Мирза А. З.

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ЛЕНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. С. БУБНОВА

И. А. ЛАППО-ДАНИЛЕВСКИЙ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

[РАБОТЫ СЕМИНАРИЯ ПО ИССЛЕДОВАНИЯМ
И. А. ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО]

ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД • 1934 • МОСКВА

WORKS OF THE SCIENTIFIC RESEARCH
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS
OF LENINGRAD STATE UNIVERSITY OF A. S. BUBNOV. V. I

I. A. LAPPO-DANILEVSKY

THEORY of FUNCTIONS on MATRICES AND SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

[THE TRANSACTIONS OF THE SEMINAR
ON I. A. LAPPO-DANILEVSKY'S INVESTIGATIONS, 1932—1933]

ONTI STATE TECHNICAL-THEORETIC PRESS
LENINGRAD • 1934 • MOSKOW

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблемы интегрирования линейных дифференциальных уравнений занимали математиков еще в XVIII веке. Затем в XIX веке построение Коши теории функций комплексного переменного дало возможность обосновать всю теорию линейных дифференциальных уравнений на твердом аналитическом фундаменте и построить ту обширную теорию, которая сейчас называется аналитической теорией линейных дифференциальных уравнений. Задачей этой теории является исследование функций комплексного переменного, определяемых линейными дифференциальными уравнениями с аналитическими коэффициентами. Здесь надо упомянуть прежде всего блестящие по результатам и глубокие по идеям работы Римана по теории функций, непосредственно связанные с линейными дифференциальными уравнениями. Необходимо добавить к этому, что значительно раньше Гаусс в некоторых своих письмах высказывает идеи, которые потом были воплощены в аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Начало современной теории линейных уравнений принято видеть в мемуарах Фукса, которые появились в 60-х годах XIX столетия. В этих мемуарах Фукс следующим образом формулирует основную задачу теории: „При настоящем положении знания в теории дифференциальных уравнений ставится задача, состоящая не в том, чтобы привести заданное дифференциальное уравнение к квадратурам, но больше в том, чтобы получить из самого дифференциального уравнения представление о поведении его интегралов для всех точек плоскости, т. е. для всех значений независимого переменного“.

Фукс дает в своих работах ряд общих результатов и подробно рассматривает тот случай, когда особые точки дифференциального уравнения удовлетворяют некоторым определенным условиям, которые позволяют весьма просто написать разложение решений вблизи особой точки. Эти особые точки называются обычно *регулярными* особыми точками. В случае одного дифференциального уравнения порядка n:

$$w^{(n)}+p_1(z)\,w^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}w'+p_n w=0 \qquad (1)$$

эти точки характеризуются тем условием, что каждый коэффициент $p_k(z)$ имеет в рассматриваемой особой точке $z=a$ полюс порядка не выше k. Фукс показал, что вблизи такой точки n линейно независимых решений уравнения (1) могут быть представлены, вообще говоря, в виде

$$w=(z-a)^{\rho}[a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\ldots] \qquad (a_0\neq 0). \qquad (2)$$

В исключительных случаях к этому разложению надо добавить слагаемые, которые представляются произведением степеней $\lg(z-a)$ на выражения вида (2). Число ρ в разложении (2) определяется из обычного алгебраического уравнения, а коэффициенты a_k определяются последовательно из уравнений первой степени.

После работ Фукса появился целый ряд работ, посвященных аналитической теории линейных уравнений, и можно сказать, что этот отдел математического анализа привлек максимальное внимание всех выдающихся математиков второй половины XIX века. Мы не можем входить в скольконибудь подробное описание многочисленных работ и упомянем лишь о некоторых основных проблемах, непосредственно связанных с работами И. А. Лаппо-Данилевского.

Решения уравнения (1) будут, вообще говоря, многозначными функциями в окрестности особой точки $z=a$. В решении, данном Фуксом, многозначность вполне характеризуется множителем $(z-a)^\rho$ (ρ есть, вообще говоря, не целое число). Второй множитель в выражении (2) является регулярной функцией в точке $z=a$, так что множитель $(z-a)^\rho$ содержит в себе всю особенность решения в точке $z=a$. В общем случае полярности любого порядка у коэффициентов или даже наличия существенной особенности, вместо решения вида (2), будет иметь место решение

$$w=(z-q)^\rho \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-a)^k. \tag{3}$$

Здесь второй множитель содержит, вообще говоря, бесчисленное множество членов с отрицательными степенями и имеет в точке $z=a$ существенно особую точку, но при этом остается однозначным вблизи этой точки. В данном случае уже нельзя последовательно определять коэффициенты a_k и строить конечное алгебраическое уравнение для ρ. В работах Коха показано, что коэффициенты a_k вполне определяются из некоторой бесконечной системы линейных однородных уравнений первой степени, коэффициенты которых содержат ρ. Приравнивая нулю бесконечный определитель этой системы, мы получаем уравнение для определения ρ. Пуанкаре в своих работах об асимптотических разложениях показал, что в рассматриваемом случае или, лучше сказать, в простейшем из рассматриваемых случаев, можно формально удовлетворить уравнению выражением вида

$$w=e^{\frac{\alpha}{z-a}}(z-a)^\rho\,[a_0+a_1(z-a)+\dots], \tag{4}$$

где числа α, ρ и коэффициенты a_k определяются так же хорошо, как в работах Фукса, но при этом оказывается, что бесконечный ряд, содержащийся в выражении (4), будет, вообще говоря, расходящимся рядом, и выражение (4) имеет лишь тот смысл, что оно позволяет изучить поведение некоторого решения дифференциального уравнения, когда z стремится к a по определенному лучу.

Вообще, если мы возьмем какие-нибудь n линейно независимые решения уравнения (1) $y_1, y_2, \dots, y_n$ и, аналитически продолжая эти решения, обойдем вокруг особой точки $z=a$, то в результате обхода мы получим новые решения того же уравнения, которые должны выражаться линейным образом через прежние решения (точку $z=a$ мы всегда считаем полюсом или существенно особой точкой коэффициентов уравнения):

$$\left.\begin{aligned} y_1^+ &= c_{11}y_1+c_{12}y_2+\dots+c_{1n}y_n;\\ y_2^+ &= c_{21}y_1+c_{22}y_2+\dots+c_{2n}y_n;\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_n^+ &= c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\dots+c_{nn}y_n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Можно короче сказать, что решение $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в результате обхода вокруг особой точки умножается на квадратную таблицу чисел $C=\|c_{ik}\|$. Положим, что коэффициенты уравнения (1) суть рациональные функции от z с полюсами $a_1, \dots, a_m$. Проведем из точек a_s на бесконечность линии l_s так, чтобы они не пересекались друг с другом, и разрежем плоскость комплексного переменного z вдоль этих линий. На разрезанной таким образом плоскости решение уравнения $(y_1, \dots, y_n)$ будет выражаться

регулярными и однозначными функциями. При обходе вокруг каждой особой точки a_s это решение умножится на некоторую квадратную таблицу чисел C_s. Обратный обход приведет к умножению на таблицу C_s^{-1}, обратную C_s в обычном смысле слова, каким обычно пользуются в алгебре. При любом аналитическом продолжении с возвращением в исходную точку, которое равносильно нескольким обходам вокруг различных точек a_s в различных направлениях, мы получим решение $(y_1, \dots, y_n)$, умноженное последовательно на таблицы C_s или C_s^{-1}. В этом смысле говорят, что таблицы C_s образуют группу монодромии уравнения (1). Очевидно, что эти таблицы характеризуют многозначность взятого решения. Кроме многозначности, решение может иметь в особых точках a_s и однозначную существенную особенность. В выражении (4), построенном Пуанкаре, эта особенность заключается в множителе $e^{\frac{\alpha}{z-a}}$. Но, как было уже выше упомянуто, ряд, входящий в это выражение, будет расходящимся, и таким образом решение Пуанкаре, строго говоря, не может характеризовать ни разветвления, ни существенной особенности на плоскости комплексного переменного вблизи особой точки. В предыдущем мы коснулись двух основных проблем: проблемы представления решения вблизи особой точки уравнения и проблемы построения таблиц, производящих группу монодромии. К этому надо присоединить еще основную задачу о построении генерального представления решения уравнения (1), т. е. о таком представлении решения, которое бы годилось при любом аналитическом продолжении этого решения. Кроме того, самим Пуанкаре была поставлена задача о характере зависимости группы уравнения от тех параметров, которые входят в коэффициенты уравнения. Все упомянутые проблемы суть так называемые прямые проблемы теории дифференциальных уравнений. К ним надо добавить еще и основную обратную проблему, поставленную Риманом. В этой последней проблеме вопрос идет об определении системы функций по заданным разветвлениям этих функций в заданных точках плоскости. На языке линейных уравнений вопрос сводится к построению дифференциального уравнения по заданной его группе монодромии и при заданных особых точках. Эта обратная задача представляет еще бо́льшие трудности, чем упомянутые выше прямые задачи.

До работ И. А. Лаппо-Данилевского указанные выше прямые задачи не имели полного и отчетливого решения. В большинстве случаев дело сводилось лишь к некоторой характеристике искомых функций или к указанию на тот путь, который принципиально, но не в явной форме, дает решение задачи. Что же касается обратной задачи, то здесь были даны лишь теоремы, устанавливающие существование решения у обратной задачи. Несмотря на такое неполное решение даже основных задач теории, к началу XX века замечается некоторое охлаждение интереса к теории линейных уравнений. Старые методы кажутся уже вполне исчерпанными, и назревает необходимость создать какой-то существенно новый метод, который позволил бы продвинуться вперед и оживил бы всю теорию. Таким поворотным пунктом в теории линейных дифференциальных уравнений и явились замечательные работы покойного И. А. Лаппо-Данилевского. Он рассматривал случай систем линейных уравнений первого порядка, что является более общим случаем по сравнению с одним уравнением n-го порядка. Такая система может быть записана в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dz} &= p_{11}(z)y_1+p_{21}(z)y_2+\dots+p_{n1}(z)y_n;\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{dy_n}{dz} &= p_{1n}(z)y_1+p_{2n}(z)y_2+\dots+p_{nn}(z)y_n, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — искомые функции и $p_{iv}(z)$ — заданные коэффициенты. В данном случае решение системы (6) будет представляться совокупностью n^2 линейно независимых решений

$$\left.\begin{array}{l} y_{11}(z),\ y_{12}(z),\ \ldots,\ y_{1n}(z); \\ y_{21}(z),\ y_{22}(z),\ \ldots,\ y_{2n}(z); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n1}(z),\ y_{n2}(z),\ \ldots,\ y_{nn}(z). \end{array}\right\} \qquad (7)$$

В этой таблице первый значок указывает на номер решения, а второй — на номер функции. Коэффициенты системы (6) так же образуют квадратную таблицу. Основной идеей И. А. Лаппо-Данилевского было применить к исследованию систем уравнений обобщенную теорию функций, в которой аргументом функции и ее значением является не число, а квадратная таблица. Возможность такого обобщения была связана с тем фактом, что аналитическая функция одной или нескольких комплексных переменных может быть представлена, по крайней мере в некоторой области, степенным рядом, который содержит только действия сложения и умножения. Эти действия, как хорошо известные из алгебры, легко переносятся и на квадратные таблицы. Это обстоятельство непосредственно позволяет строить степенные ряды от одной или нескольких таблиц. Основой теории функций таблиц и являются такие степенные ряды от таблиц с численными коэффициентами. В напечатанной ниже речи, произнесенной И. А. Лаппо-Данилевским при защите его диссертации, ясно формулируются те задачи, которые он себе ставил, и те новые результаты, которые ему удалось получить. Эта речь была произнесена им за два года до его смерти, и эти последние два года его жизни, полные напряженной творческой работы, привели к новым результатам, не упомянутым в его речи. Прежде всего, им был получен целый ряд новых результатов в общей теории функций от матриц, и была блестяще решена задача о представлении решения системы линейных уравнений вблизи особой точки, которая является полюсом любого порядка для коэффициентов уравнений. Кроме того, он проводил и обширные исследования в направлении дальнейшего развития работ по теории систем уравнений с любыми рациональными коэффициентами и связал эту теорию с теорией интегральных уравнений.

Необычайным был творческий путь покойного. Впервые я видел его еще совсем юным гимназистом. Он поразил меня тогда своим глубоким математическим образованием, горячим стремлением к творческой работе и необыкновенной общностью тех проблем, которые он себе ставил. Надо заметить, что все эти проблемы, о которых я тогда от него слышал, были совершенно того же характера, какие потом, чуть не 20 лет спустя, ему удалось воплотить в жизнь в своих замечательных работах. Долгое время его попытки в области самостоятельной работы не имели результатов. В 1914 г. он поступил в университет, но вскоре заболел и совсем отошел от занятий математикой. Но повидимому где-то в глубине его никогда не затухал живой интерес к тем математическим проблемам, о которых он думал, будучи еще мальчиком. В 1916 г. И. А. был лишен возможности продолжать образование вследствие обострения болезни, только в 1922 г. он начал опять заниматься математикой. В 1924 г. был восстановлен в качестве студента ЛГУ, окончил его в 1925 г. и после окончания был оставлен при университете. В начале его оставления при университете им была написана работа об алгорифмическом определении алгебраической функции по заданному характеру ее разветвлений в заданных точках. В этой работе указанная задача была приведена к интегральным уравнениям. Но работа не удовлетворила автора и осталась ненапечатанной. С 1927 г. И. А. начал заниматься общей теорией функций, определяемых линейными уравнениями с рациональными коэффициентами, и с этого времени непрерывно появляется целый ряд его работ, выдвинувших его в первые ряды математических исследователей. В 1929 г. он блестяще защитил свою диссертацию. С осени этого же года он читал в университете специальный курс, посвященный изложению своей собственной теории. Осенью 1930 г. он уехал за границу, получив Рокфеллеровскую стипендию, и там умер 15 марта 1931 г., в Гиссене. Последние годы его жизни, вплоть до самой смерти, были полны интенсивной творческой работы. После смерти И. А. осталось громадное количество рукописей, содержащих весьма ценный и нигде не опубликованный материал. В настоящее время эти рукописи в переработанном для печати виде будут издаваться Академией наук.

В Институте математики и механики при Ленинградском государственном университете в течение 1932 г. проводился специальный семинарий по работам И. А. Лаппо-Данилевского как в отношении общей теории функций матриц, так и в отношении приложения этой теории к исследованию системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами в том простейшем случае, когда эти коэффициенты имеют лишь простые полюсы на конечном расстоянии и обращаются в нуль на бесконечности (регулярные системы). Предлагаемый сборник и представляет собою в некоторой своей части результат работы этого семинария. В нем изложены в возможно компактной форме работы И. А. Лаппо-Данилевского по общей теории функций матриц постольку, поскольку она нужна для исследования систем линейных дифференциальных уравнений, а также его работы по исследованию систем уравнений в упомянутом выше частном случае. Изложение общей теории функций матриц, требующее весьма существенных разъяснений и дополнений, было сделано проф. Н. Е. Кочиным, а первая глава второй части, содержащая теорию линейных дифференциальных уравнений, изложена старшим научным сотрудником Института В. И. Крыловым. В качестве второй главы второй части присоединено изложение ненапечатанной еще работы И. А. по исследованию систем уравнений вблизи особой точки, которая является полюсом любого порядка для коэффициентов. Эта часть работы была подготовлена для печати мною.

В. Смирнов

10 мая 1933 г.

РЕЧЬ, ПРОИЗНЕСЕННАЯ И. А. ЛАППО-ДАНИЛЕВСКИМ НА ЗАЩИТЕ ЕГО ДИССЕРТАЦИИ 5 АПРЕЛЯ 1929 ГОДА.

Основной, общей задачей всех моих работ является исследование функций, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Этот обширный класс функций, в частности заключающий в себе все алгебраические функции, в общей классификации аналитических функций логически непосредственно следует за классом рациональных функций. Последнее обстоятельство и обусловливает фундаментальное значение функций указанного класса как в чистой математике, так и в приложениях ее к естествознанию.

Построение теории рассматриваемого класса функций определяется основными фактами. С точки зрения теории дифференциальных уравнений исследуемые функции составляют решение систем линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Системы решений всякой указанной системы дифференциальных уравнений суть квадратные таблицы функций, каждая строка которых дает отдельное решение. Функции, образующие эти таблицы, зависят: 1) от независимого комплексного переменного, 2) от параметров, определяющих конфигурацию особых точек, и 3) от коэффициентов системы дифференциальных уравнений, составляющих в свою очередь квадратные таблицы чисел. Эти таблицы коэффициентов и конфигурация особых точек и определяют исходную систему дифференциальных уравнений.

С точки зрения теории функций комплексного переменного, исследуемые функции суть многозначные аналитические функции, голоморфные на всей плоскости аргумента, за исключением каждый раз конечного числа особых точек. В этих точках упомянутые функции имеют, вообще говоря, смешанного типа особенности, содержащие: 1) моменты разветвления и 2) момент существенной однозначной особенности.

Сопоставляя указанные две точки зрения, приходим к нижеследующей формулировке основных задач теории рассматриваемого класса функций:

I. П р я м ы е   з а д а ч и: дана система линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами, т. е. дана конфигурация особых точек и таблицы коэффициентов системы. Требуется: 1) построить генеральное аналитическое представление некоторой таблицы ее решений, т. е. такое аналитическое выражение, которое представляло бы упомянутые решения во всей области их существования на плоскости аргумента и выявляло бы характер их зависимости от коэффициентов системы и конфигурации ее особых точек; 2) дать полную аналитическую характеристику особенностей указанных решений в каждой особой точке системы.

Как известно, при обходе независимым переменным особой точки системы таблица ее решений претерпевает линейное преобразование. Коэффициенты этих преобразований составляют новые квадратные таблицы чисел, определяющие разветвление таблицы решений в каждой особой точке и производящие группу монодромии системы. Построение явных аналитических выражений для таблиц, производящих группу монодромии, составляет существенный частный случай второй задачи о полной аналитической характеристике решений.

Общее решение этой последней задачи, как выяснится из дальнейшего, введет в рассмотрение еще одну четвертую категорию квадратных таблиц чисел: характеристические таблицы в каждой особой точке.

Таким образом анализ прямых задач сводится в существенной части к исследованию зависимости таблицы решений, таблиц, производящих группу монодромии, и характеристических таблиц от таблиц коэффициентов данной системы дифференциальных уравнений.

Упомянутые прямые задачи суть очевидно: 1) общая задача об интегрировании системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами и 2) задача об исследовании особенностей системы решений. Эти основные задачи аналитической теории дифференциальных уравнений были предметом многочисленных исследований Римана, Фукса, Фробениуса, Пуанкаре, Миттаг-Леффлера, фон-Коха и многих других. Основные результаты упомянутых исследований свелись однако: 1) к построению локальных аналитических представлений решения, годных лишь в некоторой конечной части плоскости комплексного переменного, и 2) к указанию некоторых свойств зависимости таблиц, производящих группу монодромии, от коэффициентов системы. Небезинтересно отметить, что все упомянутые исследования относятся ко второй половине прошлого столетия и что первая четверть настоящего столетия ознаменовалась некоторым застоем в этой области.

Для полного представления решения во всей области его существования необходим целый ряд упомянутых локальных представлений, порождаемых одно другим, посредством принципа аналитического продолжения. Характер зависимости решений от коэффициентов системы и конфигурации особых точек остается при этом совершенно невыясненным. Задача о построении генерального аналитического представления решения, годного во всей области его существования, объединяющего все локальные представления и выясняющего характер зависимости решения от коэффициентов уравнения и конфигурации особых точек, до сих пор не была решена, хотя совершенно определенно ставилась уже со времени Пуанкаре. Равным образом оставалась нерешенной поставленная тем же Пуанкаре задача о явном аналитическом представлении таблиц, производящих группу монодромии. Задача о полной аналитической характеристике особенностей решения отчетливо до сего времени не формулировалась. Мною решены все эти прямые задачи.

II. О б р а т н а я   з а д а ч а есть задача о построении таблицы функций рассматриваемого класса, имеющей данного типа особенности в данных точках и о восстановлении системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами, которой она удовлетворяет. Эта основная общая задача теории функций комплексного переменного в исследуемом классе функций ставится мною впервые и содержит в себе, как частный случай, классическую задачу Римана о построении регулярной таблицы функций, претерпевающей данные линейные преобразования при обходе независимой переменной данных особых точек. Последняя задача сводится к исследованию зависимости таблицы решений регулярной системы дифференциальных уравнений и таблицы коэффициентов этой системы от данных таблиц, производящих группу монодромии. Доказательства существования решений классической задачи Римана были даны Гильбертом, Племель и Биркхоффом. Методы, которыми пользуются упомянутые авторы, существенно зависят однако от некоторых не аналитических функций. Вопрос о построении аналитического алгорифма, дающего явное решение этой задачи, т. е. вопрос о том, какие аналитические операции следует выполнить над данными величинами, чтобы в действительности построить искомое оставался совершенно открытым. Мною найден аналитический алгорифм дающий полное явное решение классической задачи Римана. Анализ моей общей обратной задачи сводится в существенной части к исследованию зависимости таблицы решений и таблиц коэффициентов систем дифференциальных уравнений от данных характеристических таблиц. Я построил алгорифмическое решение этой общей обратной задачи в предположении, что элементы заданных характеристических таблиц близки к нулю.

Все перечисленные результаты я получил, пользуясь новым, мною построенным методом. Основная идея этого метода заключается в следующем: как я уже упоминал, все прямые задачи сводятся в сущности к исследованию зависимости таблицы решений, таблиц, производящих группу монодромии, и характеристических таблиц от таблиц коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений. Обратные задачи — к исследованию зависимости таблицы решений и таблиц коэффициентов системы дифференциальных уравнений от таблиц, производящих группу монодромии, или от характеристических таблиц. Таким образом логическим основанием анализа всех этих задач является понятие функциональной зависимости в области таблиц. Некоторый намек на теорию функций таблиц мы встречаем у Вейра (1887) и Шлезингера (1922). Вейр рассматривал степенные ряды одной переменной таблицы с точки зрения теории гиперкомплексных чисел и дал условие их сходимости. Шлезингер рассматривал степенной ряд одной переменной таблицы, состоящей из четырех элементов, представляющий функцию e^X, где X есть таблица, и пользовался этим лишь для упрощения в формулах аналитической теории дифференциальных уравнений, известных еще со времен Фукса. Упомянутые исследования никак нельзя назвать даже началом теории аналитических функций от таблиц, ибо в основе указанной теории лежит не ряд степеней одной переменной таблицы, а ряд композиций нескольких переменных таблиц, так как только в последнем случае выявляется характернейшая особенность этого нового исчисления — некоммутативность композиции, соответствующей умножению. Замечу между прочим, что если бы композиция таблиц была коммутативна, то все упомянутые выше прямые и обратные задачи допускали бы совершенно элементарное решение в конечном виде. Я дал формулы этих конечных решений, которые имеют место в том случае, когда данная таблица коэффициентов системы дифференциальных уравнений или данные таблицы, производящие группу монодромии, или данные характеристические таблицы составляют коммутативные системы. Как это ни странно, но до сих пор указанные конечные решения известны не были. Возвращаясь к моему методу, я должен сказать, что я построил до сего времени не существовавший аппарат теории аналитических функций таблиц, являющийся обобщением обычной Вейерштрассовой теории функций комплексных переменных. В обычной теории функций значения функций и аргументов суть числа. В моей новой теории функций таблиц значениями функций и аргументов являются квадратные таблицы чисел. Степенному ряду численных аргументов здесь соответствует ряд композиций аргументов таблиц, определяющий в области его сходимости аналитическую голоморфную функцию этих таблиц. Я даю основные положения исчисления таких рядов композиций, положение о подстановке ряда в ряд и положение об обращении рядов. Я рассматриваю аналитические функции от таблиц: целые, мероморфные, функции, имеющие изолированные существенные особенности, и функции многозначные.

Применение описанного метода дает прежде всего полное алгорифмическое решение всех прямых задач. Таблица решений данной системы линейных дифференциальных уравнений, определенная начальными условиями в любой не особой точке, оказывается целой функцией таблиц коэффициентов и представляется рядом композиций этих таблиц. Коэффициенты указанного ряда композиций суть многозначные аналитические функции от текущей переменной и от конфигурации особых точек, которые определяются

простой итерацией интегралов. Если исходная система дифференциальных уравнений регулярна, то эти коэффициенты суть функции, имеющие логарифмического типа особенности в особых точках и названные мной гиперлогарифмами. В общем случае коэффициенты рассматриваемого ряда композиций суть линейные комбинации гиперлогарифмов с рациональными функциями и имеют полярно-логарифмические особенности в особых точках. Построенный таким образом ряд композиций представляет таблицы решений во всей области ее существования на плоскости аргумента при всех значениях коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений и для всех конфигураций особых точек. Кроме того, это представление вскрывает характер зависимости таблицы решений не только от текущей переменной, но и от коэффициентов системы и от конфигурации особых точек. Таким образом, рассматриваемый ряд композиций есть действительно требуемое генеральное представление таблицы решений произвольной заданной системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами.

Таблицы, производящие группы монодромии, оказываются также целыми функциями таблиц коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений и допускают аналогичное по общности генеральное представление в виде ряда композиций этих таблиц коэффициентов с коэффициентами, зависящими исключительно от конфигурации особых точек и определенными так же простой итерацией интегралов. Отметим также, что ряды композиций, представляющие таблицу решений и таблицы, производящие группу монодромии, обладают весьма высокой сходимостью — они имеют сходимость ряда для e^X, где X — переменная таблица. Это явление весьма существенно для приложений.

Таблицы, производящие группу монодромии, характеризуют лишь разветвление таблицы решений в особых точках. Если исходная система дифференциальных уравнений регулярна в смысле Фукса, то полная аналитическая характеристика особенностей решения в этих точках достигается введением показательных таблиц. Показательная таблица в особой точке a есть некоторое значение логарифма соответствующей таблицы из группы монодромии. Таблица решений распадается на два компонента: первый компонент есть $(x-a)$ в степени показательной таблицы, а второй компонент есть таблица голоморфных около $x=a$ функций с определителем, не обращающимся в нуль в этой точке. Таким образом показательные таблицы характеризуют не только разветвление решения, но и его полярность, равно как и несущественную особенность. Я доказал, что показательные таблицы суть мероморфные функции от таблиц коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений, и дал генеральное аналитическое представление этих таблиц в виде частного двух целых функций.

В общем случае иррегулярности исходной системы дифференциальных уравнений исследование генерального представления таблицы решений вблизи какой-нибудь особой точки $x=a$ приводит к декомпозиции этой таблицы на два компонента: первый элементарный компонент представляет собою таблицу решений некоторой элементарной вспомогательной системы дифференциальных уравнений, регулярной в смысле Фукса на бесконечности и имеющей лишь одну особую точку $x=a$ на конечном расстоянии. С такой точки зрения этот элементарный компонент может быть рассматриваем как таблица, состоящая из обобщенных функций Бесселя. Второй компонент есть таблица функций, голоморфных в окрестности точки. Эта декомпозиция дает возможность охарактеризовать особенность исходной таблицы решений в точке $x=a$, посредством упомянутой элементарной системы дифференциальных уравнений с единственной особой точкой $x=a$ на конечном расстоянии. Таблицы коэффициентов указанной элементарной системы и составляют характеристические таблицы исходной системы в точке $x=a$. Первая из этих таблиц есть показательная таблица, являющаяся некоторым значением логарифма соответствующей таблицы, принадлежащей группе монодромии. В случае регулярности системы уравнений в точке $x=a$, она и есть единственная характеристическая таблица в этой точке. Она определяет полностью разветвление решения в рассматриваемой точке. Все последующие характеристические таблицы не оказывают никакого влияния на разветвление и характеризуют момент однозначной существенной особенности решения. Рассматриваемый элементарный компонент распадается в свою очередь на два компонента: первый компонент есть $(x-a)$ в степени соответствующей показательной таблицы, характеризующей разветвление таблицы решения, а второй компонент имеет генеральное представление в виде ряда, расположенного по отрицательным степеням $(x-a)$, и определяет момент однозначной существенной особенности в точке $x=a$. Характеристические таблицы оказываются голоморфными функциями от таблиц коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений в окрестности нулевых значений этих коэффициентов и в этой окрестности представляются рядами композиций таблиц коэффициентов. Исследование характеристических таблиц как функций таблиц коэффициентов вне окрестности их нулевых значений не входит в состав работ, представленных к защите. Однако в настоящее время я имею основание утверждать, что характеристические таблицы суть мероморфные функции от таблиц коэффициентов и представимы в виде частного двух целых функций во всей области их существования. Декомпозиция таблицы решений исходной системы дифференциальных уравнений на элементарный и голоморфный компоненты и введение характеристических таблиц, очевидно, разрешают задачу о полной аналитической характеристике особенностей решений данной системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами.

Моя основная обратная задача, как я уже упоминал, заключается в построении таблицы решений, имеющей данного типа особенности в данных точках и в восстановлении соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Мое исследование прямых задач показало, что тип особенностей таблицы решений в некоторой точке $x=a$ вполне определяется системой характеристических таблиц, как тип особенности элементарного компонента, представляющего собою таблицу решений элементарной системы дифференциальных уравнений с единственной особой точкой $x=a$ на конечном расстоянии. Таким образом, основная обратная задача сводится к определению таблиц коэффициентов системы дифференциальных уравнений и таблиц решений, как функций от характеристических таблиц в данных особых точках. Оказывается, что таблицы коэффициентов системы дифференциальных уравнений, равно как и таблица решений, суть голоморфные функции от характеристических таблиц в окрестности нулевых значений этих таблиц и представляются в упомянутой окрестности рядом композиций характеристических таблиц. Эти ряды получаются посредством обращения рядов композиций, представляющих характеристические таблицы, как функции таблиц коэффициентов и посредством подстановки найденных таблиц коэффициентов в упомянутые выше представления таблиц решений через таблицы коэффициентов. Таким образом я получаю алгорифмическое решение моей общей обратной задачи, если характеристические таблицы заданы в окрестности нулевых значений.

Полное алгорифмическое решение классической задачи Римана я даю посредством обращения мероморфных функций, представляющих показательные таблицы, как функции от таблиц коэффициентов регулярной системы линейных дифференциальных уравнений и посредством подстановки найденных значений таблиц коэффициентов в генеральное представление таблицы решений. Если показательные таблицы находятся в окрестности нулевых значений, то таблицы коэффициентов и таблица решений представляются рядом композиций показательных таблиц. В общем случае обращение достигается аналитическим алгорифмом последовательных приближений, и таблицы коэффициентов системы дифференциальных уравнений, равно как и таблица решений, представляются рядом мероморфных функций от показательных таблиц. Заменяя в этих выражениях показательные таблицы логарифмами данных таблиц, производящих группу монодромии, я получаю полное алгорифмическое решение классической задачи Римана.

Резюмируя все сказанное, я утверждаю, что мною построена теория аналитических функций от таблиц, пользуясь которой я получил нижеследующие, до сего времени неизвестные результаты:

1. Алгорифмическое решение прямых задач о построении генерального представления таблицы решений данной системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами и решение задачи об аналитической характеристике особенностей этой таблицы.

2. Постановка общей обратной задачи о построении таблицы решений, имеющих данного типа особенности в данных точках и о восстановлении соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами.

3. Алгорифмическое решение этой общей обратной задачи при упомянутых выше условиях относительно систем характеристических таблиц.

4. Полное алгорифмическое решение классической задачи Римана.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Основные определения и обозначения. При изучении линейных дифференциальных уравнений весьма полезным орудием является понятие функции от матриц. Поэтому мы дадим в дальнейшем систематическое изложение элементов теории функций от матриц, необходимых для решения общих задач теории линейных дифференциальных уравнений.

Под матрицей порядка n:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

мы понимаем совокупность n^2 ее элементов $a_{kl}=\{A\}_{kl}$, расположенных в определенном порядке, причем элементами матрицы являются, вообще говоря, комплексные числа. Определитель матрицы A, т. е. определитель, составленный из n^2 элементов матрицы, мы будем обозначать через $D(A)$:

$$D(A)=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Матрицу, у которой все элементы одинаковы, так что

$$a_{kl}=a \qquad (k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

будем обозначать через $A=\|a\|$.

Если все элементы матрицы, кроме диагональных, равны нулю, т. е. если

$$a_{kl}=0 \qquad \text{при } k\neq l$$

и

$$a_{kk}=a_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

то такую матрицу будем называть диагональной и будем обозначать через

$$A=[a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n].$$

В частности, к таким матрицам принадлежит единичная матрица $I=[1,\ 1,\ \ldots,1]$, у которой все диагональные элементы равны 1, все же остальные — нулю.

Как будет видно из дальнейшего, всякое комплексное число a естественно трактовать как диагональную матрицу:

$$a=[a,\ a,\ \ldots,a].$$

Пусть имеется система матриц $(s>1)$

$$\Xi_1,\ \Xi_2,\ \ldots,\ \Xi_s$$

Зак. 2151. — Семинарий по исследованиям Лаппо-Данилевского

порядков соответственно $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$. Мы обозначим символом

$$X = [\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s]$$

и назовем квазидиагональной матрицу порядка $n = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_s$, имеющую следующий вид

$$X = [\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s] = \left\| \begin{matrix} \Xi_1, & 0, & \ldots & 0, \\ 0, & \Xi_2, & \ldots & 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots & \Xi_s \end{matrix} \right\|.$$

Рассматривая матрицы одного и того же порядка, мы можем каждую матрицу трактовать как отдельную величину (гиперкомплексное число) и установить правила действий с ними. Две матрицы A и B называются равными: $A = B$ тогда и только тогда, если

$$\{A\}_{kl} = \{B\}_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots n).$$

Сумма двух матриц A и B обозначается $A + B$ и определяется n^2 формулами

$$\{A + B\}_{kl} = \{A\}_{kl} + \{B\}_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Произведение или композиция двух матриц A и B обозначается через AB и определяется n^2 формулами

$$\{AB\}_{kl} = \sum_{s=1}^{n} \{A\}_{ks} \{B\}_{sl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Произведение матриц обладает свойствами ассоциативности и дистрибутивности, но не обладает, вообще говоря, свойством коммутативности:

$$AB \neq BA.$$

Определители двух матриц AB и BA равны между собой и равны произведению определнтелей матриц A и B

$$D(AB) = D(BA) = D(A)\, D(B).$$

Произведение двух матриц может обращаться в нуль, хотя бы обе матрицы были отличны от нуля, например при

$$A = B = \left\| \begin{matrix} 1, & -1 \\ 1, & -1 \end{matrix} \right\|$$

будет

$$AB = 0.$$

Очевидно далее, что операция умножения любой матрицы A на комплексное число ξ, трактуемое как диагональная матрица, коммутативна и дает матрицу с элементами

$$\{\xi A\}_{kl} = \{A\xi\}_{kl} = \xi \{A\}_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

в частности $AI = IA = A$. Отметим еще, что $D(\xi A) = \xi^n D(A)$. Операция перемножения матрицы A на самое себя очевидно коммутативна, поэтому можно говорить о целой степени матрицы A, понимая под A^m произведение m матриц, равных матрице A. При этом можно считать $A^0 = I$, $A^1 = A$. Под обратной матрицей A^{-1} понимают матрицу, удовлетворяющую уравнению

$$AA^{-1} = I. \tag{1}$$

Так как $D(A) \cdot D(A^{-1}) = 1$, то обратная матрица может существовать только в том случае, когда $D(A) \neq 0$. Это условие является и достаточным,

ибо при соблюдении его матрица A^{-1} определяется, и притом единственным образом, как матрица с элементами

$$\{A^{-1}\}_{kl} = \frac{D_{lk}(A)}{D(A)}, \tag{2}$$

где $D_{lk}(A) = \dfrac{\partial D(A)}{\partial a_{lk}}$ есть алгебраическое дополнение элемента a_{lk} определителя $D(A)$. Отметим, что $A^{-1}A = I$ и что, обратно, из этого равенства следует (1). Далее, имеет место формула

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Матрицу $(A^{-1})^m$ мы будем обозначать через A^{-m}.

Пусть имеем две квазидиагональных матрицы одинакового строения:

$$[\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s]$$

и

$$[H_1, H_2, \ldots, H_s],$$

тогда, на основании предыдущих определений, будем иметь следующие формулы:

$$[\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s] + [H_1, H_2, \ldots, H_s] = [\Xi_1 + H_1, \Xi_2 + H_2, \ldots, \Xi_s + H_s], \tag{3}$$

$$[\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s] \cdot [H_1, H_2, \ldots, H_s] = [\Xi_1 H_1, \Xi_2 H_2, \ldots, \Xi_s H_s], \tag{4}$$

$$[\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s]^\nu = [\Xi_1^\nu, \Xi_2^\nu, \ldots, \Xi_s^\nu] \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Последняя формула применима и при ν целом отрицательном, если только получающиеся матрицы имеют смысл.

§ 2. Приведение матриц к каноническому виду. Пусть имеем две матрицы A и B и пусть

$$B = SAS^{-1},$$

где S — некоторая матрица с определителем, отличным от нуля. Из этого равенства тотчас же можно вывести, что

$$A = S^{-1}BS.$$

Если эти равенства имеют место, то матрицы A и B называются подобными матрицами. Говорят также, что матрица B получается из матрицы A при помощи преобразования S (а также, что A получается из B при помощи преобразования S^{-1}). При преобразовании матрицы ее определитель не изменяется:

$$D(SAS^{-1}) = D(A).$$

Преобразование единичной матрицы есть опять единичная матрица

$$SIS^{-1} = I.$$

Преобразование произведения двух матриц равно произведению преобразований этих матриц

$$SABS^{-1} = SAS^{-1} \cdot SBS^{-1} \tag{6}$$

и как следствие отсюда

$$SA^kS^{-1} = (SAS^{-1})^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, -1, -2, \ldots). \tag{7}$$

Отметим, наконец, формулу преобразования одной квазидиагональной матрицы при помощи другой квазидиагональной матрицы:

$$[H_1, H_2, \ldots, H_s]\,[\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s]\,[H_1, H_2, \ldots, H_s]^{-1} = \\ = [H_1\Xi_1 H_1^{-1}, H_2\Xi_2 H_2^{-1}, \ldots, H_s\Xi_s H_s^{-1}]. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь вопрос о приведении данной матрицы A к каноническому виду, т. е. об отыскании матрицы, подобной матрице A и имеющей канонический вид.

На ряду с матрицей A рассмотрим матрицу $A-\xi=A-\xi I$, где комплексное число ξ есть переменный параметр. Определитель этой матрицы

$$D(A-\xi)=\begin{vmatrix} a_{11}-\xi, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\xi, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}-\xi \end{vmatrix}$$

есть полином степени n относительно ξ и называется характеристическим полиномом матрицы A. Уравнение $D(A-\xi)=0$ называется характеристическим уравнением матрицы A, а его корни — характеристическими числами матрицы A. Пусть ξ_1 — одно из характеристических чисел матрицы A, т. е. один из корней уравнения $D(A-\xi)=0$, и пусть λ — кратность этого корня. Следовательно, определитель $D(A-\xi)$ делится на $(\xi-\xi_1)^\lambda$ и не делится на $(\xi-\xi_1)^{\lambda+1}$. Рассмотрим все миноры порядка $n-1$ определителя $D(A-\xi)$ и пусть все они делятся на $(\xi-\xi_1)^{\lambda_1}$ и хоть один из них не делится на $(\xi-\xi_1)^{\lambda_1+1}$; аналогично, пусть $(\xi-\xi_1)^{\lambda_2}$ есть высшая степень бинома $\xi-\xi_1$, на которую делятся все миноры порядка $n-2$ определителя $D(A-\xi)$ и т. д. Пусть наконец $(\xi-\xi_1)^{\lambda_{\nu-1}}$, где $\lambda_{\nu-1}>0$ есть высшая степень бинома $\xi-\xi_1$, делящая все миноры порядка $n-\nu+1$, и пусть хоть один минор порядка $n-\nu$ не делится на $\xi-\xi_1$. Тогда можно доказать, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8, \ldots, \lambda_{\nu-1}$ идут убывая, так что

$$\lambda>\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_{\nu-1}>0.$$

Составим разности

$$\lambda-\lambda_1=\rho_1,\ \lambda_1-\lambda_2=\rho_2, \ldots, \lambda_{\nu-2}-\lambda_{\nu-1}=\rho_{\nu-1},\ \lambda_{\nu-1}=\rho_\nu,$$

так что

$$\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_\nu=\lambda,$$

тогда степени бинома $\xi-\xi_1$:

$$(\xi-\xi_1)^{\rho_1},\ (\xi-\xi_1)^{\rho_2}, \ldots, (\xi-\xi_1)^{\rho_\nu}$$

называются, по Вейерштрассу, элементарными делителями матрицы A, соответствующими характеристическому числу ξ_1.

Найдем элементарные делители для всех без исключения характеристических чисел матрицы A. Изменяя предыдущие обозначения, рассмотрим систему всех элементарных делителей матрицы A

$$(\xi-\xi_1)^{\rho_1},\ (\xi-\xi_2)^{\rho_2}, \ldots, (\xi-\xi_p)^{\rho_p},$$

так что $\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_p=n$, приэтом среди чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ некоторые могут оказаться и равными. Очевидно, что

$$D(\xi-A)=(\xi-\xi_1)^{\rho_1}(\xi-\xi_2)^{\rho_2}\ldots(\xi-\xi_p)^{\rho_p}.$$

Можно доказать, что при преобразовании матрицы A при посредстве S как характеристическое уравнение, так и элементарные делители не меняются, так что характеристические числа и элементарные делители являются инвариантами по отношению к преобразованиям подобия.

Обозначим через $J_\rho(\xi)$ каноническую матрицу порядка ρ с одним переменным параметром ξ:

$$J_\rho(\xi)=\begin{Vmatrix} \xi & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \xi & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \xi & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \xi \end{Vmatrix} \quad (\rho=2, 3, \ldots);$$

$$J_1(\xi)=\xi.$$

Можно доказать, что если известны все характеристические числа матрицы A, то при помощи рациональных операций можно отыскать такую матрицу S с определителем, отличным от нуля, что матрица A окажется равной

$$A=S[J_{\rho_1}(\xi_1),\ J_{\rho_2}(\xi_2), \ldots, J_{\rho_p}(\xi_p)]\ S^{-1}, \tag{9}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ — характеристические числа матрицы A, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ — показатели элементарных делителей этой матрицы. Представление матрицы A в виде (9) и называется приведением ее к каноническому виду.

Матрица S, приводящая матрицу A к каноническому виду, определяется не единственным образом. Можно указать общий вид тех матриц S, которые приводят матрицу A к каноническому виду.

В теории функций от матриц большую роль будут играть матрицы особого вида, для которых мы введем обозначение

$$G_\rho(a_0, a_1, \ldots, a_{\rho-1})=\begin{Vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{1!}a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2!}a_2 & \frac{1}{1!}a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(\rho-1)!}a_{\rho-1} & \frac{1}{(\rho-2)!}a_{\rho-2} & \ldots & \ldots & a_0 \end{Vmatrix} \tag{10}$$

элементы матрицы G_ρ порядка ρ определяются формулами

$$(G_\rho)_{kl}=\left\{\begin{array}{l} 0, \text{ если } k<l, \\ \dfrac{1}{(k-l)!}\,a_{k-l}, \text{ если } k\geqslant l. \end{array}\right\} \tag{11}$$

В качестве примера рассмотрим ν-ю степень матрицы $J_\rho(\xi)$. Мы имеем очевидную формулу

$$J_\rho(\xi)=\xi+J_\rho(0);$$

вводя известные обозначения для биномиальных коэффициентов

$$\binom{\nu}{\mu}=\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)}{1\cdot 2\ldots\mu},\quad \binom{\nu}{0}=1,$$

будем иметь

$$J_\rho^\nu(\xi)=[\xi+J_\rho(0)]^\nu=\xi^\nu+\binom{\nu}{1}\xi^{\nu-1}J_\rho(0)+\binom{\nu}{2}\xi^{\nu-2}J_\rho^2(0)+\ldots+\binom{\nu}{\nu}J_\rho^\nu(0).$$

Вычислим элементы матрицы $J_\rho^\mu(0)$:

$$\{J_\rho^\mu(0)\}_{kl} = \sum_{r_1, r_2, \ldots, r_{\mu-1}}^{(1, 2, \ldots, \rho)} \{J_\rho(0)\}_{kr_1} \{J_\rho(0)\}_{r_1 r_2} \ldots \{J_\rho(0)\}_{r_{\mu-1} l};$$

легко видеть, что

$$\{J_\rho^\mu(0)\}_{kl} = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq l+\mu \\ 1 \text{ при } k = l+\mu \end{cases}$$

и, значит,

$$\{J_\rho^\nu(\xi)\}_{kl} = \begin{cases} 0 \text{ при } k < l \\ \binom{\nu}{k-l} \xi^{\nu-k+l} \text{ при } k \geqslant l. \end{cases}$$

Сама же матрица $J_\rho^\nu(\xi)$ напишется в следующем виде:

$$J_\rho^\nu(\xi) = \begin{Vmatrix} \xi^\nu & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \frac{\nu}{1}\xi^{\nu-1} & \xi^\nu & 0 & \ldots 0 \\ \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2}\xi^{\nu-2} & \frac{\nu}{1}\xi^{\nu-1} & \xi^\nu & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{\nu}{\rho-1}\xi^{\nu-\rho+1} & \binom{\nu}{\rho-2}\xi^{\nu-\rho+2} & \ldots & \xi^\nu \end{Vmatrix} \tag{12}$$

Сравнение с (10) показывает, что

$$J_\rho^\nu(\xi) = G_\rho\left(\xi^\nu, \frac{d\xi^\nu}{d\xi}, \frac{d^2\xi^\nu}{d\xi^2}, \ldots, \frac{d^{\rho-1}\xi^\nu}{d\xi^{\rho-1}}\right). \tag{13}$$

Отметим одно очевидное свойство матрицы $G_\rho(a_0, a_1, \ldots, a_{\rho-1})$, выражающееся формулой

$$G_\rho(a_0, a_1, \ldots, a_{\rho-1}) + G_\rho(b_0, b_1, \ldots, b_{\rho-1}) = \\ = G_\rho(a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_{\rho-1}+b_{\rho-1}). \tag{14}$$

Поставим себе задачу привести к каноническому виду матрицу $G_\rho(a_0, a_1, \ldots, a_{\rho-1})$. Эта матрица имеет единственное характеристическое число a_0 кратности ρ, ибо очевидно, что

$$D(G_\rho - \xi) = (a_0 - \xi)^\rho.$$

Выясним, каковы будут элементарные делители матрицы G_ρ. Взяв алгебраическое дополнение последнего элемента первой строки, получим

$$D_{1\rho}(G_\rho - a_0) = (-1)^{\rho+1} a_1^{\rho-1},$$

откуда следует, что если $a_1 \neq 0$, то $D_{1\rho}(G_\rho - \xi)$ не делится на $\xi - a_0$ и следовательно в этом случае $(\xi - a_0)^\rho$ есть единственный элементарный делитель матрицы G_ρ. Согласно предыдущему матрица G_ρ должна приводиться к следующему каноническому виду:

$$G_\rho(a_0, a_1, \ldots, a_{\rho-1}) = TJ_\rho(a_0)T^{-1}. \tag{15}$$

Для отыскания матрицы T с элементами $\{T\}_{kl} = t_{kl}$ $(k, l = 1, 2, \ldots, \rho)$ умножим обе части равенства (15) справа на T и вычтем затем из левой части $a_0 T$, из правой Ta_0; в результате получим

$$G_\rho(0, a_1, a_2, \ldots, a_{\rho-1})T = TJ_\rho(0).$$

Это матричное равенство эквивалентно следующим ρ^2 равенствам:

$$\frac{1}{(k-1)!}a_{k-1}t_{1l} + \frac{1}{(k-2)!}a_{k-2}t_{2l} + \ldots + \frac{1}{1!}a_1 t_{k-1,l} = t_{k,l+1}, \quad (k, l = 1, 2, \ldots, \rho)$$

причем $t_{k,\rho+1}$ надо считать равными нулю. Эти формулы позволяют последовательно определить элементы каждого столбца матрицы T через элементы предыдущего столбца, при этом элементы первого столбца $t_{11}, t_{21}, \ldots, t_{\rho 1}$ остаются совершенно произвольными. Полагая их все, кроме первого, равными нулю, т. е. полагая

$$t_{11} = 1, \; t_{21} = t_{31} = \ldots = t_{\rho 1} = 0 \tag{16}$$

и обозначая получающуюся при этом выборе произвольных элементов матрицу T через $\mathcal{E}_\rho(a_1, a_2, \ldots, a_{\rho-1})$, легко найдем для элементов матрицы $\mathcal{E}_\rho$ определяющиеся единственным образом выражения

$$\left.\begin{aligned} &\{\mathcal{E}_\rho\}_{k1} = \begin{cases} 1, \text{ если } k = 1 \\ 0, \text{ если } k > 1 \end{cases} \\ &\{\mathcal{E}_\rho\}_{k2} = \frac{1}{(k-1)!}a_{k-1}, \text{ если } k > 1 \quad \{\mathcal{E}_\rho\}_{kl} = 0, \text{ если } l > k, \\ &\{\mathcal{E}_\rho\}_{kk} = a_1^{k-1}, \; \{\mathcal{E}_\rho\}_{kl} = \frac{a_{k-l+1}}{(k-l+1)!}\{\mathcal{E}_\rho\}_{l-1; l-1} + \\ &+ \frac{a_{k-l}}{(k-l)!}\{\mathcal{E}_\rho\}_{l, l-1} + \ldots + \frac{a_1}{1}\{\mathcal{E}_\rho\}_{k-1, l-1}, \text{ если } k > l > 2. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Таким образом

$$\mathcal{E}_\rho(a_1, a_2, \ldots, a_{\rho-1}) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & a_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \frac{1}{2!}a_2 & a_1^2 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \frac{1}{(\rho-1)!}a_{\rho-1} & \{\mathcal{E}_\rho\}_{\rho 3} \ldots a_1^{\rho-1} \end{Vmatrix} \tag{18}$$

Итак, при условии, что $a_1 \neq 0$ мы имеем следующее приведение матрицы $G_\rho(a_0, a_1, \ldots, a_{\rho-1})$ к каноническому виду:

$$G_\rho(a_0, a_1, \ldots, a_{\rho-1}) = \mathcal{E}_\rho(a_1, \ldots, a_{\rho-1}) J_\rho(a_0) \mathcal{E}_\rho^{-1}(a_1, \ldots, a_{\rho-1}), \tag{19}$$

причем это приведение выполняется единственным образом, если требовать соблюдения условий (16).

В случае $a_1 = 0$ элементарных делителей матрицы $G_\rho(a_0, a_1, \ldots, a_{\rho-1})$ будет по крайней мере два и вид канонического приведения изменяется.

ГЛАВА I

ФУНКЦИИ ОТ ОДНОЙ МАТРИЦЫ

§ 3. Аналитическая функция от матрицы. В дальнейшем нам часто придется пользоваться следующими обозначениями. Если дана матрица X, то символ $|X|$ будет обозначать матрицу, элементами которой являются модули соответствующих элементов матрицы X:

$$\{|X|\}_{kl} = |\{X\}_{kl}| \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Условимся далее в обозначении неравенства. Неравенство между двумя матрицами

$$|X| < Y$$

мы будем считать эквивалентным n^2 неравенствам

$$\{|X|\}_{kl} < \{Y\}_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Рассмотрим бесконечную последовательность матриц X_μ $(\mu = 1, 2, \ldots)$. Матрица X называется пределом матрицы X_μ

$$X = \lim_{\mu \to \infty} X_\mu,$$

если при любом заданном положительном ε выполняется для всех достаточно больших μ неравенство

$$|X - X_\mu| < \|\varepsilon\|.$$

Матрица X называется суммой бесконечного ряда матриц, что означается знакоположением

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu + \ldots = \sum_{\nu=1}^{\infty} X_\nu, \tag{20}$$

если существует предел

$$\lim_{\mu \to \infty} \sum_{\nu=1}^{\mu} X_\nu$$

и если этот предел равен матрице X. В этом случае говорят, что ряд матриц сходится. Равенство (20) эквивалентно n^2 равенствам

$$\{X\}_{kl} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \{X_\nu\}_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Окрестностью матрицы X_0 мы будем называть совокупность матриц X, удовлетворяющих условию

$$|X - X_0| < \|\varepsilon\|,$$

где ε — некоторое положительное число.

Пусть теперь X обозначает некоторую переменную матрицу и пусть имеем ряд численных коэффициентов α_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим бесконечный ряд матриц

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu X^\nu. \tag{21}$$

Мы будем называть этот ряд абсолютно сходящимся в том случае, если сходится ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha_\nu| \, |X|^\nu. \tag{22}$$

Очевидно, что если ряд матриц сходится абсолютно, то он сходится и в обычном смысле слова.

Дадим достаточный признак абсолютной сходимости ряда от одной матрицы. Отметим предварительно, что из сходимости ряда (21) в некоторой окрестности $|X| < \|R\|$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \xi^\nu$ в круге $|\xi| < R$ (достаточно принять $X = \xi I$).

Теорема 1. *Если степенной ряд от комплексной переменной* ξ

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \xi^\nu \tag{23}$$

сходится в круге $|\xi| < n\rho$, *то ряд*

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu X^\nu \tag{24}$$

сходится абсолютно в области $|X| < \|\rho\|$.

Доказательство. Пусть $|X| < \|\rho'\|$, где $0 < \rho' < \rho$, тогда очевидно в силу равенств

$$\|\rho\|^2 = \|n\rho^2\|, \ldots, \|\rho\|^\nu = \|n^{\nu-1}\rho^\nu\|$$

будем иметь

$$|X|^2 < \|\rho'\|^2 = \|n\rho'^2\|, \ldots, |X|^\nu < \|\rho'\|^\nu = \|n^{\nu-1}\rho'^\nu\|$$

и следовательно

$$|\alpha_\nu| \, |X|^\nu < \| |\alpha_\nu| n^{\nu-1} \rho'^\nu \|.$$

Но по условию ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |\alpha_\nu| n^{\nu-1} \rho'^\nu$ сходится, следовательно ряд $f(X)$ сходится абсолютно в любой окрестности $|X| < \|\rho'\|$, т. е. сходится абсолютно в окрестности $|X| < \|\rho\|$, что и требовалось доказать.

Замечание. Если ρn есть как раз радиус сходимости ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \xi^\nu$$

и если взять $X = \|\rho + \varepsilon\|$, то ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |\alpha_\nu| X^\nu$ будет очевидно расходящимся.

Рассмотрим теперь ряд

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \xi^\nu \tag{23}$$

и допустим, что он сходится при любом конечном ξ, т. е. что этот ряд есть ряд Маклорена целой функции от ξ. В этом случае, на основании только что доказанной теоремы, ряд от матрицы X

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu X^\nu \tag{24}$$

будет абсолютно сходящимся в любой окрестности $|X| < \|\rho\|$. Мы будем говорить в этом случае, что сумма ряда (24) есть целая функция от матрицы X.

Элементы матрицы $f(X)$ являются очевидно функциями от коэффициентов α_ν и от элементов $\{X\}_{kl}$ рассматриваемой матрицы:

$$\left.\begin{array}{c}\{f(X)\}_{kl}=\alpha_0\,\delta_k^l+\alpha_1\{X\}_{kl}+\sum\limits_{\nu=2}^{\infty}\alpha_\nu\sum\limits_{j_1,j_2,\ldots,j_{\nu-1}}^{(1,2,\ldots n)}\{X\}_{kj_1}\{X\}_{j_1j_2}\ldots\{X\}_{j_{\nu-1}l}\\ (k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\end{array}\right\}\tag{25}$$

где δ_k^l означает 1, если $k=l$ и 0, если $k\neq l$, значки же $j_1, j_2, \ldots, j_{\nu-1}$ пробегают независимо друг от друга все целые значения от 1 до n, и суммирование производится по всем этим значкам.

В рассматриваемом случае целой функции матрицы n^2 рядов (25), рассматриваемых как ряды Тэйлора от n^2 переменных $\{X\}_{kl}$, сходятся для любых конечных значений этих переменных, т. е. элементы целой функции от матрицы X суть целые функции от элементов матрицы X. Нужно отметить однако, что ряды (25) суть ряды частного вида, так что не всякая матрица, элементы которой суть целые функции от $\{X\}_{kl}$, может рассматриваться, как целая функция от матрицы X.

Другой крайний случай, когда ряд (23) сходится только при $\xi=0$ и расходится при любом другом ξ, мы рассматривать не будем, так как в этом случае согласно замечанию, сделанному после теоремы, ряд (24) не может сходиться ни в одной окрестности

$$|X|<\|\varepsilon\|.$$

Рассмотрим наконец случай, когда ряд (23) имеет конечный радиус сходимости $n\rho$. В этом случае мы знаем, что ряд

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu \tag{24}$$

сходится абсолютно в окрестности

$$|X|<\|\rho\|.$$

В следующем параграфе мы докажем, что ряд (24) сходится для всех тех матриц X, коих все характеристические числа лежат внутри круга $|\xi|<n\rho$ и расходится для всех тех матриц X, у коих хоть одно из характеристических чисел лежит вне этого круга.

Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|\alpha_\nu|\,|X|^\nu \tag{26}$$

сходится в том случае, если все характеристические числа матрицы $|X|$ лежат внутри круга $|\xi|<n\rho$, и расходится в том случае, если хоть одно из этих характеристических чисел превосходит по модулю $n\rho$.

Если ряды (25) рассматривать как ряды Маклорена от переменных $\{X\}_{kl}$, то очевидно, что абсолютная сходимость этих n^2 рядов влечет за собой сходимость ряда (26) и обратно. Отметим наконец, что простая сходимость ряда (24) в области

$$|X|<\|R\|$$

влечет за собой абсолютную сходимость того же ряда в той же области.

Дадим теперь определение аналитической функции от матрицы. Если ряд

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu \tag{24}$$

сходится в окрестности

$$|X|<\|\rho\|, \tag{27}$$

то сумма этого ряда называется аналитической функцией от матрицы X, голоморфной в области (27).

Элементами матрицы $f(X)$ являются ряды (25), которые, будучи рассматриваемы как ряды Маклорена от переменных $\{X\}_{kl}$, абсолютно сходятся в области

$$|\{X\}_{kl}|<\rho \qquad (k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{28}$$

Совершая одновременное аналитическое продолжение этих n^2 рядов вдоль некоторого пути, лежащего в пространстве n^2 комплексных переменных $\{X\}_{kl}$ и соединяющего точку $\{X\}_{kl}=0$ с точкой $\{X\}_{kl}=\{X_0\}_{kl}$, где X_0 — фиксированная матрица, мы можем получить новых n^2 рядов Тэйлора, расположенных по степеням n^2 переменных

$$\{X\}_{kl}-\{X_0\}_{kl}$$

и абсолютно сходящихся в области

$$|\{X\}_{kl}-\{X_0\}_{kl}|<\rho_1 \qquad (k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Про матрицу, элементами которой являются только-что полученные n^2 рядов Тэйлора, мы будем говорить, что она получена аналитическим продолжением функции $f(X)$ вдоль некоторого пути в пространстве матрицы X и что эта матрица есть аналитический элемент функции $f(X)$, голоморфный в области

$$|X-X_0|<\|\rho_1\|.$$

Под аналитической функцией от матрицы мы будем понимать функцию от матрицы, определяемую всеми аналитическими элементами, которые могут быть получены аналитическим продолжением ряда (24), сходящегося в некоторой окрестности (27). В дальнейшем будет показано, что если ряд (24) сходится в некоторой области, то сумма этого ряда есть в этой области аналитический элемент функции $f(X)$. Таким образом, ряд (24) представляет аналитическую функцию от матрицы X во всей той открытой области, где этот ряд сходится.

Формальные вычисления со степенными рядами от одной матрицы совершенно аналогичны вычислениям со степенными рядами от одной комплексной переменной. В частности имеет место теорема единственности, т. е. из равенства двух рядов от одной и той же матрицы

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_\nu X^\nu$$

в некоторой окрестности нулевой матрицы следует равенство соответствующих коэффициентов обоих рядов $\alpha_\nu=\beta_\nu$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots)$. Пусть далее имеем два степенных ряда

$$\eta=F(\xi)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\,\xi^\nu,$$

$$\zeta=G(\eta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_\nu\,\eta^\nu$$

и пусть результат подстановки во второй ряд вместо η его выражения приводит нас к третьему степенному ряду

$$\zeta=G(F(\xi))=H(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\nu\,\xi^\nu.$$

Если далее

$$Y=F(X)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu$$

есть функция матрицы X, голоморфная в области $|X| < \| \rho_1 \|$, а

$$Z = G(Y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu Y^\nu$$

есть функция от матрицы Y, голоморфная в области $|Y| < \| \rho_2 \|$, то очевидно, что ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta_\nu| \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} |\alpha_\mu| \, |X|^\mu \right)^\nu$$

будет сходящимся в достаточно малой окрестности нулевой матрицы. А отсюда вытекает равенство

$$Z = G(F(X)) = H(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu X^\nu,$$

справедливое для некоторой окрестности нулевой матрицы. Точно также справедлива следующая теорема.

Теорема II. *Пусть функции*

$$\varphi_j(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu^{(j)} \xi^\nu, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \quad (29)$$

голоморфные в некоторой окрестности начала координат, тождественно удовлетворяют уравнению

$$G(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots, \varphi_m(\xi)) = 0, \quad (30)$$

где $G(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ *есть целая функция от переменных* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$. *Тогда имеет место тождество*

$$G(\varphi_1(X), \varphi_2(X), \ldots, \varphi_m(X)) \equiv 0, \quad (31)$$

где

$$\varphi_j(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu^{(j)} X^\nu \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \quad (32)$$

суть функции от матрицы X, *голоморфные в некоторой окрестности нулевой матрицы.*

Доказательство. Функция $G(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots, \varphi_m(\xi))$ разлагается в ряд по степеням ξ:

$$G(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots, \varphi_m(\xi)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \xi^\nu,$$

все коэффициенты которого, по условию, тождественно равны нулю: $\beta_\nu = 0$. Но в достаточно малой окрестности нулевой матрицы мы имеем равенство

$$G(\varphi_1(X), \varphi_2(X), \ldots, \varphi_m(X)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu X^\nu.$$

В силу $\beta_\nu = 0$ выводим требуемое равенство

$$G(\varphi_1(X), \varphi_2(X), \ldots, \varphi_m(X)) = 0.$$

Точно также справедлива теорема об обращении ряда от матрицы.

Теорема IIa. *Если*

$$Y = F(X) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu X^\nu$$

есть функция матрицы X, *голоморфная в некоторой окрестности нулевой матрицы, и если* $\alpha_1 \neq 0$, *то существует обратная функция, одна и притом только одна из ветвей которой разлагается в ряд по степеням матрицы* Y, *не содержащий свободного члена*

$$X = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu Y^\nu.$$

В качестве примеров рассмотрим элементарные функции e^X, t^X, $\lg X$, X^t, где t есть комплексное число.

Показательные функции e^X и t^X определяются разложениями:

$$e^X = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} X^\nu, \quad (33)$$

$$t^X = e^{X \lg t} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (X \lg t)^\nu; \quad (34)$$

эти функции очевидно являются целыми.

Под матрицей $Y = \lg X$ разумеется любая матрица Y, удовлетворяющая уравнению $e^Y = X$. В частности из

$$e^Y - I = Y + \frac{Y^2}{2!} + \frac{Y^3}{3!} + \ldots = X - I$$

обращением получаем

$$Y = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (X - I)^\nu;$$

это есть разложение в ряд одной из ветвей логарифмической функции, которую мы будем обозначать через $\mathrm{Lg}\, X$, именно той ветви, которая для $X = I$ приводится к 0. Ряд

$$\mathrm{Lg}\, X = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (X - I)^\nu \quad (35)$$

сходится абсолютно в окрестности $|X - I| < \left\| \frac{1}{n} \right\|$ единичной матрицы, ибо радиус сходимости ряда $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \xi^\nu$ равен 1.

Степенная функция X^t определяется соотношением $X^t = e^{t \lg X}$. Ветвь этой функции, приводящаяся к I для $X = I$, есть функция матрицы X, представляемая абсолютно сходящимся в той же самой окрестности

$$|X - I| < \left\| \frac{1}{n} \right\|$$

единичной матрицы рядом

$$X^t = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t(t-1)\ldots(t-\nu+1)}{\nu!} (X - I)^\nu. \quad (36)$$

§ 4. Представление функций от матриц в конечном виде. Если известны характеристические числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ матрицы X, то вычисление элементов матрицы

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu X^\nu \quad (37)$$

сводится к вычислению значений функции $f(\xi)$ и нескольких ее производных для значений $\xi=\xi_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ независимой переменной.

Рассмотрим сначала частный случай, когда все элементарные делители матрицы X являются простыми (в частности это наверное имеет место, если все характеристические числа матрицы X различны между собой). В этом случае мы имеем следующее каноническое представление матрицы X:

$$X=S[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]S^{-1}, \tag{38}$$

причем элементы матриц S и S^{-1} могут быть рационально выражены через элементы и характеристические числа матрицы X. Для степеней матрицы X получаем соответственно

$$X^\nu=S[\xi_1^\nu, \xi_2^\nu, \ldots, \xi_n^\nu]\, S^{-1} \qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots).$$

Из полученных формул следует, что

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu X^\nu = S[\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \xi_1^\nu, \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \xi_2^\nu, \ldots, \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \xi_n^\nu]\, S^{-1},$$

а отсюда мы выводим следующее заключение: для сходимости ряда (37) необходима и достаточна сходимость ряда

$$f(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \xi^\nu \tag{39}$$

для значений переменной $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. При выполнении этих условий мы имеем равенство

$$f(X)=S[f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)]\, S^{-1}. \tag{40}$$

Если все числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ лежат внутри круга сходимости ряда (39), то ряд (37) очевидно сходится; если же хоть одно из чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ окажется вне круга сходимости ряда (39), то ряд (37) будет расходящимся.

Переходя к рассмотрению общего случая, докажем следующую теорему.

Теорема III. *Пусть матрица X имеет элементарные делители*

$$(\xi-\xi_1)^{\rho_1}, (\xi-\xi_2)^{\rho_2}, \ldots, (\xi-\xi_s)^{\rho_s}$$

и каноническое представление

$$X=S[J_{\rho_1}(\xi_1), J_{\rho_2}(\xi_2), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)]\, S^{-1}, \tag{41}$$

тогда ряд от матрицы X

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu X^\nu \tag{37}$$

сходится тогда и только тогда, если сходятся все ряды

$$f^{(\lambda)}(\xi_k)=\sum_{\nu=\lambda}^{\infty} \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\lambda+1)\,\alpha_\nu\, \xi_k^{\nu-\lambda} \qquad (\lambda=0, 1, 2, \ldots, \rho_{k-1}). \tag{42}$$

В случае сходимости ряда (37) *имеет место представление*

$$f(X)=S[G_{\rho_1}(f(\xi_1), f'(\xi_1), \ldots, f^{(\rho_1-1)}(\xi_1)), \ldots, G_{\rho_s}(f(\xi_s), \ldots, f^{(\rho_s-1)}(\xi_s))]S^{-1}. \tag{43}$$

Доказательство. Для ν-й степени матрицы X мы имеем, очевидно, формулу

$$X^\nu=S[J_{\rho_1}^\nu(\xi_1), J_{\rho_2}^\nu(\xi_2), \ldots, J_{\rho_s}^\nu(\xi_s)]\, S^{-1},$$

являющуюся следствием формул (41), (7) и (5).

Далее в § 2 мы имели выражение для степеней $J_\rho^\nu(\xi)$

$$J_{\rho_i}^\nu(\xi_i)=G_{\rho_i}\left(\xi_i^\nu, \frac{d\xi_i^\nu}{d\xi}, \ldots, \frac{d^{\rho_i-1}\xi_i^\nu}{d\xi_i^{\rho_i-1}}\right) \qquad (i=1, 2, \ldots, s).$$

На основании формулы (14) § 2 мы можем теперь написать

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu X^\nu = S\left[G_{\rho_1}\left(\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \xi_1^\nu, \ldots, \frac{d^{\rho_1-1}\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \xi_1^\nu}{d\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots,\right.$$

$$\left. G_{\rho_s}\left(\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \xi_s^\nu, \ldots, \frac{d^{\rho_s-1}\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \xi_s^\nu}{d\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right]S^{-1}. \tag{44}$$

Из полученной формулы сразу заключаем, что сходимость рядов (42) есть необходимое и достаточное условие сходимости ряда (37). В случае сходимости рядов (42), совершая в формуле (44) предельный переход $m\to\infty$, докажем формулу (43).

Как следствие из доказанной теоремы, получается, что ряд (37) наверное сходится, если все характеристические числа матрицы X лежат внутри круга сходимости ряда $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu \xi^\nu$, и наверное расходится, если хоть одно из этих чисел лежит вне этого круга. В частности, формула (43) дает представление в конечном виде в области

$$|X| < \|\rho\|$$

функции от матрицы X, голоморфной в этой области.

Вспоминая формулу (19) приведения матрицы $G_\rho(a_0, a_1, \ldots, a_{\rho-1})$ при $a_1\neq 0$ к каноническому виду

$$G_\rho(a_0, a_1, \ldots, a_{\rho-1})=\mathcal{E}_\rho(a_1, \ldots, a_{\rho-1})\, J_\rho(a_0)\, \mathcal{E}_\rho^{-1}(a_1, \ldots, a_{\rho-1}),$$

мы легко сможем дать каноническое выражение для матрицы $f(X)$.

Теорема IV. *Если характеристические числа и элементарные делители матрицы X суть*

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s;\ (\xi-\xi_1)^{\rho_1}, (\xi-\xi_2)^{\rho_2}, \ldots, (\xi-\xi_s)^{\rho_s},$$

так что

$$X=S[J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)]\, S^{-1}$$

и если значения функций $f'(\xi_1), \ldots, f'(\xi_s)$ отличны от нуля, то характеристические числа и элементарные делители матрицы

$$f(X)=S[G_{\rho_1}(f(\xi_1), \ldots, f^{(\rho_1-1)}(\xi_1)), \ldots, G_{\rho_s}(f(\xi_s), \ldots, f^{(\rho_s-1)}(\xi_s)]\, S^{-1}$$

будут

$$f(\xi_1), \ldots, f(\xi_s),\ (\eta-f(\xi_1))^{\rho_1}, \ldots, (\eta-f(\xi_s))^{\rho_s}.$$

В самом деле на основании формул (19) и (18) мы можем написать следующее каноническое представление матрицы $f(X)$:

$$f(X)=S[\mathcal{E}_{\rho_1}(f'(\xi_1), \ldots, f^{(\rho_1-1)}(\xi_1)), \ldots, \mathcal{E}_{\rho_s}(f'(\xi_s), \ldots, f^{(\rho_s-1)}(\xi_s))]\,[J_{\rho_1}(f(\xi_1)), \ldots,$$

$$J_{\rho_s}(f(\xi_s))]\,[\mathcal{E}_{\rho_1}(f'(\xi_1), \ldots, f^{(\rho_1-1)}(\xi_1)), \ldots, \mathcal{E}_{\rho_s}(f'(\xi_s), \ldots, f^{(\rho_s-1)}(\xi_s))]^{-1}\, S^{-1}, \tag{45}$$

откуда и следуют все утверждения теоремы.

Если одно из значений функции $f'(\xi_k)$ обратится в нуль, то число элементарных делителей матрицы $f(X)$ увеличивается. В частном случае, когда все элементарные делители матрицы X простые, характеристическими числами матрицы $f(X)$ являются

$$f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n).$$

Рассмотрим частный пример. Пусть

$$\eta = f(\xi) = e^{\xi} - 1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi^{\nu}}{\nu!} \tag{46}$$

и X матрица порядка ρ:

$$X = J_{\rho}(\xi). \tag{47}$$

Тогда общая формула (45) дает

$$J = e^{X} - 1 = \mathcal{E}_{\rho}(e^{\xi}, \ldots, e^{\xi}) J_{\rho}(e^{\xi} - 1) \mathcal{E}_{\rho}^{-1}(e^{\xi}, \ldots, e^{\xi}) =$$
$$= \mathcal{E}_{\rho}(1 + \eta, \ldots, 1 + \eta) J_{\rho}(\eta) \mathcal{E}_{\rho}^{-1}(1 + \eta, \ldots, 1 + \eta).$$

Рассмотрим теперь функцию, обратную к (46):

$$\xi = \lg(1 + \eta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \eta^{\nu}, \tag{48}$$

заменим в этом ряде η на матрицу J и применим опять общую формулу (45); в результате получим

$$X = \lg(1 + J) = \mathcal{E}_{\rho}(1 + \eta, \ldots, 1 + \eta) \mathcal{E}_{\rho}\left(\frac{1}{1+\eta}, -\frac{1}{(1+\eta)^2}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho}(\rho-2)!}{(1+\eta)^{\rho-1}}\right) \cdot$$
$$J_{\rho}(\xi) \mathcal{E}_{\rho}^{-1}\left(\frac{1}{1+\eta}, -\frac{1}{(1+\eta)^2}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho}(\rho-2)!}{(1+\eta)^{\rho-1}}\right) \cdot \mathcal{E}_{\rho}^{-1}(1 + \eta, \ldots, 1 + \eta).$$

Сравнивая это выражение с (47), вспоминая, что существует только одна матрица $\mathcal{E}_{\rho}$, дающая приведение матрицы $X = G_{s}(\xi, 1, 0, \ldots, 0)$ к каноническому виду $J_{\rho}(\xi)$ и обладающая свойством иметь все свои элементы первого столбца равными 0, за исключением первого элемента, равного единице, и заменяя $1 + \eta$ на ζ, приходим к заключению, что

$$\mathcal{E}_{\rho}(\zeta, \zeta, \ldots, \zeta) = \mathcal{E}_{\rho}^{-1}\left(\frac{1}{\zeta}, -\frac{1}{\zeta^2}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho}(\rho-2)!}{\zeta^{\rho-1}}\right). \tag{49}$$

Этой формулой мы воспользуемся в дальнейшем. Пусть элементарные делители матрицы X будут $(\xi - \xi_1)^{\rho_1}, \ldots, (\xi - \xi_s)^{\rho_s}$. Рассмотрим левую часть характеристического уравнения матрицы X:

$$\psi(\xi) = D(X - \xi) = (\xi_1 - \xi)^{\rho_1}(\xi_2 - \xi)^{\rho_2}, \ldots, (\xi_s - \xi)^{\rho_s} = \prod_{k=1}^{s} (\xi_k - \xi)^{\rho_k} =$$
$$= (-1)^n [\xi^n - i_1(X)\xi^{n-1} + i_2(X)\xi^{n-2} - \ldots + (-1)^n i_n(X)], \tag{50}$$

где $i_1(X), \ldots, i_n(X)$ суть инварианты матрицы X.

Докажем следующее тождество Кейли:

$$X^n - i_1(X) X^{n-1} + i_2(X) X^{n-2} - \ldots + (-1)^n i_n(X) = 0. \tag{51}$$

Для доказательства применим формулу (43)

$$\psi(X) = S[G_{\rho_1}(\psi(\xi_1), \psi'(\xi_1), \ldots, \psi^{(\rho_1-1)}(\xi_1)), \ldots, G_{\rho_s}(\psi(\xi_s), \ldots, \psi^{(\rho_s-1)}(\xi_s))] S^{-1}.$$

Но из (50) ясно, что все $\psi^{(\lambda)}(\xi_k)$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, \rho_k - 1)$ обращаются в нуль, следовательно

$$\psi(X) = 0.$$

§ 5. Формула Лагранжа — Сильвестера. Относительно формулы (43) предыдущего параграфа надо сделать следующее замечание. В эту формулу входит матрица S, приводящая матрицу X к каноническому виду; выбор

этой матрицы S можно производить бесчисленным множеством способов, между тем значение суммы ряда $f(X)$ очевидно от выбора матрицы S зависеть не может.

Элементы матрицы $f(X)$ суть рациональные функции элементов матрицы X, ее характеристических чисел и значений $f(\xi_1), \ldots, f(\xi_s), \ldots, f^{(\rho_s-1)}(\xi_s)$. Установим явные выражения этих функций.

Рассмотрим сначала частный случай, когда все характеристические числа матрицы X различны между собой. Обозначим их через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, а характеристический полином матрицы X обозначим через

$$h(\xi \mid \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = D(X - \xi) = \prod_{k=1}^{n} (\xi_k - \xi). \tag{52}$$

Пусть теперь функция

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} \xi^{\nu} \tag{53}$$

голоморфна внутри круга C с центром в начале координат и заключающего внутри себя все точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Мы знаем, что в этом случае ряд

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} X^{\nu} \tag{54}$$

сходится.

Составим теперь для функции $f(\xi)$ интерполяционный полином Лагранжа, степени не выше $(n-1)$, принимающий в точках ξ_k те же значения, что и функция $f(\xi)$:

$$Q_n(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_{k-1})(\xi - \xi_{k+1})\ldots(\xi - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_1)\ldots(\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1})\ldots(\xi_k - \xi_n)} \cdot f(\xi_k).$$

Очевидно разность $f(\xi) - Q_n(\xi)$ делится на все разности $\xi - \xi_k$, следовательно делится на $h(\xi \mid \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$

$$f(\xi) - Q_n(\xi) = \varphi(\xi) h(\xi \mid \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

где $\varphi(\xi)$ есть функция, голоморфная в круге C

$$\varphi(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu} \xi^{\nu}.$$

Воспользуемся теперь формулой (40) предыдущего параграфа; если

$$X = S[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] S^{-1},$$

то

$$f(X) - Q_n(X) = S[\varphi(\xi_1) h(\xi_1 \mid \xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, \varphi(\xi_n) h(\xi_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_n)] S^{-1} = 0,$$

ибо $\xi_1, \ldots, \xi_n$ суть корни функции $h(\xi \mid \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Итак,

$$f(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X - \xi_1)\ldots(X - \xi_{k-1})(X - \xi_{k+1})\ldots(X - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_1)\ldots(\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1})\ldots(\xi_k - \xi_n)} f(\xi_k), \tag{55}$$

причем это равенство установлено нами пока только для случая, когда все характеристические числа матрицы X лежат внутри круга сходимости функции (53).

Формулу (55) мы будем называть *формулой Лагранжа — Сильвестера* (Lagrange — Sylvester). Она дает явное выражение функции от матрицы через элементы этой матрицы, ее характеристические числа и через значения функции для этих характеристических чисел.

3 Зак. 2151. — Семинарий по исследованиям Лаппо-Данилевского

Переходя теперь к общему случаю, обозначим через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ различные характеристические числа матрицы X и через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ их степени кратности, так что

$$\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_p=n.$$

Предположим опять, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ лежат внутри круга сходимости ряда (53). Составим опять интерполяционный полином Лагранжа $Q_n(\xi)$ степени не выше $(n-1)$, имеющий в точках ξ_k вместе со своими производными до порядка μ_k-1 включительно те же значения, что и функция $f(\xi)$. Этот полином можно построить следующим образом. Обозначим

$$h(\xi)=h(\xi\,|\,\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)=D(X-\xi)=\prod_{k=1}^{p}(\xi_k-\xi)^{\mu_k},$$

$$h_k(\xi)=h_k(\xi\,|\,\xi_1, \ldots, \xi_p)=\frac{h(\xi\,|\,\xi_1, \ldots, \xi_p)}{(\xi-\xi_k)^{\mu_k}}.$$

У функции $\dfrac{f(\xi)}{h(\xi)}$ единственными особенностями внутри круга C могут быть полюсы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, кратность которых не превышает чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$. Обозначим через

$$\frac{r_k(\xi\,|\,\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)}{(\xi-\xi_k)^{\mu_k}},$$

где $r_k(\xi\,|\,\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ суть полиномы от ξ степени не выше μ_k-1-й, главные части дроби $\dfrac{f(\xi)}{h(\xi)}$ в окрестности точек ξ_k. Функция

$$\varphi(\xi)=\frac{f(\xi)}{h(\xi\,|\,\xi, \ldots, \xi_p)}-\sum_{k=1}^{p}\frac{r_k(\xi\,|\,\xi_1, \ldots, \xi_p)}{(\xi-\xi_k)^{\mu_k}}$$

голоморфна внутри круга C. Итак, имеем тождество

$$f(\xi)=\sum_{k=1}^{p} r_k(\xi\,|\,\xi_1, \ldots, \xi_p)\, h_k(\xi\,|\,\xi_1, \ldots, \xi_p)+\varphi(\xi)\, h(\xi\,|\,\xi_1, \ldots, \xi_p),$$

где сумма правой части и есть очевидно интерполяционный полином Лагранжа $Q_n(\xi)$. Применим опять формулу (43); так как теперь

$$X=S\,[J_{\rho_1}(\xi_1'), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s')]\,S^{-1},$$

где $\xi_1', \ldots, \xi_s'$ суть характеристические числа матрицы X, отвечающие различным элементарным делителям (каждое из чисел $\xi_1, \ldots, \xi_p$ может отвечать нескольким элементарным делителям матрицы X), то

$$f(X)-Q_n(X)=S\left[\, G_{\rho_1}\left(\varphi(\xi_1')\,h(\xi_1')\ldots, \frac{d^{\rho_1-1}[\varphi(\xi_1')h(\xi_1')]}{d\xi_1'^{\,\rho_1-1}}\right), \ldots,\right.$$

$$\left.\ldots, G_{\rho_s}\left(\varphi(\xi_s')\,h(\xi_s'), \ldots, \frac{d^{\rho_s-1}[\varphi(\xi_s')\,h(\xi_s')]}{d\xi_s'^{\,\rho_s-1}}\right)\right] S^{-1}.$$

Если $\xi_1'=\xi_1$, то наверно $\rho_1\leqslant\mu_1$, поэтому

$$h(\xi_1')=0, \ldots, \frac{d^{\rho_1-1}[\varphi(\xi_1')\,h(\xi_1')]}{d\xi_1'^{\,\rho-1}}=0.$$

В результате получим формулу

$$f(X)=Q_n(X)=\sum_{k=1}^{p} r_k(X\,|\,\xi_1, \ldots, \xi_p)\, h_k(X\,|\,\xi_1, \ldots, \xi_p), \tag{56}$$

которую мы будем называть *общей формулой Лагранжа — Сильвестера*. Формула (55) является частным случаем (56); но, с другой стороны, ясно, что формула (56) получается из формулы (55) путем предельного перехода, когда несколько характеристических чисел сливаются между собой.

Для $n=2$ формулы (55) и (56) дают

$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{\xi_2 f(\xi_1)-\xi_1 f(\xi_2)}{\xi_2-\xi_1}+\dfrac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}\,X, & \text{если } \xi_2\neq\xi_1\\ f(\xi_1)-\xi_1 f'(\xi_1)+f'(\xi_1)\,X, & \text{если } \xi_2=\xi_1.\end{cases} \tag{57}$$

В виду большого значения формулы Лагранжа — Сильвестера дадим другое доказательство этой формулы.

Рассмотрим сначала тот частный случай, когда матрица X имеет только простые элементарные делители, т. е. может быть приведена к каноническому виду:

$$X=S\,[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]\,S^{-1}.$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$X^{(1)}=S\,[1, 0, \ldots, 0]\,S^{-1};\quad X^{(2)}=S\,[0, 1, \ldots, 0]\,S^{-1};\quad \ldots;$$

$$X^{(n)}=S\,[0, 0, \ldots, 1]\,S^{-1};$$

правила действий с этими матрицами чрезвычайно просты, а именно: мы имеем следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} &X^{(k)}X^{(l)}=0, && \text{если } k\neq l\\ &(X^{(k)})^{\mu}=X^{(k)}, && \text{если } \mu=1, 2, \ldots\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Очевидно далее, что

$$\sum_{r=1}^{n} X^{(r)}=I,$$

$$X=\sum_{r=1}^{n} X^{(r)}\xi_r.$$

Исходя из последней формулы, применяя формулу бинома Ньютона и пользуясь формулами (58), легко получим простое выражение для целой положительной степени матрицы X:

$$X^{\mu}=\sum_{r=1}^{n} X^{(r)}\xi_r^{\mu}.$$

Если $f(\xi)$ есть голоморфная функция вблизи начала координат и если все ряды $f(\xi_k)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\,\xi_k^{\nu}$ сходятся, то мы имеем

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} X^{(k)}\xi_k^{\nu}\alpha_\nu=\sum_{k=1}^{n} X^{(k)} f(\xi_k).$$

Полученная формула не отличается от уже известной нам

$$f(X)=S\,[f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)]\,S^{-1}, \tag{40}$$

да и вывод был, по существу, один и тот же.

Если все характеристические числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ различны между собой, то мы имеем представление

$$X^{(k)} = \frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)}. \tag{59}$$

В самом деле, матрицы $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ удовлетворяют системе n уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} X^{(k)} \xi_k^{\mu} = X^{\mu} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{60}$$

с определителем, отличным от нуля; решение этой системы в виде полиномов от матрицы X степени не выше $n-1$ единственно; с другой стороны, ясно, что выражения (59) тождественно удовлетворяют системе (60). Следовательно формулы (59) доказаны, и мы вновь приходим к формуле Лагранжа — Сильвестера

$$f(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)} \cdot f(\xi_k). \tag{55}$$

Однако, данный только-что вывод позволяет сделать еще заключение: если все характеристические числа матрицы X различны, то формулы (40) и (55) эквивалентны, т. е. из справедливости одной из этих формул следует справедливость и другой.

Пусть теперь X — произвольная матрица порядка $n = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_s$, имеющая характеристические числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ и элементарные делители $(\xi-\xi_1)^{\rho_1}, (\xi-\xi_1)^{\rho_2}, \ldots, (\xi-\xi_s)^{\rho_s}$. Мы имеем тогда каноническое представление

$$X = S[J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)]\, S^{-1}.$$

В § 2 мы рассматривали матрицу $J_\rho^\mu(0)$ порядка ρ с элементами

$$\left\{ J_\rho^\mu(0) \right\}_{kl} = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq l+\mu \\ 1 \text{ при } k = l+\mu \end{cases} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots).$$

Обозначим через

$$E^{(rq)}_{(\rho_1\rho_2\ldots\rho_s)} = [\Xi_1, \ldots, \Xi_s] \qquad (r = 1, 2, \ldots, s; \quad q = 0, 1, \ldots, \rho_r - 1)$$

матрицу, в которой

$$\Xi_1 = \Xi_2 = \ldots = \Xi_{r-1} = \Xi_{r+1} = \ldots = \Xi_s = 0,\ \Xi_r = J^q_{\rho_r}(0),$$

и отметим следующие правила действий с такими матрицами

$$\left.\begin{aligned} &E^{(rq_1)}_{(\rho_1,\ldots,\rho_s)}\, E^{(rq_2)}_{(\rho_1,\ldots,\rho_s)} = \begin{cases} E^{(r,\,q_1+q_2)}_{(\rho_1,\ldots,\rho_s)} & \text{если } q_1+q_2 < \rho_r \\ 0 & \text{если } q_1+q_2 \geqslant \rho_r \end{cases} \\ &E^{(r_1q_1)}_{(\rho_1,\ldots,\rho_s)}\, E^{(r_2q_2)}_{(\rho_1,\ldots,\rho_s)} = 0, \text{ если } r_1 \neq r_2. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Положим наконец

$$X^{(rq)} = SE^{(rq)}_{(\rho_1,\ldots,\rho_s)} S^{-1} \qquad (r = 1, 2, \ldots, s; \quad q = 0, 1, \ldots, \rho_r - 1).$$

В силу того, что

$$J_\rho(\xi) = \xi J_\rho^0(0) + J_\rho(0),$$

мы будем иметь представление

$$X = \sum_{r=1}^{s} (X^{(r0)}\xi_\rho + X^{(r1)}), \tag{62}$$

причем в случае $\rho_r = 1$ надо считать $X^{(r1)} = 0$, ибо

$$J_1'(0) = 0.$$

В силу (61) матрицы $X^{(rq)}$ перемножаются по следующим правилам

$$X^{(rq_1)} X^{(rq_2)} = \begin{cases} X^{(r,\,q_1+q_2)}, & \text{если } q_1+q_2 < \rho_r \\ 0, & \text{если } q_1+q_2 \geqslant \rho_r \end{cases}$$

$$X^{(r_1q_1)} X^{(r_2q_2)} = 0, \text{ если } r_1 \neq r_2.$$

Поэтому на основании формулы (62), применяя еще формулу бинома Ньютона, получаем следующее представление степени матрицы

$$X^\mu = \sum_{r=1}^{s} \sum_{q=0}^{\rho_r-1} X^{\ q)} \xi_r^{\mu-q} \binom{\mu}{q}. \tag{63}$$

Пусть теперь $f(\xi)$ — голоморфная функция вблизи начала координат, тогда мы имеем

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu X^\nu = \sum_{r=1}^{s} \sum_{q=0}^{\rho_r-1} X^{(rq)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \binom{\nu}{q} \xi_r^{\nu-q} = \sum_{r=1}^{s} \sum_{q=0}^{\rho_r-1} \frac{1}{q}!\, X^{(rq)} f^{(q)}(\xi_r), \tag{64}$$

предполагая, конечно, сходимость всех рядов $f^{(q)}(\xi_r)$. Эта формула по существу не отличается от формулы (43).

В формуле (64) числа ξ_r не обязательно все различны. Переменяя обозначения, положим, что различные характеристические числа матрицы X суть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, а кратности их $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$. Тогда очевидно будем иметь формулу

$$f(X) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{q=0}^{\mu_k-1} J^{(kq)} f^{(q)}(\xi_k), \tag{65}$$

где $J^{(kq)}$ есть сумма тех $X^{(rq)}$, входящих в формулу (64), с присоединением к ним множителя $\dfrac{1}{q!}$, которые отвечают одному и тому же характеристическому числу, но различным элементарным делителям. Отсюда ясно, что $J^{(kq)}$ не зависит от вида функции $f(X)$. Полагая последовательно $f(X) = I, X, \ldots, X^{n-1}$, мы получим систему n уравнений

$$X^\mu = \sum_{k=1}^{p} \sum_{q=0}^{\mu_k-1} J^{(kq)} \mu(\mu-1)\ldots(\mu-q+1)\xi_k^{\mu-q} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

с n неизвестными $J^{(kq)}$, причем определитель этой системы, являющийся обобщением определителя Вандермонда, отличен от нуля. Поэтому $J^{(kq)}$ определяются единственным образом через матрицу X и ее характеристические числа $\xi_1, \ldots, \xi_p$, а значит в результате подстановки этих значений матриц $J^{(kq)}$ в формулу (65) мы должны получить как раз формулу Лагранжа — Сильвестера (56).

§ 6. Аналитическое продолжение функции от матрицы. Полученные нами формулы Лагранжа — Сильвестера (55) и (56) позволяют совершать аналитическое продолжение функции от матрицы, понятие о котором было дано в § 3. Мы определили аналитическую функцию от матрицы рядом

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu X^\nu, \tag{66}$$

позволяющим вычислять элементы матрицы $f(X)$ как функции от элементов

$\{X\}_{kl}$ матрицы X, пока матрица X лежит в достаточно малой окрестности нулевой матрицы

$$|X| < \left\| \frac{\rho}{n} \right\|, \tag{67}$$

где ρ есть радиус сходимости ряда

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \xi^\nu .$$

Если $\rho = \infty$, то функция от матрицы $f(X)$ называется целой. В том случае, когда $0 < \rho < \infty$, мы определили аналитическую функцию от матрицы как совокупность всех аналитических элементов, получаемых аналитическим продолжением ряда (66). При этом под аналитическим элементом функции $f(X)$ мы понимаем матрицу, элементами которой являются n^2 рядов Тэйлора, от n^2 комплексиых переменных $\{X\}_{kl}$, получающихся аналитическим продолжением вдоль некоторого пути в пространстве матрицы X, n^2 рядов Тэйлора (25), являющихся элементами матрицы $f(X)$ в области (67).

Возврат к n^2 рядам Тэйлора для целей аналитического продолжения кажется несколько искусственным, однако легко видеть, что совершать аналитическое продолжение в матричной форме можно только при усложненной форме рядов матриц. Причину этого легко уяснить на простом примере. Возьмем функцию

$$f(X) = X^3$$

и попробуем переразложить ее в окрестности матрицы X_0; полагая

$$X = X_0 + Y,$$

будем иметь

$$X^3 = X_0^3 + X_0^2 Y + X_0 Y X_0 + Y X_0^2 + X_0 Y^2 + Y X_0 Y + Y^2 X_0 + Y^3;$$

отсюда видно, что, переразлагая ряд (65) в окрестности матрицы X_0, мы получим ряд нового типа, члены которого имеют вид

$$A_0 Y^{\nu_1} A_1 Y^{\nu_2} A_2 \ldots Y^{\nu_k} A_k,$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_k$ — постоянные матрицы, Y — переменная. Оставляя в стороне изучение этих новых рядов и связанного с ними понятия гиперматрицы, покажем, что формула Лагранжа—Сильвестера дает возможность полностью исследовать вопрос об аналитическом продолжении функции от матрицы.

Предположим сначала, что все характеристические числа матрицы X различны. Тогда в области (67) мы имеем представление

$$f(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})\,(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})\,(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)}\, f(\xi_k). \tag{55}$$

Характеристические числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ матрицы X являются, как известно, аналитическими функциями от $\{X\}_{kl}$. Подставляя эти функции в правую часть формулы (55), мы получим матрицу, элементами которой являются аналитические функции от $\{X\}_{kl}$, очевидно те же самые, которые определяются в рассматриваемой области (67) рядами Тэйлора (25).

Пусть теперь элементы матрицы X изменяются непрерывным образом, но так, что характеристические числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ все время остаются различными. Мы можем совершать аналитическое продолжение n^2 рядов Тэйлора (25), пока не наткнемся на какую-нибудь особенность матрицы $f(X)$, причем из вышесказанного очевидно, что аналитическое продолжение эле-

ментов правой части матрицы (55) и аналитическое продолжение n^2 рядов (25) совершенно тождественны.

Следовательно, если можно совершить по некоторому пути в пространстве матрицы X аналитическое продолжение правой части формулы (55), то можно совершить по тому же пути и аналитическое продолжение n^2 рядов Тэйлора (25), а следовательно и аналитическое продолжение функции от матрицы $f(X)$. Таким образом формула Лагранжа — Сильвестера дает возможность непосредственного аналитического продолжения функции от матрицы в рассматриваемом случае различных характеристических чисел, ибо, как видно из этой формулы, дело сводится к аналитическому продолжению численных функций от характеристических чисел.

Из формулы (55) видно, что особенностями матрицы $f(X)$ могут быть среди матриц, коих все характеристические числа различны, только те, у которых по крайней мере одно характеристическое число ξ является особенностью функции $f(\xi)$. Легко видеть, что эти матрицы действительно являются особенностями функции $f(X)$.

В самом деле в § 4 было показано, что если

$$X = S\,[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]\, S^{-1},$$

то в области

$$|X| < \left\| \frac{\rho}{n} \right\|$$

имеем

$$f(X) = S\,[f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)]\, S^{-1}.$$

Сравнивая это выражение с (55), наверное пригодным в той же области, заключаем, что имеем тождественно

$$\frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})\,(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})\,(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)} = S\,[0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots]\, S^{-1},$$

причем 1 стоит на k-ом месте. Поэтому из (55) выводим, что

$$f(X) = S\,[f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)]\, S^{-1},$$

там, где формула (55) имеет место. Отсюда следует, что

$$S^{-1} f(X)\, S = [f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)],$$

откуда вытекает, что если матрица X не является особенностью функции $f(X)$, то числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ не могут быть особенностями функции $f(\xi)$.

Итак, если характеристические числа матрицы X все различны, то как формула (55), так и формула (40) дают все аналитические продолжения матрицы $f(X)$, причем особенностями матрицы $f(X)$ являются те матрицы X, у которых по крайней мере одно характеристическое число является особенностью функции $f(\xi)$. Пусть теперь при изменении матрицы X несколько ее характеристических чисел совпадут между собой, причем ни одно из характеристических чисел матрицы X не является особой точкой функции $f(\xi)$. В этом случае могут представиться две возможности. А именно, будем рассматривать Риманову поверхность для функции $f(\xi)$, причем характеристические числа исходной матрицы X, принадлежащей области (67), мы должны считать принадлежащими одному и тому же листу этой Римановой поверхности. При изменении матрицы X ее характеристические числа будут описывать некоторые пути по упомянутой Римановой поверхности. При совпадении нескольких характеристических чисел матрицы X мы должны различать два случая, смотря по тому, происходит ли это совпадение в одной и той же точке Римановой поверхности для функции $f(\xi)$, или же по крайней мере два из совпадающих характеристических чисел матрицы X лежат в различных точках этой Римановой поверхности.

В первом случае при совпадении чисел ξ_k и ξ_l будут совпадать и соответствующие значения $f(\xi_k)$ и $f(\xi_l)$; точнее говоря, будут совпадать соответствующие аналитические элементы функции $f(\xi)$ в окрестности точек ξ_k и ξ_l. Но очевидно, что в этом случае формула (55) заменяется той, которая получается из нее путем перехода к пределу (например $\xi_l \to \xi_k$), т. е. заменяется общей формулой:

$$f(X) = \sum_{k=1}^{p} r_k(X \mid \xi_1, \ldots, \xi_p)\, h_k(X \mid \xi_1, \ldots, \xi_p). \quad (56)$$

В самом деле, если в формуле (55) заменить X на ξ, то получится интерполяционный полином Лагранжа, который при совпадении нескольких точек из числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ обращается в обобщенный полином Лагранжа:

$$Q_n(\xi) = \sum_{k=1}^{p} r_k(\xi \mid \xi_1, \ldots, \xi_p)\, h_k(\xi \mid \xi_1, \ldots, \xi_p),$$

откуда и следует формула (56).

Пусть теперь точки ξ_k и ξ_l лежат в различных листах Римановой поверхности друг над другом, так что $\xi_k = \xi_l$, но аналитические элементы функции $f(\xi)$ в окрестности точек ξ_k и ξ_l различны. Пусть, например, $f(\xi_k) \neq f(\xi_l)$, тогда легко видеть, что формула Лагранжа — Сильвестера (55) теряет смысл, ибо некоторые коэффициенты в этой формуле обращаются в бесконечность.

Чтобы выяснить вопрос о том, что происходит в этом последнем случае с аналитическим продолжением $f(X)$, представим предельную матрицу X_0 в виде

$$X_0 = S\,[\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}]\, S^{-1},$$

где по условию $\xi_k^{(0)} = \xi_l^{(0)}$. Закрепив теперь матрицу S, возьмем матрицу

$$X = S\,[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]\, S^{-1},$$

все характеристические числа которой различны и стремятся к соответствующим характеристическим числам матрицы X_0 по тем самым путям, по которым перемещались эти числа, когда матрица X изменялась от своего исходного значения [принадлежащего области (61)] к своему конечному значению X_0. Применим теперь формулу (40) и перейдем к пределу; тогда получим

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = S\,[f(\xi_1^{(0)}), \ldots, f(\xi_n^{(0)})]\, S^{-1}.$$

Но в силу совпадения чисел $\xi_k^{(0)}$ и $\xi_l^{(0)}$ подстановка S, приводящая матрицу X_0 к каноническому виду, может быть выбираема существенно различными способами, а тогда при предельном переходе, отвечающем различным выборам S, матрица $f(X)$ будет стремиться в случае $f(\xi_k^{(0)}) \neq f(\xi_l^{(0)})$ к различным предельным значениям. Отсюда следует, что, вообще говоря, при совпадении нескольких характеристических чисел и несовпадении их на Римановой поверхности функции $f(\xi)$ матрица $f(X)$ не стремится к какому-либо определенному пределу, когда матрица X стремится к матрице X_0.

Поэтому матрица X_0 является особенностью функции $f(X)$ (конечно, матрица X_0 должна рассматриваться как определяемая тем путем в пространстве матриц X, который приводит к матрице X_0 от исходной матрицы, принадлежащей области (67); иными словами матрица X_0 должна рассматриваться в Римановом пространстве матриц).

Даже в том случае, если окажется при совпадении двух характеристических чисел $\xi_k^{(0)}$ и $\xi_l^{(0)}$, что $f(\xi_k^{(0)}) = f(\xi_l^{(0)})$, но что аналитические элементы функции $f(\xi)$ в окрестности точек $\xi_k^{(0)}$ и $\xi_l^{(0)}$ различны, матрица X_0 будет являться особенностью функции $f(X)$, ибо в любой близости матрицы X_0 найдутся особенные матрицы, у которых будут два характеристических числа $\xi_k^{(1)}$ и $\xi_l^{(1)}$ таких, что $\xi_k^{(1)} = \xi_l^{(1)}$, но $f(\xi_k^{(1)}) \neq f(\xi_l^{(1)})$. Итак, все матрицы X, у которых есть по крайней мере одна пара совпадающих характеристических чисел, лежащих в различных листах Римановой поверхности функции $f(\xi)$, являются особенными матрицами функции $f(X)$.

Из приведенного анализа видно, что формулы (55) и (56) дают аналитическое продолжение функции $f(X)$ во всей области существования этой функции.

В § 5 мы видели, что ряд

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu$$

наверно сходится в области B всех тех матриц X, у которых характеристические числа удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_k| < \rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

и что сумма этого ряда определяется формулами Лагранжа — Сильвестера (55) и (56). Отсюда следует, что сумма ряда (66) дает аналитическое продолжение функции $f(X)$ в области B.

В § 4 было показано, что в той же области имеет место равенство

$$f(X) = S\,[f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)]\, S^{-1}; \quad (68)$$

$$f(X) =$$
$$= S\,[G_{\rho_1}(f(\xi_1), f'(\xi_1), \ldots, f^{(\rho_1-1)}(\xi_1)), \ldots, G_{\rho_s}(f(\xi_s), \ldots, f^{(\rho_s-1)}(\xi_s))]\, S^{-1}. \quad (69)$$

Выше мы уже сделали замечание, что формула (68) имеет место всюду где имеет место формула (55). Точно так же можно показать, что формула (69) имеет место всюду, где имеет место формула (56). Поэтому можем сделать следующее важное заключение: во всей области существования функции $f(X)$ формулы (68) и (69) дают аналитическое представление значений этой функции.

В качестве простейшего примера рассмотрим матрицы второго порядка $(n = 2)$ и функцию $\sqrt{X}$. Положив

$$X = I + Y,$$

рассмотрим одну из ветвей нашей функции

$$\sqrt{X} = \sqrt{I+Y} = I + \frac{1}{2}Y - \frac{1}{8}Y^2 - \frac{1}{16}Y^3 - \ldots =$$
$$= I + \frac{1}{2}(X - I) - \frac{1}{8}(X - I)^2 - \frac{1}{16}(X - I)^3 - \ldots$$

Этот ряд наверно сходится в области

$$|Y| < \left\| \frac{1}{2} \right\|, \quad |X - I| < \left\| \frac{1}{2} \right\|,$$

ибо $\rho = 1$.

Если характеристические числа матрицы X обозначить через ξ_1, ξ_2, а матрицы Y через η_1, η_2, то

$$\xi_1 = 1 + \eta_1, \quad \xi_2 = 1 + \eta_2.$$

Формула Лагранжа — Сильвестера в рассматриваемом случае дает

$$\sqrt{X}=\sqrt{I+Y}=\frac{Y-\eta_2}{\eta_1-\eta_2}\sqrt{1+\eta_1}+\frac{Y-\eta_1}{\eta_2-\eta_1}\sqrt{1+\eta_2}$$

или

$$\sqrt{X}=\frac{X-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}\sqrt{\xi_1}+\frac{X-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}\sqrt{\xi_2}. \tag{70}$$

Так как каждая из функций $\sqrt{\xi_1}$ и $\sqrt{\xi_2}$ имеет две ветви, то, совершая по формуле (70) всевозможные аналитические продолжения, мы получим четыре ветви функции $\sqrt{X}$.

Если характеристические числа $\xi_1^{(0)}$ и $\xi_2^{(0)}$ матрицы X_0 совпадут, причем $\sqrt{\xi_1^{(0)}}$ и $\sqrt{\xi_2^{(0)}}$ будут значениями одной и той же ветви функции $\sqrt{\xi}$, так что $\sqrt{\xi_1^{(0)}}=\sqrt{\xi_2^{(0)}}$, то формула (70) выродится в

$$\sqrt{X_0}=\frac{1}{2\sqrt{\xi_1^{(0)}}}X_0+\frac{1}{2}\sqrt{\xi_1^{(0)}}.$$

Если же $\sqrt{\xi_2^{(0)}}=-\sqrt{\xi_1^{(0)}}$, то соответствующая матрица X_0 будет особенностью $\sqrt{X}$. В этом случае имеем каноническое представлеиие

$$X_0=S\,[\xi_1^{(0)},\ \xi_1^{(0)}]\ S^{-1}=[\xi_1^{(0)},\ \xi_1^{(0)}],$$

причем матрицу S можем выбирать совершенно произвольно. Закрепив матрицу S, рассмотрим матрицу

$$X=S\ [\xi_1,\ \xi_2]\ S^{-1},$$

в которой ξ_1 и ξ_2 стремятся к предельным значениям $\xi_1^{(0)}$, $\xi_2^{(0)}=\xi_1^{(0)}$, по тем самым путям, по которым они изменялись, когда мы переходили от матрицы X, принадлежащей области $|X-I|<\left\|\frac{1}{2}\right\|$ и матрице X_0. По формуле

$$\sqrt{X}=S\ [\sqrt{\xi_1},\ \sqrt{\xi_2}]\ S^{-1},$$

дающей все четыре ветви $\sqrt{X}$, мы найдем в качестве предельного значения

$$\sqrt{X_0}=S\,[\sqrt{\xi_1^{(0)}},-\sqrt{\xi_1^{(0)}}]\ S^{-1}$$

и взяв например

$$S=\begin{Vmatrix}1&0\\a&1\end{Vmatrix},\quad S^{-1}=\begin{Vmatrix}1&0\\-a&1\end{Vmatrix},$$

где a — любое число, получим

$$\sqrt{X_0}=\begin{Vmatrix}\sqrt{\xi_1^{(0)}}, & 0\\ 2a\sqrt{\xi_1^{(0)}}, & -\sqrt{\xi_1^{(0)}}\end{Vmatrix}.$$

Таким образом, ясно видно, что предела матрицы $\sqrt{X}$ при произвольном стремлении матрицы X к X_0 существовать не будет, так что матрица X_0 является особой для функции $\sqrt{X}$.

Кроме этих матриц, для функции $\sqrt{X}$ особыми являются те матрицы, у которых по крайней мере одно характеристическое число равно нулю, а именно эти матрицы являются матрицами разветвления.

§ 7. Логарифмическая функция. В конце § 3 было дано определение матрицы $Y=\lg X$ как любого решения уравнения $e^Y=X$ и определение логарифмической функции $\mathrm{Lg}\,X$, получающейся аналитическим продолжением ряда:

$$\mathrm{Lg}\,X=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(X-I)^{\nu}, \tag{71}$$

абсолютно сходящегося в области $|X-I|<\left\|\frac{1}{n}\right\|$.

Отыщем прежде всего все определения $Y=\lg X$. Пусть матрицы X и Y имеют канонические представления

$$X=S\,[J_{\rho_1}(\xi_1),\ldots,J_{\rho_s}(\xi_s)]\ S^{-1}; \tag{72}$$

$$Y=T\,[J_{\rho'_1}(\eta_1),\ldots,J_{\rho'_{s'}}(\eta_{s'})]\ \ T^{-1}. \tag{73}$$

На основании формулы (45) будем иметь

$$e^Y=T\,[\mathcal{E}_{\rho_1'}(e^{\eta_1},\ldots,e^{\eta_1}),\ldots,\mathcal{E}_{\rho'_{s'}}(e^{\eta_{s'}},\ldots,e^{\eta_{s'}})]. \tag{74}$$

$$[J_{\rho_1'}(e^{\eta_1}),\ldots,J_{\rho'_{s'}}(e^{\eta_{s'}})]\ [\mathcal{E}_{\rho_1'}(e^{\eta_1},\ldots,e^{\eta_1}),\ldots,\mathcal{E}_{\rho'_{s'}}(e^{\eta_{s'}},\ldots,e^{\eta_{s'}})]^{-1}\ T^{-1}.$$

Сравнивая это выражение с каноническим представлением матрицы $X=e^Y$ и замечая, что при любом каноническом представлении одной и той же матрицы как число, так и кратность элементарных делителей не меняются, приходим к выводу, что мы должны иметь $s'=s$ и что, не нарушая общности, можем принять $\rho_1'=\rho_1\ldots\rho_s'=\rho_s$, $e^{\eta_1}=\xi_1,\ldots e^{\eta_s}=\xi_s$. Следовательно, характеристические числа и элементарные делители всякого определения $\lg X$ имеют форму

$$\eta_1=\lg^*\xi_1+2\pi ir_1,\ \ldots,\ \eta_s=\lg^*\xi_s+2\pi ir_s,$$

$$(\eta_1-\lg^*\xi_1-2\pi ir_1)^{\rho_1},\ \ldots,(\eta_s-\lg^*\xi_s-2\pi ir_s)^{\rho_s},$$

где $\lg^*\xi_1,\ \ldots,\ \lg^*\xi_s$ суть главные значения логарифмов, а $r_1,\ldots r_s$ — целые произвольные числа.

Сравнивая формулы (72) и (74) и помня, что $e^Y=X$, видим, что

$$T\ [\mathcal{E}_{\rho_1}(e^{\eta_1},\ldots,e^{\eta_1}),\ldots,\mathcal{E}_{\rho_s}(e^{\eta_s},\ldots,e^{\eta_s})]=S,$$

где S есть одна из матриц, приводящих X к каноническому виду.

На основании тождества (49)

$$\mathcal{E}_{\rho}(\xi,\ldots,\xi)=\mathcal{E}_{\rho}^{-1}\left(\frac{1}{\xi},\ldots,\frac{(-1)^{\rho}(\rho-2)!}{\xi^{\rho-1}}\right)$$

можем еще написать

$$T=S\left[\mathcal{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1},\ldots,\frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right),\ldots,\mathcal{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s},\ldots,\frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right].$$

Следовательно общее представление логарифма матрицы X есть:

$$\lg X = S\left[\mathscr{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots, \mathscr{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right] \times$$

$$\times [J_{\rho_1}(\lg^*\xi_1 + 2\pi i r_1), \ldots, J_{\rho_s}(\lg^*\xi_s + 2\pi i r_s)] \times$$

$$\times\left[\mathscr{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}, \ldots, \mathscr{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right]^{-1} S^{-1}, \quad (75)$$

где $r_1, \ldots r_s$ суть произвольные целые числа и S — произвольная матрица, приводящая матрицу X к канонической форме (72). Матрица $\lg X$ многозначна, причем многозначность может происходить по двум причинам:

1) от наличия произвольных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_s$;

2) от произвола в выборе подстановки S, приводящей матрицу X к каноническому виду.

Выбор r можно ограничить таким образом, чтобы всякому $\xi_{q'} = \xi_q$ соответствовало $r_{q'} = r_q$, т. е. равным характеристическим числам, входящим в различные элементарные делители, приписывать равные значения. Будем называть такие определения логарифма „регулярными“, все остальные определения — иррегулярными.

Всякое регулярное определение логарифма совершенно не зависит от выбора матрицы S и определяется единственным образом значениями целых чисел $r_1, r_2, \ldots, r_s$. В самом деле, составим полином $\varphi(\xi)$, удовлетворяющий следующим условиям

$$\varphi(\xi_q) = \lg^*\xi_q + 2\pi i r_q, \ \varphi'(\xi_q) = \frac{1}{\xi_q}, \ldots, \varphi^{(\rho_q - 1)}(\xi_q) = \frac{(-1)^{\rho_q}(\rho_q-2)!}{\xi_q^{\rho_q - 1}}$$

$$(q = 1, 2, \ldots, s).$$

На основании формулы (45) будем иметь

$$\varphi(X) = S\left[\mathscr{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots, \mathscr{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right] \times$$

$$\times [J_{\rho_1}(\lg^*\xi_1 + 2\pi i r_1), \ldots, J_{\rho_s}(\lg^*\xi_s + 2\pi i r_s)] \times$$

$$\times\left[\mathscr{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots, \mathscr{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right]^{-1} S^{-1} =$$

$$= \lg X$$

и поскольку $\varphi(X)$ конечно не зависит от матрицы S, указанное свойство регулярного определения логарифма доказано.

Очевидно, что всякая матрица, различные элементарные делители которой отвечают различным характеристическим числам (в частности, всякая матрица с различными характеристическими числами), имеет только регулярные определения $\lg X$.

Рассмотрим в качестве примера логарифм матрицы

$$X = [\xi_1, \xi_1, \ldots, \xi_1] = \xi_1,$$

приводящейся к числу ξ_1. Элементарные делители этой матрицы суть

$$\xi - \xi_1, \ \xi - \xi_1, \ldots, \ \xi - \xi$$

и всякое регулярное определение $\lg X$ имеет форму

$$\lg X = [\lg^*\xi_1 + 2\pi i r, \ldots, \lg^*\xi_1 + 2\pi i r] = \lg^*\xi_1 + 2\pi i r,$$

где r — произвольное целое число. С другой стороны, матрица X приводится к канонической форме при помощи любой матрицы S с определителем, отличным от нуля

$$X = S[\xi_1, \xi_1, \ldots, \xi_1] S^{-1}.$$

Следовательно, общее выражение всех определений $\lg X$ есть

$$\lg X = S[\lg^*\xi_1 + 2\pi i r_1, \ldots, \lg^*\xi_1 + 2\pi i r_n] S^{-1} = \lg^*\xi_1 + 2\pi i S[r_1, \ldots, r_n] S^{-1},$$

где S — произвольная матрица с определителем, отличным от нуля, и $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — произвольные целые числа. Следовательно, все иррегулярные определения $\lg X$, где числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$ не все равны между собою, существенно зависят от матрицы S.

Рассмотрим теперь логарифмическую функцию (71) во всей области ее существования. В случае различных характеристических чисел мы имеем по формуле Лагранжа — Сильвестера следующее представление

$$\mathrm{Lg} X = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)} \lg \xi_k. \quad (76)$$

В случае совпадения нескольких характеристических чисел мы должны заменить формулу (76) обобщенной формулой, получающейся из (76) путем предельного перехода. Например, для случая $n = 2$ имеем

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Lg}\, X = \frac{\xi_2 \lg \xi_1 - \xi_1 \lg \xi_2}{\xi_2 - \xi_1} + \frac{\lg \xi_2 - \lg \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} X, \quad \text{если } \xi_2 \neq \xi_1 \\ &\mathrm{Lg} X = lg\, \xi_1 - 1 + \frac{1}{\xi_1} X, \qquad\qquad\qquad \text{если } \xi_2 = \xi_1 \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

Особыми матрицами для $\mathrm{Lg}\, X$ являются прежде всего матрицы, у которых по крайней мере одно из характеристических чисел обращается в нуль, — эти матрицы являются матрицами разветвления для функции $\mathrm{Lg}\, X$, что видно непосредственно из формулы (76). Кроме того, особыми матрицами функции $\mathrm{Lg}\, X$ являются те матрицы X, у которых два характеристических числа ξ_k и ξ_l совпадают, но соответствующие значения $\lg \xi_k$ и $\lg \xi_l$ различны:

$$\xi_k = \xi_l, \ \lg \xi_k = \lg^*\xi_k + 2\pi i r_k, \ \lg \xi_l = \lg^*\xi_l + 2\pi i r_l, \quad r_k \neq r_l.$$

Любое аналитическое продолжение функции $Y = \mathrm{Lg}\, X$ дает конечно решение уравнения $e^Y = X$. Все эти решения являются регулярными определениями $\lg X$. В самом деле во всей области существования $\mathrm{Lg}\, X$ мы имеем согласно формуле (69) предыдущего параграфа:

$$X = S\left[J_{\rho_1}(\xi_1), \ \ldots, \ J_{\rho_s}(\xi_s)\right] S^{-1},$$

$$\mathrm{Lg}\, X = S\left[G_{\rho_1}\left(\lg \xi_1, \frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots, G_{\rho_s}\left(\lg \xi_s, \frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right] S^{-1} =$$

$$= S\left[\mathscr{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots\right.$$

$$\ldots, \mathcal{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right] \left[J_{\rho_1}(\lg \xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\lg \xi_s)\right] \times$$

$$\times \left[\mathcal{E}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots, \mathcal{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right]^{-1}; \quad (78)$$

причем при совпадении двух характеристических чисел ξ_k и ξ_l должны совпадать и их логарифмы: $\lg \xi_k = \lg \xi_l$ (ибо только при таком условии мы можем получить аналитическое продолжение $\mathrm{Lg}\, X$). Но тогда правая часть формулы (78) дает общее выражение всех регулярных определений логарифма, и значит совокупность всех значений логарифмической функции $\mathrm{Lg}\, X$ во всей области ее существования совпадает с совокупностью всех регулярных определений $\lg X$. Покажем наконец, что всякое иррегулярное определение логарифма матрицы X_0 может быть получено предельным переходом из логарифмической функции $\mathrm{Lg}\, X$, если заставить X стремиться к X_0 по определенному закону. А именно, если

$$X_0 = S\,[J_{\rho_1}(\xi_1^{(0)}), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s^{(0)})]\, S^{-1},$$

то, закрепив в формулах (78) матрицу S и изменяя $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ таким образом, чтобы они все время оставались различными и чтобы в пределе было

$$\lim \lg \xi_k = \lg^* \xi_k^{(0)} + 2\pi i r_k,$$

где $r_1, \ldots, r_s$ заданные целые числа, мы получим в пределе любое определение $\lg X_0$.

§ 8. Ряды следов. Ряды следов и матриц. Мероморфные функции. Для аналитической функции от матрицы X, определенной первоначально рядом

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu X^\nu$$

мы дали годное во всей области существования этой функции представление

$$f(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)} f(\xi_k),$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — характеристические числа матрицы X. Из последней формулы вытекает следующее свойство аналитической функции от матрицы

$$f(SXS^{-1}) = Sf(X)S^{-1}, \quad (79)$$

ибо например

$$(SXS^{-1}-\xi_1)(SXS^{-1}-\xi_2) = S(X-\xi_1)S^{-1}S(X-\xi_2)S^{-1} =$$
$$= S(X-\xi_1)(X-\xi_2)S^{-1}.$$

Будем называть скалярной функцией от матрицы X обыкновенную функцию от элементов матрицы X:

$$F(X) = F(\{X\}_{11}, \{X\}_{12}, \ldots, \{X\}_{nn}).$$

Рассмотрим в частности скалярные функции от матрицы X, обладающие свойством инвариантности по отношению к преобразованиям подобия, т. е. удовлетворяющие при любых матрицах X и S соотношению

$$F(SXS^{-1}) = F(X). \quad (80)$$

К числу таких функций принадлежит прежде всего функция

$$\sigma(X) = \sum_{k=1}^{n} \{X\}_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad (81)$$

которую мы будем называть *следом матрицы* X, а также все функции

$$\sigma(X^\nu) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^\nu.$$

Однородный полином от элементов матрицы X степени ν:

$$F_\nu(X) = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda=\nu \\ \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_\lambda > 0}} \sigma(X^{\mu_1})\,\sigma(X^{\mu_2})\ldots\sigma(X^{\mu_\lambda})\,\beta^{(\lambda)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_\lambda} \quad (82)$$

также очевидно удовлетворяет соотношению (80).

Составим наконец ряд однородных полиномов от элементов матрицы X:

$$F(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(X) = \beta_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda=\nu \\ \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \mu_\lambda \geqslant 0}} \sigma(X^{\mu_1})\,\sigma(X^{\mu_2})\ldots\sigma(X^{\mu_\lambda})\,\beta^{(\lambda)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_\lambda}; \quad (83)$$

ряды такого вида мы будем называть *рядами следов матрицы* X. Сумма этого ряда, в случае его сходимости, удовлетворяет условию (80).

Легко видеть, что, обратно, всякая скалярная инвариантная функция от матрицы X, голоморфная в окрестности нулевой матрицы, может быть представлена в виде (83). Прежде всего мы можем разложить $F(X)$ в ряд

$$F(X) = F_0(X) + F_1(X) + F_2(X) + \ldots$$

где $F_\nu(X)$ означает совокупность членов ν-го измерения в ряде Маклорена, в который разлагается функция $F(X)$. Ясно, что каждая функция $F_\nu(X)$ по отдельности удовлетворяет соотношению

$$F_\nu(SXS^{-1}) = F_\nu(X).$$

Если каноническое представление матрицы X есть

$$X = S\,[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]\, S^{-1},$$

то

$$F_\nu(X) = F_\nu([\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]).$$

С другой стороны, при помощи надлежащей матрицы можно преобразовать матрицу $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ в любую матрицу $[\xi_{\alpha_1}, \xi_{\alpha_2}, \ldots, \xi_{\alpha_n}]$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — любая перестановка из $1, 2, \ldots, n$. Поэтому

$$F_\nu([\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]) = F_\nu([\xi_{\alpha_1}, \xi_{\alpha_2}, \ldots, \xi_{\alpha_n}]).$$

Таким образом $F_\nu(X)$ есть однородная симметрическая функция ν степени от характеристических чисел матрицы X, а потому по известной теореме алгебры может быть выражена в виде полинома от $\sigma(X), \sigma(X^2), \ldots, \sigma(X^n)$. Итак, $F_\nu(X)$ может быть представлена выражением (82), а $F(X)$ — рядом (83), что мы и хотели доказать.

Рассмотрим теперь матрицу

$$f_\nu(X) = \sum_{\mu=0}^{\nu} X^\mu f_{\nu,\,\nu-\mu}(X), \quad (84)$$

где $f_{\nu,\,\nu-\mu}(X)$ суть однородные полиномы от элементов матрицы X степени $\nu-\mu$, удовлетворяющие соотношению (80) и следовательно представимые в форме (82). Элементы матрицы $f_\nu(X)$ суть очевидно однородные полиномы от элементов матрицы X степени ν, причем очевидно при любых матрицах X и S имеет место равенство

$$f_\nu(SXS^{-1}) = Sf_\nu(X)\,S^{-1}.$$

Составим наконец ряд матриц

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu} X^\mu f_{\nu,\,\nu-\mu}(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu} X^\mu \left(\sum_{\lambda=1}^{\nu-\mu} \sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda=\nu-\mu \\ \mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\ldots\geqslant\mu_\lambda>0}} \sigma(X^{\mu_1})\ldots\sigma(X^{\mu_\lambda})\beta^{\nu,\,\lambda}_{\mu_1\ldots\mu_\lambda}\right); \quad (85)$$

ряд такого вида мы будем называть *рядом от матрицы X и ее следов*. В случае сходимости такого ряда сумма его удовлетворяет соотношению (79).

Можно показать, что, обратно, всякая матрица, элементы которой являются аналитическими функциями от элементов матрицы X, голоморфными в некоторой окрестности нулевой матрицы, удовлетворяющая соотношению (79), может быть представлена в виде ряда от матрицы X и ее следов (85). Если ряды (83) или (85) сходятся для любых матриц X, суммы этих рядов будут целыми функциями от элементов матрицы X.

Рассмотрим теперь аналитическую функцию от матрицы X

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu X^\nu \quad (86)$$

в том случае, когда функция

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \xi^\nu = \frac{a(\xi)}{b(\xi)} = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \xi^\nu}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \xi^\nu} \quad (87)$$

есть мероморфная функция, т. е. отношение двух целых функций $a(\xi)$ и $b(\xi)$. Такую аналитическую функцию $f(X)$ мы будем называть мероморфной функцией от матрицы X. Мы можем представить ее для матриц X, близких к нулевой, в виде отношения двух целых функций от матрицы X

$$f(X) = \frac{a(X)}{b(X)} = a(X)\,[b(X)]^{-1} = [b(X)]^{-1}\,a(X), \quad (88)$$

(матрицы $a(X)$ и $b(X)$ очевидно обладают свойством коммутативности). В таком виде мы можем рассматривать мероморфные функции и в том случае, когда функция $b(\xi)$ имеет в начале координат корень простой или кратный. Очевидно, что формула (88) определяет функцию $f(X)$ уже для любой матрицы X, для которой определитель матрицы $b(X)$ отличен от нуля, и дает таким образом аналитическое продолжение функции $f(X)$ во всей области существования этой функции. Элементы матрицы $f(X)$ являются очевидно мероморфными функциями от элементов матрицы X, а именно отношениями двух целых функций от элементов матрицы X. Определитель матрицы $b(X)$ есть целая инвариантная функция от матрицы X и следовательно может быть представлена в виде ряда

$$D(b(X)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda=\nu \\ \mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\ldots\geqslant\mu_\lambda>0}} \sigma(X^{\mu_1})\ldots\sigma(X^{\mu_\lambda})\,b^{(\lambda)}_{\mu_1\ldots\mu_\lambda} \quad (89)$$

Так как $[b(X)]^{-1}D(b(X))$ имеет элементами очевидно целые функции от элементов матрицы X, то $f(X)D(b(X))$ есть целый ряд следов и матрицы:

$$f(X)D(b(X)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu X^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha_\mu X^\mu b_{\nu-\mu}(X),$$

так что мы имеем следующее представление мероморфной функции $f(X)$:

$$f(X) = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\sum\limits_{\mu=0}^{\nu} \alpha_\mu X^\mu b_{\nu-\mu}(X)}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(X)} \quad (90)$$

в виде отношения двух целых функций от элементов матрицы, причем в числителе стоит целый ряд от матрицы X и ее следов, а в знаменателе—целый ряд от следов матрицы X.

ГЛАВА II.

ФУНКЦИИ ОТ НЕСКОЛЬКИХ МАТРИЦ

§ 9. Определение функции от нескольких матриц. Рассмотрим m переменных матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$ и систему численных постоянных α_0, $\alpha_{j_1 \ldots j_\nu}$ $(j_1, j_2, \ldots, j_\nu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$

Матрица

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}, \tag{91}$$

где индексы $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ пробегают независимо друг от друга все целые значения от 1 до m, при условии сходимости этого ряда в некоторой окрестности

$$| X_j | < \| \rho_j \| \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{92}$$

называется аналитической функцией матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, голоморфной в рассматриваемой окрестности.

Для сокращения письма введем обозначение

$$[X\alpha]_\nu = \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}, \quad [X]_0 = \alpha_0,$$

так что

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu.$$

Отметим, что мы называем ряд (91) сходящимся в том случае, если он сходится, как ряд, элементами которого служат $[X\alpha]_\nu$. При условии сходимости ряда (91) в окрестности (92) в той же окрестности будет сходиться и ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Big| [X\alpha]_\nu \Big|. \tag{93}$$

Это следует из того, что если ввести параметр t и рассмотреть ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu [X\alpha]_\nu, \tag{94}$$

взяв матрицы X_j из окрестности (92), то радиус сходимости ряда (94) будет больше 1 и сам ряд при $t = 1$ должен сходиться абсолютно. Более того, ряд (91), если только он сходится в области (92), сходится в этой области равномерно.[1] Поэтому, по теореме Вейерштрасса, n^2 элементов матрицы

[1] Это следует из теоремы F. Hartogs'a, доказанной для случая двух переменных в статье „Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Verändlichen", Mathematische Annalen, Bd. 62, 1906, S. 72.

$F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ будут аналитическими функциями от элементов $\{X_j\}_{kl}$ матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, голоморфными в области

$$|\{X_j\}_{kl}| < \rho_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n) \tag{95}$$

и следовательно разложимыми в ряды Маклорена

$$\{F(X_1, X_2, \ldots, X_m)\}_{\alpha\beta} = C^{(\alpha\beta)}_{0\,0 \ldots 0} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\Sigma \mu^{(j)}_{kl} = \nu} \prod_{\substack{j=1, \ldots m \\ k, l = 1, \ldots n}} \left\{ X_j \right\}_{kl}^{\mu^{(j)}_{kl}} C^{(\alpha\beta)}_{\mu^{(1)}_{11} \ldots \mu^{(n)}_{nn}}, \tag{96}$$

абсолютно сходящиеся в области (95).

Отсюда видно, что изучение аналитических функций от матриц $X_1, \ldots, X_m$ сводится к изучению частного класса аналитических функций от mn^2 переменных $\{X_j\}_{kl}$.

Совершая аналитическое продолжение рядов (96) в пространстве mn^2 переменных $\{X_j\}_{kl}$, мы сможем получить матрицы, которые будем называть аналитическими элементами функции $F(X_1, \ldots, X_m)$.

Под аналитической функцией от матриц $X_1, \ldots, X_m$ мы будем понимать функцию от матриц, определяемую всеми аналитическими элементами, которые могут быть получены аналитическим продолжением ряда (91), сходящегося в некоторой области (92).

Мы будем называть ряд (91) абсолютно сходящимся в случае сходимости ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} |X_{j_1}|\,|X_{j_2}| \ldots |X_{j_\nu}|\,|\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}|. \tag{97}$$

Обозначим далее через $\alpha^{(\nu)}$ наибольший из модулей

$$|\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}| \qquad (j_1, j_2, \ldots, j_\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

В силу равенства

$$\sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} |X_{j_1}|\,|X_{j_2}| \ldots |X_{j_\nu}| = (|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_m|)^\nu \tag{99}$$

из сходимости ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} n^{\nu - 1} (\rho - \varepsilon)^\nu \alpha^{(\nu)} \tag{98}$$

при всяком сколь угодно малом положительном ε следует сходимость рядов (97) и (91) во всей области матриц

$$|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_m| < \| \rho \|. \tag{99}$$

При условии сходимости ряда (98), при любом сколь угодно малом положительном ε, мы будем называть функцию $F(X_1, \ldots, X_m)$ равномерно голоморфной в области (99). Функцию от матриц, голоморфную или равномерно голоморфную во всякой области матриц, будем называть целой или равномерно целой функцией от матриц. Из предыдущих соображений непосредственно вытекает следующий признак равномерной голоморфности функций от матриц. Если функция

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{(\nu)} \xi^\nu \tag{100}$$

голоморфна в круге $|\xi| < n\rho$, то функция от матриц (91) равномерно голоморфна в области (99), и обратно, если функция (91) равномерно голоморфна в области (99), то функция $f(\xi)$ голоморфна в круге $|\xi| < \rho n$.

§ 10. Теорема единственности. Теорема единственности разложения в ряд функций от матриц, установленная для функций от одной матрицы, для функций от нескольких матриц уже не имеет места. Одна и та же функция от матриц может представляться двумя рядами

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}; \qquad (101)$$

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \beta_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}, \qquad (102)$$

причем некоторые $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ будут отличны от $\beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$. Производя вычитание верхнего ряда из нижнего и обозначая $\beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} - \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ через $\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$, мы получим, что существуют тождественно равные нулю ряды от матриц — $X_1, \ldots, X_m$ с коэффициентами, не тождественно равными иулю

$$\gamma_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} \ldots X_{j_\nu} \gamma_{j_1 \ldots j_\nu} = 0. \qquad (103)$$

Для доказательства существования таких рядов рассмотрим две матрицы X_1 и X_2 порядка n и составим полином

$$f(X_1, X_2) = \sum_{j_1 \ldots j_{2\nu}}^{(1, 2)} X_{j_1} \ldots X_{j_{2\nu}} \alpha_{j_1 \ldots j_{2\nu}}$$

степени ν относительно матрицы X_1 и степени ν относительно матрицы X_2; таким образом ν индексов j равны 1, другие ν индексов равны 2. Очевидно, что всего коэффициентов α будет $\binom{2\nu}{\nu} = \frac{(2\nu)!}{(\nu!)^2}$.

Элементы матрицы $f(X_1, X_2)$, числом n^2, суть функции от элементов $\{X_1\}_{kl}$ и $\{X_2\}_{kl}$ матриц X_1 и X_2, однородные степени ν как относительно элементов $\{X_1\}_{kl}$, так и относительно элементов $\{X_2\}_{kl}$. Но число членов самого общего однородного полинома степени ν с n^2 переменными, как известно, есть $\binom{n^2+\nu-1}{\nu} = \frac{(n^2+\nu-1)!}{(n^2-1)!\,\nu!}$; следовательно, каждый элемент матрицы $f(X_1, X_2)$ будет после приведения подобных членов содержать $\left\{\frac{(n^2+\nu-1)!}{(n^2-1)!\,\nu!}\right\}^2$ членов. Приравнивая нулю коэффициенты этих членов во всех n^2 элементах матрицы $f(X_1, X_2)$, получаем $n^2\left(\frac{(n^2+\nu-1)!}{(n^2-1)!\,\nu!}\right)^2$ линейных однородных уравнений с переменными $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$. Но при достаточно большом ν окажется

$$\frac{(2\nu)!}{\nu!^2} > n^2 \left\{\frac{(n^2+\nu-1)!}{(n^2-1)!\,\nu!}\right\}^2. \qquad (104)$$

В самом деле, если положить

$$u_\nu = \frac{(2\nu)!}{(n^2+\nu-1)!^2},$$

то, очевидно, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = 4,$$

а отсюда почти непосредственно вытекает неравенство (104).

Итак, число коэффициентов $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ окажется больше числа однородных линейиых уравнений, которым эти коэффициенты должны удовлетворять; следовательно указанная система уравнений иаверное будет иметь отличные от нуля решения. В результате получаем полином с отличными от нуля коэффициеитами, тождественно равный нулю. Так например, для матриц второго порядка существуют зависящие от двух матриц полиномы 16-й степени, тождественно равные нулю.

Однако весьма важно отметить, что по отношению к матрицам любого порядка теорема единствениости разложения в ряд функции от матриц имеет место. Иными словами, если мы имеем два представления одной и той же функции от матриц (101) и (102), справедливые для матриц любого порядка, то непременно

$$\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = \beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}.$$

В самом деле, из (101) и (102) выводим (103). Но тогда ясно, что при каждом фиксированном ν должно быть

$$\sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} X_{j_1} \ldots X_{j_\nu} \gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = 0.$$

Покажем, что определенный коэффициент $\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = 0$; для этого примем во внимание только те индексы j, которые входят в этот коэффициент, а все остальные матрицы X_j примем равными нулю; перенумеровывая оставшиеся значки от 1 до r, получим, что

$$\sum_{j_1=1}^{r} \cdots \sum_{j_\nu=1}^{r} X_{j_1} \ldots X_{j_\nu} \gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = 0.$$

Допустим, что какой-либо значок j_k повторяется среди значков $j_1, \ldots, j_\nu$ не менее двух раз; положим тогда

$$X_{j_k} = Y_{j_k} + tY_{r+1}, \quad X_\varkappa = Y_\varkappa \qquad (\varkappa \neq j_k)$$

и отберем в сумме коэффициент при t, т. е. члены, содержащие Y_{r+1} только один раз. В силу произвольности выбора матриц X сумма этих членов должна тожественно равняться нулю

$$\sum_{j_1=1}^{r+1} \cdots \sum_{j_\nu=1}^{r+1} Y_{j_1} \ldots Y_{j_\nu} \delta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = 0,$$

где очевидно

$$\delta_{j_1 \ldots j_\varkappa + 1,\; j_{\varkappa+2}, \ldots j_\nu} = \gamma_{j_1 \ldots j_\varkappa j_k j_{\varkappa+2} \ldots j_\nu}.$$

Продолжая таким же образом дальше, придем к выводу, что

$$\sum_{j_1=1}^{\nu} \cdots \sum_{j_\nu=1}^{\nu} Z_{j_1} \ldots Z_{j_\nu} \varepsilon_{j_1 \ldots j_\nu} = 0,$$

причем все значки $j_1 \ldots j_\nu$ между собой различны, и первоначальный коэффициент $\gamma_{j_1 \ldots j_\nu}$ равен одному из коэффициентов $\varepsilon_{j_1 \ldots j_\nu}$. Но все эти коэффициенты $\varepsilon_{j_1 \ldots j_\nu} = 0$; в самом деле, рассматривая например $\varepsilon_{1, 2, \ldots, \nu}$, примем, что $Z_1, \ldots, Z_\nu$ суть матрицы $\nu+1$-го порядка

$$Z_1 = \delta_{12}, \quad Z_2 = \delta_{23}, \ldots, \quad Z_\nu = \delta_{\nu, \nu+1},$$

где под матрицей $\delta_{\alpha\beta}$ мы понимаем матрицу с элементами

$$\{\delta_{\alpha\beta}\}_{kl} = 0, \quad \text{если } k \neq \alpha \quad \text{или } l \neq \beta$$

$$\{\delta_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta} = 1;$$

очевидно, что $Z_1 Z_2 \ldots Z_\nu = \delta_{1, \nu+1}$, а все остальные произведения $Z_{j_1} \ldots Z_{j_\nu} = 0$. Поэтому $\mathcal{E}_{12\ldots\nu} = 0$ и точно также докажем, что все $\mathcal{E}_{j_1 \ldots j_\nu} = 0$ и значит $\gamma_{j_1 \ldots j_\nu} = 0$, что и требовалось доказать.

§ 11. Основные теоремы о функциях от нескольких матриц. Рассмотрим теперь правила действий с рядами матриц, а именно вопросы об отыскании матрицы, обратной данному ряду матриц, об умножении рядов матриц и т. д.

Мы будем устанавливать теоремы для функций от матриц, равномерно голоморфных в области

$$|X_1| + \ldots + |X_m| < \|\rho\|,$$

причем будем давать доказательства так, чтобы они могли быть применены и к рядам от бесконечно многих матриц (такие ряды мы будем рассматривать в §§ 14 и 15).

Рассмотрим два ряда от матриц

$$F(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 \ldots j_\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu,$$

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} \ldots X_{j_\nu} \beta_{j_1 \ldots j_\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\beta]_\nu.$$

Если для всяких значков $\beta_{j_1 \ldots j_\nu} \geqslant |\alpha_{j_1 \ldots j_\nu}|$, то ряд $H(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ мы будем называть мажорантиым для ряда $F(X_1, \ldots, X_m)$. Если ряд $F(X_1, \ldots, X_m)$ мажорируется рядом

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{(\nu)} (X_1 + \ldots X_m)^\nu$$

и если радиус сходимости ряда

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{(\nu)} \xi^{(\nu)}$$

не меньше ρn, то функция $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ будет, как мы знаем, равномерно голоморфной в области

$$|X_1| + \ldots + |X_m| < \|\rho\|.$$

В этом случае найдется, следовательно, при всяком сколь угодно малом положительном ε такое положительное число g, что для любого коэффициента будем иметь оценку

$$|\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}| < \frac{g}{(n\rho')^\nu}, \tag{105}$$

где $\rho' = \rho - \varepsilon$. Обратно, из наличия этой оценки вытекает равномерная голоморфность функции $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ в области

$$|X_1| + \ldots + |X_m| < \|\rho'\|,$$

причем за мажоранту ряда $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ можно в этом случае взять

$$G(X_1, \ldots, X_m) = g \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{X_1 + \ldots + X_m}{n\rho'} \right)^\nu = g \left(I - \frac{X_1 + \ldots + X_m}{n\rho'} \right)^{-1} \tag{106}$$

Так как при $Y = \|\rho\| < \left\| \frac{1}{n} \right\|$ имеем

$$(I - Y)^{-1} = I + Y + Y^2 + \ldots = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \| n^{\nu-1} \rho^\nu \| \leqslant \left\| \frac{1}{1 - n\rho} \right\|,$$

$$Y + Y^2 + \ldots \leqslant \left\| \frac{\rho}{1 - n\rho} \right\|,$$

то в области

$$|X_1| + \ldots + |X_m| < \|\rho''\| < \|\rho'\| \tag{107}$$

мы будем иметь следующую оценку функции F:

$$|F(X_1, \ldots, X_m)| < \left\| g \left(1 - \frac{\rho''}{\rho'}\right)^{-1} \right\|. \tag{108}$$

Совершенно аналогично, для функции

$$F_1(X_1 \ldots, X_m) = \sum_{\nu=1}^{\infty} [X\alpha]_\nu \tag{109}$$

мы будем иметь мажоранту

$$G_1(X_1, \ldots, X_m) = g \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{X_1 + \ldots + X_m}{n\rho'} \right)^\nu =$$

$$= \frac{g}{n\rho'} (X_1 + \ldots + X_m) \left(I - \frac{X_1 + \ldots + X_m}{n\rho'} \right)^{-1} \tag{110}$$

и оценку в области (107)

$$|F_1(X_1, \ldots, X_m)| < \left\| \frac{g\rho''}{n\rho'} \left(1 - \frac{\rho''}{\rho'}\right)^{-1} \right\|. \tag{111}$$

Теорема V. *Если функции от матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$:*

$$U = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu, \tag{112}$$

$$V = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\beta]_\nu \tag{113}$$

равномерно голоморфны в области

$$|X_1| + \ldots + |X_m| < \|\rho\|, \tag{114}$$

то их произведение UV есть функция, равномерно голоморфная в той же области и представимая рядом матриц

$$UV = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\gamma]_\nu, \tag{115}$$

где коэффициенты $\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ определяются формулами

$$\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\mu} \beta_{j_{\mu+1} \ldots j_\nu} = \alpha_0 \beta_{j_1 \ldots j_\nu} + \alpha_{j_1} \beta_{j_2 \ldots j_\nu} + \ldots + \alpha_{j_1 \ldots j_{\nu-1}} \beta_{j_\nu} + $$
$$+ \alpha_{j_1 \ldots j_\nu} \beta_0, \tag{116}$$

причем $\alpha_{j_1 \ldots j_\mu}$ при $\mu = 0$ и $\beta_{j_{\mu+1} \ldots j_\nu}$ при $\mu = \nu$ надо заменить соответственно на α_0 и β_0.

Доказательство. Производя перемножение абсолютно сходящихся рядов U и V, мы получаем для их произведения, очевидно, ряд (115) с коэффициентами, определяющимися по формулам (116). При этом из оценок

$$|\alpha_{j_1\ldots j_\nu}| < \frac{g}{(n\rho')^\nu},$$

$$|\beta_{j_1\ldots j_\nu}| < \frac{h}{(n\rho')^\nu},$$

вытекающих из равномерной голоморфности функций (112) и (113) ($\rho' = \rho - \varepsilon$, g и h — некоторые положительные числа), следует оценка

$$|\gamma_{j_1\ldots j_\nu}| < \frac{(\nu+1)\, gh}{(n\rho')^\nu} = \gamma^{(\nu)}.$$

Так как ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma^{(\nu)} \xi^\nu$$

имеет радиусом сходимости $n\rho'$, то UV есть функция, равномерно голоморфная во всякой области

$$|X_1| + \ldots + |X_m| < \| \rho' \|,$$

следовательно, равномерно голоморфная в области (114).

Теорема VI. *Пусть*

$$Z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots, r)} Y_{j_1} \ldots Y_{j_\nu} \beta_{j_1\ldots j_\nu} \tag{117}$$

есть функция от матриц $Y_1, \ldots, Y_r$, равномерно голоморфная в области

$$|Y_1| + \ldots + |Y_r| < \| \sigma \|, \tag{118}$$

и пусть функции

$$Y_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{119}$$

суть функции от матриц $X_1, \ldots, X_m$, равномерно голоморфные в некоторой области

$$|X_1| + \ldots + |X_m| < \| \rho \|, \tag{120}$$

тогда Z есть функция от матриц $X_1, \ldots, X_m$, равномерно голоморфная в некоторой окрестности нулевых матриц (т. е. в области вида (120) с другим значением ρ), представимая рядом матриц

$$Z = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\gamma]_\nu, \tag{121}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$\gamma_0 = \beta_0, \quad \gamma_{j_1} = \sum_{h_1=1}^{r} \alpha_{j_1}^{(h_1)} \beta_{h_1}, \tag{122}$$

$$\gamma_{j_1\ldots j_\nu} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{h_1 h_2 \ldots h_\mu}^{(1, 2, \ldots, r)} \sum_{0 < \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} \alpha_{j_1\ldots j_{\varkappa_1}}^{(h_1)} \alpha_{j_{\varkappa_1+1}\ldots j_{\varkappa_2}}^{(h_2)} \ldots \alpha_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}\ldots j_\nu}^{(h_\mu)} \beta_{h_1\ldots h_\mu}.$$

Доказательство. Подстановка рядов (119) в ряд (117) дает формальное равенство (121), причем коэффициенты $\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ должны быть определены формулами (122). Матрицы $Y_1, \ldots, Y_r$ должны удовлетворять условию (118). Но по условию равномерной голоморфности функций Y_j и Z при заданном положительном ε и $\rho' = \rho - \varepsilon$, $\sigma' = \sigma - \varepsilon$ можно выбрать положительные числа g и h так, что будут выполняться неравенства

$$\sum_{j=1}^{r} |\alpha_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}| < \frac{g}{(n\rho')^\nu}, \quad |\beta_{j_1\ldots j_\nu}| < \frac{h}{(n\sigma')^\nu}.$$

Возьмем матрицы $X_1 \ldots X_m$ из окрестности

$$|X_1| + \ldots + |X_m| < \|\rho''\| < \|\rho'\|,$$

тогда по формуле (111)

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} |X_{j_1}| \ldots |X_{j_\nu}| |\alpha_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}| < \left\| \frac{g\rho''}{n\rho'} \left(1 - \frac{\rho''}{\rho'}\right)^{-1} \right\|.$$

Подберем теперь число ρ'' из условия

$$\frac{g\rho''}{n\rho'} \left(1 - \frac{\rho''}{\rho'}\right)^{-1} < \sigma',$$

откуда

$$\rho'' < \frac{n\rho'\sigma'}{g + n\sigma'},$$

тогда будут выполнены условия

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} |X_{j_1}| \ldots |X_{j_\nu}| \, |\alpha_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}| < \|\sigma'\| < \|\sigma\|. \tag{123}$$

После подстановки в абсолютно сходящийся ряд (117) рядов (119), абсолютно сходящихся в области

$$|X_1| + \ldots + |X_m| < \left\| \frac{n\rho'\sigma'}{g + n\sigma'} \right\| \tag{124}$$

и удовлетворяющих условию (123), мы получим ряд (121), абсолютно сходящийся в той же области (124). Этот ряд определяет функцию, равномерно голоморфную в этой области.

В самом деле, ряд для Z мажорируется рядом

$$h \left(I - \frac{1}{n\sigma'} \sum_{j=1}^{r} Y_j\right)^{-1};$$

ряд же

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} X_{j_1} \ldots X_{j_\nu} |\alpha_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}|$$

мажорируется в силу (110) рядом

$$\frac{g}{n\rho'} \sum_{j=1}^{m} X_j \left(I - \frac{1}{n\rho'} \sum_{j=1}^{m} X_j\right)^{-1}$$

или, если ввести обозначение

$$\sum_{j=1}^{m} X_j = \mathfrak{X};$$

рядом

$$\mathfrak{Y} = \frac{g}{n\rho'} \mathfrak{X} \left(I - \frac{\mathfrak{X}}{n\rho'}\right)^{-1}$$

Поэтому разложение Z в ряд по матрицам $X_1, X_2, \ldots, X_m$ будет мажорироваться рядом

$$\mathfrak{Z} = h\left(I - \frac{1}{n\sigma'}\mathfrak{Y}\right)^{-1} = h\left[I - \frac{g\mathfrak{X}}{n^2\rho'\sigma'\left(I - \frac{\mathfrak{X}}{n\rho'}\right)}\right]^{-1} =$$

$$= h\left(I - \frac{\mathfrak{X}}{n\rho'}\right)\left(I - \frac{(g+n\sigma')\mathfrak{X}}{n^2\rho'\sigma'}\right)^{-1} = h + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{gh}{n^2\rho'\sigma'}\left(\frac{g+n\sigma'}{n^2\rho'\sigma'}\right)^{\nu-1}\mathfrak{X}^{\nu}.$$

Итак, мы имеем оценку

$$|\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}| < \frac{gh}{n^2\rho'\sigma'}\left(\frac{g+n\sigma'}{n^2\rho'\sigma'}\right)^{\nu-1} = \gamma^{(\nu)},$$

доказывающую равномерную голоморфность функции Z в области (124), ибо ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma^{(\nu)}\xi^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{gh}{n^2\rho'\sigma'}\left(\frac{g+n\sigma'}{n^2\rho'\sigma'}\right)^{\nu-1}\xi^{\nu}$$

сходится в круге

$$|\xi| < \frac{n^2\rho'\sigma'}{g+n\sigma'}.$$

Следствие. Если Z есть равномерно целая функция от матриц $Y_1, \ldots, Y_r$, а последние матрицы суть равномерно голоморфные функции от матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$ в области (120), то матрица Z будет равномерно голоморфной функцией от матриц $X_1, \ldots, X_m$ в той же области, ибо в этом случае число σ' можно взять сколь угодно большим, а тогда из формулы (124) следует равномерная голоморфность ряда (121) во всякой области

$$|X_1| + \ldots + |X_m| < \|\rho'\|.$$

Теорема VII. *Пусть*

$$Y = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} X_{j_1}\ldots X_{j_\nu}\alpha_{j_1\ldots j_\nu} \tag{125}$$

есть функция от матриц $X_1, \ldots, X_m$, равномерно голоморфная в области

$$|X_1| + \ldots + |X_m| < \|\rho\|, \tag{126}$$

и пусть $\alpha_0 \neq 0$, тогда обратная матрица Y^{-1} есть также функция от матриц $X_1, \ldots, X_m$, равномерно голоморфная в некоторой окрестности нулевых матриц и представимая рядом матриц

$$Y^{-1} = \frac{1}{\alpha_0} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} X_{j_1}\ldots X_{j_\nu}\overset{*}{\alpha}_{j_1\ldots j_\nu}, \tag{127}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$\overset{*}{\alpha}_{j_1\ldots j_\nu} = \sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{0<\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu}\frac{(-1)^{\mu}}{\alpha_0^{\mu+1}}\alpha_{j_1\ldots j_{\varkappa_1}}\alpha_{j_{\varkappa_1+1}\ldots j_{\varkappa_2}}\ldots\alpha_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}\ldots j_\nu} \tag{128}$$

Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему, положив

$$Y_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty}[X_\alpha]_\nu,$$

$$Z = Y^{-1} = (\alpha_0 + Y_1)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}Y_1^{\nu}}{\alpha_0^{\nu+1}}.$$

Теорема VIII. *Пусть матрицы*

$$Y_j = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} X_{j_1}\ldots X_{j_\nu}\alpha_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)} \quad (j = 1, 2, \ldots m) \tag{129}$$

суть функции от матриц $X_1, \ldots, X_m$, равномерно голоморфные в области

$$|X_1| + \ldots + |X_m| < \|\rho\|, \tag{130}$$

и пусть определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} \ldots \alpha_m^{(1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_1^{(m)} \ldots \alpha_m^{(m)} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, тогда существует и притом единственное решение системы (129), представимое рядами матриц,

$$X_j = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} Y_{j_1}\ldots Y_{j_\nu}\beta_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}, \tag{131}$$

не имеющими свободных членов; эти ряды матриц суть равномерно голоморфные функции от $Y_1, \ldots, Y_m$ в некоторой окрестности нулевых матриц, причем коэффициенты этих рядов определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} \beta_{j_1}^{(j)} &= \frac{\Delta_{j_1 j}}{\Delta} \\ \beta_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)} &= -\sum_{\mu=2}^{\nu}\sum_{h_1\ldots h_\mu}^{(1,2,\ldots,m)}\sum_{0<\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu}\sum_{\varkappa=1}^{m}\beta_{j_1\ldots j_{\varkappa_1}}^{(h_1)}\ldots\beta_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}\ldots j_\nu}^{(h_\mu)}\alpha_{h_1\ldots h_\mu}^{(\varkappa)}\frac{\Delta_{\varkappa j}}{\Delta} \end{aligned}\right\}, \tag{132}$$

где Δ_{hj} есть алгебраическое дополнение элемента $\alpha_j^{(h)}$ определителя Δ, стоящего на h линии в j колонне определителя Δ.

Доказательство. Представим уравнения (129) в форме

$$X_1\alpha_1^{(j)} + X_2\alpha_2^{(j)} + \ldots + X_m\alpha_m^{(j)} = Y_j - \sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} X_{j_1}\ldots X_{j_\nu}\alpha_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}; \; (j = 1, 2, \ldots, m)$$

считая теперь правые части известными функциями, решим эту систему, как систему m линейных уравнений с m неизвестными $X_1, \ldots, X_m$. В результате, вводя обозначения

$$\overset{*}{\alpha}{}_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)} = -\frac{1}{\Delta}\sum_{\varkappa=1}^{m}\alpha_{j_1\ldots j_\nu}^{(\varkappa)}\Delta_{\varkappa j}, \qquad \beta_{j_1}^{(j)} = \frac{\Delta_{j_1 j}}{\Delta},$$

получим

$$X_j = \beta_1^{(j)}Y_1 + \ldots + \beta_m^{(j)}Y_m + \sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} X_{j_1}\ldots X_{j_\nu}\overset{*}{\alpha}{}_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}.$$

Отыскивая решение этих уравнений в виде рядов (131) и применяя метод неопределенных коэффициентов, мы найдем для коэффициентов этих рядов выражения (132), определяющиеся единственным образом. В силу сделанного условия о равномерной голоморфности функций Y_j в области (130) имеем оценку

$$\sum_{j=1}^{m}|\alpha_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}| < \frac{g'}{(n\rho')^{\nu}},$$

где $\rho' = \rho - \varepsilon \, (\varepsilon > 0)$, а g' — положительная постоянная, зависящая от ε. Пусть еще при всех j и j_1 $|\beta_{j_1}^{(j)}| < \beta'$, тогда имеем оценку

$$\sum_{j=1}^{m} |\overset{*}{\alpha}{}_{j_1 \dots j_\nu}^{(j)}| < \frac{g}{(n\rho')^\nu},$$

где $g = g'\beta' m$.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$U = \beta V + \sum_{\nu=2}^{\infty} U^\nu \frac{g}{(n\rho')^\nu}, \tag{133}$$

где $V = Y_1 + \dots + Y_m$ и $\beta = m\beta'$. Решение U этого уравнения, представленное в форме ряда от матриц $Y_1, \dots, Y_m$, не имеющего свободного члена и отыскиваемое по способу неопределенных коэффициентов, имеет очевидно коэффициенты, большие, чем коэффициенты ряда

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu}^{(1, 2, \dots, m)} Y_{j_1} \dots Y_{j_\nu} |\beta_{j_1 \dots j_\nu}^{(j)}|,$$

так что функция U является мажорантой для всех рядов (131). Но функцию U легко найти непосредственно. В самом деле, рассмотрим уравнение с численными переменными ξ и η:

$$\xi = \beta\eta + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{g}{(n\rho')^\nu} \xi^\nu = \beta\eta + \frac{g\xi^2}{n\rho'(n\rho' - \xi)}.$$

Это квадратное уравнение

$$(g + n\rho')\xi^2 - n\rho'\xi(\beta\eta + n\rho') + \beta\eta n^2\rho'^2 = 0$$

имеет два корня

$$\xi = \frac{n\rho'(\beta\eta + n\rho') \pm n\rho' \sqrt{(\beta\eta + n\rho')^2 - 4\beta\eta(g + n\rho')}}{2(g + n\rho')}.$$

Тот корень, который обращается в 0 при $\eta = 0$, может быть разложен в ряд по возрастающим степеням η

$$\xi = \beta\eta + \sum_{\nu=2}^{\infty} \beta^{(\nu)} \eta^\nu.$$

Этот ряд, все коэффициенты которого положительны, сходится, как показывает простое вычисление, в круге

$$|\eta| < \frac{n\rho' + 2g - 2\sqrt{gn\rho' + g^2}}{\beta}.$$

Поэтому получаем решение уравнения (133) в виде ряда

$$U = \beta V + \sum_{\nu=2}^{\infty} \beta^{(\nu)} V^\nu,$$

абсолютно сходящегося в области

$$|V| < \left\| \frac{n\rho' + 2g - 2\sqrt{gn\rho' + g^2}}{n\beta} \right\|.$$

Итак, ряд

$$U = \beta\,(Y_1 + \dots + Y_m) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \beta^{(\nu)} (Y_1 + \dots + Y_m)^\nu \tag{134}$$

есть равномерно голоморфная функция в области

$$|Y_1| + \dots + |Y_m| < \left\| \frac{n\rho' + 2g - 2\sqrt{gn\rho' + g^2}}{n\beta} \right\|. \tag{135}$$

Но ряд (134) является мажорантой для рядов (131), следовательно последние ряды тоже являются равномерно голоморфными функциями в области (135). Так как при

$$\eta_0 = \frac{n\rho' + 2g - 2\sqrt{gn\rho' + g^2}}{\beta}$$

ξ имеет значение

$$\xi_0 = n\rho' - n\rho' \sqrt{\frac{g}{g + n\rho'}},$$

то в области (135)

$$|U| = \left\| \beta \frac{\eta_0}{n} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \beta^\nu n^{\nu-1} \left(\frac{\eta_0}{n}\right)^\nu \right\| = \left\| \frac{\xi_0}{n} \right\| = \left\| \rho' \left(1 - \sqrt{\frac{g}{g + n\rho'}}\right) \right\|,$$

поэтому в области (135)

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu}^{(1, 2, \dots, m)} |Y_{j_1}| \dots |Y_{j_\nu}| \; |\beta_{j_1 \dots j_\nu}^{(j)}| < \|\rho'\|,$$

а следовательно от подстановки рядов (131) в правые части уравнений (129) мы получаем абсолютно сходящиеся ряды, которые поэтому можно перегруппировывать; в результате этой перегруппировки и приведения подобных членов в правых частях уравнений (129) окажутся Y_j. Итак, ряды (131) суть равномерно голоморфные функции от матриц $Y_1, \dots, Y_m$, удовлетворяющие уравнениям (129), так что теорема доказана.

Следствие. Если система (129) имеет вид

$$Y_j = X_j + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{(1, 2, \dots, m)} X_{j_1} \dots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 \dots j_\nu} \quad (j = 1, 2, \dots, m), \tag{136}$$

то ее решение, представимое рядами матриц, не имеющими свободных членов, имеет вид

$$X_j = Y_j + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{(1, 2, \dots, m)} Y_{j_1} \dots Y_{j_\nu} \beta_{j_1 \dots j_\nu}^{(j)}, \tag{137}$$

где

$$\beta_{j_1 \dots j_\nu}^{(j)} = -\sum_{\mu=2}^{\nu} \sum_{h_1 \dots h_\mu}^{(1, 2, \dots, m)} \sum_{0 < \varkappa_1 < \dots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} \beta_{j_1 \dots j_{\varkappa_1}}^{(h_1)} \dots \beta_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1} \dots j_\nu}^{(h_\mu)} \alpha_{h_1 \dots h_\mu}^{(j)}. \tag{138}$$

В этом случае можно принять $\beta' = \beta = 1$, так что решение (137) есть равномерно голоморфная функция матриц $Y_1, \dots, Y_m$ в области

$$|Y_1| + \dots + |Y_m| < \left\| \frac{n\rho' + 2g - 2\sqrt{n\rho' g + g^2}}{n} \right\|. \tag{139}$$

§ 12. Упрощение рядов от двух матриц второго порядка. В случае рядов от одной матрицы мы имели формулу Лагранжа — Сильвестера, представляющую сумму этого ряда в виде полинома $(n-1)$-ой степени от матрицы X. Проделаем нечто аналогичное в случае рядов от двух матриц второго порядка X_1 и X_2.

Обозначим характеристические числа матриц X_1 и X_2, соответственно через

$$\xi_1^{(1)}, \ \xi_1^{(2)} \ \text{и} \ \xi_2^{(1)}, \ \xi_2^{(2)}.$$

Введем теперь новые матрицы

$$\overline{X}_1 = X_1 - \xi_1^{(1)}, \quad \overline{X}_2 = X_2 - \xi_2^{(1)},$$

каждая из которых имеет одно характеристическое число равным нулю, вторые характеристические числа этих матриц обозначим соответственно через

$$\xi_1 = \xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}, \quad \xi_2 = \xi_2^{(2)} - \xi_2^{(1)}.$$

Правила действий с такими матрицами очень просты, а именно из общей формулы Лагранжа — Сильвестера для целой положительной степени матрицы Y, у которой характеристическими числами являются η_1 и η_2,

$$Y^p = \frac{\eta_2\eta_1^p - \eta_1\eta_2^p}{\eta_2 - \eta_1} + \frac{\eta_2^p - \eta_1^p}{\eta_2 - \eta_1}\, Y$$

сразу следует, что

$$\overline{X}_1^p = \xi_1^{p-1}\overline{X}_1, \quad \overline{X}_2^p = \xi_2^{p-1}\overline{X}_2. \tag{140}$$

Возьмем теперь произвольную матрицу 2-го порядка Z; матрица $Z\overline{X}$ имеет определитель, равный нулю (ибо определитель матрицы $\overline{X}$ есть 0), поэтому одно из характеристических чисел этой матрицы равно нулю. Но тогда мы можем применить к этой матрице только что выведенную формулу при $p = 2$; вводя еще обозначение

$$\sigma(Y) = \{Y\}_{11} + \{Y\}_{22} = \eta_1 + \eta_2 \tag{141}$$

следа матрицы Y и замечая, что неравное нулю характеристическое число матрицы $Z\overline{X}_1$ должно равняться $\sigma(Z\overline{X}_1)$, получаем

$$Z\overline{X}_1 Z\overline{X}_1 = \sigma(Z\overline{X}_1)\, Z\overline{X}_1. \tag{141}$$

Помножая обе части этого равенства слева на Z^{-1}, найдем равенство

$$\overline{X}_1 Z\overline{X}_1 = X_1\sigma(Z\overline{X}),$$

справедливое для любой матрицы Z.

Допустим теперь, что мы имеем функцию от двух матриц X_1 и X_2, равномерно голоморфиую в некоторой окрестиости нулевых матриц

$$F_1(X_1, X_2) = Z_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{(1,\,2)} X_{j_1} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 \ldots j_\nu}. \tag{142}$$

Подставляя сюда

$$X_1 = \xi_1^{(1)} + \overline{X}_1, \quad X_2 = \xi_2^{(1)} + \overline{X}_2,$$

мы сможем, предполагая $|\xi_1^{(1)}|$ и $|\xi_2^{(1)}|$ достаточно малыми, разложить $F_1(X_1, X_2)$ по степеням матриц $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$:

$$F_1(X_1, X_2) = F_1(\xi_1^{(1)} + \overline{X}_1, \xi_2^{(1)} + \overline{X}_2) = F(\overline{X}_1, \overline{X}_2) =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{(1,\,2)} \overline{X}_{j_1} \ldots \overline{X}_{j_\nu} \alpha_{j_1 \ldots j_\nu} \tag{143}$$

Коэффициенты этого ряда суть функции от $\xi_1^{(1)}$ и $\xi_2^{(1)}$, голоморфные в достаточно малой окрестности начала координат, а сумма всего ряда есть равномерно голоморфная фуикция от матриц $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$, в иекоторой окрестности нулевых матриц. Рассмотрим теперь ряд

$$F(\overline{X}_1, \overline{X}_2) = \alpha_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{q_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{q^s=0}^{\infty} \overline{X}_1^{p_1} \overline{X}_2^{q_1} \ldots \overline{X}_2^{q_s} \alpha_{1p_1 2q_1 \ldots 2q_s}, \tag{144}$$

где введено само собой понятное сокращение обозначений.

Воспользуемся формулами (140) и введем, предполагая $|\xi_1|$ и $|\xi_2|$ достаточно малыми, в рассмотрение следующие ряды

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_s=1}^{\infty} \xi_1^{p_1+\ldots+p_s-s}\, \xi_2^{q_1+\ldots+q_{s-1}-s+1}\, \alpha_{1p\ldots 1p_s} = \varphi_{11}^{(s-1)}(\xi_1, \xi_2)\\
&\sum_{q_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{q_s=1}^{\infty} \xi_1^{p_2+\ldots+p_s-s+1}\, \xi_2^{q_1+\ldots+q_s-s}\, \alpha_{2q_1\ldots 2q_s} = \varphi_{22}^{(s-1)}(\xi_1, \xi_2)\\
&\sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{q_s=1}^{\infty} \xi_1^{p_1+\ldots+p_s-s}\, \xi_2^{q_1+\ldots+q_s-s}\, \alpha_{1p_1\ldots 2q_s} = \varphi_{12}^{(s-1)}(\xi_1, \xi_2)\\
&\sum_{q_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_s=1}^{\infty} \xi_1^{p_2+\ldots+p_s-s+1}\, \xi_2^{q_1+\ldots+q_{s-1}-s+1}\, \alpha_{2q_1\ldots 1p_s} = \varphi_{21}^{(s-2)}(\xi_1, \xi_2),
\end{aligned}\right\} \tag{145}$$

тогда легко получим

$$F(\overline{X}_1, \overline{X}_2) = \alpha_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \overline{X}_1(\overline{X}_2\overline{X}_1)^{s-1} \varphi_{11}^{(s-1)}(\xi_1, \xi_2) + \sum_{s=1}^{\infty} \overline{X}_2(\overline{X}_1\overline{X}_2)^{s-1} \varphi_{22}^{(s-1)}(\xi_1, \xi_2) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} (\overline{X}_1\overline{X}_2)^s \varphi_{12}^{(s-1)}(\xi_1, \xi_2) + \sum_{s=2}^{\infty} (\overline{X}_2\overline{X}_1)^{s-1} \varphi_{21}^{(s-2)}(\xi_1, \xi_2). \tag{146}$$

Введем теперь обозначение

$$\sigma(\overline{X}_1\overline{X}_2) = \sigma(\overline{X}_2\overline{X}_1) = \rho,$$

и воспользуемся формулой (141), тогда получим

$$\overline{X}_1(\overline{X}_2\overline{X}_1)^{s-1} = \overline{X}_1\rho^{s-1}, \quad \overline{X}_2(\overline{X}_1\overline{X}_2)^{s-1} = \overline{X}_2\rho^{s-1},$$

$$(\overline{X}_1\overline{X}_2)^s = \overline{X}_1\overline{X}_2\rho^{s-1}, \quad (\overline{X}_2\overline{X}_1)^{s-1} = \overline{X}_2\overline{X}_1\rho^{s-2}.$$

Полагая наконец (мы опускаем входящие в формулы параметры $\xi_1^{(1)}$ и $\xi_2^{(1)}$):

$$\varphi_{ik}(\rho \mid \xi_1, \xi_2) = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s \varphi_{ik}^{(s)}(\xi_1, \xi_2), \qquad (i, k = 1, 2) \tag{147}$$

получим окончательную формулу

$$F(\overline{X}_1, \overline{X}_2) = \alpha_0 + \varphi_{11}(\rho \mid \xi_1, \xi_2)\, \overline{X}_1 + \varphi_{22}(\rho \mid \xi_1, \xi_2)\, \overline{X}_2 +$$

$$+ \varphi_{12}(\rho \mid \xi_1, \xi_2)\, \overline{X}_1\overline{X}_2 + \varphi_{21}(\rho \mid \xi_1, \xi_2)\, \overline{X}_2\overline{X}_1. \tag{148}$$

Заслуживает виимания один частный случай. Если инварианты матрицы X_1 суть

$$\sigma(X_1) = \xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)} \quad \text{и} \quad D(X_1) = \xi_1^{(1)}\xi_4^{(2)},$$

где $D(X_1)$ есть определитель матрицы X_1, то

$$\xi_1^{(1)} = \frac{\sigma(X_1) - \xi_1}{2}, \quad \xi_1 = \xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)} = \pm\sqrt{\sigma(X_1)^2 - 4D(X_1)}. \tag{149}$$

Заметим теперь, что

$$\rho = \sigma(\overline{X}_1\overline{X}_2) = \sigma\left((X_1 - \xi_1^{(1)})(X_2 - \xi_2^{(1)})\right) = \sigma(X_1X_2) - \xi_1^{(1)}\sigma(X_2) - \xi^{(1)}\sigma(X_1) +$$

$$+ \sigma(\xi_1^{(1)}\xi_2^{(1)}) = \sigma(X_1X_2) - \xi_1^{(1)}\sigma(X_2) - \xi_2^{(1)}\sigma(X_1) + 2\xi_1^{(1)}\xi_2^{(1)}$$

и на основании первой из формул (149) и аналогичной формулы для X_2:

$$\rho = \sigma(X_1 X_2) - \frac{\sigma(X_1)\,\sigma(X_2)}{2} + \frac{\xi_1 \xi_2}{2} = \sigma(X_1 X_2) - \frac{\sigma(X_1)\,\sigma(X_2)}{2} \pm$$
$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{[\sigma(X_1)^2 - 4D(X_1)]\,[\sigma(X_2)^2 - 4D(X_2)]}. \qquad (150)$$

Предположим теперь, что выполнено одно из двух условий

$$2\sigma(X_1 X_2) - \sigma(X_1)\,\sigma(X_2) \pm \sqrt{[\sigma(X_1)^2 - 4D(X_1)]\,[\sigma(X_2)^2 - 4D(X_2)]} = 0. \qquad (151)$$

Примем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \pm 1$, если имеем верхний знак, и $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \pm 1$, если имеем нижний знак. Тогда, если взять

$$\xi_1^{(1)} = \frac{1}{2}\,[\sigma(X_1) + \varepsilon_1 \sqrt{\sigma(X_1)^2 - 4D(X_1)}\,],$$

$$\xi_2^{(1)} = \frac{1}{2}\,[\sigma(X_2) + \varepsilon_2 \sqrt{\sigma(X_2)^2 - 4D(X_1)}\,],$$

т. е. если принять

$$\xi_1 = -\varepsilon_1 \sqrt{\sigma(X_1)^2 - 4D(X_1)}\,,\quad \xi_2 = -\varepsilon_2 \sqrt{\sigma(X_2)^2 - 4D(X_2)}\,,$$

то окажется $\rho = 0$ и следовательно ряд (148) приведется к

$$F_1(X_1, X_2) = F(\overline{X}_1, \overline{X}_2) = \alpha_0 + \varphi_{11}^{(0)}(\xi_1, \xi_2)\,\overline{X}_1 + \varphi_{22}^{(0)}(\xi_1, \xi_2)\,\overline{X}_2 +$$
$$+ \varphi_{12}^{(0)}(\xi_1, \xi_2)\,\overline{X}_1 \overline{X}_2 + \varphi_{21}^{(0)}(\xi_1, \xi_2)\,\overline{X}_1 \overline{X}_2. \qquad (152)$$

§ 13. Ряды следов. Ряды следов и матриц. Назовем инвариантной функцией от матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$

$$i(X) = i(X_1, X_2, \ldots, X_m)$$

скалярную функцию от элементов этих матриц, которая не меняется в том случае, если все эти матрицы подвергаются преобразованию подобия при помощи матрицы S с неравным нулю определителем, так что

$$i(SXS^{-1}, \ldots, SX_m S^{-1}) = i(X_1, \ldots, X_m). \qquad (153)$$

Основным инвариантом матрицы X является след этой матрицы

$$\sigma(X) = \sum_{k=1}^{n} \{X\}_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k;\quad \sigma(SXS^{-1}) = \sigma(X).$$

Как легко проверить, след произведения двух матриц не зависит от того, в каком порядке мы перемножаем эти матрицы

$$\sigma(XY) = \sigma(YX).$$

Для случая трех матриц мы получим отсюда

$$\sigma(XYZ) = \sigma(ZXY) = \sigma(YZX)$$

и аналогично для случая любого числа матриц

$$\sigma(X_1 X_2 \ldots X_m) = \sigma(X_m X_1 \ldots X_{m-1}) = \ldots = \sigma(X_2 \ldots X_m X_1), \qquad (154)$$

т. е. при циклической перестановке матриц след их произведения не меняется. Так как

$$(SX_{j_1}S^{-1})\,(SX_{j_2}S^{-1}) \ldots (SX_{j_\nu}S^{-1}) = SX_{j_1} \ldots X_{j_\nu}S^{-1},$$

то

$$\sigma(SX_j S^{-1} SX_{j_2} S^{-1} \ldots SX_{j_\nu} S^{-1}) = \sigma(SX_{j_1} \ldots X_{j_\nu} S^{-1}) = \sigma(X_{j_1} \ldots X_{j_\nu}),$$

так что все следы $\sigma(X_{j_1} \ldots X_{j_\nu})$ являются инвариантными функциями.

Рассмотрим однородный полином степени ν от элементов матриц $X_1, \ldots, X_m$:

$$i_\nu(X) = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu_1 + \ldots + \mu_\lambda = \nu} \sum_{j_1' \ldots j_{p_1}'}^{(1, 2, \ldots m)} \ldots \sum_{j_1^\lambda \ldots j_{\mu_\lambda}^\lambda}^{(1, 2, \ldots m)} \sigma(X_{j_1'} \ldots X_{j_{\mu_1}'}) \ldots \sigma(X_{j_1^\lambda} \ldots X_{j_{\mu_\lambda}^\lambda}) \times$$
$$\times \beta^{(\lambda)}_{j_1' \ldots j_{\mu_1}' \ldots j_1^\lambda \ldots j_{\mu_\lambda}^\lambda}, \qquad (155)$$

в котором суммы формы $\sum\limits_{j_1^\varkappa \ldots j_{\mu_\varkappa}^\varkappa}^{(1, 2, \ldots m)}$ распространяются на все значения индексов $j_1^\varkappa, \ldots, j_{\mu_\varkappa}^\varkappa = 1, 2, \ldots, m$, не получающиеся одна из другой циклической перестановкой. Из предыдущего ясно, что полином (155), который для краткости мы обозначим через

$$i_\nu(X) = [\,|\mathfrak{X}\beta|\,]_\nu,$$

есть инвариантная функция от системы матриц X.

Сумма таких полиномов

$$i(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} i_\nu(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [\,|\mathfrak{X}\beta|\,]_\nu \qquad (156)$$

в случае сходимости этого ряда дает очевидно инвариантную функцию. Ряд (156) мы будем называть рядом следов.

Введем в рассмотрение еще ряды следов и матриц, имеющие вид

$$F(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} [\mathfrak{X}\alpha^{(\nu)}]_\mu\,[\,|\mathfrak{X}_\beta^{(\nu)}|\,]_{\nu-\mu}, \qquad (157)$$

сумма такого ряда, в случае его сходимости, обладает следующим свойством:

$$F(SX_1S^{-1}, \ldots, SX_mS^{-1}) = SF(X_1, X_2, \ldots, X_m)\,S^{-1}. \qquad (158)$$

Ряды (156) и (157) в том случае, когда они сходятся для любых матриц $X_1, \ldots, X_m$, определяют целые функции от этих матриц. Допустим теперь, что мы имеем обычный ряд матриц

$$F(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu, \qquad (159)$$

определяющий функцию от матриц $X_1, \ldots, X_m$, голоморфную в окрестности нулевых матриц. Допустим далее, что мы можем найти такую скалярную функцию от матриц $X_1, \ldots X_m$, целую и инвариантную

$$i(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [\,|X\gamma|\,]_\nu, \qquad (160)$$

что по умножении на нее ряда (159) и после перегруппировки членов однородного измерения мы получим ряд следов и матриц, дающих целую функцию

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} [\,|X\gamma|\,]_{\nu-\mu}\,[X\alpha]_\mu\right). \qquad (161)$$

В этом случае мы имеем для матриц, близких к нулевым, представление

$$F(X_1, \ldots, X_m) = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} [\,|X\gamma|\,]_{\nu-\mu}\,[X\alpha]_\mu}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} [\,|X\gamma|\,]_\nu} \qquad (162)$$

в виде отношения ряда от матриц и следов к ряду от следов, причем оба ряда определяют целые функции от матриц. Будем в этом случае называть матрицу $F(X_1, \ldots, X_m)$ мероморфной функцией от матриц $X_1, \ldots, X_m$. Те матрицы $X_1, \ldots, X_m$, для которых знаменатель в (162) обращается в нуль, являются, вообще говоря, особенностями мероморфной функции $F(X_1, \ldots, X_m)$. Очевидно, что формула (162) позволяет найти для мероморфной функции $F(X_1, \ldots, X_m)$ аналитическое ее продолжение для любой системы матриц. При этом элементами матрицы $F(X_1, \ldots, X_m)$ являются очевидно отношения двух целых функций от элементов матриц $X_1, \ldots, X_m$, т. е. мероморфные функции от этих элементов.

ГЛАВА III.

ФУНКЦИИ ОТ БЕСКОНЕЧНО-МНОГИХ МАТРИЦ.

§ 14. Определение функции от бесконечно-многих матриц. Рассмотрим систему бесконечно-многих переменных матриц порядка n:

$$X_1, X_2, \ldots, X_p, \ldots,$$

которую будем коротко обозначать через $\mathfrak{X}$.

Если ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p|,$$

сходится, будем называть систему матриц $\mathfrak{X}$ регулярной.

Регулярные системы матриц $\mathfrak{X}$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho\|, \tag{163}$$

где ρ — положительное число, будем называть принадлежащими некоторой окрестности нулевых матриц.

Рассмотрим систему постоянных скалярных коэффициентов:

$$\alpha_0,\ \alpha_{p_1 p_2 \ldots p_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

которую будем коротко обозначать через α. Введем далее следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= [X\alpha]_0, \\ \sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} \alpha_{p_1 \ldots p_\nu} &= [X\alpha]_\nu \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

для однородных полиномов от рассматриваемых матриц. При этом величина суммы не должна зависеть от порядка, в котором происходит суммирование. Как известно, необходимым и достаточным условием для этого является сходимость

$$\sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} |X_{p_1} \ldots X_{p_\nu}|\, |\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}|.$$

Суммы, аналогичные (164), получающиеся из них путем замены каждого члена его модулем, обозначим через

$$\left.\begin{aligned} |\alpha_0| &= [\,|X\alpha|\,]_0, \\ \sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} |X_{p_1}| \ldots |X_{p_\nu}|\, |\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}| &= [\,|X\alpha|\,]_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{165}$$

Если сделать предположение об ограниченности всех коэффициентов $\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}$, т. е. если считать, что

$$|\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}| \leqslant \alpha^{(\nu)} \qquad (p_1, p_2, \ldots = 1, 2, \ldots), \tag{166}$$

то ряд (165) будет сходящимся для любой регулярной системы матриц, а следовательно ряд (164) будет абсолютно сходящимся для любой регулярной системы матриц. В самом деле, из (165) и (166) следует, что

$$[\,|X\alpha|\,]_\nu = \sum_{p_1=1}^{\infty}\dots\sum_{p_\nu=1}^{\infty}|X_{p_1}|\dots|X_{p_\nu}|\,|\alpha_{p_1\dots p_\nu}| \leqslant \alpha^{(\nu)}\sum_{p_1=1}^{\infty}\dots\sum_{p_\nu=1}^{\infty}|X_{p_1}|\dots|X_{p_\nu}| =$$

$$= \alpha^{(\nu)}\Big(\sum_{p=1}^{\infty}|X_p|\Big)^\nu < \alpha^{(\nu)}\|\rho\|^\nu = \alpha^\nu\|n^{\nu-1}\rho^\nu\|. \tag{167}$$

Можно показать, что, обратно, ограниченность всех коэффициентов $\alpha_{p_1\dots p_\nu}$ является необходимым условием сходимости ряда (164) для любой регулярной системы матриц.

Рассмотрим теперь следующий ряд от бесконечно многих матриц $X_1, X_2, \dots$

$$F(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}[X\alpha]_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(\sum_{p_1=1}^{\infty}\dots\sum_{p_\nu=1}^{\infty}X_{p_1}\dots X_{p_\nu}\alpha_{p_1\dots p_\nu}\Big), \tag{168}$$

причем предположим, что для всякого фиксированного ν совокупность коэффициентов $\alpha_{p_1\dots p_\nu}$ ограничена, так что

$$|\alpha_{p_1\dots p_\nu}| \leqslant \alpha^{(\nu)} \qquad (\nu=1,2,\dots;\ p_1, p_2,\dots,p_\nu=1,2,\dots), \tag{169}$$

и что в ряде (168) суммирование производится сначала по индексам p, а затем по ν. Если этот ряд сходится для всякой регулярной системы матриц, принадлежащей некоторой окрестности (163) нулевых матриц, то мы будем говорить, что ряд (168) определяет функцию от матриц $\mathfrak{X}$, голоморфную в указанной окрестности нулевых матриц.

Если ряд (168) сходится для любой регулярной системы матриц $\mathfrak{X}$, то мы будем говорить, что он определяет целую функцию от матриц $\mathfrak{X}$. Если при всех ν и при всех индексах $p_1,\dots,p_\nu$ мы имеем неравенство

$$|\alpha_{p_1\dots p_\nu}| \leqslant \alpha^{(\nu)} \qquad (\nu=1,2,\dots;\ p_1, p_2,\dots=1,2,\dots)$$

и если радиус сходимости ряда от комплексной переменной ξ

$$f(\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha^{(\nu)}\xi^\nu \tag{170}$$

равен $n\rho$, то ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}[\,|X\alpha|\,]_\nu$$

сходится в области

$$\sum_{p=1}^{\infty}|X_p| < \|\rho\|.$$

В самом деле, если

$$\sum_{p=1}^{\infty}|X_p| \leqslant \|\rho-\varepsilon\|,$$

где ε — какое-либо положительное число, то по формуле (167)

$$[\,|X\alpha|\,]_\nu \leqslant \alpha^\nu\|n^{\nu-1}(\rho-\varepsilon)^\nu\|$$

и следовательно

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}[\,|X\alpha|\,]_\nu \leqslant \frac{1}{n}\|f(n\rho-n\varepsilon)\|.$$

Сумма ряда (167) называется в случае сходимости ряда (170) в круге радиуса $n\rho$ равномерно голоморфной функцией от матриц $\mathfrak{X}$ в области (163).

Если функция (170) целая, то сумму ряда (167) мы будем называть равномерно целой функцией от матриц $\mathfrak{X}$.

Как и в случае функций от нескольких матриц, теорема об единственности разложения функции от матриц $\mathfrak{X}$ в ряд (167) не имеет места, если говорить о матрицах фиксированного порядка. Если же мы рассматриваем функции от матриц $\mathfrak{X}$ и требуем, чтобы равенство

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}[X\alpha]_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}[X\beta]_\nu \tag{171}$$

имело место для любых регулярных систем матриц любого порядка, принадлежащих окрестности (163), то непременно должно быть

$$\alpha_{p_1\dots p_\nu} = \beta_{p_1\dots p_\nu} \qquad (\nu=1,2,\dots;\ p_1, p_2,\dots=1,2).$$

В самом деле, рассмотрим определенные значки $p_1^*,\dots,p_\nu^*$ и положим все матрицы X равными нулю, кроме $X_{p_1^*},\dots,X_{p_\nu^*}$, тогда из (171) получим аналогичное равенство между двумя рядами от конечного числа матриц, из которого выведем требуемую формулу:

$$\alpha_{p_1^*\dots p_\nu^*} = \beta_{p_1^*\dots p_\nu^*}.$$

§ 15. Основные теоремы о функциях от бесконечно-многих матриц. Для функций от системы бесконечно-многих матриц $\mathfrak{X}$, равномерно голоморфных в некоторой окрестности нулевых матриц, можно высказать теоремы, аналогичные доказанным в § 11 теоремам о функциях нескольких матриц.

Как в § 11, можно установить, что если ряд

$$F(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}[X\alpha]_\nu \tag{172}$$

есть равномерно голоморфная функция в области

$$\sum_{p=1}^{\infty}|X_p| < \|\rho\|,$$

то имеет место оценка

$$|\alpha_{p_1\dots p_\nu}| \leqslant \frac{g}{(n\rho')^\nu} \qquad (\nu=1,2,\dots;\ p_1\ p_2,\dots,=1,2,\dots) \tag{173}$$

где $\rho'=\rho-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, а g — некоторое положительное число, зависящее от данного ряда и от ε.

Обратно, из оценки (173) вытекает равномерная голоморфность функций (172) и

$$F_1(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=1}^{\infty}[X\alpha] \tag{174}$$

в области

$$\sum_{p=1}^{\infty}|X_p| < \|\rho\|, \tag{175}$$

причем за мажоранты рядов (172) и (174) можно взять

$$G(\mathfrak{X}) = g\Big(I - \frac{1}{n\rho'}\sum_{p=1}^{\infty}X_p\Big)^{-1}, \tag{176}$$

$$G_1(\mathfrak{X}) = \frac{g}{n\rho'}\sum_{p=1}^{\infty}X_p\Big(I - \frac{1}{n\rho'}\sum_{p=1}^{\infty}X_p\Big)^{-1}. \tag{177}$$

В области

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho''\| < \|\rho'\| \tag{178}$$

мы имеем, далее, оценки

$$|F(\mathfrak{X})| < \left\| g\left(1 - \frac{\rho''}{\rho'}\right)^{-1} \right\|, \tag{179}$$

$$|F_1(\mathfrak{X})| < \left\| \frac{g\rho''}{n\rho'} \left(1 - \frac{\rho''}{\rho'}\right)^{-1} \right\|. \tag{180}$$

Сформулируем теперь теоремы, доказательства которых, совершенно аналогичны доказательствам теорем § 11, мы приводить не будем.

Теорема IX. *Если функции от бесконечно-многих матриц*

$$F(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu, \tag{181}$$

$$G(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\beta]_\nu \tag{182}$$

равномерно голоморфны в области

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho\|, \tag{183}$$

то их произведение есть функция, равномерно голоморфная в той же области и представимая рядом матриц

$$F(\mathfrak{X})\,G(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\gamma]_\nu, \tag{184}$$

где коэффициенты $\gamma_{j_1\ldots j_\nu}$ *определяются формулами*

$$\gamma_{p_1\ldots p_\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha_{p_1\ldots p_\mu} \beta_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}. \tag{185}$$

Теорема X. *Пусть*

$$Z = \sum_{\nu=0}^{\infty} [Y\beta]_\nu \tag{186}$$

есть функция от матриц Y, *равномерно голоморфная в области*

$$\sum_{p=1}^{\infty} |Y_p| \leqslant \|\sigma\|, \tag{187}$$

и пусть функции

$$Y_p = \sum_{\nu=1}^{\infty} [X\alpha^{(p)}]_\nu \qquad (p = 1, 2, \ldots), \tag{188}$$

так же, как функция

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} X_{p_1} \cdots X_{p_\nu} \sum_{p=1}^{\infty} |\alpha^{(p)}_{p_1\ldots p_\nu}|, \tag{189}$$

суть функции от матриц $\mathfrak{X}$, *равномерно голоморфные в области*

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho\|, \tag{190}$$

тогда Z *есть функция от матриц* $\mathfrak{X}$, *равномерно голоморфная в некоторой окрестности нулевых матриц, и представляется рядом матриц*

$$Z = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\gamma]_\nu, \tag{191}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{p_1} &= \sum_{q_1=1}^{\infty} \alpha^{(q_1)}_{p_1} \beta_{q_1}, \\ \gamma_{p_1\ldots p_\nu} &= \\ &= \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{q_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{q_\mu=1}^{\infty} \sum_{0<\chi_1<\ldots<\chi_{\mu-1}<\nu} \alpha^{(q_1)}_{p_1\ldots p_{\chi_1}} \cdots \alpha^{(q_\mu)}_{p_{\chi_{\mu-1}+1}\ldots p_\nu} \cdots \beta_{q_1\ldots q_\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{192}$$

Теорема XI. *Пусть*

$$Y = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} [X\alpha]_\nu \tag{193}$$

есть функция от матриц $\mathfrak{X}$, *равномерно голоморфная в области*

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho\|, \tag{194}$$

тогда обратная матрица Y^{-1} *есть также функция от матриц* $\mathfrak{X}$, *равномерно голоморфная в некоторой окрестности нулевых матриц и представимая рядом матриц*

$$Y^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} [X\alpha^*]_\nu, \tag{195}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$\alpha^*_{p_1\ldots p_\nu} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{0<\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu} (-1)^\mu \alpha_{p_1\ldots p_{\varkappa_1}} \alpha_{p_{\varkappa_1+1}\ldots p_{\varkappa_2}} \cdots \alpha_{p_{\varkappa_{\mu-1}+1}\ldots p_\nu}. \tag{196}$$

Теорема XII. *Пусть матрицы*

$$Y_p = X_p + \sum_{\nu=2}^{\infty} [X\alpha]_\nu \qquad (p = 1, 2, \ldots), \tag{197}$$

так же матрица

$$\sum_{p=1}^{\infty} X_p + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{p_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} X_{p_1} \cdots X_{p_\nu} \sum_{p=1}^{\infty} |\alpha^{(p)}_{p_1\ldots p_\nu}|$$

суть функции от матриц $\mathfrak{X}$, *равномерно голоморфные в области*

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho\|; \tag{198}$$

тогда система (197) имеет решение, представимое рядами матриц

$$X_p = Y_p + \sum_{\nu=2}^{\infty} [Y\beta^{(p)}]_\nu, \tag{199}$$

не имеющими свободных членов; решение такого вида единственно; ряды матриц (199) суть равномерно голоморфные функции от матриц Y *в неко-*

торой окрестности нулевых матриц; коэффициенты этих рядов определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} &\beta^{(p)}_{p_1} = \delta^{p}_{p_1} \\ &\beta^{(p)}_{p_1 \ldots p_\nu} = \\ &= -\sum_{\mu=2}^{\nu} \sum_{q_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{q_\mu=1}^{\infty} \sum_{0<\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu} \beta^{(q_\mu)}_{p_1 \ldots p_{\varkappa_1}} \cdots \beta^{(q_\mu)}_{p_{\varkappa_{\mu-1}+1} \ldots p_\nu} \cdot \alpha^{(p)}_{q_1 \ldots q_\mu}. \end{aligned}\right\} \quad (200)$$

Заметим, наконец, что данные в § 13 для случая конечного числа матриц определения рядов следов и рядов следов и матриц могут быть обобщены на случай бесконечного числа переменных матриц.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВВЕДЕНИЕ

Для вопросов, которыми мы будем заниматься ниже, нам потребуется ввести новые понятия и определения, не встречавшиеся нам при общих исследованиях аналитических функций от матриц.

Пусть элементы некоторой матрицы $Y(x)$ будут функциями вещественной или комплексной переменной x:

$$\{Y(x)\}_{kl} = y_{kl}(x).$$

Под производной от матрицы $Y(x)$ по переменной x мы условимся понимать матрицу, составленную из производных от элементов этой матрицы по x:

$$\left\{\frac{dY(x)}{dx}\right\}_{kl} = \frac{dy_{kl}(x)}{dx}.$$

Очевидными являются следующие формулы дифференцирования суммы и произведения матриц:

$$\frac{d}{dx}[Y(x)+Z(x)] = \frac{d}{dx}Y(x) + \frac{d}{dx}Z(x),$$

$$\frac{d}{dx}[Y(x)Z(x)] = \frac{dY(x)}{dx}Z(x) + Y(x)\frac{dZ(x)}{dx}.$$

Получим еще правило дифференцирования обратной матрицы $Y(x)^{-1}$; по самому определению:

$$Y(x)Y(x)^{-1} = I.$$

Взяв производную от обеих частей равенства, имеем:

$$\frac{dY(x)}{dx}Y(x)^{-1} + Y(x)\frac{dY(x)^{-1}}{dx} = 0,$$

откуда

$$\frac{dY(x)^{-1}}{dx} = -Y(x)^{-1}\frac{dY(x)}{dx}Y(x)^{-1}.$$

Под интегралом, взятым от матрицы $Y(x)$ по x, мы будем подразумевать матрицу, составленную из интегралов от элементов матрицы

$$\{\int_a^b Y(x)\,dx\}_{kl} = \int_a^b Y_{kl}(x)\,dx.$$

Наконец, матрицу $Y(x)$ мы будем называть аналитической в некоторой области, если каждый элемент ее будет аналитической функцией в этой области. Пусть $Y(x)$ будет голоморфной около точки a. Под разложением ее в ряд Тэйлора около a мы будем понимать ряд вида

$$Y(x)=\sum_{p=0}^{\infty} A^{(p)}(x-a)^p,$$

где $A^{(p)}$ — численные матрицы, составленные из коэффициентов при $(x-a)^p$ в разложениях элементов $Y(x)$. Аналогичным образом определяются ряды иного вида для $Y(x)$.

Перейдем теперь к теории систем линейных дифференциальных уравнений. Всюду ниже нас будет интересовать однородная задача.

Пусть будет предложена система

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx}=y_1p_{11}(x)+\ldots+y_np_{n1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx}=y_1p_{1n}(x)+\ldots+y_np_{nn}(x), \end{array}\right\} \tag{1}$$

коэффициенты $p_{kl}(x)$ которой суть заданные функции x.

Рассмотрим n систем функций, удовлетворяющих уравнениям (1). Будем обозначать номер системы первым значком и номер функции, входящей в системы, — вторым значком, так что в каждой строке матрицы

$$Y(x)=\begin{Vmatrix} y_{11}(x), \ldots, y_{1n}(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{n1}(x), \ldots, y_{nn}(x) \end{Vmatrix} \tag{2}$$

стоит частное решение предложенной системы уравнений.

Коэффициенты $p_{kl}(x)$ системы образуют другую матрицу, которую мы обозначим через

$$P(x)=\begin{Vmatrix} p_{11}(x), \ldots, p_{1n}(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{n1}(x), \ldots, p_{nn}(x) \end{Vmatrix} \tag{3}$$

В матричном виде систему (1) можно записать в форме

$$\frac{dY}{dx}=YP(x). \tag{4}$$

Таблицу $Y(x)$ называют *фундаментальной*, если определитель ее отличен от тождественного нуля. Что касается величины самого определителя, то относительно ее известна следующая теорема Якоби:

$$D(Y)=Ce^{\int_b^x s\,P(x)\,dx}$$

и $D(Y)$ поэтому есть либо тождественный нуль, когда $C=0$, либо может равняться нулю лишь в тех точках, где след матрицы $P(x)$ обращается в бесконечность.

Очевидным является то обстоятельство, что если $Y(x)$ есть решение системы (4), то при любой постоянной матрице C произведение $CY(x)$ будет вновь решением (4). Обратная теорема, важная для всего последующего, хорошо известна и доказывается весьма просто:

Всякая матрица $Y_1(x)$, удовлетворяющая системе (4), может отличаться от фундаментальной таблицы $Y(x)$ только постоянным матричным множителем слева.

Рассмотрим в самом деле произведение $Y_1(x)\,Y(x)^{-1}$. Продифференцируем по x и подставим вместо $\dfrac{dY}{dx}$ и $\dfrac{dY_1}{dx}$ их значения из (4):

$$\frac{d}{dx}(Y_1Y^{-1})=\frac{dY_1}{dx}Y^{-1}-Y_1Y^{-1}\frac{dY}{dx}Y^{-1}=Y_1PY^{-1}-Y_1Y^{-1}YPY^{-1}=0$$

или

$$Y_1Y^{-1}=C$$

и

$$Y_1=CY.$$

Относительно существования фундаментальной таблицы еще с времен Коши известен следующий простейший, достаточный для наших целей, результат.

Если матрица $P(x)$ регулярная в некоторой области комплексной переменной x, то существует одна и только одна таблица $Y(x)$, удовлетворяющая системе (4) и заданным начальным данным; эта таблица $Y(x)$ будет регулярной во всей области регулярности $P(x)$.

Поведение интегральной матрицы $Y(x)$ в области особых точек $P(x)$ имеет гораздо более сложную природу. Допустим ради простоты, что точка a есть изолированная особая точка $P(x)$ и что $P(x)$ однозначна в области этой точки. Интегральная матрица $Y(x)$ будет иметь, вообще говоря, точку a своей особой точкой; более того, она может перестать быть однозначной в области a. Допустим в самом деле, что мы, отправляясь от некоторой точки x, обошли a вдоль некоторого замкнутого пути. Обозначим через $Y(\overset{+}{x})$ значение фундаментальной таблицы $Y(x)$ до обхода. После обхода мы вообще не получим исходной матрицы $Y(\overset{+}{x})$, а придем к некоторой новой фундаментальной таблице $Y(\overset{-}{x})$. По доказанному выше, она может отличаться от $Y(\overset{+}{x})$ лишь постоянным матричным множителем слева:

$$Y(\overset{-}{x})=VY(\overset{+}{x}). \tag{5}$$

Матрицу V мы будем называть *интегральной подстановкой в точке a*. Она является характеристикой ветвления $Y(x)$ в a. Построение ее есть одна из основных задач исследуемого вопроса. V зависит, очевидно, от двух обстоятельств. Прежде всего от заданной системы (4), т. е. от параметров, определяющих таблицу $P(x)$, и затем от выбора фундаментальной матрицы $Y(x)$. Вопрос о последней зависимости весьма прост. Пусть V и V_1 будут интегральные подстановки в a двух разных фундаментальных таблиц $Y(x)$ и $Y_1(x)$. Легко можно установить, что V_1 подобна V, т. е. существует такая матрица C с определителем, отличным от нуля, что

$$V_1=CVC^{-1}. \tag{6}$$

Действительно, $Y_1(x)$ и $Y(x)$ могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем слева

$$Y_1(x)=CY(x); \quad D(C)\neq 0.$$

После обхода около a мы будем иметь следующее преобразование:

$$Y_1(\overset{-}{x})=V_1Y_1(\overset{+}{x})=CY(\overset{-}{x})=CVY(\overset{+}{x})=$$
$$=CVC^{-1}CY(\overset{+}{x})=CVC^{-1}Y_1(\overset{+}{x}).$$

Отсюда и следует требуемый результат.

Отметим здесь же, что определитель интегральной подстановки V отличен от нуля, ибо

$$D(V)=\frac{D[Y(\bar{x})]}{D[Y(\overset{+}{x})]}.$$

Легко дать разложение $Y(x)$ на два множителя, один из которых представляет элементарную функцию матричного аргумента, второй же есть однозначная функция x' в области a. Рассмотрим для этой цели любое определение логарифма V и введем матрицу

$$W=\frac{1}{2\pi i}\log V, \tag{7}$$

которую ниже мы будем называть показательной подстановкой интегральной матрицы $Y(x)$ в точке a.

Функция $e^{W\log(x-a)}=(x-a)^W$ претерпевает ту же подстановку V при обходе около a, что и $Y(x)$, ибо после обхода мы будем иметь

$$e^{W\log(x-a)+2\pi iW}=e^{2\pi iW}\cdot e^{W\log(x-a)}=V(x-a)^W. \tag{8}$$

Поэтому, если $Y(x)$ представить в форме

$$Y(x)=(x-a)^W\overline{Y}(x),$$

то матрица

$$\overline{Y}(x)=(x-a)^{-W}Y(x)$$

будет однозначной в области a функцией x. Она является характеристикой однозначной особенности $Y(x)$ в точке a.

Исследование этой однозначной компоненты $Y(x)$ представляет одну из самых трудных задач теории уравнений.

Изучение общего случая мы оставим пока в стороне и сосредоточим свое внимание на одном частном вопросе, имеющем, однако, не только большой теоретический интерес, но и громадное прикладное значение. Мы будем иметь в виду сейчас системы типа Фукса, т. е. такие, когда $P(x)$ есть однозначная функция от x на всей плоскости, включая и бесконечно далекую точку, имеющая конечное число особых точек, каждая из которых есть полюс первого порядка. Такого рода уравнения называются регулярными и имеют вид:

$$\frac{dY}{dx}=Y\sum_{j=1}^{m}\frac{U_j}{x-a_j}, \tag{9}$$

$U_j=\|u_{kl}^j\|$ $(j=1,\ldots,m)$ суть заданные численные матрицы, которые всюду ниже мы будем называть *дифференциальными подстановками* соответственно в точках a_j.

Интегральная матрица $Y(x)$ системы (9) будет регулярной на всей плоскости за исключением, быть может, особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty$. Каждой такой точке будет соответствовать своя интегральная подстановка $V_j=\|v_{kl}^{(j)}\|$ $(j=1,\ldots,m,\infty)$, которую претерпевает решение $Y(x)$ при обходе около a.

$$Y(\bar{x})=V_jY(\overset{+}{x}). \tag{10}$$

Сообразно изложенному выше мы имеем для системы (9) следующие основные прямые задачи теории линейных уравнений, которые мы объединим под именем задачи Пуанкарэ:

A. Определение регулярной матрицы $Y(x)$ во всей области ее существования.

B. Построение интегральных подстановок V_j в особых точках a_j.

C. Полная аналитическая характеристика таблицы $Y(x)$ вблизи a_j как со стороны ее ветвления, так и со стороны однозначной особенности.

Дифференциальные подстановки U_j и конфигурации особых точек a_j предполагаются данными.

Группа, образованная подстановками V_j и состоящая из них и всевозможных произведений их и им обратных подстановок V_j^{-1}, есть *группа монодромии* системы (9). Решение задачи (B) нам доставляет, очевидно, построение группы монодромии системы. Эта проблема впервые во всей своей общности была поставлена Пуанкарэ в его замечательном мемуаре „Sur les groupes d'équations linéaires *).

Знаменитый геометр показал, что коэффициенты $v_{kl}^{(j)}$ суть целые функции коэффициентов $u_{kl}^{(j)}$, но, однако, не дал явного выражения этих функций. Его исследования так же, как и исследования Миттаг-Леффлера **) касаются скорее определения инвариантов группы линейных уравнений, коэффициенты которых есть алгебраические функции (Пуанкарэ) или однозначные аналитические функции, имеющие конечное число особых точек во всякой конечной части плоскости (Миттаг-Леффлер). Аналитические выражения для коэффициентов $v_{kl}^{(j)}$, делающие очевидным характер зависимости их от $u_{kl}^{(j)}$ так же, как от конфигурации особых точек a_j, еще отсутствовали. Эти выражения так же, как и аналитические выражения для регулярной матрицы $Y(x)$, показательной подстановки W_j и голоморфной компоненты $\overline{Y}_j(x)$ мы дадим в следующих параграфах.

---

*) Acta Mathematica (1884), 4, p. 201, Oeuvres (1916), т. II, p. 306.
**) Acta Mathematica (1891), 15, p. 1.

ГЛАВА I

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Гиперлогарифмы. Для решения поставленной нами задачи Пуанкарэ нам потребуется ввести систему функций

$$L_b(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu} | X), \qquad (j_1, \ldots, j_\nu = 1, \ldots, m; \nu = 1, 2, \ldots),$$

которые ниже мы будем называть *гиперлогарифмами первого рода конфигурации особых точек* $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Мы определим их рекуррентными соотношениями

$$\left.\begin{aligned} L_b(a_{j_1} | x) &= \int_b^x \frac{dx}{x - a_{j_1}} = \log \frac{x - a_{j_1}}{b - a_{j_1}} \\ L_b(a_{j_1}, \ldots a_{j_\nu} | x) &= \int_b^x \frac{L_b(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{\nu-1}} | x)}{x - a_{j_\nu}} dx \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Здесь b—некоторая определенная точка на конечном расстоянии, отличная от $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Каждая из этих функций может рассматриваться как однозначная на бесконечно-листной поверхности Римана $\mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_m, \infty)$ с точками ветвления логарифмического типа $a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty$. Фиксируем как-нибудь точку b на одном из листов и обозначим через σ длину пути (b, x), соединяющего точки b и x, и через δ наименьшее из расстояний от этого пути до точек a_j. Очевидными являются следующие оценки для гиперлогарифмов:

$$|L_b(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu} | x)| \leqslant \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^\nu. \tag{12}$$

Отправляясь от точки b, обойдем a_j вдоль простой петли. В результате обхода мы придем в точку, лежащую над точкой b на некотором другом листе поверхности $\mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_m, \infty)$; назовем ее через b_j. Значения гиперлогарифмов в b_j выражаются следующими интегралами:

$$\left.\begin{aligned} L_b(a_{j_1} | b_j) &= P_j(a_{j_1} | b) = \int_{(a_j)} \frac{dx}{x - a_{j_1}}, \\ L_b(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu} | b_j) &= P_j(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu} | b) \int_{a(j)} \frac{L_b(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{\nu-1}} | x)}{x - a_{j_\nu}} dx, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

которые мы будем называть *параметрами конфигурации* точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Ниже мы докажем следующие рекуррентные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} P_j(a_{j_1} | b) &= \begin{cases} 2\pi i, & \text{если } j = j_1 \\ 0, & \text{если } j \neq j_1 \end{cases} \\ P_j(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu} | b) &= \int_{a_j}^b \left[\frac{P_j(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{\nu-1}} | b)}{b - a_{j_\nu}} - \frac{P_j(a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} | b)}{b - a_{j_1}}\right] db, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

которые позволят нам определить параметры конфигурации независимо от гиперлогарифмов.

Если $\sigma_b^{(j)}$ есть длина петли около точки a_j и $\delta_b^{(j)}$—наименьшее расстояние ее от точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, то прямым следствием неравенства (12) являются следующие оценки для $P_j(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu} | b)$:

$$|P_j(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu} | b)| \leqslant \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\sigma_b^{(j)}}{\delta_b^{(j)}}\right)^\nu. \tag{15}$$

Что касается многозначности гиперлогарифмов, то можно указать равенство, делающее вполне очевидным характер ветвления их в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Пусть $\overset{+}{x}$ есть произвольная точка поверхности $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$ и $\overset{-}{x}$—точка, расположенная над $\overset{+}{x}$, которая достигается после обхода a_j в положительном направлении вдоль простой петли, если отправляться из $\overset{+}{x}$.

Тогда:

$$L_b(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu} | x) = \sum_{\varkappa=0}^{\nu} P_j(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\varkappa} | b) L_b(a_{\varkappa+1}, \ldots, a_{j_\nu} | \overset{+}{x}). \tag{16}$$

В этом равенстве предполагается, что $L_b(a_{j_p} \ldots a_{j_q} \; x)$ и $P_j(a_{j_p} \ldots a_{j_q} | b)$ равны единице, если $\rho > q$. Аналогичное условие будет иметь силу и для некоторых последующих формул.

Весьма простое доказательство соотношения (16) будет дано в конце § 5.

§ 2. Построение генерального представления регулярной матрицы. Мы будем говорить, что регулярная матрица $Y(x)$ нормальна в точке b, если ее значение в этой точке будет равно идентичной матрице, и обозначать ее $Y_b(x)$.

При помощи функций, введенных нами в предыдущем параграфе, докажем следующую основную теорему о представлении нормальной регулярной матрицы в форме ряда композиций дифференциальных подстановок.

Теорема I. *Регулярная матрица, нормальная в точке b и имеющая дифференциальные подстановки $U_1, U_2, \ldots, U_m$ в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$, есть целая функция дифференциальных подстановок, представляемая следующим рядом*

$$Y_b(x) = \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \Big| x\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | x), \tag{17}$$

коэффициенты которого суть гиперлогарифмы конфигурации $a_1, \ldots, a_m$. Ряд равномерно сходится по отношению x и представляет регулярную функцию в каждой конечной области поверхности $\mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_m, \infty)$, не содержащей внутри себя и на своей границе точек $a_1, \ldots, a_m$.

Доказательство. В силу оценок (12) заключаем, что ряд (17) действительно представляет целую функцию подстановок $U_1, \ldots, U_m$ и что сходимость его в отношении x будет равномерной в упомянутой в формулировке теоремы области поверхности $\mathfrak{S}$ $(a_1, \ldots, a_m, \infty)$. Тот факт, что сумма ряда удовлетворяет системе уравнений, проверяется просто прямым дифференцированием. В самом деле,

$$\frac{d}{dx} Y_b(x) = \frac{d}{dx} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x) \; \frac{U_j}{x - a_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left\{ I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x) \right\} \frac{U_j}{x - a}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{Y_b(x) U_j}{x - a_j}.$$

Отсюда и следует, что ряд (17) представляет регулярную матрицу, имеющую дифференциальные подстановки $U_1, \ldots, U_m$ в точках $a_1, \ldots, a_m$. Нормированность же суммы его в точке b очевидна.

Написанное выше разложение для $Y_b(x)$ есть собственно не что иное, как результат применения метода последовательных приближений к системе дифференциальных уравнений (9). Благодаря применеиию матричного исчисления нам удалось представить $Y_b(x)$ в форме ряда композиций, весьма показательного и удобного для дальнейших исследований, ибо он дает представление исследуемых функций во всей области их существования и вполне выясняет природу их зависимости от переменной x, дифференциальных подстановок $U_1, \ldots, U_m$ и конфигурации особых точек $a_1, \ldots, a_m$.

Из доказанной теоремы вытекает простая оценка регулярной интегральной матрицы. В силу формул (12) и (17) мы имеем неравенство:

$$| Y_b(x) - I | \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} (|U_1| + \ldots + |U_m|)^\nu \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^\nu = e^{\frac{\sigma}{\delta}(|U_1| + \ldots + |U_m|)} - I.$$

Откуда, если $|U_j| \leqslant \|\rho\|$ $(j = 1, \ldots, m)$ следует:

$$| Y_b(x) - I | \leqslant \frac{1}{n} \left\| e^{\frac{\sigma m n \rho}{\delta}} - I \right\|.$$

Любая регулярная матрица, решающая ту же систему дифференциальных уравнений, может, по доказаиному выше, отличаться от $Y_b(x)$ только постоянным матричным множителем слева:

$$Y(x) = \Phi \begin{pmatrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} \!\! \left| \, x \right) = C \Phi_b \left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \,\middle|\, x \right). \tag{18}$$

Положив в этом равенстве $x = b$, мы видим, что

$$C = \Phi \left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \,\middle|\, b \right).$$

Если матрица $Y(x)$ нормирована в какой-либо точке C, то предыдущее равенство дает

$$\Phi_c \left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \,\middle|\, x \right) = \Phi_c \left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \,\middle|\, b \right) \Phi_b \left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \,\middle|\, x \right), \tag{19}$$

Откуда при $x = c$ имеем

$$I = \Phi_c \left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \,\middle|\, b \right) \Phi_b \left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \,\middle|\, c \right).$$

Или

$$\Phi_c \left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \,\middle|\, b \right) = \Phi_b \left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \,\middle|\, c \right)^{-1}. \tag{20}$$

Иначе говоря, перестановка x и b в выражении регулярной матрицы равносильна ее обращению.

Относительно обратной матрицы $Y_b(x)^{-1}$ сделаем следующее замечание. Почти очевидно, что она удовлетворяет системе уравнений, сопряженной с данной:

$$\frac{dY}{dx} = -\sum_{j=1}^{m} \frac{U_j Y}{x - a_j}. \tag{21}$$

Действительно

$$\frac{d}{dx} Y_b(x)^{-1} = -Y_b(x)^{-1} \frac{d}{dx} Y_b(x) \, Y_b(x)^{-1} = -Y_b(x)^{-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{Y_b(x) U_j}{x - a_j} Y_b(x)^{-1} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m} \frac{U_j Y_b(x)^{-1}}{x - a_j}.$$

Отсюда или из равенства (20) легко получается следующая теорема.

Теорема II. *Матрица $Y_b(x)^{-1}$, обратная регулярной матрице, нормированной в точке b, есть целая функция дифференциальных подстановок $U_1 \ldots U_m$, представляемая рядом композиций.*

$$Y_b(x)^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} L_b^*(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x), \tag{22}$$

коэффициенты которого определены рекуррентными соотношениями:

$$L_b^*(a_{j_1} \mid x) = -\int_b^x \frac{dx}{x - a_{j_1}} = -\log \frac{x - a_{j_1}}{b - a_{j_1}},$$

$$L_b^*(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x) = -\int_b^x \frac{L_b^*(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x)}{x - a_{j_1}} dx. \tag{23}$$

Сходимость разложения для $Y_b(x)^{-1}$ относительно x имеет тот же характер, что и (17).

Доказательство такое же, как и раньше.

Если в равенстве $Y_b(x) Y_b(x)^{-1} = I$ подставить вместо $Y_b(x)$ и $Y_b(x)^{-1}$ их выражения и сравнить коэффициенты при одинаковых произведениях дифференциальных подстановок U_j, можно без труда получить уравнения, связывающие между собой $L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$ и $L_b^*(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$:

$$\sum_{\chi=0}^{\nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\chi} \mid x) L_b^*(a_{j_{\chi+1}} \ldots a_{j_\nu} \mid x) = 0, \tag{24}$$

которые дают возможность находить последовательно $L_b^*(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$ в форме полиномов от $L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$ и наоборот.

Когда группа, образованная дифференциальными подстановками, коммутативна, матрица $Y(x)$ имеет чрезвычайно простое выражение. В этом случае законы действий с матрицами не отличаются от законов действий с числами и поэтому:

$$Y_b(x) = \Phi_b\begin{pmatrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix} x\Big) = \left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1} \dots \left(\frac{x-a_m}{b-a_m}\right)^{U_m} = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}. \quad (25)$$

В самом деле:

$$\frac{d}{dx} Y_b(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1} \dots \left(\frac{x-a_{j-1}}{b-a_{j-1}}\right)^{U_{j-1}} \frac{U_j}{x-a_j} \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j} \left(\frac{x-a_{j+1}}{b-a_{j+1}}\right)^{U_{j+1}} \dots \left(\frac{x-a_m}{b-a_m}\right)^{U_m}$$

и в силу коммутативности матриц U_j имеем:

$$\frac{d}{dx} Y_b(x) = \sum_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{x-a_k}{b-a_k}\right)^{U_k} \frac{U_j}{x-a_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{Y_b(x)\, U_j}{x-a_j}. \quad (26)$$

Тот же результат, конечно, мог быть получен и из рассмотрения ряда (17) для $Y(x)$. Мы воспользуемся им только для получения одного тождества для гиперлогарифмов.

Если в произведении $U_{j_1} \dots U_{j_\nu}$ путем перестановки собрать одинаковые сомножители, $Y_b(x)$ можно записать в форме:

$$Y_b(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu_1+\dots+\mu_m=\nu} U_1^{\mu_1} \dots U_m^{\mu_m} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{(\mu_1)\dots(\mu_m)} L_b(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x),$$

где суммирование $\sum\limits_{j_1 \dots j_\nu}^{(\mu_1)\dots(\mu_m)}$ распространяется на все композиции индексов $j_1, \dots j_\nu = 1, 2 \dots m$ такие, что в каждой строке $a_{j_1}, \dots a_{j_\nu}$ буква a_1 повторяется μ_1 раз, $a_2 - \mu_2$ раз, ... буква $a_m - \mu_m$ раз; $\mu_1, \dots \mu_m$ — целые неотрицательные числа и $\mu_1 + \dots + \mu_m = \nu$.

С другой стороны, из (25) следует:

$$Y_b(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu_1+\dots+\mu_m=\nu} U_1^{\mu_1} \dots U_m^{\mu_m} \frac{1}{\mu_1! \dots \mu_m!} \lg^{\mu_1} \frac{x-a_1}{b-a_1} \dots \lg^{\mu_m} \frac{x-a_m}{b-a_m}.$$

Сравнивая это равенство с предыдущими, мы видим, что для гиперлогарифмов должно быть верным следующее тождество:

$$\sum_{j_1 \dots j_\nu}^{(\mu_1)\dots(\mu_m)} L_b(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x) = \frac{1}{\mu_1! \dots \mu_m!} \lg^{\mu_1} \frac{x-a_1}{b-a_1} \dots \lg^{\mu_m} \frac{x-a_m}{b-a_m}.$$

Пример. Мы рассмотрим случай, когда матрицы U_j второго порядка. Если они коммутативны, то они должны иметь вид: *)

$$U_j = \begin{Vmatrix} \sigma_j & \tau_j \\ \lambda\tau_j & \sigma_j + \mu\tau_j \end{Vmatrix} \qquad (j = 1, 2, \dots, m)$$

*) Действительно, если $X = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{Vmatrix}$ и $Y = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Vmatrix}$ две коммутативные матрицы второго порядка, их элементы должны удовлетворять следующим равенствам:

$$x_{12}\, y_{21} = y_{12}\, x_{21}; \quad x_{12}\,(y_{22} - y_{11}) = y_{12}\,(x_{22} - x_{11}); \quad x_{21}\,(y_{22} - y_{11}) = y_{21}\,(x_{22} - x_{11}),$$

откуда и следуют указанные представления.

и система дифференциальных уравнений будет:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\sigma_j}{x-a_j} + y_2 \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda\tau_j}{x-a_j},$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\tau_j}{x-a_j} + y_2 \sum_{j=1}^{m} \frac{\sigma_j + \mu\tau_j}{x-a_j}.$$

Регулярная матрица, нормированная в точке b, как мы видели раньше, будет

$$Y_b(x) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}.$$

Обозначим через $\xi_j^{(1)}$ и $\xi_j^{(2)}$ характеристические числа подстановки U_j:

$$\xi_j^{(1)} = \sigma_j + \frac{1}{2}(\mu + \rho)\tau_j; \quad \xi_j^{(2)} = \sigma_j + \frac{1}{2}(\mu - \rho)\tau_j; \quad \rho = \sqrt{\mu^2 + 4\lambda},$$

когда $\xi_j^{(1)} \neq \xi_j^{(2)}$, т. е. когда $\rho \neq 0$.

$$\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j} = \frac{U_j - \xi_j^{(2)}}{\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}} \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\xi_j^{(1)}} + \frac{U_j - \xi_j^{(1)}}{\xi_j^{(2)} - \xi_j^{(1)}} \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\xi_j^{(2)}}$$

или, если ввести матрицы

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{2}\mu, & 1 \\ \lambda, & \frac{1}{2}\mu \end{Vmatrix}$$

и заметить, что

$$U_j - \xi_j^{(2)} = \tau_j\left(\Lambda + \frac{1}{2}\rho\right); \quad U_j - \xi_j^{(1)} = \tau_j\left(\Lambda - \frac{1}{2}\rho\right)$$

имеем:

$$\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\left(\Lambda + \frac{1}{2}\rho\right)\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\sigma_j + \frac{1}{2}\tau_j(\mu+\rho)} - \left(\Lambda - \frac{1}{2}\rho\right)\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\sigma_j + \frac{1}{2}\tau_j(\mu-\rho)}\right];$$

когда же $\rho = 0$, матрица $\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}$ равна

$$\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\sigma_j + \frac{1}{2}\tau_j\mu} \left[I + \Lambda\tau_j \lg\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)\right].$$

§ 3. Построение интегральных подстановок. Из самого определения и из нормализации регулярной матрицы $Y_b(x)$ в точке b следует, что интегральная подстановка матрицы $Y_b(x)$ выражается ее значением в точке b_j поверхности $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \dots, a_m, \infty)$, расположенной над точкой b и которая достигается, если, отправляясь от b, обойти особую точку a_j вдоль простой петли. Это видно из равенства $Y_b(\overset{-}{x}) = V_j Y_b(\overset{+}{x})$, если в нем положить $\overset{+}{x} = b$. Следовательно, давая в разложении (17) x значение b_j и принимая во внимание (13), придем к следующей теореме о представлении интегральной подстановки рядом композиций от дифференциальных подстановок:

Теорема III. *Интегральная подстановка в точке a_j регулярной матрицы, нормированной в точке b и имеющей дифференциальные подстановки, $U_1, U_2, \dots, U_m$ в точках $a_1, a_2, \dots, a_m$, есть целая функция дифференциальных подстановок, представляемая разложением:*

$$V_j = \Omega_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| b\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\dots j_\nu}^{1\dots m} U_{j_1}\dots U_{j_\nu} P_j(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,b). \quad (27)$$

В силу равенства (18) интегральная подстановка в точке a_j произвольной регулярной матрицы $\Phi\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| x\right)$, определенной той же системой дифференциальных уравнений и начальным значением в точке b: $\Phi\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| b\right) = C$, представляется в форме

$$\Omega_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\right) = C\,\Omega_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| b\right) C^{-1}.$$

Из соотношения (25) следует, что в случае коммутативности дифференциальных подстановок $U_1\dots U_m$ интегральные подстановки будут иметь вид:

$$V_j = \Omega_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| b\right) = e^{2\pi i U_j}. \quad (28)$$

Если в равенстве $Y_b(\overset{-}{x}) = V_j Y_b(\overset{+}{x})$, связывающее значения регулярной нормальной матрицы $Y_b(x)$ до и после обхода особой точки a_j, подставить вместо $Y_b(\overset{-}{x})$, $Y_b(\overset{+}{x})$ и V_j их выражения (17) и (27) и затем сравнить коэффициенты при одинаковых произведениях подстановок U_h, можно сразу же получить формулы, определяющие характер ветвления гиперлогарифмов, о которых мы говорили выше (см. § 3).

Легко видеть, что подстановка V_j^{-1}, обратная интегральной подстановке V_j, есть также целая функция дифференциальных подстановок, разложение которой есть

$$V_j^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\dots j_\nu}^{1\dots\infty} U_{j_1}\dots U_{j_\nu} P_j^*(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,b), \quad (29)$$

где

$$P_j^*(a_{j_1}\,|\,b) = L_b^*(a_{j_1}\,|\,b_j) = -\int_{(a_j)} \frac{dx}{x-a_{j_1}}$$

$$P_j^*(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,b) = L_b^*(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,b_j) = -\int_{(a_j)} \frac{L_b^*(a_{j_2}\dots a_{j_\nu}\,|\,x)}{x-a_{j_1}}\,dx. \quad (30)$$

В самом деле, если в равенстве $Y_b(\overset{-}{x})^{-1} = Y_b(\overset{+}{x})^{-1} V_j^{-1}$, дающем зависимость между значениями обратной матрицы $Y_b(x)^{-1}$ до и после обхода

особой точки a_j, положить $\overset{+}{x} = b_j$ мы и получим, в силу $Y_b(x)^{-1} = I$ требуемый результат:

$$V_j^{-1} = Y_b^{-1}(b_j) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\dots j_\nu}^{1\dots m} U_{j_1}\dots U_{j_\nu} L_b^*(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,b_j).$$

§ 4. Полная аналитическая характеристика особенностей регулярной матрицы. Интегральные подстановки, аналитическое выражение которых мы построили, характеризуют только ветвление интегральной матрицы в особых точках. Мы перейдем теперь к полной аналитической характеристике особенностей регулярной матрицы. Основная теорема, сюда относящаяся, может быть сформулирована следующим образом:

Теорема IV. *Если подстановки U_j находятся в окрестности нулевых подстановок, то регулярная матрица $Y_b(x)$, нормированная в точке b и имеющая в точках $a_1\dots a_m$ дифференциальные подстановки U_j, может быть представлена в форме*

$$Y_b(x) = \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| x\right) = \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}\widetilde{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| x\right) =$$

$$= \Phi_b\left(\begin{matrix} W_j \\ a_j\end{matrix}\middle| x\right)\cdot\widetilde{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| x\right), \quad (31)$$

где матрица

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(x) = \widetilde{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| x\right)$$

и $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$ остаются голоморфными по x в точке a_j. Подстановка W_j, обладающая указанным свойством,— единственна и есть голоморфная функция матриц U_j в указанной выше области.

Доказательство. Вся особенность правой части равенства (31) в области особой точки a_j сосредоточена в множителе $\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}$, ибо, по условию, второй множитель $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)$ голоморфен по x в этой точке. При обходе же около a_j по простой петле $\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}$ выбросит множитель $e^{2\pi i W_j}$, который должен совпадать с множителем, выбрасываемым левой частью; поэтому должно иметь место равенство:

$$e^{2\pi i W_j} = V_j = \Omega_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| b\right),$$

т. е. $2\pi i W_j$ должна быть одним из определений логарифма интегральной подстановки V_j.

Пусть $(\omega-\omega_1)^{\rho_1}\dots(\omega-\omega_s)^{\rho_s}$ будут элементарными делителями V_j. Допустим, что дифференциальные подстановки $U_1\dots U_m$ находятся в окрестности нулевых подстановок; тогда V_j будет находиться в области идентичной подстановки и, как мы видели в общей теории функций матриц, всякое определение логарифма V_j будет заключаться в формуле

$$\lg V_j = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(V_j-1)^{\nu} + 2\pi i S[r_1 J_{\rho_1}^{(0)}\dots r_s J_{\rho_s}^{(0)}]S^{-1},$$

где S есть одна из матриц, приводящая V_j к канонической форме, $J_\rho^{(0)}$ есть единичная матрица порядка ρ и $r_1\dots r_s$ — произвольные целые числа.

Возьмем сначала главную ветвь логарифма и покажем, что подстановка

$$W_j = \frac{1}{2\pi i} \lg V_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (V_j - 1)^\nu \tag{32}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. Единственность такой W_j установим ниже. Если вместо V_j в ряд (32) подставить их выражения через $U_1 \dots U_m$ и перестроить его в ряд композиций от $U_1 \dots U_m$, получим:

$$W_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1 \dots m} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} Q_j(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid b). \tag{33}$$

Коэффициенты $Q_j(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid b)$ ряда определяются формулами (см. „Общую теорию функций матриц“):

$$Q_j(a_{j_1} \mid b) = \begin{cases} 1, & \text{если } j_1 = j \\ 0, & \text{если } j_1 \neq j \end{cases} \tag{34}$$

$$Q_j(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid b) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{0 < \chi_1 < \dots < \chi_{\mu-1} < \nu} \frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu} P_j(a_{j_1} \dots a_{j_\chi} \mid b) \dots$$

$$\dots P_j(a_{j_{\chi_{\mu-1}+1}} \dots a_{j_\nu} \mid b).$$

Обратимся к изучению второй компоненты интегральной подстановки

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(x) = \left(\frac{x - a_j}{b - a_j} \right)^{-W_j} Y_b(x).$$

Это, очевидно, голоморфная функция дифференциальных подстановок в области нулевых подстановок. Как функция от x матрица $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)$ будет однозначной в области точки a_j. Ее представление рядом композиций, локальным относительно $U_1 \dots U_m$ и генеральным относительно x, будет

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1 \dots m} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} \widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x); \tag{35}$$

оно получится, если в предыдущее равенство вместо $\left(\frac{x - a_j}{b - a_j} \right)^{-W_j}$ и $Y_b(x)$ подставить соответствующие ряды композиций. Чтобы найти функцию $\widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x)$ простейшим способом, построим систему дифференциальных уравнений для матрицы $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)$. Она получается весьма просто путем прямого дифференцирования матрицы $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)$, если обратить внимание на то, что $\frac{d}{dx}\left(\frac{x - a_j}{b - a_j} \right)^{-W_j} = -\frac{W_j}{x - a_j} \left(\frac{x - a_j}{b - a_j} \right)^{-W_j}$ и имеет следующую форму:

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{h=1}^{m} \frac{Y U_h}{x - a_h} - \frac{W_j Y}{x - a_j}. \tag{36}$$

Начальным условием для матрицы $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)$ будет $\widetilde{Y}_b^{(j)}(b) = I$.

Отождествляя систему (36) при помощи ряда композиций (35), мы

увидим, что функции $\widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x)$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1} \mid x) &= \int_b^x \left\{ \frac{1}{x - a_{j_1}} - \frac{Q_j(a_{j_1} \mid b)}{x - a_j} \right\} dx \\ \widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x) &= \\ = \int_b^x \Bigg\{ \frac{\widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} &- \frac{1}{x - a_j} \sum_{\chi=1}^{\nu} Q_j(a_{j_1} \dots a_{j_\chi} \mid b) \times \\ &\times \widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_{\chi+1}} \dots a_{j_\nu} \mid x) \Bigg\} dx. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Из этих формул сейчас же следует, что $\widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x)$ должны быть голоморфными функциями в области точки a_j. В самом деле, из однозначности $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)$ для любых малых подстановок $U_1 \dots U_m$ в области a_j переменной x вытекает однозначность в этой области всех функций $\widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x)$. Но из первого равенства (37) видно, что

$$\widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1} \mid b) = \begin{cases} \lg \frac{x - a_{j_1}}{b - a_{j_1}}, & \text{если } j \neq j_1 \\ & \text{если } j_1 = j \end{cases}$$

есть голоморфная функция от x в точке a_j.

Допустим теперь, что все функции $\widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1} \dots a_{j_\mu} \mid x)$ при $\mu = 1, 2 \dots \nu - 1$ голоморфны в точке a_j. Выражение, стоящее под знаком интеграла в формуле для $\widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x)$, будет либо также голоморфной функцией в точке a_j, либо иметь там простой полюс. Но так как после интегрирования мы должны будем получить однозначную функцию в области точки a_j, полярный член в этом выражении должен отсутствовать и $\widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x)$ после интеграции определится как голоморфная функция от x в области $x = a_j$.

Голоморфность $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)$ в области $x = a_j$ этим установлена.

Обратная матрица

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1} = Y_b(x)^{-1} \left(\frac{b - a_j}{b - a_j} \right)^{W_j}$$

будет, как видно из строения правой части равенства, голоморфной функцией подстановок $U_1 \dots U_m$ в области нулевых подстановок

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1 \dots m} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} \overset{*}{\widetilde{L}}{}_b^{(j)}(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x). \tag{38}$$

Из равенства $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}=I$ следует, что $\widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\mid x)$ и $\widetilde{L}_b^{*(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\mid x)$ должны удовлетворять таким уравнениям

$$\sum_{\chi=0}^{\nu}\widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\chi}\mid x)\,\widetilde{L}_b^{*(j)}(a_{j_{\chi+1}}\dots a_{j_\nu}\mid x)=0, \tag{39}$$

из которых мы можем найти все $\widetilde{L}_b^{*(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\mid x)$ в виде полиномов от $\widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\mid x)$. Поэтому все коэффициенты ряда (38) будут опять голоморфными функциями от x в области $x=a_j$.

Нам осталось лишь показать единственность матрицы W_j. Как мы видели выше, всякое другое определение W_j^* матрицы W_j должно иметь форму

$$W_j^*=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}(V_j-1)^\nu+S[r_1J_{\rho_1}^{(0)}\dots r_sJ_{\rho_s}^{(0)}]\,S^{-1}.$$

Почти очевидно, что W_j и W_j^* коммутативны. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать коммутативность

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(V_j-1)^\nu \quad\text{и}\quad S[r_1J_{\rho_1}^{(0)}\dots r_sJ_{\rho_s}^{(0)}]\,S^{-1}.$$

Если $V_j=S[J_{\rho_1}(\omega_1)\dots J_{\rho_s}(\omega_s)]\,S^{-1}$, то (см. часть I, § 7)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(V_j-I)^\nu=S[G_{\rho_1}\dots G_{\rho_s}]\,S^{-1},$$

где для краткости письма мы обозначили через G_ρ матрицу

$$G_\rho\left(\lg\omega,\ \frac{1}{\omega},\ \dots,\ \frac{(-1)^{\rho-1}(\rho-2)!}{\omega^{\rho-1}}\right).$$

С другой стороны, перемножение матриц

$$S[G_{\rho_1}\dots G_{\rho_s}]\,S^{-1} \quad\text{и}\quad S[r_1J_{\rho_1}^{(0)}\dots r_\rho J_{\rho_s}]\,S^{-1}$$

сводится, что следует из правила умножения квази-диагональных матриц, к умножении rJ_ρ и G_ρ и так как первая из них есть диагональная матрица с равными элементами; то она коммутативна со всякой матрицей того же порядка, в частности с матрицей G_ρ. Отсюда и вытекает коммутативность W_j и W_j^*.

W_j^* должна также удовлетворять тому требованию, чтобы в разложении $Y_b(x)$ на два множителя:

$$Y_b(x)=\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j^*}\widetilde{Y}_b^{*(j)}(x)$$

матрица $\widetilde{Y}_b^{*(j)}$ и ей обратная были бы голоморфными в точке $x=a_j$. Найдем

теперь матрицу $\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j^*}\cdot\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}$. В силу коммутативности мы можем сложить показателей степеней и написать ее в форме

$$\left(\frac{x-a_j}{b-a_i}\right)^{W_j^*-W_j}=\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{S[r_1J_{\rho_1}^{(0)}\dots r_sJ_{\rho_s}^{(0)}]S^{-1}}=$$
$$=S\left[\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{r_1}J_{\rho_1}^{(0)}\dots\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{r_s}J_{\rho_s}^{(0)}\right]S^{-1}.$$

С другой стороны, эта матрица равна $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)\cdot\widetilde{Y}_b^{*(j)}(x)^{-1}$ и должна быть, следовательно, вместе со своей обратной матрицей, голоморфной в точке a_i. Последнее же возможно только в том случае, когда $r_1=\dots=r_s=0$, т. е. $W_j^*=W_j$.

Теорема таким образом установлена.

$\widetilde{Y}_b^j(x)$, будучи голоморфной в области $x=a_j$, имеет локальное разложение по степеням $(x-a_j)$.

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)=\sum_{p=0}^{\infty}B_j^{(p)}(x-a_j)^p, \tag{40}$$

коэффициенты которого $B_j^{(p)}$ будут голоморфными функциями дифференциальных подстановок в области нулевых подстановок, определяемые формулами:

$$B_j^{(0)}=I+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\dots j_\nu}^{1\dots m}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\int_{(a_j)}\widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\mid x)\,(x-a_j)^{-1}\,dx,$$

$$B_j^{(p)}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\dots j_\nu}^{1\dots m}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\int_{(a_j)}\widetilde{L}_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\mid x)\,(x-a_j)^{-p-1}\,dx.$$

Полученное представление интегральной матрицы (31) делает вполне очевидными ее особенности в точке a_j; все они будут заключены в первом множителе $\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}$ и тесно связаны с элементарными делителями матрицы W_j, которую мы ниже будем называть показательной подстановкой нормальной интегральной матрицы в точке a_j. Это представление мы можем немного упростить, присоединив постоянный множитель $(b-a_j)^{-W_j}$ к $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)$ и написав

$$Y_b(x)=(x-a_j)^{W_j}\,\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=(x-a_j)^{W_j}\,\overline{Y}_b^{(j)}(x). \tag{41}$$

Матрица $(x-a_j)^{W_j}=\theta_j\left(\begin{matrix}W_j\\ a_j\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$ является простейшей из всех возможных регулярных матриц. Она является решением следующей Эйлеровой системы уравнений:

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{\theta\,W_j}{x-a_j}.$$

Мы будем называть ее *элементарной метаканонической матрицей,* ибо она несущественно отличается от канонической системы решений, которую строят в обычной теории систем линейных уравнений. Пусть

$$W_j = S[J_{\rho_1}(\sigma_1)\ldots J_{\rho_s}(\sigma_s)]\,S^{-1}$$

есть каноническое представление для W. Как известно из теории функций от матриц, тогда

$$(x-a_j)^{W_j} = S[G_{\rho_1}((x-a_j)^{\sigma_1},\ (x-a_j)^{\sigma_1}\lg(x-a_j),\ \ldots,\ (x-a_j)^{\sigma_1}\lg^{\rho_1-1}(x-a_j)),\ldots,$$
$$\ldots,\ G_{\rho_s}[((x-a_j)^{\sigma_s},\ (x-a_j)^{\sigma_s}\lg(x-a_j),\ \ldots,\ (x-a_j)^{\sigma_s}\lg^{\rho_s-1}(x-a_j))]\,S^{-1}.$$

Это конечное представление вполне позволяет судить о всех особенностях элементарной метаканонической матрицы как с точки зрения ее ветвления, так и с точки зрения полярной особенности.

Когда $S=I$, $(x-a_j)^{W_j}$ вырождается в обычную каноническую матрицу.

Результаты основной теоремы могут быть, разумеется, обобщены на случай произвольной регулярной матрицы и для нее может быть доказана следующая аналогичная теорема.

Теорема V. *Если дифференциальные подстановки некоторой регулярной матрицы* $\Phi\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$, *определенной начальными условиями* $\Phi\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,b\right)=C$, *находятся в области нулевых подстановок, существует одна и только одна подстановка* W_j, *для которой имеет место представление*

$$\Phi\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right) = (x-a_j)^{W_j}\quad \overline{\Phi}^{j}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right),$$

где матрицы $\overline{\Phi}^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$ *и* $\overline{\Phi}^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)^{-1}$ *остаются голоморфными в области точки* $x=a_j$.

Подстановка W_j *есть аналитическая функция от подстановок* $U_1\ldots U_m$ *в указанной области.*

Доказательство. Рассматриваемая регулярная матрица связана с регулярной нормальной матрицей равенством:

$$\Phi\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right) = C\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right).$$

Следовательно, если $W_j(b)$ есть показательная подстановка для нормальной матрицы,

$$W_j = C\,W_j(b)\,C^{-1}$$

будет показательной подстановкой для $\Phi\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$. В силу единственности $W_j(b)$, W_j будет также единственной.

Как и раньше, матрицы W_j и $\overline{\Phi}^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$ вполне определяются условием возможности разложения $\Phi\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$ на два множителя указанного типа. Мы будем называть их ниже *показательной подстановкой и голоморфной компонентой рассматриваемой регулярной матрицы в точке* a_j.

Нормирование регулярной матрицы в особой точке a_j невозможно, но можно построить регулярную матрицу с нормированной в этой точке голоморфной компонентой. Для этого достаточно положить

$$\Theta_j\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right) = \overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,a_j\right)^{-1}(x-a_j)^{W_j}\cdot\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right) =$$
$$= (x-a_j)^{H_j}\,\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right), \tag{42}$$

где

$$H_j = \overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,a_j\right)^{-1} W_j(b)\,\overline{\Phi}_b^{j}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,a_j\right), \tag{43}$$

$$\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right) = \overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,a_j\right)^{-1}\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right). \tag{44}$$

Голоморфная компонента $\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$ может быть представлена в области точки $x=a_j$ рядом Тэйлора:

$$\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right) = I + \sum_{p=1}^{\infty} A_j^{(p)}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\right)(x-a_j)^p. \tag{45}$$

Очевидно, регулярная матрица, обладающая такого рода нормированием, будет единственной, ибо всякая другая интегральная матрица той же системы уравнений имеет вид

$$\Phi\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right) = G\,\Theta_j\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$$

и обладает поэтому показательной подстановкой $W_j = CH_jC^{-1}$ и голоморфной компонентой

$$\overline{\Phi}^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right) = G\,\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$$

приводящейся необходимо к C при $x=a_j$, так как

$$\overline{\Theta}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,a\right) = I.$$

Матрицу (42) будем называть *метаканонической матрицей в точке* a_j *и* H_j — *метаканонической показательной подстановкой в той же точке.*

Эксплицитное выражение для метаканонической матрицы дается следующей теоремой.

Теорема VI. *Метаканонические показательные подстановки равны дифференциальным подстановкам в соответствующих точках*

$$H_j = U_j.$$

Голоморфная компонента метаканонической матрицы так же, как и коэффициенты ее разложения в ряд Тэйлора, суть голоморфные функции дифференциальных подстановок в области нулевых подстановок, представляемые следующими рядами композиций:

$$\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1\ldots j_\nu}^{1\ldots m} U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}\overline{N}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\mid x), \tag{46}$$

$$A_j^{(p)}\begin{pmatrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} K_j^{(p)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}), \tag{47}$$

коэффициенты которых определяются рекуррентными соотношениями:

$$K_j^{(p)}(a_{j_1}) = \begin{cases} 0 & \text{при } j = j_1 \\ -\dfrac{1}{p(a_{j_1} - a_j)^p} & \text{при } j \neq j_1 \end{cases}$$

$$K_j^{(p)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}) = -\frac{1}{p}\left[\sum_{q=1}^{p-1} \frac{1}{(a_{j_\nu} - a_j)^{p-q}} K_j^{(q)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}) + \right.$$

$$\left. + \delta_{j_1}^j K_j^{(p)}(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu}) \right],$$

если $j_\nu \neq j$; $\sum\limits_{q=1}^{p-1} = 0$ *при* $p = 1$;

$$K_j^{(p)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}) = \frac{1}{p}\left[K_j^{(p)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}) - \delta_{j_1}^j K_j^{(p)}(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})\right], \tag{48}$$

если $j_\nu = j$,

$$\overline{N}_j(a_{j_1} \mid x) = \int_{a_j}^{x} \left[\frac{1}{x - a_{j_1}} - \frac{\delta_{j_1}^j}{x - a_j}\right] dx,$$

$$\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x) = \int_{a_j}^{x} \left[\frac{\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} - \frac{\delta_{j_1}^j \overline{N}_j(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x)}{x - a_j}\right] dx,$$

$$\delta_{j_1}^j = \begin{cases} 1 & \text{при } j_1 = j \\ 0 & \text{при } j_1 \neq j \end{cases}$$

Доказательство. Из формул (42)—(45) непосредственно видно, что метаканоническая показательная подстановка, голоморфная компонента метаканонической матрицы и коэффициенты ее разложения в ряд Тэйлора суть голоморфные функции дифференциальных подстановок в указанной в формулировке теоремы области. Нам остается, следовательно, показать справедливость рекуррентных формул для коэффициентов их разложений. Для этой цели заметим, что голоморфная компонента

$$\overline{Z}_j = \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right)$$

есть интегральная матрица системы уравнений:

$$\frac{d\overline{Z}_j}{dx} = \sum_{h=1}^{m} \frac{Z_j U_h}{x - a_h} - \frac{H_j \overline{Z}_j}{x - a_j},$$

приводящаяся к I для $x - a_j$. Заменяя в этой системе подстановку H_j рядом вида

$$H_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} J_j(a_j \ldots a_{j_\nu})$$

и отождествляя ее при помощи разложения (46), легко получить следующие рекуррентные формулы для $\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$:

$$\overline{N}_j(a_{j_1} \mid x) = \int_{a_j}^{x} \left[\frac{1}{x - a_{j_1}} - \frac{J_j(a_{j_1})}{x - a_j}\right] dx,$$

$$\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x) = \int_{a_j}^{x} \left[\frac{N_j(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{1}{x - a_j} J_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\varkappa}) \overline{N}_j(a_{j_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu} \mid x)\right] dx.$$

Голоморфность $\overline{Z}_j$ в области точки a_j при любых U_h влечет за собой голоморфность всех коэффициентов $\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$ в этой области. Последнее же может быть лишь в том случае, если полярные члены в выражениях, стоящих под знаками интегралов в предыдущих формулах, будут отсутствовать. Но это может быть тогда и только тогда, если

$$J_j(a_{j_1}) = \begin{cases} 1 & \text{при } j_1 = j \\ 0 & \text{при } j_1 \neq j \end{cases}$$

$$J_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}) = 0 \quad \text{при } \nu \geqslant 2.$$

Отсюда следует, что $H_j = U_j$ и $\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_j \mid x)$ определяются по формулам (48). $A_j^{(p)}\begin{pmatrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix}$ получается, если мы в выражении для $\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right)$ разложим функции $\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$ в ряды Тэйлора около точки $x = a_j$ и соберем коэффициенты при одинаковых степенях $x - a_j$. Поэтому $K_j^{(p)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$ будут коэффициентами разложения функций $\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$ в ряды Тэйлора так что:

$$\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x) = \sum_{p=1}^{\infty} K_j^{(p)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu})(x - a_j)^p.$$

Если теперь разложить в $\overline{N}_j(a_{j_1} \mid x)$ в ряд Тэйлора около a_j, сейчас же получим первую группу формул (48).

Для получения оставшихся соотношений подставим степенные ряды для $\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$ в рекуррентные соотношения для них. Различим два случая; пусть $j_\nu \neq j$:

$$\sum_{p=1}^{\infty} K_j^{(p)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu})(x - a_j)^p = \int_{a_j}^{x} \left[-\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x - a_j)^p}{(a_{j_\nu} - a_j)^{p+1}} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{p=1}^{\infty} K_j^{(p)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}})(x - a_j)^p - \delta_{j_1}^j \sum_{p=0}^{\infty} K_j^{(p+1)}(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})(x - a_j)^p\right] dx =$$

$$= -\int_{a_j}^{x} \left[\delta_{j_1}^j K_j^{(1)}(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu}) + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \sum_{q=1}^{p} \frac{K_j^{(q)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}})}{(a_{j_\nu} - a_j)^{p-q+1}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \delta_{j_1}^j K_j^{(p+1)}(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu}) \right\}(x - a_j)^p \right] dx$$

при $j_\nu = j$

$$\sum_{p=1}^{\infty} K_j^{(p)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu})(x-a_j)^p = \int_{a_j}^{x} \sum_{p=0}^{\infty}\Big[K_j^{(p+1)}(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}) - \\ - \delta_j^{j_1} K_j^{(p+1)}(a_{j_2}\dots a_{j_\nu})\Big](x-a_j)^p\,dx.$$

Отсюда сразу же получается требуемый результат.

Формулы (42—47) доказанной теоремы дают нам генеральное относительно x

$$\Theta_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\Big|\, x\right) = (x-a_j)^{U_j}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1\dots j_\nu}^{1\dots m} U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\overline{N}_j(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\mid x) \quad (49)$$

и локальное относительно x

$$\Theta_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\Big|\, x\right) = (x-a_j)^{U_j}\left[I+\sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\right)(x-a_j)^p\right] \quad (50)$$

представления метаканонической матрицы годные, если дифференциальные подстановки находятся в области нулевых подстановок. Вопрос о представлениях, годных для всяких дифференциальных подстановок, мы рассмотрим ниже.

Локальное представление может быть получено путем решения системы:

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{h=1}^{m}\frac{YU_h}{x-a_h}$$

по методу Фукса.

В самом деле, отождествляя эту систему при помощи ряда

$$Y = (x-a_j)^{H_j}\left[I+\sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}(a-a_j)^p\right],$$

имеем

$$\frac{H_j}{x-a_j}(x-a_j)^{H_j}\left[I+\sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}(x-a_j)^p\right] + (x-a_j)^{H_j}\sum_{p=1}^{\infty}pA_j^{(p)}(x-a_j)^{p-1} =$$

$$= (x-a_j)^{H_j}\left[I+\sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}(x-a_j)^p\right]\left[\sum_{h\neq j}\frac{U_h}{x-a_h}+\frac{U_j}{x-a_j}\right]$$

или

$$\frac{H_j-U_j}{x-a_j}+\sum_{p=1}^{\infty}\left[H_jA_j^{(p)}+pA_j^{(p)}-A_j^{(p)}U_j\right](x-a_j)^{p-1} =$$

$$= -\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{h\neq j}\sum_{q=0}^{p-1}\frac{A_j^{(q)}U_h}{(a_h-a_j)^{p-q}}(x-a_j)^{p-1}; \qquad A_j^{(0)} = I.$$

Сравнив же здесь коэффициенты при одинаковых степенях $(x-a_j)$, получим рекуррентные соотношения

$$H_j = U_j,$$

$$U_jA_j^{(p)}+pA_j^{(p)}-A_j^{(p)}U_j = -\sum_{h\neq j}\sum_{q=0}^{p-1}\frac{A_j^{(q)}U_h}{(a_h-a_j)^{p-q}}, \qquad p=1,\,2,\,\dots \quad (51)$$

из которых последовательно должны быть определены $A_j^{(p)}$.

Подробное исследование этой системы показало бы нам, что найденные из нее матрицы $A_j^{(p)}$ будут аналитическими функциями от всех U_h, особенности которых соответствуют таким значениям подстановки U_j, разность между характеристическими числами которых будет целым числом, отличным от нуля. Мы не будем, однако, проводить соответствующих рассуждений, ибо имеем в виду получить тот же результат в следующем параграфе иным путем. При достаточно же малых подстановках U_j все $A_j^{(p)}$ будут голоморфными от U_h, и поэтому система может быть решена при помощи рядов композиций

$$A_j^{(p)} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\dots j_\nu}^{1\dots m} U_{j_1}\dots U_{j_\nu}K_j^{(p)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}).$$

Если их подставить в (51) и принять во внимание, что $A_j^{(0)} = I$, будем иметь

$$\delta_{j_1}^{j}K_j^{(p)}(a_{j_2}\dots a_{j_\nu})+pK_j^{(p)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}) = -\sum_{q=0}^{\infty}K_j^{(q)}(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}})\frac{1}{(a_{j_\nu}-a_j)^{p-q}},$$

если $j_\nu \neq j$ и

$$\delta_{j_1}^{j}K_j^{(p)}(a_{j_2}\dots a_{j_\nu})+pK_j^{(p)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu})-K_j^{(p)}(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}) = 0,$$

если $j_\nu = j$.

Отсюда и следует тождественность $A_j^{(p)}$, найденных по методу Фукса, с определенными ранее, ибо полученные равенства для $K_j^{(p)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu})$ те же, что и (48), только в иной форме.

Интегральная и показательная подстановки метаканонической матрицы в точке a_j суть

$$e^{2\pi i U_j} \text{ и } U_j.$$

Произвольная регулярная матрица $\Phi\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\Big|\, x\right)$ может отличаться от метаканонической матрицы только постоянным множителем слева, и поэтому ее интегральная подстановка V_j и показательная W_j необходимо должны иметь форму

$$V_j = Ce^{2\pi i U_j}C^{-1} = e^{2\pi i\, CU_jC^{-1}}$$

и

$$W_j = CU_jC^{-1}.$$

Отсюда следует теорема:

Теорема VII. *Характеристические числа интегральной и показательной подстановок произвольной регулярной матрицы суть характеристические числа соответственно подстановок*

$$e^{2\pi i U_j} \text{ и } U_j.$$

В частном случае регулярная нормальная матрица, очевидно, связана с метаканонической матрицей равенством:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\Big|\, x\right) = \Theta_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\Big|\, b\right)^{-1}\Theta_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\Big|\, x\right) =$$

$$\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\Big|\, b\right)^{-1}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\Big|\, x\right),$$

поэтому $V_j(b)$ и $W_j(b)$ представимы в форме

$$V_j(b) = \Omega_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\middle|\, b\right) = \Theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1} e^{2\pi i U_j}\, \Theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\middle|\, b\right) =$$

$$= \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1} e^{2\pi i U_j}\, \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\middle|\, b\right), \tag{52}$$

$$W_j(b) = \Xi_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\middle|\, b\right) = \Theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1} U_j \Theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\middle|\, b\right) =$$

$$= \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1} U_j \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\middle|\, b\right) \tag{53}$$

Из этих равенств без затруднений получаются соотношения, позволяющие вычислить коэффициенты $P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b)$, $P_j^*(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b)$ и $\Theta_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b)$ разложений $V_j(b)$, $V_j^{-1}(b)$ и $W_j(b)$ в ряды композиций, независимо от остальных величин. Из них непосредственным дифференцированием получается, что $V_j(b)$, $V_j^{-1}(b)$ и $W_j(b)$, рассматриваемые как функции точки нормализации b, должны удовлетворять одной и той же системе уравнений

$$\frac{dY}{db} = \sum_{h=1}^{m} \frac{YU_h - U_h Y}{b - a_h}, \tag{54}$$

но при начальных данных соответственно

$$V_j(a_j) = e^{2\pi i U_j},\; V_j(a_j)^{-1} = e^{2\pi i U_j} \text{ и } W_j(a_j) = U_j, \tag{55}$$

ибо, в самом деле, например для $V_j(b)$ из (52) следует

$$\frac{dV_j(b)}{db} = \frac{d\Theta_j(b)^{-1}}{db} e^{2\pi i U_j} \Theta_j(b) + \Theta_j(b)^{-1} e^{2\pi i U_j} \frac{d\Theta_j(b)}{db} =$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \frac{V_j(b) U_h - U_h V_j(b)}{b - a_j}.$$

Из последней части того же равенства следует при $b = a_j$.

$$V_j(a) = e^{2\pi i U_j}.$$

Если теперь систему (54) отождествить при помощи рядов (27), (29) и (33), мы для коэффициентов их получим требуемые равенства

$$P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b) = \frac{(2\pi i)^\nu}{\nu!}, \qquad \text{если } j_1 = \ldots = j_\nu = j;$$

$$P_j(a_{j_1} \mid b) = 0, \qquad \text{если } j_1 \neq j;$$

$$P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b) = \int_{a_j}^{b} \left[\frac{P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid b)}{b - a_{j_\nu}} - \frac{P_j(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid b)}{b - a_{j_1}}\right] db;$$

$$P_j^*(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b) = \frac{(-2\pi i)^\nu}{\nu!}, \qquad \text{при } j_1 = \ldots = j_\nu = j;$$

$$P_j^*(a_{j_1} \mid b) = 0, \qquad \text{при } j_1 \neq j;$$

$$P_j^*(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b) = \int_{a_j}^{b} \left[\frac{P_j^*(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid b)}{b - a_{j_\nu}} - \frac{P_j^*(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid b)}{b - a_{j_1}}\right] db;$$

$$Q_j(a_{j_1} \mid b) = \begin{cases} 1, \text{ когда } j_1 = j \\ 0, \text{ когда } j_1 \neq j \end{cases}$$

$$Q_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b) = \int_{a_j}^{b} \left[\frac{Q_j(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid b)}{b - a_{j_\nu}} - \frac{Q_j(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid b)}{b - a_{j_2}}\right] db;$$

§ 5. Генеральное представление по отношению дифференциальных подстановок. Только что даные нами выражения для метаканонической и показательной матриц годны лишь при том условии, что дифференциальные подстановки находятся в окрестности нулевых матриц.

Мы попытаемся дать теперь такое представление их, которое было бы годным для любой системы дифференциальных подстановок.

Рассмотрим прежде всего показательные подстановки регулярной нормальной матрицы:

$$W_j = \Xi\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\middle|\, b\right).$$

Как мы видели выше, когда U_h достаточно малы, V_j будет близкой к идентичной матрице и W_j может быть представлена следующим рядом:

$$W_j = \frac{1}{2\pi i} \lg V_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu - 1} (V_j - I)^\nu. \tag{56}$$

В конце предыдущего параграфа нами была доказана теорема о подобии интегральной подстановки V_j и $e^{2\pi i U_j}$.

Поэтому V_j и $e^{2\pi i U_j}$ будут иметь одинаковые характеристические числа и если мы через $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ назовем характеристические числа дифференциальной подстановки U_j, то характеристическими числами V_j будут

$$e^{2\pi i \xi_1}, \qquad e^{2\pi i \xi_2}, \ldots e^{2\pi i \xi_n}.$$

Для получения аналитического продолжения представления W_j, мы воспользуемся формулой Лагранжа — Сильвестера, применяя ее к (56):

$$W_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{(V_j - e^{2\pi i \xi_k}) \ldots (V_j - e^{2\pi i \xi_{k-1}}) \cdot (V_j - e^{2\pi i \xi_{k+1}}) \ldots (V_j - e^{2\pi i \xi_n})}{(e^{2\pi i \xi_1} - e^{2\pi i \xi_k}) \ldots (e^{2\pi i \xi_k} - e^{2\pi i \xi_{k-1}}) \cdot (e^{2\pi i \xi_k} - e^{2\pi i \xi_{k+1}}) \ldots (e^{2\pi i \xi_k} - e^{2\pi i \xi_n})} \xi_k \tag{57}$$

В частном случае для $n = 2$ будем иметь:

$$W_j = \frac{e^{2\pi i \xi_2} \xi_1 - e^{2\pi i \xi_1} \xi_2}{e^{2\pi i \xi_2} - e^{2\pi i \xi_1}} + \frac{\xi_2 - \xi_1}{e^{2\pi i \xi_2} - e^{2\pi i \xi_1}} V_j.$$

Формула (57) дает возможность найти вполне определенное значение показательной подстановки W_j для всякой системы матриц U_h за исключением тех случаев, когда разность каких-либо двух характеристических чисел дифференциальной подстановки U_j будет целым числом, отличным от нуля. Значения же матрицы U_j, разность характеристических чисел для которых будет целым числом, отличным от нуля, будут вообще особыми значениями для W_j.

Чтобы дать представление W_j, аналитически продолжающее ряд (56) для всех значений матриц U_h и согласное с тем, о котором мы говорили в общей теории функций от матриц, мы будем искать такую целую инвариантную функцию подстановки U_j, чтобы произведение ее на W_j было целой функцией подстановок U_h. В рассматриваемом нам случае указать такую функцию чрезвычайно легко. В качестве ее можно взять, например, общий знаменатель слагаемых в формуле Лагранжа — Сильвестера.

Для того чтобы перейти от показательных функций к тригонометрическим, мы видоизменим немного этот простейший способ выбора искомой инвариантной функции и рассмотрим следующую числовую функцию подстановки U:

$$\Delta(U_j)=\prod_{k>l}\frac{e^{2\pi i\xi_k}-e^{2\pi i\xi_l}}{2\pi i(\xi_k-\xi_l)}\,e^{-\pi i(n-1)\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}. \tag{58}$$

Очевидно будет иметь место:

$$\Delta(U_j)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu(U_j), \tag{59}$$

где

$$\delta_0(U_j)=1$$

$$\delta_\nu(U_j)=\sum_{\varkappa_0+\ldots+\varkappa_0=\nu}\frac{1}{\varkappa}\left[-\pi i(n-1)(\xi_1+\ldots+\xi_n)\right]^{\varkappa_0}P_{\varkappa_1}(\xi_1\xi_2)\ldots P_{\varkappa_{\frac{n(n-1)}{2}}}(\xi_{n-1}\xi_n) \tag{60}$$

$$P_\varkappa(\xi,\eta)=\frac{(2\pi i)^\varkappa}{(\varkappa+1)!}(\xi^\varkappa+\xi^{\varkappa-1}\eta+\ldots+\xi\eta^{\varkappa-1}+\eta^\varkappa).$$

Все $\delta_\nu(U_j)$ суть симметричные и однородные полиномы соответственно степени ν относительно характеристических чисел $\xi_1\ldots\xi_n$. Поэтому они будут однородными полиномами степеней ν относительно элементов $\{U_j\}_{kl}$ подстановки U_j и функция $\Delta(U_j)$ будет целой функцией элементов подстановки U_j. Ее разложение в ряд Маклорена может быть получено из ряда (59).

В частности при $n=2$ имеем:

$$\Delta(U_j)=e^{-\pi i(\xi_1+\xi_2)}\frac{e^{2\pi i\xi_2}-e^{2\pi i\xi_1}}{\xi_2-\xi_1}=\frac{\sin\pi(\xi_2-\xi_1)}{\pi(\xi_2-\xi_1)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu\pi^{2\nu}}{(2\nu+1)!}(\xi_2-\xi_1)^{2\nu}$$

или

$$\Delta(U_j)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu\pi^{2\nu}}{(2\nu+1)!}[(\{U_j\}_{11}+\{U_j\}_{22})^2-4(\{U_j\}_{11}\{U_j\}_{22}-\{U_j\}_{12}\{U_j\}_{21})]^\nu.$$

Рассмотрим теперь функцию $W_j\Delta(U_j)$. Согласно формуле (57), она будет представляться полиномом $(n-1)$-ой степени относительно U_j, коэффициенты которого будут целыми симметрическими функциями характеристических чисел подстановки U_j, иначе говоря, целые функции от инвариантов этой подстановки. Например, при $n=2$ будет

$$2\pi i\left[\frac{e^{2\pi i\xi_2}\xi_1-e^{2\pi i\xi_1}\xi_2}{\xi_2-\xi_1}e^{-\pi i(\xi_1+\xi_2)}+e^{-\pi i(\xi_1+\xi_2)}V_j\right].$$

С другой стороны, так как V_j есть целая функция от U_n, то отсюда следует, что элементы матрицы $\Delta(U_j)W_j$ суть целые функции элементов подстановок U_n. Принимая во внимание ряд (59), мы видим, что разложение Маклорена для этой функции будет:

$$W_j\Delta(U_j)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\chi=1}^{\nu}\sum_{j_1\ldots j_\chi}^{1\ldots m}U_{j_1}\ldots U_{j_\chi}\delta_{\nu-\chi}(U_j)\,Q_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\chi}\,|\,b). \tag{61}$$

Таким образом, мы получаем следующую теорему:

Теорема VIII. *Показательная подстановка W_j есть мероморфная функция дифференциальных подстановок $U_1\ldots U_m$, имеющая следующее генеральное представление:*

$$W_j=\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sum\limits_{\chi=1}^{\nu}\sum\limits_{j_1=\chi}^{1\ldots m}U_{j_1}\ldots U_{j_\chi}\delta_{\nu-\chi}(U_j)\,Q_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\chi}\,|\,b)}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu(U_j)}. \tag{62}$$

Особенностями этой функции будут такие значения подстановки V_j, характеристические числа которых будут разниться между собой на целое число, отличное от нуля.

Матрица $(x-a_j)^{W_j}=(x-a_j)^{2\pi i\lg V_j}$ точно также будет мероморфной функцией дифференциальных подстановок, так как по формуле Лагранжа — Сильвестера

$$(x-a_j)^{W_j}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(V_j-e^{2\pi i\xi_1})\ldots(V_j-e^{2\pi i\xi_{k-1}})(V_j-e^{2\pi i\xi_{k+1}})\ldots(V_j-e^{2\pi i\xi_k})}{(e^{2\pi i\xi_k}-e^{2\pi i\xi_1})\ldots(e^{2\pi i\xi_k}-e^{2\pi i\xi_{k-1}})(e^{2\pi i\xi_k}-e^{2\pi i\xi_{k+1}})\ldots(e^{2\pi i\xi_k}-e^{2\pi i\xi_k})}(x-a_j)^{\xi_k}$$

и, следовательно, $\Delta(U_j)(x-a_j)^{W_j}$ есть целая функция элементов дифференциальных подстановок.

Совершенно также функция $\Delta(U_j)(x-a_j)^{-W_j}$ есть целая функция от элементов дифференциальных подстановок $U_1\ldots U_m$, так как формула Лагранжа — Сильвестера для $(x-a_j)^{-W_j}$ будет отличаться от соответствующей формулы для $(x-a_j)^{\xi_k}$ только тем, что вместо $(x-a_j)^{\xi_k}$ всюду будут стоять $(x-a_j)^{-\xi_k}$.

Из всего сказанного следует, что функции

$$\Delta(U_j)\,\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)=\Delta(U_j)(x-a_j)^{-W_j}\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)$$

и

$$\Delta(U_j)\,\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)^{-1}=\Delta(U_j)\,\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)^{-1}(x-a_j)^{W_j}$$

суть также целые функции от элементов подстановок $U_1\ldots U_m$, ибо

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)$$

и

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)^{-1},$$

как было установлено раньше, суть целые функции от $U_1\ldots U_m$.

Далее известно, что

$$\Theta_j\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)=\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,a_j\right)^{-1}(x-a_j)^{W_j}\,\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)=$$

$$=\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,a_j\right)^{-1}\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right).$$

Поэтому и матрица

$$\Delta(U_j)\,\Theta_j\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)$$

есть целая функция дифференциальных подстановок.

Следовательно, метаканоническая матрица есть мероморфная функция дифференциальных подстановок, генеральное представление которой относительно $U_1\ldots U_m$ будет

$$\Theta_j\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)=$$

$$=\frac{1}{\Delta(U_j)}(x-a_j)^{U_j}\sum_{\nu=0}^{\infty}\ \sum_{\varkappa=0}^{\nu}\ \sum_{j_1\ldots j_\varkappa}^{1\ldots m}U_{j_1}\ldots U_{j_\varkappa}\delta_{\nu-\varkappa}(U_j)\,\overline{N}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\varkappa}|x) \qquad (63)$$

Подобным же образом можно показать, что матрица, обратная метаканонической матрице, есть также мероморфная функция дифференциальных подстановок и имеет следующее генеральное представление:

$$\Theta_j\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\Delta(U_j)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\ \sum_{\chi=0}^{\nu}\ \sum_{j_1\ldots j_\chi}^{1\ldots m}U_{j_1}\ldots U_{j_\chi}\delta_{\nu-\chi}(U_j)\,\overline{N}_j^{*}(a_{j_1}\ldots a_{j_\chi}|x)\,(x-a_j)^{U_j}\,. \qquad (64)$$

Мы имеем таким образом теорему:

Т е о р е м а IX. *Метаканоническая матрица*

$$\Theta_j\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)$$

так же, как и обратная ей, есть мероморфные функции дифференциальных подстановок, генеральные представления которых даются рядами (63—64). Особенности их соответствуют таким значениям подстановки U_j, для которых разности характеристических чисел будут целыми числами, отличными от нуля.

§ 6. Задача Пуанкаре для бесконечно-далекой точки. Предыдущие результаты дают полное решение задачи Пуанкаре для всякой особой точки a_j на конечном расстоянии. Нам остается только рассмотреть ту же задачу для бесконечно далекой точки, иначе говоря, исследовать особенность регулярной матрицы в этой точке.

Пусть попрежнему $\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)$ обозначает регулярную матрицу, нормированную в точке b.

Если особые точки $a_1\ldots a_m$ системы дифференциальных уравнений перенумерованы в надлежащем порядке (рис. 1), то интегральная подстановка, которую претерпевает рассматриваемая матрица, когда независимая переменная x делает положительный обход вокруг бесконечно-далекой точки, или отрицательный обход вокруг всех особых точек на конечном расстоянии, имеет следующее выражение:

$$V_\infty=(V_1V_2\ldots V_n)^{-1}=V_n^{-1}\ldots V_2^{-1}V_1^{-1}, \qquad (65)$$

где V_j есть интегральная подстановка в точке a_j.

Отсюда видно, что интегральная подстановка для бесконечно-далекой точки V_∞ есть целая функция дифференциальных подстановок, ибо она есть произведение конечного числа целых функций.

$$V_\infty=\Omega_\infty\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1\ldots j_\nu}^{1\ldots m}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}P_\infty(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\,b). \qquad (66)$$

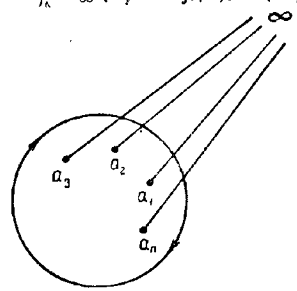
Коэффициенты этого разложения $P_\infty(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\,b)$ есть полиномы от коэффициентов $P_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\,b)$, которые легко могут быть вычислены, если воспользоваться уже полученными ранее результатами.

Рассмотрим функцию

$$W_\infty=\frac{1}{2\pi i}\lg V_\infty. \qquad (67)$$

Когда дифференциальные постановки $U_1\ldots U_m$ малы, интегральная подстановка V_∞ будет близка к идентичной подстановке и если, как и раньше, принять за W_∞ главную ветвь матричного логарифма, то W_∞ может быть разложена в ряд композиций вида:

$$W_\infty=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(V_\infty-1)^\nu=\sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1\ldots j_\nu}^{1\ldots m}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}\,Q_\infty(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\,b), \qquad (68)$$



который представляет голоморфную функцию подстановок $U_1\ldots U_m$ в окрестности нулевых подстановок. Коэффициенты $Q_\infty(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\,b)$ будут полиномами от коэффициентов $P_\infty(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\,b)$.

Пользуясь методом, совершенно аналогичным тому, который был использован в случае особых точек на конечном расстоянии, легко доказать, что подстановка W_∞ есть единственная подстановка, удовлетворяющая требованию возможности разложения $\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)$ на два множителя вида

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty}\overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right), \qquad (69)$$

где матрицы

$$\overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)$$

и

$$\overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)$$

будут голоморфными функциями относительно x в области бесконечно-далекой точки.

Подстановку W_∞ будем называть *показательной подстановкой*, а матрицу $\overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)$ — *голоморфной составляющей интегральной матрицы $Y_b(x)$ в бесконечно-далекой точке.*

Легко можно получить показательную подстановку и голоморфную составляющую в бесконечности для любой регулярной матрицы.

Как и раньше, справедливо, что существует единственная регулярная матрица, имеющая дифференциальные подстановки $U_1\dots U_m$ в точках $a_1\dots a_m$, голоморфная составляющая которой нормирована в точке ∞. Эта матрица может быть изображена в виде:

$$\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^{H_\infty}\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right), \tag{70}$$

где матрица $\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$ вместе с обратной матрицей голоморфна в области бесконечности и допускает там разложение вида:

$$\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=I+\sum_{p=1}^{\infty}A_\infty^{(p)}\begin{pmatrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{pmatrix}\frac{1}{x^p}.$$

Чтобы построить $\Theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$, достаточно положить

$$\Theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,\infty\right)^{-1}\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right),$$

откуда следует

$$H_\infty=\overline{\Phi}^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,\infty\right)^{-1}W_\infty(b)\,\overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,\infty\right) \tag{71}$$

$$\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,\infty\right)^{-1}\overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right) \tag{72}$$

Простым дифференцированием можно убедиться, что голоморфная составляющая

$$\overline{Z}_\infty=\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=x^{H_\infty}\Theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$$

метаканонической матрицы в бесконечно-далекой точке удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d\overline{Z}_\infty}{dx}=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\overline{Z}_\infty U_h}{x-a_h}+\frac{H_\infty\overline{Z}_\infty}{x}; \tag{73}$$

кроме того, она удовлетворяет начальным условиям:

$$Z_\infty(\infty)=I.$$

Отождествляя систему (73) с рядами

$$H_\infty=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\dots j_\nu}^{1\dots m}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}J_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}), \tag{74}$$

$$\overline{Z}_\infty=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\dots j_\nu}^{1\dots m}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\overline{N}_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu_1}}|x), \tag{75}$$

приходим к равенствам

$$\overline{N}_\infty(a_{j_1}|x)=\int_\infty^x\left[\frac{1}{x-a_{j_1}}+\frac{I_\infty(a_{j_1})}{x}\right]dx;$$

$$\overline{N}_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|x)=$$
$$=\int_\infty^x\left[\frac{\overline{N}_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}|x)}{x-a_{j_\nu}}+\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{1}{x}I_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_\varkappa})\overline{N}_\infty(a_{j_{\varkappa+1}}\dots a_{j_\nu}|x)\right]dx.$$

Но коэффициенты $\overline{N}_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|x)$ должны быть голоморфны в окрестности бесконечности; чтобы это было так, необходимо и достаточно, чтобы подинтегральные выражения допускали разложения вида $\sum\limits_{p=2}^{\infty}C_px^{-p}$, что последовательно дает:

$$J_\infty(a_{j_1})=-1,\quad j_1=1,2,\dots m,$$
$$J_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_\nu})=0,\quad \text{при } n\geqslant 2;$$

стало быть,

$$H_\infty=-(U_1+U_2+\dots+U_m) \tag{76}$$

и функции $\overline{N}_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|x)$ определяются рекуррентными соотношениями:

$$\overline{N}_\infty(a_{j_1}|x)=\int_\infty^x\left[\frac{1}{x-a_{j_1}}-\frac{1}{x}\right]dx. \tag{77}$$

$$\overline{N}_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|x)=\int_\infty^x\left[\frac{\overline{N}_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}|x)}{x-a_{j_\nu}}-\frac{\overline{N}_\infty(a_{j_2}\dots a_{j_\nu}|x)}{x}\right]dx.$$

Метаканоническая матрица в бесконечно-удаленной точке определяется таким образом как голоморфная функция дифференциальных подстановок в окрестности нулевых подстановок:

$$\Theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^{-(U_1+\dots+U_m)}\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right). \tag{78}$$

Интегральная и показательная подстановки этой матрицы в бесконечно-удаленной точке будут:

$$V_\infty=e^{-2\pi i(U_1+\dots+U_m)},\quad H_\infty=-(U_1+\dots+U_m).$$

Произвольная регулярная матрица, имеющая те же дифференциальные подстановки и ту же конфигурацию особых точек:

$$\Phi\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=C\Theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$$

имеет в бесконечно-далекой точке интегральную и показательную подстановки вида

$$Ce^{2\pi i(U_1+\dots+U_m)}C^{-1}\quad\text{и}\quad -C(U_1+\dots+U_m)C^{-1}. \tag{79}$$

Отсюда следует, что характеристические числа этих подстановок совпадают соответственно с характеристическими числами подстановок

$$e^{-2\pi i(U_1+\dots+U_m)}\quad\text{и}\quad -(U_1+\dots+U_m).$$

В частном случае, регулярная нормальная матрица и ее интегральная и показательная подстановки в бесконечно-далекой точке имеют выражения следующего вида:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)=\Theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1}\cdot\Theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)=$$

$$=\bar\Theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1}\left(\frac{b}{x}\right)^{-(U_1+\dots+U_m)}\bar\Theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right) \tag{80}$$

$$V_\infty(b)=\Omega_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)=$$

$$=\Theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1}e^{-2\pi i(U_1+\dots+U_m)}\,\Theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)=$$

$$=\bar\Theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1}e^{-2\pi i(U_1+\dots+U_m)}\,\bar\Theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right) \tag{81}$$

$$W_\infty(b)=\Xi\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)=$$

$$=-\Theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1}(U_1+\dots+U_m)\,\Theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)=$$

$$=-\Theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1}(U_1+\dots+U_m)\,\bar\Theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right). \tag{82}$$

Из двух последних равенств следует, что подстановки $V_\infty(b)$ и $W_\infty(b)$, рассматриваемые как функции точки нормализации, есть решения системы

$$\frac{dY}{db}=\sum_{j=1}^{m}\frac{YU_j-U_jY}{b-a_j} \tag{83}$$

с начальными условиями:

$$Y(\infty)=V_\infty(\infty)=e^{-2\pi i(U_1+\dots+U_m)},$$

$$Y(\infty)=W_\infty(\infty)=-(U_1+\dots+U_m).$$

Подставляя в систему (83) ряды (81) и (82), сравнивая коэффициенты и пользуясь указанными начальными условиями, найдем рекуррентные формулы для

$$P_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,b)$$

и

$$Q_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,b),$$

позволяющие вычислить их независимо от других величин:

$$P_\infty(a_{j_2}\,|\,b)=-2\pi i, \tag{84}$$

$$P_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,b)=\frac{(-2\pi i)^\nu}{\nu!}+\int_\infty^b\left[\frac{P_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\,|\,b)}{b-a_{j_\nu}}-\frac{P_\infty(a_{j_2}\dots a_{j_\nu}\,|\,b)}{b-a_{j_1}}\right]db,$$

$$Q_\infty(a_{j_1}\,|\,b)=-1, \tag{85}$$

$$Q_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,b)=\int_\infty^b\left[\frac{Q_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\,|\,b)}{b-a_{j_\nu}}-\frac{Q_\infty(a_{j_2}\dots a_{j_\nu}\,|\,b)}{b-a_{j_1}}\right]db.$$

Полученные нами разложения для $Q_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)$ и $W_\infty(b)$ справедливы только при том предположении, что дифференциальные подстановки находятся в соседстве с нулевыми подстановками. Замечая, что характеристические числа подстановки $V_\infty(b)$ будут характеристическими числами подстановки $e^{2\pi i\,U_\infty}$, где $U_\infty=-(U_1+\dots+U_m)$, и, пользуясь формулой Лагранжа—Сильвестера, как в случае особой точки на конечном расстоянии, приходим к заключению, что эти матрицы будут мероморфными функциями дифференциальных подстановок, особенностями которых будут значения подстановки U_∞ с целочисленными не нулевыми разностями характеристических чисел.

Генеральные представления рассматриваемых матриц в виде отношений двух целых функций от элементов подстановок U_h будут:

$$W_\infty(b)=\Xi_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)=$$

$$=\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sum\limits_{\chi=1}^{\nu}\sum\limits_{j_1\dots j_\chi}^{1\dots m}U_j\dots U_{j_\chi}\,\delta_{\nu-1}(U_\infty)\,Q_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_\chi}\,|\,b)}{\sum\limits_{\nu=0}\delta_\nu(U_\infty)} \tag{86}$$

$$\Theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{x}\right)^{U_\infty}\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\sum\limits_{\chi=0}^{\nu}\sum\limits_{j\dots j_\chi}^{1\dots m}U_{j_1}\dots U_{j_\chi}\,\delta_{\nu-\chi}(U_\infty)\,\bar N_\infty(a_{j_1}\dots a_{j_\chi}\,|\,x)}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu(U_\infty)}. \tag{87}$$

$\delta_\nu(U)$ имеют тот же смысл, что и раньше.

§ 7. Приложения к частным случаям. Система Гаусса. I. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dY}{dx}=\sum_{j=1}^{m}YU_j\,g_j(x), \tag{88}$$

где U_j — матрицы, не зависящие от x, и $g_j(x)$ — произвольные аналитические функции от x; мы будем их предполагать голоморфными вблизи точки $x=b$.

Интегральная матрица взятой системы, обращающаяся в I в точке $x=b$, есть целая функция от $U_1\dots U_m$, представляемая рядом композиций:

$$Y(x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\dots j_\nu}^{1\dots m}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\,\varphi_{j_1\dots j_\nu}(x), \tag{89}$$

где коэффициенты определяются следующими рекуррентными формулами:

$$\varphi_{j_1}(x)=\int_b^x g_{j_1}(x)\,dx,$$

$$\varphi_{j_1\dots j_\nu}(x)=\int_b^x\varphi_{j_1\dots j_{\nu-1}}(x)\,g_{j_\nu}(x)\,dx.$$

В случае системы

$$\frac{dY}{dx} = Y\,[U_1\,g_1(x) + U_2\,g_2(x)], \tag{88a}$$

где $m=2$ и порядок матриц U_j равен двум, т. е., когда мы имеем дело с системой двух уравнений, мы можем применить к ряду (89) результаты общей теории аналитических функций двух переменных матриц второго порядка (см. часть I, § 12). Обозначим через $\xi_1^{(1)}$, $\xi_1^{(2)}$ и $\xi_2^{(1)}$, $\xi_2^{(2)}$ характеристические числа подстановок U_1 и U_2 и положим:

$$U_1 - \xi_1^{(1)} = \overline{U}_1; \quad U_2 - \xi_1^{(1)} = \overline{U}_2. \tag{90}$$

Характеристические числа двух новых подстановок $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ будут соответственно

$$0,\ \xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)} = \xi_1$$

и

$$0,\ \xi_2^{(2)} - \xi_2^{(1)} = \xi_2.$$

Очевидно

$$\sigma(\overline{U}_1) = \xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)} = \xi_1;\ \sigma(\overline{U}_2) = \xi_2^{(2)} - \xi_2^{(1)} = \xi_2. \tag{91}$$

Положим еще

$$\sigma(\overline{U}_1\,\overline{U}_2) = \rho$$

и докажем следующую теорему:

Теорема X. *Интегральная матрица системы (88), обращающаяся в I в точке $x=b$, может быть представлена в форме*

$$Y_b(x) = e^{\int_b^x \left[\xi_1^{(1)} g_1(x) + \xi_2^{(1)} g_2(x)\right] dx} [I + \overline{U}_1\,\varphi_{11}(\rho\,|\,\xi_1\,\xi_2\,|\,x) + \overline{U}_1\,\overline{U}_2\,\varphi_{12}(\rho\,|\,\xi_1\,\xi_2\,|\,x) +$$

$$+ \overline{U}_2\,\overline{U}_4\,\varphi_{21}(\rho\,|\,\xi_1\,\xi_2\,|\,x) + \overline{U}_2\,\varphi_{22}(\rho\,|\,\xi_1\,\xi_2\,|\,x)], \tag{92}$$

где коэффициенты $\varphi_{kl}(\rho\,|\,\xi_1\,\xi_2\,|\,x)$ $(k, l = 1, 2)$ суть целые функции параметра ρ:

$$\varphi_{kl}(\rho\,|\,\xi_1\,\xi_2\,|\,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \rho^\nu \varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x) \tag{93}$$

и $\varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x)$ определяются рекуррентными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_{kk}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x) = \frac{1}{\xi_k}\left[e^{\xi_k \int_b^x g_k(x)\,dx} - 1\right] \\
&\varphi_{kl}^{(0)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x) = \frac{1}{\xi_k}\, e^{\xi_l \int_b^x g_l(x)\,dx} \int_b^x g_l(x)\, e^{\int_b^x \left[\xi_k g_k(x) - \xi_l g_l(x)\right] dx}\, dx - \\
&\qquad - \frac{1}{\xi_k \xi_l}\left[e^{\xi_l \int_b^x g_l(x)\,dx} - 1\right] \\
&\varphi_{kk}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x) = e^{\xi_k \int_b^x g_k(x)\,dx} \int_b^x g_k(x)\,\varphi_{kl}^{(\nu-1)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x)\, e^{\xi_k \int_b^x g_k(x)\,dx}\, dx \\
&\varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x) = e^{\xi_l \int_b^x g_l(x)\,dx} \int_b^x g_l(x)\,\varphi_{kk}^{(\nu-1)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x)\, e^{\xi_l \int_b^x g_l(x)\,dx}\, dx \\
&\qquad k_1\,l = 1,\ 2 \text{ и } k \neq 1
\end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Выражение (92) справедливо для всей области существования функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$ по отношению к x и для всяких систем подстановок U_1 и U_2.

Доказательство. Обозначим через $\overline{Y}_b(x)$ интегральную матрицу системы:

$$\frac{d\overline{Y}}{dx} = \overline{Y}\,[\overline{U}_1 g_1(x) + \overline{U}_2\,g_2(x)], \tag{95}$$

удовлетворяющую начальному условию $\overline{Y}_b(b) = I$. Очевидно имеем:

$$Y_b(x) = e^{\int_b^x [\xi_1^{(1)} g_1(x) + \xi_2^{(1)} g_2(x)]\,dx}\,\overline{Y}_b(x).$$

Согласно результатам общей теории функций двух переменных матриц второго порядка, должно иметь место следующее представление $\overline{Y}_b(x)$:

$$\overline{Y}_b(x) = I + U_1\,\varphi_{11}(\rho\,|\,\xi_1\,\xi_2\,|\,x) + \overline{U}_1\,\overline{U}_2\,\varphi_{12}(\rho\,|\,\xi_1\,\xi_2\,|\,x) + \overline{U}_2\,\overline{U}_1\,\varphi_{21}(\rho\,|\,\xi_1\,\xi_2\,|\,x) +$$

$$+ \overline{U}_2\,\varphi_{22}(\rho\,|\,\xi_1\,\xi_2\,|\,x), \tag{96}$$

где $\varphi_{kl}(\rho\,|\,\xi_1\,\xi_2\,|\,x)$ суть целые функции параметров ρ, ξ_1, ξ_2.

Чтобы определить эти функции, подставим выражение (96) в систему (95). Заметим прежде всего, что если A и B две подстановки второго порядка и $D(A) = 0$, то справедливы будут следующие два равенства:

$$A^\nu = A\,(\sigma(A))^{\nu-1},$$

$$ABA = A\,\sigma(AB).$$

Воспользовавшись ими, мы можем результат подстановки без труда привести к виду:

$$\overline{U}_1 \frac{d\varphi_{11}}{dx} + \overline{U}_1\,\overline{U}_2 \frac{d\varphi_{12}}{dx} + \overline{U}_2\,\overline{U}_1 \frac{d\varphi_{21}}{dx} + \overline{U}_2 \frac{d\varphi_{22}}{dx} = [\overline{U}_1 + \overline{U}_1\,\xi_1\,\varphi_{11} + \overline{U}_1\,\rho\,\varphi_{12} +$$

$$+ \overline{U}_2\,\overline{U}_1\,\xi_1\,\varphi_{21} + \overline{U}_2\,\overline{U}_1\,\varphi_{22}]\,g_1(x) + [\overline{U}_2 + \overline{U}_1\,U_2\,\varphi_{11} + \overline{U}_1\,\overline{U}_2\,\xi_2\,\varphi_{12} +$$

$$+ \overline{U}_2\,\rho\,\varphi_{21} + U_2\,\xi_2\,\varphi_2]\,\varphi_{22}(x).$$

Последнее должно быть справедливым для всяких $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ с определителями, равными нулю. Но это может быть в том и только в том случае, когда коэффициенты левой и правой частей равенства при подстановках $\overline{U}_1$, $\overline{U}_1\,\overline{U}_2$, $\overline{U}_2\,\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, будут равны между собой.

В самом деле, полагая $U_1 = 0$, мы заключаем, что коэффициенты при $\overline{U}_2$ должны быть равны; совершенно также, если положить $U_2 = 0$, получим, что должны равняться коэффициенты при $\overline{U}_1$. Сомнение могут вызвать поэтому лишь члены с $\overline{U}_1\,\overline{U}_2$ и $U_2\,\overline{U}_1$. Но выбором $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ мы можем всегда добиться того, чтобы одно из произведений, например $\overline{U}_1\,\overline{U}_2$, было нулем, тогда как второе будет иаверное отлично от нуля; поэтому должны быть равны между собой коэффициенты при втором произведении. Это и доказывает наше утверждение. Следовательно, φ_{kl} должны удовлетворять такой системе дифференциальиых уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_{11}}{dx} = (1 + \xi_1\,\varphi_{11} + \rho\,\varphi_{12})\,g_1(x), \quad \frac{d\varphi_{12}}{dx} = (\varphi_{11} + \xi_2\,\varphi_{12})\,g_2(x), \\
&\frac{d\varphi_{21}}{dx} = (\xi_1\,\varphi_{21} + \varphi_{22})\,g_1(x), \quad \frac{d\varphi_{22}}{dx} = (1 + \rho\,\varphi_{21} + \xi_2\,\varphi_{22})\,g_2(x).
\end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Начальными условиями для φ_{kl} будут очевидно:

$$\varphi_{kl}(\rho \mid \xi_1 \xi_2 \mid b) = 0.$$

Система (97) должна быть удовлетворена целыми рядами

$$\varphi_{kl} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \rho^{\nu} \varphi_{kl}^{(\nu)},$$

где $\varphi_{kl}^{(\nu)} = \varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1 \xi_2 \mid x)$ суть целые функции параметров ξ_1, ξ_2. Подставив их в систему и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях ρ, получим:

$$\frac{d\varphi_{11}^{(0)}}{dx} = g_1(x) + \xi_1 g_1(x) \varphi_{11}^{(0)}; \qquad \frac{d\varphi_{12}^{(0)}}{dx} = g_2(x) \varphi_{11}^{(0)} + \xi_2 g_2(x) \varphi_{12}^{(0)};$$

$$\frac{d\varphi_{21}^{(0)}}{dx} = \xi_1 g_1(x) \varphi_{21}^{(0)} + g_1(x) \varphi_{22}^{(0)}; \qquad \frac{d\varphi_{22}^{(0)}}{dx} = g_2(x) + \xi_2 g_2(x) \varphi_{22}^{(0)};$$

$$\frac{d\varphi_{11}^{(\nu)}}{dx} = \xi_1 g_1(x) \varphi_{11}^{(\nu)} + g_1(x) \varphi_{12}^{(\nu-1)}; \qquad \frac{d\varphi_{12}^{(\nu)}}{dx} = g_2(x) \varphi_{11}^{(\nu)} + \xi_2 g_2(x) \varphi_{12}^{(\nu)};$$

$$\frac{d\varphi_{21}^{(\nu)}}{dx} = \xi_1 g_1(x) \varphi_{21}^{(\nu)} + g_1(x) \varphi_{22}^{(\nu)}; \qquad \frac{d\varphi_{22}^{(\nu)}}{dx} = g_2(x) \varphi_{21}^{(\nu-1)} + \xi_2 g_2(x) \varphi_{22}^{(\nu)}.$$

Если принять теперь во внимание, что функции $\varphi_{kl}^{(\nu)}$ должны при $x = b$ обращаться в иули и проинтегрировать систему при такого рода начальных данных, мы получим как раз формулы (94).

Теорема, следовательно, доказана.

Ясио, что выражение (92) для интегральной матрицы системы (88a) более просто и более поучительно, чем (89), ибо ряд композиций подстановок U_1 и U_2 здесь заменяется рядом по степеням ρ:

$$Y_b(x) = e^{\int_b^x [\xi_1^{(1)} g_1(x) + \xi_2^{(1)} g_2(x)]\, dx} \Big[I + \sum_{\nu=0}^{\infty} \rho^{\nu} (\overline{U}_1 \varphi_{11}^{(\nu)} + \overline{U}_1 \overline{U}_2 \varphi_{12}^{(\nu)} + \overline{U}_2 \overline{U}_1 \varphi_{21}^{(\nu)} + \overline{U}_2 \varphi_{22}^{(\nu)})\Big] \tag{98}$$

Для $\rho = 0$ мы имеем особенно простой, но достаточио широкий класс систем уравнений, решение которых приводится к квадратурам.

Но

$$\rho = \sigma(\overline{U}_1 \overline{U}_2) = \sigma[(U_1 - \xi_1^{(1)})(U_1 - \xi_2^{(1)})] = \sigma(U_1 U_2) - \xi_1^{(1)} \sigma(U_2) - \xi_2^{(1)} \sigma(U_2) + 2\xi_1^{(1)} \xi_2^{(1)}$$

и

$$\xi_1^{(1)} = \frac{1}{2}\left[\sigma(U_1) + \varepsilon_1 \sqrt{\sigma(U_1)^2 - 4D(U_1)}\right]$$

$$\xi_2^{(1)} = \frac{1}{2}\left[\sigma(U_2) + \varepsilon_2 \sqrt{\sigma(U_2)^2 - 4D(U_2)}\right],$$

где мы можем по произволу брать ε_1 и ε_2 равными либо $+1$, либо -1. Поэтому

$$\rho = \sigma(U_1 U_2) - \frac{1}{2}\sigma(U_1)\sigma(U_2) + \frac{1}{2}\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{[\sigma(U_1)^2 - 4D(U_1)][\sigma(U_2)^2 - 4D(U_2)]},$$

и мы имеем следующую теорему:

Теорема XI. *Если подстановки U_1 и U_2 удовлетворяют одному из условий*

$$\sigma(U_1 U_2) - \frac{1}{2}\sigma(U_1)\sigma(U_2) + \frac{1}{2}\varepsilon \sqrt{[\sigma(U_1)^2 - 4D(U_1)][\sigma(U_2)^2 - 4D(U_2)]} = 0, \tag{99}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, то интегральная матрица системы

$$\frac{dY}{dx} = Y[U_1 g_1(x) + U_2 g_2(x)],$$

нормированная в точке b, представляется в форме:

$$Y_b(x) = e^{\int_b^x [\xi_1^{(1)} g_1(x) + \xi_2^{(1)} g_2(x)]\, dx} [I + \overline{U}_1 \varphi_{11}^{(0)} + \overline{U}_1 \overline{U}_2 \varphi_{12}^{(0)} + \overline{U}_2 \overline{U}_1 \varphi_{21}^{(0)} + \overline{U}_2 \varphi_{22}^{(0)}]. \tag{100}$$

II. Применим полученный результат к системе Гаусса — к системе двух дифференциальных уравнений с тремя особыми точками a_1, a_2, ∞:

$$\frac{dY}{dx} = Y\left(\frac{U_1}{x - a_1} + \frac{U_2}{x - a_2}\right). \tag{101}$$

Теорема XII. *Интегральная нормальная матрица системы (101) и ее интегральные и показательные подстановки могут быть представлены в форме:*

$$Y_b(x) = \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1, U_2 \\ a_1, a_2 \end{matrix}\middle| x\right) = \left(\frac{x - a_1}{b - a_1}\right)^{\xi_1^{(1)}} \left(\frac{x - a_2}{b - a_2}\right)^{\xi_2^{(1)}} [I + \overline{U}_1 \varphi_{11}(\rho \mid \xi_1 \xi_2 \mid x) + \overline{U}_1 \overline{U}_2 \varphi_{12}(\rho \mid \xi_1 \xi_2 \mid x) + \overline{U}_2 \overline{U}_1 \varphi_{21}(\rho \mid \xi_1 \xi_2 \mid x) + \overline{U}_2 \varphi_{22}(\rho \mid \xi_1 \xi_2 \mid x)] \tag{102}$$

$$V_j = \Omega\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \\ a_1 a_2 \end{matrix}\middle| b\right) = e^{2\pi i \xi_j^{(1)}} [I + \overline{U}_1 \omega_{j11}(\rho \mid \xi_1 \xi_2 \mid b) + \overline{U}_1 \overline{U}_2 \omega_{j12}(\rho \mid \xi_1 \xi_2 \mid b) + \overline{U}_2 \overline{U}_1 \omega_{j21}(\rho \mid \xi_1 \xi_2 \mid b) + \overline{U}_2 \omega_{j22}(\rho \mid \xi_1 \xi_2 \mid x)] \tag{103}$$

$$W_j = \Xi\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \\ a_1 a_2 \end{matrix}\middle| b\right) = \xi_j^{(1)} + \overline{U}_1 \sigma_{j11}(\rho \mid \xi_1 \xi_2 \mid b) + \overline{U}_1 \overline{U}_2 \sigma_{j12}(\rho \mid \xi_1 \xi_2 \mid b) + \overline{U}_2 \overline{U}_1 \sigma_{j21}(\rho \mid \xi_1 \xi_2 \mid b) + \overline{U}_2 \sigma_{j22}(\rho \mid \xi_1 \xi_2 \mid b); \tag{104}$$

где:

$$\varphi_{kl} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \rho^{\nu} \varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1 \xi_2 \mid x); \tag{105}$$

$$\omega_{jkl} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \rho^{\nu} \omega_{jkl}^{(\nu)}(\xi_1 \xi_2 \mid b); \tag{106}$$

$$\sigma_{jkl} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \rho^{\nu} \sigma_{jkl}^{(\nu)}(\xi_1 \xi_2 \mid b) \tag{107}$$

целые функции параметра ρ, коэффициенты которых определяются рекуррентными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_{kk}^{(0)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x)=\frac{1}{\xi_k}\left[\left(\frac{x-a_k}{b-a_k}\right)^{\xi_k}-1\right]\\
&\varphi_{kl}^{(0)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x)=\frac{1}{\xi_k}(x-a_l)^{\xi_l}\int_b^x\left(\frac{x-a_k}{b-a_k}\right)^{\xi_k}\frac{dx}{(x-a_l)^{\xi_l+1}}-\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{\xi_k\xi_l}\left[\left(\frac{x-a_l}{b-a_l}\right)^{\xi_l}-1\right]\\
&\varphi_{kk}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x)=(x-a_k)^{\xi_k}\int_b^x\varphi_{kl}^{(\nu-1)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x)\,\frac{dx}{(x-a_k)^{\xi_k+1}}\\
&\varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x)=(x-a_l)^{\xi_l}\int_b^x\varphi_{kk}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x)\,\frac{dx}{(x-a_l)^{\xi_l+1}}\\
&\qquad\qquad k,\ l=1,\ 2;\quad k\neq l
\end{aligned}\right\}\tag{108}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_{jjj}^{(0)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,b)=\frac{1}{\xi_j}\left(e^{2\pi i\xi_j}-1\right);\quad \omega_{jjh}^{(0)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,b)=\\
&\qquad=\frac{1}{\xi_j}(b-a_h)^{\xi_h}\int_{(a_j)}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\xi_j}\frac{dx}{(x-a_h)^{\xi_h+1}}\\
&\omega_{jhj}^{(0)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,b)=\frac{e^{2\pi i\xi_j}}{\xi_h}(b-a_j)^{\xi_j}\int_{(a_j)}\left(\frac{x-a_h}{b-a_h}\right)^{\xi_h}\frac{dx}{(x-a_j)^{\xi_j+1}}-\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{\xi_j\,\xi_h}\left(e^{2\pi i\xi_j}-1\right)\\
&\qquad\qquad\omega_{jhh}^{(0)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,b)=0\\
&\omega_{jjj}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,b)=e^{2\pi i\xi_j}(b-a_j)^{\xi_j}\int_{(a_j)}\varphi_{jh}^{(\nu-1)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x)\,\frac{dx}{(x-a_j)^{\xi_j+1}};\\
&\omega_{jjh}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,b)=(b-a_h)^{\xi_h}\int_{(a_j)}\varphi_{jj}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x)\,\frac{dx}{(x-a_h)^{\xi_h+1}}\\
&\omega_{jhj}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,b)=e^{2\pi i\xi_j}(b-a_j)^{\xi_j}\int_{(a_j)}\varphi_{hh}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x)\,\frac{dx}{(x-a_j)^{\xi_j+1}}\\
&\omega_{jhh}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,b)=(b-a_h)^{\xi_h}\int_{(a_j)}\varphi_{hj}^{(\nu-1)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,x)\,\frac{dx}{(x-a_h)^{\xi_h+1}}\\
&\qquad\qquad j,\ h=1,\ 2;\quad l\neq h.
\end{aligned}\right\}\tag{109}$$

$$\sigma_{jkl}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,b)=\frac{\xi_j}{e^{2\pi i\xi_j}-1}\,\omega_{jkl}^{(\nu)}(\xi_1\,\xi_2\,|\,b)\tag{110}$$

Доказательство. Все формулы, касающиеся интегральной матрицы $Y_b(x)$ и интегральной подстановки V_j, непосредственно следуют из теоремы X, и остается поэтому рассмотреть формулы, относящиеся к показательным подстановкам W_j. Имея это в виду, положим:

$$\overline{V}_j=I+\overline{U}_1\omega_{j11}+\overline{U}_1\overline{U}_2\omega_{j12}+\overline{U}_2\overline{U}_1\omega_{j21}+\overline{U}_2\omega_{j22},$$

так что

$$V_j=e^{2\pi i\xi_j^{(1)}}\overline{V}_j.$$

Замечая, что подстановки U_j и W_j подобны и применяя к равенству

$$W_j=\frac{1}{2\pi i}\lg V_j=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(V_j-I)^{\nu}$$

формулу Лагранжа — Сильвестера, находим

$$W_j=\frac{e^{2\pi i\xi_j^{(1)}}V_j-e^{2\pi i\xi_j^{(2)}}}{e^{2\pi i\xi_j^{(1)}}-e^{2\pi i\xi_j^{(2)}}}\xi_j^{(1)}+\frac{e^{2\pi i\xi_j^{(1)}}V_j-e^{2\pi i\xi_j^{(1)}}}{e^{2\pi i\xi_j^{(2)}}-e^{2\pi i\xi_j^{(1)}}}\xi_j^{(2)}=$$

$$=\xi_j^{(1)}+\frac{\xi_j(V_j-I)}{e^{2\pi i\xi_j}-1},\tag{111}$$

что и доказывают формулы (110).

Установленная теорема позволяет представить функции

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\,U_2\\a_1\,a_2\end{matrix}\middle|\,x\right),\quad \Omega\left(\begin{matrix}U_1\,U_2\\a_1\,a_2\end{matrix}\middle|\,b\right)\ \text{и}\ \Xi\left(\begin{matrix}U_1\,U_2\\a_1\,a_2\end{matrix}\middle|\,b\right)$$

в виде степенных рядов от ρ с коэффициентами, зависящими от характеристических чисел подстановок U_1 и U_2. Тотчас же выясняется роль параметра ρ. Согласно очевидному тождеству

$$\sigma(\overline{U}_1\overline{U}_2)=\sigma(\overline{U}_1)\,\sigma(\overline{U}_2)-D(\overline{U}_1+\overline{U}_2),$$

справедливому для всяких подстановок $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ с определителями, равными нулю

$$\rho=\xi_1\xi_2-D(U_\infty),\tag{112}$$

где $U_\infty=-(\overline{U}_1+U_2)$; следовательно, параметр ρ существенно зависит от дифференциальной подстановки в бесконечно удаленной точке.

Заметим еще, что выражение (111) делает вполне очевидным мероморфный характер функции W_j.

III. Рассмотрим теперь следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dY}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\frac{YU_j}{x-a_j},\tag{113}$$

где U_j имеют вид:

$$U_j=\mathfrak{A}_1u_{11}^{(j)}+\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\,u_{12}^{(j)}+\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1\,u_{21}^{(j)}+\mathfrak{A}_2\,u_{22}^{(j)},$$

$\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — матрицы второго порядка, определители которых нули, а $u_{kl}^{(j)}$ — численные коэффициенты.

Положим:

$$\sigma(\mathfrak{A}_1) = \lambda_1; \; \sigma(\mathfrak{A}_2) = \lambda_2; \; \sigma(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) = \mu. \tag{114}$$

Интегральную матрицу системы (113), нормированную в точке, можно представить в виде

$$Y_b(x) = I + \mathfrak{A}_1 \varphi_{11} + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \varphi_{12} + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1 \varphi_{21} + \mathfrak{A}_2 \varphi_{22}, \tag{115}$$

если в ряд композиций

$$Y_b(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1 \dots m} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} | x)$$

вместо U_j подставить их выражения через $\mathfrak{A}_j$.

Функции φ_{kl} обращаются в нуль при $x = b$. Чтобы найти их значения, подставим (114) и (115) в систему (113). Как и в предыдущем случае, легко получается следующее равенство:

$$\begin{aligned} YU_j = {} & \mathfrak{A}_1 [u_{11}^{(j)} + \varphi_{11}(\lambda_1 u_{11}^{(j)} + \mu u_{21}^{(j)}) + \varphi_{12} \mu (u_{11}^{(j)} + \lambda_2 u_{21}^{(j)})] + \\ & + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 [u_{12}^{(j)} + \varphi_{11}(\lambda_1 u_{12}^{(j)} + u_{22}^{(j)}) + \varphi_{12}(\mu u_{12}^{(j)} + \lambda_2 u_{22}^{(j)})] + \\ & + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1 [u_{21}^{(j)} + \varphi_{21}(\lambda_1 u_{11}^{(j)} + \mu u_{21}^{(j)}) + \varphi_{22}(u_{11}^{(j)} + \lambda_2 u_{21}^{(j)})] + \\ & + \mathfrak{A}_2 [u_{22}^{(j)} + \varphi_{21} \mu (\lambda_1 u_{12}^{(j)} + u_{22}^{(j)}) + \varphi_{22}(\mu u_{12}^{(j)} + \lambda_2 u_{22}^{(j)})]. \end{aligned}$$

Если обозначить

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{u_{kl}^{(j)}}{(x - a_j)} = g_{kl} \qquad (k, l = 1, 2),$$

после сравнения коэффициентов будем иметь

$$\frac{d\varphi_{11}}{dx} = \varphi_{11}(\lambda_1 g_{11} + \mu g_{21}) + \varphi_{12} \mu (g_{11} + \lambda_2 g_{21}) + g_{11}$$

$$\frac{d\varphi_{12}}{dx} = \varphi_{11}(\lambda_1 g_{12} + g_{22}) + \varphi_{12}(\mu g_{12} + \lambda_2 g_{22}) + g_{12}$$

$$\frac{d\varphi_{21}}{dx} = \varphi_{21}(\lambda_1 g_{11} + \mu g_{21}) + \varphi_{22}(g_{11} + \lambda_2 g_{21}) + g_{21}$$

$$\frac{d\varphi_{22}}{dx} = \varphi_{21} \mu (\lambda_1 g_{12} + g_{22}) + \varphi_{22}(\mu g_{12} + \lambda_2 g_{22}) + g_{22}.$$

Мы знаем, что φ_{kl} суть целые функции параметра μ:

$$\varphi_{kl} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{kl}^{(\nu)} \mu^{\nu}, \tag{116}$$

и можем поэтому предыдущую систему отождествить при помощи рядов (116). Подставляя их туда и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим

$$\frac{d\varphi_{11}^{(0)}}{dx} = \varphi_{11}^{(0)} \lambda_1 g_{11} + g_{11}; \quad \frac{d\varphi_{12}^{(0)}}{dx} = \varphi_{12}^{(0)} \lambda_2 g_{22} + \varphi_{11}^{(0)}(\lambda_1 g_{12} + g_{22}) + g_{12};$$

$$\frac{d\varphi_{21}^{(0)}}{dx} = \varphi_{21}^{(0)} \lambda_1 g_{11} + \varphi_{22}^{(0)}(g_{11} + \lambda_2 g_{21}) + g_{21}; \quad \frac{d\varphi_{22}^{(0)}}{dx} = \varphi_{22}^{(0)} \lambda_2 g_{22} + g_{22};$$

$$\frac{d\varphi_{11}^{(\nu)}}{dx} = \varphi_{11}^{(\nu)} \lambda_1 g_{11} + \varphi_{11}^{(\nu-1)} g_{21} + \varphi_{12}^{(\nu-1)}(g_{11} + \lambda g_{21})$$

$$\frac{d\varphi_{12}^{(\nu)}}{dx} = \varphi_{12}^{(\nu)} \lambda_2 g_{22} + \varphi_{12}^{(\nu-1)} g_{12} + \varphi_{11}^{(\nu)}(\lambda_1 g_{12} + g_{22})$$

$$\frac{d\varphi_{21}^{(\nu)}}{dx} = \varphi_{21}^{(\nu)} \lambda_1 g_{11} + \varphi_{21}^{(\nu-1)} g_{21} + \varphi_{22}^{(\nu)}(g_{11} + \lambda_2 g_{21})$$

$$\frac{d\varphi_{22}^{(\nu)}}{dx} = \varphi_{22}^{(\nu)} \lambda_2 g_{22} + \varphi_{22}^{(\nu-1)} g_{12} + \varphi_{21}^{(\nu-1)}(\lambda_1 g_{12} + g_{22}).$$

Обозначим через p_{kl} произведение

$$\prod_{j=1}^{m} (x - a_j)^{u_{kl}^{(j)}}.$$

После интеграции при начальных данных $\varphi_{kl}^{(\nu)}(b) = 0$ имеем следующие рекуррентные соотношения для $\varphi_{kl}^{(0)}$:

$$\left.\begin{aligned} & \varphi_{11}^{(0)} = \rho_{11}^{\lambda_1} \int_b^x g_{11} \rho_{11}^{-\lambda_1} dx; \; \varphi_{12}^{(0)} = p_{22}^{\lambda_2} \int_b^x [\varphi_{11}^{(0)}(\lambda_1 g_{12} + g_{22}) + g_{12}] \, p_{22}^{-\lambda_2} dx \\ & \varphi_{21}^{(0)} = p_{11}^{\lambda_1} \int_b^x [\varphi_{22}^{(0)}(g_{11} + \lambda_2 g_{21}) + g_{21}] \, \rho_{11}^{-\lambda_1} dx; \; \varphi_{22}^{(0)} = \rho_{22}^{\lambda_2} \int_b^x g_{22} p_{22}^{-\lambda_2} dx \\ & \varphi_{11}^{(\nu)} = p_{11}^{\lambda_1} \int_b^x [\varphi_{11}^{(\nu-1)} g_{21} + \varphi_{12}^{(\nu-1)}(g_{11} + \lambda g_{21})] \, p_{11}^{-\lambda_1} dx \\ & \varphi_{12}^{(\nu)} = p_{22}^{\lambda_2} \int_b^x [\varphi_{12}^{(\nu-1)} g_{12} + \varphi_{11}^{(\nu)}(\lambda_1 g_{12} + g_{22})] \, p_{22}^{-\lambda_2} dx \\ & \varphi_{21}^{(\nu)} = p_{11}^{\lambda_1} \int_b^x [\varphi_{21}^{(\nu-1)} g_{21} + \varphi_{22}^{(\nu)}(g_{11} + \lambda_2 g_{21})] \, p_{11}^{-\lambda_1} dx \\ & \varphi_{22}^{(\nu)} = p_{22}^{\lambda_2} \int_b^x [\varphi_{22}^{(\nu-1)} g_{12} + \varphi_{21}^{(\nu-1)}(\lambda_1 g_{12} + g_{22})] \, p_{22}^{-\lambda_2} dx. \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

При использовании равенства (115) и того обстоятельства, что $Y_b(b) = I$, можно легко для интегральной подстановки получить следующее выражение

$$V_j = I + \mathfrak{A}_1 \omega_{j_{11}} + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \omega_{j_{12}} + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1 \omega_{j_{21}} + \mathfrak{A}_2 \omega_{j_{22}}, \tag{118}$$

где

$$\omega_{jk_l} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \omega_{jk_l}^{(\nu)} \mu^{\nu}$$

суть целые функции параметра μ, коэффициенты разложения которых в ряды по степеням μ будут:

$$
\left.\begin{aligned}
&\omega_{j_{11}}^{(0)} = q_{j_{11}}^{\lambda_1}\int\limits_{(a_j)} g_{11}\,p_{11}^{-\lambda_1}dx;\quad \omega_{j_{12}}^{(0)} = q_{j_{22}}^{\lambda_2}\int\limits_{(a_j)}\left[\varphi_{11}^{(0)}(\lambda_1 g_{12}+g_{22})+g_{22}\right]p_{22}^{-\lambda_2}\,dx\\
&\omega_{j_{21}}^{(0)} = q_{j_{11}}^{\lambda_1}\int\limits_{(a_j)}\left[\varphi_{22}^{(0)}(g_{11}+\lambda_2 g_{21})+g_{21}\right]p_{11}^{-\lambda_1}\,dx;\quad \omega_{j_{22}}^{(0)} = q_{j_{22}}^{\lambda_2}\int\limits_{(a_j)} g_{22}\,p_{22}^{-\lambda_2}\,dx\\
&\omega_{j_{11}}^{(\nu)} = q_{j_{11}}^{\nu_1}\int\limits_{(a_j)}\left[\varphi_{11}^{(\nu-1)}g_{21}+\varphi_{12}^{(\nu-1)}(g_{11}+\lambda_2 g_{21})\right]p_{11}^{-\lambda_1}\,dx;\\
&\omega_{j_{12}}^{(\nu)} = q_{j_{22}}^{\lambda_2}\int\limits_{(a_j)}\left[\varphi_{12}^{(\nu-1)}g_{12}+\varphi_{11}^{(\nu-1)}(\lambda_1 g_{12}+g_{22})\right]p_{22}^{-\lambda_2}\,dx\\
&\omega_{j_{21}}^{(\nu)} = q_{j_{11}}^{\lambda_1}\int\limits_{(a_j)}\left[\varphi_{21}^{(\nu-1)}g_{21}+\varphi_{22}^{(\nu)}(g_{11}+\lambda_2 g_{21})\right]p_{11}^{-\lambda_1}\,dx\\
&\omega_{j_{22}}^{(\nu)} = q_{j_{22}}^{\lambda_2}\int\limits_{(a_j)}\left[\varphi_{22}^{(\nu-1)}g_{12}+\varphi_{21}^{(\nu-1)}(\lambda_1 g_{12}+g_{22})\right]p_{22}^{-\lambda_2}\,dx\\
&q_{j_{kl}} = p_{kl}(b_j) = \prod_{h=1}^{m}(b_j-a_h)^{U_{kl}^{(h)}}
\end{aligned}\right\}\quad(119)
$$

По найдениому нами выражению для V_j можно, с помощью формулы Лаграижа — Сильвестера, известным уже нам способом легко разыскать показательную подстановку W_j. Соответствующих вычислений мы приводить здесь ие будем.

§ 8. Частичное суммирование рядов композиций. Здесь мы дадим иесколько формул, производящих частичное суммирование рядов композиций для регулярной нормальной матрицы и интегральной подстановки.

1. Пусть $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$—характеристические числа подстановки X порядка n. Мы будем предполагать их различными. Обозначим через $\Lambda_k(X)$ следующую функцию этой подстановки:

$$\Lambda_k(X) = \frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)}X.$$

Ясно, что

$$\Lambda_k(X) = \frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)}\xi_k.$$

В самом деле, формула Кэли дает:

$$X^n+\sigma(X)X^{n-1}+\ldots+(-1)^n D(X) = (X-\xi_1)\ldots(X-\xi_n) = 0$$

и следовательно:

$$(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)X =$$
$$= (X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)\xi_n.$$

Введем аналитические функции одной комплексной переменной x

$$\mathscr{E}_b\left(\begin{matrix}\sigma_1\ldots\sigma_\nu\\ \alpha_1\ldots\alpha_\nu\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$$

определеиные равенствами

$$\mathscr{E}_b\left(\begin{matrix}\sigma_1\\ \alpha_1\end{matrix}\,\middle|\,x\right) = \int\limits_b^x\left(\frac{x-\alpha_1}{s-\alpha_1}\right)^{\sigma_1}\frac{ds}{s-\alpha_1};$$

$$\mathscr{E}_b\left(\begin{matrix}\sigma_1\ldots\sigma_\nu\\ \alpha_1\ldots\alpha_\nu\end{matrix}\,\middle|\,x\right) = \int\limits_b^x\mathscr{E}_b\left(\begin{matrix}\sigma_1\ldots\sigma_{\nu-1}\\ \alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1}\end{matrix}\,\middle|\,s\right)\left(\frac{x-\alpha_\nu}{s-\alpha_\nu}\right)^{\sigma_\nu}\frac{ds}{s-\alpha_\nu},$$

σ_ν и α_ν — численные параметры.

Теорема XIII. *Регулярная матрица, нормированная в точке b и обладающая дифференциальными подстановками $U_1\ldots U_m$ в точках $a_1\ldots a_m$, может быть представлена в форме:*

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right) = I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{1\ldots m_1}\sum_{k_1\ldots k_\nu}^{1\ldots n}\Lambda_{k_1}(U_{j_1})\ldots\Lambda_{k_\nu}(U_{j_\nu}),$$

$$\mathscr{E}_b\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(k_1)}\ldots\xi_{j_\nu}^{(k_\nu)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\,x\right),$$

где $\xi_j^{(1)}\ldots\xi_j^{(n)}$—характеристические числа подстановки U_j и сумма $\sum\limits_{j_1\ldots j_\nu}^{1\ldots m}$ распространена на все значения индексов—$j_1\ldots j_\nu = 1\ldots n$, удовлетворяющие неравенствам

$$j_1 \neq j_2 \neq j_3, \ldots, j_{\nu-1} \neq j_\nu.$$

Доказательство. Ряд

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right) = I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{1\ldots m}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}.x)$$

абсолютно сходится. Произведя надлежащую группировку членов, можно его переписать в форме:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,x\right) = I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{1\ldots m}\varphi_b\left(\begin{matrix}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\,x\right),$$

где

$$\varphi_b\left(\begin{matrix}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\,x\right) = \sum_{\mu_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{\mu_\nu=1}^{\infty}U_{j_1}^{\mu_1}\ldots U_{j_\nu}^{\mu_\nu}L_b(a_{j_1}^{\mu_1}\ldots a_{j_\nu}^{\mu_\nu}|x).\,^{*)}$$

Получим рекурреитные соотношения для φ_b.

Докажем равенство:

$$L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}\,a_{j_\nu}^{\mu}\,|\,x) = \frac{1}{(\mu-1)!}\int\limits_b^x L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}\,|\,s)\ \lg^{\mu-1}\frac{x-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\ \frac{ds}{s-a_{j_\nu}}.$$

*) Символ a_j^{μ} показывает, что a_j повторено μ раз.

Действительно, по формуле Дирихле:

$$L_b(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}a_{j_\nu}^2\mid x)=\int\limits_b^x\frac{dt}{t-a_{j_\nu}}\int\limits_b^t L_b(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\mid s)\,\frac{ds}{s-a_{j_\nu}}$$

$$=\int\limits_b^x L_b(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\mid s)\int\limits_s^x\frac{dt}{t-a_{j_\nu}}\,\frac{ds}{s-a_{j_\nu}}$$

$$=\int\limits_b^x L_b(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\mid s)\;\lg\frac{x-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\,\frac{ds}{s-a_{j_\nu}}$$

и предполагая, что доказываемая формула имеет место для значений $\mu=1,\ 2\dots\lambda-1$, получаем:

$$L_b(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}a_{j_\nu}^{\lambda}\mid x)=\int\limits_b^x\frac{dt}{t-a_{j_\nu}}\int\limits_b^t\frac{L_b(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\mid s)}{(\lambda-2)!}\;\lg^{\lambda-2}\frac{t-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\,\frac{ds}{s-a_{j_\nu}}$$

$$=\int\limits_b^x L_b(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\mid s)\int\limits_s^x\frac{1}{(\lambda-2)!}\;\lg^{\lambda-2}\frac{t-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\cdot\frac{dt}{t-a_{j_\nu}}\cdot\frac{ds}{s-a_{j_\nu}}=$$

$$=\frac{1}{(\lambda-1)!}\int\limits_b^x L_b(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\mid s)\;\lg^{\lambda-1}\frac{x-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\,\frac{ds}{s-a_{j_\nu}}.$$

На основании предыдущей формулы имеем

$$\varphi_b\left(\begin{matrix}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,x\right)=\int\limits_b^x\left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\dots\sum_{\mu_{\nu-1}=1}^{\infty}U_{j_1}^{\mu_1}\dots U_{j_{\nu-1}}^{\mu_{\nu-1}}L_b(a_{j_1}^{\mu_1}\dots a_{j_{\nu-1}}^{\mu_{\nu-1}}\mid s)\right].$$

$$\left[\sum_{\mu_\nu=1}^{\infty}U_{j_\nu}^{\mu_\nu}\frac{1}{(\mu_\nu-1)!}\;\lg^{\mu_\nu-1}\frac{x-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\right]\frac{ds}{s-a_{j_\nu}}=$$

$$=\int\limits_b^x\varphi_b\left(\begin{matrix}U_{j_1}\dots U_{j_{\nu-1}}\\ a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\middle|\,s\right)e^{U_{j_\nu}\lg\frac{x-a_{j_\nu}}{b-a_{j_\nu}}}\;U_{j_\nu}\frac{ds}{s-a_{j_\nu}}=$$

$$=\int\limits_b^x\varphi_b\left(\begin{matrix}U_{j_1}\dots U_{j_{\nu-1}}\\ a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\middle|\,s\right)\left(\frac{x-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\right)^{U_{j_\nu}}\frac{U_{j_\nu}ds}{s-a_{j_\nu}}.$$

Эта формула остается справедливой и при $\nu=1$, если положить, что $\varphi_b=1$ при $\nu=0$, ибо тогда

$$\varphi_b\left(\begin{matrix}U_{j_1}\\ a_{j_1}\end{matrix}\middle|\,x\right)=\int\limits_b^x\left(\frac{x-a_{j_1}}{s-a_{j_1}}\right)^{U_{j_1}}\frac{U_{j_1}ds}{s-a_{j_1}}=\left(\frac{x-a_{j_1}}{s-a_{j_1}}\right)^{U_{j_1}}-I.$$

Далее, по формуле Лагранжа — Сильвестера

$$\left(\frac{x-a_j}{s-a_j}\right)^{U_j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(U_j-\xi_j^{(1)})\dots(U_j-\xi_j^{(k-1)})(U_j-\xi_j^{(k+1)})\dots(U_j-\xi_j^{(n)})}{(\xi_j^{(k)}-\xi_j^{(1)})\dots(\xi_j^{(k)}-\xi_j^{(k-1)})(\xi_j^{(k)}-\xi_j^{(k+1)})\dots(\xi_j^{(k)}-\xi_j^{(n)})}\left(\frac{x-a_j}{s-a_j}\right)^{\xi_j^{(k)}}.$$

Поэтому можно написать

$$\varphi_b\left(\begin{matrix}U_{j_1}\\ a_{j_1}\end{matrix}\middle|\,x\right)=\sum_{k=1}^{n}\Lambda_k(U_{j_1})\,\mathcal{E}_b\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(k)}\\ a_{j_1}\end{matrix}\middle|\,x\right).$$

Допустим, что равенство

$$\varphi_b\left(\begin{matrix}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,x\right)=\sum_{k_1\dots k_\nu}^{1\dots n}\Lambda_1(U_j)\dots\Lambda_{k_\nu}(U_{j_\nu})\,\mathcal{E}_b\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{k_1}\dots\xi_{j_\nu}^{k_\nu}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,x\right),$$

очевидно верное при $\nu=1$, справедливо для всяких индексов до $\nu-1$ включительно, и покажем его справедливость для ν.

$$\varphi_b\left(\begin{matrix}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,x\right)=\int\limits_b^x\sum_{k_1\dots k_{\nu-1}}^{1\dots n}\Lambda_{k_1}(U_{j_1})\dots\Lambda_{k_{\nu-1}}(U_{j_{\nu-1}}).$$

$$\mathcal{E}_b\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(k_1)}\dots\xi_{j_{\nu-1}}^{(k_{\nu-1})}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,s\right)\cdot\sum_{k_\nu=1}^{n}\Lambda_{k_\nu}(U_{j_\nu})\left(\frac{x-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\right)^{\xi_{j_{\nu-1}}^{(k_\nu)}}\frac{ds}{s-a_{j_\nu}}=$$

$$=\sum_{k_1\dots k_\nu}^{1\dots n}\Lambda_{k_1}(U_{j_1})\dots\Lambda_{k_\nu}(U_{j_\nu})\,\mathcal{E}_b\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(k_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(k_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,x\right)$$

Этим теорема доказана.

11. Ниже мы будем пользоваться обозначениями общей теории функций матриц.

Теорема XIV. *Если характеристические числа и элементарные делители дифференциальных подстановок U_j будут*

$$\xi_j^{(1)},\dots\xi_j^{(s_j)}\ \text{ и }\ (\xi-\xi_j^{(1)})^{r_j^{(1)}},\dots(\xi-\xi_j^{(s_j)})^{r_j^{(s_j)}}\quad(r_j^{(1)}+\dots+r_j^{(s_j)}=n),$$

то имеет место представление

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)=I+\\ &+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\dots j_\nu}^{1\dots m}\sum_{p_1=1}^{s_{j_1}}\sum_{q=0}^{r_{j_1}^{(p_1)}-1}\dots\sum_{p_\nu=1}^{s_{j_\nu}}\sum_{q_\nu=0}^{r_{j_\nu}^{(p_\nu)}-1}U_{j_1}^{(p_1q_1)}\dots U_{j_\nu}^{(p_\nu q_\nu)}\\ &L_b^{(q_1\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,x\right);\end{aligned}\right\}\qquad\text{(a)}$$

коэффициенты которого определяются рекуррентными соотношениями

$$L_b^{(q_1\ldots q_\nu-1\,0)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| x\right)=$$

$$=\int_b^x \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} L_b^{(q_1\ldots q_\nu-1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p)}\ldots\xi_{j_\nu-1}^{(p_\nu-1)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu-1}\end{matrix}\middle| s\right)\cdot\left(\frac{x-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\right)^{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}\frac{ds}{s-a_{j_\nu}}$$

$$L_b^{(q_1\ldots q_\nu-1\,1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p)}\ldots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| x\right)=\int_b^x\Bigg[L_b^{(q\ldots q_\nu-1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu-1}^{(p_\nu-1)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu-1}\end{matrix}\middle| s\right)+$$

$$+L_b^{(q_1\ldots q_\nu-1\,0)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| s\right)\Bigg]\left(\frac{x-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\right)^{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}\frac{ds}{s-a_{j_\nu}},$$

$$L_b^{(q\ldots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p)}\ldots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| x\right)=\int_b^x L_b^{(q_1\ldots q_\nu-1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| s\right)\left(\frac{x-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\right)^{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}\frac{ds}{s-a_{j_\nu}}$$

(мы считаем при этом, что $L_b^{(q_1\ldots q_\nu)}=1$, *если* $\nu<1$).

В частности, если элементарные делители дифференциальных подстановок простые, имеем

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{1\ldots m}\sum_{p_1\ldots p_\nu}^{1\ldots n}U_{j_1}^{(p_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(p_\nu)}L_b\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| x\right),$$

где

$$L_b\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\\ a_{j_1}\end{matrix}\middle| x\right)=\int_b^x\left(\frac{x-a_{j_1}}{s-a_{j_1}}\right)^{\xi_{j_1}^{(p_1)}}\frac{ds}{s-a_{j_1}}$$

и

$$L_b\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| x\right)=\int_b^x L_b\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu-1}^{(p_\nu-1)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu-1}\end{matrix}\middle| s\right)\left(\frac{x-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\right)^{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}\frac{ds}{s-a_{j_\nu}}.$$

Доказательство. На основании формул

$$U_j=\sum_{p=1}^{s_j}\left(U_j^{(p0)}\xi_j^{(p)}+U_j^{(p1)}\right);$$

и

$$U_j^{\mu}=\sum_{p=1}^{s_j}\sum_{q=0}^{\mu}\binom{\mu}{q}U_j^{(pq)}\left(\xi_j^{(p)}\right)^{\mu-q}$$

при $\binom{\mu}{q}=0$, если $q>\mu$, $\binom{0}{0}=0$ и $\binom{\mu}{0}=1$ мы можем, подставляя в

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{1\ldots m_1}\sum_{\mu_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{\mu_\nu=1}^{\infty}U_{j_1}^{\mu_1}\ldots U_{j_\nu}^{\mu_\nu}L_b\left(a_{j_1}^{\mu_1}\ldots a_{j_\nu}^{\mu_\nu}\mid x\right)$$

вместо V_j^{μ} из значения, представить интегральную матрицу в форме (*a*), если обозначить

$$L_b^{(q_1\ldots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| x\right)=$$

$$=\sum_{\mu_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{\mu_\nu=1}^{\infty}\left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{\mu_1-q_1}\ldots\left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{\mu_\nu-q_\nu}\binom{\mu_1}{q_1}\ldots\binom{\mu_\nu}{q_\nu}L_b\left(a_{j_1}^{\mu_1}\ldots a_{j_\nu}^{\mu_\nu}\mid x\right).$$

Дифференцируя этот ряд по x, найдем:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}L_b^{(q_1\ldots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\ldots a_j\end{matrix}\middle| x\right)=\\
&=\sum_{\mu_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{\mu_\nu=1}^{\infty}\left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{\mu_1-q_1}\ldots\left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{\mu_\nu-q_\nu}\binom{\mu_1}{q_1}\ldots\binom{\mu_\nu}{q_\nu}L_b\left(a_{j_1}^{\mu_1}\ldots a_{j_\nu}^{\mu_\nu-1}a_{j_\nu}^{\mu_\nu-1}\mid x\right)\frac{1}{x-a_{j_\nu}}=\\
&=\binom{1}{q_\nu}\frac{\left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{1-q_\nu}}{x-a_{j_\nu}}L_b^{(q_1\ldots q_\nu-1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu-1}^{(p_\nu-1)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu-1}\end{matrix}\middle| x\right)+\\
&+\sum_{\mu_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{\mu_{\nu-1}=1}^{\infty}\sum_{\mu_\nu=2}^{\infty}\left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{\mu_1-q_1}\ldots\left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{\mu_\nu-q_\nu}\binom{\mu_1}{q_1}\ldots\binom{\mu_\nu}{q_\nu}\times\\
&\times\frac{L_b\left(a_{j_1}^{\mu_1}\ldots a_{j_\nu-1}^{\mu_\nu-1}\ldots a_{j_\nu}^{\mu_\nu-1}\mid x\right)}{x-a_{j_\nu}}.
\end{aligned}\right\}\text{(b)}$$

В случае $\nu=1$, первый член правой части должен быть заменен на $\binom{1}{q_1}\left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{1-q_1}\cdot\frac{1}{x-a_{j_1}}$, что равносильно условию $L_b^{(q_1\ldots q_\nu-1)}=1$ при $\nu=1$.

Когда $q_\nu=0$, $\binom{\mu_\nu}{0}=1$ по условию, и равенство (b) дает:

$$\frac{d}{dx}L_b^{(q_1\ldots q_\nu-1\,0)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu}^{(p_1)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| x\right)=\frac{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}{x-a_{j_\nu}}\Bigg[L_b^{(q_1\ldots q_\nu-1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu-1}^{(p_\nu-1)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu-1}\end{matrix}\middle| x\right)+$$

$$+L_b^{(q_1\ldots q_\nu-1\,0)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| x\right)\Bigg].$$

Когда же $q_\nu>0$, имеем $\binom{\mu_\nu}{q_\nu}=\binom{\mu_\nu-1}{q_\nu}+\binom{\mu_\nu-1}{q_\nu-1}$ и равенство (b) переписывается в виде:

$$\frac{d}{dx}L_b^{(q_1\ldots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| x\right)=$$

$$=\frac{1}{x-a_{j_\nu}}\Bigg[\binom{1}{q_\nu}\left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{1-q_\nu}L_b^{(q_1\ldots q_\nu-1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\ldots\xi_{j_\nu-1}^{(p_\nu-1)}\\ a_{j_1}\ldots a_{j_\nu-1}\end{matrix}\middle| x\right)+$$

$$+\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} L_b^{(q_1\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| x\right)+L_b^{(q_1\dots q_\nu-1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| x\right)\Bigg].$$

Интегрируя оба полученные нами дифференциальные уравнения и принимая во внимание условие $\binom{1}{q_\nu}=0$ при $q_\nu>1$ и то обстоятельство, что $L_b^{(q_1\dots q_\nu)}$ должны обращаться в нуль при $x=b$, мы получим доказываемые равенства. В частности, если $m=1$, высказанная теорема дает выражение следующей формы для $Y_b(x)$:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U\\ a\end{matrix}\middle| x\right)=I+\sum_{p=1}^{s}\sum_{q=0}^{r_p-1}U^{(pq)}L_b^{(q)}\left(\begin{matrix}\xi^{(p)}\\ a\end{matrix}\middle| x\right),$$

где

$$L_b^{(0)}\left(\begin{matrix}\xi^{(p)}\\ a\end{matrix}\middle| x\right)=\xi^{(p)}\int_b^x\left(\frac{x-a}{s-a}\right)^{\xi^{(p)}}\frac{ds}{x-a}=\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\xi^{(p)}}-I$$

$$L_b^{(1)}\left(\begin{matrix}\xi^{(p)}\\ a\end{matrix}\middle| x\right)=\int_b^x\left[1+\left(\frac{s-a}{b-a}\right)^{\xi^{(p)}}-1\right]\left(\frac{x-a}{s-a}\right)^{\xi^{(p)}}\frac{ds}{s-a}=\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\xi^{(p)}}\lg\frac{x-a}{b-a}$$

. . . .

$$L_b^{(r_p-1)}\left(\begin{matrix}\xi^{(p)}\\ a\end{matrix}\middle| x\right)=\frac{1}{(r_p-1)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\xi^{(p)}}\lg^{r_p-1}\frac{x-a}{b-a}$$

или так как $\sum\limits_{p=1}^{s}U^{(p0)}=I$, получим:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U\\ a\end{matrix}\middle| x\right)=\sum_{p=1}^{s}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\xi^{(p)}}\left[U^{(p0)}+U^{(p1)}\lg\frac{x-a}{b-a}+\dots+U^{(pr_p-1)}\frac{1}{(r_p-1)!}\times\right.$$

$$\left.\times\lg^{r_p-1}\frac{x-a}{b-a}\right]=\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{U}.$$

Можно получить аналогичный ряд, даваемый следующей теоремой и для интегральной подстановки.

Теорема XV. *Если* $\xi_j^{(1)}\dots\xi_j^{(s_j)}$ *и* $(\xi-\xi_j^{(1)})^{r_j^{(1)}}\dots(\xi-\xi^{(s_j)})^{r_j^{(s_j)}}$ *суть характеристические числа и элементарные делители подстановки* U_j, *то интегральная подстановка* $V_j(b)$ *будет иметь представление*:

$$V_j(b)=\Omega_j\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| b\right)=$$

$$=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\dots j_\nu}^{1\dots m}\sum_{p_1=1}^{s_{j_1}}\sum_{q_1=0}^{r_{j_1}^{(p_1)}-1}\dots\sum_{p_\nu=1}^{s_{j_\nu}}\sum_{q_\nu=0}^{r_{j_\nu}^{(p_\nu)}-1}U_{j_1}^{(p_1q_1)}\dots U_{j_\nu}^{(p_\nu q_\nu)}$$

$$P_j^{(q_1\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| b\right).$$

Коэффициенты ряда определены равенствами:

$$P_j^{(0)}\left(\begin{matrix}\xi_j^{(p_1)}\\ a_j\end{matrix}\middle| b\right)=e^{2\pi i\xi_j^{(p_1)}}-1;\quad P_j^{(q_1)}\left(\begin{matrix}\xi_j^{(p_1)}\\ a_j\end{matrix}\middle| b\right)=\frac{(2\pi i)^{q_1}}{q_1!}e^{2\pi i\xi_j^{(p_1)}},$$

$$q=1,\ 2\dots r_j^{(p_1)}-1$$

$$P_j^{(q_1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\\ a_{j_1}\end{matrix}\middle| b\right)=0,$$

если

$$j_1\neq j$$

$$P_j^{(q_1\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| b\right)=$$

$$=\int_{a_j}^{b}\left\{\frac{1}{t-a_{j_\nu}}\left[\binom{1}{q_\nu}(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)})^{1-q_\nu}P_j^{(q_1\dots q_{\nu-1})}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_{\nu-1}}^{(p_{\nu-1})}\\ a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\middle| t\right)+\right.\right.$$

$$\left.+[q_\nu]P_j^{(q_1\dots q_{\nu-1}\,q_\nu-1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| t\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{t-a_{j_1}}\left[\binom{1}{q_1}(\xi_{j_1}^{(p_1)})^{1-q_1}P_j^{(q_2\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_2}^{(p_2)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_2}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| t\right)+\right.$$

$$\left.\left.+[q_1]P_j^{(q_1-1,\,q_2\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| t\right)\right\}\left(\frac{b-a_{j_\nu}}{t-a_{j_\nu}}\right)^{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}\left(\frac{t-a_{j_1}}{b-a_{j_1}}\right)^{\xi_{j_1}^{(p_1)}}dt,$$

где

$$[q]=\begin{cases}0, \text{ если } q=0\\ 1, \text{ если } q>0.\end{cases}$$

Доказательство. На основании формулы (27) мы можем, проделав те же преобразования, что и в предыдущем случае, придать интегральной подстановке желаемую форму, если положить

$$P_{j_1}^{(q_1\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle| b\right)=\sum_{\mu_1=1}^{\infty}\dots\sum_{\mu_\nu=1}^{\infty}(\xi_{j_1}^{(p_1)})^{\mu_1-q_1}\dots(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)})^{\mu_\nu-q_\nu}\times$$

$$\times\binom{\mu_1}{q_1}\dots\binom{\mu_\nu}{q_\nu}P_j\left(a_{j_1}^{\mu_1}\dots{}_{j_\nu}^{\mu_\nu}\middle| b\right).$$

Для $\nu=1$ имеем

$$P_j^{(q_1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\\ a_{j_1}\end{matrix}\middle| b\right)=\sum_{\mu_1=1}^{\infty}(\xi_{j_1}^{(p_1)})^{\mu_1-q_1}\binom{\mu_1}{q_1}\delta_{j_1}^{j}\frac{(2\pi i)^{\mu_1}}{\mu_1!};$$

$$\delta_{j_1}^{j}=\begin{cases}0, \text{ если } j_1\neq j\\ 1, \text{ если } j_1=j.\end{cases}$$

Следовательно,

$$P_j^{(0)}\left(\begin{matrix}\xi_j^{(p_1)}\\ a_j\end{matrix}\middle| b\right)=e^{2\pi i\xi_j^{(p_1)}}-1;\quad P_j^{(q_1)}\left(\begin{matrix}\xi_j^{(p_1)}\\ a_j\end{matrix}\middle| b\right)=\frac{(2\pi i)^{q_1}}{q_1!}e^{2\pi i\xi_j^{(p_1)}}$$

$$P_j^{(q_1)}\left(\begin{matrix}\xi_j^{(p_1)}\\ a_{j_1}\end{matrix}\middle| b\right)=0,\ \text{ если } j_1\neq j.$$

Пусть теперь $\nu > 1$. Продифференцируем $P_j^{(q_1 \dots q_\nu)}$ по b; согласно формуле (14) получим

$$\frac{d}{db} P_j^{(q_1 \dots q_\nu)} \left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \end{matrix} \middle| \, b \right) = \sum_{\mu_1=1}^{\infty} \dots \sum_{\mu_\nu=1}^{\infty} (\xi_{j_1}^{(p_1)})^{\mu_1 - q_1} \dots (\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)})^{\mu_\nu - q_\nu} \binom{\mu_1}{q_1} \dots \binom{\mu_\nu}{q_\nu}.$$

$$\left[\frac{P_j(a_{j_1}^{\mu_1} \dots a_{j_{\nu-1}}^{\mu_{\nu-1}} a_{j_\nu}^{\mu_\nu - 1} \,|\, b}{b - a_{j_\nu}} - \frac{P_j(a_{j_1}^{\mu_1 - 1} a_{j_2}^{\mu_2} \dots a_{j_\nu}^{\mu_\nu} \,|\, b)}{b - a_{j_1}} \right] =$$

$$= \binom{1}{q_1} \frac{(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)})^{1 - q_\nu}}{b - a_{j_\nu}} P_j^{(q_1 \dots q_{\nu-1})} \left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_{\nu-1}}^{(p_\nu - 1)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \end{matrix} \middle| \, b \right) -$$

$$- \binom{1}{q_1} \frac{(\xi_{j_1}^{(p_1)})^{1 - q_1}}{b - a_{j_1}} P_j^{(q_2 \dots q_\nu)} \left(\begin{matrix} \xi_{j_2}^{(p_2)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_2} \dots a_{j_\nu} \end{matrix} \middle| \, b \right) +$$

$$+ \sum_{\mu_1=1}^{\infty} \dots \sum_{\mu_{\nu-1}=1}^{\infty} \sum_{\mu_\nu=2}^{\infty} (\xi_{j_1}^{(p_1)})^{\mu_1 - q_1} \dots (\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)})^{\mu_\nu - q_\nu} \binom{\mu_1}{q_1} \dots \binom{\mu_\nu}{q_\nu} \times$$

$$\times \frac{P_j(a_{j_1}^{\mu_1} \dots a_{j_{\nu-1}}^{\mu_\nu - 1} a_{j_\nu}^{\mu_\nu - 1} \,|\, b)}{b - a_{j_\nu}} -$$

$$- \sum_{\mu_1=2}^{\infty} \sum_{\mu_2=1}^{\infty} \dots \sum_{\mu_\nu=1}^{\infty} (\xi_{j_1}^{(p_1)})^{\mu_1 - q_1} \dots (\xi_{j_\nu}^{(p)_\nu})^{\mu_\nu - q_\nu} \binom{\mu_1}{q_1} \dots \binom{\mu_\nu}{q_\nu} \times$$

$$\times \frac{P_j(a_{j_1}^{\mu_1 - 1} a_{j_2}^{\mu_2} \dots a_{j_\nu}^{\mu_\nu} \; b)}{b - a_{j_1}}.$$

Проделав с этнм выражением преобразования совсем такие же, как и для интегральной матрицы, мы приведем его к виду

$$\frac{d}{db} P_j^{(q_1 \dots q_\nu)} \left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \end{matrix} \middle| \, b \right) = \binom{1}{q_\nu} \frac{(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)})^{1 - q_\nu}}{b - a_{j_\nu}} \times$$

$$\times P_j^{(q_1 \dots q_\nu - 1)} \left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu - 1}^{(p_\nu - 1)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu - 1} \end{matrix} \middle| \, b \right) + \frac{[q_\nu]}{b - a_{j_\nu}} P_j^{(q_1 \dots q_\nu - 1 \, q_\nu - 1)} \left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \end{matrix} \middle| \, b \right) -$$

$$- \binom{1}{q_1} \frac{(\xi_{j_1}^{(p_1)})^{1 - q_1}}{b - a_{j_1}} P_j^{(q_2 \dots q_\nu)} \left(\begin{matrix} \xi_{j_2}^{(p_2)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_2} \dots a_{j_\nu} \end{matrix} \middle| \, b \right) -$$

$$- \frac{[q_1]}{b - a_{j_1}} P_j^{(q_1 - 1 \, q_2 \dots q_\nu)} \left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \end{matrix} \middle| \, b \right) + \left(\frac{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}{b - a_{j_\nu}} - \frac{\xi_{j_1}^{(p_1)}}{b - a_{j_1}} \right) \times$$

$$\times P_j^{(q_1 \dots q_\nu)} \left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \end{matrix} \middle| \, b \right),$$

откуда путем интегрирования при начальном условии

$$P_j^{(q_1 \dots q_\nu)} \left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \end{matrix} \middle| \, a_j \right) = 0, \quad \nu > 0$$

получаем желаемый результат.

ГЛАВА II

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВБЛИЗИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТИ ЕЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ.

§ 9. Построение нормальной интегральной матрицы. Система линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой имеют в точке $x = 0$ поляриость порядка не выше s, может быть написана в внде

$$\frac{dY}{dx} = Y \sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p, \tag{120}$$

где Y — таблица n^2 функций $Y_{ik}(x)$ $(i, k = 1, 2 \dots n)$, дающих n линейных независимых решений системы (120). Первый значок i дает номер решения и второй значок k — номер функцин, входящей в i-ое решение системы; T_p — численные матрицы, образованные из коэффициентов рядов Лорана для коэффициентов системы уравнений.

В дальнейшем мы будем предполагать, что ряд

$$\sum_{p=-s}^{\infty} | T_p | \tag{121}$$

сходится, т. е. что матрнцы T_p образуют регулярную систему матриц. Это условие наверное будет выполнено, если радиусы сходимости рядов Лорана для коэффициентов системы будут больше единицы. Мы можем всегда достигнуть этого надлежащим линейным преобразованием независимого переменного. Наоборот, при условии сходимости ряда (121) радиус сходимости ряда $\sum_{p=-s}^{\infty} T_p X^p$ будет не меньше, нежели 1.

Пусть $\mathfrak{B}$ — область на плоскости x между двумя концентрическими окружностями с центром в начале координат и радиусами ρ_1 и ρ_2, меньшими единицы, и b — некоторая точка этой области. Нашей первой задачей будет построение интегральной матрицы $Y(b\,|\,x)$ системы (120), нормальной в точке $x = b$, т. е. такой, которая приводится к единичной матрице I при $x = b$. Кроме того, мы построим аналитическое выражение для интегральной подстановки $V(b)$, которую претерпевает $Y(b\,|\,x)$, когда x обходит начало координат в положительном направлении. Построим Риманову поверхность с ветвлением логарифмического типа в точке $x = 0$. Обозначим через b_1 точку, имеющую ту же комплексную координату, что и b и лежащую на том листе поверхности Римана, который находится непосредственно над точкой b и соответствует положнтельному обходу около $x = 0$. По самому определению интегральной подстановки

$$V(b) = Y(b\,|\,b_1). \tag{122}$$

Обозначим через $\mathfrak{B}_1$ часть поверхности Римана, содержащую внутри себя точку b и состоящую из ограниченного чнсла листов, координаты точек которой удовлетворяют неравенству $\rho_1 < |x| < \rho_2$.

Построение интегральной матрицы $Y(b\,|\,x)$ дается следующей теоремой.

Теорема XVI. *Для всех b из $\mathfrak{B}$ и всех значений из $\mathfrak{B}_1$ интегральная матрица $Y(b|x)$ есть равномерно целая функция матриц T_p, представимая рядом композиций*

$$Y(b|x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}b^{p_1+\cdots+p_\mu+\mu}x^{p_{\mu+1}+\cdots+p_\nu+\nu-\mu}\times$$

$$\times\sum_{\lambda=0}^{\mu}\alpha^{*(\lambda)}_{p_1\ldots p_\mu}\lg^\lambda b\sum_{k=0}^{\nu-\mu}\alpha^{k}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}\lg^k x, \tag{123}$$

где численные коэффициенты $a^{*(\lambda)}_{p_1\ldots p_\nu}$ и $a^{(k)}_{p_1\ldots p_\nu}$ определяются рекуррентными соотношениями

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha^{(0)}_{p_1}=\frac{1}{p_1+1};\quad \alpha^{*(0)}_{p_1}=-\frac{1}{p_1+1},\ \text{если}\ p_1+1\neq 0\\
&\alpha^{(1)}_{p_1}=\begin{cases}0, & \text{если}\ p_1+1\neq 0;\\ 1, & \text{если}\ p_1+1=0;\end{cases}\quad \alpha^{*(1)}_{p_1}=\begin{cases}0, & \text{если}\ p_1+1\neq 0;\\ -1, & \text{если}\ p_1+1=0;\end{cases}\\
&\alpha^{(\nu)}_{p_1\ldots p_\nu}=0;\\
&\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\Bigg[\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}-\frac{\mu+1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}+\\
&\qquad+\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^2}\alpha^{(\mu+2)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}-\\
&\qquad-\ldots+(-1)^{\nu-\mu-1}\frac{(\mu+1)\ldots(\nu-1)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^{\nu-\mu-1}}\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}\Bigg]\\
&\alpha^{*(\nu)}_{p_1\ldots p_\nu}=0;\\
&\alpha^{*(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{-1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\Bigg[\alpha^{*(\mu)}_{p_2\ldots p_\nu}-\frac{\mu+1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{*(\mu+1)}_{p_2\ldots p_\nu}+\\
&\qquad+\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^2}\alpha^{*(\mu+2)}_{p_2\ldots p_\nu}-\\
&\qquad-\ldots+(-1)^{\nu-\mu-1}\frac{(\mu+1)\ldots(\nu-1)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^{\nu-\mu-1}}\alpha^{*(\nu-1)}_{p_2\ldots p_\nu}\Bigg]\\
&\mu=\nu-1,\ \nu-2,\ldots 1,0;\quad p_1+p_2+\ldots+p_\nu+\nu\neq 0\\
&\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{\mu}\alpha^{(\mu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}};\quad \alpha^{*(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}=-\frac{1}{\mu}\alpha^{(\mu-1)}_{p_2\ldots p_\nu};\\
&\mu=\nu,\ \nu-1,\ldots 2,\ 1;\quad p_1+p_2+\ldots+p_\nu+\nu=0.
\end{aligned}\right\} \tag{124}$$

При $p_1+\ldots+p_\nu+\nu=0$ числа $\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}$ произвольны и $\alpha^{*(0)}_{p_1\ldots p_\nu}$ определяются из соотношеиий вида

$$\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{*(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}=0. \tag{125}$$

Заметим, что в слагаемом последней суммы, соответствующем $\mu=0$, сомножитель $\alpha^{*(0)}_{p_1\ldots p_\mu}$ не имеет смысла и его надо заменить единицей. Точно также при $\mu=\nu$ надо заменить единицей сомножитель $\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}$. То же замечание будет относиться к суммам, аналогичным (125), которые будут встречаться в дальнейшем.

Для доказательства теоремы применим обычный метод последовательных приближений. Положим

$$Y_0(x)=I;\quad Y_n(x)=I+\int_b^x Y_{n-1}(x)\sum_{p=-s}^{\infty}T_pX^p dx, \tag{126}$$

где x — некоторая точка из $\mathfrak{B}$, и путь интегрирования также принадлежит этой области. Искомая интегральная матрица будет:

$$Y(b|x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}[Y_\nu(x)-Y_{\nu-1}(x)]. \tag{127}$$

Этот алгорифм приводит нас к функциям от x, определяемым следующими рекуррентными соотношениями:

$$L_{p_1}(b|x)=\int_b^x x^{p_1}dx;\quad L_{p_1\ldots p_\nu}(b|x)=\int_b^x L_{p_1\ldots p_{\nu-1}}(b|x)X^{p_\nu}dx$$

$$p_1\ldots p_\nu=-s,\ -s+1,\ldots 0,\ 1,\ldots, \tag{128}$$

ибо производя вычисления и предполагая возможность почленного интегрирования, мы приходим к выражениям вида:

$$Y_1(x)-Y_0(x)=Y_1(x)-I=\int_b^x\sum_{p_1=-s}^{\infty}X_{p_1}T^{p_1}=\sum_{p_1=-s}^{\infty}T_{p_1}L_{p_1}(b|x)$$

$$Y_2(x)-Y_1(x)=\int_b^x[(Y_1(x)-I]\sum_{p_2=-s}^{\infty}T_{p_2}X^{p_2}dx=\sum_{p_1p_2=-s}^{\infty}T_{p_1}T_{p_2}L_{p_1p_2}(b|x)$$

и вообще

$$Y_\nu(x)-Y_{\nu-1}(x)=[TL(b|x)]_\nu=\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}L_{p_1p_2\ldots p_\nu}(b|x),$$

согласно (127), получим для $Y(b|x)$ ряд композиций вида:

$$Y(b|x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}[TL(b|x)]_\nu=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}L_{p_1\ldots p_\nu}(b|x) \tag{129}$$

Проверим теперь непосредственно, что этот ряд есть равномерно целая функция матриц T_p, удовлетворяющая как системе (120), так и начальному условию $Y(b|b)=I$. Для доказательства первой части утверждения произведем оценку коэффициентов ряда (129).

Заметим прежде всего, что любая точка b из $\mathfrak{B}$ может быть соединена с любой точкой x из $\mathfrak{B}_1$ путем, длина которого не превосходит некоторого числа σ. Величины x^p при изменении x в $\mathfrak{B}$ также имеют конечную верхиюю границу — $|x|<\rho_1^{-s}$, которую мы обозначим через α. Принимая это во внимание, получим последовательно оценки для коэффициентов ряда

$$|L_{p_1}(b|x)|=\left|\int_b^x x^{p_1}dx\right|\leqslant\alpha s_x\leqslant\alpha\sigma$$

$$|L_{p_1p_2}(b|x)|=\left|\int_b^x L_{p_1}(b|x)x^{p_2}dx\right|\leqslant\int_b^x\alpha s_x\alpha ds=\frac{(\alpha s_x)^2}{2!}\leqslant\frac{(\alpha\sigma)^2}{2!}$$

и продолжая так дальше, получим оценку вида:

$$|L_{p_1\ldots p_\nu}(b|x)|\leqslant\frac{(\alpha s_x)^\nu}{\nu!}\leqslant\frac{(\alpha\sigma)^\nu}{\nu!}. \tag{130}$$

Но степенной ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(a\sigma)^{\nu}}{\nu!}\xi^{\nu}$ сходится при всяком ξ и, следовательно, согласно результату, полученному в общей теории функций, ряд (129) действительно представляет собой равномерно-голоморфную целую функцию подстановок T_p. Из тех же оценок вытекает, что ряд

$$I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{p=-s}^{\infty}|T_p|\right)^{\nu}\frac{(a\sigma)^{\nu}}{\nu!}$$

будет мажорантным для (129) и поэтому последний сходится абсолютно и равномерно в области $\mathfrak{B}_1$. Почленное дифференцирование его дает

$$\frac{d}{dx}\left\{I+\sum_{\nu=1}^{\infty}[TL\,(b\,|\,x)]_{\nu}\right\}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_{\nu}=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_{\nu}}L_{p_1\ldots p_{\nu-1}}(b\,|\,x)\,x^{p_{\nu}}=$$

$$=\left\{I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_{\nu}=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_{\nu}}L_{p_1\ldots p_{\nu}}(b\,|\,x)\right\}\sum_{p=-s}^{\infty}T_px^p,$$

т. е. ряд (129) действительно удовлетворяет системе (120).

Наконец, выполнение начальных данных непосредственно вытекает из очевидных равенств

$$L_{p_1\ldots p_{\nu}}(b\,|\,b)=0.$$

Мы переходим теперь к определению коэффициентов $L_{p_1\ldots p_{\nu}}(x)$ из рекуррентных соотношений (128). Для этого введем новые функции $M_{p_1\ldots p_{\nu}}(x)$, не зависящие от b и определенные равенствами

$$M_{p_1}(x)=\int^x x^{p_1}dx;\quad M_{p_1\ldots p_{\nu}}(x)=\int^x M_{p_1\ldots p_{\nu-1}}(x)\,x^{p_{\nu}}\,dx,\tag{131}$$

причем постоянные при квадратурах выбираются так, чтобы при

$$p_1+p_2+\ldots+p_{\nu}+\nu\neq 0$$

функция $M_{p_1\ldots p_{\nu}}(x)$ имела вид

$$M_{p_1\ldots p_{\nu}}(x)=x^{p_1+p_2+\ldots+p_{\nu}+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}\lg^{\mu}x,\tag{132}$$

где $\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}$ — численные коэффициенты, а при $p_1+\ldots+p_{\nu}+\nu=0$ постоянная интегрирования — произвольна. Возможность представления (132) устанавливается весьма просто, ибо при $\nu=1$ имеем

$$M_{p_1}(x)=\int^x x^{p_1}\,dx=\begin{cases}x^{p+1}\dfrac{1}{p_1+1}\;(p_1+1\neq 0)\\ \alpha^{(0)}_{p_1}+\lg x\;(p_1+1=0)\end{cases}$$

где $\alpha^{(0)}_{p_1}$ — произвольная постоянная. Допустим теперь справедливость формулы (132) для всяких $M_{p_1\ldots p_{\mu}}(x)$ $\mu=1,\,2\ldots\nu$ и определим функцию $M_{p_1\ldots p_{\nu+1}}(x)$:

$$M_{p_1\ldots p_{\nu+1}}(x)=\int^x x^{p_1+\ldots+p_{\nu}+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}\lg^{\mu}x\cdot x^{p_{\nu+1}}dx=$$

$$=\int^x x^{p_1+\ldots+p_{\nu}+p_{\nu+1}+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}\lg^{\mu}x\,dx.$$

Разберем теперь два случая. Если $p_1+\ldots+p_{\nu+1}+\nu+1\neq 0$, то, интегрируя по частям, получим

$$M_{p_1\ldots p_{\nu+1}}(x)=\frac{x^{p_1+\ldots+p_{\nu+1}+\nu+1}}{p_1+\ldots+p_{\nu+1}+\nu+1}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}\lg^{\mu}x-$$

$$-\int^x\frac{x^{p_1+\ldots+p_{\nu+1}+\nu}}{p_1+\ldots+p_{\nu+1}+\nu+1}\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu\,\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}\lg^{(\mu-1)}x\,dx.$$

Продолжая дальше интегрировать по частям, придем к выражению вида

$$M_{p_1\ldots p_{\nu+1}}(x)=x^{p_1+\ldots+p_{\nu+1}+\nu+1}\sum_{\mu=0}^{\nu+1}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu+1}}\lg^{\mu}x,$$

при этом $\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu+1}}$ будут выражаться линейно через $\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}$ и не содержать никаких произвольных постоянных, кроме тех, которые входили в $\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}$.

Если же

$$p_1+\ldots+p_{\nu+1}+\nu+1=0,$$

то

$$M_{p_1\ldots p_{\nu+1}}(x)=\int^x\frac{1}{x}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}\lg^{\mu}x\,dx=\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_{\nu+1}}+$$

$$+\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}}{\mu+1}\lg^{\mu+1}x=\sum_{\mu=0}^{\nu+1}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu+1}}\lg^{\mu}x.$$

Здесь $\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_{\nu+1}}$ — новая произвольная постоянная. Наше утверждение о возможности представления (132) доказано; одновременно мы установили, что весь произвол в коэффициентах α сводится лишь к выбору $\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_{\nu}}$ при $p_1+\ldots+p_{\nu}+\nu=0$.

Дадим теперь рекуррентные соотношения, позволяющие вычислить последовательно $\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}$. При $\nu=1$ наши предыдущие вычисления дают:

$$\alpha^{(0)}_{p_1}\begin{cases}\dfrac{1}{p_1+1},\ \text{когда}\ p_1+1\neq 0;\\ \text{произвольно, когда}\ p_1+1=0;\end{cases}\qquad \alpha^{(1)}_{p_1}\begin{cases}0,\ \text{когда}\ p_1+1\neq 0.\\ 1,\ \text{когда}\ p_1+1=0.\end{cases}$$

Далее из определения $M_{p_1\ldots p_{\nu}}(x)$ следует:

$$\frac{d}{dx}M_{p_1\ldots p_{\nu}}(x)=M_{p_1\ldots p_{\nu-1}}(x)\,x^{p_{\nu}}$$

или, в силу (132)

$$(p_1+\ldots+p_{\nu}+\nu)\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}\lg^{\mu}x+\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}\lg^{\mu-1}x=\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}\lg^{\mu}x,$$

откуда

$$(p_1+\ldots+p_{\nu}+\nu)\,\alpha^{(1)}_{p_1\ldots p_{\nu}}=0$$

$$(p_1+\ldots+p_{\nu}+\nu)\,\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}+(\mu+1)\,\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_{\nu}}=\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}$$

$$\mu=\nu-1,\ \nu-2,\ldots 1,\ 0.$$

Разберем сначала случай $p_1+\dots+p_\nu+\nu\neq 0$. При этом

$$\alpha^{(\nu)}_{p_1\dots p_\nu}=0;\quad \alpha^{(\mu)}_{p_1\dots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\dots+p_\nu+\nu}\left[\alpha^{(\mu)}_{p_1\dots p_{\nu-1}}-(\mu+1)\,\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\dots p_\nu}\right].$$

Применяя последовательно вторую из написанных формул, будем иметь:

$$\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\dots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\dots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\dots p_{\nu-1}}$$

$$\alpha^{(\nu-2)}_{p_1\dots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\dots+p_\nu+\nu}\left[\alpha^{(\nu-2)}_{p_1\dots p_{\nu-1}}-\frac{\nu-1}{p_1+\dots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\dots p_{\nu-1}}\right]$$

. . . .

$$\alpha^{(\mu)}_{p_1\dots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\dots+p_\nu+\nu}\left[\alpha^{(\mu)}_{p_1\dots p_{\nu-1}}-\frac{\mu+1}{p_1+\dots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\dots p_{\nu-1}}+\right.$$
$$+\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{(p_1+\dots+p_\nu+\nu)^2}\,\alpha^{(\mu+2)}_{p_1\dots p_{\nu-1}}-\dots$$
$$\left.-\dots+(-1)^{\nu-\mu-1}\frac{(\mu+1)\dots(\nu-1)}{(p_1+\dots+p_\nu+\nu)^{\nu-\mu-1}}\,\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\dots p_{\nu-1}}\right].$$

В случае же $p_1+\dots+p_\nu+\nu=0$ вышенаписанные функции дают:

$$\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\dots p_\nu}=\frac{1}{\mu+1}\,\alpha^{(\mu)}_{p_1\dots p_{\nu-1}}\quad(\mu=0,\,1,\,\dots\,\nu-1)$$

и $\alpha^{(0)}_{p_1\dots p_\nu}$ остаются произвольными.

Мы получили таким образом для постоянных α те рекуррентные соотношения, которые были указаны в формулировке теоремы XVI.

Для того чтобы найти выражение функций $L_{p_1\dots p_\nu}(b\,|\,x)$ через $M_{p_1\dots p_\nu}(x)$, нам потребуется ввести некоторые новые функции $M^*_{p_1\dots p_\nu}(x)$, которые мы определим равенствами:

$$\left.\begin{aligned}M^*_{p_1}(x)&=-M_{p_1}(x)\\ M^*_{p_1\dots p_\nu}(x)&=-\sum_{\mu=0}^{\nu-1}M^*_{p_1\dots p_\mu}(x)\,M_{p_{\mu+1}\dots p_\nu}(x);\end{aligned}\right\}\qquad(133)$$

в сумме $\sum\limits_{\mu=0}^{\nu-1}$ в слагаемом, соответствующем $\mu=0$ $M^*_{p_1\dots p_\mu}(x)$ нужно заменить единицей.

Докажем теперь, что

$$L_{p_1\dots p_\nu}(b\,|\,x)=\sum_{\mu=0}^{\nu}M^*_{p_1\dots p_\mu}(b)\,M_{p_{\mu+1}\dots p_\nu}(x);\qquad(134)$$

при $\nu=1$ формула очевидна, ибо

$$L_{p_1}(b\,|\,x)=M_{p_1}(x)-M_{p_1}(b)=M_{p_1}(x)+M^*_{p_1}(b).$$

Для доказательства справедливости ее вообще воспользуемся вновь индукцией

$$L_{p_1\dots p_{\nu+1}}(b\,|\,x)=\int_b^x L_{p_1\dots p_\nu}(b\,|\,x)\,x^{p_{\nu+1}}\,dx=$$

$$=\int_b^x\sum_{\mu=0}^{\nu}M^*_{p_1\dots p_\mu}(b)\,M_{p_{\mu+1}\dots p_\nu}(x)\;x^{p_{\nu+1}}\,dx=$$

$$=\sum_{\mu=0}^{\nu}M^*_{p_1\dots p_\mu}(b)\left[M_{p_{\mu+1}\dots p_{\nu+1}}(x)-M_{p_{\mu+1}\dots p_{\nu+1}}(b)\right]=$$

$$=M^*_{p_1\dots p_{\nu+1}}(b)+\sum_{\mu=0}^{\nu}M^*_{p_1\dots p_\mu}(b)\,M_{p_{\mu+1}\dots p_{\nu+1}}(x)=$$

$$=\sum_{\mu=0}^{\nu+1}M^*_{p_1\dots p_\mu}(b)\,M_{p_{\mu+1}\dots p_{\nu+1}}(x).$$

Из формулы (133) весьма просто следует, что $M^*_{p_1\dots p_\nu}(x)$ имеют аналитическое строение, аналогичное с $M_{p_1\dots p_\nu}(x)$, но с другими числовыми коэффициентами

$$M^*_{p_1\dots p_\nu}(x)=x^{p_1+\dots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{*(\mu)}_{p_1\dots p_\nu}\lg^\mu(x).\qquad(135)$$

Для более простого построения рекуррентных соотношений, позволяющих вычислить $\alpha^{*(\mu)}_{p_1\dots p_\nu}$, мы докажем справедливость для $M^*_{p_1\dots p_\nu}(x)$ следующих интегральных формул:

$$M^*_{p_1}(x)=-\int^x x^{p_1}\,dx;\quad M^*_{p_1\dots p_\nu}(x)=-\int^x x^{p_1}M^*_{p_2\dots p_\nu}(x)\,dx,\qquad(136)$$

постоянные интегрирования в которых выбираются для

$$p_1+\dots+p_\nu+\nu\neq 0$$

так, чтобы было верно равенство (135). Что же касается выбора $\alpha^{*(0)}_{p_1\dots p_\nu}(x)$ при $p_1+\dots+p_\nu+\nu=0$, то на этом мы остановимся ниже.

По самому определению $M^*_{p_1}(x)$:

$$\frac{d}{dx}M^*_{p_1}(x)=-\frac{d}{dx}M_{p_1}(x)=-x^{p_1}.$$

Предположив равенство

$$\frac{d}{dx}M^*_{p_1\dots p_\mu}(x)=-x^{p_1}M^*_{p_2\dots p_\mu}(x)$$

верным для $\mu=1\dots\nu-1$, имеем

$$\frac{d}{dx}M^*_{p_1\dots p_\nu}(x)=-\sum_{\mu=0}^{\nu-1}M^*_{p_1\dots p_\mu}(x)\,M_{p_{\mu+1}\dots p_{\nu-1}}(x)\;x^{p_\nu}+$$
$$+X^{p_1}\sum_{\mu=1}^{\nu-1}M^*_{p_2\dots p_\mu}(x)\,M_{p_{\mu+1}\dots p_\nu}(x).$$

Но, согласно (133),

$$\sum_{\mu=0}^{\nu-1}M^*_{p_1\dots p_\mu}(x)\,M_{p_{\mu+1}\dots p_{\nu-1}}(x)=0,$$

а

$$\sum_{\mu=1}^{\nu-1}M^*_{p_2\dots p_\mu}(x)\,M_{p_{\mu+1}\dots p_\nu}(x)=-M^*_{p_2\dots p_\nu}(x)$$

и поэтому

$$\frac{d}{dx} M^*_{p_1 \dots p_\nu}(x) = -x^{p_1} M^*_{p_2 \dots p_\nu}(x),$$

отсюда и следуют равенства (136). Пользуясь ими и поступая совершенно так же, как и выше при определении рекуррентных соотношений для $\alpha_{p_1 \dots p_\nu}$, мы легко сможем найти рекуррентные соотношения (5) для $\alpha^*_{p_1 \dots p_\nu}$, указанные в теореме XVI.

Нам осталось еще доказать формулы для определения $\alpha^{*(0)}_{p_1 \dots p_\nu}$ при $p_1 + \dots + p_\nu + \nu = 0$. С этой целью достаточно в равенство (133) подставить вместо $M^*_{p \dots p_\nu}(x)$ и $M_{p_1 \dots p_\nu}(x)$ выражения (132) и (135). После подстановки в обеих частях равенства будут стоять выражения, представляющие собой полиномы относительно $\lg x$

$$\sum_{s=0}^{\nu-1} \alpha^{*(s)}_{p_1 \dots p_\nu} \lg s_x = -\sum_{\mu=0}^{\nu-1} \left(\sum_{s=0}^{\mu} \alpha^{*(s)}_{p_1 \dots p_\mu} \lg^s x\right) \cdot \left(\sum_{s=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(s)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu} \lg^s x\right).$$

Сравнивая здесь члены, не содержащие $\lg x$, получаем требуемые равенства (125).

Если в выражение для $L_{p_1 \dots p_\nu}(b|x)$ (134) подставить вместо $M_{p_1 \dots p_\nu}(x)$ и $M^*_{p_1 \dots p_\nu}(b)$ и значения (132) и (135), получим

$$L_{p_1 \dots p_\nu}(b|x) = \sum_{\mu=0}^{\nu} b^{p_1 + \dots + p_\mu + \mu} x^{p_{\mu+1} + \dots + p_\nu + \nu - \mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \alpha^{*(\lambda)}_{p_1 \dots p_\mu} \lg^\lambda b$$

$$\sum_{k=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(k)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu} \lg^k x. \tag{137}$$

Внося эти выражения в формулу (129), получим для нормальной интегральной матрицы равенство (123). Таким образом теорема XVI доказана полностью.

Заметим, что в формуле (123) значение $\lg b$ может быть взято произвольно и значение $\lg x$ на римановой поверхности S с логарифмической точкой ветвления $X = 0$ вполне определяется тем, что на том листе, где лежит начальная точка b значение $\lg x$ должно совпадать с $\lg b$.

Две различные нормальные интегральные матрицы $Y(b|x)$ и $Y(c|x)$ отличаются постоянным матричным множителем так, что

$$Y(b|x) = AY(c|x) \tag{138}$$

Подставляя $x = c$, получим

$$Y(b|c) = A$$

и, следовательно,

$$Y(b|x) = Y(b|c) Y(c|x). \tag{139}$$

Полагая же здесь $X = b$, имеем

$$I = Y(b|c)\, Y(c|b)$$

или

$$Y(b|c) = Y(c|b)^{-1}. \tag{140}$$

Поэтому на ряду с (20) будет и

$$Y(b|x) = Y(c|b)^{-1} Y(c|x). \tag{141}$$

Дифференцируя произведение

$$Y(b|x)\, Y(b|x)^{-1} = I$$

и умножая результат слева на $Y(b|x)^{-1}$, получим

$$\frac{dY(b|x)^{-1}}{dx} = -Y(b|x)^{-1} \frac{dY(b|x)}{dx} Y(b|x)^{-1}$$

или, в силу того, что $Y(b|x)$ является интегральной матрицей системы (I):

$$\frac{dY(b|x)^{-1}}{dx} = -\sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p\, Y(b|x)^{-1}.$$

Пользуясь же соотношением (140), мы видим, что матрица

$$Y_1 = Y(x|b) = Y(b, x)^{-1} \tag{142}$$

является нормальной в точке $x = b$ интегральной матрицей для системы:

$$\frac{dY_1}{dx} = -\sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p Y_1. \tag{143}$$

Матрица (142) получается по формуле (123) при помощи перестановки букв b и x.

Формулируем теперь теорему, дающую аналитическое представление любой целой степени интегральной подстановки $V(b)$, определенной выше формулой (122).

Теорема XVII. *Все целые степени интегральной подстановки $V(b)^k$ $(k = \pm 1, \pm 2 \dots)$ для всех значений b, принадлежащих области $\mathfrak{B}$, суть равномерно целые функции подстановок T_p и представляются рядами композиций вида:*

$$V(b)^k = I +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} b^{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{*(0)}_{p_1 \dots p_\mu} \sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu} (2k\pi i)^\varkappa. \tag{144}$$

Пусть b_k — та точка Римановой поверхности $\mathfrak{B}$, которая имеет ту же комплексную координату, что и b, и соответствует обходу $|k|$ ряда вокруг $X = 0$ против часовой стрелки, если $k > 0$, и по часовой стрелке, если $k < 0$. Согласно определению $V(b)$:

$$V(b)^k = Y(b|b_k).$$

Формула (123) дает

$$V(b)^k = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1 \dots p_\nu} b^{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \alpha^{*(\lambda)}_{p_1 \dots p_\mu} \lg^\lambda b.$$

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu} (\lg b + 2k\pi i)^\varkappa. \tag{145}$$

Но не трудно видеть, что $V(b)$ есть однозначная функция от b. Действительно, из формулы (141) следует

$$V(b) = Y(c|b)^{-1}\, V(c)\, Y(c|b).$$

Если точка b совершит обход около $X = 0$, то матрица $Y(c|b)^{-1}$ превратится в следующую:

$$[V(c)\, Y(c|b)]^{-1} = Y(c|b)^{-1}\, Y(c)^{-1}$$

и $V(b)$ примет вид

$$V(c|b)^{-1}\, V(c)^{-1} \cdot V(c) \cdot V(c)\, Y(c|b) = Y(c|b)^{-1}\, V(c)\, Y(c|b) = V(b),$$

т. е. $V(b)$ есть однозначная функция от b.

Представление матрицы $V(b)^k$ рядом композиций (145) справедливо при любом порядке матриц T_p. Если бы коэффициенты этого ряда содержали $\lg b$, то при обходе точкой b начала координат мы получили бы иное представление матрицы $V(b)^k$ рядом композиций, что противоречило бы теореме единственности, установленной нами в общей теории функций от матриц. Таким образом коэффициенты разложения (145) не должны содержать $\lg b$, и мы приходим к формуле (144).

Заметим еще, что ряд композиций (145), дающий матрицу $Y(b|b_k)$, согласно теореме XVI, дает равномерно целую функцию матриц T_p. Этим теорема XVII доказана полностью.

В заключение настоящего параграфа укажем на то, что основные результаты, полученные здесь, могут быть сформулированы в несколько ином виде, остающемся верным и в том случае, когда ряд $\sum\limits_{p=-\varepsilon}^{\infty} |T_p|$ не сходится.

Действительно, пусть радиус сходимости ряда

$$\sum_{p=-\varepsilon}^{\infty} T_p X^p \tag{146}$$

больше некоторого положительного числа R. Не трудно дать оценку функциям $L_{p_1 \ldots p_\nu}(x)$, если X заключается в кольце $\varepsilon \leqslant |x| \leqslant R$.

Не трудно видеть, что величина X^p имеет тогда оценку вида MR^p, где M — постоянная, определяемая из условий $M \geqslant 1$ и $MR^{-\varepsilon} \geqslant \varepsilon^{-\varepsilon}$.

Как и выше, мы получаем оценку:

$$|L_{p_1 \ldots p_\nu}(b|x)| \leqslant \frac{M^\nu \sigma^\nu}{\nu!} R^{p_1 + \cdots + p_\nu}. \tag{147}$$

Принимая во внимание, что радиус сходимости ряда (146) больше, чем R, мы можем утверждать, что ряд:

$$\sum_{p=-\varepsilon}^{\infty} |T_p| R^p$$

сходится, т. е. матрицы $T_p R^p$ образуют нормальную систему. Формулу (129) мы можем переписать в форме

$$Y(b|x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -\varepsilon}^{\infty} T_{p_1} R^{p_1} \ldots T_{p_\nu} R^{p_\nu} \frac{L_{p_1 \ldots p_\nu}(b|x)}{R^{p_1 + \cdots + p_\nu + \nu}} \tag{148}$$

и из оценки (147) видно, что этот ряд есть равномерно целая функция матриц $T_p R^p$. Матрицы T_p при $R < 1$ вообще не образуют нормальной системы, но полученные нами ряды продолжают обладать относительно их абсолютной сходимостью.

§ 10. Выделение многозначного множителя из нормальной интегральной матрицы и показательная матрица. Мы попытаемся теперь представить нормальную матрицу $Y(b|x)$ в виде произведения показательной матрицы и матрицы, являющейся однозначной функцией b и x.

Введем для этого матрицу

$$W(b) = \frac{1}{2\pi i} \lg V(b), \tag{149}$$

где пока мы берем любое значение логарифма. Иначе говоря, матрица $W(b)$ есть любое решение уравнения

$$e^{2\pi i\, W(b)} = V(b). \tag{150}$$

Положим далее

$$Y(b|x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} \overline{Y}(b|x); \quad \overline{Y}(b|x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} Y(b|x) \tag{151}$$

Не трудно видеть, что $\overline{Y}(b|x)$, определенная этим равенством, есть однозначная функция x. Действительно, при обходе точкой x начала координат эта матрица превратится в следующую:

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} \cdot e^{-2\pi i\, W(b)}\, V(b)\, Y(b|x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} V(b)^{-1}\, V(b)\, Y(b|x) = \overline{Y}(b|x).$$

Для более детального исследования мы предположим, что система матриц T_p принадлежит некоторой достаточно малой окрестности нуля, определенной неравенством

$$\sum_{p=-\varepsilon}^{\infty} |T_p| \leqslant \|\rho\|, \tag{152}$$

где ρ — достаточно малое положительное число.

Мы выберем теперь для матрицы $W(b)$ определенное решение уравнения (131), а именно то, которое при условии (33) представимо рядом:

$$W(b) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} [V(b) - I]^\nu. \tag{153}$$

При малых ρ матрица $V(b)$ будет близкой к единичной матрице и ряд (134) дает нам определенное значение для подстановки $W(b)$. Более подробное исследование показательной матрицы $W(b)$ мы дадим ниже. Покажем теперь, что $\overline{Y}(b|x)$ будет однозначной функцией не только x, но и b. Действительно, пользуясь соотношением

$$V(b) = Y(c|b)^{-1}\, V(c)\, Y(c|b)$$

и формулой (134), мы можем написать

$$W(b) = Y(c|b)^{-1}\, W(c)\, Y(c|b);$$

подставляя это значение $W(b)$ и значение $Y(b|x)$ из (141) в формулу (151) получим

$$\overline{Y}(b|x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{-Y(c|b)^{-1}\, W(c)\, Y(c|b)} Y(c|b)^{-1}\, Y(c|x) =$$

$$= Y(c|b)^{-1} \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(c)} Y(c|b)\, Y(c|b)^{-1}\, Y(c|x) = Y(c|b)^{-1} \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(c)} Y(c|x)$$

или

$$\overline{Y}(b|x) = \left[\left(\frac{x}{b}\right)^{W(c)} Y(c|b)\right]^{-1} Y(c|x),$$

но при обходе точкой b начала координат произведение

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{W(c)} Y(c|b)$$

остается без изменения. Отсюда и следует однозначность $\overline{Y}(b|x)$ как функции от b.

Из доказанного следует, что матрица $\overline{Y}(b|x)$ представима в окрестности начала двойным рядом Лорана

$$\overline{Y}(b|x) = \sum_{p_1 q_1 = -\infty}^{+\infty} B_{pq}\, x^p\, b^q, \tag{154}$$

коэффициенты которого, очевидно, выражаются по формулам

$$B_{pq}=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\int \overline{Y}(b|x)\frac{db\,dx}{x^{p+1}\,b^{q+1}}, \tag{155}$$

где интегрирование по b и x производится по замкнутым контурам вокруг начала координат.

Введенные матрицы обладают свойствами, которые мы формулируем в виде следующей теоремы:

Теорема XVIII. *Для всех значений b из $\mathfrak{B}$ и x из $\mathfrak{B}_1$ при условии* (133) *матрицы* $\overline{Y}(b|x)$, B_{pq}, $\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)}$ *и* $W(b)$ *суть равномерно голоморфные функции матриц T, представимые следующими рядами композиций:*

$$\overline{Y}(b|x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}b^{p_1+\ldots+p_\mu+\mu}\,x^{p_{\mu\mu}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu}\times$$
$$\times\,\alpha^{*\,(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\,\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu} \tag{156}$$

$$B_{pq}=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\beta^{(p)}_{p_1+\ldots+p_\mu+\mu}\,\beta^{(q)}_{p_{\mu+1}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu}\,\alpha^{*\,(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\,\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}$$

$$B_{00}=I+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\beta^{(0)}_{p_1+\ldots+p_\mu+\mu}\,\beta^{(0)}_{p_{\mu+1}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu}\,\alpha^{*\,(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\,\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}$$

$$\beta^{(j)}_k=\left\{\begin{matrix}1, \text{ когда } k=j\\ 0, \text{ когда } k\neq j\end{matrix}\right\}. \tag{157}$$

Заметим прежде всего, что к суммам (156) и (157) относится то же значение, что и к (125). При $\mu=0$ слагаемое в сумме

$$\sum_{\mu=0}^{\nu}\beta^{(p)}_{p_1+\ldots+p_\mu+\mu}\,\beta^{(p)}_{p_\mu+\ldots+p_\nu+\nu-\mu}\,\alpha^{*\,(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\,\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}$$

надо считать равным:

$$\beta^{(q)}_{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}$$

и при $\mu=\nu$ его надо считать равным:

$$\beta^{(p)}_{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}.$$

Начнем исследование с матрицы $W(b)$. Матрица $V(b)-I$ есть равномерно целая функция от T_p, без свободного члена и ряд (153) есть голоморфная функция матрицы $V(b)-I$ в области нулевой матрицы. Пользуясь теоремой о подстановке ряда в ряд, мы можем утверждать, что $W(b)$ в окрестности нулевых подстановок, определяемой неравенством (152), есть равномерно голоморфная функция матриц T_p. Пользуясь той же теоремой, можно утверждать, что и матрица $\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)}$ будет такой же функцией от T_p. То же самое можно сказать и относительно обратной матрицы $\left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)}$ и, наконец, о матрице

$$\overline{Y}(b|x)=\left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)}Y(b|x).$$

Мы будем иметь таким образом формулы вида:

$$\overline{Y}(b|x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\,\overline{L}_{p_1\ldots p_\nu}(b|x) \tag{158}$$

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\,E_{p_1\ldots p_\nu}(b|x) \tag{159}$$

$$W(b)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\,Q_{p_1\ldots p_\nu}(b). \tag{160}$$

Из формулы (143) видно, что в разложении матрицы $V(b)-\overline{I}$ коэффициент разложения при произведении $T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}$ имеет вид произведения $b^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}$ на некоторый численный множитель, не зависящий уже от b. В силу (153) и правила подстановки ряда в ряд, можно утверждать то же и о коэффициентах $Q_{p_1\ldots p_\nu}(b)$ и о коэффициентах разложения $W(b)^k$ $(k=2, 3\ldots)$.

То же правило подстановки ряда в ряд показывает, что $E_{p_1\ldots p_\nu}(b|x)$, являющиеся коэффициентами разложения $\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)}=e^{W(b)\lg\frac{x}{b}}$, имеют вид произведений $b^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}$ на полином от $\lg x$ и $\lg b$. Такой же результат можно высказать и относительно $\left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)}$. Наконец, в силу (151), коэффициенты $\overline{L}_{p_1\ldots p_\nu}(b|x)$ суть полиномы от b, $\frac{1}{b}$, x, $\frac{1}{x}$, $\lg b$ и $\lg x$. Но, как мы видели раньше, матрица $\overline{Y}(b|x)$ должна быть однозначной функцией и от x и от b при любых T_p; $\overline{L}_{p_1\ldots p_\nu}(b|x)$ поэтому не содержат ни $\lg x$, ни $\lg b$ и суть полиномы от b, $\frac{1}{b}$, x, $\frac{1}{x}$. Мы имеем:

$$Y(b|x)=e^{\lg\frac{x}{b}W(b)}\,\overline{Y}(b|x)=\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\lg^{\nu}\left(\frac{x}{b}\right)W(b)^{\nu}\right]\overline{Y}(b|x)=$$
$$=\overline{Y}(b|x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\lg^{\nu}\left(\frac{x}{b}\right)W(b)^{\nu}\,\overline{Y}(b|x).$$

При разложении в ряд композиций второго слагаемого правой части, каждый член будет полиномом от $\lg x$ и $\lg b$ без свободного члена; первое же слагаемое не содержит этих логарифмов. Таким образом, последняя формула показывает, что коэффициенты разложения $\overline{Y}(b|x)$ состоят из тех частей коэффициентов разложения $\overline{Y}(b|x)$, которые не содержат $\lg x$ и $\lg b$, т. е.

$$\overline{L}_{p_1\ldots p_\nu}(b|x)=\sum_{\mu=0}^{\nu}b^{p_1+\ldots+p_\mu+\mu}\,x^{p_{\mu+1}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu}\,\alpha^{*\,(0)}_{p\ldots p_\mu}\,\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}, \tag{161}$$

откуда и следует непосредственно формуле (156).

Мы переходим теперь к исследованию двойного ряда Лорана (154) и доказательству равенства (157). Установим для этого равномерную сходимость ряда (156) относительно x и b в кольце $\mathfrak{B}$, определенном, как и выше, неравенствами:

$$0<\rho_1\leqslant(|x| \text{ и } |b|)\leqslant\rho_2<1.$$

Обратимся к ряду композиций для матрицы $V(b)-I$. Коэффициенты его, как известно, равны $L_{p_1\ldots p_\nu}(b|b_1)$.

Для этих величин мы имели раньше оценку вида

$$|L_{p_1 \dots p_\nu}(b \mid b_1)| \leqslant \frac{1}{\nu!} R^\nu, \tag{162}$$

где R не зависит от b. Коэффициенты ряда (153), расположенного по степеням $V(b)-I$, по модулю не больше единицы. Поэтому, в результате подстановки ряда в ряд, мы получим для коэффициентов ряда (160) оценку вида

$$|Q_{p_1 \dots p_\nu}(b)| \leqslant A_1 R_1^\nu, \tag{163}$$

где A_1 и R_1 не зависят от b. Это утверждение прямо следует из доказательства теоремы о подстановке ряда в ряд.

Обращаемся теперь к матрице

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lg^\nu \left(\frac{x}{b}\right) W(b)^\nu. \tag{164}$$

При изменении b в кольце $\mathfrak{B}$ и x на Римановой поверхности $\mathfrak{B}_1$, с конечным числом листов, мы имеем для коэффициентов этого ряда оценку вида (162) и, принимая во внимание, что для коэффициентов разложения матрицы $W(b)$ имеется оценка (163), мы получим при помощи вышеупомянутой теоремы о подстановке и для ряда (164) оценку того же типа. Переходим к интересующей нас матрице $\overline{Y}(b \mid x)$. Коэффициенты разложения $Y(b \mid x)$ при изменении b и x соответственно на $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_1$ имеют оценку (162). Применив теорему об умножении рядов, видим, что и коэффициенты разложения матрицы $\overline{Y}(b \mid x)$ имеют оценку вида

$$|L_{p_1 \dots p_\nu}(b \mid x)| \leqslant A_2 R_2^\nu.$$

A_2 и R_2^ν не зависят от b и x. Таким образом, ряд (156) сходится абсолютно и равномерно относительно b и x в указанной области. Но если так, то его можно интегрировать почленно, в результате чего и получаются формулы (157). Для коэффициентов разложения рядов (157) мы можем, очевидно, написать оценку

$$\left|\sum_{\mu=0}^{\nu} \beta^{(0)}_{p_1+\dots+p_\mu+\mu}\, \beta^{(0)}_{p_{\mu+1}+\dots+p_\nu+\nu-\mu}\, \alpha^{*(0)}_{p_1 \dots p_\mu}\, \alpha^{(0)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu}\right| \leqslant \rho^{-p-q} A_2 R_2^\nu,$$

где ρ — некоторое число, удовлетворяющее неравенству $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$. Ряд (157) таким образом есть также равномерно голоморфная функция системы матриц T_p в некоторой окрестности нуля, определяемой неравенством (152). Явное выражение коэффициентов рядов (140) и (160) мы дадим в следующем параграфе.

§ 11. Примитивная интегральная матрица и выделение из нее многозначного показательного множителя. Нормальная интегральная матрица $V(b \mid x)$ не является простейшей и наиболее естественной интегральной матрицей системы (120). Ее построение связано с выбором точки нормализации b и этот выбор является случайным элементом для интегральной матрицы.

Если мы обратимся к основной формуле (123), то увидим, что ряд композиций, определяющий матрицу $Y(b \mid x)$, может быть представлен формально в виде произведения двух множителей

$$\left.\begin{aligned} &\Big[I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} b^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{*\mu}_{p_1 \dots p_\nu} \lg^\mu b\Big] \\ &\Big[I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} x^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{(\mu)}_{p_1 \dots p_\nu} \lg^\mu x\Big] \end{aligned}\right\} \tag{165}$$

Первый из них содержит только b и второй — только x. Мы приходим таким образом естественно к определению интегральной матрицы системы (120), не зависящей от b:

$$Z(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} x^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{(\mu)}_{p_1 \dots p_\nu} \lg^\mu x. \tag{166}$$

В дальнейшем мы покажем, что ряд (166) есть равномерно голоморфная функция системы матриц T_b, если x принадлежит области $\mathfrak{B}$, и что он действительно представляет интегральную матрицу системы (120).

Продолжим теперь наши формальные утверждения, относя строгое их доказательство на конец настоящего параграфа. Произведение (165) должно обращаться в единичную матрицу при $x=b$, т. е. при такой подстановке первый множитель должен быть обратен второму. Мы приходим таким образом к следующему выражению матрицы, обратной матрице (166):

$$Z(x)^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} x^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{*(0)}_{p_1 \dots p_\nu} \lg^\mu x. \tag{167}$$

Совершенно так же матрица $\overline{Y}(b \mid x)$ формально распадается на два множителя:

$$\Big[I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} b^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \alpha^{*(0)}_{p_1 \dots p_\nu}\Big] \times$$

$$\times \Big[I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} x^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \alpha^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu}\Big]. \tag{168}$$

Если вновь принять во внимание, что $\overline{Y}(b \mid b) = I$, мы придем к определению еще двух матриц:

$$\overline{Z}(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} x^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \alpha^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu}, \tag{169}$$

$$\overline{Z}(x)^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} x^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \alpha^{*(0)}_{p_1 \dots p_\nu}. \tag{170}$$

Перейдем теперь к доказательству того, что введенные нами матрицы суть действительно равномерно голоморфные функции системы матриц $\overline{T}_p$ и к установлению связи между нимм. Будем в дальнейшем считать, что произвольные коэффициенты $\alpha^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu}$ при $p_1 + \dots + p_\nu + \nu = 0$ равны нулю.

Возьмем формулу (37) для $\overline{Y}(b \mid x)$. Тот факт, что коэффициенты ряда, стоящего справа, имеют оценку вида

$$\left|\sum_{\mu=0}^{\nu} b^{p_1+\dots+p_\mu+\mu} x^{p_{\mu+1}+\dots+p_\nu+\nu-\mu} \alpha^{*(0)}_{p_1 \dots p_\mu} \alpha^{(0)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu}\right| < AR^\nu, \tag{171}$$

где A и R не зависят от b и x при изменении b и x в кольце $0 < \rho_1 \leqslant |b|$.

и $|x| \leqslant \rho_2 < 1$, позволяет интегрировать ряд (156) по x почленно вдоль любого пути, лежащего внутри указанного кольца. В результате интеграции вдоль замкнутого контура, окружающего начало координат, получим ряд композиций, коэффициенты которого также имеют оценку типа (171)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(0)} \overline{Y}(b\,|\,x)\frac{dx}{x} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty} T_{p_1}\ldots T_{p_\nu} b^{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\alpha^{*(0)}_{p_1\ldots p_\nu},$$

т. е. матрица, определенная рядом (170), есть действительно равномерно голоморфная функция системы матриц T_p в окрестности нулевых матриц. Совершенно то же можно сказать и относительно (170). Осталось проверить лишь обратный характер их. Если мы положим

$$\gamma_{p_1\ldots p_\nu} = x^{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu} \quad \text{и} \quad \gamma^*_{p_1\ldots p_\nu} = x^{p_1+\cdots+p_\nu+\nu}\alpha^{*(0)}_{p_1\ldots p_\nu},$$

то для доказательства требуемого результата надо проверить равенство

$$\sum_{\mu=0}^{\nu}\gamma^*_{p_1\ldots p_\mu}\gamma_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu} = 0,$$

которое непосредственно приводится к равенству (125). Коэффициенты рядов (169) и (170) имеют оценку типа (171). И (169) и (170), представимые равномерно сходящимися рядами в упомянутом выше кольце, должны разлагаться в ряды Лорана

$$\overline{Z}(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_p x^p \qquad \overline{Z}(x)^{-1} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A^*_p x^p, \tag{172}$$

где

$$A_p = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(0)}\frac{\overline{Z}(x)}{x^{p+1}}\,dx; \qquad A^*_p = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(0)}\frac{\overline{Z}(x)^{-1}}{x^{p+1}}\,dx.$$

Подставляя под знак интегралов вместо $\overline{Z}(x)$ и $\overline{Z}(x)^{-1}$ их выражения и производя почленную интеграцию, получим для коэффициентов A_p и A^*_p представления в виде рядов композиций с оценкой коэффициентов типа (171):

$$A_0 = I, \tag{173¹}$$

ибо

$$\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu} = 0$$

при

$$p_1 + \ldots + p_\nu + \nu = 0$$

и

$$A_p = \sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty} T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\beta^{(p)}_{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}. \tag{173²}$$

Точно также для коэффициентов A^*_p:

$$A^*_0 = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty} T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\beta^{(0)}_{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{*(0)}_{p_1\ldots p_\nu}. \tag{174¹}$$

$$A^*_p = \sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty} T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\beta^{(p)}_{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{*(0)}_{p_1\ldots p_\nu}. \tag{174²}$$

По самому определению матрицы $\overline{Z}(x)$:

$$\overline{Y}(b\,|\,x) = \overline{Z}(b)^{-1}\,\overline{Z}(x). \tag{175}$$

Построим систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет матрица $\overline{Y}(b\,|\,x)$, и затем сделаем то же для $\overline{Z}(x)$. Дифференцируя равенство

$$\overline{Y}(b\,|\,x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} Y(b\,|\,x),$$

получим

$$\frac{d\overline{Y}(b\,|\,x)}{dx} = \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)}\frac{dY(b\,|\,x)}{dx} - \frac{1}{x}W(b)\left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} Y(b\,|\,x)$$

или

$$\frac{d\overline{Y}(b\,|\,x)}{dx} = \overline{Y}(b\,|\,x)\sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p - \frac{1}{x}W(b)\,\overline{Y}(b\,|\,x). \tag{176}$$

Подставляя вместо $\overline{Y}(b\,|\,x)$ его выражение (175) и умножая обе части слева на $\overline{Z}(b)$, получим дифференциальное уравнение для $\overline{Z}(x)$

$$\frac{d\overline{Z}(x)}{dx} = \overline{Z}(x)\sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p - \frac{1}{x}\overline{Z}(b)\,W(b)\,\overline{Z}(b)^{-1}\overline{Z}(x). \tag{177}$$

Это уравнение по виду совпадает с (176), и роль матрицы $W(b)$ играет в данном случае матрица

$$H = \overline{Z}(b)\,W(b)\,\overline{Z}(b)^{-1}, \tag{178}$$

причем из уравнения (177) следует, что она не зависит от b.

Аналогия уравнений (176) и (177) приводит нас к тому, что матрица

$$Z(x) = x^H\,\overline{Z}(x). \tag{179_1}$$

должна удовлетворять системе (1). Действительно, подставляя в уравнение (177)

$$\overline{Z}(x) = x^{-H} Z(x)$$

и принимая во внимание (178), получим

$$-\frac{1}{x}Hx^{-H}Z(x) + x^{-H}\frac{dZ(x)}{dx} = x^{-H}Z(x)\sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p - \frac{1}{x}Hx^{-H}Z(x),$$

откуда

$$\frac{dZ(x)}{dx} = Z(x)\sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p.$$

Матрица $Z(x)$, определяемая формулой (179), может быть очевидно представлена в виде ряда композиций системы матриц T_p с коэффициентами, имеющими оценку типа (171). Мы покажем сейчас, что это разложение совпадает с разложением (166).

Действительно, интегральная матрица $Y(b\,|\,x)$ должна выражаться через интегральную матрицу $Z(x)$ по формуле

$$Y(b\,|\,x) = Z(b)^{-1}\,Z(x)$$

или

$$Y(b\,|\,x) = Z(b)^{-1}x^H\,\overline{Z}(x)$$

что можно записать в виде:

$$Y(b\,|\,x)=Z(b)^{-1}+Z(b)^{-1}\Bigg[\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}x^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\lg^{\nu}x\,H^{\nu}+$$

$$+\sum_{\nu=}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\lg^{\nu}x\,H^{\nu}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}x^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}\,.\Bigg] \tag{180}$$

Матрица H, определяемая по формуле (178), разлагается очевидно в ряд композиций по системе матриц T_p, причем коэффициенты имеют оценку типа (171). В дальнейшем мы дадим явное выражение этих рядов. Заметим теперь, что коэффициенты всех членов, стоящих в квадратных скобках формулы (170), содержат в силу условия $\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}=0$ при $p_1+\ldots+p_\nu+\nu=0$ некоторую степень либо x, либо $\lg x$. Поэтому коэффициенты разложеиия $Z(b)^{-1}$ совпадают с теми слагаемыми в коэффициентах разложения $Y(b\,|\,x)$, которые свободны от x и $\lg x$. Мы получаем таким образом для $Z(x)^{-1}$ ряд композиций (167). Непосредственной проверкой убеждаемся, что ряд (166) дает матрицу, обратную матрице (167).

Определим теперь вид рядов композиций для множителя многозначности x^H и целых положительных степеней матрицы H. Перепишем для этого формулу (179) в виде

$$Z(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\lg^{\nu}x\,H^{\nu}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\lg^{\nu}x\,H^{\nu}\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}x^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}\,.$$

В силу того же условия $\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}=0$ при $p_1+\ldots+p_\nu+\nu=0$ все коэффициенты разложения второго множителя содержат некоторую степень x, и, следовательно, эта формула показывает, что коэффициенты разложения x^H могут быть получены из коэффициентов разложения $Z(x)$ отбрасыванием членов, содержащих степени x. Отсюда получаем:

$$x^H=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\beta^{(0)}_{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=1}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}\lg^{\mu}x=$$

$$=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\lg^{\nu}x\,H^{\nu}. \tag{181}$$

Средняя часть этого равенства представляет собой разложение правой его части в ряд композиций по матрицам T_p. Сравнив коэффициенты при $\lg kx$ в обеих частях, имеем:

$$\frac{1}{k!}H^k=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\beta^{(0)}_{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{(k)}_{p_1\ldots p_\nu}. \tag{182}$$

Введем интегральную подстановку G, которую интегральная матрица (x) получает слева при обходе точкой x начала координат в положитель-

ном направлении. Из формулы (160) и однозначности матрицы $\overline{Z}(x)$ следует, что при всяком k

$$G^k=e^{2\pi ikH}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(2k\pi i)^{\nu}H^{\nu}.$$

Сравнивая с (181), видим, что разложение G^k получится из него заменой $\lg x$ на $2k\pi i$, т. е.

$$G^k=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\beta^{(0)}_{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}(2k\pi i)^{\mu}. \tag{183}$$

Определим, наконец, разложение в ряд композиций матрицы x^{-H} — обратной матрице x^H.

Согласно формуле (179) мы можем написать

$$x^{-H}=\overline{Z}(x)\,Z(x)^{-1}$$

и, пользуясь равенствами (167), (169) и теоремой об умножеиии рядов композиций, получим

$$X^{-H}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}x^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}\sum_{k=0}^{\nu-\mu}\alpha^{*(k)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}\lg^k x.$$

С другой стороны, из формулы

$$X^{-H}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\lg^{\nu}x\,H^{\nu}$$

следует, что разложение X^{-H} не должно содержать степеней так, что предыдущую формулу можно переписать в виде:

$$X^{-H}=I+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\beta^{(0)}_{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\sum_{k=1}^{\nu-\mu}\alpha^{*(k)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}\lg^k x. \tag{184}$$

Все предыдущие рассуждения приводят нас к следующей теореме:

Теорема XIX. *Если система матриц T_p принадлежит достаточно малой окрестности нулевых матриц, определяеной неравенством (142), то система дифференциальных уравнений (120) имеет примитивную интегральную матрицу*

$$Z(x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}x^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}\lg^{\mu}x, \tag{185}$$

причем произвольные коэффициенты $\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}$ при $p_1+\ldots+p_\nu+\nu$ считаются равными нулю. Эта матрица может быть разложена на многозначный показательный множитель X^H и однозначный множитель $\overline{Z}(x)$:

$$Z(x)=x^H\overline{Z}(x),$$

для которых имеют место формулы

$$\overline{Z}(x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}x^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_p}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}A_p x^p \tag{186}$$

$$A_0=I;\quad A_p=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\beta^{(p)}_{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu} \tag{187}$$

$$X^H = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} \beta^{(0)}_{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \cdot \sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha^{(\mu)}_{p_1 \dots p_\nu} \lg^\mu x. \quad (188)$$

$$H^k = k! \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} \beta^{(0)}_{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \alpha^{(k)}_{p_1 \dots p_\nu} \quad (189)$$

$$k = 1, 2 \dots$$

Для любых целых степеней интегральной подстановки матрицы $Z(x)$ имеет место разложение

$$G^k = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} \beta^{(0)}_{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \alpha^{(\mu)}_{p_1 \dots p_\nu} (2\pi k i)^\mu \quad (190)$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Обратные матрицы определяются по формулам

$$Z(x)^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} x^{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{*(0)}_{p_1 \dots p_\nu} \lg^\mu x \quad (191)$$

$$\overline{Z}(x)^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} x^{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \alpha^{*(0)}_{p_1 \dots p_\nu} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A^*_p x^p \quad (192)$$

$$A^*_0 = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} \beta^{(0)}_{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \alpha^{*(0)}_{p_1 \dots p_\nu};$$

$$A^*_p = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} \beta^{(p)}_{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \alpha^{*(0)}_{p_1 \dots p_\nu}. \quad (193)$$

$$x^{-H} = I +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 + \dots + p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} \beta^{(0)}_{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \alpha^{(0)}_{p_1 \dots p_\mu} \sum_{k=0}^{\nu-\mu} \alpha^{*(k)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu} \lg^k x. \quad (194)$$

Для всех значений x, принадлежащих $\mathfrak{B}$, написанные разложения — равномерно голоморфные функции системы матриц T_p в указанной области.

Вернемся теперь к определению коэффициентов в разложениях (159) и (160). Пользуясь равенством (1), можем написать:

$$W(b) = \overline{Z}(b)^{-1} H \overline{Z}(b),$$

откуда

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} = Z(b)^{-1} \left(\frac{x}{b}\right)^H \overline{Z}(b).$$

Из формулы (188) непосредственно следует

$$\left(\frac{x}{b}\right)^H = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} \beta^{(0)}_{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha^{(\mu)}_{p_1 \dots p_\nu} \lg^\mu \frac{x}{b}. \quad (195)$$

Применяя формулы (186), (191), (195) и правило перемножения рядов, получим:

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} = I +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 + \dots + p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} b^{p_1 + \dots + p_\lambda + \lambda} \alpha^{*(0)}_{p_1 \dots p_\lambda} \beta^{(0)}_{p_{\lambda+1} + \dots + p_\mu + \mu - \lambda} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\mu-\lambda} \alpha^{(k)}_{p_{\lambda+1} \dots p_\mu} \lg^k \left(\frac{x}{b}\right) - b^{p_{\mu+1} + \dots + p_\nu + \nu - \mu} \alpha^{(0)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu},$$

или, так как $\beta_{p_{\lambda+1} + \dots + p_\mu + \mu - \lambda}$ отлично от нуля только тогда, когда $p_{\lambda+1} + \dots + p_\mu + \mu - \lambda = 0$, можем написать

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} b^{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \beta^{(0)}_{p_{\lambda+1} + \dots + p_\mu + \mu - \lambda} \alpha^{*(0)}_{p_1 \dots p_\lambda} \sum_{k=1}^{\mu-\lambda} \alpha^{(k)}_{p_{\lambda+1} \dots p_\mu} \lg^k \left(\frac{x}{b}\right) \alpha^{(0)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu}. \quad (196)$$

Переписав левую часть в виде

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \lg^\nu \left(\frac{x}{b}\right) W(b)^\nu$$

и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях $\lg \frac{x}{b}$, получим, как мы делали это раньше для H^k, формулы

$$\frac{1}{k!} W(b)^k = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} b^{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \beta^{(0)}_{p_{\lambda+1} + \dots + p_\mu + \mu - \lambda} \times$$

$$\times \alpha^{*(0)}_{p_1 \dots p_\lambda} \alpha^{(k)}_{p_{\lambda+1} \dots p_\mu} \alpha^{(0)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu}. \quad (197)$$

Мы получим таким образом добавление к теореме XIX: для множителя, определяющего многозначность нормальной матрицы и для целых положительных степеней показательной подстановки этой матрицы имеют место разложения (196) и (197).

Сделаем в заключение настоящего параграфа одно замечание по поводу предыдущего доказательства. Исследуя матрицы (169) и (170), мы пришли к уравнению (175); затем, исходя из дифференциального уравнения для $\overline{Z}(x)$, мы построили матрицу H, определяемую уравнением (178), и пришли к примитивной интегральной матрице, определяемой (179). Можно поступать иначе. Построив матрицы (169) и (170) и получив уравнение (175), мы естественно приходим к предположению, что матрица $\overline{Z}(x)$ есть однозначная компонента некоторой интегральной матрицы $Z(x)$, и ищем эту матрицу в виде

$$Z(x) = x^H \overline{Z}(x), \quad (198)$$

где H — искомая матрица. Нормальная интегральная матрица $Y(b \mid x)$ должна выражаться через $Z(x)$ по формуле

$$Y(b \mid x) = Z(b)^{-1} Z(x) = \overline{Z}(b)^{-1} \left(\frac{x}{b}\right)^H \overline{Z}(x).$$

С другой стороны, мы имеем:

$$Y(b \mid x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} \overline{Y}(b \mid x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} \overline{Z}(b)^{-1} \overline{Z}(x).$$

После сравнения обоих последних выражений для $Y(b \mid x)$ будем иметь

$$\overline{Z}(b)^{-1} \left(\frac{x}{b}\right)^H = \left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} \overline{Z}(b)^{-1}$$

или

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{H}=\overline{Z}(b)\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)}\overline{Z}(b)^{-1}=\left(\frac{x}{b}\right)^{\overline{Z}(x)\,W(b)\,\overline{Z}(b)^{-1}}$$

и из этого равенства, которое должно быть выполнено при любых x, непосредственно следует:

$$H=\overline{Z}(b)\,W(b)\,Z(b)^{-1}.$$

Из предыдущих вычислений вытекает, что при таком определении H формула (198) действительно дает интегральную матрицу системы (120). Дальнейшие вычисления могут быть проделаны так же, как и раньше.

Ответственный редактор Е. В. Пулькина. Технический редактор Р. В. Эмдина.
Сдана в набор 23/I 1934 г. Бум. листов 4½. Подписана к печати 12/VI 1934 г.
Формат 72 × 110¹/₁₆. ГТТИ № 203. Тип. зн. в 1 бум. л. 131.776.
Ленгорлит № 14171. Тираж 2000 — авт. л. 9,09. Заказ № 2151.

2-я типография ОНТИ имени Евгении Соколовой. Ленинград, просп. Красных Командиров, 29.