потому

$$\sup_{Q^0_{R/2}} u / \inf_{Q^0_{R/2}} u \leqslant 27.$$

Для гармонической функции в n-мерном случае можно написать: из того, что гармоническая функция $u(x)$ неотрицательна в Q^0_R, следует, что при $r < R$

$$\sup_{Q^0_r} u / \inf_{Q^0_r} u < C, \tag{58}$$

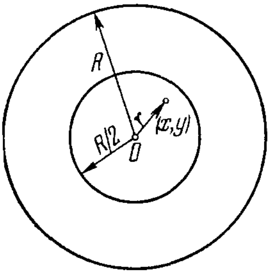

Рис. 12.

где C — константа, зависящая от отношения r/R и от размерности пространства.

Неравенство (58) будем обобщать на случай решений эллиптических уравнений типа Кордеса.

Рассмотрим эллиптическое уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} = 0 \tag{6'}$$

типа Кордеса.

Пусть $e < n + 2$ — его константа эллиптичности. Для такого уравнения было доказано (стр. 61—62) следующее неравенство.

Пусть u — решение уравнения (6'), определенное в шаре Q^0_R. Тогда

$$\operatorname*{osc}_{Q^0_R} u > (1 + \gamma) \operatorname*{osc}_{Q^0_{R/4}} u, \tag{59}$$

где γ — константа, зависящая от e и от n.

Это утверждение оказывается близким к неравенству Харнака. Графически неравенство (59) можно изобразить так (рис. 13):

Пусть

$$a = \sup_{Q_R^0} u - \sup_{Q_{R/4}^0} u,$$

$$b = \sup_{Q_{R/4}^0} u - \inf_{Q_{R/4}^0} u,$$

$$c = \inf_{Q_{R/4}^0} u - \inf_{Q_R^0} u.$$

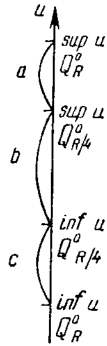

Рис. 13.

Неравенство (59) означает, что

$$a + c > \gamma \cdot b.$$

Оно ничего не говорит о том, как сумма $a+c$ распределяется между a и c, и только этим отличается от неравенства Харнака (58).

Утверждение, что a и c оба превосходят некоторую долю b:

$$a > \gamma_1 \cdot b, \quad c > \gamma_1 \cdot b, \tag{60}$$

где γ_1 — константа, зависящая от уравнения, эквивалентно неравенству Харнака (58) (для данного отношения радиусов $R/r = 4$). Докажем это.

Пусть выполнено (60). Докажем (58). Мы имеем $u \geqslant 0$ в Q_R^0 и, значит, $\inf\limits_{Q_R^0} u \geqslant 0$. Следовательно, $\inf\limits_{Q_{R/4}^0} u \geqslant c$, а потому в силу (60)

$$\inf_{Q_{R/4}^0} u \geqslant \gamma_1 \cdot b. \tag{61}$$

С другой стороны,

$$\sup_{Q_{R/4}^0} u / \inf_{Q_{R/4}^0} u = \frac{b + \inf\limits_{Q_{R/4}^0} u}{\inf\limits_{Q_{R/4}^0} u} = \frac{b}{\inf\limits_{Q_{R/4}^0} u} + 1.$$

Вместе с неравенством (61) это дает

$$\sup_{Q_{R/4}^0} u / \inf_{Q_{R/4}^0} u \leqslant \frac{1}{\gamma_1} + 1.$$

Пусть теперь справедливо неравенство Харнака (58). Докажем неравенство (60).

Положим

$$v = u - \inf_{Q_R^0} u.$$

Функция v также удовлетворяет уравнению (6′) и $v \geqslant 0$ в Q_R^0, а потому для нее

$$\sup_{Q_{R/4}^0} v / \inf_{Q_{R/4}^0} v \leqslant C = 1 + \delta, \quad \delta > 0.$$

То есть

$$\frac{\sup\limits_{Q_{R/4}^0} u - \inf\limits_{Q_R^0} u}{\inf\limits_{Q_{R/4}^0} u - \inf\limits_{Q_R^0} u} = \frac{b+c}{c} \leqslant 1 + \delta$$

или

$$c \geqslant \frac{1}{\delta} b.$$

Аналогично положим

$$w = \sup_{Q_R^0} u - u,$$

так что $w \geqslant 0$ в Q_R^0, и потому

$$\sup_{Q_{R/4}^0} w / \inf_{Q_{R/4}^0} w \leqslant C \leqslant 1 + \delta,$$

или

$$\frac{\sup\limits_{Q_R^0} u - \inf\limits_{Q_{R/4}^0} u}{\sup\limits_{Q_R^0} u - \sup\limits_{Q_{R/4}^0} u} = \frac{a+b}{a} \leqslant 1 + \delta,$$

и снова

$$a \geqslant \frac{1}{\delta} b.$$

Вспомним теперь, как мы доказывали неравенство (59). Мы рассудили, что достаточно рассмотреть случай, когда $R = 4$ и $\sup\limits_{Q_1^0} u = +1$, $\inf\limits_{Q_1^0} u = -1$. Далее мы рассмотрели множества H^+ и H^- точек $x \in Q_1^0$, где соответственно $u \geqslant 0$ и $u \leqslant 0$, и заметили, что по крайней мере одно из них должно иметь меру, не меньшую половины меры Q_1^0. Предположивши, что это H^-: $\operatorname{mes} H^- \geqslant \frac{1}{2}\Omega_n$, мы взяли ту компоненту множества точек $\{x \in Q_4^0, u(x) > 0\}$, которая содержит точку сферы $|x| = 1$, где $u = 1$, и, применяя к ней лемму о возрастании, нашли, что

$$\sup_{Q_4^0} u \geqslant \left(1 + \frac{1}{4}\eta\Omega_n\right)\sup_{Q_1^0} u$$

(см. стр. 61), или в наших теперешних обозначениях

$$a \geqslant \gamma b,$$

где $\gamma = \frac{1}{4}\eta\Omega_n$ (η — константа леммы 4.2, Ω_n — объем единичного n-мерного шара). Если бы оказалось, что мера H^+ больше половины меры Q_1^0, то мы получили бы

$$c \geqslant \gamma b.$$

Разумеется, нам не нужно, чтобы H^- (или H^+) имело меру, не меньшую $\frac{1}{2}\Omega_n$, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\operatorname{mes} H^- > \lambda\Omega_n \tag{62}$$

или

$$\operatorname{mes} H^+ > \lambda\Omega_n, \tag{63}$$

где $\lambda > 0$ — константа, зависящая от e и n.

Если выполнены одновременно оба неравенства (62) и (63), то

$$a \geqslant \gamma' b, \quad c \geqslant \gamma' b,$$

где $\gamma' > 0$ зависит от e и от n. Значит, если бы мы могли доказать, что оба неравенства (62) и (63) выполняются одновременно, мы получили бы доказательство неравенства Харнака. Это действительно так: при некотором λ, зависящем от e и n, оба эти неравенства выполнены одновременно. Но известное мне доказательство этого факта не проще, чем доказательство самой теоремы

Харнака, приводимое ниже и использующее обходный путь.

Перейдем к формулировке и доказательству неравенства Харнака. Нам будет удобнее первоначально взять несколько иное отношение радиусов R и r.

Теорема 10.1 (неравенство Харнака). *Пусть в шаре $Q_R^{x^0}$ определено неотрицательное решение уравнения* (6′) *кордесовского типа. Тогда*

$$\sup_{Q_{R/16}^{x^0}} u / \inf_{Q_{R/16}^{x^0}} u < C,$$

где C — константа, зависящая от e и от n.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма, обобщающая лемму о возрастании (стр. 28, лемма 4.2).

Лемма 10.1. *Пусть R — положительное число и $x^0 \in R_n$. Пусть D — область, лежащая внутри шара $Q_{2R}^{x^0}$, пересекающая $Q_R^{x^0}$ и имеющая предельные точки на границе шара $Q_{2R}^{x^0}$. Обозначим через Γ ту часть границы области D, которая расположена строго внутри $Q_{2R}^{x^0}$. Пусть в D определено уравнение* (6′) *кордесовского типа с константой эллиптичности e и $u(x)$ — его решение, положительное в D и обращающееся в нуль на Γ.*

Пусть $M > 1$ — произвольное число. Существует константа $\delta > 0$, зависящая от e, n и M, такая, что из того, что

$$\operatorname{mes} D < \delta \operatorname{mes} Q_R^{x^0},$$

вытекает

$$\sup_D u > M \sup_{D \cap Q_R^{x^0}} u. \tag{64}$$

Доказательство. Пусть η — константа леммы 4.2 (стр. 28), соответствующая данному e (т. е. соответствующая $s = e - 2$). Обозначим через k наименьшее натуральное число, для которого

$$\left(1 + \eta \frac{\Omega_n}{2}\right)^k > M.$$

Ω_n, как и раньше, объем единичного n-мерного шара. Положим

$$\delta = \frac{1}{2(4k)^n}.$$

Обозначим

$$M_i = \max_{x \in D \cap S^{x^0}_{\left(1+\frac{i}{k}\right)R}} u(x), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Пусть $x^{(i)}$ — та точка сферы $S^{x^0}_{\left(1+\frac{i}{k}\right)R}$, где $u(x^{(i)}) = M_i$. Пусть D_i — та компонента пересечения $D \cap Q^{x^{(i)}}_{R/k}$, которая содержит точку $x^{(i)}$.

Тогда

$$\operatorname{mes} D_i < \operatorname{mes} D < \delta \operatorname{mes} Q^{x^0}_R < \frac{1}{2} \operatorname{mes} Q^{x^{(i)}}_{R/4k},$$

и, значит,

$$\operatorname{mes}\left(Q^{x^{(i)}}_{R/4k} \setminus D_i\right) > \frac{1}{2} \operatorname{mes} Q^{x^{(i)}}_{R/4k}.$$

Применяя к $Q^{x^{(i)}}_{R/4k}$, $Q^{x^{(i)}}_{R/k}$ и D_i лемму 4.2 и затем принцип максимума, получим

$$M_{i+1} \geqslant \left(1 + \eta \frac{\Omega_n}{2}\right) M_i.$$

Поэтому

$$M_k \geqslant \left(1 + \eta \frac{\Omega_n}{2}\right)^k M_0 \geqslant M \cdot M_0$$

и, значит,

$$\sup_{x \in D} u(x) \geqslant M \sup_{x \in D \cap Q^{x^0}_R} u(x) \quad \text{(ч. т. д.)}.$$

Мы будем использовать эту лемму для случая, когда

$$M = 2^{n+1}.$$

В этом случае константа δ будет зависеть, очевидно, только от e и n, и из неравенства (64) следует

$$\sup_D u > 2^{n+1} \sup_{D \cap Q^{x^0}_R} u. \tag{65}$$

Приступим теперь к доказательству теоремы 10.1.

Достаточно рассмотреть случай, когда $x^0 = 0$ и $R = 1$. Положим

$$\inf_{Q_{16}^0} u = m_{16}, \quad \inf_{Q_4^0} u = m_4, \quad \inf_{Q_1^0} u = m_1, \quad \sup_{Q_1^0} u = M_1.$$

Положим далее (рис. 14)

$$M_1 - m_1 = b, \quad m_1 - m_{16} = c, \quad m_4 - m_{16} = c_1.$$

Умножая, если надо, $u(x)$ на константу, можно добиться того, чтобы $b = 2$. Будем считать, что $b = 2$.

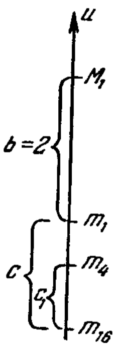

Рис. 14.

Надо доказать, что c больше некоторой положительной константы γ, зависящей от e и n.

Обозначим через H^+ множество точек $x \in Q_4^0$, для которых

$$u(x) \geqslant m_1 + 1.$$

Если

$$\operatorname{mes} H^+ \geqslant \frac{\delta\Omega_n}{4^n}, \tag{66}$$

то из рассмотрения шаров Q_{16}^0 и Q_4^0 на основании леммы 4.2 получим, что

$$c_1 > \frac{\delta\Omega_n}{4^{2n}} \eta = \gamma_1,$$

где γ_1, таким образом, зависит от e и n, и нам остается заметить, что $c > c_1$.

На это рассуждение мы, собственно говоря, уже ссылались в предварительных рассмотрениях. Более подробно оно заключается в том, что мы рассматриваем функцию $v = m_1 + 1 - u$, рассматриваем множество точек $x \in Q_{16}^0$, где $v > 0$, и, используя то, что мера его дополнения в Q_4^0 оценивается по неравенству (66), применяем лемму 4.2.

Предположим теперь, что

$$\operatorname{mes} H^+ < \frac{\delta\Omega_n}{4^n}, \tag{67}$$

и приступим к тому обходному пути, о котором мы говорили выше. Положим

$$u_1 = u - (m_1 + 1). \tag{68}$$

Пусть D_1 — множество точек $x \in Q_4^0$, где $u_1 > 0$ ($D_1 = H^+$). Имеем

$$\operatorname{mes} D_1 = \operatorname{mes} H^+ < \frac{\delta\Omega_n}{4^n}. \tag{69}$$

Обозначим через ρ_1 наибольшее из чисел ρ, $0 < \rho < 1$, таких, что

$$\operatorname{mes}(D_1 \cap \Omega_{1,\,1+\rho}^0) \geqslant \delta\Omega_n \left(\frac{\rho}{4}\right)^n.$$

(Напомним, что $\Omega_{r_1,\,r_2}^{x_0} = \{x \mid r_1 < x \leqslant r_2\}$.) Так как при ρ, достаточно близких к нулю, это неравенство выполнено, а при $\rho = 1$ в силу (69) выполнено обратное неравенство, и $\operatorname{mes}(D_1 \cap \Omega_{1,\,1+\rho}^0)$ непрерывно зависит от ρ, то такое ρ_1 существует.

Положим

$$G_1 = D_1 \cap \Omega_{1,\,1+\rho_1}^0.$$

Тогда

$$\operatorname{mes} G_1 = \delta\Omega_n \left(\frac{\rho_1}{4}\right)^n. \tag{70}$$

Функция $u_1(x)$ положительна на G_1 (так что $u > 1 + m_1$ на G_1) и неположительна в $\Omega_{1,\,1+\rho_1}^0$ вне G_1. По принципу максимума пересечение G_1 со сферой $|x| = 1 + \frac{\rho_1}{2}$ содержит точку x^1, где $u_1 > 1$.

Рассмотрим шары $Q_{\rho_1/2}^{x^1}$ и $Q_{\rho_1/4}^{x^1}$. Обозначим через D^1 ту компоненту пересечения $G_1 \cap Q_{\rho_1/2}^{x^1}$, которая содержит точку x^1.

Так как

$$\operatorname{mes} D^1 < \delta \operatorname{mes} Q_{\rho_1/4}^{x^1},$$

то, применяя к области D^1 и шарам $Q_{\rho_1/4}^{x^1}$, $Q_{\rho_1/2}^{x^1}$ лемму 10.1, находим

$$\sup_{D^1} u_1 > 2^{n+1} u_1(x^1) > 2^{n+1},$$

так что

$$\sup_{D^1} u > 2 \cdot 2^n + m_1 + 1.$$

Положим
$$u_2 = u - 2^n - m_1, \tag{71}$$
тогда
$$\sup_{D^1} u_2 > 2^n. \tag{72}$$

Положим $D_2 = \{x \mid x \in Q_4^0,\ u_2(x) > 0\}$.

Обозначим через ρ_2 наибольшее из чисел ρ, $0 < \rho < 1$, таких, что
$$\operatorname{mes}(D_2 \cap \Omega_{1+\rho_1,\ 1+\rho_1+\rho}) \geqslant \delta\Omega_n \left(\frac{\rho}{4}\right)^n.$$

По предыдущему такое ρ_2 найдется. Обозначим
$$G_2 = D_2 \cap \Omega^0_{1+\rho_1,\ 1+\rho_1+\rho_2},$$
так что
$$\operatorname{mes} G_2 = \delta\Omega_n \left(\frac{\rho_2}{4}\right)^n. \tag{73}$$

Функция u_2 положительна на G_2 (и, следовательно, $u > 2^n + m_1$ на G_2) и неположительна в $\Omega_{1+\rho_1,\ 1+\rho_1+\rho_2}$ вне G_2.

По принципу максимума, в силу (72), на сфере $|x| = 1 + \rho_1 + \frac{\rho_2}{2}$ найдется точка x^2, где $u_2(x^2) > 2^n$.

Рассматривая шары $Q^{x^2}_{\rho_2/2}$ и $Q^{x^2}_{\rho_2/4}$, обозначая через D^2 ту компоненту пересечения $Q^{x^2}_{\rho_2/2} \cap G_2$, которая содержит точку x^2, и применяя к $Q^{x^2}_{\rho_2/2}$, $Q^{x^2}_{\rho_2/4}$ и D^2 лемму 10.1, найдем, что
$$\sup_{D^2} u_2 > 2^{n+1} u_2(x^2) > 2^{2n+1},$$
так что
$$\sup_{D^2} u > 2 \cdot 2^{2n} + m_1.$$
Положим
$$u_3 = u - 2^{2n} - m_1,$$
тогда
$$\sup_{D^2} u_3 > 2^{2n}.$$
Положим
$$D_3 = \{x \mid x \in Q_4^0,\ u_3(x) > 0\}.$$

Обозначим через ρ_3 наибольшее из чисел ρ, $0 < \rho < 1$, таких, что

$$\operatorname{mes}\left(D_3 \cap \Omega^0_{1+\rho_1+\rho_2,\ 1+\rho_1+\rho_2+\rho}\right) \geqslant \delta\Omega_n \left(\frac{\rho}{4}\right)^n,$$

и т. д.

Этот процесс мы можем продолжать, пока выполняется неравенство $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k \leqslant 3$. Пусть k — такой наименьший номер, что

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k > 1. \tag{74}$$

Такое k найдется, так как иначе мы могли бы продолжать наш процесс неограниченно долго, что невозможно, ибо на каждом шагу максимум функции u возрастает более чем в 2^n раз, а функция u ограничена.

Мы имеем

$$\rho_1 + \ldots + \rho_{k-1} \leqslant 1$$

и, следовательно,

$$1 < \rho_1 + \ldots + \rho_k < 2.$$

Для каждого $i = 1, \ldots, k$ определено множество G_i такое, что

$$\operatorname{mes} G_i = \delta\Omega_n \left(\frac{\rho_i}{4}\right)^n, \tag{75}$$

и выполнено неравенство

$$u(x) > 2^{n(i-1)} + m_1 \quad \text{при} \quad x \in G_i. \tag{76}$$

Из неравенства (74) следует, что найдется среди чисел $1, \ldots, k$ такое i_0, что

$$\rho_{i_0} > 2^{-i_0}.$$

Согласно (75) и (76) имеем тогда

$$\operatorname{mes} G_{i_0} > \delta\Omega_n \cdot 2^{-n(i_0+2)},$$

$$u(x) > 2^{n(i_0-1)} + m_1 \quad \text{при} \quad x \in G_{i_0}$$

или

$$\inf_{x \in G_{i_0}} u(x) > \alpha \frac{1}{\operatorname{mes} G_{i_0}} + m_1, \tag{77}$$

где $\alpha = \dfrac{\delta\Omega_n}{2^{3n}}$ зависит, таким образом, от e и n.

Положим

$$\int_{Q_4^0} \frac{dx}{|x|^{e-2}} = K$$

и рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x) = \frac{\alpha}{K \operatorname{mes} G_{i_0}} \int_{G_{i_0}} \frac{dy}{|x-y|^{e-2}} - \frac{\alpha}{K \cdot 12^{e-2}} + m_{16}.$$

Имеем

$$v(x)|_{S_{16}^0} \leqslant \frac{\alpha}{K \operatorname{mes} G_{i_0}} \frac{1}{12^{e-2}} \int_{G_{i_0}} dy - \frac{\alpha}{K \cdot 12^{e-2}} + m_{16} \leqslant m_{16},$$

$$v(x)|_{G_{i_0}} < \frac{\alpha}{K \operatorname{mes} G_{i_0}} \int_{Q_4^0} \frac{dy}{|x-y|^{e-2}} + m_{16}.$$

Мы уже раз показывали (стр. 21), что

$$\int_{Q_4^0} \frac{dy}{|x-y|^{e-2}} \leqslant \int_{Q_4^0} \frac{dx}{|x|^{e-2}},$$

а так как, кроме того, $m_1 \geqslant m_{16}$, то, согласно (77),

$$v(x)|_{G_{i_0}} < \frac{\alpha}{\operatorname{mes} G_{i_0}} + m_1 < u(x)|_{G_{i_0}}.$$

Поэтому на множестве $Q_{16}^0 \setminus \overline{G}_{i_0}$ по принципу максимума выполняется неравенство

$$u(x) > v(x).$$

В частности,

$$\inf_{Q_1} u(x) = m_1 > \inf_{Q_1} v(x) >$$

$$> \frac{\alpha}{K \operatorname{mes} G_{i_0}} \frac{1}{5^{e-2}} \int_{G_{i_0}} dy - \frac{\alpha}{K \cdot 12^{e-2}} + m_{16} =$$

$$= \frac{\alpha}{K}\left(\frac{1}{5^{e-2}} - \frac{1}{12^{e-2}}\right) + m_{16},$$

откуда

$$m_1 - m_{16} = c > \gamma > 0,$$

где $\gamma = \frac{a}{K}\left(\frac{1}{5^{e-2}} - \frac{1}{12^{e-2}}\right)$ — константа, зависящая, таким образом, от e и от n.

Теорема полностью доказана.

Мы взяли в этой теореме отношение радиусов внешнего и внутреннего шара равным 16 только для удобства доказательства. Можно брать любое отношение — это отразится на константе C.

Далее, не нужно требовать, чтобы уравнение (6′) имело кордесовский тип во всем внешнем шаре. Достаточно, чтобы оно имело кордесовский тип в некотором слое, примыкающем к внешней сфере. Отношение толщины этого слоя к радиусу также войдет в константу C.

Объединим оба этих факта в одной теореме.

Теорема 10.2. *Пусть в шаре $Q_R^{x^0}$, $R > 0$ определено уравнение* (6′). *Пусть $0 < r < R$ и уравнение* (6′) *является эллиптическим* (*не обязательно равномерно*) *в шаре $Q_R^{x^0}$ и имеет кордесовский тип в шаровом слое $Q_R^{x^0} \setminus Q_r^{x^0}$. Пусть $e < n + 2$ — его константа эллиптичности в этом слое. Пусть $u(x)$ — положительное решение этого уравнения в $Q_R^{x^0}$. Тогда*

$$\sup_{Q_r^{x^0}} u / \inf_{Q_r^{x^0}} u < C_1,$$

где C_1 — константа, зависящая от e, n и от отношения R/r.

Доказательство. Рассмотрим сферу $S_{(R+r)/2}^{x^0}$. Пусть k — такое наименьшее натуральное число, что любые две точки a и b на этой сфере можно соединить цепочкой из не более чем k точек $a = x^1, x^2, \ldots, x^k = b$, также лежащих на этой сфере и таких, что $|x^i - x^{i+1}| < (R - r)/32$. Число k зависит, очевидно, только от отношения R/r.

Пусть

$$m = \min_{x \in S_{(R+r)/2}^{x^0}} u(x) \quad \text{и} \quad M = \max_{x \in S_{(R+r)/2}^{x^0}} u(x).$$

Пусть a и b — точки на $S_{(R+r)/2}^{x^0}$, в которых соответственно достигаются эти минимум и максимум.

Соединим точки a и b цепочкой, о которой говорилось выше: $a = x^1, x^2, \ldots, x^k = b$; $x^i \in S^{x^0}_{(R+r)/2}$; $|x^i - x^{i+1}| < (R-r)/32$.

Рассматривая для всякого i, $i = 1, \ldots, k-1$, шары $Q^{x^i}_{(R-r)/2}$ и $Q^{x^i}_{(R-r)/32}$ и применяя к ним предыдущую теорему, получим

$$\sup_{Q^{x^i}_{(R-r)/32}} u / \inf_{Q^{x^i}_{(R-r)/32}} u < C,$$

где C зависит от e и n. И так как $x^{i+1} \in Q^{x^i}_{(R-r)/32}$, то

$$u(x^{i+1}) < Cu(x^i),$$

откуда

$$u(b) < C^{k-1} u(a).$$

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что по принципу максимума

$$\sup_{Q^{x^0}_r} u / \inf_{Q^{x^0}_r} u \leqslant u(b)/u(a).$$

Замечание 1. Эллиптичность уравнения внутри шара $Q^{x^0}_r$ была нужна только для принципа максимума.

Замечание 2. Как не трудно сообразить, требование кордесовости оператора в слое $Q^{x^0}_R \setminus Q^{x^0}_r$ можно заменить требованием приводимости уравнения к кордесовскому типу.

Простым следствием неравенства Харнака является теорема Лиувилля.

Теорема 10.3 (Лиувилля). *Пусть в R_n определено эллиптическое уравнение* (6′). *Пусть вне сферы достаточно большого радиуса $R_0 > 0$ это уравнение имеет кордесовский тип. Пусть $u(x)$ — решение этого уравнения во всем пространстве. Тогда, если это решение ограничено сверху или снизу, то оно есть константа.*

Доказательство. Допустим для определенности, что

$$\inf_{x \in R_n} u(x) = m > -\infty.$$

Положим

$$v(x) = u(x) - m.$$

Пусть $e < n + 2$ — константа эллиптичности уравнения при $|x| > R_0$. Пусть C_1 — константа теоремы 10.2 при $R/r = 2$ и данном e.

Допустим, что имеется точка x^1, где $v(x^1) > 0$. Так как $\inf\limits_{x \in R_n} v(x) = 0$, то найдется такая точка x^2, что

$$v(x^1)/v(x^2) > C_1. \tag{78}$$

Возьмем теперь такое большое число r, чтобы оно было больше R_0 и чтобы внутри шара Q_r^0 лежали обе точки x^1 и x^2. Тогда, применяя к шару Q_{2r}^0 и функции $v(x)$ в нем теорему 10.2, найдем

$$v(x^1)/v(x^2) < C_1$$

и тем самым придем к противоречию с (78).

Следствие. Пусть уравнение (6′) определено и эллиптично во всем пространстве R_n. Пусть его коэффициенты стремятся к пределам при $|x| \to \infty$ и предельный оператор эллиптический:

$$a_{ik}(x) \underset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} a_{ik}^0, \quad \sum a_{ik}^0 \xi_i \xi_k > 0 \quad \text{при} \quad |\xi| > 0.$$

Тогда для решения $u(x)$ этого уравнения, определенного во всем пространстве, справедлива теорема Лиувилля: ограниченное по крайней мере с одной стороны решение — константа. Действительно, сделаем линейное преобразование координат, переводящее оператор

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}^0 \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_k}$$

в оператор Лапласа. Тогда оператор $\sum\limits_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x) \dfrac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_k}$ вне некоторого шара будет иметь кордесовский тип, и мы можем применить доказанную теорему.

Можно усилить теорему Лиувилля: требование $u(x) > C$ или $u(x) < C$ можно заменить требованием

$u(x) > -\Phi(|x|)$ или $u(x) < \Phi(|x|)$, где функция $\Phi(r)$ стремится к ∞ на бесконечности, но достаточно медленно. Вспомним, что выполнение неравенства Харнака для шаров Q_r^0 и Q_{2r}^0 означает, что при переходе от Q_r^0 к Q_{2r}^0 имеет место (см. стр. 85)

$$a > \gamma_1 b, \qquad c > \gamma_1 b, \tag{79}$$

где γ_1 — константа, зависящая от e и от n.

Пусть $2^{m_0} > R_0$, где R_0 тот радиус в условии теоремы 10.2, что вне шара $Q_{R_0}^0$ уравнение имеет кордесовский тип с константой эллиптичности e.

Тогда в силу (79) при $m > m_0$

$$\sup_{Q_{2^m}^0} u > \inf_{Q_{2^{m_0}}^0} u + \operatorname{osc}_{Q_{2^{m_0}}^0} u \cdot (1+\gamma_1)^{m-m_0},$$

$$\inf_{Q_{2^m}^0} u < \sup_{Q_{2^{m_0}}^0} u - \operatorname{osc}_{Q_{2^{m_0}}^0} u \cdot (1+\gamma_1)^{m-m_0},$$

т. е. при росте радиуса по геометрической прогрессии со знаменателем 2 верхняя грань растет по геометрической прогрессии со знаменателем $(1+\gamma_1)$, а нижняя — уходит в минус беконечность с той же скоростью (если только $\operatorname{osc}_{Q_{2^{m_0}}^0} u \neq 0$).

Поэтому в качестве функции $\Phi(r)$ можно взять

$$\Phi(r) = r^{\frac{\ln(1+\gamma)}{\ln 2} - \varepsilon}$$

при любом положительном ε.

Итак, из того, что решение растет (или убывает) медленнее некоторой степени радиуса (зависящей от уравнения), следует, что оно константа.

Любопытно было бы выяснить, верна ли гипотеза, что эта степень просто равна единице? То есть не верно ли, что если функция растет (или убывает) медленнее чем линейно, то она константа? (При $n = 2$ это действительно так и вытекает из теоремы Адельсона — Вельского, о которой мы говорили на стр. 12.)

Другой вопрос: если решение растет линейно

$$0<\overline{\lim}\frac{u(x)}{|x|}<\infty \quad \text{или} \quad -\infty<\underline{\lim}\frac{u(x)}{|x|}<0,$$

верно ли что оно в этом случае является линейной функцией?

Еще один вопрос: верно ли, что решение растет вверх и вниз примерно с одинаковой скоростью — при больших R

$$\sup_{Q_R^0} u/|\inf_{Q_{2R}^0} u|<C_2; \quad \sup_{Q_{2R}^0} u/|\inf_{Q_R^0} u|>C_1?$$

И самый существенный вопрос: верна ли теорема Лиувилля для равномерно эллиптического уравнения (6′) без всякого условия на константу эллиптичности e? На эти вопросы ответ неизвестен.

А вот верное утверждение, которое предлагается в виде задачи.

Задача. Пусть оператор $\sum\limits_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}$ определен во всем пространстве и эллиптичен. Пусть ω — точка на единичной сфере S_1^0, и $a_{ik}(r\omega)\to a_{ik}^0(\omega)$ при $r\to\infty$ равномерно по ω.

Пусть $a_{ik}^0(\omega)$ — непрерывные функции ω и при всяком $\omega\in S_1^0$ форма $\sum a_{ik}^0(\omega)\xi_i\xi_k$ положительно определена.

Тогда для уравнения

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}=0$$

имеет место теорема Лиувилля.

Примечания.

Для самосопряженного уравнения с произвольными измеримыми ограниченными коэффициентами теорему Харнака доказал *Мозер* [1].

Если говорить об уравнении в недивергентной форме, то наиболее общая форма неравенства Харнака была получена в работе *Серрина* [1]. В этой работе доказывалось, что для неравенства Харнака достаточно, чтобы коэффициенты уравнения на границе большего шара равномерно удовлетворяли условию Дини. Правда, в этой же работе формулировались условия, в которые не входила оценка модуля непрерывности на границе, но требовались некоторые априорные оценки производных решений. На первый взгляд казалось, что вместе с результатами работы *Кордеса* [1] это сразу приведет к неравенству Харнака в кордесовском случае. Однако отсутствие в формулировке неравенства Харнака оценки размеров самого решения все равно заставило бы проделать построения, в какой-то мере близкие к тем, которые делаются в § 10.

Я хочу обратить внимание еще на одно обстоятельство. В цитированной работе Серрина казалось непонятным, почему условия на уравнение достаточно задавать только на границе шара. Теорема 10.2 (стр. 95) проливает свет на этот вопрос: равномерное условие Дини, как и просто равномерная непрерывность коэффициентов на границе, обеспечивает приводимость уравнения к кордесовскому типу в некотором приграничном слое.

Мне хотелось бы также подчеркнуть, что тот способ, при помощи которого из теоремы 10.1 получается теорема 10.2, есть общий способ, безразличный к тому, по каким причинам в теореме 10.1 было верно соответствующее неравенство.

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В ДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ

§ 1. Уравнение в дивергентной форме. Слабое решение задачи Дирихле. Существование и единственность слабого решения задачи Дирихле

Рассмотрим оператор

$$L = \sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right]. \tag{1}$$

Такой дифференциальный оператор называется дифференциальным оператором в *дивергентной* форме. Если $\|a_{ik}\| = A$ и ∇f — градиент функции f, то

$$Lf = \operatorname{div}(A\nabla f). \tag{2}$$

Как и раньше, будем предполагать, что

$$a_{ik} = a_{ki}. \tag{3}$$

Как и раньше, будем называть константой эллиптичности операторы, т. е. такие, для которых

$$C_1|\xi|^2 \leqslant \sum a_{ik}\xi_i\xi_k \leqslant C_2|\xi|^2. \tag{4}$$

Как и раньше, будем называть константой эллиптичности оператора L в некоторой области D величину

$$e = \sup_{|\xi|=1,\ x\in D} \frac{\sum a_{ii}(x)}{\sum a_{ik}(x)\,\xi_i\xi_k}. \tag{5}$$

Кроме выполнения условия равномерной эллиптичности (4), всегда будет предполагаться, что коэффициенты $a_{ik}(x)$ являются измеримыми функциями. Из условий (3) и (4) следует также, что они ограничены.

Одна из возможных физических интерпретаций решений эллиптического уравнения второго порядка — это распределение температуры при условии теплового равновесия. Выведем уравнение стационарного распределения температуры. Я хочу обратить внимание на то, что в случае переменного коэффициента теплопроводности мы получаем уравнение именно в дивергентной форме. Итак, пусть имеется тело D, нагретое до температуры $u(x_1, x_2, x_3)$ и его коэффициент теплопроводности есть $k(x_1, x_2, x_3)$. (Для простоты будем предполагать, что наше тело изотропно: коэффициент теплопроводности зависит от точки, но не зависит от направления.) Выделяя внутри тела область g с границей σ (рис. 15), напишем условие теплового баланса:

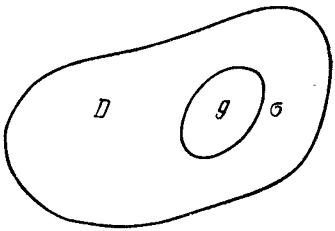

Рис. 15.

$$\int_\sigma k(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial n}\,ds = 0.$$

По формуле Грина — Остроградского мы отсюда получаем

$$\int_\sigma k\frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int_g \operatorname{div}(k\nabla u)\,dx = 0.$$

В силу произвольности области g отсюда следует

$$\operatorname{div}(k\nabla u) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] = 0.$$

Если бы коэффициент теплопроводности зависел также и от направления, получилось бы уравнение $Lu = 0$, где L — оператор (1).

Если в этом уравнении раскрыть скобки, мы получим привычное нам уравнение. Оно только будет содержать члены первого порядка, в чем, конечно, нет беды. Беда может быть в другом — вправе ли мы предположить, что коэффициенты дифференцируемы, без чего такая процедура (если мы только хотим работать с обычными функциями), разумеется, невозможна.

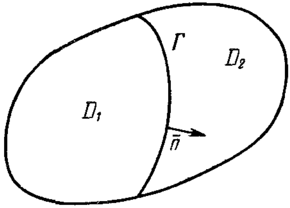

Рис. 16.

Рассмотрим такой пример: область D состоит из двух частей D_1 и D_2, разделенных гладкой поверхностью Γ (рис. 16). Пусть в каждой из этих частей коэффициент теплопроводности постоянен и соответственно равен k_1 и k_2 ($k_1 \neq k_2$). В каждой из областей D_1 и D_2 мы будем иметь уравнение Лапласа. На границе раздела Γ должны выполняться условия:

1) непрерывности температуры и
2) теплового баланса:

$$k_1 \frac{\partial u}{\partial n^-} = k_2 \frac{\partial u}{\partial n^+}. \tag{6}$$

Это последнее условие показывает, что

$$\frac{\partial u}{\partial n^-} \neq \frac{\partial u}{\partial n^+},$$

т. е. распределение температуры $u(x_1, x_2, x_3)$ в целом в области D таково, что у него рвутся первые производные — оно не может быть классическим решением уравнения второго порядка.

Можно тем не менее сказать, что эта функция $u(x_1, x_2, x_3)$ является *обобщенным* решением уравнения

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \quad k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{при} \quad x \in D_1, \\ k_2 & \text{при} \quad x \in D_2 \end{cases} \tag{7}$$

во всей области D. При этом само уравнение будет просто символической записью.

Вот как это делается. Рассмотрим сразу случай уравнения

$$Lu = 0, \tag{1'}$$

где L — оператор (1).

Пусть уравнение (1′) определено в области D и $u(x)$ — его решение. Пусть пока коэффициенты гладки и решение классическое. Умножим обе части уравнения (1′) на гладкую финитную в D функцию φ *) и проинтегрируем произведение по области D:

$$\int_D \varphi(x) \sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] dx = 0. \tag{8}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_D \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\, dx = 0. \tag{9}$$

Если $u(x)$ — классическое решение уравнения (1′) (с гладкими коэффициентами), то (9) выполняется при всякой финитной $\varphi(x)$. Наоборот, если (9) выполняется при всякой финитной $\varphi(x)$ для дважды непрерывно дифференцируемой $u(x)$ (и $a_{ik}(x)$ гладкие), то, делая обратный переход к (8), получаем, что (8) выполнено для любой финитной φ, т. е. $u(x)$ — решение уравнения (1′).

Интегральное тождество (9), которое, таким образом, эквивалентно уравнению (1′) в гладком случае, имеет перед уравнением (1′) то преимущество, что в него коэффициенты a_{ik} входят не под знаком производной, а от неизвестной функции входят только первые производные.

Покажем, что, в частности, решение $u(x_1, x_2, x_3)$ уравнения (7), имеющее определяемый формулой (6) разрыв первой производной на поверхности Γ, удовлетворяет интегральному тождеству.

Мы имеем

$$\int_{D_1} k_1\varphi \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\, dx + \int_{D_2} k_2\varphi \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\, dx = 0$$

*) Функция φ называется *финитной* в области D, если она обращается в нуль вне некоторого компакта, содержащегося в D.

или

$$\int\limits_{\Gamma} k_1\varphi \frac{\partial u}{\partial n^-} ds - \int\limits_{\Gamma} k_2\varphi \frac{\partial u}{\partial n^+} ds -$$
$$- \int\limits_{D_1} k_1 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx - \int\limits_{D_2} k_2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = 0.$$

Используя условие (6) и объединяя последние два интеграла, получаем

$$\int\limits_{D} \sum_{i=1}^{3} k(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = 0,$$

т. е. при всякой φ выполнено интегральное тождество (9).

Мы покажем дальше, что для произвольных ограниченных коэффициентов существует решение, определяемое интегральным тождеством (9), что оно единственно, и исследуем его свойства. Для этого нам надо предварительно точно описать класс функций, в котором мы будем определять эти решения.

Обобщенные производные в смысле Соболева. Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, определенная в D. Пусть $\varphi(x)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая финитная в D функция.

Тогда интегрирование по частям дает нам

$$\int\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi\, dx = - \int\limits_{D} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx. \tag{10}$$

Это равенство, справедливое для данной f при всех финитных φ кладется в основу определения обобщенной производной в смысле Соболева.

Определение. Функция $g(x)$ является обобщенной частной производной функции $f(x)$ по переменному x_i, если

$$f(x) \in L_2, \quad g(x) \in L_2 \tag{11}$$

и

$$\int\limits_{D} g(x)\varphi(x)\, dx = - \int\limits_{D} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

для всех бесконечно дифференцируемых финитных в D функций φ. Обобщенную частную производную функцию f по переменному x_i, мы, как и обычную, будем обозначать $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Замечание. Это определение корректно в том смысле, что если f обладает непрерывной производной $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, то эта производная совпадает с g почти всюду. Действительно, из (10) и (11) следует, что

$$\int\limits_D \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - g\right)\varphi\, dx = 0,$$

и поскольку скобка под знаком интеграла принадлежит L_2, а бесконечно дифференцируемые финитные функции плотны в L_2, то $\frac{\partial f}{\partial x_i} - g = 0$ почти всюду.

Возникает вопрос, получаем ли мы при этом что-либо новое по сравнению с обычной производной. Оказывается нет.

Задача 1. Докажите, что для того, чтобы функция $f \in L_2$ обладала обобщенной производной $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, необходимо и достаточно, чтобы f была абсолютно непрерывна по переменному x_i для почти всех значений остальных аргументов, и чтобы ее обычная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, которая, очевидно, в этом случае существует почти всюду, принадлежала L_2.

Вот если мы перейдем к производным высших порядков, то дело будет обстоять уже по-другому. Мы скажем, что функция $g \in L_2$ является производной $\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$ функции $f \in L_2$, если для всякой финитной в D бесконечно дифференцируемой функции φ справедливо

$$\int\limits_D g\varphi\, dx = (-1)^{k_1+\cdots+k_n}\int\limits_D f\,\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}\varphi}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\, dx.$$

Задача 2. Приведите пример функции $f(x_1, x_2)$, для которой существует обобщенная производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, но сама функция не имеет даже первых обычных производных ни в одной точке.

Хотя нам в дальнейшем понадобятся только обобщенные производные первого порядка, а здесь, как уже было сказано, можно было бы обойтись и обычными определениями, тем не менее нам значительно удобнее будет пользоваться определением (11).

Пространство W_2^1. Через W_2^1 мы обозначим линейное нормированное пространство, элементами которого являются функции $f(x)$, $x \in D$, принадлежащие L_2 и обладающие обобщенными частными производными первого порядка, также принадлежащими L_2 (впрочем, по нашему определению обобщенных производных это последнее будет выполнено автоматически).

В качестве нормы в этом пространстве принимается

$$\| f \| = \left(\int_D [(\nabla f)^2 + f^2]\, dx \right)^{1/2}.$$

Проверим, что выполняются аксиомы нормы:

1) $\| f \| \geqslant 0$, и если $\| f \| = 0$, то $f = 0$,

2) $\| \lambda f \| = | \lambda | \, \| f \|$,

3) $\| f_1 + f_2 \| \leqslant \| f_1 \| + \| f_2 \|$.

Первые две из этих аксиом удовлетворяются очевидным образом. Проверим, что выполняется третья:

$$\| f_1 + f_2 \|^2 = \int_D [(\nabla f_1 + \nabla f_2)^2 + (f_1 + f_2)^2]\, dx =$$

$$= \int_D [(\nabla f_1)^2 + f_1^2]\, dx + \int_D [(\nabla f_2)^2 + f_2^2]\, dx + 2 \int_D (\nabla f_1 \nabla f_2 + f_1 f_2)\, dx =$$

$$= \| f_1 \|^2 + \| f_2 \|^2 + 2 \int_D (\nabla f_1 \cdot \nabla f_2 + f_1 f_2)\, dx.$$

По неравенству Коши — Буняковского

$$\left|\int_D (\nabla f_1 \nabla f_2 + f_1 f_2)\,dx\right| \leqslant \int_D \left|\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + f_1 f_2\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_D \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right)^2 + f_1^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right)^2 + f_2^2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_D \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right)^2 + f_1^2\right] dx}\,\sqrt{\int_D \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right)^2 + f_2^2\right] dx} =$$

$$= \|f_1\| \cdot \|f_2\|.$$

Поэтому

$$\|f_1 + f_2\|^2 \leqslant \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + 2\|f_1\| \cdot \|f_2\| = (\|f_1\| + \|f_2\|)^2,$$

и нам остается извлечь квадратный корень из левой и правой частей этого неравенства.

Эту норму мы будем обозначать также $\|\ \ \|_{W_2^1}$, чтобы отличить ее от нормы в L_2, которая в этих случаях соответственно будет обозначаться $\|\ \ \|_{L_2}$.

Теорема 1.1. *Пространство W_2^1 полно.*

Доказательство. Пусть $\{f_m\}$ — фундаментальная последовательность в W_2^1. Рассмотрим f_m и $\frac{\partial f_m}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, как функции в L_2. Они, очевидно, образуют фундаментальные последовательности в L_2. Поэтому в силу полноты L_2 существуют функции f и $f^{(i)}$, принадлежащие L_2, такие, что

$$f_m \xrightarrow[L_2]{} f$$

и

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_i} \xrightarrow[L_2]{} f^{(i)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Докажем, что $f^{(i)} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Для всякой финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ мы имеем

$$\int_D \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\varphi\,dx = -\int_D f_m \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx.$$

Так как из сходимости в L_2 по норме следует слабая сходимость, то, переходя к пределу в этом равенстве, получаем

$$\int\limits_D f^{(i)}\varphi\,dx = -\int\limits_D f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx.$$

Следовательно, $f \in W_2^1$ и

$$f_m \underset{W_2^1}{\to} f \qquad \text{(ч. т. д.)}.$$

Функции из W_2^1 не обязаны быть непрерывными и даже ограниченными. Вот пример функции, принадлежащей W_2^1 на плоской области, и неограниченной.

Пусть область D есть круг с центром в начале координат радиуса $R < 1$. Положим

$$f(x, y) = \ln\ln\frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Так как функция зависит только от r, то ее градиент направлен по радиусу, и, следовательно,

$$(\nabla f)^2 = \frac{1}{r^2\ln^2 r},$$

$$\int\limits_D [(\nabla f)^2 + f^2]\,dx\,dy = 2\pi\int\limits_0^R \left(\frac{1}{r\ln^2 r} + r\ln^2\ln r\right)dr < \infty.$$

Напоминаю, что мы все время имеем дело с функциями, определенными с точностью до множества меры нуль. Поэтому «функция неограниченная», «функция не непрерывная» следует понимать в том смысле, что функцию нельзя сделать ограниченной или непрерывной, изменив ее на множестве нулевой меры.

Пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1$. Обозначим через C_∞^0 множество бесконечно дифференцируемых финитных в D функций.

Совокупность функций из C_∞^0 образует в W_2^1 линейное подпространство. Замкнем его по норме W_2^1. Полученное замкнутое линейное подпространство пространства W_2^1 обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^1$.

Таким образом, $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ состоит из таких элементов $f \in W_2^1$, что существует последовательность $\{f_m\} \subset C_\infty^0$ такая, что $f_m \underset{W_2^1}{\to} f$.

Функции из $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ будут для нас служить обобщением функций, обращающихся в нуль на границе области.

Следствие из определения. $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ полно (будучи замкнутым подмножеством полного пространства).

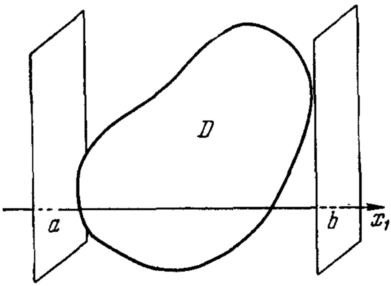

Рис. 17.

Теорема 1.2. *Существует положительная константа M, зависящая от области D, такая, что для любой функции $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ справедливо неравенство*

$$\|f\|_{W_2^1} \leqslant M \sqrt{\int_D (\nabla f)^2\, dx}. \tag{12}$$

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем функцию $f_\varepsilon \in C_\infty^0$, удовлетворяющую неравенству

$$\|f_\varepsilon - f\|_{W_2^1} < \varepsilon.$$

Пусть область D расположена между гиперплоскостями $x_1 = a$ и $x_1 = b$ (рис. 17). Пусть $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — произвольная точка области D. Тогда

$$f_\varepsilon(x^0) = \int_a^{x_1^0} \frac{\partial f_\varepsilon(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1}\, dx_1.$$

Поэтому по неравенству Коши — Буняковского

$$f_\varepsilon^2(x_0) \leqslant (x_1^0 - a) \int_a^{x_1^0} \left(\frac{\partial f_\varepsilon(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1}\right)^2 dx_1 \leqslant$$

$$\leqslant (b-a) \int_a^b \left(\frac{\partial f_\varepsilon(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1}\right)^2 dx_1$$

и

$$\int_D f_\varepsilon^2\,dx \leqslant (b-a)\int_a^b dx_1^0 \int_D \left(\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_1}\right)^2 dx_1\,dx_2^0 \ldots dx_n^0 = $$

$$= (b-a)^2 \int_D \left(\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_1}\right)^2 dx \leqslant (b-a)^2 \int_D (\nabla f_\varepsilon)^2\,dx.$$

Отсюда

$$\|f_\varepsilon\|^2_{W_2^1} = \int_D [(\nabla f_\varepsilon)^2 + f_\varepsilon^2]\,dx \leqslant [(b-a)^2+1]\int_D (\nabla f_\varepsilon)^2\,dx.$$

С другой стороны,

$$\|f\|_{W_2^1} \leqslant \|f_\varepsilon\|_{W_2^1} + \|f-f_\varepsilon\|_{W_2^1} < \|f_\varepsilon\|_{W_2^1} + \varepsilon.$$

Поэтому

$$\|f\|_{W_2^1} < M\sqrt{\int_D (\nabla f_\varepsilon)^2\,dx} + \varepsilon, \tag{13}$$

где

$$M = \sqrt{(b-a)^2+1}.$$

Оценим теперь $\int_D (\nabla f_\varepsilon)^2\,dx$ через $\int_D (\nabla f)^2\,dx$. Мы имеем

$$\int_D (\nabla f_\varepsilon)^2\,dx = \int_D (\nabla f)^2\,dx - \int_D [(\nabla f)^2 - (\nabla f_\varepsilon)^2]\,dx =$$

$$= \int_D (\nabla f)^2\,dx - \int_D (\nabla f - \nabla f_\varepsilon)(\nabla f + \nabla f_\varepsilon)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_D (\nabla f)^2\,dx + \sqrt{\int_D (\nabla f - \nabla f_\varepsilon)^2\,dx \int_D (\nabla f + \nabla f_\varepsilon)^2\,dx} \leqslant$$

$$\leqslant \int_D (\nabla f)^2\,dx + \varepsilon\|f+f_\varepsilon\|_{W_2^1} \leqslant$$

$$\leqslant \int_D (\nabla f)^2\,dx + \varepsilon\left(\|f\|_{W_2^1} + \|f\|_{W_2^1} + \varepsilon\right) =$$

$$= \int_D (\nabla f)^2\,dx + 2\varepsilon\|f\|_{W_2^1} + \varepsilon^2,$$

а потому неравенство (13) дает

$$\|f\|_{W_2^1} \leqslant M \sqrt{\int_D (\nabla f)^2\, dx + 2\varepsilon \|f\|_{W_2^1} + \varepsilon^2} + \varepsilon$$

и в силу произвольности ε

$$\|f\|_{W_2^1} \leqslant M \sqrt{\int_D (\nabla f)^2\, dx} \qquad \text{(ч. т. д.).}$$

Следствие. *Если* $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ *и* $\int_D (\nabla f)^2\, dx = 0$, *то* $f = 0$.

Теперь мы можем дать точное определение обобщенного решения уравнения (1′) и обобщенного решения задачи Дирихле для него.

Пусть уравнение (1′) определено в области D. Скажем, что $u(x)$ является обобщенным решением этого уравнения, если

$$u(x) \in W_2^1,$$

и для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ справедливо

$$\int_D \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx = 0. \tag{14}$$

Как говорилось, функции из $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ будут играть роль функций, обращающихся в нуль на границе. Мы будем считать, что две функции f и g совпадают на границе, если их разность принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1$. В задаче Дирихле решение должно принимать на границе Γ области D заданное значение φ:

$$u|_\Gamma = \varphi. \tag{15}$$

Будем считать, что функция φ определена во всей области D и принадлежит в ней W_2^1 и условие (15) заменим условием

$$u - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1. \tag{16}$$

Если у нас была классическая задача Дирихле, т. е. функция φ была задана только на Γ, то придется продолжить ее на всю область D и так, чтобы она принадлежала W_2^1. Для непрерывных на Γ функций это оказывается можно сделать не всегда, даже для очень хороших областей D, например для шара. В свое время мы поговорим об этом, а пока будем предполагать, что функция φ уже заранее определена во всей области D и принадлежит W_2^1.

Для упрощения записи мы будем в дальнейшем обозначать

$$\int_D \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = D(u, v).$$

В этих обозначениях задача Дирихле имеет следующий вид.

Задача Дирихле. Дана функция $\varphi \in W_2^1$. Требуется найти $u \in W_2^1$ такую, что

$$u - \varphi \in \mathring{W}_2^1$$

и для любой $v \in \mathring{W}_2^1$ справедливо

$$D(u, v) = 0.$$

Мы докажем, что решение этой задачи существует и что оно единственно. Для этого мы воспользуемся вариационным методом. Оказывается задача Дирихле эквивалентна следующей вариационной задаче.

Вариационная задача. Дана функция $\varphi \in \in W_2^1$. Среди функций

$$u \in W_2^1, \quad u - \varphi \in \mathring{W}_2^1$$

требуется найти такую, для которой

$$D(u, u) = \min.$$

Мы сейчас покажем, что из того, что $u(x)$ является решением задачи Дирихле, следует, что $u(x)$ — решение вариационной задачи и при этом решение вариационной задачи единственно, а из того, что $u(x)$ — решение вариационной задачи (быть может, не единственное) следует, что $u(x)$ — решение задачи Дирихле.

Отсюда следует эквивалентность обеих задач и единственность решения.

Прежде чем переходить к доказательству этого, сделаем два замечания.

Замечание 1. Из неравенства (4) вытекает

$$\int_D (\nabla v)^2 dx \leqslant aD(v, v), \qquad a > 0. \tag{17}$$

Замечание 2. Из неравенства (17) и следствия к теореме 1.2 вытекает:

Если $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ и $D(v, v) = 0$, то $v = 0$.

Переходим к доказательству эквивалентности задач.

1. Пусть $u(x)$ — решение задачи Дирихле. Пусть $u_1 \in W_2^1$ — произвольная функция такая, что $u_1 - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$. Положим $u_1 - u = v$, так что $u_1 = u + v$ и $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$. Тогда

$$D(u_1, u_1) = D(u + v, u + v) = \\ = D(u, u) + 2D(u, v) + D(v, v) = D(u, u) + D(v, v).$$

Поэтому

$$D(u_1, u_1) \geqslant D(u, u),$$

и равенство возможно, только если $D(v, v) = 0$, т. е. если (по замечанию 2) $v = 0$ и, значит, $u_1 = u$.

Таким образом, решение задачи Дирихле дает решение вариационной задачи и последнее единственно.

2. Пусть $u(x)$ — решение вариационной задачи. Пусть $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ — произвольная функция. Возьмем некоторое число ε (его величину и знак пока не предопределяем). Тогда

$$D(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) \geqslant D(u, u).$$

Или

$$2\varepsilon D(u, v) + \varepsilon^2 D(u, u) \geqslant 0.$$

Если $D(u, v) \neq 0$, то при ε, имеющем знак, противоположный $D(u, v)$, и достаточно малом, левая часть этого неравенства будет отрицательной. Поэтому

$$D(u, v) = 0,$$

т. е. $u(x)$ — решение задачи Дирихле.

Докажем теперь, что решение вариационной задачи всегда существует.

Пусть функция $\varphi \in W_2^1$ фиксирована. Будем называть *допустимыми* для данной вариационной задачи функции $w \in W_2^1$ такие, что $w - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$.

Положим

$$d = \inf D(w, w),$$

где нижняя грань берется по всем допустимым функциям w. (Заметим, что эта нижняя грань существует в силу неотрицательности $D(w, w)$.)

Назовем *минимизирующей* всякую последовательность $\{w_m\}$ допустимых функций, для которой

$$D(w_m, w_m) \to d \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Очевидно, минимизирующие последовательности существуют.

Теорема 1.3. *Любая минимизирующая последовательность сходится по норме W_2^1 к решению вариационной задачи.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся две леммы.

Лемма 1.1. *Члены минимизирующей последовательности ограничены по норме W_2^1 константой, общей для данной последовательности.*

Доказательство. Пусть $\{w_m\}$ — минимизирующая последовательность. Так как $w_m - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, то

$$\|w_m\|_{W_2^1} \leqslant \|\varphi\|_{W_2^1} + \|w_m - \varphi\|_{W_2^1} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_{W_2^1} + M \sqrt{\int\limits_D (\nabla w_m - \nabla\varphi)^2 \, dx}$$

(последнее неравенство справедливо по теореме 1.2).

Далее $D(w_m, w_m) \to d$, а потому $D(w_m, w_m)$ и, значит, по неравенству (17) и $\int\limits_D (\nabla w_m)^2 \, dx$ равномерно ограничены некоторой константой M'. Поэтому

$$\int\limits_D (\nabla w_m - \nabla\varphi)^2 \, dx \leqslant 2 \int\limits_D [(\nabla w_m)^2 + (\nabla\varphi)^2] \, dx \leqslant 2M' + \|\varphi\|_{W_2^1}^2,$$

откуда

$$\| w_m \|_{W_2^1} \leqslant \| \varphi \|_{W_2^1} + M \sqrt{2M' + \| \varphi \|^2_{W_2^1}} = M_1. \tag{18}$$

Лемма 1.2. *Пусть $\{w_m\}$ — минимизирующая последовательность и K — некоторое положительное число. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $m > N$ для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ такой, что $D(v, v) < K$ выполняется неравенство*

$$| D(w_m, v) | < \varepsilon.$$

Доказательство. Положим

$$v_m = w_m \pm \eta v, \tag{19}$$

где $\eta > 0$ — некоторое число, которое мы потом подберем, а выбор знака плюс или минус в (19) зависит от номера m.

Мы имеем $v_m - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ и, следовательно,

$$D(v_m, v_m) \geqslant d,$$

или

$$D(w_m, w_m) \pm 2\eta D(w_m, v) + \eta^2 D(v, v) \geqslant d.$$

Будем считать, что знак в (19) противоположен знаку $D(w_m, v)$. Тогда

$$| D(w_m, v) | \leqslant \frac{1}{2\eta} [D(w_m, w_m) - d] + \frac{\eta}{2} K.$$

Выберем теперь η из равенства $\frac{\eta}{2} K = \frac{\varepsilon}{2}$, а после этого найдем такое N, чтобы при $m > N$ было справедливо

$$\frac{1}{2\eta} [D(w_m, w_m) - d] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Доказательство теоремы. Имеем минимизирующую последовательность $\{w_m\}$. Докажем, что она фундаментальна в W_2^1.

Рассмотрим норму разности $w_m - w_n$. Так как $w_m - w_n \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, то по теореме 1.2

$$\| w_m - w_n \|_{W_2^1} \leqslant M \sqrt{\int_D [\nabla (w_m - w_n)]^2 \, dx}$$

и, значит, по неравенству (17)

$$\| w_m - w_n \|_{W_2^1} \leqslant M \sqrt{a D(w_m - w_n, w_m - w_n)}. \tag{20}$$

Но

$$D(w_m - w_n, w_m - w_n) =$$
$$= D(w_n, w_n) - D(w_m, w_m) - 2D(w_m, w_n - w_m).$$

По лемме 1.1 члены минимизирующей последовательности имеют равномерно ограниченную норму, а потому имеется такое K, что

$$D(w_n - w_m, w_n - w_m) < K \tag{21}$$

для всех m и n.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем такое N_1, что при $m > N_1$ выполняется

$$D(w_m, w_m) - d < \frac{\varepsilon^2}{3M^2 a}.$$

Учитывая неравенство (21), найдем далее по лемме 2 такое N_2, что при $m > N_2$ выполняется

$$| D(w_m, w_n - w_m) | < \frac{\varepsilon^2}{6M^2 a}.$$

Тогда нам остается положить $N = \max(N_1, N_2)$, и мы получим при $m > N$ и $n > N$ неравенство

$$\| w_m - w_n \|_{W_2^1} < \varepsilon.$$

Итак, $\{w_m\}$ — фундаментальная последовательность в W_2^1. Следовательно, существует функция u такая, что

$$w_m \underset{W_2^1}{\longrightarrow} u.$$

Мы имеем тогда

$$D(u, u) = d.$$

Так как

$$w_m - \varphi \underset{W_2^1}{\longrightarrow} u - \varphi,$$

то

$$u - \varphi \in \mathring{W}_2^1.$$

Таким образом, минимизирующая последовательность сходится к решению вариационной задачи.

Итак, решение вариационной задачи всегда существует. Следовательно, всегда существует решение задачи Дирихле в определенной на стр. 113 постановке. Такое решение мы будем называть *слабым*. Единственность слабого решения мы уже доказали раньше.

Мы исследуем некоторые свойства слабых решений. Для этого нам понадобятся кое-какие факты из теории функций многих действительных переменных.

Примечание.

В этом параграфе дается традиционное изложение существования и единственности слабого решения самосопряженного эллиптического уравнения 2-го порядка вариационным методом.

Все изложенное можно найти в книгах *С. Л. Соболева* [1], *С. Г. Михлина* [1], *Р. Куранта* и *Д. Гильберта* [1] (т. 2, гл. VII, § 2) и, наконец, в неоднократно цитированной выше монографии *О. А. Ладыженской* и *Н. Н. Уральцевой* [1].

Желающим более полно познакомиться с пространствами $W_p^l(C)$ и с функциональными методами в теории эллиптических уравнений рекомендую обратиться к цитированной книге Соболева или к книге *Л. Берса, Ф. Джона, М. Шехтера* [1] (гл. 3—5).

§ 2. Некоторые факты из теории функций многих действительных переменных

1. Введем некоторые обозначения.

Для функции $f(x)$ будем обозначать через $\nabla^k f$, $k = 1, 2, \ldots$, вектор, состоящий из ее k-х производных:

$$\nabla^k f = \left\{ \frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}, \ldots, \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots, \frac{\partial^k f}{\partial x_n^k} \right\}$$

(в частности, $\nabla^1 f = \nabla f$).

Пусть функция $f(x)$ задана в ограниченной области D. Будем называть точку $x^0 \in D$ *особой* для функции f, если

$$\nabla^1 f\,|_{x = x^0} = 0.$$

Множество особых точек функции f будем обозначать O_f. Пусть ось значений функции f есть ось t: $t = f(x)$. Через $f[E]$ будем обозначать образ на оси t множества $E \subset D$ и через $f^{-1}[A]$ полный прообраз в R_n множества A на оси t. Через $\operatorname{mes} M$ будем обозначать меру Лебега множества M, лежащего на прямой. Через $\operatorname{mes}_n M$ — n-мерную меру Лебега множества $M \subset R_n$.

Теорема 2.1. *Пусть $f \in C_\infty$. Тогда*

$$\operatorname{mes} f[O_f] = 0. \tag{22}$$

При доказательстве этой теоремы мы будем пользоваться теоремой Витали о покрытиях (см. *Натансон* [4]). Напомню формулировку этой теоремы. *Пусть A — множество на прямой. Пусть имеется покрытие этого множества интервалами, обладающее тем свойством, что для каждой точки $x \in A$ найдется покрывающий ее интервал как угодно малой длины. Такое покрытие называется* покрытием в смысле Витали. *Утверждается, что из этого покрытия можно выбрать подпокрытие, состоящее из непересекающихся интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_m, \ldots$, такое, что*

$$\operatorname{mes}\left(A \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m\right) = 0.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.1.

а) Обозначим через O_f^0 множество точек $x^0 \in O_f$, в которых

$$\nabla^1 f\,|_{x=x^0} = \nabla^2 f\,|_{x=x^0} = \ldots = \nabla^n f\,|_{x=x^0} = 0. \tag{23}$$

Докажем сначала, что

$$\operatorname{mes} f\left[O_f^0\right] = 0. \tag{24}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $x^0 \in O_f$ найдется такое $r_{x^0} > 0$, что шар $Q_{r_{x^0}}^{x^0}$ содержится в D и

$$|f(x) - f(x^0)| < \varepsilon\Omega_n |x - x^0|^n \quad \text{при} \quad |x - x^0| < r_{x^0} \tag{25}$$

(здесь Ω_n — объем единичного n-мерного шара). Обозначим $f\left[O_f^0\right]$ через A. Покроем каждую точку $t \in A$ всевозможными интервалами вида

$$(t - \delta, t + \delta), \quad \text{где} \quad \delta < \varepsilon\Omega_n \left(r_{f^{-1}(t)}\right)^n$$

($f^{-1}(t)$ — какой-либо один из прообразов t в O_f^0). Совокупность таких интервалов для всех точек множества A образует покрытие в смысле Витали множества A.

Выберем из него подпокрытие, состоящее из непересекающихся интервалов $I_1, I_2, \ldots$ такое, что

$$\operatorname{mes}\left(A \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m\right) = 0.$$

Пусть $I_m = (t_m - \delta_m, t_m + \delta_m)$ и $t_m = f(x^m)$, $x^m \in Q_f^0$, так что

$$\delta_m < \varepsilon \Omega_n (r_{x^m})^n. \tag{26}$$

Мы имеем в силу (25) и (26)

$$f^{-1}[I_m] \supset Q^{x^m}_{(\delta_m/\varepsilon\Omega_n)^{1/n}},$$

а потому

$$\operatorname{mes}_n (f^{-1}[I_m]) \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \delta_m. \tag{27}$$

Так как интервалы I_m попарно не пересекаются, то и их полные прообразы попарно не пересекаются. С другой стороны, область D у нас предположена ограниченной. Поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{mes}_n (f^{-1}[I_m]) \leqslant \operatorname{mes}_n D < M,$$

где M — некоторая константа, не зависящая от ε. И по (27) мы получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m < \varepsilon M.$$

Интервалы I_m покрывают почти все множество A, а потому

$$\operatorname{mes} A < 2\varepsilon M,$$

и в силу произвольности ε

$$\operatorname{mes} A = 0.$$

б) Докажем теперь равенство (22). Будем вести доказательство по индукции по числу измерений. Заметим прежде всего, что при $n = 1$ предыдущий пункт дает нам равенство (22). Пусть для числа измерений $n - 1$ утверждение доказано. Будем доказывать его для n измерений. Рассмотрим множество $O_f \setminus O_f^0$. Для каждой точки x^0 этого множества найдутся такие целые неотрицательные $k_1, \ldots, k_n$

$$k_1 + \ldots + k_n < n$$

и такое i, что

$$\left.\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right|_{x=x^0} = 0; \quad \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right]\right|_{x=x^0} \neq 0; \qquad (28)$$

Обозначим через $Q_f^{(k_1, \ldots, k_n, i)}$ множество точек $x \in Q_f \setminus Q_f^0$, для которых (28) выполняется с данным набором $k_1, \ldots, k_n, i$ $(k_1 + \ldots + k_n < n,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$.

Докажем, что

$$\operatorname{mes} f\left[O_f^{(k_1, \ldots, k_n, i)}\right] = 0.$$

Обозначим это множество для удобства через O_f'. Пусть, кроме того, опять-таки для удобства, $i = n$. Обозначим $\dfrac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = g$, так что

$$g(x) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in O_f'.$$

Поэтому по теореме о неявной функции для каждой точки $x^0 \in O_f'$ найдется такая окрестность O'', что множество точек x, удовлетворяющих уравнению

$$g(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

в этой окрестности лежит на графике бесконечно дифференцируемой функции

$$x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

определенной в некоторой области D'' $(n-1)$-мерного пространства $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Так как из всякого покрытия множества O_f' окрестностями всегда можно выбрать счетное, то достаточно доказать, что

$$\operatorname{mes} f\left[O_f' \cap O''\right] = 0. \qquad (29)$$

Обозначим пересечение $O'_f \cap O''$ через O''_f. При $x \in O''_f$ имеем

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})).$$

Положим

$$h(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})).$$

$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D''$ и обозначим через O''_h проекцию множества O''_f на гиперплоскость $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Так как $\nabla^1 h = 0$ при $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in O''_h$, то, по предположению индукции, $\operatorname{mes} h[O''_h] = 0$, но $h[O''_h] = f[O''_f]$, и тем самым доказательство теоремы завершено.

При доказательстве этой теоремы мы не пользовались бесконечной дифференцируемостью функции f, а пользовались тем, что она достаточное число раз дифференцируема, а именно $\frac{n(n+1)}{2}$ раз (почему?).

Задача (трудная). Докажите, что теорема справедлива в предположении n-кратной дифференцируемости функции f и не справедлива при $(n-1)$-кратной.

2. Вернемся к оператору (1):

$$L = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right).$$

Предположим, что коэффициенты a_{ik} в нем гладкие. Пусть D — область с гладкой границей и f — гладкая функция. Тогда

$$\int_D \sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) dx =$$

$$= \int_{\partial D} \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n =$$

$$= \int_\Gamma \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\gamma_i \frac{\partial f}{\partial x_k}\, ds,$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — направляющие косинусы внешней нормали к ∂D.

Выражение

$$\sum_{i,\,k} a_{ik}\gamma_i \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

называется *производной по конормали* функции f и обозначается через $\frac{\partial f}{\partial \nu}$.

Таким образом, мы получаем для оператора (1) следующую формулу Грина:

$$\int_D Lf\,dx = \int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \nu}\,ds.$$

Эту формулу Грина мы используем для получения априорной оценки для решения уравнения $Lu = 0$. А для того чтобы ее использовать, нам понадобится одно обобщение на многомерный случай теоремы Лагранжа о среднем значении.

3. Сформулируем теорему о конечном приращении для дифференцируемой функции одного переменного $f(x)$, определенной на отрезке $[0, 1]$, в следующем (ослабленном) виде: найдется точка $\xi \in [0, 1]$, в которой $|f'(\xi)| \leqslant \operatorname{osc} f$.

Для случая многих переменных теорема Лагранжа в этой формулировке допускает следующее обобщение. Пусть в R_n между гиперплоскостями $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$ расположена ограниченная область G, имеющая предельные точки на каждой из этих гиперплоскостей. Пусть в $\overline{G}$ определена непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$. Существует кусочно-гладкая поверхность S, отделяющая в G гиперплоскость $x_1 = 0$ от гиперплоскости $x_1 = 1$, такая, что

$$\int_S \left|\frac{\partial f}{\partial n}\right| ds \leqslant K \cdot \operatorname*{osc}_G f \cdot \operatorname{mes} G,$$

где K — константа, зависящая от размерности пространства.

Пусть в области G задана положительно определенная форма $\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,\xi_i\xi_k$. Тогда в сформулированной теореме вместо производной по нормали можно взять производную по конормали, определяемой этой квадратичной формой (константа K будет при этом зависеть от минимума и максимума квадратичной формы на единичной сфере). Вместо гиперплоскостей $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$ можно взять две сферы, например $|x| = 1$ и $|x| = 2$. Именно в таком виде мы и докажем эту теорему.

Теорема 2.2. *Пусть между сферами S_1^0 и S_2^0 расположена область D. Пусть та часть границы этой области, которая лежит строго внутри слоя $1 < |x| < 2$, является гладкой поверхностью. Пусть $\sum\limits_{i, k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k$ — квадратичная форма, коэффициенты которой определены и непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$ и для которой выполнены неравенства* (4). *Пусть в $\overline{D}$ определена дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$. Тогда существует кусочно-гладкая поверхность Σ, разделяющая в D сферы S_1^0 и S_2^0, такая, что*

$$\int\limits_{\Sigma} \left| \frac{\partial f}{\partial \nu} \right| ds < K \cdot \operatorname*{osc}_{D} f \cdot \operatorname{mes}_n D,$$

где K — константа, зависящая от C_1 и C_2 в неравенствах (4) *и от размерности пространства.*

Замечание 2.1. Мы говорим, что Σ разделяет S_1^0 и S_2^0 в D, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что всякая ломаная, лежащая в D и соединяющая точки, принадлежащие ε-окрестности S_1^0 и ε-окрестности S_2^0, имеет непустое пересечение с Σ.

Замечание 2.2. Когда мы говорим, что функция f дважды непрерывно дифференцируема на замкнутом множестве $\overline{D}$, мы под этим будем понимать, что эта функция на самом деле определена на некотором объемлющем $\overline{D}$ открытом множестве и там дважды непрерывно дифференцируема. В этом же смысле мы будем понимать и непрерывную дифференцируемость коэффициентов a_{ik}. При этом мы будем предполагать, что неравенство (4) выполнено в этой объемлющей области.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть O_f — множество особых точек функции f в $\overline{D}$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда мно-*

жество O_f можно заключить в конечное число шаров $Q_1, \ldots, Q_N$ таких, что если обозначить через S_m поверхность m-го шара, то

$$\sum_{m=1}^{N} \int_{S_m} |\nabla f|\, ds < \varepsilon. \tag{30}$$

Доказательство. Разобьем множество O_f на две части; отнесем ко множеству O_f' те точки из O_f, в которых $\nabla^2 f \neq 0$ и ко множеству O_f'' — те точки из O_f, где $\nabla^2 f = 0$. Множество O_f' имеет меру нуль, поскольку все его точки лежат на счетном числе поверхностей размерности $n-1$.

Возьмем некоторое $\eta > 0$ (его мы определим позднее) и заключим O_f' в открытое множество G меры, меньшей η.

Покроем каждую точку $x \in O'$ шаром $Q_{r_x}^x$ такого радиуса $r_x > 0$, чтобы этот шар целиком содержался в G. Рассмотрим концентрический с ним шар $Q_{5r_x}^x$ и оценим

$$\int_{S_{5r_x}^x} |\nabla f|\, ds.$$

Так как f дважды непрерывно дифференцируема в $\overline{D}$, то все ее вторые производные ограничены по модулю. Пусть C — ограничивающая их константа. По замечанию 2.2 мы можем считать, что это верно в некоторой окрестности $\overline{D}$, и пусть r_x так мало, что $Q_{5r_x}^x$ находится внутри такой окрестности. Так как в точке x мы имеем $\nabla f = 0$, то

$$|\nabla f|\,\big|_{S_{5r_x}^x} \leqslant C \cdot 5r_x.$$

Отсюда

$$\int_{S_{5r_x}^x} |\nabla f|\, ds \leqslant 5Cr_x \operatorname{mes}_{n-1} S_{5r_x}^x = 5^n \cdot n \cdot C \cdot \operatorname{mes}_n Q_{r_x}^x \tag{31}$$

Выберем из совокупности шаров $\{Q^x_{r_x}\}$ счетное множество $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_m, \ldots$ так, чтобы эти шары попарно не пересекались, а соответствующие им концентрические шары (открытые) впятеро большего радиуса $Q'_1, \ldots$ $\ldots, Q'_m, \ldots$ покрывали все множество Q'_f. Это можно сделать, применив процесс Банаха: возьмем из $\{Q^x_{r_x}\}$ шар, диаметр которого превосходит половину верхней грани диаметров. Назовем его $\tilde{Q}_1$. Выбросим все пересекающиеся с ним шары. Из оставшихся возьмем шар, диаметр которого больше половины верхней грани диаметров оставшихся шаров. Назовем его $\tilde{Q}_2$ и т. д.

В силу (31) мы получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{S'_m} |\nabla f|\, ds < 5^n \cdot n \cdot C \cdot \eta. \tag{32}$$

Через S'_m здесь обозначена поверхность шара Q'_m.

Пусть теперь $x \in O''_f$. Так как в этой точке первый и второй дифференциалы обращаются в нуль, то найдется такой шар $Q^x_{r_x}$, $0 < r_x < 1$ что всюду на его поверхности

$$|\nabla f| < \eta r_x,$$

так что

$$\int\limits_{S^x_{r_x}} |\nabla f|\, ds < \eta r_x \operatorname{mes}_{n-1} S^x_{r_x} = n\eta \operatorname{mes}_n Q^x_{r_x}. \tag{33}$$

Рассмотрим концентрические с $Q^x_{r_x}$ шары в пять раз меньшего радиуса: $Q^x_{r_x/5}$ и из совокупности $\{Q^x_{r_x/5}\}$, $x \in$ $\in O''_f$, выберем с помощью того же процесса Банаха счетное число шаров $\tilde{\tilde{Q}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{Q}}_m, \ldots$ таких, что сами они попарно не пересекаются, а концентрические с ними (открытые) шары впятеро большего радиуса

$$Q''_1, \ldots, Q''_m, \ldots$$

покрывают все множество O''_f.

Из неравенства (33), учитывая, что шары $\tilde{\tilde{Q}}_m$ не выходят за пределы шара $|x|<2+\frac{1}{5}$, получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_{S_m''} |\nabla f|\, ds < n\eta \left(\frac{11}{5}\right)^n \Omega_n \cdot 5^n; \tag{34}$$

S_m'' здесь поверхность шара Q_m'', а Ω_n, как обычно у нас, — объем единичного n-мерного шара.

Объединяя шары $\{Q_m'\}$ и $\{Q_m''\}$, мы получаем совокупность открытых шаров, покрывающих замкнутое множество $O_f' \cup O_f'' = O_f$. Выберем из них конечное подпокрытие. Пусть это суть шары $Q_1, \ldots, Q_N$, а их поверхности — соответственно $S_1, \ldots, S_N$.

Из неравенств (32) и (34) мы получаем

$$\sum_{m=1}^{N} \int_{S_m} |\nabla f|\, ds < n\eta [5^n C + 11^n \Omega_n]$$

и для доказательства леммы нам остается положить $\eta = \frac{\varepsilon}{5^n C + 11^n \Omega_n}$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.2. Мы, конечно, можем предполагать, что $\operatorname*{osc}_D f \neq 0$. Положим

$$\varepsilon = \operatorname{mes}_n D \cdot \operatorname*{osc}_D f \tag{35}$$

и в соответствии с леммой 2.1 найдем при данном ε шары $Q_1, \ldots, Q_N$ и исключим их из области D. Положим

$$D^* = \overline{D} \setminus \sum_{m=1}^{N} Q_m.$$

Пересечем D^* с замкнутым шаровым слоем $1+\frac{1}{4} \leqslant |x| \leqslant 1+\frac{3}{4}$. Обозначим это пересечение через D'. По замечанию 2.2 функция $f(x)$ и квадратичная форма $\sum a_{ik}(x)\, \xi_i \xi_k$ определены в некоторой δ-окрестности D_δ'

множества D'. Возьмем $\delta < \frac{1}{4}$ столь малым, чтобы выполнялось

$$\operatorname*{osc}_{D'_\delta} f < 2 \operatorname*{osc}_{D} f. \tag{36}$$

На замкнутом множестве D' мы имеем $\nabla f \neq 0$. Выберем δ, кроме того, столь малым, чтобы в D'_δ было

$$|\nabla f| > \alpha > 0. \tag{37}$$

Рассмотрим на D'_δ систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{38}$$

Рассмотрим скалярное произведение вектора правых частей этой системы на ∇f. Имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k}, \nabla f \right) = \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} > C_1 (\nabla f)^2. \tag{39}$$

Из этого неравенства вытекает, что, во-первых, в D'_δ нет стационарных точек системы (38) и, во-вторых, что в каждой точке $x \in D'_\delta$ направление поля образует с направлением градиента функции f угол, отличающийся от прямого, при этом косинус этого угла больше положительной константы: пусть $l(x)$ — вектор поля в точке x, тогда

$$\cos (l(x), \nabla f) > \beta > 0. \tag{40}$$

Действительно, в силу (4) коэффициенты a_{ik} ограничены, а потому

$$\cos (l(x), \nabla f) = \frac{\left(\sum a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k}, \nabla f \right)}{\left| \sum a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| |\nabla f|} > \frac{C_1 (\nabla f)^2}{C_2' (\nabla f)^2} = \beta.$$

Если мы обозначим через $\frac{\partial f}{\partial l}$ производную в направлении поля, то из (39) и (40) получаем

$$\left| \frac{\partial f}{\partial l} \right| > \gamma |\nabla f| > \alpha\gamma > 0 \tag{41}$$

(заметим, что константы β и γ зависят от размеров квадратичной формы на единичной сфере).

Из неравенства (41) следует, что в D'_δ нет замкнутых траекторий системы (38) и все траектории имеют равномерно ограниченную длину.

Пусть некоторая поверхность S в каждой своей точке касается направления поля. Тогда

$$\int_S \left|\frac{\partial f}{\partial \nu}\right| ds = \int_S \left|\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}\gamma_i \frac{\partial f}{\partial x_k}\right| ds = 0,$$

поскольку подынтегральная функция есть тождественный нуль.

Этим мы и воспользуемся при построении нужной нам поверхности Σ. Основу Σ составят линейчатые поверхности, образующими которых будут служить траектории системы (38). При этом в интересующий нас интеграл они не добавят ничего. Эти поверхности будут иметь вид тонких трубок, которые покроют все D'. Затем в некоторые из трубок мы вставим перегородки. По этим перегородкам интеграл уже не будет равен нулю, но мы сумеем сделать его не очень большим (рис. 18).

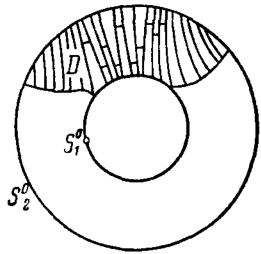

Рис. 18.

Примемся за построение трубок. Обозначим пересечение D' со сферой $S^0_{1+\frac{3}{4}}$ через E. Пусть N — множество точек $x \in E$, где направление поля системы (38) касается сферы $S^0_{1+\frac{3}{4}}$. В каждой такой точке $x \in N$ мы имеем $\frac{\partial f}{\partial \nu} = 0$, где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по конормали к сфере $S^0_{1+\frac{3}{4}}$. Покроем N открытым на сфере $S^0_{1+\frac{3}{4}}$ множеством G таким, чтобы было

$$\int_G \left|\frac{\partial f}{\partial \nu}\right| ds < \operatorname{mes}_n D \cdot \operatorname*{osc}_D f, \tag{42}$$

и положим

$$E' = E \setminus G.$$

В точках $x \in E'$ направление поля трансверсально сфере. Покроем E' на сфере $S^0_{1+\frac{3}{4}}$ конечным числом неперекрывающихся областей с кусочно-гладкими границами, будем их называть *ячейками*. Диаметры их мы выберем столь малыми, чтобы в точках ячеек поле было трансверсально сфере и чтобы пучок траекторий, проходящих через каждую такую ячейку расходился бы не более чем на $\delta/2n$. Впоследствии мы наложим еще и другие ограничения на размеры диаметра этих областей. Поверхность, заметаемую траекториями, лежащими внутри шара $|x| < 1 + \frac{3}{4}$ и проходящими через границу ячейки, будем называть *трубкой*.

Итак мы получили конечное число трубок. Назовем трубку *сквозной*, если, не пересекая этой трубки, можно соединить ломаной точку соответствующей ей ячейки с точкой сферы $S^0_{1+\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}}$, не выходя за пределы пересечения D' со сферическим слоем $1 + \frac{1}{4} - \delta < |x| < 1 + \frac{3}{4}$.

Благодаря выбору диаметра ячейки «ширина» трубки не превосходит $\delta/2n$, и сквозная трубка погружается в слой $1 + \frac{1}{4} - \frac{\delta}{2} < |x| < 1 + \frac{1}{4}$, так, что этот слой ее закупоривает. Пусть диаметр ячейки выбран столь малым, что гиперплоскость, ортогональная одной траектории трубки, пересекает остальные траектории трубки под углом, бо́льшим $\pi/4$. Обрежем сквозную трубку в том месте, где она в первый раз (считая от ячейки) погрузилась в слой

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{\delta}{2} < |x| < 1 + \frac{1}{4}$$

гиперплоскостью так, чтобы края обрезанной трубки были погружены в этот слой (рис. 19).

Обозначим такие обрезанные сквозные трубки через $T_1, \ldots, T_s$. Если каждую сквозную трубку перегородить, то теоретико-множественная сумма несквозных трубок,

трубок $T_1, \ldots, T_s$, перегородок в них, сфер $S_1, \ldots, S_N$ и множества G на сфере $S^0_{1+\frac{3}{4}}$ разделяет в D сферы S^0_1 и S^0_2.

Позаботимся теперь о том, чтобы перегородки выбрать так, чтобы по ним $\int \left| \frac{\partial f}{\partial \nu} \right| ds$ был нужной нам величины.

Обозначим через U_i область, ограниченную T_i, соответствующей ячейкой и гиперплоскостью, обрезающей эту трубку. Мы имеем

$$U_i \cap U_j = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

а потому

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{mes}_n U_i < 2 \operatorname{mes}_n D. \tag{43}$$

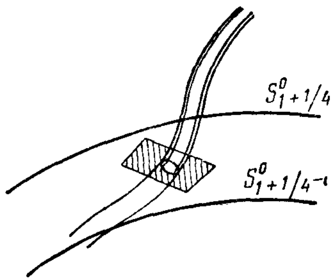

Рис. 19.

Рассмотрим произвольную трубку T_i и соответствующую ей область U_i. Выберем какую-нибудь одну траекторию на этой трубке. Обозначим ее L_i. Длина $\mu_1 L_i$ кривой L_i удовлетворяет неравенству

$$\mu_1 L_i > \frac{1}{2}. \tag{44}$$

Введем на L_i параметр l — длину дуги, отсчитываемую от ячейки. Обозначим через $\sigma_i(l)$ площадь сечения U_i гиперплоскостью, проходящей через точку, соответствующую l, и ортогональной в этой точке траектории L_i. Пусть диаметр ячеек столь мал, что

$$\int_{L_i} \sigma_i(l)\, dl < 2 \operatorname{mes}_n U_i. \tag{45}$$

Тогда множество H точек $l \in L_i$, в которых $\sigma_i(l) \geqslant 8 \operatorname{mes} U_i$, удовлетворяет неравенству

$$\mu_1 H < \frac{1}{4}.$$

И, значит, в силу (44) для $E = L_i \setminus H$ справедливо

$$\mu_1 E > \frac{1}{4} \tag{46}$$

и

$$\sigma_i(l) < 8 \operatorname{mes}_n U_i \quad \text{при} \quad l \in E. \tag{47}$$

В точках кривой L_i производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ сохраняет знак, а потому

$$\int\limits_E \left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| dl \leqslant \int\limits_{L_i} \left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| dl \leqslant \underset{D'_\delta}{\operatorname{osc}} f.$$

Отсюда, используя (46) и теорему о среднем, мы найдем: существует такая точка $l_0 \in E$, что

$$\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| \Big|_{l=l_0} < 4 \underset{D'_\delta}{\operatorname{osc}} f,$$

и, значит, по неравенству (47),

$$\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| \sigma_i(l_0) < 32 \operatorname{mes}_n U_i \cdot \underset{D'_\delta}{\operatorname{osc}} f.$$

Соединяя это с (41), мы находим

$$|\nabla f| \cdot \sigma_i(l_0) < \frac{32}{\gamma} \operatorname{mes}_n U_i \cdot \underset{D'_\delta}{\operatorname{osc}} f.$$

Будем обозначать $\sigma_i(l_0)$ просто через σ_i. Пусть диаметр ячеек еще и так мал, что

$$\int\limits_{\sigma_i} |\nabla f| \, ds < \frac{64}{\gamma} \operatorname{mes}_n U_i \cdot \underset{D'_\delta}{\operatorname{osc}} f.$$

(Это можно сделать, так как производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ равномерно непрерывны.) Поэтому, согласно (43),

$$\sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\sigma_i} |\nabla f| \, ds < \frac{128}{\gamma} \operatorname{mes}_n D \cdot \underset{D'_\delta}{\operatorname{osc}} f. \tag{48}$$

Обозначим через Σ теоретико-множественную сумму всех несквозных трубок, всех сквозных трубок T_i, всех σ_i, всех сфер S_i и множеств G на сфере $S^0_{1+\frac{3}{4}}$.

Мы получаем тогда по (30) *), (35), (36), (42) и (48)

$$\int\limits_{\Sigma} \left| \frac{\partial f}{\partial \nu} \right| ds < M \cdot \operatorname{mes}_n D \cdot \operatorname*{osc}_D f,$$

где M зависит от констант C_1 и C_2 в (4) и от размерности пространства. Σ состоит из конечного числа гладких поверхностей, и, таким образом, наша теорема доказана.

Множество Σ не является общей границей двух частей D, из которых одна примыкает к S^0_1, а другая — к S^0_2. Для наших целей это и не нужно. Но можно сделать так, чтобы Σ обладала этим свойством (как?).

На этом мы закончим теоретико-множественные рассмотрения и обратимся снова к уравнению (1′).

Примечания.

Теорема 2.1 принадлежит *Сарду* [1]. Независимо эта теорема была получена *А. С. Кронродом* и *Е. М. Ландисом* [1].

Теорема 2.2 — многомерный аналог теоремы Лагранжа — была доказана *М. Л. Гервером* и *Е. М. Ландисом* [1]. См. также цитированную статью *Е. М. Ландиса* в УМН [2]. Эта теорема нашла некоторые приложения в теории уравнений (если не говорить о следующем параграфе, то можно, например, назвать работу *Е. А. Михеевой* [1]). Однако мне кажется, что теорема 2.2 с точки зрения приложений, заключает в себе существенно большие возможности. И я поместил ее в этой книге в определенной степени для того, чтобы привлечь к ней внимание.

§ 3. Априорная оценка нормы Гёльдера для уравнения в дивергентной форме

Начнем с нескольких лемм, родственных лемме о возрастании, доказанной нами в первой главе.

---

*) При этом мы пользуемся тем, что по неравенству (4) $\left|\frac{\partial f}{\partial \nu}\right| \leqslant C_2 |\nabla f|$.

Будем сейчас рассматривать равномерно эллиптическое уравнение

$$Lu = \sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = 0 \tag{49}$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и классическое решение этого уравнения. В дальнейшем мы покажем, что решения такого уравнения необходимо бесконечно дифференцируемы, а пока будем это предполагать. Собственно говоря, нам пока нужно, чтобы коэффициенты $a_{ik}(x)$ были непрерывно дифференцируемы, чтобы решение было классическим и чтобы это решение было бесконечно дифференцируемым.

Итак, пусть это выполнено.

Лемма 3.1. *Пусть в шаре $Q_R^{x^0}$ расположена область D, пересекающая шар $Q_{R/4}^{x^0}$ и имеющая предельные точки на сфере $S_R^{x^0}$. Пусть Γ — та часть границы D, которая расположена строго внутри $Q_R^{x^0}$. Пусть в области D определено уравнение* (49) *и $u(x)$ — его решение, положительное в D, непрерывное в $\overline{D}$, обращающееся в нуль на Γ. Пусть*

$$\sup_{x\in D\cap Q_{R/4}^{x^0}} u(x) = m.$$

Обозначим через D_0 множество точек $x \in D \cap Q_{R/2}^{x^0}$, в которых

$$\frac{m}{2} < u(x);$$

через D_1 — множество $\left\{x \in D \cap Q_{R/2}^{x^0} \,\middle|\, 0 < u(x) < \frac{m}{2}\right\}$ и через D_2 — множество $Q_{R/2}^{x^0} \setminus D$.

Пусть $\operatorname{mes} D_2 > \operatorname{mes} D_0$.

Тогда

$$\sup_{x\in D} u > C\,\frac{(\operatorname{mes} D_0)^{\frac{2(n-1)}{n}} R^2}{\operatorname{mes} D \operatorname{mes} D_1}\, m, \tag{50}$$

где C зависит от размерности пространства и константы эллиптичности.

Из этой леммы очевидным образом следуют два утверждения:

Лемма 3.2. *Пусть выполнены предположения леммы 3.1. Тогда для любых $M > 0$ и $A > 0$ найдется такое $\varepsilon_1 > 0$, зависящее от M, A, константы эллиптичности и размерности пространства, что при*

$$\operatorname{mes} D < \varepsilon_1 R^n, \tag{51}$$

$$\operatorname{mes} D_0 \geqslant \frac{\varepsilon_1}{M} R^n \tag{52}$$

выполняется неравенство

$$\sup_{x \in D} u > Am. \tag{53}$$

Для доказательства достаточно заметить, что $\operatorname{mes} D_1 < \operatorname{mes} D$.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены предположения леммы 3.1. Тогда для любых $A > 0$ и $\sigma > 0$ найдется такое* $\varepsilon_2 > 0$, зависящее от A, σ, *константы эллиптичности и размерности пространства, что из*

$$\operatorname{mes} D_1 < \varepsilon_2 R^n, \tag{54}$$

$$\operatorname{mes} D_0 > \sigma R^n, \tag{55}$$

$$\operatorname{mes} D_2 > \sigma R^n \tag{56}$$

следует, что

$$\sup_{x \in D} u(x) > Am. \tag{57}$$

Для доказательства достаточно заметить, что $\operatorname{mes} D < \operatorname{mes} Q_1^0 \cdot R^n$.

Доказательство леммы 3.1. Будем считать, что $R = 2$, $m = 1$ и $x^0 = 0$, от чего, конечно, общность не пострадает. Пусть O_u — множество особых точек $x \in \overline{D}$ функции u. Положим

$$N = u[O_u].$$

Тогда по теореме 2.1

$$\operatorname{mes} N = 0.$$

Положим $E = \left(0, \frac{1}{2}\right) \setminus N$.

N — замкнутое множество. Таким образом E — открытое, и

$$\operatorname{mes} E = \frac{1}{2}. \tag{58}$$

Для каждого $t \in E$ обозначим через D_t множество точек $x \in D$, где $u(x) > t$. Граница множества D_t состоит из точек множества уровня t функции u — его мы обозначим через E_t — и из точек, лежащих на сфере S_2^0. Так как на E_t нет особых точек функции u, то E_t состоит из гладких $(n-1)$-мерных поверхностей. В точках E_t производная по внутренней нормали строго положительна (заметим, что на поверхности уровня E_t имеет место $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| = |\nabla u|$).

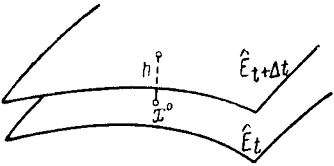

Рис. 20.

Положим $\hat{E}_t = E_t \cap Q_1^0$ и

$$I(t) = \int_{\hat{E}_t} \frac{ds}{\frac{\partial u}{\partial n}}.$$

Этот интеграл определен при $t \in E$ и в точках множества E является непрерывной функцией. Рассмотрим множества уровня $\hat{E}_t$ и $\hat{E}_{t+\Delta t}$, $t \in E$, возьмем некоторую точку x^0 на $\hat{E}_t$ и пусть h — отрезок нормали в этой точке между $\hat{E}_t$ и $\hat{E}_{t+\Delta t}$ (рис. 20). Тогда

$$\Delta t = \frac{\partial u}{\partial n} h + o(h),$$

или

$$h = \frac{\Delta t}{\frac{\partial u}{\partial n}} + o(\Delta t), \quad \text{так как} \quad \frac{\partial u}{\partial n} \neq 0.$$

Поэтому

$$I(t)\Delta t = \left[\int_{\hat{E}_t} \frac{ds}{\frac{\partial u}{\partial n}}\right] \Delta t = \int_{\hat{E}_t} h\, ds + o(\Delta t) =$$

$$= \operatorname{mes} u^{-1}[(t, t+\Delta t)] \cap Q_1^0 + o(\Delta t).$$

А отсюда следует, что

$$\int_0^{1/2} I(t)\,dt < \operatorname{mes} D_1. \tag{59}$$

В силу (59) найдется точка $t_0 \in E$, для которой

$$I(t_0) < 2 \operatorname{mes} D_1,$$

т. е.

$$\int_{\widehat{E}_{t_0}} \frac{ds}{\frac{\partial u}{\partial n}} < 2 \operatorname{mes} D_1 .$$

Применяя к интегралу

$$\int_{\widehat{E}_{t_0}} ds = \operatorname{mes}_{n-1}\widehat{E}_{t_0} = \int_{\widehat{E}_t} \sqrt{\frac{\partial u}{\partial n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial u}{\partial n}}}\,ds$$

неравенство Коши — Буняковского, мы находим

$$(\operatorname{mes}_{n-1}\widehat{E}_{t_0})^2 \leqslant \int_{\widehat{E}_{t_0}} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds \int_{\widehat{E}_{t_0}} \frac{ds}{\frac{\partial u}{\partial n}},$$

или

$$\int_{\widehat{E}_{t_0}} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds \geqslant (\operatorname{mes}_{n-1}\widehat{E}_{t_0})^2 \Big/ \int_{\widehat{E}_{t_0}} \frac{ds}{\frac{\partial u}{\partial n}} > \frac{(\operatorname{mes}_{n-1}\widehat{E}_{t_0})^2}{2 \operatorname{mes} D_1}. \tag{60}$$

Так как $\widehat{E}_{t_0}$ разделяет в шаре Q_1^0 множества D_0 и D_2, причем $\operatorname{mes} D_2 > \operatorname{mes} D_0$, то по изопериметрическому неравенству (Дополнение III)

$$\operatorname{mes}_{n-1}\widehat{E}_{t_0} > \beta \operatorname{mes} D_0^{\frac{n-1}{n}},$$

где β — константа, зависящая от размерности пространства.

Поэтому (60) дает нам

$$\int_{\widehat{E}_{t_0}} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds \geqslant \frac{\beta^2}{2}\,\frac{\operatorname{mes} D_0^{2\frac{n-1}{n}}}{\operatorname{mes} D_1}. \tag{61}$$

Рассмотрим часть D'_{t_0} множества D_{t_0}, расположенную между сферами S_1^0 и S_2^0 и применим к ней теорему 2.2: найдется кусочно-гладкая поверхность Σ, разделяющая в D'_{t_0} эти две сферы, такая, что

$$\int_\Sigma \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| ds < K \operatorname{mes} D'_{t_0} \cdot \operatorname*{osc}_{D'_{t_0}} u,$$

где K — константа, зависящая от константы эллиптичности уравнения и от размерности пространства.

Отсюда

$$\int_\Sigma \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| ds < K \operatorname{mes} D \cdot 2 \sup_D u. \tag{62}$$

Рассмотрим теперь часть множества D'_{t_0}, которую Σ не отделяет от $Q^0_{1/2}$; обозначим ее через $\hat{D}_{t_0}$. Ее граница состоит из части E_{t_0} — обозначим ее через Γ_1 — и из части Σ — обозначим ее через Γ_2. Мы имеем $\Gamma_1 \supset \hat{E}_{t_0}$.

Применим к $\hat{D}_{t_0}$ формулу Грина. Мы получаем

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0.$$

Мы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum a_{ik} \gamma_i \frac{\partial u}{\partial x_k},$$

и так как на поверхности уровня Γ_1 направление внешней нормали совпадает с направлением градиента: $\gamma_i = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{|\nabla u|}$, то в точках Γ_1

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big/ |\nabla u| > C_1 |\nabla u| = C_1 \frac{\partial u}{\partial n}$$

(C_1 — константа неравенства (4)) и, согласно (61)

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds > \frac{C_1 \beta^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{mes} D_0^{2\frac{n-1}{n}}}{\operatorname{mes} D_1},$$

а

$$\int_{\Gamma_2} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| ds < K \operatorname{mes} D \sup_D u.$$

Поэтому

$$\sup u > C \frac{\operatorname{mes} D_0^{2\frac{n-1}{n}}}{\operatorname{mes} D \operatorname{mes} D_1}, \tag{63}$$

где $C = C_1\beta^2/2K$ зависит от константы эллиптичности и от размерности пространства, ч. и т. д.

Лемма 3.4. *Пусть в шаре $Q_R^{x^0}$ расположена область D, пересекающая шар $Q_{R/4}^{x^0}$ и имеющая предельные точки на сфере S_R^0. Пусть Γ — та часть границы D, которая расположена строго внутри $Q_R^{x^0}$. Пусть в области D определено уравнение* (49) *и $u(x)$ — его решение, положительное в D, непрерывное в $\overline{D}$ и обращающееся в нуль на Γ. Пусть*

$$\sup_{x \in Q_{R/4}^{x^0} \cap D} u(x) = m. \tag{64}$$

Утверждается, что для любого $A' > 0$ найдется такое $\varepsilon_3 > 0$, что при

$$\operatorname{mes} D < \varepsilon_3 R^n \tag{65}$$

выполняется

$$\sup_{x \in D} u(x) > A'm.$$

Доказательство. Положим в лемме 3.2 $M = 2^n$, $A = 8A' + 1$ и найдем, согласно этой лемме, $\varepsilon_1 > 0$, соответствующее и этим M и A. Докажем, что можно взять $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1}{2^n}$. Достаточно рассмотреть случай, когда $m = 1$.

Пусть x^1 — точка сферы $S_{R/4}^{x^0}$, в которой $u(x^1) = 1$. Положим для каждого r, $0 < r \leqslant \frac{R}{2}$,

$$M(r) = \max_{\substack{|x - x^1| = r \\ x \in D}} u(x) = u(x^r).$$

Докажем, что для всякого r, $0 < r \leqslant \frac{3R}{8}$ найдется такое $\Delta \left(0 < \Delta < \frac{R}{8}\right)$, что

$$M(r + \Delta) > M(r)\left(1 + \frac{8A'\Delta}{R}\right). \tag{66}$$

Введем следующие обозначения:

$$Q_r^m = Q_{R/2^{m+1}}^{x^r},$$

B_r^m — множество точек $x \in D$, где $u(x) > \frac{2^m - 1}{2^m} M(r)$,
D_r^m — компонента пересечения $B_r^m \cap Q_r^m$, содержащая точку x^r,

$$u_r^m = u(x) - \frac{2^m - 1}{2^m} M(r).$$

Для функции u_r^m в шаре Q_r^m неравенства (51) и (52) примут вид

$$\operatorname{mes} D_r^m < \varepsilon_1 \left(\frac{R}{2^{m+1}}\right)^n, \tag{51'}$$

$$\operatorname{mes} D_r^{m+1} \geqslant \frac{\varepsilon_1}{2^n} \left(\frac{R}{2^{m+1}}\right)^n. \tag{52'}$$

Мы докажем, что существует такое m_1, для которого эти неравенства выполняются. Для $m = 0$ (51′) следует из того, что $\operatorname{mes} D_r^0 < \operatorname{mes} D < \frac{\varepsilon_1}{2^n} R^n$. Далее, если (52′) не выполнено для $m = k$, то (51′) выполнено для $m = k + 1$. Наконец, найдется такое m_0, что (52′) выполнено для $m = m_0$. Это можно показать следующим образом. В точке x^r мы имеем $\nabla u \neq 0$. Действительно, точка x^r расположена на поверхности шара $Q_r^{x^1}$, и в ней принимается наибольшее значение из тех, которые функция u принимает в $\overline{D \cap Q_r^{x^1}}$. Поэтому по лемме о нормальной производной $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{x^r} > 0$. Из того, что $\nabla u|_{x^r} \neq 0$, следует, что поверхность уровня, проходящая через точку x^r, является в окрестности x^r бесконечно дифференцируемой и, в частности, имеет ограниченную кривизну. Поэтому найдется такое m_0, что имеется шар радиуса $R/2^{m_0+3}$, на поверхности которого лежиг точка x^r и который всеми своими остальными точками лежит в области, где $u(x) > M(r)$. Но тогда этот шар входит в $D_r^{m_0+1}$, а потому

$$\operatorname{mes} D_r^{m_0+1} > \left(\frac{1}{4}\,\frac{R}{2^{m_0+1}}\right)^n \Omega_n$$

и, значит, для $m=m_0$ выполнено неравенство (52′) (если только $\varepsilon_1 < 2^n\Omega_n$; будем считать, что этому условию ε_1 удовлетворяет).

Отсюда следует, что найдется такое m_1, $0 \leqslant m_1 \leqslant m_0$, что для $m=m_1$ неравенства (51′) и (52′) выполняются. Поэтому, применяя лемму 3.2, получаем

$$\sup_{D_r^{m_1}} u_r^{m_1} \geqslant (8A'+1)\frac{M(r)}{2^{m_1}}$$

или

$$M\left(r+\frac{R}{2^{m_1}}\right) \geqslant (8A'+1)\frac{M(r)}{2^{m_1}}+\frac{2^{m_1}-1}{2^{m_1}}M(r)=M(r)\left(1+\frac{8A'}{2^{m_1}}\right),$$

и нам остается положить $\Delta=\frac{R}{2^{m_1}}$.

Но из неравенства (66) следует, что

$$\sup_D u > A'.$$

Действительно, пусть Δ_1 — верхняя грань таких $\Delta \leqslant \frac{R}{4}$, что

$$M\left(\frac{R}{4}+\Delta\right) \geqslant \left(1+\frac{8A'\Delta}{R}\right). \tag{67}$$

По доказанному, $\Delta_1 > 0$. Если $\Delta_1 < \frac{R}{8}$, то существует $\Delta \leqslant \frac{R}{8}$ такое, что

$$M\left(\frac{R}{4}+\Delta_1+\Delta\right) \geqslant M\left(\frac{R}{4}+\Delta_1\right)\left(1+\frac{8A'\Delta}{R}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(1+\frac{8A'(\Delta_1+\Delta)}{R}\right),$$

и мы приходим к противоречию с тем, что Δ_1 — верхняя грань Δ, для которых выполнено (67). Итак, $\Delta_1 \geqslant \frac{R}{8}$, но это и значит, что

$$\sup_D u > A'.$$

Доказанные нами леммы 3.3 и 3.4 позволят нам сейчас получить для решений уравнения (49) априорную оценку нормы Гёльдера.

Вспомним, как мы получали такую оценку для уравнения типа Кордеса (часть 1, § 7). Для такой оценки нам достаточно было доказать, что для решения, определенного в шаре $Q_{4R}^{x^0}$, имеет место

$$\operatorname*{osc}_{Q_{4R}^{x_0}} u > (1+\gamma) \operatorname*{osc}_{Q_R^{x^0}} u, \tag{68}$$

а это последнее неравенство вытекало из леммы 4.2 главы I.

Пусть в шаре $Q_{4R}^{x^0}$ расположена область D, пересекающая $Q_R^{x^0}$ и имеющая предельные точки на S_{4R}^0. Пусть Γ — та часть границы области D, которая расположена строго внутри $Q_{4R}^{x^0}$. Пусть H — пересечение дополнения области D с шаром $Q_R^{x^0}$. Пусть $u(x)$ решение уравнения типа Кордеса с константой эллиптичности e, положительное в D и обращающееся в нуль на Γ. Тогда

$$\sup_D u > \left(1 + \eta \frac{\operatorname{mes} H}{R^n}\right) \sup_{D \cap Q_R^{x^0}} u, \tag{69}$$

где η — константа, зависящая от e и от n.

Заметим, что при доказательстве неравенства (68) эта лемма использовалась только для случая, когда мера $\operatorname{mes} H$ была не меньше половины меры шара $Q_R^{x_0}$.

Поэтому достаточно было бы доказать, что для $\lambda > 0$ найдется $\gamma > 0$, зависящее от λ, e и n такое, что при

$$\operatorname{mes} H / \operatorname{mes} Q_R^{x^0} > \lambda \tag{70}$$

имеет место

$$\sup_D u > (1+\gamma) \sup_{D \cap Q_R^{x^0}} u.$$

Сформулируем это в виде леммы.

Л е м м а 3.5. *Пусть D — область, расположенная в шаре Q_R^0, пересекающая шар $Q_{R/4}^0$ и имеющая предельные точки на сфере S_R^0. Пусть Γ — та часть границы D, которая расположена строго внутри шара Q_R^0. Пусть* *в области D определено уравнение* (49) *и* $u(x)$ — *его решение, непрерывное в* $\overline{D}$, *положительное в* D *и обращающееся в нуль на* Γ.

Положим

$$Q_1^0 \setminus D = H.$$

Тогда для любого $\tau > 0$ *существует такое* $\gamma > 0$, *что из того, что*

$$\operatorname{mes} H > \tau R^n,$$

следует

$$\sup_D u > (1+\gamma) \sup_{D \cap Q_1^0} u,$$

где γ — *константа, зависящая от* τ, *от* e *и от* n.

Доказательство. Можно считать, что

$$\sup_{D \cap Q_1^0} u = 1.$$

Положим

$$\sigma = \min(\varepsilon_3/4^n, \ \tau),$$

где ε_3 — константа леммы 3.4 для $A' = 2$.

Пусть m — наименьшее натуральное число такое, что

$$\frac{\Omega_n \cdot 2^n}{m-1} < \varepsilon_2, \tag{71}$$

где ε_2 — константа, соответствующая, согласно лемме 3.3, выбранному σ и $A = 2$.

Рассмотрим функцию

$$v(x) = u(x) - 1 + 2^{-m}.$$

Обозначим через D' множество точек $x \in D$, в которых $v(x) > 0$. Возможны два случая:

1) $\operatorname{mes} D' \leqslant \sigma R^n$ и 2) $\operatorname{mes} D' > \sigma R^n$.

В случае 1) обозначим через x^1 точку, принадлежащую сфере $S_{R/4}^0$ такую, что $u(x^1) = 1$ и, следовательно, $v(x^1) = 2^{-m}$. Рассмотрим шар $Q_{R/4}^{x^1}$. Пересечем шар $Q_{R/4}^{x^1}$ с D' и к той компоненте D'' этого пересечения, которая содержит x^1, применим лемму 3.4. Мы получим $\sup\limits_{D''} v(x) \geqslant \geqslant 2 \cdot 2^{-m}$ и, следовательно,

$$\sup_D u \geqslant 1 + 2^{-m}.$$

В случае 2) рассмотрим множество

$$G_i = \{x \mid x \in Q^0_{R/2},\ 1 - 2^{-i} < u(x) < 1 - 2^{-(i-1)}\},$$
$$i = 1, 2, \ldots, m-1.$$

В силу неравенства (71) найдется такое i_0, что $\operatorname{mes} G_{i_0} < < \varepsilon_2 R^n$.

Рассмотрим функцию

$$w(x) = u(x) - 1 + 2^{-i_0}.$$

Обозначим через D_1 множество точек $x \in Q^0_{R/2} \cap D$, где $0 < < w(x) < 2^{-(i_0+1)}$. Обозначим далее через D_0 множество точек $x \in Q^0_{R/2} \cap D$, где $w(x) > 2^{-(i_0+1)}$ и через D_2 — множество точек $x \in Q^0_{R/2} \setminus D_1 \setminus D_0$. Так как $D_0 \supset D'$ и $D_2 \supset H$, то

$$\operatorname{mes} D_0 > \sigma R^n, \qquad \operatorname{mes} D_2 > \sigma R^n,$$

и так как

$$\operatorname{mes} D_1 < \varepsilon_2 R^n,$$

то по лемме 3.3

$$\sup_D w(x) > 2 \cdot 2^{-i_0},$$

или

$$\sup_D u(x) > 1 + 2^{-i_0} > 1 + 2^{-m}.$$

Следовательно, во всех случаях мы имеем

$$\sup_D u(x) > (1 + \gamma) \sup_{D \cap Q^0_1} u,$$

где $\gamma = 2^{-m}$ зависит, таким образом, от τ, от e и от n.

Доказав эту лемму, мы можем прямо уже сослаться на первую главу (заменить лемму 4.2 леммой 3.5) и утверждать, что справедлива теорема:

Теорема 3.1. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (49) *в области D. Тогда для всякого положительного $\rho > 0$ имеет место неравенство*

$$\| u \|_{\alpha}^{D_\rho} \leqslant C \| u \|_0^D,$$

где $\alpha > 0$ зависит от e и n, а C, кроме того, еще и от ρ.

Из этой же леммы 3.5 вытекает

Теорема 3.2. *Всякая точка границы Γ области D, которой можно коснуться вершиной конуса, лежащего вне D, является e-регулярной для класса уравнений* (49).

Действительно, лемма 3.5 дает нам следующее утверждение: пусть $\lambda > 0$ — некоторое положительное число. Пусть в шаре $Q_R^{x_0}$ расположена область D, пересекающая $Q_{R/4}^{x_0}$ и достигающая сферы $S_R^{x^0}$. Пусть Γ — часть границы D, лежащая строго внутри $Q_R^{x_0}$. Пусть $H = Q_{R/4}^{x_0} \setminus D$ и

$$\operatorname{mes} H > \lambda R^n.$$

Пусть в D определено решение $u(x)$ уравнения (49), непрерывное в $\overline{D}$, положительное в D и обращающееся в нуль на Γ.

Тогда

$$\sup_D u > (1 + \gamma) \sup_{D \cap Q_{R/4}^{x^0}} u,$$

где $\gamma > 0$ — константа, зависящая от λ, от e и от n.

Обращаясь к стр. 30—33 главы I и повторяя приведенные там рассуждения, мы получим доказательство нашей теоремы.

Примечания.

Все рассуждеиия этого параграфа иеобычайио упростились бы, если бы мы сумели доказать следующий факт.

Пусть во всем простраистве R_n определеи оператор (49). Пусть $g(x, y)$ — решеиие уравнеиия

$$Lg = -\delta(x - y)$$

положительное и обращающееся в иуль иа бескоиечиости. Тогда существуют две коистаиты $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, зависящие только от коистаиты эллиптичности, такие, что

$$\frac{C_1}{|x - y|^{n-2}} < g(x, y) < \frac{C_2}{|x - y|^{n-2}}. \tag{72}$$

Этот факт верен. После той работы, которую мы проделали, нам нетрудно было бы уже его доказать. Имеются и другие его доказательства, но все они не просты. Если бы найти его простое доказательство, то, конечно, вся схема первой главы с емкостями прошла бы без изменения (емкость здесь в силу (72) была бы винеровской).

Теорема 3.1, составляющая основное содержание этого параграфа, впервые была доказана *Де Джоржи* [1]. Затем она доказывалась многими авторами и различными способами. Доказательство *Нэша* и *Мозера* и ряд их обобщений имеются в статье *О. А. Олейник* и *С. Н. Кружкова* [1] и в лекциях *О. А. Олейник* [3]. Доказательство самого Де Джоржи и ряд его обобщений и доказательство Мозера можно найти в цитированной книге *О. А. Ладыженской* и *Н. Н. Уральцевой* [1]. Доказательство, приведенное в § 3, можно найти в статье *Е. М. Ландиса* [5]. По поводу цитированных работ см. примечания к следующему параграфу.

§ 4. Априорная оценка нормы Гёльдера (продолжение)

Мы до сих пор занимались уравнением (49), относительно коэффициентов которого мы предполагали, что они бесконечно дифференцируемы. Перейдем теперь к самосопряженному уравнению с измеримыми коэффициентами. Но прежде чем сделать это, докажем, что решения уравнения (49) являются бесконечно дифференцируемыми функциями. Мы пользовались этим.

В главе I мы доказывали теорему существования решения задачи Дирихле (§ 8)

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}=0, \quad u\,|_{\Gamma}=\varphi$$

в следующем виде: если все точки ∂D являются e-регулярными и φ непрерывна, а $a_{ik}(x)$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, то $u\in C_{2+\alpha}(D_\rho)$.

По замечанию 8.2 на стр. 74 этот результат можно распространять и на уравнение с младшими членами. В частности, справедливо утверждение:

Существует решение задачи Дирихле

$$Lu\equiv\sum a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}+\sum b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0, \tag{73}$$

$$u\,|_{\partial D}=\varphi$$

при условии, что все коэффициенты удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, все точки ∂D являются e-регулярными и φ непрерывна. Это решение принадлежит классу $C_{2+\alpha}(D_\rho)$ при всяком $\rho > 0$.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — семейство функций $f \in C_\alpha(D)$, равномерно ограниченных по норме $\| \quad \|_\alpha^D$. Тогда $\mathfrak{M}$ компактно по норме $\| \quad \|_{\alpha'}^D$ при любом $0 < \alpha' < \alpha$.*

Доказательство. Из ограниченности $f \in \mathfrak{M}$ по норме $\| \quad \|_\alpha^D$:

$$\| f \|_\alpha^D \leqslant M \quad \text{при} \quad f \in \mathfrak{M},$$

очевидным образом следует, что $\mathfrak{M}$ компактно в $C(D)$ (действительно, это семейство равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, а потому применима теорема Арцела). Пусть $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ — последовательность, сходящаяся в $C(D)$ к некоторой функции f: $f_n \rightrightarrows f$. Тогда

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x) - f_n(y)|}{|x-y|^\alpha}, \qquad x \neq y,$$

а потому

$$\| f \|_\alpha^D \leqslant M.$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, что

$$M |x-y|^{\alpha-\alpha'} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |x-y| < \delta. \tag{74}$$

Тогда

$$\frac{|[f_n(x) - f(x)] - [f_n(y) - f(y)]|}{|x-y|^{\alpha'}} \leqslant \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|x-y|^{\alpha'}} + \\ + \frac{|f_n(y) - f(y)|}{|x-y|^{\alpha'}} \tag{75}$$

и

$$\frac{|[f_n(x) - f(x)] - [f_n(y) - f(y)]|}{|x-y|^{\alpha'}} \leqslant \\ \leqslant \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x-y|^\alpha} |x-y|^{\alpha-\alpha'} + \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} |x-y|^{\alpha-\alpha'} \leqslant \\ \leqslant 2M |x-y|^{\alpha-\alpha'}. \tag{76}$$

Пусть теперь N настолько велико, что при $n > N$ справедливо

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \delta^{\alpha'} \quad \text{при всех} \quad x \in D. \tag{77}$$

Тогда из (74)—(77) следует, что при $n > N$, независимо от того, выполнено ли неравенство $|x - y| < \delta$ или $|x - y| \geqslant \delta$ имеет место

$$\frac{|[f_n(x) - f(x)] - [f_n(y) - f(y)]|}{|x - y|^{\alpha'}} < \varepsilon,$$

но это (вместе со сходимостью f_n в C) и означает, что

$$f_n \xrightarrow[C_{\alpha'}(D)]{} f.$$

Следствие. Из определения нормы $\| \ \|_{m+\alpha}^{D}$ мы получаем: пусть семейство функций $\mathfrak{M}$ равномерно ограничено по норме $\| \ \|_{m+\alpha}^{D}$ константой M. Тогда $\mathfrak{M}$ компактно по норме $\| \ \|_{m+\alpha'}^{D}$ при любом α', $0 < \alpha' < \alpha$.

Теорема 4.1. *Если в уравнении задачи* (73) *коэффициенты бесконечно дифференцируемы, то решение u этой задачи также бесконечно дифференцируемо.*

Доказательство. Докажем, что из того, что $u \in C_{m+\beta}(D_\rho)$, $m \geqslant 2$, $\beta > 0$, $\rho > 0$ следует, что

$$u \in C_{m+1+\beta'}(D_{2\rho}), \qquad 0 < \beta' < \beta.$$

Продифференцируем в D_ρ уравнение (73) $m - 2$ раза по какой-либо последовательности переменных:

$$\frac{\partial^{m-2}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \left(\sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Положим

$$\frac{\partial^{m-2} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = v. \tag{78}$$

Тогда, оставляя слева $\sum a_{ik} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k}$ и перенося все остальные члены уравнения направо, мы получим

$$\sum a_{ik}(x) \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_k} = f\left(x,\ u(x),\ \ldots,\ \frac{\partial^j u(x)}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}},\ \ldots\right)$$
$$j \leqslant m - 1. \tag{79}$$

Правая часть — бесконечно дифференцируемая функция всех своих аргументов в D_ρ.

Выберем произвольную координату x_l и обозначим через h_l вектор, у которого l-я координата h, а остальные — нули.

Пусть $0 < h < \frac{\rho}{2}$. Рассмотрим наряду с (79) равенство

$$\sum a_{ik}(x+h_l)\frac{\partial^2 v(x+h_l)}{\partial x_i\,\partial x_k} = \\ = f\left(x+h_l,\ u(x+h_l),\ \ldots,\ \frac{\partial^l u(x+h_l)}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}},\ \ldots\right). \quad (80)$$

Вычитая (79) из (80) и деля на h, мы получим в $D_{\frac{3}{2}\rho}$

$$\sum a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}\left[\frac{v(x+h_l)-v(x)}{h}\right] = \\ = -\frac{a_{ik}(x+h_l)-a_{ik}(x)}{h}\,\frac{\partial^2 v(x+h_l)}{\partial x_i\,\partial x_k} + \\ + \frac{f(x+h_l,\ u(x+h_l),\ \ldots)-f(x,\ u(x),\ \ldots)}{h}.$$

Обозначим правую часть через

$$\Phi_h\left(x,\ x+h_l,\ u(x),\ u(x+h_l),\ \ldots \right.\\ \left.\ldots,\ \frac{\partial^l u(x)}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}},\ \frac{\partial^l u(x+h_l)}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}},\ \ldots\right).$$

По лемме Адамара (см. книгу Петровского [2]) функция Φ_h является при всяком фиксированном h бесконечно дифференцируемой функцией всех своих аргументов. При этом производные по этим аргументам ограничены равномерно по h, а сама Φ_h стремится к пределу при $h \to 0$. Поэтому, если рассматривать Φ_h как функцию x, то

$$\|\Phi_h\|_3^{D_{\frac{3}{2}\rho}} < M,$$

где константа M не зависит от h.

Применяя к уравнению

$$\sum a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left[\frac{v(x+h_l)-v(x)}{h} \right] = \Phi_h(x)$$

внутреннюю оценку Шаудера (глава I, неравенство (45)), мы получаем

$$\left\| \frac{v(x+h_l)-v(x)}{h} \right\|_{2+\beta}^{D_{2\rho}} \leqslant$$

$$\leqslant C \left(\| \Phi_h \|_\beta^{D_{\frac{3}{2}\rho}} + \left\| \frac{v(x+h_l)-v(x)}{h} \right\|_0^{D_{\frac{3}{2}\rho}} \right),$$

и так как $u \in C_{m+\beta}(D_\rho)$, то в силу (97)

$$\left\| \frac{v(x+h_l)-v(x)}{h} \right\|_0^{D_{\frac{3}{2}\rho}} \leqslant \| u \|_{m-1}^{D_\rho} \leqslant \| u \|_{m+\beta}^{D_\rho} \leqslant M',$$

где M' — константа, не зависящая от h.

Таким образом, окончательно

$$\left\| \frac{v(x+h_l)-v(x)}{h} \right\|_{2+\beta}^{D_{2\rho}} < M''.$$

Поэтому по следствию из леммы 4.1 при $\beta' < \beta$ найдется такая последовательность $\{h_l^n\}$, $h_l^n \to 0$ при $n \to \infty$, что

$$\frac{v\left(x+h_l^n\right)-v(x)}{h^n} \xrightarrow[C_{2+\beta'}]{} f(x) \in C_{2+\beta'}(D_{2\rho}).$$

Но функция v дифференцируема, а потому

$$\frac{\partial v}{\partial x_l} \in C_{2+\beta'}(D_{2\rho}).$$

Итак,

$$v \in C_{3+\beta'}(D_{2\rho})$$

и, значит,

$$u \in C_{m+1+\beta'}(D_{2\rho}).$$

По сделанному в задаче (73) предположению относительно ∂D и граничной функции φ мы имеем

$$u \in C_{2+\alpha}(D_\rho) \quad \text{при любом} \quad \rho > 0,$$

и значит, по индукции мы можем получить, что

$$u \in C_{m+\alpha'}(D_\rho) \quad \text{при любом} \quad \rho > 0.$$

Таким образом, u бесконечно дифференцируема в D (ч. т. д.).

Обратимся теперь к оператору (1) с произвольными измеримыми и ограниченными коэффициентами: $L = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$ и некоторой константой эллиптичности e.

Пусть D — область, граница ∂D которой состоит из точек, которых можно коснуться конусом извне области. Пусть на ∂D определена непрерывная функция φ, которую можно непрерывным образом продолжить на D таким образом, чтобы она оказалась принадлежащей W_2^1. Тогда, разумеется, существует слабое решение задачи Дирихле

$$Lu = 0, \quad u - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1.$$

Мы хотим исследовать свойства этого решения, в частности показать, что оно непрерывно и, более того, во всякой строго внутренней подобласти удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α, зависящим от константы эллиптичности уравнения. Для этого мы воспользуемся полученной априорной оценкой для уравнения с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. А чтобы иметь возможность ее применить, нам понадобится приблизить оператор L оператором с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами.

Для всякой измеримой ограниченной в D функции f можно построить последовательность f_m функций, бесконечно дифференцируемых, ограниченных тою же константой, что и f, и сходящихся к f почти всюду в D. Нам понадобится осуществить это приближение так, чтобы сохранить определенные свойства оператора L.

Удобнее всего воспользоваться для этого операцией усреднения.

Пусть $\omega(x)$ — функция, заданная в R_n, обладающая свойствами:

1) $\omega(x) \in C_\infty$,
2) $\omega(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$,

3) $\omega(x) \geqslant 0$,

4) $\int \omega(x)\,dx = 1$.

Положим

$$\omega_h(x) = \frac{1}{h^n}\,\omega\left(\frac{x}{h}\right).$$

Пусть $f(x)$ — измеримая функция, определенная в D, и пусть $|f(x)| < M$. Продолжим функцию f нулем вне D.

Положим

$$f^h(x) = \int \omega_h(x-y)\,f(y)\,dy.$$

Тогда, как непосредственно видно, $f^h(x)$ — бесконечно дифференцируема, и нам надо только показать, что

$$f^h(x) \to f(x) \text{ почти всюду при } h \to 0.$$

Докажем это последнее обстоятельство.

Пусть

$$E_{m,k} = \left\{ x \in D \,\middle|\, \frac{kM}{m} \leqslant f(x) < \frac{(k+1)M}{m} \right\},$$

$$k = -m,\ -(m-1),\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1.$$

Каждое из множеств $E_{m,k}$ является измеримым, а потому по известной теореме (см. Сакс [1]) почти все его точки являются точками плотности. Пусть $\overset{*}{E}_{m,k}$ — множество точек плотности множества $E_{m,k}$, так что если

$$N = \bigcup_{m,k} \cdot (E_{m,k} \setminus E^*_{m,k}),$$

то

$$\operatorname{mes} N = 0.$$

Пусть $E = D \setminus N$. Докажем, что во всякой точке x множества E $f^h(x) \to f(x)$ при $h \to 0$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть m таково, что $M/m < \varepsilon$. Рассмотрим произвольную точку $x \in D$. Тогда при данном m и некотором k

$$x \in E^*_{m,k}.$$

Так как x — точка плотности множества $E^*_{m,k}$, то

$$\frac{\operatorname{mes}\left(E^*_{m,k}\cap Q^x_h\right)}{\operatorname{mes} Q^x_h}\to 1 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Преобразуем шар Q^x_h в Q^0_1 при помощи преобразования подобия и сдвига, и пусть $E^{x,h}_{m,k}$ — образ множества $E^*_{m,k}\cap Q^x_h$ при этом преобразовании. Тогда

$$\frac{\operatorname{mes} E^{x,h}_{m,k}}{\operatorname{mes} Q^0_1}\to 1 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Мы имеем

$$f^h(x)-f(x)=\int \omega_h(x-y)f(y)\,dy-f(x)=$$
$$=\int\limits_{E^*_{m,k}\cap Q^x_h}\omega_h(x-y)\,[f(y)-f(x)]\,dy+$$
$$+\int\limits_{Q^x_h\setminus E^*_{m,k}}\omega_h(x-y)\,[f(y)-f(x)]\,dy,$$

или

$$|f^h(x)-f(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M}{m}\int\limits_{E^*_{m,k}\cap Q^x_h}\omega_h(x-y)\,dy+2M\int\limits_{Q^x_h\setminus E^*_{m,k}}\omega_h(x-y)\,dy=$$
$$=\frac{M}{m}\int\limits_{E^{x,h}_{m,k}}\omega(z)\,dz+2M\int\limits_{Q^0_1\setminus E^{x,h}_{m,k}}\omega(z)\,dz\to\frac{M}{m}\ \text{при}\ h\to 0.$$

Таким образом, для любой точки $x\in D\setminus N$ и для любого $\varepsilon>0$ найдется такое h_0, что $|f^h(x)-f(x)|<\varepsilon$ при $h<h_0$, но это и значит, что $f^h(x)\to f(x)$ почти всюду.

Пусть имеется оператор (1)

$$L=\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right]$$

с измеримыми ограниченными коэффициентами. Обозначим

$$L^h = \sum_{i,\ k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ik}^h(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right].$$

Проверим, что при операции усреднения константа эллиптичности оператора в области D_h не увеличивается.

Пусть оператор L имел константу эллиптичности e. Это можно написать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(y) \leqslant e \sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}(y)\,\xi_i\xi_k, \quad |\xi| < 1, \quad y \in D.$$

Умножая обе части этого неравенства на $\omega_h(x-y)$ при $x \in D_h$ и интегрируя по y, получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^h(x) \leqslant e \sum_{i,\ k}^{n} a_{ik}^h(x)\,\xi_i\xi_k, \quad |\xi| < 1, \quad x \in D_h.$$

Итак, по оператору L в области D мы можем построить в несколько меньшей области D_h оператор L^h с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, с не большей константой эллиптичности и такой, что его коэффициенты, будучи равномерно ограниченными, стремятся к коэффициентам нашего оператора почти всюду при $h \to 0$.

Аналогично, если

$$C_1|\xi|^2 \leqslant \sum a_{ik}(x)\,\xi_i\xi_k \leqslant C_2|\xi|^2, \qquad x \in D,$$

то

$$C_1|\xi|^2 \leqslant \sum a_{ik}^h(x)\,\xi_i\xi_k \leqslant C_2|\xi|^2, \qquad x \in D^h. \tag{81}$$

Мы имеем непрерывную на ∂D функцию φ, продолженную непрерывным образом на $\overline{D}$ так, что она принадлежит $\overset{1}{W}_2$.

При этом всегда можно считать, что φ как угодно гладка внутри D, например бесконечно дифференцируема (почему?). Возьмем последовательность $h_m \to 0$. Пусть D^m — область с гладкой границей, содержащаяся в D_{2h_m} и $D^m \to D$ при $m \to \infty$. Обозначим через u_m решение задачи

$$L^{h_m} u = 0, \qquad u|_{\partial D_m} = \varphi. \tag{82}$$

По замечанию 8.2 главы I мы можем пользоваться для уравнения

$$\sum a_{lk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} + \sum b_l(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

теми сведениями относительно существования решения задачи Дирихле, которые в главе I были получены для укороченного уравнения

$$\sum a_{lk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} = 0.$$

Поэтому мы можем утверждать, что решение задачи (82) существует и что оно является функцией гладкой в области $\overline{D}^m$ вплоть до границы (функцией $C_{2+\alpha}(\overline{D}^m)$). Поэтому

$$u_m - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D^m) \tag{83}$$

и, следовательно, u_m является решением вариационной задачи

$$D^{h_m}(u_m, u_m) = \int\limits_{D^m} \sum a_{lk}^{h_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dx = \min = d_m, \tag{84}$$
$$u_m - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D^m).$$

Продолжим u_m с D^m на $D \setminus D^m$, считая ее там совпадающей с φ. Тогда

$$u_m - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D).$$

Поэтому u_m являются допустимыми функциями для вариационной задачи

$$\begin{gathered} D(u, u) = \int\limits_D \sum a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx = \min, \\ u - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1. \end{gathered} \tag{85}$$

Докажем, что

$$u_m \xrightarrow[\overset{\circ}{W}{}_2^1]{} u.$$

Так как $u - u_m \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, то по теореме 1.2 достаточно доказать, что

$$\int_D |\nabla (u_m - u)|^2 \, dx \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Но

$$\int_D |\nabla (u_m - u)|^2 \, dx = \int_{D^m} |\nabla (u_m - u)|^2 \, dx + \int_{D \setminus D^m} |\nabla (\varphi - u)|^2 \, dx.$$

Второй интеграл в правой части, очевидно, стремится к нулю при $m \to \infty$, а поэтому достаточно доказать, что

$$\int_{D^m} |\nabla (u_m - u)|^2 \, dx \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Из равномерной оценки константы эллиптичности для усредненного оператора (неравенство (81)) вытекает, что

$$\int_{D^m} |\nabla (u_m - u)|^2 \, dx \leqslant K D^{h_m} (u_m - u, \ u_m - u),$$

где K — константа, не зависящая от m, а потому достаточно доказать, что

$$D^{h_m} (u_m - u, \ u_m - u) \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{86}$$

Это последнее мы и будем доказывать.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Мы имеем

$$u = \varphi + \psi; \qquad \psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1.$$

Найдем такое $\psi_0 \in C_\infty^0 (D)$, чтобы выполнялось

$$\| \psi - \psi_0 \|_{W_2^1} < \mu\varepsilon.$$

Число $\mu > 0$ мы подберем позднее.

Положим

$$v = \varphi + \psi_0 = u + (\psi_0 - \psi),$$

так что

$$\| v - u \|_{W_2^1} < \mu\varepsilon. \tag{87}$$

Поэтому, учитывая (87), замечаем, что (86) будет доказано, если мы сумеем показать, что при достаточно большом m

$$D^{h_m}(u_m - v,\ u_m - v) < \varepsilon.$$

Имеем

$$D^{h_m}(v - u_m,\ v - u_m) = D^{h_m}(v,\ v - u_m) - D^{h_m}(u_m,\ v - u_m).$$

Далее $D^{h_m}(u_m,\ v - u_m) = 0$, так как v — допустимая функция для задачи (84).

Следовательно, надо доказать, что $D^{h_m}(v,\ v - u_m) = D^{h_m}(v,\ v) - D^{h_m}(v,\ u_m) < \varepsilon$ при достаточно больших m. Так как $D^{h_m}(v,\ v) \to D(v,\ v)$ при $m \to \infty$, то при достаточно больших m справедливо

$$\left| D^{h_m}(v,\ v) - D(v,\ v) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Покажем, что при достаточно больших m также справедливо

$$\left| D^{h_m}(v,\ u_m) - D(v,\ v) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для этого оценим модули разностей

$$D^{h_m}(v,\ u_m) - D(v,\ u_m) \quad \text{и} \quad D(v,\ u_m) - D(v,\ v).$$

Начнем с последней:

$$\begin{aligned} | D(v,\ u_m) - D(v,\ v) | &= | D(v,\ v - u_m) | = \\ &= | D(u + (v - u),\ v - u_m) | \leqslant \\ &\leqslant | D(u,\ v - u_m) | + | D(v - u,\ v - u_m) |. \end{aligned}$$

Но $D(u, v - u_m) = 0$, так как v и u_m являются допустимыми для задачи (85).

Выберем теперь константу μ в (87) так, чтобы выполнялось

$$D(v - u,\ v - u_m) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Это можно сделать, так как нормы u_m в W_2^1 равномерно ограничены (u_m — решение задачи (84) и, значит, $D^{h_m}(u_m, u_m) < D^{h_m}(\varphi, \varphi)$ и остается применить неравенство (81)).

Теперь вопрос свелся к тому, чтобы доказать, что при достаточно большом m выполняется неравенство

$$|D^{h_m}(v, u_m) - D(v, u_m)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Докажем это

$$|D^{h_m}(v, u_m) - D(v, u_m)| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_{D_m} \sum \left(a_{ik}^{h_m} - a_{ik}\right) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\, dx \right| +$$
$$+ \left| \int_{D \setminus D_m} \sum a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\, dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\int_{D_m} \sum \left(a_{ik}^{h_m} - a_{ik}\right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx} \sqrt{\int_{D_m} \sum \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)^2 dx} +$$
$$+ \left| \int_{D \setminus D_m} \sum a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\, dx \right|.$$

Самый последний интеграл при достаточно больших m, конечно, делается меньше $\varepsilon/8$. Далее, мы уже замечали выше, что существует константа M такая, что

$$\sqrt{\int_{D_m} \sum \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)^2 dx} < M \text{ при всех } m.$$

Поэтому при достаточно больших m справедливо

$$|D^{h_m}(v, u_m) - D(v, u_m)| \leqslant$$
$$\leqslant M \sqrt{\int_{D_m} \sum \left(a_{ik}^{h_m} - a_{ik}\right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx} + \frac{\varepsilon}{8}.$$

Так как $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2$, а $a_{ik}^{h_m}$ равномерно ограничены и сходятся почти всюду к a_{ik}, то по абсолютной непрерывности интеграла Лебега как функции множества мы получаем

$$\int\limits_{D_m} \sum \left(a_{ik}^{h_m} - a_{ik}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx \to 0 \text{ при } m \to 0.$$

Следовательно, при достаточно большом m

$$M \sqrt{\int\limits_{D_m} \sum \left(a_{ik}^{h_m} - a_{ik}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx} < \frac{\varepsilon}{8}$$

и наше утверждение доказано:

$$u_m \xrightarrow[W_2^1]{} u,$$

где u — слабое решение задачи Дирихле

$$Lu = 0, \quad u - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1.$$

Пусть $|\varphi|\,|_{\overline{D}} < M$. Тогда по теореме 3.1 при любом $\rho > 0$ и при достаточно большом m

$$\left\| u^{h_m} \right\|_{\alpha}^{D_\rho} \leqslant C \cdot M,$$

где α зависит от e и n, а C от e, n и ρ.

Следовательно, при любом $\rho > 0$ последовательность $\{u^{h_m}\}$ сходится к u равномерно в D_ρ и $u \in C_\alpha(D_\rho)$.

Если каждой точки ∂D можно извне коснуться конусом, то по теореме 3.2 последовательность $\{u^{h_m}\}$ сходится равномерно в $\overline{D}$ (ср. гл. I, теорема 8.1).

Итак, мы получили следующую теорему.

Теорема 4.2. *Пусть D — ограниченная область, граница которой состоит из точек, каждой из которых можно коснуться конусом извне области. Пусть в D определен оператор L с константой эллиптичности e.*

Пусть на ∂D определена непрерывная функция φ, которую можно продолжить непрерывным образом на всю область $\overline{D}$ так, чтобы она принадлежала W_2^1.

Рассмотрим задачу Дирихле

$$Lu = 0, \quad u|_{\partial D} = \varphi.$$

Тогда слабое решение $u(x)$ задачи Дирихле является непрерывной функцией в $\overline{D}$, принимает в точках ∂D граничное значение и при всяком $\rho > 0$ в области D_ρ

принадлежит классу $C_\alpha(D_\rho)$, *где* $\alpha > 0$ — *константа, зависящая от* e *и от* n.

В этой теореме мы предполагали, что функцию $\varphi(x)$, непрерывную на ∂D, можно продолжить на $\overline{D}$ так, чтобы она оказалась принадлежащей пространству W_2^1. В свое время уже говорилось, что не всякую непрерывную функцию можно продолжить таким образом. Конечно, если эта функция достаточно хороша, например удовлетворяет условию Липшица, то это сделать всегда можно: функцию, удовлетворяющую условию Липшица на ∂D, можно продолжить на $\overline{D}$ так, чтобы она удовлетворяла условию Липшица на $\overline{D}$, а последняя уже будет принадлежать пространству W_2^1.

Предлагаю эти два утверждения в порядке контрольных вопросов: 1) доказать, что функцию, удовлетворяющую условию Липшица на некотором множестве в R_n, можно продолжить на все R_n так, что она будет удовлетворять условию Липшица, и 2) функция, удовлетворяющая условию Липшица в D, принадлежит W_2^1.

Менее очевидным является то, что не всякую непрерывную функцию можно продолжить нужным нам образом с ∂D на D, даже когда область D является очень простой областью, например, кругом на плоскости; функция φ может даже удовлетворять условию Гёльдера — это не спасет положения. Очень красивый пример такой функции принадлежит Адамару (см. книгу Соболева [1]).

Вот другой пример такой функции φ *). В качестве области D мы возьмем плоскую область с как угодно гладкой границей ∂D, содержащей прямолинейный отрезок l. Будем считать, что этот отрезок лежит на оси x и содержит начало координат O. Функция φ — бесконечно дифференцируемая функция на ∂D, кроме одной единственной точки O, в окрестности которой она устроена следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|\log_2 x|}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

*) Идея этого примера принадлежит В. А. Кондратьеву.

Докажем, что такую функцию φ нельзя продолжить до непрерывной функции, принадлежащей W_2^1.

Для доказательства этого нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 4.2. *Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция одного переменного с суммируемой в квадрате производной, заданная на отрезке* $[0, h]$. *Пусть*

$$\int_0^h f'(x)\,dx = a.$$

Тогда

$$\int_0^h [f'(x)]^2\,dx \geqslant \frac{a^2}{h}. \tag{88}$$

Доказательство немедленно получается из неравенства Коши — Буняковского

$$\left[\int_0^h f'(x)\cdot 1\cdot dx\right]^2 = a^2 \leqslant h\int_0^h f'^2\,dx.$$

Допустим, что нам как-то удалось продолжить φ. Покажем, что $\varphi \notin W_2^1$. Обратимся к рис. 21. Отметим на оси x два отрезка

$$\Delta_m^+ = \left[2^{-m},\ 2^{-m+1}\right]$$

и

$$\Delta_m^- = \left[-2^{-m+1},\ -2^{-m}\right].$$

Мы имеем

$$\varphi(x) > \frac{1}{\sqrt{m}} \quad \text{при} \quad x \in \Delta_m^+$$

и

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Delta_m^-$$

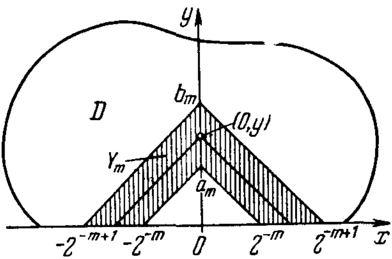

Рис. 21.

(число m мы считаем таким большим, что $\Delta_m^\pm$ принадлежит l). Проведем через концы этих отрезков прямые под углом 45° так, как это изображено на рисунке, чтобы получилась фигура в виде уголка Y_m, заштрихованного на рис. 21. Пусть этот уголок пересекает ось y

по отрезку $[a_m, b_m]$. Пусть $(0, y)$ — произвольная точка этого отрезка. Для значения функции $\varphi(0, y)$ в этой точке выполнено по крайней мере одно из неравенств

$$\varphi(0, y) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{m}},$$

$$\varphi(0, y) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{m}}.$$

Поэтому, проведя из этой точки отрезки $l_y^- = [(-y, 0), (0, y)]$ и $l_y^+ = [(y, 0), (0, y)]$, учитывая, что длина l_y^- и l_y^+ не больше $2^{-m+1+1/2}$ и применяя лемму 4.2, мы найдем, что либо

$$\int\limits_{l_y^+} \left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)^2 dl \geqslant \frac{2^{m-3-\frac{1}{2}}}{m},$$

либо

$$\int\limits_{l_y^-} \left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)^2 dl \geqslant \frac{2^{m-3-\frac{1}{2}}}{m}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{l_y^+ + l_y^-} (\nabla f)^2 \, dl \geqslant \frac{2^{m-3-\frac{1}{2}}}{m}.$$

Учитывая, что ширина уголка Y_m равна $2^{-m-\frac{1}{2}}$, и применяя теорему Фубини, мы находим

$$\int\limits_{Y_m} (\nabla f)^2 \, dx \, dy \geqslant \frac{1}{16m}.$$

Так как при разных m уголки Y_m не перекрываются, то

$$\int\limits_{D} (\nabla f)^2 \, dx \, dy = \infty.$$

Итак, мы убедились в том, что не всякую непрерывную на границе ∂D функцию φ можно продолжить так, чтобы она оказалось принадлежащей W_2^1.

Тем не менее при произвольной непрерывной граничной функции задачу Дирихле для уравнения (1′) с произвольными измеримыми ограниченными коэффициентами в области с достаточно хорошей границей решить можно.

Теорема 4.3. *Пусть область D обладает границей ∂D, каждой точки которой можно коснуться конусом извне области. Пусть в D определен равномерно эллиптический оператор* (23) *с константой эллиптичности e. Пусть на ∂D задана произвольная непрерывная функция φ.*

Тогда задача Дирихле

$$Lu = 0, \qquad u|_{\partial D} = \varphi$$

имеет решение в следующем смысле: существует функция $u(x)$, удовлетворяющая условиям: функция u принадлежит W_2^1 во всякой строго внутренней подобласти области D, и

$$\int_D \sum a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \, dx = 0$$

для любой функции $v \in \mathring{C}_\infty(D)$. Функция u непрерывна на $\overline{D}$ и совпадает на ∂D с функцией φ. В каждой строго внутренней подобласти области D функция u удовлетворяет условию Гёльдера с константой $\alpha > 0$, зависящей от e и от n.

Доказательство этой теоремы здесь не будет проведено. Схема его такова: надо аппроксимировать непрерывную граничную функцию φ гладкими функциями φ_m. Для каждой такой функции можно найти слабое решение u_m. Эти решения будут непрерывными функциями и будут принадлежать $C_\alpha(D_\rho)$ (константа в условии Гёльдера может быть сделана зависящей только от ρ, e и n, но не зависящей от m). Поэтому такое семейство решений будет компактно во всякой внутренней подобласти. Кроме того, на границе выполнены равномерно условия регулярности, значит, семейство $\{u_m\}$ компактно в $C(\overline{D})$, т. е. существует предельная функция $u(x)$, непрерывная в $\overline{D}$ и совпадающая с φ на границе. Кроме того, оно компактно в $C_\alpha(D_\rho)$ при всяком $\rho > 0$, а потому $u \in C_\alpha(D_\rho)$.

Некоторая сложность заключается в том, чтобы показать, что $u(x)$ будет слабым решением, т. е.

$$\int\limits_D \sum a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = 0$$

при любой $v \in \overset{\circ}{C}_\infty(D)$.

Для этого достаточно показать, что для $\rho > 0$ имеет место

$$\| u_m \|_{W_2^1}^{D_\rho} < K \qquad (K \text{ не зависит от } m).$$

Предлагаю в виде задачи докончить доказательство этой теоремы.

Небольшое резюме. Мы видим, что для оператора (1) с произвольными измеримыми ограниченными коэффициентами можно решать задачу Дирихле: если область имеет границу достаточно хорошую (удовлетворяющую условию конуса) и на границе задана непрерывная функция, то существует слабое решение. Это решение необходимо есть непрерывная функция, и, более того, оно во всякой внутренней области удовлетворяет условию Гёльдера. А большего мы и не можем желать, так как в самом начале мы показали на самом простом примере, что первыми производными такое решение обладать не обязано.

Примечание.

В этом параграфе выясняется, какими свойствами обладает слабое решение задачи Дирихле для самосопряженного уравнения с произвольными измеримыми ограниченными коэффициентами, если граничная функция непрерывна и граница достаточно хороша — в нашем случае удовлетворяет «условию конуса» (на самом деле можно было требовать, чтобы она удовлетворяла условию регулярности Винера). Мне хотелось непременно показать, что хотя это решение и не дифференцируемо и по своей сути не должно быть таковым, но тем не менее это все-таки непрерывная функция, принимающая граничные значения в обычном смысле и даже гёльдерова внутри.

Гёльдеровость такого решения доказана в цитированных в предыдущем параграфе работах (где осуществлен тот или иной способ предельного перехода). Принятие граничных значений в регулярных для уравнения Лапласа граничных точках впервые доказано в работе *Литтмана, Стампаккья* и *Вайнбергера* [1]. Я хочу обратить внимание на то, что из неравенства (72) это следует почти очевидным образом,

ГЛАВА III
ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе мы будем рассматривать параболические операторы

$$L - \frac{\partial}{\partial t}, \tag{1}$$

где L — линейный равномерно эллиптический оператор второго порядка.

Эта глава является продолжением первых двух в том смысле, что вопросы, которые в ней будут рассматриваться, и методы, которые будут в ней использоваться, имеют много общего с тем, что излагалось в первых двух главах. Однако она носит вполне самостоятельный характер: теоремы, которые мы будем доказывать, не будут опираться на результаты первых двух глав.

§ 1. Определения и обозначения

Оператор L в (1) имеет вид

$$L = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(t,\ x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,\ x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c\ (t,\ x);$$

$(n+1)$-мерное пространство (t, x) мы будем обозначать через R_{n+1}; n-мерное пространство x будем обозначать через E_n.

Условие равномерной эллиптичности оператора L в некоторой области $D \subset R_{n+1}$ будем записывать в виде

$$\left.\begin{aligned} \sup_{(t,\,x)\in D} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t,\ x) &= M_1 < \infty, \\ \inf_{(t,\,x)\in D}\ \min_{|\xi|=1}\ \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(t,\ x)\xi_i\xi_k &= \alpha_1 > 0. \end{aligned}\right\} \tag{2_1}$$

Кроме того, будет предполагаться, что все коэффициенты ограничены по модулю и $c(t, x) \leqslant 0$.

Положим далее

$$\left.\begin{aligned} \inf_{(t,x)\in D} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t, x) = M_2, \\ \sup_{(t,x)\in D} \max_{|\xi|=1} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(t, x)\xi_i\xi_k = \alpha_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2_2)$$

Классическим решением уравнения

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (3)$$

или неравенств

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} \leqslant 0, \qquad (4)$$

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0 \qquad (5)$$

мы будем называть непрерывную функцию $u(t, x)$, обладающую двумя непрерывными производными по x и одной — по t и удовлетворяющую уравнению или соответствующим неравенствам.

Функции, удовлетворяющие неравенствам (4) и (5), мы будем называть соответственно *супер-* и *субпараболическими.*

Будем обозначать через $Ц_{x^0, R}^{t_1, t_2}$ цилиндр, определяемый неравенствами

$$t_1 < t < t_2, \qquad |x - x^0| < R.$$

Через $S_{x^0, R}^{t_1, t_2}$ будем обозначать боковую поверхность этого цилиндра (замкнутую), а через $Q_{x^0, R}^{t_1}$ и $Q_{x^0, R}^{t_2}$ — соответственно его нижнее и верхнее (открытые) основания (мы считаем ось t направленной вверх).

Последние обозначения мы будем употреблять и вне связи с цилиндром: $Q_{x^0, R}^{t_0}$ есть открытый n-мерный шар, лежащий в гиперплоскости $t = t^0$ радиуса R с центром в точке (t^0, x^0). Пусть $D \subset R_{n+1}$ — некоторая ограниченная область. Назовем *верхней крышкой* области D совокупность таких точек $(t, x) \in \partial D$, для каждой из которых найдется такое $h > 0$, что цилиндр $Ц_{x,\,h}^{t-h,\,t}$ принадлежит области D, а цилиндр $Ц_{x,\,h}^{t,\,t+h}$ целиком расположен вне области D (рис. 22). Верхнюю крышку области D мы будем обозначать через $\gamma(D)$. Множество

$$\Gamma(D) = \partial D \setminus \gamma(D)$$

будем называть *собственной границей* D. Заметим, что $\gamma(D)$ может быть пусто (рис. 23).

Рис. 22.

Пусть $(t^0, x^0) \in \overline{D}$. Будем называть подобластью области D, *подчиненной* точке (t^0, x^0), такое множество D', каждую точку которого можно соединить с (t^0, x^0) ломаной, однозначно проектирующейся в ось t, верхним концом которой является точка (t^0, x^0), и

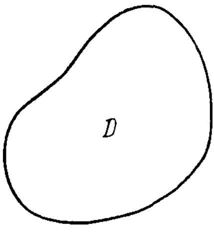

Рис. 23.

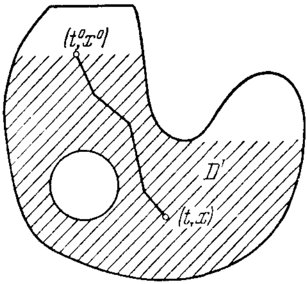

Рис. 24.

которая (исключая, быть может, точку (t^0, x^0)), целиком принадлежит D (рис. 24). D' является областью (почему?)

§ 2. Принцип максимума

Теорема 2.1. *Пусть D — ограниченная область в R_{n+1} и $\gamma(D)$ — ее верхняя крышка. Пусть $\Gamma(D)$ — собственная граница области D.*

Пусть в $D \cup \gamma(D)$ определен оператор (1), *у которого $c(t, x) \leqslant 0$ и $u(t, x)$ — субпараболическая* (*суперпарабо-*

лическая) в $D \cup \gamma(D)$ *функция. Тогда*

$$\sup_D u = \varlimsup_{(t,\,x)\to\Gamma(D)} u(t,\,x), \text{ если } \sup_D u > 0,$$

$$\left(\inf_D u = \varliminf_{\substack{(t,\,x)\to\Gamma(D)\\(t,\,x)\in D}} u(t,\,x), \text{ если } \inf_D u < 0\right).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай субпараболической функции. Итак, пусть

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0$$

и $\sup\limits_D u = M > 0$.

Обозначим

$$\varlimsup_{\substack{(t,\,x)\to\Gamma(D)\\(t,\,x)\in D}} u(t,\,x) = m$$

и допустим, что $M > m$ и, следовательно, существует такое $a > 0$, что

$$M - a > \max(m,\ 0).$$

Пусть область D расположена между гиперплоскостями $t = t'$ и $t = t''$ $(t' < t'')$. Введем вспомогательную функцию

$$u'(t,\ x) = u(t,\ x) - \varepsilon(t - t'),$$

где $\varepsilon = \dfrac{a}{t'' - t'}$.

Тогда

$$Lu' - \frac{\partial u'}{\partial t} = Lu - \frac{\partial u}{\partial t} - c(t,\ x)\cdot\varepsilon(t - t') + \varepsilon \geqslant \varepsilon > 0. \tag{6}$$

Далее

$$\sup_D u' \geqslant M - a > \max(m,\ 0),$$

$$\varlimsup_{\substack{(t,\,x)\to\Gamma(D)\\(t,\,x)\in D}} u'(t,\ x) \leqslant m.$$

Поэтому функция u' достигает верхней грани в некоторой точке $(t^0, x^0) \in D \cup \gamma(D)$.

Покажем, что

$$Lu' - \frac{\partial u'}{\partial t}\Big|_{(t^0,\, x^0)} \leqslant 0,$$

что приведет нас к противоречию с (6), и таким образом, покажет справедливость теоремы.

Мы имеем

$$\frac{\partial u'}{\partial t}\Big|_{(t^0,\, x^0)} \geqslant 0.$$

Покажем, что

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u'}{\partial x_i\, \partial x_k}\Big|_{(t^0,\, x^0)} \leqslant 0.$$

Для этого сделаем линейное преобразование пространства E_n

$$x \longleftrightarrow \xi$$

такое, чтобы

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u'}{\partial x_i\, \partial x_k}\Big|_{(t^0,\, x^0)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi_i^2}\Big|_{(t^0,\, \xi^0)},$$

где ξ^0 — точка, соответствующая x^0. Из того, что (t^0, ξ^0) — точка максимума, следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi_i^{2'}}\Big|_{(t^0,\, \xi^0)} \leqslant 0.$$

Наконец, $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u'}{\partial x_i}\Big|_{(t^0,\, x^0)} = 0$ и $c(t^0, x^0)\, u'(t^0, x^0) \leqslant 0$, так как $c \leqslant 0$, а $u(t^0, x^0) > 0)$.

Окончательно

$$Lu' - \frac{\partial u'}{\partial t}\Big|_{(t^0,\, x^0)} \leqslant 0,$$

и, следовательно, наша теорема доказана.

Следствие. Пусть u непрерывна в $\overline{D}$. Тогда, если u суперпараболична, то

$$\min_{\overline{D}} u = \min_{\Gamma(D)} u \quad \text{при} \quad \min_{\overline{D}} u \leqslant 0,$$

если u субпараболична, то

$$\max_{\overline{D}} u = \max_{\Gamma(D)} u \quad \text{при} \quad \max_{\overline{D}} u \geqslant 0.$$

Введем следующее определение. Пусть нам задана ограниченная область D с собственной границей $\Gamma(D)$. Назовем *первой краевой задачей* для уравнения

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = f \tag{7}$$

в области D следующую задачу.

На $\Gamma(D)$ задана непрерывная функция φ. Требуется найти функцию $u(t, x)$, непрерывную в $\overline{D}$, удовлетворяющую уравнению (7) в $D \cup \gamma(D)$ и обращающуюся в φ на $\Gamma(D)$.

Из принципа максимума очевидным образом следует единственность решения первой краевой задачи и его непрерывная зависимость от граничной функции φ.

Теорема 2.2. *Пусть u_1 и u_2 — решения задач*

$$Lu_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t} = f; \quad Lu_2 - \frac{\partial u_2}{\partial t} = f,$$

$$u_1 |_{\Gamma(D)} = \varphi_1; \quad u_2 |_{\Gamma(D)} = \varphi_2.$$

Тогда

$$| u_1 - u_2 | \leqslant \max_{\Gamma(D)} | \varphi_1 - \varphi_2 |.$$

В частности, если $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, то $u_1 \equiv u_2$.

Задача 1. Пусть $u(t, x)$ — непрерывная в $\overline{D}$ функция. Докажите, что из условий $c(t, x) \leqslant 0$,

$$\left| Lu - \frac{\partial u}{\partial t} \right| < A, \quad \max_{\Gamma(D)} | u | = m$$

следует

$$| u(t, x) | \leqslant m + A(t - t_0),$$

где t_0 таково, что область D целиком расположена выше гиперплоскости $t = t_0$. (Отсюда, в частности, следует, что решение первой краевой задачи непрерывно зависит от правой части)

Задача 2. Пусть в операторе L $c(t,x)\leqslant B$, $B>0$. Тогда из того, что

$$Lu-\frac{\partial u}{\partial t}\leqslant 0 \quad \text{и} \quad u|_{\Gamma(D)}\leqslant m,\ m>0$$

следует, что

$$u(t,\,x)\leqslant me^{B(t-t_0)}$$

(t_0 имеет тот же смысл, что и в предыдущей задаче).

Теорема 2.3 (строгий принцип максимума). *Пусть D — область в пространстве R_{n+1} и $\gamma(D)$ — ее верхняя крышка.*

Пусть в $D\cup\gamma(D)$ определен оператор (1). *Пусть в нем $c\ (t,\,x)\leqslant 0$, и $u(t,\,x)$ — субпараболическая (суперпараболическая) функция в $D\cup\gamma(D)$.*

Тогда, если u достигает положительного максимума (отрицательного минимума) в некоторой точке $(t^0,x^0)\in D\cup\gamma(D)$, то $u\equiv\mathrm{const}$ в подобласти D' области D, подчиненной точке (t^0,x^0).

Для доказательства этой теоремы предварительно докажем две леммы.

Лемма 2.1. *Пусть в цилиндре $Ц^{t_1,\,t_2}_{x^0,\,R}$ плюс его верхняя крышка $Q^{t_2}_{x_0,\,R}$ определен оператор* (1) *и $c(t,x)\leqslant 0$. Пусть u — субпараболическая в цилиндре $Ц^{t_1,\,t_2}_{x^0,\,R}$ вместе с его верхним основанием функция. Пусть в точке (t_2,x^0) функция u достигает положительного максимума, равного M. Тогда $u=M$ на оси цилиндра.*

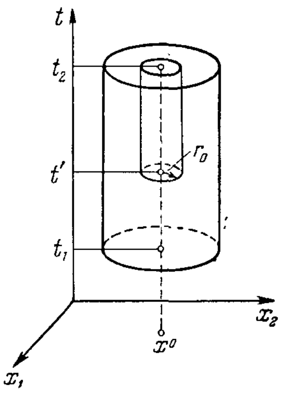

Рис. 25.

Доказательство. Допустим, что на оси цилиндра имеется точка (t',x^0), в которой $u<M-a$, $a>0$. Найдем столь малое r_0, что

$$r_0<\min(R,\ 1)$$

и $u(t',x)<M-a$ при $|x-x^0|<r_0$. Рассмотрим в замкнутом цилиндре $Ц^{t',\,t_2}_{x^0,\,r_0}$ (рис. 25) вспомогательную

функцию

$$v(t, x) = M - ae^{-\beta(t-t')}\left[r_0^2 - |x - x^0|^2\right]^2.$$

Допустим, что нам удалось бы подобрать положительное число β так, чтобы было

$$Lv - \frac{\partial v}{\partial t} \leqslant 0.$$

Покажем, что это приведет нас к противоречию. Действительно, на нижнем основании цилиндра $Ц^{t', t_2}_{x^0, r_0}$ функция v не меньше $M - a$, а на его боковой поверхности она равна M. Значит, разность $v - u$ на нижнем основании и боковой поверхности этого цилиндра неотрицательна. Эта разность суперпараболична, а потому по теореме 2.1 она неотрицательна в этом цилиндре. Значит,

$$M = u(t_2, x^0) \leqslant v(t_2, x^0) = M - ar_0^2 e^{-\beta(t_2-t')} < M.$$

Покажем теперь, что такое β действительно можно подобрать. Мы имеем

$$\frac{\partial\left[r_0^2 - |x - x_0|^2\right]^2}{\partial x_i} = -4\left[r_0^2 - |x - x^0|^2\right](x_i - x_i^0),$$

$$\frac{\partial^2\left[r_0^2 - |x - x^0|\right]^2}{\partial x_i\, \partial x_k} = \begin{cases} 8(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0) & \text{при } i \neq k, \\ 8(x_i - x_i^0)^2 - 4\left[r_0^2 - |x - x^0|^2\right] & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Если теперь мы рассмотрим $L\left(\left[r_0^2 - |x - x^0|^2\right]^2\right)$, то получим $8\sum\limits_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0)$ плюс члены, каждый из которых содержит скобку $\left[r_0^2 - |x - x^0|^2\right]$ хотя бы в первой степени. Объединим эти члены и вынесем из них $\left[r_0^2 - |x - x^0|^2\right]$. Оставшуюся функцию обозначим через $\varphi(t, x)$.

Так как

$$Lv = Mc - ae^{-\beta(t-t')} L\left(\left[r_0^2 - |x - x^0|^2\right]^2\right),$$

а

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \beta a e^{-\beta(t-t')}\left[r_0^2 - |x - x^0|^2\right]^2,$$

то

$$Lv-\frac{\partial v}{\partial t}=Mc-ae^{-\beta(t-t')}\left\{8\sum_{i,\,k=1}^{n}a_{ik}(x_i-x_i^0)(x_k-x_k^0)+\right.$$
$$\left.+\left[r_0^2-|x-x^0|^2\right]\varphi(t,\,x)+\beta\left[r_0^2-|x-x^0|^2\right]^2\right\}.$$

Далее, $\varphi(t,x)$ — ограниченная функция: $|\varphi(t,x)|<K$. По неравенству (2_1)

$$\sum_{i,\,k=1}^{n}a_{ik}(x_i-x_i^0)(x_k-x_k^0)\geqslant\alpha_1|x-x^0|^2$$

и, значит, учитывая, что $c\leqslant 0$ и $M>0$, мы получаем

$$Lv-\frac{\partial v}{\partial t}\leqslant -ae^{-\beta(t-t')}\left\{8\alpha_1|x-x^0|^2-K\left[r_0^2-|x-x^0|^2\right]+\right.$$
$$\left.+\beta\left[r_0^2-|x-x^0|^2\right]^2\right\}.$$

При $|x-x^0|=r_0$

$$8\alpha_1|x-x^0|^2-K\left[r_0^2-|x-x^0|^2\right]=8\alpha_1r_0^2,$$

и, значит, можно найти такое $\delta>0$, что независимо от $\beta>0$, $\{\ \}>0$ при $r_0^2-|x-x^0|\leqslant\delta$. Фиксировав такое δ, подберем β столь большим, чтобы $\{\ \}$ была положительной при $r_0^2-|x-x^0|^2>\delta$.

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Рассмотрим наклонный цилиндр Ц* (рис. 26), *определяемый неравенствами*

$$t_1<t\leqslant t_2,$$
$$|x-[x^0+\beta(t-t_1)]|<R,$$
$$\beta=(\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n).$$

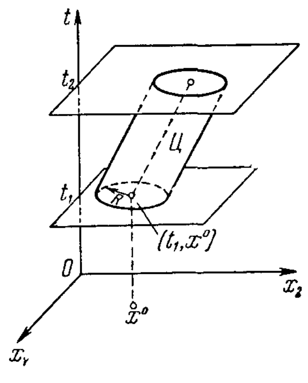

Рис. 26.

Пусть в этом наклонном цилиндре определен оператор (1), *для которого* $c(t,x)\leqslant 0$ *и* u — *субпараболическая для него функция* (*вплоть до верхнего основания*). *Пусть в точке*

$$(t_2,\ x^0+\beta(t_2-t_1))$$

функция u достигает положительного максимума M. Тогда $u = M$ во всех точках интервала

$$t_1 < t < t_2, \qquad x = x^0 + \beta(t - t_1).$$

Доказательство. Сделаем замену переменных в R_{n+1}:

$$t' = t, \qquad x' = x - \beta(t - t_1).$$

При этом оператор $L - \frac{\partial}{\partial t}$ перейдет в оператор

$$L' - \frac{\partial}{\partial t'} = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_k'} + \sum_{i=1}^{n} (b_i - \beta_i) \frac{\partial}{\partial x_i'} + c - \frac{\partial}{\partial t'}$$

того же вида, что и $L - \frac{\partial}{\partial t}$, а цилиндр *Ц* перейдет в прямой цилиндр:

$$t_1 < t' \leqslant t_2, \qquad |x' - x^0| < R.$$

Функция u субпараболична относительно $L' - \frac{\partial}{\partial t'}$. Поэтому по предыдущей лемме $u = M$ на оси этого цилиндра, т. е. $u = M$ на интервале $t_1 < t < t_2$, $x = x^0 + \beta(t - t_1)$, что и требовалось доказать.

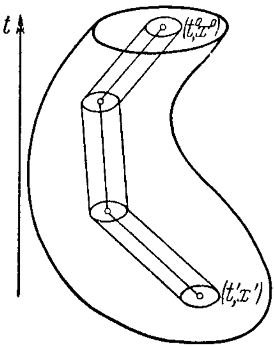

Рис. 27.

Доказательство теоремы 2.3 сразу получается из леммы 2.2. Пусть для определенности u — субпараболична и достигает максимума, равного $M > 0$, в точке $(t^0, x^0) \in D \cup \gamma(D)$. Пусть точку $(t', x') \in D$ можно соединить с точкой (t^0, x^0) при помощи ломаной l, принадлежащей $D \cup \gamma(D)$, однозначно проектирующейся в ось t, верхним концом которой служит точка (t^0, x^0). Для каждого звена ломаной построим цилиндр (вообще говоря, наклонный) с основаниями, ортогональными оси t, осью которого является данное звено, и такой, чтобы он принадлежал $D \cup \gamma(D)$ (рис. 27). Применяя к этим цилиндрам последовательно, начиная с верхнего, лемму 2.2, мы получим, что во всех точках ломаной, а следовательно, и в точке (t', x') функция u принимает значение, равное M.

В дальнейшем ради простоты мы ограничимся рассмотрением оператора L, содержащего только члены второго порядка:

$$L = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_k}. \tag{8}$$

Если только специально не будет оговорено противное, под L будет пониматься именно этот оператор (8).

Так как знак выражения

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t}$$

не меняется от прибавления к функции u константы, то в теореме 2.1 вместо слов «отрицательный минимум» и «положительный максимум» можно говорить просто «минимум» и «максимум», и мы получаем теорему:

Теорема 2.4. *Пусть дана ограниченная область $D \subset \subset R_{n+1}$ и $\gamma(D)$ — ее верхняя крышка. Пусть u — субпараболическая (суперпараболическая) в $D \cup \gamma(D)$ функция.*

Тогда, если u достигает максимума (минимума) в некоторой точке (t^0, x^0), принадлежащей $D \cup \gamma(D)$, то $u \equiv \equiv \mathrm{const}$ во всей подобласти, подчиненной точке (t^0, x^0).

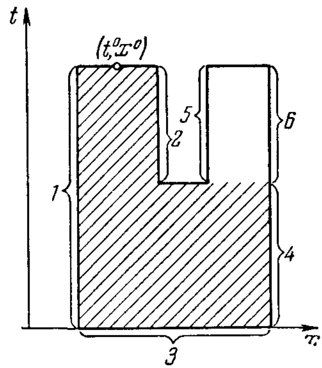

Рис. 28.

Рис. 28 иллюстрирует, что это утверждение распространяется только на подчиненную точке (t^0, x^0) подобласть, но не на более широкую. Для изображенной на нем области рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

и для него следующая задача: $u=0$ на кусках границы *1*, *2*, *3* и *4* и $u>0$ на кусках *5* и *6*. Тогда решение будет равно нулю в заштрихованной части области и будет положительно в незаштрихованной.

В нашей теореме о строгом принципе максимума участвуют только те точки границы области D, которые принадлежат верхней крышке. Ясно, что для *любой* точки границы эта теорема неверна. Рассмотрим хотя бы такой пример:

уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

область

$$0<x<l, \quad 0<t<T$$

решение

$$u(t,\ x)=x^2+2t.$$

В точке (T, l) достигается максимум (и даже строгий максимум), хотя функция не константа в прямоугольнике D, который в данном случае весь подчинен точке (T, l).

Однако может быть и так, что точка границы не принадлежит верхней крышке, и тем не менее для нее строгий принцип максимума справедлив: если в ней решение, непрерывное в замкнутой области, достигает экстремума, то оно равно константе во всей подобласти, подчиненной данной точке.

Этот вопрос оказывается тесно связанным с вопросом о регулярности граничной точки. В дальнейшем (§ 7) мы вернемся к нему.

Примечание.

Строгий принцип максимума для строго параболических операторов впервые был доказан *Л. Ниренбергом* [1]. Доказательство Ниренберга несколько отличается от того, которое дано в книге. Приведенное здесь доказательство можно найти в статье *А. М. Ильина*, *А. С. Калашникова* и *О. А. Олейник* [1].

§ 3. Супер- и субпараболические функции типа потенциала

Пусть в области $D\subset R_{n+1}$ имеется параболический оператор

$$L-\frac{\partial}{\partial t}, \tag{9}$$

где L — оператор вида (8) и для него выполняются неравенства (2_1) и (2_2).

Пусть даны два положительных числа s и β. Определим в R_{n+1} всюду, кроме начала координат, функцию $F_{s,\beta}(t, x)$ следующим образом:

$$F_{s,\beta}(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{t^s} e^{-\frac{|x|^2}{4\beta t}} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leqslant 0 \text{ (кроме } t = 0,\ x = 0). \end{cases}$$

Лемма 3.1. *Если*

$$\beta \leqslant \alpha_1,\ s \geqslant \frac{M_1}{2\beta}, \tag{10}$$

то $F_{s,\beta}$ является функцией субпараболической всюду в D вне начала координат.

Если

$$\beta \geqslant \alpha_2, \quad s \leqslant \frac{M_2}{2\beta}, \tag{11}$$

то функция $F_{s,\beta}$ является суперпараболической всюду в D вне начала координат.

Доказательство. Так как при $t \leqslant 0$, $x \neq 0$ функция обращается в нуль вместе со всеми производными, то достаточно рассмотреть случай $t > 0$. Тогда

$$\frac{\partial F_{s,\beta}}{\partial t} = \left(-\frac{s}{t^{s+1}} + \frac{|x|^2}{4\beta} \frac{1}{t^{s+2}} \right) e^{-\frac{|x|^2}{4\beta t}},$$

$$\frac{\partial^2 F_{s,\beta}}{\partial x_i\, \partial x_k} = \frac{|x|^2}{4\beta^2 t^{s+2}} \left(\frac{x_i}{|x|} \right) \left(\frac{x_k}{|x|} \right) e^{-\frac{|x|^2}{4\beta t}} \quad \text{при } i \neq k,$$

$$\frac{\partial^2 F_{s,\beta}}{\partial x_i^2} = \left(\frac{|x|^2}{4\beta^2 t^{s+2}} \left(\frac{x_i}{|x|} \right)^2 - \frac{1}{2\beta t^{s+1}} \right) e^{-\frac{|x|^2}{4\beta t}},$$

откуда

$$\left(L - \frac{\partial}{\partial t} \right) F_{s,\beta} = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4\beta t}}}{t^{s+2}} \left\{ \frac{|x|^2}{4\beta} \left(\frac{\sum\limits_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \left(\frac{x_i}{|x|} \right) \left(\frac{x}{|x|} \right)}{\beta} - 1 \right) + {} \right.$$
$$\left. + t \left(s - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}}{2\beta} \right) \right\}. \tag{12}$$

Так как

$$\alpha_1 \leqslant \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\left(\frac{x_i}{|x|}\right)\left(\frac{x_k}{|x|}\right) \leqslant \alpha_2$$

и

$$M_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \leqslant M_1,$$

то равенство (12) при условии (10) дает нам

$$\left(L - \frac{\partial}{\partial t}\right) F_{s,\,\beta} \geqslant 0,$$

а при условии (11)

$$\left(L - \frac{\partial}{\partial t}\right) F_{s,\,\beta} \leqslant 0.$$

Пусть $E \subset R_{n+1}$ — B-множество. Пусть на E определена мера μ и $\mu(E) < \infty$. Рассмотрим функцию

$$U_{s,\,\beta;\,E,\,\mu}(t,\,x) = \int\limits_E F_{s,\beta}(t-\tau,\,x-\xi)\,d\mu(\tau,\,\xi).$$

Такую функцию мы будем называть функцией типа потенциала.

Из леммы 3.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Пусть в области D определен оператор* (9). *Пусть $E \subset R_{n+1}$ — B-множество, μ — мера в нем, $\mu(E) < \infty$, и пусть заданы числа $s > 0$ и $\beta > 0$.*

Если s и β удовлетворяют неравенствам (10), *то $U_{s,\,\beta;\,E,\,\mu}(t,x)$ субпараболична в $D \setminus \bar{E}$; если s и β удовлетворяют неравенствам* (11), *то $U_{s,\,\beta;\,E,\,\mu}(t,x)$ суперпараболична в $D \setminus \bar{E}$.*

§ 4. Единственность решения задачи Коши и стабилизация решения задачи Коши при $t \to \infty$

Задачей Коши для уравнения

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

называется следующая задача: на гиперплоскости $t = t_0$ задана непрерывная функция $f(x)$. Требуется найти решение этого уравнения в слое $t_0 < t < T \leqslant \infty$, непрерывное вплоть до гиперплоскости $t = t_0$ и удовлетворяющее условию $u(t_0, x) = f(x)$.

Функцию $v(t, x)$, определенную в слое $t_0 < t < T$, будем называть *медленно растущей*, если найдутся такие константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что

$$|v(t, x)| < C_1 e^{C_2 |x|^2}, \qquad t_0 < t < T, \qquad x \in E_n.$$

Теорема 4.1. *В классе медленно растущих функций задача Коши имеет единственное решение.*

Эта теорема является следствием следующего принципа максимума.

Теорема 4.2. *Пусть $u(t, x)$ — субпараболическая (суперпараболическая) функция, определенная в слое $t_0 < t < T$, непрерывная вплоть до $t = t_0$ и неположительная (неотрицательная) при $t = t_0$. Пусть $u(t, x)$ — медленно растущая функция.*

Тогда $u(t, x) \leqslant 0$ $(u(t, x) \geqslant 0)$ всюду при $t_0 < t < T$.

Доказательство. Пусть для определенности u — субпараболическая функция.

Положим $s = M_2/2\alpha_2$ и $\beta = \alpha_2$, где α_2 и M_2 — константы неравенств (2_2). Положим $\varepsilon = \min\left(T - t_0, \frac{1}{64 C_2 \beta}\right)$ и для произвольного $R > 1$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$v_R(t, x) = M e^{C_2 R^2} \int\limits_{|\xi| = R} F_{s, \beta}(t - t_0 + \varepsilon, x - \xi)\, ds_\xi,$$

где ds_ξ — элемент $(n-1)$-мерной площади сферы $|\xi| = R$, так что при $t \geqslant t_0$

$$v_R(t, x) = \frac{M e^{C_2 R^2}}{(t - t_0 + \varepsilon)^s} \int\limits_{|\xi| = R} e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4\beta (t - t_0 + \varepsilon)}}\, ds_\xi.$$

$M > 0$ — константа, не зависящая от R, которую мы подберем ниже.

Согласно лемме 3.2 функция v_R является суперпараболической при $t_0 < t < T$.

Рассмотрим цилиндр $Ц_{0,\ R}^{t_0,\ t_0+\varepsilon}$ (рис. 29). На его нижнем основании $v_R > 0$. Подберем константу M так, чтобы на его боковой поверхности было $v_R > C_1 e^{C_2R^2}$. Для этого заметим, что при $0 < t - t_0 < \varepsilon$ справедливо неравенство

$$v_R(t, x) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{Me^{C_2R^2}}{(2\varepsilon)^s} \int\limits_{|\xi|=R} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\beta\varepsilon}} ds_\xi.$$

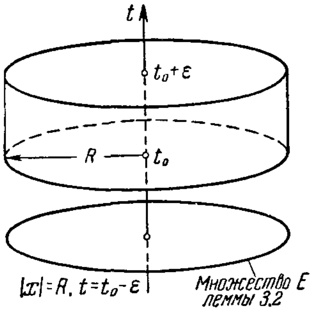

Рис. 29.

Далее, при $|x| = R$ и $R > 1$ мы имеем

$$\int\limits_{|\xi|=R} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\beta\varepsilon}} ds_\xi > a,$$

где a — положительное число, не зависящее от R.

Поэтому, полагая $M = C_1(2\varepsilon)^s a$, получаем $v_R \geqslant C_1 e^{C_2R^2}$ на боковой поверхности цилиндра.

Следовательно,

$$u \leqslant v_R$$

внутри цилиндра.

Пусть теперь (t', x') — произвольная точка внутри слоя $t_0 < t < t_0 + \varepsilon$. Пусть $R > 1$ — произвольное число, удовлетворяющее, кроме того, неравенству $R > 2|x'|$. Тогда

$$u(t',\ x') \leqslant v_R(t',\ x') \leqslant \frac{Me^{C_2R^2}}{\varepsilon^s} \int\limits_{|\xi|=R} e^{-\left(\frac{R}{2}\right)^2/4\beta\cdot 2\varepsilon} ds_\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\varepsilon^s} e^{C_2R^2} \omega_n R^{n-1} e^{-2C_2R^2} = \frac{\omega_n M}{\varepsilon^s} e^{-C_2R^2} R^{n-1}.$$

Здесь ω_n — площадь $n-1$-мерной поверхности единичной n-мерной сферы. Устремляя R к бесконечности, получаем $u(t', x') \leqslant 0$.

Итак $u(t, x) \leqslant 0$ при $t_0 < t < t_0 + \varepsilon$. Принимая $t_0 + \varepsilon$ за новое значение t_0, мы докажем, что $u(t, x) \leqslant 0$ при $t_0 + \varepsilon < t < t_0 + 2\varepsilon$. И так для любой точки (t, x) за конечное число шагов мы получим, что

$$u(t, x) \leqslant 0 \qquad \text{(ч. т. д.).}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad u|_{t=t_0} = f(x).$$

Пусть $u(t, x)$ — ее решение в полупространстве $t > t_0$. Если начальная функция $f(x)$ стремится к некоторой константе a при $|x| \to \infty$, то и решение $u(t, x)$ задачи Коши будет при $t \to \infty$ равномерно по x стремиться к этой константе. Это явление называется *стабилизацией* решения при $t \to \infty$. Мы установим факт стабилизации в классе медленно растущих функций.

Так как при прибавлении константы решение переходит в решение, то для установления факта стабилизации достаточно доказать следующую теорему.

Теорема 4.3. *Пусть $u(t, x)$ — решение задачи Коши*

$$u|_{t=t_0} = f(x)$$

из указанного класса, и $f(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Тогда $u(t, x) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по x.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Пусть R таково, что

$$f(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |x| > R.$$

Введем вспомогательную функцию

$$v(t, x) = MF_{s,\beta}(t - t_0 + 1, x) = \frac{M}{(t - t_0 + 1)^s} e^{-\frac{|x|^2}{4\beta(t - t_0 + 1)}},$$

где $s = M_2/2\alpha_2$ и $\beta = \alpha_2$, а M_2 и α_2 — константы неравенств (2_2), так что по лемме 3.2 $v(t, x)$ — суперпараболическая функция. Выберем константу M столь большой, чтобы выполнялось неравенство

$$v(t_0, x) > f(x) \quad \text{при} \quad |x| \leqslant R.$$

Тогда

$$v(t_0, x) > f(x), \qquad x \in E_n,$$

а потому по теореме 4.1

$$u(t, x) \leqslant v(t, x) \quad \text{при} \quad t > t_0.$$

Если теперь положить $t_1 = \left(\frac{2M}{\varepsilon}\right)^{1/s} + t_0 - 1$, то

$$u(t, x) \leqslant \varepsilon$$

при $t \geqslant t_1$ и произвольном x.

Совершенно аналогично мы получим, что при t, большем некоторого t_2, и произвольном x $u(t, x) \geqslant -\varepsilon$.

Примечания.

Доказательство принципа максимума для слоя и соответственно теоремы единственности решения задачи Коши в классе медленно растущих функций по своей сути не отличается от аналогичного доказательства для уравнения теплопроводности (см. *А. Н. Тихонов* [1]).

Я хочу здесь отметить, что такой грубый на первый взгляд инструмент, как построенные нами в § 3 суперпараболические функции типа потенциала, дает точный по порядку результат.

В этом же параграфе дана теорема о стабилизации решения задачи Коши при неограниченном возрастании времени. Мы рассмотрели задачу в самой простой ее постановке. Дальнейшая ее детализация идет по двум линиям: влияние младших членов при стремящихся к нулю начальных условиях (*А. М. Ильин, Р. З. Хасьминский*) и строение начальных условий, обеспечивающее стабилизацию, когда младшие члены не оказывают влияния на явление стабилизации (*С. Д. Эйдельман, Ф. О. Порпер, В. Д. Репников*). Здесь я хочу прежде всего обратить внимание на статью *А. М. Ильина* [1] и *В. Д. Репникова* и *С. Д. Эйдельмана* [1].

§ 5. Параболическая s, β-емкость

Введем следующее определение. Пусть заданы $s > 0$ и $\beta > 0$. Пусть E — B-множество в R_{n+1}. Рассмотрим на E всевозможные меры μ такие, что

$$\int_E F_{s,\beta}(t-\tau, x-\xi)\, d\mu(\tau, \xi) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (t, x) \neq \bar{E}. \tag{13}$$

Положим

$$\gamma_{s,\beta}(E) = \sup \mu(E), \tag{14}$$

где верхняя грань берется по всевозможным мерам, удовлетворяющим условию (13).

Назовем число $\gamma_{s,\beta}$ *параболической* s, *β-емкостью* множества E.

Следующие две теоремы очевидны.

Теорема 5.1. *Если $E_1 \subset E_2$, то*

$$\gamma_{s,\beta}(E_1) \leqslant \gamma_{s,\beta}(E_2).$$

Теорема 5.2. *Пусть $E \subset R_{n+1}$ — В-множество. Сделаем в R_{n+1} преобразование*

$$x_i' = kx_i, \qquad t' = k^2 t.$$

Пусть E' — образ E при этом преобразовании.
Тогда

$$\gamma_{s,\beta}(E') = k^{2s}\gamma_{s,\beta}(E).$$

Теорема 5.3. *Для произвольных $(t, x) \in R_{n+1}$, $r > 0$, $s > 0$ и $\beta > 0$ имеет место равенство*

$$\gamma_{s,\beta}\left(Ц_{x,r}^{t,\,t+r^2}\right) = Cr^{2s}, \tag{15}$$

где $C > 0$ — константа, зависящая от s и β.

Доказательство. Мы можем считать, что (t, x) — начало координат, т. е. нам надо доказать, что

$$\gamma_{s,\beta}\left(Ц_{0,r}^{0,\,r^2}\right) = Cr^{2s},$$

а в таком случае в силу теоремы 5.2 достаточно доказать, что

$$\gamma_{s,\beta}\left(Ц_{0,1}^{0,1}\right) = C,$$

где $C > 0$ — константа, зависящая от s и β.

Обозначим через K максимум функции $\frac{1}{t^s} e^{-\frac{1}{4\beta t}}$ вне $Ц_{0,1}^{0,1}$. Пусть μ_0 — мера, сосредоточенная в начале координат и равная $1/K$. Эта мера является допустимой, и следовательно,

$$\gamma_{s,\beta}\left(Ц_{0,1}^{0,1}\right) \geqslant \frac{1}{K} > 0.$$

Так как, с другой стороны, очевидно, $\gamma_{s,\beta}\left(Ц_{0,1}^{0,1}\right) < \infty$, то существует константа $C > 0$ такая, что

$$\gamma_{s,\beta}\left(Ц_{0,1}^{0,1}\right) = C.$$

Теорема 5.4. *Если* $s<\frac{n+2}{2}$, $\beta>0$ — *произвольное и* $E\subset Ц_{0,\,1}^{0,\,1}$, *то*

$$\gamma_{s,\,\beta}(E)\geqslant C\operatorname{mes}E \tag{16}$$

($\operatorname{mes}E$ — $(n+1)$-*мерная мера Лебега множества* E), *где* $C>0$ — *константа, зависящая от* s, β *и* n.

Доказательство. Прежде всего рассмотрим

$$\int\limits_{Ц_{0,\,1}^{0,\,2}}\frac{1}{\tau^s}e^{-\frac{|\xi|^2}{4\beta\tau}}\,d\tau\,d\xi$$

и покажем, что этот интеграл сходится. Мы имеем

$$\int\limits_{Ц_{0,\,1}^{0,\,2}}\frac{1}{\tau^s}e^{-\frac{|\xi|^2}{4\beta\tau}}\,d\tau\,d\xi=\int\limits_0^2\frac{1}{\tau^s}\left(\int\limits_{|\xi|<1}e^{-\frac{|\xi|^2}{4\beta\tau}}\,d\xi\right)d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^2\frac{1}{\tau^s}\left(\int\limits_{E_n}e^{-\frac{|\xi|^2}{4\beta\tau}}\,d\xi\right)d\tau=\int\limits_0^2\frac{1}{\tau^s}\left(\prod_{i=1}^n\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\xi_i^2}{4\beta\tau}}\,d\xi_i\right)d\tau=$$

$$=(2\sqrt{\pi\beta})^n\int\limits_0^2\tau^{\frac{n}{2}-s}\,d\tau=K_1<\infty.$$

Мы видим, что константа K_1 здесь зависит от s, β и n.

Далее, при $t>0$

$$\int\limits_{Ц_{0,\,1}^{0,\,1}}F_{s,\,\beta}(t-\tau,\,x-\xi)\,d\tau\,d\xi\leqslant K, \tag{17}$$

где $K=\max(K_1,\Omega_n)$ (Ω_n — объем единичного n-мерного шара). Действительно, если $t\geqslant 2$, то $t-\tau\geqslant 1$, а потому

$$F_{s,\,\beta}(t-\tau,\,x-\xi)\leqslant 1\quad\text{и}\quad\int\limits_{Ц_{0,\,1}^{0,\,1}}F_{s,\,\beta}(t-\tau,\,x-\xi)\,d\tau\,d\xi\leqslant\Omega_n. \tag{18}$$

Если же $t<2$, то

$$\int\limits_{Ц_{0,1}^{0,1}} F_{s,\beta}(t-\tau, x-\xi)\,d\tau\,d\xi \leqslant \int\limits_{Ц_{0,1}^{0,2}} F_{s,\beta}(\tau, x-\xi)\,d\tau\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^2 d\tau \int\limits_{E_n} F_{s,\beta}(\tau, \xi)\,d\xi = K_1. \qquad (19)$$

Пусть теперь $E \subset Ц_{0,1}^{0,1}$ и $d\mu(\tau, \xi) = \frac{1}{K}\,d\tau\,d\xi$. Тогда для каждого $(t, x) \in R_{n+1}$

$$\int\limits_E F_{s,\beta}(t-\tau, x-\xi)\,d\mu(\tau, \xi) =$$

$$= \frac{1}{K}\int\limits_E F_{s,\beta}(t-\tau, x-\xi)\,d\tau\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{K}\int\limits_{Ц_{0,1}^{0,1}} F_{s,\beta}(t-\tau, x-\xi)\,d\tau\,d\xi \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$\gamma_{s,\beta}(E) \geqslant \frac{1}{K}\int\limits_E d\tau\,d\xi = \frac{1}{K}\operatorname{mes} E. \qquad (20)$$

§ 6. Лемма о возрастании

Пусть нам даны положительные числа s, β и R. Положим

$$b_0 = \frac{1}{16\beta s}, \qquad (21)$$

и пусть $0 < b \leqslant b_0$. Рассмотрим три цилиндра (рис. 30):

$$Ц_1 = Ц_{0,\ R}^{0,\ bR^2}, \qquad Ц_2 = Ц_{0,\ R/8}^{3/4 bR^2,\ bR^2}, \qquad Ц_3 = Ц_{0,\ R/8}^{0,\ 1/2 bR^2}.$$

Обозначим через S_1 боковую поверхность цилиндра $Ц_1$.

Пусть (τ, ξ) — произвольная точка, принадлежащая $Ц_3$. Фиксируем эту точку и рассмотрим функцию

$$v(t, x) = F_{s,\beta}(t-\tau, x-\xi).$$

Оценим

$$\sup_{(t,\ x)\in S_1} v(t,\ x).$$

Фиксируем точку x, $|x| = R$ и найдем значение $t > \tau$, при котором $v(t, x)$ достигает максимума:

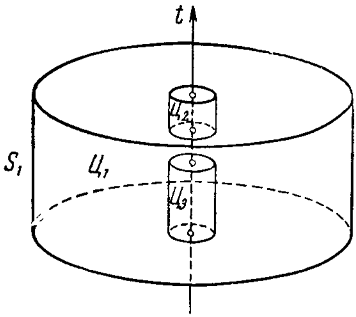

Рис. 30.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{(t-\tau)^s}\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\beta(t-\tau)}}\right) = 0 = \left(-\frac{s}{(t-\tau)^{s+1}} + \frac{|x-\xi|^2}{4\beta(t-\tau)^{s+2}}\right) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\beta(t-\tau)}},$$

$$t-\tau = \frac{|x-\xi|^2}{4\beta s}.$$

Но при $|x| = R$ и $|\xi| < R/8$

$$|x-\xi| > \frac{7}{8} R > \frac{1}{\sqrt{2}} R.$$

Следовательно, $\dfrac{|x-\xi|^2}{4\beta s} > \dfrac{R^2}{8\beta s} > bR^2$, и потому в силу монотонности $v(t, x)$ по t до первого максимума

$$\sup_{(t,\ x)\in S_1} v(t,\ x) \leqslant \frac{1}{(bR^2)^s}\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\beta(bR)^2}} \leqslant \frac{1}{(bR^2)^s} e^{-\frac{(R/\sqrt{2})^2}{4\beta(bR^2)}} = \frac{1}{(bR^2)^s}\, e^{-\frac{1}{8\beta b}},$$

и в силу выбора b_0, согласно (21),

$$\sup_{(t,\ x)\in S_1} v(t,\ x) \leqslant (bR^2)^{-s} e^{-2s\frac{b_0}{b}}. \tag{22}$$

Тепрерь оценим

$$\inf_{(t,\ x)\in Ц_2} v(t,\ x).$$

Поскольку $(\tau,\ \xi) \in Ц_3$, а $(t,\ x) \in Ц_2$, то

$$b\,\frac{R^2}{4} < t-\tau < bR^2 \text{ и } |x-\xi| < \frac{R}{4},$$

поэтому

$$v(t, x)\,|_{(t,\ x)\in Ц_2} > \frac{1}{(bR^2)^s}\, e^{-\frac{(R/4)^2}{4\beta b \frac{R^2}{4}}} = \frac{1}{(bR^2)^s}\, e^{-\frac{1}{16\beta b}},$$

и в силу выбора b_0

$$\inf_{(t,\ x)\in Ц_2} v(t, x) > (bR^2)^{-s} e^{-s\frac{b_0}{b}}. \tag{23}$$

Учитывая, что (τ, ξ) — произвольная точка $Ц_3$, получаем из (22) и (23)

$$\sup_{(\tau,\ \xi)\in Ц_3,\ (t,\ x)\in S_1} F_{s,\,\beta}(t-\tau,\ x-\xi) \leqslant (bR^2)^{-s} e^{-2s\frac{b_0}{b}}, \tag{24}$$

$$\inf_{(\tau,\ \xi)\in Ц_3,\ (t,\ x)\in Ц_2} F_{s,\,\beta}(t-\tau,\ x-\xi) \geqslant (bR^2)^{-s} e^{-s\frac{b_0}{b}}. \tag{25}$$

Пусть теперь в $Ц_3$ содержится B-множество E и на нем определена мера μ. Пусть

$$U(t, x) = \int_E F_{s,\,\beta}(t-\tau,\ x-\xi)\, d\mu(\tau,\ \xi).$$

Тогда из неравенств (24) и (25) получаем

$$\sup_{S_1} U \leqslant (bR^2)^{-s} e^{-2s\frac{b_0}{b}} \mu(E) \tag{26}$$

и

$$\inf_{Ц_2} U \geqslant (bR^2)^{-s} e^{-s\frac{b_0}{b}} \mu(E). \tag{27}$$

Перейдем теперь к формулировке и доказательству леммы о возрастании, составляющей основное содержание этого параграфа.

Лемма 6.1. *Пусть даны числа $s > 0$, $\beta > 0$, $R > 0$. Пусть b_0, b и $Ц_1$, $Ц_2$, $Ц_3$ имеют указанный выше смысл. Пусть в $Ц_1$ расположена область D, пересекающая $Ц_2$ и имеющая предельные точки на собственной границе $Ц_1$. Пусть Γ — та часть собственной границы D, которая расположена строго внутри $Ц_1$, и пусть $E = Ц_3 \setminus D$.*

Пусть в D определен оператор

$$L - \frac{\partial}{dt}.$$

Пусть

$$\beta \leqslant \alpha_1 \quad и \quad s \geqslant M_1/2\beta, \tag{27a}$$

где α_1, M_1 — *константы неравенства* (2_1) *для оператора* L. *Пусть* $u(t, x)$ — *субпараболическая функция для этого оператора, непрерывная в* $\overline{D}$, *положительная в* D *и обращающаяся в нуль на* Γ. *Тогда*

$$\sup_D u > \left[1 + \eta R^{-2s} \gamma_{s,\,\beta}(E)\right] \sup_{D \cap Ц_2} u, \tag{28}$$

где $\eta > 0$ — *константа, зависящая от* s, β *и отношения* b_0/b.

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть мера μ, определенная на E, такова, что

$$U(t, x) = \int_E F_{s,\,\beta}(t - \tau, \; x - \xi)\, d\mu(\tau, \xi) \leqslant 1$$

вне $\overline{E}$ и

$$\mu(E) > \gamma_{s,\,\beta}(E) - \varepsilon.$$

Обозначим

$$\sup_D u = M$$

и введем вспомогательную функцию

$$v(t, \; x) = M\left[1 - U(t, x) + (bR^2)^{-s} e^{-2s\frac{b_0}{b}} \mu(E)\right].$$

В силу неравенства (27a) и леммы 3.1 функция U субпараболична, а потому v суперпараболична. Всюду на собственной границе области D мы имеем

$$u(t', x') \leqslant \lim_{(t,\,x) \to (t',\; x')} v(t, x).$$

Действительно, собственная граница области D состоит из $\overline{\Gamma}$ и из точек, расположенных на S_1 и на нижнем основании $Ц_1$.

Так как $U \leqslant 1$ вне $\bar{E}$, то

$$\lim_{(t,\,x) \to (t',\; x') \in \overline{\Gamma}} v(t, \; x) \geqslant 0,$$

в то время как $u|_{\overline{\Gamma}} = 0$ ($u|_{\Gamma} = 0$, и значит, по непрерывности $u|_{\overline{\Gamma}} = 0$). Далее, на нижнем основании $Ц_1$ в точках границы, расположенных на положительном расстоянии от Γ и, значит, на положительном расстоянии от E, функция U равна нулю, и, таким образом, $v > M$, в то время как $u \leqslant M$. Наконец, на S_1 в силу неравенства (26)

$$U \leqslant (bR^2)^{-s} e^{-2s\frac{b_0}{b}} \mu(E)$$

и, значит, $v \geqslant M$, а $u \leqslant M$.

Следовательно, по принципу максимума

$$u \leqslant v \text{ в } D$$

и, значит,

$$\sup_{D \cap Ц_2} u \leqslant \sup_{D \cap Ц_2} v \leqslant M \left[1 - \inf_{Ц_2} U + (bR^2)^{-s} e^{-2s\frac{b_0}{b}} \mu(E) \right]$$

и по неравенству (27)

$$\sup_{D \cap Ц_2} u \leqslant M \left[1 - (bR^2)^{-s} \left(e^{-s\frac{b_0}{b}} - e^{-2s\frac{b_0}{b}} \right) (\gamma_{s,\beta}(E) - \varepsilon) \right].$$

Так как это верно при любом ε, то мы получаем окончательно, учитывая (21), что

$$\sup_{D \cap Ц_2} u \leqslant \left[1 - \eta R^{-2s} \gamma_{s,\beta}(E) \right] \sup_{D} u,$$

где

$$\eta = (16\beta s)^{-s} \left(\frac{b}{b_0} \right)^{-s} \left(e^{-s\frac{b_0}{b}} - e^{-2s\frac{b_0}{b}} \right),$$

откуда и вытекает требуемое неравенство (28).

Применим доказанную лемму к частному случаю, когда

$$Ц_1 \subset Ц_{0,1}^{0,1} \quad \text{и} \quad s < \frac{n+2}{2}.$$

Мы знаем, что в этом случае емкость оценивается снизу через меру:

$$\gamma_{s,\beta}(E) \geqslant \frac{1}{K} \operatorname{mes} E$$

($K > 0$ — константа, зависящая от s, β и от n), Непосредственная подстановка этого неравенства в (28) дала бы нам

$$\sup_D u \geqslant \left(1 + \frac{\eta}{K} R^{-2s} \operatorname{mes} E\right) \sup_{D \cap Ц_2} u. \tag{29}$$

Мы можем избавиться от ограничения $Ц_1 \subset Ц^{0,\,1}_{0,\,1}$ и, кроме того, получить более удобную оценку, если предварительно при произвольном R сделаем преобразование

$$t' = \frac{1}{R^2} t, \qquad x'_i = \frac{1}{R} x_i$$

и предположим, что $b \leqslant \min\left(1, \frac{1}{16\beta s}\right)$.

Пусть E' — образ E при таком преобразовании. Тогда

$$\operatorname{mes} E' = \frac{1}{R^{n+2}} \operatorname{mes} E \quad \text{и} \quad E' \subset Ц^{0,\,1}_{0,\,1},$$

а потому

$$\sup_D u \geqslant \left(1 + \frac{\eta}{K} \operatorname{mes} E'\right) \sup_{D \cap Ц_2} u = \\ = \left(1 + \frac{\eta}{K} R^{-(n+2)} \operatorname{mes} E\right) \sup_{D \cap Ц_2} u.$$

Так как в нашем случае $2s < n+2$, то при $R < 1$ эта оценка лучше, чем (29).

Сформулируем полученный результат в виде леммы.

Лемма 6.2. *Если в условиях леммы* 6.1 *имеет место* $s < \frac{n+2}{2}$ *и* $b \leqslant \min\left(1, \frac{1}{16\beta s}\right)$, *то*

$$\sup_D u \geqslant \left(1 + \xi \frac{\operatorname{mes} E}{\operatorname{mes} Ц_3}\right) \sup_{D \cap Ц_2} u,$$

где $\xi > 0$ — *константа, зависящая от* s, β, b *и* n.

§ 7. Поведение решения в окрестности граничной точки

Основная цель этого параграфа будет состоять в том, чтобы подготовить средства, при помощи которых в дальнейшем (в § 12) мы сможем исследовать вопрос о разрешимости первой краевой задачи в данной области. Более точно: для произвольной области и произвольных непрерывных граничных условий, заданных на собственной границе этой области, мы построим обобщенное решение; цель будет заключаться в том, чтобы выяснить, всегда ли обобщенное решение принимает в данной точке граничное значение (такая точка границы называется регулярной).

Обобщенное решение будет строиться по методу Винера: граничная функция продолжается внутрь области, область аппроксимируется изнутри областями более простой формы, для которых задача разрешима; предельная функция (которая существует и единственна) и есть обобщенное решение.

Самый простой способ установить, что данная граничная точка является регулярной, заключается в том, чтобы построить барьер — суперпараболическую функцию, положительную всюду, кроме данной точки, и обращающуюся в данной точке в нуль. Такой барьер позволяет дать для каждой окрестности данной точки оценку, равномерную для всех допредельных функций (допредельная функция оценивается на пересечении данной окрестности с той областью, где она определена).

Мы пойдем по другому пути, аналогичному тому, который был нами проделан в главе I для эллиптических уравнений. Мы получим указанную равномерную оценку, которая будет зависеть от констант параболичности уравнения M_1 и α_1 (и, конечно, от строения исходной области в окрестности данной граничной точки), в терминах «M_1, α_1-регулярности», аналогичной понятию «e-регулярности», введенному нами в эллиптическом случае. Как и там, это понятие формулируется довольно сложно, но эта сложность окупается простотой его употребления в дальнейшем.

Перейдем к определению M_1, α_1-регулярности.

Пусть $D \subset R_{n+1}$ — область и ∂D — ее граница. Пусть M_1 и α_1 — два положительных числа. Назовем точку $(t^0, x^0) \in \partial D$ *M_1, α_1-регулярной*, если выполняются следующие условия.

Для любых $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что какова бы ни была область $D' \subset D$, целиком лежащая в полупространстве $t < t^0$, каков бы ни был равномерно параболический оператор $L' - \frac{\partial}{\partial t}$, определенный в D', для которого $M_1' \leqslant M_1$, $\alpha_1' \geqslant \alpha_1$, какова бы ни была субпараболическая для этого оператора функция $u'(t, x)$, не превосходящая единицы в D' и не превосходящая нуля на пересечении собственной границы D' с ε_1-окрестностью точки (t^0, x^0), в пересечении D' с δ-окрестностью точки (t^0, x^0) (если оно не пусто), выполняется неравенство

$$u'(t, x) \leqslant \varepsilon_2.$$

Обозначим

$$Ц_1^m = Ц_{x^0,\, 8^{-m}}^{t^0 - b8^{-2m},\, t^0},$$

$$Ц_2^m = Ц_{x^0,\, 8^{-(m+1)}}^{t^0 - \frac{1}{4} b8^{-2m},\, t^0},$$

$$Ц_3^m = Ц_{x^0,\, 8^{-(m+1)}}^{t^0 - b8^{-2m},\, t^0 - \frac{1}{2} b8^{-2m}}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где $0 < b \leqslant \frac{1}{8M_1}$. $\left(\text{Если положить } s = \frac{M_1}{2\beta}, \text{ то } \frac{1}{16\beta s} = \frac{1}{8M_1}.\right)$ Положим $\gamma_{M_1/2\alpha_1,\, \alpha_1}\left(Ц_3^m \setminus D\right) = \gamma_m$.

Теорема 7.1. *Для того чтобы точка* $(t^0, x^0) \in \partial D$ *была* M_1, α_1-*регулярной, достаточно, чтобы*

$$\sum_{m=1}^{\infty} 8^{\frac{M_1}{\alpha_1} m} \gamma_m = \infty. \tag{30}$$

Доказательство. Пусть даны $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$. Пусть имеется подобласть $D' \subset D$, расположенная в полупространстве $t < t^0$, и в ней определен оператор $L' - \frac{\partial}{\partial t}$, константы M_1' и α_1' неравенства (2_1) для которого удовлетворяют условиям

$$M_1' \leqslant M_1, \quad \alpha_1' \geqslant \alpha_1.$$

Пусть $u'(t, x)$ — субпараболическая функция для него,

$$u'(t, x) \leqslant 1 \text{ в } D'$$

и

$$u'(t, x)\,|_{\Gamma' \cap O_{\varepsilon_1}(t^0, x^0)} \leqslant 0,$$

где Γ' — собственная граница D', а $O_{\varepsilon_1}(t^0, x^0)$ — ε_1-окрестность точки (t^0, x^0) в R_{n+1}. Нам надо показать, что существует $\delta > 0$, зависящее от ε_1, ε_2, M_1 и α_1, от области D, от b, но не зависящее ни от D', ни от L', ни от u', такое, что для всякой точки $(t, x) \in D' \cap O_\delta(t^0, x^0)$ справедливо неравенство

$$u'(t, x) < \varepsilon_2.$$

Обозначим через m_0 такое наименьшее натуральное число, что

$$Ц_1^{m_0} \subset O_{\varepsilon_1}(t^0, x^0).$$

Пусть число $m > m_0$ таково, что существует точка

$$(t', x') \in D' \cap Ц_1^m,$$

для которой

$$u'(t', x') \geqslant \varepsilon_2.$$

Наша задача состоит в том, чтобы показать, что число m тогда необходимо *меньше константы* m^*, зависящей от ε_1, ε_2, M_1 и α_1.

Для каждого i, $i = m_0, m_0 + 1, \ldots, m$, обозначим

$$M_i = \sup_{D' \cap Ц_1^i} u'.$$

Рассмотрим теперь для каждого i, $i = m_0, m_0 + 1, \ldots$ $\ldots, m$ цилиндры $Ц_1^i$ и $Ц_1^{i-1}$.

Рассмотрим множество таких точек $(t, x) \in D' \cap Ц_1^{i-1}$, в которых $u'(t, x) > 0$, и в этом множестве выберем компоненту D_i', содержащую ту точку пересечения D' с собственной границей Γ_1^i цилиндра $Ц_1^i$, где функция u' достигает значения M_i. Мы имеем

$$\gamma_{M_1/2\alpha_1,\, \alpha_1}(Ц_3^{i-1} \setminus D_i') \geqslant \gamma_{M_1/2\alpha_1,\, \alpha_1}(Ц_3^{i-1} \setminus D) = \gamma_{i-1}.$$

Поэтому, применяя к цилиндрам $Ц_1^{i-1}$, $Ц_2^{i-1}$ и $Ц_3^{i-1}$, к области D_i' и функции u' в ней лемму 6.1 при $s = M_1/2\alpha_1$ и $\beta = \alpha_1$, получим

$$M_{i-1} \geqslant \left(1 + \eta 8^{\frac{M_1}{\alpha_1}(i-1)} \gamma_{i-1}\right) M_i,$$

и, следовательно,

$$1 \geqslant M_{m_0} \geqslant M_m \prod_{i=m_0+1}^{m} \left(1 + \eta 8^{\frac{M_1}{\alpha_1}(i-1)} \gamma_{i-1}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon_2 \prod_{i=m_0+1}^{m} \left(1 + \eta 8^{\frac{M_1}{\alpha_1}(i-1)} \gamma_{i-1}\right),$$

откуда

$$\prod_{i=m_0}^{m-1} \left(1 + \eta 8^{\frac{M_1}{\alpha_1} i} \gamma_i\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_2}$$

и, значит,

$$\sum_{i=m_0}^{m-1} \ln\left(1 + \eta 8^{\frac{M_1}{\alpha_1} i} \gamma_i\right) \leqslant \ln \frac{1}{\varepsilon_2}.$$

Так как

$$\ln\left(1 + \eta 8^{\frac{M_1}{\alpha_1} i} \gamma_i\right) \geqslant a 8^{\frac{M_1}{\alpha_1} i} \gamma_i,$$

где $a > 0$ — константа, зависящая от η (и, следовательно, от M_1 и α_1 и от b), то

$$\sum_{i=m_0}^{m-1} 8^{\frac{M_1}{\alpha_1} i} \gamma_i \leqslant \frac{1}{a} \ln \frac{1}{\varepsilon_2}. \tag{31}$$

В силу расходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 8^{\frac{M_1}{\alpha_1} i} \gamma_i$ есть такое m^*, что неравенство (31) может выполняться только при $m < m^*$. Это m^* зависит от ε_1 (от которого зависело m_0), от α_1, M_1 и b (от которых зависит a) и ε_2. Тем самым теорема доказана.

Дадим некоторые геометрические критерии M_1, α_1-регулярности граничной точки.

Теорема 7.2. *Пусть заданы произвольные* $M_1 > 0$, $\alpha_1 > 0$ *и* b, $0 < b \leqslant 1/8M_1$. *Пусть* D — *область в* R_{n+1} *и* $(t^0, x^0) \in \partial D$.

Рассмотрим параболоид

$$t - t^0 = -64b\,|x - x^0|^2. \tag{31a}$$

Разобьем этот параболоид на слои плоскостями

$$t = t^0 - b \cdot 2^{-m}.$$

Пусть C_m — часть параболоида, лежащая в слое

$$t^0 - b\cdot 2^{-m} < t < t^0 - b\cdot 2^{-(m+1)}.$$

Пусть при достаточно малом $\rho > 0$ в каждом C_m содержится цилиндр $Ц^{(m)}$ с осью, параллельной оси t, радиуса $\rho\cdot 2^{-m}$ и высоты $\rho^2\cdot 2^{-2m}$, целиком принадлежащий дополнению области D (рис. 31). *Тогда точка (t^0, x^0) M_1, α_1-регулярна.*

Доказательство. Пусть $Ц_3^m$ имеет тот же смысл, что и выше:

$$Ц_3^m = Ц_{x^0,\, 8^{-(m+1)}}^{t^0 - b8^{-2m},\, t^0 - \frac{1}{2} b8^{-2m}}.$$

Тогда

$$Ц^{(3m)} \subset C_{3m} \subset Ц_3^m$$

и по теореме 5.1 и 5.3

$$\gamma_{M_1/2\alpha_1,\, \alpha_1}\left(Ц_3^m \setminus D\right) \geqslant$$

$$\geqslant \gamma_{M_1/2\alpha_1,\, \alpha_1}\left(Ц^{(3m)}\right) \geqslant C\rho^{\frac{M_1}{\alpha_1}} 8^{-\frac{M_1}{\alpha_1} m} =$$

$$= C_1 8^{-\frac{M_1}{\alpha_1} m}.$$

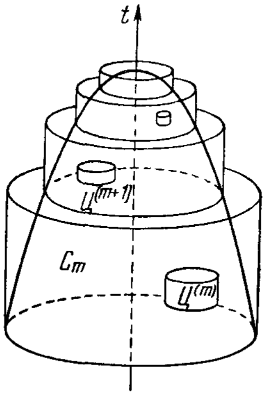

Рис. 31.

Следовательно, ряд $\sum\limits_{m-1}^{\infty} 8^{\frac{M_1}{\alpha_1} m} \gamma_{M_1/2\alpha_1,\, \alpha_1}\left(Ц_3^m \setminus D\right)$ расходится, и по теореме 7.2 точка (t^0, x^0) M_1, α_1-регулярна. Заметим для дальнейшего, что ряд (30) расходится здесь со скоростью арифметической прогрессии.

Введем следующее определение. Пусть $(t^0, x^0) \in R_{n+1}$. Назовем *сплющенным конусом с вершиной в точке* (t^0, x^0) всякое множество K, которое получается следующим образом.

Рассмотрим преобразование

$$\begin{aligned} t - t^0 &= At'^2 \operatorname{sign} t', \quad A > 0, \\ x - x^0 &= x'. \end{aligned} \tag{32}$$

Возьмем в пространстве (t', x') множество K' точек, лежащих внутри прямого кругового конуса с вершиной в начале координат и с осью, расположенной в гиперплоскости $t' = 0$. Образ K множества K' при преобразовании (32) мы и назовем сплющенным конусом с вершиной в (t^0, x^0).

Теорема 7.3. *Пусть D-область в R_{n+1} и $(t^0, x^0) \in \partial D$. Пусть существует такой сплющенный конус K с вершиной в (t^0, x^0), что в некоторой окрестности (t^0, x^0) точки, принадлежащие K и лежащие ниже гиперплоскости $t = t^0$, находятся вне D. Тогда точка (t^0, x^0) M_1, α_1-регулярна при любых $M_1 > 0$ и $\alpha_1 > 0$.*

Доказательство. Пусть заданы $M_1 > 0$ и $\alpha_1 > 0$. Положим

$$b = \min\left(\frac{1}{8M_1}, \frac{A}{128}\right),$$

где A — константа преобразования (32). Для коэффициента параболоида (31а) будет в этом случае выполнено неравенство $-64b \geqslant -\frac{A}{2}$, а поэтому пересечение $C_m \cap K$ при достаточно малом $\rho > 0$ (зависящем от раствора конуса K и от A) будет содержать цилиндрик $Ц^{(m)}$ радиуса $\rho \cdot 2^{-m}$ и высоты $\rho^2 \cdot 2^{-2m}$ (рис. 32), т. е. будут выполнены условия предыдущей теоремы.

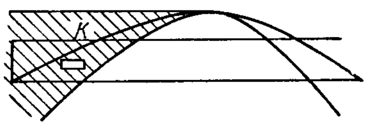

Рис. 32.

Следствие. Если в точке $(t^0, x^0) \in \partial D$ граница имеет касательную гиперплоскость, не перпендикулярную оси t, то точка (t^0, x^0) M_1, α_1-регулярна при любых $M_1 > 0$ и $\alpha_1 > 0$.

Как уже говорилось, основное приложение M_1, α_1-регулярности будет касаться обобщенного решения (§ 12). Однако уже и сейчас можно получить содержательную теорему, используя его.

Пусть D — область в R_{n+1} и $(t^0, x^0) \in \partial D$. Обозначим через $D_{t'}$ часть D, расположенную ниже гиперплоскости $t = t' \leqslant t^0$. Пусть для $t < t^0$, достаточно близких к t^0 $(|t - t^0| < \delta)$ множество D_t есть область, и для всякой такой D_t первая краевая задача разрешима при любой непрерывной граничной функции. Пусть Γ_{t^0} — собственная граница D_{t^0} и f — произвольная непрерывная на Γ_{t^0} функция.

Обозначим через Γ_t собственную границу D_t. Очевидно, $\Gamma_t \subset \Gamma_{t^0}$ и $\Gamma_{t_1} \subset \Gamma_{t_2}$ при $t_1 < t_2$. Обозначим через u_t решение первой краевой задачи для D_t для равномерно параболического уравнения $Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ с граничной функцией f. Из теоремы единственности решения первой краевой задачи следует, что

$$u_{t_1} \equiv u_{t_2} \text{ в } D_{t_2} \text{ при } t^0 - \delta < t_2 < t_1 < t^0.$$

Отсюда следует, что в D_{t^0} существует решение $u(t, x)$, совпадающее с u_t в D_t при любом t, $t^0 - \delta < t < t^0$.

Скажем в этом случае, что *при $t < t^0$ граница регулярна*. Назовем точку (t^0, x^0) в указанном случае *регулярной*, если функция $u(t, x)$ в D_{t^0} стремится при подходе к (t^0, x^0) к пределу, и этот предел совпадает со значением функции f в ней.

Теорема 7.4. *Пусть D — область в R_{n+1}, $(t^0, x^0) \in \partial D$ и область D имеет регулярную границу при $t < t^0$.*

Тогда, если точка (t^0, x^0) M_1, α_1-регулярна, то она регулярна для всякого уравнения $L'u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, константы M_1', α_1' которого удовлетворяют неравенствам

$$M_1 \geqslant M_1', \quad \alpha_1 \leqslant \alpha_1'.$$

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\varepsilon_1 > 0$ таково, что в ε_1-окрестности точки (t^0, x^0) выполнено неравенство

$$|f(t, x) - f(t^0, x^0)| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad (t, x) \in \Gamma_{t^0},$$

где

$$K = \max_{\Gamma_{t^0}} |f(t, x)|.$$

Положим

$$v(t, x) = \frac{u(t, x) - f(t^0, x^0)}{2K} - \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Положим $\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon_2$.

Пусть $t < t_0$ произвольно. Примем D_t за область D' в определении M_1, α_1-регулярности и $v(t, x)$ за функцию $u'(t, x)$. Согласно этому определению мы найдем такое $\delta' > 0$, что

$$v(t, x) < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{при} \quad \rho[(t, x), (t^0, x^0)] < \delta'$$

или

$$u(t, x) - f(t^0, x^0) < 2\varepsilon \quad \text{при} \quad \rho[(t, x), (t^0, x^0)] < \delta'.$$

Аналогично найдем такое $\delta'' > 0$, что

$$u(t, x) - f(t^0, x^0) > -2\varepsilon \quad \text{при} \quad \rho[(t, x), (t^0, x^0)] < \delta''.$$

Из теоремы 7.3 мы получаем следующую теорему.

Теорема 7.5. *Пусть D — область в R_{n+1} и $(t^0, x^0) \in \partial D$. Пусть D имеет регулярную границу при $t < t^0$.*

Тогда, если точки (t^0, x^0) можно коснуться вершиной сплющенного конуса K так, что в некоторой окрестности (t^0, x^0) часть K, лежащая ниже гиперплоскости $t = t^0$ расположена вне D, то точка (t^0, x^0) регулярна для любого равномерно параболического уравнения.

Задача. Воспользовавшись замечанием на стр. 195 о скорости расходимости ряда (30), докажите, что если для точки (t^0, x^0) выполнено условие сплющенного конуса и если граничная функция f удовлетворяет условию Гёльдера, то в точке (t^0, x^0) выполняется условие Гёльдера для функции u:

$$|u(t, x) - f(t^0, x^0)| < C[\rho((t, x), (t^0, x^0))]^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

В конце § 2 говорилось о связи регулярности граничной точки со строгим принципом максимума. Сформулируем эту связь в виде следующих теорем.

Теорема 7.6. *Пусть D — область в R_{n+1} и $(t^0, x^0) \in \partial D$. Пусть D имеет регулярную границу при $t < t^0$. Если точка (t^0, x^0) регулярна, то для нее несправедлив строгий принцип максимума.*

Верна ли обратная теорема, неизвестно. Мы докажем здесь обратную теорему в более слабой формулировке.

Теорема 7.7. *Пусть D и (t^0, x^0) имеют тот же смысл, что и выше. Пусть существует решение $v(t, x)$, непрерывное в $\bar{D}_{t_0}$, для которого*

$$v(t^0, x^0) > v(t, x), \quad (t, x) \in \bar{D}_{t^0}, \quad (t, x) \neq (t^0, x^0). \tag{33}$$

Тогда точка (t^0, x^0) является регулярной.

Доказательство теоремы 7.6. Зададим на ∂D непрерывную функцию f, отрицательную при $t < t^0$ и обращающуюся в нуль в точке (t^0, x^0).

Пусть $u(t, x)$ — решение 1-й краевой задачи в D_t с этой граничной функцией.

Функция $u(t, x)$ достигает максимума в точке (t^0, x^0) и не равна константе в области, подчиненной этой точке.

Доказательство теоремы 7.7. Предположим, что существует решение $v(t, x)$ со свойствами (33). Тогда оно является барьером. Пусть на Γ_{t^0} задана произвольная непрерывная функция f, и $u(t, x)$ решение соответствующей 1-й краевой задачи в D_{t^0}. Пусть $K = \max_{\Gamma_{t^0}} |f|$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть σ — такая окрестность точки (t^0, x^0), что

$$|f(t, x) - f(t^0, x^0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad (t, x) \in \sigma, \quad t \leqslant t^0.$$

Положим $w = v(t^0, x^0) - v(t, x)$. Существует $a > 0$ такое, что $w(t, x) > a$ вне σ при $t < t^0$. Тогда

$$f(t^0, x^0) - \frac{2Kw}{a} - \varepsilon < u(t, x) < f(t^0, x^0) + \frac{2Kw}{a} + \varepsilon,$$

и, значит, $u(t, x) \to f(t^0, x^0)$ при $(t, x) \to (t^0, x^0)$, $t < t^0$.

Из теоремы 7.6, в частности, следует, что точки, принадлежащие верхней крышке, не могут быть регулярными.

Примечания.

В случае, когда область D есть цилиндр, вопрос о регулярности граничных точек решается просто: точки нижнего основания цилиндра всегда регулярны, точки верхнего основания — иррегулярны, условия регулярности точек боковой поверхности совпадают с условиями регулярности соответствующих точек границы основания при решении задачи Дирихле. Для уравнения $\Delta u - u_t = 0$ это было сделано *А. Н. Тихоновым* [2]. Интерес представляет случай нецилиндрической области. Для одномерного уравнения теплопроводности и для области, ограниченной двумя прямыми, параллельными оси x, и кривыми $x=\varphi_1(t)$ и $x=\varphi_2(t)$, достаточные условия и необходимые условия, очень близкие друг к другу, были получены *И. Г. Петровским* [3]. В многомерном случае даже для простейшего уравнения теплопроводности вопрос о регулярности граничной точки, когда в этой точке граница касается характеристики, долгое время не рассматривался. В последние годы интерес к этим вопросам возродился. С одной стороны, стали изучать поведение решения задачи Дирихле для параболического уравнения в самой верхней и самой нижней относительно оси t точках области, когда в окрестности этих точек граница устроена, как параболоид (В. П. Михайлов, В. А. Кондратьев). С другой стороны, вопрос о регулярности граничной точки для параболического уравнения стал рассматриваться как частный случай более общей задачи о вырождающихся эллиптико-параболических уравнениях (*Дж. Фикера, О. А. Олейник, Дж. Кон* и *Л. Ниренберг* и др.). См. книгу *О. А. Олейник* и *Е. В. Радкевича* [1].

В § 7 даются достаточные условия регулярности в терминах расходимости ряда типа винеровского. Эти условия только достаточны, но для уравнения с гладкими коэффициентами можно было бы дать необходимые и достаточные условия в сходных терминах, см. *Е. М Ландис* [6].

Студентом МГУ М. Полевовым (дипломная работа, 1969 г., не опубл.) доказано более сильное утверждение, чем теорема 7.7, а именно:

Пусть D и (t^0, x^0) — те же, что в теореме 7.7, причем область D подчинена точке t^0, x^0. Пусть существует решение $v(t,x)$, непрерывное в $D \cup (t^0, x^0)$, для которого

$$\sup_D v(t, x) = v(t^0, x^0).$$

Тогда точка (t^0, x^0) является регулярной.

§ 8. Уравнения типа Кордеса. Теорема об осцилляции и следствия из нее

Оператор

$$L - \frac{\partial}{\partial t}$$

мы будем называть оператором *типа Кордеса*, если для него выполняется неравенство

$$\frac{M_1}{\alpha_1} < n+2, \tag{34}$$

где M_1 и α_1 — константы неравенства (2_1) для оператора L.

Теорема 8.1 (об осцилляции). *Пусть в области D определен оператор $L-\frac{\partial}{\partial t}$ типа Кордеса и $u(t,x)$ — решение уравнения $Lu-\frac{\partial u}{\partial t}=0$ в D, непрерывное в $\overline{D}$. Положим $b=\min\left(\frac{1}{8M_1},\ 1\right)$ (M_1 — константа неравенства* (2_1)).

Пусть цилиндр $Ц_{x,\,R}^{t-bR^2,\,t}$ принадлежит области D. Тогда

$$\operatorname*{osc}_{Ц_{x,\,R}^{t-bR^2,\,t}} u > P \operatorname*{osc}_{Ц_{x,\,\frac{R}{8}}^{t-b\left(\frac{R}{8}\right)^2,\,t}} u. \tag{35}$$

Доказательство. Положим

$$Ц_{x,\,R}^{t-bR^2,\,t}=Ц_1,$$

$$Ц_{x,\,R/8}^{t-bR^2/4,\,t}=Ц_2,$$

$$Ц_{x,\,R/8}^{t-bR^2,\,t-bR^2/2}=Ц_3.$$

Тогда $Ц_{x,\,R/8}^{t-b\left(\frac{R}{8}\right)^2,\,t}\subset Ц_2$, а потому

$$\operatorname*{osc}_{Ц_2} u \geqslant \operatorname*{osc}_{Ц_{x,\,R/8}^{t-b\,(R/8)^2,\,t}} u.$$

Умножая $u(t,x)$ на константу и прибавляя константу, можно сделать так, чтобы

$$\max_{\overline{Ц}_2} u=+1,\quad \min_{\overline{Ц}_2} u=-1$$

и, следовательно, $\operatorname*{osc}_{\overline{Ц}_2} u=2$.

Обозначим через D^+ множество точек $(t,x)\in Ц_1$, где $u>0$ и через D^- — множество точек $(t,x)\in Ц_1$, где $u<0$.

Имеет место по крайней мере одно из двух:

$$\operatorname{mes}(Ц_3\setminus D^+)\geqslant\frac{1}{2}\operatorname{mes}Ц_3, \tag{36}$$

$$\operatorname{mes}(Ц_3\setminus D^-)\geqslant\frac{1}{2}\operatorname{mes}Ц_3. \tag{37}$$

Пусть, для определенности, справедливо неравенство (36).

Обозначим через D' ту компоненту множества D^+, которая содержит точку $(t', x') \in \overline{Ц}_2$, где $u(t', x') = +1$. Применяя лемму 6.2, мы получим

$$\sup_{Ц_1} u > \left(1 + \xi \frac{\frac{1}{2} \operatorname{mes} Ц_3}{\operatorname{mes} Ц_3}\right) \sup_{Ц_2} u$$

или

$$\operatorname*{osc}_{Ц_1} u > 2\left(1 + \frac{1}{4}\xi\right),$$

где $\xi > 0$ — константа леммы 6.2, т. е. ξ зависит от M_1, α_1, n.

Нам остается положить $1 + \frac{1}{4}\xi = P$. В качестве первого следствия из доказанной теоремы об осцилляции мы получим так называемую «двустороннюю» теорему Лиувилля.

В отличие от случая эллиптических уравнений для самого простого параболического уравнения — уравнения теплопроводности — уже нет «односторонней» теоремы Лиувилля: решение, определенное в пространстве и ограниченное сверху или снизу, не обязано быть константой.

Действительно, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

и его решение

$$u(t, x) = e^{x+t}.$$

Однако если предположить, что решение ограничено и сверху и снизу, то соответствующая теорема легко доказывается из полученной теоремы об осцилляции. При этом не нужно требовать, чтобы решение было определено во всем пространстве, достаточно, чтобы оно было определено в полупространстве $t \leqslant 0$.

Теорема 8.2 (двусторонняя теорема Лиувилля). *Пусть $u(t, x)$ — решение уравнения*

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

типа Кордеса, определенное в полупространстве $t \leqslant 0$. *Пусть* $|u| < K$. *Тогда* $u \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Допустим, что существуют точки (t^1, x^1) и $t^2, x^2)$ такие, что

$$u(t^1, x^1) \neq u(t^2, x^2).$$

Положим $b = \min({}^1/_8 M_1, 1)$ (M_1 — константа неравенства (2_1) для оператора L), и пусть число R столь велико, что цилиндр $Ц_{0, R}^{-bR^2, 0}$ содержит обе эти точки, так что

$$\operatorname*{osc}_{Ц_{0, R}^{-bR^2, 0}} u = \delta > 0.$$

Тогда для цилиндра $Ц_{0, 8R}^{-b(8R)^2, 0}$ имеем на основании теоремы 8.1

$$\operatorname*{osc}_{Ц_{0, 8R}^{-b(8R)^2, 0}} u > P \operatorname*{osc}_{Ц_{0, R}^{-bR^2, 0}} u.$$

И вообще для цилиндров $Ц_{0, 8^m R}^{-b(8R)^{2m}, 0}$ и $Ц_{0, 8^{m+1} R}^{-b(8R)^{2(m+1)}, 0}$

$$\operatorname*{osc}_{Ц_{0, 8^{m+1} R}^{-b(8R)^{2(m+1)}, 0}} u > P \operatorname*{osc}_{Ц_{0, 8^m R}^{-b(8R)^{2m}, 0}} u$$

так, что

$$\operatorname*{osc}_{Ц_{0, 8^k R}^{-b(8R)^k, 0}} u > \delta P^k,$$

и так как k здесь может быть произвольным, то мы приходим к противоречию с ограниченностью функции u. Заметим, что для справедливости доказанной теоремы достаточно, чтобы уравнение $Lu - \frac{\partial u}{\partial t}$ было равномерно параболическим при $t \leqslant 0$ и удовлетворяло условию Кордеса при достаточно большом по модулю отрицательном t. Действительно, пусть это имеет место: уравнение имеет кордесовский тип при $t < -T$. Тогда ограниченное по модулю в полупространстве $t \leqslant 0$ решение $u(t, x)$ будет по доказанному константой при $t \leqslant -T$. Рассмотрим задачу Коши в полосе $-T \leqslant t \leqslant 0$ с начальными условиями, равными этой константе. Применяя теорему единственности решения задачи Коши (теорема 4.1), мы заключаем, что u равно этой константе и при $-T < t \leqslant 0$.

Отсюда в частности вытекает такая теорема.

Теорема 8.3. *Пусть в нижнем полупространстве $t \leqslant 0$ определено равномерно параболическое уравнение*

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(t,\,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Пусть $a_{ik}(t,\,x) \to a_{ik}^0$ при $t \to \infty$ равномерно по x. Пусть $u(t, x)$ — решение этого уравнения и $|u(t, x)| < K$. Тогда $u \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Сделаем линейное преобразование пространства E_n

$$x \leftrightarrow y$$

такое, чтобы

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}^0 \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}.$$

Тогда в координатах t, y уравнение будет иметь кордесовский тип при достаточно больших по модулю отрицательных t. Следовательно, $u \equiv \mathrm{const}$.

Разумеется, вместо стремления $a_{ik}(t, x)$ к пределу при $t \to -\infty$ достаточно было бы потребовать, чтобы при $t < -T$ коэффициенты достаточно мало отклонялись от констант.

В качестве другого следствия теоремы об осцилляции мы получим априорную оценку нормы Гёльдера для решений уравнения типа Кордеса.

Пусть D — область в R_{n+1} и $f(t, x)$ — функция, определенная в D.

Положим, как и раньше,

$$\| f \|_0^D = \sup | f |$$

и для числа $\alpha > 0$

$$\| f \|_\alpha^D = \| f \|_0^D + \sup_{\substack{(t^1,\, x^1) \in D \\ (t^2,\, x^2) \in D}} \frac{| f(t^1,\, x^1) - f(t^2,\, x^2) |}{[\rho((t^1,\, x^1),\, (t^2,\, x^2))]^\alpha},$$

где $\rho((t^1,\, x^1),\, (t^2,\, x^2)) = \sqrt{(t^1 - t^2) + | x^1 - x^2 |^2}$ — расстояние между точками $(t^1,\, x^1)$ и $(t^2,\, x^2)$ в R_{n+1}.

Обозначим далее для всякого положительного ρ через D_ρ совокупность точек $(t, x) \in D$, для которых цилиндр

$$Ц_{x, \rho}^{t-\rho^2, t}$$

содержится в D.

Теорема 8.4 (априорная оценка нормы Гёльдера). *Пусть $D \subset R_{n+1}$, $u(t, x)$ — решение уравнения $Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Тогда для всякого $\rho > 0$ справедливо неравенство*

$$\| u \|_\alpha^{D_\rho} \leqslant C \| u \|_0^D,$$

где α зависит от констант M_1, α_1 неравенства (2_1) и n, а C — еще и от ρ.

Доказательство. Положим

$$b = \min\left(\frac{1}{8M_1}, 1\right).$$

Пусть (t^1, x^1) и (t^2, x^2) — две точки, принадлежащие D_ρ. Пусть для определенности

$$t^2 \leqslant t^1.$$

Положим $\rho_0 = \min(\rho, 1)$ и рассмотрим отдельно два случая:

1)

$$(t^2, x^2) \in Ц_{x^1, \rho_0}^{t^1 - b\rho_0^2, t^1}$$

и

2)

$$(t^2, x^2) \notin Ц_{x^1, \rho_0}^{t^1 - b\rho_0^2, t^1}.$$

Пусть имеет место первый случай.

Обозначим через m_0 такое натуральное число, что

$$(t^2, x^2) \in Ц_{x^1, \rho_0/8^{m_0}}^{t^1 - b\rho_0^2/8^{2m_0}, t^1} \quad \text{и} \quad (t^2, x^2) \notin Ц_{x^1, \rho_0/8^{m_0+1}}^{t^1 - b\rho_0^2/8^{2(m_0+1)}, t^1}, \tag{38}$$

так что

$$\rho((t^1, x^1), (t^2, x^2)) \geqslant b \frac{\rho_0^2}{8^{2(m_0+1)}}. \tag{39}$$

Применяя к цилиндрам $Ц_{x^1,\,\rho_0/8^m}^{t^1-b\rho_0^2/8^{2m},\,t^1}$ и $Ц_{x^1,\,\rho_0/8^{m+1}}^{t^1-b\rho_0^2/8^{2(m+1)},\,t^1}$, $m=0,\,1,\,\ldots,\,m_0-1$, неравенство (35), мы получаем

$$\underset{Ц_{x^1,\,\rho_0/8^{m_0}}^{t^1-b\rho_0^2/8^{2m_0},\,t^1}}{\operatorname{osc}} u \leqslant \frac{1}{P^{m_0}} \underset{Ц_{x^1,\,\rho_0}^{t^1-b\rho_0^2,\,t^1}}{\operatorname{osc}} u. \tag{40}$$

Учитывая, что

$$\underset{Ц_{x^1,\,\rho_0}^{t^1-b\rho_0^2,\,t^1}}{\operatorname{osc}} u \leqslant 2\|u\|_0^D,$$

мы получаем из (38), (39) и (40)

$$|u(t^1,\,x^1)-u(t^2,\,x^2)| \leqslant \underset{Ц_{x^1,\,\rho_0/8^{m_0}}^{t^1-b\rho_0^2/8^{2m_0},\,t^1}}{\operatorname{osc}} u \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{P^{m_0}}\|u\|_0^D \leqslant 2P\frac{1}{P^{m_0+1}}\|u\|_0^D =$$

$$= 2P\left(\frac{1}{8^{2(m_0+1)}}\right)^{\frac{\ln P}{2\ln 8}}\|u\|_0^D = \frac{2P}{\rho_0^{\ln P/\ln 8}}\left(\frac{\rho_0^2}{8^{2(m_0+1)}}\right)^{\frac{\ln P}{2\ln 8}}\|u\|_0^D \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2P}{(b^{1/2}\rho_0)^{\ln P/\ln 8}}\left[\rho\left((t^1,\,x^1),\,(t^2,\,x^2)\right)\right]^{\ln P/2\ln 8}\|u\|_0^D =$$

$$= C_1\left[\rho\left((t^1,\,x^1),\,(t^2,\,x^2)\right)\right]^{\alpha}\|u\|_0^D, \quad \alpha>0,$$

где α, таким образом, зависит от P, т. е. от M_1, α_1 и n, а C_1 — еще и от ρ.

Обратимся теперь ко второму случаю. В этом случае

$$\rho\left((t^1,\,x^1),\,(t^2,\,x^2)\right) \geqslant b\rho_0^2,$$

а потому

$$|u(t^1,\,x^1)-u(t^2,\,x^2)| \leqslant \frac{2}{b^{\alpha}\rho_0^{2\alpha}}\left[\rho\left((t^1,\,x^1),\,(t^2,\,x^2)\right)\right]^{\alpha}\|u\|_0^D.$$

Полагая

$$C=\max\left(C_1,\,\frac{2}{b^{\alpha}\rho_0^{2\alpha}}\right)+1,$$

мы получаем во всех случаях

$$\| u \|_{\alpha}^{D_\rho} \leqslant C \| u \|_0^D,$$

где α зависит от M_1, α_1 и n, а C еще и от ρ.

См. примечания в конце следующего параграфа.

§ 9. Уравнения типа Кордеса. Неравенство Харнака и следствия из него

В этом параграфе, как и в предыдущем, мы будем рассматривать уравнения типа Кордеса, т. е. такие уравнения

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{41}$$

для которых константы M_1 и α_1 неравенства (2_1) удовлетворяют условию

$$M_1/\alpha_1 < n + 2.$$

Для неотрицательных решений этих уравнений мы сначала докажем неравенство Харнака, аналогичное неравенству Харнака для эллиптических уравнений.

Положим, как и выше,

$$b = \min\left(\frac{1}{8M_1},\ 1\right).$$

Вот как формулируется неравенство Харнака:

Теорема 9.1 (неравенство Харнака). *Пусть в цилиндре*

$$Ц_{x,\,R}^{t,\,t+bR^2}$$

определено неотрицательное решение $u(t,x)$ уравнения (41). *Тогда*

$$\sup_{(t,\,x)\in Ц_{x,\,R/16}^{t+\frac{1}{4}bR^2,\ t+\frac{1}{2}bR^2}} u(t,\,x) \Big/ \inf_{(t,\,x)\in Ц_{x,\,R/16}^{t+\frac{3}{4}bR^2,\ t+bR^2}} u(t,\,x) < C, \tag{42}$$

где $C > 0$ — константа, зависящая от M_1, α_1 и n.

Заметим прежде всего, что эта теорема заключает в себе неравенство Харнака для эллиптических уравнений (гл. I, § 10).

Действительно, если $u(x)$ — решение эллиптического уравнения

$$Lu = 0,$$

то $u(t, x) \equiv u(x)$ является решением уравнения (41). Поэтому из справедливости (42) вытекает

$$\sup_{x \in Q^0_{x,\,R/16}} u(x) \Big/ \inf_{x \in Q^0_{x,\,R/16}} u(x) < C.$$

Предварительно докажем лемму, являющуюся простым следствием леммы о возрастании.

Лемма 9.1. *Пусть в цилиндре* $Ц^{0,\,br^2}_{0,\,r}$ *расположена область* D, *пересекающая цилиндр* $Ц^{\frac{1}{2}br^2,\,br^2}_{0,\,r/2}$ *и имеющая предельные точки на собственной границе цилиндра* $Ц^{0,\,br^2}_{0,\,r}$. *Обозначим через* Γ *ту часть границы* D, *которая расположена строго внутри цилиндра* $Ц^{0,\,br^2}_{0,\,r}$. *Пусть в* D *определено решение уравнения* (41), *непрерывное в* $\overline{D}$, *положительное в* D *и обращающееся в нуль на* Γ.

Тогда для $K > 0$ *найдется* $\delta > 0$, *зависящее от* K, M_1, α_1 *и* n *такое, что из неравенства*

$$\operatorname{mes} D < \delta r^{n+2} \tag{43}$$

следует неравенство

$$\sup_{\overline{D}} u \Big/ \sup_{D \cap Ц^{\frac{1}{2}br^2,\,br^2}_{0,\,\frac{r}{2}}} u > K. \tag{44}$$

Доказательство. Пусть ξ — константа леммы 6.2. Пусть, далее, m такое наименьшее натуральное число, что

$$\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)^m > K.$$

Положим

$$\delta = \frac{b\Omega_n}{16^{n+1} m^{n+2}}, \tag{45}$$

где Ω_n — объем единичного n-мерного шара. Разделим разность

$$Ц_{0,\,r}^{0,\,br^2} \setminus Ц_{0,\,r/2}^{br^2/2,\,br^2}$$

на m частей собственными границами Γ_i цилиндров (рис. 33)

$$Ц^{(i)} = Ц_{0,\,(r/2)\,(1+i/m)}^{b\,(r^2/2)\,(1-i/m),\,br^2},$$
$$i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1.$$

Γ_0 совпадает с собственной границей цилиндра $Ц_{0,\,r/2}^{br^2/2,\,br^2}$. Положим

$$M_i = \max_{D\cap\Gamma_i} u,$$
$$i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1.$$

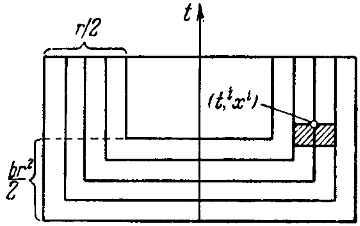

Рис. 33.

Пусть M_i достигается в точке $(t^i, x^i) \in \Gamma_i$. Рассмотрим цилиндр

$$Ц_1^{(i)} = Ц_{x^i,\,\frac{r}{2m}}^{t^i - \frac{br^2}{4m^2},\,t^i}.$$

Мы имеем

$$Ц_1^{(i)} \subset Ц^{(i+1)}, \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1.$$

В цилиндре $Ц_1^{(i)}$ мы рассмотрим цилиндры

$$Ц_2^{(i)} = Ц_{x^i,\,\frac{r}{16m}}^{t^i - \frac{br^2}{16m^2},\,t^i} \quad \text{и} \quad Ц_3^{(i)} = Ц_{x^i,\,\frac{r}{16m}}^{t^i - \frac{br^2}{4m^2},\,t^i - \frac{br^2}{8m^2}},$$

участвующие в формулировке леммы 6.2. Так как из неравенства (43) и равенства (45) вытекает

$$\operatorname{mes}\left(Ц_3^{(i)} \setminus D\right) > \frac{1}{2} \operatorname{mes} Ц_3^{(i)},$$

то на основании леммы 6.2 мы получаем

$$M_{i+1} > \left(1 + \frac{\xi}{2}\right) M_i.$$

Таким образом,

$$M_m > \left(1 + \frac{\xi}{2}\right)^m M_0$$

и, значит,

$$\sup_D u > K \sup_{D \cap Ц_{0,\, r/2}^{br^2/2,\, br^2}} u.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 9.1. Ясно, что достаточно доказать теорему 9.1 для случая, когда $x = 0$, $t = 0$ и $R = 1$. Обозначим для удобства (рис. 34)

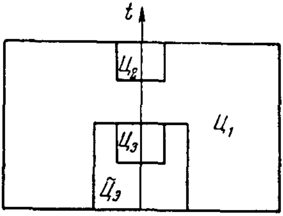

Рис. 34.

$$Ц_{0,\,1}^{0,\,b} = Ц_1, \quad Ц_{0,\,1/16}^{3/4 b,\, b} = Ц_2,$$

$$Ц_{0,\,1/16}^{1/4 b,\, 1/2 b} = Ц_3.$$

Доказываемое неравенство (42) примет вид

$$\sup_{Ц_3} u / \inf_{Ц_2} u < C.$$

Теорема будет доказана, если из допущения, что

$$\sup_{Ц_3} u = 2$$

будет следовать, что

$$\inf_{Ц_2} u > \nu,$$

где $\nu > 0$ — константа, зависящая от M_1, α_1 и n. Положим

$$\tilde{Ц}_3 = Ц_{0,\,1/3}^{0,\,1/2 b}.$$

Обозначим через G_1 множество точек $(t, x) \in \tilde{Ц}_3$, где $u(t, x) > 1$. Положим в лемме 9.1 $K = 2^{n+3}$ и найдем соответствующее δ. Положим далее

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{1}{64}\right)^{n+2} \delta. \tag{46}$$

Рассмотрим отдельно два случая:

$$\operatorname{mes} G_1 \geqslant \varepsilon_0$$

и

$$\operatorname{mes} G_1 < \varepsilon_0.$$

Случай 1. $\operatorname{mes} G_1 \geqslant \varepsilon_0$.

Пусть $s = M_1/2\alpha_1$ и $\beta = \alpha_1$. Тогда $\gamma_{s,\beta}(G_1) > > \tilde{C} \operatorname{mes} G_1 \geqslant \tilde{C}\varepsilon_0$ ($\tilde{C}$ — константа теоремы 5.4). Пусть μ — допустимая мера на G_1 такая, что

$$\mu G_1 > \frac{1}{2}\gamma_{s,\beta}(G_1) > \frac{\tilde{C}}{2}\operatorname{mes} G_1.$$

Положим

$$v(t, x) = \int_{G_1} F_{s,\beta}(t-\tau, x-\xi)\, d\mu(\tau, \xi) - b^{-s} e^{-2s\frac{b_0}{b}} \mu G_1$$

$$\left(b_0 = \frac{1}{16\beta s} = \frac{1}{8M_1}\right).$$

Тогда, учитывая неравенство (26), мы найдем, что на боковой поверхности и на нижнем основании цилиндра $Ц_1$ (вне $\overline{G}_1$) выполнено

$$v \leqslant 0.$$

Далее, $v \leqslant 1$ в $Ц_1 \setminus \overline{G}_1$, а потому, в силу принципа максимума,

$$u|_{Ц_1 \setminus \overline{G}_1} \geqslant v|_{Ц_1 \setminus \overline{G}_1}.$$

По неравенству (27)

$$u|_{Ц_2} \geqslant V|_{Ц_2} \geqslant$$
$$\geqslant b^{-s}\left(e^{-s\frac{b_0}{b}} - e^{-2s\frac{b_0}{b}}\right)\mu G_1 > \frac{\tilde{C}\varepsilon_0}{2} b^{-s}\left(e^{-s\frac{b_0}{b}} - e^{-2s\frac{b_0}{b}}\right).$$

Таким образом, в случае 1 за ν мы можем взять

$$\frac{\tilde{C}\varepsilon_0 b^{-s}}{2}\left(e^{-s\frac{b_0}{b}} - e^{-2s\frac{b_0}{b}}\right).$$

Случай 2. $\operatorname{mes} G_1 < \varepsilon_0$. Положим

$$Ц^{(\rho)} = Ц^{\frac{b}{4}(1-\rho^2),\ \frac{b}{2}}_{0,\ \frac{1}{16}+\rho}.$$

Так что $Ц^{(0)} = Ц_3$ и $Ц^{(1/16)} \subset \tilde{Ц}_3$.

Положим

$$G_\rho^{(1)} = G_1 \cap \left(Ц^{(\rho)} \setminus Ц^{(0)}\right).$$

Мы имеем в силу (46)

$$\operatorname{mes} G^{(1)}_{1/32} < \left(\frac{1/32}{2}\right)^{n+2} \delta.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{mes} G^{(1)}_{\rho} \geqslant O(\rho^2) \text{ при } \rho \to 0$$

(почему?), а потому при достаточно малых $\rho > 0$

$$\operatorname{mes} G^{(1)}_{\rho} > \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+2} \delta.$$

Поэтому найдется такое ρ_1, $0 < \rho_1 < 1/32$, что

$$\operatorname{mes} G^{(1)}_{\rho_1} = \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^{n+2} \delta. \tag{47}$$

Найдем на боковой поверхности или на нижнем основании цилиндра $Ц^{(\rho_1/2)}$ точку $(t^1, x^1) \in G_1$, в которой $u(t^1, u^1) \geqslant 2$. Примем эту точку за верхний конец оси цилиндра радиуса $\rho_1/2$ и высоты $b(\rho_1/2)^2$:

$$Ц_{(1)} = Ц^{t^1 - b(\rho_1/2)^2,\, t^1}_{x^1,\, \rho_1/2}$$

так, что этот цилиндр помещается в зазоре между цилиндрами $Ц^{(0)}$ и $Ц^{(\rho_1)}$ (рис. 35).

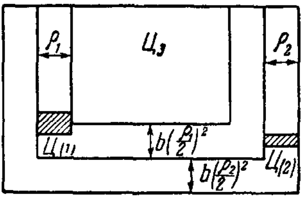

Рис. 35.

Положим

$$v_1(t, x) = u(t, x) - 1.$$

Так что $v_1(t^1, x^1) \geqslant 1$ и $v_1(t, x) > 0$ в G_1, $v_1(t, x) \leqslant 0$ вне G_1. Обозначим через $D_{(1)}$ ту компоненту множества $G_1 \cap Ц_{(1)}$, которая содержит точку (t^1, x^1). Применим к цилиндру $Ц_{(1)}$ и к области $D_{(1)}$ в нем лемму 9.1, что возможно в силу (47):

$$\sup_{D_{(1)}} u > \sup_{D_{(1)}} v_1 \geqslant 2^{n+3} = 2 \cdot 2^{n+2}.$$

Обозначим через G_2 множество точек $(t, x) \in \tilde{Ц}_3$, где

$$u(t, x) > 2^{n+2}.$$

Рассмотрим $Ц^{(\rho_1+\rho)}$, $0<\rho<1/16-\rho_1$. Положим

$$G_\rho^{(2)}=G_2\cap\left(Ц^{(\rho_1+\rho)}\setminus Ц^{(\rho_1)}\right).$$

Так как $\rho_1<1/32$ и $G_2\subset G_1$, то в силу неравенства (46)

$$\operatorname{mes} G_{1/32}^{(2)}<\left(\frac{1/32}{2}\right)^{n+2}\delta,$$

а при достаточно малых положительных ρ по тем же соображениям, что и раньше

$$\operatorname{mes} G_\rho^{(2)}>\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+2}\delta.$$

Поэтому найдется такое ρ_2, что

$$\operatorname{mes} G_{\rho_2}^{(2)}=(\rho_2/2)^{n+2}\delta. \tag{48}$$

Найдем на боковой поверхности или на нижнем основании цилиндра $Ц^{(\rho_1+\rho_2/2)}$ точку (t^2,x^2), в которой $u>2\cdot 2^{n+2}$. Примем эту точку за верхний конец оси цилиндра радиуса $\rho_2/2$ и высоты $v(\rho_2/2)^2$:

$$Ц_{(2)}=Ц_{x^2,\ \rho_2/2}^{t^2-b\,(\rho_2/2)^2,\ t^2},$$

так что этот цилиндр помещается в зазоре между цилиндрами $Ц^{(\rho_1)}$ и $Ц^{(\rho_1+\rho_2)}$.

Положим

$$v_2(t,\ x)=u(t,\ x)-2^{n+2},$$

так что $v_2(t^2,x^2)>2^{n+2}$ и $v_2(t,x)>0$ в G_2, $v(t,x)\leqslant 0$ вне G_2. Обозначим через $D_{(2)}$ ту компоненту множества $G_2\cap Ц_{(2)}$, которая содержит точку (t^2,x^2).

Применяя к цилиндру $Ц_{(2)}$ и к области $D_{(2)}$ в нем лемму 9.1, находим (в силу (48))

$$\sup_{D_{(2)}} u>\sup_{D_{(2)}} v_2\geqslant 2^{n+3}\cdot 2^{n+2}=2\cdot 2^{2(n+2)}.$$

Если $\rho_1+\rho_2<1/32$, то продолжим процесс. Обозначим через G_3 множество точек $(t,x)\in\tilde{Ц}_3$, где

$$u>2^{2(n+2)}.$$

Рассмотрим $Ц^{(\rho_1+\rho_2+\rho)}$, $0<\rho<\frac{1}{16}-\rho_1-\rho_2$. Положим

$$G_\rho^{(3)}=G_3\cap\left(Ц^{(\rho_1+\rho_2+\rho)}\setminus Ц^{(\rho_1+\rho_2)}\right)$$

и найдем такое $\rho_3<1/32$, что

$$\operatorname{mes} G_{\rho_3}^{(3)}=\left(\frac{\rho_3}{2}\right)^{n+2}\delta,$$

и на собственной границе $Ц^{(\rho_1+\rho_2+\rho_3/2)}$ содержится точка (t^3, x^3), где

$$u(t^3,\ x^3)>2\cdot 2^{2(n+2)}.$$

Затем в зазоре между цилиндрами $Ц^{(\rho_1+\rho_2)}$ и $Ц^{(\rho_1+\rho_2+\rho_3)}$ найдем цилиндрик $Ц_{(3)}$ и в нем область $D_{(3)}$ и т. д.

Этот процесс мы будем продолжать до тех пор, пока не станет в первый раз $\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_k\geqslant 1/32$.

Заметим, что при этом $\rho_k<1/32$, а $\rho_1+\ldots+\rho_k<1/16$. Далее, такой момент, когда сумма $\rho_1+\ldots+\rho_k$ превзойдет $1/32$, наступит: в противном случае мы могли бы продолжить процесс неограниченно, а так как на каждом его шагу значение u возрастает более чем в 2^{n+2} раз, то функция u оказалось бы неограниченной в $\tilde{Ц}_3$.

Итак, пусть

$$\rho_1+\ \ldots\ +\rho_{k-1}<\frac{1}{32}$$

и

$$\rho_1+\ \ldots+\ \rho_k\geqslant\frac{1}{32}. \tag{49}$$

Каждому номеру i, $i=1,\ \ldots,\ k$, соответствует множество $G_{(\rho_i)}^{(i)}\subset\tilde{Ц}_3$, удовлетворяющее равенству

$$\operatorname{mes} G_{\rho_i}^{(i)}=\left(\frac{\rho_i}{2}\right)^{n+2}\delta \tag{50}$$

и

$$u\,\big|_{G_{\rho_i}^{(i)}}>2^{(i-1)(n+2)}. \tag{51}$$

Из (49) следует, что найдется такое i_0, что

$$\rho_{i_0} > \frac{1}{2^{i_0+5}}.$$

Тогда (50) и (51) дают нам

$$\operatorname{mes} G^{(i_0)}_{\rho_{i_0}} > 2^{-(i_0+6)(n+2)}\delta, \tag{52}$$

$$u\,\Big|_{G^{(i_0)}_{\rho_{i_0}}} > 2^{(i_0-1)(n+2)}. \tag{53}$$

Пусть μ — допустимая мера, определенная на $G^{(i_0)}_{\rho_{i_0}}$ и такая, что $\mu\left(G^{(i_0)}_{\rho_{i_0}}\right) > \dfrac{\gamma_{s,\,\beta}\left(G^{(i_0)}_{\rho_{i_0}}\right)}{2}$, так что вследствие теоремы 5.4

$$\mu\left(G^{i_0}_{\rho_{i_0}}\right) > \frac{\tilde{C}}{2}\operatorname{mes} G^{(i_0)}_{\rho_{i_0}}$$

($\tilde{C}$ — константа теоремы 5.4), так что

$$\mu\left(G^{(i_0)}_{\rho_{i_0}}\right) > \frac{\tilde{C}}{2}\cdot 2^{-(i_0+6)(n+2)}\delta. \tag{54}$$

Рассмотрим функцию

$$v(t,\ x) =$$
$$= 2^{(i_0-1)(n+2)}\left[\int\limits_{G^{(i_0)}_{\rho_{i_0}}} F_{s,\,\beta}(t-\tau,\ x-\xi)\,d\mu(\tau,\ \xi) - b^{-s}e^{-2s\frac{b_0}{b}}\mu\left(G^{(i_0)}_{\rho_{i_0}}\right)\right].$$

На нижнем основании цилиндра $Ц_1$, вне $\overline{G}^{(i_0)}_{\rho_{i_0}}$ она отрицательна, на боковой поверхности этого цилиндра — она отрицательна вследствие неравенства (26) (вспомним, что $G^{i_0}_{\rho_{i_0}} \subset \tilde{Ц}_3$) вне множества $\overline{G}^{i_0}_{\rho_{i_0}}$ в $Ц_1$ она не превосходит $2^{(i_0-1)(n+2)}$. Поэтому по принципу максимума она не превосходит u всюду в $Ц_1 \setminus \overline{G}^{(i_0)}_{\rho_{i_0}}$.

Применяя неравенство (27), находим

$$u|_{Ц_2} \geqslant v|_{Ц_2} \geqslant 2^{(i_0-1)(n+2)} b^{-s}\left(e^{-s\frac{b_0}{b}} - e^{-2s\frac{b_0}{b}}\right)\mu\left(G^{(i_0)}_{\rho_{i_0}}\right) >$$
$$> \frac{\tilde{C}\delta b^{-s}}{2^{7(n+2)+1}}\left(e^{-s\frac{b_0}{b}} - e^{-2s\frac{b_0}{b}}\right).$$

Число, стоящее в правой части последнего неравенства, примем за ν. Оно, очевидно, зависит от M_1, α_1, n.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Неравенство Харнака мы используем для получения свойств решений, напоминающих «одностороннюю» теорему Лиувилля (сама же «односторонняя» теорема Лиувилля, как мы видели, неверна).

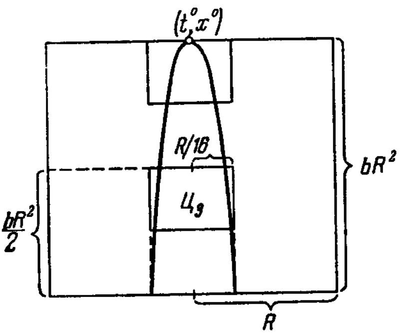

Рис. 36.

Теорема 9.2. *Пусть $u(t, x)$ — решение уравнения (41) типа Кордеса, определенное в полупространстве $t < 0$. Пусть* $\inf u = m > -\infty$ $(\sup u = M < +\infty)$. *Тогда $u(t, x) \to m$ $(u(t, x) \to M)$ при $t \to -\infty$ при каждом x.*

Доказательство. Можно считать, что $\inf u = 0$. Пусть C — константа неравенства Харнака (теорема 9.1). Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется такая точка (t^0, x^0), $t^0 < 0$, что

$$u(t^0, x^0) < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Рассмотрим внутренность параболоида $t^0 - t = 256b|x - x^0|^2$, где $b = \min(1/8M_1, 1)$ (рис. 36).

По неравенству Харнака во всех точках внутри параболоида имеет место неравенство

$$u(t, x) < \varepsilon.$$

Но любая прямая $x = \text{const}$ при достаточно большом по модулю отрицательном t попадает внутрь этого параболоида, что и доказывает нашу теорему.

Теорема 9.3 (теорема Лиувилля). *Пусть $u(t, x)$ — решение уравнения* (41) *типа Кордеса, определенное и неотрицательное при $t \leqslant 0$. Пусть далее $u(0, x) < M$. Тогда $u \equiv \mathrm{const}$.*

Доказательство. Для произвольной $x^0 \in E_n$ рассмотрим внутренность параболоида $-t = 256b|x - x^0|^2$

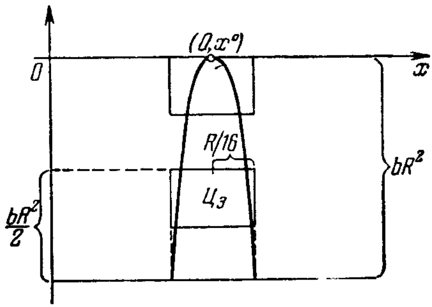

Рис. 37.

(рис. 37). По неравенству Харнака всюду внутри этого параболоида мы будем иметь неравенство

$$u(t, x) < CM.$$

Но когда точка x^0 пробегает E^n, внутренности этих параболоидов заметают все нижнее полупространство. Поэтому $0 \leqslant u(t, x) < CM$ при $t < 0$. Но тогда по теореме 8.2 $u \equiv \mathrm{const}$.

Примечания.

В этом и предыдущем параграфах излагались результаты, принадлежащие *Р. Я. Глаголевой* [1], [2].

Априорную оценку для решения линейного уравнения можно приложить к доказательству существования решения краевой задачи для квазилинейного уравнения типа Кордеса. Оно проводится по той же схеме, что и в эллиптическом случае (гл. I, § 9). Я этого не стал здесь делать, так как повторение было бы скучным.

Неравенство Харнака для случая самосопряженного параболического уравнения с ограниченными измеримыми коэффициентами было впервые сформулировано и доказано *Мозером* [3].

С лиувиллевыми теоремами в другом аспекте можно познакомиться по монографии *С. Д. Эйдельмана* [1].

§ 10. Тепловые потенциалы

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{55}$$

Для этого уравнения в неравенствах (2_1) и (2_2)

$$M_1 = M_2 = n \quad \text{и} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1.$$

Поэтому, положив в $F_{s,\,\beta}(t, x)$ $\beta = 1$ и $s = n/2$, мы получаем одновременно суб- и суперпараболическую функцию, т. е. $F_{n/2,\,1}(t, x)$ есть решение уравнения (55).

Эту функцию, умноженную на константу $\frac{1}{2^n \pi^{n/2}}$, мы обозначим через $G(t, x)$:

$$G(t, x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n (\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leqslant 0 \end{cases} \quad (\text{кроме} \quad t = 0, \ x = 0).$$

Она называется *функцией источника*.

Построенная с ее помощью функция типа потенциала

$$U(t, x) = \int_E G(t - \tau, x - \xi)\, d\mu(\tau, \xi)$$

называется *тепловым потенциалом*, порожденным источниками, лежащими в E, распределение которых задано мерой μ.

Если множество E есть гиперплоскость $t = 0$ и

$$d\mu(\tau, \xi) = f(\xi)\, d\xi,$$

причем функция $f(x)$, определенная на E_n, принадлежит рассмотренному нами в § 4 классу единственности (например, если f ограничена), то тепловой потенциал

$$u(t, x) = \int_{E_n} f(\xi)\, G(t, x - \xi)\, d\xi$$

(этот интеграл называется *интегралом Пуассона*) дает решение задачи Коши

$$u|_{t=0} = f(x).$$

Доказательство этого имеется в любом общем курсе уравнений с частными производными, и я его не буду приводить.

Рассмотрим в E_n ограниченную область Ω с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть D — цилиндрическая область:

$$D = \Omega \times (t_1, t_2), \qquad t_1 < t_2,$$

и S — ее боковая поверхность:

$$S = \partial\Omega \times (t_1, t_2).$$

Будем интересоваться тепловыми потенциалами, мера которых сосредоточена на S. Если

$$d\mu(\tau, \xi) = \rho(\tau, \xi)\, d\tau\, ds_\xi,$$

где ds_ξ — элемент $(n-1)$-мерной площади поверхности $\partial\Omega$, то такой потенциал

$$U(t, x) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \rho(\tau, \xi)\, G(t-\tau, x-\xi)\, ds_\xi\, d\tau$$

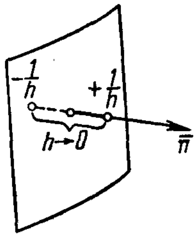

Рис. 38.

мы будем называть тепловым потенциалом простого слоя с плотностью источников $\rho(\tau, \xi)$.

Заметим, что $G(t-\tau, x-\xi) = 0$ при $\tau > t$, поэтому

$$U(t, x) = \int_{t_1}^{t} \int_{\partial\Omega} \rho(\tau, \xi)\, G(t-\tau, x-\xi)\, ds_\xi\, d\tau \qquad \text{при } t_1 < t_2. \tag{56}$$

Именно в таком виде (56) обычно записывают потенциал простого слоя.

Однако нас сейчас будет интересовать не потенциал простого слоя, а потенциал двойного слоя. Вспомним потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа, известный нам из общего курса уравнений с частными производными. Это потенциал, создаваемый дипольными источниками с осью диполя, направленной по внешней нормали к S (рис. 38).

Совершенно аналогично лапласовскому случаю мы получим, что при плотности распределения дипольных моментов $\rho(t, x)$ тепловой потенциал равен

$$u(t, x) = \int_{t_1}^{t} \int_{\partial\Omega} \rho(\tau, \xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} G(t-\tau, x-\xi)\, ds_\xi\, d\tau \qquad (t_1 < t_2). \tag{57}$$

Впрочем, не делая экскурсов в общий курс, можно объявить, что функция $u(t, x)$, задаваемая формулой (57), *по определению* называется *тепловым потенциалом двойного слоя* с плотностью ρ. Именно так мы и поступим. Иногда нам будет удобно пользоваться эквивалентной формулой

$$u(t, x) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \rho(\tau, \xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} G(t-\tau, x-\xi)\, ds_\xi\, d\tau. \tag{58}$$

Займемся исследованием свойств теплового потенциала двойного слоя.

Будем дальше всегда предполагать, что $\rho(\tau, \xi)$ — непрерывная на $\bar{S}$ функция и $\partial\Omega$ — дважды непрерывно дифференцируемая поверхность.

1. Тепловой потенциал двойного слоя удовлетворяет уравнению теплопроводности всюду вне $\bar{S}$.

Действительно, функция $G(t-\tau, x-\xi)$ бесконечно дифференцируема по всем аргументам и удовлетворяет уравнению (55) всюду при $(t, x) \neq (\tau, \xi)$.

Поэтому при $(t, x) \notin \bar{S}$

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \rho(\tau, \xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \left(\Delta_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) G(t-\tau, x-\xi)\, ds_\xi\, d\tau = 0.$$

2. Теорема 10.1. *Тепловой потенциал двойного слоя определен всюду в R_{n+1} и терпит скачок при переходе через S.*

Пусть $(t^0, x^0) \in S$. Тогда существует предел

$$\lim_{\substack{(t, x) \to (t^0, x^0) \\ x \in \Omega}} u(t, x). \tag{59$_1$}$$

и предел

$$\lim_{\substack{(t,\ x)\to(t^0,\ x^0)\\ x\notin\overline{\Omega}}} u(t,\ x). \tag{59$_2$}$$

Обозначим первый из них через $u_i(t^0, x^0)$, *а второй — через* $u_e(t^0, x^0)$. *Имеют место равенства*

$$u_i(t^0,\ x^0) = u(t^0,\ x^0) - \sigma\rho(t^0,\ x^0) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_0}\int_{\partial\Omega} \rho(\tau,\ \xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi} G(t^0-\tau, x^0-\xi)\, ds_\xi\, d\tau - \sigma\rho(t^0,\ x^0) \tag{60$_1$}$$

и

$$u_e(t^0,\ x^0) = u(t^0,\ x^0) + \sigma\rho(t^0,\ x^0) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_0}\int_{\partial\Omega} \rho(\tau,\ \xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi} G(t^0-\tau,\ x^0-\xi)\, ds_\xi\, d\tau + \sigma\cdot\rho(t^0,\ x^0), \tag{60$_2$}$$

где $\sigma > 0$ — *константа, значение которой для нас неважно*. (Для наших узких целей нужно только первое из равенств (60), но второе получится как бесплатное приложение.)

Схема доказательства с точностью до некоторых деталей та же, что и в случае уравнения Лапласа.

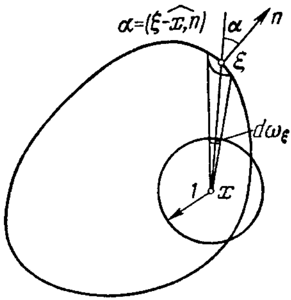

Рис. 39.

Произведя в формуле (57) дифференцирование $\frac{\partial}{\partial n_\xi}$, получим

$$u(t,\ x) =$$

$$= -\frac{1}{2^{n+1}\pi^{n/2}}\int_{\partial\Omega}\int_{t_1}^{t}\rho(\tau,\xi)\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{n/2+1}}\times$$

$$\times e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}\cos(\widehat{\xi-x,\ n})\,d\tau\, ds_\xi. \tag{61}$$

Обозначая через $d\omega_\xi$ телесный угол, под которым из точки x виден элемент ds_ξ поверхности $\partial\Omega$ (рис. 39), получим

$$d\omega_\xi = \frac{ds_\xi}{|x-\xi|^{n-1}}\cos(\widehat{\xi-x,\ n}).$$

Поэтому из (61) получаем

$$u(t, x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi^{n/2}} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\int\limits_{t_1}^{t} \rho(\tau, \xi) \frac{|x-\xi|^n}{(t-\tau)^{n/2+1}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} d\tau \right) d\omega_\xi. \tag{62}$$

Начнем рассмотрение со случая, когда $\rho \equiv 1$ и $t_1 = -\infty$. Положим

$$u_0(t, x) = -\frac{1}{2^{n+1}\pi^{n/2}} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\int\limits_{-\infty}^{t} \frac{|x-\xi|^n}{(t-\tau)^{n/2+1}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} d\tau \right) d\omega_\xi.$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену переменных

$$\frac{|x-\xi|}{2\sqrt{t-\tau}} = \eta.$$

Тогда

$$d\eta = \frac{|x-\xi|}{4(t-\tau)^{3/2}} d\tau$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \frac{|x-\xi|^n}{(t-\tau)^{n/2+1}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} d\tau =$$

$$= 2^{n+1} \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\frac{|x-\xi|}{2\sqrt{t-\tau}} \right)^{n-1} e^{-\left(\frac{|x-\xi|}{2\sqrt{t-\tau}}\right)^2} \frac{|x-\xi|}{4(t-\tau)^{3/2}} d\tau =$$

$$= 2^{n+1} \int\limits_{0}^{\infty} \eta^{n-1} e^{-\eta^2} d\eta = 2^{n+1} a. \tag{63}$$

Число a есть вполне определенное положительное число. Значение его для дальнейшего не играет роли. Поэтому не будем его вычислять.

Мы получаем

$$u_0(t, x) = -\frac{a}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\partial\Omega} d\omega_\xi.$$

А это значит, что если обозначить через ω_n площадь $(n-1)$-мерной поверхности единичной сферы в E_n, то:

$$u_0(t, x) = -\frac{a}{\pi^{n/2}}\omega_n,$$

если $x \in \Omega$, $t_1 < t < t_2$;

$$u_0(t, x) = -\frac{a}{\pi^{n/2}}\frac{\omega_n}{2},$$

если $x \in \partial\Omega$, $t_1 < t < t_2$;

$$u_0(t, x) = 0,$$

если $x \notin \overline{\Omega}$, $t_1 < t < t_2$.

Обозначим константу $\frac{a}{\pi^{n/2}}\omega_n$ через 2σ, так что

$$u_0(t, x) = \begin{cases} -2\sigma & \text{при} \quad x \in \Omega, \\ -\sigma & \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \qquad t_1 < t < t_2, \\ \;\;0 & \text{при} \quad x \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Перейдем теперь к случаю произвольной непрерывной плотности $\rho(t, x)$.

Мы докажем, что при $(t^0, x^0) \in \overline{S}$ разность потенциалов с данной плотностью $\rho(t, x)$ и с постоянной плотностью $\rho(t^0, x^0)$ является функцией, определенной всюду и непрерывной в точке (t^0, x^0). Тем самым и будет доказано нужное нам утверждение. Мы имеем

$$u(t, x) - \rho(t^0, x^0)\,u_0(t, x) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}\pi^{n/2}}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\int\limits_{t_1}^{t}(\rho(t, x) - \rho(t^0, x^0))\frac{|x-\xi|^n}{(t-\tau)^{n/2+1}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}d\tau\right)d\omega_\xi +$$

$$+\frac{\rho(t^0, x^0)}{2^{n+1}\pi^{n/2}}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\int\limits_{-\infty}^{t_1}\frac{|x-\xi|^n}{(t-\tau)^{n/2+1}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}d\tau\right)d\omega_\xi. \qquad (64)$$

Второй интеграл, стоящий в правой части формулы (64), непрерывен в окрестности точки (t^0, x^0).

Таким образом, надо доказать непрерывность первого интеграла. Для этого мы воспользуемся теоремой о равномерно сходящемся в точке интеграле (см. *Петровский* [1], гл. 3, § 34). Я напомню определение равномерно сходящегося в точке интеграла и теорему о нем.

Определение. Пусть функция $f(P, Q)$, $P \in R_{n+1}$, $Q \in \bar{S}$ непрерывна при $P \neq Q$. Рассмотрим интеграл

$$\int_S f(P,\ Q)\, d\sigma_Q,$$

где $d\sigma_Q = ds\, d\tau$ — элемент n-мерной площади поверхности S.

Скажем, что этот интеграл равномерно сходится в точке $P_0 \in \bar{S}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки P_0 в R_{n+1} и окрестность γ точки P_0 на $\bar{S}$, что при всех $P \in U$ интеграл

$$\int_\gamma f(P,\ Q)\, d\sigma_Q$$

существует и

$$\left| \int_\gamma f(P, Q)\, d\sigma_Q \right| < \varepsilon.$$

Теорема. *Если* $\int_S f(P,\ Q)\, d\sigma_Q$ *равномерно сходится в точке* $P_0 \in \bar{S}$, *то функция* $F(P) = \int_S f(P,\ Q)\, d\sigma_Q$ *определена в окрестности точки* P_0 *и непрерывна в точке* P_0.

Обратимся теперь к первому из интегралов в правой части (64):

$$\int_{\partial\Omega} \left(\int_{t_1}^{t} [\rho(\tau,\ \xi) - \rho(t^0,\ x^0)] \frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)^{n/2+1}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} d\tau \right) d\omega_\xi \tag{65}$$

и докажем, что он равномерно сходится в точке (t^0, x^0).

Так как поверхность $\partial\Omega$ дважды непрерывно дифференцируема, то существует такая константа C, что для всех $x \in E_n$

$$\int_{\partial\Omega} |d\omega_\xi| < C. \tag{66}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем на $\bar{S}$ такую окрестность γ точки (t^0, x^0), что

$$|\rho(t, x) - \rho(t^0, x^0)| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}aC} \quad \text{при} \quad (t, x) \in \gamma,$$

где a и C взяты соответственно из равенства (63) и неравенства (66).

Тогда

$$\left| \int_\gamma [\rho(\tau, \xi) - \rho(t^0, x^0)] \frac{|x-\xi|^n}{(t-\tau)^{n/2+1}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} d\tau \, d\omega_\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}aC} \int_\gamma \frac{|x-\xi|^n}{(t-\tau)^{n/2+1}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} d\tau \, |d\omega_\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}aC} \int_{\partial\Omega} \left(\int_{-\infty}^{t} \frac{|x-\xi|}{(t-x)^{n/2+1}} e^{-\frac{|x-\xi|}{4(t-\tau)}} d\tau \right) |d\omega_\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{C} \int_{\partial\Omega} |d\omega_\xi| = \varepsilon.$$

Полученное неравенство одновременно показывает, что интеграл (57) сходится для всех (t, x).

Мы доказали, таким образом, что интеграл (65) равномерно сходится в точке (t^0, x^0) (в качестве окрестности U можно взять все R_{n+1}).

Значит, этот интеграл как функция t и x непрерывен в точке (t^0, x^0), чем и завершается доказательство теоремы о скачке потенциала.

Итак, мы доказали, что тепловой потенциал двойного слоя определен всюду в R_{n+1} в том числе на $\bar{S}$; существуют пределы (59_1) и (59_2) и выполнены равенства (60_1) и (60_2).

См. примечания к следующему параграфу.

§ 11. Существование решения первой краевой задачи для цилиндрической области. Оценки производных решения, теорема о компактности семейства решений

Рассмотрим цилиндрическую область

$$D = \Omega \times (t_1, t_2)$$

с боковой поверхностью S такую же, как и в предыдущем параграфе.

1. Рассмотрим для уравнения (55) и этой области следующую краевую задачу:

$$u|_S = f(t, x), \quad u|_{t=t_1} = 0;$$

$f(t, x)$ непрерывна на $\bar{S}$ и $f(t, x) \to 0$ при $t \to t_1 + 0$ равномерно по x (условие согласования).

Докажем, что решение такой задачи существует. Будем искать его в виде теплового потенциала двойного слоя:

$$u(t, x) = \int_{t_1}^{t} \int_{\partial\Omega} \rho(\tau, \xi) \frac{\partial}{\partial n} G(t-\tau, x-\xi)\, ds_\xi\, d\tau. \tag{67}$$

В силу (60_1)

$$\rho(t, x) = -\frac{1}{\sigma} \int_{t_1}^{t} \int_{\partial\Omega} \rho(\tau, \xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} G(t-\tau, x-\xi)\, ds_\xi\, d\tau + \frac{1}{\sigma} f(t, x),$$
$$(t, x) \in S. \tag{68}$$

Мы получили интегральное уравнение для нахождения $\rho(t, x)$. Это уравнение фредгольмово по x и вольтеррово по t. Последнее обстоятельство позволяет применить для установления существования его решения метод сжатых отображений.

Будем сначала искать значения $\rho(t,x)$ для $t_1 < t < t_1 + \delta$ и покажем, что можно найти такое $\delta > 0$, что интегральный оператор окажется сжимающим.

Пусть $S_\delta = \partial\Omega \times [t_1, t_1 + \delta]$ и $z(t, x)$ — непрерывная функция, определенная на S_δ.

Положим

$$-\frac{1}{\sigma}\int_{t_1}^{t}\int_{\partial\Omega} z(\tau,\ \xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi} G(t-\tau,\ x-\xi)\,ds_\xi\,d\tau = Az.$$

Мы имеем для двух непрерывных на S_δ функций z_1 и z_2

$$\max_{S_\delta}|Az_1 - Az_2| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{S_\delta}|z_1 - z_2| \int_{t_1}^{t_1+\delta}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial}{\partial n_\xi} G(t-\tau,\ x-\xi)\right| ds_\xi\,d\tau.$$

Так как по равенству (63) и неравенству (66)

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial}{\partial n_\xi} G(t-\tau,\ x-\xi)\right| ds_\xi\,d\tau < 2^{n+1}aC < \infty,$$

то по абсолютной непрерывности интеграла как функции множества

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial}{\partial n_\xi} G(t-\tau,\ x-\xi)\right| ds_\xi\,d\tau \to 0$$

при $\delta \to 0$. Поэтому

$$\max_{S_\delta}|Az_1 - Az_2| \leqslant a(\delta)\max|z_1 - z_2|,$$

где $a(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Таким образом, при δ достаточно малом оператор A — сжимающий на S_δ.

Итак, для $t_1 < t < t_1 + \delta$ решение существует.

Пусть теперь мы нашли решение $\rho(t, x)$ на $S_{t'-t_1}$, $t_1 < t' < t_2$. Покажем, что тогда решение существует на $S_{t'+\delta-t_1}$ (точнее, на $S_{t'+\delta'-t_1}$, где $\delta' = \min(\delta,\ t_2 - t')$).

Действительно, пусть $t^0 = t' + \delta$. Рассмотрим на $S_{t^0-t_1}$ класс непрерывных функций, совпадающих с $\rho(t, x)$ при $t \leqslant t'$.

Тогда для двух функций z_1 и z_2 из этого класса

$$Az_1 - Az_2 = -\frac{1}{\sigma}\int\limits_{t'}^{t'+\delta}\int\limits_{\partial\Omega}(z_1 - z_2)\frac{\partial}{\partial n_\xi}G(t-\tau,\ x-\xi)\,ds_\xi\,d\tau,$$

и мы получаем, что оператор A опять является сжимающим в этом классе.

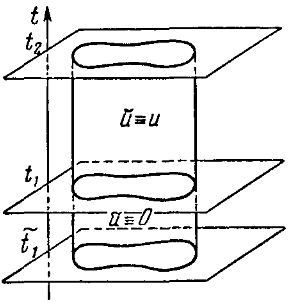

Рис. 40.

Так, за конечное число шагов мы найдем решение $\rho(t, x)$ на всей поверхности $\overline{S}$. Функция $\rho(t, x)$, очевидно, непрерывна на $\overline{S}$.

Нам надо доказать, что функция u стремится к нулю при $t\to t_1+0$ равномерно по x. Это можно усмотреть из формул (67) и (68), но проще поступить так: возьмем число $\tilde{t}_1 < t_1$ и рассмотрим цилиндр $\tilde{D} = \Omega\times(\tilde{t}_1, t_2)$ (рис. 40). На его боковой поверхности $\tilde{S}$ определим функцию $\tilde{f}$ так:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{при}\quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,\\ 0 & \text{при}\quad \tilde{t}_1 \leqslant t < t_1.\end{cases}$$

Функция $\tilde{f}$ будет непрерывна на $\overline{\tilde{S}}$.

Положим

$$\tilde{u}(t,\ x) = \int\limits_{\tilde{t}_1}^{t}\int\limits_{\partial\Omega}\tilde{\rho}(\tau,\ \xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}G(t-\tau,\ x-\xi)\,ds_\xi\,d\tau \qquad (67')$$

$$\tilde{\rho}(t,\ x) = \\ = -\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\tilde{t}_1}^{t}\int\limits_{\partial\Omega}\tilde{\rho}(\tau,\ \xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}G(t-\tau, x-\xi)\,ds_\xi\,d\tau + \frac{1}{\sigma}\tilde{f}(t, x). \qquad (68')$$

Тогда, очевидно, $\tilde{u}\equiv u$ при $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ и $\tilde{u}(t, x)$ непрерывна $\overline{\Omega}\times(\tilde{t}_1, t_2)$ и равна нулю при $(t, x)\in\overline{\Omega}\times(\tilde{t}_1, t_1)$.

Таким образом, $u(t, x)$ действительно является решением нашей задачи.

2. Перейдем теперь к случаю, когда на собственной границе цилиндрической области D задана произвольная непрерывная функция $f(t, x)$.

Рассмотрим $f(t_1, x)$, $x \in \overline{\Omega}$. Продолжим эту функцию непрерывным образом на всю гиперплоскость $t = t_1$ так, чтобы она оставалась ограниченной. Обозначим продолженную функцию через $f(x)$.

Решим для уравнения (55) задачу Коши

$$v\,|_{t=t_1} = f(x).$$

Определим на собственной границе цилиндрической области D функцию

$$\varphi(t, x) = f(t, x) - v(t, x).$$

Тогда $\varphi(t, x)$ непрерывна на собственной границе D и обращается в нуль на ее нижнем основании.

Решим по п. 1 для области D и уравнения (55) задачу

$$w\,|_S = \varphi(t, x), \quad w\,|_{t=t_1} = 0.$$

Очевидно, функция $u = v + w$ будет решением исходной задачи.

Мы получили теорему:

Теорема 11.1. *Пусть $D \subset R_{n+1}$ — цилиндрическая область: $D = \Omega \times (t_1, t_2)$ и $\partial\Omega$ — дважды непрерывно дифференцируема. Тогда для любой непрерывной на собственной границе области D функции f существует решение 1-й краевой задачи. Это решение складывается из интеграла Пуассона и потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью, распределенной на боковой поверхности.*

3. Пусть $u(t, x)$ — решение уравнения (55), определенное в области D. Пусть (t^0, x^0) — произвольная точка из D.

Рассмотрим цилиндр *Ц*, содержащий внутри точку (t^0, x^0) и содержащийся в D. Если мы возьмем значение функции u на собственной границе этого цилиндра и построим в нем по этим значениям решение $v(t, x)$

способом, изложенным в предыдущем пункте, то по теореме единственности $u \equiv v$ в $Ц$.

Функция v складывается из потенциала двойного слоя (67) и из решения задачи Коши, представляемого интегралом Пуассона.

Интеграл Пуассона является аналитической функцией по t и по x, а потенциал двойного слоя аналитической функцией по x и бесконечно дифференцируемой по t (почему?).

Отсюда следует, что решение уравнения $u(t, x)$ в любой области *бесконечно дифференцируемо* (а по x аналитично).

4. Для дальнейшего нам понадобятся оценки производных решения уравнения (55) в зависимости от размеров самого решения и от расстояния до границы точки, в которой эти производные вычисляются. Эти оценки можно было бы извлечь из формул (67) и (68), но чтобы не возиться с оценками решений интегральных уравнений, изберем другой путь, принадлежащий С. Н. Бернштейну.

Пусть имеется прямой круговой цилиндр

$$Ц_{0,\,R}^{0,\,T},$$

и пусть в этом цилиндре определено решение $u(t, x)$ уравнения теплопроводности (55), непрерывное в замкнутом цилиндре.

Введем вспомогательную функцию

$$v(t,\ x) = \varphi(t,\ x) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + Cu^2, \tag{69}$$

где функция $\varphi(t,\ x)$ и константа $C > 0$ будут нами подобраны ниже. Эта функция φ будет обладать следующими свойствами: $\varphi(t,\ x) > 0$ внутри, $Ц_{0,\,R}^{0,\,T}$ и $\varphi(t,\ x) = 0$ на собственной границе $\Gamma\left(Ц_{0,\,R}^{0,\,T}\right)$ цилиндра $Ц_{0,\,R}^{0,\,T}$.

Мы подберем φ и C так, чтобы функция v оказалась субпараболической:

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0.$$

Тогда

$$\sup_{Ц_{0,R}^{0,T}} v \leqslant \max_{\Gamma\left(Ц_{0,R}^{0,T}\right)} v,$$

и следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \leqslant \frac{C}{\varphi(t, x)} \max_{\Gamma\left(Ц_{0,R}^{0,T}\right)} u^2. \tag{70}$$

Мы имеем

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = \sum_k \varphi_{x_k x_k} \sum_i u_{x_i}^2 + 4 \sum_k \varphi_{x_k} \sum_i u_{x_i} u_{x_i x_k} +$$
$$+ 2\varphi \sum_{i,k} u_{x_i x_k}^2 + 2\varphi \sum_i u_{x_i} \sum_k u_{x_i x_k x_k} + 2C \sum_k u_{x_k}^2 +$$
$$+ 2Cu \sum_k u_{x_k x_k} - \varphi_t \sum_i u_{x_i}^2 - 2\varphi \sum_i u_{x_i} u_{x_i t} - 2Cuu_t =$$
$$= 2\varphi \sum_i u_{x_i} \left(\sum_k u_{x_i x_k x_k} - u_{x_i t} \right) + 2Cu \left(\sum_k u_{x_k x_k} - u_t \right) +$$
$$+ \left(\sum_k \varphi_{x_k x_k} - \varphi_t + 2C \right) \sum_i u_{x_i}^2 +$$
$$+ 2\varphi \sum_{i,k} u_{x_i x_k}^2 + 4 \sum_k \varphi_{x_k} \sum_i u_{x_i} u_{x_i x_k}.$$

Так как u — решение уравнения теплопроводности, то

$$\sum_k u_{x_k x_k} - u_t = 0$$

и

$$\sum_k u_{x_i x_k x_k} - u_{x_i t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k u_{x_k x_k} - u_t \right) = 0.$$

Далее функцию φ мы выберем так, чтобы она и все ее производные были ограниченными. После этого мы возьмем константу C такой большой, чтобы выполнялось

$$\left| \sum_k \varphi_{x_k x_k} - \varphi_t \right| < C. \tag{71}$$

Поэтому

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \geqslant C \sum_i u_{x_i}^2 + 2\varphi \sum_{i,k} u_{x_i x_k}^2 + 4 \sum_k \varphi_{x_k} \sum_i u_{x_i} u_{x_i x_k} = \\ = \sum_{i,k} \left(\frac{C}{n} u_{x_i}^2 + 4\varphi_{x_k} u_{x_i} u_{x_i x_k} + 2\varphi u_{x_i x_k}^2 \right).$$

Каждый член последней суммы рассмотрим как квадратный трехчлен относительно u_{x_i} и $u_{x_i x_k}$. Он будет неотрицательным, если

$$\frac{C}{n} \varphi \geqslant 2\varphi_{x_k}^2. \tag{72}$$

Так как φ положительна внутри цилиндра, φ_{x_k} ограничена, а константа C в нашей власти, то нам надо беспокоиться только о том, чтобы суметь удовлетворить этому неравенству при приближении к собственной границе цилиндра, где φ обращается в нуль.

Для того чтобы выполнялось неравенство, нужно, чтобы φ убывала при приближении к боковой границе не медленнее, чем квадратично (почему?) Так как мы заинтересованы в самом медленном убывании, чтобы оценка (70) была получше, то, естественно, мы и остановимся на квадратичном убывании φ при $|x| \to R$.

Далее, производные φ должны быть ограниченными. Поэтому при $t \to 0$ самое медленное возможное убывание φ линейное.

Возьмем в качестве φ, например, функцию

$$t(|x|^2 - R^2)^2,$$

удовлетворяющую указанным качествам.

Тогда мы имеем возможность выбрать C столь большим, чтобы выполнялись в $Ц_{0,R}^{0,T}$ неравенства (71) и (72), и, следовательно,

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0,$$

т. е. выполняется неравенство (70), которое дает в этом случае

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \leqslant \frac{C}{t(|x|^2 - R^2)^2} \max_{\Gamma(Ц_{0,R}^{0,T})} u^2$$

или

$$\left| u_{x_i} \right| \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{t}\,(R^2 - |x|^2)} \max_{\Gamma\left(Ц_{0,\,R}^{0,\,T}\right)} |u|, \tag{73}$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

Последнее неравенство и есть *оценка Бернштейна* для уравнения теплопроводности.

В дальнейшем в этом параграфе для области $D \subset R_{n+1}$ через D_ρ мы будем обозначать совокупность точек $(t^0, x^0) \in D$, для которых $Ц_{x^0,\,\rho}^{t^0-\rho^2,\,t^0} \in D$.

В качестве следствия из неравенства Бернштейна мы получаем такую теорему:

Теорема 11.2. *Пусть в области* $D \subset R_{n+1}$ *определено решение* $u(t, x)$ *уравнения теплопроводности* (55). *Пусть* $\rho > 0$ *произвольно. Тогда*

$$\left\| u_{x_i} \right\|_0^{D_\rho} \leqslant \frac{C'}{\rho^3} \| u \|_0^D, \tag{74}$$

где $C' > 0$ — *некоторая абсолютная константа.*

Доказательство. Пусть $(t^0, x^0) \in D_\rho$. Применим к цилиндру $Ц_{x^0,\,\rho}^{t^0-\rho^2,\,t^0}$ неравенство (73). Получим

$$\left| u_{x_i}(t^0, x^0) \right| \leqslant \frac{C_1}{\rho \cdot \rho^2} \max_{\Gamma\left(Ц_{x^0,\,\rho}^{t^0-\rho^2,\,t^0}\right)} |u| \leqslant \frac{C'}{\rho^3} \| u \|_0^D.$$

Из теоремы 11.2 в свою очередь мы получаем такое утверждение:

Лемма 11.1.

$$\left\| \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\|_0^{D_\rho} \leqslant \frac{C''}{\rho^{3k}} \| u \|_0^D, \qquad k_1 + \ldots + k_n = k. \tag{75}$$

Доказательство. По предыдущей теореме

$$\| u_{x_i} \|_0^{D_{\rho/k}} \leqslant \frac{k^3 C'}{\rho^3} \| u \|_0^D.$$

Применим теперь предыдущую теорему к функции u_{x_i} и областям $D_{\rho/k}$ и $D_{2\rho/k}$. Получим

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \right\|_0^{D_{2\rho/k}} \leqslant \frac{k^6 C'}{\rho^6} \| u \|_0^D.$$

Применяя далее к функциям $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ и к областям $D_{2\rho/k}$ и $D_{3\rho/k}$ предыдущую теорему, мы оценим в $D_{3\rho/k}$ третьи производные по x и так через k шагов получим

$$\left\| \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\|_0^{D_\rho} \leqslant \frac{k^{3k} C'}{\rho^{3k}} \| u \|_0^D = \frac{C''}{\rho^{3k}} \| u \|_0^D.$$

Теорема 11.3.

$$\left\| \frac{\partial^{k_0+k} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial t^{k_0}} \right\|_0^{D_\rho} \leqslant \frac{C''}{\rho^{6k_0+3k}} \| u \|_0^D, \; k = k_1 + \ldots + k_n. \quad (76)$$

Доказательство. Так как из уравнения следует, что

$$\frac{\partial^{k_0+k} u}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^{k_0} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$$

и тем самым производная $\frac{\partial^{k_0+k} u}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ равна линейной комбинации производных функций u по x порядка $2k_0 + k$, то оценка (76) вытекает из леммы 11.1.

Из теоремы 11.3 мы получаем следующую теорему о компактности последовательности равномерно ограниченных решений.

Теорема 11.4. *Пусть в области D определена последовательность $\{u_m\}$ решений уравнения* (55) *и* $\| u_m \|_0^D < M$, $m = 1, 2, \ldots$

Тогда из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{u_{m_k}\}$ такую, что она сходится в каждой точке $(t, x) \subset D$ к решению u уравнения (55), *причем сходимость равномерная в каждом D_ρ, $\rho > 0$.*

Доказательство. Выберем последовательность $\rho_m \to 0$.

Из теоремы 11.3 следует, что последовательность компактна в метрике C_2 в D_{ρ_m}. Поэтому можно выбрать подпоследовательность

$$u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1m}, \ldots,$$

равномерно сходящуюся в D_{ρ_1} вместе с производными до второго порядка и, значит, сходящуюся к решению уравнения (55).

Из последовательности $\{u_{1m}\}$ можно выбрать подпоследовательность

$$u_{21},\ u_{22},\ \ldots,\ u_{2m},\ \ldots,$$

равномерно сходящуюся в D_{ρ_2} вместе с производными до второго порядка и т. п.

Диагональная последовательность

$$u_{11},\ u_{22},\ \ldots,\ u_{mm},\ \ldots$$

будет сходиться к решению и притом равномерно во всяком D_{ρ_m}, а следовательно, во всяком D_ρ, $\rho > 0$.

Примечание.

Данное в этом и предыдущем параграфе построение решения 1-й краевой задачи для уравнения теплопроводности в цилиндрической области методом тепловых потенциалов является традиционным. Соответствующий материал можно найти в учебнике *В. И. Смирнова* [1] т. 4, в учебнике *С. Г. Михлина* [1], в учебнике *А. Н. Тихонова* и *А. А. Самарского* [1], в монографии *О. А. Ладыженской*, *В. А. Солонникова* и *Н. Н. Уральцевой* [1].

Доказательство неравенства *С. Н. Бернштейна* содержится в его статье [2].

§ 12. Построение обобщенного решения первой краевой задачи в произвольной ограниченной области в R_{n+1}. Поведение обобщенного решения в граничных точках

1. В п. 1 предыдущего параграфа мы рассматривали для уравнения теплопроводности (55) и цилиндрической области D задачу

$$\left.\begin{array}{r} u|_S = f(t,\ x) \\ u|_{t=t_1} = 0, \end{array}\right. \quad f \text{ непрерывна на } \bar{S}, \tag{77}$$

причем мы требовали, чтобы при $t = 0$ выполнялось условие согласования: $f(t, x) \to 0$ при $t \to t_1 + 0$ равномерно по x.

Для дальнейшего нам понадобится решение этой задачи без условия согласования: f непрерывна на $\bar{S}$, но не предполагается, что $f(t, x) \to 0$ при $t \to t_1$.

Формула (67), где $\rho(t, x)$ решение уравнения (68), дает решение этой задачи. Действительно, решая уравнение (68), мы нигде не использовали того, что $f \to 0$ при $t \to t_1$.

Потенциал двойного слоя $u(t, x)$, даваемый формулой (67), будет решением в D и, в силу (60_1), $u(t, x) \to \to f(t^0, x^0)$ при $(t, x) \to (t^0, x^0) \in S$, $x \in \Omega$.

Далее, в силу определения функции источника G, $u(t, x) \to 0$ при $(t, x) \to (t_1, x)$, $x \in \Omega$, $t > t_1$.

Заметим, кроме того, что $u(t, x)$ ограничено в D:

$$|u(t, x)| \leqslant M = \max_{\bar{S}} |\rho| \cdot \frac{a}{\pi^{n/2}} C, \tag{78}$$

C — константа неравенства (66).

Решив задачу (77), мы можем решить и задачу

$$u|_S = f, \qquad u|_{t=t_1} = g \tag{79}$$

f непрерывна на $\bar{S}$, g непрерывна на $\bar{\Omega}$. Требуется найти ограниченное решение, принимающее на S и на Ω заданные значения.

Действительно, продолжим g непрерывным образом на E_n так, чтобы она оставалась ограниченной, и найдем решение задачи Коши в виде интеграла Пуассона. Это решение — обозначим его через $v(t, x)$ — будет ограниченным.

Положим $\tilde{f} = f - v|_S$ и решим рассмотренным выше методом задачу

$$w|_S = \tilde{f}, \qquad w|_{t=t_1} = 0;$$

$u = v + w$ даст нам ограниченное решение искомой задачи.

2. Докажем для цилиндрической области следующий принцип максимума.

Теорема 12.1. *Пусть $u(t, x)$ — субпараболическая (суперпараболическая) для уравнения (55) функция в области D, непрерывная вплоть до S и до Ω. Пусть u неположительна (неотрицательна) на S и на Ω. Пусть, далее, u ограничена в D по модулю некоторой константой M.*

Тогда $u \leqslant 0$ $(u \geqslant 0)$ в D.

Доказательство. Пусть для определенности $u(t, x)$ субпараболична. Обозначим через g_ε множество точек $x \in E_n$, расположенных на расстоянии, меньшем ε, от $\partial\Omega$.

Положим

$$\omega_\varepsilon(t, x) = 2M \int\limits_{g_\varepsilon} G(t - t_1, x - \xi)\, d\xi.$$

Тогда функция

$$u_\varepsilon(t, x) = u(t, x) - \omega_\varepsilon(t, x)$$

субпараболична и

$$\overline{\lim_{(t, x) \to S \cup \Omega \cup \partial\Omega}} u_\varepsilon(t, x) \leqslant 0.$$

Таким образом, если мы рассмотрим цилиндрическую область $D_\eta = \Omega \times (t_1, t_2 - \eta)$ при любом $\eta > 0$, то

$$\overline{\lim_{(t, x) \to \Gamma(D_\eta)}} u_\varepsilon(t, x) \leqslant 0,$$

а потому по принципу максимума (теорема 2.1)

$$u_\varepsilon(t, x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D_\eta$$

и, значит, в силу произвольности η,

$$u_\varepsilon(t, x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Устремляя теперь к нулю ε, мы получаем

$$u(t, x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D$$

(ч. т. д.).

Теорема 12.2. *Пусть $u(t, x)$ — ограниченное решение задачи* (79) *в цилиндрической области D, причем f непрерывна на $\bar{S}$, а g — на $\bar{\Omega}$.*

Тогда решение $u(t, x)$ непрерывно в $\bar{D}$ всюду, кроме, быть может, границы нижнего основания D, и удовлетворяет уравнению на верхней крышке.

Доказательство. Нам следует только проверить, что решение $u(t, x)$ непрерывно на замыкании верхней крышки и что оно удовлетворяет уравнению на верхней крышке.

Для этого рассмотрим цилиндрическую область

$$D_1 = \Omega \times (t_1,\ t_2 + 1).$$

Продолжим функцию f непрерывным образом на замыкание $\bar{S}_1$ боковой поверхности S_1 области D_1. Продолженную функцию обозначим через f_1.

Найдем ограниченное решение задачи

$$u_1\big|_{S_1} = f_1, \qquad u_1\big|_{t=t_1} = g.$$

По теореме 12.1 $u_1 \equiv u$ в D. Так как функция $u_1(t, x)$ непрерывна при $x \in \bar{\Omega}$, $t = t_2$, и удовлетворяет уравнению при $x \in \Omega$, $t = t_2$, то наша теорема доказана.

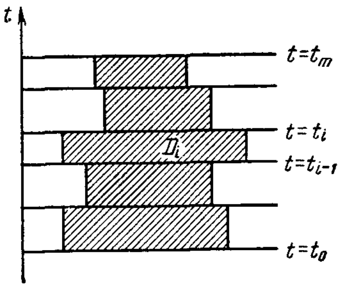

Рис. 41.

Соединяя теоремы 12.1, 12.2 и п. 1 § 12 мы получаем следующую теорему.

Теорема 12.3. *Пусть для цилиндрической области D имеется задача* (79), *причем f непрерывна на $\bar{S}$, а g — на $\bar{\Omega}$. Тогда существует решение $u(t, x)$ этой задачи такое, что*

1) *$u(t, x)$ непрерывна в $\bar{D}$ минус граница нижнего основания D;*

2) *$u(t, x)$ — удовлетворяет уравнению в $D \cup \gamma(D)$;*

3) $\min(\min\limits_{\bar{S}} f,\ \min\limits_{\bar{\Omega}} g) \leqslant u \leqslant \max(\max\limits_{\bar{S}} f,\ \max\limits_{\bar{\Omega}} g)$.

3. Назовем область D *ступенчатой областью* в следующем случае. Существуют числа $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ и ограниченные области $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ в E_n такие, что если обозначить через D_i цилиндрическую область

$$\Omega_i \times (t_{i-1},\ t_i), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

то D есть совокупность внутренних точек объединения $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \bar{D}_i$ (рис. 41). Обозначим через S_i боковую поверхность D_i и через σ_i — границу нижнего основания

$$\sigma_i = \{(t,\ x),\ x \in \partial\Omega_i,\ t = t_{i-1}\}.$$

Пусть на собственной границе $\Gamma(D)$ ступенчатой области D задана непрерывная функция f.

Построим в D решение уравнения (55) следующим образом.

1-й *шаг*. Решим 1-ю краевую задачу для самой нижней цилиндрической области D_1:

$$u\,|_{S_1} = f, \qquad u\,|_{\Omega_1} = f. \tag{80_1}$$

Это решение $u(t, x)$ по теореме 11.1 и 12.3 непрерывно в $\overline{D}_1$.

Обратимся к гиперплоскости $t = t_1$. На этой гиперплоскости лежит верхняя крышка D_1, на которой построенное на первом шагу решение непрерывно вплоть до границы этой верхней крышки, где оно равно f.

2-й *шаг*. Обратимся к D_2. На боковой поверхности этой цилиндрической области задана функция f, на той части нижнего основания D_2, которое не совпадает с верхней крышкой D_1, функция также задана и равна f. На пересечении замыкания нижнего основания D_2 с замыканием верхнего основания D_1, решение $u(t, x)$ уже построено нами и непрерывно. Поэтому, если мы положим

$$g_2(x) = \begin{cases} f(t_1,\ x) & \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}_2,\ (t_1,\ x) \notin \overline{\gamma(D_1)}, \\ u(t_1,\ x) & \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}_2,\ (t_1,\ x) \in \overline{\gamma(D_1)}, \end{cases}$$

то $g_2(x)$ непрерывна на $\overline{\Omega}_2$.

Решим для D_2 задачу: найти ограниченное решение

$$u\,|_{S_2} = f, \qquad u\,|_{t=t_1} = g_2. \tag{80_2}$$

Полученное по теореме 12.3 решение непрерывно в $\overline{D}_2 \setminus (\sigma_2 \cap \Omega_1)$. Заметим, что мы не можем утверждать, что оно непрерывно в $\overline{D}_2$, так как на той части σ_2, которая принадлежит $\gamma(D_1)$, условие согласования, вообще говоря, не выполнено.

Рассмотрим гиперплоскость $t = t_2$ и лежащие на ней нижнее основание D_3, а на нем функцию

$$g_3(x) = \begin{cases} f(t_2,\ x) & \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}_3,\ (t_2,\ x) \notin \overline{\gamma(D_2)}, \\ u(t_2,\ x) & \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}_3,\ (t_2,\ x) \in \overline{\gamma(D_2)}, \end{cases}$$

непрерывную на $\overline{\Omega}_3$. Решим теперь задачу для D_3 и т. д.

i-й шаг. Функция $u(t, x)$ построена в D_j, $j < i$, и непрерывна на $\overline{\gamma(D_{i-1})}$. Полагаем

$$g_i(x) = \begin{cases} f(t_{i-1}, x) & \text{при } x \in \overline{\Omega}_i, \ (t_{i-1}, x) \notin \overline{\gamma(D_{i-1})}, \\ u(t_{i-1}, x) & \text{при } x \in \overline{\Omega}_i, \ (t_{i-1}, x) \in \overline{\gamma(D_{i-1})}. \end{cases}$$

Решаем для D_i задачу: найти ограниченное решение с условиями

$$u|_{S_i} = f, \qquad u|_{\Omega_i} = g_i. \tag{80_i}$$

За m шагов мы получим в D ограниченную непрерывную функцию $u(t, x)$. Она является решением уравнения теплопроводности (55) в каждом D_i. Покажем, что она является решением в D. Для этого надо проверить, что она удовлетворяет уравнению на гиперплоскостях $t = t_i$,

$$i = 1, \ldots, m-1.$$

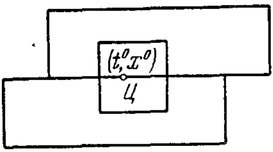

Рис. 42.

Сделаем это так. Пусть мы имеем точку (t^0, x^0), $t^0 = t_i$, $x^0 \in \Omega_i \cap \Omega_{i-1}$. Возьмем цилиндрик $Ц$, содержащий эту точку и содержащийся строго внутри $\overline{D}_{i-1} \cup D_i$ (рис. 42). На его собственной границе зададим граничное условие, совпадающее с u и решим для него первую краевую задачу. Пусть v — ее решение. По принципу максимума $v \equiv u$ при $t \leqslant t_i$ в $Ц$ и $v \equiv u$ при $t \geqslant t_i$ в $Ц$. Значит, $v \equiv u$ в $Ц$, а точка (t^0, x^0) — внутренняя для $Ц$. Значит, в ее окрестности $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (55).

Итак, мы построили в D ограниченное решение $u(t, x)$ уравнения (55), которое обладает следующим качеством:

$$u|_{\Gamma(D) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m-1} \sigma_i} = f.$$

Назовем $\Gamma(D) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m-1} \sigma_i$ *уменьшенной* собственной границей ступенчатой области D и обозначим $\Gamma'(D)$.

Тогда полученный результат мы можем сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 12.4. *Пусть дана ступенчатая область D и на ее собственной границе $\Gamma(D)$ задана непрерывная функция f. Тогда существует ограниченная и непрерывная в $\overline{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} \sigma_i$ функция $u(t, x)$ такая, что в D она является решением уравнения* (55) *и принимает заданное значение f на уменьшенной собственной границе*:

$$u|_{\Gamma'(D)} = f.$$

Из теоремы 12.1 мы получаем следующий принцип максимума для ступенчатых областей.

Теорема 12.5. *Пусть $u(t, x)$ — субпараболическая* (*суперпараболическая*) *для уравнения* (55) *функция в ступенчатой области D, непрерывная вплоть до $\Gamma'(D)$, ограниченная по модулю некоторой константой M и неположительная* (*неотрицательная*) *на $\Gamma'(D)$. Тогда $u \leqslant 0$ ($u \geqslant 0$) в D.*

Доказательство получается применением теоремы 12.1 к областям D_i последовательно, начиная с самой нижней.

Замечание 12.1. Пусть D — ступенчатая область и σ_i, $i = 1, \ldots, m-1$, имеют тот же смысл, что и выше. Пусть $\tilde{D}$ — произвольная область. Положим

$$\Gamma'(D \cap \tilde{D}) = \Gamma(D \cap \tilde{D}) \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} \sigma_i.$$

Тогда для $D \cap \tilde{D}$ справедлива теорема 12.5: если $u(t, x)$ ограничена и суб-(супер)параболична в $D \cap \tilde{D}$ и неположительна (неотрицательна) на $\Gamma'(D \cap \tilde{D})$, то $u \leqslant 0$ ($u \geqslant 0$) в $D \cap \tilde{D}$.

4. Этот пункт мы посвятим построению обобщенного решения уравнения теплопроводности для произвольной ограниченной области D.

Пусть задана произвольная ограниченная область $D \subset R_{n+1}$. Пусть на собственной границе $\Gamma(D)$ этой области задана непрерывная функция f. Продолжим функцию f на $\overline{D}$ непрерывным образом. Продолженную функцию мы обозначим через F.

Скажем, что последовательность областей $\{D_m\}$ аппроксимирует область D изнутри, если для любого $\rho > 0$ найдется такое N, что $D_\rho \subset D_m$ при $m > N$ и $\overline{D}_m \subset D$. Здесь D_ρ имеет тот же смысл, что и в гл. I и II.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{D_m\}$ *ступенчатых* областей, аппроксимирующую область D изнутри. Для каждой D_m найдем на основании теоремы 12.4 ограниченное решение задачи

$$u_m \big|_{\Gamma'(D_m)} = F. \tag{81}$$

Мы докажем, что последовательность $\{u_m\}$ сходится к решению $u_f(t, x)$ уравнения (55) в D, и функция $u_f(t, x)$ не зависит ни от способа продолжения функции f на $\overline{D}$, ни от выбора последовательности ступенчатых функций, аппроксимирующих D изнутри. Эту функцию $u_f(t, x)$ мы и будем называть *обобщенным решением* 1-й краевой задачи для D.

а) Пусть имеется некоторая фиксированная последовательность ступенчатых областей $\{D_m\}$ аппроксимирующая изнутри D. Пусть F_1 и F_2 — два разных продолжения функции f.

Пусть u_m^1 и u_m^2 — соответственно ограниченные решения задач

$$u_m^1 \big|_{\Gamma'(D_m)} = F_1 \quad \text{и} \quad u_m^2 \big|_{\Gamma'(D_m)} = F_2.$$

Тогда по теореме 12.5 (принципу максимума для ступенчатых областей) получаем

$$\sup_{D_m} |u_m^1 - u_m^2| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Поэтому, если последовательность u_m^1 сходится к некоторой функции u, то последовательность u_m^2 сходится к той же функции.

б) Докажем сначала сходимость u_m в том частном случае, когда $\{D_m\}$ — расширяющаяся последовательность областей: $D_m \subset D_{m+1}$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Обозначим через Φ дважды непрерывно дифференцируемую функцию, определенную в окрестности $\overline{D}$ и такую, что

$$|\Phi - F| < \varepsilon,$$

Так как производные до 2-го порядка функции Φ ограничены, то при достаточно большом $A > 0$ функции

$$\left.\begin{aligned} \Phi^+(t, x) &= \frac{\Phi(t, x)}{2} - At \\ \text{и} \qquad \Phi^-(t, x) &= \frac{\Phi(t, x)}{2} + At \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

удовлетворяют неравенствам

$$\Delta\Phi^+ - \frac{\partial \Phi^+}{\partial t} > 0 \quad \text{и} \quad \Delta\Phi^- - \frac{\partial \Phi^-}{\partial t} < 0. \tag{83}$$

С другой стороны,

$$\Phi^+ + \Phi^- = \Phi.$$

Пусть v_m^+ и v_m^- — соответственно ограниченные решения задач

$$v_m^+ \big|_{\Gamma'(D_m)} = \Phi^+ \quad \text{и} \quad v_m^- \big|_{\Gamma'(D_m)} = \Phi^-.$$

Докажем, что каждая из последовательностей $\{v_m^+\}$ и $\{v_m^-\}$ сходится. В силу (83) и теоремы 12.5

$$v_m^+ \geqslant \Phi^+ \qquad (v_m^- \leqslant \Phi^-) \quad \text{в} \quad D_m,$$

а потому

$$v_{m-1}^+ \leqslant v_m^+ \qquad (v_{m-1}^- \geqslant v_m^-) \quad \text{в} \quad D_{m-1}.$$

Следовательно, на каждом D_k последовательность

$$\{v_m^+\}, \qquad m = k,\ k+1,\ \ldots \quad (\{v_m^-\},\ m = k,\ k+1,\ \ldots)$$

монотонна. Кроме того, она по тому же принципу максимума 12.5 ограничена, а потому сходится. Значит, сходится $\{v_m = v_m^+ + v_m^-\}$.

Так как для решений u_m задач

$$u_m \big|_{\Gamma'(D_m)} = F$$

мы имеем в силу теоремы 12.5

$$\sup_{D_m} | u_m - v_m | \leqslant \varepsilon,$$

то и последовательность $\{u_m\}$ сходится в D.

в) Из пунктов а) и б) следует, что для монотонной последовательности ступенчатых областей $\{D_m\}$ последовательность $\{u_m\}$ сходится к функции u_f, не зависящей от способа продолжения функции f. Но тогда к той же u_f сходится последовательность $\{u_m\}$ и для произвольной последовательности $\{D_m\}$ ступенчатых областей, аппроксимирующих D изнутри. Действительно, пусть для некоторой последовательности $\{u_m\}$ в некоторой точке $(t^0, x^0) \in D$ последовательность расходится. Тогда можно выбрать такую редкую последовательность $\{m_k\}$, что $D_{m_k} \subset D_{m_{k+1}}$ и подпоследовательность $\{u_{m_k}\}$ расходится в точке (t^0, x^0). Если для двух разных последовательностей $\{D'_m\}$ и $\{D''_m\}$ соответствующие функции $\{u'_m\}$ и $\{u''_m\}$ в некоторой точке $(t^0, x^0) \in D$ сходятся к разным пределам, то мы снова можем сконструировать такую последовательность $D'_{m_1} \subset D''_{m_2} \subset D'_{m_3} \subset \ldots$, что $u'_{m_1}, u''_{m_2}, u'_{m_3}, \ldots$ расходится в точке (t^0, x^0).

Итак, для любой последовательности ступенчатых областей $\{D_m\}$, аппроксимирующих D изнутри, и для любого продолжения F функции f на $\overline{D}$ последовательность $\{u_m\}$ ограниченных решений задач (81) сходится к одной и той же функции $u_f(t, x)$.

г) Функция $u_f(t, x)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (55). Это следует из равномерной ограниченности семейства функций $\{u_m\}$ (они ограничены в силу принципа максимума 12.5 константой, ограничивающей $|F|$) и из теоремы о компактности 11.4.

5. Пусть дана произвольная ограниченная область $D \subset R_{n+1}$. Назовем точку (t^0, x^0) принадлежащую собственной границе $\Gamma(D)$ области D, *регулярной* для уравнения (55), если для любой непрерывной на $\Gamma(D)$ функции f обобщенное решение $u_f(t, x)$ 1-й краевой задачи стремится к $f(t^0, x^0)$ при $(t, x) \to (t^0, x^0)$.

Теорема 12.6. *Если положить $M_1 = n$ и $\alpha_1 = 1$ и точка $(t^0, x^0) \in \Gamma(D)$ является M_1, α_1-регулярной* (см. § 7), *то она регулярна в смысле только что данного определения.*

Доказательство. Согласно замечанию 12.1 к теореме 12.5 можно в определении M_1, α_1-регулярности заменить $\Gamma(D')$ на $\Gamma'(D')$, если D' — ступенчатая область.

Продолжим функцию f непрерывным образом на $\overline{D}$ и, как и раньше, обозначим продолженную функцию через F.

Пусть $\{D_m\}$, $m = 1, 2, \ldots,$ — последовательность ступенчатых областей, аппроксимирующих D изнутри. Пусть u_m — ограниченное решение задачи Дирихле

$$u_m|_{\Gamma'(D_m)} = F.$$

Последовательность u_m, как мы знаем, сходится к u_f.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\varepsilon_1 > 0$, что

$$|F(t, x) - f(t^0, x^0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad (t, x) \in \overline{D} \cap O_{\varepsilon_1}(t^0, x^0)$$

(через $O_\sigma(t^0, x^0)$ здесь и дальше обозначается σ-окрестность точки (t^0, x^0) в R_{n+1}).

Положим $v_m = u_m - f(t^0, x^0) - \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\overline{\lim_{(t,\, x) \to \Gamma'(D_m) \cap O_{\varepsilon_1}(t^0,\, x^0)}} v_m(t, x) < 0.$$

Следовательно, по определению M_1, α_1-регулярности найдется такое $\delta > 0$, что

$$v_m(t, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad (t, x) \in D_m \cap O_\delta(t^0, x^0), \qquad t < t^0,$$

и, значит,

$$u_m(t, x) - f(t^0, x^0) < \varepsilon \quad \text{при} \quad (t, x) \in D_m \cap O_\delta(t^0, x^0), \quad t < t^0,$$

а потому для обобщенного решения u_f справедливо

$$u_f(t, x) - f(t^0, x^0) \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad (t, x) \in D \cap O_\delta(t^0, x^0), \quad t < t_0.$$

Покажем, что найдется такое $\delta' > 0$, что

$$u_f(t, x) - f(t^0, x^0) \leqslant 2\varepsilon \quad \text{при} \quad (t, x) \in D \cap O_{\delta'}(t^0, x^0), \quad t \geqslant t^0.$$

Это можно сделать уже при помощи простого барьера. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\omega = 2n(t - t^0) + |x - x^0|^2,$$

которая, очевидно, удовлетворяет уравнению (55). Положим $\varepsilon_1' = \min(\varepsilon_1, \delta)$

Обозначим через a минимум функции ω при $t \geqslant t^0$ вне $O_{\varepsilon_1'}(t^0, x^0)$. Тогда $a > 0$.

Пусть $F < M$. Рассматривая на той части D_m' области D_m, которая лежит в полупространстве $t \geqslant t^0$, функции u_m и

$$W = \frac{2M}{a}\,\omega(t, x) + f(t^0, x^0) + \varepsilon,$$

находим, что

$$\varlimsup_{(t, x) \to \Gamma'(D_m')} u_m(t, x) \leqslant W|_{\Gamma'(D_m')},$$

и, значит, по принципу максимума

$$u_m(t, x) \leqslant W(t, x) \quad \text{в} \quad D_m',$$

и потому

$$u_f(t, x) \leqslant W(t, x) \quad \text{в} \quad D \quad \text{при} \quad t \geqslant t^0.$$

Нам остается найти такое δ', что $W(t, x) < 2\varepsilon + f(t^0, x^0)$ при $(t, x) \in O_{\delta'}(t^0, x^0)$, $t \geqslant t^0$.

Итак,

$$u_f(t, x) - f(t^0, x^0) < 2\varepsilon \quad \text{при} \quad (t, x) \in O_{\delta_0}(t^0, x^0),$$

где $\delta_0 = \min(\delta, \delta')$.

Аналогично получается оценка с другой стороны, и теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если некоторой точки (t^0, x^0) собственной границы $\Gamma(D)$ области D можно коснуться сплющенным конусом (см. § 7) так, что в некоторой окрестности точки (t^0, x^0) нижняя половина сплющенного конуса лежит вне области, то такая точка регулярна.

П р и м е ч а н и е.

Обобщенное решение 1-й краевой задачи чаще строят по методу верхних и нижних функций Перрона. Употребленное мною винеровское построение связано со способом доказательства достаточных признаков регулярности (в § 7). Кроме того, оно и само по себе кажется мне более простым.

ДОПОЛНЕНИЯ

I. Доказательство леммы 5.1

Разобьем доказательство на пункты.

1. Пусть $E \subset R_n$ — ограниченное замкнутое множество и $s > 0$ — некоторое число. Пусть G_m — последовательность открытых множеств такая, что

$$E \subset G_{m+1} \subset G_m, \qquad E = \lim_{m \to \infty} G_m.$$

Докажем, что тогда

$$C_s(E) = \lim_{m \to \infty} C_s^{R_n \setminus G_m}(E).$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Каждому номеру m можно сопоставить меру μ_m, определенную на E, такую, что

$$\int_E \frac{d\mu_m(y)}{|x-y|^s} < 1 \quad \text{при} \quad x \in R_n \setminus G_m \tag{1}$$

и

$$\mu_m(E) > C_s^{R_n \setminus G_m}(E) - \varepsilon.$$

Если мы построим на E меру μ такую, что

$$\int_E \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \leqslant 1 \quad \text{при} \quad x \in R_n \setminus E$$

и

$$\mu(E) \geqslant \varlimsup_{m \to \infty} \mu_m(E),$$

то наше утверждение будет доказано. Действительно, тогда

$$C_s(E) \geqslant \varlimsup_{m \to \infty} C_s^{R_n \setminus G_m}(E) - \varepsilon,$$

Так как последовательность $C_s^{R_n \setminus G_m}(E)$ монотонно не возрастает и

$$C_s(E) \leqslant C_s^{R_n \setminus G_m}(E),$$

то мы получаем тогда, учитывая произвольность ε,

$$C_s(E) = \lim_{m \to \infty} C_s^{R_n \setminus G_m}(E).$$

Воспользуемся следующим фактом из теории меры (см. Халмош [1]). Пусть $\mathscr{E} \subset R_n$ — борелевское множество. Пусть на всех его подмножествах определена функция множества $\bar{\mu}$ — внешняя мера — обладающая свойствами:

1) если $A \subset B$, то $\bar{\mu} A \leqslant \bar{\mu} B$,

2) если $A = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$, то $\bar{\mu} A \leqslant \sum\limits_{m=1}^{\infty} \bar{\mu} A_m$,

3) если $\rho(A, B) > 0$, то $\bar{\mu}(A \cup B) = \bar{\mu} A + \bar{\mu} B$

(эти условия называются аксиомами внешней меры Каратеодори).

Тогда существует σ-алгебра измеримых подмножеств $\mathscr{E}$, содержащая все его борелевские подмножества, на которой $\bar{\mu}$ является вполне аддитивной мерой.

Внешнюю меру можно построить так. Если $\bar{\mu}$ уже определена на открытых в $\mathscr{E}$ подмножествах $\mathscr{E}$ и обладает на них свойствами 1), 2), 3), то для любого $A \subset \mathscr{E}$ можно положить

$$\bar{\mu} A = \inf_{G \supset A} \bar{\mu} G$$

(нижняя грань берется по всевозможным открытым множествам G, содержащим A).

Примемся теперь за построение меры μ. Разобьем E на конечное число непересекающихся B-множеств $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1k_1}$, диаметр каждого из которых меньше единицы. Пусть $\mu_{11}, \mu_{12}, \ldots, \mu_{1m}, \ldots$ — подпоследовательность последовательности $\{\mu_m\}$ такая, что существует предел

$$\lim_{m \to \infty} \mu_{1m} E_{1i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k_1.$$

Разобьем каждое E_{1i} на конечное число непересекающихся B-множеств, диаметр каждого из которых меньше $1/2$. Занумеруем эти множества второго ранга в общую последовательность

$$E_{21},\ E_{22},\ \ldots,\ E_{2k_2}.$$

Выберем из последовательности $\{\mu_{1m}\}$ подпоследовательность $\{\mu_{2m}\}$ такую, что существует предел $\lim \mu_{2m} E_{2i}$ для каждого $i = 1, \ldots, k_2$.

Разобьем каждое E_{2i} на непересекающиеся B-множества диаметра, меньшего $1/4$, и т. д.

Рассмотрим диагональную последовательность

$$\mu_{11},\ \mu_{22},\ \ldots,\ \mu_{qq},\ \ldots$$

и положим

$$m(E_{ik}) = \lim_{q \to \infty} \mu_{qq}(E_{ik}).$$

Заметим для дальнейшего, что если

$$E_{ik} = E_{i+1,\, i_1} \cup \ldots \cup E_{i+1,\, i_l},$$

то

$$mE_{ik} = \sum_{j=1}^{l} mE_{i+1,\, i_j}. \tag{2}$$

Пусть теперь $G \subset E$ — открытое в E множество. Пусть

$$E_{1i_{11}},\quad E_{1i_{12}},\ \ldots,\ E_{1i_{1r_1}}$$

— множества первого ранга, содержащиеся в G;

$$E_{2i_{21}},\quad E_{2i_{22}},\ \ldots,\ E_{2i_{2r_2}}$$

— множества второго ранга, содержащиеся в G и не принадлежащие множествам первого ранга, целиком содержащимся в G;

$$E_{3i_{31}},\ E_{3i_{32}},\ \ldots,\ E_{3i_{3r_3}}$$

— множества третьего ранга, содержащиеся в G и не принадлежащие целиком содержащимся в G множествам первого и второго рангов, и т. д.

Положим

$$\bar{\mu} G = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{r_p} m\left(E_{p,\,t_{pt}}\right).$$

Очевидно, $\bar{\mu}$ удовлетворяет на открытых в E множествах свойствам 1), 2), 3). Поэтому, полагая для любого $A \subset E$

$$\bar{\mu} A = \inf_{G \supset A} \bar{\mu} G,$$

мы получим внешнюю меру, которая будет мерой на σ-алгебре, содержащей все борелевские подмножества множества E. Будем обозначать эту меру буквой μ. (Очевидно, $\mu E = \lim \mu_{qq} E \geqslant \varlimsup_{m \to \infty} \mu_m E$.

Докажем неравенство

$$\int_E \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \leqslant 1 \quad \text{при} \quad x \in R_n \setminus E. \tag{3}$$

Фиксируем точку $x \notin E$. Для всех m, начиная с некоторого, имеет место $x \notin G_m$. Поэтому для достаточно больших m функция $\frac{1}{|x-y|^s}$, как функция y, непрерывна на E. Следовательно, в силу (1) при достаточно больших p имеет место

$$\sum_{p=1}^{k_p} \frac{\mu_{qq}(E_{pi})}{|x-y_i|^s} < 1,$$

где y_i — произвольная точка из E_{si}, при всех q, начиная с некоторого. Поэтому

$$\sum_{p=1}^{k_p} \frac{m(E_{pi})}{|x-y_i|^s} \leqslant 1 \tag{4}$$

при достаточно больших p.

Для меры μ и всякого измеримого множества $A \subset E$ справедливо также

$$\mu A = \overline{\sup_{F \subset A}} \mu F,$$

где верхняя грань берется по всем замкнутым множествам F, содержащимся в A.

Из непрерывности функции $\frac{1}{|x-y|^s}$ при $y \in E$ и $x \notin E$ следует, что для любого $\delta > 0$ в E можно найти конечное число непересекающихся измеримых множеств

$$A_1, \ldots, A_r$$

таких, что

$$\int_E \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \leqslant \sum_{i=1}^{r} \frac{\mu A_i}{|x-y_i|^s} + \delta$$

при любых $y_i \in A_i$. Выберем в каждом из A_i по замкнутому множеству $F_i \subset A_i$ так, чтобы

$$\int_E \frac{d\mu|y|}{|x-y|^s} < \sum_{i=1}^{r} \frac{\mu F_i}{|x-y_i|^s} + 2\delta \tag{5}$$

при любых y_i, принадлежащих η-окрестности F_i при некотором $\eta > 0$. Так как F_i замкнуты и не пересекаются, то они лежат на положительном расстоянии друг от друга, поэтому каждое из них можно погрузить в открытое в E множество G_i так, чтобы расстояния между этими открытыми множествами были также положительными. Пусть, кроме того, G_i содержится в η-окрестности F_i.

Заметим теперь, что если открытое множество G таково, что для какого-то s

$$G \subset E_{s,\, i_1} \cup \ldots \cup E_{s,\, i_l},$$

то из (2) следует, что

$$\mu G \leqslant \sum_{j=1}^{l} m E_{s i_j}.$$

Из неравенств (4) и (5) вытекает

$$\int_E \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} < 1 + 2\delta$$

и в силу произвольности δ

$$\int_E \frac{d\mu(y)}{|x-y|} \leqslant 1,$$

и тем самым утверждение п. 1 доказано.

Заметим теперь, что мы почти построили меру, реализующую экстремум при определении s-емкости. Действительно, в нашей конструкции надо было бы только вместо задания фиксированного $\varepsilon > 0$ ввести последовательность $\{\varepsilon_m\}$, $\varepsilon_m > 0$, $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$ и меры μ_m выбирать так, чтобы

$$\int_E \frac{d\mu_m(y)}{|x-y|^s} < 1$$

и

$$\mu_m E > C_s^{R_n \setminus G_m}(E) - \varepsilon_m.$$

Может показаться, что проделанные построения неоправданно сложны, что можно было бы осуществить какой-то более простой предельный переход для получения меры μ.

Чтобы увидеть трудность, которую нам пришлось обойти, рассмотрим следующий пример. Возьмем шар $Q_R^0 \subset R_n$, положим $s = n - 2$. Известно, что экстремальная мера для него может быть сосредоточена на любой сфере S_r^0, $0 \leqslant r \leqslant R$. Ясно, что μ_m здесь могут быть выбраны так, что мера μ окажется сосредоточенной вовсе не там, где были сосредоточены допредельные меры. Поэтому невозможен простой предельный переход по множествам.

2. Пусть E — ограниченное замкнутое множество, и $\{G_m\}$ — последовательность открытых множеств такая, что

$$E \subset G_m \quad \text{и} \quad E = \lim_{m \to \infty} G_m.$$

Покажем, что в этом случае

$$C_m(E) = \lim_{m \to \infty} C_s(G_m).$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем по п. 1 такое m_0, что

$$C_s(E) \geqslant C_s^{R_m \setminus G_{m_0}}(E) - \varepsilon. \tag{6}$$

Пусть ρ_0 — расстояние от E до границы множества G_{m_0} и ρ_1, $0 < \rho_1 < \rho_0$, таково, что

$$\frac{(\rho_0 - \rho_1)^s}{\rho_0^s} > 1 - \varepsilon. \tag{7}$$

Найдем такое N, что при $m > N$ множество G_m лежит в $\rho_1/2$-окрестности множества E.

Пусть μ — мера на G_m такая, что $\int\limits_{G_m} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \leqslant 1$ вне G_{m_0} и

$$\mu G_m > C_s^{R_n \setminus G_{m_0}}(G_m) - \varepsilon.$$

Выберем в E конечную $\rho_1/2$-сеть. Пусть она состоит из точек $x^1, x^2, \ldots, x^p$.

Обозначим $x^1 = y^1$ и отнесем к множеству H^1 пересечение G_m с ρ_1-окрестностью точки y^1. Обозначим через y^2 точку из $\rho_1/2$-сети, имеющую наименьший номер и не принадлежащую H^1. Отнесем к H^2 точки из пересечения G_m с ρ_1-окрестностью точки y^2, не входящие в H^1, и т. д. Мы получим точки $y^1, \ldots, y^q$ и множества $H^1, \ldots$ $\ldots, H^q$ такие, что i-е из них содержит y^i и содержится в ρ_1-окрестности этой точки и все они принадлежат G_m, не пересекаются и в совокупности покрывают G_m.

Пусть μ^* — мера на E, сосредоточенная в точках $y^1, y^2, \ldots, y^q$ и такая, что мера точки y_i равна $\mu(H^i)(1-\varepsilon)$.

Тогда при $x \notin G_{m_0}$ имеем по неравенству (7)

$$\int\limits_E \frac{d\mu^*(y)}{|x-y|^s} < (1-\varepsilon) \int\limits_{G_m} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s(1-\varepsilon)} < 1$$

и

$$\mu^*(E) = (1-\varepsilon)\mu(G_m) > (1-\varepsilon)\left[C_s^{R_n \setminus G_{m_0}}(G_m) - \varepsilon\right].$$

Следовательно, и подавно

$$\mu^*(E) > (1-\varepsilon)\,[C_s(G_m)-\varepsilon].$$

Но $\mu^*(E) \leqslant C_s^{R_n \setminus G_{m_0}}(G_m)$, т. е., учитывая (6),

$$C_s(E) > (1-\varepsilon)\,[C_s(G_m)-\varepsilon]-\varepsilon,$$

и остается воспользоваться произвольностью ε.

3. Обратимся теперь к уравнению Лапласа.

Пусть G — ограниченная область с дважды гладкой границей. Пусть u — решение внешней задачи Дирихле

$$u\,|_{\partial G}=1.$$

Если ∂G — дважды непрерывно дифференцируемая поверхность, то u имеет непрерывную производную вплоть до границы.

Положим $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G}=\varphi$ и решим внешнюю задачу Неймана с этим граничным условием φ. Это решение можно найти в виде потенциала простого слоя

$$u(x)=\int\limits_{\partial G}\frac{\rho\,ds}{|x-y|^{n-2}}$$

(ds — элемент $(n-s)$-мерной площади поверхности ∂G). По теореме единствености это как раз и будет исходная функция $u(x)$.

Очевидно, мы имеем

$$\int\limits_{\partial G}\rho\,ds \leqslant C_{n-2}(G).$$

На самом деле, как нетрудно сообразить, здесь имеет место равенство, но для нас это сейчас несущественно.

Для доказательства леммы 5.1 нам остается соединить п. 2 с п. 3.

II. Доказательство теоремы Шаудера о неподвижной точке

Сначала мы докажем теорему Брауэра о неподвижной точке для конечномерных пространств.

Теорема Брауэра. *Пусть K — множество в R_n, гомеоморфное замкнутому n-мерному симплексу, и f —*

непрерывное отображение K в себя. Тогда существует точка $x \in K$ такая, что $f(x) = x$.

Эта теорема доказывается при помощи следующей леммы.

Лемма Шпернера. *Пусть имеется n-мерный симплекс, вершины которого занумерованы числами* $0, 1, \ldots, n$.

Разбиение этого симплекса на n-мерные симплексы меньшего размера называется *триангуляцией*, если всякие два симплекса меньшего размера либо не имеют общих точек, либо пересекаются по общей грани размерности меньше n (в частности, по общей вершине: $n = 0$).

Пусть имеется триангуляция симплекса T^n. Пусть вершины симплексов этой триангуляции занумерованы какими-то из чисел $0, 1, \ldots, n$. (Если вершина принадлежит нескольким симплексам, то она получает только *один* номер.) Нумерация называется *правильной*, если выполняется следующее условие: рассмотрим какую-нибудь k-мерную ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) грань исходного симплекса. Пусть ее вершины были занумерованы числами $t_0, \ldots, t_k$. Тогда те вершины симплекса триангуляции, которые попадают на эту грань, должны иметь номера, содержащиеся только среди чисел $t_0, \ldots, t_k$.

Утверждается, что при правильной нумерации произвольной триангуляции найдется симплекс, вершины которого занумерованы всеми числами $0, 1, \ldots, n$.

Доказательство. Докажем, что не только найдется нужный нам симплекс триангуляции, но что число таких симплексов *нечетно*.

Доказательство будем вести индукцией по числу измерений n. Для $n = 0$ факт очевиден. Пусть утверждение верно для размерности $n - 1$. Покажем, что тогда он верен и для размерности n. Будем вести доказательство от противного. Допустим, что число симплексов, вершины которых занумерованы всеми числами $0, 1, \ldots, n$, *четно* (в частности, может быть, равно нулю).

Подсчитаем, сколько имеется $(n-1)$-мерных граней симплексов триангуляции, занумерованных числами $0, 1, \ldots, n-1$, причем, если одна такая грань принадлежит одновременно двум симплексам, то будем ее считать два раза.

В силу правильности нашей нумерации такая грань может лежать либо внутри исходного симплекса, либо на той его $(n-1)$-мерной грани, которая занумерована теми же числами $0, 1, \ldots, n-1$. Грань, лежащая внутри, необходимо принадлежит двум симплексам. Поэтому граней, лежащих внутри, четное число. По предположению индукции на грани $0, 1, \ldots, n-1$ исходного симплекса T^n их *нечетное* число, а всего, таким образом, *нечетное* число.

Произведем теперь подсчет по-другому. Если грань, занумерованная числами $0, 1, \ldots, n-1$, лежит на симплексе, вершины которого имеют номера $0, 1, \ldots, n$, то на таком симплексе она одна, а самих таких симплексов, как мы предположили, четное число. Значит, граней, лежащих на этих симплексах, будет четное число. Пусть теперь грань лежит на симплексе, занумерованном числами $0, 1, \ldots, n-1, t$, где $t < n$. Тогда на этом симплексе ровно две такие грани. Следовательно, общее число рассматриваемых граней *четно*, и мы пришли к противоречию.

Доказательство теоремы Брауэра. Ясно, что достаточно доказать теорему Брауэра для случая, когда K есть сам замкнутый n-мерный симплекс T^n. Допустим, что при непрерывном преобразовании f симплекса T^n в себя ни одна точка не остается на месте. Заметим, что каждая точка при этом приблизится по крайней мере к одной из $(n-1)$-мерных граней T^n (почему?).

Занумеруем вершины симплекса T^n числами $0, 1, \ldots, n$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и произведем триангуляцию на симплексы $T_1^n, \ldots, T_N^n$, диаметр каждого из которых меньше ε.

Занумеруем вершины триангуляции, придерживаясь следующего правила; возьмем ту $(n-1)$-мерную грань исходного симплекса T^n, к которой приблизится данная вершина триангуляции при преобразовании f (или любую из них, если таких граней несколько), и придадим данной вершине триангуляции номер той вершины симплекса T^n, которая лежит против этой грани.

Такая нумерация является правильной. Поэтому, согласно лемме Шпернера, найдется маленький симплекс, вершины которого приближаются ко всем граням T^n. Обозначим этот симплекс через T^n_ε. Возьмем последовательность $\varepsilon_m \to 0$ и построим последовательность симплексов $T^n_{\varepsilon_m}$. Предельная точка для них в силу непрерывности преобразования не удаляется ни от одной грани. Отсюда следует, что она остается на месте (почему?). Мы получили противоречие, доказывающее теорему.

Замечание. Всякое выпуклое ограниченное замкнутое множество в R_n гомеоморфно некогорому k-мерному симплексу. Поэтому для него верна теорема Брауэра.

Теорема Шаудера о неподвижной точке. *Пусть Φ — выпуклый компакт в банаховом пространстве. Тогда при непрерывном преобразовании f компакта Φ в себя существует неподвижная точка.*

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $x_1, \ldots, x_N$ — множество элементов Φ, образующих ε-сеть. Пусть Φ_0 — выпуклая оболочка точек $x_1, \ldots$ $\ldots, x_N$. Очевидно, $\Phi_0 \subset \Phi$.

Φ можно непрерывно отобразить в Φ_0 так, что образ каждой точки будет отстоять от прообраза не далее чем на 2ε. Действительно, положим

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 2\varepsilon - \| x - x_i \| & \text{при} \quad \| x - x_i \| \leqslant 2\varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad \| x - x_i \| > 2\varepsilon, \end{cases}$$

$$\lambda_i(x) = \frac{\mu_i(x)}{\sum\limits_{k=1}^{N} \mu_k(x)}.$$

Так как каждая точка Φ отстоит от некоторой x_i на расстоянии, меньшем ε, то $\sum\limits_{k=1}^{N} \mu_k(x) \neq 0$ в Φ. Поэтому $\lambda_i(x)$ непрерывны. Далее $\lambda_i(x) \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1$, $\lambda_i(x) = 0$ при $\| x - x_i \| \geqslant 2\varepsilon$.

Поэтому

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) x_i$$

осуществляет непрерывное отображение Φ в Φ_0 и $\|x - \varphi(x)\| < 2\varepsilon$. Тогда преобразование

$$f_0 = \varphi \cdot f$$

переводит Φ_0 в себя и непрерывно. Следовательно, по теореме Брауэра существует такая точка $x \in \Phi_0$, что

$$f_0(x) = x$$

или

$$\varphi[f(x)] = x.$$

Но тогда $\|f(x) - x\| < 2\varepsilon$.

Выберем последовательность $\varepsilon_m \to 0$. Найдем соответствующую последовательность x_m: $\|f(x_m) - x_m\| < 2\varepsilon_m$. Тогда предельная для x_m точка (существующая в силу компактности Φ) есть неподвижная точка преобразования f.

III. Изопериметрическое неравенство

Собственно изопериметрическим неравенством называется неравенство, утверждающее, что $(n-1)$-мерная мера границы ограниченного измеримого множества $E \subset R_n$ связана с n-мерной мерой этого множества следующим образом:

$$\operatorname{mes}_{n-1}(\partial E) \geqslant n (\operatorname{mes}_n E)^{\frac{n-1}{n}},$$

т. е. при заданном объеме наименьшую площадь поверхности имеет шар.

Нам понадобится сходное утверждение, но в несколько более сложной ситуации.

Пусть в шаре $Q_1^0 \subset R_n$ лежит замкнутое в шаре множество Σ, разделяющее шар по крайней мере на две связные компоненты A и B. Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{mes}_n A > \varepsilon \quad \text{и} \quad \operatorname{mes}_n B > \varepsilon.$$

Тогда

$$\operatorname{mes}_{n-1} \sum > \beta \varepsilon^{\frac{n-1}{n}}, \tag{1}$$

где $\beta > 0$ зависит от размерности пространства.

Точное значение константы β для нас несущественно. Поэтому я сознательно пойду на его загрубление.

Будем доказывать неравенство (1) индукцией по числу измерений. Для удобства будем константу β для n-мерного пространства обозначать через β_n.

Если мы условимся считать, что 0-мерная мера точки на прямой равна единице, то при $n=1$ неравенство (1) очевидно и $\beta_1 = 1$.

Пусть для пространства размерности $n-1$ неравенство (1) доказано. Докажем его для размерности n.

Нижеследующие утверждения я предлагаю доказать самостоятельно (последовательно, так как следующие вытекают из предыдущих).

Утверждение 1. Существует такое число $\eta_1 > 0$, зависящее от n, что если для измеримого множества $E \subset R_n$ имеет место

$$\operatorname{mes}_n E > \varepsilon,$$

то среди n координатных гиперплоскостей найдется по крайней мере одна такая, что для проекции E' множества E на нее справедливо

$$\operatorname{mes}_{n-1} E' > \eta_1 \varepsilon^{\frac{n-1}{n}}.$$

Утверждение 2. Для каждого γ, $0 < \gamma < 1$, найдется $\eta_2 > 0$, *зависящее от* γ *и от* n, *такое, что если* $E \subset R_n$ — измеримое множество, удовлетворяющее неравенству

$$\operatorname{mes}_n E > \varepsilon,$$

и $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — $(n-1)$-мерные гиперплоскости в R_n такие, что объем параллелепипеда, натянутого на единичные нормали к ним, больше γ, то среди этих гиперплоскостей найдется по крайней мере одна такая, что для проекции E' множества E на нее справедливо

$$\operatorname{mes}_{n-1} E' > \eta_2 \varepsilon^{\frac{n-1}{n}},$$

Утверждение 3. Найдется число $\eta_3 > 0$, зависящее от n, и $(n-1)$-мерная гиперплоскость в R_n такая, что проекции на нее обоих множеств A и B таковы, что $(n-1)$-мерная мера каждого из них больше $\eta_3 \varepsilon^{\frac{n-1}{n}}$.

Утверждение 4. Найдутся числа $\delta > 0$ и $\eta > 0$, зависящие от n, и гиперплоскость π, проходящая через точку 0, такие, что

если обозначить через A' и B' соответственно проекции множеств A и B на гиперплоскость π и положить

$$A'' = A' \cap Q^0_{1-\delta} \quad \text{и} \quad B'' = B' \cap Q^0_{1-\delta},$$

то

$$\operatorname{mes}_{n-1} A'' > \eta \varepsilon^{\frac{n-1}{n}} \quad \text{и} \quad \operatorname{mes}_{n-1} B'' > \eta \varepsilon^{\frac{n-1}{n}}.$$

Будем теперь доказывать неравенство (1) для размерности n. Обозначим через Σ' проекцию Σ на гиперплоскость π. Возможны два случая:

1. $$\operatorname{mes}_{n-1} \Sigma' \geqslant \frac{\eta}{2} \varepsilon^{\frac{n-1}{n}}.$$

В этом случае, очевидно, $\operatorname{mes}_{n-1} \Sigma \geqslant \frac{\eta}{2} \varepsilon^{\frac{n-1}{n}}$.

2. $$\operatorname{mes}_{n-1} \Sigma' < \frac{\eta}{2} \varepsilon^{\frac{n-1}{n}}.$$

Положим $A''' = A'' \setminus \Sigma'$ и $B''' = B'' \setminus \Sigma'$, так что

$$\operatorname{mes}_{n-1} A''' > \frac{\eta}{2} \varepsilon^{\frac{n-1}{n}} \quad \text{и} \quad \operatorname{mes}_{n-1} B''' > \frac{\eta}{2} \varepsilon^{\frac{n-1}{n}}.$$

Пусть $x \in A'''$ $(x \in B''')$. Проведем через x прямую l, перпендикулярную π. Пусть $\Delta = l \cap Q^0_1$.

Тогда $\operatorname{mes}_1 \Delta > \delta$, так как $x \in Q^0_{1-\delta}$. Проведем плоскость π_t, параллельную π, на расстоянии t, $0 \leqslant t < \delta$, от нее. Проекции A_t и B_t множеств A''' и B''' на эту плоскость разделены множеством $\Sigma_t = \Sigma \cap \pi_t$. Так как

$$\operatorname{mes}_{n-1} A_t = \operatorname{mes}_{n-1} A''' > \frac{\eta}{2} \varepsilon^{\frac{n-1}{n}},$$

$$\operatorname{mes}_{n-1} B_t = \operatorname{mes}_{n-1} B''' > \frac{\eta}{2} \varepsilon^{\frac{n-1}{n}},$$

то, по предположению индукции, пересечение $\Sigma_t = \pi_t \cap \Sigma$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{mes}_{n-1}\Sigma_t > \beta_{n-1}\left(\frac{\eta}{2}\varepsilon^{\frac{n-1}{n}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} = \beta_{n-1}\left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{n-2}{n}}\varepsilon^{\frac{n-2}{n}},$$

откуда

$$\operatorname{mes}_{n-1}\Sigma > \frac{\delta\beta_{n-1}\left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{n-2}{n}}}{\varepsilon^{1/n}}\varepsilon^{\frac{n-1}{n}}.$$

Таким образом, и в случае 1, и в случае 2

$$\operatorname{mes}_{n-1}\Sigma > \beta_n\varepsilon^{\frac{n-1}{n}},$$

где β_n зависит от n.

IV. Шаудеровские оценки

В этом дополнении я докажу справедливость внутренней оценки Шаудера (неравенство (45) гл. I) и оценки Шаудера вплоть до границы (неравенство (38) гл. I). Кроме того, здесь будет доказано существование решения задачи Дирихле

$$\Delta u = f \quad \text{в} \quad D; \quad u\,|_{\partial D} = 0$$

из класса $C_{2+\alpha}(\bar{D})$ при условии, что граница трижды гладка, и $f \in C_\alpha(D)$.

Итак, надо доказать следующее.

Пусть в ограниченной области D определен равномерно эллиптический оператор

$$L = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k},$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α.

Пусть $f \in C_{2+\alpha}(D)$.

Тогда имеет место внутренняя оценка Шаудера: для любого $\rho > 0$

$$\|f\|^{D\rho}_{2+\alpha} \leqslant C\left(\|Lf\|^{D}_{\alpha} + \|f\|^{D}_{0}\right), \tag{45}$$

где C зависит от L и от ρ и от диаметра области D, Пусть дополнительно ∂D — трижды гладкая, $f \in C_{2+\alpha}(D)$ и $f|_{\partial D} = 0$.

Тогда имеет место оценка Шаудера вплоть до границы:

$$\| f \|_{2+\alpha}^{D} \leqslant C \| Lf \|_{\alpha}^{D}, \tag{38}$$

где C зависит от оператора L и от области D.

Доказательство этих неравенств мы разобьем на ряд пунктов.

1. Интерполяционные неравенства. Введем следующие обозначения:

$$||| f |||_{\alpha}^{D} = \sup_{\substack{x, y \in D \\ x \neq y}} \frac{| f(x) - f(y) |}{| x - y |^{\alpha}},$$

$$||| f |||_{1}^{D} = \sum_{i} \sup_{D} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|,$$

$$||| f |||_{1+\alpha}^{D} = \sum_{i} \left||| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|||_{\alpha}^{D},$$

$$||| f |||_{2}^{D} = \sum_{i, k} \sup_{D} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i \, \partial x_k} \right|,$$

$$||| f |||_{2+\alpha}^{D} = \sum_{i, k} \left||| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_k} \right|||_{\alpha}.$$

Положим еще для симметрии

$$||| f |||_{0}^{D} = \| f \|_{0}^{D}.$$

В дальнейшем в обозначении $||| f |||_{s}^{D}$ индекс s у нас будет пробегать значения $0, \alpha, 1, 1+\alpha, 2, 2+\alpha$. $||| \quad |||_{s}^{D}$, кроме $s = 0$, не являются нормами (почему?).

Через K_r обозначим куб: $|x_i| < r$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $M > 0$, что, какова бы ни была функция f, определенная в кубе K_r и принадлежащая классу $C_{2+\alpha}(K_r)$, имеет место неравенство*

$$r^{s} ||| f |||_{s}^{K_r} \leqslant \varepsilon r^{2+\alpha} ||| f |||_{2+\alpha}^{K_r} + M ||| f |||_{0}^{K_r} \tag{1}$$

при $s \neq 0$ и $s \neq 2 + \alpha$.

Доказательство. Заметим, что

$$|||f(rx)|||_s = r^s |||f(x)|||_s,$$

а потому достаточно доказать неравенство (1) в случае $r = 1$. Кроме того, можно считать, что $|f| < 1$.

Итак. пусть $r = 1$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Докажем, что найдется M, при котором для всякой $f \in C_{2+\alpha}(K_1)$

$$|||f|||_s^{K_1} \leqslant \varepsilon |||f|||_{2+\alpha}^{K_1} + M. \tag{2}$$

Докажем это сначала для $s = 1$ и $s = 2$. Так как при $x,\ y \in K_1$

$$\left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 f(y)}{\partial x_i \partial x_k} \right| \leqslant |x - y|^\alpha |||f|||_{2+\alpha}^{K_1},$$

то, допустив, что при некоторых i и k и при некоторой константе M_{ik} имеет место

$$\sup_{K_1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right| > \frac{\varepsilon}{2} |||f|||_{2+\alpha}^{K_1} + M_{ik} \tag{3}$$

мы можем заключить, что найдется куб K_{ik} с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, и со стороной, равной $\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right)^{1/\alpha}$, лежащий в K_1, в котором

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right| > M_{ik}. \tag{4}$$

Рассмотрим частный случай $i = k$:

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right| > M_{ii} \quad \text{в} \quad K_{ii}. \tag{5}$$

Возьмем пересечение l куба K_{ii} с какой-либо прямой, параллельной оси x_i. Из (5) вытекает, что

$$2 \operatorname*{osc}_l f > \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right)^{1/\alpha}\right]^2 M_{ii}$$

и, значит,

$$1 > \sup_{K_1} |f| > \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right)^{1/\alpha}\right]^2 M_{ii}.$$

Поэтому при $M_{ii} > \frac{16(2\sqrt{n})^{2/\alpha}}{\varepsilon^{2/\alpha}}$ должно выполняться неравенство

$$\sup_{K_1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}|||f|||_{2+\alpha}^{K_1} + M_{ii}.$$

Следовательно, на всяком отрезке длины единица, параллельном оси x_i, лежащем в K_1,

$$\operatorname{osc}\frac{\partial f}{\partial x_i} < \frac{\varepsilon}{2}|||f|||_{2+\alpha}^{K_1} + M_{ii}.$$

Поэтому, если в какой-либо точке K_1

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| > \frac{\varepsilon}{2}|||f|||_{2+\alpha}^{K_1} + M_{ii} + A,$$

то на отрезке длины единица в K_1, параллельном оси x_i и проходящем через эту точку,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| > A$$

и, значит, $\operatorname{osc} f > A$. Так как $\operatorname{osc} f \leqslant 2$, то

$$A < 2,$$

и мы получаем

$$\sup_{K_1}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|||f|||_{2+\alpha}^{K_1} + M_{ii} + 2$$

при всяком i или

$$\left|\left|\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\right|\right|_1^{K_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|||f|||_{2+\alpha}^{K_1} + \frac{16(2\sqrt{n})^{2/\alpha}}{\varepsilon^{2/\alpha}} + 2 \tag{6}$$

и для $s = 1$ неравенство доказано.

Вернемся теперь к неравенствам (3) и (4) при произвольных i и k.

Пусть при каком-то M_{ik} выполнено (3) и, следовательно, в некотором кубе K_{ik} со стороной $(\varepsilon/2\sqrt{n})^{1/\alpha}$ выполнено (4).

Так как неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\right| > M_{ik}$$

выполняется на отрезке длины $(\varepsilon/2\sqrt{n})^{1/\alpha}$, параллельном оси x_i, то

$$\operatorname*{osc}_{K_1} \frac{\partial f}{\partial x_k} > M_{ik}\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right)^{1/\alpha},$$

или

$$\left|\left|\left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|\right|\right|_1^{K_1} > \frac{1}{2} M_{ik}\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right)^{1/\alpha}. \tag{7}$$

Неравенство (6) справедливо при всяком ε. В частности, оно будет справедливо, если вместо ε поставить $\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right)^{1/\alpha}$.

Соединяя (6) при таком значении ε с (7) при исходном ε, мы получаем

$$M_{ik} < \frac{\varepsilon}{2}\, |||f|||_{2+\alpha}^{K_1} + \frac{8(2\sqrt{n})^{2/\alpha}}{\varepsilon^{2/\alpha}} \Big/ \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right)^{1/2} + \frac{2}{\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\, |||f|||_{2+\alpha}^{K_1} + M(\varepsilon),$$

откуда при

$$M_{ik} = \frac{\varepsilon}{2}\, |||f|||_{2+\alpha}^{K_1} + M(\varepsilon)$$

не выполняется (3) и, значит,

$$|||f|||_2^{K_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, |||f|||_{2+\alpha}^{K_1} + M_{ik}$$

или

$$|||f|||_2^{K_1} \leqslant \varepsilon\, |||f|||_{2+\alpha}^{K_1} + M(\varepsilon),$$

где $M(\varepsilon)$ зависит, таким образом, от ε и от α, и для $s = 2$ нужное неравенство доказано.

Так как

$$|||f|||_\alpha^{K_1} \leqslant 2^n\, |||f|||_1^{K_1} \quad \text{и} \quad |||f|||_{1+\alpha}^{K_1} \leqslant 2^n\, |||f|||_2^{K_1},$$

то и для остальных значений s неравенство (1) доказано.

Пусть задана область $D \subset R_n$. Назовем *опорным* для D всякий открытый куб $K \subset D$, имеющий грани, параллельные координатным гиперплоскостям, граница которого имеет общие точки с границей области D. Назовем *большим внутренним* всякий куб, концентрический с некоторым опорным, сторона которого вдвое меньше стороны соответствующего опорного. Назовем малым внутренним куб, концентрический с большим внутренним и имеющий сторону еще в два раза меньшую. Будем обозначать через $K_r^{x^0}$ куб: $|x_i - x_i^0| < r$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть $f \in C_{2+\alpha}(D)$. Положим

$$[f]_s^D = \sup_{K_r^{x^0}} \left(r^s \, |||f|||_s^{K_r^{x^0}} \right), \tag{8}$$

где верхняя грань берется по всевозможным *большим внутренним* кубам $K_r^{x^0} \subset D$, и

$$[\,[f]\,]_s^D = \sup_{K_r^{x^0}} \left(r^s \, |||f|||_s^{K_r^{x^0}} \right),$$

где верхняя грань берется по всевозможным *малым внутренним* кубам $K_r^{x^0} \subset D$.

Так как всякий большой внутренний куб $K_r^{x^0}$ можно покрыть 2^n малыми внутренними кубами, длины сторон которых заключены между $r/2$ и r, то имеет место неравенство

$$C_1 [f]_s^D \leqslant [\,[f]\,]_s^D \leqslant C_2 [f]_s^D, \tag{9}$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ — константы, зависящие от n.

Лемма 2. *Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется M, зависящее от ε, α и n такое, что, какова бы ни была функция $f \in C_{2+\alpha}(D)$, для нее выполнено неравенство*

$$[f]_s^D \leqslant \varepsilon [\,[f]\,]_{2+\alpha}^D + M [f]_0^D; \qquad s \neq 2+\alpha \tag{10}$$

(*заметим, что, очевидно,* $[f]_0^D = [\,[f]\,]_0^D = |||f|||_0^D = \|f\|_0^D$).

Доказательство. Неравенство

$$[f]_s^D \leqslant \varepsilon [f]_{2+\alpha}^D + M [f]_0^D \tag{11}$$

вытекает из леммы 1 (неравенство (1)) и равенства (8), после чего остается применить неравенство (9) (заменив в (1) ε на ε/C_1),

2. Доказательство внутренней оценки Шаудера в предположении, что для оператора Лапласа и для финитных функций она верна.

Предположим, что верно следующее утверждение.

Для любой функции $f \in \overset{\circ}{C}_{2+\alpha}(K_1)$ имеет место неравенство

$$|||f|||_{2+\alpha}^{K_1} \leqslant C\left(|||\Delta f|||_{\alpha}^{K_1} + |||f|||_0^{K_1}\right), \tag{12}$$

где C зависит от α.

Докажем в этом предположении неравенство (45). Пусть ε_0 — положительное число, которое мы подберем позже и которое будет зависеть от оператора L.

Пусть $x^0 \in D$ — произвольная точка. Сделаем линейное преобразование $y = Bx$, переводящее оператор L в точке x^0 в оператор Лапласа. Пусть при этом преобразовании оператор L переходит в оператор

$$\widehat{L} = \sum_{i,\,k=1}^{n} b_{ik}(y) \frac{\partial^2}{\partial y_i\, \partial y_k}.$$

Так, что если $y^0 = Bx^0$, то $b_{ik}(y^0) = \delta_{ik}$.

В силу равномерной непрерывности коэффициентов $a_{ik}(x)$ и равномерной эллиптичности оператора L можно найти такую константу $r_0 > 0$, что при $y \in Q_{r_0}^{y^0}$

$$|b_{ik}(y) - \delta_{ik}| < \varepsilon_0.$$

Очевидно, для доказательства неравенства (45) достаточно доказать, что существует константа C' такая, что если обозначить через $\widehat{D}^{y^0}$ пересечение образа D при отображении B с $Q_{r_0}^{y^0}$, то для $f(y) \in C_{2+\alpha}(\widehat{D}^{y^0})$ имеет место

$$\|f\|_{2+\alpha}^{\widehat{D}_\rho^{y^0}} \leqslant C'\left(|||\widehat{L}f|||_{\alpha}^{\widehat{D}^{y^0}} + |||f|||_0^{\widehat{D}^{y^0}}\right).$$

Если, кроме того, использовать интерполяционное неравенство, то для доказательства неравенства (45) достаточно доказать, что

$$|||f|||_{2+\alpha}^{\widehat{D}_\rho^{y^0}} \leqslant C'\left(|||\widehat{L}f|||_{\alpha}^{D^{y^0}} + |||f|||_0^{D^{y^0}}\right). \tag{45'}$$

Будем поэтому для удобства считать, что исходная область D и оператор L таковы, что

$$|a_{ik}(x)-\delta_{ik}|<\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad x\in D, \tag{13}$$

и в этом предположении будем доказывать неравенство (45′). Кроме того, можно, очевидно, считать, что $D\subset K_1$. Для доказательства неравенства (45′), в свою очередь, достаточно показать, что

$$[\,[f]\,]_{2+\alpha}^{D}\leqslant C'\left([Lf]_{\alpha}^{D}+[f]_{0}^{D}\right).$$

Действительно,

$$[Lf]_{\alpha}^{D}\leqslant |||\,Lf\,|||_{\alpha}^{D},\quad [f]_{0}^{D}=|||\,f\,|||_{0}^{D}$$

и

$$[\,[f]\,]_{2+\alpha}^{D}\geqslant C'''\,|||\,f\,|||_{2+\alpha}^{D\rho},$$

где $C'''>0$ зависит от ρ и от диаметра области D.

Фиксируем некоторую функцию $\varphi(x)\in\overset{\circ}{C}_{2+\alpha}(K_1)$ такую, что

$$\varphi(x)\equiv 1 \quad \text{при} \quad x\in K_{1/2}.$$

Пусть M_1 такое число, что

$$|||\,\varphi\,|||_{s}^{K_1}<M_1,\quad s=0,\ \alpha,\ 1,\ 1+\alpha,\ 2,\ 2+\alpha.$$

Рассмотрим какой-либо большой внутренний куб $K_r^{x^0}$. Функция $\varphi_r^{x^0}(x)=\varphi\left(\frac{x-x_0}{r}\right)$ финитна в большом кубе $K_r^{x^0}$ и обращается в единицу в соответствующем ему малом кубе $K_{r/2}^{x^0}$ и удовлетворяет неравенствам

$$|||\,\varphi\,|||_{s}^{K_r^{x^0}}<\frac{M_1}{r^s}. \tag{14}$$

Представляя Δ в виде $\Delta=L+(\Delta-L)$ и применяя неравенство (12) к функции $f(x)\varphi_r^{x^0}(x)$, получаем

$$|||\,f\varphi_r^{x^0}\,|||_{2+\alpha}^{K_{r/2}^{x^0}}\leqslant$$

$$\leqslant C\left[|||\,L\,(f\varphi_r^{x^0})\,|||_{\alpha}^{K_r^{x^0}}+|||\,(\Delta-L)\,(f\varphi_r^{x^0})\,|||_{\alpha}^{K_r^{x^0}}+|||\,f\varphi_r^{x^0}\,|||_{0}^{K_r^{x^0}}\right]. \tag{14′}$$

Заметим, что

$$|||\,gh\,|||_\alpha \leqslant |||\,g\,|||_\alpha\,|||\,h\,|||_0 + |||\,g\,|||_0\,|||\,h\,|||_\alpha$$

(ср. с леммой 8.1 гл. I). Умножая обе части неравенства (14′) на $r^{2+\alpha}$ и используя неравенства (13) и (14), получаем

$$r^{2+\alpha}\,|||\,f\,|||_{2+\alpha}^{K^{x^0}_{r/2}} \leqslant C''\Big\{r^{2+\alpha}\,|||\,Lf\,|||_\alpha^{K^{x^0}_r} + r^2\,|||\,f\,|||_2^{K^{x^0}_r} + r^{1+\alpha}\,|||\,f\,|||_{1+\alpha}^{K^{x^0}_r} + \\ + r\,|||\,f\,|||_1^{K^{x^0}_r} + r^\alpha\,|||\,f\,|||_\alpha^{K^{x^0}_r} + |||\,f\,|||_0^{K^{x^0}_r} + \varepsilon_0 r^{2+\alpha}\,|||\,f\,|||_{2+\alpha}^{K^{x^0}_r}\Big\},$$

где C'' зависит от M_1, C, n и от нормы Гёльдера коэффициентов a_{ik}. Или, наконец (учитывая, что $r^{2+\alpha}\,|||\,Lf\,|||_\alpha^{K^{x^0}} < r^\alpha\,|||\,Lf\,|||_\alpha^{K^{x^0}}$)

$$[\,[f]\,]_{2+\alpha}^D \leqslant C''\,\{[Lf]_\alpha^D + [f]_2^D + [f]_{1+\alpha}^D + \\ + [f]_1^D + [f]_\alpha^D + [f]_0^D + \varepsilon_0\,[f]_{2+\alpha}^D\}. \qquad (15)$$

Положим $\varepsilon_0 = \frac{1}{C''C_1}$, где C_1 — константа неравенства (9). Выбирая в неравенстве (11) $\varepsilon = \frac{1}{8C''}$, найдем соответствующее M. Применяя теперь к полученному неравенству (15) неравенства (9) и (10), получаем

$$[\,[f]\,]_{2+\alpha}^D \leqslant C''\,[Lf]_\alpha^D + (C'' + 4M)\,[f]_0^D + \frac{1}{2}\,[\,[f]\,]_{2+\alpha}^D$$

или

$$[\,[f\,]]_{2+\alpha}^D \leqslant C'\,\{[Lf]_\alpha^D + [f]_0^D\} \qquad (C' = 2\,(C'' + 4M)),$$

что и завершает доказательство утверждения этого пункта.

3. Видоизменение предыдущих рассуждений для получения неравенства (38).

Пусть доказано следующее утверждение.

Обозначим через Q_1^{0-} часть Q_1^0, лежащую по одну сторону гиперплоскости $x_n = 0$. Пусть для определенности Q_1^{0-} состоит из тех точек $x \in Q_1^0$, где $x_n < 0$.

Обозначим через S_1^{0-} часть границы Q_1^{0-}, принадлежащую сфере S_1^0, и через Δ_1^- — ту часть границы, которая лежит на гиперплоскости $x_n = 0$.

Пусть в Q_1^{0-} определена функция f, обладающая следующими свойствами:

$$f \in C_{2+\alpha}(Q_1^{0-}),$$

$$f \equiv 0 \text{ в некоторой окрестности } S_1^{0-},\ f = 0 \text{ на } \Delta_1^-.$$

Тогда

$$|||f|||_{2+\alpha}^{Q_1^{0-}} \leqslant C\left(|||\Delta f|||_\alpha^{Q_1^{0-}} + |||f|||_0^{Q_1^{0-}}\right), \tag{16}$$

где C — константа, зависящая от оператора L.

Покроем D конечным числом областей, часть из которых лежит строго внутри D, а часть примыкает к границе. Пусть первые суть $G_1^1, \ldots, G_{n_1}^1$, а вторые $G_1^2, \ldots$ $\ldots, G_{n_2}^2$. Для каждой из областей G_i^1 по предыдущему справедливо неравенство

$$|||f|||_{2+\alpha}^{G_i^1} \leqslant C'\left(|||Lf|||_\alpha^D + |||f|||_0^D\right). \tag{17}$$

Если, кроме того, для каждого G_i^2 мы докажем

$$|||f|||_{2+\alpha}^{G_i^2} \leqslant C'\left(|||Lf|||_\alpha^D + |||f|||_0^D\right), \tag{18}$$

то будет выполняться

$$|||f|||_{2+\alpha}^{D} \leqslant C''\left(|||Lf|||_\alpha^D + |||f|||_0^D\right), \tag{19}$$

где C'' зависит от C' и от области D.

Это неравенство, если учитывать интерполяционные неравенства, отличается от нужного нам неравенства присутствием справа члена $|||f|||_0^D$. Но от него мы потом легко избавимся, используя условие $f|_{\partial D} = 0$.

В качестве области G_i^2 мы возьмем пересечение D с шаром $Q_{r_0}^{x^0}$, где $x_0 \in \partial D$ и r_0 достаточно мало. Обозначим $\widetilde{G}_i^2 = Q_{2r_0}^{x^0} \cap D$. При достаточно малом r_0 существует трижды гладкий диффеоморфизм $\widetilde{\widetilde{G}}_i^2$, переводящий ту часть границы $\widetilde{G}_l^2$, которая является пересечением ∂D с $Q_{2r_0}^{x^0}$, в кусок гиперплоскости, а оператор L в такой оператор

$$\hat{L} = \sum \hat{a}_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \hat{b}_l(x) \frac{\partial u}{\partial x_l},$$

что

$$|\hat{a}_{ik}(x) - \delta_{ik}| < \varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — наперед заданное число. Можно считать также, что гиперплоскость, о которой была речь, есть $x_n = 0$ и образ $\widetilde{G}_l^2$ при этом преобразовании лежит в Q_1^0. (Младшие члены в операторе появились из-за того, что преобразование не линейно.)

Поэтому надо доказать следующее утверждение. Пусть $D \subset Q_1^{0-}$. Пусть Γ_0 — часть границы D, не принадлежащая гиперплоскости $x_n = 0$, а Γ_1 — часть границы D, лежащая на гиперплоскости $x_n = 0$. Пусть D_ρ^- — совокупность точек $x \in D$, расстояние которых от Γ_0 больше ρ. Пусть в D определен равномерно эллиптический оператор

$$L = \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x),$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α. Пусть

$$|a_{ik}(x) - \delta_{ik}| < \varepsilon_0 \quad \text{при} \quad x \in D,$$

где число $\varepsilon_0 > 0$ будет подобрано ниже.

Тогда для любой $f \in C_{2+\alpha}(D)$, $f|_{\Gamma_1} = 0$ справедливо неравенство

$$|||f|||_{2+\alpha}^{D_\rho^-} \leqslant C\left(|||Lf|||_\alpha^D + |||f|||_0^D\right). \tag{20}$$

Определим опорный куб следующим образом. Это куб с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, внутри которого нет точек из Γ_0, граница которого имеет общие точки с Γ_0 и такой, что концентрический с ним открытый куб с вчетверо меньшей стороной принадлежит D.

После этого большой внутренний и малый внутренний кубы определяем, как раньше. С их помощью определяем, так же как и раньше, величины $[\ \ ]_s^D$, $[[\ \ ]]_s^D$ и убеждаемся в том, что все наши рассуждения проходят без особых изменений (неравенство (12) заменяем на (16)). При этом мы видим, что присутствие в операторе L младших членов никак не мешает. Можно было бы вообще рассматривать с самого начала общий линейный оператор. Я не стал этого делать ради простоты.

Мы получаем неравенство

$$[[f]]_{2+\alpha}^D \leqslant \hat{C}\left([Lf]_\alpha^D + [f]_0^D\right),$$

а с ним и доказательство (19) и, следовательно, (20).

Нам осталось доказать неравенство

$$|||f|||_0^D \leqslant M\,|||Lf|||_\alpha^D,$$

где M — константа, зависящая от оператора и от области.

Пусть x^0 — какая-либо точка, принадлежащая D. Положим

$$v = f + A|x - x^0|^2,$$

где A — неотрицательная константа, так что

$$Lv = Lf + 2A\sum_{i=1}^n a_{ii} \geqslant Lf + Aa,$$

где $a > 0$ — константа, зависящая от константы эллиптичности.

Следовательно, при

$$A = \frac{\|Lf\|_0^D}{a} \leqslant \frac{\|Lf\|_\alpha^D}{a}$$

справедливо

$$Lv \geqslant 0,$$

т. е. для v выполнен принцип максимума и, значит,

$$v \leqslant v|_{\partial D} = A|x - x^0|^2|_{\partial D} < Ad^2,$$

где d — диаметр области D.

Так как $f \leqslant v$, то $f \leqslant \frac{d^2}{a} \| Lf \|_\alpha^D$.

Аналогично получается оценка с другой стороны.

4. Доказательство неравенств (12) и (16).

Лемма 1. *Пусть имеются последовательность* $\{f_m\}$, $f_m \in C_{k+\alpha}(D)$ *и константа* $M > 0$ *такие, что*

$$\| f_m \|_{k+\alpha}^D \leqslant M.$$

Тогда из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{f_{m_l}\}$, *которая по норме* $\| \ \|_k^D$ *сходится к некоторой функции* $f \in C_{k+\alpha}(D)$, *и*

$$\| f \|_{k+\alpha}^D \leqslant M.$$

Доказательство. Так как последовательность $\{f_m\}$ компактна в $C_k(D)$, то существует подпоследовательность $\{f_{m_l}\}$, сходящаяся к некоторой $f \in C_k(D)$ в $C_k(D)$.

Мы имеем для любой пары точек $x', x'' \in D$, $x' \neq x''$,

$$\sum_{k_1 + \ldots + k_n = k} \frac{\left| \frac{\partial^k f_m(x')}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} - \frac{\partial^k f_m(x'')}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right|}{|x' - x''|^\alpha} \leqslant M.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, получаем

$$\sum_{k_1 + \ldots + k_n = k} \frac{\left| \frac{\partial^k f(x')}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} - \frac{\partial^k f(x'')}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right|}{|x' - x''|^\alpha} \leqslant M \quad \text{(ч. т. д.)}.$$

Лемма 2. *Пусть* $f \in \mathring{C}_k(D)$. *Рассмотрим усреднение*

$$f^h(x) = \int_{R_n} \omega_h(y) f(x - y)\, dy$$

этой функции (см. стр. 151—152).

Если h *достаточно мало, то* $f^h \in \mathring{C}_\infty$. *В этом случае*

$$\frac{\partial^k f^h}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right)^h.$$

Действительно,

$$\frac{\partial^k f^h}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \int\limits_{R_n} \omega_h(x-y) f(y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{R_n} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \omega(x-y) f(y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{R_n} \omega_h(x-y) \frac{\partial^k}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_n^{k_n}} f(y)\, dy = \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right)^h.$$

Лемма 3. *Пусть* $f \in C_\alpha(D)$. *Тогда*

$$\| f^h \|_\alpha^D \leqslant \| f \|_\alpha^D.$$

Доказательство.

$$\frac{| f^h(x') - f^h(x'') |}{| x' - x'' |^\alpha} = \int\limits_{R_n} \omega_h(y) \frac{| f(x'-y) - f(x''-y) |}{| x' - x'' |^\alpha}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \| f \|_\alpha^D \int\limits_{R_n} \omega_h(y)\, dy = \| f \|_\alpha^D \qquad \text{(ч. т. д.)}.$$

Будем доказывать неравенство (12). Из лемм 1—3 вытекает, что неравенство (12) достаточно доказать для случая, когда $f \in \mathring{C}_\infty(D)$.

Пусть

$$\Delta f = -(n-2)\,\omega_n \varphi$$

(ω_n — площадь поверхности единичной сферы).

Функция φ также финитна и бесконечно дифференцируема.

Из общего курса уравнений с частными производными (см., например, Курант [1]) нам известно, что

$$f(x) = \int\limits_{R_n} \frac{\varphi(y)}{| x - y |^{n-2}}\, dy.$$

Далее, мы имеем

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \int \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dy = -\int \varphi(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} = \int \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dy,$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\, \partial x_k} = -(n-2) \int \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} \frac{(x_k - y_k)}{|x-y|^n}\, dy.$$

Пусть C — константа Гёльдера функции φ. Пусть фиксированы две точки $x' \in D$ и $x'' \in D$. Пусть $|x' - x''| = \rho$ и $\frac{x'+x''}{2} = x^0$.

Нам надо оценить разность

$$\frac{\partial^2 f(x'')}{\partial x_i\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 f(x')}{\partial x_i\, \partial x_k} = (n-2) \int\limits_{R_n} \left[\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} \frac{(x'_k - y_k)}{|x'-y|^n} - \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} \frac{(x''_k - y_k)}{|x''-y|^n} \right] dy. \qquad (21)$$

Пусть $\psi(x)$ — некоторая фиксированная функция такая, что $\psi(x) = 1$ при $|x - x^0| \leqslant R$ и $\psi(x) = 0$ при $|x - x^0| \geqslant 2R$, где R таково, что $D \subset Q_R^{x^0}$.

Вместо правой части равенства (21) будем оценивать выражение

$$I = (n-2) \int\limits_{R_n} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} [\varphi(y) - \varphi(x')\psi(y)] \frac{(x'_k - y_k)}{|x'-y|^n} - \frac{\partial}{\partial y_i} [\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)] \frac{(x''_k - y_k)}{|x''-y|^n} \right\} dy. \qquad (22)$$

Так как

$$\left| \int\limits_{R_n} \left\{ \varphi(x') \frac{\partial \psi(y)}{\partial y_i} \frac{(x'_k - y_k)}{|x'-y|^n} - \varphi(x'') \frac{\partial \psi(y)}{\partial y_i} \frac{(x''_k - y_k)}{|x''-y|^n} \right\} dy \right| = \left| \int\limits_{Q_{2R}^{x^0} \setminus Q_R^{x^0}} \left\{ \varphi(x') \frac{\partial \psi(y)}{\partial y_i} \frac{(x'_k - y_k)}{|x'-y|^n} - \varphi(x'') \frac{\partial \psi(y)}{\partial y_i} \frac{(x''_k - y_k)}{|x''-y|^n} \right\} dy \right| \leqslant K' C \rho^\alpha,$$

где K' — константа, зависящая от R, то нам достаточно получить для интеграла I оценку: $|I| \leqslant K''C\rho^\alpha$, где K'' зависит от α, R и n.

В правой части равенства (22) можно произвести интегрирование по частям, так как выражения в квадратных скобках — гладкие функции, обращающиеся в нуль соответственно в x' и в x''. Поэтому

$$I = n(n-2)\left\{\int\limits_{R_n} [\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)]\left[\frac{(x_i''-y_i)}{|x''-y|}\frac{(x_k''-y_k)}{|x''-y|} - \delta_{ik}\right]\times \right.$$
$$\times \frac{1}{|x''-y|^n}\,dy - \int\limits_{R_n} [\varphi(y) - \varphi(x')\psi(y)]\times$$
$$\left.\times\left[\frac{(x_i'-y_i)}{|x'-y|}\frac{(x_k-y_k)}{|x'-y|} - \delta_{ik}\right]\frac{1}{|x'-y|^n}\,dy\right\},$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Представим это выражение в виде

$$I = n(n-2)\left\{\int\limits_{Q_{2\rho}^{x^0}} [\varphi(y) - \varphi(x'')]\left[\frac{(x_i''-y_i)}{|x''-y|}\frac{(x_k''-y_k)}{|x''-y|} - \delta_{ik}\right]\times\right.$$
$$\times\frac{1}{|x''-y|^n}\,dy - \int\limits_{Q_{2\rho}^{x^0}} [\varphi(y) - \varphi(x')]\left[\frac{(x_i'-y_i)}{|x'-y|}\frac{(x_k'-y_k)}{|x'-y|} - \delta_{ik}\right]\times$$
$$\times\frac{1}{|x'-y|^n}\,dy + \int\limits_{R_n\setminus Q_{2\rho}^{x^0}} [\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)]\times$$
$$\times\left[\frac{(x_i''-y_i)}{|x''-y|}\frac{(x_k''-y_k)}{|x''-y|} - \delta_{ik}\right]\frac{1}{|x''-y|^n} - [\varphi(y) - \varphi(x')\psi(y)]\times$$
$$\left.\times\left[\frac{(x_i'-y_i)}{|x'-y|}\frac{(x_k'-y_k)}{|x'-y|} - \delta_{ik}\right]\frac{1}{|x'-y|^n}\right\}dy =$$
$$= n(n-2)\{I_1 - I_2 + I_3\}.$$

Мы имеем

$$|I_1| \leqslant 2\int\limits_{Q_{2\rho}^{x^0}} |\varphi(y) - \varphi(x'')|\frac{1}{|x''-y|^n}\,dy \leqslant$$
$$\leqslant 2C\omega_n\int\limits_0^{2\rho}\frac{dr}{r^{1-\alpha}} = K_1C\rho^\alpha.$$

Аналогично

$$|I_2| \leqslant K_2 C \rho^\alpha.$$

Для оценки I_3 представим его в виде

$$I_3 = \int\limits_{R_n \setminus Q_{2\rho}^{x^0}} [\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)] F(y)\,dy + \int\limits_{R_n \setminus Q_{2\rho}^{x^0}} [\varphi(x'') - \varphi(x')]\psi(y) F(y)\,dy,$$

где

$$F(y) = \left[\frac{(x_i'' - y_i)}{|x'' - y|}\frac{(x_k'' - y_k)}{|x'' - y|} - \delta_{ik}\right]\frac{1}{|x'' - y|^n} - \left[\frac{(x_i' - y_i)}{|x' - y|}\frac{(x_k' - y_k)}{|x' - y|} - \delta_{ik}\right]\frac{1}{|x' - y|^n}.$$

Геометрически очевидно, что при $|y - x^0| > 2\rho$ справедливо

$$\left|\frac{(x_j'' - y_j)}{|x'' - y|} - \frac{(x_j' - y_j)}{|x' - y|}\right| < 2\frac{\rho}{|x^0 - y|}$$

и

$$\left|\frac{1}{|x'' - y|^n} - \frac{1}{|x' - y|^n}\right| < N_1 \frac{\rho}{|x^0 - y|}\frac{1}{|x^0 - y|^n},$$

где N_1 — константа, зависящая от n. Поэтому существует такая зависящая от n константа N_2, что при $|y - x^0| > 2\rho$

$$|F(y)| < N_2 \frac{\rho}{|x^0 - y|}\frac{1}{|x^0 - y|^n}.$$

Так как при $|y - x^0| > 2\rho$, кроме того,

$$|\varphi(y) - \varphi(x'')\psi(y)| < N_3 C |y - x^0|^\alpha$$

и

$$|[\varphi(x'') - \varphi(x')]\psi(y)| < N_3 C |y - x^0|^\alpha,$$

то

$$|I_3| < N_4 C \omega_n \int\limits_{2\rho}^{2R} \frac{\rho}{r^{2-\alpha}}\,dr = K_3 C \rho^\alpha,$$

и тем самым получается нужная оценка для I, а с ней и доказательство неравенства (12).

Наметим теперь доказательство неравенства (16). Как и выше, достаточно рассмотреть случай бесконечно дифференцируемой функции f.

Положим, как и выше,

$$\Delta f = -(n-2)\,\omega_n \varphi.$$

Обозначим через R^n_- полупространство $x_n < 0$ и через x^* — точку, симметричную точке $x \in R^n_-$ относительно гиперплоскости $x_n = 0$. Тогда

$$f(x) = \int\limits_{R^n_-} \varphi(y)\left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{|x^*-y|^{n-2}}\right] dy$$

(см. *Курант* [1]).

После того как мы представили f в этом виде, оценка модуля разности производных

$$\left|\frac{\partial^2 f(x')}{\partial x_i\,\partial x_k} - \frac{\partial^2 f(x'')}{\partial x_i\,\partial x_k}\right|$$

проводится с помощью сходных рассуждений. Вводится подрезающая функция $\psi(x)$: $\psi(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$ и $\psi(x) = 0$ при $|x| \geqslant 2$. Показывается, что достаточно оценить интеграл

$$\begin{aligned} I = (n-2)\int\limits_{R^n_-} \Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial y_i}\left[\varphi(y) - \varphi(x')\,\psi(y)\right]\frac{(x'_k - y_k)}{|x'-y|^n} - \\ & - \frac{\partial}{\partial y_i}\left[\varphi(y) - \varphi(x'')\,\psi(y)\right]\frac{(x''_k - y_k)}{|x''-y|^n} - \\ & - \frac{\partial}{\partial y_i}\left[\varphi(y) - \varphi(x'^*)\,\psi(y)\right]\frac{(x'^*_k - y_k)}{|x'^*-y|^n} - \\ & - \frac{\partial}{\partial y_i}\left[\varphi(y) - \varphi(x''^*)\,\psi(y)\right]\frac{x''^*_k - y_k}{|x''^*-y|^n}\Bigg\}\,dy. \end{aligned}$$

В этом интеграле можно произвести интегрирование по частям. При этом к членам рассмотренного раньше вида добавится интеграл по гиперплоскости $x_n = 0$, который оценивается по той же схеме.

5. З а м е ч а н и е к п. 3 и в о п р о с о с у щ е с т в о в а н и и р е ш е н и я з а д а ч и Д и р и х л е д л я у р а в-

нения Пуассона. Так как в п. 3 можно рассматривать области G_i^2, примыкающие не ко всей границе, а только к какому-нибудь ее куску, то получается такое видоизменение оценки Шаудера.

Пусть D — область с трижды гладкой границей. Пусть Γ — кусок границы D и γ — часть границы D, строго внутренняя для Γ. Пусть $f \in C_{2+\alpha}(D)$ и $f|_\Gamma = 0$. Тогда

$$\| f \|_{2+\alpha}^{D'} \leqslant C\left(\| Lf \|_{\alpha}^{D} + \| f \|_{0}^{D}\right), \tag{23}$$

где D' — подобласть D такая, что $\partial D' \cap \partial D = \gamma$. C зависит от оператора от L, от D, Γ, γ и D'.

В § 8 главы I (стр. 68) мы использовали следующий факт.

Пусть граница области D трижды гладкая. Пусть $f \in C_\alpha(D)$. Тогда существует решение задачи

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial D} = 0 \tag{24}$$

и $u \in C_{2+\alpha}(D)$.

Докажем сейчас это утверждение.

Леммы 1—3 предыдущего пункта и оценка Шаудера (38) показывают, если для некоторой области D это утверждение верно для всех $f \in C_\infty$, то оно верно и для $f \in C_\alpha(D)$.

Пусть в задаче (24) $f \in C_\infty$. Будем предполагать известным существование решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta w = 0, \quad w|_{\partial D} = \varphi,$$

где φ — непрерывная функция (см. *Петровский* [1]). Решение w этой задачи непрерывно в $\overline{D}$ и аналитично в D. Отсюда следует, что существует решение задачи (24), непрерывное в $\overline{D}$ и бесконечно дифференцируемое в D (разумеется, при сделанном нами предположении о бесконечной дифференцируемости f). Действительно, продолжим f на R^n так, чтобы она была финитна и бесконечно дифференцируема. Положим

$$v(x) = \frac{-1}{(n-2)\,\omega_n} \int\limits_{K^n} f(y) \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dy.$$

Пусть w — решение задачи Дирихле

$$\Delta w = 0, \quad w\,|_{\partial D} = u - v;$$

тогда $u = v + w$ — решение задачи (24). Вопрос сводится, таким образом к тому, чтобы показать, что $u \in C_{2+\alpha}$ вплоть до границы области D.

Покажем, что для доказательства этого факта достаточно решить исходную задачу в случае, когда D — шар Q_1^0.

Пусть доказано, что при $f \in C_\alpha(Q_1^0)$ решение задачи

$$\Delta u = f, \quad u\,|_{S_1^0} = 0$$

существует и принадлежит $C_{2+\alpha}(Q_1^0)$. Тогда результаты § 8 (замечание 8.2) позволяют нам утверждать, что для этого шара существует решение задачи

$$Lu \equiv \sum a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} + \sum b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x),$$

$$u\,|_{S_1^0} = \varphi,$$

где a_{ik}, b_i и f принадлежат $C_\alpha(D)$, $\varphi \in C_{2+\alpha}(\partial D)$, и это решение принадлежит $C_{2+\alpha}(D)$.

Пусть теперь для области D с трижды гладкой границей имеется задача (24) с бесконечно дифференцируемой f.

Пусть $x^0 \in D$ — произвольная точка. Найдем область $D' \subset D$, такую, что в окрестности точки x^0 часть Γ_0 ее границы принадлежит границе D, и существует трижды гладкий диффеоморфизм, переводящий D' в Q_1^0. Пусть $\hat{\Gamma}_0$ — образ Γ_0 при этом диффеоморфизме. Мы знаем, что задача (24) имеет решение u, непрерывное вплоть до границы. Пусть f при этом диффеоморфизме переходит в $\hat{f}$, u — в $\hat{u}$, а Δ в L. Пусть $\hat{\varphi}$ — значения, которые $\hat{u}$ принимает на S_1^0, так что $\hat{\varphi}\,|_{\hat{\Gamma}_0} = 0$, $\hat{\varphi}$ непрерывна, и $\hat{u}$ является решением задачи

$$L\hat{u} = \hat{f}, \quad \hat{u}\,|_{S_1^0} = \hat{\varphi}.$$

Аппроксимируя $\hat{\varphi}$ последовательностью достаточно гладких функций, сходящихся к ней равномерно и обращающихся в нуль на $\widehat{\Gamma}_0$, применяя неравенство (23) и переходя от $\hat{u}$ и Q_1^0 обратно к D' и u, мы находим, что u принадлежит $C_{2+\alpha}$ вплоть до границы в некоторой окрестности x^0.

Обратимся к задаче (24), когда D есть шар Q_1^0. Так как мы располагаем леммами 1—3 п. 4 и оценкой (38), то достаточно показать, что существует решение из $C_{2+\alpha}(Q_1^0)$ задачи

$$\Delta u = f, \quad u|_{S_1^0} = 0,$$

где f аналитична.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\Delta v = f, \quad u|_{S_1^0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_1^0} = 0.$$

По теореме Ковалевской существует решение v этой задачи в некотором слое $H = \{1 - \delta < |x| \leqslant 1\}$. Продолжим это решение со слоя H на весь шар D так, чтобы функция была трижды гладкой. Продолженную функцию обозначим той же буквой v.

Положим

$$w = u - v.$$

Функция w есть решение задачи

$$\Delta w = g, \quad w|_{\partial D} = 0,$$

где

$$g = f - \Delta v$$

и, следовательно, $g = 0$ в слое H.

Мы имеем

$$w = \frac{-1}{(n-2)\,\omega_n} \int_D g(y) \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{|x^*|^{n-2}}{|x^*-y|^{n-2}}\right] dy =$$

$$= \frac{-1}{(n-2)\,\omega_n} \left[\int_D g(y) \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dy - \int_D g(y) \frac{|x^*|^{n-2}}{|x^*-y|^{n-2}}\, dy\right] =$$

$$= -\frac{1}{n - 2\omega_n} [I_1 - I_2],$$

где

$$x^* = \frac{x}{|x|^2}.$$

Так как g — финитная трижды дифференцируемая функция, то I_1 во всяком случае трижды гладкая в $\overline{Q}_1^0$ функция (при дифференцировании под знаком интеграла производные с помощью интегрирования по частям можно перебрасывать на g).

Далее, так как при $g(x) = 0$ при $|x| > 1 - \delta$, то и второй интеграл трижды гладок по x вплоть до границы.

Следовательно, w, а с ним и u трижды гладка вплоть до границы.

ЛИТЕРАТУРА

Аббасов А. Т.

1. О поведении на границе решений вырождающегося эллиптического уравнения 2-го порядка с разрывными коэффициентами, Дифф. уравн., вып. 6 (1970), 1073—1085.

Адельсон-Вельский Г. И.

1. Обобщение одной геометрической теоремы С. Н. Бернштейна, Доклады АН СССР **49** (1945), 399—401.

Бернштейн С. Н.

1. Об одной геометрической теореме и ее применениях к уравнениям в частных производных, Успехи матем. наук, т. VIII (1941), 75—81.
2. Ограничение модулей последовательных производных решений уравнений параболического типа, Доклады АН СССР **18** (1938), 385—388.

Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.

1. Уравнения с частными производными, «Мир», 1966.

Блохина Г. Н.

1. Теоремы типа Фрагмена — Линделёфа для линейного эллиптического уравнения второго порядка, ДАН СССР **162**, № 4 (1965), 727—730.
2. Теоремы типа Фрагмена — Линделёфа для линейного эллиптического уравнения 2-го порядка, Матем. сб., т. 84 (124), № 4, (1970), 507—531.

Герасимов Ю. К.

1. О теореме Фрагмена — Линделёфа для функций обобщенной неположительной кривизны, Доклады АН Арм. ССР **39**, № 1 (1964), 3—6.

Гервер М. Л. и Ландис Е. М.

1. Одно обобщение теоремы о среднем для функций многих переменных, Доклады АН СССР **146**, № 4 (1962), 761—764.

Глаголева Р. Я.

1. Априорная оценка нормы Гёльдера и неравенство Харнака для решений линейного параболического уравнения 2-го порядка с разрывными коэффициентами, Матем. сб., т. 76 (118), № 2 (1968), 167—185.
2. Лиувиллевы теоремы для решения линейного параболического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами, Матем. заметки **5**, вып. 5 (1969), 599—606.

Де Джоржи (de Giorgi E.)
1. Sulla differenziabilitàe l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, Memorie acad. sci. Torino, Ser. 3, 3, № 1 (1957), 25—43. (Русский перевод: Сб. переводов «Математика» (1960), 4 : 6, 23—38.)

Зограф О. Н.
1. Пример эллиптического уравнения второго порядка с непрерывными коэффициентами, для которого условия регулярности граничной точки для задачи Дирихле отличаются от аналогичных условий для уравнения Лапласа, Вестник Московского ун-та 72 (1969), 30—40.

Ильин А. М.
1. О поведении решения задачи Коши для параболического уравнения при неограниченном возрастании времени, Успехи матем. наук, т. XVI, вып. 2 (98) (1961), 115—121.

Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.
1. Линейные уравнения второго порядка параболического типа, Успехи матем. наук, т. XVII, вып. 3 (1962), 3—146.

Келдыш М. В.
1. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, Успехи матем. наук, т. VIII (1941).

Кордес (Cordes H. O.)
1. Die erste Randwerafgabe bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variabeln, Math. Ann., Bd. 131, Hft 3 (156), 278—318. (Русский перевод: Сб. переводов «Математика» (1959), 3 : 2).

Космодемьянский А. А. (мл.).
1. О функциях с графиком обобщенной неположительной кривизны, Вестник Московского ун-та, сер. I, № 4 (1970), 23—32.

Кронрод А. С. и Ландис Е. М.
1. О гладкости множеств уровня функций многих переменных, Доклады АН СССР 58, № 7 (1947), 1269—1272.

Крылов Н. В.
1. О первой краевой задаче для эллиптических уравнений, Дифференциальные уравнения 3, № 2 (1967), 315—325.

Курант Р.
1. Уравнения с частными производными, «Мир», 1964.

Курант Р. и Гильберт Д.
1. Методы математической физики, Гостехиздат, 1945.

Ладыженская О. А. и Уральцева Н. Н.
1. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», 1967.

Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.
1. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», 1967.

Лакс (Lax P. D.)
1. A Phragmén — Lindelöf theorem in harmonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. (1957), v. 10, № 3, 361—389. (Русский перевод: Сб. переводов «Математика» (1959), 3.)

Ландис Е. М.

1. s-емкость и ее приложения к исследованию решений эллиптического уравнения 2-го порядка с разрывными коэффициентами, Матем. сб. т. 76 (118), № 2 (1968), 186—213.
2. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений, Успехи матем. наук, т. XVIII, вып. 1 (1963), 3—62.
3. Теоремы типа Фрагмена — Линделёфа для решений эллиптических уравнений высокого порядка, Доклады АН СССР т. 193 № 1, (1970), 32—35.
4. Новое доказательство теоремы Де Джоржи, Труды Московского математич. общества, т. 16 (1967), 219—228.
5. Необходимые и достаточные условия регулярности граничной точки для задачи Дирихле для уравнения теплопроводности, Доклады АН СССР **185**, № 3 (1969).

Ландкоф Н. С.

1. Основы современной теории потенциала, М., 1966.

Литтман, Стампаккья, Вайнбергер (Littman W., Stampacchia G., Weinberger H. F.)

1. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, Univ. of Minesota, December 1962. (Русский перевод: Сб. переводов «Математика» (1965), 9 : 2.)

Мазья В. Г.

1. О модуле непрерывности решения задачи Дирихле вблизи нерегулярной границы, Сб. «Проблемы матем. анализа», изд. Ленинградского ун-та (1966), 45—58.
2. О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме, Матем. заметки **2**, № 2 (1967), 209—220.
3. О регулярности на границе решений эллиптических уравнений и конформного отображения, Доклады АН СССР **152**, № 6 (1963), 1297—1300.

Миллер (Miller K.)

1. Exceptional boundary points for the nondivergence equation which are regular for the Laplace equation and vice-versa, Annali della scuola Normale superioure di Pisa, s. III, XXII, f. 2 (1968), 315—330.

Михеева Е. А.

1. О единственности решения второй и третьей краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка, Доклады АН СССР **167**, № 5 (1966), 877—981.

Михлин С. Г.

1. Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957.
2. Интегральные уравнения, Гостехиздат, 1947.
3. Курс математической физики, «Наука», 1958.

Мозер (Moser J.)

1. A new proof of Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. Pure and Appl. Math. **13** (1966), 457—468.
2. On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. Pure and Appl. Math. **14**, № 3 (1961), 577—591.

3. A Harnack inequality for parabolic differential equations, Comm. Pure and Appl. Math. 17, № 1 (1964), 101—134.

Натансон И. П.

1. Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1950.

Ниренберг (Nirenberg L.)

1. A strong maximum principle for parabolic equations, Comm. Pure and Appl. Math. 6, № 2 (1953), 167—177.

Нэш (Nash J.)

1. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, Am. J. Math., 80 (1958), 931—954. (Русский перевод: Сб. переводов «Математика» (1960), 4 : 1, 31—52.

Олейник О. А.

1. О задаче Дирихле для уравнений эллиптического типа, Матем. сб., т. 24 (66), № 1 (1949), 3—14.
2. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа, Матем. сб., т. 30 (72), № 3 (1952), 695—707.
3. О некоторых нелинейных задачах теории дифференциальных уравнений с частными производными, Лекции первой летней математической школы, г. Канев, 1963.

Олейник О. А. и Кружков С. Н.

1. Квазилинейные уравнения второго порядка со многими независимыми переменными, Успехи матем. наук, т. XVI, вып. 5 (1961), 115—155.

Олейник О. А. и Радкевич Е. В.

1. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, ВИНИТИ, сер. «Итоги науки», Мат. анализ, 1970.

Петровский И. Г.

1. Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, 1961.
2. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, «Наука», 1964.
3. Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmelteinungsgleichung, Compos. Math., v. 1 (1935), 383—419.

Репников В. Д. и Эйдельман С. Д.

1. Новое доказательство теоремы о стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности, Матем. сб., т. 73, № 1 (1967), 155—159.

Сакс С.

1. Теория интеграла, ИЛ, 1949.

Сард (Sard A.)

1. The measure of the critical values of differentiable maps, Bull. of the Amer. Math. Soc. 48 (1942), 883—897.

Серрин (Serrin J.)

1. On the Harnack inequality for linear elliptic equations, Journ. d'Analyse Math., 4, № 2 (1955—1956). (Русский перевод: Сб. переводов «Математика» (1958), 8 : 4.)

Смирнов В. И.

1. Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1958.

Соболев С. Л.

1. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике, изд. Сиб. отд. АН СССР, 1962.

Тихонов А. Н.
1. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности, Матем. сб., т. 42, № 2 (1935), 199—216.
2. Об уравнениях теплопроводности для нескольких переменных, Бюлл. МГУ, секция А, 1, вып. 9 (1938).

Тихонов А. Н. и Самарский А. А.
1. Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954.

Урысон П. С.
1. Zur ersten Randwertaufgube der Potentialtheorie. Ein Fall der Unlösbarkeit, Math. Z., 1925, Bd. 23, Hft 1—2, S. 155—158.

Халмош П.
1. Теория меры, ИЛ, 1953.

Хопф Е. (Hopf E.)
1. Bemerkungen zu einem Satze von S. Bernstein aus der Theorie der elliptischen Differentialgleihungen, Math. Z., 1929, Bd. 29, Hft 5, S. 744—745.
2. A remark on linear elliptic differential equations of second order, Proc. Am. Math. Soc. 3 (1952), 791—793.

Фридман А.
1. Дифференциальные уравнения с частными производными параболического типа, «Мир», 1968.

Эйдельман С. Д.
1. Параболические системы, «Наука», 1964.

Эрве (Hervé R. M.)
1. Recherches Axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier 12 (1962), 415—571.

Евгений Михайлович Ландис

УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

М., 1971 г., 288 стр. с илл.

Редактор *Ю. С. Ильяшенко*

Техн. редактор *А. П. Колесникова*

Корректор *Т. А. Панькова*

Сдано в набор 21/IX 1970 г. Подписано к печати 11/II 1971 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 9. Условн. печ. л. 15,12. Уч.-изд. л. 13,76. Тираж 9000 экз. Т-02174. Цена книги 1 р. 11 к. Заказ № 805

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.